



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CURVAS AUTOCONTRACTANTES Y  $\lambda$ -CURVAS:  
RECTIFICABILIDAD Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN GABRIEL TAPIA GARCÍA

PROFESOR GUÍA:  
ARIS DANIILIDIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RAFAEL CORREA FONTECILLA  
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA  
FETHI MAHMOUDI

SANTIAGO DE CHILE  
2017



RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: SEBASTIÁN GABRIEL TAPIA GARCÍA  
FECHA: 2017  
PROF. GUÍA: ARIS DANILIDIS

CURVAS AUTOCONTRACTANTES Y  $\lambda$ -CURVAS:  
RECTIFICABILIDAD Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO

Las curvas autocontractantes (ver definición 1.2) han sido extensamente estudiadas debido a su relación con sistemas dinámicos de tipo gradiente y sus aplicaciones tanto en algoritmos de optimización de tipo descenso (Convergencia del algoritmo Proximal), como de soluciones a encontrar curvas que sean perpendiculares a foliaciones convexas del espacio (ver [4], [2]). También, de manera independiente, en la década del 90 los matemáticos Manselli y Pucci trabajaron en estudiar el largo de ciertas curvas, que a posteriori, corresponden exactamente a las curvas autocontractantes salvo porque estén revertidas en orientación y supuestas rectificables de antemano (ver [8]).

La rectificabilidad en curvas irregulares resulta ser un problema complicado dado que no hay una caracterización de esta propiedad salvo hipótesis fuertes, como del estilo que sean diferenciables, o bien, que posean curvatura finita (ver [13], Capítulo 5). Este trabajo está enfocado en extender lo más posible una técnica que prueba rectificabilidad (en un sentido que quedará claro en el capítulo 2), para el caso de las  $\lambda$ -curvas, que a saber, son curvas en un espacio métrico  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$ , tales que para  $t_1, t_2, t_3 \in I$ , con  $t_1 < t_2 < t_3$ , satisfacen:

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq d(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) + \lambda d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)).$$

Se puede apreciar que una curva autocontractante con orientación invertida corresponde al caso  $\lambda = 0$ , por lo tanto la clase de  $\lambda$ -curvas es más amplia y su estudio contiene lo anterior mencionado.

También, se presentan propiedades geométricas de las  $\lambda$ -curvas y su estrecha relación con curvas autocontractantes definidas en espacios de Banach de dimensión infinita. En esta misma línea, se muestran 2 ejemplos para probar que las curvas autocontractantes definidas sobre espacios de Banach, contenidas en un compacto, no tienen por qué ser rectificables, ni si quiera localmente rectificables.



*"Yo, que soy ignorante de tantas cosas,  
sé que ignoro una más..."  
Jorge Luis Borges*



# Agradecimientos

El mérito de este trabajo está basado en una cantidad de personas que dudo que pueda colocarlas en esta página, pero haré el intento de dejar a la menor cantidad afuera.

Primero me gustaría agradecer a mi familia, por ser un apoyo fundamental en todo este proceso y de seguro que los mayores oyentes de las incoherencias que a veces me gusta decir. Agradezco a mi papá y mamá por estar siempre cuando lo necesité y darme todas las facilidades para que casi mi única responsabilidad sean los estudios. A mi abuelita por todo el cariño incondicional entregado desde que nací. La Mary, la Ruby y el Mario, por estar presente en todos los ámbitos de mi vida de manera desinteresada. Finalmente, a las dos personas que sin duda han sido pilares fundamentales de mi vida, mis hermanos, Belén y Juan Francisco, los grandes responsables de quien soy en este momento, y al Loyd.

A mis amigos de la infancia, Matías y Jean Pierre, por ser constantes siendo que sé cuanto los aburro con mis charlas sobre matemáticas. A Sebastián y Katherine por soportarme y no dejar perder el contacto siendo que los años van pasando, ya que ellos son de lo mejor de mis tiempos como escolar. A Gastón por tanto teatro y buenas pláticas. A mis amigos de basquet del parque Inés de Suarez, al grupo "curiosillos" que reunió amigos de distintas épocas: Andrés, Caterina, David, Felipes, Patricia, Rodrigo, y también, a los miembros del de club ICO de Go.

A los todos los profesores que he tenido, pero en particular a la srta. Matilde, quien me enseñó el placer del autoaprendizaje, al profesor Correa y a David quienes me dieron la oportunidad de viajar hace 2 años para dedicarme un verano completo a trabajar en matemáticas en Montpellier. Finalmente al profesor Daniilidis, quien siempre está atento a mis intereses matemáticos y por ser un buen consejero y guía.

Por supuesto, también agradecer al DIM y toda su comunidad, lugar de venturas y desventuras, de alegrías y tristezas. Creo que con la mayoría tuve la oportunidad de conversar sobre matemáticas pero no así de hablar de la vida, aunque bien ambas conversaciones me gustan de igual manera. Con los que empezó este desafío: Camila, Diego, Juan Pablo y Valentina y todos los que fui conociendo después Abner, Andrés, Benjamín, Camila, Carlos, Christopher, Edgardo, Francisco, Gonzalo, Javiera, Martín, Paul, Ricardo, Roberto, Sebastián Urzúa, entre tantos que en este momento podría nombrar, el equipo de basquet del DIM, que lo dimos todo ese 2015 sorprendiendo a quienes nos veían jugar, sólo por dar un ejemplo. Todos hicieron que el paso por la carrera fuera más ameno.

Gracias.



# Tabla de Contenido

<b>Tabla de Contenido</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Curvas Autocontractantes</b>	<b>3</b>
1.1. Sistemas de Tipo Gradiente . . . . .	3
1.2. Técnica de Manselli y Pucci . . . . .	5
<b>2. <math>\lambda</math>-curvas en <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>9</b>
2.1. Propiedades de las $\lambda$ -curvas. . . . .	10
2.2. Rectificabilidad . . . . .	13
2.3. Rectificabilidad en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	23
<b>3. <math>\lambda</math>-curvas en Variedades Riemannianas</b>	<b>27</b>
3.1. Notación . . . . .	27
3.2. Rectificabilidad . . . . .	28
<b>4. <math>\lambda</math>-curvas Discontinuas en Variedades Riemannianas</b>	<b>39</b>
4.1. Rectificabilidad . . . . .	40
<b>5. Curvas Autocontractantes en Espacios de Banach</b>	<b>48</b>
5.1. Ejemplo de Curva Autocontractante en $\ell^1(\mathbb{N})$ no Rectificable . . . . .	49
5.2. Ejemplo de Curva Autocontractante no Localmente Rectificable . . . . .	50
<b>Conclusión</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
<b>A. Anexo</b>	<b>57</b>
A.1. Espacios Lipschitz Libres . . . . .	57



# Introducción

Las curvas autocontractantes presentan gran interés dada su relación con sistemas dinámicos de tipo gradiente y sus aplicaciones a diferentes algoritmos de descenso (por ejemplo, convergencia del algoritmo proximal) y otros procesos (para ejemplos ver [2]).

Esta memoria se enfoca en el problema de rectificabilidad, es decir, estimar el largo de una curva. Esta propiedad lamentablemente no posee una técnica general para su desarrollo, salvo hipótesis bastante restrictivas, como diferenciabilidad cuando la curva se define sobre  $\mathbb{R}^d$ , por ejemplo.

El estudio de la rectificabilidad de las curvas autocontractantes parte con el trabajo de Daniilidis, Ley y Sabourau en el que se estudia el caso planar, es decir, curvas definidas sobre  $\mathbb{R}^2$  (ver [4]). Dado que la técnica presentada en este trabajo, a priori, no es replicable para mayores dimensiones, no será parte del capítulo 1 de esta memoria, dedicado a presentar algunas ideas de trabajos previos.

De manera independiente, Manselli y Pucci, consideraron una clase de curvas absolutamente continuas (por lo tanto, rectificables) que, a posteriori, están relacionadas con las curvas autocontractantes (ver [8]). Daniilidis, David, Durand y Lemenant, extendieron la técnica de Manselli y Pucci para así demostrar la rectificabilidad de curvas autocontractantes sin ninguna hipótesis adicional, incluyendo curvas discontinuas (ver [2]).

Esta memoria está organizada del siguiente modo: el capítulo 1 es una introducción a las curvas autocontractantes y un bosquejo del trabajo realizado por Manselli y Pucci (ver [8]) y Daniilidis, David, Durand y Lemenant (ver [2]). El capítulo 2 comienza con la definición de las  $\lambda$ -curvas y desarrolla propiedades geométricas entorno a estas y su relación con las curvas autocontractantes en espacios de dimensión infinita, para finalizar con una demostración de rectificabilidad, técnica que es una extensión del trabajo de Daniilidis et al en para el caso cuando están definidas en  $\mathbb{R}^d$  (ver [3]). El capítulo 3 consiste desarrollar la técnica para el caso en que las curvas estén definidas sobre variedades Riemannianas, mientras que el capítulo 4, en gran parte es una colección de lemas técnicos que nos permiten replicar la técnica del capítulo anterior, pero ahora sobre  $\lambda$ -curvas que no son necesariamente continuas.

El capítulo 5 es distinto al resto, este está motivado por el trabajo de Stepanov y Tepitskaya en el que prueban que para todo espacio de Banach de dimensión finita las curvas autocontractantes acotadas tienen largo finito (ver [12]). En dicho capítulo se presentan dos ejemplos que muestran la imposibilidad de extender este resultado a espacios de Banach de dimensión infinita separables generales, pero deja aún abierta la puerta para el caso Hilbert.



# Capítulo 1

## Curvas Autocontractantes

El propósito del siguiente capítulo es presentar las curvas autocontractantes y su relación con los sistemas dinámicos de tipo gradiente. Además, dar a conocer las ideas generales del trabajo de Manselli y Pucci que otorgaron para definir las curvas autoexpandibles y dar un bosquejo de la técnica que ellos implementaron (ver [8]). Si bien en este artículo, [8], se trabajó sobre curvas ya rectificables, contiene una técnica que sirve para probar la rectificabilidad, asumiendo que las curvas están contenidas en un compacto de  $\mathbb{R}^d$ , tal como fue demostrado por Daniilidis et al en [2].

Durante este capítulo,  $\mathbb{R}^d$  denotará al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión  $d$  dotado de la norma euclidiana, mientras que a su norma por  $|\cdot|$ .

### 1.1. Sistemas de Tipo Gradiente

Para comenzar, se dará la definición de curva definida sobre un espacio topológico  $T$ .

**Definición 1.1** *Una curva es una función continua  $\gamma : I \rightarrow T$ , con  $I$  un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$  y  $T$  un espacio topológico.*

**Observación** En algunas referencias (ver [13], por ejemplo) las curvas corresponden a subconjuntos del espacio topológico que son imágenes de una función continua definidas sobre un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$ , en nuestro caso  $\gamma(I)$ , y a la función misma se le denomina parametrización. Se ha decidido adoptar esta definición de curva para simplificar la lectura y no sobrecargar la notación.

**Definición 1.2** *(Curva Autocontractante) Sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua. Se dice que es una curva autocontractante si para todo  $t_1, t_2$  y  $t_3 \in I$  tales que  $t_1 < t_2 < t_3$  se satisface:*

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_3)| \geq |\gamma(t_2) - \gamma(t_3)|,$$

es decir, que la función  $t \rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_3)|$  es decreciente para  $t \in I \cap (-\infty, t_3)$ .

**Observación** Tal como se ve en la definición, en un principio se podría omitir la continuidad, o bien la estructura de espacio vectorial (sólo es necesaria la de espacio métrico), aunque veremos más adelante que una desigualdad de este tipo si implica continuidad en todos salvo una cantidad numerable de puntos.

A continuación, se procede a definir las funciones quasi-convexas, para luego, probar que las curvas que se generan de los sistemas tipo gradiente con potenciales quasi-convexos son autocontractantes.

**Definición 1.3** (*Función Quasi-convexa*) Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice quasi-convexa si para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que el conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$  es convexo.

**Proposición 1.4** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función quasi-convexa de clase  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Sea  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

entonces  $x$  es una curva autocontractante.

DEMOSTRACIÓN. Si la imagen de  $x$  fuese sólo un punto (caso que ocurre sólo si  $\nabla f(x_0) = 0$ ) entonces no habría nada que probar, por lo que se asumirá que no. Sea  $b \in I$ , se probará que la función  $g(t) := |x(t) - x(b)|^2/2$  es decreciente cuando  $t$  es menor que  $b$ .

Dado que la función  $|\cdot|^2$  es derivable se deduce que la función  $g$  es derivable, y más aún:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \langle \dot{x}(t), x(t) - x(b) \rangle \\ &= -\langle \nabla f(x(t)), x(t) - x(b) \rangle. \end{aligned}$$

Recordando que  $\nabla f(x(t))$  es una dirección normal al conjunto de nivel:

$$\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x(t))\},$$

que es convexo y contiene a  $x(b)$ , se puede deducir que la derivada anterior es menor o igual que 0 y, por tanto,  $g$  es una función decreciente. □

**Observación** Gracias a la proposición 1.4, se puede ver la estrecha relación que hay entre las curvas autocontractantes y los sistemas dinámicos continuos, lo que motiva a usar nomenclatura del tipo tiempo para un  $\tau \in I$  y velocidad para la derivada  $\dot{\gamma}$ . Esta notación también será llevada al caso de las  $\lambda$ -curvas en los capítulos siguientes.

Para abordar el problema central en el que se desenvuelve esta memoria, se definirán los conceptos de largo de curva y rectificabilidad. Para una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , si  $J \subseteq I$ , se llamará  $\gamma|_J$  a la restricción de  $\gamma$  a dominio  $J$ .

**Definición 1.5** (*Largo de curva*) Sea  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  una curva. Se denotará su largo de curva por  $\ell(\gamma)$ , que corresponde al valor:

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \right\},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , y cuando  $I$  no es un intervalo compacto, el largo se definirá por:

$$\ell(\gamma) := \sup \{ \ell(\gamma|_{[a,b]}) : [a, b] \subseteq I \}.$$

Además, se dirá que  $\gamma$  es rectificable cuando  $\ell(\gamma) < \infty$ .

Por último, para cerrar esta sección, una de las características de las curvas rectificables es que se pueden parametrizar por largo de curva, esto es, que existe una función continua  $\gamma_1 : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^d$  con la misma imagen que  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que:

$$\ell(\gamma_1|_{[a,b]}) = b - a, \text{ con } [a, b] \subseteq I,$$

por lo que son funciones lipschitz, a lo que podemos usar el siguiente resultado:

**Teorema 1.6** (*Teorema de Rademacher, ver [11]*) Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipschitz con  $U$  abierto no vacío, entonces  $f$  es diferenciable c.t.p.

**Corolario 1.7** *Toda curva rectificable es derivable c.t.p.*

## 1.2. Técnica de Manselli y Pucci

A continuación, se procederá a explicar las ideas del trabajo de Manselli y Pucci (ver [8]), que utilizaron para probar que las curvas autocontractantes rectificables tienen su largo acotado por una constante que depende de forma creciente de la dimensión del espacio y de la anchura media de un compacto en el que está contenida, noción que será definida luego.

Lo fundamental del trabajo de Manselli es la relación entre el desplazamiento de la curva y el área que va abarcando la envoltura convexa esta misma, técnica que será explicada y utilizada en los capítulos siguientes.

En este trabajo ([8]), se consideró la familia de curvas  $\Gamma$ , donde  $\gamma \in \Gamma$  si es una curva rectificable y lipschitz, tal que para todo tiempo  $t \in I$  donde la derivada  $\dot{\gamma}(t)$  exista, esta satisface:

$$\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(s) - \gamma(t) \rangle \leq 0, \forall s \in I, s < t.$$

Gracias a que en la familia  $\Gamma$  las curvas son rectificables, estas pueden ser consideradas parametrizadas por longitud de curva, lo que nos dirá que son 1-lipschitz y, por tanto, derivables c.t.p. (gracias al teorema de Radamacher). En la siguiente proposición se verá la relación que existe entre las curvas pertenecientes a  $\Gamma$  y las curvas autocontractantes.

Dada una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , se define el conjunto  $I^- := \{-t : t \in I\}$  y la curva  $\gamma^- : I^- \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\gamma^-(t) := \gamma(-t)$ .

**Proposición 1.8** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una curva Lipschitz. Entonces  $\gamma$  es autocontractante si y solamente si  $\gamma^- \in \Gamma$ .*

DEMOSTRACIÓN. Considérese que  $\gamma$  es autocontractante. Se tiene así que para  $u \in I$ , la función:

$$f_u : t \rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(u)\|^2/2$$

es decreciente cuando  $t < u$ . Luego, para todo punto  $t \in I$  tal que  $\gamma$  es derivable, se tiene que  $f_u$  es derivable y por lo tanto:

$$0 \geq f'_u(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - \gamma(u) \rangle, \text{ para } t, u \in I, t < u \text{ } \mathcal{L}^1 - \text{c.t.p.},$$

donde  $\mathcal{L}^1$  es la medida de Lebesgue sobre  $\mathbb{R}$ . Por último, al notar que  $\dot{\gamma}^-(-t) := -\dot{\gamma}(t)$ , se concluye la necesidad.

Para la suficiencia, considérese que  $\gamma^- \in \Gamma$ . Al revertir la orientación, queda que  $\gamma$  satisface que para todo  $t$  donde su derivada  $\dot{\gamma}(t)$  exista:

$$0 \geq \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) - \gamma(u) \rangle, \forall t < u.$$

Así, al fijar  $u \in I$  y considerar la misma función  $f$ , se prueba que:

$$f'(t) \leq 0, \forall t \in I, t < u \text{ } \mathcal{L}^1 - \text{c.t.p.},$$

Con esto, gracias a que  $f$  es localmente lipschitz, se concluye que  $\gamma$  es autocontractante.  $\square$

Con la proposición anterior, es natural definir el siguiente conjunto de curvas que, a priori, es más grande que  $\Gamma$ . Además, es una extensión a la definición dada por Daniilidis et al en [2].

**Definición 1.9** *(Curvas autoexpandibles) Una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  se dirá autoexpandible si para todo  $t_1, t_2, t_3 \in I$ , tales que  $t_1 < t_2 < t_3$ , satisfacen:*

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \leq |\gamma(t_3) - \gamma(t_1)|.$$

*Es decir  $\gamma$  es autoexpandible si y sólo si  $\gamma^-$  es autocontractante.*

Para seguir en la línea de Manselli, el conjunto  $\Gamma$  corresponde exactamente a las curvas autoexpandibles rectificables. Para continuar se definirá la función anchura media, función que juega un rol fundamental en la demostración del teorema que nos da la cota uniforme de la longitud de curva por parte de Manselli y Pucci en [8] y la rectificabilidad por parte de Daniilidis et al en [2].

Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  y  $v \in \mathcal{S}^{d-1}$ . El ancho de  $K$  con respecto a la dirección  $v$  corresponderá al valor:

$$W_v(K) := \mathcal{L}^1(\{ \langle v, k \rangle : k \in K \}),$$

donde  $\mathcal{L}^1$  corresponde a la medida de lebesgue en  $\mathbb{R}$ . Si  $K$  es convexo y compacto, entonces el valor  $W_v(K)$  se puede definir como el diámetro de  $\{ \langle v, k \rangle : k \in K \}$ .

La anchura media de  $K$  será el promedio del ancho en todas las direcciones de  $\mathcal{S}^{d-1}$ , o equivalentemente:

$$W(K) := c \int_{v \in \mathcal{S}^{d-1}} W_v(K) d\mathcal{H}^{d-1}(v),$$

donde  $\mathcal{H}^{d-1}(v)$  corresponde a la medida de Hausdorff  $d - 1$ -dimensional y  $c := c(d)$  una constante tal que  $W(\mathcal{S}^{d-1}) = 1$ .

