



# Control experimental de la propagación de luz en redes fotónicas

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con mención en Física  
Facultad de Ciencias

por

**Bastían Maximiliano Real Elgueda**

Agosto, 2017

Director de Tesis: **Dr. Rodrigo A. Vicencio Poblete**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Bastían Maximiliano Real Elgueda**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 8 de Agosto de 2017.

**Director de Tesis**

Dr. Rodrigo A. Vicencio Poblete

\_\_\_\_\_

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Aldo Delgado

\_\_\_\_\_

Dr. Nicolás Mujica

\_\_\_\_\_

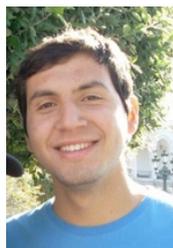
Dr. Marcel Clerc (Presidente)

\_\_\_\_\_

*“It doesn’t matter how beautiful your theory is, it doesn’t matter how smart you are. If it doesn’t agree with experiment, it’s wrong”.*

- Richard Feynman.

## BIOGRAFÍA



Nací en Santiago y he vivido toda mi vida en esta ciudad. Mi educación básica se llevó a cabo en el Liceo José Domingo Cañas de la comuna de Quilicura y mis estudios secundarios los realicé en el Liceo Manuel Barros Borgoño de la Comuna de Santiago. Mis principales intereses en la niñez y la educación básica fue el deporte, particularmente el fútbol y el tenis. Pese a esto, mis estudios básicos nunca se vieron mermados, principalmente por la preocupación de mis padres. Ya en mis estudios secundarios las matemáticas y las ciencias comenzaron a llamar mi atención y, más fuertemente, algunas subáreas de la física como la astronomía. En el año 2009 decidí comenzar la carrera de Licenciatura en Ciencias con mención en Física en la Facultad de Ciencias de la cual egresé el año 2013. Durante esta etapa nació mi gusto por la faceta experimental de esta ciencia natural, así como también, mi interés por los fenómenos físicos asociados a la luz. Estos dos hechos me impulsaron a formar parte del Grupo de Óptica de la Universidad de Chile. En el año 2014 trabajé como investigador asistente en un proyecto de investigación aplicada en los Laboratorios del Grupo de Óptica y, posteriormente en el año 2015, decidí ingresar al programa de Magíster en Ciencias con mención en Física de la Facultad de Ciencias, etapa que culmina con la presentación de esta tesis.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo agradecer fuertemente a mi familia, ya que sin su incansable apoyo y preocupación nada de esto hubiera sido posible. Le agradezco a Ignacia por su apoyo, comprensión y amor. También, deseo agradecer a los integrantes del Grupo de Óptica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile por todo lo entregado para hacer que esta tesis llegara a buen término. Especialmente al profesor Rodrigo Vicencio, por las oportunidades que me brindó para ser parte de su grupo de investigación y por entregarme las herramientas necesarias para comenzar mi desarrollo como científico. Finalmente, deseo agradecer a mis amistades por hacer de este camino uno más llevadero.

Mi permanencia en el plan de magíster fue posible gracias a la beca de Pedagogía de Laboratorio del Departamento de Física de la Universidad de Chile y a la Beca para estudiantes otorgada por el Nucleo Milenio de Óptica Avanzada RC-130001.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo teórico para la propagación de luz en redes fotónicas</b>	<b>6</b>
2.1. Ecuación de Helmholtz paraxial . . . . .	8
2.1.1. Espectro de bandas y <i>gaps</i> . . . . .	10
2.1.2. Efecto Fotorefractivo . . . . .	12
2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta . . . . .	19
2.2.1. No linealidad tipo Kerr . . . . .	22
2.2.2. Difracción discreta y propiedades lineales . . . . .	27
2.2.3. Soluciones no lineales estacionarias . . . . .	31
<b>3. Transporte en redes fotónicas inducidas ópticamente</b>	<b>34</b>
3.1. Técnica de inducción óptica . . . . .	35
3.2. Realización Experimental . . . . .	37
3.3. Propagación lineal de la excitación de una sola guía de ondas . . . . .	40
3.4. Propagación no lineal de la excitación de una sola guía de ondas . . . . .	46
<b>4. Excitación de estados de banda plana en redes fotónicas escritas</b>	<b>50</b>
4.1. Red fotónica de Lieb . . . . .	51
4.1.1. Robustez del modo anillo . . . . .	53
4.1.2. Experimentos . . . . .	56
4.2. Red fotónica de Stub . . . . .	61
4.2.1. Robustez del modo anillo . . . . .	64

	VI
4.2.2. Experimentos . . . . .	66
<b>5. Red fotónica de Lieb con no linealidad tipo Kerr</b>	<b>72</b>
5.1. Red fotónica de Lieb homogénea . . . . .	74
5.2. Red fotónica de Lieb binaria . . . . .	81
<b>6. Conclusiones</b>	<b>86</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>88</b>
A.1. Técnica de escritura de guías de ondas con láser de femtosegundos . .	88
A.2. Método iterativo de Newton-Raphson Multidimensional . . . . .	90
A.3. Análisis de estabilidad de soluciones no lineales . . . . .	93

## RESUMEN

En esta tesis se estudia, teórica y experimentalmente, la propagación de luz en distintas redes fotónicas. Experimentalmente se han implementado dos montajes; uno capaz de crear redes fotónicas mediante la técnica de inducción en un cristal fotorefractivo, y otro, capaz de crear patrones arbitrarios de luz para excitar redes fotónicas fabricadas con la técnica de escritura de láser de femtosegundos. Con estos montajes, hemos podido observar importantes fenómenos en el área de sistemas discretos y, también, hemos llevado a cabo la primera observación de estados localizados lineales pertenecientes a una banda plana en cualquier sistema físico. Por último, se ha estudiado teórica y numéricamente una red fotónica de Lieb con no linealidad tipo Kerr, para el caso de una red homogénea y una binaria.

## ABSTRACT

In this thesis we study, theoretically and numerically, light propagation throughout different photonic lattices. Experimentally, we have developed two setups, one of them is able to create photonic lattices by means of an induction technique using a photorefractive crystal, and the other one is able to generate arbitrary light patterns to study photonic lattices fabricated using the femtosecond laser writing technique. With these setups, we have been able to observe fundamental phenomena in discrete systems area, and we have also led to the first experimental observation of linear localized modes belonging to a flat band in any physical system. Finally, Lieb photonic lattice with Kerr nonlinearity has been studied theoretically and numerically for the homogeneous and binary lattice case.

# Capítulo 1

## Introducción

En el año 1960 en los laboratorios de investigación Hughes en Malibu California, se logró operar el primer dispositivo de amplificación de luz por emisión estimulada de radiación (LASER por sus siglas en Inglés). Esta invención fue el punto de partida para el desarrollo de diferentes dispositivos de generación de una luz coherente monocromática, que hoy en día utiliza distintos materiales en distintos estados de la materia. Además del natural perfeccionamiento que continua luego de una invención, esta llevó al nacimiento de diversas áreas de investigación en ciencias fundamentales, como también aplicaciones en medicina y desarrollo de diversas tecnologías.

Un año después de esta gran invención, se reportó el descubrimiento de la generación de segundo armónico (*second harmonic generation*) utilizando un cristal de cuarzo. A este cristal se le envió un haz enfocado proveniente de un láser de rubí a potencias que antes no eran posibles y se observó una onda transmitida de una longitud de onda igual a la mitad de la del haz del láser original [1]. Sin duda alguna este año marca un antes y un después en el campo de la Óptica, ya que se considera como el año del nacimiento de la Óptica no Lineal. A grandes rasgos, los fenómenos ópticos no lineales ocurren cuando la respuesta de un sistema material, bajo un campo óptico aplicado, depende de una manera no lineal de la intensidad de este campo óptico [2]. El entendimiento de estos fenómenos en distintos medios materiales, llevó en el año 1964 a la observación del auto-enfoque (*self-focusing*) de un haz en medios con no linealidad tipo Kerr generándose, con esto, una propagación sin deformación espacial

a través del medio [3]. Este fenómeno había sido predicho teóricamente unos años antes y corresponde a una solución de la ecuación de Schrödinger no lineal, la cual es llamada solitón [4]. Junto al desarrollo de esta disciplina y posterior observaciones de muchos otros importantes fenómenos no lineales, vino de la mano la creación de láseres más potentes. Esto ha permitido la precisa modificación de la estructura de ciertos materiales, lo que hoy en día permite, por ejemplo, fabricar redes fotónicas o arreglos de guías de ondas modificando ligeramente las propiedades del material.

Las redes fotónicas son arreglos periódicos de guías de ondas ópticas evanescentemente acopladas. Estas estructuras pueden ser creadas en medios dieléctricos no magnéticos, para los cuales la periodicidad es establecida por la constante dieléctrica o el índice de refracción del medio en cuestión. Las guías de ondas corresponden a las zonas de la periodicidad donde el índice de refracción es mayor y, por lo tanto, a los lugares donde la luz tiende a ser guiada. Por lo general, la periodicidad es establecida transversalmente a la dirección de propagación de la luz, mientras que, la dirección longitudinal puede o no tener periodicidad. Este hecho depende fuertemente de los fenómenos físicos que se quieran observar.

La propagación de la luz en estos sistemas tiene un comportamiento fundamentalmente diferente a la propagación de la luz en medios homogéneos (contínuos) [5,6]. La periodicidad que experimenta la luz es análoga a la situación que ocurre en un sólido cristalino, en los cuales los electrones interactúan con un potencial Coulombiano periódico. Como consecuencia, todas las características esenciales del movimiento de los electrones en un cristal, existen también en sistemas periódicos para la luz. A partir de un enfoque discreto, aproximación conocida como teoría acoplada de modos (o *tight-binding approximation* en Física del estado sólido [7]), se llega a la ecuación de Schrödinger no lineal discreta que describe bastante bien la fenomenología observada experimentalmente en redes fotónicas. Esta ecuación ha sido estudiada en diferentes contextos físicos, pero es en el campo de la Óptica donde ha encontrado un suelo fértil, debido a la extraordinaria posibilidad de observar directamente la función de onda. Debido a que la estructura matemática subyacente es la misma para electrones, BECs (condensados de Bose-Einstein) [8] y luz, se sugiere que la mayoría de

los resultados pueden ser aplicados a sistemas discretos en general. Por lo tanto, la demostración experimental de fenómenos discretos en redes fotónicas revela propiedades fundamentales de discretitud en general. Un ejemplo de esto último, es la primera observación experimental de la bien conocida localización de Anderson en una red fotónica desordenada bi-dimensional [9] y la observación de oscilaciones de Bloch en una red uni-dimensional [10].

También, la comunidad trabajando en Óptica discreta ha dedicado gran parte de sus esfuerzos en el estudio del control del flujo de la luz a través de estas estructuras fotónicas. Esto ha llevado a la búsqueda de distintas formas de localizar luz en pocas guías de ondas, lo que se ha alcanzado mediante la modificación de distintos grados de libertad que presentan estos sistemas; por ejemplo, la no linealidad, la inclusión de desorden y la presencia de defectos o impurezas. Para redes fotónicas no lineales se ha observado la existencia de soluciones localizadas llamadas solitones discretos, en una y dos dimensiones [11–15], que corresponden a estructuras localizadas, en casi una guía de la red, que se forman gracias a un balance entre la difracción natural del sistema y la no linealidad. Para una red fotónica a la cual se le ha adicionado cierto grado de desorden en la constante de propagación de las guías (desorden diagonal) o en los acoplamientos de estas (desorden no diagonal), se ha observado localización de Anderson [9, 16], fenómeno en el que la función de onda se localiza debido a múltiples interferencias destructivas. Para un arreglo de guías de ondas que presenta algún defecto o impureza, también se ha observado la localización de luz en la región del defecto ya que se modifica localmente el índice de refracción [17, 18]. Recientemente, se ha sugerido teóricamente y observado numéricamente la existencia de estructuras totalmente localizadas en arreglos de guías de ondas completamente periódicos, que surgen por propiedades geométricas de la red [19, 20]. La principal característica de estas redes es que poseen a lo menos una banda no dispersiva, o banda plana, en su espectro de frecuencias lineales, cuyos autoestados son completamente degenerados. Una superposición de estos autoestados forma estructuras localizadas en pocas guías de ondas, debido a la interferencia constructiva en estas guías e interferencia destructiva en las otras guías de la red. Estas entidades siguen siendo autoestados de la

banda plana y, por lo tanto, se conservan completamente a lo largo de su propagación a través de la red fotónica [20–22]. El estudio de las redes fotónicas que presentan bandas planas en su espectro de frecuencias constituye un objetivo central en esta tesis; además, a estas redes las llamaremos redes fotónicas no convencionales.

En el ámbito experimental se han desarrollado distintas técnicas para la fabricación de redes fotónicas o arreglos de guías de ondas. Estas técnicas incluyen arreglos de guía de ondas en semiconductores (AlGaAs), las que son altamente no lineales [11]; arreglo de guías de ondas en cristales de niobato de litio ( $\text{LiNbO}_3$ ), en los cuales la no linealidad tiene una respuesta lenta y crece con el tiempo de exposición [23]; redes fotónicas inducidas ópticamente en medios fotosensibles [12]; y redes fotónicas escritas con láser de femtosegundos en silica [24]. En particular, los medios fotosensibles o cristales fotorefractivos permiten la inducción óptica de diversas redes mediante la interferencia de ondas y un manejo de la no linealidad mediante la variación de un voltaje externo. Mientras que la técnica de escritura con láser de femtosegundos ofrece una gran versatilidad para construir redes fotónicas de geometrías arbitrarias y, además, los experimentos realizados en ellas muestran una gran concordancia con los modelos discretos utilizados para su descripción [24].

Esta tesis centra su estudio en la observación experimental de fenómenos físicos fundamentales en redes fotónicas. Para esto se han utilizado excitaciones arbitrarias de luz, que se han propagado en arreglos de guías de ondas fabricadas con la técnica de inducción óptica y con la técnica de escritura con láser de femtosegundos.

El capítulo 2 presenta el modelo que se aplica a sistemas periódicos para la luz. Este parte con las ecuaciones de Maxwell, que al considerar ciertas aproximaciones se reducen a la ecuación de Helmholtz paraxial. Se continua con la descripción del efecto fotorefractivo y una variación de la ecuación de Helmholtz paraxial en medios con este efecto. Posterior a esto, se establecen los principios de la teoría acoplada de modos, con los cuales se llega a la ecuación más importante de este capítulo, la ecuación de Schrödinger no lineal discreta. Para llegar a esta ecuación se consideran

una no linealidad tipo Kerr. Este capítulo termina mostrando las propiedades lineales y no lineales de esta ecuación.

El capítulo 3 presenta la implementación de la técnica de inducción óptica de redes fotónicas, las cuales son excitadas con una condición inicial de una sola guía de ondas. Estas excitaciones son propagadas en el régimen lineal, tanto en las redes 1D y 2D, y también en el régimen no lineal para redes 2D. Mostrando la observación de fenómenos fundamentales en sistemas discretos.

En el capítulo 4 se muestra la implementación de un sistema experimental capaz de crear patrones arbitrarios de luz, en amplitud y fase, que son utilizados como condiciones de excitación en redes fotónicas no convencionales fabricadas con la técnica de escritura con láser de femtosegundos. En particular, se muestra la excitación de los estados de banda plana para una red fotónica de Lieb y de Stub. Además de esto, se propone la implementación de operaciones lógicas totalmente ópticas utilizando superposiciones de estados de banda plana perteneciente a la red de Stub.

Un estudio numérico de la red fotónica de Lieb es presentada en el capítulo 5. En este se analizan distintas familias de soluciones no lineales, mostrando sus respectivas regiones de existencia y estabilidad. En particular, se muestra que los estados perteneciente a la banda plana siguen siendo estados no lineales del sistema y, además, se discute la movilidad de esta solución a través de la red. Finalmente, se estudia si es posible inducir movilidad en una red de Lieb binaria no lineal.

## Capítulo 2

# Modelo teórico para la propagación de luz en redes fotónicas

Este capítulo define el marco teórico en el cual se basarán los experimentos y los estudios numéricos mostrados en los próximos capítulos. Se presenta la ecuación de uno de los principales modelos que describe a los sistemas discretos no lineales, la ecuación de Schrödinger no lineal discreta. Nuestro análisis del comportamiento de la luz en estos sistemas, tiene como punto de partida las ecuaciones de Maxwell en medios dieléctricos no magnéticos.

Comenzaremos el estudio de la propagación de ondas en un medio material arbitrario con las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}. \quad (2.4)$$

Donde  $\vec{D}$  corresponde al vector desplazamiento eléctrico, que se relaciona con el vector campo eléctrico  $\vec{E}$  mediante la relación,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.5)$$

donde  $\vec{P}$  es la densidad de polarización inducida en el material y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. En materiales no magnéticos, se cumple que el vector campo magnético  $\vec{B}$  se relaciona con el vector de magnetización  $\vec{H}$  de la forma,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (2.6)$$

donde  $\mu_0$  corresponde a la permeabilidad magnética del vacío. Como en el desarrollo de esta tesis estudiaremos materiales sin conductividad eléctrica, además de que sean no magnéticos, tendremos que  $\rho = 0$  y  $\vec{J} = 0$ . Por lo tanto, si aplicamos el rotor a la ecuación (2.3) y consideramos las ecuaciones (2.4)-(2.6) se llega a la ecuación de ondas general

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2},$$

donde se ha definido la velocidad de la luz en el vacío como  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Si considerando la identidad vectorial  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ , donde el término  $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$  es pequeño para la mayoría de los caso de interés [2], se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

En general, la respuesta de un medio material en presencia de un campo eléctrico viene determinada por la densidad de polarización inducida  $\vec{P}$ . Entonces, en un medio dieléctrico con respuesta local e instantánea se tiene [25],

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \right),$$

donde  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$ , ... son el tensor susceptibilidad lineal, no lineal de segundo orden (o cuadrática), no lineal de tercer orden (o cúbica), ... respectivamente. Las componentes de estos tensores en materiales donde no hay presencia de pérdidas y ganancias son cantidades reales, mientras que, en el caso contrario son complejas. Además, su forma está restringida por las propiedades de simetría del medio material (u óptico). Por ejemplo, para materiales centrosimétricos (con simetría de inversión)

el tensor no lineal de segundo orden  $\chi^{(2)}$  tiene todas sus componentes nulas. Es importante destacar, también, que la incapacidad de despreciar a los tensores de susceptibilidad no lineal da origen a interesantes fenómenos [2]. Por ejemplo, el término  $\chi^{(2)}$  es el responsable de la generación de frecuencia suma y resta (*sum-frequency generation* y *difference-frequency generation*), como también de la generación de segunda armónica (*second harmonic generation*). Mientras que,  $\chi^{(3)}$  es el responsable de la generación de tercera armónica (*third harmonic generation*) y el auto-enfoque (*self-focusing*).

Ya con una expresión clara para la polarización inducida, es posible reescribir la ecuación (2.7) como

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \chi^{(1)} + \chi^{(2)} |\vec{E}| + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 + \dots \right) \vec{E},$$

obteniendo,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (1 + \chi^{(1)} + \chi_{nl}) \vec{E} = 0,$$

donde  $\chi_{nl}(I \equiv |E|^2) = \chi^{(2)} |\vec{E}| + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 + \dots$ . Usando esta relación, la constante dieléctrica se define como  $\epsilon = 1 + \chi^{(1)} + \chi_{nl}$ , llegando a la ecuación de ondas para un medio dieléctrico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.8)$$

Esta ecuación de ondas describe completamente cualquier fenómeno existente en medios dieléctricos; sin embargo, en el área de la óptica se suelen utilizar versiones aproximadas de esta ecuación, lo que describiremos en la siguiente sección.

## 2.1. Ecuación de Helmholtz paraxial

A partir de la constante dieléctrica, se define una de las cantidades de mayor relevancia en el estudio del comportamiento de la luz en distintos contextos, este es el índice de refracción “ $n$ ”:

$$n^2 \equiv \epsilon = [n_l + n_{nl}(I)]^2.$$

Adicionalmente, aquí se ha separado este índice en su parte lineal  $n_l$ , y en su parte no lineal  $n_{nl}(I)$ , que tiene dependencia de la intensidad del campo eléctrico. Considerando  $n_l = n_0 + \Delta n(\vec{r})$ , donde  $n_0$  es el índice de refracción nominal del medio y  $\Delta n(\vec{r})$  es la modificación espacial periódica del índice de refracción, tendremos que

$$n^2 \approx n_0^2 + 2n_0\Delta n(\vec{r}) + 2n_0n_{nl}(I),$$

donde se han despreciado los términos de orden mayor a 2, ya que típicamente  $\Delta n \approx 10^{-4}$  y  $n_{nl}(I) \approx 10^{-8} \text{ m}^2\text{W}^{-1}$  [26].

Por otro lado, si consideramos una onda electromagnética propagándose en un medio en la dirección  $\hat{z}$  y polarizada linealmente en una de las direcciones transversales, una solución general de la ecuación (2.8) puede ser escrita como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}\hat{x},$$

donde  $\Psi(\vec{r})$  es la envolvente del campo eléctrico y  $\beta_0 \equiv k_0 n_0 = 2\pi n_0/\lambda$  es la constante de propagación en términos de la longitud de onda  $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ . Reemplazando en la ecuación (2.8) se obtiene,

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} - \beta_0^2 \right] \Psi(\vec{r}) + \frac{n^2 \omega_0^2}{c^2} \Psi(\vec{r}) = 0,$$

con  $\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Si consideramos que la envolvente del campo varía lentamente en la coordenada de propagación  $\hat{z}$ , es decir

$$\left| \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2i\beta_0 \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial z} \right|,$$

y, además, consideramos la aproximación realizada para el índice de refracción en el medio, se llega a

$$i\lambda \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial z} = - \left[ \frac{\lambda^2}{2n_0} \nabla_{\perp}^2 + \Delta n(\vec{r}) + n_{nl} \right] \Psi(\vec{r}). \quad (2.9)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Helmholtz paraxial o ecuación de Schrödinger no lineal, en la cual se ha introducido la constante  $\lambda \equiv \lambda/2\pi$ . Es importante notar que, esta ecuación muestra una fuerte analogía formal con la descripción

de ondas de materia (*matter waves*) en redes ópticas. Escogiendo  $n_{nl} = \pm |\Psi(\vec{r})|^2$  (no linealidad tipo Kerr) y substituyendo  $z \rightarrow t$ ,  $-\Delta n(\vec{r}) \rightarrow V(\vec{r})$  y  $\lambda \rightarrow \hbar$ , donde  $V(\vec{r})$  es cierto potencial, se transforma en la ecuación de Gross-Pitaevskii describiendo a un condensado de Bose-Einstein en una red óptica de dos dimensiones [8]. Además, la versión lineal de la ecuación (2.9) (es decir,  $n_{nl} = 0$ ) con la misma substitución anterior, es la ecuación para electrones sometidos a un potencial periódico en física del estado sólido [7].

### 2.1.1. Espectro de bandas y *gaps*

Para entender la propagación lineal de ondas en estructuras transversalmente periódicas, consideraremos una modulación del índice de refracción en una dimensión estática, por lo que  $\Delta n(\vec{r}) = \Delta n(x)$ . Insertando el *ansatz*  $\Psi(\vec{r}) = \bar{\Psi}(x, k_x)e^{i(k_x x - \beta z)}$  en la versión lineal de la ecuación (2.9), esta se transforma en un problema de autovalores

$$\left[ \frac{\lambda^2}{2n_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} + k_x \right)^2 - \Delta n(x) \right] \bar{\Psi}(x, k_x) = \lambda \beta(k_x) \bar{\Psi}(x, k_x), \quad (2.10)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación. En un medio homogéneo (o contínuo), esto es  $\Delta n(x) = 0$ , los autoestados o soluciones del sistema son ondas planas y se obtiene la relación de dispersión  $\beta = -k_x^2/2$ . Esta relación parabólica es gráfícada en la figura 2.1(a). Por otro lado, en presencia de una modulación periódica, la relación de dispersión se modifica fuertemente debido a múltiples reflexiones de Bragg (*Bragg-reflections*). Como resultado, esta curva de dispersión  $\beta(k_x)$  es dividida en bandas de transmisión separadas por zonas prohibidas (*forbidden gaps*) de tamaño finito. En este caso las soluciones de la versión lineal de la ecuación (2.9) están dadas por las bien conocidas ondas de Floquet-Bloch:

$$\Psi_m(\vec{r}) = \bar{\Psi}_m(x, k_x)e^{ik_x x},$$

donde las funciones  $\bar{\Psi}_m(x, k_x)$  tienen la periodicidad de la red y el índice  $m = 1, 2, 3, \dots$  denota el número de banda. La figura 2.1(b) muestra la relación de dispersión resultante para una modulación  $\Delta n(x) = V_0 \cos^2(\pi x/d)$  con profundidad

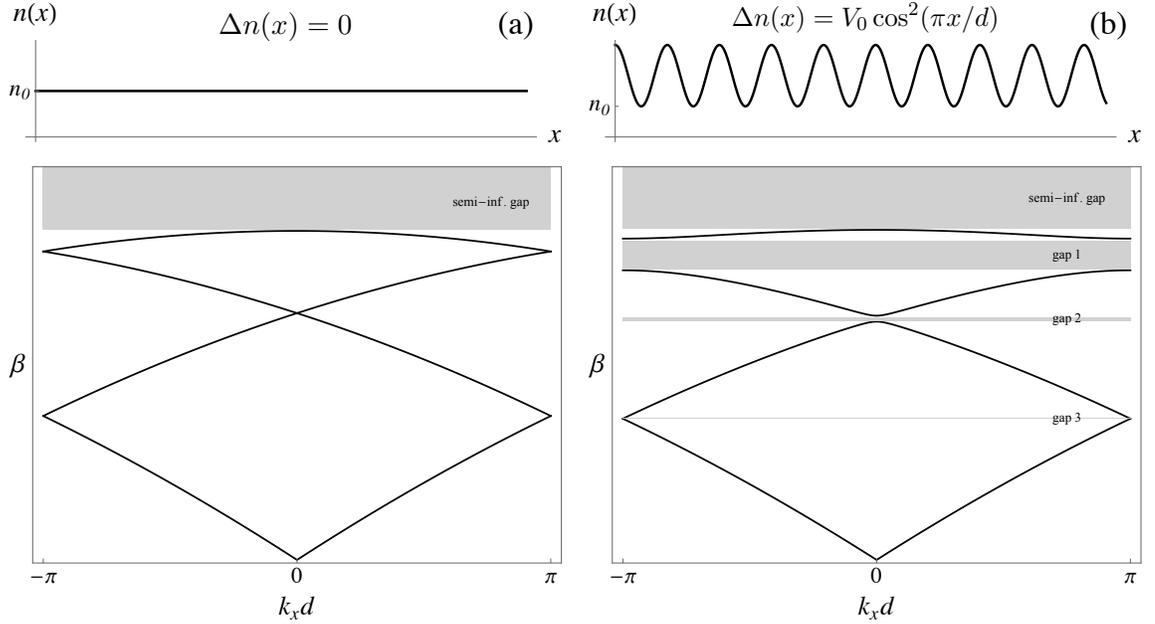


Figura 2.1: Relación de dispersión o estructura de bandas para un sistema unidimensional. (a) Cuando no existe periodicidad,  $\Delta n(x) = 0$ . (b) Cuando el sistema presenta una periodicidad de la forma  $\Delta n(x) = V_0 \cos^2(\pi x/d)$ .

efectiva  $V_0$  y constante de red  $d$ . En general, la relación de dispersión muestra invarianza translacional  $k_x \rightarrow k_x + 2\pi/d$ . Consecuentemente, está totalmente definida por sus valores en la primera zona de Brillouin,  $k_x \in [-\pi/d, \pi/d]$ .

La estructura de bandas (relación de dispersión)  $\beta(k_\perp)$  describe totalmente la propagación lineal de luz a través de una estructura fotónica determinada. Cada punto a lo largo de la curva de dispersión pertenece a un onda de Floquet-Bloch extendida con su constante de propagación propia y dirección de propagación definida por la normal de la curva de dispersión en un punto particular. Cualquier onda o paquete de ondas propagándose en la red es descompuesta en estas ondas de Floquet-Bloch adquiriendo diferentes fases. Esta acumulación de diferentes fases durante la propagación afecta el frente de ondas y como resultado la salida puede diferir considerablemente del frente de ondas incidente.

### 2.1.2. Efecto Fotorefractivo

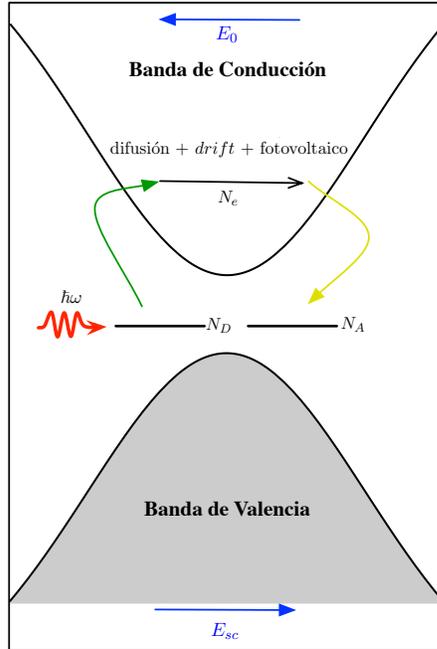


Figura 2.2: Esquema del transporte de portadores de carga en cristales fotorefractivos.  $N_D$  se refiere a la densidad de donadores,  $N_A$  a la densidad de aceptadores y  $N_e$  a la densidad de electrones conductores.

Ya estudiado el comportamiento lineal de la propagación de luz en un medio con una variación periódica del índice de refracción, surge la necesidad de entender la propagación de ondas, primero en un medio no lineal, para posterior incluir la periodicidad. Existen distintos tipos de no linealidad, pero en esta sección nos centraremos en entender la modificación del índice de refracción que produce la luz en un medio fotorefractivo.

El efecto fotorefractivo es conocido por ocurrir en materiales electro-ópticos fotoconductorivos y describe el cambio en el índice de refracción local en estos medios como resultado de una redistribución de portadores de carga debido a una inducción óptica. Este efecto es bastante diferente de la mayoría de los otros efectos ópticos no lineales y no puede ser entendido por algún orden superior de la susceptibilidad [2]. La razón para este comportamiento es que, dentro de un ancho rango de parámetros, el

cambio en el índice de refracción en estado estable es independiente de la intensidad de la luz que induce el cambio.

