



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ESTUDIO TEÓRICO, EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DE ONDAS SUPERFICIALES
DE GRAVEDAD EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

CARLOS PATRICIO CALVO CORTÉS-MONROY

PROFESOR GUÍA:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
YARKO NIÑO CAMPOS
CLAUDIO FALCÓN BEAS

Este trabajo ha sido financiado por FONDECYT a través del proyecto de investigación N° 1161751 y la beca de Magíster en Chile, CONICYT- PCHA/MagísterNacional/2016 - 22161261.

Powered@NLHPC: Esta investigación/tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (ECM-02)

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL Y GRADO DE
MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA.
MENCION RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE
HÍDRICO
POR: CARLOS PATRICIO CALVO CORTÉS-MONROY
FECHA: ENERO 2018
PROF. GUÍA: DR. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

ESTUDIO TEÓRICO, EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DE ONDAS SUPERFICIALES DE GRAVEDAD EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Las ondas solitarias superficiales en líquidos consisten en pulsos estables no lineales, producto del balance entre la no linealidad de la componente advectiva de la aceleración y la dispersión. La formulación comúnmente utilizada es la solución de flujo potencial donde su velocidad de fase y longitud dependen sólo de la amplitud y profundidad. En la realidad, la principal fuerza restitutoria es la gravedad mientras que la viscosidad afecta su atenuación y celeridad. En la naturaleza dichas perturbaciones se observan en el agua producto de cualquier variación singular de volumen o presión. El estudio de estas ondas en fluidos newtonianos más viscosos que el agua se torna importante cuando hay derrame de aceites, como petróleo, cerca de la costa. Éste fenómeno ondulatorio se ha observado también en fluidos no newtonianos como solitones en la porosidad producto de súbitas subpresiones en magma fluidizado. Actualmente no está claro cómo afecta la viscosidad en la propagación de estas ondulaciones tanto en la celeridad como en la amplitud. Si bien existen soluciones analíticas para el agua, donde la viscosidad afecta débilmente su dinámica dentro de una delgada capa límite, no se encuentran mayores referencias para un fluido más viscoso.

En el último tiempo se han perfeccionado técnicas ópticas de medición no intrusivas, especialmente útiles para medir con alta precisión a escala de laboratorio. Asimismo, se han desarrollado modelos computacionales en fluidodinámica cada vez más complejos, los que permiten complementar investigaciones experimentales y/o teóricas. Gracias a esto, se realiza un estudio experimental del efecto de la viscosidad en ondas solitarias superficiales en fluidos newtonianos y no newtonianos. Se establece el marco teórico de la propagación de dichas perturbaciones obteniendo una relación analítica usando análisis dimensional y mediante simulaciones numéricas. Las ondas se miden utilizando velocimetría de imágenes de partículas y perfilometría por transformada de Fourier utilizando un canal de acrílico en el Laboratorio de Materia Fuera del Equilibrio del Departamento de Física de la Universidad de Chile. Se obtiene la amplitud, velocidad de fase, profundidad, el número de onda y las propiedades físicas, una solución de glicerina y una de carboximetilcelulosa. Además se implementa un modelo numérico en OpenFOAM para analizar la propagación de ondas más allá de los rangos medidos experimentalmente.

Tanto las mediciones realizadas como los modelos numéricos demuestran que a mayor viscosidad disminuye la celeridad de la onda solitaria, para fluidos newtonianos y no newtonianos, resultado consistente con la relación teórica para el rango lineal. Por otro lado, a partir del modelado numérico se obtiene que la celeridad aumenta al disminuir el índice de flujo de la reología del fluido al mismo índice de consistencia. Esto se debe a que a mayores índices de flujo mayor es la viscosidad aparente para un fluido dilatante cuando la tasa de deformación es mayor a la unidad. También se obtiene una relación adimensional entre la tasa de decaimiento, número de Reynolds y el número de onda, donde dicha atenuación de la onda disminuye a mayores números de Reynolds en fluidos no newtonianos para la reología y rango de deformación estudiado. De esta forma se determina el efecto que tiene la viscosidad de un fluido newtoniano y otro no newtoniano sobre la celeridad de la onda solitaria.

Para mi leal familia.

“L’acqua è la forza trainante di tutta la natura.”

Leonardo da Vinci

Agradecimientos

Primero que todo agradezco a mi familia, la génesis de todo, especialmente a mis abuelos que si no fuera por ellos no hubiera podido estudiar. Por mi existencia doy gracias a ellos.

Muchas gracias mis profesores Aldo, Claudio y Yarko por su enorme conocimiento, consejo, guía y apoyo otorgado y por enseñarme a perseverar y dar lo mejor de mí. De nuevo a Claudio, Yarko, Ihle, Beto, Chago y Jorge por prestarme todo lo que necesité en el laboratorio.

Debo expresar mi mas enorme gratitud hacia Phil LF Liu por la gran oportunidad otorgada y por enseñarme a trabajar de manera prolija y rigurosa, mirando las cosas desde distintas perspectivas. Asimismo felicito a Ignacio por ser una gran persona, por darme una excelente acogida y recomendarme lugares de comida increíblemente deliciosa. Agradezco a Pablo por su enorme paciencia, buena disposición y por haber creado el maravilloso OLAFOAM. Gracias XiaoQi Zheng y Siqing Liu por las invitaciones a comer y su grata compañía.

Debo mencionar a Alex Garcés que me mostró el sentido de dar la vida y que no es tesis si no se aloja en la U.

Gracias Jacqui por ser tan comprometida y responsable, dispuesta a jugársela por todos nosotros.

Felicito a Jiujiitsu, JD y Manuel por su impecable y prolijo trabajo y mas importante que eso, su grata compañía. Sin ellos no podría haber hecho la parte experimental. Muchas gracias Vivi por ser una persona noble, desinteresada y realmente bondadosa. Grande Taky Parvex el mago de Arduino y no olvidemos a Pancho Mella que vive en nuestros recuerdos.

Mención honrosa a PH por enseñarnos el mundo del software libre.

A los rusos, no se puede dejar fuera a la madre Rusia.

Agradezco al Departamento de Postgrado y Postítulo de la Universidad de Chile por la beca de Ayudas Para Estadías Cortas de Investigación Destinadas a Estudiantes Tesistas de Doctorado y Magíster.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Objetivos generales	3
1.1.2. Objetivos Específicos	3
1.2. Organización del Informe	3
2. Marco Teórico	5
2.1. Ondas de gravedad en fluidos	6
2.2. Celeridad de ondas solitarias en agua	8
2.3. Ondas lineales en fluidos reales	11
2.3.1. Condiciones de borde para ondas con viscosidad	12
2.3.2. Velocidad de fase de la onda lineal	14
2.4. Ondas no lineales en fluidos reales	15
2.4.1. Ecuaciones de onda solitaria en fluidos newtonianos	15
2.4.2. Velocidad de fase en un fluido newtoniano	19
2.4.3. Capa límite superficial	20
2.5. Fluidos no newtonianos	21
2.5.1. Fluido tipo Ostwald-de Waele o Ley de Potencia	21
2.5.2. Ecuaciones de onda solitaria en fluidos no newtonianos	22
2.5.3. Ecuaciones promediadas en la vertical	25
3. Metodología Experimental	26
3.1. Técnicas de medición	26
3.1.1. Perfilometría por transformada de Fourier	26
3.1.2. Velocimetría de Imágenes de Partículas Digital	29
3.1.3. Trazadores	31
3.2. Descripción de la instalación experimental	32
3.2.1. Instalación experimental para medir por FTP	32
3.2.2. Instalación experimental para medir por PIV	33
3.2.3. Generación de ondas	35
3.2.4. Generación de ondas en agua	36
3.2.5. Validación de la generación de ondas	39
3.2.6. Generación de ondas en Glicerina y CMC	39
3.2.7. Calibración del servomotor	41
3.3. Medición de las propiedades físicas de los fluidos	42
3.3.1. Medición de reología	42

3.3.2. Medición de la densidad, pH y temperatura	43
4. Modelo Numérico	45
4.1. Solver de OpenFOAM	45
4.2. Ecuaciones del modelo	45
4.3. Malla numérica	47
4.4. Discretización temporal	47
4.5. Condiciones de borde de OLAFOAM	48
5. Presentación de Resultados y Análisis	49
5.1. Fluidos utilizados y configuraciones experimentales	49
5.2. Resultados de la perfilometría por transformada de Fourier	51
5.2.1. Celeridad de la onda variando la reología	51
5.2.2. Decaimiento de las ondas en fluidos pseudoplásticos	56
5.2.3. Regresiones de los decaimientos	57
5.3. Resultados del modelado numérico	58
5.3.1. Validación de los modelos numéricos	58
5.3.2. Simulación a distintas reologías pseudoplásticas	61
5.4. Resultados de la velocimetría de imágenes de partículas	63
5.4.1. Perfiles de velocidad y vorticidad en el agua a $h = 0,02$ (m) y $\varepsilon = 0,31$	63
5.4.2. Perfiles de velocidad y vorticidad en el agua $h = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,24$	64
5.4.3. Perfiles de velocidad y vorticidad en CMC $h = 0,02$ (m) y $\varepsilon = 0,14$	65
5.4.4. Perfiles de velocidad y vorticidad en CMC $h = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,21$	65
6. Discusión	67
6.1. Metodología experimental	67
6.2. Resultados	67
7. Conclusiones y recomendaciones	69
7.1. Conclusiones	69
7.2. Recomendaciones	70
Bibliografía	72
Anexos	77
Anexo A. Resultados y ajustes del decaimiento de ondas solitarias en CMC	79
A.1. Ajustes de los decaimientos.	79
Anexo B. Resultados cualitativos de velocimetría de imágenes de partículas bajo el peak de la onda en agua.	80
B.1. Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. Agua a $h=0,02$ (m).	81
B.2. Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. Agua a $h=0,04$ (m).	82
B.3. Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. CMC a $h=0,02$ (m).	83