El teorema principal del artículo de Manselli-Pucci corresponde a:

**Teorema 1.10** (ver [8, IX]) *Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  compacto convexo y  $\gamma \in \Gamma$  una curva contenida en  $K$ , entonces existe una constante  $c_d$  dependiente solamente de la dimensión tal que:*

$$\ell(\gamma) \leq c_d W(K).$$

Si bien, dado que  $\gamma \in \Gamma$  implica la rectificabilidad de la curva, la técnica fue comprendida y replicada por Daniilidis, David, Durand y Lemenant en [2, Teorema 3.3], donde se elimina la hipótesis de rectificabilidad y esta pasa a ser parte de las conclusiones:

**Teorema 1.11** (ver [2, Teorema 3.3]) *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una curva autocontractante. Entonces existe una constante  $c_d$  (que sólo depende de la dimensión) tal que:*

$$\ell(\gamma) \leq c_d W(K),$$

donde  $K := \overline{\text{co}}(\gamma(I))$ . En particular, las curvas autocontractantes acotadas son rectificables.

Ambos teoremas pasan por demostrar un resultado de similares características, que relaciona el avance de la curva y el cambio sustancial en la anchura del menor conjunto convexo compacto que contiene a la cola de esta misma.

Para  $t \in I$  y  $x = \gamma(t)$ , se denotará al conjunto  $\Omega(x) := \overline{\text{co}}(\{ \gamma(s) \in \mathbb{R}^d : s \in I, s \geq t \})$ .

**Lema 1.12** *Para demostrar el teorema 1.11, es suficiente encontrar un  $\varepsilon := \varepsilon(d)$ , que depende sólo de la dimensión, tal que para todo  $x_1 = \gamma(t_1)$ ,  $x_2 = \gamma(t_2)$ , con  $t_1 < t_2$  se cumpla:*

$$W(\Omega(x_2)) + \varepsilon |x_1 - x_2| \leq W(\Omega(x_1))$$

DEMOSTRACIÓN. Considérese una secuencia de tiempos  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  en  $I$  y fíjese  $x_i = \gamma(t_i)$ . Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} W(\Omega(x_i)) - W(\Omega(x_{i+1})), \\
&= \frac{1}{\varepsilon} (W(\Omega(x_0)) - W(\Omega(x_n))) \leq \frac{1}{\varepsilon} W(\Omega x_0) \leq \frac{1}{\varepsilon} W(K).
\end{aligned}$$

En lo anterior, se utiliza que la función  $W$  es creciente considerando el orden parcial de la inclusión ( $\subseteq$ ) de conjuntos. Así el teorema queda probado con  $c_d = 1/\varepsilon$ .  $\square$

# Capítulo 2

## $\lambda$ -curvas en $\mathbb{R}^d$

En el presente capítulo se introduce el objeto principal de estudio de esta memoria, a saber, las  $\lambda$ -curvas. Estas corresponden a una extensión natural de las curvas autoexpandibles y, por tanto, también de las curvas autocontractantes. El capítulo está organizado de la siguiente manera: primero se estudiarán propiedades geométricas de las  $\lambda$ -curvas cuando estas no son necesariamente continuas, luego se caracterizará la rectificabilidad de una  $\lambda$ -curva con la rectificabilidad de una curva autoexpandible en cierto espacio de Banach. Por último, se dará un estudio y extensión de la técnica presentada en [3], para demostrar que las  $\lambda$ -curvas acotadas tienen largo finito para ciertos  $\lambda$ , es decir, la rectificabilidad.

En lo que sigue  $\mathbb{R}^d$  será dotado de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y su norma respectiva  $|\cdot|$ . Además,  $S^{d-1}$  denotará a la frontera de la bola unitaria de  $\mathbb{R}^d$  e  $I$  corresponderá a un subconjunto conexo no vacío de  $\mathbb{R}$ . Se dará la definición de  $\lambda$ -curva y  $\gamma$  siempre denotará una  $\lambda$ -curva, salvo que se señale lo contrario.

**Definición 2.1** ( *$\lambda$ -curva*) Una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  se dice  $\lambda$ -curva con  $\lambda \in [-1, 1)$  si  $\forall t_1, t_2, t_3 \in I$  tales que  $t_1 < t_2 < t_3$  se cumple que:

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq |\gamma(t_1) - \gamma(t_3)| + \lambda |\gamma(t_2) - \gamma(t_3)|. \quad (2.1)$$

**Observación** Cualquier curva continua es una 1-curva, dado que la propiedad consiste exactamente en la desigualdad triangular. También se desprende de la definición, que si  $\gamma$  es una  $\lambda$ -curva, entonces para todo  $\tilde{\lambda} > \lambda$  se tiene que  $\gamma$  es  $\tilde{\lambda}$ -curva.

Por otro lado, si  $\lambda \leq 0$  se obtiene directamente que una  $\lambda$ -curva es autoexpandible, y por tanto, revertiendo la orientación de la parametrización, autocontractante ( $\gamma^-$ , ver capítulo anterior). Por último, una  $\lambda$ -curva con  $\lambda = -1$  corresponde exactamente a una porción de recta.

Del mismo modo que las curvas autocontractantes, como la definición de  $\lambda$ -curva es puramente métrica, estas pueden ser definidas tanto en espacios normados como en espacios métricos abstractos.

## 2.1. Propiedades de las $\lambda$ -curvas.

En esta sección se verán propiedades de las  $\lambda$ -curvas, que dada la observación anterior, también corresponden a propiedades de las curvas autocontractantes cuando  $\lambda \leq 0$ . En los enunciados de las siguientes proposiciones, se omitirá la continuidad de la curva cuando sea posible, es decir, veremos propiedades de funciones  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , tales que satisfacen la desigualdad (2.1) con  $\lambda \in [-1, 1)$ .

**Proposición 2.2** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función tal que satisface (2.1) con  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces para todo  $s, t \in I$  tales que  $s < t$  y  $\gamma(s) = \gamma(t)$ , se cumplirá que  $\gamma$  es constante en el segmento  $[s, t]$  e igual a  $\gamma(s)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $s, t \in I$  tales que  $s < t$  y  $\gamma(s) = \gamma(t)$ . Sea  $\tau \in (s, t)$ , usando la desigualdad (2.1) se deduce que:

$$|\gamma(s) - \gamma(\tau)| \leq \lambda |\gamma(\tau) - \gamma(t)|.$$

Como  $\lambda < 1$ , implica que  $|\gamma(\tau) - \gamma(s)| = 0$ . □

**Observación** Gracias a la proposición 2.2, se puede suponer sin pérdida de generalidad que las  $\lambda$ -curvas son inyectivas, la idea cae en colapsar los intervalos de su dominio  $I$  donde la curva puede ser constante.

**Proposición 2.3** *Sea  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función tal que satisface (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces  $\gamma$  es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que existe una sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$  creciente tal que  $|\gamma(t_n)| > n$  y  $\bar{t} := \lim t_n$ . Por la desigualdad (2.1) se tiene que:

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_n)| \leq |\gamma(t_1) - \gamma(\bar{t})| + \lambda |\gamma(t_n) - \gamma(\bar{t})|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando desigualdad triangular sobre el segundo termino del lado derecho, se concluye que:

$$(1 - \lambda) |\gamma(t_1) - \gamma(t_n)| \leq (1 + \lambda) |\gamma(t_1) - \gamma(\bar{t})|,$$

obteniendo una clara contradicción. Para el caso en que la sucesión sea decreciente, el razonamiento es análogo intercambiando  $t_1$  por  $\bar{t}$ . □

**Proposición 2.4** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función tal que satisface (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces posee límites laterales en todo tiempo  $\tau \in \text{int}(I)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau \in \text{int}(I)$  tal que  $\gamma$  no posee límite lateral izquierdo. Por la proposición 2.3, se sabe que  $\gamma$  es localmente acotada: en efecto, basta considerar  $\varepsilon > 0$  tal que  $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon] \subseteq I$ . Como consecuencia de la compacidad se pueden obtener dos sucesiones

$(t_n)_n$  y  $(s_n)_n$  convergentes por la izquierda a  $\tau$  tales que  $x := \lim \gamma(t_n) \neq y := \lim \gamma(s_n)$ . Sin pérdida de generalidad, las sucesiones pueden ser tomadas de modo que:

$$t_1 < s_1 < t_2 < \dots < t_n < s_n < t_{n+1} < \dots$$

Usando la desigualdad (2.1) con los tiempos  $t_n$ ,  $s_n$ ,  $t_{n+m}$ , tomando límite primero en  $m$  y luego en  $n$  se obtiene:

$$\begin{aligned} |\gamma(t_n) - \gamma(s_n)| &\leq |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n+m})| + \lambda |\gamma(s_n) - \gamma(t_{n+m})| \\ |\gamma(t_n) - \gamma(s_n)| &\leq |\gamma(t_n) - x| + \lambda |\gamma(s_n) - x| \\ |x - y| &\leq |x - x| + \lambda |y - x|, \end{aligned}$$

lo que es a una contradicción. Para los límites laterales derechos es análogo.  $\square$

De esta proposición se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 2.5** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función acotada tal que satisface (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces converge, es decir, los siguientes límites existen:*

$$\lim_{t \searrow \inf I} \gamma(t), \quad \lim_{t \nearrow \sup I} \gamma(t)$$

**Observación** Gracias al corolario 2.5, para cada  $\lambda$ -curva acotada  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ , se puede considerar  $I := [0, T_\infty)$ , donde  $T_\infty \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  y además se puede dar un valor a  $\gamma(T_\infty)$ . En la siguiente sección se entenderá porque es preferible dejar el dominio de  $\gamma$  abierto por la derecha, cuando se demuestre la rectificabilidad de la curva.

**Corolario 2.6** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función tal que satisface (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces posee a lo más numerables discontinuidades.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese que  $\gamma$  posee no numerables discontinuidades. Se define la oscilación de  $\gamma$  en  $\tau \in I$  por  $osc(\tau) := \limsup_{t \rightarrow \tau} |\gamma(\tau) - \gamma(t)|$ . Es sabido que  $\tau$  es punto de continuidad de  $\gamma$  si y sólo si  $osc(\tau) = 0$ . Por la hipótesis, existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $osc^{-1}((1/n, +\infty))$  es no numerable. Así, este conjunto tiene al menos un punto de acumulación en  $I$ , llámese  $\bar{\tau}$  a uno de estos. Esto es una contradicción a la proposición 2.4 en el punto  $\bar{\tau}$ .  $\square$

Por otro lado, con respecto a una visión más topológica de la curva se encuentra el trabajo Nekkinda y Zildunka en [10]. En él, los autores definieron la noción de espacios métricos  $c$ -monótonos, que asociaba a un espacio métrico totalmente ordenado, una desigualdad de carácter métrico muy similar a la de autoexpandible.

**Definición 2.7** (ver [10]) *Sea  $c > 0$ ,  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(\leq)$  un orden total sobre  $X$ . Entonces  $(X, \leq)$  se dice espacio métrico  $c$ -monótono si para todo  $x_1, x_2, x_3 \in X$  tales que  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$  se satisface:*

$$d(x_1, x_2) \leq cd(x_1, x_3).$$

De la definición se nota que las curvas autoexpandibles están íntimamente relacionadas con los espacios métricos 1-monótonos, más aún, veremos que las imágenes de las  $\lambda$ -curvas también corresponden a espacios monótonos.

**Lema 2.8** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función que satisface la desigualdad (2.1) para  $\lambda \in [0, 1)$ . Entonces para  $t_1, t_2, t_3 \in I$  con  $t_1 < t_2 < t_3$ , se cumple:*

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} |\gamma(t_1) - \gamma(t_3)| \quad (2.2)$$

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)| \leq \frac{2}{1 - \lambda} |\gamma(t_1) - \gamma(t_3)| \quad (2.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Considerando la desigualdad triangular:

$$|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)| \leq |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| + |\gamma(t_1) - \gamma(t_3)| \quad (2.4)$$

y sumándola a la desigualdad (2.1) para  $t_1, t_2$  y  $t_3$  se obtiene la desigualdad (2.3), mientras que cuando a la desigualdad (2.4) se la multiplica por  $\lambda$  y se le suma a (2.1) se obtiene (2.2). □

**Corolario 2.9** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función que satisface la desigualdad (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces el espacio métrico  $(\gamma(I), d)$  con la métrica heredada de  $\mathbb{R}^d$  y ordenado por el orden heredado de  $I$  es un  $(1 + \lambda)/(1 - \lambda)$ -monótono.*

Para terminar esta sección, se verá que una  $\lambda$ -curva será rectificable siempre y cuando una curva autoexpandible, definida sobre cierto espacio de Banach, también lo es. La idea será considerar a la  $\lambda$ -curva como espacio métrico, cambiarle la métrica por una equivalente que la convierta en curva autoexpandible e inyectar el espacio obtenido en su espacio libre o de Arens Eells. (ver [14] o Anexo A.1).

**Proposición 2.10** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función tal que satisface la desigualdad (2.1) para  $\lambda \in [-1, 1)$ . Entonces existe una métrica sobre  $\gamma(I)$ , equivalente a la inducida por  $\mathbb{R}^d$ , tal que lo hace un espacio 1-monótono con el orden heredado por  $I$ .*

DEMOSTRACIÓN. Llámese por  $d(\cdot, \cdot)$  a la métrica inducida sobre  $\gamma(I)$  y  $\rho : \gamma(I) \times \gamma(I) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\rho(\gamma(s), \gamma(t)) := \text{diam}([\gamma(s), \gamma(t)]),$$

donde para  $s \leq t$ ,  $[\gamma(s), \gamma(t)] := \{\gamma(z) : z \in [s, t]\}$ , y  $[\gamma(t), \gamma(s)] := [\gamma(s), \gamma(t)]$ .

Es claro  $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \rho(\gamma(s), \gamma(t))$  por lo que se probará la desigualdad restante. Sea  $z_1, z_2 \in [s, t]$  tales que  $z_1 < z_2$ , entonces por la desigualdad triangular y proposición 2.8 se obtiene que:

$$d(\gamma(z_1), \gamma(z_2)) \leq d(\gamma(s), \gamma(z_1)) + d(\gamma(s), \gamma(z_2)) \leq 2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} d(\gamma(s), \gamma(t)),$$

donde tomando supremo sobre  $z_1, z_2$  se concluye que:

$$\rho(\gamma(s), \gamma(t)) \leq 2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} d(\gamma(s), \gamma(t)).$$

Es simple ver que  $\rho$  consiste en una métrica sobre  $\gamma(I)$  y además que para  $t_1, t_2, t_3 \in I$  tales que  $t_1 < t_2 < t_3$  se cumple que:

$$\rho(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq \rho(\gamma(t_1), \gamma(t_3)).$$

□

**Observación** Dado que las métricas  $d$  y  $\rho$  son equivalentes, tenemos que la función identidad  $\text{Id} : (\gamma(I), d) \rightarrow (\gamma(I), \rho)$  es bi-lipschitz. Con esto, se deduce que  $\gamma$  es rectificable para la métrica  $d$  si, y sólo si, es rectificable para la métrica  $\rho$ .

**Corolario 2.11** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una  $\lambda$ -curva. Entonces existe una curva autoexpandible  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X$ , con  $X$  un espacio de Banach, tal que existe una asociación bi-lipschitz entre ambas curvas.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, dada la proposición 2.5 se puede asumir que  $\inf(I) \in I$ . Sea  $(\tilde{\gamma}(I), \rho)$  espacio métrico definido en la proposición 2.10 y sea la función  $\Phi : \tilde{\gamma}(I) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{\gamma}(I))$  isometría a su espacio Lipschitz libre con punto distinguido  $\gamma(\min(I))$  (ver Anexo A.1), usando la función  $\text{Id} : (\gamma(I), d) \rightarrow (\gamma(I), \rho)$  de la observación anterior, se tiene que la función  $\Phi \circ \text{Id}$  es bi-lipschitz a su imagen. □

## 2.2. Rectificabilidad

En esta sección, se probará la rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas acotadas definidas en  $\mathbb{R}^d$ , cuando  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ . Lo principal será comprender y extender la técnica para el caso euclidiano presentada por Daniilidis et al en [3], donde prueba que las curvas autocontractantes acotadas definidas sobre variedades riemannianas son rectificables cuando están contenidas en un compacto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ . Las propiedades de las  $\lambda$ -curvas sobre variedades riemannianas serán el objeto de estudio del siguiente capítulo.

Para comenzar, dado que las  $\lambda$ -curvas no son necesariamente derivables, se ocupará la noción de secantes por la derecha que juega el rol de derivada en los puntos de la curva cuando no es derivable.

**Definición 2.12** *(secante por la derecha (ver [3])) Dada una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $\tau \in I$ , se define el conjunto de las secantes por la derecha en el tiempo  $\tau$  como el siguiente conjunto:*

$$\text{sec}_\gamma^+(\tau) = \left\{ q \in S^{d-1} : \exists (t_n)_n \subset I, t_n \searrow \tau \quad y \quad q = \lim_n \frac{\gamma(t_n) - \gamma(\tau)}{|\gamma(t_n) - \gamma(\tau)|} \right\}$$

**Observación** Por la compacidad de  $S^{d-1}$ , se tiene que para todo tiempo  $\tau \in I$  donde  $\gamma$  no sea localmente constante por la derecha (es decir que no existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma|_{[\tau, \tau+\varepsilon)}$  es constante), el conjunto no es vacío, es decir,  $\text{sec}_\gamma^+(\tau) \neq \emptyset$ . Además, si  $\gamma$  es derivable en  $\tau$  con derivada  $\dot{\gamma}(\tau) \neq 0$ , se tendrá que  $\text{sec}_\gamma^+(\tau) = \{\dot{\gamma}(\tau)/|\dot{\gamma}(\tau)|\}$ .

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que las  $\lambda$ -curvas son inyectivas, gracias a la compacidad de la esfera  $S^{d-1}$  se puede deducir que para una  $\lambda$ -curva,  $\gamma : I = [0, T_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el conjunto  $\text{sec}_\gamma^+(\tau)$  es distinto de vacío para todo  $\tau \in I$ .

Si no hay riesgo de confusión se omitirá el subíndice  $\gamma$  del conjunto de las secantes.

**Proposición 2.13** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que satisface (2.1) con  $\lambda \in [-1, 1)$ ,  $\tau \in I$  punto de continuidad por la derecha de  $\gamma$  y  $q \in \text{sec}_\gamma^+(\tau)$ . Entonces para todo  $s < \tau$  se cumple que:*

$$\left\langle q, \frac{\gamma(s) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s) - \gamma(\tau)|} \right\rangle \leq \lambda. \quad (2.5)$$

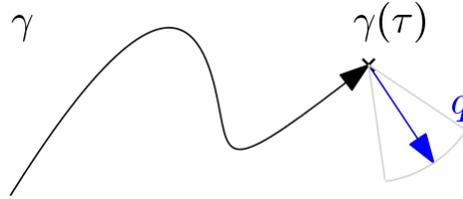


Figura 2.1: Esquema proposición 2.13.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(t_n)_n \subset I$  sucesión tal que define a  $q$ . Considérese  $s \in I$  tal que  $s < \tau < t_n$ . Por la ley del coseno se obtiene que:

$$|\gamma(\tau) - \gamma(s)|^2 = |\gamma(\tau) - \gamma(t_n)|^2 + |\gamma(s) - \gamma(t_n)|^2 - 2\langle \gamma(\tau) - \gamma(t_n), \gamma(s) - \gamma(t_n) \rangle \quad (2.6)$$

Además, tomando la desigualdad (2.1) de  $\lambda$ -curva con los tiempos  $s$ ,  $\tau$  y  $t_n$ , elevarla al cuadrado, para juntarla con a expresión (2.6) se obtiene:

$$2\lambda|\gamma(s) - \gamma(t_n)||\gamma(\tau) - \gamma(t_n)| + \lambda^2|\gamma(\tau) - \gamma(t_n)|^2 \geq |\gamma(\tau) - \gamma(t_n)|^2 - 2\langle \gamma(\tau) - \gamma(t_n), \gamma(s) - \gamma(t_n) \rangle$$

Dividiendo por  $|\gamma(\tau) - \gamma(t_n)|$ , tendiendo  $n$  al infinito y usando la continuidad de  $\gamma$  en  $\tau$ , resulta:

$$2\lambda|\gamma(s) - \gamma(\tau)| \geq -2\langle -q, \gamma(s) - \gamma(\tau) \rangle,$$

de donde se obtiene el resultado. □

Dada la proposición anterior, si bien solamente requiere continuidad por la derecha, desde ahora vamos a considerar todas las funciones  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  que satisfacen (2.1) son continuas, por lo que corresponderán a  $\lambda$ -curvas, que además se consideraran inyectivas.

