



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

MODELO MULTIVARIABLE PARA ESTIMACIÓN DE CONSUMO DE POTENCIA DE  
MOLINOS DE TRITURACIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

JUAN PABLO ZAPATER MIGONE

PROFESOR GUÍA:  
PABLO CASTILLO CAPPONI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
VIVIANA MERUANE NARANJO  
PABLO MASCARÓ RIVERA

SANTIAGO DE CHILE  
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO  
POR: JUAN PABLO ZAPATER MIGONE  
FECHA: 2017  
PROF. GUÍA: PABLO CASTILLO CAPPONI

## MODELO MULTIVARIABLE PARA ESTIMACIÓN DE CONSUMO DE POTENCIA DE MOLINOS DE TRITURACIÓN

El proceso de molienda en minería, en donde se procesa el mineral para pasar de una granulometría del orden de 1/2 pulgada, hasta aproximadamente 180 micrones, es un proceso que puede llegar a representar del orden del 35 % del consumo energético de una mina. Por esto, sumado a la gran complejidad de esta operación, es de sumo interés realizar estudios en torno a ella, y en particular, predecir la potencia de consumo de los molinos de trituración.

Los molinos usados en minería, son grandes equipos giratorios, con forma de cilindro orientado horizontalmente, que mediante el movimiento del mineral al interior de ellos, son capaces de reducir su granulometría.

En este trabajo de título, se busca obtener un modelo matemático, que con información acerca de ciertas variables clave en el funcionamiento de un molino para molienda, es capaz de predecir potencia de consumo. El modelo busca ser capaz de incorporar variaciones en la geometría de la carga a lo largo de un molino, además de ser válido para un amplio rango de diámetros de molinos, así como distintos tipos de estos (SAG, AG y de bolas).

Para obtener dicho modelo, se seleccionan variables que tengan relevancia física en la dinámica al interior del molino. Con esto, se describe una porción de la potencia que se quiere predecir realizando un balance energético para la carga al interior del molino, y la potencia restante se predice usando datos experimentales y el software Eureka<sup>®</sup>. Con estas ecuaciones, integrando numéricamente a lo largo del molino, se obtiene un programa en Matlab<sup>®</sup> que es capaz de predecir la potencia de consumo de un molino de molienda. Luego, utilizando 77 mediciones de 66 molinos industriales, se estudia la capacidad predictiva del modelo.

El modelo resultante muestra buena congruencia con los datos experimentales con los que se cuenta. Se destaca también, que se encuentran indicios que hacen pensar que las ecuaciones que describen los molinos de alta y baja relación de aspecto deben ser distintas.



*Dedicado a mis padres y hermanos, creyeron en mí desde que tengo memoria*



# Agradecimientos

A toda mi familia, por su amor y confianza, en especial a mis padres Sandra y Gonzalo, y a mis hermanos Alejandra y Rodrigo, con ellos adquirí mis valores y son el núcleo en torno al cual he construido mi vida. Sin el incansable espíritu materno de mi mamá, la bondad y cariño de mi papá, las discusiones con mi hermano y la siempre amorosa compañía de mi hermana, de seguro que nada de esto hubiese sido posible.

A Margarita, por el cariño, la confianza y toda la dedicación en apoyarnos a mí y a mis hermanos en la etapa universitaria.

A la Yani, por todo su amor y paciencia en esta última etapa, sobre todo cuando más difícil parecía terminar esta etapa.

A mis amigos, los del colegio, los de plan común, los de mecánica y los del Eolian, gracias por su compañía, espero ser una grata compañía para ustedes.

A Vladimir, quién me enseñó a encantarme con la mecánica que hay en un taller y me invitó a participar en el Eolian, como no le voy a agradecer eso.

A Pablo, que como profesor siempre se mostró dispuesto a dedicarle tiempo a este trabajo de manera que fuese posible llegar hasta aquí.

Por último, quiero dar gracias a la vida, a Dios, por las innumerables posibilidades que han venido y están por venir, espero estar a la altura.



# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes Generales . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	1
1.3. Objetivo General . . . . .	2
1.4. Objetivos Específicos . . . . .	2
1.5. Alcances . . . . .	2
<b>2. Metodología</b>	<b>3</b>
2.1. Selección de Variables a Utilizar . . . . .	3
2.2. Modelo Físico . . . . .	4
2.3. Modelo Matemático . . . . .	4
2.4. Análisis de Sensibilidad . . . . .	4
2.5. Recursos . . . . .	4
<b>3. Antecedentes</b>	<b>5</b>
3.1. Molinos para el Proceso de Molienda en Minería . . . . .	5
3.1.1. Concentración del Mineral . . . . .	5
3.1.2. Molienda . . . . .	5
3.2. Modelos para Predecir Potencia . . . . .	7
3.2.1. Arbiter and Harris (1982) . . . . .	8
3.2.2. Liddell (1986) . . . . .	9
3.2.3. Morrell (1993) . . . . .	12
3.3. Eureka <sup>®</sup> . . . . .	21
<b>4. Resultados</b>	<b>22</b>
4.1. Variables Utilizadas en el Modelo . . . . .	22
4.2. Descripción de la Carga al Interior del Molino . . . . .	23
4.2.1. Ecuaciones para Parámetros que Describen Geometría . . . . .	23
4.3. Potencia Debida a la Gravedad . . . . .	24
4.4. Potencia por Energía Cinética de la Carga y Pérdidas por Calor . . . . .	25
4.4.1. Delta Potencia por Unidad de Largo Usando Eureka <sup>®</sup> . . . . .	25
4.5. Cálculo de Potencia Modelo Propuesto . . . . .	28
4.6. Congruencia del Modelo con Datos Experimentales . . . . .	28
4.7. Análisis de Sensibilidad . . . . .	33
<b>5. Discusión y Análisis</b>	<b>38</b>



<b>6. Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>
<b>Anexos</b>	<b>I</b>
<b>Anexo A. Datos Experimentales</b>	<b>I</b>
A.1. Datos Molinos Autógenos . . . . .	I
A.2. Datos Molinos Semi-Autógenos . . . . .	II
A.3. Datos Molinos de Bola . . . . .	III

# Índice de Tablas

4.1. Variables modelo de morrell . . . . .	22
4.2. Variables modelo propuesto . . . . .	23
4.3. Rango de operación variables modelo propuesto . . . . .	33
A.1. Datos experimentales molinos autógenos . . . . .	I
A.2. Datos experimentales molinos semi-autógenos . . . . .	II
A.3. Datos experimentales molinos de bola . . . . .	III

# Índice de Ilustraciones

2.1. Metodología propuesta . . . . .	3
3.1. Distintas formas de la cáscara del molino. . . . .	6
3.2. Distintos mecanismos de descarga. . . . .	7
3.3. Dinámica de la carga al interior del molino según Arbiter y Harris. . . . .	8
3.4. Esquema de la sección transversal de un molino. Mediciones de pie y hombro para distintas velocidades. . . . .	10
3.5. Torque en función de fracción de llenado y fracción de velocidad crítica. . . . .	11
3.6. Metodología de Stephen Morrell en el desarrollo de su modelo. . . . .	12
3.7. Imagen frontal del molino con tapa de vidrio ocupado por Morrell indicando la <i>carga activa</i> . . . . .	13
3.8. (a) Geometría simplificada de molino de descarga con rejilla (b) Geometría simplificada de molino de descarga por rebose. . . . .	13
3.9. (a) Hombro de la carga (b) Pie de la carga. . . . .	14
3.10. Velocidad normalizada v/s Posición radial normalizada para el molino experimental con tapa de vidrio. . . . .	17
3.11. Volumen de control para cálculo de potencia mecánica según Morrell. . . . .	18
3.12. Predicción de potencia según Morrell. . . . .	20
4.1. (a) Geometría simplificada de molino de descarga con rejilla (b) Geometría simplificada de molino de descarga por rebose. . . . .	24
4.2. Ajuste encontrado por Eureka <sup>®</sup> para los 21 datos de molinos SAG rectos presentes en [1]. . . . .	26
4.3. Relación de aspecto (D/L) para los 21 datos de molinos SAG rectos presentes en [1]. . . . .	26
4.4. Ajuste encontrado por Eureka <sup>®</sup> para los 14 datos de molinos SAG rectos de baja relación de aspecto presentes en [1]. . . . .	27
4.5. Ajuste encontrado por Eureka <sup>®</sup> para los 7 datos de molinos SAG rectos de alta relación de aspecto presentes en [1]. . . . .	28
4.6. Molinos de bola . . . . .	29
4.7. Molinos SAG . . . . .	30
4.8. Molinos AG . . . . .	31
4.9. Todos los molinos . . . . .	32
4.10. Derivada parcial con respecto a $\rho_c$ para $r_m$ promedio. (a) $\omega = 1,46[rad/s]$ (b) $\theta_T = 4,05[rad]$ (c) $\rho_c = 4,8[g/cm^3]$ . . . . .	34

4.11. Derivada parcial con respecto a $\theta_T$ para $r_m$ promedio. (a) $\omega = 1,46[\text{rad/s}]$ (b) $\theta_T = 4,05[\text{rad}]$ (c) $\rho_c = 4,8[\text{g/cm}^3]$ . . . . .	35
4.12. Derivada parcial con respecto a $\omega$ para $r_m$ promedio. (a) $\omega = 1,46[\text{rad/s}]$ (b) $\theta_T = 4,05[\text{rad}]$ (c) $\rho_c = 4,8[\text{g/cm}^3]$ . . . . .	36
4.13. (a) Derivada parcial con respecto a $\omega$ , $r_m = 0,85[\text{m}]$ , $\rho_c = 5,77[\text{g/cm}^3]$ (b) Derivada parcial con respecto a $\theta_T$ , $r_m = 0,85[\text{m}]$ , $\rho_c = 5,77[\text{g/cm}^3]$ (c) Derivada parcial con respecto a $\theta_T$ , $r_m = 5,1[\text{m}]$ , $\rho_c = 5,77[\text{g/cm}^3]$ . . . . .	37



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes Generales

Para que cualquier tipo de maquinaria industrial se encuentre en funcionamiento, tanto su diseño como su operación son tareas sumamente complejas. En ambas labores, el entendimiento de los fenómenos físicos que ocurren al interior del equipo, así como el uso de modelos que predigan aspectos relevantes de su funcionamiento son de suma importancia.

En el caso de la minería, en particular en los molinos usados para triturar el mineral, predecir la potencia de consumo es uno de los elementos clave para lograr tanto un diseño como un control óptimo del equipo.

### 1.2. Motivación

El proceso de molienda representa tanto un alto consumo energético como un alto consumo de agua, ambos recursos de suma importancia en la industria minera chilena. Sumado a que la detención de la molienda se traduce en menos extracción de mineral, y por lo tanto, grandes pérdidas económicas para la empresa minera, el buen diseño y la buena operación de la maquinaria para molienda son elementos críticos en el funcionamiento de una mina.

En este contexto, la predicción de potencia de consumo de molinos de trituración tiene una influencia efectiva en el desempeño del molino [2].

Lo anterior, sumado a la posibilidad de desarrollar un modelo que prediga importantes consecuencias de un fenómeno físico en particular, la cual no es una tarea que se presente normalmente en la carrera universitaria, son los principales motivos para realizar el presente trabajo de título.

### 1.3. Objetivo General

Obtener un nuevo modelo multivariable que prediga consumo de potencia de molinos usados en minería.

### 1.4. Objetivos Específicos

- Desarrollar un modelo que considere variaciones de la geometría de la carga al interior del molino en 3 dimensiones.
- Seleccionar variables de entrada del modelo.
- Analizar sensibilidad del modelo con respecto a variables de entrada.
- Comparar modelo propuesto con modelos existentes y con datos experimentales.

### 1.5. Alcances

- Programa diseñado y verificado tal que predice el consumo de potencia de un molino de bolas, SAG o AG.
- Modelo propuesto predice potencia a partir de una geometría que varía a lo largo del molino.
- Análisis de sensibilidad se realiza con respecto a variables de operación.
- Modelo propuesto se compara con modelo de Morrell.

# Capítulo 2

## Metodología

Se plantea la siguiente metodología de trabajo:

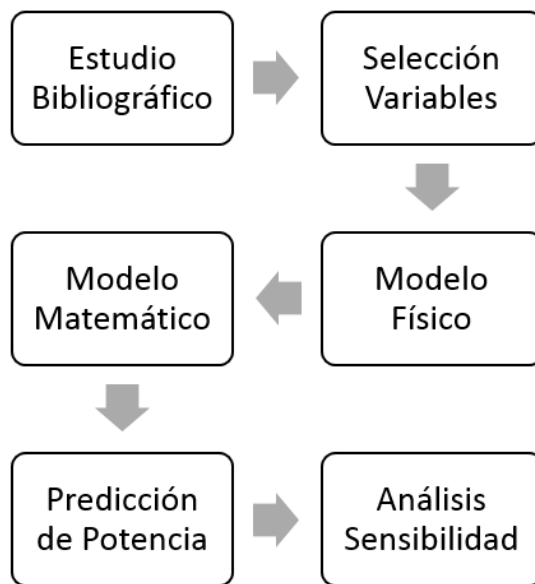


Figura 2.1: Metodología propuesta  
Fuente: Desarrollado por el autor.

### 2.1. Selección de Variables a Utilizar

Para poder realizar esta selección, se estudian los antecedentes para así lograr un mayor entendimiento de la dinámica al interior de un molino de trituración. Además se toma en cuenta que en la actualidad existen prototipos en prueba para medir el pie de la carga ( $\theta_T$ ).



## 2.2. Modelo Físico

Una vez seleccionadas las variables de entrada, se identifican los fenómenos físicos más relevantes al interior del molino, luego, se establece qué es necesario conocer para poder encontrar ecuaciones matemáticas que predigan la potencia consumida por estos fenómenos. Con esto se identifican los procesos físicos que se modelarán con leyes físicas (Leyes de Newton, por ejemplo) y los que se modelarán con algún algoritmo matemático.

## 2.3. Modelo Matemático

En cuanto a los fenómenos físicos para los cuales no se tiene información suficiente, o existe demasiada incertidumbre con respecto a la información disponible, se utiliza el software Eureka<sup>®</sup>, que es un programa que utiliza *machine learning*<sup>1</sup>, para encontrar ecuaciones que describan esta porción de la potencia.

## 2.4. Análisis de Sensibilidad

Una vez desarrollado el modelo, con el propósito de lograr un mayor entendimiento cualitativo de las ecuaciones encontradas, se estudian las derivadas parciales del modelo con respecto a las variables de entrada de éste.

## 2.5. Recursos

Se identifican los siguientes recursos necesarios para el desarrollo de este trabajo:

- Publicaciones científicas de autores que hayan desarrollado modelos similares al que se pretende obtener aquí.
- Software Matlab<sup>®</sup>.
- Software Eureka<sup>®</sup>.

---

<sup>1</sup>Aprendizaje de máquina en español.

