

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/319417705>

EL TALLER RPAULA: ACTIVANDO LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS AULAS. Psclassroom workshop: Activating problem solving in classrooms

Article in *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación del Profesorado* · July 2017

CITATION

1

READS

36

2 authors:



Josefa Perdomo Díaz

Universidad de La Laguna

24 PUBLICATIONS 60 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Patricio Felmer

University of Chile

154 PUBLICATIONS 4,407 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de pedagogía básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza. [View project](#)

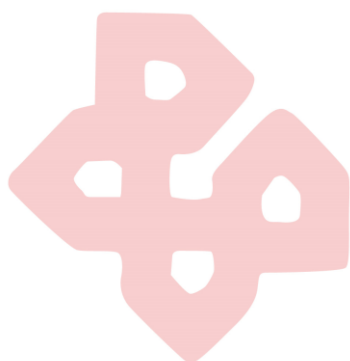


PIA-CONICYT Basal Funds for Centers of Excellence Project FB0003 [View project](#)



EL TALLER RPAULA: ACTIVANDO LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS AULAS

Psclassroom workshop: Activating problem solving in classrooms



Josefa Perdomo-Díaz y Patricio Felmer***

**Universidad de La Laguna y **Universidad de Chile*

E-mail: jperdomd@ull.edu.es; pfelmer@dim.uchile.cl

Resumen:

En este artículo se describe el Taller RPAula, una estrategia de desarrollo profesional cuyo objetivo es proveer a los docentes de matemática de herramientas y experiencias que les permitan desarrollar en sus estudiantes la habilidad de resolver problemas. Es un taller de baja intensidad, persistente en el tiempo y que considera al docente como resolutor de problemas, su experiencia resolviendo problemas, la interacción monitor-docente como modelo de la interacción docente-estudiante, la planificación, implementación y análisis de Actividades de Resolución de Problemas en Aula (ARPA), el intercambio de experiencias e ideas entre pares y la construcción de problemas. Además se presentan los resultados del análisis de una experiencia piloto realizada en 2014, bajo un enfoque descriptivo exploratorio.

Palabras clave: construir problemas, desarrollo profesional, matemáticas, prácticas de aula, resolución de problemas.

Abstract:

This article presents the PSClassroom Workshop, a professional development strategy aimed at providing mathematics teachers with tools and experiences to promote problem solving in their students. The workshop is low intensity, persistent over time, and considers the teachers as problem solvers, their experience solving problems, monitor-teacher interaction as a model for teacher-student interaction, planning, implementation and analysis of problem solving activities in classroom, exchange of experiences and ideas among peers and problems construction. Moreover, we present the results of an exploratory descriptive analysis of an experimental version of this workshop carried out on 2014.

Key Words: *class practices, mathematics, problem posing, problem solving, professional development.*

1. Introducción

La resolución de problemas (RP) es un tópico de investigación ampliamente tratado, que no ha dejado de tener actualidad en Educación Matemática (por ejemplo, Felmer, Pehkonen y Kilpatrick, 2016; Schoenfeld, 1992). Además, desde hace algunos años la RP se ha ido incorporando en los currículos nacionales de un número creciente de países, como Singapur, Estados Unidos, Finlandia y Colombia. En Chile, el currículo nacional de matemática se hace parte de esta tendencia internacional, incorporando el desarrollo en los estudiantes de cuatro habilidades: resolver problemas, argumentar y comunicar, representar y modelar (Ministerio de Educación, 2012). La cuestión que esto plantea es ¿cómo se implementarán, en Chile y en otros países, los cambios de los currículos nacionales en cuanto a la resolución de problemas? La respuesta obvia, mediante propuestas de formación continua para los docentes, no despeja la interrogante pues queda la pregunta ¿cómo hacer propuestas realmente efectivas? Esta pregunta y los desafíos que plantea requieren de una respuesta a nivel nacional y no es posible responderla en el corto plazo. Para abordar esta situación se requiere de programas de desarrollo profesional efectivos que den a todos los docentes oportunidades de conocer y poner en práctica estrategias que promuevan las habilidades matemáticas en sus estudiantes.

La RP tiene la particularidad de promover el desarrollo de las otras habilidades del currículo (Felmer y Perdomo-Díaz, 2015). Así, la RP se convierte en un elemento clave en el aprendizaje de la matemática y se hace patente la necesidad de ofrecer a los profesores programas de formación que les permitan adaptarse a los nuevos requerimientos, que les lleven a implementar actividades de RP en aula, que fortalezcan sus prácticas de gestión de aula y que mejoren sus conocimientos y habilidades matemáticas.

En este artículo presentamos un curso de desarrollo profesional que tiene como objetivo central la incorporación de RP en el aula, el Taller RPAula. Se trata de un taller anual, de baja intensidad, que propone la incorporación paulatina de RP en el aula, con respeto de los ritmos de los docentes y de las instituciones donde se desempeñan. En las siguientes secciones indicamos las experiencias nacionales e internacionales en las que se basa nuestro diseño, los fundamentos teóricos sobre los

que se construye la propuesta, para continuar con su descripción detallada y finalizar presentando un análisis descriptivo, de tipo exploratorio, de una experiencia piloto que se realizó en 2014.

Si bien la investigación en torno a la RP en Chile es escasa, ésta apunta a la ausencia de esta habilidad en la formación inicial de los docentes y en las aulas escolares (Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas et al., 2015; Preiss, Larraín y Valenzuela, 2011; Varas et al., 2008). Así, la necesidad de incorporar esta habilidad en el aula aparece con fuerza en la realidad nacional y en consecuencia también la necesidad de contar con estrategias de desarrollo profesional efectivas. El Taller RPAula es parte de un programa de desarrollo profesional docente amplio que considera distintos cursos y una de cuyas bases es que la habilidad de resolver problemas innata, por lo que incorporarla al aula consiste en activarla y por tanto primero es necesario activar la RP en los docentes para que estos puedan activarla en sus estudiantes (Felmer y Perdomo-Díaz, 2015).

2. Estrategias de desarrollo profesional docente en resolución de problemas

La literatura sobre RP es extensa en el análisis y estudio de los estudiantes frente a distintas formas de aplicación. Sin embargo no es tan extensa en cuanto a estrategias de desarrollo profesional que utilicen la RP como metodología o sobre la introducción de la RP en el aula. En esta sección presentamos algunos ejemplos de programas de desarrollo profesional en RP.