**Proposición 2.14** *Sea  $\gamma$  una  $\lambda$ -curva y  $\tau \in I$ . Entonces para todo  $s_1, s_2 \in I$ , con  $s_1 < s_2 < \tau$  se cumple que:*

$$\left\langle \frac{\gamma(s_1) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s_1) - \gamma(\tau)|}, \frac{\gamma(s_2) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s_2) - \gamma(\tau)|} \right\rangle \geq -\lambda. \quad (2.7)$$

DEMOSTRACIÓN. Se denotará como  $\vec{\alpha} := \gamma(s_1) - \gamma(\tau)$  y  $\vec{\beta} := \gamma(s_2) - \gamma(\tau)$ . Por la desigualdad de  $\lambda$ -curva (2.1) se obtiene:

$$|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)|^2 \leq |\vec{\alpha}|^2 + 2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \lambda^2|\vec{\beta}|^2, \quad (2.8)$$

mientras que por la ley del coseno sobre el triángulo con vértices  $\gamma(s_1), \gamma(s_2), \gamma(\tau)$ :

$$|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle. \quad (2.9)$$

Juntando las expresiones (2.8) y (2.9), se deduce que:

$$\begin{aligned} |\vec{\beta}|^2 - 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle &\leq 2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| + \lambda^2|\vec{\beta}|^2, \\ 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle &\geq -2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|, \\ \left\langle \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}, \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \right\rangle &\geq -\lambda. \end{aligned}$$

Donde de la última línea, se concluye el resultado. □

En lo que sigue, se darán definiciones para fijar las ideas del tramo inicial de la curva y de la apertura de un subconjunto de la esfera, donde la última corresponde a una noción para medir que tan grande es el cono generado por este con vértice en 0.

**Definición 2.15** *(Tramo inicial de la curva) Dada una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tau \in I$ , se denotará al conjunto  $\Gamma(\tau)$  como la imagen de la curva hasta tiempo  $\tau$ , es decir:*

$$\Gamma(\tau) = \gamma((-\infty, \tau] \cap I).$$

**Definición 2.16** *(Apertura de un conjunto) Sea  $C \subseteq S^{d-1}$ . Se define la apertura de  $C$  como:*

$$A(C) = \inf\{\langle x, y \rangle : x, y \in C\}.$$

En particular, la apertura para el conjunto  $\Gamma(\tau)$  está dada por la fórmula:

$$A_\gamma(\Gamma(\tau)) = \inf \left\{ \left\langle \frac{x - \gamma(\tau)}{|x - \gamma(\tau)|}, \frac{y - \gamma(\tau)}{|y - \gamma(\tau)|} \right\rangle : x, y \in \Gamma(\tau) \setminus \{\gamma(\tau)\} \right\}.$$

*Si no hay riesgo de confusión, se omitirá el subíndice  $\gamma$  que indica la curva involucrada*

**Observación** La apertura de un conjunto  $B$  con respecto a un punto  $x \in B$ , en nuestro caso  $\Gamma(\tau)$  y  $\gamma(\tau)$ , calcula la apertura del cono generado por  $B$  con vértice en  $x$  intersectado con la esfera  $S^{d-1}$ . Por otro lado, la proposición 2.14 puede ser reformulada en términos de la apertura recién definida:

**Corolario 2.17** *Sea  $\gamma$  una  $\lambda$ -curva. Entonces para todo  $\tau \in I$ ,  $A(\Gamma(\tau)) \geq -\lambda$ .*

Lo que sigue corresponde al argumento central para la demostración de rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas. A saber, es controlar el conjunto de las secantes por la derecha de modo que no se encuentren lejos de una dirección normal a la envoltura convexa del tramo inicial correspondiente, además de realizar esto uniformemente en todo tiempo y toda secante. Esta condición bastará para poder utilizar la idea Manselli-Pucci, es decir, poder medir el crecimiento de la curva en términos del crecimiento del espacio que va ocupando.

Lamentablemente, esta técnica no resultará ser suficiente robusta como para poder demostrar la rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas para todo  $\lambda$ , sino que solamente para cuando es menor que  $1/(1+2d)$  donde  $d$  es la dimensión del espacio euclideo.

Antes de continuar, por completitud se enunciará el lema de Caratheodory, que será de utilidad para el siguiente lema y también en los siguientes capítulos.

**Lema 2.18** (*Lema de Caratheodory*) *Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto distinto de vacío. Entonces, para todo  $x \in \text{co}(A)$ , existen  $\{x_i\}_{i=0}^d \subseteq A$  y  $\{\beta_i\}_{i=0}^d \subseteq [0, 1]$  tales que:*

$$\sum_{i=0}^d \beta_i = 1 \quad \wedge \quad x = \sum_{i=0}^d \beta_i x_i.$$

**Lema 2.19** (*Lema de separación*) *Sea  $C \subseteq S^{d-1}$  tal que  $A(C) \geq -\delta$ , donde  $0 \leq \delta < 1/d$ . Entonces  $\overline{\text{co}}(C) \cap B(0, \varepsilon) = \emptyset$  cuando  $\varepsilon \leq \frac{1-\delta d}{1+d}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por contradicción. Considérese que existe  $u \in \overline{\text{co}}(C)$  tal que  $|u| < \bar{\varepsilon} := \frac{1-\delta d}{1+d}$ . Por el lema de Caratheodory existen  $\beta_0, \dots, \beta_d \in [0, 1]$  tales que  $\sum \beta_i = 1$  y  $\{u_i\}_{i=1}^d \subseteq C$  tales que:

$$\left| \sum_{i=0}^d \beta_i u_i \right| < \bar{\varepsilon}.$$

Sea  $i_0 \in \{0, 1, \dots, d\}$  tal que  $\beta_{i_0} \geq \beta_i$  para todo  $i$ , luego  $\beta_{i_0} \geq 1/(1+d)$  y  $\sum_{i \neq i_0} \beta_i \leq d/(1+d)$ .

Usando la desigualdad de Cauchy Schwartz se deduce que:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &> \left\langle u_{i_0}, \sum_{i=0}^d \beta_i u_i \right\rangle = \sum_{i=0}^d \langle u_{i_0}, \beta_i u_i \rangle = \beta_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \beta_i \langle u_{i_0}, u_i \rangle \\ &\geq \frac{1}{1+d} + \sum_{i \neq i_0} \beta_i (-\delta) \geq \frac{1}{1+d} - \delta \frac{d}{1+d} \geq \bar{\varepsilon},\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. □

**Proposición 2.20** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una  $\lambda$ -curva con  $0 < \lambda < 1/(1+2d)$  y  $\tau \in I$ . Entonces, existe  $\alpha > 0$  tal que para todo  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ , existe  $\xi_q \in S^{d-1}$  que satisface que para todo  $s < \tau$ :*

$$\left\langle \xi_q, \frac{\gamma(s) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s) - \gamma(\tau)|} \right\rangle \leq -2\alpha \quad \wedge \quad \langle \xi_q, q \rangle \geq 2\alpha. \quad (2.10)$$

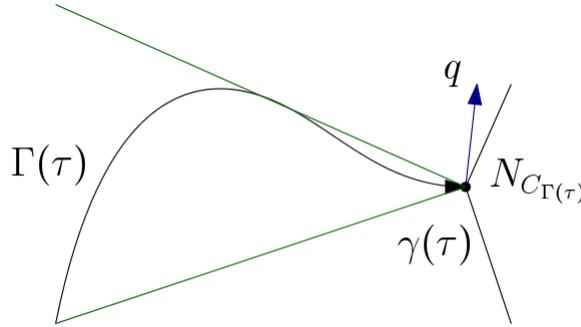


Figura 2.2: Esquema proposición 2.20.

DEMOSTRACIÓN. Gracias a la proposición 2.14, se sabe que  $A(\Gamma(\tau)) > -\lambda$ . Como  $0 < \lambda < 1/d$ , se puede usar el lema 2.19 sobre el conjunto:

$$C_{\Gamma(\tau)} = \left\{ \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{|\gamma(s) - \gamma(t)|} : s < t \right\} \subset S^{d-1}.$$

Sea  $c \in \overline{co}(C)$  la proyección de  $\vec{0} \in \mathbb{R}^d$  sobre el conjunto  $\overline{co}(C)$  que está bien definido por el lema 2.19. Este punto satisface:

$$|c| \geq \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \quad \wedge \quad \langle -c, u - c \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C,$$

de lo que se deduce:

$$\langle -c, u \rangle \leq -\left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2, \quad \forall u \in C.$$

Sea  $q \in \text{sec}^+(t)$ . Considérese  $\delta > 0$  y  $\xi_q := \frac{\delta q - c}{|\delta q - c|}$ . Por la proposición 2.13 se deduce que para todo  $u \in C_{\Gamma(\tau)}$  se cumple que  $\langle q, u \rangle \leq \lambda$ , con lo que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_q, u \rangle &= \frac{\delta \langle q, u \rangle + \langle -c, u \rangle}{|q - c|} \\ &\leq \frac{\delta \lambda + \langle -c, u \rangle}{|q - c|} \\ &\leq \frac{1}{|\delta q - c|} \left( \delta \lambda - \left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Como se quiere que este producto interno sea negativo (uniformemente en  $\tau$ , en  $q$  y en  $u$ ), se impondrá la siguiente condición sobre  $\delta$ :

$$\delta < \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2. \quad (2.11)$$

Con esto, usando además que  $|\delta q - c| < \delta + 1$  se obtiene:

$$\langle \xi_q, u \rangle \leq \frac{1}{\delta + 1} \left( \delta \lambda - \left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2 \right)$$

Por otro lado, sean  $\{u_i\}_{i=0}^d \in \overline{C}$  y  $\{\lambda_i\}_{i=0}^d$  tales que  $c = \sum \lambda_i u_i$ , obtenidos por el lema de Caratheodory. Al utilizar la proposición 2.13, sigue que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_q, q \rangle &= \frac{\delta |q|^2 + \langle -c, q \rangle}{|\delta q - c|} \\ &= \frac{\delta + \sum \lambda_i \langle -u_i, q \rangle}{|\delta q - c|} \\ &\geq \frac{\delta - \lambda}{|\delta q - c|}. \end{aligned}$$

Pero como se quiere que este producto interno sea positivo, se impondrá nuevamente sobre  $\delta$ :

$$\delta > \lambda, \quad (2.12)$$

con lo que se concluye que:

$$\langle \xi_q, q \rangle \geq \frac{\delta - \lambda}{\delta + 1}.$$

Notando que las condiciones (2.11) y (2.12) sobre  $\delta$  son equivalentes a la siguiente condición:

$$\lambda < \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2.$$

Dado que  $\lambda > 0$ , al desarrollar la expresión anterior se obtiene:

$$\lambda < \frac{1}{1 + 2d}.$$

Por lo tanto si  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ , se puede escoger un  $\delta$  que satisfaga (2.11) y (2.12), y a su vez  $\alpha$  como:

$$\alpha = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{\delta + 1} \left( \delta \lambda - \left( \frac{1 - \lambda d}{1 + d} \right)^2 \right), \frac{\delta - \lambda}{\delta + 1} \right\},$$

de donde se deduce el resultado.  $\square$

Se fijará  $\gamma : [0, T_\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  como una  $\lambda$ -curva inyectiva con  $0 < \lambda < 1/(1 + 2d)$  y  $\alpha$  como en la proposición 2.20. Para continuar, se considerará una  $\eta$ -red para la esfera  $S^{d-1}$  que jugará un rol en la definición de integral de Manselli pero en una versión discreta. Por la proposición 2.20, en (2.10) hay cierta holgura en la elección de  $\xi_q$ , lo que es necesario para que haya un cambio sustantivo al momento de realizar la integración. En la siguiente proposición se explicita esta idea:

**Corolario 2.21** *Sea  $q \in \text{sec}^+(\tau)$  y  $\xi_q$  definido como en la proposición 2.20. Entonces para todo  $\xi \in B(\xi_q, \alpha/4)$  se cumple:*

$$\langle \xi, \gamma(s) \rangle \leq \langle \xi, \gamma(\tau) \rangle - \alpha |\gamma(\tau) - \gamma(s)|, \quad \forall s \in [0, \tau), \quad (2.13)$$

$$\langle \xi, q \rangle \geq \frac{7\alpha}{4}. \quad (2.14)$$

DEMOSTRACIÓN. Ambas desigualdades provienen de la proposición 2.20 más la desigualdad de Cauchy-Schwartz.  $\square$

**Definición 2.22** ( $\eta$ -red de  $S^{d-1}$ ) *A un conjunto finito  $\mathcal{F} \subset S^{d-1}$  se denominará  $\eta$ -red de  $S^{d-1}$  si:*

$$B(x, \eta) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset, \quad \forall x \in S^{d-1}.$$

En lo que sigue del capítulo,  $\mathcal{F}$  será una  $\eta$ -red de  $S^{d-1}$  cualquiera, con  $\eta = \alpha/4$ .

**Corolario 2.23** *Para todo  $\tau \in I$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $t \in [\tau, \tau + \delta)$  existe  $\xi \in \mathcal{F}$  tal que:*

$$\langle \xi, \gamma(t) - \gamma(\tau) \rangle \geq \alpha |\gamma(t) - \gamma(\tau)|.$$

Además,  $\gamma(\tau)$  se puede reemplazar por  $\gamma(s)$  con  $s \in [0, \tau]$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau \in I$ . Como  $\text{sec}^+(\tau)$  es el conjunto de puntos de acumulación de la función  $t \mapsto (\gamma(t) - \gamma(\tau))/|\gamma(t) - \gamma(\tau)|$  cuando  $t \searrow \tau$  y  $S^{d-1}$  es compacto, entonces existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ , existe  $q_t \in \text{sec}^+(\tau)$  tal que:

$$\left| q_t - \frac{\gamma(t) - \gamma(\tau)}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|} \right| < \frac{\alpha}{4}.$$

Sea  $\xi_t \in \mathcal{F}$  tal que  $\xi_t \in B(\xi_{q_t}, \eta)$ , donde  $\xi_{q_t}$  se define en la proposición 2.20. Gracias al corolario 2.21, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi_t, \frac{\gamma(t) - \gamma(\tau)}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|} \right\rangle &= \langle \xi_t, q_t \rangle + \left\langle \xi_t, \frac{\gamma(t) - \gamma(\tau)}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|} - q_t \right\rangle \\ &\geq \frac{7\alpha}{4} - \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(\tau)}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|} - q_t \right| \\ &\geq \frac{7\alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} \geq \alpha. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la primera parte del corolario, es decir, que para todo  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ :

$$\langle \xi_t, \gamma(t) - \gamma(\tau) \rangle \geq \alpha |\gamma(t) - \gamma(\tau)|. \quad (2.15)$$

Para  $t = \tau$ , el resultado es exactamente el corolario 2.21.

Por otro lado, si tomamos  $s < \tau$  y la proposición 2.21, con  $\xi_{q_t}$  y  $\xi_t$ , esta se reescribe como:

$$\langle \xi_t, \gamma(\tau) - \gamma(s) \rangle \geq \alpha |\gamma(\tau) - \gamma(s)|. \quad (2.16)$$

Por lo que sumando (2.15) y (2.16), más la desigualdad triangular, se obtiene que:

$$\langle \xi_t, \gamma(t) - \gamma(s) \rangle \geq \alpha (|\gamma(t) - \gamma(\tau)| + |\gamma(\tau) - \gamma(s)|) \geq \alpha |\gamma(t) - \gamma(s)|,$$

para todo  $s, t \in I$  tales que  $s \leq \tau \leq t < \tau + \delta$ . □

Ahora se procederá a demostrar que toda  $\lambda$ -curva acotada tiene largo finito cuando  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ , Para esto, se utilizará la siguiente versión de función anchura, la que rescata la idea de Manselli-Pucci, pero en forma discreta.

**Definición 2.24** (*Función Anchura Direccional*) Sea  $\mathcal{F} \subset S^{d-1}$  una  $\eta$ -red y para  $\xi \in \mathcal{F}$  y  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  se define:

$$W_\xi(K) := \text{diam}\{\langle \xi, x \rangle : x \in K\}, \quad (2.17)$$

donde se usará la convención de que  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ .

Para no sobrecargar la notación, se denotará por  $W_\xi(\tau) := W_\xi(\Gamma(\tau))$ . Además, consideremos la función:

$$W_{\mathcal{F}} := \sum_{\xi \in \mathcal{F}} W_\xi. \quad (2.18)$$

**Observación** Notando que si  $\tau_1 \leq \tau_2 \implies \Gamma(\tau_1) \subseteq \Gamma(\tau_2)$  nos dice que las funciones  $\tau \mapsto W_\xi(\tau)$  y  $\tau \mapsto W_{\mathcal{F}}(\tau)$  son crecientes.

**Proposición 2.25** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una  $\lambda$ -curva con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$  y  $[a, b] \subseteq I$ . Entonces existe un  $\alpha' := \alpha'(d, \lambda) > 0$ , tal que para toda partición:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad \text{de } [a, b],$$

se cumple que:

$$\sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \frac{1}{\alpha'} (W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a)). \quad (2.19)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{t_i\}_{i=0}^n$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , esto es que:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Fíjese  $i > 0$ , luego como  $t_i \in I$ , por el corolario 2.23 se tiene que existe un  $\xi_i \in \mathcal{F}$  tal que:

$$\langle \xi_i, \gamma(t_i) - \gamma(s) \rangle \geq \alpha |\gamma(t_i) - \gamma(s)|, \quad \forall s \leq t_{i-1}. \quad (2.20)$$

Por otro lado, por la proposición 2.8, ecuación (2.3), con  $s$ ,  $t_{i-1}$  y  $t_i$ , al reemplazarla en (2.20) nos queda:

$$\langle \xi_i, \gamma(t_i) - \gamma(s) \rangle \geq \alpha \frac{1 - \lambda}{2} |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|, \quad \forall s \leq t_{i-1}.$$

Finalmente, Fijando  $\alpha' := \alpha(1 - \lambda)/2$  y dada la definición de  $W_\xi$  se deduce que:

$$W_{\xi_i}(t_i) - W_{\xi_i}(t_{i-1}) \geq \alpha' |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|,$$

y, como  $W_\xi(t_i) - W_\xi(t_{i-1}) \geq 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{F}$ , se concluye que:

$$W_{\mathcal{F}}(t_i) - W_{\mathcal{F}}(t_{i-1}) \geq \alpha' |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)|, \quad \forall i \geq 1.$$

Y con esta última desigualdad, dado que  $\alpha'$  sólo depende de  $\alpha$  y  $\lambda$ , sumando en  $i$  se concluye lo que se desea probar.  $\square$

**Teorema 2.26** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una  $\lambda$ -curva continua con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ . Entonces  $\gamma$  tiene largo acotado por una constante que depende proporcionalmente de una constante  $\alpha' := \alpha'(d, \lambda)$  y de  $W_{\mathcal{F}}(K)$  con  $K := \overline{co}(\gamma(I))$ , del siguiente modo:

$$\ell(\gamma) \leq \frac{1}{\alpha'} W_{\mathcal{F}}(K).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $K := \overline{co}(\gamma(I))$ , si este no es compacto, es directo que  $W_{\mathcal{F}}(K) = \infty$ , por lo que no hay nada que demostrar. Supongamos que  $K$  es compacto. Por la proposición 2.25, se tiene que para todo  $[a, b] \subseteq \text{int}(I)$  y toda partición  $\{t_i\}_{i=0}^n$  de  $[a, b]$  se cumple que:

$$\sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \frac{1}{\alpha'} (W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a)).$$

Por lo que, tomando supremo en las particiones se cumple que:

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) \leq \frac{1}{\alpha'} (W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a)) \leq \frac{1}{\alpha'} W_{\mathcal{F}}(K),$$

donde  $\ell$  representa la función largo de curva y  $\gamma|_{[a,b]}$  es la curva  $\gamma$  restringida a  $[a, b]$ . De aquí, se deduce que:

$$\ell(\gamma|_{[a,b]}) \leq \frac{1}{\alpha'} W_{\mathcal{F}}(K), \quad \forall a, b \in \text{int}(I), \quad a < b.$$

Tomando supremo sobre los intervalos  $[a, b] \subseteq I$ , se obtiene que:

$$\ell(\gamma) \leq \frac{1}{\alpha'} W_{\mathcal{F}}(K).$$

□

**Observación** Si bien quedó demostrado para ciertas  $\lambda$ -curvas la rectificabilidad, que el valor de  $\lambda$  deba ser menor que una constante parece ser una restricción inherente a la técnica empleada más que una limitante real.