Hoy en día, es ampliamente aceptado que el modelo sugerido por N. V. Kukhta-*rev et al.* [27] puede describir la física del efecto fotorefractivo. Este modelo asume que un material fotorefractivo contiene impurezas como donadores y aceptadores, cuya energía está entre la banda de valencia y la de conducción. Cuando un haz de luz coherente ilumina el cristal, fotoexcita portadores desde los centros de donadores a la banda de conducción, los cuales pueden moverse bajo la influencia de difusión térmica, *drift* (producido por un campo eléctrico externo aplicado) o por efecto fotovoltaico. Los portadores pueden recombinarse con aceptadores generando un campo eléctrico estático de carga espacial (*space-charge field*) que modula el índice de refracción vía el efecto electro-óptico lineal o efecto Pockels. La figura 2.2 muestra un esquema de este modelo.

### Efecto Pockels

En cristales electro-ópticos, la presencia de un campo eléctrico estático lleva a una modificación de la permitividad dieléctrica o, equivalentemente, a un cambio en los índices del elipsoide óptico (*optical indicatrix*) [2]. En cristales fotorefractivos, este cambio depende linealmente de la intensidad del campo inducido y por lo tanto descrito por el efecto electro-óptico lineal (efecto Pockels). Una descripción matemática<sup>1</sup> de este efecto es tradicionalmente dada como un cambio en el tensor de impermeabilidad  $\eta$ , que corresponde al inverso del tensor de permitividad dieléctrica,

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \sum_k r_{ijk} E_k, \quad (2.11)$$

donde  $r_{ijk}$  es el tensor que describe el efecto electro-óptico lineal y  $E_k$  representa la componente  $k$ -ésima del campo eléctrico total  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{sc}$ , que corresponde a la suma del campo externo aplicado  $\vec{E}_0$  y el campo de carga espacial  $\vec{E}_{sc}$  generado dentro del cristal. Ya que el tensor  $\epsilon_{ij}$  es real y simétrico, su inversa  $\eta_{ij}$  debe también

---

<sup>1</sup>La descripción matemática completa puede ser encontrada en Ref. [2]

ser real y simétrica, consecuentemente el tensor electro-óptico  $r_{ijk}$  debe ser simétrico en sus primeros dos índices. Utilizando la siguiente notación contraída

$$h = \begin{cases} 1 & \text{para } ij = 11, \\ 2 & \text{para } ij = 22, \\ 3 & \text{para } ij = 44, \\ 4 & \text{para } ij = 23 \text{ o } 32, \\ 5 & \text{para } ij = 13 \text{ o } 31, \\ 6 & \text{para } ij = 12 \text{ o } 21. \end{cases}$$

las modificación de las constantes ópticas queda

$$\Delta \left( \frac{1}{n^2} \right)_h = \sum_k r_{hk} E_k. \quad (2.12)$$

A lo largo de esta tesis, los experimentos correspondientes a la técnica de inducción (Capítulo 3) serán llevados a cabo con un cristal de Estroncio Bario Niobato (SBN) el cual pertenece al grupo puntual de simetría  $4mm$ . En notación contraída el coeficiente electro-óptico para esta clase particular de simetría está dado por<sup>2</sup>

$$r_{SBN} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Los cristales SBN son altamente anisotrópicos, cumpliéndose la relación  $r_{33} \gg r_{13}, r_{42}$ <sup>3</sup>. Por este hecho, el eje asociado al coeficiente  $r_{33}$  es denominado como eje extraordinario del cristal o eje-c (*c-axis*). También, esta anisotropía permite describir los cambios de la permitividad dieléctrica a partir de un coeficiente electro-óptico efectivo,  $r_{eff} \equiv r_{33}$ . Por lo tanto, si la luz incidente está extraordinariamente polarizada el cambio efectivo del índice de refracción es determinado por:

$$n_{nl} = -\frac{1}{2} r_{eff} n_e^3 \vec{E} \cdot \vec{e}_c, \quad (2.14)$$

<sup>2</sup>Aquí se ha asumido que el eje extraordinario del cristal (*c-axis*) es orientado a lo largo de la dirección  $\hat{z}$  (3) del sistema de coordenadas elegido y el campo total es paralelo a esta dirección.

<sup>3</sup>Por ejemplo, para un cristal SBN:75 el coeficiente  $r_{33}$  es 20 veces mayor que el coeficiente  $r_{13}$  [13].

donde  $n_e$  es el índice de refracción nominal en el eje extraordinario, y  $\vec{e}_c$  es el vector unitario a lo largo del eje  $c$ . Cabe destacar que para un haz de luz ordinariamente polarizado el cambio del índice de refracción es determinado por esta misma expresión, pero con la sustitución  $n_e \leftrightarrow n_0$  y  $r_{eff} \leftrightarrow r_{13}$  en la coordenada ordinaria.

### Modelo de Kukhtarev

Este modelo supone que el efecto fotorefractivo es debido solamente a un tipo de portadores de cargas, los cuales por definición serán los electrones. Los materiales fotorefractivos contienen impurezas donadoras con densidad  $N_D$ , de las cuales  $N_D^+$  están ionizadas. La densidad de átomos aceptadores es  $N_A$ . Ya que sólo los electrones son considerados como portadores de cargas móviles y los donadores ionizados o átomos aceptadores son asumidos constantes, la generación de electrones corresponde a la tasa de la densidad de donadores ionizados

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \hat{s}(I + I_d)(N_D - N_D^+) - \gamma_R N_e N_D^+, \quad (2.15)$$

donde  $N_e$  es la densidad de electrones en la banda de conducción,  $\gamma_R$  es la tasa de recombinación de portadores de carga,  $\hat{s}$  es la sección transversal de foto-ionización,  $I$  es la intensidad óptica del haz e  $I_d$  es la llamada intensidad de fondo que explica de manera fenomenológica la tasa de electrones generados termalmente. En materiales de nuestro interés, como los cristales SBN, los electrones en la banda de conducción están influenciados principalmente por dos procesos de transporte diferentes: *drift* y difusión térmica<sup>4</sup>. Por lo tanto, la densidad de corriente está dada por

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{J}_{drift} + \vec{J}_{dif}, \\ &= e\mu N_e \vec{E} + eD\nabla N_e. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En esta ecuación,  $D \equiv \mu k_B T / e$  es la constante de difusión térmica que contiene la constante de Boltzmann  $k_B$ , la temperatura absoluta  $T$ , la carga elemental  $e$  y la movilidad del electrón  $\mu$ . El primer término en (2.16) describe el transporte que

---

<sup>4</sup>En cristales SBN la contribución del efecto fotovoltaico es despreciable [2].

resulta de la presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ , mientras que el segundo término considera los efectos difusivos termales.

Asumiendo que todos los aceptadores  $N_A$  están ionizados, la densidad de carga espacial puede ser escrita como

$$\rho = e (N_D^+ - N_A - N_e) ,$$

y la ley de Gauss para esta situación es

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = e (N_D^+ - N_A - N_e) . \quad (2.17)$$

Como sólo los electrones son los portadores de cargas móviles, la ecuación de continuidad queda

$$\frac{\partial}{\partial t} (N_D^+ - N_e) + \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{J} = 0 . \quad (2.18)$$

Este conjunto de ecuaciones describen completamente el efecto fotorefractivo. Para obtener una expresión simple del campo de carga espacial inducido consideraremos la aproximación isotrópica [28], la cual asume

$$N_D, N_A \gg N_e ; N_D^+ \gg N_e .$$

Si, además, asumimos que el campo  $E_{sc}$  solo tiene componentes en una de las direcciones espaciales, sea la dirección  $\hat{y}$ . Para este caso, a partir de la ecuación (2.17) se obtiene

$$N_D^+ \approx N_A \left( 1 + \frac{\epsilon}{e N_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial y} \right) , \quad (2.19)$$

Adicionalmente, en condiciones estacionarias (*steady-state*) de la ecuación (2.15) se tiene

$$N_e = \frac{\hat{s}(N_D - N_A)}{\gamma_R N_A} (I + I_d) \left( 1 + \frac{\epsilon}{e N_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial y} \right)^{-1} . \quad (2.20)$$

Asumiendo que la intensidad del haz tiende asintóticamente a un valor constante en los bordes del cristal, esto es  $I(y \rightarrow \pm w, z) \equiv I_w$  ( $2w$  es el ancho del cristal). En estas regiones de iluminación constante se requiere que el campo de carga espacial también sea independiente de  $y$ , así  $E_{sc}(y \rightarrow w, z) = E_0$ . Por lo tanto, la densidad de electrones libres en estas regiones será

$$N_{e,w} = \frac{\hat{s}(N_D - N_A)}{\gamma_R N_A} (I_w + I_d). \quad (2.21)$$

Por otro lado, en estado estacionario se tiene que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  en todos el cristal y en particular en los bordes. Así la densidad de corriente es constante. Por lo tanto, a partir de la ecuación (2.16) para los bordes se cumple  $N_{e,w} E_0 = N_e E_{sc} + (k_B T/e)(\partial N_e/\partial y)$ , que es lo mismo

$$E_{sc} = \frac{N_{e,w} E_0}{N_e} - \frac{k_B T}{e N_e} \frac{\partial N_e}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Sustituyendo la ecuación (2.20) en (2.22) y utilizando la expresión para  $N_{e,w}$ , se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} E_{sc} = & E_0 \frac{(I_w + I_d)}{(I + I_d)} \left( 1 + \frac{\epsilon}{e N_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial y} \right) - \frac{k_B T}{e} \frac{\partial I/\partial y}{(I + I_d)} \\ & + \frac{k_B T}{e} \frac{\epsilon}{e N_A} \left( 1 + \frac{\epsilon}{e N_A} \frac{\partial E_{sc}}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial E_{sc}^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bajo un fuerte campo externo aplicado,  $E_0$  alcanzará valores apreciables y como resultado la componente de *drift* de la corriente será la dominante. En este caso y a temperatura ambiente, todos los términos asociados con el término de difusión térmica ( $k_B T/e$ ) pueden ser considerados pequeños y, por lo tanto, despreciables. Además, si la intensidad  $I$  varía lentamente con respecto a  $y$ , se tiene que  $(\epsilon/e N_A)(\partial E_{sc}/\partial y) \ll 1$ . Bajo estas condiciones el campo de carga espacial puede ser determinado desde (2.23) y estará, apróximadamente, dado por

$$E_{sc} = E_0 \frac{(I_w + I_d)}{(I + I_d)}. \quad (2.24)$$

Para configuraciones típicas de laboratorio es posible asumir  $I_w = 0$ , obteniéndose una expresión simplificada del campo de carga espacial

$$E_{sc} = E_0 \frac{I_d}{I + I_d} = E_0 \frac{1}{1 + I/I_d}. \quad (2.25)$$

Esta expresión da cuenta que el campo de carga espacial generado tiende a saturar cuando la intensidad del haz en el cristal aumenta, es por esto que el efecto fotorefractivo es intrínsecamente saturable en este modelo. Con esta expresión de  $E_{sc}$  es

posible obtener la variación del índice de refracción a partir de la ecuación (2.14).

La cual será

$$n_{nl} = -\frac{1}{2}r_{eff}n_e^3E_{sc} = -\frac{1}{2}r_{eff}n_e^3E_0\frac{1}{1+I/I_d}.$$

Como la variación de  $n$  depende de  $E_{sc}$  y, consecuentemente, de la intensidad del haz que se propaga en el medio, esta corresponde a una variación no lineal respecto a la amplitud del campo. De esta forma, la evolución de la envolvente del campo eléctrico que incide en este medio y que es gobernada por la ecuación (2.9), para este caso será

$$i\lambda\frac{\partial\Psi(\vec{r})}{\partial z} = -\left[\frac{\lambda^2}{2n_0}\nabla_{\perp}^2 - \frac{1}{2}r_{eff}n_e^3E_0\frac{1}{1+I/I_d}\right]\Psi(\vec{r}). \quad (2.26)$$

Los cristales fotorefractivos, específicamente los cristales SBN, han sido ampliamente utilizados para la creación de redes fotónicas o arreglo de guías de ondas. La principal técnica para lograr la creación de estas redes es conocida como método de inducción [12,13], el cual consiste en modificar el índice de refracción en estos medios utilizando patrones de intensidades de luz espacialmente periódicos, tanto en una como en dos dimensiones. Esta técnica será mostrada en el capítulo 3 de esta tesis.

## 2.2. Ecuación de Schrödinger no lineal discreta

En la primera sección de este marco teórico obtuvimos la ecuación de Helmholtz paraxial, la cual modela con gran éxito muchos fenómenos ópticos en medios donde el índice de refracción es homogéneo o periódico y, además, en medios con algún tipo de no linealidad. En esta sección derivaremos la versión discreta de esta ecuación cuando consideramos no linealidad cúbica o tipo Kerr. Para esto, modelaremos la variación periódica de  $\Delta n(x, y)$  como una red fotónica o un arreglo de guías de ondas [ver figura (2.3)] y estableceremos los principios de la teoría de modos acoplados (un similar enfoque en física del estado sólido es conocido como *tight binding approximation*). Las suposiciones de este modelo son: (1) El campo eléctrico u óptico correspondiente a cada guía está fuertemente localizado (o ligado) en ella; (2) Es posible separar el campo de cada guía en su componente transversal (el cual da la forma espacial) y longitudinal (el cual determina la amplitud), así sólo la componente longitudinal evoluciona (amplitud) mientras la componente transversal permanece constante al corresponder al modo de la guía; (3) Debido a lo localizado de los campos en cada guía, solo existe interacción entre guías vecinas más próximas y, además, esta interacción es mediante la evanescente de los respectivos campos.

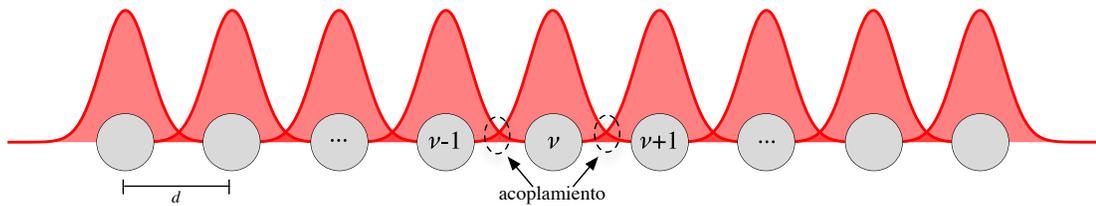


Figura 2.3: Arreglo uni-dimensional de guías de ondas distribuidas periódicamente a una distancia  $d$ . Discos grises representan las guías de ondas y curvas rojas representan los respectivos campos eléctricos de estas.

Como punto de inicio de esta derivación consideraremos la ecuación de ondas para el campo eléctrico, ecuación (2.7), en un medio cuya respuesta es lineal y constante. Con esto se tiene que

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{P}^0}{\partial t^2}, \quad (2.27)$$

donde  $\vec{P}^0 = \epsilon_0 \chi_r \vec{E}$  y  $\chi_r$  es constante. Así, la ecuación (2.27) toma la forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Donde  $\epsilon_r = (1 + \chi_r)$  y, además, se define  $v^2 \equiv c^2/\epsilon_r$  como la velocidad de la luz en este medio. Asumiendo la propagación del campo en la dirección  $\hat{z}$  y que este se puede expresar como una combinación de distintos modos, se tiene que

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \vec{f}_j(x, y) \cdot a \cdot e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right],$$

donde  $\vec{f}_j(x, y)$  y “ $a$ ” corresponden a la forma transversal y amplitud del modo  $j$ , mientras que  $k_j$  y  $\omega_j$  representan la constante de propagación y frecuencia del modo  $j$ , respectivamente. Luego, incorporando este *ansatz* en la ecuación de ondas anterior se obtiene

$$\frac{1}{2} \sum_j \left[ \left( \nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{v^2} \right) \vec{f}_j(x, y) \cdot a \cdot e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right] = 0,$$

lo que implica que para cada modo  $j$  se cumple

$$\left( \nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{v^2} \right) \vec{f}_j(x, y) = 0. \quad (2.28)$$

Si ahora consideramos  $\vec{P} = \vec{P}^0 + \vec{\mathcal{P}}$ , donde  $\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , es posible suponer un *ansatz* en el mismo espíritu que para el caso de susceptibilidad eléctrica constante, pero ahora asumiendo una amplitud “ $a$ ” dependiente de la coordenada de propagación  $z$ . Así

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \vec{f}_j(x, y) \cdot a_j(z) \cdot e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]. \quad (2.29)$$

Además, el campo eléctrico total puede ser escrito como la suma de de los campos individuales de cada guía, ya que asumimos que los modos de cada guía están fuertemente atrapados en ellas y que la componente evanescente es muy pequeña. Entonces tenemos  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\nu} \vec{E}_{\nu}(\vec{r}, t)$ , donde  $\vec{E}_{\nu}(\vec{r}, t)$  son los campos individuales de cada guía. Con esta consideración es posible reescribir la ecuación (2.29) para el campo de la guía  $\nu$ ,

$$\vec{E}_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \vec{f}_{\nu,j}(x, y) \cdot a_{\nu,j}(z) \cdot e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right],$$

donde  $\vec{f}_{\nu,j}(x, y)$  describe la forma transversal de la guía  $\nu$  y del modo  $j$ , mientras que  $a_{\nu,j}(z)$  describe la amplitud del campo en la guía  $\nu$  y del modo  $j$ . De esta forma también tenemos que  $\vec{P}_\nu = \vec{P}_\nu^0 + \vec{P}_\nu$ . Luego, reemplazando estas expresiones en la ecuación (2.7), se tiene para la guía  $\nu$  que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_\nu(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &= \left( \nabla^2 - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1}{2} \sum_j \left[ \vec{f}_{\nu,j}(x, y) \cdot a_{\nu,j}(z) \cdot e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left[ a_{\nu,j}(z) \left( \nabla_\perp^2 - k_j^2 + \frac{\omega_j^2}{v^2} \right) \vec{f}_{\nu,j}(x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{d^2 a_{\nu,j}(z)}{dz^2} + 2ik_j \frac{da_{\nu,j}(z)}{dz} \right) \vec{f}_{\nu,j}(x, y) \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right\}. \end{aligned}$$

Considerando la ecuación (2.28), podemos considerar al primer término dentro de la sumatoria como aproximadamente nulo. Asumiendo, además, la aproximación de amplitud lentamente variable en la coordenada de propagación,

$$\left| \frac{d^2 a_{\nu,j}(z)}{dz^2} \right| \ll \left| 2ik_j \frac{da_{\nu,j}(z)}{dz} \right|,$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_\nu(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \approx \frac{1}{2} \sum_j \left\{ 2ik_j \frac{da_{\nu,j}(z)}{dz} \vec{f}_{\nu,j}(x, y) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right\}. \quad (2.30)$$

Por otro lado, la densidad de polarización inducida  $\vec{P}$  en cada guía se puede separar en su parte lineal  $\vec{P}_\nu^L$  y su parte no lineal  $\vec{P}_\nu^{NL}$ ,

$$\vec{P}_\nu(\vec{r}, t) = \vec{P}_\nu^L(\vec{r}, t) + \vec{P}_\nu^{NL}(\vec{r}, t) = \sum_j \left[ \vec{P}_{\nu,j}^L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{\nu,j}^{NL}(\vec{r}, t) \right].$$

La densidad de polarización lineal de la guía  $\nu$  depende de todos los campos presentes en ella, para nuestro caso por lo localizado de los campos individuales consideraremos que los campos de cada guía se verán afectados sólo por los campos de sus guías más cercanas (aproximación a primeros vecinos), mientras que, la densidad de polarización no lineal se asumirá como local, debido a lo débil del fenómeno en óptica.

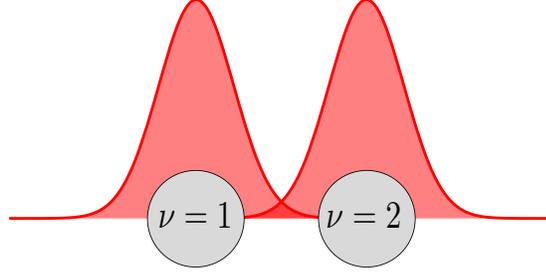


Figura 2.4: Mínimo arreglo de guías de ondas conocido como Dímero.

Con el objetivo de simplificar la deducción, nos reduciremos al arreglo de guías idénticas más pequeño, conocido como dímero [ver figura 2.4]. Así, es posible escribir la polarización lineal del medio para la guía  $\nu = 1$  como,

$$\begin{aligned} \vec{P}_{1,j}^L(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \chi_{1,j}^{(1)} \vec{E}_{T,j}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_{1,j}^{(1)} \left[ \left( \vec{f}_{1,j}(x, y) a_{1,j}(z) + \vec{f}_{2,j}(x, y) a_{2,j}(z) \right) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]. \end{aligned}$$

En esta expresión se ha considerado la influencia de la guía  $\nu = 2$  en la polarización lineal que siente la guía  $\nu = 1$ . Luego, la ecuación (2.30) para la guía  $\nu = 1$  queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{1,j}^{NL}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} &\approx \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \left[ 2ik_j \frac{da_{1,j}(z)}{dz} \vec{f}_{1,j}(x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega_j^2}{c^2} \chi_{1,j}^{(1)} \left( \vec{f}_{1,j}(x, y) a_{1,j}(z) + \vec{f}_{2,j}(x, y) a_{1,j}(z) \right) \right] e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Igual derivación se obtiene para la guía  $\nu = 2$  al, simplemente, intercambiar los índices  $1 \leftrightarrow 2$ .

### 2.2.1. No linealidad tipo Kerr

Como se mencionó anteriormente la respuesta no lineal de un medio depende de sus propiedades de simetría, por lo que para el caso específico de un medio con simetría de inversión tendremos que la respuesta no lineal de más bajo orden es la

cúbica o de tercer orden<sup>5</sup>. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar una onda monocromática de frecuencia  $\omega$  y polarización lineal  $\hat{x}$  en nuestro medio, ya que en condiciones experimentales contaremos con una fuente de luz coherente continua. Esto implica un sólo modo  $j$  en nuestra derivación; por lo que consideraremos  $k_j = k(\omega) = n(\omega)k_0$ . Así, el campo de la guía  $\nu$  queda

$$\vec{E}_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{f}_\nu(x, y) \cdot a_\nu(z) \cdot e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \right].$$

Para este caso la polarización no lineal para la guía  $\nu = 1$  se puede escribir como

$$\vec{P}_1^{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_1^{(3)} \left| \vec{E}_1(\vec{r}, t) \right|^2 \vec{E}_1(\vec{r}, t),$$

entonces, elevando al cuadrado el campo eléctrico de la guía  $\nu = 1$  y multiplicandolo por su complejo conjugado queda

$$\begin{aligned} \vec{P}_1^{NL}(\vec{r}, t) = & \frac{1}{8} \left\{ 3\chi_{1,\omega}^{(3)} |f_1(x, y)|^2 |a_1(z)|^2 f_1(x, y) a_1(z) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \right. \\ & \left. + \chi_{1,3\omega}^{(3)} [f_1(x, y)]^3 [a_1(z)]^3 e^{i(3kz - 3\omega t)} \hat{x} + c.c. \right\}. \end{aligned}$$

Como se observa, la interacción no lineal cúbica genera términos con frecuencia  $\omega$  y  $3\omega$ , fenómeno conocido como generación de tercera armónica (*third harmonic generation*). Esta generación de una frecuencia  $3\omega$  es producida por el término de susceptibilidad no lineal  $\chi_{1,3\omega}^{(3)}$ , que en general es despreciable en la dinámica debido a que se requiere la condición de *Quasi-Phase Matching* para su optimización. El término resonante corresponde a un término de Auto-enfocamiento (*Self-focusing*) o de Auto-modulación de fase (*Self-phase-modulation*). Este término es resultado de la interacción no lineal  $\chi_{1,\omega}^{(3)}$  y posee degeneración tres<sup>6</sup>. Por lo tanto, considerando solo los términos en fase con  $\omega$  la densidad de polarización no lineal se reduce a

$$\vec{P}_1^{NL}(\vec{r}, t) = \frac{3}{8} \chi_{1,\omega}^{(3)} |f_1(x, y)|^2 |a_1(z)|^2 f_1(x, y) a_1(z) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + c.c. \quad (2.32)$$

<sup>5</sup>Debido a que todos los órdenes pares de la susceptibilidad no lineal serán nulos.

<sup>6</sup>Para una onda polarizada en  $\hat{x}$  tenemos  $\chi_{1,\omega}^{(3)}$  puede ser escrito en notación tensorial como  $\chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega) = \chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; \omega, -\omega, \omega) = \chi_{xxxx}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$  resultando una degeneración tres, ya que hemos considerado un medio isotrópico.

Luego, derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (2.32) nos entrega un termino  $-\omega^2$ , reemplazando en (2.31) queda

$$\begin{aligned}
& - \frac{3\omega^2}{8c^2} \chi_{1,\omega}^{(3)} |f_1(x, y)|^2 |a_1(z)|^2 f_1(x, y) a_1(z) e^{i(kz-\omega t)} \hat{x} + c.c. \\
& = \left\{ ik \frac{da_1(z)}{dz} f_1(x, y) + \frac{\omega^2}{2c^2} \chi_1^{(1)} [f_1(x, y) a_1(z) + f_2(x, y) a_2(z)] \right\} e^{i(kz-\omega t)} \hat{x} + c.c.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Reordenando los términos de la ecuación anterior y dejando la parte compleja, ya que no nos aportará más información en adelante, se obtiene

$$\begin{aligned}
-ik \frac{da_1(z)}{dz} f_1(x, y) &= \frac{\omega^2}{2c^2} \chi_1^{(1)} [f_1(x, y) a_1(z) + f_2(x, y) a_2(z)] \\
&+ \frac{3\omega^2}{8c^2} \chi_{1,\omega}^{(3)} |f_1(x, y)|^2 |a_1(z)|^2 f_1(x, y) a_1(z),
\end{aligned}$$

Como hemos asumido que las guías de nuestro dímero son idénticas, implicará que los campos transversales de estas tendrán el mismo perfil espacial. Eliminaremos la dependencia transversal multiplicando por el conjugado  $f_1^*(x, y)$  e integrando en el plano transversal. Haciendo esto se obtienen las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}
p_\omega &\equiv \int |f_1(x, y)|^2 dx dy, \\
V_\omega &\equiv \frac{1}{p_\omega} \int f_2(x, y) f_1^*(x, y) dx dy, \\
\phi_\omega &\equiv \frac{1}{p_\omega} \int |f_1(x, y)|^4 dx dy.
\end{aligned}$$

$p_\omega$  es definida como la integral de potencia con unidades de área;  $V_\omega$  es definida como la integral de acoplamiento lineal; y  $\phi_\omega$  se define como la integral no lineal. Además, se definen las siguientes constantes:

Constante de propagación:

$$\beta \equiv \frac{\omega^2}{2kc^2} \chi_1^{(1)}(\omega),$$

Coefficiente de acoplamiento:

$$V \equiv \frac{\omega^2}{2kc^2} \chi_1^{(1)}(\omega) V_\omega = \beta \cdot V_\omega,$$

Coefficiente no lineal:

$$\gamma \equiv \frac{3\omega^2}{8kc^2} \chi_{1,\omega}^{(3)} \phi_\omega = \frac{\omega n_2}{c} \phi_\omega,$$

donde  $n_2 \equiv 3\omega \chi_{1,\omega}^{(3)}/8kc$ . Por lo tanto, con estas definiciones la ecuación para la guía  $\nu = 1$  se reduce a

$$-i \frac{da_1(z)}{dz} = \beta a_1(z) + V a_2(z) + \gamma |a_1(z)|^2 a_1(z).$$

Mediante un procedimiento análogo para la guía  $\nu = 2$  se obtiene:

$$-i \frac{da_2(z)}{dz} = \beta a_2(z) + V a_1(z) + \gamma |a_2(z)|^2 a_2(z).$$

La extensión al caso de un arreglo de  $N$  guías de ondas es simple y puede ser generalizado fácilmente [29]. Por lo tanto, es posible escribir la primera forma de la ecuación de Schrödinger no lineal discreta (DNLS) para la guía  $n$ -ésima,

$$-i \frac{da_n(z)}{dz} = \beta a_n(z) + V [a_{n+1}(z) + a_{n-1}(z)] + \gamma |a_n(z)|^2 a_n(z).$$

Queremos ahora expresar esta ecuación en unidades más prácticas experimentalmente; para esto, veamos primero las unidades de los distintos términos de esta ecuación,

$$[a_n] = \frac{V}{m}; [\beta, V] = \frac{1}{m}; [\gamma] = \frac{m}{V^2}; [z] = m.$$

Haciendo la siguiente transformación,

$$a_n(z) = \frac{1}{\sqrt{p_\omega}} A_n(z) e^{i\beta z},$$

obtenemos la segunda forma de la DNLS,

$$-i \frac{dA_n(z)}{dz} = V_a [A_{n+1}(z) + A_{n-1}(z)] + \gamma_{eff} |A_n(z)|^2 A_n(z), \quad (2.34)$$

con el coeficiente no lineal efectivo dado por

$$\gamma_{eff} = \frac{\omega n_2}{c A_{eff}},$$

y el área efectiva definida como  $A_{eff} = \frac{p_\omega}{\phi_\omega}$ . Así, los términos de la ecuación (2.34) tienen las siguientes unidades:

$$[A_n] = W^{1/2}; [V_a] = \frac{1}{m}; [\gamma_{eff}] = \frac{1}{mV}; [z] = m.$$

Con estas unidades es posible obtener la potencia total de la luz en el arreglo en unidades de Watts, la cual está definida como la suma total de todas las contribuciones del campo eléctrico en el arreglo:

$$P \equiv \sum_n |A_n(z)|^2.$$

Como último paso queremos dejar esta ecuación totalmente adimensional, ya que esto nos será de gran utilidad al momento de realizar simulaciones numéricas y cálculos teóricos, además de poder definir más fácilmente un hamiltoniano del sistema. Considerando los parámetros experimentales, como la amplitud del *peak*  $A_p$  y una longitud característica del arreglo  $L$ , realizamos una última transformación

$$A_n = A_p \cdot \psi_n,$$

y multiplicamos la ecuación (2.34) por  $L$ . Así, obtenemos la versión adimensional de la ecuación de Schrödinger no lineal discreta:

$$-i \frac{d\psi_n(z)}{dz} = V [\psi_{n+1}(z) + \psi_{n-1}(z)] + \gamma |\psi_n(z)|^2 \psi_n(z), \quad (2.35)$$

con

$$z \equiv z/L; V \equiv V_a L; \gamma \equiv \gamma_{eff} |A_p|^2 L \implies [\psi_n] = [V] = [\gamma] = [z] = 1.$$

Es posible generalizar esta ecuación a un sistema arbitrario de dos dimensiones (2D), quedando:

$$-i \frac{d\psi_{\vec{n}}(z)}{dz} = \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}} \psi_{\vec{m}}(z) + \gamma |\psi_{\vec{n}}(z)|^2 \psi_{\vec{n}}(z), \quad (2.36)$$

donde la información de la geometría del sistema está contenida en la posición de la guía  $\vec{n}$ . Para el caso específico de una geometría 2D cuadrada, se tiene que para la guía ubicada en el sitio  $(n, m)$  el término de acoplamiento será  $V [\psi_{n+1, m} + \psi_{n-1, m} + \psi_{n, m+1} + \psi_{n, m-1}]$ .

