



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CARACTERÍSTICAS DE LA REPRESENTACIÓN PSEUDO-ESPECTRAL DE
CHEBYSHEV EN LA MODELACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS EN EL
CONTEXTO CHILENO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

VÍCTOR ANDRÉS PUENTE MONTERO

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO MORENO VIEYRA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
EDUARDO PEREIRA BONVALLET
PATRICIO MENDOZA ARAYA

SANTIAGO DE CHILE
2017

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
POR: VÍCTOR ANDRÉS PUENTE MONTERO
FECHA: NOVIEMBRE 2017
PROF. GUÍA: RODRIGO MORENO VIEYRA

CARACTERÍSTICAS DE LA REPRESENTACIÓN PSEUDO-ESPECTRAL DE CHEBYSHEV EN LA MODELACIÓN DE SISTEMAS ELÉCTRICOS EN EL CONTEXTO CHILENO

La penetración de energías renovables no convencionales en la matriz energética del país ha tenido un gran aumento, en especial las tecnologías solar fotovoltaica y eólica, lo que plantea grandes desafíos en la operación técnica y económica del sistema eléctrico debido a la variabilidad e incertidumbre de los recursos y a que dadas las condiciones actuales, no contribuyen con reservas al sistema y no aportan inercia.

Los modelos de despacho convencionales utilizan una baja resolución temporal y por lo tanto no se encuentran preparados para capturar adecuadamente la variabilidad de la energía solar y eólica. Para ello, se requeriría aumentar la resolución, lo que tiene como desventaja el crecimiento computacional del problema a resolver, pudiendo incluso ser inviable de resolver. Es por esto, que en este trabajo se estudia el problema de despacho económico utilizando la modelación en el dominio Chebyshev. Para esto, se estudian las principales características de los modelos convencionales y las principales propiedades de los polinomios de Chebyshev, y se analiza la formulación de ambos modelos, su desempeño computacional y calidad de resultados.

La metodología de estudio abarca todas las etapas para modelar el problema en el tiempo continuo y discreto, donde se destaca la obtención de datos, la formulación de los problemas en sus dominios respectivos y la resolución de los problemas variando la resolución temporal y la cantidad de información suministrada a cada modelo.

De los resultados se desprende que al utilizar la modelación en el dominio de Chebyshev es posible disminuir la cantidad de variables y restricciones del problema, sin embargo, esto implica un aumento en la densidad de las matrices de restricciones, lo que provoca un deterioro en el desempeño computacional. También se observa que al aumentar la resolución temporal del problema es posible obtener una mejor aproximación de los costos de operación, y que, al utilizar la modelación en el dominio de Chebyshev es necesario tener en cuenta las posibles oscilaciones de las aproximaciones obtenidas para obtener mejores resultados.

En conjunto con lo anterior, en este trabajo también se estudia la aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación de la dinámica del sistema, donde se busca representar la respuesta inercial del sistema a través de la ecuación de swing del generador. En el ejemplo ilustrado se observa que es posible llegar a una buena aproximación y que la representación en Chebyshev genera un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, por lo que es posible su incorporación en modelos de optimización lineales.

A mi familia y amigos

Agradecimientos

A través de este trabajo culmino mi etapa universitaria, es por esto que quiero agradecer a mis padres Fernando y María Pía por su apoyo incondicional y amor, y a mis hermanas Gabriela y Francisca por ser un pilar fundamental y ayudarme a cumplir mis objetivos.

A los tacas Cristián, Emilio, Tomás, Joachim y Sebastián por haberme acompañado durante toda mi estadía universitaria y haberme brindado su apoyo y amistad.

Tambien quiero agradecerle al profesor Rodrigo Moreno por ser mi guía en este proceso y siempre darse el tiempo para resolver mis dudas y darme buenos consejos, a Eduardo Pereira de igual forma por su buena disposición y aportes, y al profesor Patricio Mendoza por sus aportes en la etapa final de este trabajo.

A Seba, Sergio, Cristian, Nico, Cesar, Elías, Julio, Cristobal, Pancho, etc. A todos los compañeros con que compartí los últimos años de carrera. Mención especial a Cesar y Elías por haberme apoyado de distintas formas durante la realización de este trabajo.

Agradesco también a Carlos Suazo y la gente de SPEC por su apoyo y buena disposición durante mi periodo de práctica y la etapa final de mis estudios universitarios.

A todas la personas que de alguna forma influyeron en mí en este periodo.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas	vi
Índice de Figuras	vii
1. Introducción	1
1.1. Motivacion	1
1.2. Objetivos generales	3
1.3. Objetivos especificos	3
1.4. Estructura de la memoria	4
2. Operación económica de sistemas eléctricos	5
2.1. Modelos de corto plazo	5
2.1.1. Despacho económico	5
2.2. Modelos de largo plazo	7
3. Modelo de despacho en tiempo continuo mediante polinomios de Chebyshev	10
3.1. Polinomios de Chebyshev	10
3.1.1. Polinomios de Chebyshev del primer tipo	10
3.1.2. Representación pseudo espectral de Chebyshev	11
3.1.3. Evaluación de derivadas e integrales	14
3.2. Modelo de despacho en tiempo continuo	15
4. Metodología	16
4.1. Obtención y tratamiento de datos	16
4.2. Despacho en tiempo continuo y discreto	17
4.3. Reconstrucción de las funciones y análisis de resultados	17
5. Caso de estudio	19
5.1. Parámetros	19
5.1.1. Perfil de demanda, solares y eólicos	19
5.1.2. Modelación de centrales térmicas	20
5.1.3. Modelación de centrales Hidro-Pasada, Solares y Eólicas	22
5.2. Resultados	22
6. Aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación dinámica del sistema eléctrico.	28

6.1.	Dinámica y control de sistemas eléctricos	28
6.1.1.	Ecuación de swing de las maquinas	29
6.1.2.	Respuesta dinámica	30
6.2.	Metodos espectrales	30
6.2.1.	Metodo Tau	31
6.2.2.	Metodos de colocación espectral	31
6.3.	Ejemplo Aplicación	32
7.	Conclusiones y trabajo futuro	35
7.1.	Conclusión	35
7.2.	Trabajo futuro	37
8.	Bibliografía	38
9.	Anexos	41
9.1.	Parámetros de entrada modelos	41
9.2.	Resultados despacho	44

Índice de Tablas

5.1. Agrupación centrales térmicas y parámetros	21
5.2. Capacidad instalada Hidro-pasada, solar y eólica	22
5.3. Parámetros problemas de optimización caso base (168 periodos)	22
5.4. Cantidad de variables en cada tipo de restricción para los 3 problemas en el caso base	24
5.5. Tiempos de ejecución (s) de modelos en caso base con distintos algoritmos .	25
5.6. Parámetros del modelo discreto al aumentar la resolución	25
5.7. Parámetros del modelo en Chebyshev con todos los coeficientes al aumentar la resolución	25
5.8. Parámetros del modelo en Chebyshev reducido al aumentar la resolución . .	25

Índice de Figuras

2.1. El problema de coordinación hidrotérmica	7
2.2. Costos del sistema según nivel de almacenamiento	8
3.1. Polinomios de Chebyshev en el dominio $[-1, 1]$	11
3.2. Puntos extremos de Chebyshev	13
4.1. Etapas metodología	18
5.1. Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 1 h.	20
5.2. Despacho por tecnología caso base (168 periodos).	23
5.3. Patrón de dispersion de las matrices de restricciones en cada modelación.	24
5.4. Tiempos de ejecución modelos al aumentar la resolución del problema.	26
5.5. Costos totales de operación en ambos modelos al aumentar la resolución del problema.	27
6.1. Modelo dinámico incluyendo control primario y secundario de frecuencia.	30
6.2. Simulación de la respuesta inercial del sistema	32
6.3. Simulación de la respuesta inercial del sistema incluyendo control primario y secundario	33
9.1. Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 30 min.	41
9.2. Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 15 min.	42
9.3. Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 7.5 min.	43
9.4. Despacho por tecnología caso resolución de 30 min (336 periodos).	44
9.5. Despacho por tecnología caso resolución de 15 min (672 periodos).	45
9.6. Despacho por tecnología caso resolución de 7.5 min (1344 periodos).	46

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivacion

La penetración de energías renovables no convencionales (ERNC) en la matriz energética de Chile ha ido en aumento en los últimos años. Las principales razones de esto son, entre otras, debido a sus beneficios ambientales por sobre las tecnologías de generación en base a combustibles fósiles y debido a sus bajos costos de operación, lo que genera incentivos para invertir en este tipo de proyectos. Este aumento también se ve influenciado por la visión país en temas energéticos que se traduce en políticas como Energía 2050, que propone metas de penetración ERNC al 2035 y 2050 [1] y la ley 20.698 que fija cuotas anuales de inyección en base a ERNC (hasta 2025).

La potencia instalada en base a tecnologías ERNC en Chile es de 3695 MW (mayo 2017), que corresponde al 16 % de la capacidad instalada a nivel nacional, y de este porcentaje el 75 % proviene de energía solar fotovoltaica y eólica. 29 proyectos se encuentran en etapa de construcción sumando 2248 MW, con fecha de ingreso a operación entre mayo de 2017 y octubre de 2018 [2]. De estos proyectos en construcción, un 71 % corresponden a proyectos de energía solar fotovoltaica y un 21 % a energía eólica. Se hace notar entonces, que de esta gran penetración ERNC, un alto porcentaje de los proyectos futuros corresponderán a tecnología eólica y solar, lo que presenta grandes desafíos en la operación y control del sistema eléctrico debido a la variabilidad de ambos recursos y a que no contribuyen a las reservas del sistema y no aportan inercia [3].

Actualmente existe un conjunto acotado de herramientas para modelar el despacho de las unidades de generación y estas en general utilizan una baja resolución temporal, lo que no permite capturar correctamente los efectos de la variabilidad de los recursos solar y eólico. Por otro lado, aumentar la resolución temporal para capturar mayores variaciones utilizando los modelos convencionales tiene como desventaja el crecimiento computacional del problema, pudiendo incluso ser inviable de resolver.

Una alternativa es la de modelar las variables del problema de optimización directamente en tiempo continuo utilizando polinomios de Chebyshev. Esto se propuso en 2015 por el Centro de Energía de la Universidad de Chile. En [11] se detalla la modelación del problema de despacho económico en el dominio de Chebyshev, donde el tratamiento de las funciones se realiza mediante la operación de los coeficientes asociados a cada una de ellas y el número de estos dependerá del orden N del polinomio de aproximación que se utilice para modelar la función. En el problema de optimización convencional el número de variables y restricciones depende directamente de la resolución horaria, mientras que en el dominio de Chebyshev el número de variables y restricciones depende del número de coeficientes que se utilicen para modelar la función. Esto conlleva a que el problema de optimización formulado en Chebyshev pueda ser significativamente más pequeño que el formulado en tiempo discreto si N puede ser reducido sin comprometer la precisión en la aproximación de las funciones. De hecho en este mismo trabajo se realiza posteriormente un análisis en que para un despacho de 192 periodos (48 hrs en ventanas de 15 min) que corresponden a 192 variables en el problema en tiempo discreto, se pueden reducir en un 30 % en la formulación de Chebyshev obteniéndose los mismos resultados que el modelo en tiempo discreto con un error inferior al 1 %.

Dada esta reducción en la cantidad de variables y restricciones en la formulación del problema de optimización en el dominio de Chebyshev es que se tiene una expectativa de menores tiempos de ejecución en problemas de mayor envergadura y también una mayor resolución temporal que permita capturar la variabilidad de los recursos solar y eólico.

En base a estos resultados se plantea ampliar el tamaño del problema a resolver, con el objetivo de cuantificar el desempeño computacional utilizando la formulación en el dominio de Chebyshev y realizar una comparación con un modelo equivalente en tiempo discreto.

Además de la posible reducción en el tamaño de los problemas de optimización, los polinomios de Chebyshev también poseen otras propiedades interesantes en la modelación de sistemas eléctricos. Una de estas es que el tratamiento de las derivadas e integrales en el dominio de Chebyshev se realiza a través de matrices, por lo que es posible formular restricciones que involucran ecuaciones diferenciales de forma algebraica.

En el capítulo final de este trabajo se estudia la aplicación de los polinomios de Chebyshev para modelar ecuaciones que representan la dinámica del sistema, esto se propone expandir a futuro en otras investigaciones.

1.2. Objetivos generales

El objetivo de este trabajo es realizar un análisis comparativo del desempeño computacional al representar el problema de despacho económico en el dominio de Chebyshev utilizando la formulación presentada en [11] con respecto a una formulación equivalente en tiempo discreto. Para esto se pretende estudiar el desempeño de ambos modelos en problemas de envergadura creciente. También se pretende estudiar que tan buenos son los resultados en términos de error de aproximación, con el objetivo de conocer el número óptimo de coeficientes que se requieren para obtener resultados similares en tiempos menores de ejecución. El modelo de prueba consistirá en una versión simplificada del Sistema Interconectado del Norte Grande (SING).