Como ya se mencionó, la proposición fundamental de esta técnica corresponde a la proposición 2.20, que es equivalente a que  $co(\Gamma(\tau))$  tenga un cono normal con interior en el punto  $\gamma(\tau)$  y que exista un  $\alpha > 0$  tal que para todo  $q \in \text{sec}^+(\tau)$  se cumpla que  $\text{dist}(q, S_{\Gamma(\tau)}) \geq \alpha$ , donde:

$$S_{\Gamma(\tau)} := \left\{ \frac{x}{|x|} : x \in co(C_{\Gamma(\tau)}) \right\},$$

$$C_{\Gamma(\tau)} := \left\{ \frac{\gamma(s) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s) - \gamma(\tau)|} : s < \tau \right\}.$$

Por el lema 2.19, sabemos que  $S_{\Gamma(\tau)}$  está bien definido ya que  $0 \notin \overline{co}(C_{\Gamma(\tau)})$ .

La siguiente proposición refleja la idea mencionada en la observación anterior en pos de una demostración alternativa de la proposición 2.20, pero se verá que también se va a obtener la restricción que  $\lambda$  debe ser menor estricto a  $1/(1 + 2d)$ .

**Proposición 2.27** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  una  $\lambda$ -curva con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ ,  $\tau \in I$ . Entonces existe un  $\alpha > 0$  tal que para todo  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ ,  $\text{dist}(q, S_{\Gamma(\tau)}) \geq \alpha$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $q \in \text{sec}^+(\tau)$  y  $u \in S_{\Gamma(\tau)}$ . Por el lema de Caratheodory se sabe que existen  $\{\beta_i\}_{i=0}^d \subseteq [0, 1]$  y  $\{u_i\}_{i=0}^d \subseteq C_{\Gamma(\tau)}$  tales que:

$$u = \frac{\sum_{i=0}^d \beta_i u_i}{|\sum_{i=0}^d \beta_i u_i|}.$$

Al estimar la diferencia entre  $q$  y  $u$ , usando la proposición 2.13, se obtiene que:

$$\begin{aligned} |q - u|^2 &= |q|^2 + |u|^2 - 2\langle q, u \rangle = 2 - 2 \left\langle q, \frac{\sum_{i=0}^d \beta_i u_i}{|\sum_{i=0}^d \beta_i u_i|} \right\rangle, \\ &= 2 - 2 \sum_{i=0}^d \frac{\beta_i}{|\sum_{i=0}^d \beta_i u_i|} \langle q, u_i \rangle \geq 2 - 2 \sum_{i=0}^d \frac{\beta_i}{|\sum_{i=0}^d \beta_i u_i|} \lambda, \\ &= 2 - 2 \frac{\lambda}{|\sum_{i=0}^d \beta_i u_i|} \geq 2 - 2 \frac{\lambda}{c(\lambda)}. \end{aligned}$$

Donde  $c(\lambda)$  es una cota inferior para la norma de un elemento en  $co(C_\tau)$ , que ya sabemos del lema 2.19 (de separación) que  $c(\lambda) := (1 - \lambda d)/(1 + d)$ . Por lo que imponemos sobre  $\lambda$  que:

$$\lambda < \frac{1 - \lambda d}{1 + d},$$

Con lo que se puede asegurar que la diferencia tiene norma uniformemente estrictamente mayor que 0 cuando  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ .  $\square$

Si bien nuevamente aparece la restricción  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ , es posible dar una mejora para el caso planar, es decir, cuando  $d = 2$ , que permitirá obtener la rectificabilidad de toda  $\lambda$ -curva.

## 2.3. Rectificabilidad en $\mathbb{R}^2$

Esta sección está dedicada a probar que toda  $\lambda$ -curva acotada en  $\mathbb{R}^2$  es rectificable. Para esto se va a emplear la misma técnica que en la sección anterior, es decir, en el momento que se obtenga una alternativa a la proposición 2.20, se tendrá también la rectificabilidad de la curva. Se comenzará por ver una alternativa al lema de separación 2.19, la que entrega que el cono normal de  $co(\Gamma(\tau))$  en  $\gamma(\tau)$  es distinto de vacío y con interior. Se verá que para el caso 2 dimensional esto no presenta una restricción.

**Lema 2.28** (*Lema de separación*) Sea  $C \subseteq \mathcal{S}^1$  conexo. Si  $A(C) > -1$ , entonces  $0 \neq \overline{co}(C)$ .

DEMOSTRACIÓN. Como la definición de  $A(C)$  (definición 2.16) se extiende a los puntos de acumulación del conjunto sin cambiar el valor, podemos sin pérdida de generalidad asumir que  $C$  es cerrado y conexo.

Considérese que  $0 \in co(C)$ , entonces por el teorema de Caratheodory, se tiene que existen  $u_1, u_2, u_3 \in C$  y  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in [0, 1]$  tales que  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$  y:

$$0 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3.$$

Si los  $u_i$  viven en un mismo semiespacio, que contiene al origen en su frontera, entonces necesariamente uno sería el antipodal del otro y el  $\beta$  asociado al tercero sería 0, sin pérdida de generalidad,  $u_1 = -u_2$ , por lo que  $A(C) = -1$ , lo que es una contradicción. Luego, los  $u_i$  no pueden estar contenidos en un mismo semiespacio, al usar la conexidad  $C$  se obtendría que existe  $v \in C$  tal que  $-v \in C$ , por lo que  $A(C) = -1$ , lo que es una contradicción.  $\square$

**Observación** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una  $\lambda$ -curva (que se supone por defecto continua). Para aplicar el lema 2.28 consideremos el conjunto  $C_{\Gamma(\tau)}$  que es conexo gracias a la continuidad de  $\gamma$ , luego, dado que  $A(C_{\Gamma(\tau)}) \geq -\lambda$  y que  $C_{\Gamma(\tau)}$  corresponde a un arco de circunferencia tal que los puntos más alejados uno de otro  $(x, y)$  tienen producto interno mayor que  $-\lambda$ . Así, el peor de los casos sería si  $\langle x, y \rangle = -\lambda$ , por lo que el  $\vec{0}$  sería proyectado sobre la secante que une  $x$  con  $y$ , más precisamente en  $(x+y)/2$ . Con esto, basta considerar  $\varepsilon := \varepsilon(\lambda) = |(x+y)/2| := ((1-\lambda)/2)^{1/2}$  tal que para todo  $\tau \in I$ :

$$\overline{co}(C_{\Gamma(\tau)}) \cap B(0, \varepsilon) = \emptyset,$$

de donde se rescata el lema 2.19.

Antes de dar una versión de la proposición 2.20, veamos un resultado auxiliar con respecto a la distancia de  $\sec^+(\tau)$  con  $co(C_{\Gamma(\tau)})$ , el que corresponde a una mejora de la proposición 2.27.

**Proposición 2.29** Sea  $\gamma$  una  $\lambda$ -curva en  $\mathbb{R}^2$  y  $\tau \in I$ . Entonces, para todo  $q \in \sec^+(\tau)$ ,  $dist(q, co(C_{\Gamma(\tau)})) \geq 1 - \lambda$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $q \in \sec^+(\tau)$  y  $z \in C_{\Gamma(\tau)}$ , utilizando la proposición 2.13 se obtiene:

$$|q - z|^2 = 2 - 2\langle q, z \rangle \geq 2(1 - \lambda) > 0. \quad (2.21)$$

Notando que la función distancia es decreciente en la segunda entrada para el orden parcial de la inclusión ( $\subseteq$ ), tomando el mayor conjunto posible como  $C_{\Gamma(\tau)}$  con respecto a la ecuación (2.21) se concluye que la distancia entre  $co(C_{\Gamma(\tau)})$  corresponde a la altura de un triángulo isósceles inscrito en  $\mathcal{S}^1$  de lado común igual a  $\sqrt{2(1-\lambda)}$  (ver figura 2.3), con lo que se deduce que:

$$dist(q, co(C_{\Gamma(\tau)})) \geq 1 - \lambda. \quad (2.22)$$

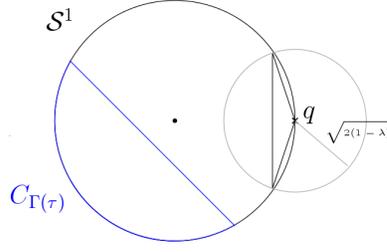


Figura 2.3: Discontinuidad por la derecha.

□

Para no sobrecargar la notación, para todo conjunto no vacío  $C \subseteq \mathcal{S}^1$ , se denominará por  $N_C$  al cono normal del cono generado por  $C$ .

**Corolario 2.30** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una  $\lambda$ -curva y  $\tau \in \text{int}(I)$ . Entonces, existe  $\alpha > 0$  tal que para todo  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ , existe  $\xi_q \in \mathcal{S}^{d-1}$  que satisface que para todo  $s < \tau$ :*

$$\left\langle \xi_q, \frac{\gamma(s) - \gamma(\tau)}{|\gamma(s) - \gamma(\tau)|} \right\rangle \leq -2\alpha, \quad \wedge \quad \langle \xi_q, q \rangle \geq 2\alpha. \quad (2.23)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\beta = (1 - \lambda)/4$  y  $C_{\Gamma(\tau)}^\beta := (C_{\Gamma(\tau)} + B(0, \beta)) \cap \mathcal{S}^1$ . Se cumple:

$$A(C_{\Gamma(\tau)}^\beta) := A(C_{\Gamma(\tau)}) - 2\beta > -1 \quad \wedge \quad \text{dist}(C_{\Gamma(\tau)}^\beta, q) = \text{dist}(C_{\Gamma(\tau)}, q) - \beta > 0. \quad (2.24)$$

Por (2.24) y el lema 2.28 se tiene que  $N_{C_{\Gamma(\tau)}^\beta}$  es de interior no vacío y, como el cono normal de  $N_{C_{\Gamma(\tau)}^\beta}$  es exactamente el cono generado por  $\overline{C_{\Gamma(\tau)}^\beta}$ , entonces por (2.24) se deduce que para todo  $q \in \text{sec}^+(\tau)$  existe un  $\xi \in N_{C_{\Gamma(\tau)}^\beta} \cap \mathcal{S}^1$  tal que  $\langle \xi, q \rangle > 0$ . Notando ahora que por la definición de  $C_{\Gamma(\tau)}^\beta$ , existe un  $\beta' := \beta'(\lambda) > 0$  tal que:

$$(N_{C_{\Gamma(\tau)}^\beta} + B(0, \beta')) \cap \mathcal{S}^1 \subseteq N_{C_{\Gamma(\tau)}} \cap \mathcal{S}^1,$$

considérese  $\xi_q \in N_{C_{\Gamma(\tau)}} \cap \mathcal{S}^1$  de forma que sigue: si  $|\xi - q| \leq \beta'/2$ , entonces  $\xi_q := q$ , mientras que si este no es el caso, considérese  $\xi_q$  tal que  $|\xi_q - \xi| = \beta'/2$  y  $\langle \xi_q, q \rangle > \langle \xi, q \rangle$ . Así, queda únicamente definido y, más aún, en el primer caso  $\langle \xi_q, q \rangle = 1$  y en el segundo se verá a continuación.

Es sabido que se puede definir el ángulo entre dos vectores como:

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) := \arccos \left( \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right).$$

Con esto, el ángulo  $\omega := \sphericalangle(\xi, \xi_q) = \arccos(1 - \beta'^2/8)$  es restado del ángulo entre  $q$  y  $\xi$  que es menor a  $\pi/2$  dado que su producto interno es mayor que 0, por lo tanto:

$$\langle q, \xi_q \rangle \geq \cos \left( \frac{\pi}{2} - \omega \right) > 0,$$

que es una constante que sólo depende de  $\lambda$ .

Por último, como se sabe que  $B(\xi_q, \beta'/2) \cap \mathcal{S}^{d-1} \subseteq N_{C_{\Gamma(\tau)}}$ , entonces el ángulo formado entre  $\xi_q$  y un punto  $u \in C_{\Gamma(\tau)}$  necesariamente es mayor o igual  $\pi/2 + \omega$ , por lo que:

$$\langle \xi_q, u \rangle \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) < 0, \quad \forall u \in C_{\Gamma(\tau)},$$

de donde finalmente se obtiene el resultado. □

Es importante recalcar que este argumento en  $\mathbb{R}^d$  no es válido cuando  $d > 2$  dado que para dimensiones mayores  $C_{\Gamma(\tau)} \neq S_{\Gamma(\tau)}$ .

**Corolario 2.31** *Toda  $\lambda$ -curva acotada en  $\mathbb{R}^2$  es rectificable.*

# Capítulo 3

## $\lambda$ -curvas en Variedades Riemannianas

En este capítulo se extenderá la demostración del capítulo anterior para cuando las curvas están definidas sobre una variedad Riemanniana  $(\mathcal{M}, g)$ . La primera sección corresponderá a dejar en claro la notación con la que se va a trabajar y dar algunos resultados del área que nos serán útil en el teorema principal. En la segunda parte, vamos a extender lo realizado por Daniilidis et al en [3] para  $\lambda$ -curvas.

### 3.1. Notación

Durante este capítulo  $(\mathcal{M}, g)$  denotará una variedad Riemanniana completa de dimensión  $d \geq 2$ , cuyo espacio tangente será llamado  $\mathcal{TM}$ . Un elemento de  $\xi \in \mathcal{TM}$  es de la forma  $\xi = (x, v_x)$  donde  $x \in \mathcal{M}$  y  $v_x \in \mathcal{T}_x\mathcal{M}$ . La métrica  $g$  sobre  $\mathcal{M}$  define sobre los fibrados tangentes  $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$  un producto interno que  $g_x(\cdot, \cdot) := \langle \cdot, \cdot \rangle_x$  y su norma respectiva  $|\cdot|_x$ . La distancia geodésica de  $\mathcal{M}$  con respecto a  $g$  se denotará como  $d_g$ , la bola abierta centrada en  $x$  y radio  $r$  por  $B_g(x, r)$  mientras que la bola abierta centrada en  $v_x \in \mathcal{T}_x\mathcal{M}$  de radio  $r$  por  $\hat{B}(v_x, r)$ .

**Definición 3.1** (*Fibrado Tangente Unitario*) Para  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  denotaremos su fibrado tangente unitario como:

$$\mathcal{UK} := \{\xi = (x, v_x) \in \mathcal{TM} : x \in \mathcal{K} \wedge |v_x|_x = 1\},$$

mientras que una fibra para  $x \in \mathcal{K}$  será  $\mathcal{U}_x\mathcal{K} := \mathcal{UK} \cap \mathcal{T}_x\mathcal{M}$ .

**Observación** Cuando  $\mathcal{K}$  es compacto, es sabido que  $\mathcal{UK}$  también lo es para la métrica canónica  $D_g$  sobre  $\mathcal{UM}$ . Además, la métrica  $D_g$  sobre  $\mathcal{UM}$  satisface:

$$d_g(x, y) \leq D_g((x, v_x), (y, w_y)) \forall (x, v_x), (y, w_y) \in \mathcal{UM}. \quad (3.1)$$

Para  $x \in \mathcal{M}$ , se denotará como  $\exp_x$  (ver [5]) a la función exponencial desde  $x$ , la que para un  $v \in \mathcal{T}_x\mathcal{M} \cap \text{dom}(\exp_x)$  cumple que  $\exp_x(v) := \theta_x^v(1)$ , donde  $\theta_x^v$  representa a la

geodésica que parte en  $x$  con velocidad  $v$ . Es sabido que la función exponencial es una función suave, y además, si  $r$  es suficientemente pequeño, esta es un difeomorfismo entre  $B_g(x, r)$  y  $\hat{B}((x, 0_x), r)$ . Usando la regularidad del mapeo exponencial se obtiene el siguiente lema como consecuencia de compacidad:

**Lema 3.2** (ver [3]) *Sea  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  compacto. Entonces existe un  $\rho > 0$  tal que para todo  $x \in \mathcal{K}$ ,  $\exp_x$  es un difeomorfismo entre  $B(x, 2\rho)$  y  $\hat{B}((x, 0_x), 2\rho)$ .*

Para no sobrecargar la notación en lo que sigue del capítulo, para  $x \in \mathcal{K}$  y  $z \in B_g(x, \rho)$  se denotará:

$$v_x(z) := \exp_x^{-1}(z) \quad \wedge \quad u_x := \frac{v_x(z)}{|v_x(z)|_x}, \text{ si } z \neq x, \quad (3.2)$$

donde cabe señalar que  $|v_x(z)|_x = d_g(x, z)$ .

Tal como en el capítulo 2 fue importante la ley del coseno, para pequeños triángulos en variedades es posible demostrar una especie de ley del coseno, valiéndose del teorema de Taylor, tal como lo realizado en [3].

**Lema 3.3** (Ley del coseno, ver [3]) *Existe un  $K > 0$  tal que para todo  $x \in \mathcal{K}$  y todo  $y, z \in B(x, 2\rho)$ ,*

$$|d_g^2(y, z) - d_g^2(x, y) - d_g^2(x, z) + 2\langle v_x(y), v_x(z) \rangle| \leq K d_g^2(x, y) d_g^2(x, z)$$

Por último, las  $\lambda$ -curvas quedan definidas a través de la distancia geodésica de la variedad, a saber:

**Definición 3.4** ( $\lambda$ -curva) *Sea  $\gamma : I := [0, T_\infty) \rightarrow \mathcal{M}$  una curva con  $T_\infty \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$  y  $\lambda \in [-1, 1)$ . La curva  $\gamma$  se dirá  $\lambda$ -curva si para todo  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \in I$  se satisface:*

$$d_g(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq d_g(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) + \lambda d_g(\gamma(t_2), \gamma(t_3)). \quad (3.3)$$

**Observación** Durante el capítulo,  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  será un compacto que contiene a  $\gamma(I)$ . Además, el valor de  $\rho$  se irá ajustando siempre que sea necesario.

## 3.2. Rectificabilidad

En la primera sección del capítulo 2 (Propiedades de las  $\lambda$ -curvas), todas las propiedades obtenidas fueron demostradas con argumentos puramente métricos, es decir, no se utilizaron argumentos que involucraban a la curva en un espacio vectorial, por esto, todas ellas también son válidas en este nuevo contexto de variedades Riemannianas. Por lo tanto podemos considerar  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva inyectiva tal que  $I := [0, T_\infty)$ .

Lo que resta del capítulo está enfocado en probar que toda  $\lambda$ -curva acotada es rectificable cuando  $\lambda < 1/(1+2d)$ , donde  $d := \dim(\mathcal{M})$ . La demostración sigue en la misma línea que en el caso euclideo, es decir, vamos a trabajar esencialmente con las secantes por la derecha y la apertura de una porción de esfera.

**Definición 3.5** (*Secantes por la derecha*) Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  y  $\tau \in I$ . Se denominará conjunto de secantes por derecha de  $\gamma$  en  $x = \gamma(\tau)$  al siguiente subconjunto del espacio tangente  $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$ :

$$\text{sec}^+(\tau) := \left\{ q \in \mathcal{U}_x\mathcal{M} : q = \lim_{t_k \searrow \tau} u_x(\gamma(t_k)) \right\}.$$

Para comenzar, se verá una versión de la proposición 2.13 para el caso definido en variedades, pero antes se definirá una noción local del tramo inicial de la curva, donde siempre estaremos atentos a no escaparnos del dominio de la función exponencial dado por el lema 3.2.

**Definición 3.6** (*Tramo inicial de la curva*) Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  y  $\tau \in I$ . Se denotará al conjunto imagen de la curva hasta tiempo  $\tau$  como  $\Gamma(\tau)$ , es decir:

$$\Gamma(\tau) = \gamma((-\infty, \tau] \cap I).$$

Además, para una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $\gamma(\tau)$  denotaremos por  $\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau) := \Gamma(\tau) \cap \mathcal{U}$ .