B.4. Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. CMC a $h=0,04$ (m).	84
Anexo C. Distribuciones de velocidad, presión dinámica y tasa de deformación numéricas.	85
C.1. Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido newtoniano.	86
C.2. Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,8$	88
C.3. Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,6$	89
C.4. Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,4$	91
Anexo D. Propagación de errores	92

Índice de tablas

5.1. Experimentos realizados.	49
5.2. Viscosidad de agua y glicerina al 71 % p/p	50
5.3. Índices de consistencia y flujo para CMC a 0,2 % p/p	50
5.4. Tensión superficial de agua desionizada, CMC al 0,2 % p/p y glicerina al 71 % p/p	51
5.5. Parámetros experimentales calculados para el agua.	52
5.6. Coeficiente χ de la relación de dispersión.	55
5.7. Parámetros experimentales calculados para la glicerina.	55
5.8. Parámetros experimentales calculados para el CMC.	56
5.9. Número de Reynolds, μ y coeficientes α , β	58
5.10. Elevación relativa ε y celeridad.	59
5.11. Elevación relativa ε y celeridad.	60
5.12. Elevación relativa ε y celeridad.	61
5.13. Resumen de las simulaciones a reología variable.	63

Índice de ilustraciones

2.1. A) Ondas solitarias en fluidos newtonianos y B) viscoplásticos.	6
2.2. Sistema de referencia.	7
3.1. Esquema de la FTP.	27
3.2. Filtros de Hanning y Gaussiano.	28
3.3. Correlación mediante FFT.	30
3.4. A) Imagen original. B) Imagen filtrada en PIVlab. (Elaboración propia).	31
3.5. Esquema del montaje experimental para FTP.	32
3.6. Phantom v641 Cinemag.	33
3.7. Epson Powerlite HomeCinema 8350.	33
3.8. Configuración de FTP.	33
3.9. Montaje para la cámara y proyector.	33
3.10. Esquema del montaje experimental para PIV.	34
3.11. Micro Nikon AF-S DX Micro-NIKKOR 105mm f/2.8G.	34
3.12. Laser Flex BW TEC inc.	34
3.13. Generador de ondas.	35
3.14. Configuración de PIV.	35
3.15. Volumen de control	36
3.16. Secuencia de frentes de onda.	37
3.17. Sistema de referencia para generar ondas.	38
3.18. Señal para $ho = 0, 2m$ y $\varepsilon = 0, 6$	39
3.19. Señal calculada con $ho = 0, 2m$ y $\varepsilon = 0, 6$	39
3.20. Señal y regresión tipo tanh de 3 parámetros.	41
3.21. Calibración del servo.	41
3.22. Reómetro rotacional Rheolab QC Anton Paar.	42
3.23. Densímetro.	44
3.24. Conductivímetro y termómetro.	44
4.1. Malla numérica bidimensional.	47
4.2. Esquema de condiciones de borde.	48
5.1. Esfuerzo de corte y tasa de deformación para la glicerina.	50
5.2. Esfuerzo de corte y tasa de deformación para el CMC.	50
5.3. Celeridad experimental de la onda solitaria en agua.	52
5.4. Celeridad y amplitud adimensional experimental de la onda solitaria en glicerina y CMC.	54
5.5. Números de Froude en función de la amplitud y el Reynolds.	55

5.6.	Coeficiente de decaimiento α en función del Reynolds.	57
5.7.	Coeficiente de decaimiento β en función del Reynolds.	57
5.8.	Perfil experimental (\square), teórico ($-$) y numérico ($-$).	59
5.9.	Trayectoria experimental (\square) y numérica ($-$).	59
5.10.	Perfil experimental (\square) y numérico ($-$).	60
5.11.	Trayectoria experimental (\square) y numérica ($-$).	60
5.12.	Perfil experimental (\square) y numérico ($-$).	60
5.13.	Trayectoria experimental (\square) y numérica ($-$).	60
5.14.	Trayectoria de las simulaciones a reología variable.	61
5.15.	Amplitud de las simulaciones a reología variable.	62
5.16.	Celeridad de las simulaciones a reología variable.	62
5.17.	Perfil de velocidad en z, agua, $h = 0,02m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).	64
5.18.	Vorticidad en z, agua, $h = 0,02m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).	64
5.19.	Velocidad en z, agua, $h = 0,04m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).	64
5.20.	Vorticidad en z, agua, $h = 0,04m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).	64
5.21.	Velocidad en z, CMC, $h = 0,02m$	65
5.22.	Vorticidad en z, CMC, $h = 0,02m$	65
5.23.	Velocidad en z, CMC, $h = 0,04m$	66
5.24.	Vorticidad en z, CMC, $h = 0,04m$	66
A.1.	Ajustes para $h = 0,02$ (m)	79
A.2.	Ajustes para $h = 0,025$ (m)	79
A.3.	Ajustes para $h = 0,03$ (m)	80
A.4.	Ajustes para $h = 0,035$ (m)	80
A.5.	Ajustes para $h = 0,04$ (m)	80
B.1.	Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.	81
B.2.	Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.	82
B.3.	Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.	82
B.4.	Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.	83
B.5.	Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.	83
B.6.	Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.	84
B.7.	Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.	84
B.8.	Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.	85
C.1.	Campo de velocidades numéricas para el fluido newtoniano.	86
C.2.	Distribución de presión dinámica numérica para el fluido newtoniano.	87
C.3.	Tasa de deformación numérica para el fluido newtoniano.	87
C.4.	Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$	88
C.5.	Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$	88
C.6.	Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$	89
C.7.	Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$	89
C.8.	Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$	90

C.9. Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$	90
C.10. Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$. . .	91
C.11. Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$	91
C.12. Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$	92

1. Introducción

El estudio de las ondas de gravedad en fluidos es un área de la ciencia cuyo impacto y relevancia más trascendental comprende la física, matemáticas, geofísica e ingeniería civil, entre otras.

El régimen de aguas someras o poco profundas, en el cual se enfoca este estudio, para un flujo de profundidad h , longitud de onda λ y número de onda $k = 2\pi/\lambda$ se caracteriza por el parámetro $\mu = kh \ll 1$. Su estudio es de especial interés desde el punto de vista ingenieril, por ejemplo en ingeniería marítima dado que describe el estado del mar más cercano al litoral, cuya línea de costa se extiende hasta los 6435 kilómetros en Chile, lugar donde suceden las principales actividades productivas de esta área relevantes para el país. Por ejemplo, utilizando el pronóstico de oleaje de Parra & Beyá (2017) en el puerto de San Antonio, se obtiene una onda de $2\pi h/\lambda = 0,48$ a una profundidad de 12 (m) en ese punto. En efecto, en la realidad los efectos de dispersión se vuelven importantes, además de la aceleración advectiva, cuando la altura de oleaje no es infinitesimal.

De igual manera, la presencia de tsunamis, que corresponden a ondas superficiales de gravedad no lineales de gran longitud de onda (λ) que se propagan hasta aguas someras, consiste en un riesgo latente en un país sísmico como Chile, como el reciente maremoto de 2014 en Iquique y el de 2010 que afectó desde la región de Valparaíso hasta la Araucanía. Asimismo, el estudio de ondas de gravedad es de especial relevancia incluso en aguas profundas para la generación de energía mareomotriz. Por esto todo avance y desarrollo científico relacionado resulta fundamental.

Dada la dependencia del tiempo y espacio del fenómeno ondulatorio en fluidos, en la mayoría de las situaciones se ignoran los efectos de la viscosidad de un fluido real utilizando la teoría de flujo potencial, reduciendo las ecuaciones de Navier-Stokes a las ecuaciones de Euler invíscidas o en ocasiones a una ecuación de estado para fluidos compresibles. Un ejemplo de este enfoque es el régimen de aguas profundas sin considerar la fricción del fondo o la región fuera a la capa límite en torno a una pared sólida o superficie contaminada (Mei et al., 1989). Por ello, resulta interesante estudiar el efecto de la viscosidad del fluido en la dinámica de ondas.

Dentro de los fluidos reales se encuentran los fluidos no newtonianos, los cuales se caracterizan por su ley constitutiva en la cual la respuesta de la tasa de deformación $\dot{\gamma}_{ij}$ ante un esfuerzo de corte τ_{ij} difiere de una recta. El estudio de los fluidos no newtonianos es de especial relevancia en las áreas de ingeniería hidráulica y geofísica (flujos detríticos y magmáticos), la industria de alimentos (pulpas, gelatina y pasta dental), la industria farmacéutica (gel,

lociones y cremas) y la minería (relaves).