En Singapur, el programa Mathematical Problem Solving for Everyone (MProSE) busca introducir la RP en el aula para dar respuesta a las reformas de 2007 que sitúan esta habilidad en el centro del currículo escolar. Se trata de un módulo de 10 clases a ser implementadas en aula y una instancia de formación de los docentes que incluye: rediseño curricular, capacitación y la observación de experiencias (Dindyal, Guan, Lam, Hoong and Seng, 2012). En Estados Unidos, el proyecto Supporting the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning (STAAR) diseñó una estrategia denominada Ciclo de Resolución de Problemas, que se basa en la implementación de un ciclo de tres sesiones mensuales de tres a seis horas. En la primera sesión, los docentes planifican un problema que luego implementan. En la segunda y tercera sesión los docentes analizan la implementación (Koellner et al., 2007). En Chile, se desarrolló un proyecto conjunto con Finlandia en el que dos grupos de docentes, uno de cada país se reunió mensualmente, siete veces en el año, para planificar e implementar en aula un problema de final abierto y discutir los resultados de la implementación (Varas, 2014).

Estas experiencias sirvieron de inspiración para la formulación del programa Activando la Resolución de Problemas en las Aulas (ARPA), que en la actualidad trabaja con tres estrategias de desarrollo profesional, una de ellas el Taller RPAula, al que dedicamos este artículo. El diseño de las estrategias de ARPA tiene como eje articulador la resolución de problemas y se sustenta en dos principios básicos: el

hacer y el reflexionar (Borko, 2004). En las tres estrategias que constituyen el programa se crean oportunidades para que los docentes resuelvan problemas con el apoyo de un monitor y reflexionen sobre su capacidad para resolver problemas, sobre sus conocimientos matemáticos, sobre el rol del monitor cuando ellos resuelven problemas, sobre sus emociones cuando resuelven problemas y sobre la posibilidad de implementar situaciones análogas en el aula. El trabajo de los docentes se realiza en grupos aleatorios de 3 integrantes o en discusión plenaria, con el objeto de promover la discusión y trabajo colaborativo. En los talleres se promueve el uso de preguntas para devolver la responsabilidad, la reflexión sobre lo que se está haciendo, la comunicación y discusión matemática, el hábito de preguntarse sobre la veracidad y de justificar las afirmaciones matemáticas y de comunicar las ideas matemáticas. La reflexión sobre las experiencias e ideas se plantea entre pares, donde el monitor estimula, pero no da soluciones, pregunta, pero no da respuestas, sugiere caminos de acción en base a las realidades de cada participante, pero no obliga, no impone una visión o una manera de hacer. Como marco de fondo de esta propuesta se encuentra la matemática como disciplina intelectual, que puede cultivarse a cualquier edad y que para enseñarla es necesario experimentarla y conocerla profundamente en su especificidad de matemática escolar (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Para el Taller RPAula, algunas de las características que hemos rescatado de las experiencias del MProSE, el STAAR y el Proyecto Chile-Finlandia son las reuniones mensuales con los docentes, quienes son activos partícipes de la planificación de la actividad a implementar, el énfasis en la habilidad de resolver problemas y con intervención en el aula solo a través del docente. A estos elementos se agregan otros que distinguen al Taller RPAula: la realización de instancias de RP donde se modela la interacción docente-estudiante, el énfasis en las preguntas como forma de interacción docente-estudiante, la construcción de problemas, el análisis de videos de las prácticas de los docentes cuando implementan RP con sus estudiantes, la extensión de las ideas a otras instancias escolares y la inclusión explícita de los contenidos matemáticos.

3. El desarrollo profesional docente

El desarrollo profesional docente (DPD) es un proceso que implica cambios en los dominios cognitivo, afectivo y profesional del docente. Busca mejorar sus conocimientos y también sus creencias, actitudes, estrategias de enseñanza y prácticas de aula con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Roesken-Winter, Hoyles y Blömeke, 2015). La pregunta es ¿cómo hacer para que estas mejoras ocurran? ¿Qué características debe tener una estrategia de DPD para que sea efectiva? La literatura internacional provee de algunas indicaciones al respecto (por ejemplo Desimone, Porter, Garet, Yoon, & Birman, 2002; Garet, Porter, Desimone, Birman, & Suk Yoon, 2001 y Marrongelle, Sztajn & Smith, 2013):

En cuanto a la duración y la conformación de los cursos, se recomienda:

- Propender a cursos de larga duración, con más horas y extendidos en el tiempo. Esto en lugar de cursos cortos.
- La participación colectiva de los docentes, de la misma escuela, municipalidad o comunidad de establecimientos y que enseñen en el mismo curso. Esto en lugar de participación individual.

En relación con los objetivos y contenidos, se sugiere:

- Experiencias coherentes con los objetivos de los docentes, de la escuela, del estado y del currículo.
- Cursos con foco en el contenido, es decir, enfocados a profundizar el conocimiento del contenido y las habilidades matemáticas. Esto en lugar de teorías de aprendizaje o metodologías generales o específicas de las matemáticas.

En cuanto a la metodología de trabajo, se propone:

- Promover el aprendizaje activo, donde los docentes se involucran activamente en el análisis de la enseñanza y del aprendizaje. Esto en lugar de escuchar o leer sobre teorías, contenidos y metodologías.
- Privilegiar actividades de trabajo en grupos, creación de redes de docentes y proyectos de investigación. Esto en lugar de cursos, talleres o seminarios expositivos.

En esta misma línea, la revisión bibliográfica que realizan Goldsmith, Doerr y Lewis (2013) muestra que el aprendizaje de los docentes se produce de manera iterativa, no lineal, a través de ciclos de aprendizaje fuera del aula y experimentación en el aula. Otras características que hacen efectivas a las estrategias de DPD son involucrar a los docentes en actividades como si fueran estudiantes, por ejemplo realizando experimentos científicos o resolviendo problemas (Borko, 2004), proponer actividades con foco en el conocimiento pedagógico del contenido (Ball, Thames & Phelps, 2008) y permitir a los profesores examinar el trabajo de sus estudiantes y reflexionar sobre sus actividades de clase (Birman, Desimone, Garet & Porter, 2000; Borko, 2004).