Finalmente, se pretende estudiar otras aplicaciones de los polinomios de Chebyshev en la modelación sistemas eléctricos, como la incorporación de la respuesta dinámica del sistema a través de la ecuación de swing del generador.

1.3. Objetivos específicos

- Estudiar los modelos de despacho convencionales.
- Estudiar los polinomios de Chebyshev y sus propiedades en la modelación de operación de sistemas eléctricos.
- Comparar los resultados obtenidos a través del modelo convencional con la resolución en el dominio de Chebyshev en problemas de tamaño comparable para validar el modelo planteado.
- Evaluar el desempeño computacional de ambos modelos al aumentar la resolución.
- Estudiar otras posibles aplicaciones de los polinomios de Chebyshev en la modelación de sistemas eléctricos al incorporar la respuesta inercial del sistema a través de la ecuación de swing del generador.

1.4. Estructura de la memoria

La estructura de la memoria es la siguiente:

En el capítulo 1 se presenta la motivación, los objetivos generales y específicos del trabajo.

En el capítulo 2 se introduce el contexto del problema y se describe el problema de despacho económico. Específicamente se define el modelo de optimización en tiempo discreto a partir del cual se validarán los resultados.

En el capítulo 3 se profundiza en las propiedades de los polinomios de Chebyshev y se define el modelo de optimización que será utilizado en los capítulos posteriores.

En el capítulo 4 se plantea la metodología utilizada en el trabajo y la implementación de los modelos.

En el capítulo 5 se define el caso de estudio y se analizan los resultados obtenidos.

En el capítulo 6 se muestra una posible aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación de sistemas eléctricos.

Capítulo 2

Operación económica de sistemas eléctricos

La coordinación de la operación de un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) busca determinar los niveles de generación óptimos de cada unidad, que permitan abastecer a la demanda al menor costo posible y de forma que se respeten las restricciones técnicas de cada tecnología, así como los niveles de calidad de servicio impuestos por la normativa del país [10].

2.1. Modelos de corto plazo

En el corto plazo se resuelve el predespacho (unit commitment) y el despacho económico. El unit commitment busca determinar que unidades de generación se encontrarán operativas en el periodo de análisis, por lo que es necesario utilizar variables enteras que modelan el encendido y apagado de las centrales. Una metodología ampliamente estudiada es la programación lineal entera mixta (MILP por sus siglas en inglés) [4]. En el despacho económico se asume que las unidades conectadas al sistema ya se encuentran operativas, por lo que su objetivo recae en encontrar los niveles de potencia óptimos de estas y los costos marginales del sistema.

A continuación se describen las principales características del problema de despacho económico, que corresponden a los modelos estudiados en el presente trabajo.

2.1.1. Despacho económico

Como se mencionó anteriormente, los modelos de despacho buscan determinar los niveles óptimos de potencia de cada unidad de generación eléctrica. Para esto, se utiliza un problema de optimización cuya función objetivo minimiza los costos de operación del sistema sujeto al abastecimiento de la demanda en cada periodo.

Además, dentro de este problema se tienen restricciones que aseguran la operación técnica

del sistema, como por ejemplo:

- Flujo máximo de potencia en cada línea de transmisión.
- Pérdidas asociadas a la transmisión.
- Operación de las centrales dentro de sus límites técnicos.
- Rampas de subida y bajada de cada generador.

En (2.1) se plantea un modelo uninodal simplificado de despacho económico con restricciones de límites técnicos y rampas.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{t=1}^T g_{k,t} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{k=1}^K g_{k,t} = d_t \\
 G_{k,t}^{\min} & \leq g_{k,t} \leq G_{k,t}^{\max} \\
 R_{k,t}^{\min} & \leq g_{k,t+1} - g_{k,t} \leq R_{k,t}^{\max}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde:

- d_t es el valor de la demanda en el tiempo t
- $g_{k,t}$ es la potencia del generador k en el tiempo t
- a_k es el costo de operación del generador k
- $G_{k,t}^{\max}$ es el valor máximo de potencia que puede tomar el generador k en el tiempo t
- $G_{k,t}^{\min}$ es el valor mínimo de potencia que puede tomar el generador k en el tiempo t
- $R_{k,t}^{\max}$ es el valor máximo de rampa que puede tomar el generador k entre el tiempo t y $t + 1$
- $R_{k,t}^{\min}$ es el valor mínimo de rampa que puede tomar el generador k entre el tiempo t y $t + 1$

La función objetivo busca minimizar los costos de operación en el periodo de estudio. Para llevar esto a cabo se minimiza la energía total generada por cada unidad respecto a sus costos variables. En los modelos discretos generalmente se asume que la potencia se mantiene constante en cada periodo, por lo que la energía que corresponde a la integral de la potencia se puede aproximar a través de una sumatoria.

La restricción de igualdad se encarga de que la demanda sea abastecida en cada instante del periodo de estudio. La variable dual asociada a esta restricción se utiliza para valorizar el costo marginal del sistema, que equivale al costo para el sistema de servir una unidad adicional de demanda [10]. En modelos uninodales esta variable representa un costo marginal único para todo el sistema, pero al incorporar una modelación multinodal y restricciones de flujo óptimo es posible obtener costos marginales nodales que representan el costo de servir una unidad adicional de demanda en el nodo respectivo. Esto se utiliza para valorizar las inyecciones de potencia en cada nodo.

Las restricciones de máximos y mínimos técnicos se encargan de mantener la operación de

cada central dentro sus límites establecidos. En general para centrales térmicas estos valores son constantes a lo largo del periodo de evaluación y dependen de la capacidad instalada de la central entre otros parámetros, mientras que para centrales solares fotovoltaicas y eólicas la variabilidad de estos recursos generalmente se modela a través de perfiles de generación máxima en el tiempo que dependen de la disponibilidad del recurso.

Finalmente, la restricción de rampa se encarga de que la variación de la potencia de las centrales no supere los límites técnicos de subida y bajada entre los periodos de estudio.

2.2. Modelos de largo plazo

En problemas de largo plazo en sistemas hidrotérmicos se busca optimizar de forma simultánea el abastecimiento de la demanda y la utilización del recurso hidráulico en las cuencas y embalses del sistema en un periodo de estudio (años). El problema consiste en decidir el momento óptimo de utilizar el agua dada la incertidumbre de la hidrología, ya que si se utiliza el agua en el corto plazo los costos inmediatos de operación serán bajos pero los costos futuros serán más altos y viceversa. Además, de no tomar una decisión asertada es posible incurrir en racionamientos o vertimientos.

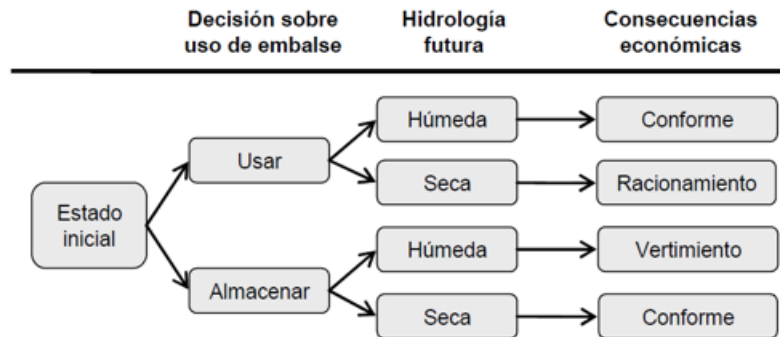


Figura 2.1: El problema de coordinación hidrotérmica

Dado esto, se busca minimizar los costos totales (CT) que corresponden a la suma de los costos inmediatos (CI) y los costos futuros (CF), esto se ilustra en la figura 2.2.

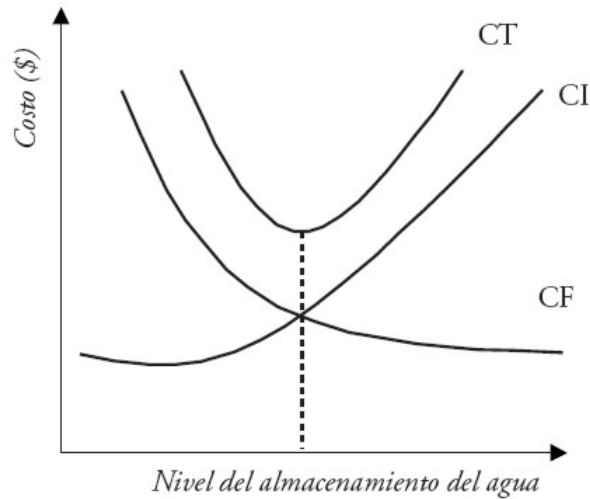


Figura 2.2: Costos del sistema según nivel de almacenamiento

Esta modelación introduce un conjunto de variables y restricciones adicionales al problema debido a la necesidad de representar distintos escenarios asociados a la incertidumbre hidrológica. Dentro de las variables se destacan:

- Caudales turbinados, vertidos, filtrados, etc.
- Volúmenes de agua almacenada en los embalses al final de cada periodo de análisis.

El conjunto de restricciones que se deben agregar son las siguientes:

- Balance energético en cada embalse del sistema
- Conectividad hidráulica para las distintas cuencas del sistema
- Estanques de acumulación
- Convenios de riego, etc.

Este problema corresponde a un problema de optimización estocástica, pero puede ser representado de forma determinística a través de escenarios. Dependiendo de la formulación utilizada el número de variables crece de forma exponencial al número de etapas y proporcional a la cantidad de escenarios a estudiar por etapas.

Uno de los métodos más utilizados para afrontar este problema es la programación dinámica dual estocástica (SDDP) que permite representar el costo de utilizar el agua en cada etapa a través de la función de costos futuros [5]. Por lo que se contemplan 2 fases, una de optimización donde se calcula la función de costos futuros y otra de simulación donde se obtienen los costos reales en cada etapa.

En la modelación de la demanda generalmente se realizan simplificaciones para reducir la cantidad de variables de los subproblemas, donde se agrupan los valores de similares características en bloques que representan los distintos niveles de demanda y luego estos son asociados a cada hora del día [12]. Debido a esta representación se pierde la componente temporal por lo que no es posible representar fenómenos con dependencia temporal como los son las rampas y tiempos mínimos de operación.

Capítulo 3

Modelo de despacho en tiempo continuo mediante polinomios de Chebyshev

3.1. Polinomios de Chebyshev

En esta sección se describen las principales propiedades de los polinomios de Chebyshev utilizadas en este trabajo y posteriormente se detalla la formulación del problema de despacho económico en el dominio de Chebyshev.

3.1.1. Polinomios de Chebyshev del primer tipo

Los polinomios de Chebyshev del primer tipo de grado n en x se denotan $T_n(x)$ y están dados por la siguiente formula:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \theta) \quad \text{donde } \theta = \arccos(x) \quad (3.1)$$

Si el rango de x es el intervalo $[-1, 1]$, entonces el rango de θ es $[0, \pi]$. Se debe notar que si $x = -1$, entonces $\theta = \pi$ y si $x = 1$, entonces $\theta = 0$ por lo que las variables se mueven en direcciones opuestas.

De (3.1) es posible deducir los primeros polinomios de Chebyshev, que se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ &\vdots \\ T_n(x) &= 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \forall n = 2..N \end{aligned} \quad (3.2)$$

En [7] se detalla la formulación matemática utilizada para obtener la recurrencia planteada en (3.2), tal que de esta forma se puedan obtener los polinomios de orden mayor.

En la figura 3.1 se encuentran graficados los polinomios hasta $n = 5$ en el dominio $[-1, 1]$.

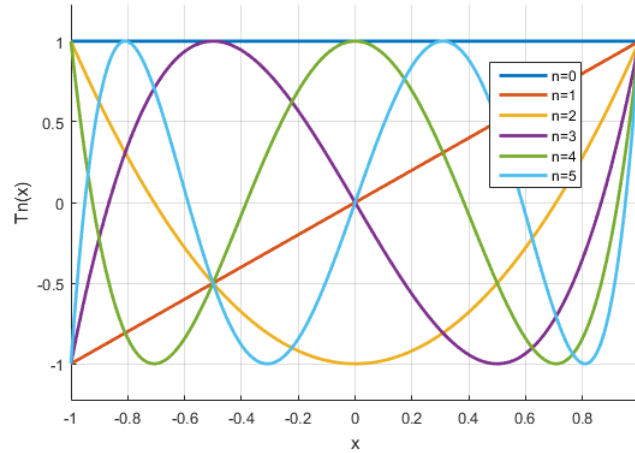


Figura 3.1: Polinomios de Chebyshev en el dominio $[-1, 1]$

Los polinomios de Chebyshev de grado $n > 0$ tienen n ceros (intersecciones con el eje x) en el intervalo $[-1, 1]$, y estos se sitúan en los puntos:

$$x = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{n}\right) \quad k = 1..n \quad (3.3)$$

En este mismo intervalo hay $n + 1$ extremos (máximos y mínimos) y se sitúan en:

$$x = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad k = 0..n \quad (3.4)$$

En todos los máximos se da que $T_n(x) = 1$, mientras que en los mínimos $T_n(x) = -1$. Esta propiedad es la que hace que los polinomios de Chebyshev sean tan útiles en la aproximación de funciones, debido a que el error de aproximar una función $f(x)$ utilizando los N primeros polinomios de Chebyshev está acotado por la suma del valor absoluto de los coeficientes restantes [13].