**Proposición 3.7** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una función tal que satisface (3.3),  $\tau \in I$  y  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  abierto tal que  $\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \rho$ . Si  $\tau$  es un punto de continuidad por la derecha, entonces:

$$\langle q, u_x(z) \rangle_x \leq \lambda, \quad \forall q \in \text{sec}^+(\tau) \quad \forall z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau) \setminus \{x\}. \quad (3.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ ,  $(t_n)_n \subseteq I$  tal que  $t_n \searrow \tau$  y  $q = \lim u_x(\gamma(t_n))$ . Para no sobrecargar la notación se denominará  $\gamma_n := \gamma(t_n)$ . Sea  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau) \setminus \{x\}$ , por lema 3.3 se obtiene:

$$d_g(z, \gamma_n)^2 - d_g(x, z)^2 - d_g(x, \gamma_n)^2 + 2\langle v_x(z), v_x(\gamma_n) \rangle \leq K d(x, z)^2 d_g(x, \gamma_n)^2,$$

y por (3.3):

$$d_g(z, x)^2 \leq d_g(z, \gamma_n)^2 + 2\lambda d_g(z, \gamma_n) d_g(x, \gamma_n) + \lambda^2 d_g(x, \gamma_n)^2.$$

Sumándolas, para luego dividir por  $d_g(x, \gamma_n)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} -2\lambda d_g(z, \gamma_n) d_g(x, \gamma_n) - (1 + \lambda^2) d_g(x, \gamma_n)^2 + 2\langle v_x(z), v_x(\gamma_n) \rangle &\leq K d(x, z)^2 d_g(x, \gamma_n)^2, \\ -2\lambda d_g(z, \gamma_n) - (1 + \lambda^2) d_g(x, \gamma_n) + 2\langle v_x(z), u_x(\gamma_n) \rangle &\leq K d(x, z)^2 d_g(x, \gamma_n). \end{aligned}$$

Por último, tendiendo  $n \rightarrow \infty$ , usando la definición de  $q$  y la continuidad de  $\gamma$  en  $\tau$  se puede concluir que:

$$-2\lambda d_g(z, x) + 2\langle v_x(z), q \rangle \leq 0,$$

de donde el resultado se obtiene dividiendo por  $2d_g(z, x)$ . □

**Observación** Dado que la definición de secante es local, no se ve modificada de su contraparte en  $\mathbb{R}^d$ , por lo que si queremos que  $\text{sec}^+(\tau) \neq \emptyset$ , es necesario que la curva  $\gamma$  no sea localmente constante por la derecha.

Del mismo modo que en el caso real, se definirá la apertura del tramo inicial de la curva (ver definición 2.16), que será útil para medir el crecimiento de la curva mientras va evolucionando.

**Definición 3.8** (*Apertura de un conjunto*) Sea  $x \in \mathcal{M}$  y  $C \subseteq \mathcal{M}$  tal que  $C \subseteq B(x, 2\rho)$ , entonces se define la apertura de  $C$  con respecto a  $x$  como:

$$A_x(C) := \inf\{\langle u_x(c_1), u_x(c_2) \rangle : c_1, c_2 \in C \setminus \{x\}\}.$$

**Proposición 3.9** Sea  $\gamma$  una  $\lambda$ -curva,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  abierto tal que  $\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \rho$ . Entonces para todo  $\tau \in I$  tal que  $x := \gamma(\tau) \in \mathcal{U}$ , se cumple que:

$$A_x(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)) \geq -\lambda - \frac{K\rho^2}{2}. \quad (3.5)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau \in I$  tal que  $x := \gamma(\tau) \in \mathcal{U}$  y  $z_1 := \gamma(s_1)$ ,  $z_2 := \gamma(s_2) \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau) \setminus \{x\}$ . Por lema 3.3 se obtiene que:

$$-d_g(z_1, z_2)^2 + d_g(x, z_1)^2 + d_g(x, z_2)^2 - 2\langle v_x(z_1), v_x(z_2) \rangle_x \leq Kd_g(x, z_1)^2 d_g(x, z_2)^2. \quad (3.6)$$

Sin pérdida de generalidad se puede considerar que  $s_1 < s_2$ . Sumando la desigualdad de  $\lambda$ -curva al cuadrado con los tiempos  $s_1$ ,  $s_2$  y  $\tau$  a (3.6) queda:

$$(1 - \lambda^2)d_g(x, z_2)^2 - 2\lambda d_g(z_1, x)d_g(z_2, x) - 2\langle v_x(z_1), v_x(z_2) \rangle \leq Kd_g(x, z_1)^2 d_g(x, z_2)^2. \quad (3.7)$$

Notando que  $(1 - \lambda^2)d_g(x, z_2)^2 > 0$ , se puede sacar de (3.7) sin alterar el sentido de la desigualdad, luego al dividir por  $2d_g(z_1, x)d_g(z_2, x)$ , para finalmente usar que  $d_g(z_i, x) < \rho$  ya que  $x, z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} -2\lambda d_g(z_1, x)d_g(z_2, x) - 2\langle v_x(z_1), v_x(z_2) \rangle_x &\leq Kd_g(x, z_1)^2 d_g(x, z_2)^2 \\ -\lambda - \langle u_x(z_1), u_x(z_2) \rangle_x &\leq Kd_g(x, z_1)d_g(x, z_2)/2 \leq K\rho^2/2, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea se utiliza que  $d_g(x, z_i)u_x(z_i) = v_x(z_i)$ .

Así se concluye el resultado.  $\square$

**Observación** Gracias a la proposición 3.9, la idea es usar el lema 2.19 y la proposición 2.20 del capítulo 2. En efecto, el lema 2.19 sigue exactamente igual, dado que es una propiedad inherente a la esfera de un espacio euclideo, tal como lo es  $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$  para todo  $x \in \mathcal{M}$ . Por otro lado, la proposición 2.20 sigue igual salvo detalles meramente técnicos, que resultan de importancia ya que agregan una restricción sobre la constante  $\rho$ .

**Lema 3.10** (ver lema 2.19) Sea  $C \subseteq S^{d-1}$  tal que  $A(C) \geq -\delta$ , donde  $0 \leq \delta < 1/d$ . Entonces  $\overline{\text{co}}(C) \cap B(0, \varepsilon) = \emptyset$  cuando  $\varepsilon \leq \frac{1-\delta d}{1+d}$ .

Dado que cuando las curvas estaban definidas sobre  $\mathbb{R}^d$ , se pudo demostrar la rectificabilidad sólo cuando  $\lambda$  era menor  $1/(1+2d)$ . En este caso, dada la proposición 3.9, al considerar  $\lambda < 1/(1+2d)$  inmediatamente fijaremos  $\rho := \rho(\lambda, \mathcal{K}, d)$  tal que:

$$\beta := \lambda + \frac{K\rho^2}{2} < \frac{1}{1+2d} \quad (3.8)$$

**Proposición 3.11** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva con  $0 < \lambda < 1/(1+2d)$ . Entonces existe un  $\alpha > 0$  tal que para todo  $\tau \in I$ ,  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ , existe un  $\xi_{x,q} := (x, p_{x,q}) \in \mathcal{UM}$  tal que para todo abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  con  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \rho$  y todo  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$  se satisface:*

$$\langle p_{x,q}, u_x(z) \rangle_x \leq -2\alpha \quad \wedge \quad \langle p_{x,q}, q_x \rangle \geq 2\alpha, \quad (3.9)$$

donde  $x = \gamma(\tau)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau \in I$  y  $C_{\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)} := \{u_x(z) : z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)\}$ . Por proposición 3.9, lema 3.10 y que  $\beta < 1/d$ , es posible proyectar el  $\vec{0}$  en  $\vec{c} \in C_{\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)}$ . Llámese  $c$  a este punto. Por lema 3.10 y por ser proyección, el punto  $c$  satisface que:

$$|c|_x \geq \frac{1-\beta d}{1+d} \quad \wedge \quad \langle -c, u-c \rangle_x \leq 0, \quad \forall u \in C,$$

con lo que se deduce que:

$$\langle -c, u \rangle_x < -\left(\frac{1-\beta d}{1+d}\right)^2, \quad \forall u \in C. \quad (3.10)$$

Sea  $q \in \text{sec}^+(\tau)$ . Para  $\delta > 0$ , que se fijará luego, se define el elemento  $p_{x,q} \in \mathcal{U}_x \mathcal{M}$  como:

$$p_{x,q} := \frac{\delta q - c}{|\delta q - c|_x}, \quad \text{con } \delta > 0.$$

Por la proposición 3.7 se tiene que  $\langle q, u \rangle \leq \lambda$  para todo  $u \in C_{\Gamma(\tau)}$ . Usando esto y (3.10) se obtienen las siguientes estimaciones para  $u \in C_{\Gamma(\tau)}$ :

$$\begin{aligned} \langle p_{q,x}, u \rangle &= \frac{\delta \langle q, u \rangle_x + \langle u, -c \rangle_x}{|\delta q - c|_x}, \\ &\leq \frac{1}{|\delta q - c|_x} \left( \delta \lambda - \left(\frac{1-\beta d}{1+d}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Como se está buscando que este producto sea uniformemente negativo tanto en  $\tau \in I$ ,  $q \in \text{sec}^+(\tau)$  y en  $u \in C_{\Gamma(\tau)}$ , se impondrá que:

$$\delta \lambda - \left(\frac{1-\beta d}{1+d}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1-\beta d}{1+d}\right)^2. \quad (3.11)$$

Ya impuesto (3.11), usando que  $|\delta q - c| \leq 1 + \delta$  se deduce que:

$$\langle p_{q,x}, u \rangle \leq \frac{1}{1 + \delta} \left( \delta \lambda - \left( \frac{1 - \beta d}{1 + d} \right)^2 \right). \quad (3.12)$$

Por otro lado, veamos ahora el producto interno de  $p_{x,q}$  con  $q$  utilizando la proposición 3.7 y la desigualdad triangular:

$$\langle p_{q,x}, q \rangle_x = \frac{\delta |q|_x^2 + \langle -c, q \rangle_x}{|\delta q - c|} \quad (3.13)$$

$$\geq \frac{\delta - \lambda}{|\delta q - c|} \geq \frac{\delta - \lambda}{1 + \delta}. \quad (3.14)$$

Como se quiere que este producto sea positivo, en la última desigualdad de (3.13) se impone que  $\delta > \lambda$ , restricción que junto a (3.11) son equivalentes a:

$$\lambda < \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1 - \beta d}{1 + d} \right)^2. \quad (3.15)$$

Luego de computar la desigualdad, se deduce que tal  $\delta$  de la definición de  $p_{x,q}$  existe siempre que:

$$\lambda < \frac{1 - dK\rho^2/2}{1 + 2d} \quad (3.16)$$

por lo que si  $\rho$  es suficientemente pequeño, esta desigualdad se satisface y, por ende, el  $\alpha$  del enunciado de la proposición queda determinado por:

$$\alpha := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{1 + \delta} \left( \left( \frac{1 - \beta d}{1 + d} \right)^2 - \delta \lambda \right), \frac{\delta - \lambda}{1 + \delta} \right\}$$

□

**Observación** De este enunciado, con la ecuación (3.16) es necesario reducir la constante  $\rho := \rho(\lambda, d, \mathcal{K})$  a una tal que:

$$\lambda < \frac{1 - dK\rho^2/2}{1 + 2d}$$

y que además satisface (3.8).

Para continuar con la técnica presentada en  $\mathbb{R}^d$ , se debe dar una versión para variedades de las funciones  $\langle \xi, \cdot \rangle$ . Se presentarán las funciones  $b_\xi$  del mismo modo que fueron definidas en [3]. Luego se considerará un  $\eta$ -red del espacio  $\mathcal{UK}$  para finalmente con ellos probar la rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas.

**Definición 3.12** Sea  $\xi := (x, w_x) \in \mathcal{UK}$ . Consideremos la función:

$$\begin{aligned} b_\xi : B_g(x, 2\rho) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow \langle w_x, v_x(y) \rangle \end{aligned}$$

donde la función  $v_x$  esta definida en 3.2. Cabe destacar que la función  $b_\xi$  está bien definida gracias la lema 3.2 y es suave dada la suavidad de la inversa del mapeo exponencial.

**Lema 3.13** (ver [3]) Las siguientes afirmaciones se satisfacen:

(i) Para todo  $\xi = (x, p) \in \mathcal{UK}$  se cumple que:

$$\nabla b_{(x,p)}(x) = p \in \mathcal{T}_x \mathcal{M}. \quad (3.17)$$

(ii) Existe un  $L > 0$  tal que para todo  $\xi = (y, p) \in \mathcal{UK}$  y  $x, z \in B_g(y, \rho)$  se cumple que:

$$|b_\xi(z) - (b_\xi(x) + \langle \nabla b_\xi(x), v_x(z) \rangle_x)| \leq L|v_x(z)|^2. \quad (3.18)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\xi = (x, p) \in \mathcal{UK}$ . Gracias a que la función  $b_\xi$  se define como:

$$z \mapsto b_\xi(z) = \langle p, \exp_x^{-1}(z) \rangle_x,$$

y que  $D \exp_x^{-1}(x)$  es la identidad sobre  $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$ , sigue, por regla de la cadena que la derivada de  $b_\xi$  en  $x$  es:

$$Db_\xi(x)(\cdot) = \langle p, \cdot \rangle_x,$$

esto ya que  $\langle p, \cdot \rangle_x$  es una función lineal en  $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$ .

Por otro lado, gracias a la suavidad del mapeo exponencial, la función:

$$(\xi, x) := ((y, p), x) \mapsto b_\xi := \langle p, v_y(x) \rangle_y$$

es suave, siempre que  $d_g(x, y) \leq 2\rho$ . Con esto, la segunda expresión sigue de la expansión del polinomio de Taylor de orden 2 de la función  $b_\xi$  en el punto  $x$  más la compacidad de  $\mathcal{K}$  como de  $\mathcal{UK}$ .  $\square$

**Corolario 3.14** (ver [3]) Sea  $\alpha > 0$  dado por la proposición 3.11. Entonces existe un  $r \in (0, \rho/2)$  tal que para todo  $\hat{\xi} = (x, p_x) \in \mathcal{UK}$ ,  $\xi = (y, p) \in B_D(\hat{\xi}, r)$  y  $z \in B_g(x, r)$  tenemos que:

$$|\nabla b_{(y,p)}(x) - p_x|_x < \frac{\alpha}{4},$$

y también

$$|b_\xi(z) - (b_\xi(x) + \langle \nabla b_\xi(x), v_x(z) \rangle_x)| \leq \frac{\alpha}{4}|v_x(z)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación, como la función:

$$(\xi, x) := ((y, p), x) \rightarrow Db_\xi(x) := \langle p, Dv_y(x)(\cdot) \rangle_y,$$

es continua gracias a la suavidad del mapeo exponencial. Por la compacidad de  $\mathcal{K}$ , de  $\mathcal{UK}$  y el lema 3.13, (3.17), se deduce (gracias a la uniforme continuidad) que existe un  $r > 0$  tal que para todo  $\hat{\xi} = (x, p_x)$ ,  $\xi = (y, p) \in \mathcal{UK}$  tales que  $D_g(\hat{\xi}, \xi) < r$  se satisface:

$$|\nabla b_{(y,p)}(x) - \nabla b_{(x,p_x)}(x)|_x = |\nabla b_{(y,p)} - p_x| < \frac{\alpha}{4}$$

Para la segunda afirmación, sea  $L > 0$  dado por el lema 3.13. Ajustando  $r > 0$  de ser necesario tal que  $r \leq \min\{\rho/2, \alpha/4L\}$ . Como  $|v_x(z)|_x = d_g(x, z)$ , si escogemos  $z \in B_g(x, r)$ , gracias a (3.18) se concluye el resultado.  $\square$

**Lema 3.15** *Existe un  $\eta \in (0, \rho)$  tal que para todo  $\tau \in (0, T_\infty)$ ,  $q \in \sec^+(\tau)$  y  $\xi = (y, p) \in B_D(\hat{\xi}, \eta)$ , se cumple que:*

$$b_\xi(z) \leq b_\xi(x) - \alpha d_g(x, z), \quad \forall z \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau),$$

y además:

$$\langle \nabla b_\xi(x), q \rangle_x \geq \frac{7}{4}\alpha,$$

Donde  $\hat{\xi} := (x, p_{x,q})$  definido en la proposición 3.11 y  $\mathcal{U}_\xi := B_g(y, 2\eta)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $r \in (0, \rho/2)$  dado por el corolario 3.14 y considérese  $\eta \in (0, r/3)$ . Sea  $q \in \sec^+(\tau)$  y  $\hat{\xi} := (x, p_{x,q})$  como en la proposición 3.11. Sea  $\xi = (y, p) \in B_D(\hat{\xi}, \eta)$ . Sigue que  $d_g(x, y) < \eta$  y luego:

$$\mathcal{U}_\xi := B_g(y, 2\eta) \subseteq B(x, r) \quad \wedge \quad \text{diam}(\mathcal{U}_\xi) \leq \rho.$$

Por el corolario 3.14, se sabe que  $|\nabla b_\xi(x) - p_{x,q}|_x \leq \alpha/4$ . Aplicándolo sobre la proposición 3.11 más la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se concluye que para todo  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau) \setminus \{x\}$ :

$$\langle \nabla b_\xi(x), u_x(z) \rangle_x \leq -\frac{7}{4}\alpha \quad \wedge \quad \langle \nabla b_\xi(x), q \rangle_x \geq \frac{7}{4}\alpha.$$

Por otro lado, utilizando el corolario 3.14 y recordando que  $|v_x(z)|_x = d_g(x, z)$ , se obtiene que para todo  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau) \setminus \{x\}$ :

$$\begin{aligned} b_\xi(z) - b_\xi(x) &\leq \langle \nabla b_\xi(x), v_x(z) \rangle_x + \frac{\alpha}{4}|v_x(z)|_x \\ &= \left( \langle \nabla b_\xi(x), u_x(z) \rangle_x + \frac{\alpha}{4} \right) d_g(x, z) \\ &\leq \left( -\frac{7\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) d_g(x, z) \leq -\alpha d_g(x, z). \end{aligned}$$

$\square$

Tal como en el capítulo 2, en lo que sigue se define una  $\eta$ -red para simular una integral en versión discreta. Como cada espacio tangente tiene su propia esfera unitaria, no resulta

conveniente que esta  $\eta$ -red sea sobre cada  $\mathcal{S}^{d-1} \subseteq \mathcal{T}_x\mathcal{M}$ , sino que será sobre el conjunto  $\mathcal{UK}$  del que ya sabemos que es compacto con la métrica  $D_g$ . Se denominará  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{UK}$  como una  $\eta$ -red finita, es decir:

$$\forall (x, p) \in \mathcal{UK}, \exists (y, q) \in \mathcal{F} \text{ tal que } (x, p) \in B_D((y, q), \eta). \quad (3.19)$$

En lo que sigue, continuando con la notación del lema 3.15, para  $\xi = (y, p) \in \mathcal{UK}$  se denotará como  $\mathcal{U}_\xi := B_g(y, \eta)$ .

**Corolario 3.16** *Para todo  $\tau \in (0, T_\infty)$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $t \in [\tau, \tau + \delta]$  existe  $\xi(y, p) \in \mathcal{F}$  tal que:*

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(\gamma(\tau)) \geq \alpha d_g(\gamma(t), \gamma(\tau)).$$

*Además, en la fórmula se puede reemplazar  $\tau$  por  $s \in (0, \tau]$  tal que  $\gamma(s) \in \mathcal{U}_\xi$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x = \gamma(\tau)$ . Veamos que:

$$\forall \tau \in I, \exists \delta > 0, \forall t \in (\tau, \tau + \delta), \exists t \in \text{sec}^+(\tau), |q_t - u_x(\gamma(t))|_x < \frac{\alpha}{4}.$$

En efecto, si se supone lo contrario, entonces para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $t \in (\tau, \tau + \varepsilon)$  tal que  $\text{dist}(u_x(\gamma(t)), \text{sec}^+(\tau)) > \alpha/4$ . Con esto, es fácil construir una sucesión  $t_n \searrow \tau$  tal que  $u_x(\gamma(t_n))$  siempre esté a una distancia mayor que  $\alpha/4$  del conjunto  $\text{sec}^+(\tau)$ . Dado que  $\mathcal{U}_x\mathcal{M}$  es compacto, se obtiene una contradicción.