# Capítulo 3

## Antecedentes

### 3.1. Molinos para el Proceso de Molienda en Minería

#### 3.1.1. Concentración del Mineral

El objetivo del proceso de concentración es obtener partículas de mineral a partir de la roca que se extrae en una mina. Dentro de la concentración se identifican los siguientes procesos:

- Chancado: reducir el tamaño de los fragmentos de mineral hasta un tamaño con el que se pueda pasar al proceso de molienda (máximo 8 pulgadas).
- Molienda: reducir fragmentos de mineral hasta una granulometría máxima de 180 micrones.
- Flotación: proceso físico-químico que separa el mineral que se desea obtener de otros materiales.

#### 3.1.2. Molienda

En este proceso, se ocupan grandes equipos giratorios llamados molinos. Existen una serie de clasificaciones, se describen brevemente las que se consideran importantes para este estudio.

#### Según la Carga que Alimenta al Molino

- Molino Autógeno (AG): molinos que se alimentan con la roca extraída y agua, generalmente se usan luego del chancado primario. Vale notar que su uso ha disminuido notablemente en los últimos años.
- Molino Semi-Autógeno (SAG): se diferencian de los molinos autógenos, en que además de roca y agua, se les carga con bolas de acero.

- Molino de Bolas: normalmente usados después de un molino SAG, se caracterizan en que su carga es principalmente de bolas de acero, y el mineral, con granulometría del orden de 1 [mm], se ubica en los intersticios existentes entre las bolas.

## Forma Exterior

Las principales diferencias son:

- Relación de aspecto: el ratio entre el diámetro y el largo ( $D/L$ ) varía entre 0.5 y 3 aproximadamente.
- Terminación cónica o cilíndrica.

Las cuales se aprecian en la Figura 3.1.

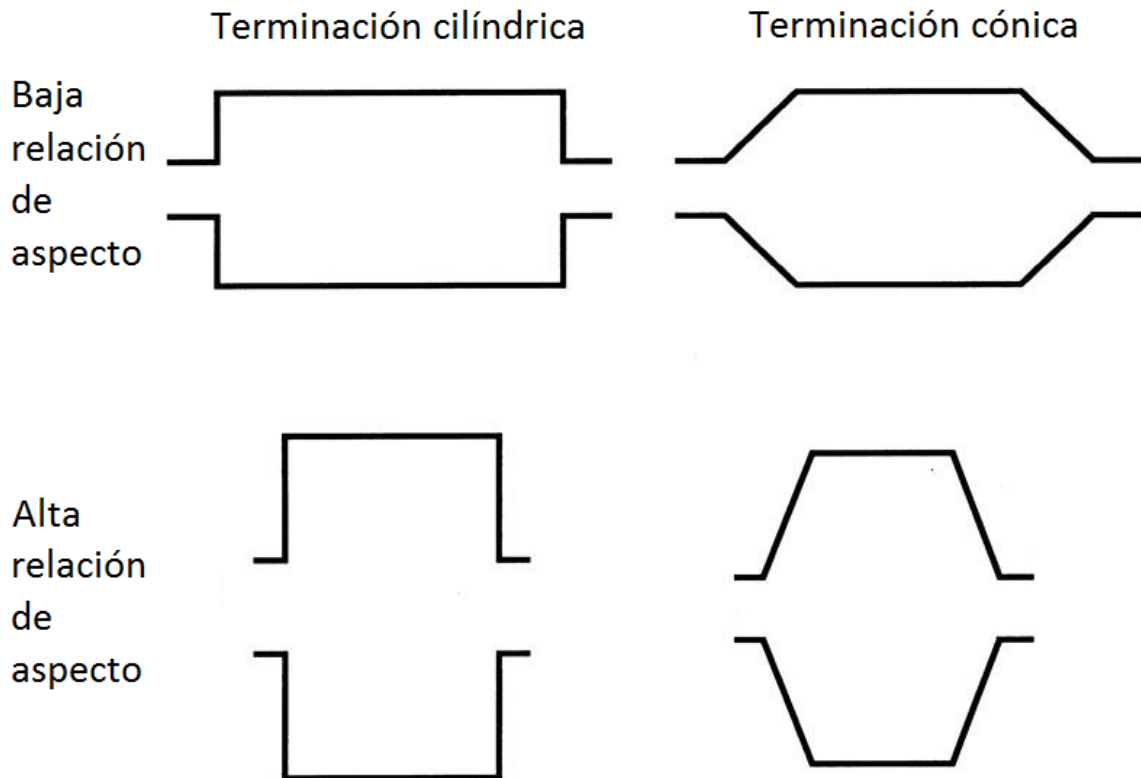


Figura 3.1: Distintas formas de la cáscara del molino.

Fuente: Adaptado de [3].

## Tipo de Descarga

- Descarga por rejilla: no acumula piscina de lodo, la carga sale en cualquier posición radial.

- Descarga por rebose: se acumula piscina de lodo, la carga sale por una abertura en el centro del molino.

La diferencia entre ambos tipos de descarga se muestran en la Figura 3.2.

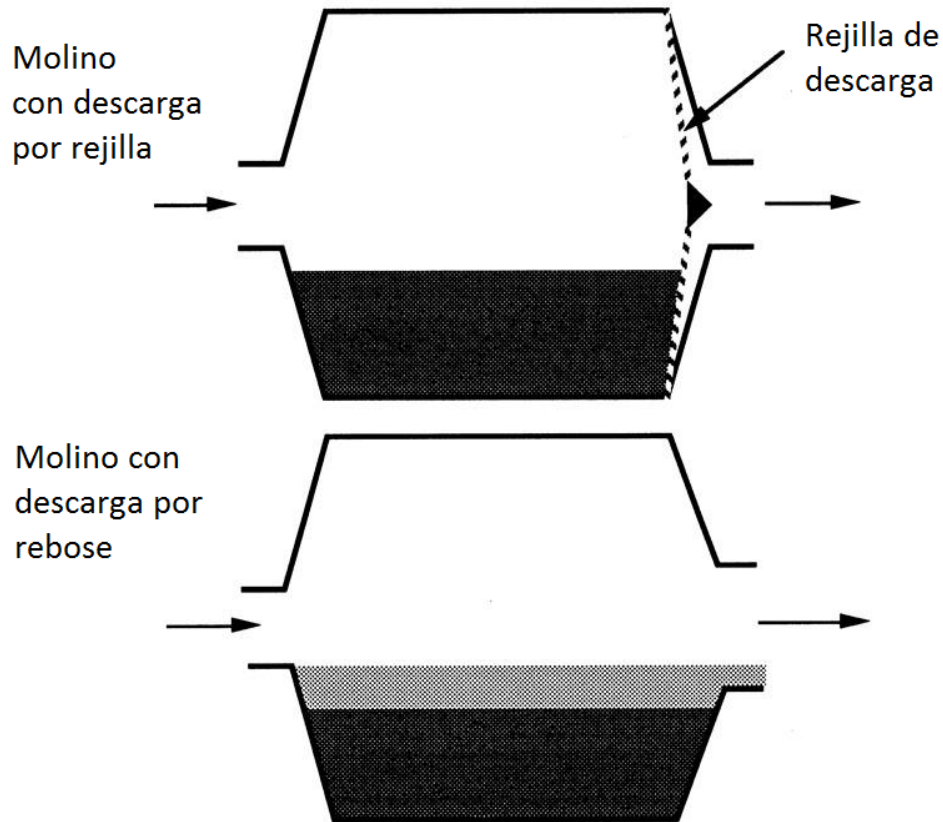


Figura 3.2: Distintos mecanismos de descarga.  
Fuente: Adaptado de [3].

## 3.2. Modelos para Predecir Potencia

Durante el siglo XX se desarrollaron numerosos modelos para predecir el consumo de potencia de molinos usados en minería, pero no fue hasta 1993 que se contó con datos experimentales suficientes de la potencia de consumo de molinos industriales, además de mediciones de variables de operación como fracción de llenado total ( $f$ ) y fracción de llenado de bolas ( $f_b$ ) entre otras.

Se destaca el trabajo de algunos autores que son relevantes para este trabajo.

### 3.2.1. Arbiter and Harris (1982)

Este modelo postula que la potencia que consume un molino se puede aproximar por la potencia necesaria para mantener la carga de la forma de la Figura 3.3 en reposo. El molino debe vencer el torque que ejerce la carga sobre este. En la Figura 3.3 se muestran dos configuraciones distintas de la carga al interior del molino. La carga cuando el molino está apagado, con su centro de gravedad en el punto  $G$ , y la carga cuando el molino se encuentra funcionando, con su centro de gravedad en el punto  $G'$ .

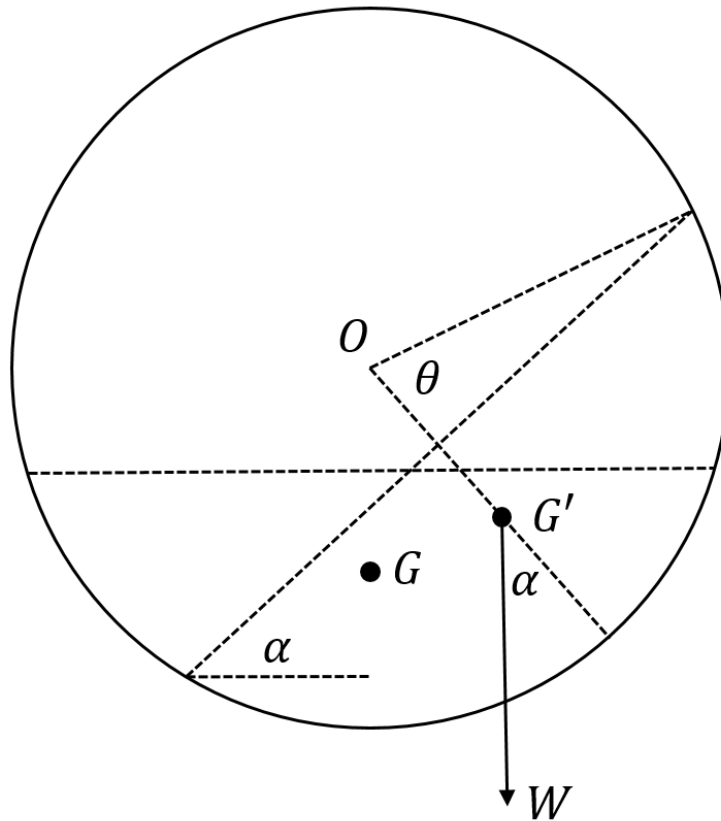


Figura 3.3: Dinámica de la carga al interior del molino según Arbiter y Harris.  
Fuente: Adaptado de [4].

$$P = (\pi\rho g N L D^3 \sin^3\theta \sin\alpha)/6 \quad (3.1)$$

donde,

- $P$ : potencia de consumo del molino [W].
- $\rho$ : densidad de la carga [ $kg/m^3$ ].
- $g$ : aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].
- $N$ : velocidad de rotación [Hz].
- $L$ : largo del molino [m].
- $D$ : diámetro del molino [m].

- $\theta$ : ángulo que describe la fracción de llenado [*rad*].
- $\alpha$ : ángulo que describe la posición de la carga [*rad*].

### 3.2.2. Liddell (1986)

Este autor utilizó un molino experimental de laboratorio para tomar mediciones de torque ( $\tau$ ), pie ( $\theta_T$ )<sup>1</sup> y hombro ( $\theta_S$ )<sup>2</sup> variando la fracción de llenado ( $f$ )<sup>3</sup> y fracción de velocidad crítica ( $\phi$ )<sup>4</sup>.

Se destacan los siguientes resultados:

- La posición del pie de la carga depende únicamente de la fracción de llenado para velocidades de rotación de hasta un 80 % de la velocidad crítica. Por su parte, la posición del hombro varía siempre en función de  $f$  y  $\phi$  (ver Figura 3.4).
- Al aumentar la fracción de llenado y la fracción de velocidad crítica se puede llegar a un punto de máximo torque, a partir del cual, si se incrementa la fracción de llenado o la fracción de velocidad crítica se observa una disminución del torque debido a un fenómeno progresivo de centrifugado de la carga (ver Figura 3.5).

---

<sup>1</sup>Posición de la carga descrita en la Figura 3.4

<sup>2</sup>Posición de la carga descrita en la figura 3.4

<sup>3</sup>Se define como la fracción volumétrica ocupada por la carga al interior del molino

<sup>4</sup>Velocidad crítica ( $\omega_c$ ) se define como la velocidad a la cual una partícula de carga pegada a la cáscara del molino no se despegue de ésta en el punto más alto de giro.  $\omega_c = (\sqrt{\frac{g}{r}})$  en [*rad/s*]

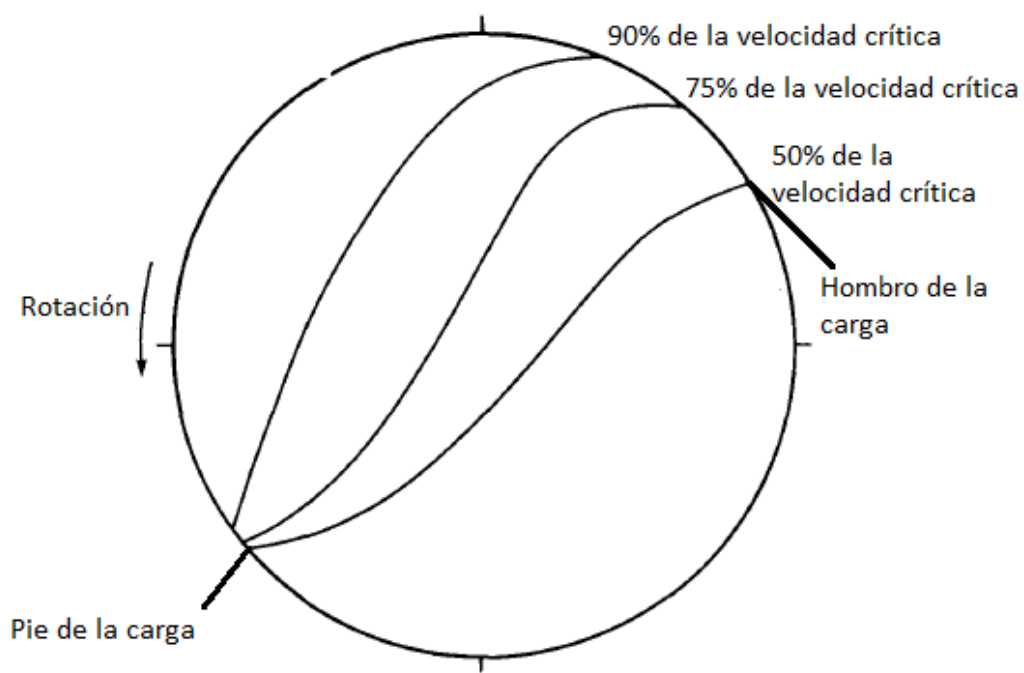


Figura 3.4: Esquema de la sección transversal de un molino. Mediciones de pie y hombro para distintas velocidades.

Fuente: Adaptado de [5].