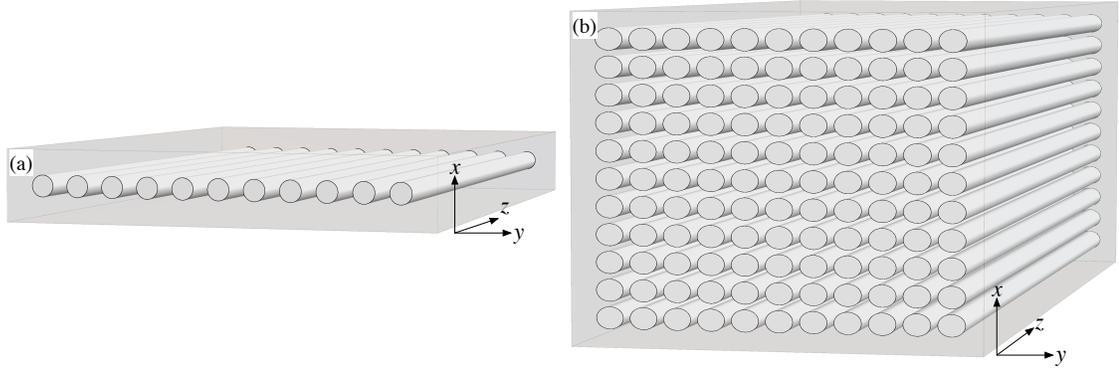


Figura 2.5: Esquema de redes fotónicas o arreglos de guías de ondas finitos, (a) uni-dimensional y (b) bi-dimensional con geometría cuadrada.

### 2.2.2. Difracción discreta y propiedades lineales

La ecuación (2.35) modela la evolución de luz en un arreglo de guías de ondas uni-dimensional [ver figura 2.5(a)] que se acoplan débilmente mediante la evanescente de sus campos, en un medio con no linealidad tipo Kerr. A baja potencia, cuando el término no lineal puede ser despreciado, se tiene:

$$-i \frac{d\psi_n(z)}{dz} = V [\psi_{n+1}(z) + \psi_{n-1}(z)] . \quad (2.37)$$

Este sistema de ecuaciones es analíticamente integrable para el caso de un arreglo infinito<sup>7</sup>, dada una excitación inicial de un solo sitio:  $\psi_n(0) = \psi_{n_0}(0)\delta_{n,n_0}$  [5, 6]. Esta solución es:

$$\psi_n(z) = i^{n-n_0} \psi_{n_0}(0) J_{n-n_0}(2Vz) ,$$

donde  $J_{n-n_0}$  es la función de Bessel de primera especie y orden  $n - n_0$ . Para una red finita la Figura 2.6(b) muestra una simulación numérica de la evolución de  $|\psi_n(z)|^2$  de  $z_i = 0$  hasta  $z_f = 10$ , para una condición inicial localizada en la guía  $n_0 = 26$ . Como es posible observar, el comportamiento de la luz en un arreglo de guías de ondas (caso discreto) difiere completamente del caso homogéneo (o continuo). Ya que, en el caso homogéneo la luz viaja manteniendo su centro y ensanchándose, mientras que

<sup>7</sup>También es posible encontrar solución analítica para un arreglo semi-infinito y finito mediante el denominado método de imágenes [30].

en el caso discreto la mayor cantidad de energía óptica se concentra en dos lóbulos principales lejos del centro de arreglo [31], tal como se observa en el perfil mostrado en la Figura 2.6(a) para  $z = z_f$ . Este comportamiento particular de la luz en un sistema discreto es conocido como difracción discreta.

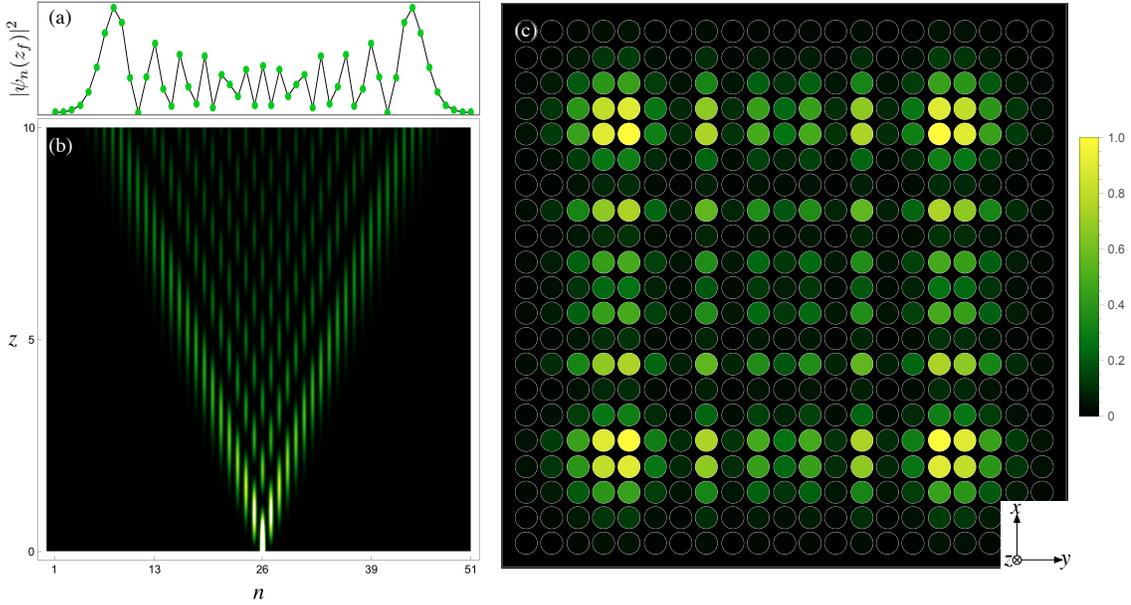


Figura 2.6: Patrón de difracción discreta para redes fotónicas 1D y 2D (normalizadas). (a) Perfil  $|\psi_n(z_f)|^2$  para una condición inicial localizada en una guía del centro de la red fotónica 1D. (b) Evolución de  $|\psi_n(z)|^2$  el mismo caso anterior, y (c) perfil de difracción en  $z = 5$  para una condición inicial localizada en una guía del centro de una red fotónica 2D.

La extensión para el caso de una red fotónica 2D con geometría cuadrada [ver Figura 2.5(b)], dada una excitación de la forma  $\psi_{n,m}(0) = \psi_{n_0,m_0}(0)\delta_{n,n_0}\delta_{m,m_0}$ , corresponde a la superposición de dos soluciones uni-dimensionales, así

$$\psi_{n,m}(z) = i^{n+m-(n_0+m_0)}\psi_{n_0,m_0}(0)J_{n-n_0}(2Vz)J_{m-m_0}(2Vz).$$

La Figura 2.6(c) muestra el patrón de difracción obtenido en una red 2D cuadrada de  $21 \times 21$  guías, en la cual la condición inicial ha sido localizada en la guía central de la red, esto es  $n_0 = m_0 = 11$ , y ésta ha evolucionado hasta  $z_f = 5$ .

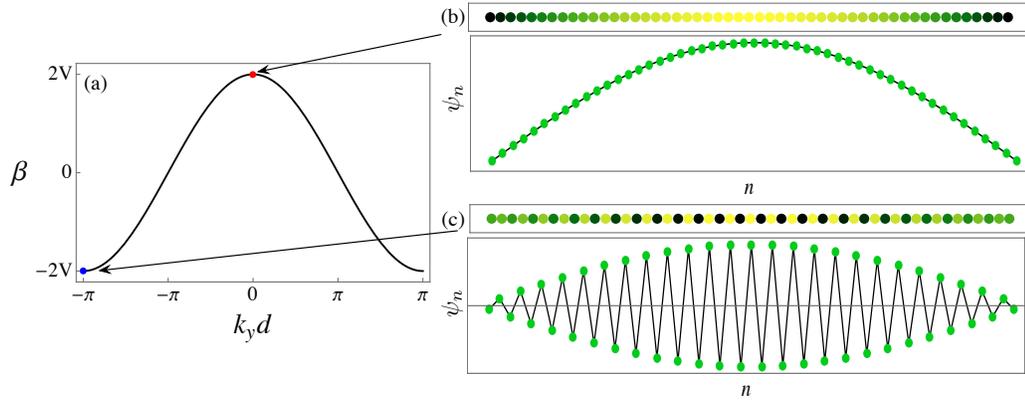


Figura 2.7: (a) Banda para una red fotónica 1D infinita, (b) y (c) muestran los modos correspondiente a los borde de banda para una red finita.

La dinámica de la luz en un arreglo de guías de ondas o red fotónica lineal, como las mostradas en la Figura 2.6, depende de la estructura de bandas (relación de dispersión) de ésta y de la excitación que se realiza. Para encontrar dicha estructura de bandas es necesario hallar soluciones estacionarias tipo onda plana. Para el caso de una red 1D infinita, las soluciones estacionarias de la ecuación (2.35) lineal ( $\gamma = 0$ ) tienen la forma  $\psi_n(z) = \phi_0 e^{i(k_y n d - \beta z)}$ . Reemplazando esta solución en ésta ecuación se obtiene:

$$\beta(k_y) = 2V \cos(k_y d). \quad (2.38)$$

En cualquier sistema periódico extendido, los modos lineales en una red fotónica corresponden a los modos extendidos de Floquet-Bloch, con un espectro compuesto de bandas permitidas separadas por *gaps* [7]. La relación de dispersión definida por la ecuación (2.8) difiere dramáticamente de la obtenida en el espacio libre o medio homogéneo y, también, difiere de la estructura de bandas obtenida a partir de la ecuación de Helmholtz paraxial para una periodicidad en una dimensión [ver Figura 2.1]. Esto último es debido a que el modelo discreto sólo representa fielmente los fenómenos físicos de primera banda del modelo dado por la ecuación de Helmholtz paraxial. La Figura 2.7(a) muestra la banda lineal definida por la ecuación (2.8) en la primera zona de Brillouin, esto es entre  $[-\pi, \pi]$ . Adicionalmente, la primera derivada

de la relación (2.38) corresponde a la velocidad de grupo de un paquete de ondas con un determinado  $k_y$ , mientras que, la segunda derivada determina las propiedades de difracción de este paquete durante su propagación en la red [32]. Por lo tanto, se tiene que:

$$v_g = \frac{\partial \beta}{\partial k_y} = -2Vd \sin(k_y d) ; \quad D = \frac{\partial^2 \beta}{\partial k_y^2} = -2Vd^2 \cos(k_y d), \quad (2.39)$$

donde la máxima velocidad,  $|v_g| = 2Vd$ , se alcanza para  $k_y = \frac{n\pi}{2d}$ , con  $n$  impar. Dependiendo del signo del coeficiente de difracción  $D$  la dispersión puede ser normal ( $D < 0$ ), anómala ( $D > 0$ ) e incluso puede no difractar, esto último ocurre cuando  $|v_g| = 2Vd$  [32, 33].

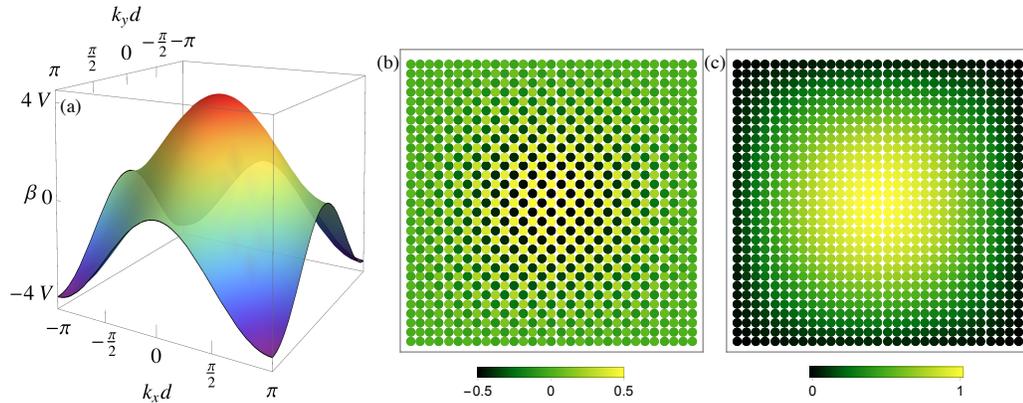


Figura 2.8: (a) Banda para una red fotónica 2D cuadrada infinita , (b) y (c) muestran los modos correspondientes a los borde de banda para una red finita de  $21 \times 21$  guías.

Cuando se considera una red finita con  $N$  guías, la ecuación (2.35) corresponde a un conjunto de  $N$  ecuaciones. Resolviendo este conjunto de ecuaciones para el caso estacionario es posible encontrar los  $N$  modos lineales del sistema. La Figura 2.7(b) y (c) muestra los modos de borde de banda para una red finita.

Para el caso de una red fotónica 2D cuadrada infinita, las soluciones estacionarias tendrán la forma  $\psi_{n,m}(z) = \phi_0 e^{i(k_x n d + k_y m d)} e^{-i\beta z}$ . Reemplazando en la ecuación (2.36) se obtiene,

$$\beta(k_x, k_y) = 2V \cos(k_x d) + 2V \cos(k_y d). \quad (2.40)$$

La Figura 2.8 muestra esta banda. También, por ser un sistema periódico tendremos los modos extendidos de Floquet-Bloch. Para un sistema finito de  $N \times N$  guías, la ecuación (2.36) lineal corresponderá a un conjunto de  $N^2$  ecuaciones. Resolviendo este sistema para el caso estacionario se obtendrán los  $N^2$  modos lineales extendidos, dos de los cuales son mostrados en la Figura 2.8(b) y (c).

### 2.2.3. Soluciones no lineales estacionarias

La difracción en redes fotónicas es un fenómeno fundamental que lleva al haz de luz incidente a la exploración de la red (por ejemplo, un haz de luz incidente en una sola guía experimenta difracción discreta). En redes que han sido creadas en un medio que también presenta no linealidad, el efecto de auto-enfoque (*self-focusing*) reduce esta tendencia natural de la luz a difractar. En ciertas condiciones, el auto-enfoque produce un balance exacto con la difracción y un haz de luz incidente, localizado en pocos sitios del arreglo de guías de ondas, puede propagarse manteniendo su forma espacial. Este balance entre la no linealidad local y la difracción no local es un comportamiento de la red como un todo, que desde un punto de vista matemático corresponde a un tipo de soluciones de la ecuación DNLS, la cual es conocida como solitón discreto<sup>8</sup>. La formación de solitones puede ser también entendida vía un defecto no lineal. Como el sistema es no lineal, la excitación óptica en una guía del arreglo produce un cambio en el índice de refracción de ésta y, por lo tanto, un cambio en la constante de propagación de la guía, que es localmente mayor que a las otras guías del arreglo. Esta perturbación local rompe con la periodicidad del arreglo y permite la aparición de estados de defecto no lineales inducidos, cuyas frecuencias espaciales se encuentran en los *gaps* de la estructura de bandas [5, 6]. Al igual que en el caso de la propagación lineal, la influencia de la no linealidad depende de la curvatura de la relación de dispersión. En regiones de difracción normal, el balance de la difracción con el efecto de auto-enfoque puede ser logrado utilizando no linealidad

---

<sup>8</sup>En esta tesis el concepto de solitón se utiliza para entidades auto-atrapadas que preservan su perfil transversal durante la propagación. Una discusión sobre el origen, significado y acuerdo de la comunidad científica hoy en día para este concepto puede ser encontrada en la Ref. [34].

enfocante ( $\gamma > 0$ ), mientras que en regiones de difracción anómala el balance se consigue mediante no linealidad desenfocante ( $\gamma < 0$ ) [35].

Para encontrar soluciones no lineales (o solitones discretos) para la ecuación DNLS generalizada, ecuación (2.36), consideramos un *ansatz* con una amplitud independiente de la coordenada de propagación de la forma  $\psi_{\vec{n}}(z) = \psi_{\vec{n}} e^{i\beta z}$ , con  $\psi_{\vec{n}} \in \mathbb{R}$  y  $\beta$  la constante de propagación o frecuencia espacial. Reemplazando este *ansatz* en la ecuación (2.36) con  $\gamma \neq 0$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$\beta\psi_{\vec{n}} = \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n},\vec{m}} \psi_{\vec{m}} + \gamma\psi_{\vec{n}}^3. \quad (2.41)$$

Para la mayoría de las redes este conjunto de ecuaciones no tiene solución analítica, por lo que se deben desarrollar técnicas numéricas para encontrar estas soluciones. Por lo general y para la mayoría de los sistemas periódicos en 1D y 2D, las soluciones no lineales tienen sus frecuencias fuera de la región de bandas lineales; esto quiere decir que las soluciones no lineales “viven” en los *gaps* (semi-infinitos o finitos) del espectro de frecuencias [5, 6, 11].

Para cada solución encontrada es posible calcular diferentes cantidades útiles para su caracterización, las cuales serán usadas a lo largo de esta tesis. Por ejemplo, el modelo (2.36) tiene sólo dos cantidades conservadas, la potencia óptica o norma

$$P \equiv \sum_{\vec{n}} |\psi_{\vec{n}}|^2, \quad (2.42)$$

y el Hamiltoniano

$$H \equiv - \sum_{\vec{n}} \left\{ \left( \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n},\vec{m}} \psi_{\vec{m}} \right) \psi_{\vec{n}}^* + \frac{\gamma}{2} |\psi_{\vec{n}}|^4 \right\}, \quad (2.43)$$

lo que también implicará que será integrable sólo para dos grados de libertad. Además, utilizaremos la razón de participación como una cantidad para contar el número de guías (o sitios) con amplitud significativa en la red. Se define ésta como:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{P^2}{\sum_{\vec{n}} |\psi_{\vec{n}}|^4}. \quad (2.44)$$

Esta cantidad es un indicador de cuantos sitios de la red están efectivamente excitados en un perfil particular; teniendo como límites los valores  $\mathcal{R} = 1$  para un perfil localizado en una guía y  $\mathcal{R} = N$  para un perfil totalmente deslocalizado o extendido cubriendo todo el arreglo.

También, será de utilidad definir el centro de masa en la dirección  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Considerando  $\vec{n} = (x_n, y_n)$ , se define:

$$X \equiv \frac{\sum_{\vec{n}} x_n |\psi_{\vec{n}}|^2}{P}; \quad Y \equiv \frac{\sum_{\vec{n}} y_n |\psi_{\vec{n}}|^2}{P}. \quad (2.45)$$

## Capítulo 3

# Transporte en redes fotónicas inducidas ópticamente

Una de las técnicas bien establecidas para la creación de redes fotónicas, o arreglos de guías de ondas, y el estudio de la propagación de luz en ellas, es la técnica de inducción óptica. Ésta permite la modificación del índice de refracción de un cristal fotorefractivo por medio del establecimiento de un campo eléctrico estacionario en él, que mediante la utilización de patrones de interferencia periódicos no difractantes es posible crear redes fotónicas de distintas geometrías. También, esta técnica muestra una gran plasticidad debido a que la modificación del índice de refracción no es permanente, por lo que dentro del cristal es posible crear, en principio, infinitas redes. Además, esta técnica ha sido ampliamente utilizada para el estudio experimental de sistemas periódicos y desordenados, lograndose realizar observaciones de carácter fundamental. Por ejemplo, localización de Anderson [9], formación de solitones en una y dos dimensiones [13, 14], y estados de superficie conocidos como *shockley-state* [36].

En este capítulo se mostrarán los principales resultados obtenidos en el estudio del transporte vía excitación de una sola guía de ondas (*single-site excitation*) en redes fotónicas inducidas en un cristal fotorefractivo, en particular uno de Estroncio Bario Niobato (SBN). Primero, se explicará y desarrollará experimentalmente la técnica de inducción, para luego mostrar la propagación de luz en el régimen lineal y no lineal en las redes inducidas experimentalmente.

### 3.1. Técnica de inducción óptica

La técnica de inducción en cristales fotorefractivos es una herramienta ideal para la creación de redes fotónicas reconfigurables y, por lo tanto, para la realización de investigaciones fundamentales en estructuras periódicas [12]. Esta técnica consiste principalmente en la modificación del índice de refracción de un medio fotosensible mediante una iluminación externa. Utilizando un haz de luz coherente, polarizado y espacialmente periódico (como puede ser un patrón de interferencia), el medio adquiere una modulación periódica del índice de refracción similar a la del haz. Así, mediante la utilización de un haz adicional (haz de prueba) es posible estudiar la propagación de luz en la estructura periódica inducida. Debido a que los medios fotosensibles son intrínsecamente no lineales, cualquier patrón de interferencia periódico inducirá modulaciones del índice de refracción no lineal, creandose también una red fotónica no lineal. A pesar de esto, si se utilizan cristales fotosensibles que muestran una fuerte anisotropía de polarización, como por ejemplo los cristales SBN, es posible “escribir” redes fotónicas lineales. Esto es resultado de la simetría del cristal y por lo tanto del coeficiente electro-óptico  $r_{SBN}$  [ver ecuación (2.13)]. Como  $r_{13} \ll r_{33}$ , un haz ordinariamente polarizado, que creará la red (haz de escritura), se propagará en el cristal SBN en un régimen efectivamente lineal y no mostrará ningún efecto no lineal (como por ejemplo, auto-enfoque); sin embargo, seguirá induciendo una modificación del índice de refracción, ya que la excitación de los portadores de carga a la banda de conducción sólo depende de la intensidad y no de la polarización. Por otro lado, para un haz extraordinariamente polarizado, que será el haz de prueba, la propagación lineal o no lineal de éste dependerá de su intensidad. Para la generación de redes fotónicas, la distribución espacial transversal de la intensidad del haz de escritura tiene que ser estacionaria a lo largo de la coordenada de propagación. La interferencia no difractante de ondas permite lograr estos requisitos y consiste en la interferencia de un número determinado de ondas planas, cuya característica común es que poseen el mismo vector de onda transversal y, consecuentemente, un mismo vector de onda longitudinal. Como cada onda plana puede ser representada por un

punto en el espacio de Fourier transversal  $(k_x, k_y)$ , las ondas planas con un mismo vector de onda transversal pertenecen a un mismo anillo centrado en el origen de este espacio. Matemáticamente, para una longitud de onda  $\lambda$  determinada y para la onda plana  $i$ -ésima se tiene

$$|\vec{k}_i| = \sqrt{k_{i\perp}^2 + k_{iz}^2} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

donde  $k_{i\perp}^2 \equiv k_{ix}^2 + k_{iy}^2$ . Esto implica que, ondas con la misma componente transversal  $k_{i\perp}$ , necesariamente tendrán la misma componente longitudinal  $k_{iz}$ . La figura 3.1 ejemplifica el espacio de Fourier transversal de 2 ondas planas con su respectiva propagación no difractante y el patrón de interferencia en el espacio real. Además, la figura 3.2 muestra dos ejemplos de redes 2D, una diamante (cuadrada rotada en 45 grados) y una hexagonal.

Las variadas redes que se pueden crear utilizando patrones de interferencia no difractantes van desde distintos tipos de redes fotónicas 2D (por ejemplo, *kagome* y *honeycomb*), redes cuasi periódicas [37, 38] y súper redes (*superlattices*) en 1D y 2D [39, 40].

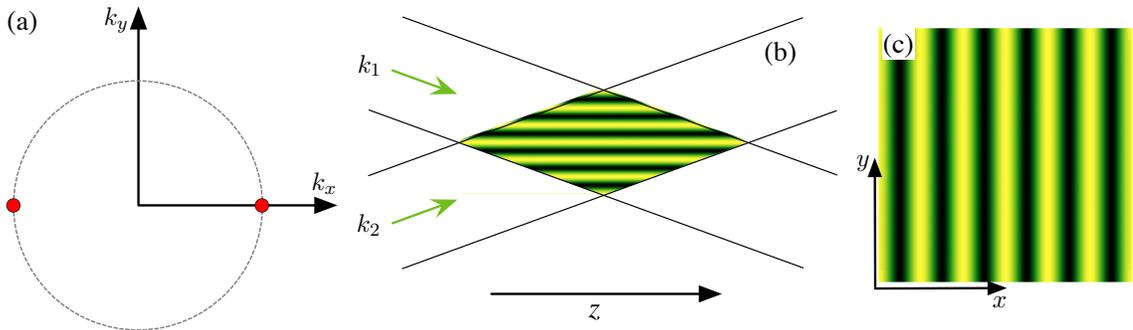


Figura 3.1: Patrón de interferencia no difractante en una dimensión. (a) Espacio de Fourier transversal (b) propagación no difractante en la dirección  $z$  y (c) patrón de intensidad transversal en el espacio real.

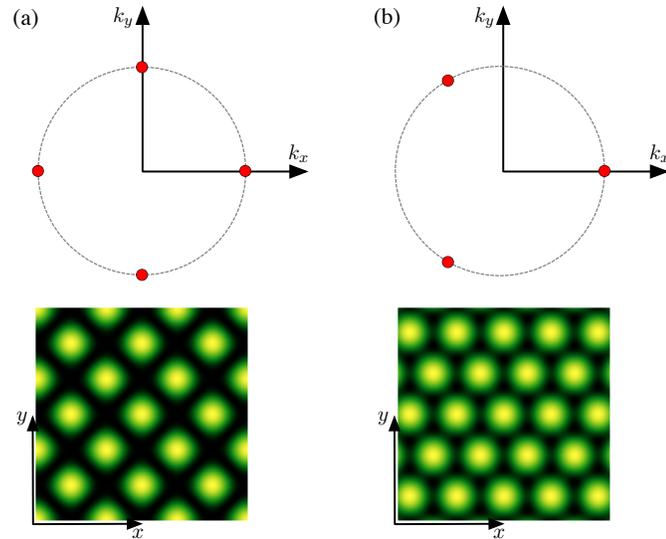


Figura 3.2: Patrones de interferencia no difractante en dos dimensiones. Parte superior muestra el espacio de Fourier transversal con las respectivas ondas planas que forman los patrones mostrados en la parte inferior. (a) 2D diamante y (c) 2D hexagonal.

## 3.2. Realización Experimental

Para la creación de redes fotónicas o arreglos de guías de ondas en cristales foto-refractivos, mediante la técnica de inducción e interferencia no difractante de ondas planas, usamos un montaje experimental, esquematizado en la figura 3.3 [41], cuyos componentes principales son los moduladores espaciales de luz (SLM). Un láser de longitud de onda  $\lambda = 532$  nm es separado en dos componentes de polarización, dirección extraordinaria y dirección ordinaria. El haz con polarización ordinaria es usado como haz de escritura de la red, este haz es enviado a un SLM que modula sólo en fase (*only-phase SLM Holoeye Pluto*). Aquí, en el espacio real, el haz adquiere la fase del patrón de interferencia no difractante buscado, que luego es dinámicamente filtrado en el espacio de Fourier usando un SLM de amplitud (*SLM Holoeye LCR-1080*). Así se eliminan todos los vectores de ondas residuales que no pertenecen al anillo del plano transversal de Fourier, del correspondientes patrón de interferencia. Estas dos

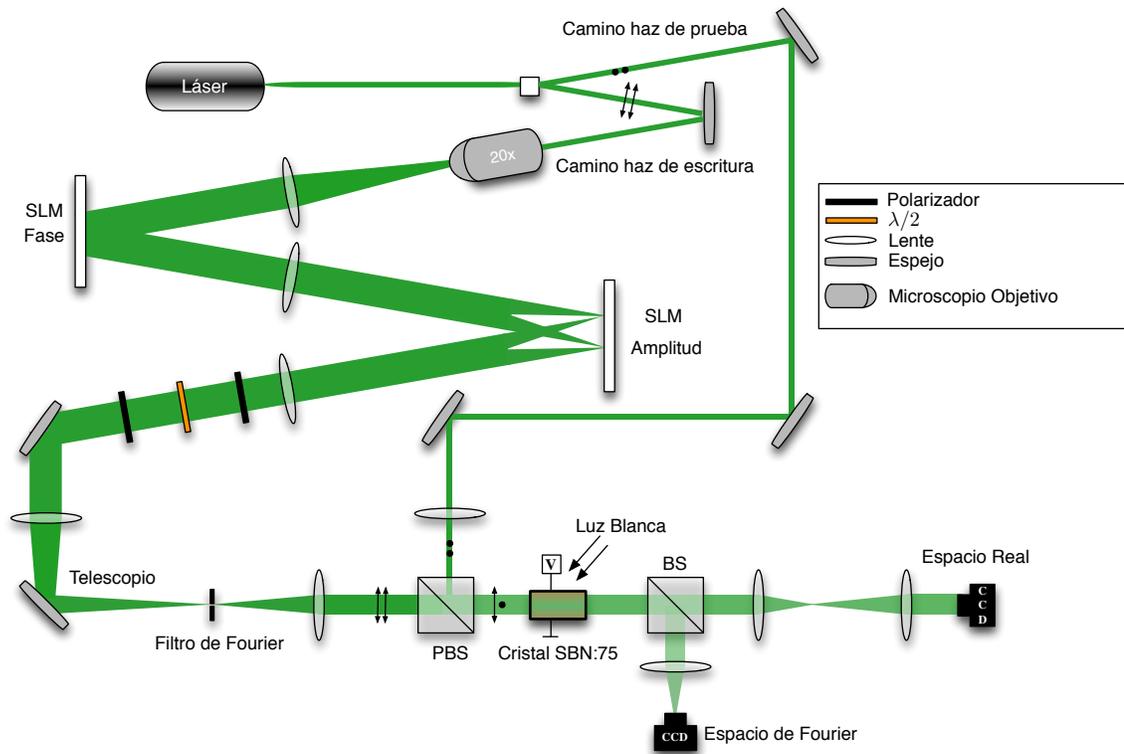


Figura 3.3: Esquema de montaje experimental empleado para la realización de la técnica de inducción óptica y la propagación de luz en las redes fotónicas creadas.