El diseño de la estrategia que mostramos en este artículo, el Taller RPAula, considera estos elementos que la literatura señala como fundamentales en el DPD. Desde el punto de vista de los contenidos, el Taller RPAula se centra en la Resolución de Problemas, habilidad clave para el desarrollo de la competencia matemática que ha ido incorporándose en los currículos nacionales de matemáticas cada vez con mayor protagonismo. Entre los objetivos del Taller RPAula está que los docentes analicen su propia habilidad de resolver problemas, profundicen en su conocimiento de la resolución de problemas como habilidad para desarrollar en sus estudiantes y como estrategia para la enseñanza de la matemática. En el diseño del Taller RPAula consideramos que:

Un problema es una actividad matemática para la cual la persona que la enfrenta no conoce un procedimiento que le conduzca a la solución, ésta tiene interés en resolverlo, le supone un desafío y siente que lo puede resolver.

Esta definición considera la relación entre la actividad y el resolutor como un elemento central para establecer si dicha actividad es un problema (Felmer et al., 2015). De esta manera, una misma actividad puede ser un problema para una persona y para otra no. Por ejemplo, determinar la expresión de la recta que pasa por dos puntos casi con certeza sería un problema para estudiantes de 10 años, mientras que no lo es para los estudiantes de ingeniería. En este sentido, que una actividad sea un problema no está relacionado con la dificultad de resolverlo. Tampoco está relacionado con el contexto en que esté planteado, un problema puede estar planteado en un contexto matemático o no matemático.

Los problemas seleccionados para el Taller RPAula y el tipo de interacción que se realiza entre el monitor del taller y los docentes responden a la intención de mostrar un tipo particular de práctica educativa, donde el estudiante es el principal protagonista de su desempeño y aprendizaje. En este sentido, la interacción monitor-docente pretende ser un modelo de la interacción docente-estudiante en el aula.

Por otra parte, el diseño del taller también busca movilizar el sistema de creencias de los docentes acerca de la matemática, su enseñanza y las expectativas que tienen de sus estudiantes respecto del aprendizaje de la matemática. Esto se hace involucrando a los docentes en actividades donde ellos tienen que resolver problemas, en instancias de reflexión, planificación y experimentación de actividades de resolución de problemas con sus estudiantes y análisis de sus propias prácticas.

4. El taller RPAula

El Taller RPAula es una estrategia de DPD que ofrece a los profesores oportunidades para desarrollar su habilidad como resolutores de problemas y para experimentar situaciones de aula dedicadas a RP y también instancias de reflexión y análisis de sus prácticas pedagógicas y las de sus pares. Este taller se caracteriza por su baja intensidad, persistencia en el tiempo y porque los docentes, antes de introducir la RP en sus aulas, la experimentan ellos mismos. El taller tiene como base el hacer y el reflexionar. Para hacer realidad el hacer hay dos actividades principales: resolver problemas y realizar actividades de resolución de problemas con los estudiantes (Figura 1). El reflexionar ocurre en torno a estas dos acciones, mediante la discusión entre pares, la realización de informes y el análisis de videos (Tabla 1).

Tabla 1
Características y actividades del Taller RPAula

Características	Actividades
Baja intensidad y persistencia en el tiempo	- 30 horas presenciales - 9 meses
Modelación de la interacción en el aula	- Resolución de problemas
Experimentación de actividades en aula	- Actividades de Resolución de Problemas en el Aula (ARPA) - Construcción de problemas a partir de libros de texto y/o guías.
Intercambio de experiencias entre pares	- Discusiones plenarias - Informes escritos - Análisis de videos de experiencias propias.

Fuente: Elaboración propia.

4.1. Baja intensidad y persistencia en el tiempo

El taller se desarrolla durante todo un año, con una duración de 50 horas (30 horas presenciales y 20 no presenciales), divididas en 8 sesiones de trabajo presencial según el siguiente esquema (Tabla 2).

Tabla 2
Distribución de las horas presenciales del Taller RPAula

Sesión nº	1	2	3	4	5	6	7	8
Mes	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
Nº horas	7	3	3	3	4	3	3	4

Fuente: Elaboración propia.

Con esto se quiere hacer realidad lo que la evidencia muestra, que para que una estrategia de desarrollo profesional sea efectiva ésta debe extenderse a lo largo del tiempo. Este taller proporciona una alternativa a los cursos de postgrado, como diplomas, que también se extienden durante un período largo, pero son muy intensivos, usualmente con una carga semanal de 6 a 8 horas, con el consiguiente costo monetario como en tiempo del docente.

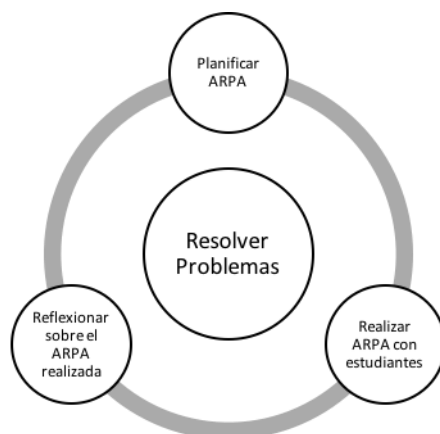


Figura 1. Actividades principales del Taller RPAula

4.2. Modelación de la interacción docente-estudiante: Resolución de Problemas

Para lograr la incorporación de la RP en el aula consideramos necesario que los propios docentes resuelvan problemas, que inventen estrategias, que experimenten las emociones que conlleva resolver problemas y que observen y analicen el trabajo que realiza el monitor con ellos. Así, la incorporación de la RP en el aula no solo es objetivo del taller, sino que es parte central de su propia estrategia. Durante las instancias de RP del taller, el monitor establece con los docentes un modelo de la interacción que se espera que los docentes repliquen con sus estudiantes. En cuanto al modelo de interacción, el taller está diseñado sobre una perspectiva de la enseñanza de la matemática centrada en el estudiante, con una fuerte interacción entre ellos, en la que tengan que justificar y explicar sus ideas, clarificando su razonamiento (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2009). Este enfoque promueve mejoras en sus procesos de argumentación y en las formas de enfocar y generar nuevas ideas dentro del proceso de RP (Cobo y Fortuny, 2000).