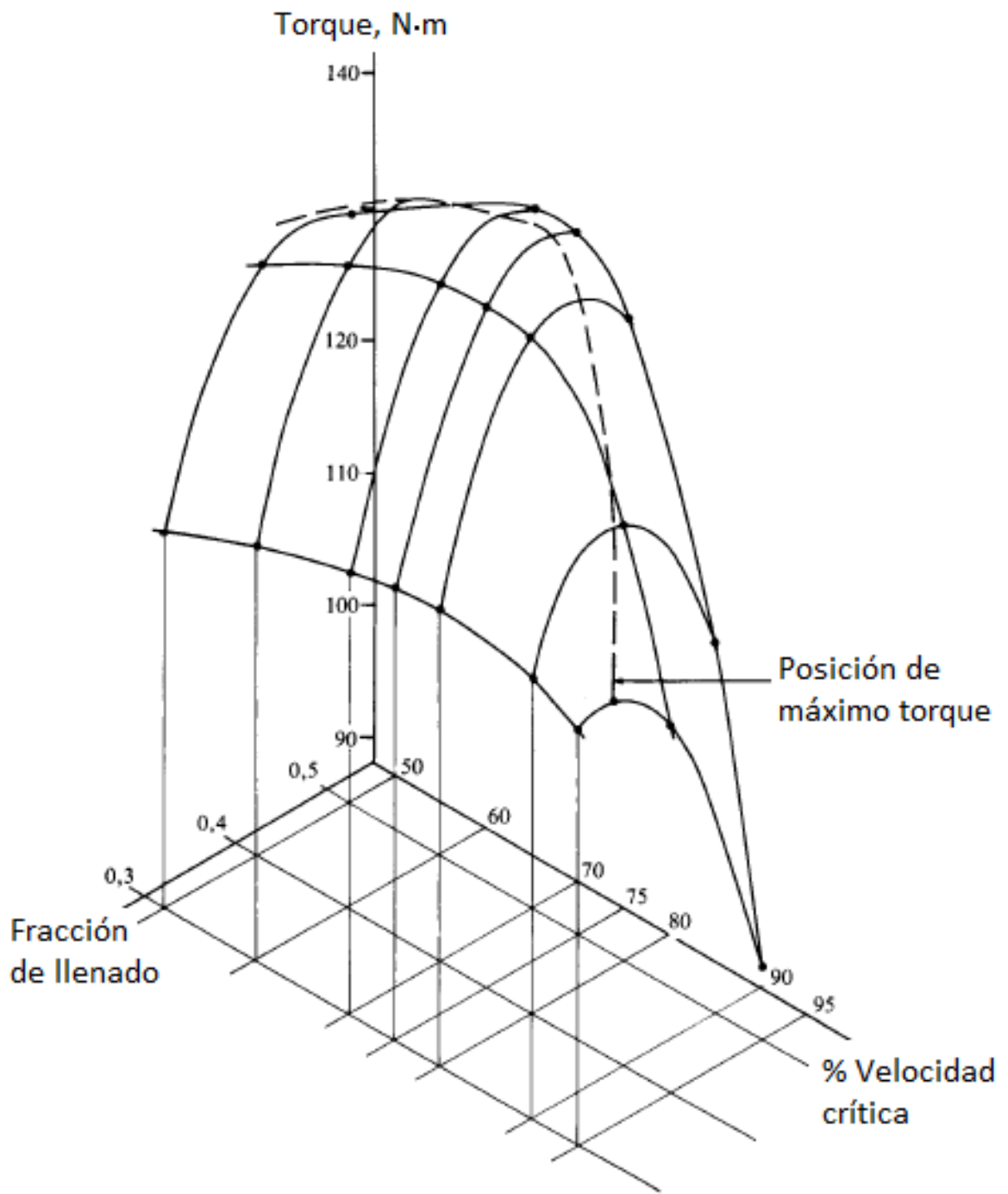


Figura 3.5: Torque en función de fracción de llenado y fracción de velocidad crítica.  
Fuente: Adaptado de [5].



### 3.2.3. Morrell (1993)

#### Metodología

Para el desarrollo de su modelo, Morrell tuvo que realizar una serie de supuestos de cómo se comportaba la carga al interior de un molino de trituración, para lo cual, realizó experimentos en un molino de laboratorio. Luego, para la calibración de su modelo, obtuvo datos experimentales de una serie de molinos industriales, siendo el primer investigador en publicar un modelo con el respaldo de este tipo de mediciones. Ver Figura 3.6.

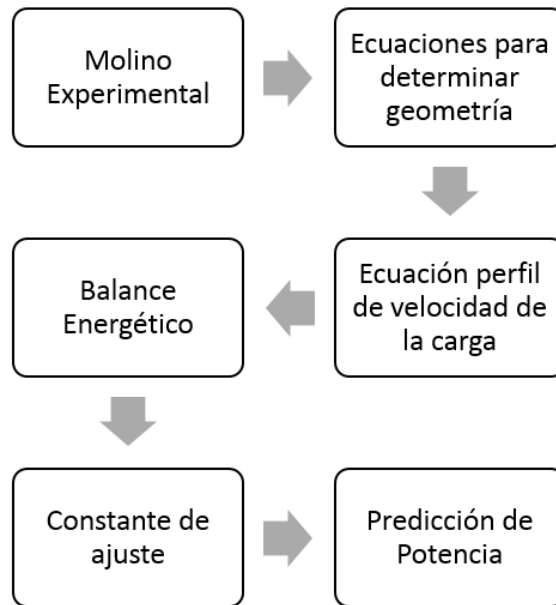


Figura 3.6: Metodología de Stephen Morrell en el desarrollo de su modelo.

Fuente: Elaborado por el autor.

#### Molino Experimental

Morrell trabajó con un molino experimental de 0.3 [m] de diámetro con tapa de vidrio, mediante el cual, gracias a un análisis de fotografías estudió el comportamiento de la carga al interior del molino para diversas configuraciones de operación.

#### Descripción de la geometría

El autor plantea usar para el cálculo de potencia, una fracción de la carga, la cuál denomina *carga activa* y está descrita en la Figura 3.7. El resto de la carga que no se encuentra dentro de esta porción activa, se considera que representa un consumo de potencia despreciable debido a que se encuentra girando sobre si misma o en caída libre.

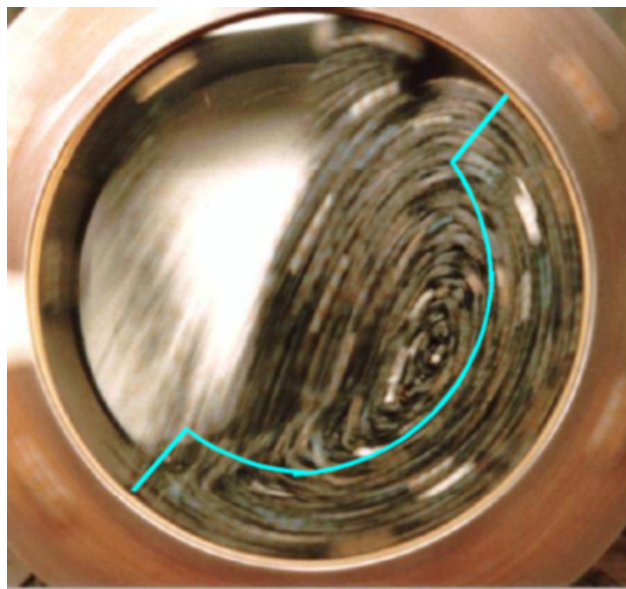


Figura 3.7: Imagen frontal del molino con tapa de vidrio ocupado por Morrell indicando la *carga activa*.

Fuente: Adaptado de [3].

Esta geometría se describe matemáticamente por el pie, hombro y radio interior<sup>5</sup> (ver Figura 3.8).

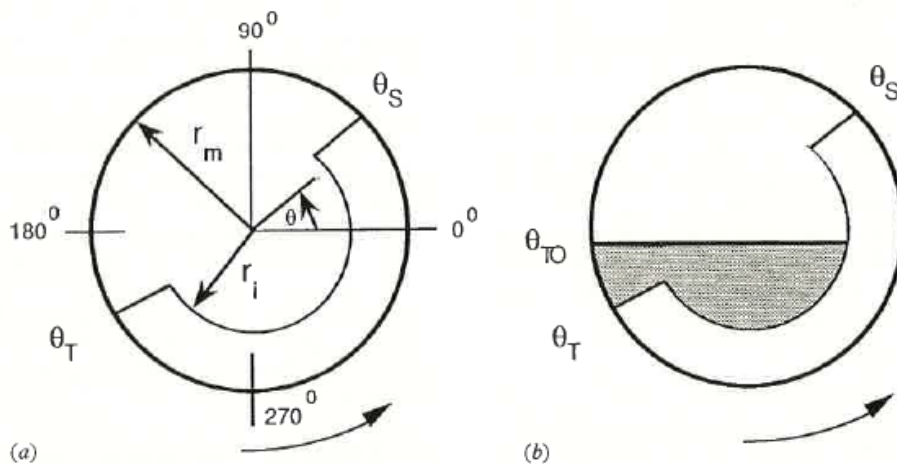


Figura 3.8: (a) Geometría simplificada de molino de descarga con rejilla (b) Geometría simplificada de molino de descarga por rebose.

Fuente: [6].

### Ecuaciones para describir geometría

Mediante las mediciones con su molino experimental, obtiene curvas para el pie ( $\theta_T$ ) y el hombro ( $\theta_S$ ) de la carga (ver Figura 3.9), que dan paso a las siguientes ecuaciones.

<sup>5</sup>Radio interior es el radio de la cara interior de la *carga efectiva*

$$\theta_T = 2,5307(1,2796 - f)(1 - e^{-19,42(\phi_c - \phi)}) + \pi/2 \quad (3.2)$$

donde,

- $\theta_T$ : pie de la carga [rad].
- $f$ : fracción de llenado del molino.
- $\phi$ : fracción de la velocidad crítica.
- $\phi_c$ : fracción de la velocidad crítica a la cual ocurre centrifugado en toda la carga (medido experimentalmente).

$$\phi_c = \phi; \phi > 0,35(3,364 - f) \quad (3.2a)$$

$$\phi_c = 0,35(3,364 - f) \quad (3.2b)$$

y,

$$\theta_S = \frac{\pi}{2} - \left( \theta_T - \frac{\pi}{2} \right) [(0,3386 + 0,1041\phi) + (1,54 - 2,5673\phi)f] \quad (3.3)$$

donde,

- $\theta_S$ : hombro de la carga [rad].

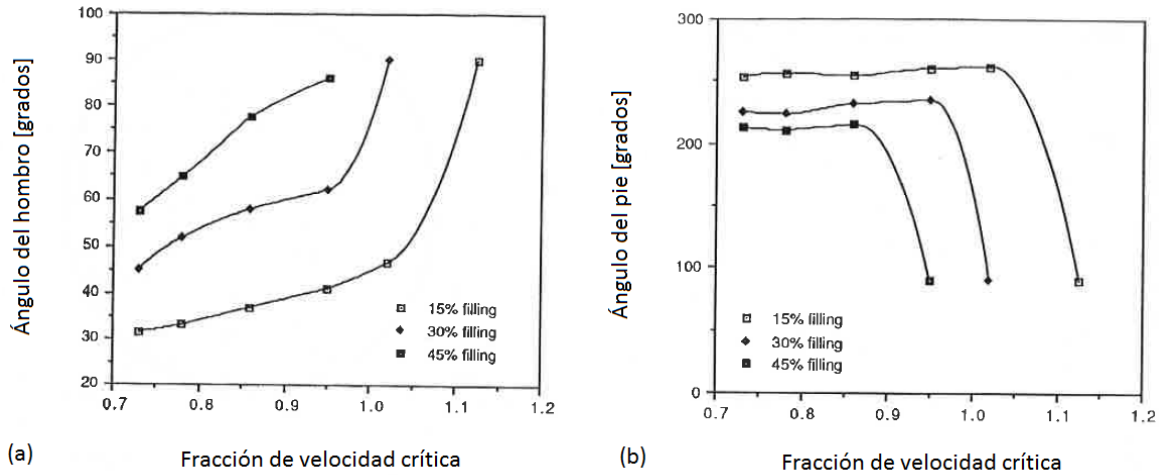


Figura 3.9: (a) Hombro de la carga (b) Pie de la carga.  
Fuente: Adaptado de [6].

Por su parte, si el molino es de descarga por rejilla:

$$\theta_{TO} = \theta_T \quad (3.4)$$

Y si es de descarga por rebose:

$$\theta_{TO} = \pi + \arcsin \frac{r_t}{r_m} \quad (3.5)$$

donde,

- $r_t$  es el radio del agujero por donde sale la carga.
- $r_m$  es el radio del molino.

por último,

$$r_i = r_m \left( 1 - \frac{2\pi\beta f}{2\pi + \theta_S - \theta_T} \right)^{0,5} \quad (3.6)$$

donde,

$\beta$  es la fracción de carga que se encuentra dentro del volumen de la *carga activa*, y se calcula como

$$\beta = \frac{t_c}{t_f + t_c} \quad (3.7)$$

$t_c$  es el tiempo que una partícula de la carga se demora en pasar del pie al hombro, y se calcula como

$$t_c = \frac{2\pi + \theta_T + \theta_s}{2\pi\bar{N}} \quad (3.8)$$

$\bar{N}$  es la velocidad de rotación promedio de la carga en [Hz], y se calcula como

$$\bar{N} = \frac{N_m}{2} \quad (3.9)$$

$t_f$  es el tiempo que una partícula de la carga pasa fuera de la *carga activa*, y se calcula como

$$t_f = \left( \frac{2\bar{r}(\sin\theta_S - \sin\theta_T)}{g} \right)^{0,5} \quad (3.10)$$

$\bar{r}$  es una aproximación del radio promedio de la *carga activa*, y se calcula como

$$\bar{r} = \frac{r_m}{2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{2\pi f}{2\pi\theta_s - \theta_T} \right)^{0,5} \right] \quad (3.11)$$

## Función de Velocidad

Definiendo el radio y la velocidad normalizados,  $R_n$  y  $V_n$ ,

$$R_n = \frac{r}{r_m} \quad (3.12)$$

$$V_n = \frac{V_r}{V_m} \quad (3.13)$$

donde  $V_m$  es la velocidad de la carcasa del molino y  $V_r$  es la velocidad de la carga a una distancia  $r$  del centro.

Se tiene que,

$$N_r = \frac{V_r}{2\pi r} \quad (3.14)$$

donde  $N_r$  es la velocidad angular de la carga en función del radio [Hz].

De las mediciones experimentales mostradas en la Figura 3.10,

$$N_r = \frac{N_m r_m (r - r^*)}{r (r_m - r^*)} \quad (3.15)$$

donde  $r^* = z r_i$ , es la posición radial normalizada teórica a la que la velocidad de la carga es cero.

$$z = (1 - f)^{0,4532} \quad (3.16)$$

## Balance Energético

Para calcular la potencia mecánica que consume un molino de trituración, Morrell considera el volumen de control de la Figura 3.11, para el cual calcula el flujo de energía que sale de este volumen por la cara ABCD.