3.1.2. Representación pseudo espectral de Chebyshev

Para representar una función en el dominio de Chebyshev se utiliza una representación polinomial, donde el valor de la función en cada punto se representa a través de una combinación lineal de los polinomios, ya que estos son ortogonales entre sí [13].

$$p_N(c, x) = \frac{c_0}{2} \cdot T_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i \cdot T_i(x) \quad c = \{c_i\}, i = 0..N \quad (3.5)$$

Los valores c que ponderan a cada polinomio se denominan coeficientes de Chebyshev y representan la proyección de la función $f(x)$ en el dominio de Chebyshev. Estos coeficientes

se calculan de forma tal que la serie $p_N(c, x)$ aproxime a la función $f(x)$.

$$f(x_j) \approx p_j = \frac{c_0}{2} \cdot T_0(x_j) + \sum_{i=1}^N c_i \cdot T_i(x_j) \quad (3.6)$$

La expresión (3.6) puede ser extendida a forma vectorial utilizando la formulación presentada a continuación.

$$f(x_j) \approx p_j = \vec{T}(x_j) \cdot \vec{c} \quad (3.7)$$

donde:

$$\vec{T}(x_j) = \left(\frac{T_0(x_j)}{2} \quad T_1(x_j) \cdots T_N(x_j) \right) \in M_{1 \times N+1}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \in M_{N+1 \times 1}$$

De esta forma, para un dominio discretizado $x = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$ se tiene:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_M) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{T_0(x_0)}{2} & T_1(x_0) & \dots & T_N(x_0) \\ \frac{T_0(x_1)}{2} & T_1(x_1) & \dots & T_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{T_0(x_M)}{2} & T_1(x_M) & \dots & T_N(x_M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = A \cdot \vec{c} \quad (3.8)$$

la matriz A corresponde a la matriz de transformación desde el dominio de Chebyshev a el tiempo discreto.

Existen diversas formas para obtener los coeficientes de Chebyshev de una función discretizada, directamente invertir la matriz A en la ecuación (3.8) o utilizando un símil de la transformada discreta de Fourier presentada en (3.9).

$$c_i = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^m f(x_k) T_i(x_k) \quad (3.9)$$

Otra forma es resolver el problema de optimización presentado en (3.10), donde los coeficientes c son variables del problema [9] y la función objetivo minimiza la máxima distancia entre la función original y la aproximación. A este método se le denomina *One-side* debido a que es posible imponer la positividad de la señal a través de restricciones, una propiedad importante en aplicaciones a sistemas eléctricos debido a que ciertas variables no pueden tomar valores

negativos, como la potencia generada.

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \sum_{j=0}^M \varepsilon_j^+ + \varepsilon_j^- \\
 \text{s.t.} \quad & A \cdot c = p \\
 & p - y = \varepsilon^+ - \varepsilon^- \\
 & A \cdot c \geq 0 \\
 & \varepsilon^+ \geq 0 \\
 & \varepsilon^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= (c_i), \quad i = 1..N \\
 \mathbf{x} &= (x_j), \quad j = 0..M \\
 \mathbf{y} &= (f(x_j)) \\
 \mathbf{p} &= (p_j)
 \end{aligned}$$

Los puntos x_j del dominio no son elegidos de forma aleatoria ya que, por ejemplo, si se utilizan puntos equiespaciados en el dominio $[-1, 1]$ las aproximaciones pueden no converger en los extremos del dominio, a este fenómeno se le denomina *fenómeno de Runge* [6].

Los puntos utilizados para evitar este fenómeno son los puntos en los que se sitúan los extremos del polinomio $T_n(x)$ definidos en (3.4) y se les denomina *puntos extremos de Chebyshev*. Estos puntos representan la proyección de puntos equiespaciados en una semi circunferencia sobre el eje de las abscisas, como se observa en la Figura 3.2.

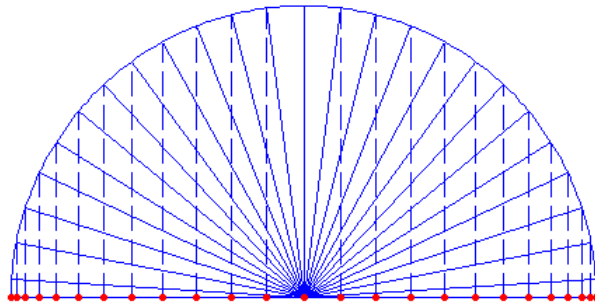


Figura 3.2: Puntos extremos de Chebyshev

3.1.3. Evaluación de derivadas e integrales

Al representar una función en el dominio de Chebyshev, es posible representar su derivada e integral a través de sus coeficientes. A continuación se define la formulación en cada caso.

3.1.3.1 Derivación

Dada una función $f(x)$, y los coeficientes de Chebyshev c , tal que:

$$f = A \cdot c$$

Entonces los coeficientes c' que aproximan $f'(x)$ se relacionan con c a través de (3.11)

$$c' = D \cdot c \quad (3.11)$$

Donde D es la matriz de derivación, que está dada por:

$$D = (D_{ij}), \quad D_{ij} = \begin{cases} 2j & \text{si } j > i \text{ y } j - i \text{ es par} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.12)$$

Para funciones contenidas en intervalos generales $[a, b]$ distintos de $[-1, 1]$, se debe premultiplicar la matriz D por el valor $\frac{2}{b-a}$

3.1.3.2 Integración

Analogamente al caso de la derivada, en el caso de la integral se tiene que si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$, entonces los coeficientes de F se relacionan con los coeficientes de f tal que:

$$\tilde{c} = J \cdot c + \chi \quad (3.13)$$

χ es un término de ajuste que depende de los intervalos de integración definidos.

La matriz J se construye de la siguiente forma:

$$J_{k,k} = 0, J_{0,1} = \frac{1}{2}, J_{k,k-1} = \frac{1}{2k} = -J_{k,k+1} \quad k = 1, 2.. \quad (3.14)$$

Si se desea obtener el valor total de integral definida en $[-1, 1]$, es posible utilizar la fórmula conocida como *Clenshaw-Curtis Quadrature* [13].

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^N c_i T_i(x) dx = \sum_{i=0}^N c_i \int_{-1}^1 T_i(x) dx = \sum_{i=0}^N c_i \gamma_i = \gamma^T c \quad (3.15)$$

Donde:

$$\gamma_i = \int_{-1}^1 T_i(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es impar} \\ -\frac{2}{(i+1)(i-1)} & \text{si } i \text{ es par} \end{cases} \quad (3.16)$$

Para dominios generales $[a, b]$ la matriz J y el vector γ deben ser premultiplicados por el valor $\frac{(b-a)}{2}$

3.2. Modelo de despacho en tiempo continuo

El modelo de despacho en el dominio de Chebyshev utilizado corresponde a [11]:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \sum_{k=1}^K \alpha_k \gamma^T g_k \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K g_k = \mathbf{d} \\
 & G_k^{\min} \leq Ag_k \leq G_k^{\max} \\
 & R_k^{\min} \leq ADg_k \leq R_k^{\max}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Donde:

- \mathbf{d} es el vector de coeficientes de Chebyshev de la función de demanda en el tiempo
- \mathbf{g}_k es el vector de coeficientes de Chebyshev de la función de potencia del generador k en el tiempo
- \mathbf{a}_k es el costo de operación del generador k
- γ^T es el vector de integración definido en (3.16)
- G_k^{\max} es el valor máximo de potencia que puede tomar el generador k
- G_k^{\min} es el valor mínimo de potencia que puede tomar el generador k
- R_k^{\max} es el valor máximo de rampa de subida que puede tomar el generador k
- R_k^{\min} es el valor mínimo de de rampa de bajada que puede tomar el generador k
- R_k^{\min} es el valor mínimo de de rampa de bajada que puede tomar el generador k
- A es la matriz de transformación de Chebyshev al tiempo discreto definida en (3.8)
- D es la matriz de derivación en Chebyshev definida en (3.12)

En este modelo a diferencia del modelo discreto presentado anteriormente, la función objetivo penaliza directamente la energía total generada por cada unidad a través del vector de integración γ .

La restricción de balance nodal se representa a través de los coeficientes de Chebyshev de cada generador, por lo que no se realiza el balance en cada instante del periodo de evaluación, si no que se impone que la suma de las funciones de generación debe ser igual a la función de la demanda (representada a través de sus coeficientes). Es por esto que el tamaño de esta restricción no depende la cantidad de periodos analizados, depende de la cantidad de coeficientes que se utilicen para representar cada función.

Las restricciones de máximos y mínimos técnicos y de rampas son representadas directamente en el tiempo pero evaluados en los puntos extremos, esto se realiza a través de la matriz A que evalúa la suma polinomial en (3.6) en cada punto del despacho.

Capítulo 4

Metodología

La metodología propuesta abarca todas las etapas necesarias para modelar el despacho en el dominio de Chebyshev y posteriormente realizar la comparación a modo de validación con el modelo discreto o convencional. Este proceso se realiza en varias instancias para distintas resoluciones.

Se destacan 3 etapas, primero el tratamiento de datos, luego la resolución del despacho económico y finalmente la reconstrucción de las funciones en tiempo continuo y discreto.

4.1. Obtención y tratamiento de datos

En primera instancia se debe realizar la obtención de datos, donde se destaca:

- Perfiles de demanda
- Perfiles de generación solar
- Perfiles de generación eólica
- Restricciones técnicas de los generadores
- Costos de operación por tecnología

Respecto a los perfiles, estos en general se encuentran evaluados en un dominio equiespaciado, por lo que para representar los parámetros en el dominio de Chebyshev es necesario realizar una interpolación al dominio de los puntos extremos de Chebyshev. La herramienta utilizada para este objetivo es el software Matlab, debido a su gran variedad de librerías para el tratamiento de datos. En el caso de la demanda, esta se representa en el despacho a través de sus coeficientes por lo que es necesario realizar la obtención de estos a través del problema de optimización mostrado en (3.10). Esta modelación se realiza en el software FICO XPRESS, debido a su simplicidad en la representación de problemas de optimización lineales.

Los demás perfiles se representan en el despacho directamente en el tiempo, pero evaluados en los puntos extremos.

La comunicación entre ambos softwares se realiza a través de Excel.

La resolución temporal de los perfiles es de 1 h, por lo que dado el objetivo de aumentar la resolución del problema para evaluar el desempeño de ambos modelos, es necesario realizar una interpolación de los perfiles originales en dominios temporales de mayor resolución.

4.2. Despacho en tiempo continuo y discreto

Una vez representados los parámetros en el tiempo continuo y discreto, se procede a realizar el despacho económico, esto se realiza a través de la resolución de los problemas de optimización definidos en (2.1) y (3.17) .

El despacho se realiza de manera separada para el tiempo continuo y discreto, ambos modelados a través del software FICO XPRESS. La cantidad de variables y restricciones en cada problema dependerá de la resolución que se le dé y de la cantidad de información que se utilice. Por lo que es en esta etapa en la que sea evalúa el desempeño computacional de ambos modelos, esto se realizara utilizando un comando en FICO que permite rescatar el tiempo de ejecución del modelo.

Al momento de obtener los coeficientes de cada función de generación en el tiempo continuo y los valores de generación en cada periodo en el tiempo discreto, se procede a reconstruir las funciones y analizar los resultados.

4.3. Reconstrucción de las funciones y análisis de resultados

La reconstrucción de las funciones en el tiempo continuo y discreto se realiza a través de Matlab y se obtienen los valores de las funciones de generación en un dominio de alta resolución (continuo) y un dominio escalonado (discreto).

Finalmente, se procede a realizar varios despachos con distintas resoluciones y variando la cantidad de información utilizada para evaluar el desempeño computacional de ambos modelos, manteniendo un nivel de error mínimo entre ambos modelos, esto para validar en cada caso la representación en Chebyshev.

Todos los problemas formulados son resueltos en un computador con procesador intel core i7-3770S CPU 3.10 GHz, con 16 [GB] de memoria RAM.

En la figura 4.1 se ilustran las etapas mencionadas en la metodología y el software utilizado en cada etapa.