La propagación de ondas sobre fluidos no newtonianos se ha utilizado en reometría a alta frecuencia, para medir el comportamiento de fluidos fuera de los rangos de frecuencia convencionales (10^{-3} - 10^2 Hz) con el fin de caracterizar fluidos a bajas tasas de deformación (Chhabra & Richardson, 1999, pág.63). Dichas vibraciones son aplicables en procesos industriales, como el curado de polímeros, con el fin de ligar sus cadenas a altas frecuencias (Chhabra & Richardson, 1999, pág.63).

Un caso particular de las ondas no lineales lo constituyen las ondas solitarias propagativas en fluidos, perturbaciones singulares en que la aceleración advectiva compensa la dispersión de la onda y disipación viscosa. Dicho fenómeno se observa en la naturaleza tanto en agua (Grimshaw, 2007; Winckler & Liu, 2015), como en fluidos no newtonianos (Gleeson & Ingebritsen, 2016; Richard et al., 2012; Scott & Stevenson, 1984). En el primer caso, dichas perturbaciones se generan producto de variaciones súbitas de presión tales como deslizamientos de tierra sobre la superficie libre del agua, que luego se manifiestan como onda larga ($\mu \ll 1$), incluso como ondas bidimensionales unidireccionales como es la propagación de ellas en fiordos y ríos (Winckler, 2015). El efecto de la viscosidad en la propagación de ondas solitarias es de especial relevancia en casos como el derrame de petróleo desde barcos en aguas someras (Mohapatra & Soares, 2015).

Por otro lado, su contraparte no newtoniana se encuentra en la naturaleza principalmente dentro de la corteza terrestre inferior, donde la mezcla entre fluidos devolatilizados como agua y CO_2 con roca metamórfica fundida o la liberación de estos fluidos mezclados con partículas muy finas confinados durante largos períodos dentro de cuencas sedimentarias, en presencia de bruscas subpresiones como lo es el proceso de hidrofractura (Gleeson & Ingebritsen, 2016), originan ondas solitarias unidimensionales en la porosidad de esta mezcla en el rango de Stokes. En esta región de la corteza terrestre, la respuesta viscosa de la matriz de roca fundida se espera que sea no lineal de acuerdo a Richard et al. (2012) y Ranalli (1995), y como fue demostrado experimentalmente por Kohlstedt et al. (1995). En este trabajo se utiliza entonces un fluido pseudoplástico cuya alta viscosidad varía en función de una potencia del segundo invariante del tensor de deformación.

Más aún, el fenómeno de ondas solitarias comprende distintos medios además de agua como solitones superficiales (Winckler & Liu, 2015), ondas internas tipo solitarias (Rojas, 2015) y ondas de presión en magma dentro de la corteza terrestre (Connolly & Podladchikov, 2015). Algunos ejemplos los constituyen solitones en una delgada capa de mercurio (Falcon et al., 2002) y ondas solitarias en el flujo de sangre producto de las pulsaciones cardiacas (Yomosa, 1987).

Si bien el efecto de la viscosidad en ondas armónicas ha sido ampliamente desarrollado de forma experimental, analítica y numérica (Mei et al., 1989; Liu & Orfila, 2004; Johnson, 1997; Behroozi, 2003) y para solitones, destacando las investigaciones de Liu & Orfila (2004), Liu et al. (2006), Winckler & Liu (2015) y Klettner & Eames (2012), donde a pesar de no poder separar matemáticamente las ecuaciones de movimiento no lineales descomponiendo el vector de la velocidad mediante el teorema de Helmholtz, se dividen físicamente gracias a la teoría de capa límite, resultando una región del espacio rotacional y otra zona de flujo potencial (Liu & Orfila, 2004). Luego es posible obtener el decaimiento y una relación de dispersión

que incorpore los efectos de la viscosidad para ondas armónicas lineales o no y una expresión analítica para el decaimiento en función de la viscosidad y el tiempo en ondas no lineales (Liu & Orfila, 2004). No existen mayores antecedentes sobre la validez de dicha hipótesis para ondas solitarias en fluidos no newtonianos o en fluidos altamente viscosos donde las aproximaciones de flujo potencial resulten inválidas en toda la región del dominio espacial.

En virtud de lo anterior, este trabajo permite cuantificar y relacionar los efectos disipativos viscosos sobre ondas largas ($kh \ll 1$), dispersivas, débilmente no lineales ($A/h \ll 1$), tanto en la celeridad como en el decaimiento de la misma, despreciando la tensión superficial a bajos números de Bond ($B = \sigma/\rho gh^2$) (Dutykh et al., 2017).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos generales

Realizar un estudio experimental y numérico de ondas superficiales de gravedad en agua y en fluidos no newtonianos, y establecer un marco teórico de las ecuaciones de propagación de ondas superficiales de gravedad sobre fluidos no newtonianos.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Implementar el sistema de medición de velocimetría por imágenes de partículas en la instalación experimental construida y habilitada en el Laboratorio de Materia Fuera del Equilibrio del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile para medir por perfilometría por transformada de Fourier.
2. Determinar experimentalmente propiedades de las ondas tales como la celeridad (c) y su relación la amplitud (A) bajo distintas condiciones iniciales tanto en fluidos pseudoplásticos (soluciones de carboximetilcelulosa sódica) como en agua y glicerina, además de obtener el campo de velocidades longitudinal de las ondas en fluidos no newtonianos y en agua mediante velocimetría de imágenes de partículas.
3. Establecer y desarrollar el marco teórico que describe la propagación de ondas superficiales no lineales en fluidos no newtonianos obteniendo una solución analítica para la celeridad y mediante una simulación numérica.
4. Analizar los resultados obtenidos estableciendo una comparación entre los fluidos pseudoplásticos y agua considerando el trabajo realizado y la revisión bibliográfica.

1.2 Organización del Informe

Este trabajo se divide en seis capítulos los cuales consisten en:

Introducción En este capítulo se presenta el tema a tratar a lo largo de la tesis, exponiendo una motivación, aplicaciones, los conceptos generales y objetivos.

Marco teórico En este apartado se exponen los principales conceptos y se establece el análisis a desarrollar fundamentado por medio de una revisión bibliográfica.

Instalación experimental y metodología A lo largo de este capítulo se muestra y describe al detalle tanto la instalación experimental utilizada para el desarrollo de los experimentos, como la metodología utilizada en cada experiencia de laboratorio. Además, se explica cómo funcionan y se controlan los distintos mecanismos utilizados para generar las ondas.

Modelo numérico Este capítulo cuenta con la descripción del modelo numérico utilizado, describiendo las ecuaciones que resuelve el código, el tipo de malla y los esquemas utilizados.

Resultados En esta sección se muestran los principales resultados obtenidos a partir de las mediciones realizadas en el laboratorio, los cuales permiten explicar el fenómeno en estudio, mientras que el resto se presentan en los Anexos.

Análisis de resultados Se analizan los resultados experimentales y numéricos obtenidos que caracterizan las ondas tanto en agua como en fluidos no newtonianos tales como la celeridad, amplitud, decaimiento y el número de onda.

Conclusiones y recomendaciones Se termina presentando las conclusiones a partir de los resultados obtenidos en el análisis en función de los objetivos específicos y los alcances del trabajo. Asimismo, se recomiendan mejoras y consideraciones para trabajos futuros.

2. Marco Teórico

Encontrar la relación de dispersión y la tasa de decaimiento para ondas armónicas lineales (Johnson, 1997), no lineales (Liu, 2006), solitarias en régimen laminar (Sadek et al., 2015) y turbulento (Liu, 2006), de un fluido real es un problema resuelto, obteniendo la celeridad de fase utilizando la derivada material de $\theta = kx - \omega t$ y $\theta = x - c(t)t$, respectivamente, θ es la fase, k el vector de onda, ω la frecuencia y c la velocidad de fase, con x y t el espacio y tiempo, respectivamente. En ambos casos la celeridad depende de la componente gravitacional \sqrt{gh} y el número de Reynolds definido como $R = \sqrt{gh}h/\nu$.

Para ondas lineales considerando su viscosidad es posible obtener la relación de dispersión a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes linealizadas suponiendo una solución armónica tipo $Ae^{i(kx-\omega t)} + c.c.$, o bien separando el campo de velocidad en una componente irrotacional y otra solenoidal (Liu, 2006).

Debido a la componente no lineal advectiva de la aceleración en las ecuaciones de Navier-Stokes, éstas no se pueden separar totalmente mediante el teorema de Helmholtz, por lo que, para incorporar el efecto de la viscosidad en la celeridad de ondas solitarias, es necesario separar físicamente el espacio en una zona irrotacional y fluido ideal, dentro de dos regiones de capa límite de superficie y de fondo (Liu et al., 2006), supuesto aplicable para ondas débilmente viscosas, siendo validado experimentalmente en este estudio. De esta forma se obtiene una función para el decaimiento de la onda solitaria en fluidos newtonianos (Liu, 2006).