étapas permiten obtener un haz modulado en fase y amplitud con un claro patrón de interferencia no difractante, el cual se incide en un cristal fotorefractivo mediante el uso de un sistema de lentes. Esta configuración posee una alta flexibilidad, lo que permite realizar redes no difractantes con cualquier geometría 2D, en contraste a la configuración de múltiples Mach-Zehnder [26]. Por otro lado, el haz con polarización extraordinaria es usado como haz de prueba, el cual es enfocado con una cintura en el orden de  $10 \mu\text{m}$  en la cara de entrada del cristal mediante una lente. Utilizamos un cristal SBN:75 dopado con 0.005 % de  $\text{CeO}_2$  y de dimensiones  $10 \times 5 \times 2 \text{ mm}^3$  cuyos coeficientes electro-ópticos relevantes son  $r_{33} = 1340 \text{ pmV}^{-1}$  y  $r_{13} = 67 \text{ pmV}^{-1}$ , con una fuente externa de voltaje ( $E_0$ ) en la dirección extraordinaria. Usando dos cámaras CCD (*Coupled-Charge Display*) somos capaces de observar el espacio real y de Fourier de la cara de salida del cristal. Debido a que la modificación del índice de

refracción en el cristal no es permanente y decae en el tiempo, los arreglos de guías de ondas creados dejarán de existir después de unos días<sup>1</sup>, este proceso puede ser acelerado iluminando el cristal con una fuente de luz incoherente o luz blanca.

La creación de redes fotónicas en cristales fotorefractivos no es una tarea trivial. En primera instancia se necesita un estudio sistemático de los parámetros que envuelven este proceso, como lo son la intensidad del haz de escritura ( $I_{red}$ ), el campo eléctrico externo aplicado al cristal durante esta iluminación ( $E_0$ ) y el tiempo que este procedimiento toma ( $t_w$ ) [41]. Esta tesis no se centrará en este estudio, sino sólo en la utilización de estas redes para la observación de dinámica lineal y no lineal en ellas. Los parámetros para la creación de una óptima red serán obtenidos de la referencia [41]. Pese a esto, es posible determinar cualitativamente la modulación del índice de refracción mediante la utilización de las propiedades de guía de onda que presentan las guías de ondas. Para esto, iluminamos con una onda plana el cristal SBN, que experimentalmente corresponde a un haz de luz ancho (del orden del cristal). Si existe modulación, la luz se guiará por las zonas de mayor índice de refracción, por lo que la luz a la salida del cristal mostrará cualitativamente el cambio del índice de refracción. Esta técnica es conocida como *waveguiding* [26]. Otro método importante para investigar el cambio del índice de refracción inducido es la espectroscopía de la zona de Brillouin [42]. Como se mencionó en el capítulo 1, una modulación periódica del índice de refracción modifica la relación de dispersión y lleva a la aparición de bandas y *gaps* las cuales se abren en los bordes de la zona de Brillouin. Este comportamiento es general de los sistemas periódicos y no se restringe a sistemas ópticos. Sin embargo, en el contexto óptico, la aparición de bandas y *gaps* en el espectro de transmisión en los bordes de la zona de Brillouin posibilita una directa visualización de la estructura de la red en el espacio de Fourier, ya que las regiones de propagaciones prohibidas aparecen como líneas oscuras en el espectro de potencia del haz transmitido [42]. Es por esto que con la utilización de una cámara CCD en el espacio

---

<sup>1</sup>Ya que no hay presencia de un haz de luz coherente, deja de haber excitación de los donadores hacia la banda de conducción, por lo que los electrones que han sido excitados y que generan el campo  $E_{sc}$ , comienzan a decaer a los sitios aceptadores. Esto produce que la presencia de este campo alcance un valor nulo, lo que conlleva a una nula modulación del índice de refracción.

de Fourier [ver esquema del montaje, figura 3.3] se puede observar la existencia o no de modulación en el cristal fotorefractivo.

### 3.3. Propagación lineal de la excitación de una sola guía de ondas

Como se mencionó en la sección anterior, el haz de escritura es polarizado ordinariamente. Entonces, la propagación de este haz en el cristal SBN es descrito por la ecuación (2.26),

$$i\lambda \frac{\partial \Psi_{red}(\vec{r})}{\partial z} = - \left[ \frac{\lambda^2}{2n_0} \nabla_{\perp}^2 - \frac{1}{2} r_{13} n_0^3 E_0 \frac{1}{(1 + I_{red}/I_d)} \right] \Psi_{red}(\vec{r}),$$

con el término no lineal compuesto por el coeficiente electro-óptico  $r_{13}$  y el índice de refracción  $n_0$ . Además,  $I_{red} \equiv |\Psi_{red}|^2$ . De esta forma el término no lineal no es suficiente para observar fenómenos no lineales, pero si suficiente para producir variaciones del índice de refracción en el cristal fotorefractivo. Consecuentemente, se establecerá una red fotónica en el cristal SBN. Una vez creada la red, el haz de prueba se incide en el cristal y su dinámica será modelada por la siguiente ecuación

$$i\lambda \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial z} = - \left[ \frac{\lambda^2}{2n_0} \nabla_{\perp}^2 + \Delta n(x, y) - \Gamma \frac{1}{(1 + |\psi|^2/I_d)} \right] \psi(\vec{r}), \quad (3.1)$$

donde  $\psi(\vec{r})$  representa la envolvente del campo eléctrico del haz de prueba,  $\Gamma = (1/2)n_e^3 r_{33} E_0$  y  $\Delta n(x, y)$  corresponde al coeficiente no lineal y a la red fotónica inducida en el cristal, respectivamente. Para intensidades bajas del haz de prueba y/o voltajes externos aplicado cercanos a cero, el término no lineal puede ser despreciado, por lo que el haz presenta un comportamiento lineal en su propagación. Además, para una modulación lo suficientemente profunda (esto es  $|\Delta n| \approx 10^{-4}$ , que depende de los parámetros del haz de escritura) la propagación puede ser modelada con la ecuación de Schrödinger Lineal Discreta (DLS) (2.37).

Empezando por la inducción de una red uni-dimensional, se consideró un patrón de interferencia de la forma

$$I_{red} = I_0 \cos^2(k_y y),$$

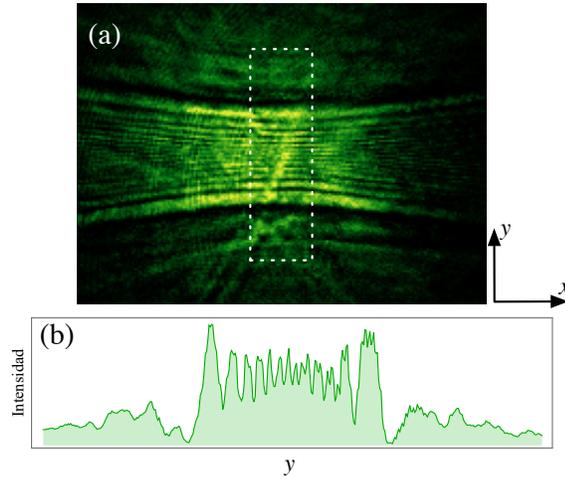


Figura 3.4: Difracción discreta para una red fotónica 1D inducida en un cristal SBN, de período  $d = 10\mu\text{m}$ . (a) Imagen de la cara de salida del cristal y (b) perfil de la zona central de la imagen mostrada en (a).

donde  $k_y = 2\pi/d$  y  $d$  es el período del patrón de interferencia y que también es la constante de red. Se fijaron los parámetros de intensidad del haz de escritura  $I_{red} = 60\mu\text{W cm}^{-2}$ , intensidad del campo eléctrico externo  $E_0 = 0.75\text{ kV cm}^{-1}$ , tiempo de escritura  $t_w = 180\text{ s}$  y período de  $d = 10\mu\text{m}$ . Posteriormente, se excitó la red con un haz localizado en aproximadamente una guía de ondas y con una intensidad de  $|\psi|^2 = 0.3\mu\text{W cm}^{-2}$ . La figura 3.4 muestra la cara de salida del cristal para esta excitación. En esta imagen es posible observar claramente que existe modulación periódica en el medio y, más importante aún, la mayor intensidad de luz se concentra en dos lóbulos en el borde de la zona central, zona que está delimitada por valles de casi nula intensidad. Con esto se puede concluir, cualitativamente, que el patrón de luz emergente del cristal muestra una difracción típica de un sistema discreto. Por lo tanto, los parámetros utilizados en el proceso de escritura de la red crean una red fotónica, en la cual el comportamiento de la luz puede ser modelado por la ecuación DLS [para mayor claridad comparar figura 3.4(b) con figura 2.6(a)]. Sin embargo, es importante notar que el modelo discreto no predice la existencia de luz fuera de la región delimitada por los dos lóbulos de mayor intensidad, debido principalmente

a que sólo modela la fenomenología de primera banda. Por lo tanto, además de ser bien modelada por un enfoque discreto, las redes inducidas en cristales fotorefractivos presentan excitación de bandas superiores y, consecuentemente, presencia de luz en regiones que corresponden a la excitación de estas bandas. Para otros parámetros de escritura, esto es, intensidades del haz de escritura más bajas; campo eléctrico aplicado al cristal más bajo; y para un mismo tiempos de escritura, la propagación de luz muestra un ensanchamiento del haz inicial con cierta modulación periódica, lo que da cuenta de la inducción de cierta estructura periódica en el medio. Un ejemplo puede ser visto en la figura 3.5, la cual muestra el perfil de intensidad a la salida del cristal para la misma excitación anterior, donde se ha inducido una modulación periódica 1D con parámetros de escritura,  $I_{red} = 15\mu\text{W cm}^{-2}$ ; campo eléctrico externo  $E_0 = 0.25 \text{ kV cm}^{-1}$ ; y tiempo de escritura  $t_w = 180 \text{ s}$ .

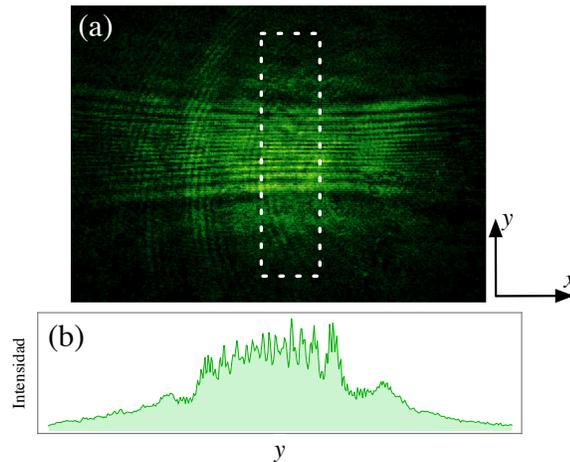


Figura 3.5: Difracción de un haz inicialmente localizado para una modulación periódica 1D inducida en un cristal SBN. (a) Imagen de la cara de salida del cristal y (b) perfil de la zona central de la imagen mostrada en (a).

En el caso 2D consideraremos un patrón de intensidades no difractante con geometría diamante y hexagonal. El primer patrón es generado por la interferencia de 4 ondas pertenecientes a un mismo anillo en el plano de Fourier transversal [ver figura

3.2(a)], cuya expresión matemática tiene la forma

$$\Psi_{red} = \Psi_0 (e^{ik_x x} + e^{-ik_x x} + e^{ik_y y} + e^{-ik_y y}) ,$$

donde  $k_x = k_y = 2\pi/d$  y  $d$  el período de la red. Para la observación de propagación lineal en este arreglo, se logró inducir una red de período  $d = 5 \mu\text{m}$  y  $d = 17 \mu\text{m}$  con parámetros de escritura de  $I_{red} = 60 \mu\text{W cm}^{-2}$ ,  $E_0 = 0.50 \text{ kV cm}^{-1}$  y  $t_w = 180 \text{ s}$ . Se realizaron dos tipos de excitaciones iniciales, la primera un haz ancho que imita una onda plana y un haz localizado en aproximadamente una guía del arreglo, donde la intensidad del haz en ambos casos fue de  $|\psi|^2 = 0.03 \mu\text{W cm}^{-2}$ .

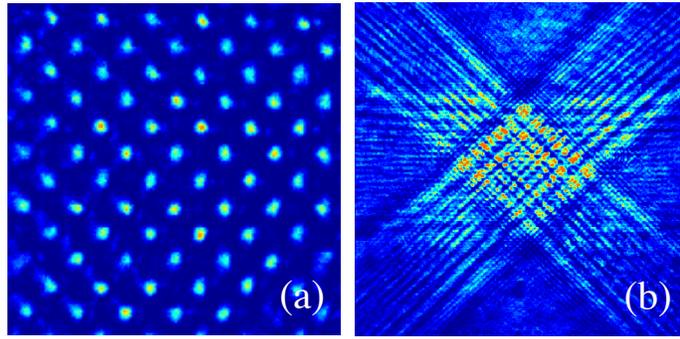


Figura 3.6: Propagación de luz en una red fotónica 2D diamante inducida en un cristal SBN. Patrón de intensidades a la salida del cristal para (a) la excitación con una onda plana para la red de período  $d = 17 \mu\text{m}$  (*waveguiding*) y (b) excitación con un haz localizado en una guía de la red con período  $d = 5 \mu\text{m}$ .

La excitación con una onda plana para una red de  $d = 17 \mu\text{m}$  es mostrada en la figura 3.6(a), en la cual es posible observar las propiedades de guíaje de la red inducida mostrando un patrón con geometría diamante. Por otro lado, el patrón de salida resultante de la excitación con un haz localizado para una red de  $d = 5 \mu\text{m}$  es mostrado en la figura 3.6(b), la cual confirma que la difracción en esta red se puede entender como una superposición de dos difracciones uni-dimensionales debido a la mayor excitación de los 4 lóbulos más alejados del centro. Al igual que el caso 1D, se observa luz en regiones que corresponde a la excitación de bandas superiores. También, se realizó una espectroscopía de Brillouin, que es mostrada en la figura

3.7(b), en la cual se observan las esperadas líneas oscuras que dan cuenta de las regiones prohibidas de propagación. Además, esta imagen muestra la segunda y la tercera zona mucho más tenue que la primera debido a que la excitación fue realizada con un haz cuyo vector de onda logró excitar mayormente la primera zona. También muestra que las líneas verticales, que dividen a la segunda con la tercera zona, no están presentes debido a la anisotropía del cristal SBN.

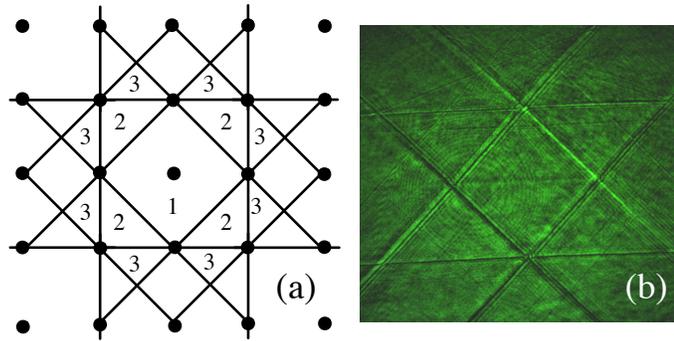


Figura 3.7: (a) Red recíproca y zona de Brillouin para una red diamante, (b) espectroscopía de Brillouin para la excitación localizada en un sitio del centro de la red diamante inducida de período  $d = 5\mu\text{m}$ .

Para la creación de un patrón hexagonal no difractante es necesario interferir 3 ondas con las condiciones mencionadas anteriormente [ver figura 3.2(b)]. La expresión matemática del campo está dada por

$$\Psi_{red} = \Psi_0 \left( e^{ik_x x} + e^{-i(k_x x/2 - \sqrt{3}k_y y/2)} + e^{-i(k_x x/2 + \sqrt{3}k_y y/2)} \right).$$

En el caso lineal, se logró inducir una red de período  $d = 10\mu\text{m}$  y  $d = 20.4\mu\text{m}$  con parámetros de escritura  $I_{red} = 47\mu\text{W cm}^{-2}$ ,  $E_0 = 0.50\text{ kV cm}^{-1}$  y  $t_w = 180\text{ s}$ . Al igual que para la red anterior, se realizaron dos tipos de excitaciones, onda plana y localizada en aproximadamente un sitio del arreglo, donde la intensidad del haz en ambos casos fue de  $|\psi|^2 = 0.03\mu\text{W cm}^{-2}$ . La figura 3.8(a) muestra el patrón de intensidades obtenido a la salida del cristal para la excitación con onda plana en la red de  $d = 20.4\mu\text{m}$ , en la cual se observa una geometría hexagonal. Mientras que, la figura 3.8(b) muestra una difracción discreta para una red de período  $d = 10\mu\text{m}$ . En esta

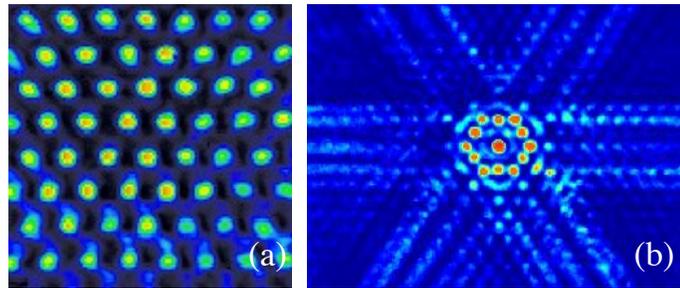


Figura 3.8: Propagación de luz en una red fotónica 2D hexagonal inducida en un cristal SBN. Patrón de intensidades a la salida del cristal para (a) la excitación con una onda plana para una red de período  $d = 20.4 \mu\text{m}$  (*waveguiding*) y (b) excitación con un haz focalizado en una guía de ondas de una red de período  $d = 10 \mu\text{m}$ .

imagen es posible observar una diferencia notoria con las difracciones mostradas en las geometrías precedentes, ya que la mayor intensidad permanece en el sitio de excitación. Adicionalmente, esta imagen muestra claramente el límite entre las regiones de excitación correspondientes a la primera banda con las regiones correspondiente a las bandas superiores, que es delimitada por sitios con alta intensidad. Finalmente, la figura 3.9(b) muestra la espectroscopía de Brillouin para la excitación localizada, mostrando las líneas oscuras que demarcan las distintas zonas de Brillouin. Al igual que para la espectroscopía de Brillouin de la red diamante, la anisotropía intrínseca del cristal SBN produce que las líneas verticales, que limitan la tercera zona, no estén presentes.

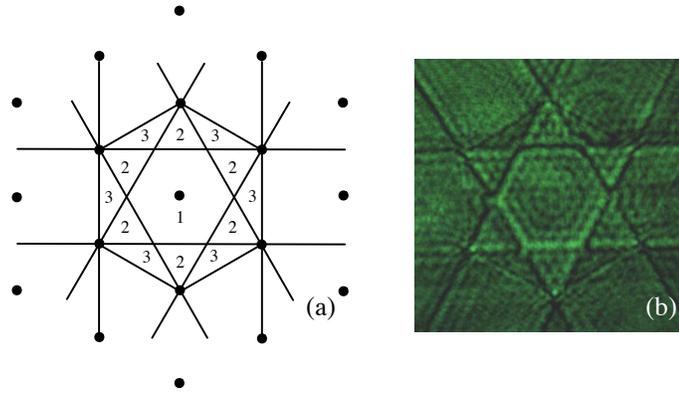


Figura 3.9: (a) Red recíproca y zona de Brillouin para una red hexagonal, (b) espectroscopía de Brillouin para la excitación localizada en un sitio del centro de la red hexagonal inducida de periodo  $d = 10\mu\text{m}$ .

### 3.4. Propagación no lineal de la excitación de una sola guía de ondas

Como se mencionó previamente, la formación de un solitón discreto surge como resultado de un balance entre la difracción discreta y el efecto de auto-enfoque no lineal en arreglos de guías de ondas periódicos, como fue predicho por Christodoulides y Joseph en 1988 [43]. En los experimentos pioneros de Eisenberg *et al.* un solitón discreto en 1D fue observado en un arreglo de guías de ondas no lineal de AlGaAs [11], en el cual la luz comienza a atraparse en sólo unas pocas guías de ondas mediante el auto-enfoque no lineal, como oposición al esparcimiento lateral lineal que es producto del acoplamiento evanescente de las guías. La primera observación de un solitón discreto fue en la llamada región de *gap* semi-infinito. Esto es, debido a que la no linealidad induce una modificación del índice de refracción, así la constante de propagación del solitón (frecuencia) fue localmente elevada al *gap* semi-infinito bajo la no linealidad auto-enfocante. En experimentos consecutivos, Morandotti *et al.* estudió el transporte de un solitón discreto como también la dinámica de auto-enfoque y desenfoque en un arreglo de guías de ondas 1D [35] basado en las propiedades de difracción normal y anómala en estos sistemas [32, 33].

La estructura de bandas y *gaps*, y las propiedades peculiares de difracción de un sistema discreto óptico provee muchas otras posibilidades para solitones espaciales que no pueden ocurrir en sistemas ópticos continuos. Un ejemplo único de solitón en sistemas discretos es un solitón de *gap*. La existencia de un solitón espacial de *gap* en redes fotónicas fue sugerida por Kivshar en 1993 [44]. En contraste a la existencia de un solitón discreto en el *gap* semi-infinito, este solitón requiere un balance entre la difracción anómala y la no linealidad auto-desenfocante. En este caso, el cambio del índice de refracción produce que la frecuencia del solitón esté entre la primera y la segunda banda (dentro del primer *gap*), cerca del borde de la primera zona de Brillouin (BZ) del arreglo de guías de ondas. El solitón de *gap* tiene una estructura de fase escalonada (*staggered*), como fue primeramente observado en una red fotónica no lineal 1D ópticamente inducida en un cristal no lineal fotorefractivo [13].

Los desafíos de construir redes fotónicas de dimensiones superiores y, por consiguiente, la observación de fenómenos no lineales en estos sistemas, no fueron superadas hasta el año 2003 cuando se reportó la primera observación de un solitón discreto en una red cuadrada 2D construida en un cristal fotorefractivo anisotrópico [14]. Muchas de las ideas importantes para superar estos desafíos fueron sugeridas por Efremidis en 2002 [12], que básicamente consistían en la utilización del método de inducción en un cristal SBN.

Motivados por estos acontecimientos fundamentales para el desarrollo del área de la óptica discreta, en esta sección se aborda la formación de estas entidades localizadas en las redes fotónicas 2D recién estudiadas en el régimen lineal.

Hemos nuevamente inducido una red fónica con geometría diamante con una constante de red  $d = 10 \mu\text{m}$ , cuyo haz de escritura tenía una intensidad de  $I_{red} = 8.4 \mu\text{W cm}^{-2}$  y estaba sometido a un campo externo aplicado de intensidad  $E_0 = 0.75 \text{ kV cm}^{-1}$ . El tiempo de escritura fue de  $t_w = 300 \text{ s}$ . Una vez ya establecida la red en el cristal SBN, el haz de prueba fue lanzado en una sola guía del arreglo en la cara de entrada del cristal, con una intensidad que fue creciendo desde  $|\psi|_{inicial}^2 = 0.03 \mu\text{W cm}^{-2}$  hasta  $|\psi|_{final}^2 = 0.13 \mu\text{W cm}^{-2}$ , durante 180 s y con un campo externo constante de intensidad  $E_0 = -0.65 \text{ kV cm}^{-1}$ . En este proceso de aumento de la intensidad

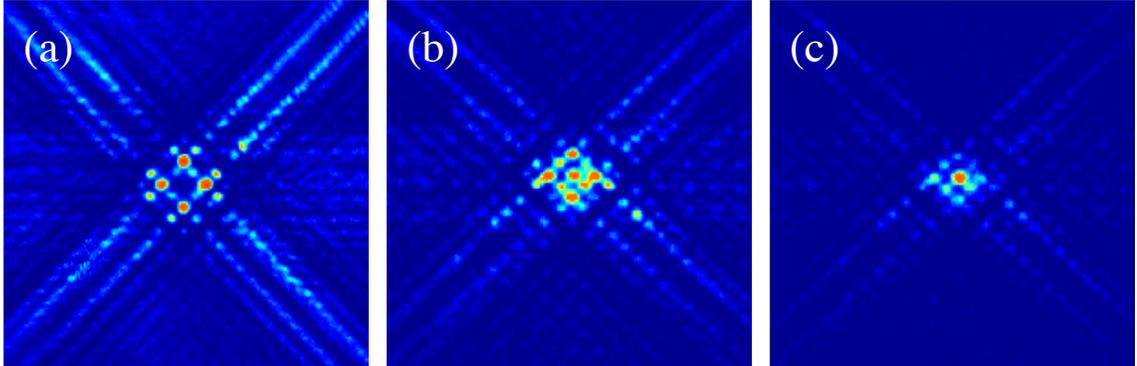


Figura 3.10: Resultados experimentales para la formación de un solitón discreto en una red fotónica diamante inducida, de constante de red  $d = 10 \mu\text{m}$ . (a) Difracción discreta con intensidad  $|\psi|_{inicial}^2$ , (b) transiente que muestra el auto-enfoque del haz y (c) solitón discreto con intensidad  $|\psi|_{final}^2$ .

del haz de prueba y con un campo externo aplicado, se monitorió la cara de salida del cristal. Para una intensidad baja, el haz de prueba experimenta difracción discreta, tal como lo muestra la figura 3.10(a). A medida que la intensidad va en aumento, la respuesta no lineal comienza a ser relevante y lleva al haz a auto-enfocarse, produciendo la formación de un solitón discreto, como bien lo muestran las figuras 3.10(b) y (c).

Con el objetivo de observar este mismo fenómeno no lineal en otra geometría, se creó una red fotónica hexagonal. Para este experimento, se indujo una red cuya constante de red fue  $d = 12 \mu\text{m}$  con parámetros de escritura de  $I_{red} = 5.1 \mu\text{W cm}^{-2}$ ,  $E_0 = 0.75 \text{ kV cm}^{-1}$ ,  $t_w = 90 \text{ s}$ . Ya establecida la red hexagonal en el cristal SBN, se procedió a excitar el arreglo con el haz de prueba enfocando en una guía del arreglo en la cara de entrada del cristal. Inicialmente, el haz de prueba fue inyectado con una intensidad de  $|\psi|_{inicial}^2 = 0.02 \mu\text{W cm}^{-2}$  con un campo externo de  $E_0 = -0.65 \text{ kV cm}^{-1}$ , observándose una dinámica lineal de este. Posteriormente, la intensidad del haz se aumentó continuamente hasta un valor final de  $|\psi|_{final}^2 = 0.13 \mu\text{W cm}^{-2}$ , durante 210 s, tiempo en el cual fue posible observar la formación de un solitón discreto para esta geometría. La figura 3.11 muestra el transiente entre una dinámica lineal a una no lineal debido al aumento de la intensidad del haz de prueba.

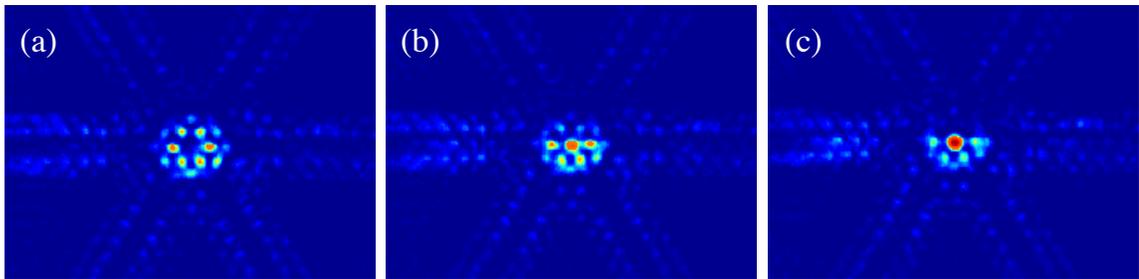


Figura 3.11: Resultados experimentales para la formación de un solitón discreto en una red fotónica hexagonal inducida, de constante de red  $d = 12 \mu\text{m}$ . (a) Difracción discreta con intensidad  $|\psi|_{inicial}^2$ , (b) transiente que muestra el auto-enfoque del haz y (c) solitón discreto con intensidad  $|\psi|_{final}^2$ .

## Capítulo 4

# Excitación de estados de banda plana en redes fotónicas escritas

Como se ha mostrado a lo largo de esta tesis, la localización debido a distintos fenómenos físicos como, por ejemplo, no linealidad o adición de desorden, ha sido una continua búsqueda en el área de los sistemas discretos. Recientemente, ha surgido una nueva forma de conseguir estados completamente localizados o compactos vía la utilización de redes no convencionales [19–22, 45–47]. La definición de redes no convencionales ha sido recién establecida [20] y se refiere a redes, completamente periódicas, que en su estructura de bandas presentan, a lo menos, una banda plana. La presencia de esta banda plana, cuya velocidad de grupo y coeficiente de difracción son idénticamente nulos, da origen a estados compactos y que están completamente localizados espacialmente, con nula difracción.

La primera observación experimental de modos (o estados) de banda plana fue realizada durante el desarrollo de esta tesis, utilizando una red fotónica de Lieb [21], que es lo que a continuación se detalla. Posteriormente, se mostrará la excitación de estados de banda plana pertenecientes a una red cuasi-1D, llamada red de Stub, y la aplicación de la superposición de estos modos compactos en puertas lógicas. Estas redes no convencionales han sido fabricadas por la técnica de escritura con un láser de femtosegundos [ver apéndice A.1], la cual permite crear estructuras 3D dentro de un vidrio de Silica [24].