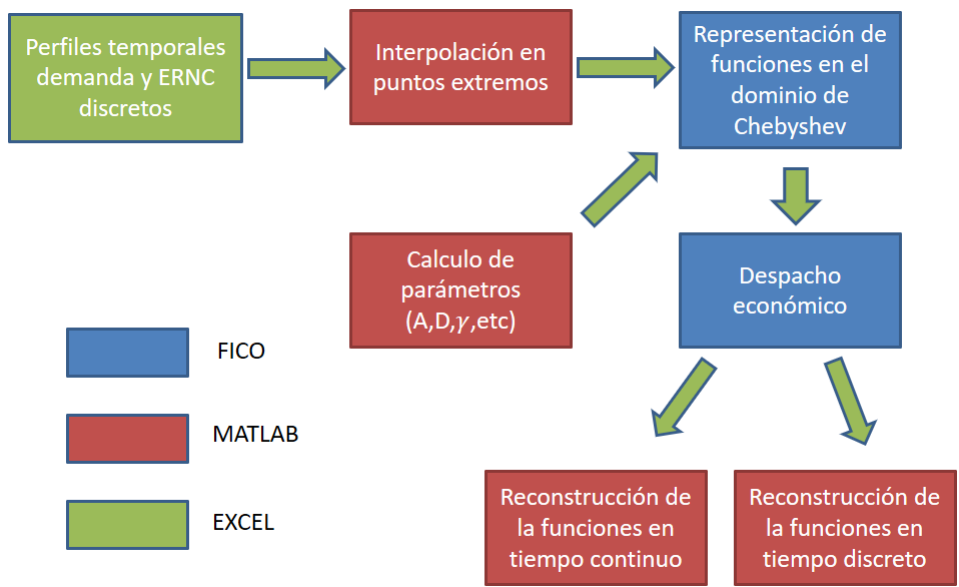


Figura 4.1: Etapas metodología

Capítulo 5

Caso de estudio

El caso de estudio corresponde a una representación uninodal del Sistema Interconectado del Norte Grande (SING) y los datos utilizados fueron sacados del informe técnico definitivo de fijación de precio nudo elaborado por la Comisión Nacional de Energía (CNE) en enero de 2017.

Para la modelación del despacho se utilizan los modelos presentados en (2.1) y (3.17) que corresponden al modelo discreto y el modelo continuo en el dominio de Chebyshev.

El horizonte de estudio corresponde a un despacho de 1 semana utilizando datos del año 2017, por lo que al utilizar una resolución de 1 h (caso base) se tienen 168 instantes de tiempo.

5.1. Parámetros

5.1.1. Perfil de demanda, solares y eólicos

La demanda total del sistema se modela como un perfil agregado que agrupa la demanda total del sistema en el periodo de estudio, dada la representación uninodal.

Este perfil se representa directamente a través de sus valores discretos equiespaciados en el modelo convencional, mientras que en el modelo en tiempo continuo se representa a través de sus coeficientes de Chebyshev.

Los perfiles solares y eólicos se representan a través de perfiles típicos que definen la generación máxima de estas tecnologías en cada instante del periodo de estudio. Estos perfiles se encuentran en *por unidad*, por lo que para acotar las funciones de generación se multiplica cada valor por la capacidad instalada respectiva. En el modelo convencional se representan a través de los valores discretos equiespaciados y en el modelo continuo se representan a través de los valores discretos pero evaluados en los puntos extremos de Chebyshev.

En la figura 5.1 se ilustran los perfiles base de demanda, solar y eólico discretos (azul) y evaluados en los puntos extremos de Chebyshev (rojo) para el caso base. Se puede apreciar la distribución de los puntos extremos, que presentan mayor densidad en los bordes del dominio y menor densidad al interior.

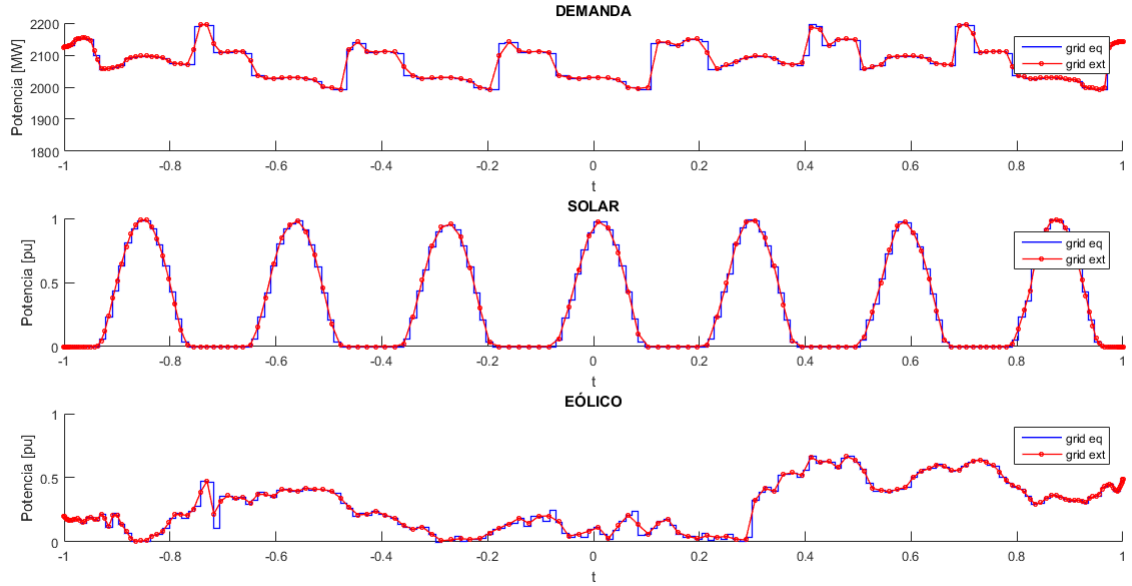


Figura 5.1: Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 1 h.

5.1.2. Modelación de centrales térmicas

Las centrales térmicas se modelan por su potencia y se despachan según su costo variable de operación [12]. Estos costos variables dependen de la energía generada por la central, y se dividen en un costo de tipo combustible y uno de tipo no combustible que se le denomina *costo variable no combustible* (CVNC), como se observa en (5.1).

El costo de tipo combustible depende del precio del combustible y el consumo específico de este, mientras que al CVNC se le asocian costos de mantenimiento preventivo mayor de las unidades, energía eléctrica para servicios auxiliares, insumos, monitoreo ambiental, etc.

$$C_V = C_{esp} \cdot C_C + C_{VNC} \quad (5.1)$$

C_V : Costo variable de la central térmica

C_{esp} : Consumo específico de combustible (rendimiento)

C_C : Costo del combustible

C_{VNC} : Costo variable no combustible

Para representar la totalidad de la capacidad instalada de generación térmica en el SING se realizó una agrupación de generadores con características similares (tipo de tecnología y costo variable). En la modelación final se representaron 31 centrales térmicas, en la tabla 5.1 se pueden observar los parámetros de cada generador.

Tabla 5.1: Agrupación centrales térmicas y parámetros

GRUPO	Nombre	Tipo	$P_{max}[MW]$	$P_{min}[MW]$	$C_C[US\$/ton]$	$C_{esp}[ton/MWh]$	$C_{VNC}[US\$/MWh]$	$C_V[US\$/MWh]$
1	ANG I	Carbon	239.175	0	69.9	0.395	1.8	29.4
	ANG II	Carbon	243.275	0	69.9	0.39	1.8	29.5
2	COCHRANE	Carbon	226.942	0	73.48	0.41	5.06	35
	COCHRANE	Carbon	226.942	0	73.48	0.41	5.06	35
3	CTA	Carbon	148.41	0	68.55	0.387	5.91	32.5
	CTH	Carbon	141.8	0	71.248	0.4	5.74	34.3
4	CTM1	Carbon	138	0	72.99	0.47	9.52	44
	CTM2	Carbon	143	0	72.99	0.418	8.734	39.2
5	NT01	Carbon	125.64	0	80.49	0.42	2.118	35.9
	NT02	Carbon	125.83	0	80.49	0.41	2.064	34.9
6	CTTAR	Carbon	130.52	0	71.04	0.42	1.4	31.3
7	UI2	Carbon	71.28	0	72.68	0.47	12.773	47.3
	UI3	Carbon	74.27	0	72.68	0.49	11.446	47.3
	UI4	Carbon	113.27	0	72.68	0.437	8.452	40.2
	UI5	Carbon	107.66	0	72.68	0.41	7.82	37.9
8	KELAR	Gas Natural	517	0	0.28	186.9	1.69	54.1
9	CERRO PABELLON	Geotermia	48	0	0	1	2	2
10	UI6 GNL	GNL	331.9	0	0.19	186.2	6.37	41.8
11	NORACID	Otro	17.5	0	0	0	1.98	2
12	GMAR	Petroleo Diesel	7.956	4	425.09	0.295	9.2	134.6
	MIAR	Petroleo Diesel	2.922	0	425.09	0.302	9.2	137.6
	M2AR	Petroleo Diesel	2.924	0	425.09	0.301	9.2	137.2
13	CC1d	Petroleo Diesel	325.5	0	446.55	0.217	7.83	104.7
	CC2d	Petroleo Diesel	325.5	0	446.55	0.211	7.83	102.1
14	CUMMINS	Petroleo Diesel	1	0	416.8	0.353	14	161.1
15	DEUTZ	Petroleo Diesel	2	0	416.82	0.388	15	176.7
16	ESTANDARTES (7-12)	Petroleo Diesel	4.8	0	436.612	0.246	23.032	130.4
	ESTANDARTES (13)	Petroleo Diesel	1.6	0	436.612	0.26	17.28	130.8
17	ZOFRI_1	Petroleo Diesel	0.45	0	436.612	0.263	19.39	134.2
	ZOFRI_2-5	Petroleo Diesel	5.16	0	436.612	0.26	17.51	131
	ZOFRI_6	Petroleo Diesel	0.45	0	436.612	0.231	19.39	120.2
18	INGENÓVA	Petroleo Diesel	2	0	416.065	0.305	14.15	141.1
19	MIQ	Petroleo Diesel	2.89	0	411.648	0.302	9.9	134.2
	SUIQ	Petroleo Diesel	3.86	0	411.65	0.326	9.9	144.1
	TGIQ	Petroleo Diesel	18.81	0	411.64	0.381	1.7	158.5
20	CTM3d	Petroleo Diesel	218.477	0	415.6	0.248	7.21	110.3
21	PORTADA	Petroleo Diesel	3	0	488.36	0.2485	16.07	137.4
22	TGTAR	Petroleo Diesel	18.9	0	428.7	0.47	0.41	202.1
23	TG1	Petroleo Diesel	12.423	0	417.05	0.45	0.99	189.8
	TG2	Petroleo Diesel	12.423	0	417.05	0.45	0.99	189.8
24	TG3d	Petroleo Diesel	25.93	0	417.05	0.34	0.99	142.8
25	UJINA 1	Petroleo Diesel	6.346	0	332.9	0.198	17	82.9
	UJINA 2	Petroleo Diesel	6.346	0	332.99	0.2	17	83.6
	UJINA 3	Petroleo Diesel	6.346	0	332.99	0.193	17	81.3
	UJINA 4	Petroleo Diesel	6.346	0	332.99	0.196	17	82.3
	UJINA 5	Petroleo Diesel	8.445	0	332.99	0.205	15.9	84.2
	UJINA 6	Petroleo Diesel	8.445	0	332.99	0.201	15.9	82.8
26	MAIQ	Petroleo IFO-180	5.7	0	337.604	0.257	7.9	94.7
27	MIMB	Petroleo IFO-180	27.92	0	448.8	0.29	22.99	157.2
28	MSIQ	Petroleo IFO-180	5.7	0	336.6	0.228	4.7	81.4
29	INACAL	Petroleo IFO-180	6.623	0	570.26	0.26	9.06	158.1
30	TAMAYA	Petroleo IFO-180	99.988	0	325.26	0.225	12.662	85.8
31	UI0	Petroleo IFO-180	31.5	0	306.9	0.297	1.19	92.3
	UI1	Petroleo IFO-180	31.5	0	306.9	0.297	1.19	92.3

5.1.3. Modelación de centrales Hidro-Pasada, Solares y Eólicas

Las centrales hidro-pasada, solares y eólicas existentes en el SING se modelan como una central térmica sin costo de operación.

Para las centrales hidro-pasada se asume eficiencia unitaria, mientras que las centrales solares y eólicas se acotan por sus perfiles de generación típica mencionados anteriormente. En la tabla 5.2 se presentan los valores de capacidad instalada de hidro-pasada, solar y eólico utilizados.

Tabla 5.2: Capacidad instalada Hidro-pasada, solar y eólica

	Pmax [MW]
Hidro-Pasada	16.874
Solar	522.19
Eólico	200.9

5.2. Resultados

El caso base corresponde a la resolución del despacho semanal con resolución de 1 h, Para el cuál se resuelven 3 problemas de optimización. El despacho discreto, el despacho en el dominio de Chebyshev utilizando la cantidad total de coeficientes en todas las funciones (168 cada una), y un despacho en en el dominio de Chebyshev utilizando un número reducido de coeficientes por función.

En general, el tamaño de un problema lineal de optimización (LP) depende del número de restricciones (NRES), el número de variables (NVAR) y el número de elementos distintos de cero (NZE) presentes en la matriz de restricciones [14]. En la tabla 5.3 se presenta esta estadística para los problemas planteados.