Sin embargo, el efecto de la viscosidad en la amplitud y celeridad de la onda solitaria para fluidos altamente viscosos o no newtonianos es un problema abierto, debido a la fuerte no linealidad de la aceleración y de la divergencia del tensor de esfuerzos en las ecuaciones de movimiento. Investigaciones recientes han abordado de forma teórica el problema para una onda solitaria unidimensional en tuberías con viscosidad constante (Lowman et al., 2014), quienes utilizaron dos fluidos de distinta densidad, donde la viscosidad se compensa con la no linealidad y la buoyancia de las ondas verticales. Wei et al. (2011) resolvieron ondas viajeras unidimensionales en fluidos no newtonianos a partir de las ecuaciones de Burger mediante la fase $\xi = x - \lambda t$.

Recientemente se han desarrollado métodos analíticos para encontrar soluciones a solitones en medios disipativos, modelados por las ecuaciones modificadas de Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov (Mohyud-Din & Irshad, 2016), en que las ecuaciones son del tipo $D(u, u_t, u_{x^n}, u_{y^n}, u_{z^n}) = 0$, donde D es un operador de exponentes enteros de la velocidad u en el tiempo t y posición x e y . La familia de métodos se basa en suponer soluciones de

la velocidad como expansiones en series de funciones trigonométricas (Zhang, 2008), series de seno y coseno (Jafari et al., 2010, 2009; Wazwaz, 2004), series de tanh (El-Sabbagh & Ali, 2005; Abdusalam, 2005; Parkes & Duffy, 1996), series de funciones elípticas (Wang & Li, 2005), series de exponenciales (Borhanifar & Kabir, 2009; Dai & Wang, 2008), series de $\frac{G'}{G}$ de tangentes y cotangentes (Islam et al., 2014), donde G es la solución de una ecuación diferencial para reemplazar en la ecuación en derivadas parciales.

El problema de ondas solitarias con viscosidad no lineal se ha abordado de manera semi analítica y numérica, a escala geofísica para ondas solitarias en la porosidad de magma fluidizado empleando un modelo bifásico donde la reología del fluido es viscoplástica (Richard et al., 2012; Connolly & Podladchikov, 2015) como se muestra en la Figura 2.1.

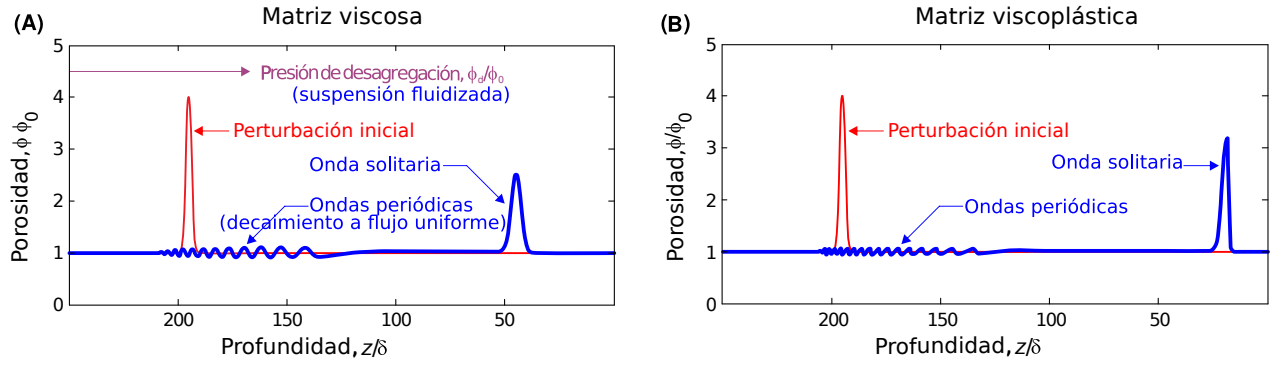


Figura 2.1: (A) Ondas solitarias en fluidos newtonianos y (B) viscoplásticos. Modificada de Connolly & Podladchikov (2015).

En virtud de lo anterior, este trabajo permite cuantificar y relacionar los efectos disipativos viscosos sobre ondas largas $kh \ll 1$ dispersivas débilmente no lineales $A/h \ll 1$, tanto en la celeridad como en el decaimiento de la misma.

2.1 Ondas de gravedad en fluidos

En una amplia variedad de aplicaciones en Ingeniería Civil y Física de ondas de gravedad superficiales en fluidos, donde la principal fuerza restitutoria es la gravedad, la densidad se mantiene prácticamente constante. Considerando oscilaciones de gran longitud de onda con respecto a su profundidad, $h/\lambda \ll 1$, para las cuales se desarrolla este estudio, la tensión superficial es despreciable debido a su gran radio de curvatura κ (Kakutani & Matsuuchi, 1975) a bajos números de Bond, $B = \Gamma/\rho gh^2$ (Dutykh et al., 2017). La ecuación de continuidad y la de momentum en forma vectorial resultan, respectivamente

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \rho gz) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot f(\vec{u}) \quad (2.1.2)$$

donde $f(\vec{u})$ es una función generalizada que puede depender de la reología del fluido y p la presión.

El sistema de referencia corresponde al de la figura 2.2:

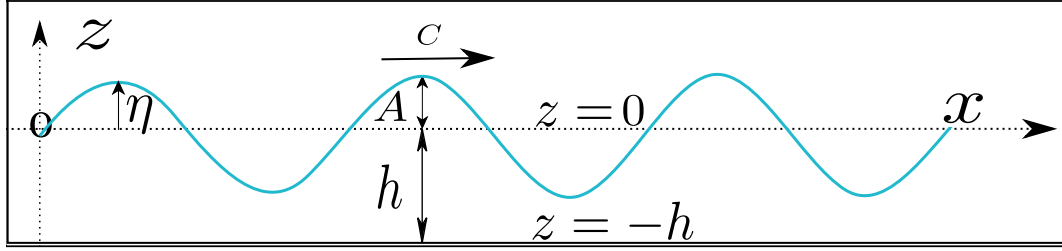


Figura 2.2: Sistema de referencia.

La superficie libre de las ondas se describe mediante la función $F(\vec{x}, t)$ donde $\eta(x, y, t)$ es la elevación de la onda y z se mide desde el nivel de la superficie media:

$$F(\vec{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.1.3)$$

donde $\eta(x, y, t)$ es la elevación desde el nivel de fluido sin perturbar. Tomando la derivada material de $F(\vec{x}, t) = 0$ se obtiene la condición cinemática de superficie:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \eta = w \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (2.1.4)$$

La condición de superficie para un fondo horizontal, permanente ($\partial h / \partial t = 0$) y uniforme ($\nabla h = 0$) resulta:

$$w = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (2.1.5)$$

Para un flujo irrotacional, \vec{u} se puede escribir en función de un potencial $\vec{u} = \nabla \Phi$, reescribiendo (2.1.1) y (2.1.2):

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right) = C(t) \quad (2.1.7)$$

donde $C(t)$ es una función arbitraria del tiempo y se impone igual a 0. Evaluando (2.1.7) en $F(\vec{x}, t) = 0$ se obtiene la condición dinámica de superficie:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{p_{atm}}{\rho} + g\eta + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \Big|_{z=\eta} = 0 \quad (2.1.8)$$

Suponiendo una onda armónica monocromática $\eta = Ae^{i(kx-\omega t)} + c.c.$, $\vec{u} = u_0 \vec{z} e^{i(kx-\omega t)} + c.c.$, $p = p(z)e^{i(kx-\omega t)} + c.c.$ donde k es el vector de onda dimensional, ω la frecuencia y $c.c.$ el complejo conjugado. Despreciando $|\nabla \Phi|^2$ de (2.1.8) en el rango lineal considerando pequeñas perturbaciones $kA \ll 1$ y en conjunto con (2.1.4) y $A/h \ll 1$, se obtiene la relación de dispersión lineal invíscida:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (2.1.9)$$

Para conseguir la velocidad de fase de la onda invíscida lineal se considera la derivada total de una fase constante sobre la superficie:

$$\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.10)$$

Dado que la velocidad de fase c tiene la dirección del vector de onda k :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh(kh)}{k}} \quad (2.1.11)$$

Las ondas lineales representan un rango acotado de soluciones de onda. Fuera de este régimen en la naturaleza se encuentran las denominadas ondas cnoidales, ondas solitarias, ondas de Stokes de hasta quinto orden y ondas de shock, entre otras.