El trabajo en RP se inicia con la conformación de grupos al azar, siendo el monitor quien establece el método para lograr esto. Esta estrategia tiene enormes ventajas frente a la elección de integrantes por afinidad o a discreción del monitor (Liljedahl, 2014). Por ejemplo, evita la reproducción de relaciones de dependencia preestablecidas entre docentes y la sensación de injusticia cuando la elección la realiza el monitor, a la vez que da la posibilidad de que profesores con distintas realidades laborales se conozcan, compartan ideas y puedan experimentar el trabajar en un grupo con muy variadas habilidades, conocimientos y actitudes. La selección de grupos al azar se propone también como estrategia de conformación de grupos en el aula con los estudiantes.

Una vez establecidos los grupos, se entrega a cada docente una hoja con el enunciado de un problema, el mismo para todos, y estos comienzan a trabajar. Los grupos pueden llamar al monitor cuando tienen una duda que no han conseguido resolver o cuando consideran que han resuelto el problema. El problema se considera resuelto cuando todos los miembros del grupo están de acuerdo con la(s) solución(es) obtenida(s) y, en caso de tener más de una estrategia, cada miembro del grupo

puede explicar su propia estrategia y la de sus compañeros. Cuando el monitor acude al grupo, interactúa con los estudiantes sólo mediante preguntas, nunca respondiendo lo que el grupo solicita.

Las preguntas que formula el monitor tienen diferentes propósitos: devolver la responsabilidad a los estudiantes frente a una duda o un error, orientar el trabajo del grupo y comprobar que todos los miembros del grupo han comprendido el problema. En el caso de que el grupo haya planteado una duda o el monitor haya detectado algún error o que algún miembro del grupo no ha comprendido el problema, el monitor plantea una pregunta y se aleja del grupo, dejando en ellos la responsabilidad de pensar y responder. Cuando el monitor ha comprobado que todos los miembros del grupo han comprendido el problema, les formula una pregunta para extenderlo o propone otro problema.

Cada grupo trabaja a su propio ritmo. El monitor es el encargado de gestionar el tiempo que dedica cada grupo a cada problema y decidir acerca de la conveniencia de realizar preguntas de extensión. En esta interacción, el monitor gestiona el grado de desafío que la actividad entraña para el grupo, prestando especial atención a situaciones límite como la frustración o que la actividad matemática se convierta en rutinaria.

4.3. Experimentación de actividades en aula: Las ARPAs

Al inicio del taller, los docentes eligen uno de sus cursos con el que se comprometen a realizar actividades de resolución de problemas según el modelo trabajado en el taller. Entre cada dos sesiones consecutivas del taller, los docentes realizan una Actividad de Resolución de Problemas en Aula (ARPA) con ese curso. El objetivo del ARPA es que los docentes experimenten con sus estudiantes el modelo de interacción que se utiliza durante las actividades de resolución de problemas del taller. Estas experiencias posteriormente se analizan y discuten, buscando situaciones que hayan resultado exitosas y que puedan replicarse.

Estas ARPAs se realizan bajo un principio fundamental para la propuesta: la incorporación de la resolución de problemas en aula debe ser paulatina, no invasiva y respetuosa de los ritmos escolares del profesor y de su establecimiento. Este objetivo es conocido por todos los participantes y las autoridades de las fundaciones, colegios o municipalidades correspondientes. El ARPA está diseñada para llevar a la práctica la resolución de problemas en el aula escolar. El ARPA se inicia como una actividad aislada entre las clases de matemática, que los estudiantes identifican y valoran, pero se estimula que sus elementos sean transferidos a otras instancias escolares, tanto de la matemática como de otras disciplinas.

A lo largo del año se realizan 6 ARPAs, comenzando entre las sesiones 2 y 3 del taller. En la sesión 2 se planifica el primer ARPA, durante ese mes los docentes la implementan con sus estudiantes y la experiencia se discute en la sesión 3. Este esquema de planificación-experimentación-discusión se repite con todas las ARPAs.

La planificación del ARPA es instancia fundamental para su éxito. En ella el docente analiza el problema en profundidad, identificando distintas formas de resolverlo, anticipando dificultades que puedan presentar los estudiantes, etc. El problema que se presenta a los estudiantes debe cumplir con tres condiciones principales: que sea efectivamente un problema, que todos los estudiantes puedan resolverlo en el tiempo establecido, que se puedan realizar preguntas de extensión. La tres primeras ARPAs se realizan con un problema propuesto por el monitor del taller y las otras tres con un problema construido por el docente a partir del libro de texto. La construcción de problemas a partir del libro de texto tiene un doble objetivo, por un lado acercar el ARPA a los contenidos que los docentes están trabajando con los estudiantes en ese momento, facilitando la incorporación paulatina de esta actividad al resto de las clases de matemática y por otro lado desarrollar la autonomía de los docentes con respecto a la formulación de problemas (Felmer et al., 2016).

En el ARPA se pueden distinguir cuatro etapas: entrega, activación, consolidación y discusión. Cada una estas partes busca desarrollar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas, la autonomía, el trabajo en grupo, el razonamiento matemático y la comunicación de la matemática. Las etapas de entrega y discusión consideran al grupo completo, mientras que la activación y consolidación es particular para cada grupo de estudiantes. A continuación se describen brevemente cada una de estas etapas:

- *La entrega:* los estudiantes son organizados en grupos de cuatro integrantes elegidos al azar. Luego el docente realiza una motivación general y los estudiantes reciben el problema, usualmente en forma escrita, sin lectura en voz alta. Si un grupo no ha comprendido el problema entonces llama al docente, quién hace preguntas específicas sobre el enunciado y sobre posibles formas de abordarlo.
- *La activación:* Una vez que los estudiantes inician el trabajo, la interacción del docente con los grupos es solo a través de preguntas. El docente está preparado para hacer preguntas para simplificar el problema en caso de que el grupo no logre iniciar una estrategia de solución, cuando un grupo no sabe cómo seguir o cuando han cometido un error en su forma de resolver el problema.
- *La consolidación:* Cuando un grupo considera que ha resuelto el problema llama al docente, quién se ha preparado para hacer preguntas que permitan comprobar que todos los miembros del grupo comprenden el problema y para extenderlo. Las extensiones del problema no necesariamente serán las mismas para todos los grupos, incluso puede haber grupos a los que no se les formule preguntas de extensión.
- *La discusión:* el ARPA termina con un espacio de discusión plenaria, donde se presentan y discuten algunas de las estrategias

- que los estudiantes usaron para resolver el problema. Para ello, el docente previamente tiene que haber decidido qué grupos expondrán su trabajo y en qué orden para develar convenientemente los elementos relevantes. Durante la presentación, el docente pregunta a los expositores y a los demás estudiantes para enriquecer la discusión, y realiza conexiones entre los conceptos e ideas. Durante la plenaria, el docente interactúa con los estudiantes haciendo preguntas y estimulando la discusión para lograr la síntesis de las principales ideas involucradas.