Tabla 5.3: Parámetros problemas de optimización caso base (168 periodos)

CASO	NVAR	NRES	NZE
Discreto	5,712	21,946	37,844
Chebyshev N total	5,712	22,008	3,654,124
Chebyshev N reducido	1,036	22,008	572,252

En la figura 5.2 se observan los resultados para el despacho del caso base con resolución de 1 h, se muestran por separado el despacho discreto y el caso Chebyshev con reducción de coeficientes. En el capítulo de anexos se pueden observar los parámetros de entradas y los resultados de los despachos para los casos con mayor resolución.

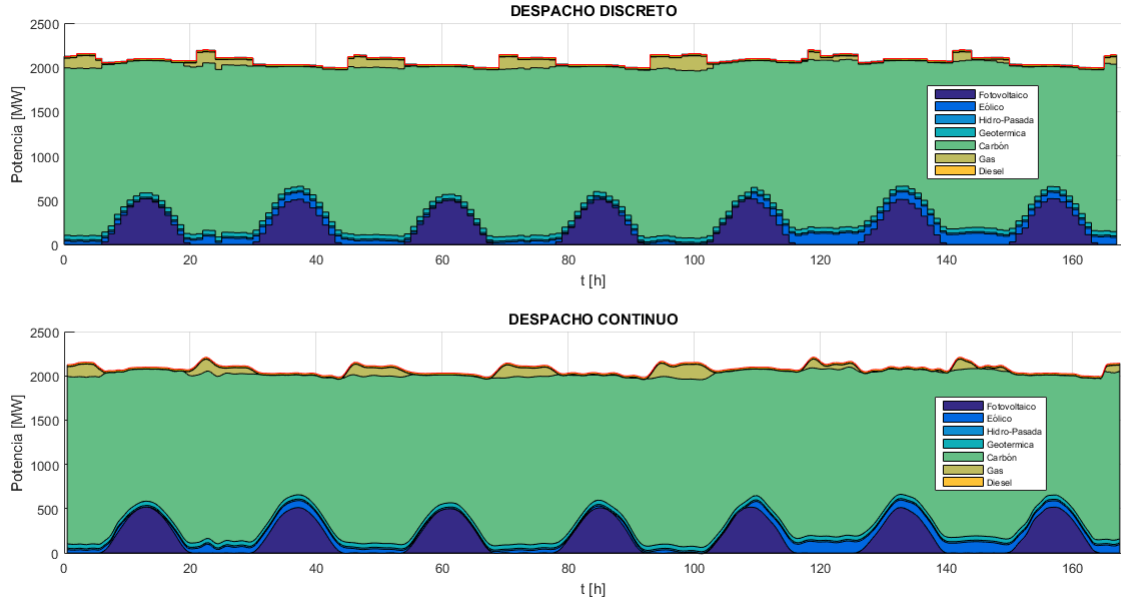


Figura 5.2: Despacho por tecnología caso base (168 periodos).

Dadas las características del problema es posible eliminar una gran cantidad de variables en el problema reducido en Chebyshev a alrededor de un 18 % sin perder precisión en los resultados, debido a que para representar funciones suaves se requiere una baja cantidad de coeficientes y para representar despachos constantes solo se requiere un coeficiente por función. En este caso dada la naturaleza térmica del SING, la mayoría de los despachos se mantienen constantes en el periodo de evaluación, exceptuando las centrales ERNC y las centrales que realizan el seguimiento a la demanda.

En general no es posible reducir de forma tan significativa la cantidad de coeficientes debido a que no se puede saber con certeza el comportamiento de los despachos. Pero, dado que sí es posible asignar una menor cantidad de coeficientes a algunas funciones, en este caso se trata de emular uno de los mejores casos con el objetivo de evaluar el desempeño computacional del modelo reducido.

De la tabla 5.3 se puede apreciar que en términos de variables y restricciones, el caso discreto y el caso Chebyshev con todos los coeficientes son equivalentes. La principal diferencia recae en la cantidad de elementos distintos de cero en la matriz de restricciones, que es mucho mayor al formular el problema en el espacio de Chebyshev. La razón de esto es que para representar un punto del despacho en Chebyshev es necesario utilizar la totalidad de los coeficientes de la función (en el caso con todos los coeficientes son 168), mientras que en el caso discreto solo se utiliza la variable temporal respectiva. Al reducir los coeficientes se disminuye la cantidad de variables del problema y con esto se disminuye la cantidad de elementos distintos de cero en la matriz de restricciones. En la tabla 5.4 se realiza un desglose de los datos mostrados en la tabla anterior, donde el parámetro *COUNT* representa la cantidad de veces que se encuentra presente cada tipo de restricción y el parámetro *VARIABLES* representa la cantidad de variables que influyen en cada tipo de restricción.

Tabla 5.4: Cantidad de variables en cada tipo de restricción para los 3 problemas en el caso base

		DISCRETO		CHEB COEF TOTALES		CHEB COEF REDUCIDOS	
	CONSTRAINTS	COUNT	VARIABLES	COUNT	VARIABLES	COUNT	VARIABLES
OBJ	OBJECTIVE	1	5,208	1	2,604	1	363
=	BALANCE	168	5,712	168	5,712	168	1,036
≤	MAX_G	5,712	5,712	5,712	959,616	5,712	174,048
≤	MAX_RAMP	5,177	10,354	5,208	864,590	5,208	111,560
≥	MIN_G	5,712	5,712	5,712	959,616	5,712	174,048
≥	MIN_RAMP	5,177	10,354	5,208	864,590	5,208	111,560
		NON-ZERO ELEMENTS					
		37,844		3,654,124		572,252	

Se puede observar que al formular el problema en el espacio de Chebyshev se utilizan menos variables en la función objetivo y en la restricción de balance para el caso reducido. Esto se debe a que ambas ecuaciones se representan directamente a través de los coeficientes, por lo tanto, se asocia la gran densidad de las matrices de restricciones a la utilización de la matriz A de transformación de Chebyshev al tiempo. Esto se ilustra en la figura 5.3, donde se observa el patrón de dispersión de las matrices de restricciones para los 3 problemas resueltos en el caso base.

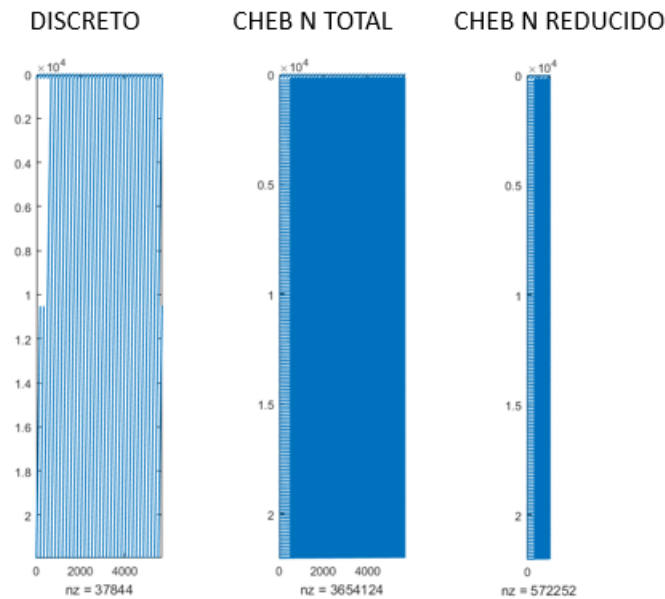


Figura 5.3: Patrón de dispersión de las matrices de restricciones en cada modelación.

Para resolver el modelo discreto se utilizó el método *Simplex primal*, ya que es el que presenta mejores resultados. Los modelos en el dominio de Chebyshev se resuelven a través del método *Newton barrier*, que funciona mejor en matrices de restricciones muy densas [14].

La principal diferencia entre estos métodos recae en que *Simplex* itera a través de los vértices de la región factible, mientras que el método *Barrier* al ser un método de punto interior, itera

sobre puntos que no se sitúan estrictamente en los vértices en la región factible y por lo tanto la solución es aproximada y depende de la tolerancia del solver. Generalmente los solvers realizan iteraciones de "purificación" donde una vez encontrada la solución aproximada, se realizan iteraciones de *simplex* para encontrar la solución óptima [15].

En la tabla 5.5 se presentan los tiempos de ejecución al resolver el problema del caso base con *Simplex primal*, *Simplex Dual* y *Newton barrier*.

Tabla 5.5: Tiempos de ejecución (s) de modelos en caso base con distintos algoritmos

	Simplex Primal	Simplex Dual	Newton Barrier
Discreto	0.1	0.1	0.2
Chebyshev N total	318.6	116	22.8
Chebyshev N reducido	9.9	4.8	2.2

El comportamiento del modelo discreto y el modelo en Chebyshev reducido es similar, mientras que el caso con todos los coeficientes es mayor.

En las tablas 5.6, 5.7 y 5.8, se observa el comportamiento de los problemas de optimización al aumentar la resolución (cantidad de información que se le entrega al modelo) para los casos discreto, Chebyshev con todos los coeficientes y Chebyshev reducido respectivamente.

Tabla 5.6: Parámetros del modelo discreto al aumentar la resolución

Resolución	NVAR	NRES	NZE
1 h	5,712	21,946	37,844
30 min	11,424	43,954	75,812
15 min	22,848	87,970	151,748
7.5 min	45,696	176,002	303,620

Tabla 5.7: Parámetros del modelo en Chebyshev con todos los coeficientes al aumentar la resolución

Resolución	NVAR	NRES	NZE
1 h	5,712	22,008	3,654,124
30 min	11,424	44,016	14,613,628
15 min	22,848	88,032	58,571,288
7.5 min	45,696	176,064	234,548,464

Tabla 5.8: Parámetros del modelo en Chebyshev reducido al aumentar la resolución

Resolución	NVAR	NRES	NZE
1 h	1,036	22,008	572,252
30 min	2,044	44,016	2,269,196
15 min	4,060	88,032	9,053,052
7.5 min	8,092	176,064	36,168,668

Se puede observar que para todos los casos el aumentar la resolución al doble implica un aumento igual en la cantidad de variables y restricciones y este comportamiento se mantiene en el caso discreto para los NZE. En los casos de Chebyshev se debe notar que al aumentar la resolución al doble, la cantidad de NZE aumenta casi 4 veces. Lo que implica que la complejidad computacional al aumentar la resolución aumenta más en los casos en Chebyshev. Esto se ve ilustrado en la figura 5.4 donde se grafican los tiempos de ejecución obtenidos para el modelo discreto y el modelo en Chebyshev reducido al aumentar la resolución del problema.

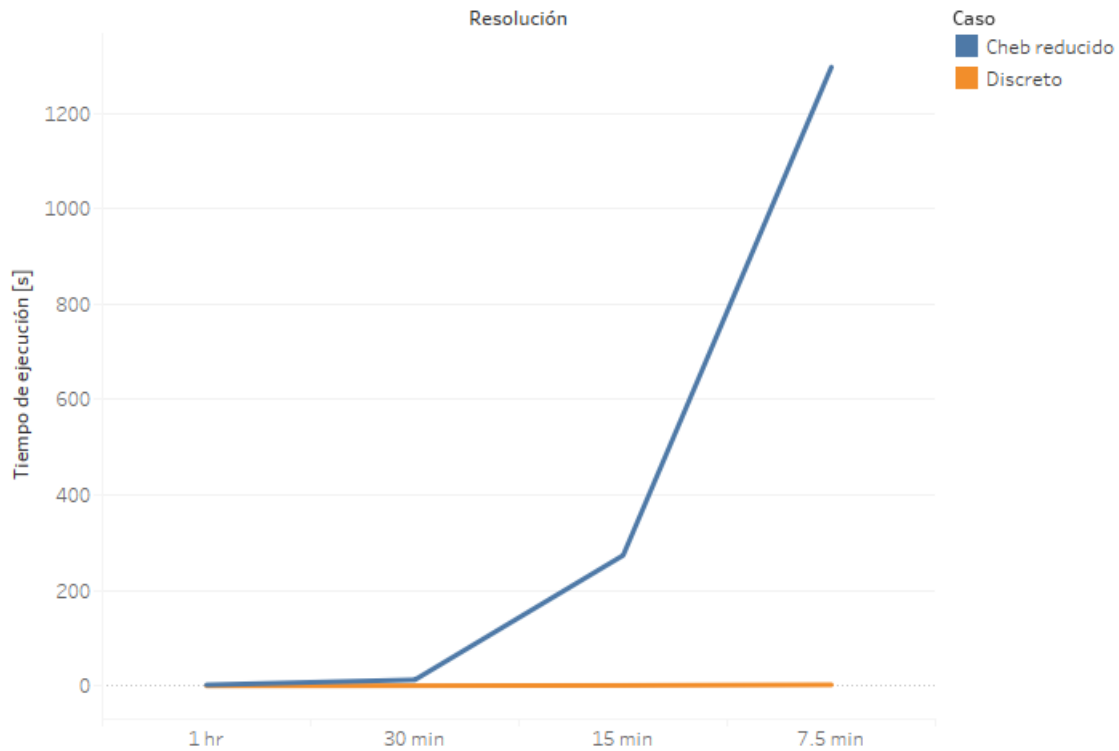


Figura 5.4: Tiempos de ejecución modelos al aumentar la resolución del problema.