2.2 Celeridad de ondas solitarias en agua

Ecuaciones de Boussinesq y Korteweg-de Vries

En el rango no lineal, la velocidad de fase depende de la componente gravitacional y de la amplitud. Redefiniendo las variables físicas mediante un apóstrofe ($'$), las escalas características de las variables físicas relevantes del problema resultan, de acuerdo a Liu & Orfila (2004):

$$\begin{aligned} x &= x'k, & y &= y'k, & z &= z'/h, & t &= t'(\sqrt{gh}k), & u &= u'/\varepsilon\sqrt{gh}, \\ w &= \mu w'/\varepsilon\sqrt{gh}, & \eta &= \eta'/A & y & \phi &= k\phi'/\varepsilon\sqrt{gh} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde k es el vector de onda, h la profundidad, A la amplitud máxima, $\varepsilon = A/h$ y $\mu = kh$. Expresando ahora $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ y reescribiendo (2.1.6), (2.1.4) y (2.1.8) en función del potencial:

$$\mu^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -1 < z < \varepsilon \eta \quad (2.2.2)$$

$$\mu^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \nabla \Phi \eta \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \varepsilon \eta \quad (2.2.3)$$

$$\mu^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left(\mu^2 (\nabla \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon \eta \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -1 \quad (2.2.5)$$

Expandiendo el potencial en series de potencia en torno a $z = -1$:

$$\Phi(x, z, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - (-1))^n \Phi_n \quad (2.2.6)$$

En (2.2.2) y (2.2.5) entrega la relación recursiva para el potencial:

$$\Phi_{n+2} = -\frac{\mu^2 \nabla^2 \Phi_n}{(n+2)(n+1)} \quad (2.2.7)$$

donde $\Phi_1 = 0$ por la condición de no flujo en el fondo. Definiendo la elevación total como $H = 1 + \varepsilon \eta$, la velocidad de primer orden es:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi = \nabla \Phi_0 - \frac{(\mu H)^2 \nabla^2 \Phi_0}{2} \quad (2.2.8)$$

Reemplazando en (2.2.3) y ∇ (2.2.4) resulta, respectivamente:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla H \cdot \left(\mathbf{u}_0 - \frac{\mu H^2 \nabla^2 \mathbf{u}_0}{2} \right) + H \nabla \cdot \mathbf{u}_0 - \frac{\mu^2 H^3 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)}{6} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \frac{\nabla H}{\varepsilon} + \mu^2 \nabla \left(-\frac{\varepsilon}{2} H^2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_0 + \frac{\varepsilon}{2} H^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_0)^2 - \frac{1}{2} H^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.2.10)$$

donde $\mathbf{u}_0 = \nabla \Phi_0$. Para obtener las ecuaciones de Boussinesq es necesario promediar en la vertical, integrando (2.2.9) y (2.2.10) entre $[-1, \varepsilon \eta]$ para eliminar la dependencia con z y dividiendo por H se obtiene, respectivamente:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla H}{\varepsilon} + \frac{\mu^2}{6} \frac{\partial (H^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})}{\partial t} + \mu^2 \nabla \left(-\frac{\varepsilon}{3} H^2 \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \frac{\varepsilon}{2} H^2 (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 - \frac{H^2}{2} \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.2.12)$$

Para onda larga $\mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1$, $\mathcal{O}(\mu^2) \ll 1$, despreciando términos de primer orden en (2.2.13) y (2.2.14) se simplifican a las ecuaciones de Boussinesq no lineales de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \nabla \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \eta - \frac{\mu^2}{3} \nabla \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0 \quad (2.2.14)$$

Factorizando (2.2.14) por ∇ en función del potencial en una dimensión:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial t} = C(t) = 0 \quad (2.2.15)$$

Es posible recuperar las ecuaciones de Korteweg-De Vries eliminando η de (2.2.13) y (2.2.14) y resolviendo la onda propagativa sobre una característica positiva $\xi = x - ct$. Considerando la aproximación de (2.2.14) y (2.2.15) de orden 0, se obtiene $\eta = \dot{\Phi}$, $\Phi_t = -\dot{\Phi}$. Reemplazando $\eta = \bar{u} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ y $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ resulta la reconocida ecuación de Korteweg-De Vries en una dimensión:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.2.16)$$

A partir de (2.2.13) y (2.2.14):

$$(c^2 - 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \frac{\mu^2}{3} c^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \varepsilon c \left(1 + \frac{c^2}{2} \right) \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2}{\partial \xi} \quad (2.2.17)$$

Imponiendo las condiciones de borde $\eta \Big|_{\pm\infty} = 0$, $\eta' \Big|_{\pm\infty} = 0$ y $\eta'' \Big|_{\pm\infty} = 0$:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 = 3\xi^2 \left(\frac{c^2 - 1}{\varepsilon} - \eta \right) \left(\frac{\varepsilon}{\mu^2} \right) \quad (2.2.18)$$

Para que el lado derecho de (2.2.18) sea positivo en toda fase, en particular para $\eta = 1$ donde se alcanza el mínimo de dicha ecuación, $\left(\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon} - \eta\right) = 0$, luego:

$$c = \sqrt{1 + \varepsilon} \quad (2.2.19)$$

Integrando (2.2.18) se obtiene el perfil de onda:

$$\eta = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3\varepsilon}}{2\mu} (\xi - \xi_0) \right) \quad (2.2.20)$$

Resolviendo las ecuaciones recursivas de mayor orden (2.2.7) Grimshaw (1971) resolvió la velocidad hasta $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$:

$$U = \sqrt{gh\varepsilon} \left(s^2 + \varepsilon s^2/4 - s^4 + \frac{z^2}{h} (9/4s^4 - 3/2s^2) + \varepsilon^2 \left(-19/40s^2 - s^4/5 + 6/5s^6 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z^2}{h} (3/2s^2 + 15/4s^4 - 15/2s^6) + \left(\frac{z}{h}\right)^4 (3/8s^2 - 45/16s^4 + 45/16s^6) \right) \right) \quad (2.2.21)$$

donde $s = \operatorname{sech}(\sqrt{3A/4h^3}(1-5/8\varepsilon+71/128\varepsilon^2)(x-ct))$ y $c = \sqrt{gh}(1 + \varepsilon/2 - 3/20\varepsilon^2 + 3/56\varepsilon^3)$.

2.3 Ondas lineales en fluidos reales

Adimensionalizando por (2.2.1) y despreciando los términos advectivos de (2.1.2) y escalando la componente vertical por $w = w'/\varepsilon\mu\sqrt{gh}$, considerando fluido newtoniano, $f = \rho\nu \left(\nabla \vec{u}' + \nabla \vec{u}'^T \right)$, donde nuevamente las variables físicas se denotan mediante un apóstrofe ('):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{1}{khR} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (kh)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (2.3.2)$$

$$(kh)^2 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{kh}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (kh)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.3.3)$$

donde $R = h\sqrt{gh}/\nu$ es un número de Reynolds.

2.3.1 Condiciones de borde para ondas con viscosidad

En presencia de viscosidad la divergencia del tensor de esfuerzos en la superficie es no nula, por lo que las condiciones de borde se obtienen de Johnson (1997), Wehausen & Laitone (1960) y Kakutani & Matsuuchi (1975) se tiene el vector normal a la superficie bidimensional:

$$\hat{n} = \left(\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}}, \frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \right) \quad (2.3.1.1)$$

Y el tensor de esfuerzos total:

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} p' - 2\rho\nu \frac{\partial u'}{\partial x'} & -\rho\nu \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \\ -\rho\nu \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) & p' - 2\rho\nu \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (2.3.1.2)$$

El esfuerzo en un elemento de superficie se calcula como $\underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{n}$, despreciando la tensión superficial para ondas de gravedad de gran longitud de onda, $\Gamma/\kappa \ll 1$ (Kakutani & Matsuuchi, 1975), donde Γ es el coeficiente de tensión superficial y κ el radio de curvatura.

$$\tau_{xx} \cdot \hat{n}_x + \tau_{xz} \cdot \hat{n}_z = 0 \quad (2.3.1.3)$$

$$\tau_{xz} \cdot \hat{n}_x + \tau_{zz} \cdot \hat{n}_z = 0 \quad (2.3.1.4)$$

Reordenando dichas ecuaciones para obtener la continuidad del esfuerzo normal y esfuerzo tangencial nulo en forma adimensional:

$$p - \eta - \frac{2\mu}{R} \frac{\left((\varepsilon\mu \frac{\partial \eta}{\partial x})^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + (\mu)^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}{1 + (\varepsilon\mu)^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2} = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (2.3.1.5)$$

$$2\varepsilon\mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\left((\varepsilon\mu)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \mu^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (2.3.1.6)$$

$$u = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.3.1.7)$$

Y la condición cinemática en la superficie:

$$w = \varepsilon \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (2.3.1.8)$$

Suponiendo una solución de onda armónica $(\eta, u, w, p) = (1, u_0(z), w_0(z), p_0(z))e^{i(\hat{k}x - \hat{\omega}t)} + c.c.$, donde \hat{k} y $\hat{\omega}$ son los números de onda y frecuencia adimensionales en una dimensión. Reemplazando en (2.3.1), (2.3.2) y (2.3.3):

$$i\hat{k}u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (2.3.1.9)$$

$$-i\omega u_0 = -i\hat{k}p_0 + \frac{1}{\mu R} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - (\mu\hat{k})^2 u_0 \right) \quad (2.3.1.10)$$

$$-i\omega\mu^2 w_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - (\mu\hat{k})^2 w_0 \right) \quad (2.3.1.11)$$