Tres de las ARPAs que se realizan en el taller son filmadas y de las otras tres, los docentes realizan un informe que envían al monitor del taller. La sesión siguiente a cada ARPA comienza con una discusión en torno a los informes entregados o las filmaciones. En esas discusiones se comparten experiencias y se extraen ejemplos de episodios exitosos que puedan ser replicados.

4.4. Intercambio de experiencias entre pares: discusiones plenarias y análisis de videos

En el Taller RPAula, el intercambio de experiencias entre pares se realiza en dos contextos: el trabajo en grupo y las discusiones plenarias. El trabajo en grupo es una manera de generar y socializar el conocimiento y la experiencia que va perfilándose a lo largo de las sesiones, tanto para resolver problemas como para planificar las ARPAs. Las discusiones plenarias están concebidas como una puesta en común de las actividades realizadas en grupo tales como resolución de problemas, diseño o discusión de un problema para el ARPA y reflexión sobre las experiencias con ARPA.

En las plenarias que se realizan después de la resolución de problemas se discuten aspectos como: estrategias usadas, emociones experimentadas mientras se resuelven problemas, el rol del monitor y su forma de interactuar con los grupos, y la posibilidad de incorporar la resolución de problemas con los estudiantes en aula. En las plenarias dedicadas a los problemas diseñados por los docentes cada grupo presenta el problema diseñado y explica por qué considera que será un problema para sus estudiantes. Por último, las plenarias también se utilizan como instancia de reflexión entre pares acerca de cómo resultó el ARPA con sus estudiantes. En este caso se comparten experiencias positivas y se discute en torno a qué elementos contribuyeron al éxito, qué hizo el profesor para que esos momentos resultaran bien.



Figura 2. Esquema de las dos primeras sesiones del Taller RPAula

El intercambio de experiencias entre pares en relación con el ARPA se hace con base en un informe elaborado por cada docente o en el análisis de una selección de videos de las ARPAs. En los informes se pide a los docentes que expliquen si

consideran que el problema fue adecuada para sus estudiantes, especialmente en cuanto a la capacidad de ellos para resolverlo y en qué medida fue efectivamente un problema, en el sentido descrito en el marco conceptual. También se les pide comentar si las simplificaciones y extensiones del problema que habían planificado fueron adecuadas. En cuanto a la gestión, los docentes deben referirse de manera concreta a su actuación y la de sus estudiantes, mencionando detalles y nombres si es necesario, contrastando lo que realmente ocurrió con su planificación, mencionando los aciertos y carencias de dicha planificación. Se les insiste en evitar el uso de frases generales y se les pide de manera explícita que escriban sobre las cuatro etapas del ARPA: Entrega, Activación, Consolidación y Discusión.

Los videos obtenidos en las tres ARPAs filmadas se editan, seleccionando para cada uno de los docentes participantes, un episodio de uno a tres minutos, donde se pueda observar buenas prácticas como por ejemplo, estudiantes trabajando y discutiendo, el docente realizando una buena pregunta, etc. Estos episodios son presentados en las sesiones posteriores para la observación colectiva y para la discusión entre pares sobre buenas prácticas. En oportunidades se centra la observación en el docente y en otras en los estudiantes.



Figura 3. Esquema de las sesiones 5, 6 y 7 del Taller RPAula

5. Una experiencia piloto del Taller RPAula

El Taller RPAula se realizó por primera vez en el 2014, en Santiago de Chile, a partir de la solicitud de dos fundaciones educacionales, motivadas por la importancia de desarrollar la habilidad de resolver problemas de los estudiantes de colegios, más aún cuando ésta aparece de manera explícita en el currículo nacional a partir de 2012, y dado que sus profesores habían tenido pocas oportunidades de aprendizaje en torno a esta habilidad y cómo desarrollarla en los estudiantes. En el taller participaron 21 profesoras, que en su mayoría hacían clases en 3° y 4° básico y como monitores actuaron los autores. Todas las sesiones se realizaron en las dependencias del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

Desde la mirada de los autores, el resultado de esta experiencia piloto fue extremadamente positivo, pues permitió llevar a la práctica una serie de ideas que requerían ser contrastadas con la realidad y ganar la experiencia necesaria para avanzar en una versión mejorada del diseño que durante el 2015 se plasmó en 11 talleres RPAula realizados en distintas regiones de Chile. Desde el punto de vista de los cambios que experimentan los actores principales, profesores y estudiantes, y de los efectos de la incorporación de la RP en el aula, presentamos a continuación el resultado de un análisis descriptivo exploratorio del efecto y los aportes de las distintas actividades realizadas en el taller. Este análisis se realiza a partir de las discusiones que los monitores del taller tuvieron para planificar cada una de las sesiones del taller y al finalizar cada sesión. Además, durante la última sesión, los docentes respondieron a una serie de preguntas donde daban a conocer sus opiniones sobre el taller, sobre su propia evolución en las planificaciones e implementaciones de las ARPAs, cambios en su forma de trabajar en las clases de matemática y en la forma de trabajar de sus estudiantes.

5.1. El intercambio entre pares: discusión grupal versus discusión plenaria

El intercambio entre pares se manifestó como un proceso que no se daba de forma espontánea entre las profesoras, aún siendo algunas compañeras de colegio, siendo todos los colegios de dos fundaciones educacionales y dándose la circunstancia de que muchas de las profesoras habían participado juntas en otros cursos de desarrollo profesional.