Para problemas con poca resolución el tiempo de ejecución de ambos modelos es similar, pero al aumentar la resolución (el tamaño del problema), se observa que el tiempo de ejecución del modelo en Chebyshev aumenta de forma considerable.

Respecto a la calidad de la solución, en la figura 5.5 se ilustra la evolución del valor de la función objetivo en ambos modelos al aumentar la resolución del problema. Se puede observar que ambos modelos convergen hacia el mismo valor al aumentar la resolución temporal, que corresponde al costo de operación real en el periodo evaluado.

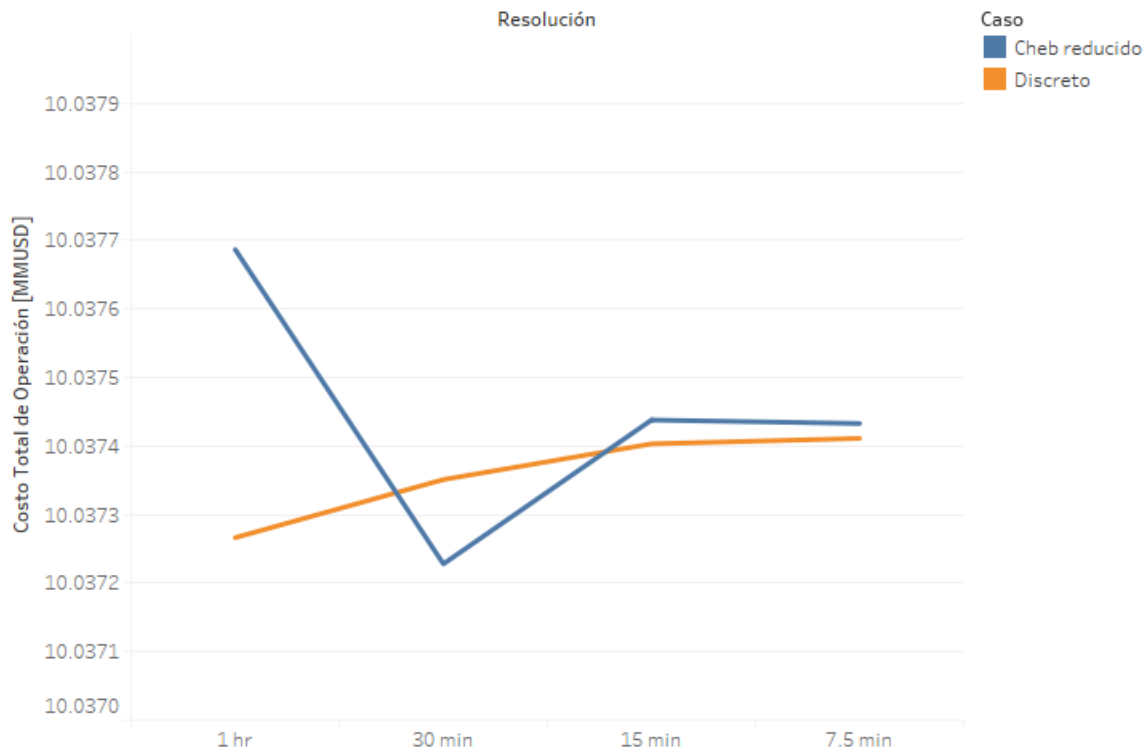


Figura 5.5: Costos totales de operación en ambos modelos al aumentar la resolución del problema.

La función objetivo en el caso discreto converge de forma aproximadamente lineal mientras que en el caso de la formulación en el dominio de Chebyshev, al aumentar la resolución temporal del modelo, la función objetivo oscila en torno al valor óptimo. Esto se puede deber a que los costos de operación en el caso de Chebyshev se evalúan en tiempo continuo, por lo que, es posible que al aproximar ciertas funciones se produzcan oscilaciones debidas a la forma de los datos y por lo tanto, afectar el valor de la función objetivo.

Al aumentar la resolución en el caso en el dominio de Chebyshev, se utiliza una mayor cantidad de coeficientes (y datos) para aproximar ciertas funciones, por lo que, se evitan las oscilaciones al aproximar la función. Es importante notar que, dada la naturaleza de ciertas funciones (poco suaves), es posible que las aproximaciones contengan una gran cantidad de oscilaciones, por lo que, es necesario evaluar la cantidad óptima de información y coeficientes necesarios para obtener una buena aproximación.

Capítulo 6

Aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación dinámica del sistema eléctrico.

En este capítulo se analiza la aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación de la respuesta en frecuencia del sistema eléctrico a través de la resolución de la ecuación de swing del generador incorporando el control primario y secundario de frecuencia. También se revisan algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales en el dominio de Chebyshev que son utilizados más adelante. Finalmente, se ilustran ejemplos y se discuten posibles aplicaciones.

6.1. Dinámica y control de sistemas eléctricos

La tarea general del control de frecuencia en un sistema eléctrico es mantener el balance entre la generación y la demanda en todo momento. Si este balance no se mantiene, puede llevar a desviaciones en la frecuencia que, si son grandes, pueden tener importantes impactos en la operación del sistema eléctrico [16].

Si la demanda varía, en primera instancia se compensa con la energía cinética almacenada las máquinas rotatorias, lo que genera un cambio en la frecuencia del sistema. Si este cambio es muy grande se deben modificar las consignas de los generadores, a esto se le denomina *control de frecuencia*. También es posible que se produzcan desbalances debido a la caída de algún generador o fallas, por lo que la tarea del control de frecuencia es mantener las variaciones de esta al mínimo.[18]

6.1.1. Ecuación de swing de las maquinas

La respuesta inercial del generador i se puede representar a través de la ecuación de swing de la maquina. En (6.1) se presenta la versión exacta de esta, donde T_e y T_m representan el torque eléctrico y mecánico respectivamente, ω_i el valor absoluto de la frecuencia angular, ω_0 la frecuencia nominal y H_i la constante de inercia del generador i .

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_0}{2H_i}(T_{mi}(pu) - T_{ei}(pu)) \quad (6.1)$$

Dado que generalmente importan las desviaciones de la frecuencia más que el valor absoluto, se puede aplicar $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_0$. Además para representar los torques en valores de potencia se puede aplicar la relación $P(pu) = T(pu)\frac{\omega}{\omega_0}$. Si se multiplica la potencia en pu por la potencia base S_{Bi} se obtiene (6.2).

$$\Delta\dot{\omega}_i = \frac{\omega_0^2}{2H_i\omega_i S_{Bi}}(P_{mi} - P_{ei}) \quad (6.2)$$

Definiendo las cantidades a continuación y sumando ambos lados de (6.2) para la totalidad de los generadores es posible obtener una representación no lineal de la dinamica del sistema (6.8).

$$\omega = \frac{\sum_i H_i \omega_i}{\sum_i H_i} \quad \text{frecuencia en el centro de inercia} \quad (6.3)$$

$$S_B = \sum_i S_{Bi} \quad \text{Potencia base} \quad (6.4)$$

$$H = \frac{\sum_i H_i S_{Bi}}{\sum_i S_{Bi}} \quad \text{Inercia total del sistema} \quad (6.5)$$

$$P_m = \sum_i P_{mi} \quad \text{Potencia mecánica total} \quad (6.6)$$

$$P_e = \sum_i P_{ei} \quad \text{Potencia eléctrica total} \quad (6.7)$$

$$\Delta\dot{\omega} = \frac{\omega_0^2}{2H\omega S_B}(P_m - P_e) \quad (6.8)$$

Finalmente, para el centro de inercia del sistema se puede asumir $\omega = \omega_0$. Además se puede reemplazar la frecuencia angular a través de $\omega = 2\pi f$, obteniendose una representación lineal de la respuesta inercial del sistema.

$$\Delta\dot{f} = \frac{f_0}{2HS_B}(\Delta P_m - \Delta P_e) \quad (6.9)$$

6.1.2. Respuesta dinámica

Además de la respuesta inercial derivada en (6.9) es posible modelar la respuesta dinámica del sistema incluyendo control primario y secundario de frecuencia, como se ilustra en 6.1 [16]

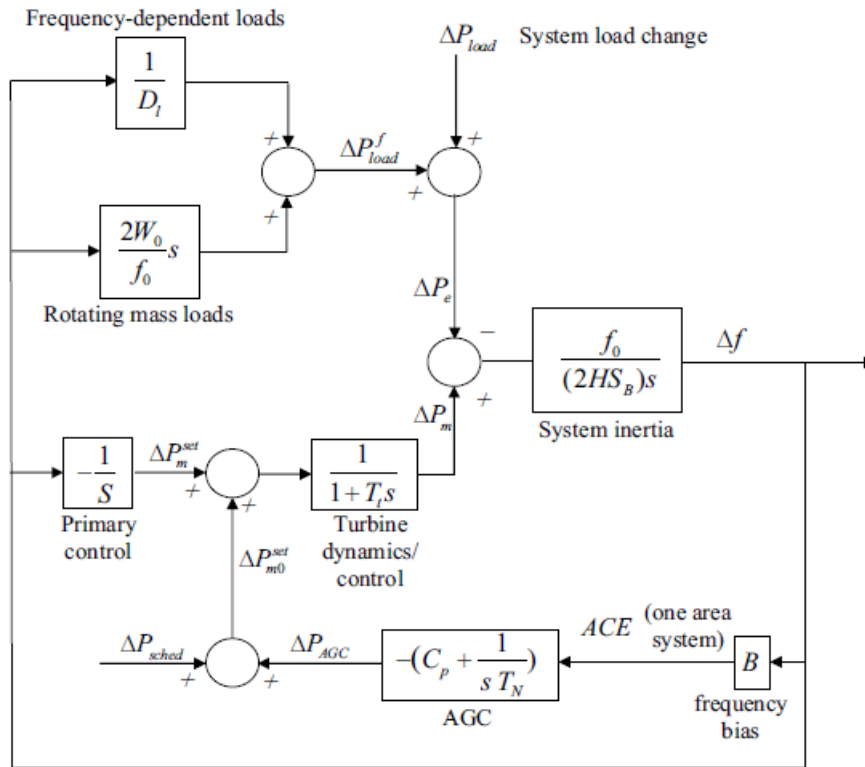


Figura 6.1: Modelo dinámico incluyendo control primario y secundario de frecuencia.

En este modelo también se incluye una representación de la dinámica de la turbina y de la respuesta en frecuencia de las cargas.

6.2. Metodos espectrales

En el capítulo 3 se mencionan algunas de las propiedades de los polinomios de Chebyshev. En esta sección se revisan algunos de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales denominados espectrales y pseudo-espectrales donde la principal diferencia recae en que los métodos espectrales operan en el espacio de los coeficientes $c = c_0, c_1, c_2, \dots$ de una función y , y en los métodos pseudo-espectrales o de colocación se trabaja en un dominio discretizado de y en una malla específica de puntos $x = x_1, x_2, \dots \in [-1, 1]$ [8].

6.2.1. Metodo Tau

Este método es de truncamiento donde la solución se da en el dominio espectral, es decir que lo que se calcula son los coeficientes de una función. Estos coeficientes deben ser luego evaluados en un dominio discretizado para obtener la solución.

La representación de las derivadas en este método se puede realizar a través de la matriz de derivación definida en (3.12) y las condiciones de borde se imponen mediante ecuaciones adicionales. Si son condiciones tipo Dirichlet se pueden representar como se observa en (6.10), donde \hat{u} es el vector de coeficientes de Chebyshev que aproxima u [19].

$$u(1) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \quad u(-1) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \hat{u}_k \quad (6.10)$$

Si las condiciones de borde son de tipo Neumann, se representan a través de (6.11).

$$u'(1) = - \sum_{k=1}^N k^2 \hat{u}_k \quad u'(-1) = - \sum_{k=1}^N (-1)^k k^2 \hat{u}_k \quad (6.11)$$

6.2.2. Metodos de colocación espectral

A diferencia del método anterior donde se busca una función solución, los métodos de colocación buscan plantear una solución en puntos específicos del dominio. Los puntos utilizados son los puntos extremos definidos en (3.4).

El tratamiento de las derivadas y condiciones de borde es similar al caso anterior, solo que en este caso es necesario representar las derivadas en los puntos extremos. Esto equivale a utilizar la matriz A de transformación definida en (3.8). Respecto a las condiciones de borde, si son de tipo Dirichlet, se colocan directamente sobre el nodo correspondiente. Si las condiciones de borde son de tipo Neumann, las filas de los extremos deben contener las ecuaciones correspondientes a la condición que se esta imponiendo.