Para ondas lineales se desprecian términos de orden ε en (2.3.1.5), (2.3.1.6), (2.2.3) y (2.3.1.7):

$$p - 1 - \frac{2\mu}{R} \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (2.3.1.12)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + i\hat{k}\mu^2 w_0 = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad (2.3.1.13)$$

$$w_0 = -i\omega \quad \text{en } z = 1 \quad (2.3.1.14)$$

$$u_0 = w_0 = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (2.3.1.15)$$

Reemplazando u_0 de (2.3.1.9) en (2.3.1.10) y derivando con respecto a z para eliminar la presión p_0 se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para w_0 :

$$\omega \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - (\hat{k}\mu)^2 w_0 \right) = \frac{i}{\mu R} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} - 2(\hat{k}\mu)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + (\hat{k}\mu)^4 w_0 \right) \quad (2.3.1.16)$$

Resolviendo el polinomio característico:

$$w_0(z) = A \sinh(\hat{k}\mu z) + B \cosh(\hat{k}\mu z) + C \sinh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega\mu R z} \right) + D \cosh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega\mu R z} \right) \quad (2.3.1.17)$$

Imponiendo las condiciones de borde (2.3.1.12), (2.3.1.13), (2.3.1.14) y (2.3.1.15) se obtiene la relación de dispersión:

$$\begin{aligned}
& \mu \hat{k} \left(\mu \hat{k} \cosh(\mu \hat{k}) \sinh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) - \sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \sinh(\mu \hat{k}) \cosh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) \right) \\
& + \frac{1}{R^2} \left(4\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \mu^2 \hat{k}^2 (2\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R) + 4\mu^3 \hat{k}^3 \sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right. \\
& \left. \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \sinh(\mu \hat{k}) \sinh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) - \mu \hat{k} \cosh(\mu \hat{k}) \cosh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) \right) + \right. \\
& \left. \left(2\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R \right)^2 \left(\mu \hat{k} \sinh(\mu \hat{k}) \sinh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \cosh(\mu \hat{k}) \cosh \left(\sqrt{\mu^2 \hat{k}^2 - i\omega \mu R} \right) \right) \right) = 0 \quad (2.3.1.18)
\end{aligned}$$

Realizando expansiones en series de $\omega = \omega_0 + \sqrt{R^{-1}}\omega_1 + \dots$ con $R^{-1} \ll 1$ y reordenando términos (Johnson, 1997):

$$\omega = \hat{k} \left(\frac{\sqrt{\tanh(\mu \hat{k})}}{\mu \hat{k}} - \frac{(1+i)}{2\sqrt{2R}} \frac{\mu \hat{k}^{\frac{1}{4}}}{\cosh^{\frac{5}{4}}(\mu \hat{k}) \sinh^{\frac{3}{4}}(\mu \hat{k})} \right) \quad (2.3.1.19)$$

2.3.2 Velocidad de fase de la onda lineal

A partir de (2.3.1.19) se obtiene la velocidad de fase de ondas lineales incorporando los efectos de la viscosidad para una onda unidimensional. Expresada en unidades físicas:

$$\frac{\omega'}{k'} = \sqrt{gh} \left(\frac{\sqrt{\tanh(kh)}}{kh} - \frac{(1+i)}{2\sqrt{2R}} \frac{kh^{\frac{1}{4}}}{\cosh^{\frac{5}{4}}(kh) \sinh^{\frac{3}{4}}(kh)} \right) \quad (2.3.2.1)$$

Resultado consistente con Liu & Orfila (2004), donde la parte real afecta la velocidad de fase de la onda mientras que la parte imaginaria representa la atenuación de ésta.

Considerando el régimen de aguas someras $kh \ll 1$ y expandiendo $\cosh(kh)$ y $\sinh(kh)$ en series de Taylor, (2.3.2.1) se aproxima por:

$$\frac{\omega'}{k'} = \sqrt{gh} \left(1 - \frac{(1+i)}{2\sqrt{2Rkh}} \right) \quad (2.3.2.2)$$

2.4 Ondas no lineales en fluidos reales

2.4.1 Ecuaciones de onda solitaria en fluidos newtonianos

Adimensionalizando (2.1.1) y (2.1.2) por 2.2.1 para $f = \rho\nu(\nabla\vec{u}' + \nabla\vec{u}'^T)$, con ν la viscosidad cinemática, en el sistema de coordenadas de la Figura 2.2 resulta:

$$\mu^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4.1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\nabla p + \frac{\nu k}{\sqrt{gh}} \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.1.2)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} - 1 + \frac{\varepsilon \nu k}{\sqrt{gh}} \left(\nabla^2 w + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.1.3)$$

donde $p = \frac{p'}{\varepsilon \rho gh}$. Definiendo $\alpha^2 = \nu k / \sqrt{gh}$ como el inverso de un número de Reynolds, para un fluido newtoniano tal que $\mathcal{O}(\alpha) \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ el flujo se puede separar en una zona irrotacional dentro de dos capas límites, una superficial y otra de fondo debido a la condición de no deslizamiento. En virtud del teorema de Helmholtz para un campo vectorial continuo tal que $u(\pm\infty) = u(\pm\infty)' = 0$, $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathbf{u}^r$ tal que $\nabla \cdot \mathbf{u}^r = 0$. La escala de la componente rotacional, \mathbf{u}^r , no está dada por la ecuación de Laplace del potencial, sino que sólo por continuidad. Se expanden u^r y w^r en series perturbadas en torno al parámetro α y $\alpha\mu$ respectivamente, para conservar ambas velocidades a $\mathcal{O}(\varepsilon)$ al introducir el cambio de variable $\eta = \frac{z+1}{\alpha/\mu}$:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \mathbf{u}_0^r + \alpha \mathbf{u}_1^r + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.4.1.4)$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \alpha\mu w_1^r + \mathcal{O}((\mu\alpha)^2) \quad (2.4.1.5)$$

Reemplazando en (2.4.1.1) a $\mathcal{O}(\mu^2\alpha^2)$:

$$\mu^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_0^r + \mathcal{O}(\mu^2\alpha^2) + \alpha\mu \frac{\partial w_1}{\partial z} + \mathcal{O}(\mu^2\alpha^2) = 0 \quad (2.4.1.6)$$

Mediante el cambio de variable $\eta = \frac{z+1}{\alpha/\mu}$ en (2.4.1.6) y (2.4.1.2) a $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0^r + \frac{\partial w_1^r}{\partial \eta} = 0 \quad (2.4.1.7)$$

$$\frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t} + \nabla p = -\frac{\partial \mathbf{u}_0^r}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0^r}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.4.1.8)$$

donde la velocidad rotacional no induce gradientes de presión dentro de la capa límite. Las condiciones de no deslizamiento y flujo vertical cero son:

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \mathbf{u}_0^r = 0 \quad \text{en} \quad \eta = 0 \quad (2.4.1.9)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \alpha \mu w_1^r = 0 \quad \text{en} \quad \eta = 0 \quad (2.4.1.10)$$

$$\mathbf{u}_0^r = 0 \quad \text{en} \quad \eta = \infty \quad (2.4.1.11)$$

Fuera de la capa límite $\alpha \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$ y se recupera la solución de flujo potencial:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_0^r, w_1) = (0, 0) \quad (2.4.1.12)$$

Aplicando media transformada de Fourier del seno $\mathcal{F}_s(f) = \int_0^\infty f \text{sen}(\alpha \eta) d\eta$ a (2.4.1.8) con las condiciones de borde (2.4.1.9), (2.4.1.10) y (2.4.1.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_s(u_0^r) + \alpha^2 \mathcal{F}_s(u_0^r) = -\alpha \nabla \Phi \quad (2.4.1.13)$$

Resolviendo (2.4.1.13) por el factor integrante $e^{\alpha^2 t}$ y aplicando $\mathcal{F}_s^{-1}(u_0^r)$:

$$u_0^r = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{sen}(\alpha \eta) d\alpha \int_0^t \alpha e^{-\alpha^2(t-T)} \nabla \Phi dT \quad (2.4.1.14)$$

En función del coseno:

$$u_0^r = \frac{2}{\pi} \int_0^t \nabla \Phi \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^\infty \text{cos}(\alpha \eta) e^{-\alpha^2(t-T)} d\alpha dT \quad (2.4.1.15)$$

Descomponiendo $\text{cos}(\alpha \eta) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha \eta} - e^{-i\alpha \eta})$ e integrando (2.4.1.15):

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}(e^{i\alpha \eta} - e^{-i\alpha \eta}) \right) e^{-\alpha^2(t-T)} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{\frac{-\eta^2}{4(t-T)}}}{\sqrt{4(t-T)}} \quad (2.4.1.16)$$

Reemplazando en (2.4.1.15):

$$\mathbf{u}_0^r = -\frac{\eta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla \Phi}{\sqrt{(t-T)^3}} e^{-\frac{\eta^2}{4(t-T)}} dT \quad (2.4.1.17)$$

El esfuerzo de corte adimensional en el fondo se puede escribir como:

$$\tau \Big|_{\eta=0} = \frac{\partial \mathbf{u}_0^r}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla \Phi}{\sqrt{(t-T)^3}} dT = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}}{\sqrt{(t-T)}} dT \quad (2.4.1.18)$$