Esto pudo observarse durante las sesiones 2 y 3 del taller que comenzaban con una discusión plenaria de intercambio de experiencias en torno a la implementación del ARPA, guiada por el monitor quién disponía de información previa sobre lo que había ocurrido en las ARPA (planificación e informes entregados por los docentes). Lo que ocurrió en esas discusiones plenarias fue que los docentes reportaban la actividad al monitor, y durante el reporte los otros docentes esperaban el turno, sin escuchar a sus pares. Esto llevó a los monitores a introducir un cambio en el proceso de intercambio entre pares: antes de la plenaria, los docentes discuten en grupos de a tres integrantes sus experiencias positivas y negativas; a continuación se realiza la discusión plenaria donde un representante de cada grupo presenta las experiencias que consideraban más relevante compartir con el resto.

5.2. Filmación de las ARPAs

En el Taller RPAula piloto del 2014 sólo se filmó una de las ARPAs, el ARPA 4 de cada una de las 21 profesoras. Se revisaron todos los videos y se seleccionó un episodio de cada profesora, de entre uno y tres minutos, en el cual el docente mostraba dominio y destreza frente al ARPA. Se seleccionaron episodios correspondientes a cada una de las etapas del ARPA: inicio, activación, consolidación y discusión. Estos episodios se discutieron durante las sesiones 6 y 7 del taller, donde se analizó qué había funcionado bien en la práctica que se mostraba y qué habían hecho la profesora y los docentes para que funcionara bien.

La filmación de las ARPAs resultó ser extremadamente útil en el taller piloto, permitiendo conocer lo que realmente ocurre en el ARPA y resaltar las buenas prácticas observadas. A partir de esta experiencia con las filmaciones se decidió que en una nueva versión del taller se realizarían más filmaciones de ARPA y desde el comienzo del taller. Así, el programa actual del Taller RPAula considera tres instancias de filmación, en las ARPAs 2, 3 y 6.

5.3. La construcción de problemas a partir del libro de texto

La construcción de problemas a partir del libro de texto fue una actividad valorada positivamente tanto por los participantes del taller como por los monitores. En esta instancia los docentes tuvieron la oportunidad de planificar un ARPA de acuerdo a los contenidos matemáticos que estaban trabajando con sus estudiantes en ese momento, además de incorporar el libro de texto como uno de los recursos para el desarrollo de las habilidades.

Esta actividad se reveló como una instancia de desarrollo del conocimiento matemático de los docentes puesto que la discusión sobre si cierta actividad era o no un problema hizo que las profesoras revisaran su concepción de problema, identificando la importancia de tener en cuenta al resolutor y sus conocimientos.

5.4. Efectos manifestados por los docentes

Las respuestas de los docentes a las preguntas formuladas en la última sesión del taller muestran que la estrategia de DPD les ha hecho replantearse cuestiones relacionadas con su concepto de problema (p.e. “Me ayudó mucho a comprender que un problema para que se considere como tal debe cumplir con una serie de condiciones”), su modelo de interacción en el aula y sus expectativas hacia sus estudiantes como se manifiesta en las siguientes respuestas:

Me di cuenta que al formar grupos de 4 integrantes y aleatorios les estaba dando la posibilidad de verbalizar sus estrategias y enriquecer aún más su desarrollo.

Aprendí que una buena motivación y realizando las preguntas previamente planificadas era mucho más importante que dar pistas.

Cuestiono más las preguntas que ayudan a las niñas a salir de su dificultad.

Aprendí que los alumnos pueden resolver problemas sin mayor guía que mediante preguntas.

Me ha servido para darme cuenta de cuánto están pensando los niños en mi clase y qué tanto se les desafía de forma diaria.

Los docentes también indicaron ciertos cambios que observaron en los estudiantes, con respuestas como las que siguen:

Los alumnos ven los problemas de forma más positiva y estimulante.

He observado más seguridad y confianza en sí mismos (en todos, incluyendo a los que más les cuesta)

Les gustan los desafíos se sienten alegres y con más seguridad al enfrentar los problemas matemáticos.

Se fortaleció el trabajo en grupo, como un trabajo colaborativo donde todos deben compartir su aprendizaje. Ahora saben que un problema se resuelve en equipo generando discusión.

Los docentes que participaron en este taller piloto valoraron positivamente el intercambio entre pares. Sin embargo también indicaron algunos aspectos que consideraban que había que mejorar, con respuestas como las que siguen:

Creo que faltó apoyo en el guiar más el informe del problema.

Sugerencia es que estas actividades sean semanalmente e implementadas en planificaciones para que no sean actividades aisladas.

Me hubiese gustado tener más instancias de pensar más los cierres y tener más feedback de la sesión que grabaron.

5.5. Decisiones a partir de la experiencia piloto

Basados en la experiencia piloto y tomando en cuenta los elementos que los docentes indicaron como mejorables, se diseñó el programa actual para la estrategia de DPD que llamamos Taller RPAula (anexo). Entre los cambios más importantes que se realizaron a la propuesta original implementada en el piloto están:

- Secuenciar el foco de las sesiones del taller según las 4 etapas principales del ARPA.
- Adelantar y aumentar el número de ARPAs filmadas y analizadas.
- Entregar retroalimentación escrita a los informes, en forma más temprana y frecuente.
- Entregar material escrito a los docentes como soporte a los conceptos discutidos y experimentados en las sesiones del taller y en las ARPAs.
- Establecer compromisos con los docentes participantes y la dirección de los establecimientos antes del inicio del taller. Esos compromisos incluyen:
 - El docente debe hacer clases de matemáticas en el nivel acordado.
 - El docente se compromete a permitir la filmación de 3 ARPAs.
 - El docente, en conjunto con su directivo o jefe técnico, planifica las fechas en que se realizarán las ARPAs durante el año.
 - Las ARPAs se realizan en las dos semanas siguientes a la sesión del taller en la que se planificaron.
 - El ARPA se realizará en los primeros 45 minutos de un bloque de 90 minutos, con el objeto de permitir un alargue en los casos que sea necesario.