6.3. Ejemplo Aplicación

Utilizando el método de Tau es posible representar la aproximación lineal de la respuesta inercial definida en (6.9) a través de la ecuación (6.12).

$$D \cdot \hat{f} = \frac{f_0}{2HS_B}(\hat{P}_m - \hat{P}_e) \quad (6.12)$$

Donde \hat{f} , \hat{P}_m , \hat{P}_e son vectores de los coeficientes de Chebyshev de Δf , ΔP_m , $\Delta P_e \in M_{N \times 1}$. Al ocupar esta representación se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas de tamaño $N \times N$.

Adicionalmente, se puede agregar como condición de borde que la desviación inicial de frecuencia sea nula agregando la siguiente fila a la matriz del sistema algebraico:

$$f(-1) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \hat{f}_k \quad (6.13)$$

En la figura 6.2 se ilustra la resolución de las ecuaciones (6.9) y (6.12) a través de *Simulink* y *Matlab* respectivamente, con $H = 10$ s, $f_0 = 50$ Hz, $S_B = 1000$ MW y $\Delta P_e = 100$ MW. Se puede observar que el error de aproximación al utilizar la modelación en Chebyshev es mínimo.

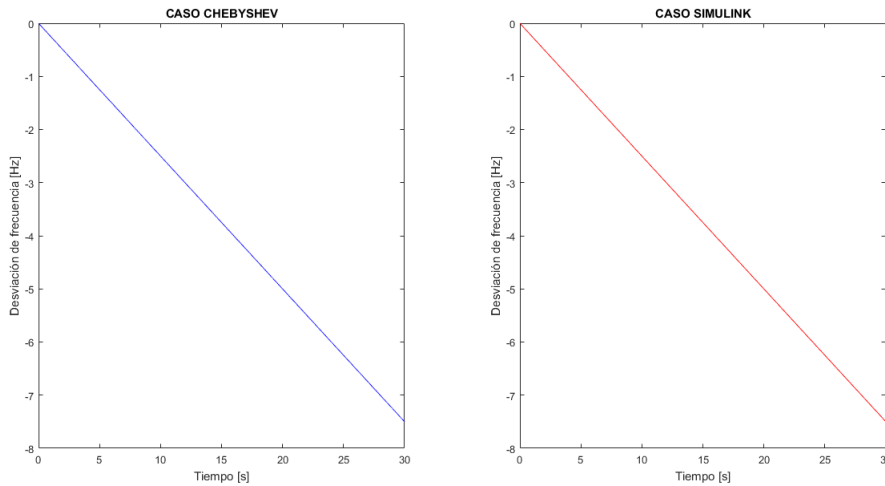


Figura 6.2: Simulación de la respuesta inercial del sistema

A la modelación anterior, es posible agregar los bloques de control primario y secundario del diagrama de bloques ilustrado en la figura 6.1. En la figura 6.3 se observa lo recién planteado donde se intenta emular la respuesta inercial del SING ante la caída de un generador de 268 [MW], donde H y S_B se representan a través de (6.5) y (6.4) respectivamente.

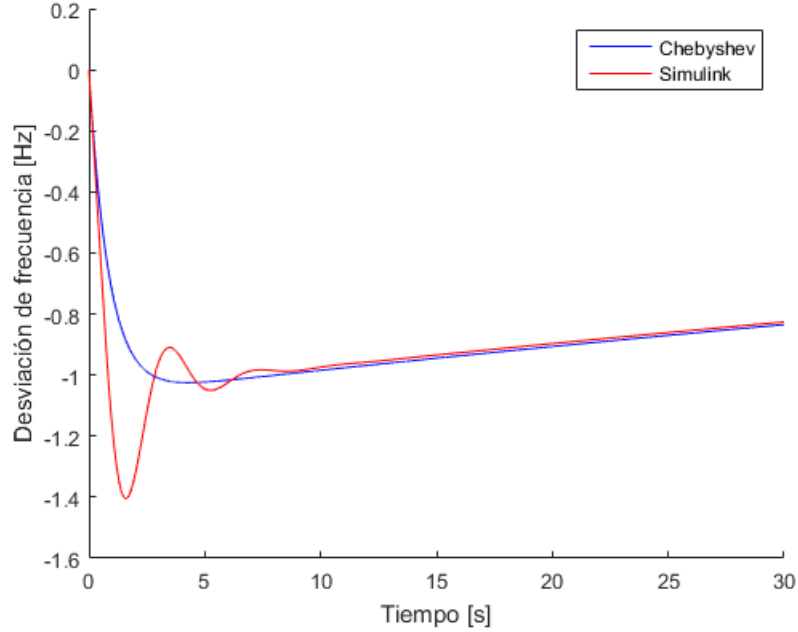


Figura 6.3: Simulación de la respuesta inercial del sistema incluyendo control primario y secundario

Las oscilaciones que se observan se deben a que en la representación en simulink se incluye un bloque de retraso en el lazo de control primario, ya que en la realidad los sistemas de control no actúan de forma instantánea y existe un periodo donde solo afecta la respuesta inercial que se le denomina *banda muerta* o *dead band* [20]. Esto es solo para ilustrar la aproximación en Chebyshev respecto a una representación más realista, si se omite el bloque de retraso en la modelación en simulink los resultados son similares. Se debe notar, que la modelación de retardos conlleva a no linealidades y que al modelar este tipo de fenómenos utilizando los polinomios de Chebyshev se obtienen sistemas de ecuaciones no lineales [19].

Se observa que la aproximación en Chebyshev logra capturar el comportamiento de la respuesta en frecuencia simulada, por lo que es posible capturar las variaciones respecto a ciertos parámetros. Por ejemplo una posible aplicación es aprovechar la representación en tiempo continuo del despacho utilizando los polinomios de Chebyshev para representar la variación de la inercia total del sistema durante un periodo de evaluación y obtener una representación en tiempo continuo de la respuesta inercial del sistema como se ilustra en 6.3 para un punto de operación.

También se puede evaluar la incorporación de restricciones en modelos de unit commitment que representen la respuesta del sistema ante la caída de un generador y limitar la frecuencia mínima a cierto valor.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusión

A través de la realización de este trabajo se da cuenta de la necesidad de incorporar distintas modelaciones en los problemas de despacho y predespacho que sean capaces de representar la dinámica de la demanda y la variabilidad de los recursos solar y eólico. Por esto es que se evalúa el desempeño del modelo propuesto utilizando los polinomios de Chebyshev respecto a los modelos convencionales.

De los resultados obtenidos se observa que al formular el problema en el dominio de Chebyshev se logra capturar el comportamiento del sistema en tiempo continuo y también se logra una disminución considerable de la cantidad de variables del problema de optimización sin incurrir en una pérdida significativa información al reducir la cantidad de coeficientes de cada función de generación de forma no equitativa.

Para el caso base que corresponde a un problema de optimización de 5712 variables no se observan diferencias significativas en los tiempos de ejecución pero sí en las características del problema de optimización, debido a que si bien es posible reducir la cantidad de variables utilizando la formulación en Chebyshev (en este caso a alrededor de un 18 %, que corresponde al escenario más favorable manteniendo el error de aproximación al mínimo), esto conlleva un aumento en la densidad de la matriz de restricciones.

Al aumentar la resolución del modelo discreto, en Chebyshev se aumenta en igual medida la cantidad de variables y restricciones del problema, pero la cantidad de elementos distintos de cero en la matriz de restricciones en el caso de Chebyshev aumenta alrededor de 4 veces la cantidad original, lo que implica un deterioro en el desempeño computacional al aumentar la resolución de los problemas. También se hace notar que para llegar a una densidad en la matriz de restricciones equivalente al caso discreto, es necesario representar las funciones utilizando solo un coeficiente, lo que no es viable dadas las variaciones de algunas funciones.

Por otro lado, también se obtuvieron resultados respecto al valor de los costos de operación de ambos modelos al aumentar la resolución temporal del problema. Se observó que ambos modelos convergen a un mismo valor, donde el modelo discreto converge de forma aproximadamente lineal y el modelo en Chebyshev presenta oscilaciones en torno al valor óptimo. Esto último se explica debido a las oscilaciones obtenidas al aproximar ciertas funciones utilizando los polinomios de Chebyshev, que pueden afectar el cálculo de costos de operación en tiempo continuo, por lo que, es necesario evaluar la cantidad de información y coeficientes a utilizar con el objetivo de obtener la mejor aproximación posible.

Finalmente, en el último capítulo se explora una aplicación de los polinomios de Chebyshev en la modelación de sistemas eléctricos. Donde se destaca que para modelar ciertos fenómenos que se representan a través de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde como la respuesta en frecuencia del sistema, en el dominio de Chebyshev es posible realizarlo mediante ecuaciones algebraicas. Lo que implica que es posible incorporar nuevas restricciones a los modelos de optimización con el objetivo de hacer más realista la representación del sistema.

7.2. Trabajo futuro

Se proponen como trabajo futuro los siguientes aspectos:

- Evaluar la mejora en el desempeño de los modelos en Chebyshev al tomar en cuenta el escalamiento de las variables.
- Evaluar la utilización de algoritmos de optimización dedicados a matrices densas debido a que la mayoría de los solvers utilizan algoritmos para matrices dispersas que almacenan solamente los elementos distintos de cero, esto provoca que si se utiliza una matriz muy densa el solver deberá utilizar una mayor cantidad de memoria lo que implica un empeoramiento en el desempeño computacional.
- Utilizar los conceptos ilustrados en el último capítulo para representar modelos conscientes de la respuesta dinámica del sistema ante contingencias.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Ministerio de Energía (2016). *Energía 2050*. Política Energética de Chile. [http : //www.energia2050.cl/wp - content/uploads/2016/07/Politica - Energetica - Nacional.pdf](http://www.energia2050.cl/wp-content/uploads/2016/07/Politica-Energetica-Nacional.pdf)
- [2] Comisión Nacional de Energía (2017). *Reporte Mensual ERNC*. Volumen 10, junio 2017. [https : //www.cne.cl/wp-content/uploads/2015/06/RMensual _ERNC _v201706.pdf](https://www.cne.cl/wp-content/uploads/2015/06/RMensual_ERNC_v201706.pdf)
- [3] Tielens, P. and Van Hertem, D. *Grid Inertia and Frequency Control in Power Systems with High Penetration of Renewables*. Young Researchers Symposium in Electrical Power Engineering edition:6 location:Delft, The Netherlands date:16-17 April 2012.
- [4] Carrion, M. and Arroyo, J. M. *A Computationally Efficient Mixed-Integer Linear Formulation for the Thermal Unit Commitment Problem*, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 21, no. 3. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), pp. 1371–1378, Aug-2006.
- [5] de Matos, V. L., Philpott, A. B. and Finardi, E. C. *Improving the Performance of Stochastic Dual Dynamic Programming*. January 6, 2015
- [6] Boyd, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. second ed. Dover Books On Mathematics. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2001.
- [7] Mason, J. C. and Handscomb, D. C. *Chebyshev Polynomials*. Boca Raton, Fla. Chapman & Hall/CRC, ©2003.
- [8] Trefethen, L. N. *Spectral Methods in Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [9] Cáceres, N. *Aplicaciones de la representación pseudo-espectral de chebyshev la modelación y operación de sistemas energéticos*. Santiago de Chile, enero 2015
- [10] Brokering, W., Palma, R. E. and Vargas , L. S. *Los Sistemas Eléctricos de Potencia*. Santiago, Chile: Pearson Educación, 2008.

- [11] Matus, M., Cáceres, N., Püschel-Lovengreen, S. and Moreno, R. *Chebyshev Based Continuous Time Power System.* de IEEE PES General Meeting, Denver, 2015.

- [12] Comisión Nacional de Energía (2017). *Fijación de precios de nudo de corto plazo*. Informe técnico definitivo, enero 2017.
- [13] Press, W. H. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2nd ed. Cambridge Cambridgeshire: Cambridge University Press, 1992.
- [14] Klotz, E. and Newman, A. M. *Practical Guidelines for Solving Difficult Linear Programs*. Surveys in Operations Research and Management Science, 18(1):1–17, 2013.
- [15] *FICOTM Xpress Optimization Suite. Xpress-Optimizer Reference manual*. Release 20.00, Last update 3 June 2009
- [16] Andersson, G. *Dynamics and Control of Electric Power Systems*. Lecture 227-0528-00, ITET ETH. February 2012.
- [17] Trif, D. *Matrix Based Operatorial Approach to Differential and Integral Problems*, Babes-Bolyai University of Cluj-Napoca. Romania, 2011
- [18] Larrea, R. *Análisis de la respuesta en frecuencia de sistemas de potencia con altos niveles de generación variable sin inercia*. Universidad de Chile. Santiago, 2015.
- [19] Mejía De Alba, M. F. *Estudio comparativo entre los métodos espectrales y la formulación Petrov-Galerkin para la solución numérica de problemas con convección dominante* TESIS para obtener el título de Magíster en Ingeniería - Ingeniería Mecánica, 2011.
- [20] Inzunza, A., Moreno, R., Bernales, A. and Rudnick, H. *CVaR Constrained Planning of Renewable Generation with Consideration of System Inertial Response, Reserve Services and Demand Participation*, Energy Economics (in press), 2016.