Integrando (2.4.1.17) en (2.4.1.7) se obtiene la componente vertical, w_1 :

$$w_1^r = -\int_{\eta}^{\infty} \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla^2 \Phi}{\sqrt{(t-T)^3}} e^{-\frac{\eta^2}{4(t-T)}} dT d\eta \quad (2.4.1.19)$$

Expresando Φ como (2.2.6) e imponiendo (2.4.1.10):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-1} = \Phi_1 = -\alpha \mu \int_{\eta}^{\infty} \frac{\eta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla^2 \Phi}{\sqrt{(t-T)^3}} e^{-\frac{\eta^2}{4(t-T)}} dT d\eta \Big|_{\eta=0} = \frac{\alpha \mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla^2 \Phi}{\sqrt{t-T}} dT \quad (2.4.1.20)$$

Usando (2.4.1.1):

$$\Phi_{n+2} = -\frac{\mu^2 \nabla^2 \Phi_n}{(n+1)(n+2)} \quad (2.4.1.21)$$

Reemplazando Φ en (2.2.3) la nueva condición cinemática de superficie libre al orden $\mathcal{O}(\mu^4)$ resulta:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H \nabla \Phi_0) - \frac{\Phi_1}{\mu^2} - \frac{\mu^2}{6} \nabla \cdot (H^3 \nabla^2 \nabla \Phi_0) = 0 \quad (2.4.1.22)$$

Utilizando Φ en (2.2.3) a $\mathcal{O}(\mu^4)$, la condición dinámica de superficie libre despreciando los efectos de la capa límite superficial está dada por (2.2.10) y expresando $\nabla \Phi$ en términos de la velocidad media en la vertical:

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{H} \int_{-1}^{\varepsilon \eta} \nabla \Phi dz = \nabla \Phi_0 - \frac{\mu^2}{6} H^2 \nabla^2 \nabla \Phi_0 + \mathcal{O}(\mu^4) \quad (2.4.1.23)$$

Reemplazando $\nabla\Phi_0 = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\mu^2}{6} H^2 \nabla^2 \nabla\Phi_0$ en (2.4.1.26) y (2.2.10) a $\mathcal{O}(\mu^4)$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (H\bar{\mathbf{u}}) - \frac{\alpha}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\sqrt{t-T}} dT = 0 \quad (2.4.1.24)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \varepsilon \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla H}{\varepsilon} - \frac{\mu^2}{3} \nabla \nabla \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0 \quad (2.4.1.25)$$

Para el caso 1D, realizando el cambio de variables $\xi = x - t$ y $\tau = \varepsilon t$ a $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \bar{u} + \varepsilon \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\alpha}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-T}} dT = 0 \quad (2.4.1.26)$$

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\mu^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial(-\eta)}{\partial \xi} = 0 \quad (2.4.1.27)$$

Sumando (2.4.1.26) y (2.4.1.27) y utilizando la aproximación de primer orden (2.2.15) $\eta = \bar{u} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ se obtiene la ecuación de Korteweg-De Vries unidimensional incluyendo los efectos de la capa límite:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = \frac{\alpha}{2\mu\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-T}} dT \quad (2.4.1.28)$$

Para conservar términos del orden de los esfuerzos de corte en (2.4.1.28) se utiliza el cambio de variables $\hat{t} = \frac{\alpha}{\mu\varepsilon} \tau$ y $\theta = x - t - \frac{\mu\varepsilon}{2\alpha} \int_0^{\hat{t}} a(v) dv$ siendo $a = \eta/A$ el decaimiento, expandiendo la superficie libre en series de $\delta = \frac{\alpha}{\mu\varepsilon}$:

$$\eta = \eta_0 + \delta \eta_1 + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (2.4.1.29)$$

Reemplazando en (2.4.1.28) se obtienen los primeros órdenes a $\mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(\delta)$, respectivamente:

$$-\frac{a(\hat{t})}{2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \theta} + \frac{3}{4} \frac{\partial \eta_0^2}{\partial \xi} + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \theta^3} = 0 \quad (2.4.1.30)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \hat{t}} - \frac{a(\hat{t})}{2} \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \frac{\partial \eta_0 \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \theta^3} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-T}} dT \quad (2.4.1.31)$$

Factorizando por los operadores adjuntos (Liu & Orfila, 2004), (2.4.1.30) y (2.4.1.31) se reescriben como:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{a}{2} + \frac{3}{4}\eta_0 + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \eta_0 \equiv \mathcal{L}_0 \eta_0 = 0 \quad (2.4.1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{a}{2} + \frac{3}{2}\eta_0 + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \eta_1 \equiv \mathcal{L} \eta_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-T}} dT - \frac{\partial \eta_0}{\partial \hat{t}} \quad (2.4.1.33)$$

Integrando la diferencia $\eta_0 \mathcal{L} \eta_1 - \eta_1 \mathcal{L} \eta_0$ los operadores (2.4.1.33)-(2.4.1.32):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\eta_0 \mathcal{L} \eta_1 - \eta_1 \mathcal{L} \eta_0) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0 \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-T}} dT - \frac{\partial \eta_0}{\partial \hat{t}} \right) = 0 \quad (2.4.1.34)$$

Reemplazando la solución de primer orden (2.2.20) para η_0 se obtiene una ecuación para determinar el decaimiento. La resolución numérica de (2.4.1.34) (Liu & Orfila, 2004) entrega:

$$\frac{da}{d\hat{t}} = -a^{5/4} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\pi}} \quad (2.4.1.35)$$

$$1 - a^{-1/4} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi^3}} \hat{t} \quad (2.4.1.36)$$

2.4.2 Velocidad de fase en un fluido newtoniano

Con este resultado se descubre que se puede obtener la celeridad de la onda solitaria de primer orden en fluidos newtonianos débilmente afectados por la viscosidad. En un sistema Lagrangeano siguiendo el perfil de la onda $\eta(\theta)$ a una celeridad C , la fase θ permanece constante. Tomando la derivada material de la fase θ :

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial(x - t - \frac{\mu\varepsilon}{2\alpha} \int_0^{\hat{t}} a(v) dv)}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial(x - t - \frac{\mu\varepsilon}{2\alpha} \int_0^{\hat{t}} a(v) dv)}{\partial x} = 0 \quad (2.4.2.1)$$

$$-1 - \frac{\mu\varepsilon}{2\alpha} \frac{\alpha}{\mu} a \left(\frac{\alpha}{\mu} \hat{t} \right) + \frac{dx}{dt} \cdot 1 = 0 \quad (2.4.2.2)$$

Despejando $C = dx/dt$:

$$C = 1 + \frac{\varepsilon a(\hat{t})}{2} \quad (2.4.2.3)$$

En variables físicas:

$$c = \sqrt{gh'} \left(1 + \frac{\eta(\frac{\alpha}{\mu} \sqrt{ghkt'})}{2h'} \right) \quad (2.4.2.4)$$

2.4.3 Capa límite superficial

La ecuación de la capa límite superficial para un fluido newtoniano ha sido resuelta por Klettner & Eames (2012). Reescribiendo las ecuaciones de Navier-Stokes linealizadas en términos de la vorticidad $\omega = \nabla \times \vec{u}$ para un sistema de referencia Lagrangeano sobre la onda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4.3.1)$$

$$(c + u) \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.3.2)$$

Introduciendo la función potencial ϕ y la función corriente Ψ tal que $\vec{u} = \nabla \phi$ y $\vec{w} = \nabla \times \Psi$ (2.4.3.2) en el plano $\phi - \Psi$ resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \phi} \left((u - c)^2 + w^2 \right) = \nu \left(\left((u - c)^2 + w^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \Psi^2} \right) \right) \quad (2.4.3.3)$$

Mediante la aproximación de capa límite en la superficie $|\partial \omega / \partial \Psi| \gg |\partial \omega / \partial \phi|$ y utilizando (2.4.3.1):

$$\frac{\partial \omega}{\partial \phi} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \Psi^2} \right) \quad (2.4.3.4)$$

En coordenadas intrínsecas (x_s, z_n) tangente y normal a la superficie donde el esfuerzo tangencial es nulo $\partial u / \partial z_n = -\partial w / \partial x_s$. Luego se tiene de Longuet-Higgins (1992):

$$\omega(x, z = \eta) = \omega(\phi, \Psi = 0) = -2\kappa \sqrt{(u - c)^2 + w^2} \quad (2.4.3.5)$$

donde $\kappa = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} / \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}$ es la curvatura de la superficie libre. Por otro lado se tiene la condición de flujo irrotacional aguas abajo $\omega(\phi = \infty) = 0$. La vorticidad en (2.4.3.4) consiste en una ecuación de difusión sujeta a una condición de Dirichlet en la superficie (2.4.3.5). La solución de dicha ecuación se obtiene mediante la transformada de Fourier (Mei, 1997):

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu}} \int_{-\infty}^{\phi} \frac{-2\kappa\sqrt{(u-c)^2 + w^2}\Psi}{(\phi-v)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\Psi^2}{4\nu(\phi-v)}} dv \quad (2.4.3.6)$$

En función de las coordenadas intrínsecas (x_s, z_n) y considerando $\mathcal{O}(u/\sqrt{gh}) = \mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_s} = u - c \sim -c \quad (2.4.3.7)$$

$$\phi = -cx_s + \mathcal{C}_1 \quad (2.4.3.8)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_s} = \frac{\partial\Psi}{\partial z_n} = -c \quad (2.4.3.9)$$

$$\Psi = -cz_n + \mathcal{C}_2 \quad (2.4.3.10)$$

En la superficie libre $\Psi = 0$ luego $\mathcal{C}_2 = 0$. En función de (x_s, z_n) :

$$\omega(x_s, z_n) = \sqrt{\frac{c}{4\pi\nu}} \int_{-\infty}^{x_s} \frac{2\kappa\sqrt{(u-c)^2 + w^2}z_n}{(x_s-v)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z_n^2}{4\nu(z_n-v)}} dv \quad (2.4.3.11)$$

Dentro de la capa límite $\partial w/\partial x_s \ll \partial u/\partial z_n$ luego $\omega \sim -\partial u/\partial z_n$. De (2.4.3.11):

$$u = - \int_{-\infty}^{z_n} \omega(x_s, z_n) dz_n \quad (2.4.3.12)$$

2.5 Fluidos no newtonianos

Un fluido no newtoniano se caracteriza porque su viscosidad aparente depende de la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ como una función $\mu = f(\dot{\gamma})$. En particular en este estudio se utiliza un modelo de fluido pseudoplástico.