6. Discusión final

El Taller RPAula que se ha presentado en este artículo forma parte de ARPA, un programa formado por distintas estrategias de desarrollo profesional docente, articulado en la resolución de problemas (Felmer y Perdomo-Díaz, 2015). La iniciativa ARPA nace de la experiencia de los autores en desarrollo profesional docente, otras experiencias nacionales e internacionales (Dindyal et al., 2012; Koellner et al., 2007; Liljedahl, 2014; Varas, 2014) y de las características de los programas de desarrollo profesional efectivos recogidos en la literatura internacional (Birman et al., 2000; Borko, 2004; Desimone et al., 2002; Garet et al., 2001; Marrongelle et al., 2013). El propósito del Taller RPAula es ofrecer a los docentes oportunidades de aprendizaje y experimentación que les permitan incorporar actividades de resolución de problemas en sus aulas, de manera efectiva, de modo que sus estudiantes experimenten la matemática de una manera más real e interesante, atendiendo además a las prescripciones de las Bases Curriculares que entraron recientemente en vigor en Chile.

En este artículo hemos descrito algunos de los antecedentes y fundamentos del taller y la experiencia piloto realizada en 2014 con 21 docentes. En ese piloto, los autores pudieron dar realidad a una primera idea de taller, realizarla durante el año y observar sus resultados. Desde diversos puntos de vista la experiencia piloto del taller fue extremadamente positiva. Por un lado los docentes encontraron que el taller produjo cambios en su manera de ver la matemática, en su manera de concebir un problema matemático y en su percepción de la capacidad de sus estudiantes para resolver problemas. También manifestaron que sus estudiantes ahora tienen mayor motivación para la matemática, están más interesados, que aprendieron a discutir en grupo, que buscan explicaciones a lo que hacen, que se atreven con los desafíos, e incluso un docente manifiesta que sus estudiantes han mejorado sus evaluaciones.

En el éxito de esta experiencia piloto contribuyeron enormemente los siguientes elementos del Taller RPAula que consideramos clave:

- Baja intensidad y persistencia en el tiempo.
- Modelación de la interacción docente-estudiante, mientras los docentes resuelven problemas en las sesiones.
- Experimentación de ARPAs con sus estudiantes por parte de los docentes.
- Análisis de videos de las propias experiencias y reflexión sobre las prácticas exitosas.
- Intercambio de experiencias entre pares.
- Construcción de problemas a partir del libro de texto.

Estos promisorios resultados alentaron la realización de experiencias piloto de mayor envergadura, como parte de un proyecto de investigación y desarrollo que se encuentra en ejecución durante los años 2015 y 2016 (Felmer, 2015). Durante 2015, se realizaron 11 Talleres RPAula en distintas regiones de Chile: Temuco (1), Concepción (2), Valparaíso (2) y Santiago (6). Del análisis descriptivo exploratorio de la experiencia piloto también emergieron variables susceptibles de ser analizadas con

mayor detalle y que darán cuenta de los efectos que este tipo de estrategia puede tener en el conocimiento profesional del docente, sus creencias acerca de la matemática y su enseñanza, las expectativas hacia sus estudiantes, sus prácticas de aula y también en el desarrollo matemático de sus estudiantes y sus creencias y actitudes hacia la matemática. Estas variables están siendo actualmente estudiadas en profundidad con los datos de 2015.

La experiencia piloto del Taller RPAula en 2014 también sugiere la conveniencia de realizar un segundo taller anual con el propósito de consolidar la actividad ARPA y extender sus elementos a todas las clases de matemática, cuestión que no parece posible de lograr en un primer taller anual. Este segundo taller debería tener como objetivos centrales la consolidación de la capacidad de los docentes para diseñar y ejecutar ARPAs que incorporen de manera armónica los contenidos y las habilidades, fortalecer el uso de las plenarias tanto en el ARPA como en otras instancias de discusión matemática y extender o difundir el uso de ARPA y de elementos de ARPA a otras instancias de trabajo en el aula.

Más allá del proyecto mencionado, esperamos también que este artículo estimule la búsqueda y experimentación sobre estrategias de desarrollo profesional efectivas en el área de matemática y también en otras áreas. En particular, creemos que el taller RPAula puede ser usado como un modelo para la realización de talleres en ciencias y especialmente en escritura.

7. Anexo: Programa del Taller RPAula

Sesión 1 (7 horas). Foco: Resolución de Problemas. Los docentes resuelven problemas. Dos discusiones plenarias sobre: emociones, estrategias de resolución, características del modelo de trabajo y cómo implementarlo en aula.

Inter-sesión: Los docentes reflexionan sobre las actividades matemáticas que realizan con su curso.

Sesión 2 (3 horas). Foco: Inicio del ARPA. Los docentes resuelven problemas. Se planifica el ARPA 1 con un problema propuesto por el monitor. Discusión sobre: ¿cómo organizar los grupos aleatorios? ¿Cómo entregar el problema e iniciar la actividad? ¿cómo actuar durante la actividad?

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación del ARPA 1, la implementan y escriben un informe. Este informe es evaluado y complementado con una retroalimentación personalizada.

Sesión 3 (3 horas). Foco: Gestión del ARPA. Discusión plenaria ARPA 1. Planificación del ARPA 2 con un problema propuesto por el monitor. Discusión sobre: ¿cómo se resuelve el problema? ¿qué hacer si un grupo...? no entiende el problema, termina antes que finalice la clase

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación del ARPA 2, la implementan. Se filma.

Sesión 4 (3 horas). Foco: Gestión del ARPA. Análisis de videos del ARPA 2. Los docentes resuelven problemas y los discuten en plenaria: énfasis en preguntas para la gestión: ¿qué preguntar si un grupo...? ha cometido un error, está trancado, si tiene más de una solución, ¿qué preguntar para verificar la comprensión de todos los integrantes del grupo? Planificación del ARPA 3 con problema sugerido por monitor y énfasis en las preguntas.

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación de la ARPA 3 y la implementan. Se filma.

Sesión 5 (4 horas). Foco: Gestión de la Discusión. Discusión plenaria sobre ARPA 3. La planificación de

la etapa de Discusión, su importancia y la forma de gestionarla. Preparación de ARPA 4 con problema dado por monitor y foco en la etapa de Discusión.