Capítulo 9

Anexos

9.1. Parámetros de entrada modelos

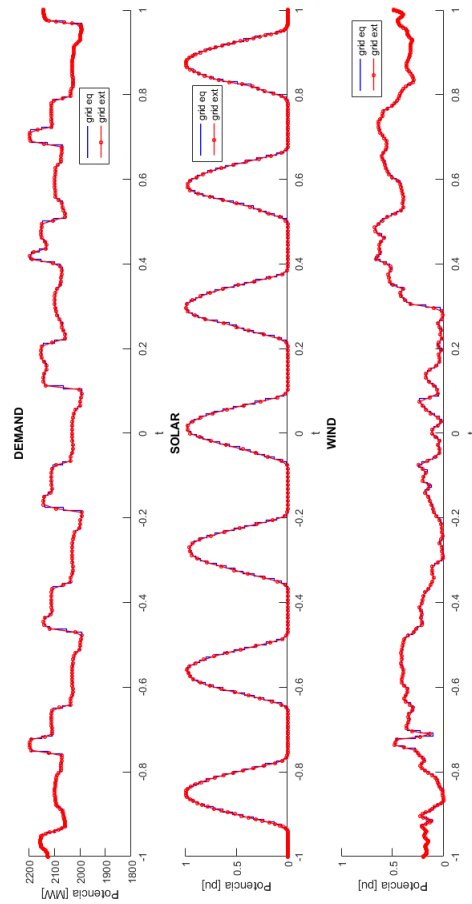


Figura 9.1: Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 30 min.

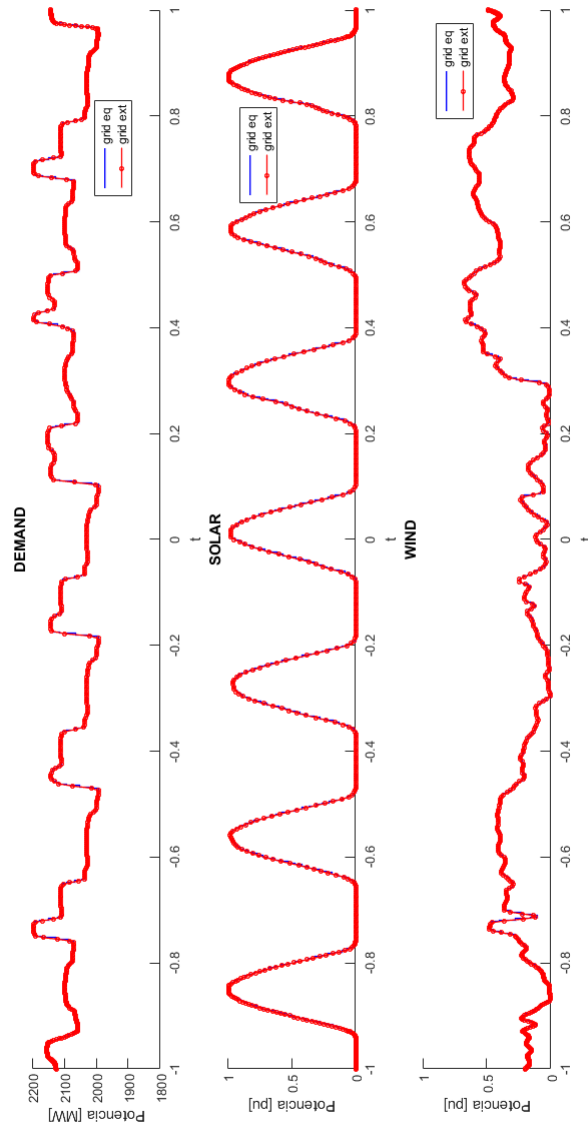


Figura 9.2: Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 15 min.

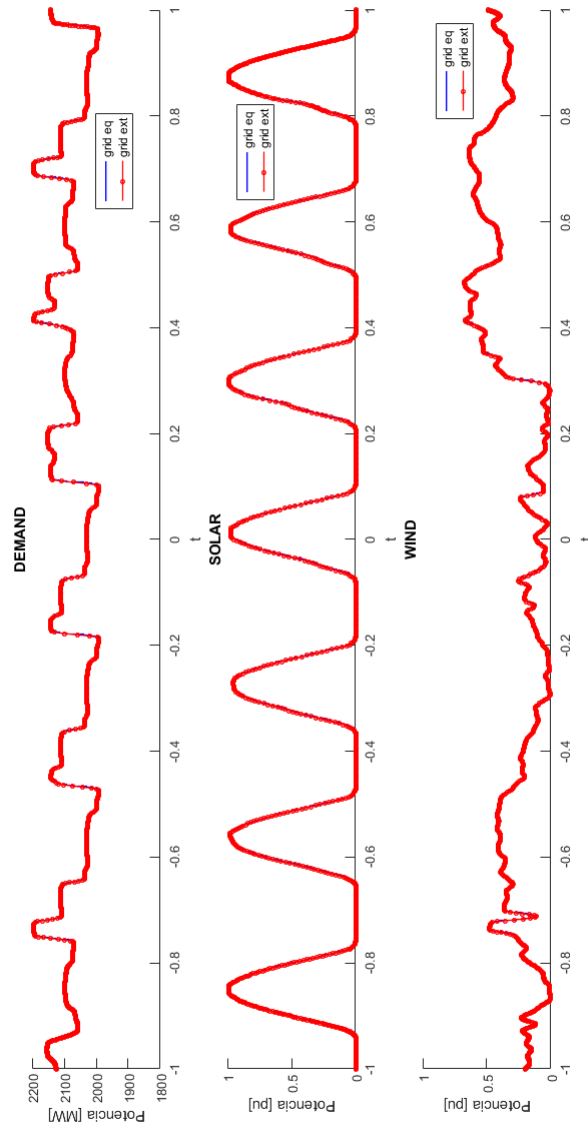


Figura 9.3: Perfil de demanda, solar y eólico en puntos equiespaciados y extremos con resolución de 7.5 min.

9.2. Resultados despacho

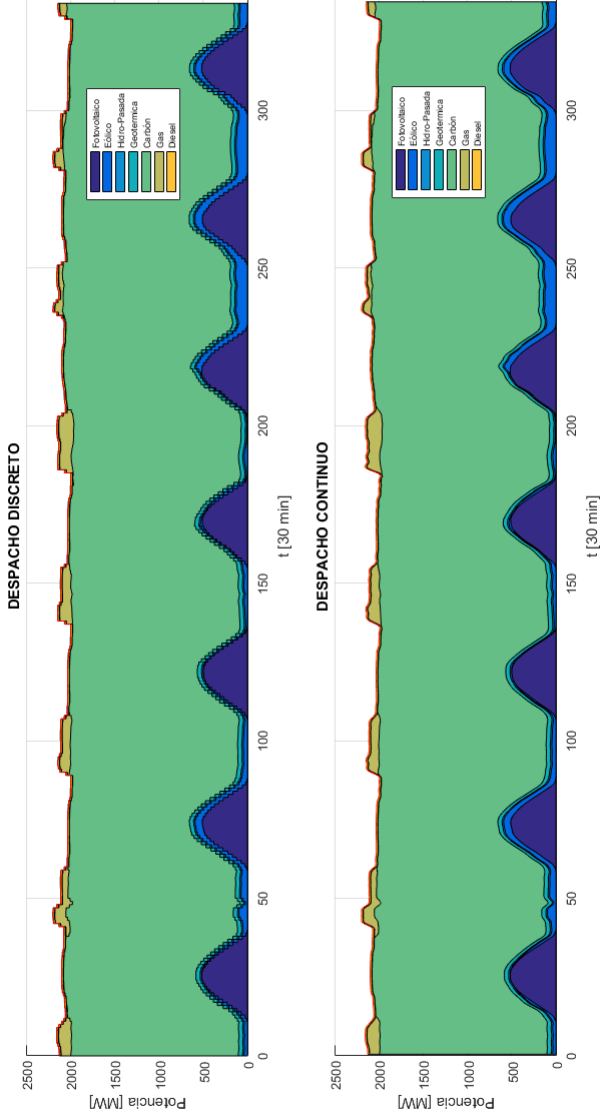


Figura 9.4: Despacho por tecnología caso resolución de 30 min (336 periodos).

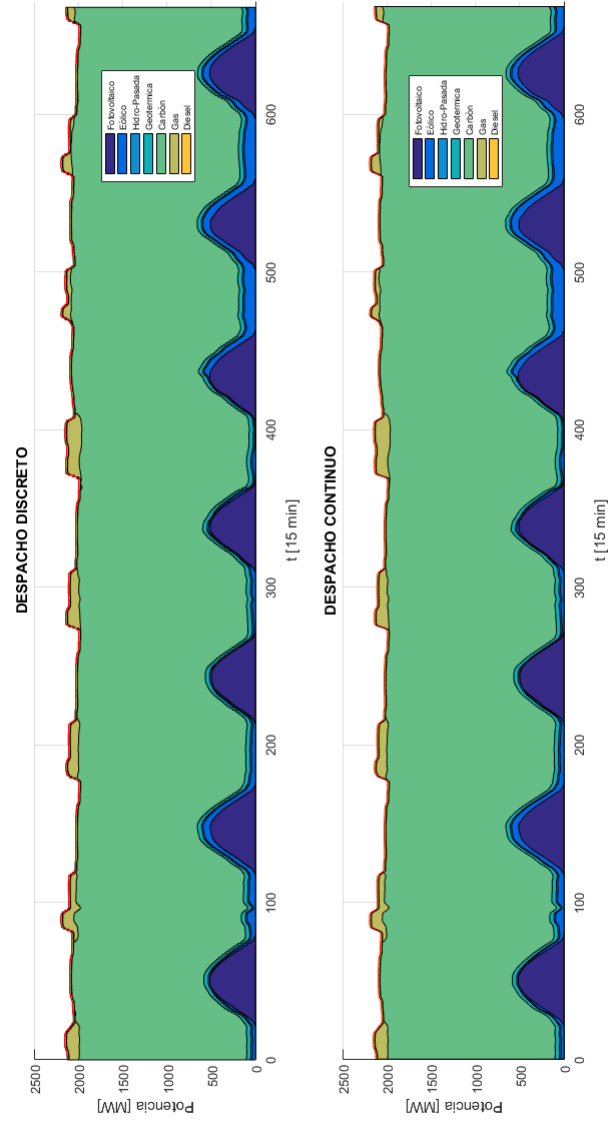


Figura 9.5: Despacho por tecnología caso resolución de 15 min (672 periodos).

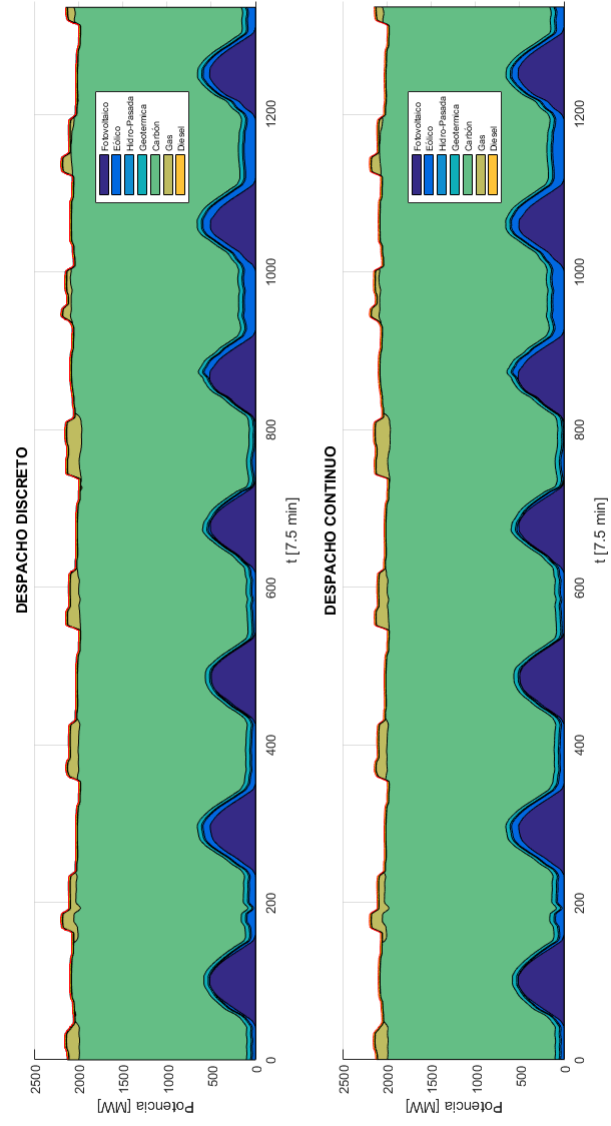


Figura 9.6: Despacho por tecnología caso resolución de 7.5 min (1344 periodos).