## 4.1. Red fotónica de Lieb

La red de Lieb (patrón  $x - y$  en la figura 4.1(a)) corresponde a una red cuadrada que se le ha quitado periódicamente un sitio de la red. El principal interés en el estudio de esta geometría viene desde la física de sólidos, donde el ejemplo más famoso son los planos superconductores de Cuprato  $\text{CuO}_2$  [48, 49], pero en realidad muchas óxidos se ordenan también de esta forma. El interés inicial en esta red comenzó cuando se predijo teóricamente que el ferromagnetismo podía existir en una banda plana a medio llenar [50]. Posterior a esto, se probó que el ferromagnetismo en esta red era robusto ante excitaciones de ondas de spin [51]. Esta red también contiene propiedades topológicas inusuales; por ejemplo, en presencia de un campo magnético uniforme la banda plana permanece plana debido a razones netamente topológicas [52]. Además, la banda plana con las otras dos bandas lineales dispersivas se intersectan en un solo punto de Dirac, y en presencia de no linealidad tipo Kerr el sistema puede exhibir difracción cónica en los conos de Dirac [53, 54]. Hoy en día existen diversas técnicas para construir esta red; por ejemplo, manipulando átomos fríos en redes ópticas [55–57], usando la técnica de escritura de guías de ondas con un láser de femtosegundos (*femtosecond-laser written technique*) [21, 22, 54, 58] y utilizando la técnica de inducción de guías de ondas [46].

La presencia de una banda plana en el espectro de la red de Lieb implica la existencia de estados completamente degenerados, por lo que la superposición de ellos sigue siendo un estado estacionario del sistema. Esto permite la formación de anillos localizados espacialmente, cuya estructura individual ocupa sólo 4 guías del arreglo. La formación de estos estados localizados surge desde la alta degeneración de los autoestados de cero frecuencia, como fue mostrado en el contexto de sistemas con quiralidad conectados a un continuo [57]. Estas entidades localizadas compactas no difractan durante la propagación, permitiendo de esta forma la transmisión de información sin difracción a lo largo de un canal óptico [19].

La evolución de la luz a lo largo de la dirección  $\hat{z}$  en una red fotónica de Lieb, compuesta por guías de ondas ópticas idénticas acopladas débilmente, es bien descrita

por la ecuación DLS [ver ecuación (2.36) con  $\gamma = 0$ ], esta es:

$$-i \frac{d\psi_{\vec{n}}(z)}{dz} = \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} V_{\vec{n}, \vec{m}} \psi_{\vec{m}}(z),$$

donde el término de acoplamiento entre el sitio  $\vec{n}$  y  $\vec{m}$  de la red es denotado por  $V_{\vec{n}, \vec{m}}$ . En este modelo consideramos sólo interacción a primeros vecinos entre sitios A, B, C (celda unitaria) [ver figura 4.1(a)].

El espectro lineal de la red de Lieb es obtenido resolviendo la ecuación anterior con un *ansatz* estacionario,  $\psi_{\vec{n}}(z) = \psi_{\vec{n}} e^{i\beta z}$ . Para ser más general, consideramos una red anisotrópica donde los coeficientes de acoplamiento horizontal ( $V_y$ ) y vertical ( $V_x$ ) pueden ser, en principio, diferentes. Para los tres sitios de la celda unitaria, construimos las interacciones de acoplamiento considerando un vector de onda de Bloch 2D,  $\vec{k} = \{k_x, k_y\}$ , y encontramos las tres bandas lineales de este sistema,

$$\beta(\vec{k}) = 0; \pm 2\sqrt{V_x^2 \cos^2(k_x) + V_y^2 \cos^2(k_y)}.$$

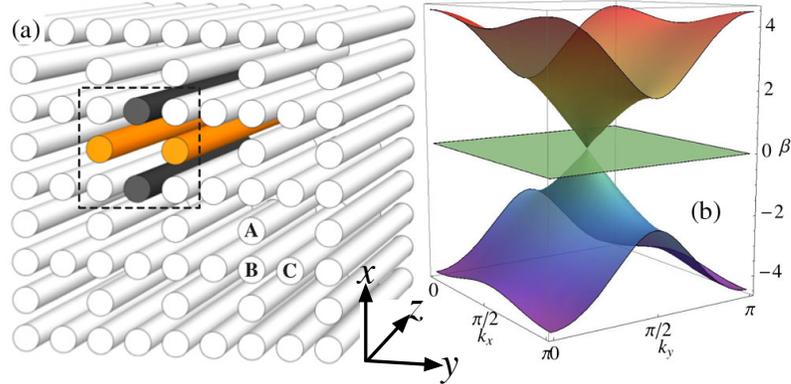


Figura 4.1: (a) Red de Lieb con sitios A, B, C definiendo la celda unitaria. La región de la línea punteada encierra un perfil del modo anillo de 4 sitios, en la cual los colores representan diferentes amplitudes y diferentes fases. (b) Espectro lineal de una red de Lieb anisotrópica para  $V_x = 2V_y$ .

En la figura 4.1(b), el espectro lineal  $\beta(\vec{k})$  es mostrado dentro de la primera zona de Brillouin. Dos bandas son dispersivas (curvatura distinta de cero), teniendo una

simetría de partícula-agujero [59], en la cual para cada  $\vec{k}^*$  hay dos autofrecuencias  $\pm\beta(\vec{k}^*)$ . Observamos que, para  $V_x > V_y$  las bandas de dispersión muestran una diferente curvatura dependiendo de la dirección de  $\vec{k}$ , donde en general, ondas en la orientación  $\hat{x}$  se propagan más rápido. Estas dos bandas son conectadas por un punto de Dirac en  $\beta = 0$ . Exactamente en este valor, una banda completamente plana (sin dispersión) está situada. Interacciones diagonales (segundos vecinos) pueden ser consideradas despreciables en nuestro enfoque con el objetivo de preservar la no dispersión de esta banda plana [53]. Además, esta consideración es bien justificada por el experimento.

En general, los modos de un sistema son completamente extendidos. Sin embargo, un sistema con banda plana permite la formación de estados compactos [59]. En la red de Lieb, cualquier anillo cerrado del arreglo (formado por ocho sitios) puede soportar un modo anillo, donde la amplitud de los sitios B es cero y las otras dos amplitudes satisfacen la relación  $V_y C = -V_x A$ , como es esquematizado en la figura 4.1(a). Una medida que da cuenta de la localización de los modos anillos es la razón de participación ( $\mathcal{R}$ ) definida en la ecuación (2.44), que para estos es  $\mathcal{R} \leq 4$ . Esto significa que, estos estados constituyen un estado muy localizado y compacto, apareciendo sólo por virtud de simetría en una red completamente periódica. Este modo anillo puede ubicarse en cualquier posición de la red y se propagará sin difractar a lo largo de la dirección longitudinal [19].

#### 4.1.1. Robustez del modo anillo

Con el objetivo de conocer la viabilidad de observar experimentalmente el modo anillo, hemos estudiado la robustez del modo anillo en una red de Lieb finita e isotrópica, en presencia de ruido en el acoplamiento y ruido en la constante de propagación. Esto es debido a que una red fotónica del Lieb real puede presentar ciertas diferencias en las distancias entre las guías de ondas, lo que se traduce en el modelo como un ruido en el acoplamiento; o puede que las guías de ondas no sean exactamente idénticas entre si, lo que se puede estudiar incluyendo ruido en la constante de propagación. Para una red fotónica de Lieb finita de  $n$  sitios se tiene un conjunto de  $n$

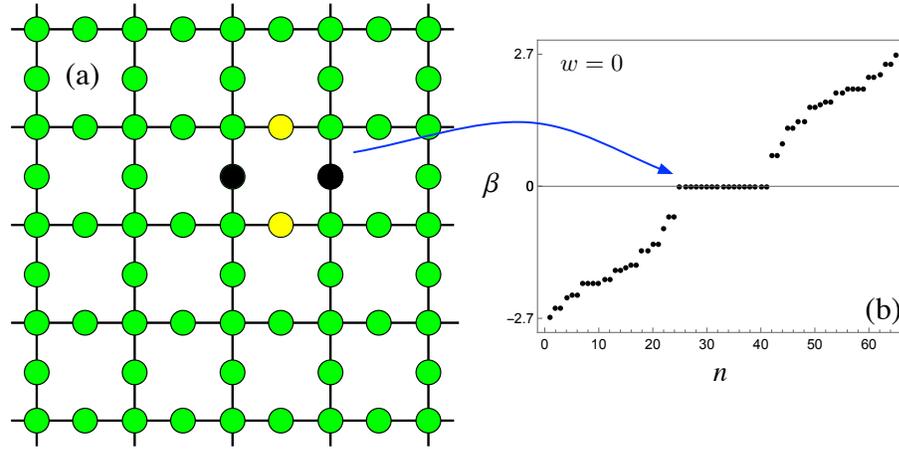


Figura 4.2: (a) Red fotónica de Lieb finita e isotrópica con el modo anillo simétrico; en la cual la escala de colores va desde negativo negro a positivo amarillo, pasando por amplitud cero verde. (b) Autovalores o bandas numéricas asociada a la red de Lieb.

ecuaciones del tipo DLS. Utilizando un *ansatz* estacionario se obtienen  $n$  ecuaciones algebraicas, las cuales pueden ser resueltas mediante el método de diagonalización, obteniendo de esta forma los  $n$  autovectores y  $n$  autovalores asociados. La figura 4.2(a) muestra la red de Lieb a estudiar con el modo anillo simétrico que posee y en la figura 4.2(b) se muestran los autovalores correspondiente a esta red, en la cual se observan una degeneración en  $\beta = 0$  que corresponde a la banda plana del sistema. Comenzaremos estudiando el ruido en el acoplamiento, para esto se ha examinado los efectos de una perturbación aleatoria en el acoplamiento,  $V \rightarrow V + \delta V$ , donde  $\delta V \in [-w, w]$  y se comporta acorde a una distribución uniforme en este rango. Hemos fijado  $V = 1$  y seleccionado dos valores representativos para  $w$ . Como se puede observar en la figura 4.3(a) y (c) la banda plana no se destruye en presencia de ruido pero, al contrario, las bandas dispersivas se ven afectadas. Esto implica que el modo anillo sigue siendo un modo estacionario del sistema pero no necesariamente simétrico. La figura 4.3(b) y (d) muestra la propagación de un anillo simétrico a lo largo de la coordenada  $z$ , para distintas magnitudes de ruido. Como se observa la propagación es casi perfecta. Esto es debido a que las amplitudes del modo anillo dependen de los

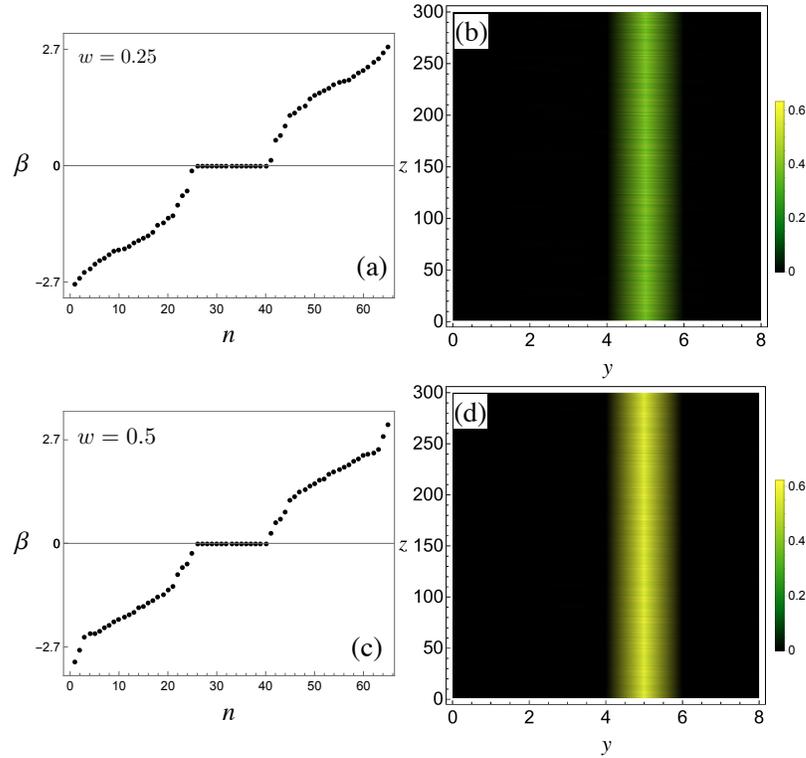


Figura 4.3: Bandas numéricas para una red fotónica de Lieb con ruido en el acoplamiento de magnitud (a)  $w = 0.25$  y (c)  $w = 0.5$ , con  $V = 1$ . Dinámica hasta  $z = 300$  para una condición inicial tipo anillo simétrico en una red de Lieb con ruido en el acoplamiento de magnitud (b)  $w = 0.25$  y (d)  $w = 0.5$ .

acoplamientos, por lo que el modo simétrico no es un modo estacionario del sistema, pero si está muy cerca de este.

Nuestro segundo análisis de ruido es el asociado a la constante de propagación. Hemos también examinado este ruido como una perturbación aleatoria a esta cantidad,  $\beta_{\vec{n}} \rightarrow \beta_{\vec{n}} + \delta\beta$ , donde  $\delta\beta \in [-w, w]$  y se comporta igualmente como una distribución uniforme en este rango. Como tenemos una red con guías de ondas idénticas, podemos fijar  $\beta_{\vec{n}} = \beta_0 = 0$ . Al contrario de lo que ocurre con la presencia de ruido en el acoplamiento, la presencia de ruido en la constante de propagación destruye completamente la banda plana, incluso a valores pequeños de  $w$ . La figura 4.4 muestra el caso para  $w = 0.075$ . Para valores mayores de  $w$  se observa una ausencia de

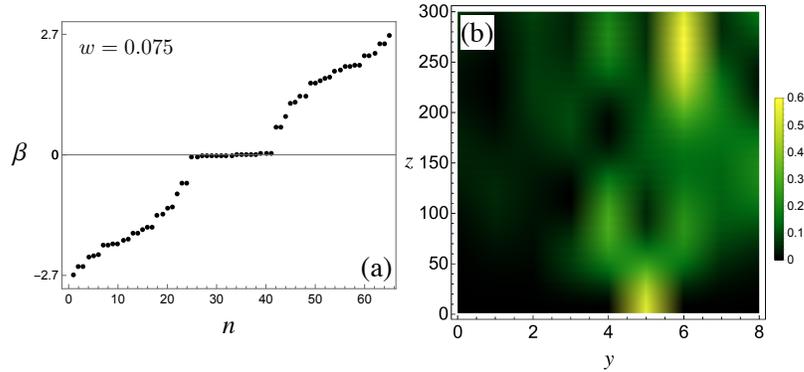


Figura 4.4: (a) Bandas numéricas para una red fotónica de Lieb con ruido en la constante de propagación de magnitud  $w = 0.075$ . (b) Dinámica hasta  $z = 300$  para una condición inicial tipo anillo simétrico en esta red.

degeneración a  $\beta = 0$ , lo que implica una ausencia de banda plana en el sistema. La figura 4.4(b) evidencia esto, ya que muestra la inmediata destrucción de una condición inicial tipo anillo simétrico. Debido a que la banda plana de la red de Lieb no se destruye en presencia de anisotropía, este mismo estudio en una red anisotrópica entrega resultados muy parecidos.

#### 4.1.2. Experimentos

El análisis descrito anteriormente sugiere que la banda plana (y, por lo tanto, el modo anillo) es robusta ante ruido en el acoplamiento pero, no lo es, ante ruido en la constante de propagación. Por lo que, para llevar a cabo la observación experimental de estos modos localizados lineales se requiere una técnica que fabrique guías altamente idénticas. Para cumplir con estos requisitos hemos utilizado una red fotónica de Lieb fabricada mediante la técnica de escritura de guías de ondas con un láser de femtosegundos, en un cristal de Silica fundido de 10 cm de largo [24], como es esquematizado en la figura 4.5(a) [ver apéndice A.1 para mayores detalles]. El período de la red es de  $d = 20 \mu\text{m}$  y una distancia de propagación de  $L = 10$  cm. Consideramos luz verde de  $\lambda = 532$  nm, ya que esta lleva a un acoplamiento más débil entre los sitios de la red y, por lo tanto, a una fenomenología más discreta. Para

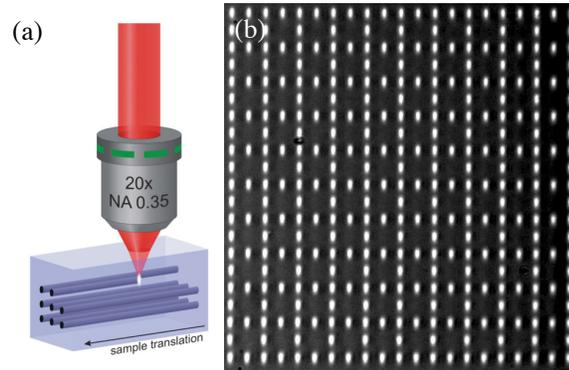


Figura 4.5: (a) Esquema de la técnica de escritura con láser de femtosegundos. (b) Imagen microscópica de la cara de salida del cristal cuando es iluminado con luz blanca incoherente.

observar las cualidades de la red, iluminamos con luz blanca la cara de entrada del cristal y tomamos una imagen microscópica a la salida de éste, imagen que es mostrada en la figura 4.5(b). En esta, observamos los modos propagantes de cada guía, los cuales muestran una notoria elipticidad, afectando fuertemente el acoplamiento entre sitios vecinos. Observamos más luz evanescente entre sitios verticales que entre sitios horizontales, debido al acoplamiento anisotrópico efectivo ( $V_x > V_y$ ).

La observación experimental de los modos tipo anillo envuelve distintas etapas para la preparación de la condición inicial apropiada. Esencialmente, requiere la creación de un patrón apropiado de amplitud y fase para ser utilizado como condición inicial de excitación, en la cara de entrada del arreglo. En la figura 4.6 se esquematiza el montaje experimental utilizado. Usamos un SLM de transmisión (*Holoeye LC2012*) que modula, simultáneamente, la amplitud y la fase de un haz ancho. Separamos el SLM en dos partes. En el primer camino (recuadro rojo), modulamos la amplitud del haz ajustando los ángulos de dos polarizadores. Generamos un patrón de muchos discos de luz de un determinado radio (que se ajusta para que sea el mismo que el tamaño que las guías de ondas en la cara de entrada) y determinada geometría (considerando la estructura de Lieb). Una vez que esta modulación es lograda, pasamos este patrón de luz a través de la segunda parte del SLM para

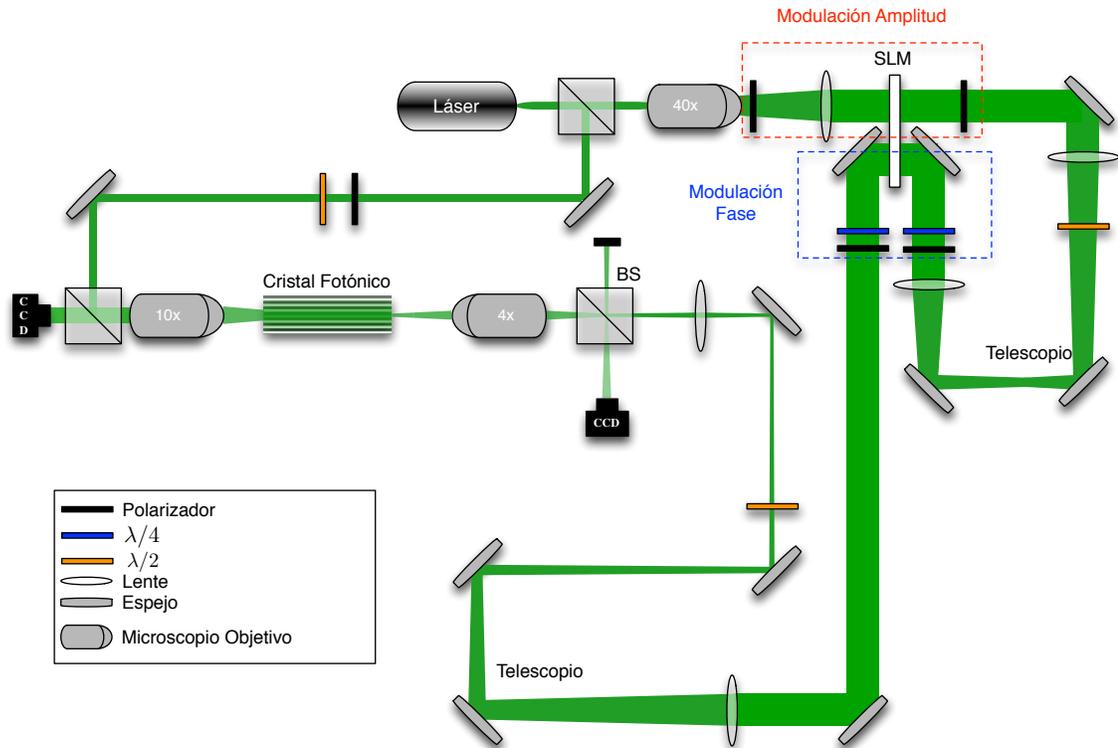


Figura 4.6: Esquema del montaje experimental empleado para la excitación de los estados de banda plana en una red fotónica de Lieb. Recuadro rojo encierra los componentes ópticos necesarios para la modulación de amplitud, mientras que, recuadro azul encierra los componentes ópticos para la modulación en fase.

modular el perfil de amplitud en fase ( $0$  o  $\pi$ ). Esta modulación es realizada en la región demarcada por el recuadro azul, donde se utilizan dos retardadores de cuarto de onda y dos polarizadores <sup>1</sup>. Adicionalmente, se incluyeron dos retardadores de media onda para controlar la polarización del haz. Después de estas etapas, se obtiene un patrón de luz modulado en amplitud y fase, con una determinada polarización. En nuestro experimento, la luz es polarizada en la dirección horizontal  $\hat{y}$ , con el objetivo de observar una mayor área de difracción [60]. Finalmente, inyectamos este haz modulado en la cara de entrada de nuestra red fotónica de Lieb utilizando un microscopio objetivo  $4\times$ , y observamos el perfil de excitación con una cámara

<sup>1</sup>Tanto los polarizadores como los retardadores de onda fueron fijados en un ángulo adecuado para obtener la máxima modulación de fase y mínima modulación amplitud.

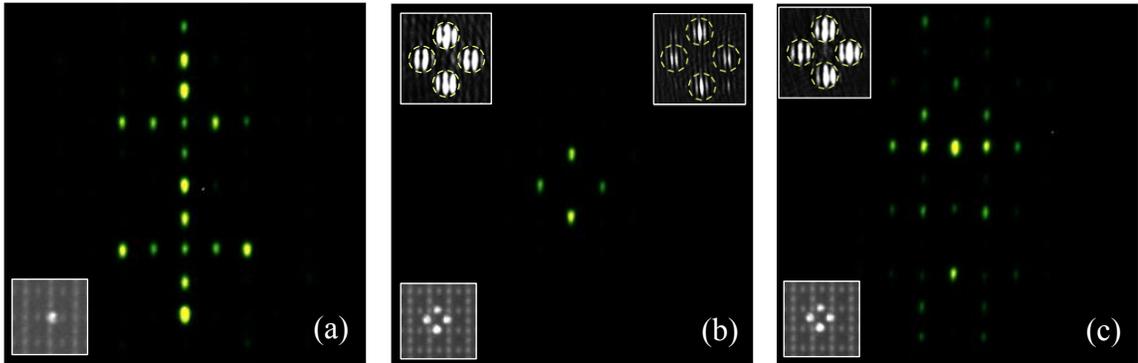


Figura 4.7: Perfiles experimentales de salida para diferentes excitaciones: (a) Un solo sitio B, (b) anillo fuera de fase y (c) anillo en fase. En (a)-(c) inset abajo-izquierda muestra la intensidad del perfil de entrada. Inset arriba en (b) y (c) muestra un interferograma del modo anillo con un haz gaussiano para los perfiles de entrada (izquierda) y salida (derecha).

CCD después de ser reflejado en un separador de haces (BS). Obtenemos el perfil de salida utilizando un microscopio objetivo  $10\times$  y una cámara CCD. Para obtener la estructura de fase de diferentes perfiles, interferimos los perfiles de entrada y salida con un haz gaussiano ancho y con un cierto ángulo.

Empezamos estudiando la difracción en el centro (o *bulk*) de la red fotónica, mediante la excitación de un solo sitio B, la cual es la condición que mejor excita las bandas dispersivas del espectro lineal [58]. Inyectamos la luz en el centro de la red y observamos el patrón de difracción mostrado en la figura 4.7(a). Observamos una pequeña área de difracción, la cual es un indicador de un escenario de débil interacción (modelo de *tigh-binding*). Adicionalmente, debido a la elipticidad de las guías de ondas, observamos un patrón de dispersión anisotrópico y verticalmente orientado, implicando que  $V_x > V_y$  en nuestro experimento. Posterior a esto, preparamos una excitación simétrica del modo anillo, teniendo 4 discos de luz con igual amplitud y una estructura de fase escalonada y observamos su casi perfecta propagación a lo largo de la red, ver figura 4.7(b). Como la condición inicial es cercana pero no necesariamente el modo anillo exacto del sistema, la luz relaja a esta configuración no simétrica debido a la anisotropía presente. Al aumentar la exposición de la cámara (imagen que no es mostrada), se observa una débil radiación que es también genera-

da a través de la red, la cual es manifestación de la presencia de bandas dispersivas en el sistema. Interfiriendo el perfil del modo anillo de entrada y salida con un haz gaussiano ancho, observamos que la estructura de fase es exactamente la misma a la esperada [ver figura 4.7(b)-inset]: Hay una diferencia de fase  $\pi$  entre sitios vecinos del anillo, como es predicho por el modelo empleado. Esto muestra que la predicción del modelo discreto es válida en el laboratorio y que las propiedades fundamentales de la red de Lieb han sido observadas en este experimento. Además, hemos probado la relevancia de la estructura de fase, en la condición inicial, utilizando una excitación anillo de cuatro sitios en fase, como muestra la figura 4.7(c). El patrón de salida muestra una destrucción del perfil inicialmente localizado debido a la excitación predominante de las bandas dispersivas.

Finalmente, con el objetivo de probar la excitación de los modos anillos como estados estacionarios y su potencial uso para la transmisión de información óptica en regiones acotadas de la red, realizamos diferentes configuraciones de modos anillos. Primero, preparamos una condición inicial compuesta por dos anillos verticalmente sumados y observamos su perfecta propagación en la figura 4.8(a). Esto muestra experimentalmente la robustez de la aplicación del análisis discreto. Este patrón no tiene una radiación de fondo considerable y posee la misma estructura predicha para la combinación de dos modos anillos anisotrópicos. Adicionalmente, esta combinación fue llevada a cabo pensando en la mayor difracción vertical posible que podría ser excitada; sin embargo, observamos una perfecta propagación localizada. Como último paso, probamos otras combinaciones lineales, en la figura 4.8(b) observamos la propagación de dos anillos no interactuantes a lo largo de una diagonal. También, estudiamos la propagación de patrones más complejos mediante la combinación de cuatro modos anillos. Construimos y propagamos una combinación de cuatro anillos verticalmente restados y horizontalmente sumados, ver figura 4.8(c), y una combinación completamente aditiva, ver figura 4.8(d). Seleccionando cuidadosamente la fase y localización de estos modos, diferentes patrones lineales pueden ser propagados para crear un código basado en estos estados fundamentales, los que son altamente localizado.

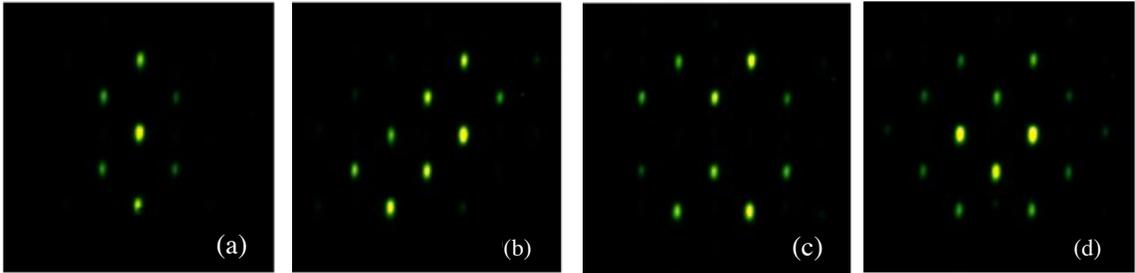


Figura 4.8: Excitación de estados compuestos de modos anillos: (a) dos modos anillos sumados verticalmente, (b) dos modos anillos no interactuantes a lo largo de una diagonal, (c) cuatro modos anillo verticalmente restados y horizontalmente sumados y (d) cuatro modos anillos completamente sumados.

## 4.2. Red fotónica de Stub

La red fotónica de Stub consiste de una fila central con sitios extras cada dos guías de ondas, como lo muestra la figura 4.9(a). Esta red corresponde a un sistema cuasi-1D, que también es conocida como Lieb 1D ya que tienen la misma celda unitaria. A la fecha, pocos sistemas cuasi-1D con bandas planas han sido experimentalmente explorados. Recientemente, fue reportada la observación de estados localizados en una red Rómbica, que consiste en un modo localizado que presenta sólo dos sitios que están fuera de fase entre ellos [45]. Además, nuestro grupo ha investigado experimentalmente una red Sawtooth [61], mostrando como la ausencia de transporte se relaciona con la aparición de una banda plana. La condensación de polaritones fue mostrada en una red de Lieb 1D (Stub), en el contexto de cavidades ópticas de micro-pilares [62]. Esa fue la primera observación experimental de propiedades relacionadas con la red de Stub, aunque la excitación aislada de estados localizados de banda plana no fue posible en ese experimento.

Con la observación de los estados de bandas planas en la red fotónica de Lieb se vislumbró el camino hacia una codificación óptica mediante la propagación de combinaciones lineales de estos estados. Para concretizar esta idea, la red fotónica de Stub aparece también como un sistema ideal para explorar en más detalle operaciones lógicas completamente ópticas. De esta forma, en esta sección estudiamos

las propiedades fundamentales de los modos de banda plana en la red de Stub y su aplicación a puertas lógicas.