Con ello se llega a la siguiente ecuación:

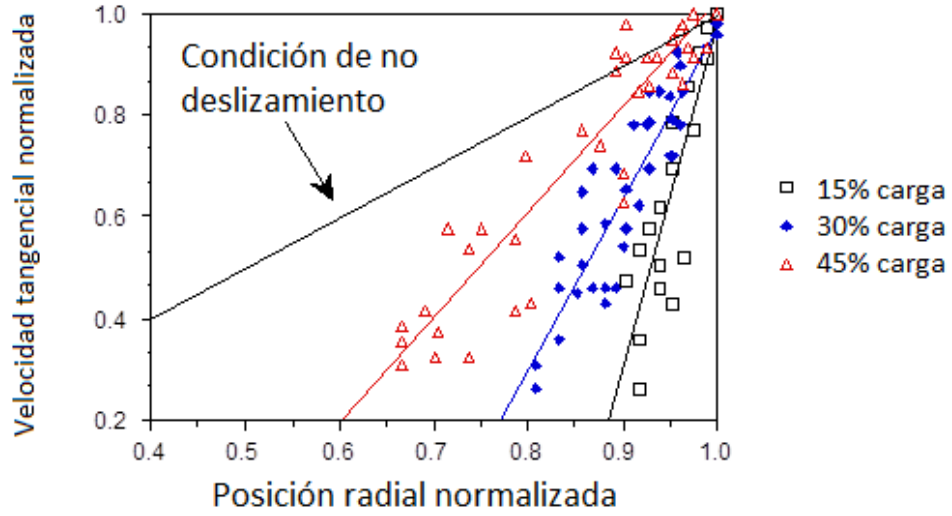


Figura 3.10: Velocidad normalizada  $v/s$  Posición radial normalizada para el molino experimental con tapa de vidrio.

Fuente: Adaptado de [6].

$$\begin{aligned}
 P_t = & \frac{\pi g L N_m r_m}{3(r_m - z r_i)} [2r_m^3 - 3z r_m^2 r_i + r_i^3 (3z - 2)] \times \\
 & \times [\rho_c (\sin \theta_S - \sin \theta_T) + \rho_p (\sin \theta_T - \sin \theta_{TO})] + \\
 & + L \rho_c \left( \frac{N_m r_m \pi}{(r_m - z r_i)} \right)^3 [(r_m - z r_i)^4 - r_i^4 (z - 1)^4]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde,

- $P_t$ : es la potencia mecánica por el movimiento de la carga en la porción cilíndrica del molino [W].
- $L$ : es el largo de la porción cilíndrica del molino.
- $\rho_c$ : es la densidad aparente de la carga.
- $\rho_p$ : es la densidad de la piscina de lodo.

Por su parte, para la sección cónica, se llega a la ecuación:

$$\begin{aligned}
 P_c = & \frac{\pi g L_d N_m r_m}{3(r_m - r_t)} [r_m^4 - 4r_m r_i^3 + 3r_i^4] \times \\
 & \times [\rho_c (\sin \theta_S - \sin \theta_T) + \rho_p (\sin \theta_T - \sin \theta_{TO})] + \\
 & + \left( \frac{2\pi^3 N_m^3 L_d \rho_c}{(5r_m - r_t)} \right) [(r_m^5 - 5r_m r_i^4 + 4r_i^5)]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde,

- $P_c$ : es la potencia mecánica por el movimiento de la carga en la porción cónica del molino [W].
- $L_d$ : es el largo de las dos porciones cónicas del molino [m].

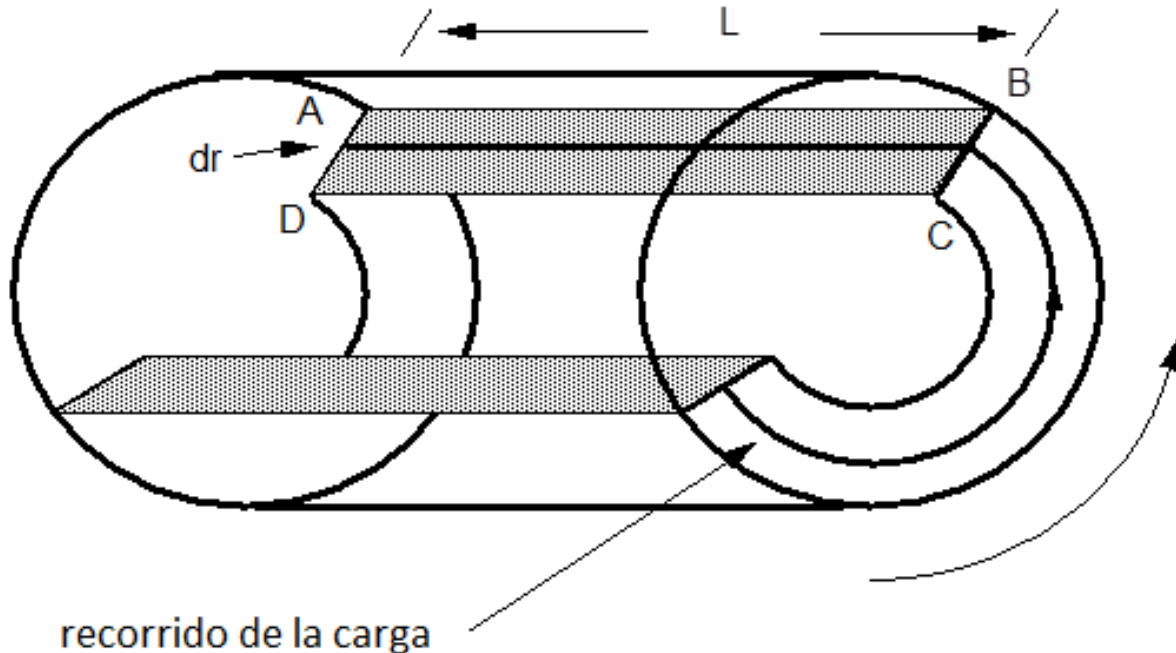


Figura 3.11: Volumen de control para cálculo de potencia mecánica según Morrell.  
Fuente: Adaptado de [3].

### Densidad de la carga

La densidad de la carga aparente, o carga resultante al interior del molino se calcula mediante la siguiente aproximación:

$$\rho_c = \frac{f\rho_o(1 - E + EUS + f_b(\rho_b - \rho_o)(1 - E) + fEU(1 - S))}{f} \quad (3.19)$$

donde,

- $E$  es la fracción dentro del volumen que ocupa la carga, que no contiene ni mineral ni bolas de acero.
- $U$  es la porción de  $E$  que está ocupada con la piscina de lodo.
- $S$  es la fracción de contenido sólido en la piscina de lodo.

Ante la ausencia de datos experimentales, se utiliza  $E = 0,4$ ,  $U = 1$  y  $S = 0,5$ .

Por su parte, la densidad de la piscina de lodo se calcula de la siguiente manera:

$$\rho_p = \rho_o S + (1 - S) * \rho_{H_2O} \quad (3.20)$$

donde  $\rho_{H_2O}$  es la densidad del agua.

### No Load Power

Mediante el uso de una ecuación empírica obtenida de 9 molinos industriales, se obtiene una ecuación para predecir el consumo de potencia de un molino sin carga en [W].

$$No - LoadPower = 1,68D^{2,05}[\phi(0,667L_d + L)]^{0,82} \quad (3.21)$$

donde,

- $D$  es el diámetro del molino [m].
- $\phi$  es la fracción de la velocidad crítica.
- $L_d$  es el largo de la terminación cónica [m].
- $L$  es el largo de la sección cilíndrica del molino [m].

### Ajuste del modelo

La ecuación final para el cálculo de potencia es:

$$GrossPower = No - LoadPower + (k \times charge - motionpower) \quad (3.22)$$

donde,

- $k = 1,26$  es una constante de ajuste que representa la potencia consumida por fricción de la carga.
- $charge - motionpower = P_t + P_c$ .

### Predicción del Modelo de Morrell

Usando el paquete de mediciones publicadas en [1], Morrell obtiene la predicción descrita en la Figura 3.12.



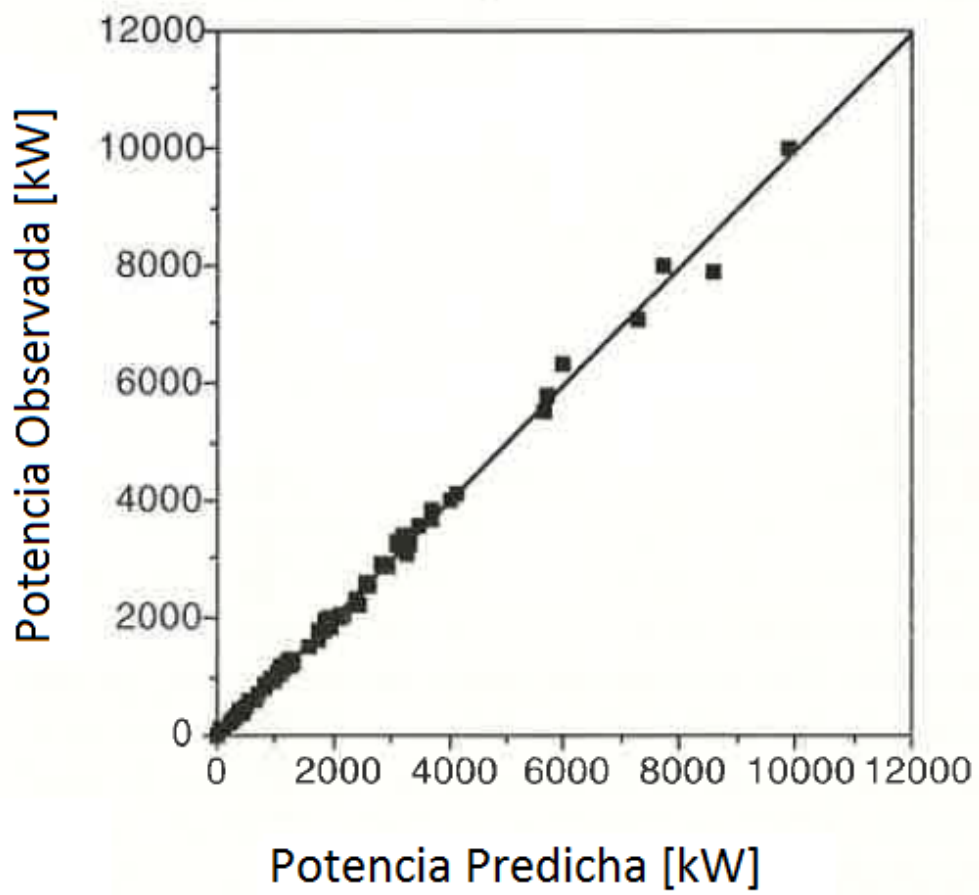


Figura 3.12: Predicción de potencia según Morrell.  
Fuente: Adaptado de [6].

### 3.3. Eureka<sup>®</sup>

Eureka<sup>®</sup> es un software de inteligencia artificial que a partir de un paquete de mediciones de algún fenómeno cualquiera, busca ecuaciones matemáticas que lo describan.

El programa, ocupa una técnica de regresión simbólica.

Regresión simbólica, a diferencia de una regresión lineal o no lineal, no ajusta parámetros a una función de una forma predeterminada. En cambio, prueba con distintas funciones tanto lineales como no lineales.

En una primera iteración, el algoritmo prueba la capacidad predictiva de un grupo de soluciones lineales, luego, en una siguiente iteración, se le agregan pequeñas variaciones a estas soluciones lineales y se vuelve a probar el desempeño del modelo, así, tras cada iteración, el programa agrega o quita términos matemáticos buscando la expresión que mejor describa los datos experimentales.

Para evitar *overfitting*<sup>6</sup> el software utiliza validación cruzada, es decir, divide el paquete de datos en dos, con una porción entrena el modelo, y con la otra porción evalúa como se comporta el modelo, asegurando así que el modelo se puede utilizar más tarde en datos nuevos para el programa.

---

<sup>6</sup>En aprendizaje de máquinas, el *overfitting* o sobreajuste ocurre cuando un sistema se entrena en exceso o con datos erróneos, lo que hace que el modelo que se obtiene quede ajustado a características muy particulares del paquete de datos utilizados, presentando luego un alto error cuando se prueba el modelo en datos fuera del paquete de entrenamiento.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Variables Utilizadas en el Modelo

El modelo presentado por Stephen Morrell [6] utiliza las siguientes variables para hacer su cálculo de potencia.

Tabla 4.1: Variables modelo de morrell

VARIABLES DE OPERACIÓN	UNIDADES	VARIABLES DE DISEÑO	UNIDADES
Velocidad Angular ( $N$ )	[Hz]	Radio del molino ( $r_m$ )	[m]
Fracción de llenado total ( $f$ )		Largo molino ( $L$ )	[m]
Fracción de llenado de bolas ( $f_b$ )		Largo sección cónica ( $L_d$ )	[m]
Densidad del mineral ( $\rho_o$ )	[g/cm <sup>3</sup> ]	Tipo de Molino (descarga por rejilla o rebose)	

Fuente: Elaborado por el autor.

Uno de los problemas de este modelo, es que de las variables que él utiliza,  $f$  y  $f_b$  no se pueden medir mientras opera el molino, con lo cual el modelo no se puede ocupar en algoritmos de control. Así, se propone utilizar las variables descritas en la Tabla (4.2).

La variable  $\omega$  es la misma del modelo de Morrell, solo que en [rad/s] en vez de [Hz]. Por su parte,  $\theta_T$  representa el pie de la carga, variable que se piensa se podrá medir en tiempo real en los próximos años. De las mediciones que hizo Morrell en su molino de laboratorio de pie y hombro (Figura 3.9), se puede ver que para el rango de fracciones de velocidad crítica ( $\phi$ ) en el que operan los molinos, la variable  $f$  de Morrell se puede relacionar mediante una función lineal con la variable  $\theta_T$ . Por último,  $\rho_c$  resume la información adicional que entregan  $\rho_o$  y  $f_b$ .

Tabla 4.2: Variables modelo propuesto

VARIABLES DE OPERACIÓN	UNIDADES	VARIABLES DE DISEÑO	UNIDADES
Velocidad Angular ( $\omega$ )	[rad/s]	Radio del molino ( $r_m$ )	[m]
Pie de la carga ( $\theta_T$ )	[rad/s]	Largo molino ( $L$ )	[m]
Densidad aparente ( $\rho_c$ )	[g/cm <sup>3</sup> ]	Largo sección cónica ( $L_d$ )	[m]
		Tipo de molino (descarga por rejilla o rebose)	

Fuente: Elaborado por el autor.

## 4.2. Descripción de la Carga al Interior del Molino

Como se muestra en los antecedentes, para poder describir con ecuaciones físicas la potencia que consume la carga al interior de un molino, primero se debe describir la geometría que representa la carga. Se propone usar en este modelo la geometría propuesta por Stephen Morrell [6].

Se muestran los principales parámetros que describen la carga al interior del molino (ver (Figura 4.1):

- $\theta_T$ : Ángulo del pie.
- $\theta_S$ : Ángulo del *hombro*.
- $\theta_{TO}$ : Ángulo de la piscina de lodo (slurry pool según [6]).
- $r_m$ : Radio del molino.
- $r_i$ : Radio interior de la carga.