Sea  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ ,  $q_t$  tal que  $|q_t - u_x(\gamma(t))|_x < \alpha/4$  y  $p_{x, q_t}$  asociado de la proposición 3.11. Como  $\mathcal{F}$  es una  $\eta$ -red de  $\mathcal{UK}$ , entonces existe  $\xi := (y, p) \in \mathcal{F}$  y  $\mathcal{U}_\xi := B_g(y, \eta)$  de modo que satisfagan las hipótesis del lema 3.15. Del corolario 3.14, se obtiene que:

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(x) \geq \left( \langle \nabla b_\xi(x), u_x(\gamma(t)) \rangle_x - \frac{\alpha}{4} \right) |v_x(\gamma(t))|_x, \quad (3.20)$$

cuando  $t \geq \tau$  y  $\gamma(t) \in \mathcal{U}_\xi$ .

Como se quiere acotar el producto interno de (3.20), utilizando la desigualdad de Cauchy-Schawrtz y que  $|\nabla b_\xi(x)|_x \leq |\nabla b_\xi(x) - \xi_{x, q}|_x + |\xi_{x, q}|_x \leq 2$ , resulta que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla b_\xi(x), u_x(\gamma(t)) \rangle_x &\geq \langle \nabla b_\xi(x), q_t \rangle_x - |\nabla b_\xi(x)|_x |q_t - u(\gamma(t))|_x \\ &\geq \frac{7\alpha}{4} - 2|q_t - u(\gamma(t))|_x \geq \frac{7\alpha}{4} - 2\frac{\alpha}{4} \geq \frac{5\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Combinando con (3.20) se deduce que:

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(x) \geq \alpha |v_x(\gamma(t))|_x = \alpha d_g(x, \gamma(t)), \quad (3.21)$$

con lo que se concluye la primera parte del corolario.

Para la segunda parte, al considerar el lema 3.15 con  $x$  y  $p_{x,q}$ , se tiene que:

$$b_\xi(\gamma(s)) \leq b_\xi(x) - \alpha d_g(x, \gamma(s)), \quad \forall s \leq \tau, \quad \gamma(s) \in \mathcal{U}_\xi,$$

que al sumarla con la desigualdad (3.21) resulta:

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(\gamma(s)) \geq \alpha(d_g(x, \gamma(s)) + d_g(x, \gamma(t))) \geq \alpha d_g(\gamma(t), \gamma(s)),$$

para todo  $s < \tau$  tal que  $\gamma(s) \in \mathcal{U}_\xi$  y  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ . El resultado para  $t = \tau$  se obtiene directamente del lema 3.15.  $\square$

Ya se tiene todo lo necesario para proceder con la última parte de la demostración. Antes de seguir, se verá un símil a la función de anchura, para medir que tanto a variado la curva y si ha tenido algún incremento significativo con respecto a las direcciones de la  $\eta$ -red. Para el caso real, ver la definición 2.24.

**Definición 3.17** (*Función Anchura Direccional Local*) Sea  $\mathcal{F}$  una  $\eta$ -red de  $\mathcal{UK}$ . Para  $\xi := (y, p) \in \mathcal{F}$ , considérese la función  $b_\xi$  definida en 3.12 y nótese que:

$$\mathcal{U}_\xi := B_g(y, 2\eta) \subseteq B_g(y, 2\rho) := \text{dom}(b_\xi).$$

Se define la función de anchura local de  $K \subseteq \mathcal{M}$  con respecto a la dirección  $\xi$  como:

$$W_\xi(K) := \text{diam}\{b_\xi(z) \mid z \in K \cap \mathcal{U}_\xi(\tau)\}, \quad (3.22)$$

donde se usará la convención de que  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ .

Para no sobrecargar la notación, se denotará por  $W_\xi(\tau) := W_\xi(\Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau))$ . Además, se considerará la función:

$$W_{\mathcal{F}} := \sum_{\xi \in \mathcal{F}} W_\xi. \quad (3.23)$$

**Observación** Notando que si  $\tau_1 \leq \tau_2 \implies \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau_1) \subseteq \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau_2)$ , implica que las funciones  $\tau \mapsto W_\xi(\tau)$  y  $\tau \mapsto W_{\mathcal{F}}(\tau)$  son crecientes.

**Proposición 3.18** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$  y  $[a, b] \subseteq I$ . Entonces existe un  $\alpha' > 0$  tal que para toda partición:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad \text{de } [a, b],$$

se cumple que:

$$\sum_{j=1}^n d_g(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \frac{1}{\alpha'} (W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a)). \quad (3.24)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $[a, b] \subseteq I$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  una partición. Del corolario 3.16 se sabe que para todo  $\tau \in [a, b]$ , existe un  $\delta_\tau > 0$  tal que para  $t \in [\tau, \delta_\tau)$ , existe un  $\xi_t \in \mathcal{F}$  que satisface:

$$b_{\xi_t}(\gamma(t)) - b_{\xi_t}(\gamma(s)) \geq \alpha d_g(\gamma(t), \gamma(s)), \quad \forall s \leq \tau < t, \quad s, t \in (\tau - \delta_\tau, \tau + \delta_\tau),$$

donde, si es necesario, hay que reducir la constante  $\delta_\tau$  para que  $\gamma((\tau - \delta_\tau, \tau + \delta_\tau)) \subset \mathcal{U}_{\xi_t}$ .

Considérese  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Al recubrir  $[t_i, t_{i+1}]$  con  $\{(\tau - \delta_\tau, \tau + \delta_\tau) : \tau \in [t_i, t_{i+1}]\}$ , debido a la compacidad del intervalo, obtenemos un recubrimiento finito ordenado de forma creciente en  $\tau_k$ :

$$[t_i, t_{i+1}] \subseteq \cup_{k=1}^l (\tau_k - \delta_k, \tau_k + \delta_k),$$

de donde se puede obtener una partición del intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , a saber  $t_i = t_i^0 < t_i^1 < \dots < t_i^l = t_{i+1}$  que satisface:

$$\tau_k - \delta_k < t_i^{k-1} \leq \tau_k \leq t_i^k < \tau_k + \delta_\tau, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Gracias al corolario 3.16 se tiene que para todo  $k \in \{1, 2, \dots, l\}$  existe un  $\xi_k \in \mathcal{F}$  tal que al fijar  $\tau = \tau_k$  y  $t = t_i^k$ :

$$b_{\xi_k}(\gamma(t_i^k)) - b_{\xi_k}(\gamma(s)) \geq \alpha d_g(\gamma(t_i^k), \gamma(s)), \quad \forall s \in [0, \tau), \quad \gamma(s) \in \mathcal{U}_{\xi_k}, \quad (3.25)$$

donde la expresión anterior sólo interesa cuando  $s \leq t_i^{k-1}$ . Recordando que el lema 2.8 se demostraba con argumentos puramente métricos, su demostración puede ser llevada al contexto actual de variedades Riemannianas. De aquí:

$$d_g(\gamma(s), \gamma(t_i^k)) \geq \frac{1-\lambda}{2} d_g(\gamma(t_i^{k-1}), \gamma(t_i^k)), \quad \forall s < t_i^{k-1},$$

de donde se concluye al combinarlo con (3.25) que:

$$b_{\xi_k}(\gamma(t_i^k)) - b_{\xi_k}(\gamma(s)) \geq \frac{(1-\lambda)\alpha}{2} d_g(\gamma(t_i^{k-1}), \gamma(t_i^k)), \quad \forall s < t_i^{k-1}, \quad \gamma(s) \in \mathcal{U}_{\xi_k}.$$

Con esto, más la definición de la función de anchura local 3.17 se obtiene:

$$W_{\xi_k}(t_i^k) - W_{\xi_k}(t_i^{k-1}) \geq \frac{(1-\lambda)\alpha}{2} d_g(\gamma(t_i^{k-1}), \gamma(t_i^k)),$$

y luego, pasando a  $W_{\mathcal{F}}$ :

$$W_{\mathcal{F}}(t_i^k) - W_{\mathcal{F}}(t_i^{k-1}) \geq \frac{(1-\lambda)\alpha}{2} d_g(\gamma(t_i^{k-1}), \gamma(t_i^k)).$$

Sumando sobre  $k$ , luego sobre  $i$ , notando que a la izquierda son sumas telescópicas y a la derecha usando desigualdad triángula:

$$W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a) \geq \frac{(1-\lambda)\alpha}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^l d_g(\gamma(t_i^{k-1}), \gamma(t_i^k)) \geq \frac{(1-\lambda)\alpha}{2} \sum_{i=0}^{n-1} d_g(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

con lo que se concluye la proposición.  $\square$

**Teorema 3.19** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva continua con  $\lambda < 1/(1+2d)$ . Entonces  $\gamma$  tiene largo acotado que depende proporcionalmente de una constante  $\alpha' := \alpha'(d, \lambda)$  y de  $W_{\mathcal{F}}(K)$  con  $K \subseteq \mathcal{M}$  tal que  $\gamma(I) \subseteq K$ .*

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue igual que el caso real, teorema 2.26.  $\square$

**Observación** Las restricciones sobre el valor de  $\lambda$  en el teorema 3.19 proceden, al igual que en el caso real, del lema 3.10 y la proposición 3.11, por lo que para el caso de variedades 2 dimensionales, gracias a la sección 2.3 del capítulo 2, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.20** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva continua donde  $\mathcal{M}$  es una variedad Riemanniana de dimensión 2. Entonces  $\gamma$  tiene largo acotado que depende proporcionalmente de una constante  $\alpha' := \alpha'(d, \lambda)$  y de  $W_{\mathcal{F}}(\mathcal{K})$  con  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  compacto tal que  $\gamma(I) \subseteq \mathcal{K}$ .*

# Capítulo 4

## $\lambda$ -curvas Discontinuas en Variedades Riemannianas

En este capítulo se desechará la hipótesis de continuidad sobre las  $\lambda$ -curvas, es decir, se trabajará con funciones  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  inyectivas, tales que satisfacen la desigualdad (2.1), tal como en la primera sección del capítulo 2 (Propiedades de las  $\lambda$ -curvas).

Se probará que toda función inyectiva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  con imagen contenida en un compacto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  y que satisface la desigualdad (3.3) con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$ , define una curva (no necesariamente continua) de largo acotado, donde  $\mathcal{M}$  es una variedad Riemanniana de dimensión  $d$  mayor o igual a 2.

Dada una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  (no necesariamente continua), se extiende naturalmente la definición de largo de curva como:

$$\ell(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^k d_g(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) \right\}, \quad (4.1)$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones creciente y finitas  $\{t_i\}_{i=0}^k \subseteq I$ . Se dirá que  $\gamma$  es rectificable si tiene largo finito, es decir, si  $\ell(\gamma)$  es finito.

La estrategia de demostración es extender el resultado dado por Daniilidis et al en [3], donde en gran parte corresponderán a proposiciones y lemas bastante técnicos, pero siempre pensando en el desarrollo del capítulo 3. Uno de los resultados que se caen es la proposición 3.7, la que en su desarrollo deja en evidencia la necesidad de que la curva sea al menos continua por la derecha, por lo que la parte central del estudio es ver que sucede con este tipo de discontinuidades.

En la sección 3.1 del capítulo 3 se dieron a conocer 2 resultados que resultan fundamentales en el desarrollo de este capítulo, a saber, la ley del coseno (lema 3.3) y el lema 3.2 sobre el dominio del mapeo exponencial.

## 4.1. Rectificabilidad

Gracias a la proposición 2.6, se sabe que la cantidad de puntos de discontinuidad que puede tener una  $\lambda$ -curva es a lo más numerable. En las expresiones que siguen a continuación, se le dará mayor relevancia a las discontinuidades por la derecha, dado que la perspectiva estará en ocupar las secantes por la derecha y rescatar una versión de la proposición 3.7.

Para  $\eta > 0$  denotaremos:

$$D^+(\eta) := \{\tau \in I : d_g(\gamma(\tau), \gamma(\tau^+)) > \eta\},$$

donde  $\gamma(\tau^+) := \lim_{t \searrow \tau} \gamma(\tau)$ , que siempre existe gracias a la proposición 2.4.

**Proposición 4.1** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva (no necesariamente continua). Entonces para  $\eta > 0$ , existe un  $\alpha > 0$  tal que para todo  $x \in \mathcal{M}$ :*

$$\max\{|\gamma(D^+(\eta)) \cap B_g(x, \alpha\eta)|, |\gamma(D^-(\eta)) \cap B_g(x, \alpha\eta)|\} \leq 2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in \mathcal{M}$ . Sean  $\{\tau_i\} \in D^+(\eta)$ , denotemos por  $x_i := \gamma(\tau_i)$  y  $x'_i := \gamma(\tau_i^+)$  para  $i = 1, 2, 3$ . Considérese que  $\{x_i\}_{i=1}^3 \subseteq B_g(x, \alpha\eta)$  para  $\alpha > 0$ . Usando desigualdad triangular más la proposición 2.8:

$$(1 - 2\alpha)\eta \leq d_g(x_2, x'_2) - d_g(x_2, x_3) \leq d_g(x'_2, x_3) \leq \frac{2}{1 - \lambda} d(x_1, x_3) \leq \frac{4\alpha\eta}{1 - \lambda},$$

de donde se deduce que  $\alpha \geq (1 - \lambda)/(6 - 2\lambda)$ . Escogiendo  $\alpha$  menor esta constante, se obtiene una contradicción.

El caso cuando con discontinuidades por la izquierda es análogo. □

**Observación** Dado que la curva  $\gamma$  se considera contenida en un compacto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ , tenemos que para todo  $\eta$ , el cardinal de  $D^+(\eta)$  es finito, más aún, está acotado por  $2N(\eta)$ , donde  $N(\eta)$  es el número de bolas de radio  $\alpha\eta$  necesarias para recubrir  $K$ .

Por otro lado, gracias a que la función distancia es continua, las proposiciones que provienen de la desigualdad de  $\lambda$ -curvas que en su resultado sean formulados con la función distancia, se extienden a los puntos límites, en este caso, a  $x'_2$ .

En lo que sigue se va a ver el comportamiento de la curva  $\gamma$  en un punto de discontinuidad  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\eta)$ , para  $\eta > 0$  adecuado. Siguiendo la notación de la proposición 4.1, para todo  $\tau \in D^+$ , llamaremos  $x := \gamma(\tau)$  y  $x' := \gamma(\tau^+)$ . Gracias al lema 3.2, se obtiene el siguiente resultado como consecuencia de la continuidad de la inversa del mapeo exponencial.

**Proposición 4.2** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva discontinua. Para  $\tau \in D^+ \setminus D^+(2\rho)$ , es decir que  $d(x, x') < 2\rho$ , entonces  $\text{sec}^+(\tau) = \{u_x(x')\}$ .*

Debido a la proposición 4.2, ya no es posible obtener una versión de la proposición 3.7 en los puntos de discontinuidad (del mismo modo que lo realizado en el capítulo anterior), por

esto, se va a definir un nuevo punto  $\bar{x}$  que va a estar entre  $x$  y  $x'$  en el que se realizará todo el análisis. Para esto, supongamos que  $d_g(x, x') < 2\rho$ , luego, por lema 3.2, sabemos que existe una única geodésica  $\theta$  tal que parte en  $\theta(0) := x$  y  $\dot{\theta}(0) = u_x(x')$ , donde la función  $u_x$  fue definida en la expresión 3.2. Con esto, se sabe  $\theta(d_g(x, x')) = x'$ , por lo que para  $\beta > 0$  fijo, se define  $\bar{x} := \theta((1 - \beta)d_g(x, x'))$ .

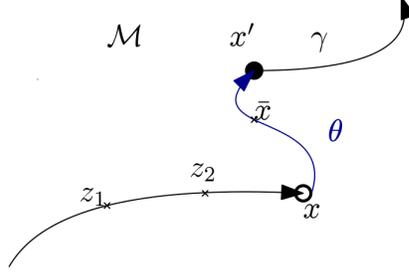


Figura 4.1: Discontinuidad por la derecha.

A continuación, tanto los lemas técnicos como proposiciones estarán enfocados en probar que existe un  $\beta > 0$  tal que al ver la evolución de la curva desde  $\bar{x}$ , el crecimiento de esta pueda ser estimado por la función  $W_{\mathcal{F}}$  (ver definición 3.17). Para iniciar, se va a calcular el valor de  $A_{\bar{x}}(\Gamma(\tau))$  cuando  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$ , es decir, que  $\tau$  es un punto de discontinuidad por la derecha y que  $d_g(x, x') < \rho$ .

**Lema 4.3** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva y  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$ . Sea  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  abierto tal que  $\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \rho$ . Entonces:*

$$A_{x'}(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)) \leq -\lambda - \frac{K\rho^2}{2},$$

donde  $A_{x'}(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau))$  es el ínfimo de la definición 3.8 usando las funciones  $u_{x'}$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $x' := \lim_{t \searrow \tau} \gamma(t)$ , existe un  $t > \tau$  tal que  $x_t := \gamma(t) \in \mathcal{U}$ . Gracias a la proposición 3.9 y que la función sobre conjuntos  $A_{x_t}$  es decreciente con respecto a la inclusión, se obtiene:

$$A_{x_t}(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)) \geq A_{x_t}(\Gamma_{\mathcal{U}}(t)) \geq -\lambda - \frac{K\rho^2}{2}.$$

La expresión anterior, sumada a la continuidad de la métrica y de la función  $u_x(z)$  lejos de  $z$  se concluye el resultado.  $\square$

**Lema 4.4** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva,  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$  y  $\mathcal{U}$  vecindad abierta de  $x := \gamma(\tau)$  de diámetro menor que  $\rho$ . Para  $\beta \in (0, (1 - \lambda)/4)$ ,  $\bar{x} := \theta((1 - \beta)d_g(x, x'))$  y  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$  se cumple:*

$$\frac{1 - 2\beta - \lambda}{2} \leq \frac{d_g(\bar{x}, z)}{d_g(x, x')}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1 - 4\beta - \lambda}{1 - 2\beta - \lambda} \leq \frac{d_g(x', z)}{d_g(\bar{x}, z)} \leq \frac{1 - \lambda}{1 - 2\beta - \lambda}. \quad (4.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$ . Por el lema 2.8 y continuidad de la distancia  $d_g$  se tiene que:

$$\frac{1-\lambda}{2}d_g(x, x') \leq d_g(z, x).$$

Como  $d_g(\bar{x}, x') = \beta d_g(x', x)$ , se deduce usando además la desigualdad triangular que:

$$\frac{1-\lambda}{2}d_g(x, x') \leq d_g(\bar{x}, z) + d_g(\bar{x}, x') \leq d_g(\bar{x}, z) + \beta d_g(x, x'),$$

donde al dividir por  $d_g(x, x')$  se obtiene la primera parte del lema.