La evolución de la luz en este arreglo de guías de ondas, que ocurre a lo largo de la dirección  $\hat{z}$ , compuesta por guías de ondas ópticas idénticas acopladas débilmente, es bien descrita por la ecuación DLS [ver ecuación (2.36) con  $\gamma = 0$ ], la cuales para esta geometría específica se escribe como:

$$\begin{aligned} -i\frac{da_n}{dz} &= V_v b_n; \\ -i\frac{db_n}{dz} &= V_v a_n + V_h(c_n + c_{n-1}); \\ -i\frac{dc_n}{dz} &= V_h(b_{n+1} + b_n). \end{aligned} \quad (4.1)$$

$a_n, b_n, c_n$  representan las amplitudes del modo fundamental del campo eléctrico de las diferentes guías de ondas que componen la celda unitaria (compuesta por los sitios A, B y C de la figura 4.9(a)). Sólo hemos asumido interacción a primeros vecinos, regido por las constantes de acoplamiento horizontal  $V_h$  y vertical  $V_v$ . Primero que todo, resolvemos el modelo (4.1) usando un *ansatz* estacionario de la forma  $\psi_n(z) = \psi_0 \exp[i(k_y n d_y - \beta z)]$ , con  $\psi_n(z) = a_n(z); b_n(z); c_n(z)$ , dependiendo de la posición particular de la guía de ondas. Este *ansatz* representa una onda plana viajando en la dirección  $\hat{y}$  del arreglo, mientras se propaga longitudinalmente en la dirección  $\hat{z}$ .  $k_y$  representa el vector de onda horizontal. Insertando este *ansatz*, obtenemos las bandas lineales (relación de dispersión)

$$\beta(z) = 0, \pm \sqrt{4V_h^2 \cos^2(k_y d_y) + V_v^2}.$$

Graficamos este espectro en la figura 4.9(b) y observamos dos bandas dispersivas con curvatura opuesta, y una completamente plana en  $\beta = 0$ . La amplitud en el sitio B siempre es cero para los modos lineales pertenecientes a la banda plana. Para la red de Stub, un estado compacto lineal esta compuesto de sólo tres sitios diferentes de cero [62]. La relación entre la amplitud del sitio A y C está dada simplemente por  $a = -V_h c / V_v$  (ver figura 4.9(b)-inset, la escala va desde negativo negro a positivo

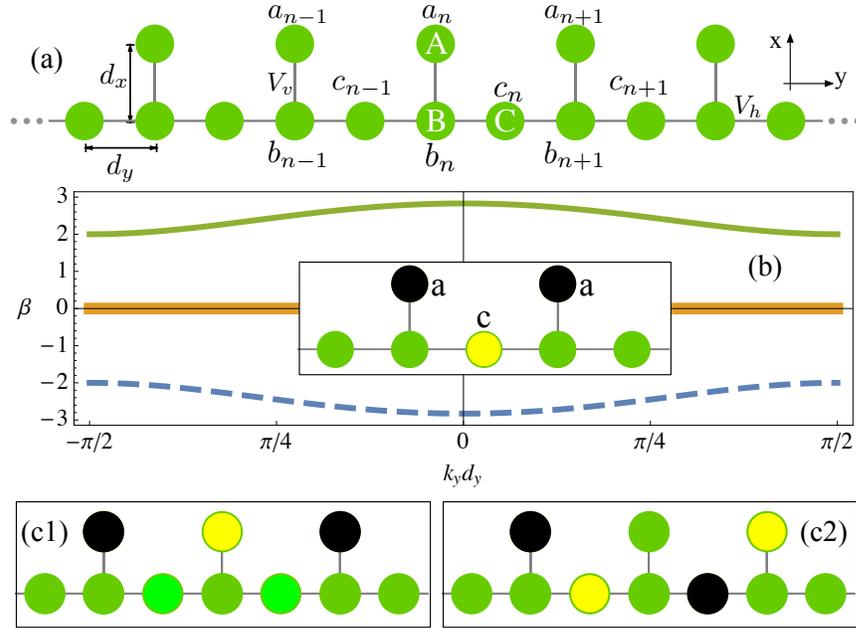


Figura 4.9: (a) Distribución espacial de la red de Stub. (b) Bandas lineales para  $V_h = 1$ ,  $V_v = 2$ , (b)-inset estado de banda plana compacto. Dos estados de banda plana combinados: (c1) en fase y (c2) fuera de fase.

amarillo, pasando por amplitud cero verde). Como se mencionó anteriormente, la excitación simultánea de estados compactos forma una combinación lineal coherente, la cual se propaga estable a lo largo de la dirección  $\hat{z}$ . La combinación lineal más simple consiste en dos modos de banda plana vecinos. Esta puede ser una combinación en fase o fuera de fase, como lo muestra las figuras 4.9(c1) y (c2), respectivamente. La principal diferencia en términos de amplitud es que la combinación en fase tiene un valor mayor de la amplitud en el sitio A central, mientras que la combinación fuera de fase tiene nula amplitud en esta posición. Estas dos combinaciones de estados compactos nos permiten crear distintos patrones que son útiles para una codificación óptica, como lo mostraremos más adelante.

### 4.2.1. Robustez del modo anillo

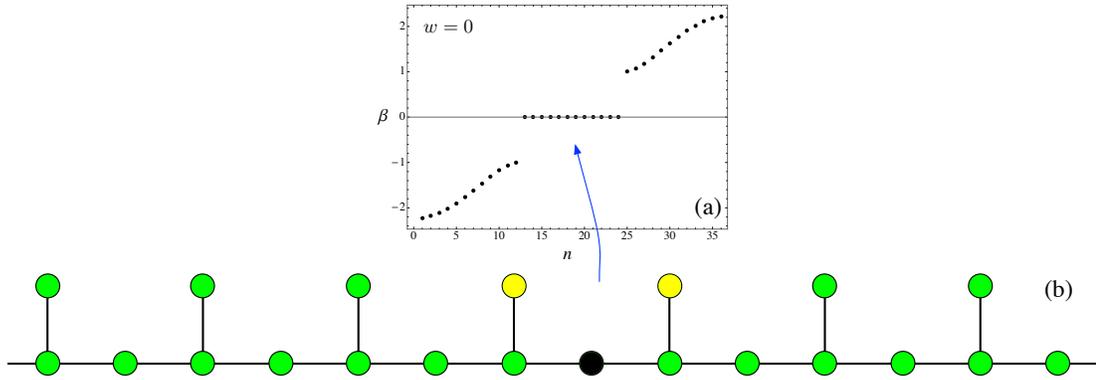


Figura 4.10: (a) Autovalores o bandas numéricas asociada a la red de Stub. (b) Red fotónica de Stub finita e isotrópica con el modo anillo simétrico; la escala de colores va desde negativo negro hasta positivo amarillo, pasando por amplitud cero verde.

Al igual que para el caso de la red de Lieb, hemos estudiado la robustez del modo anillo en una red de Stub finita e isotrópica en presencia de ruido en el acoplamiento y en la constante de propagación. Este estudio se hace fundamental, no sólo por el hecho de la observación experimental, sino por la confiabilidad que puede entregar este sistema para la operación de las puertas lógicas propuestas más adelante. Para una red fotónica de Stub finita de  $n$  sitios se tiene un conjunto de  $n$  ecuaciones tipo DLS. Utilizando un *ansatz* estacionario se obtienen  $n$  ecuaciones algebraicas, las cuales resueltas entregan un conjunto de autovectores y autovalores de la red. La figura 4.10(b) muestra la red de Stub a estudiar con el modo anillo simétrico que posee, mientras que la figura 4.10(a) muestra los autovalores correspondiente a una red de 37 guías de ondas, en la cual existe una degeneración en  $\beta = 0$  que corresponde a la banda plana del sistema.

Para el caso de ruido en el acoplamiento, se ha estudiado los efectos de una perturbación aleatoria,  $V \rightarrow V + \delta V$ , donde  $\delta V \in [-w, w]$  y se comporta como una distribución uniforme. Para esta red hemos también fijado  $V = 1$  y seleccionado dos valores representativos de  $w$ . La figura 4.11(a) y (c) muestra que la banda plana persiste en presencia de ruido, al igual que para la red de Lieb, implicando la existencia

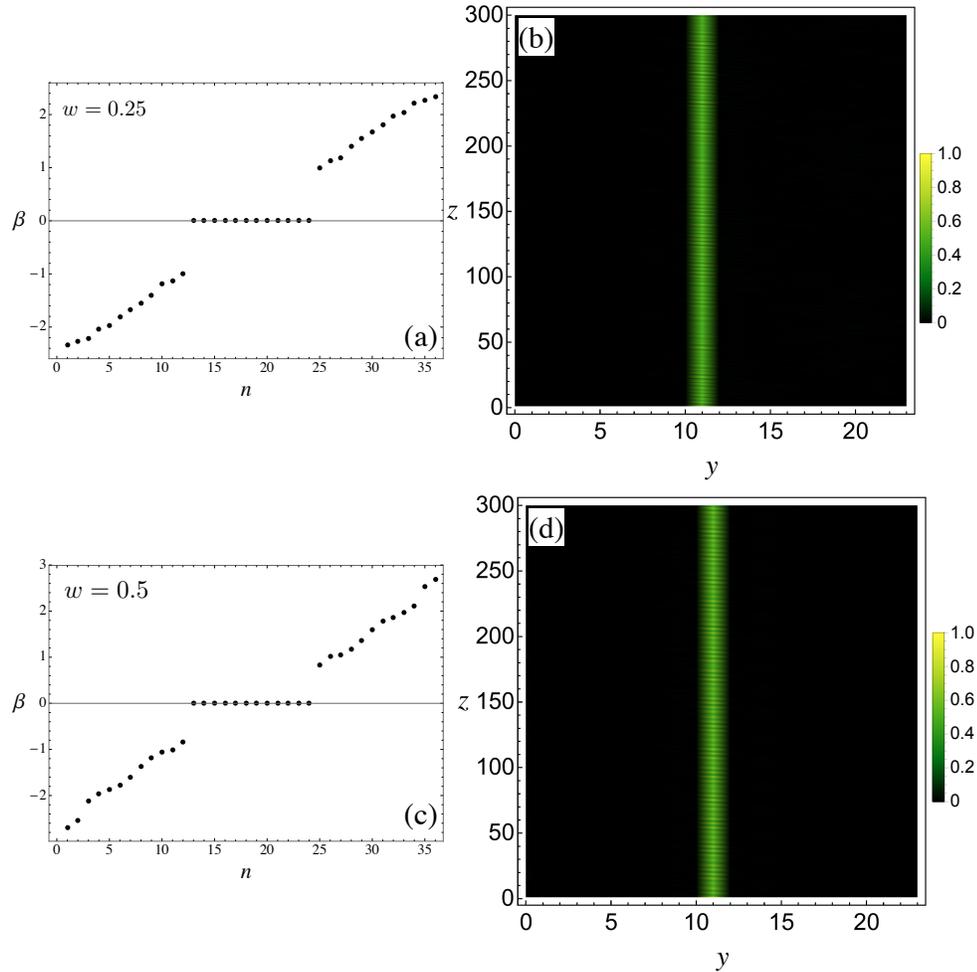


Figura 4.11: Bandas numéricas para una red fotónica de Lieb con ruido en el acoplamiento de magnitud (a)  $w = 0.25$  y (c)  $w = 0.25$ . Dinámica hasta  $z = 300$  para una condición inicial tipo anillo simétrico en una red de Lieb con ruido en el acoplamiento de magnitud (b)  $w = 0.25$  y (d)  $w = 0.5$ .

del modo anillo como solución estacionaria del sistema. Para comprobar esto se ha propagado una condición inicial tipo anillo simétrico, para distintos valores de ruido. La figura 4.11 muestra estas propagaciones hasta  $z = 300$ , en las cuales se observa una casi perfecta propagación del anillo, debido a que las amplitudes del modo anillo depende de los valores del acoplamiento. Por lo tanto, para estas redes el modo anillo

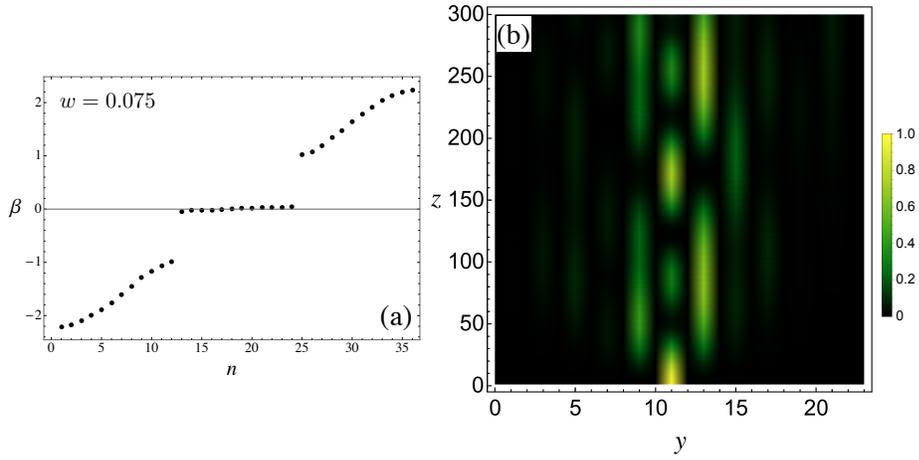


Figura 4.12: (a) Bandas numéricas para una red fotónica de Lieb con ruido en la constante de propagación de magnitud  $w = 0.075$ . (b) Dinámica hasta  $z = 300$  para una condición inicial tipo anillo simétrico en esta red.

existe pero ya no es simétrico <sup>2</sup>.

También, hemos considerado un ruido en la constante de propagación como una perturbación aleatoria  $\beta_{\vec{n}} \rightarrow \beta_{\vec{n}} + \delta\beta$ , donde  $\delta\beta \in [-w, w]$  y se comporta acorde a una distribución uniforme. Al igual que antes fijamos  $\beta_{\vec{n}} = \beta_0 = 0$ . Para este caso la banda plana se destruye incluso en presencia de valores pequeños de ruido. La figura 4.12 muestra el caso para  $w = 0.075$ . Al igual que para la red de Lieb, al aumentar el ruido se observa una ausencia de degeneración a  $\beta = 0$ , por lo tanto una ausencia de banda plana en el sistema. En la figura 4.12(b) se puede observar la nula propagación de una condición inicial tipo anillo simétrico, en una red de Stub con ruido en la cte. de propagación igual a  $w = 0.075$ . Para el caso de una red anisotrópica se esperan similares resultados, ya que la banda plana no se ve afectada con esta modificación de la red [63].

#### 4.2.2. Experimentos

Con el objetivo de validar el modelo (4.1) y las características particulares de la geometría de Stub, hemos utilizado una red fotónica de Stub fabricada con la técnica

<sup>2</sup>Un estudio similar se ha realizado en Ref. [63], este muestra similares resultados.

de escritura con láser de femtosegundos [24] en un vidrio de Silica fundido de largo  $L = 10$  cm. Esta red posee un total de 77 guías de ondas elípticas con 51 sitios en la fila principal y 26 en la superior. La distancia entre guías es  $d_x = d_y = 20 \mu\text{m}$ . Para probar visualmente las cualidades de la red, lanzamos luz blanca en la cara de entrada y tomamos una fotografía del perfil de salida usando una cámara CCD, como es mostrado en la figura 4.13(a). Al igual que para la red fotónica de Lieb, esta imagen muestra claramente que, aunque  $d_x = d_y$ , la elipticidad de las guías de ondas genera una anisotropía efectiva en términos de constantes de acoplamiento, esto es  $V_v > V_h$  en la práctica. Para la generación de las condiciones iniciales hemos utilizado el mismo montaje experimental mostrado en la sección anterior [ver figura 4.6], pero esta vez hemos transformado un haz ancho proveniente de un láser de luz roja de 633 nm en un patrón específico de luz.

Primero, estudiamos el transporte en el *bulk* de esta red usando una excitación de una sola guía de ondas. La figura 4.13(b) muestra el perfil espacial de salida después de la excitación de un sitio B en el centro del arreglo (círculo muestra la posición inicial). Esta condición inicial sólo excita la parte dispersiva del espectro, debido a la existencia de *gaps* entre las bandas dispersivas y la banda plana. Observamos una distribución transversal simétrica de la luz, que incluye un patrón de difracción característico [6]. La excitación de los sitios A y C muestra una mezcla entre difracción y localización, debido a la excitación de las tres bandas lineales.

Un segundo experimento consiste en la excitación de los estados compactos. Primero que todo, preparamos una imagen que ilumine solo tres sitios de la red, sin ninguna modulación de fase. Después de 10 cm de propagación, observamos que alguna parte de la energía permanece en la región de excitación pero, también, parte importante de la energía ha difractado en otros sitios de la red, esto es mostrado en la figura 4.13(c). Esto es esperable ya que esta condición inicial inyecta luz en los sitios A y C y, por lo tanto, gran parte del espectro es efectivamente excitado. Luego, utilizamos el mismo perfil de amplitud, pero con una estructura de fase escalonada, imitando el perfil teórico mostrado en la figura 4.9(b)-inset. En la figura 4.13(d) mostramos la excitación de este modo en una región central de la red fotónica. Esta

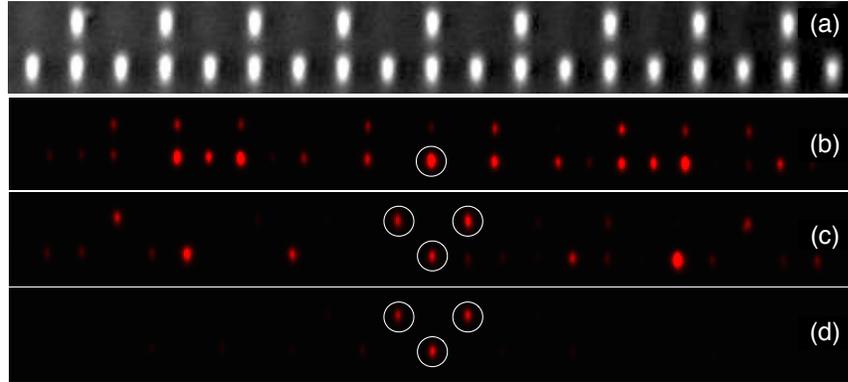


Figura 4.13: (a) Una imagen microscópica de la red fotónica de Stub. Perfiles de intensidades a la salida de la red fotónica para diferentes excitaciones: (b) sitio B, (c) tres sitios en fase, y (d) tres sitios fuera de fase. Circulos en (b), (c) y (d) indican la posición de la condición inicial.

imagen muestra un fondo oscuro sin ninguna excitación evidente de otras guías de ondas apreciable (fondo nulo). Este resultado es una directa confirmación de que la dinámica de esta red es bien descrita por el modelo (4.1) y que los estados de banda plana existen estable en esta red fotónica.

Posteriormente, hemos combinado dos modos localizados cercanos. Llamaremos al estado de banda plana de la izquierda como  $\phi_I$  [ver figura 4.14(a)] y al otro de la derecha es llamado  $\phi_D$  [ver figura 4.14(b)]. Podemos construir infinitas combinaciones lineales de ellos dependiendo de los coeficientes en frente de ellos:  $a\phi_I + b\phi_D$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Esta combinación lineal será coherente a lo largo de la coordenada de propagación  $z$ , ya que ambos estados pertenecen a la misma banda, teniendo la misma cte. de propagación  $\beta = 0$ . Por simplicidad, consideramos dos combinaciones lineales simétricas:  $\phi_I \pm \phi_D$ , como se esquematiza en la figura 4.9(c). Experimentalmente, hemos estudiado esta composición de estados mediante la generación de las condiciones iniciales correspondientes, las cuales tienen una modulación de amplitud y fase apropiadas. La figura 4.14(c) y (d) muestra los perfiles de salida para una combinación en fase ( $\phi_I + \phi_D$ ) y fuera de fase ( $\phi_I - \phi_D$ ), respectivamente, después de 10 cm de propagación. Aunque es posible observar algunas guías de ondas con

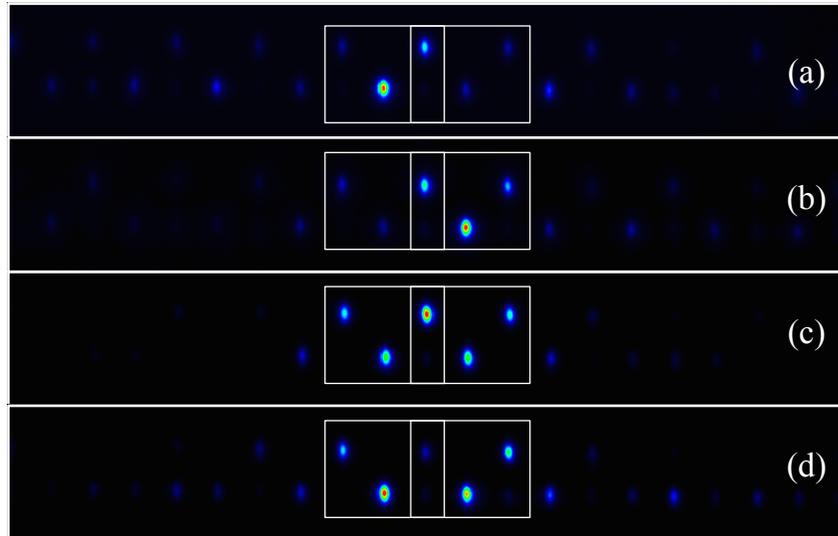


Figura 4.14: Perfiles de intensidad de salida para los estados (a)  $\phi_I$  y (b)  $\phi_D$ , y combinación lineal de estados de banda plana (c) en fase  $\phi_I + \phi_D$  y (d) fuera de fase  $\phi_I - \phi_D$ .

intensidad baja fuera de la zona de excitación, esto no afecta al perfil predominante<sup>3</sup>. Cuando hay una combinación en fase observamos la interferencia constructiva en el sitio central superior mostrado en la figura 4.14(c), con una muy alta intensidad en esta posición. Por otro lado, observamos interferencia destructiva en este sitio para una combinación lineal fuera de fase, como es mostrado en la figura 4.14(d).

En la figura 4.14 observamos 3 niveles de intensidad en el sitio central superior: baja (nivel del fondo), media y alta. Estas tres opciones nos dan la posibilidad de usar las combinaciones lineales de  $\phi_I$  y  $\phi_D$  para crear puertas lógicas bien conocidas. Usamos estos estados como señales de entradas izquierda y derecha en nuestras puertas, y definimos la intensidad en el sitio central superior como el canal de salida. Por ejemplo, una “Puerta OR” entrega un 0 sólo cuando ninguna señal es medida en la salida. Por lo tanto, como muestra la figura 4.15(a), excitando solo  $\phi_I$  o solo  $\phi_D$  o una combinación en fase  $\phi_I + \phi_D$ , exactamente generamos una puerta OR usando

<sup>3</sup>La composición de la imagen de entrada puede siempre tener algunas asimetrías en amplitud y fase, lo que puede excitar también parte del espectro dispersivo.

los modos de banda plana de la red fotónica de Stub.

Como la intensidad en el canal de salida (indicado por un círculo) puede tener una baja, media y alta intensidad, podemos también diferenciarlas en la salida mediante la medición de esta cantidad. Para generar una “Puerta AND”, usamos exactamente las mismas entradas anteriores, pero ahora definimos un umbral para considerar la salida como un 1. Simplemente definimos que baja y media intensidad corresponde a 0, mientras que alta intensidad generada por  $\phi_I + \phi_D$  es definida como una salida 1 [ver figura 4.15(b)]. Finalmente, generamos una “Puerta XOR” mediante la utilización de las entradas individuales ( $\phi_I$  y  $\phi_D$ ) y la combinación fuera de fase  $\phi_I - \phi_D$  [ver figura 4.15(c)]. De esta forma, cuando medimos una intensidad media en el sitio central superior, definiremos una salida igual a 1. Esto ocurrirá cuando las entradas sean inyectadas sólo independientemente. Si ningún modo o ambos son inyectados en una combinación lineal fuera de fase, el sitio central superior tendrá cero o muy baja amplitud, correspondiendo a un 0 en el canal de salida. Podemos aumentar el desempeño de nuestro sistema mediante la redefinición de la medida del canal de salida. Aunque es muy simple e intuitivo definir una salida 0 cuando no hay luz y 1 cuando detectamos alguna cantidad de esta, podríamos definir nuestro sistema de la forma opuesta, sólo definiendo que no luz significa una salida igual a 1 y luz (o cierta cantidad de esta) corresponde a un 0, así se generan las puertas NOR, NAND y NXOR. En la práctica la definición de luz (o cierta cantidad de ella, fijada por el umbral) o no luz, pueden ser incorporado a nuestra sistema de detección (cámara, fotodiodo, etc).

(a) OR			(b) AND		
Input		Output	Input		Output
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

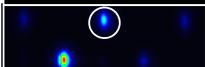
(c) XOR			
Input		Output	XOR
0	0	0	
1	0	1	
0	1	1	
1	1	0	

Figura 4.15: Tablas de verdad para las Puerta (a) OR, (b) AND, y (c) XOR. Imágenes experimentales de salida son también mostradas, junto con sus correspondientes entradas desde las tablas.

# Capítulo 5

## Red fotónica de Lieb con no linealidad tipo Kerr

Uno de los principales problemas en la teoría de los modos localizados no lineales es la descripción del movimiento transversal de estas entidades a través de la red. Cuando un modo se mueve transversalmente este cambia su posición y, por lo tanto, su estructura. En el caso de una red 1D, para cada nivel de potencia (norma) existen dos modos localizados estacionarios fundamentales, el centrado en un sitio (modo impar) y el centrado entre dos sitios (modo par). Sólo el primero es estable y representa un mínimo del Hamiltoniano. Si uno de estos modos es forzado a moverse hacia los lados, este tiene que saltar entre guías de ondas, pasando por configuraciones estables e inestables. La diferencia de Hamiltoniano en los respectivos casos, el llamado Potencial de Peirls-Nabarro (PNP), toma en cuenta la resistencia que el solitón tiene que superar durante la propagación transversal [64]. Cuando los niveles de potencia crecen el potencial de PN crece, resultando en una fuerte localización del solitón, principalmente en una sola guía de ondas la cual es efectivamente desacoplada del resto del arreglo. La verificación experimental de este peculiar comportamiento fue realizada por Morandotti *et al.* en 1999 [65], utilizando un arreglo de guías de ondas 1D de AlGaAs cuya no linealidad era del tipo Kerr.

También, la movilidad de soluciones localizadas ha sido estudiada teórica y/o numéricamente en redes fotónicas con no linealidad saturable, en una y dos dimensiones [66–69]. Para estos sistemas existen diferentes regiones de potencia donde la

diferencia de energía entre los modos fundamentales no lineales desaparece [66]. Cercano a estos puntos, hay regiones de intercambio de estabilidad entre las soluciones par e impar. Ya que estas regiones presentan biestabilidad, la aparición de una solución intermedia asimétrica e inestable es inevitable [67–69].

Por otro lado, recientemente se ha mostrado teóricamente que los estados de banda plana, perteneciente a redes fotónicas no convencionales, siguen siendo modos estacionarios fundamentales en un régimen no lineal con no linealidad tipo Kerr [20, 70]. Estas soluciones no lineales son perfectamente localizadas en una región espacial compacta; es por esto que a estas soluciones se les llama compactones. Para el caso específico de una red fotónica con geometría Kagome, el modo de banda plana además de ser una solución analítica del sistema en un régimen no lineal, también presenta movilidad a través de la red cuando se considera una no linealidad desenfocante ( $\gamma < 0$  en la ecuación DNLS) [70]. En la región de potencias donde ocurre esta movilidad, lo que ocurre a potencias bajas, el potencial PN entre el compactón y el modo fundamental de un solo sitio es casi nulo. Adicionalmente, en esta región estas soluciones presentan un intercambio de estabilidad, lo que produce la aparición de una solución intermedia que posibilita la movilidad del compactón a través de la red.

Este fenómeno no es sólo importante desde un punto de vista físico fundamental, sino que también desde un punto de vista de aplicaciones, ya que permite la conducción altamente eficiente de las soluciones no lineales a través de la red mediante el control de la potencia. Motivados por esto, en este Capítulo estudiamos numéricamente una red fotónica de Lieb con no linealidad tipo Kerr, considerando una red homogénea y binaria. Mostraremos que los modos de banda plana son efectivamente una solución analítica del sistema, pero también emplearemos el método numérico de Newton-Raphson multidimensional para encontrar distintas familias de soluciones. Posteriormente, para el caso de una red homogénea se mostrará que para parámetros particulares de potencia y frecuencia existe movilidad del compactón de Lieb a través de la red, mientras que, para una red binaria no fue posible encontrar dicha movilidad.

Como se describió anteriormente, una red fotónica con no linealidad tipo Kerr puede ser bien modelada mediante la ecuación no lineal de Schrödinger [ecuación (2.36)]. Utilizando un *ansatz* estacionario se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas, ecuación (2.41), las cuales pueden ser resueltas numéricamente de forma iterativa. Para el caso de la red fotónica de Lieb y con el objetivo de ser lo más general posible, consideraremos el término de constante de propagación en la guía de onda  $n$ -ésima ( $\beta_{\bar{n}}$ ) en la ecuación DNLS. Así, el conjunto de ecuaciones estacionarias toma la forma

$$(\beta - \beta_{\bar{n}})\psi_{\bar{n}} = \sum_{\bar{m}} V_{\bar{m},\bar{n}}\psi_{\bar{m}} + \gamma\psi_{\bar{n}}^3. \quad (5.1)$$

Como la estructura de bandas es altamente simétrica, cualquier resultado que se obtenga con no linealidad desenfocante tiene una contraparte con no linealidad enfocante, donde por un lado tendremos soluciones escalonadas (*staggered*) en fase y por otro lado soluciones planas en fase (*unstaggered*), respectivamente. Por lo tanto, sin perder generalidad estudiaremos la red de Lieb con no linealidad desenfocante, esto quiere decir  $\gamma < 0$ .