### 4.2.1. Ecuaciones para Parámetros que Describen Geometría

Para poder usar la geometría descrita en la Figura 4.1, se deben poder expresar matemáticamente los parámetros que la describen. Con este propósito, Morrell [6], basándose en mediciones experimentales de su molino de laboratorio, encuentra las Ecuaciones (3.2) a la (3.11). En el modelo que se propone, dado que los parámetros de entrada son distintos al caso de Morrell, se deben encontrar nuevas ecuaciones.

Utilizando los datos industriales publicados en [6], se calcula para cada una de las mediciones  $\theta_T$  mediante la Ecuación (3.2). Luego, utilizando el software Eureka<sup>®</sup>, en donde se utiliza  $\theta_T$  como parámetro conocido, se encuentran las Ecuaciones (4.1) y (4.2).

- $\theta_T$ : Es un parámetro de entrada del modelo [rad].
- $\theta_S$ : [rad].

$$\theta_S = 1,3\theta_T + 1,6r_m\omega + 0,24r_m\theta_T - 2,38 - 1,09r_m - 0,167\theta_T^2 - 0,34r_m\omega\theta_T \quad (4.1)$$

- $\theta_{TO}$ : Se calcula con la Ecuación (3.4) o (3.5) [6] [rad].

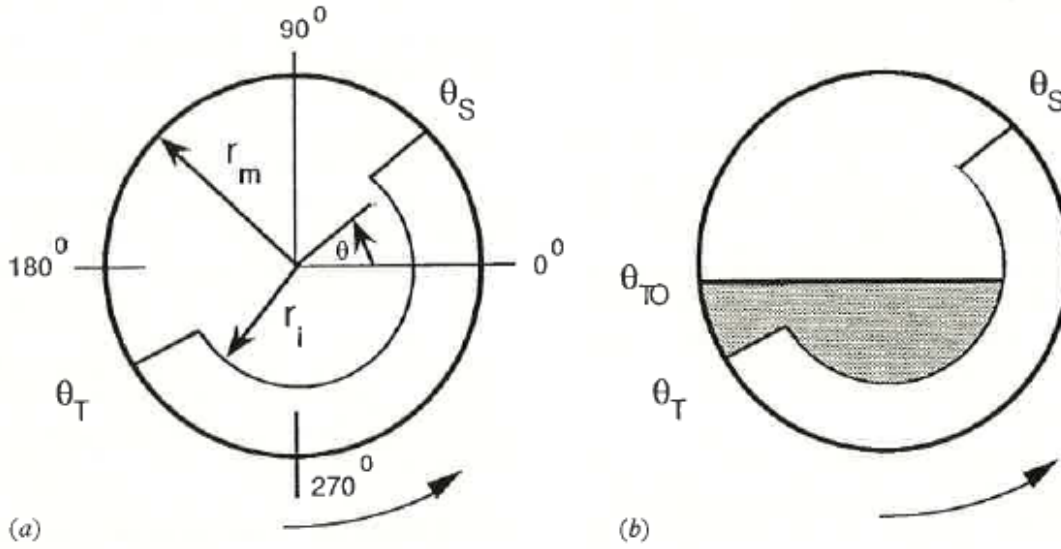


Figura 4.1: (a) Geometría simplificada de molino de descarga con rejilla (b) Geometría simplificada de molino de descarga por rebose.

Fuente: [6].

- $r_m$ : Es un parámetro de entrada del modelo [m].
- $r_i$ : [m].

$$r_i = 3,26\omega + 1,52\theta_T + 0,2r_m\theta_T + 0,1r_m\omega - 6,72 - 0,12r_m - 0,76\omega\theta_T \quad (4.2)$$

### 4.3. Potencia Debida a la Gravedad

Para calcular la potencia que consume el molino por motivo de la gravedad por unidad de largo, se ocupa la siguiente ecuación, adaptada de [6].

$$P_{tg} = \frac{\pi g \omega r_m}{6(r_m - z r_i)} [2r_m^3 - 3z r_m^2 r_i + r_i^3 (3z - 2)] \times [\rho_c (\sin \theta_S - \sin \theta_T) + \rho_p (\sin \theta_T - \sin \theta_{TO})] \quad (4.3)$$

en donde se recuerda la definición y unidades de sus parámetros:

- $P_{tg}$ : potencia debido a energía potencial gravitacional [W].
- $g$ : aceleración de gravedad [ $m/s^2$ ].
- $\omega$ : velocidad angular [rad/s], variable de entrada del modelo.
- $r_m$ : radio del molino [m], variable de entrada del modelo.
- $r_i$ : radio interior de la carga [m]. Cálculo con Ecuación (4.2).

- $z$ : parámetro adimensional.

$$z = (1 - f)^{0,4532} \quad (4.4)$$

donde  $f$ , es la fracción de llenado y se calcula con la siguiente expresión:

$$f = 1,88 - 0,39\theta_T \quad (4.5)$$

- $\rho_c$ : densidad aparente de la carga [ $g/cm^3$ ], parámetro de entrada del modelo.
- $\rho_p$ : densidad de la piscina de lodo [ $g/cm^3$ ], cálculo con Ecuación (3.20).
- $\theta_T$ : ángulo del *pie* [rad], variable de entrada del modelo.
- $\theta_S$ : ángulo del *hombro* [rad], cálculo con Ecuación (4.1).
- $\theta_{TO}$ : ángulo de la piscina de lodo (slurry pool según [6]) [rad], cálculo con Ecuación (3.4) o (3.5).

## 4.4. Potencia por Energía Cinética de la Carga y Pérdidas por Calor

Como se explica en la metodología, para predecir la potencia que consume un molino, se debe, además de calcular la potencia debida a la gravedad ( $P_{tg}$ ), calcular la fracción correspondiente a la velocidad que le imprime el molino a la carga (potencia por energía cinética) y la porción que se debe a diversas pérdidas por calor.

Debido a que estas dos fracciones representan fenómenos físicos de mayor complejidad en relación a la potencia debido a la gravedad, se utiliza el software Eureka<sup>®</sup>.

### 4.4.1. Delta Potencia por Unidad de Largo Usando Eureka<sup>®</sup>

Delta potencia por unidad de largo se define mediante la Ecuación (4.6).

$$\Delta P = \frac{P_{exp} - P_{tg}}{L} \quad (4.6)$$

De los datos presentados por Morrell [1], para poder obtener de manera más directa  $\Delta P$ , se utilizan 21 mediciones de los 15 molinos SAG rectos disponibles.

Con estos 21 paquetes de datos se deja entrenar al programa para que encuentre una fórmula de la forma:

$$\Delta P = f(r_m, \omega, \theta_T, \rho_c) \quad (4.7)$$

Donde,

- $r_m$ : Radio del molino [m], es dato.
- $\omega$ : Velocidad angular molino [rad/s], es dato.
- $\theta_T$ : Ángulo del pie [rad], se calcula con (3.2).
- $\rho_c$ : Densidad aparente, se calcula con (3.19).

De este entrenamiento de Eureka<sup>®</sup>, se obtiene el ajuste de la Figura 4.2.

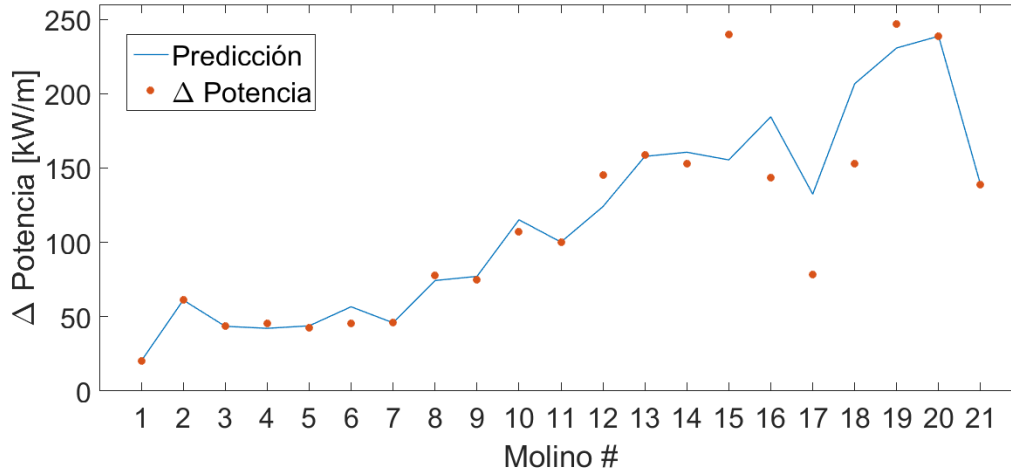


Figura 4.2: Ajuste encontrado por Eureka<sup>®</sup> para los 21 datos de molinos SAG rectos presentes en [1].

Fuente: Generado por el autor usando Eureka<sup>®</sup>.

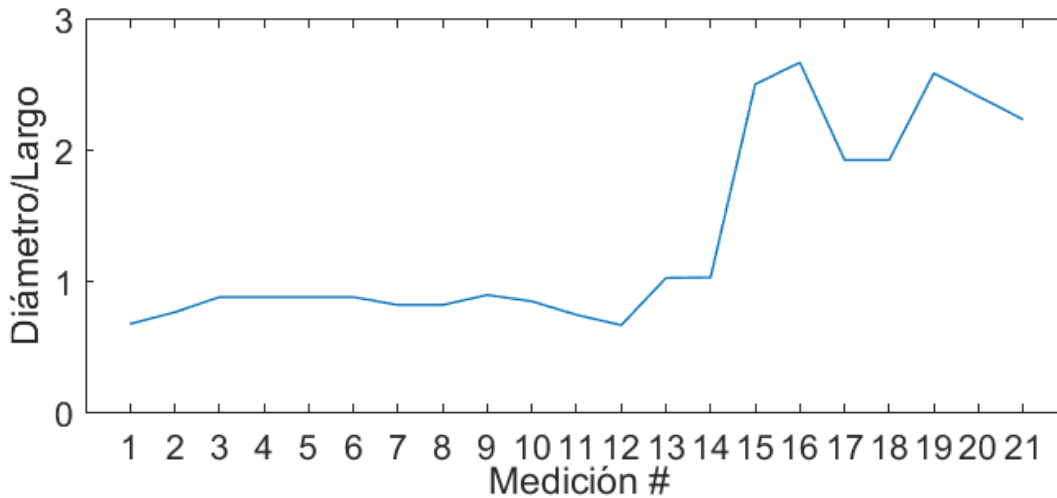


Figura 4.3: Relación de aspecto (D/L) para los 21 datos de molinos SAG rectos presentes en [1].

Fuente: Generado por el autor usando Matlab<sup>®</sup>.

Recordando que lo que hace el software Eureka<sup>®</sup> es buscar ecuaciones que describan el comportamiento físico de un sistema, es un resultado remarcable el que la ecuación encontrada

se ajuste mucho peor a los molinos 15-21, lo que coincide con la separación de molinos de baja relación de aspecto (1-14) y los de alta relación de aspecto (15-21) (ver Figura 4.3).

Se plantea que esto muestra un indicio de que la dinámica al interior de estos dos tipos de molino tiene una diferencia fundamental. Por lo tanto se decide buscar dos ecuaciones, una para molinos de baja relación de aspecto y otra para molinos de alta relación de aspecto.

### Delta Potencia Molinos Baja Relación de Aspecto

Se encuentra la Ecuación (4.8) que corresponde a la Figura 4.4.

$$\Delta P = 86,75 + 5,64\omega\rho_c + 25,04r_m^2 - 42,76\theta_T \quad (4.8)$$

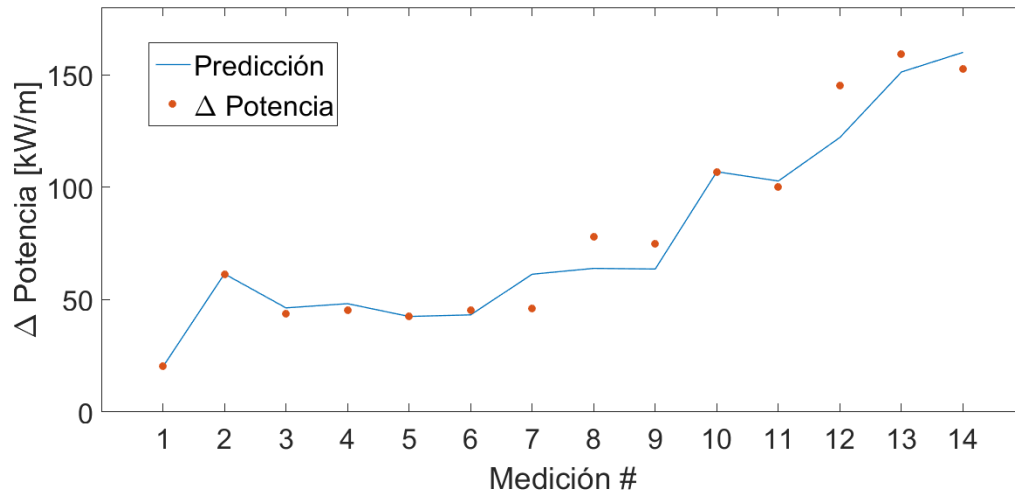


Figura 4.4: Ajuste encontrado por Eureka<sup>®</sup> para los 14 datos de molinos SAG rectos de baja relación de aspecto presentes en [1].

Fuente: Generado por el autor usando Matlab<sup>®</sup>.

### Delta Potencia Molinos Alta Relación de Aspecto

Se encuentra la Ecuación (4.9) que corresponde a la Figura 4.5.

$$\Delta P = 245,6 + 20,25\omega\rho_cr_m^2 - 48,6r_m\theta_T - 9,66r_m\rho_c^2 \quad (4.9)$$



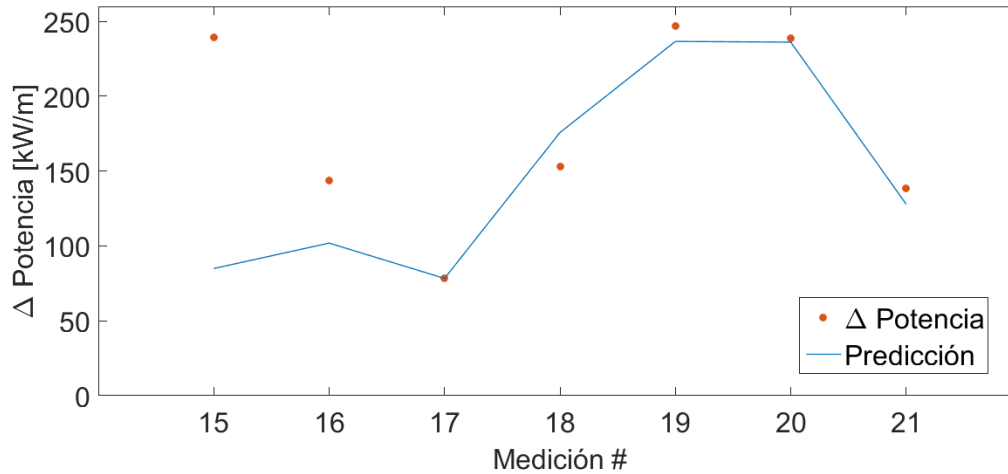


Figura 4.5: Ajuste encontrado por Eureka<sup>®</sup> para los 7 datos de molinos SAG rectos de alta relación de aspecto presentes en [1].