Antes de probar la desigualdad (4.3), se nota primero que gracias a la desigualdad (4.2) y la desigualdad triangular se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1-2\beta-\lambda}{2}d_g(x, x') &\leq d_g(\bar{x}, z) \leq d_g(\bar{x}, x') + d_g(x', z) \\ &\leq \beta d_g(x, x') + d_g(x', z). \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\frac{1-4\beta-\lambda}{2} \leq \frac{d_g(x', z)}{d_g(x, x')}. \quad (4.4)$$

Finalmente, gracias a la expresión (4.4) se puede estimar:

$$d_g(\bar{x}, z) \leq \beta d_g(x, x') + d_g(x', z) \leq \left( \frac{2\beta}{1-4\beta-\lambda} + 1 \right) d_g(x', z).$$

y análogamente:

$$d_g(x', z) \leq \beta d_g(x, x') + d_g(\bar{x}, z) \leq \left( \frac{2\beta}{1-2\beta-\lambda} + 1 \right) d_g(\bar{x}, z),$$

de donde se concluye el lema.  $\square$

**Lema 4.5** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva,  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$  y  $\mathcal{U}$  vecindad abierta de  $x := \gamma(\tau)$  de diámetro menor que  $\rho$ . Para  $\beta \in (0, (1-\lambda)/4)$ ,  $\bar{x} := \theta((1-\beta)d_g(x, x'))$  y  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$  se cumple:

$$d_g(\bar{x}, z)^2 - d_g(x', z)^2 \geq -d_g(\bar{x}, x')^2(K\rho^2 + 1) - 2d_g(\bar{x}, x')d_g(\bar{x}, z), \quad (4.5)$$

$$d_g(\bar{x}, z)^2 - d_g(x', z)^2 \leq 2d_g(\bar{x}, x')^2 + d_g(\bar{x}, x')(K\rho^2 + \lambda). \quad (4.6)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$ . Por la ley del coseno 3.3:

$$\begin{aligned} d_g(\bar{x}, z)^2 - d_g(x', z)^2 &\geq -Kd_g(\bar{x}, x')^2d_g(\bar{x}, z)^2 - d_g(\bar{x}, x')^2 + 2\langle v_{\bar{x}}(x'), v_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} \\ &= -d_g(\bar{x}, x')^2(Kd_g(\bar{x}, z)^2 + 1) + 2\langle v_{\bar{x}}(x'), v_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} \\ &\geq -d_g(\bar{x}, x')^2(K\rho^2 + 1) - 2d_g(\bar{x}, x')d_g(\bar{x}, z), \end{aligned}$$

donde en la tercera línea se utilizó que  $\bar{x}, z \in \mathcal{U}$ , la desigualdad de Cauchy-Schwartz y que  $|v_{\bar{x}}(z)|_{\bar{x}} = d_g(\bar{x}, z)$  para obtener (4.5).

Para la segunda parte del lema. El lema 4.3 dice que:

$$\langle u_{x'}(x), u_{x'}(z) \rangle_{x'} \geq -\lambda - \frac{K\rho^2}{2},$$

con lo que se deduce:

$$\langle v_{x'}(x), v_{x'}(z) \rangle_{x'} \geq d_g(x, x')d_g(z, x') \left( -\lambda - \frac{K\rho^2}{2} \right). \quad (4.7)$$

Por último, usando la ley del coseno (3.3), (4.7) y que  $\bar{x}, x', z \in \mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned} d_g(\bar{x}, z)^2 - d(x', z)^2 &\leq d_g(\bar{x}, x')^2 - 2\langle v_{x'}(\bar{x}), v_{x'}(z) \rangle_{x'} + Kd(\bar{x}, x')^2 d(z, x')^2 \\ &\leq d_g(\bar{x}, x')(1 + Kd_g(z, x')^2) + 2d_g(x, x')d_g(z, x')(\lambda + K\rho^2/2) \\ &\leq d_g(\bar{x}, x')(1 + K\rho^2) + 2d_g(x, x')d_g(z, x')(\lambda + K\rho^2/2). \end{aligned}$$

Ajustando  $\rho$  tal que  $K\rho^2 < 1$ , se concluye (4.6).  $\square$

**Proposición 4.6** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva discontinua,  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$  y  $\mathcal{U}$  vecindad abierta de  $x := \gamma(\tau)$  de diámetro menor que  $\rho$ . Para  $\beta > 0$  pequeño,  $\bar{x} := \theta((1 - \beta)d_g(x, x'))$  se tiene que:*

$$A_{\bar{x}}(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)) \geq - \left[ \frac{4\beta(1 - \lambda)}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} + \frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} \left( \lambda + \frac{K\rho^2}{2} \right) + \frac{K\rho^2}{2} \left( 1 + \frac{(1 - \lambda)^4}{(1 - 2\beta - \lambda)^4} \right) \right].$$

DEMOSTRACIÓN. Sean  $z_1, z'_2 \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$ . Para simplificar la notación en el desarrollo de la proposición, se definirán las siguientes cantidades:

$$e := d_g(z_1, z_2), \quad \sigma := d_g(x, x'),$$

y para  $i \in \{1, 2\}$ :

$$d_i := d_g(x, z_i), \quad \bar{d}_i(\bar{x}, z_i), \quad d'_i = d_g(x', z_i).$$

En términos de lo anterior, al calcular la cantidad  $d_g(\bar{x}, x')$  resulta ser  $\beta\sigma$ .

Usando dos veces la ley del coseno, a saber, con  $z_1, z_2, \bar{x}$  y  $z_1, z_2, x'$ , se obtiene que:

$$-e^2 + \bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2 - 2\bar{d}_1\bar{d}_2\langle u_{\bar{x}}(z_1), u_{\bar{x}}(z_2) \rangle_{\bar{x}} \leq K\bar{d}_1^2\bar{d}_2^2 \quad (4.8)$$

$$e^2 - d_1'^2 - d_2'^2 + 2d_1'd_2'\langle u_{x'}(z_1), u_{x'}(z_2) \rangle_{x'} \leq Kd_1'^2d_2'^2, \quad (4.9)$$

al sumar (4.8) con (4.9) y usar el lema 4.3 sobre el producto en  $\mathcal{T}_{x'}\mathcal{M}$ , para luego dividir por  $2\bar{d}_1\bar{d}_2$ , se deduce que:

$$\langle u_{\bar{x}}(z_1), u_{\bar{x}}(z_2) \rangle_{\bar{x}} \geq \frac{\bar{d}_1^2 - d_1'^2}{2\bar{d}_1\bar{d}_2} + \frac{\bar{d}_2^2 - d_2'^2}{2\bar{d}_1\bar{d}_2} - \frac{d_1'd_2'}{\bar{d}_1\bar{d}_2} \left( \lambda + \frac{K\rho^2}{2} \right) - \frac{K\bar{d}_1\bar{d}_2}{2} \left( 1 + \frac{d_1'^2d_2'^2}{\bar{d}_1^2\bar{d}_2^2} \right). \quad (4.10)$$

Se procederá a acotar los dos primeros términos de la expresión (4.10). Usando el lema 4.5, fórmula (4.5), se obtiene que:

$$\bar{d}_i^2 - d_i'^2 \geq -(\beta\sigma)^2(K\rho^2 + 1) - 2\beta\sigma\bar{d}_i,$$

que al dividir por  $2\bar{d}_1\bar{d}_2$  y usar el lema 4.4, fórmula (4.2) se deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}_1^2 - d_i'^2}{2\bar{d}_1\bar{d}_2} &\geq -\frac{(\beta\sigma)^2(K\rho^2 + 1)}{2\bar{d}_1\bar{d}_2} - \frac{2\beta\sigma\bar{d}_i}{2\bar{d}_1\bar{d}_2} \\ &\geq -\frac{\beta^2(K\rho^2 + 1)4}{2(1 - 2\beta - \lambda)^2} - \frac{4\beta}{2(1 - 2\beta - \lambda)} \\ &\geq -\frac{4\beta^2}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} - \frac{2\beta}{1 - 2\beta - \lambda} \\ &= \frac{-2\beta + 2\beta\lambda}{(1 - 2\beta - \lambda)^2}, \end{aligned}$$

donde en la tercera línea se utilizó que  $K\rho^2 < 1$ . Reemplazando en (4.10), usando que  $\bar{d}_i \leq \rho$  y el lema 4.4, fórmula (4.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle u_{\bar{x}}(z_1), u_{\bar{x}}(z_1) \rangle_{\bar{x}} &\geq -\frac{4\beta(1 - \lambda)}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} - \frac{d'_1 d'_2}{\bar{d}_1 \bar{d}_2} \left( \lambda + \frac{K\rho^2}{2} \right) - \frac{K\rho^2}{2} \left( 1 + \frac{d_1'^2 d_2'^2}{\bar{d}_1^2 \bar{d}_2^2} \right), \\ &\geq -\left[ \frac{4\beta(1 - \lambda)}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} + \frac{(1 - \lambda)^2}{(1 - 2\beta - \lambda)^2} \left( \lambda + \frac{K\rho^2}{2} \right) + \frac{K\rho^2}{2} \left( 1 + \frac{(1 - \lambda)^4}{(1 - 2\beta - \lambda)^4} \right) \right]. \end{aligned}$$

En esta última expresión, al notar que si tomamos límite  $(\beta, \rho) \rightarrow (0, 0)$  el lado derecho queda exactamente  $-\lambda$ , más la continuidad de la expresión con respecto a estos parámetros, se concluye que para  $\beta$  y  $\rho$  suficientemente pequeños tales que:

$$\langle u_{\bar{x}}(z_1), u_{\bar{x}}(z_1) \rangle_{\bar{x}} \geq -\lambda - \varepsilon \geq -\frac{1}{1 + 2\bar{d}}. \quad (4.11)$$

□

**Observación** La proposición 4.6 presenta una restricción implícita sobre las constantes  $\rho$  y  $\beta$ , por lo que desde ahora se asumirá que satisfacen (4.11).

De la proposición 4.2, se sabe que  $\sec^+(\tau) = \{u_x(x')\}$ . Como se quiere hacer el análisis sobre  $\bar{x}$ , mediante transporte paralelo a través de  $\theta$  (ver [5]), se puede trasladar  $u_x(x') \in \mathcal{U}_x \mathcal{M}$  a un vector  $q \in \mathcal{U}_{x'} \mathcal{M}$ . Es fácil probar que  $\bar{q} = u_{\bar{x}}(x')$  dado que  $\dot{\theta}(0) = u_x(x')$ .

Se verá una proposición análoga a la proposición 3.7 para  $\bar{x}$  y  $\bar{q}$ , siendo este uno de los últimos pasos para poder utilizar el argumento del capítulo 3:

**Proposición 4.7** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva discontinua,  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$  y  $\mathcal{U}$  vecindad abierta de  $x := \gamma(\tau)$  de diámetro menor que  $\rho$ . Para  $\beta > 0$  pequeño,  $\bar{x} := \theta((1 - \beta)d_g(x, x'))$  se tiene que:*

$$\langle \bar{q}, u_{\bar{x}}(x') \rangle_{\bar{x}} \leq 2K\rho^2 + \lambda + 4\beta. \quad (4.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $q := u_x(x')$ ,  $\bar{q} := u_{\bar{x}}(x')$  y  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$ . Usando la nomenclatura de la proposición 4.6,  $\sigma := d_g(x, x')$ ,  $\bar{d} := d_g(\bar{x}, z)$ ,  $d' := d_g(x', z)$ . De la ley del coseno 3.3, se deduce:

$$\langle u_{\bar{x}}(x'), u_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} \leq \frac{K(\beta\sigma)^2 \bar{d}^2}{2\beta\sigma\bar{d}} + \frac{\bar{d}^2 - d'^2}{2\beta\sigma\bar{d}} + \frac{\beta^2\sigma^2}{2\beta\sigma\bar{d}}. \quad (4.13)$$

Del lema 4.5, (4.6), al dividir por  $2\beta\sigma\bar{d}$  se obtiene que:

$$\frac{\bar{d}^2 - d'^2}{2\beta\sigma\bar{d}} \leq \frac{\beta\sigma}{\bar{d}} + \frac{d'}{\bar{d}} \frac{K\rho^2 + \lambda}{2}, \quad (4.14)$$

por lo que juntando (4.13) y (4.14) se deduce:

$$\langle u_{\bar{x}}(x'), u_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} \leq \frac{K\beta\sigma\bar{d}}{2} + \frac{3\beta\sigma}{2\bar{d}} + \frac{d'}{\bar{d}} \frac{K\rho^2 + \lambda}{2}.$$

En lo que sigue del desarrollo algebraico, se utilizará que  $\beta\sigma\bar{d} \leq \rho^2$  y el lema 4.4 para concluir que:

$$\begin{aligned} \langle u_{\bar{x}}(x'), u_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} &\leq \frac{K\rho^2}{2} + \frac{3\beta}{1 - \lambda - 2\beta} + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda - 2\beta} \left( \frac{K\rho^2 + \lambda}{2} \right), \\ &= \frac{3\beta}{1 - \lambda - 2\beta} + K\rho^2 \left( \frac{1 - \lambda - \beta}{1 - \lambda - 2\beta} \right) + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda - 2\beta} \right), \\ &\leq 4\beta + 2K\rho^2 + \lambda, \end{aligned}$$

donde en la última línea, de ser necesario, se ajustaron  $\beta$  y  $\rho$  para que se satisfaga.  $\square$

Gracias a las proposiciones 4.6 y 4.7, ya se puede dar una versión de la proposición 3.11 para el caso en cuando  $\tau \in D^+$ . La demostración sigue casi igual a la dada en el caso en variedades Riemannianas y curvas continuas (Capítulo 3, proposición 3.11), por lo que sólo se darán los puntos claves donde se diferencian, ya que será necesario ajustar las constantes  $\rho$  y  $\beta$ .

**Proposición 4.8** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva con  $0 < \lambda < 1/(1 + 2d)$ . Entonces existe un  $\alpha > 0$  tal que para todo  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\rho)$ , existe un  $\xi_{\bar{x}} := (\bar{x}, p_{\bar{x}}) \in \mathcal{UM}$  tal que para todo abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$  con  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\text{diam}(\mathcal{U}) \leq \rho$ ,  $\{x, x', \bar{x}\} \subseteq \mathcal{U}$  y todo  $z \in \Gamma_{\mathcal{U}}(\tau)$  se satisface que:*

$$\langle p_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}(z) \rangle_{\bar{x}} \leq -2\alpha \quad \wedge \quad \langle p_{\bar{x}}, q_{\bar{x}} \rangle_{\bar{x}} \geq 2\alpha, \quad (4.15)$$

donde  $q_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}(x)$ .

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 4.6, se puede deducir que para  $\beta$  y  $\rho$  suficientemente pequeños, que:

$$A_{\bar{x}}(\Gamma(\tau)) \geq -\nu_{\lambda}(\beta)\lambda - 8\beta - 2K\rho^2 \geq -\frac{1}{1 + 2d}.$$

donde se recuerda que  $\nu_{\lambda}(\beta) \rightarrow 1$  cuando  $\beta \rightarrow 0$ .

Sea  $C_{\Gamma(\tau), \bar{x}} := u_{\bar{x}}(\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau))$ . Gracias a la proposición 3.10, se puede proyectar el vector  $\vec{0}$  sobre el conjunto  $\overline{cO}(C_{\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau), \bar{x}})$ . Llámese a este punto  $c$ , que satisface:

$$|c|_{\bar{x}} \geq \frac{1 + \mu d}{1 + d},$$

donde  $\mu := \nu_\lambda(\beta)\lambda + 8\beta + 2K\rho^2$ . Además, para  $\delta > 0$ , se define:

$$p_{\bar{x}} = \frac{\delta\bar{q} - c}{\|\delta\bar{q} - c\|}$$

Del mismo modo que al proposición 3.11, al estimar los productos entre  $p_{\bar{x}}$  contra  $\bar{q}$  y  $u_{\bar{x}}(z)$  para  $z \in C_{\Gamma_{\mathcal{U}}(\tau), \bar{x}}$  se obtiene las siguientes restricciones sobre  $\delta$ :

$$2K\rho^2 + 4\beta + \lambda < \delta < \frac{1}{2K\rho^2 + 4\beta + \lambda} \left( \frac{1 + \mu d}{1 + d} \right)^2,$$

desigualdad que resulta ser equivalente a:

$$\lambda < \frac{1 - 8\beta - 2K\rho^2 - 4\beta(1 + d) - 2K\rho^2(1 + d)}{1 + d + \nu_\lambda(\beta)d}. \quad (4.16)$$

Se puede notar que la expresión del lado derecho tiende a  $1/(1 + 2d)$  cuando  $(\rho, \beta) \rightarrow 0$ , luego, existen  $\rho$  y  $\beta$  mayores que 0, tales que la desigualdad (4.16) se satisface, y con esto, se concluye esta proposición.  $\square$

Ya teniendo una alternativa de la proposición principal del esquema de demostración del capítulo 3, se procederá a ver las propiedades respectivas de las funciones  $b_\xi$  (ver definición 3.12) y así concluir la rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas.

**Lema 4.9** (ver lema 3.15) *Existe un  $\eta \in (0, \rho)$  tal que para todo  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\eta)$  y para todo  $\xi = (y, p) \in B_D(\hat{\xi}, \eta)$ , se cumple que:*

$$b_\xi(z) \leq b_\xi(\bar{x}) - \alpha d_g(\bar{x}, z), \quad \forall z \in \Gamma_{\mathcal{U}_\xi}(\tau),$$

y además:

$$\langle \nabla b_\xi(\bar{x}), \bar{q} \rangle_{\bar{x}} \geq \frac{7}{4}\alpha.$$

Donde  $\hat{\xi} := (\bar{x}, p_{\bar{x}})$  y  $\bar{q}$  son los vectores definidos en la proposición 4.8 y  $\mathcal{U}_\xi := B_g(y, 2\eta)$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue exactamente igual al lema 3.15, intercambiando  $x := \gamma(\tau)$  por  $\bar{x}$ .  $\square$

Denominaremos por  $\mathcal{F}$  a una  $\eta$ -red de  $\mathcal{UK}$ , donde  $\eta$  está definido en el lema 3.15.

**Corolario 4.10** *Para todo  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\eta)$ , existe  $\xi := (y, p) \in \mathcal{F}$  y un  $\delta > 0$  tales que para todo  $t \in [\tau, \tau + \delta)$  se satisface:*

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(\gamma(\tau)) \geq \alpha d_g(\gamma(t), \gamma(\tau)).$$

Además, en la expresión anterior se puede reemplazar  $\tau$  por  $s \in (0, \tau]$  tal que  $\gamma(s) \in \mathcal{U}_\xi$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau \in D^+ \setminus D^+(\eta)$  y  $\hat{\xi} \in \mathcal{U}_{\bar{x}}\mathcal{K}$  dado por la proposición 4.8. Sea  $\xi \in \mathcal{F}$  tal que  $D_g(\hat{\xi}, \xi) < \eta$ . Por el corolario 3.14 se sabe que:

$$b_\xi(x') - b_\xi(\bar{x}) \geq \left( \langle \nabla b_\xi(\bar{x}), u_{\bar{x}}(x') \rangle_x - \frac{\alpha}{4} \right) |v_{\bar{x}}(x')|_{\bar{x}}.$$

Gracias al lema 4.9, se puede deducir de la desigualdad anterior que:

$$b_\xi(x') - b_\xi(\bar{x}) > \alpha |v_{\bar{x}}(x')|_{\bar{x}} = \alpha d_g(\bar{x}, x'),$$

donde recordamos que  $|v_{\bar{x}}(x')|_{\bar{x}} = d_g(\bar{x}, x')$ . Por último, al combinar lo anterior con el lema 4.9 para  $z = x$ , resulta que:

$$b_\xi(x') - b_\xi(x) > \alpha(d_g(\bar{x}, x') + d_g(\bar{x}, x)) \geq \alpha d_g(x, x').$$

Como se tiene que la desigualdad anterior es estricta,  $b_\xi$  continua y que  $x' := \lim_{t \rightarrow \tau} \gamma(t)$ , se concluye que debe existir un  $\delta > 0$  tal que:

$$b_\xi(\gamma(t)) - b_\xi(x) \geq \alpha d_g(x, \gamma(t)). \quad \forall t \in [\tau, \tau + \delta).$$

La segunda parte del corolario es completamente análoga al corolario 3.16.  $\square$

Para lo que sigue, se retomará la función de anchura local definida en el capítulo 3 (ver definición 3.17) para medir el crecimiento de la curva. La siguiente proposición se demuestra exactamente igual a su versión continua (proposición 3.18) gracias al corolario 4.10

**Proposición 4.11** *Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva inyectiva con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$  y contenida en un compacto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ . Sea  $[a, b] \subseteq I \setminus (D^+(\eta) \cup D^-(\eta))$ . Entonces existe un  $\alpha' > 0$  tal que para toda partición:*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad \text{de } [a, b],$$

se cumple que:

$$\sum_{j=1}^n d_g(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \frac{1}{\alpha'} (W_{\mathcal{F}}(b) - W_{\mathcal{F}}(a)). \quad (4.17)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue exactamente igual a lo realizado en la proposición 3.18.  $\square$

**Teorema 4.12** *Sea  $\gamma : I = [0, T_\infty) \rightarrow \mathcal{M}$  una  $\lambda$ -curva inyectiva con  $\lambda < 1/(1 + 2d)$  y contenida en un compacto  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ . Entonces  $\gamma$  es rectificable, es decir,  $\ell(\gamma) < \infty$ .*

DEMOSTRACIÓN. Considérese el conjunto  $N := D^+(\eta) \cup D^-(\eta)$ , por la proposición 4.1 se sabe que  $N$  es un conjunto finito, se denotará por  $|N|$  a su cardinal y  $\Sigma$  una constante tal que:

$$\Sigma > \max_{\tau \in N} \{ \max\{d_g(\gamma(\tau), \gamma(\tau^-)), d_g(\gamma(\tau), \gamma(\tau^+)), d_g(\gamma(\tau^-), \gamma(\tau^+))\} \}.$$

Como  $N$  es finito y la proposición 2.4, que dice que los límites laterales existen, se sabe que existe un  $\delta' > 0$  pequeño tal que:

$$d_g(\gamma(s), \gamma(t)) < \Sigma.$$

Notando que, para  $T < T_\infty$ , el conjunto  $[0, T] \setminus \cup_{\tau \in N} (\tau - \delta', \tau + \delta')$  es una unión finita de intervalos que satisfacen la hipótesis de la proposición 4.11, por lo que, se deduce:

$$\ell(\gamma|_{[0, T]}) \leq \frac{1}{\alpha} W_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}) + 2|N|\Sigma,$$

donde el segundo sumando, de la expresión anterior, proviene de las posibles discontinuidades.