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación del ARPA 4, la implementan y escriben un informe. Este informe es evaluado y complementado con una retroalimentación personalizada.

Sesión 6 (3 horas). Foco: Creación de problemas. Los docentes resuelven problemas que el monitor extiende. Revisión de las etapas del ARPA y las características de un problema. Preparación ARPA 5: los docentes construyen un problema a partir del libro de texto que están usando.

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación de la ARPA 5, la implementan y escriben un informe. Este informe es evaluado y complementado con una retroalimentación personalizada.

Sesión 7 (3 horas). Foco: Creación de problemas. Discusión plenaria ARPA 5: idoneidad del problema y aspectos positivos y negativos más destacados. Discusión sobre: ¿qué preguntar si...? un grupo ha cometido un error, si un grupo está trancado, si en un grupo hay más de una solución, ¿qué preguntar para verificar la comprensión de todos los integrantes del grupo? Planificación del ARPA 6 con problema que los profesores construyen a partir del libro de texto que están usando.

Inter-sesión: Los docentes escriben una planificación del ARPA 6 y la implementan. Se filma.

Sesión 8 (4 horas). Foco: Evaluación y Cierre. Análisis de videos del ARPA 6. Plenaria sobre la etapa de Discusión. Evaluación colectiva del taller: experiencias personales, aprendizajes, evolución en cuanto a conocimientos y en cuanto a confianza, qué pasó con los estudiantes, qué falta por hacer, etc. Entrega de certificados.

Agradecimientos

Patricio Felmer y Josefa Perdomo-Díaz han sido parcialmente financiados por proyecto Fondef ID14110338, CIAE Project FB 0003 from the Associative Research Program of CONICYT y BASAL-CMM projects. Josefa Perdomo-Díaz, además, ha sido parcialmente financiada por Proyecto Fondecyt 3140597, Proyecto EDU2011-29328 y Proyecto EDU2015-65270-R.

Referencias bibliográficas

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407. doi:10.1177/0022487108324554
- Birman, B., Desimone, L., Garet, M., & Porter, A. (2000). Designing professional development that works. *Educational Leadership*, 57(8), 28-33. Recuperado de http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el200005_birman.pdf
- Borko, H. (2004). Professional Development and Teacher Learning: Mapping the Terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15. doi:10.3102/0013189X033008003
- Cobo, P., & Fortuny, J. (2000). Social Interactions and Cognitive Effects in Contexts of Area-Comparison Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140. doi: 10.1023/A:1004187711956

- Desimone, L., Porter, A.C., Garet, M.S., Yoon, S., & Birman, B.F. (2002). Effects of Professional development on Teacher's Instruction: Results from a Three-year Longitudinal Study. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 24, 81-112. doi:10.3102/01623737024002081
- Dindyal, J., Guan, T.E., Lam, T.T., Hoong, L. Y., & Seng, Q.K. (2012). Mathematical Problem Solving for Everyone: A New Beginning. *The Mathematics Educator*, 13(2), 1-20. Recuperado de http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV13_2/1.pdf
- Felmer, P. (2015). *Estrategias de Desarrollo Profesional: Profesores de Educación Básica, Habilidades Matemáticas y Clases de Matemática. Proyecto del Fondo de Fomento al Desarrollo Científico y Tecnológico* (Fondef ID14I10338), Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, Chile.
- Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. New York, NY: Springer.
- Felmer, P., & Perdomo-Díaz, J. (2015). *Un programa de desarrollo profesional docente para el nuevo currículo de matemática: La resolución de problemas como eje articulador*. Manuscrito enviado para su publicación.
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V., & Medel, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Estudios de Política Educativa*, 1(1), 64-105. Recuperado de http://centroestudios.mineduc.cl/tp_enlaces/portales/tp5996f8b7cm96/uploadimg/File/Revista/Revista_Estudios_Politica_Educativa_PDFFINAL.pdf
- Garet, M.S., Porter, A.C., Desimone, L., Birman, B.F., & Suk Yoon, K. (2001). What Makes Professional Development Effective? Results From a National Sample of Teachers. *American Educational Research Journal*, 38, 915-945. doi:10.3102/00028312038004915
- Goldsmith, L.T, Doerr, H.M., & Lewis, C.C. (2013). Mathematics teachers' learning: a conceptual framework and synthesis of research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 5-36. doi: 10.1007/s10857-013-9245-4.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2009). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (7th ed.)*. Washington, DC: National Academy Press.
- Koellner K., Jacobs, J., Borko, H., Schneider, C., Pittman, M.E., Eiteljorg, E., Bunning, K., & Frykholm, J. (2007). The Problem-Solving Cycle: A Model to Support the Development of Teachers' Professional Knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, 9, 273-303. doi:10.1080/10986060701360944

- Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visually random groups in a mathematics classroom. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices* (pp. 127-144). New York, NY: Springer.
- Marrongelle, K., Sztajn, P., & Smith, M. (2013). Scaling Up Professional Development in an Era of Common State Standards. *Journal of Teacher Education*, 64, 202-211. doi:10.1177/0022487112473838
- Ministerio de Educación (2012). Bases Curriculares, 1° a 6° básico. Recuperado de: http://www.mineduc.cl/index5.php?id_portal=47
- Preiss, D., Larraín, A., & Valenzuela, S. (2011). Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena. *PSYKHE*, 20(2), 131-146. doi:10.4067/S0718-22282011000200011
- Roesken-Winter, B., Hoyles, C., & Blömeke, S. (2015). Evidence-based CPD: Scaling up sustainable interventions. *ZDM*, 47, 1-12. doi: 10.1007/s11858-015-0682-7
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Varas, L., Felmer, P., Gálvez, G., P., Lewin, R., Martínez, C., Navarro, S., Ortiz, A., & Schwarze, G. (2008). Oportunidades de adquirir el conocimiento pedagógico de la matemática en las carreras de Educación General Básica. *Calidad en la Educación*, 29, 64-88. Recuperado de http://www.cned.cl/public/secciones/seccionrevistacalidad/revista_calidad_leer_revista.aspx?idPublicacion=60
- Varas, L. (2014). *On the development of pupils' and teachers' mathematical understanding and performance when dealing with open-ended problems*. Proyecto de Investigación Conjunta Chile-Finlandia (AKA) de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, Chile.