## 5.1. Red fotónica de Lieb homogénea

El primer caso a estudiar es el más simple, el cual corresponde a una red de Lieb no lineal en la cual todas sus guías de ondas son idénticas, esto quiere decir  $\beta_{\bar{n}} = \beta_0 \equiv 0$ . Además, consideraremos que el acoplamiento en la coordenada  $x$  e  $y$  son iguales, es decir,  $V_x = V_y = V$ . En el caso lineal, la estructura de bandas corresponde a la mostrada en la figura 5.1(b). En presencia de no linealidad los modos de banda plana siguen siendo modos no lineales del sistema, con exactamente la misma configuración espacial y de fase (esto es, sólo cuatro guías de ondas con amplitud distinta de cero y fase escalonada) y con un cambio en la frecuencia [20]. Para este caso específico de la red de Lieb, la ecuación (5.1) toma la forma

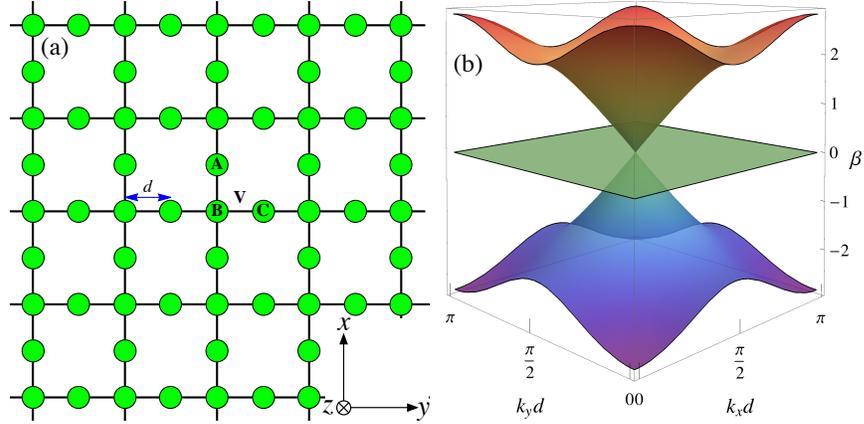


Figura 5.1: (a) Red fotónica de Lieb homogénea y (b) estructura de bandas correspondiente.

$$\begin{aligned}
 \beta a_{n+1,m} &= V [b_{n+2,m} + b_{n,m}] + \gamma a_{n+1,m}^3, \\
 \beta b_{n,m} &= V [a_{n+1,m} + a_{n-1,m} + c_{n,m+1} + c_{n,m-1}] + \gamma b_{n,m}^3, \\
 \beta c_{n,m+1} &= V [b_{n,m+2} + b_{n,m}] + \gamma c_{n,m+1}^3,
 \end{aligned}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las amplitudes en los sitios  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de la celda unitaria, respectivamente [ver figura 5.1(a)-Inset]. Suponiendo soluciones de onda plana,  $\{a_{\vec{n}}, b_{\vec{n}}, c_{\vec{n}}\} = \{A, B, C\} \exp(\vec{k} \cdot \vec{n})$ , las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}
 \beta A &= 2VB \cos(k_x d) + \gamma A^3, \\
 \beta B &= 2VA \cos(k_x d) + 2VC \cos(k_y d) + \gamma B^3, \\
 \beta C &= 2VB \cos(k_y d) + \gamma C^3.
 \end{aligned}$$

Si suponemos la forma espacial del modo localizado perteneciente a la banda plana lineal, esto es  $B = 0$  y  $A = -C$  con  $k_x = k_y = 0$ , este conjunto de tres ecuaciones se reduce a

$$\beta = \gamma C^2 \implies \beta = \frac{\gamma P}{4}, \quad (5.2)$$

donde  $P = 4C^2$ , debido a que estos modos sólo tienen 4 sitios distintos de cero y todos ellos con igual amplitud. Por lo tanto, para cualquier modo anillo no lineal (compactón), el cambio en la frecuencia se relaciona con la potencia de la forma descrita por la ecuación (5.2). De esta forma el modo anillo, y cualquier solución no lineal compuesta de una superposición de estos, bifurcan desde la banda plana ubicada en  $\beta = 0$  a  $P = 0$ , como lo muestra la curva negra en el diagrama  $P - \beta$  de la figura 5.2.

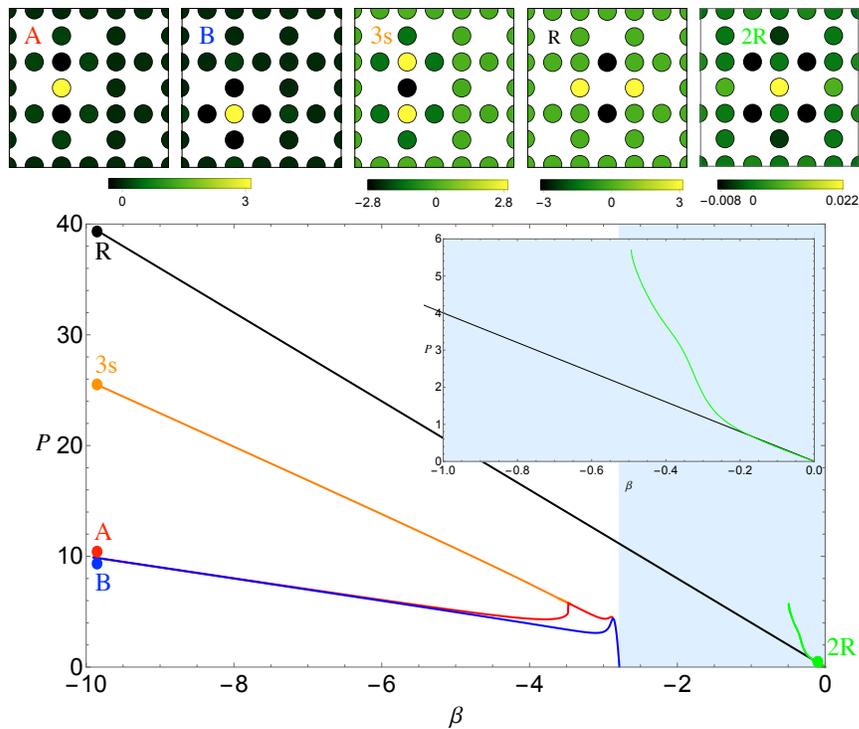


Figura 5.2: Arriba: Soluciones no lineales de la red fotónica de Lieb a frecuencia  $\beta = -10$  para las soluciones A, B y 3s, mientras que a potencias  $P = 0.001$  para la solución 2R. Abajo: Diagrama  $P - \beta$  de las soluciones, en el cual las soluciones de un sitio A y B son representadas por la curva roja y azul respectivamente; la solución 3s por la curva naranja; la solución 2R por la curva verde; y la solución R por la curva negra. Región celeste representa a la región de frecuencias correspondiente a las bandas lineales.

Por otro lado, una de las soluciones fundamentales en sistemas discretos no lineales corresponde a la “solución de un sitio” (solución impar). Ésta es identificada como

una familia de soluciones acercándose que tiende a un estado localizado de un solo sitio en el límite de no linealidad fuerte y acoplamiento débil (límite “anticontínuo”), y típicamente corresponde al modo no lineal fundamental geoméricamente más simple que bifurca desde el borde de banda [71]. También, para sistemas dos dimensionales es importante la caracterización de soluciones de un poco más de un sitio, ya que estas, en ciertos casos, pueden ser soluciones que participan en el proceso de movilidad [68,69]. Por lo tanto, utilizando el método numérico iterativo de Newton-Raphson [ver apéndice A.2] hemos construido dos familias de soluciones de un sitio, llamadas A y B; además, exploramos una familia de soluciones de tres sitios fuera de fase, llamada 3s; y, finalmente, la familia de soluciones 2R que corresponde a la suma horizontal de dos soluciones anillos (al momento de bifurcar desde la banda plana). La figura 5.2 muestra la distribución espacial de estas soluciones y la región de existencia dentro del espacio  $P - \beta$ . En éste gráfico es posible observar que los modos no lineales A, B y 3s bifurcan desde el borde de bandas lineales a potencias  $P = 0$ , sin umbral de excitación y siendo indistinguibles entre ellas a baja potencia. Mientras que, a valores altos de potencias la solución 3s se desvía notoriamente de las soluciones A y B. Adicionalmente, la solución 2R estudiada existe dentro de la banda lineal en un determinado rango de potencia donde su curva  $P - \beta$  se cruza con la curva de la solución R.

Hemos calculado la estabilidad lineal de las soluciones obtenidas analítica y numéricamente, con un procedimiento estándar [72], el cuál es descrito en el apéndice A.3. Básicamente, este análisis consiste en perturbar linealmente los modos no lineales y obtener el sistema de ecuaciones para la perturbación. Resolviéndolo se llega al espectro de autovalores lineales y se define  $G$  como el máximo autovalor de inestabilidad. La figura 5.3(a) muestra el diagrama  $G - P$  para las distintas soluciones. En él se observa que las soluciones A, B y 3s son estables a baja potencia donde son indistinguibles entre ellas y, a medida que la potencia aumenta, la solución 3s se vuelve altamente inestable. Las soluciones A y B son inestables en un determinado rango de potencias, dado por el cambio de curvatura de sus respectivas curvas  $P - \beta$ , siendo ambas estables a alta potencia. Un análisis de estabilidad para la solución

2R muestra que es estable en una pequeña región de baja potencia ( $P \leq 1$ ), siendo inestable para las otras potencias donde existe. Mientras que, la solución R muestra distintas magnitudes de inestabilidad a medida que aumenta la potencia, esto ocurre hasta un valor de  $P = 24.88$  donde se vuelve estable.

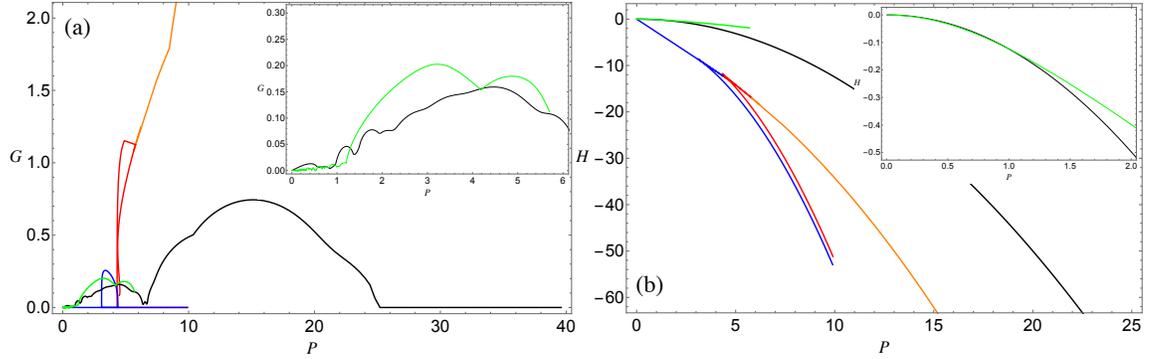


Figura 5.3: Diagrama (a)  $G-P$  y (b)  $H-P$  de las soluciones no lineales estacionarias; A (curva roja), B (curva azul), 3s (curva naranja), R (curva negra) y 2R (curva verde).

Una de las cantidades que predice el intercambio de estabilidad de soluciones y la movilidad de estas, es el hamiltoniano  $H$  [ver ecuación (2.43)] [64]. En la figura 5.3(b) se muestra un diagrama  $H - P$ , en la cual es posible observar que las soluciones A, B y 3s existen en una región de energía apartada a la de la solución R, sin presentar cruce entre ellas. Adicionalmente, es posible observar que la curva de la solución 2R existe en la región de la curva de la solución R y presentan un cruce entre ellas a potencias bajas. Por lo que, esta región es ideal para observar movilidad entre dichas soluciones, debido a que el potencial PN es pequeño.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento dinámico de las soluciones R y 2R, hemos realizado diferentes propagaciones hasta una cierta distancia  $z$  de una solución R como condición inicial, a una determinada potencia  $P$  y vector de onda en la dirección  $\hat{y}$  ( $k_y$ ), que fuerza a la solución a moverse en esta dirección (*kick*). Hemos barrido la potencia en el intervalo  $[0, 2]$ , mientras que, el *kick* en el intervalo  $[0, 1]$  con un paso  $\Delta P = 0.02$  y  $\Delta k_y = 0.01$ , respectivamente. Durante cada propagación, se

ha medido la distancia absoluta entre el centro de masa en la dirección  $\hat{y}$  ( $Y$ ) a  $z = 0$  y a cada  $z$ , centrándonos en la máxima de estas distancias. Con este barrido se han obtenido distintos valores  $(P, k_y)$  para los cuales la solución R presenta movilidad a través de la red. La figura 5.4 resume el proceso descrito, en la cual se puede observar una región a  $P \approx 1.3$  y  $k_y \approx 0.5$  donde  $Max(|Y_0 - Y_z|) = 5$ .

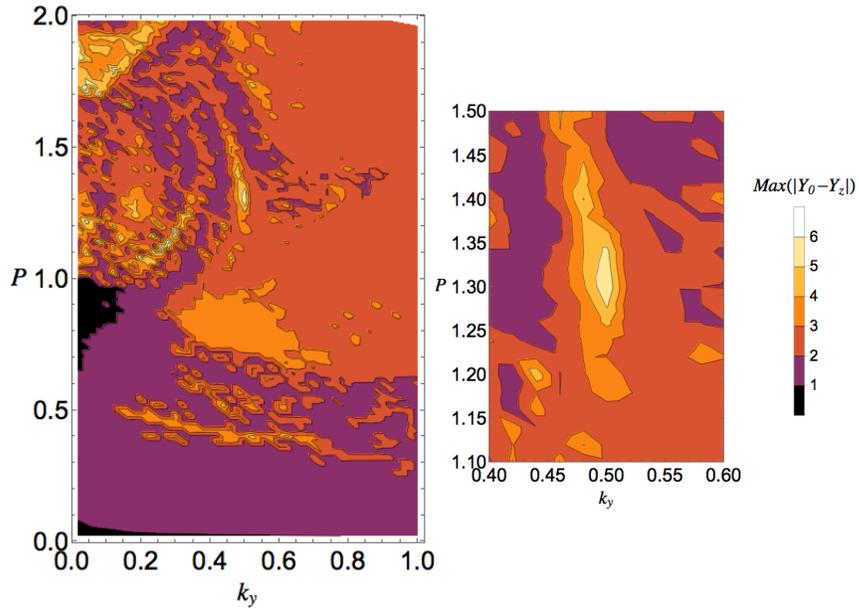


Figura 5.4: Diagrama de máximos desplazamientos del centro de masa en la dirección  $\hat{y}$  ( $Y$ ), para distintas propagaciones del modo anillo a distinta potencia y *kick* inicial. Las potencias iniciales se barrieron en un rango entre  $P \in [0, 2]$  con un paso  $\Delta P = 0.02$ ; mientras que, el *kick* inicial en un rango  $k_y \in [0, 1]$  con un paso  $\Delta k_y = 0.01$ .

Hemos seleccionado un punto de esta región que predice un alto desplazamiento del centro de masa en la dirección  $\hat{y}$ , este es  $(P, k_y) = (1.31, 0.50)$ , la figura 5.5 muestra la movilidad de la solución R para estos valores iniciales de potencia y *kick*. La figura 5.5(a) muestra una imagen integrada en la dirección  $\hat{x}$  de la dinámica hasta  $z = 600$  para esta condición inicial, donde es posible observar como la solución  $R$  se mueve a través de la red fotónica sin mayor deformación hasta que llega al borde de esta. La figura 5.5(b) muestra los perfiles de intensidad a determinados valores de  $z$ , que muestran claramente la presencia de la solución R y 2R en el proceso de movilidad

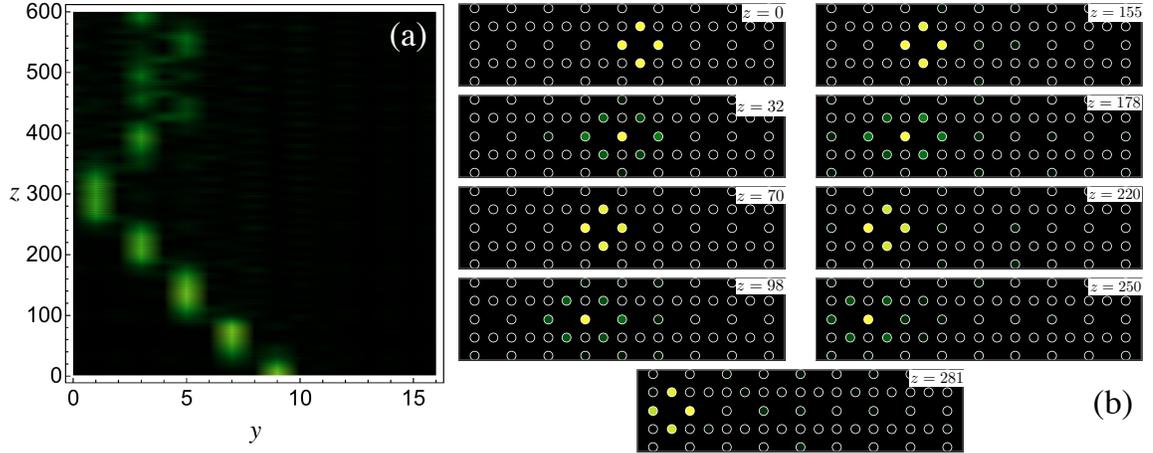


Figura 5.5: (a) Dinámica hasta  $z = 600$  de la solución R como condición inicial con parámetros  $(P, k_x) = (1.31, 0.50)$ . (b) Perfiles de intensidades para determinados valores de  $z$  indicados en la figura.

inducido. Para distintos valores de  $z$  se observa como las soluciones R y  $2R$  van apareciendo y transformándose entre ellas. Por ejemplo, para  $z = 32$  la solución R se ha transformado completamente en la solución  $2R$  y para  $z = 70$  vuelve aparecer la solución R. Este proceso continua suavemente hasta que el solitón enfrenta el borde de la red fotónica, colisionando y destruyéndose.

A diferencia la red fotónica de Kagome [70], la movilidad del anillo muestra una dependencia muy fuerte de la posición inicial y del tamaño de la red. Pero, realizando el proceso descrito anteriormente, para distintas posiciones iniciales y/o tamaño de red, es posible encontrar los parámetros adecuados de potencia y *kick* para los cuales existe movilidad en la dirección  $\hat{y}$ . Este resultado también se cumple para la dirección  $\hat{x}$ , ya que la red de Lieb estudiada es isotrópica.

## 5.2. Red fotónica de Lieb binaria

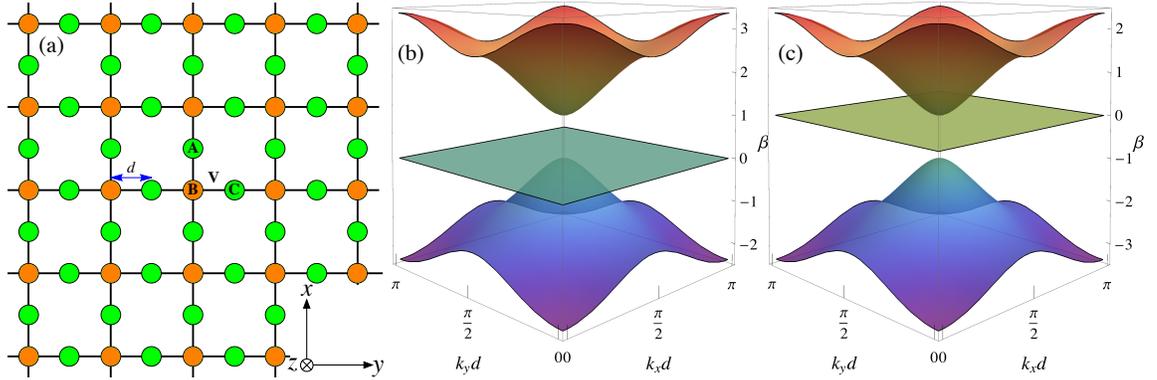


Figura 5.6: (a) Red fotónica de Lieb binaria, los colores representan las guías de ondas que tienen la misma constante de propagación entre ellas. Estructura de banda para (b)  $\Delta\beta = 1$  y (c)  $\Delta\beta = -1$ .

Unas de las preguntas que surge naturalmente después del estudio anterior es: ¿El anillo de Lieb (Solución R) se estabilizaría en presencia de un *gap* en la estructura de bandas lineal? y ¿la aparición de este *gap* mejoraría o no la movilidad de esta solución a través de la red?.

Si consideramos una red fotónica en la cual la constante de propagación del sitio B es distinta a la del sitio A y C (es decir  $\beta_b \neq \beta_a = \beta_c$ ), como resultado, en la estructura de bandas surge un *gap*<sup>1</sup>. El tamaño del *gap* depende de la magnitud de la diferencia entre estas constantes de propagación, por lo que definimos el parámetro

$$\Delta\beta \equiv \beta_a - \beta_b.$$

Así, para valores de  $\Delta\beta \neq 0$  la estructura de banda muestra la aparición de un *gap*. La figura 5.6 muestra una red de Lieb binaria junto a su estructura de bandas para dos valores distintos de  $\Delta\beta$ . El primer caso muestra cuando la diferencia es  $\Delta\beta = 1$  y existe un *gap* entre la banda plana y la banda dispersiva superior; y cuando la

<sup>1</sup>Para una red fotónica de Lieb en la cual las ctes. de propagación son todas distintas,  $\beta_a \neq \beta_b \neq \beta_c$ , la banda plana se convierte en una banda dispersiva.

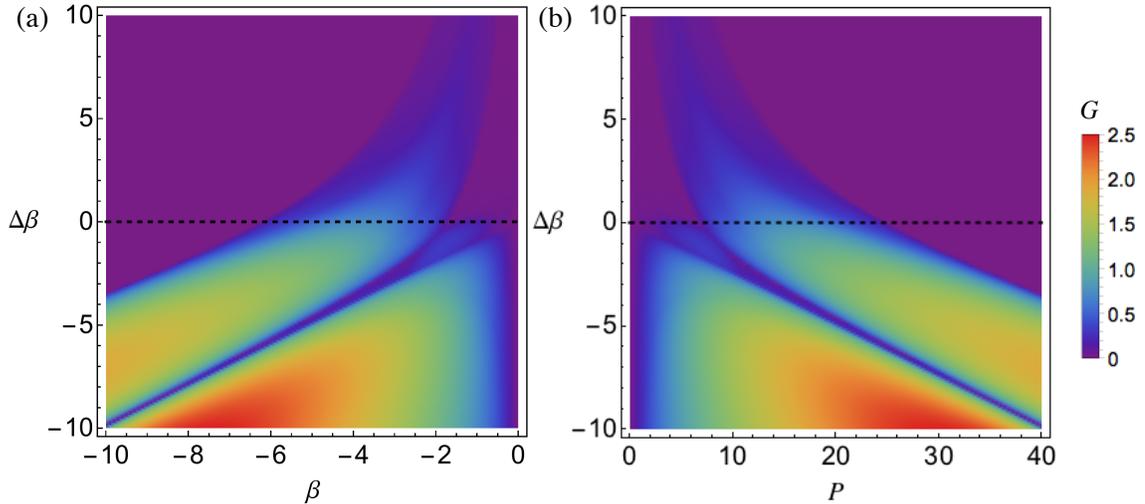


Figura 5.7: Gráfico de densidades para la estabilidad de la solución anillo en función de (a)  $\Delta\beta$  y la frecuencia  $\beta$  y (b)  $\Delta\beta$  y la potencia  $P$ .

diferencia es  $\Delta\beta = -1$ , valor para el cual existe un *gap* entre la banda dispersiva inferior y la banda plana.

Con el objetivo de estudiar la estabilidad de las solución no lineal R para no linealidad desenfocante ( $\gamma < 0$ ) en presencia del *gap*, hemos realizado el mismo análisis de estabilidad descrito anteriormente en función de  $\Delta\beta$  y  $\beta$ , como también en función de  $\Delta\beta$  y  $P$ . Con esto se han obtenido los gráficos de densidades mostrado en la figura 5.7. En estos se observa que para valores  $\Delta\beta < 0$ , que corresponde a una apertura del *gap* a frecuencias negativas, la solución R se vuelve más inestable a medida que este *gap* aumenta en magnitud, ya que muestra inestabilidad en una región de potencia más amplia. Por otro lado, para  $\Delta\beta > 0$ , que corresponde a una apertura del *gap* a frecuencias positivas, la solución R va mostrando una región más reducida de inestabilidad mientras el *gap* crece, por lo tanto, tiende a estabilizarse. Un estudio para el caso de no linealidad enfocante ( $\gamma > 0$ ) muestra el comportamiento inverso. Es decir, para  $\Delta\beta < 0$  la solución R tiende a estabilizarse, mientras que, para  $\Delta\beta > 0$  la solución R se vuelve más inestable.

Para saber si mejora o no la movilidad del anillo en presencia de un *gap* en las

bandas lineales, se ha buscado la solución suma horizontal de dos anillos (solución 2R) utilizando el método numérico iterativo de Newton-Raphson multidimensional controlando la potencia, para distintos valores de la diferencia de constante de la propagación, estos son  $\{\Delta\beta \in \mathbb{Z}/ -3 \leq \Delta\beta \leq 3\}$ . En la figura 5.8 se muestra el diagrama  $P - \beta$ ,  $G - P$ ,  $H - P$  y  $\mathcal{R} - P$  para la solución R junto a la de la solución 2R, para distintos valores de  $\Delta\beta$ . En esta figura las curvas punteadas y cortadas corresponden a valores de  $\Delta\beta < 0$ , así como las curvas punteadas corresponden a valores de  $\Delta\beta > 0$  (figura 5.8-insets). Se ha distinguido con colores los distintos valores de  $\Delta\beta$  estudiados.

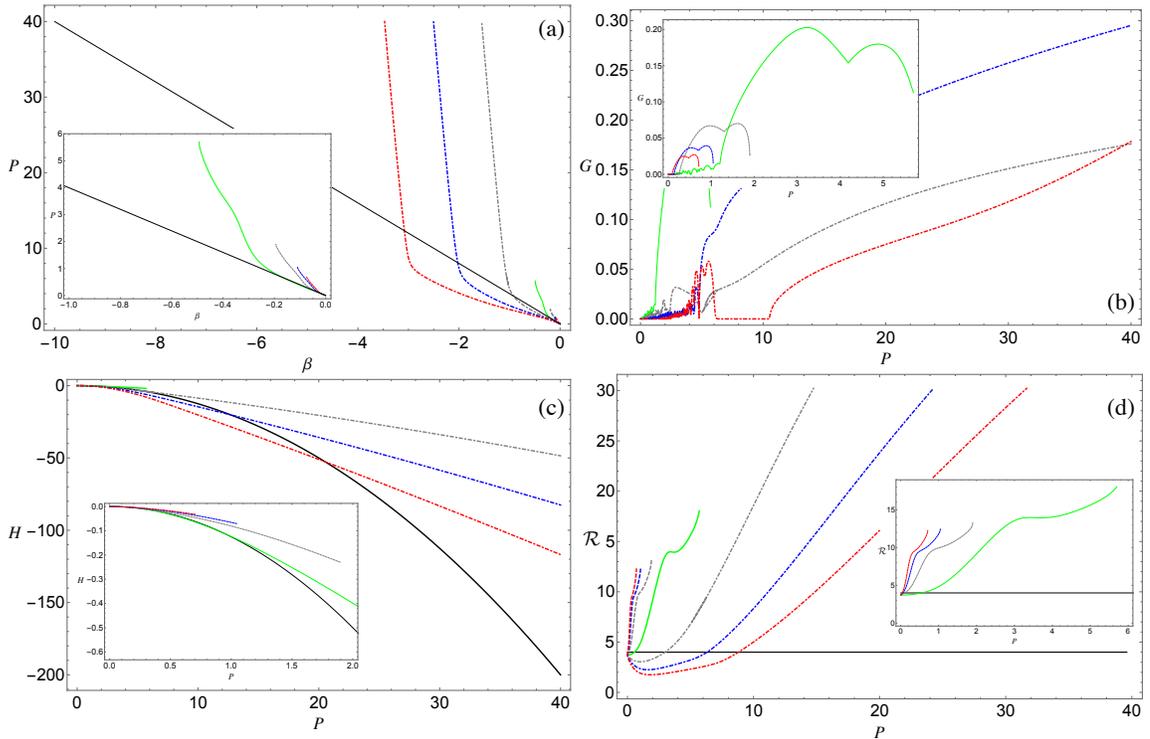


Figura 5.8: Diagramas (a)  $P - \beta$ , (b)  $G - P$ , (c)  $H - P$  y (d)  $\mathcal{R} - P$ , para la solución anillo (R) y solución suma de dos anillos (2R) en función del parámetro  $\Delta\beta$ . Curva solida para  $\Delta\beta = 0$ , curva negra para solución R y curva verde para solución 2R. Curvas cortadas para  $\Delta\beta > 0$ , curvas cortadas y punteadas para  $\Delta\beta < 0$  (insets). Color gris indica  $|\Delta\beta| = 1$ , azul indica  $|\Delta\beta| = 2$  y rojo indica  $|\Delta\beta| = 3$ .

En el diagrama  $P - \beta$  la curva de la solución R es siempre la misma para los

distintos valores de  $\Delta\beta$  (curva solida negra), ya que la forma espacial y de fase de esta solución no se altera. Al contrario, la curva correspondiente a la solución 2R depende de  $\Delta\beta$ . Para valores positivos de  $\Delta\beta$  [ver figura 5.8(a)-inset], la solución 2R sigue viviendo en la región de bandas lineales pero su región de existencia disminuye a medida que el tamaño del *gap* aumenta, siendo éstas siempre inestables. Por otro lado, para valores negativos de  $\Delta\beta$  la solución suma de dos anillos vive dentro del *gap* y una vez que alcanza la banda dispersiva inferior crece rápidamente en tamaño aumentando, también, su potencia significativamente. El análisis de estabilidad de esta solución muestra que para  $\Delta\beta = -3$  es estable en una pequeña región dentro del *gap*, pero que una vez alcanzada la banda lineal se inestabiliza completamente. Esta ventana de estabilidad puede ser debido a que la solución 2R tiende a la solución de un solo sitio cuando el *gap* aumenta su tamaño, por lo tanto, la solución 2R se transforma en una solución fundamental del sistema. Esto puede ser visto en la figura 5.8(d) ya que la razón de participación ( $\mathcal{R}$ ) muestra este comportamiento. Para los otros casos se observa que esta solución es siempre inestable.