Como la cota es independiente de  $T$ , tomando límite  $T \rightarrow T_\infty$ , se concluye el resultado.  $\square$

# Capítulo 5

## Curvas Autocontractantes en Espacios de Banach

Como ya se ha mencionado en capítulos anteriores, las  $\lambda$ -curvas (autocontractantes, y también las autoexpandibles) pueden ser definidas en espacios métricos generales, lo que gracias a la teoría de Arens-Eells (ver Anexo, A.1), es equivalente a que las curvas estén definidas en un espacio de Banach.

Recientemente, Eugene Stepanov y Yana Teplitskaya probaron que toda curva autocontractante acotada (ver definición 1.2), definida en un espacio de Banach de dimensión finita es rectificable, es decir, que posee largo finito (ver [12]). El problema que se desarrolló durante los capítulos anteriores hacía referencia a estudiar la rectificabilidad cuando se debilitaba la propiedad métrica de la curva. Por otro lado, es natural preguntarse que ocurre con las curvas autocontractantes que están definidas en un espacio de Banach de dimensión infinita, cuando éstas son acotadas, o más aún, cuando están contenidas en un compacto.

Gracias al corolario 2.11, se sabe que al estudiar la rectificabilidad de las curvas autocontractantes (o autoexpandibles) definidas en un espacio de dimensión infinita, indirectamente también estaremos estudiando esta propiedad sobre las  $\lambda$ -curvas.

Este capítulo está centrado en probar una versión negativa del resultado encontrado por Eugene Stepanov y Yana Teplitskaya: vamos a ver un ejemplo de curva autocontractante, definida en  $\ell^1(\mathbb{N})$  y contenida en un compacto que no tiene largo finito.

Por último, se definirá la local rectificabilidad y se usará la curva creada anteriormente para estudiar este caso.

## 5.1. Ejemplo de Curva Autocontractante en $\ell^1(\mathbb{N})$ no Rectificable

Sea  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la base canónica del espacio  $\ell^1(\mathbb{N})$ . Recordemos que para un  $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ , su norma es:

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \right\|_1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|. \quad (5.1)$$

Se define la curva  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \ell^1(\mathbb{N})$  como sigue. Para  $\tau \in [0, 1]$ :

$$\gamma(\tau) := \begin{cases} e_1 & \text{si } \tau = 0, \\ (1 - \beta) \frac{e_n}{n} + \beta \frac{e_{n+1}}{n+1} & \text{si } \tau = (1 - \beta) \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} + \beta \frac{2^n - 1}{2^n}, \beta \in [0, 1], n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } \tau = 1. \end{cases}$$

Esta curva es claramente continua, pero además satisface que:

$$\gamma \left( \left[ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}, \frac{2^n - 1}{2^n} \right] \right) = \left[ \frac{e_n}{n}, \frac{e_{n+1}}{n+1} \right] := \text{co}(\{e_n/n, e_{n+1}/(n+1)\}), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Gracias a que por su propia construcción  $\gamma$  es una curva poligonal, podemos computar su largo de manera precisa:

$$\ell(\gamma) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{e_n}{n} - \frac{e_{n+1}}{n+1} \right\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Ahora se probará que la función  $\gamma$  es una curva autocontractante. Para esto, fíjese un tiempo  $\tau \in I$  y vamos a probar que la función  $f_\tau(s) := \|\gamma(s) - \gamma(\tau)\|_1$  es decreciente cuando  $s$  es menor que  $\tau$ .

Sea  $s \in I$  tal que  $s < \tau$ . El análisis sobre la función  $f_\tau$  se puede subdividir en 4 casos, a saber: cuando  $\gamma(s)$  y  $\gamma(\tau)$  están en el mismo intervalo de la forma expresada en (5.2), cuando  $\gamma(\tau)$  está exactamente en el intervalo siguiente correspondiente a  $\gamma(s)$ , cuando hay una diferencia mayor o igual a 2 en los intervalos correspondientes a  $\gamma(s)$  y  $\gamma(\tau)$ , y, por último, cuando  $\tau = 1$  ( $\gamma(\tau) = 0$ ).

Caso 1: Considérese que  $\gamma(s)$  y  $\gamma(\tau)$  pertenecen al mismo intervalo de la forma expresada en (5.2), para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Como en este tramo  $\gamma$  se comporta como si estuviese recorriendo una línea recta, es directo que  $f_\tau$  es decreciente cuando  $s$  es menor que  $\tau$ .

Caso 2: Considérese que existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_s, \beta_\tau \in [0, 1]$ , con  $\beta_s < 1$ , tales que:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &:= (1 - \beta_s) \frac{e_n}{n} + \beta_s \frac{e_{n+1}}{n+1}, \\ \gamma(\tau) &:= (1 - \beta_\tau) \frac{e_{n+1}}{n+1} + \beta_\tau \frac{e_{n+2}}{n+2}. \end{aligned}$$

Con esto, la función  $f_\tau$  queda definida como:

$$f_\tau(s) = \frac{1 - \beta_s}{n} + \frac{|\beta_s - (1 - \beta_\tau)|}{n + 1} + \frac{\beta_\tau}{n + 2}.$$

Como la derivada  $\dot{\beta}_s$  es una constante positiva que depende solamente de  $n$  (mientras  $\gamma(s)$  no cambie de intervalo), es fácil mostrar que la derivada por la derecha,  $f_\tau^+(s)$ , es menor que 0, por lo tanto  $f$  es decreciente.

Caso 3: Considérese que existe  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $\beta_s, \beta_\tau \in [0, 1]$ , con  $\beta_s < 1$ , tales que:

$$\begin{aligned}\gamma(s) &:= (1 - \beta_s) \frac{e_n}{n} + \beta_s \frac{e_{n+1}}{n + 1}, \\ \gamma(\tau) &:= (1 - \beta_\tau) \frac{e_{n+m}}{n + m} + \beta_\tau \frac{e_{n+m+1}}{n + m + 1}.\end{aligned}$$

Al computar la función  $f_\tau$  resulta:

$$f_\tau(s) = \frac{1 - \beta_s}{n} + \frac{\beta_s}{n + 1} + \frac{1 - \beta_\tau}{n + m} + \frac{\beta_\tau}{n + m + 1},$$

la que también es fácil ver que tiene derivada por la derecha menor que 0.

Caso 4: Basta con verificar que  $s \mapsto \|\gamma(s)\|$  es una función decreciente, lo que es directo.

Gracias a que los 4 casos anteriores componen todos los casos posibles, se concluye que la curva  $\gamma$  es una curva autocontractante, que ya sabemos que no es rectificable.

## 5.2. Ejemplo de Curva Autocontractante no Localmente Rectificable

En el ejemplo de la sesión anterior, si bien la curva  $\gamma$  no posee largo finito, esta curva en casi todo tiempo posee localmente largo finito. En efecto, el único punto que causa problemas es  $\gamma(1) = 0$ . En lo que sigue, se definirá formalmente la noción de rectificabilidad local y se construirá un ejemplo de curva autocontractante donde esta condición tampoco es satisfecha.

**Definición 5.1** (*Rectificabilidad Local*) Sea  $\gamma : I \rightarrow X$  una curva definida sobre un espacio de Banach  $X$ . Se dirá que  $\gamma$  es localmente rectificable si para casi todo tiempo  $\tau \in I$ , respecto a la medida de Lebesgue sobre  $I$ , existe un  $\varepsilon > 0$  tal que:

$$\ell(\gamma|_{(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)}) < \infty.$$

Es claro que la curva  $\gamma$  de la sección 5.1 corresponde a una curva localmente rectificable. Sin embargo, para construir una curva autocontractante que no lo sea, nos basaremos en esta.

Sea  $p \in \mathbb{N}$  un número primo. Se define la curva  $\gamma^p$  como una curva similar a  $\gamma$ , salvo que se mueve solamente por las direcciones  $\{e_{p^n} : n \in \mathbb{N}\}$ , es decir:

$$\gamma^p(\tau) := \begin{cases} e_p & \text{si } \tau = 0, \\ (1 - \beta) \frac{e_{p^n}}{n} + \beta \frac{e_{p^{n+1}}}{n+1} & \text{si } \tau = (1 - \beta) \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} + \beta \frac{2^n - 1}{2^n}, \beta \in [0, 1], n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } \tau = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, para  $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , se define la curva  $\gamma_q^p$ , que corresponderá a la curva  $\gamma^p$  pero  $1/q$  veces más rápida, es decir:

$$\gamma_q^p(\tau) := \begin{cases} \gamma^p\left(\frac{\tau}{q}\right) & \text{si } \tau \leq q. \\ 0 & \text{si } \tau > q. \end{cases}$$

Es claro que para todo  $p$  primo y  $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  las curvas  $\gamma_q^p$  son autocontractantes, acotadas y, más aún, para cualquier real  $c > 0$ , las curvas  $c\gamma_q^p$  también lo son. También cabe destacar, que las curvas  $c\gamma_q^p$  no son rectificables, pero si son localmente rectificables dado que el único punto conflictivo en  $I$  es  $\tau = q$ . Gracias a esto, vamos a considerar una enumeración de los números primos,  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , y otra de los racionales en  $[0, 1]$ ,  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , para definir la curva  $\tilde{\gamma}$  :

$$\tau \in I \mapsto \tilde{\gamma}(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \gamma_{q_n}^{p_n}(\tau). \quad (5.3)$$

Que resulta ser continua, autocontractante y acotada, además, por la continuidad de la misma y la compacidad de  $[0, 1]$ , está contenida en un compacto.

En efecto, la curva  $\tilde{\gamma}$  está bien definida ya que las curvas  $\gamma_{q_n}^{p_n}$  son uniformemente acotadas, lo que implica que la serie con que se define es absolutamente convergente, mientras que la continuidad de  $\tilde{\gamma}$  proviene de la continuidad de las curvas  $\gamma_{q_n}^{p_n}$ .

Por último, para probar que la curva  $\tilde{\gamma}$  es autocontractante, basta notar que como las curvas  $\gamma_q^p$  son autocontractantes, entonces:

$$\|\gamma_{q_n}^{p_n}(t_1) - \gamma_{q_n}^{p_n}(t_3)\|_1 \geq \|\gamma_{q_n}^{p_n}(t_2) - \gamma_{q_n}^{p_n}(t_3)\|_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, t_3 \in I \text{ con } t_1 \leq t_2 \leq t_3.$$

De la fórmula anterior, al primero multiplicar por  $1/2^n$  la expresión anterior, para luego sumar sobre  $n$ , notando que para todo  $n$  las curvas  $\gamma_{q_n}^{p_n}$  por coordenadas son independientes unas de otras, más la forma particular de la norma en  $\ell^1(\mathbb{N})$ , ver (5.1), se deduce que:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}(t_1) - \tilde{\gamma}(t_3)\|_1 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \|\gamma_{q_n}^{p_n}(t_1) - \gamma_{q_n}^{p_n}(t_3)\|_1, \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \|\gamma_{q_n}^{p_n}(t_2) - \gamma_{q_n}^{p_n}(t_3)\|_1, \\ &\leq \|\tilde{\gamma}(t_2) - \tilde{\gamma}(t_3)\|_1, \quad \forall t_1, t_2, t_3 \in I \text{ con } t_1 \leq t_2 \leq t_3. \end{aligned}$$

**Observación** Con el ejemplo, queda probado que en espacios de Banach generales, las curvas autocontractantes no tienen por qué ser localmente rectificables, pero el problema para el espacio de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$  aún sigue abierto, ya que la curva  $\gamma$  definida en la sección 5.1 falla en ser autocontractante.

Además, como problema abierto sigue el descubrir si, al revertir la orientación de  $\tilde{\gamma}$ , que considerada esta vez sobre  $\ell^2(\mathbb{N})$ , queda una  $\lambda$ -curva para algún  $\lambda \in [0, 1)$ .

Por último, encontrar (de existir) una curva autocontractante no rectificable en  $\ell^2(\mathbb{N})$ , y también, encontrar (de existir) una curva autocontractante  $\ell^2(\mathbb{N})$  no localmente rectificable.

# Conclusión

Este trabajo se enfocó en desarrollar y extender la técnica presentada por Daniilidis et al sobre la rectificabilidad de las curvas autocontractantes (ver [3]), además de mostrar la evolución histórica de esta misma. Con esto, fue posible demostrar que toda  $\lambda$ -curva definida en  $\mathbb{R}^d$  acotada, es rectificable siempre que  $\lambda < 1/(1+2d)$ . Además dicha restricción se eliminó en el caso planar, es decir, toda  $\lambda$ -curva acotada definida en  $\mathbb{R}^2$  es rectificable. Este último resultado nos hace conjeturar que toda  $\lambda$ -curva acotada es rectificable cuando está definida sobre  $\mathbb{R}^d$ .

También, se probó la rectificabilidad cuando las curvas están definidas sobre una variedad Riemanniana de dimensión  $d \geq 2$ , con las mismas restricciones que en el caso euclideo, e incluso quitando la hipótesis de continuidad, es decir, a las curvas se les pide satisfacer la desigualdad (3.3) e inyectividad.

Por otro lado, en vista de descubrir que tan distintas son las  $\lambda$ -curvas de las curvas autocontractantes, siguiendo las ideas dadas por Nekvinda y Zindulka (ver [10]), se probó evocando el teorema de Arens-Eells que toda  $\lambda$ -curva está asociada a una curva autocontractante definida sobre un espacio de Banach (de dimensión infinita), tal que la función que lleva de una a otra es bi-lipschitz, por lo que la rectificabilidad de las  $\lambda$ -curvas están relacionadas con la rectificabilidad de las curvas autocontractantes.

Por último, se probó que existen curvas autocontractantes, contenidas en un compacto, no rectificables. Más aún, se construyó otro ejemplo que viola la condición de rectificabilidad local (ver definición 5.1). Con este ejemplo, se prueba que no puede seguir extendiéndose el trabajo realizado por Stepanov y Teplitskaya (ver [12]) donde probaron que toda curva autocontractante acotada definida en un espacio de Banach dimensión finita es rectificable.

Como trabajo futuro, esta memoria deja varias aristas abiertas, entre las que se pueden rescatar el encontrar una técnica más robusta para obtener una demostración de que toda  $\lambda$ -curva es rectificable. Dicho objetivo se podría tal vez conseguir guiándose por lo realizado por Stepanov y Teplitskaya en el artículo que trabajan con curvas autocontractantes en espacios de Banach de dimensión finita (ver [12]) o, tal vez, utilizando una técnica que estudia la curvatura de una curva irregular (ver [13], capítulo 5), o en cambio, encontrar una  $\lambda$ -curva no rectificable. También quedó abierto el encontrar un ejemplo de curva autocontractante, acotada, no rectificable en un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

En otra perspectiva de trabajo, se puede continuar con la relación que existe entre los sistemas dinámicos de tipo gradiente (con potenciales quasi-convexos) y las curvas auto-

contractantes (ver proposición 1.4). Los sistemas dinámicos de tipo gradiente pueden ser formulados con propiedades puramente métricas (ver [1], Capítulo 1) y por tanto definidos sobre espacios métricos. Con esto, una pregunta natural que se genera es si es posible replicar la proposición 1.4 en espacios métricos generales, asociando al espacio métrico con una definición de convexidad adecuada.

# Bibliografía

- [1] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré. *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer Science& Business Media, 2008.
- [2] Aris Daniilidis, Guy David, Estibalitz Durand-Cartagena, and Antoine Lemenant. Rectifiability of self-contracted curves in the euclidean space and applications. *The Journal of Geometric Analysis*, 25(2):1211–1239, 2015.
- [3] Aris Daniilidis, Robert Deville, Estibalitz Durand-Cartagena, and Ludovic Rifford. Self-contracted curves in riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017.
- [4] Aris Daniilidis, Olivier Ley, and Stéphane Sabourau. Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 94(2):183–199, 2010.
- [5] Manfredo Perdigao DoCarmo. *Geometría Riemanniana. 5ta.* 2011.
- [6] Gonzalo Flores. *Estudio de los espacios Lipschitz-libres y una caracterización para el caso finito-dimensional*. Disponible en <<http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/141350>>, 2016.
- [7] Gilles Godefroy and Nigel J Kalton. Lipschitz-free banach spaces. *Studia Mathematica*, 159:121–141, 2003.
- [8] Paolo Manselli and Carlo Pucci. Maximum length of steepest descent curves for quasi-convex functions. *Geometriae Dedicata*, 38(2):211–227, 1991.
- [9] E Michael. A short proof of the arens-cells embedding theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(3):415–416, 1964.
- [10] Aleš Nekvinda and Ondřej Zindulka. Monotone metric spaces. *Order*, pages 1–14, 2012.
- [11] Robert R Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, volume 1364. Springer, 2009.
- [12] Eugene Stepanov and Yana Teplitskaya. Self-contracted curves have finite length. *Journal of the London Mathematical Society*, 2017.

- [13] Yu.G. Reshetnyak V.V. Alexandrov. *General theory of irregular curves*. Mathematics and its applications. Soviet series; 29. Kluwer Academic Publishers, 1 edition, 1989.
- [14] Nik Weaver. *Lipschitz algebras*. World Scientific, 1999.

# Apéndice A

## Anexo

### A.1. Espacios Lipschitz Libres

El espacio Lipschitz libre de un espacio métrico se define mediante el teorema de Arens-Eells, a saber:

**Teorema A.1** (*Arens-Eells, ver [9]*) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, entonces existe un espacio de normado  $(Y, \|\cdot\|)$  tal que  $X$  se inyecta isométricamente un subconjunto cerrado y linealmente independiente de  $Y$ .

En lo que sigue, se dará a conocer una construcción del espacio libre para un espacio métrico  $(X, d)$ . Sea  $(Y, \rho)$  un espacio métrico tal que  $Y = X \cup \{0_X\}$ , donde  $0_X \notin X$  y  $\rho$  extiende la métrica  $d$ . Llámese  $\text{Lip}_0(Y)$  como el espacio de funciones lipschitz  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(0_X) = 0$ . Se demuestra que corresponde a un espacio de Banach dual con la siguiente norma:

$$\|f\| := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in Y, x \neq y \right\}.$$

Para  $x \in X$ , considérese el funcional  $\delta_x \in \text{Lip}_0(Y)^*$  definido por  $\delta_x(f) := f(x)$ . El espacio libre de  $X$ , que se denota por  $\mathcal{F}(X)$ , queda definido por:

$$\mathcal{F}(X) := \overline{\text{span}}\{\delta_x : x \in X\}.$$

**Teorema A.2** (*ver [9]*) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $0_X \in X$  un punto distinguido de  $X$ . Entonces  $\delta : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  es una isometría a su imagen.

**Observación** Además, se demuestra que  $\mathcal{F}(X)^*$  es isométricamente isomorfo a  $\text{Lip}_0(X)$  (ver [7] o [14]) y, para ejemplos concretos, hay caracterizaciones del espacio libre de  $\mathbb{R}^d$ , con  $d \in \mathbb{N}$  (ver [6]).