Fuente: Generado por el autor usando Eureka<sup>®</sup>.

## 4.5. Cálculo de Potencia Modelo Propuesto

Para obtener un valor de potencia total consumida por un molino, las Ecuaciones (4.3), (4.8) y (4.9) se integran numéricamente a lo largo del molino. Cabe notar que esta integración numérica se hace tanto a lo largo de la porción cilíndrica, como a lo largo de la porción cónica de ser el caso.

## 4.6. Congruencia del Modelo con Datos Experimentales

Para evaluar el desempeño del modelo propuesto, se cuenta con 77 mediciones de 66 molinos industriales [1], con potencias desde los 100 [kW] hasta los 10.000 [kW].

Se muestran gráficos de la forma Potencia Predicha v/s Potencia Experimental, en ellos se puede ver la buena concordancia entre el modelo propuesto y los datos experimentales (Figuras 4.6 a 4.9).

Vale destacar que el software Eureka<sup>®</sup> entrenó solo con datos de molinos SAG.

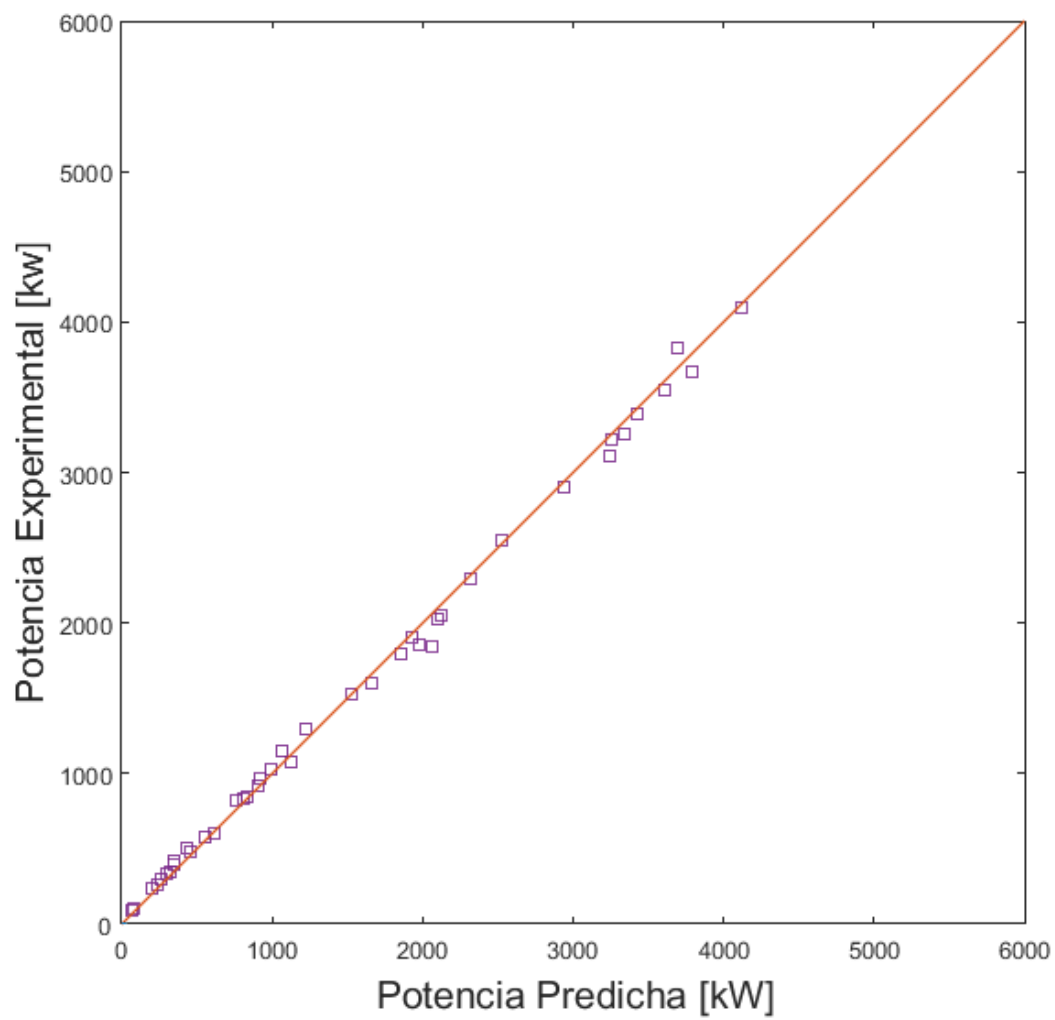


Figura 4.6: Molinos de bola  
Fuente: Generado por el autor usando Matlab®.

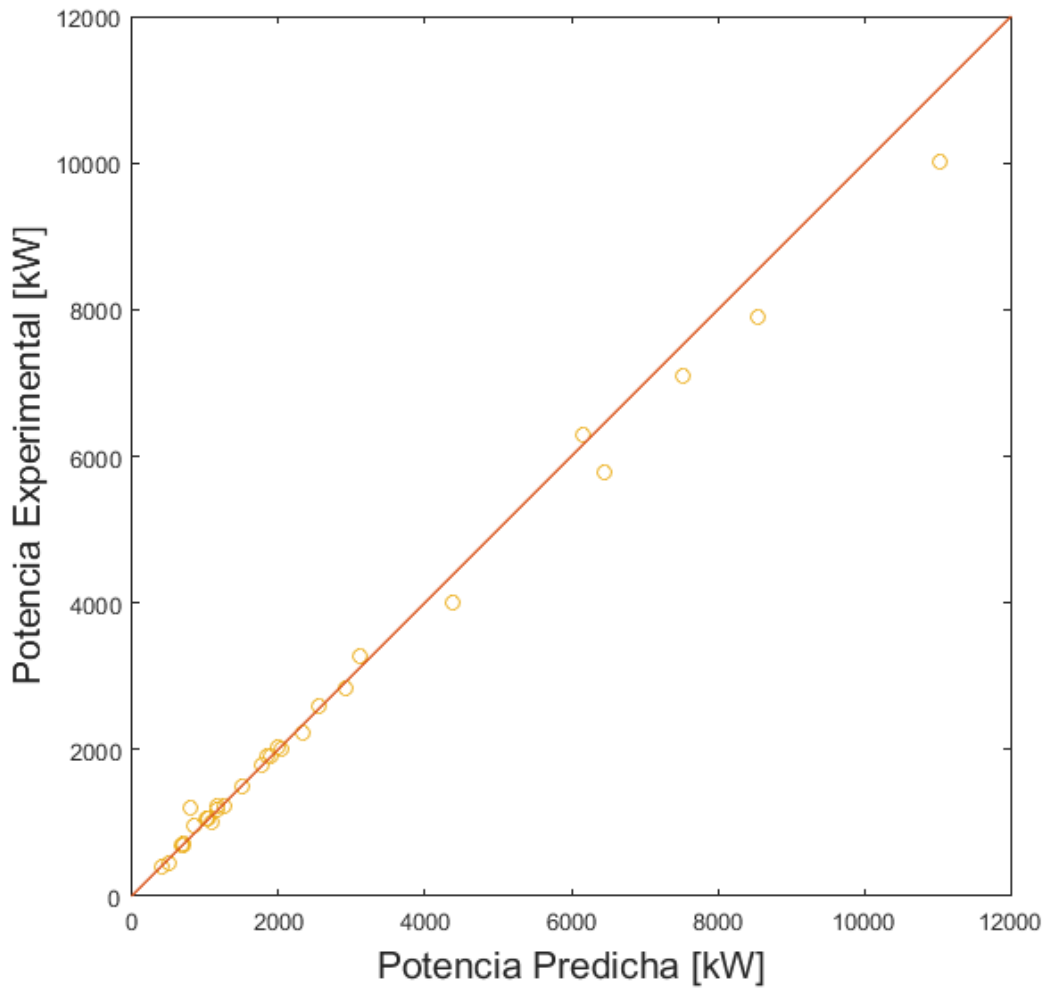


Figura 4.7: Molinos SAG  
Fuente: Generado por el autor usando Matlab®.

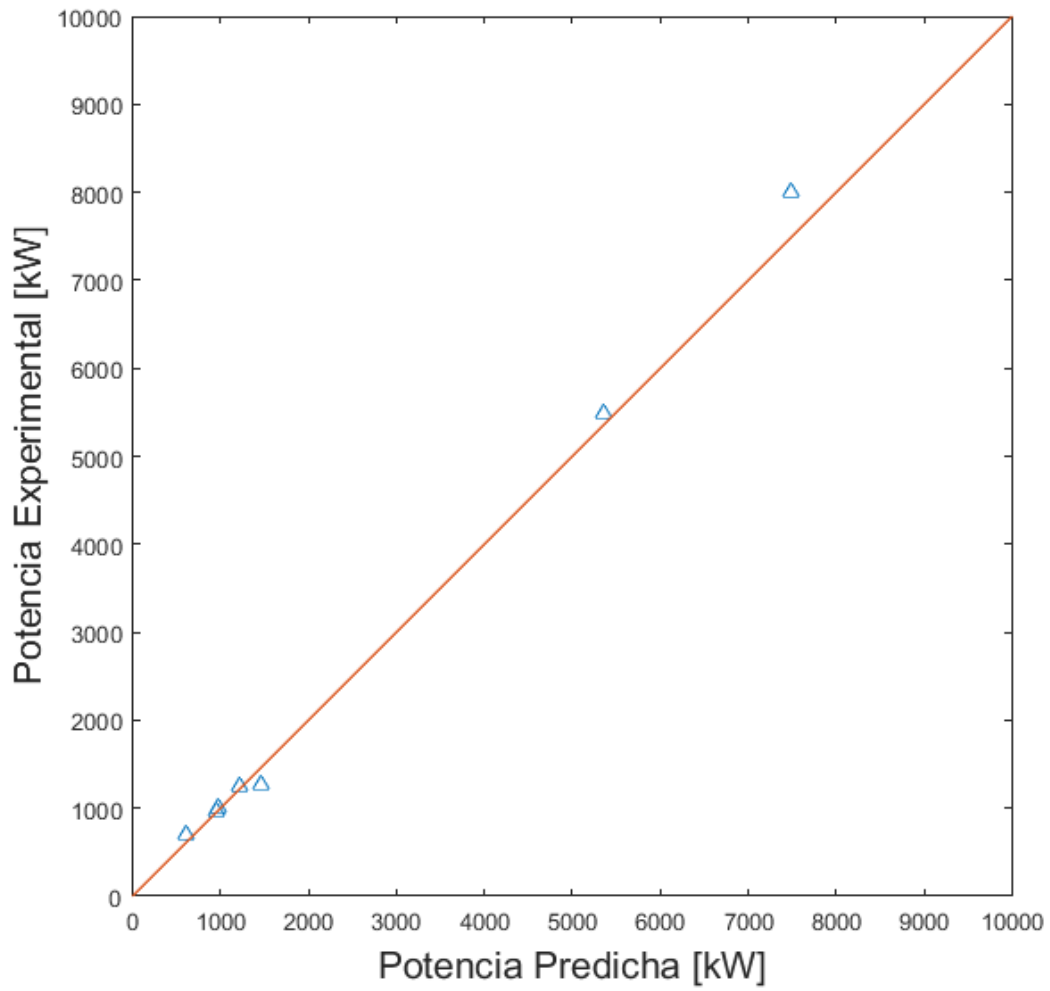


Figura 4.8: Molinos AG  
Fuente: Generado por el autor usando Matlab®.

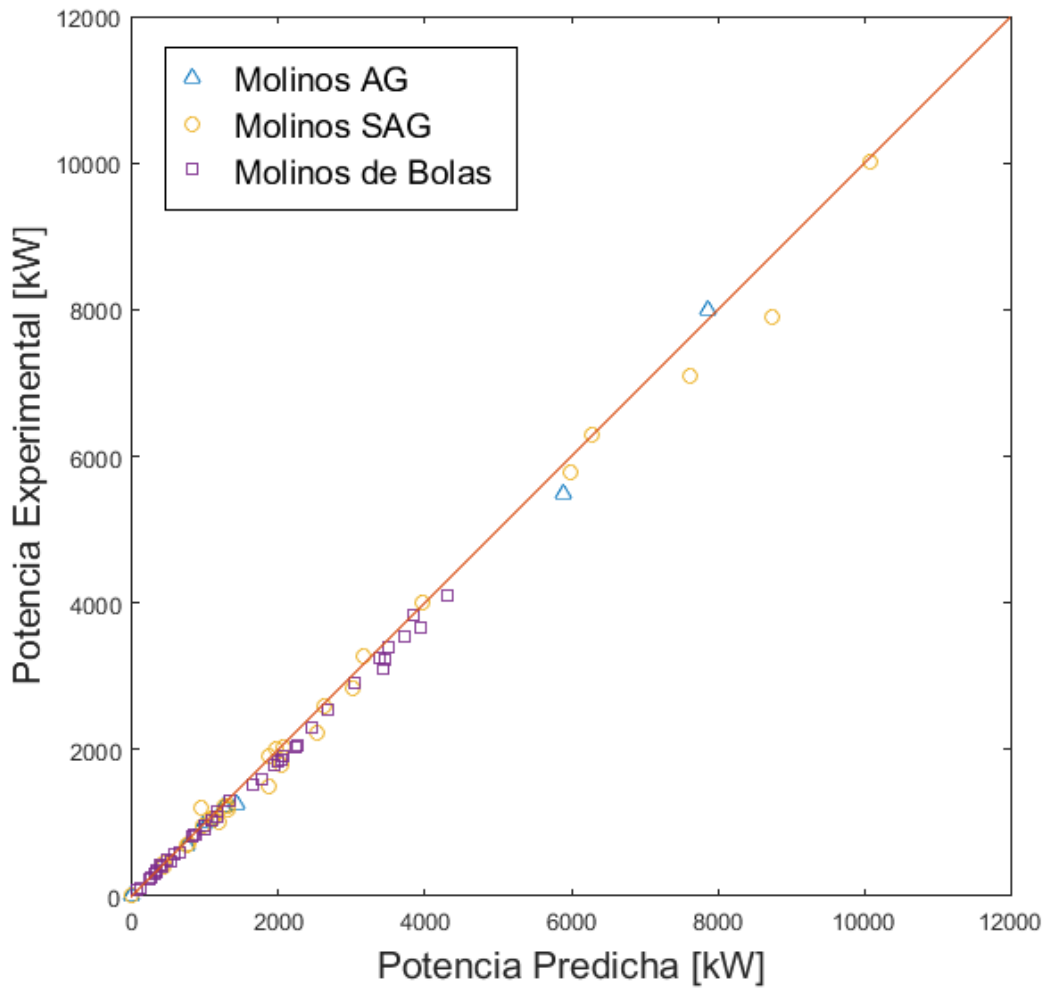


Figura 4.9: Todos los molinos  
Fuente: Generado por el autor usando Matlab®.