En la figura 5.8(c) se presenta el diagrama  $H - P$  para la solución R y 2R en sus distintos casos. Ya que la solución anillo no cambia su forma espacial ni potencia para distintos valores de  $\Delta\beta$ , tampoco cambia su hamiltoniano. Así, para todos los casos presenta la misma curva en este diagrama, que corresponde a la curva solida negra. Para  $\Delta\beta > 0$ , deja de existir el cruce entre las curvas de energía de la solución R y la solución 2R [ver figura 5.8(c)-inset], por lo que no existe una región de “transparencia de energía” que permita la movilidad entre dichas soluciones. En contraste, para  $\Delta\beta < 0$  el cruce del hamiltoniano entre la solución R y 2R ocurre a distintos valores de potencia, que dependen de la magnitud de  $\Delta\beta$  [ver figura 5.8(c)]. Esto sugiere la existencia de movilidad entre estas soluciones no lineales, a determinadas potencias. Para ver si es posible mover la solución anillo, a distintos valores de  $\Delta\beta$ , hemos realizado el mismo procedimiento detallado en la sección anterior. Para cada valor de  $\Delta\beta$  negativo se han realizado muchas propagaciones de una condición inicial tipo anillo, para las cuales se ha controlado la potencia y *kick* inicial. La potencia se ha barrido dentro de un rango cercano al valor para el cual hay cruce de hamiltonia-

nos entre la solución  $R$  y  $2R$ . Mientras que, el *kick* se ha barrido en el rango  $[0, 1]$ . Con este procedimiento, para los tres casos, no se ha podido inducir movilidad de la solución anillo. La principal razón es que las soluciones  $R$  y  $2R$ , a potencias donde sus hamiltonianos tienen cruces, difieren drásticamente en forma espacial y fase. Un parámetro que sirve para ver esta diferencia es la razón de participación, ecuación (2.44). Si comparamos este parámetro a potencias en las cuales los hamiltonianos se cruzan, vemos que las soluciones están alejadas “en forma” [ver figura 5.8(d)]. Por lo tanto, aunque sus hamiltonianos son parecidos, estas soluciones difieren drásticamente entre ellas, por lo que no están realmente conectadas en la práctica. Cuando ocurren las llamadas “zonas de transparencia”, todos los parámetros se asemejan:  $\beta, P, H, \mathcal{R}$ , con tal de inducir dinámicamente una transformación entre un estado y otro que conserve la potencia [66].

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se ha logrado implementar la técnica de inducción en un cristal fotorefractivo SBN, con la cual fue posible crear redes fotónicas convencionales en una y dos dimensiones, para este último caso fue posible inducir una red diamante y hexagonal. Estas redes fueron excitadas con una condición inicial que iluminaba una sola guía de ondas, tanto en un régimen lineal como en uno no lineal. En el régimen lineal se observó la bien conocida difracción discreta para las tres redes fotónicas implementadas. Mientras que, para el régimen no lineal fue posible observar la formación de solitones discretos en las redes bi-dimensionales diamante y hexagonal, para determinados parámetros de intensidad del haz de prueba y voltaje aplicado al cristal fotorefractivo.

También, se ha creado un montaje experimental capaz de crear condiciones iniciales arbitrarias para la excitación de redes fotónicas no convencionales, las cuales fueron fabricadas utilizando la técnica de escritura con láser de femtosegundos. Esto es, patrones específicos de luz modulados en amplitud y fase que excitan una red fotónica particular. Hemos observado experimentalmente la excitación de un nuevo tipo especial de estado localizado, que consiste en un modo compacto perteneciente a la banda plana de una red fotónica de Lieb y Stub, validando de esta forma el enfoque discreto en un ambiente realista. En ambos casos hemos contrastado claramente las propiedades de localización de estos estados con respecto al transporte en el centro de la red (*bulk*). Para la red fotónica de Lieb, hemos demostrado la

necesidad de tener la estructura de fase apropiada que pueda excitar estas entidades localizadas. Adicionalmente, se han combinado estos modos para crear estados localizados coherentes compuestos, los cuales se propagan sin difracción a través de la red. Nuestros resultados muestran una nueva vía para propagar patrones localizados mediante la utilización de propiedades fundamentales de los sistemas de bandas planas en general, cubriendo desde estado sólido y magnetismo, hasta fotónica. Para la red de Stub, observamos la superposición lineal de dos estados de banda plana cercanos, considerando una combinación en fase y fuera de fase. Además, demostramos el uso de estados de banda plana como “canales de entrada” para la generación de tres operaciones lógicas totalmente ópticas, basadas en una excitación individual y combinada. Nuestros experimentos fueron realizados en cristales de 10 cm de largo, pero resultados similares pueden ser observados en redes más cortas o más largas, ya que las propiedades de localización de los estados de banda plana dependen sólo de la discretitud de la red, donde pocas celdas unitarias son necesarias para observar la fenomenología descrita, y no depende de la distancia de propagación. Este es un aspecto muy importante cuando se considera una reducción del sistema para aplicaciones concretas en menor espacio.

Por último, hemos estudiado numéricamente una red fotónica de Lieb, en la cual se ha considerado una no linealidad de tipo Kerr. Se ha demostrado que los estados de banda plana siguen siendo una solución analíticas en el régimen no lineal, con regiones de estabilidad e inestabilidad que dependen de la potencia. Para el caso de una red de Lieb homogénea, se han caracterizado distintas familias de soluciones no lineales y, además, se ha logrado observar la movilidad de una solución tipo compactón a través de la red, para determinados parámetros de potencia inicial y vector de onda transversal inicial. Para el caso de una red de Lieb binaria, se ha estudiado la estabilidad del compactón en presencia de un *gap* en el espectro lineal. Adicionalmente, se ha estudiado la movilidad de esta solución, estudio en el cual no se han podido encontrar los parámetros adecuados de potencia y *kick* inicial para observar dicho fenómeno.

# Apéndice A

## A.1. Técnica de escritura de guías de ondas con láser de femtosegundos

Cuando un láser de pulsos ultracortos focalizado dentro de un vidrio de silica fundido, absorción no lineal toma lugar llevando a una descomposición óptica y formación de un microplasma, lo cual induce un cambio permanente en la estructura molecular del material. Esto genera un aumento local de la densidad y, por lo tanto, un aumento del índice de refracción [24]. Moviendo la muestra transversalmente con respecto al haz, se logra una modificación continua y una guía de ondas es creada. Esta guía de ondas puede ser escrita a lo largo de caminos arbitrarios, donde el único factor limitante en la ubicación del foco es el largo focal del microscopio objetivo de escritura.

Los arreglos de guías de ondas o redes fotónicas utilizadas para los experimentos presentados en esta tesis, fueron fabricados con un sistema de láser Ti:Sapphire (ReA/Mira, Coherent Inc.) con una razón de repetición de 100 KHz, una duración del pulso de 150 fs y energía de  $0.3 \mu\text{J}$ , a una longitud de onda de 800 nm. Típicamente el haz fue focalizado dentro de la muestra de silica por un microscopio objetivo  $20\times$  con una apertura numérica de 0.45 [un esquema del montaje experimental de escritura es presentado en la figura A.1(a)]. Un sistema de posicionamiento de alta precisión (ALS 130, Aerotech) permite el control de la posición individual de las guías de ondas así como también la velocidad de escritura. Las propiedades de guía de las guías de ondas individuales son fuertemente dependientes de los parámetros de escritura.

Dentro del espacio multidimensional de parámetros, la duración de pulso, la energía del pulso y la velocidad de escritura son los parámetros claves que influyen en la distribución del índice de refracción resultante. Manteniendo fijos los parámetros de duración y energía del pulso, sólo el cambio de la velocidad de escritura produce un cambio específico en la modulación del índice de refracción. Para velocidades de escritura entre  $500 \mu\text{m/s} < v_{\text{escritura}} < 1500 \mu\text{m/s}$  las pérdidas de las guías de ondas son aproximadamente constantes [24]. Sin embargo, la modulación del índice de refracción decrece mientras la velocidad de escritura aumenta debido a una menor superposición entre pulsos sucesivos. Esto puede ser usado para la modificación de la cantidad de modos que soporta cada guía de ondas, para la creación de defectos, etc. Normalmente, cada guía de onda tiene dimensiones de  $4 \times 12 \mu\text{m}^2$  y exhibe una modificación del índice de refracción de  $\Delta n \approx 5 \times 10^{-4}$ , como muestra la figura A.1(b). Este proceso genera guía de ondas que soportan sólo un modo (monomodal) a una longitud de onda de 633 nm. La figura A.1(c) muestra el modo propagante representativo en la guía de onda creada.

Esta técnica ha sido sumamente exitosa principalmente debido a que las redes de guías de ondas creadas cumplen las variadas condiciones, que tiene que cumplir un sistema, para la investigación de todos los aspectos de la propagación discreta de la luz. Por ejemplo, el acoplamiento entre sitios de la red es altamente homogéneo lo que previene comportamiento estadístico o caótico. Además, las propiedades de cada guía de ondas es ajustable permitiendo la creación de defectos artificiales. Adicionalmente, una diversidad de geometrías son realizables con el objetivo de investigar la evolución de la luz en redes fotónicas uni- y bi-dimensionales, como también en configuraciones no periódicas. Por último y muy importante, la fabricación es estable y permanente en el tiempo.

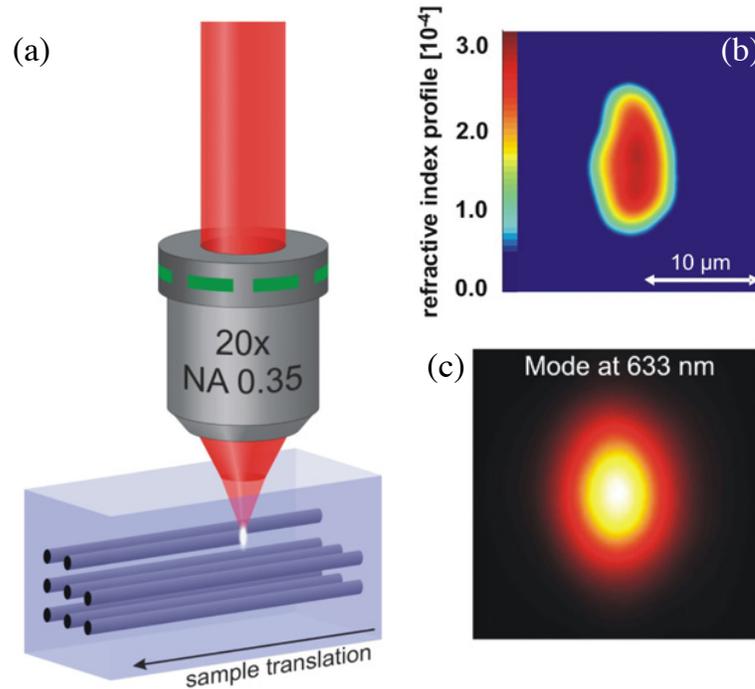


Figura A.1: (Imagen tomada de [24] ) Guías de ondas escritas en silica fundido usando un láser de femtosegundos. (a) Esquema del montaje experimental de la modificación del índice de refracción en una muestra de silica fundido. (b) Sección transversal de la distribución del índice de refracción de una guía de ondas individual y (c) modo fundamental propagante de una guía de onda a  $\lambda = 633$  nm.

## A.2. Método iterativo de Newton-Raphson Multidimensional

En una dimensión, el método de Newton-Raphson consiste en buscar la raíz de una función en un dominio cercano a la semilla de partida  $x$ . Como punto de partida consideramos la expansión de Taylor de una función arbitraria  $f(x)$  entorno a un parámetro  $\delta$ , esto es

$$f(x + \delta) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}\delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \delta^2 + \dots .$$

Para pequeños valores de  $\delta$  y para funciones bien comportadas, cerca de la raíz la función  $f$  debe anularse, por lo tanto,

$$0 = f(x + \delta) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}\delta + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x)}{dx^2}\delta^2,$$

así, el parámetro  $\delta$  puede ser aproximado a primer orden:

$$\delta \approx -\frac{f(x)}{df(x)/dx}.$$

De esta forma, un paso en la iteración consiste en el cálculo de:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{df(x)/dx}.$$

Este método es una herramienta muy utilizada, debido a que su convergencia es cuadrática y, por lo tanto, más rápida que otros métodos. La principal desventaja es que la convergencia no está garantizada, por lo que la semilla debe estar cerca de la raíz buscada.

La aplicación de este método para el caso específico de redes fotónicas es como sigue. Consideremos la ecuación DNLS generalizada,

$$-i \frac{\psi_{\bar{n}}(z)}{dz} = \beta_{\bar{n}} \psi_{\bar{n}}(z) + \sum_{\bar{m}} V_{\bar{n},\bar{m}} \psi_{\bar{m}}(z) + \gamma |\psi_{\bar{n}}(z)|^2 \psi_{\bar{n}}(z).$$

Con el objetivo de encontrar las soluciones estacionarias, consideramos un *ansatz* de la forma  $\psi_{\bar{n}}(z) = \psi_{\bar{n}} e^{i\beta z}$ , con  $\psi_{\bar{n}} \in \mathbb{R}$ . Así se obtiene:

$$F_{\bar{n}} \equiv (\gamma \psi_{\bar{n}}^2 + \beta_{\bar{n}} - \beta) \psi_{\bar{n}} + \sum_{\bar{m}} V_{\bar{n},\bar{m}} \psi_{\bar{m}} = 0. \quad (\text{A.1})$$

A continuación, definimos el vector  $\vec{\Psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  como solución de la ecuación (A.1). Entonces,

$$\mathbf{F}(\vec{\Psi}) = 0,$$

donde  $\mathbf{F}$  denota el vector de funciones  $F_n$ . En la vecindad de  $\vec{\Psi}$ , cada una de las funciones  $F_n$  puede ser expandida en serie de Taylor,

$$F_n(\vec{\Psi} + \delta\vec{\Psi}) = F_n(\vec{\Psi}) + \sum_j^N \frac{\partial F_n}{\partial \psi_j} \delta\psi_j + \mathcal{O}(\delta\vec{\Psi}^2). \quad (\text{A.2})$$

La matriz de derivadas parciales que aparece en la ecuación (A.2) es la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ :

$$J_n \equiv \frac{\partial F_{nj}}{\partial \psi_j}.$$

Por lo tanto, la ecuación (A.2) puede ser escrita en forma vectorial como

$$\mathbf{F}(\vec{\Psi} + \delta\vec{\Psi}) = \mathbf{F}(\vec{\Psi}) + \mathbf{J} \cdot \delta\vec{\Psi} + \mathcal{O}(\delta\vec{\Psi}^2).$$

Despreciando términos de orden  $\delta\vec{\Psi}^2$  y superiores, y además fijando  $\mathbf{F}(\vec{\Psi} + \delta\vec{\Psi}) = 0$ , obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales para  $\delta\vec{\Psi}$  que mueve a cada función más cerca a cero simultáneamente, específicamente

$$\mathbf{J} \cdot \delta\vec{\Psi} = -\mathbf{F},$$

y desde aquí se obtiene la corrección

$$\delta\vec{\Psi} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

Así, la corrección son adicionadas al vector solución,

$$\vec{\Psi}_{i+1} = \vec{\Psi}_i + \delta\vec{\Psi}. \quad (\text{A.3})$$

La ecuación (A.3) puede ser usada iterativamente desde alguna semilla inicial para llegar a una mejor aproximación de  $\vec{\Psi}$ . Este algoritmo termina una vez que un valor de  $\vec{\Psi}$  permite que  $\mathbf{F}(\vec{\Psi})$  sea suficientemente cercano a cero, tolerancia numérica que es definida generalmente en el orden de  $10^{-14}$ .

### A.3. Análisis de estabilidad de soluciones no lineales

Consideremos la ecuación DNLS en una dimensión:

$$-i \frac{\psi_{\bar{n}}(z)}{dz} = V [\psi_{n+1}(z) + \psi_{n-1}(z)] + \gamma |\psi_n(z)|^2 \psi_n(z).$$

Este sistema tiene soluciones estacionarias de la forma

$$\psi_n(z) = \psi_n e^{i\beta z},$$

donde  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $\psi_n \in \mathbb{C}$ . Introduciendo una pequeña perturbación a la solución estacionaria,

$$\psi_n(z) = [\psi_n + \delta\psi_n(z)] e^{i\beta z}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\delta\psi_n \in \mathbb{C}$  y tomando en cuenta que  $\delta\psi_n^p \rightarrow 0$  para  $p \geq 2$ , la DNLS queda como

$$i \frac{d\delta\psi_n}{dz} + \beta \delta\psi_n + V(\delta\psi_{n+1} + \delta\psi_{n-1}) + \gamma(\psi_n^2 \delta\psi_n + |\psi_n|^2 \delta\psi_n) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Escribimos  $\delta\psi_n \equiv x_n + iy_n$  donde  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$  y, además, definimos los vectores  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y las matrices

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} + (-\beta + \gamma\psi_n^2)\delta_{n,m}, \\ B_{nm} &= \delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} + (-\beta + 3\gamma\psi_n^2)\delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde  $\delta_{n,m}$  es la delta de kronecker. Con esto la ecuación (A.5) puede ser escrita,

$$\frac{d\vec{X}}{dz} + A\vec{Y} = 0; \quad \frac{d\vec{Y}}{dz} - B\vec{X} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Mediante un tratamiento algebraico es posible desacoplar estas ecuaciones obteniendo:

$$\frac{d^2\vec{X}}{dz^2} + AB\vec{X} = 0; \quad \frac{d^2\vec{Y}}{dz^2} + BA\vec{Y} = 0. \quad (\text{A.8})$$

En general  $AB \neq BA$ , pero sus autovalores son iguales. Una solución general para (A.8) tiene la forma

$$\vec{X} \sim C_1 e^{i\omega z} + C_2 e^{-i\omega z}.$$

Si  $\omega \in \mathbb{R}$ , las soluciones son estacionarias y estables. Mientras que, si  $\omega \in \mathbb{C}$  la solución es inestable. Como es posible observar los autovalores  $AB$  o  $BA$  son  $\omega^2$ , en general este valor es complejo por lo que  $\omega^2 = c + id$  con  $c, d \in \mathbb{R}$ . Además,  $\omega = a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Con lo considerado anteriormente, tenemos que

$$b = \pm \left( \frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2} \right)^{1/2}.$$

Definimos  $G = \text{Max}\{b\}$  como el máximo autovalor de inestabilidad de la solución. Una solución estable (inestable) corresponde a  $G = 0$  ( $G \neq 0$ ). Este tratamiento puede ser fácilmente extendido a dos dimensiones, reescribiendo las matrices  $A$  y  $B$  como sigue

$$\begin{aligned} A &= V - \beta \cdot \mathbf{I} + \gamma(\Psi \cdot \mathbf{I})^2, \\ B &= V - \beta \cdot \mathbf{I} + 3\gamma(\Psi \cdot \mathbf{I})^2, \end{aligned} \tag{A.9}$$

donde  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  es el vector con la amplitud de las  $n$  guías de la red fotónica,  $V$  es la matriz de acoplamiento e  $\mathbf{I}$  representa la matriz identidad.

# Referencias

- [1] Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W. & Weinreich, G. Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118–119 (1961).
- [2] Boyd, R. W. *Nonlinear Optics* (Academic Press, Elsevier Inc., 2008), 3rd edn.
- [3] Chiao, R. Y., Garmire, E. & Townes, C. H. Self-trapping of optical beams. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479–482 (1964).
- [4] Askaryan, G. A. Effects of the gradient of a strong electromagnetic beam on electrons and atoms. *Sov. Phys.-JETP* **15**, 1088–1090 (1962).
- [5] Garanovich, I. L., Longhi, S., Sukhorukov, A. A. & Kivshar, Y. S. Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides. *Physics Reports* **518**, 1–79 (2012).
- [6] Lederer, F. *et al.* Discrete solitons in optics. *Physics Reports* **463**, 1–126 (2008).
- [7] Kittel, C. *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986), 6th edn.
- [8] Morsch, O. & Oberthaler, M. Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179–215 (2006).
- [9] Schwartz, T., Bartal, G., Fishman, S. & Segev, M. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature* **446**, 52–55 (2007).

- [10] Morandotti, R., Peschel, U., Aitchison, J. S., Eisenberg, H. S. & Silberberg, Y. Experimental observation of linear and nonlinear optical Bloch oscillations. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756–4759 (1999).
- [11] Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A. R. & Aitchison, J. S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383–3386 (1998).
- [12] Efremidis, N. K., Sears, S., Christodoulides, D. N., Fleischer, J. W. & Segev, M. Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices. *Phys. Rev. E* **66**, 046602 (2002).
- [13] Fleischer, J. W., Carmon, T., Segev, M., Efremidis, N. K. & Christodoulides, D. N. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 023902 (2003).
- [14] Fleischer, J. W., Segev, M., Efremidis, N. K. & Christodoulides, D. N. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature* **422**, 147–150 (2003).
- [15] Rosberg, C. R., Neshev, D. N., Sukhorukov, A. A., Krolikowski, W. & Kivshar, Y. S. Observation of nonlinear self-trapping in triangular photonic lattices. *Opt. Lett.* **32**, 397–399 (2007).
- [16] Segev, M., Silberberg, Y. & Christodoulides, D. N. Anderson localization of light. *Nat Photon* **7**, 197–204 (2013).
- [17] Fedele, F., Yang, J. & Chen, Z. Defect modes in one-dimensional photonic lattices. *Opt. Lett.* **30**, 1506–1508 (2005).
- [18] Makasyuk, I., Chen, Z. & Yang, J. Band-gap guidance in optically induced photonic lattices with a negative defect. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 223903 (2006).
- [19] Vicencio, R. A. & Mejía-Cortés, C. Diffraction-free image transmission in kagome photonic lattices. *Journal of Optics* **16**, 015706.

- [20] Morales-Inostroza, L. & Vicencio, R. A. Simple method to construct flat-band lattices. *Phys. Rev. A* **94**, 043831 (2016).
- [21] Vicencio, R. A. *et al.* Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245503 (2015).
- [22] Mukherjee, S. *et al.* Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015).
- [23] Iwanow, R. *et al.* Observation of discrete quadratic solitons. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 113902 (2004).
- [24] Szameit, A. & Nolte, S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 163001.
- [25] Yuri S. Kivshar, G. P. A. *Optical Soliton from fiber to photonic crystals* (Academic Press, Elsevier Inc., 2003).
- [26] Terhalle, B. *Controlling Light in Optically Induced Photonic Lattices* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011), 1st edn.
- [27] Kukhtarev, N. V., Markov, V. B., Odulov, S. G., Soskin, M. S. & Vinetskii, V. L. Holographic storage in electrooptic crystals. i. steady state. *Ferroelectrics* **22**, 949–960 (1978).
- [28] Christodoulides, D. N. & Carvalho, M. I. Bright, dark, and gray spatial soliton states in photorefractive media. *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 1628–1633 (1995).
- [29] Vicencio, R. A. *Dínamica controlada de solitones discretos* (Universidad de Chile, 2004).
- [30] Makris, K. G. & Christodoulides, D. N. Method of images in optical discrete systems. *Phys. Rev. E* **73**, 036616 (2006).

- [31] Christodoulides, D. N., Lederer, F. & Silberberg, Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature* **424**, 817–823 (2003).
- [32] Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R. & Aitchison, J. S. Diffraction management. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1863–1866 (2000).
- [33] Pertsch, T., Zentgraf, T., Peschel, U., Bräuer, A. & Lederer, F. Anomalous refraction and diffraction in discrete optical systems. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093901 (2002).
- [34] Chen, Z., Segev, M. & Christodoulides, D. N. Optical spatial solitons: historical overview and recent advances. *Reports on Progress in Physics* **75**, 086401.
- [35] Morandotti, R., Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Sorel, M. & Aitchison, J. S. Self-focusing and defocusing in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3296–3299 (2001).
- [36] Malkova, N., Hromada, I., Wang, X., Bryant, G. & Chen, Z. Observation of optical shockley-like surface states in photonic superlattices. *Opt. Lett.* **34**, 1633–1635 (2009).
- [37] Boguslawski, M., Rose, P. & Denz, C. Nondiffracting kagome lattice. *Applied Physics Letters* **98**, 061111 (2011).
- [38] Boguslawski, M., Rose, P. & Denz, C. Increasing the structural variety of discrete nondiffracting wave fields. *Phys. Rev. A* **84**, 013832 (2011).
- [39] Malkova, N., Hromada, I., Wang, X., Bryant, G. & Chen, Z. Observation of optical shockley-like surface states in photonic superlattices. *Opt. Lett.* **34**, 1633–1635 (2009).
- [40] Rose, P., Terhalle, B., Imbrock, J. & Denz, C. Optically induced photonic superlattices by holographic multiplexing. *Journal of Physics D: Applied Physics* **41**, 224004.

- [41] Allio, R. *et al.* Photorefractive writing and probing of anisotropic linear and nonlinear lattices. *Journal of Optics* **17**, 025101.
- [42] Bartal, G. *et al.* Brillouin zone spectroscopy of nonlinear photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 163902 (2005).
- [43] Christodoulides, D. N. & Joseph, R. I. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt. Lett.* **13**, 794–796 (1988).
- [44] Kivshar, Y. S. Self-localization in arrays of defocusing waveguides. *Opt. Lett.* **18**, 1147–1149 (1993).
- [45] Mukherjee, S. & Thomson, R. R. Observation of localized flat-band modes in a quasi-one-dimensional photonic rhombic lattice. *Opt. Lett.* **40**, 5443–5446 (2015).
- [46] Xia, S. *et al.* Demonstration of flat-band image transmission in optically induced lieb photonic lattices. *Opt. Lett.* **41**, 1435–1438 (2016).
- [47] Zong, Y. *et al.* Observation of localized flat-band states in kagome photonic lattices. *Opt. Express* **24**, 8877–8885 (2016).
- [48] Emery, V. J. Theory of high- $t_c$  superconductivity in oxides. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2794–2797 (1987).
- [49] Scalettar, R. T., Scalapino, D. J., Sugar, R. L. & White, S. R. Antiferromagnetic, charge-transfer, and pairing correlations in the three-band hubbard model. *Phys. Rev. B* **44**, 770–781 (1991).
- [50] Lieb, E. H. Two theorems on the hubbard model. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1201–1204 (1989).
- [51] Kusakabe, K. & Aoki, H. Ferromagnetic spin-wave theory in the multiband hubbard model having a flat band. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 144–147 (1994).

- [52] Aoki, H., Ando, M. & Matsumura, H. Hofstadter butterflies for flat bands. *Phys. Rev. B* **54**, R17296–R17299 (1996).
- [53] Leykam, D., Bahat-Treidel, O. & Desyatnikov, A. S. Pseudospin and nonlinear conical diffraction in lieb lattices. *Phys. Rev. A* **86**, 031805 (2012).
- [54] Diebel, F., Leykam, D., Kroesen, S., Denz, C. & Desyatnikov, A. S. Conical diffraction and composite lieb bosons in photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 183902 (2016).
- [55] Shen, R., Shao, L. B., Wang, B. & Xing, D. Y. Single dirac cone with a flat band touching on line-centered-square optical lattices. *Phys. Rev. B* **81**, 041410 (2010).
- [56] Goldman, N., Urban, D. F. & Bercioux, D. Topological phases for fermionic cold atoms on the lieb lattice. *Phys. Rev. A* **83**, 063601 (2011).
- [57] Apaja, V., Hyrkäs, M. & Manninen, M. Flat bands, dirac cones, and atom dynamics in an optical lattice. *Phys. Rev. A* **82**, 041402 (2010).
- [58] Guzmán-Silva, D. *et al.* Experimental observation of bulk and edge transport in photonic lieb lattices. *New Journal of Physics* **16**, 063061.
- [59] He, J. *et al.* Zero modes around vacancies in topological insulators and topological superconductors on the honeycomb lattice with particle-hole symmetry. *Phys. Rev. B* **87**, 075126 (2013).
- [60] Rojas-Rojas, S. *et al.* Analytical model for polarization-dependent light propagation in waveguide arrays and applications. *Phys. Rev. A* **90**, 063823 (2014).
- [61] Weimann, S. *et al.* Transport in sawtooth photonic lattices. *Opt. Lett.* **41**, 2414–2417 (2016).
- [62] Baboux, F. *et al.* Bosonic condensation and disorder-induced localization in a flat band. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 066402 (2016).

- [63] López-González, D. & Molina, M. I. Linear and nonlinear compact modes in quasi-one-dimensional flatband systems. *Phys. Rev. A* **93**, 043847 (2016).
- [64] Kivshar, Y. S. & Campbell, D. K. Peierls-nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes. *Phys. Rev. E* **48**, 3077–3081 (1993).
- [65] Morandotti, R., Peschel, U., Aitchison, J. S., Eisenberg, H. S. & Silberberg, Y. Dynamics of discrete solitons in optical waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2726–2729 (1999).
- [66] Hadžievski, L. c. v., Maluckov, A., Stepić, M. & Kip, D. Power controlled soliton stability and steering in lattices with saturable nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 033901 (2004).
- [67] Naether, U., Vicencio, R. A. & Stepić, M. Mobility of high-power solitons in saturable nonlinear photonic lattices. *Opt. Lett.* **36**, 1467–1469 (2011).
- [68] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete soliton mobility in two-dimensional waveguide arrays with saturable nonlinearity. *Phys. Rev. E* **73**, 046602 (2006).
- [69] Naether, U., Vicencio, R. A. & Johansson, M. Peierls-nabarro energy surfaces and directional mobility of discrete solitons in two-dimensional saturable nonlinear schrödinger lattices. *Phys. Rev. E* **83**, 036601 (2011).
- [70] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete flat-band solitons in the kagome lattice. *Phys. Rev. A* **87**, 061803 (2013).
- [71] Flach, S., Kladko, K. & MacKay, R. S. Energy thresholds for discrete breathers in one-, two-, and three-dimensional lattices. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1207–1210 (1997).
- [72] Khare, A., Rasmussen, K. ., Samuelsen, M. R. & Saxena, A. Exact solutions of the saturable discrete nonlinear schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38**, 807.