## 4.7. Análisis de Sensibilidad

Para estudiar la sensibilidad del modelo propuesto ante las variables de entrada de este, se plantea calcular la derivada parcial de la función de potencia por unidad de largo con respecto a cada una de sus variables. Las variables consideradas son las variables de operación. Dado que son 3 variables de operación más la variable del radio del molino, se hace imposible representar gráficamente todo el espacio de posibilidades, por lo que se eligen algunos casos representativos.

Se decide mantener fija 1 variable de operación, para luego, recorriendo en el plano (x,y) las otras dos variables de operación, calcular las tres derivadas parciales.

Así, se eligen 3 valores para dejar constante en cada una de las variables, mínimo, promedio y máximo. Sumando que se quiere estudiar la sensibilidad para distintos radios (también mínimo, promedio y máximo), se tienen 81 casos posibles de interés. Por simplicidad se consideran solo molinos con descarga por rejilla.

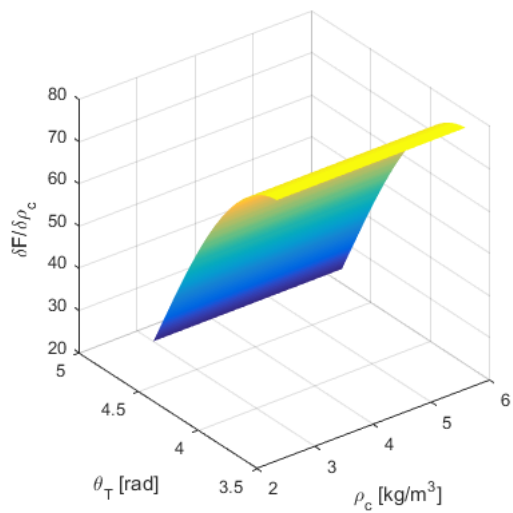
En la presente sección de resultados se muestran primero 9 gráficos (Figuras 4.10 a 4.12), uno por cada derivada parcial para el radio promedio, dejando una de las variables de operación constante en su valor promedio. Luego se muestran 3 gráficos considerados de interés para el análisis (Figura 4.13. Por simplicidad solo se grafica para molinos con baja relación de aspecto.

### Rango de Operación de las Variables

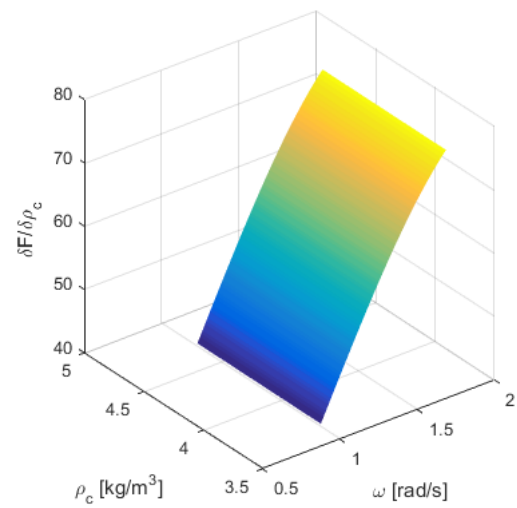
Tabla 4.3: Rango de operación variables modelo propuesto

Variables de Operación	Mínimo	Promedio	Máximo	Unidad
Fracción de la velocidad crítica ( $\phi$ )	0.48	0.74	0.89	
Pie de la carga ( $\theta_T$ )	3.59	4.05	4.63	[rad]
Densidad aparente ( $\rho_c$ )	2.52	4.80	5.77	[g/cm <sup>3</sup> ]
Radio del molino ( $r_m$ )	0.85	2.52	5.10	[m]

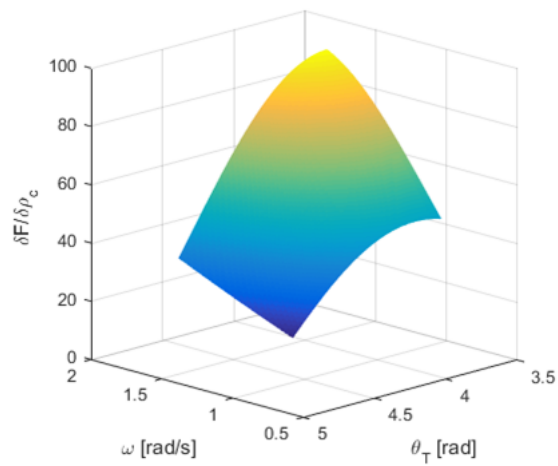
Fuente: Elaborado por el autor en base a [1].



(a)



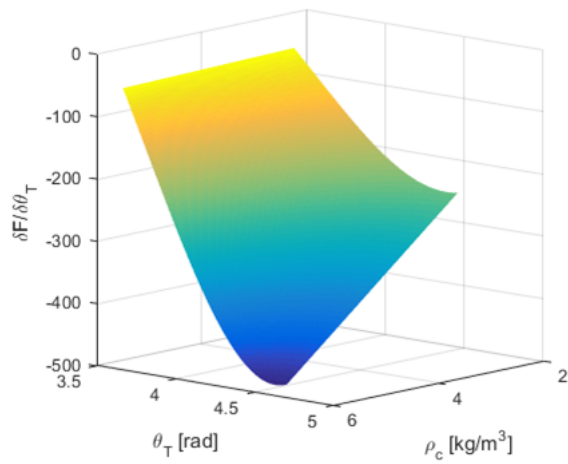
(b)



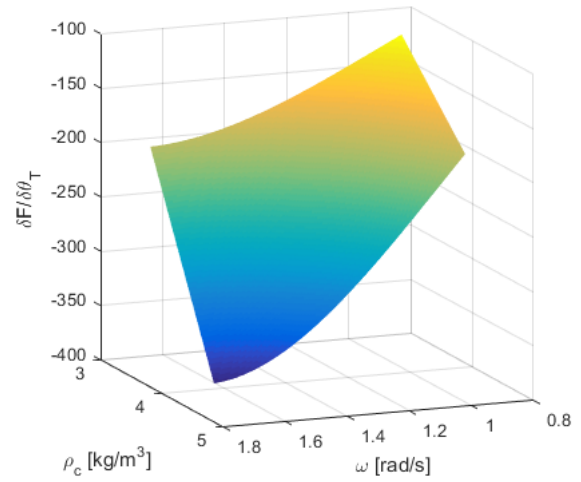
(c)

Figura 4.10: Derivada parcial con respecto a  $\rho_c$  para  $r_m$  promedio. (a)  $\omega = 1,46[\text{rad/s}]$  (b)  $\theta_T = 4,05[\text{rad}]$  (c)  $\rho_c = 4,8[\text{g/cm}^3]$ .

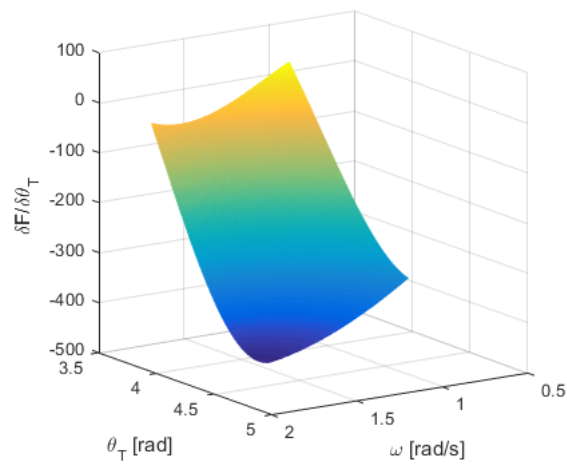
Fuente: Generado por el autor usando Matlab<sup>®</sup>.



(a)



(b)

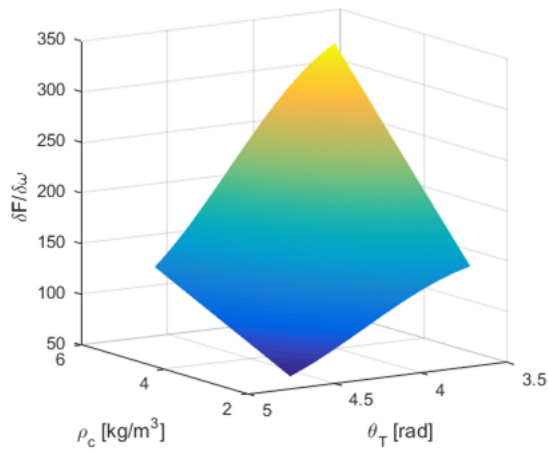


(c)

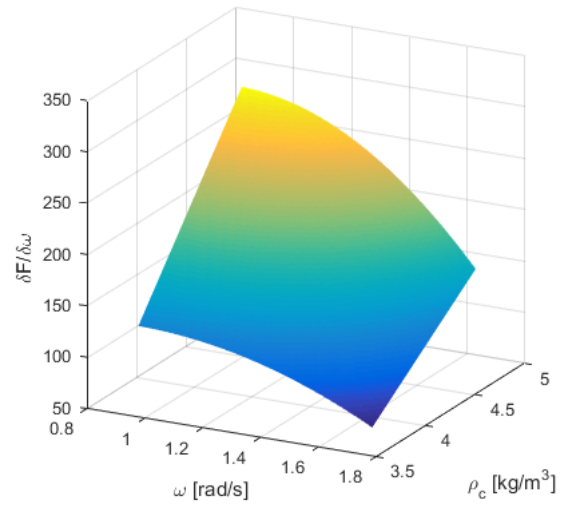
Figura 4.11: Derivada parcial con respecto a  $\theta_T$  para  $r_m$  promedio. (a)  $\omega = 1,46[\text{rad/s}]$  (b)  $\theta_T = 4,05[\text{rad}]$  (c)  $\rho_c = 4,8[\text{g/cm}^3]$ .

Fuente: Generado por el autor usando Matlab<sup>®</sup>.

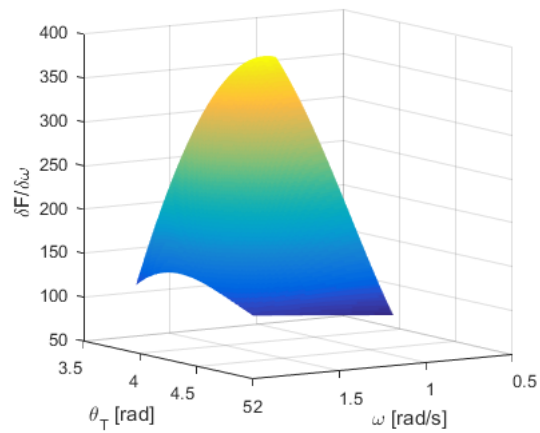




(a)



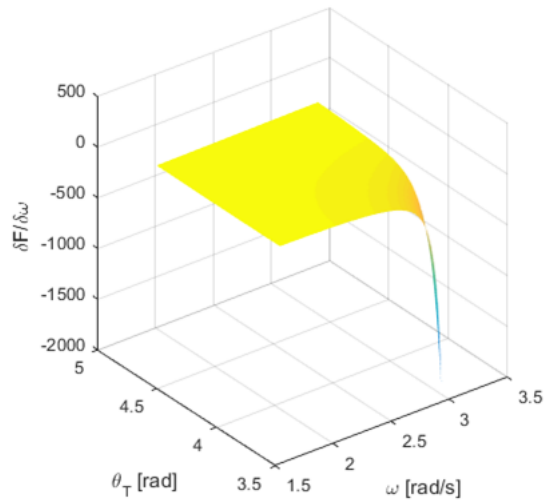
(b)



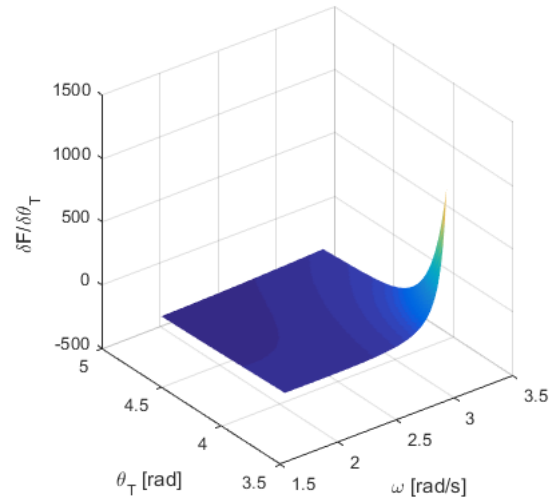
(c)

Figura 4.12: Derivada parcial con respecto a  $\omega$  para  $r_m$  promedio. (a)  $\omega = 1,46[\text{rad/s}]$  (b)  $\theta_T = 4,05[\text{rad}]$  (c)  $\rho_c = 4,8[\text{g/cm}^3]$ .

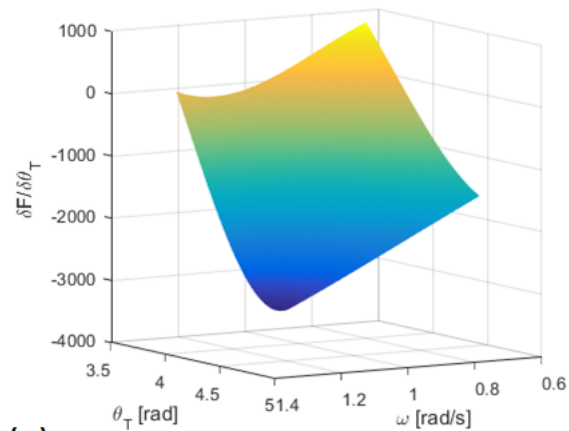
Fuente: Generado por el autor usando Matlab<sup>®</sup>.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.13: (a) Derivada parcial con respecto a  $\omega$ ,  $r_m = 0,85[m]$ ,  $\rho_c = 5,77[g/cm^3]$  (b) Derivada parcial con respecto a  $\theta_T$ ,  $r_m = 0,85[m]$ ,  $\rho_c = 5,77[g/cm^3]$  (c) Derivada parcial con respecto a  $\theta_T$ ,  $r_m = 5,1[m]$ ,  $\rho_c = 5,77[g/cm^3]$ .

Fuente: Generado por el autor usando Matlab®.

# Capítulo 5

## Discusión y Análisis

Las variables que utiliza este modelo (ver Tabla 4.2), en el rango de operación normal de un molino (ver Tabla 4.3), entrega toda la información que proveen las variables utilizadas por Morrell (ver Tabla 4.1).

Se utilizan las variables propuestas, primero, porque se cree que en los próximos años se podrán medir todas estas variables en tiempo real, además que se postula que éstas están relacionadas con la dinámica al interior del molino de manera más directa que las utilizadas por modelos anteriores.

Es relevante también, que para los resultados expuestos en este trabajo, no se cuenta con mediciones experimentales del pie ( $\theta_T$ ), por lo que se usa la predicción de Morrell para esta variable (ver Ecuación (3.2)). Dicho esto, se espera lograr una mayor validación del modelo cuando se cuente con mediciones experimentales del pie de la carga.

Con respecto a la descripción de la *carga activa* al interior del molino, se utiliza la geometría descrita por Morrell (ver Figura 4.1), debido a que este modelo, es el de mayor precisión para un amplio rango de diámetros de molino. No obstante, estudios más recientes, como el de Bbosa en 2016 [7], dan nuevos acercamientos a la descripción de la *carga activa*, tanto su geometría como el campo de velocidades al interior de esta.

Dicho lo anterior, la Ecuación (4.3) para determinar la potencia consumida por el molino por efecto de la gravedad  $P_{tg}$ , tiene una precisión acotada por las limitaciones de los supuestos de la geometría y el perfil de velocidad de la carga.

Para generar las ecuaciones que describen el resto de la potencia no descrita por  $P_{tg}$ , la utilización del software Eureka<sup>®</sup> da indicios que hacen pensar que existe una dinámica distinta para molinos de alta y baja relación de aspecto, lo cual (hasta donde alcanza el conimiento del autor) sería información novedosa acerca de los molinos para molienda. La limitación de esta conclusión viene dada por la poca cantidad de datos disponibles para la utilización del software.

En cuanto al resultado principal de este trabajo de título (obtener un nuevo modelo que prediga consumo de potencia en molinos para molienda), se destaca primero la congruencia

entre las mediciones experimentales y las predicciones del modelo, una congruencia similar a la obtenida por Morrell [6]. Segundo, se destaca que para la generación del modelo, se utilizaron tan solo 21 mediciones de molinos SAG con terminación recta, por lo que la congruencia en las restantes 56 mediciones da buenos indicios de la validez del modelo.

Cuando se realiza el análisis de sensibilidad del modelo, se puede obtener información relevante de las Figuras 4.10 a la 4.13.

- En el caso de la derivada parcial con respecto a  $\rho_c$  (ver Figura 4.10), aumentar la densidad aparente de la carga se traduce en un aumento en la potencia que consume el molino. También se observa que para  $\theta_T$  bajo y  $\omega$  alto, la derivada parcial es mayor, lo que tiene sentido pues la potencia total es mayor en ese caso.
- En el caso de la derivada parcial con respecto a  $\theta_T$  (ver Figura 4.11), se ve que para los casos promedio, aumentar el valor de  $\theta_T$ , que significa disminuir la fracción de llenado  $f$ , se traduce en una disminución de la potencia. Vale notar, que esta derivada tiene mayor módulo cuando la velocidad angular y la densidad aparente son altas (de la mano con mayor potencia), por el contrario, para un pie menor (mayor potencia), el módulo de la derivada es menor, o sea, afecta más en la potencia final, la variación de llenado cuando el llenado es bajo.
- En el caso de la derivada parcial con respecto a  $\theta_T$  (ver Figura 4.12), se puede ver que para condiciones promedio de operación, aumentar la velocidad angular del molino se traduce en un aumento de la potencia. Para velocidades bajas, densidad aparente alta y llenado alto la derivada se encuentra en su máximo. Vale notar que en estos casos el molino no llega al estado de centrifugado.
- Para condiciones de radio mínimo, y densidad aparente máxima (Figura 4.13 (a) y (b)), se observa que el modelo es extremadamente sensible a variaciones en el pie y en la velocidad angular del molino cuando la carga y la velocidad de operación son altas, condiciones que son las más cercanas al centrifugado de la carga.
- Por último, la derivada con respecto al pie, para radio y densidad máximos (Figura 4.13, muestra que para distintas condiciones de llenado y velocidad de operación, variar el llenado del molino puede aumentar o disminuir la potencia.

# Capítulo 6

## Conclusion

Observando la comparación entre la predicción del modelo propuesto y las mediciones experimentales (Figura 4.9), se puede ver que el objetivo principal de este trabajo de título, de obtener un nuevo modelo para predecir potencia de consumo de molinos para molienda, se alcanza con una buena congruencia entre datos experimentales y predicción del modelo. De hecho, en relación a los modelos existentes para un amplio rango de diámetros de molino, la congruencia es similar al mejor de estos modelos.

En cuanto a los objetivos específicos, el modelo propuesto puede incorporar variaciones de la geometría a lo largo de este, ya que el cálculo final de potencia se realiza mediante una integración numérica a lo largo del molino.

También, se seleccionan variables de entrada que tienen relevancia física en el proceso de molienda.

Se logra estudiar la sensibilidad del modelo ante variaciones en sus parámetros operacionales, lo que muestra que el sistema es extremadamente sensible cuando el molino se acerca al régimen de centrifugado.

Por último, como recomendaciones en caso de que se continúe con este estudio, vale notar que contando con mediciones experimentales del pie de la carga se puede validar de mejor manera el modelo propuesto. También, contar con más datos de molinos de terminación cilíndrica, en particular de alta relación de aspecto, podría permitir encontrar una mejor ecuación para predecir potencia en estos casos.

# Bibliografía

- [1] S. Morrell, “Power draw of wet tumbling mills and its relationship to charge dynamics-part 2: an empirical approach to modelling of mill power draw,” *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section C. Mineral Processing and Extractive Metallurgy*, vol. 105, no. 2, 1996.
- [2] F. S. Hoseinian, R. S. Faradonbeh, A. Abdollahzadeh, B. Rezai, and S. Soltani-Mohammadi, “Semi-autogenous mill power model development using gene expression programming,” *Powder Technology*, vol. 308, pp. 61–69, 2017.
- [3] S. Morrell, “The prediction of power draw in wet tumbling mills,” Ph.D thesis, University of Queensland, Australia, 1993.
- [4] N. Arbiter and C. C. Harris, *Scale-up and dynamics of large grinding mills - A case study*. Design and installation of comminution circuits, A. L. Mular and G. V Jergensen II Editors, AIME, New York, 1982.
- [5] K. Liddell and M. M.H., “The effects of mill speed and filling on the behaviour of the load in a rotary grinding mill,” *South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 88, no. 2, pp. 49–57, 1988.
- [6] S. Morrell, “Power draw of wet tumbling mills and its relationship to charge dynamics-part 1: a continuum approach to mathematical modelling of mill power draw,” *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section C. Mineral Processing and Extractive Metallurgy*, vol. 105, no. 2, 1996.
- [7] L. S. Bbosa, I. Govender, and A. Mainza, “Development of a novel methodology to determine mill power draw,” *International Journal of Mineral Processing*, vol. 149, pp. 94–103, 2016.

# Anexo A

## Datos Experimentales

### A.1. Datos Molinos Autógenos

Tabla A.1: Datos experimentales molinos autógenos

Tipo de Descarga	Diámetro [m]	Largo sin Cono [m]	Largo Total [m]	RPM	$\phi$	$f_b$	$f$	$\rho_o$ [ $g/cm^3$ ]	Potencia [kW]
Rendija	5.11	5.18	5.18	13.63	0.73	0	0.24	4.20	1264
Rendija	6.49	2.25	2.48	12.45	0.75	0	0.19	4.00	960
Rendija	6.49	2.25	2.48	12.45	0.75	0	0.27	4.00	1240
Rendija	7.10	2.43	3.47	11.43	0.72	0	0.10	3.57	703
Rendija	7.10	2.43	3.47	11.43	0.72	0	0.12	4.60	1009
Rendija	9.50	4.45	6.45	10.70	0.78	0	0.31	2.90	5490
Rendija	10.20	4.73	7.18	10.06	0.76	0	0.26	3.60	8000

Fuente: Adaptado de [1]

## A.2. Datos Molinos Semi-Autógenos

Tabla A.2: Datos experimentales molinos semi-autógenos

Tipo de Descarga	Diámetro [m]	Largo sin Cono [m]	Largo Total [m]	RPM	$\phi$	$f_b$	$f$	$\rho_o$ [ $g/cm^3$ ]	Potencia [kW]
Rendija	3.85	5.69	5.69	10.35	0.48	0.12	0.12	2.80	404
Rendija	3.90	5.10	5.10	16.75	0.78	0.25	0.34	3.35	1175
Rendija	4.05	4.60	4.60	15.97	0.76	0.06	0.32	2.70	687
Rendija	4.05	4.60	4.60	15.97	0.76	0.06	0.34	2.70	706
Rendija	4.05	4.60	4.60	15.97	0.76	0.07	0.07	2.70	440
Rendija	4.05	4.60	4.60	15.97	0.76	0.08	0.26	2.70	688
Rendija	4.12	5.02	5.02	15.63	0.75	0.22	0.22	2.70	1012
Rendija	4.12	5.02	5.02	15.63	0.75	0.22	0.33	2.70	1225
Rendija	4.16	4.78	4.78	18.45	0.89	0.10	0.38	2.70	1063
Rendija	4.35	4.85	4.85	15.29	0.75	0.12	0.29	2.65	1066
Rendija	5.05	5.99	5.99	14.49	0.77	0.17	0.21	2.68	2033
Rendija	5.08	6.82	6.82	12.38	0.66	0.12	0.31	2.85	2000
Rendija	5.30	7.95	7.95	13.04	0.71	0.18	0.30	2.80	3284
Rendija	5.80	5.65	5.65	14.22	0.81	0.10	0.27	2.80	2600
Rendija	5.82	5.65	5.65	14.20	0.81	0.13	0.33	2.80	2840
Rendija	6.26	2.50	2.50	12.00	0.71	0.06	0.21	2.70	1200
Rendija	6.50	2.42	3.02	12.44	0.75	0.06	0.21	3.64	1228
Rendija	6.51	2.44	2.44	11.77	0.71	0.03	0.16	4.10	972
Rendija	7.05	3.66	3.66	11.23	0.70	0.12	0.12	2.65	1500
Rendija	7.05	3.66	3.66	11.23	0.70	0.12	0.31	2.70	2239
Rendija	7.09	2.74	2.74	11.91	0.75	0.11	0.21	3.10	1900
Rendija	7.23	3.00	3.00	11.80	0.75	0.11	0.16	2.70	1920
Rendija	7.73	3.46	3.46	10.65	0.70	0.11	0.11	2.60	1800
Rendija	8.38	3.26	5.00	11.69	0.80	0.14	0.18	2.65	4000
Rendija	9.55	4.45	6.45	10.67	0.78	0.05	0.25	2.90	6300
Rendija	9.59	4.27	5.86	10.09	0.74	0.19	0.19	2.60	7100
Rendija	9.59	4.27	5.86	10.24	0.75	0.14	0.14	2.60	5790
Rendija	9.59	4.27	5.86	10.24	0.75	0.19	0.31	2.60	7900
Rendija	10.2	4.61	7.56	10.55	0.80	0.16	0.19	2.80	10013

Fuente: Adaptado de [1]



### A.3. Datos Molinos de Bola

Tabla A.3: Datos experimentales molinos de bola

Tipo de Descarga	Diámetro [m]	Largo sin Cono [m]	Largo Total [m]	RPM	$\phi$	$f_b$	$f$	$\rho_o$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Potencia [kW]
Rendija	1.70	2.70	2.70	26.27	0.81	0.40	0.40	2.70	103
Rendija	1.73	2.44	2.44	22.03	0.69	0.35	0.35	2.70	97
Rebose	2.29	2.74	2.74	23.11	0.83	0.44	0.44	3.50	235
Rebose	2.30	4.20	4.20	22.87	0.82	0.36	0.36	2.70	299
Rebose	2.52	3.66	3.66	17.98	0.67	0.35	0.35	2.70	265
Rebose	2.60	3.70	3.70	18.10	0.69	0.40	0.40	4.50	347
Rebose	2.60	4.57	4.57	19.67	0.75	0.34	0.34	2.65	400
Rendija	2.64	3.66	3.66	18.22	0.70	0.43	0.43	2.80	420
Rebose	2.65	3.40	3.40	20.08	0.77	0.36	0.36	2.70	334
Rebose	2.70	4.83	4.83	18.79	0.73	0.38	0.38	2.65	499
Rebose	3.04	3.05	3.05	19.77	0.81	0.45	0.45	3.50	475
Rebose	3.05	4.27	4.27	16.95	0.70	0.40	0.40	4.50	580
Rebose	3.05	4.27	4.27	17.68	0.73	0.45	0.45	3.90	600
Rebose	3.48	4.62	4.62	16.10	0.71	0.39	0.39	2.70	834
Rebose	3.48	6.33	6.33	17.00	0.75	0.34	0.34	2.70	1150
Rebose	3.50	4.42	4.42	16.73	0.74	0.35	0.35	2.75	820
Rebose	3.50	4.75	4.75	16.95	0.75	0.41	0.41	2.80	921
Rebose	3.54	4.88	4.88	17.20	0.77	0.42	0.42	2.70	1029
Rebose	3.55	4.87	4.87	16.16	0.72	0.40	0.40	2.80	970
Rebose	3.83	4.83	4.83	13.55	0.63	0.31	0.31	2.60	842
Rebose	3.85	5.90	5.90	16.60	0.77	0.30	0.30	2.80	1300
Rebose	3.87	6.34	6.34	14.83	0.69	0.27	0.27	3.57	1075
Rebose	4.10	5.92	5.92	15.67	0.75	0.34	0.34	3.10	1525
Rebose	4.12	5.49	5.49	15.57	0.75	0.45	0.45	2.70	1600
Rebose	4.12	7.04	7.04	14.69	0.70	0.38	0.38	2.60	1800
Rebose	4.35	6.56	6.56	14.19	0.70	0.38	0.38	2.72	1850
Rebose	4.38	7.45	7.45	15.16	0.75	0.30	0.30	2.70	2026
Rebose	4.41	6.10	6.10	14.88	0.74	0.35	0.35	4.10	1900
Rebose	4.68	5.64	5.64	14.08	0.72	0.48	0.48	2.80	2300
Rebose	4.73	7.01	7.01	11.76	0.60	0.32	0.32	2.80	1840
Rebose	4.75	6.26	6.26	14.94	0.77	0.28	0.28	2.68	2050
Rebose	4.85	5.92	5.92	14.02	0.73	0.41	0.41	2.90	2550

Continuación Tabla A.3

Tipo de Descarga	Diámetro [m]	Largo sin Cono [m]	Largo Total [m]	RPM	$\phi$	$f_b$	$f$	$\rho_o$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Potencia [kW]
Rebose	4.87	8.80	8.80	14.37	0.75	0.30	0.30	2.60	3104
Rebose	4.87	8.84	8.84	13.8	0.72	0.27	0.27	2.60	2900
Rebose	4.87	8.84	8.84	14.37	0.75	0.30	0.30	2.60	3225
Rebose	5.29	7.32	7.32	12.87	0.70	0.40	0.40	3.20	3828
Rebose	5.33	8.54	8.54	13.23	0.72	0.34	0.34	2.60	4100
Rebose	5.34	8.69	8.69	13.36	0.73	0.23	0.23	3.20	3251
Rebose	5.34	8.69	8.69	13.36	0.73	0.24	0.24	3.20	3385
Rebose	5.34	8.69	8.69	13.36	0.73	0.26	0.26	3.20	3549
Rebose	5.34	8.69	8.69	13.36	0.73	0.28	0.28	3.20	3669

Fuente: Adaptado de [1]