2.5.1 Fluido tipo Ostwald-de Waele o Ley de Potencia

Un fluido no newtoniano tipo Ostwald-de Waele o de Ley de Potencia se caracteriza porque la viscosidad aparente varía como una potencia del segundo invariante del tensor de tasa de deformación, de este modo la función $f(\vec{u})$ o tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\tau}}$ se expresa como:

$$\underline{\underline{\tau}} = K \left(\sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}} \right)^{n-1} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (2.5.1.1)$$

donde K (Pas^n) y n son los índices de consistencia y flujo, respectivamente y:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \vec{u}' + \nabla \vec{u}'^T \quad (2.5.1.2)$$

Resultando:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} & 2\frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} & 2\frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (2.5.1.3)$$

2.5.2 Ecuaciones de onda solitaria en fluidos no newtonianos

Adimensionalizando (2.1.1) por los factores (2.2.1) y escalando la componente vertical por $w = w'/\varepsilon\sqrt{gh}$, donde w denota la variable adimensional:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5.2.1)$$

El segundo invariante de la tasa de deformación $\frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ resulta:

$$\frac{\underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}}{2} = \frac{gh\varepsilon^2}{h^2} \left(2\mu^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \mu^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.5.2.2)$$

Usando (2.5.2.1) en (2.5.1.1) y despreciando términos de $\mathcal{O}(\mu^2)$ la viscosidad está dada por:

$$\mu_{eff} = K \left(\sqrt{\frac{\underline{\underline{\dot{\gamma}}} : \underline{\underline{\dot{\gamma}}}}{2}} \right)^{n-1} \cong K \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \quad (2.5.2.3)$$

Las ecuaciones de momentum adimensionales resultan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu} w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma A} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{K}{\rho \sqrt{gh} \mu h} \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \quad (2.5.2.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu} w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma A \mu} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\mu \varepsilon} + \frac{K \sqrt{gh}}{\rho g \mu h^2} \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \quad (2.5.2.5)$$

A $\mathcal{O}(\mu^2)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu} w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma A} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K}{\rho \sqrt{gh} \mu h} \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \quad (2.5.2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{\mu} w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma A \mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\mu \varepsilon} + \frac{K \sqrt{gh}}{\rho g \mu h^2} \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \quad (2.5.2.7)$$

Condición de borde cinemática:

$$w = \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mu \varepsilon u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.5.2.8)$$

Escribiendo la condición de borde dinámica (2.3.1.3) y (2.3.1.4) en variables físicas:

$$\left(-p' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + \left(K \left(2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} \right)^2 + 2 \frac{\partial u'}{\partial z'} \frac{\partial w'}{\partial x'} + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z'} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \right) \cdot \frac{\left(2 \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta'}{\partial x'} \right)^2 + 1}} = 0 \quad \text{en } z' = \eta' \quad (2.5.2.9)$$

$$p' + \left(K \left(2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} \right)^2 + 2 \frac{\partial u'}{\partial z'} \frac{\partial w'}{\partial x'} + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z'} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \right. \\ \left. \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - 2 \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) = 0 \quad \text{en } z' = \eta' \quad (2.5.2.10)$$

Adimensionalizando (2.5.2.9)+ $\partial\eta'/\partial x'$ (2.5.2.10) y (2.5.2.9)- $\partial\eta'/\partial x'$ (2.5.2.10) por (2.2.1) para eliminar términos cruzados con $\partial\eta'/\partial x'$ de mayor orden y escalando $w = w'/\varepsilon\sqrt{gh}$ a $\mathcal{O}(\varepsilon^2\mu^2)$, donde w es adimensional:

$$K \left(\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 (\mu\varepsilon)^2 - 1 \right) \varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \frac{\partial u}{\partial z} - 2k\varepsilon^2 \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.11)$$

$$p' \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \mu\varepsilon \right) + K \left(\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(2k\varepsilon^2 \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - 2(\mu\varepsilon)^2 \varepsilon k \sqrt{gh} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \right. \\ \left. 2\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.12)$$

A $\mathcal{O}(\varepsilon^2\mu^2)$:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 2\mu\varepsilon\sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.13)$$

$$p' \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \mu\varepsilon \right) - K \left(\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(2\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.14)$$

Reemplazando $\partial w/\partial z = -\mu\partial u/\partial x$ de (2.5.2.1) en (2.5.2.13) a $\mathcal{O}(\varepsilon\mu)$, las condiciones de esfuerzo tangencial cero y continuidad del esfuerzo normal se reducen a:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.15)$$

$$p' - K \left(\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(2\varepsilon\sqrt{gh^{-1}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } z = \varepsilon\eta \quad (2.5.2.16)$$

Para n arbitrario el orden de (2.5.2.16) depende del modelo de reología.

2.5.3 Ecuaciones promediadas en la vertical

Integrando (2.1.1) y (2.1.2) entre $[-h', \eta']$, definiendo $\mathcal{H} \equiv \eta' + h'$ y utilizando la regla de Leibnitz $\left(\int_a^b f(x)dx\right)' = \int_a^b f(x)'dx + b'f(b) - a'f(a)$ junto a (2.1.8) en variables físicas resulta:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t'} + \frac{\partial(\bar{u}'\mathcal{H})}{\partial x'} = 0 \quad (2.5.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \int_{-h'}^{\eta'} u' dz + \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-h'}^{\eta'} u'^2 dz = -g \int_{-h'}^{\eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} dz - \frac{1}{\rho} \tau_{xy} \Big|_{-h} \quad (2.5.3.2)$$

donde se supone una distribución de presiones hidrostática, en que $p = \gamma(\eta - z)$ y $\hat{p} = \gamma\eta$:

$$\bar{u}' = \int_{-h}^{\eta} u dz \quad (2.5.3.3)$$

$$\beta = \frac{\left(\int_{-h}^{\eta} u'^2 dz\right)}{\left(\bar{u}'^2 \mathcal{H}\right)} \quad (2.5.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\bar{u}'\mathcal{H}) + \frac{\partial}{\partial x'}(\beta\bar{u}'^2\mathcal{H}) = -g\mathcal{H} \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \frac{1}{\rho} \tau_{xy} \Big|_{-h} \quad (2.5.3.5)$$

Tomando el límite $\eta' \ll h'$:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \bar{u}' + \frac{\partial}{\partial x'} \beta \bar{u}'^2 = -g \frac{\partial \eta'}{\partial x'} - \frac{\tau_{xy}}{\rho h} \Big|_{-h} \quad (2.5.3.6)$$

Adimensionalizando por (2.2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \beta \varepsilon \bar{u}^2 = -\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{K \sqrt{gh^{-1}}}{\rho g \varepsilon \mu} \left(\sqrt{gh^{-1}} \varepsilon\right)^{n-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{-h} \quad (2.5.3.7)$$

donde es necesario conocer la distribución de $\partial u / \partial z$ para reducir la (2.5.3.7) a una ecuación diferencial ordinaria mediante un cambio de variable de tipo $\hat{\theta} = x - ct$.

3. Metodología Experimental

3.1 Técnicas de medición

3.1.1 Perfilometría por transformada de Fourier

La perfilometría por transformada de Fourier (FTP) propuesta por Takeda et al. (1982), es una técnica óptica no intrusiva de alta resolución la cual permite medir la elevación de superficies de objetos sin interferirlos, obteniendo discretamente la superficie en 2D a lo largo del tiempo con una precisión entre $0,1 - 1 \text{ mm}$ (Laloš et al., 2015).

El método consiste en proyectar patrones de franjas estructurados en un plano de referencia y en la superficie perturbada que se quiere medir, lo cual permite reconstruir dicho objeto de manera más precisa que otros métodos ópticos (Bedard, 2013). Ambos patrones periódicos se pueden expresar como una expansión en series de Fourier para la superficie del fluido (Esteve-Taboada et al., 1999):

$$g_0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(2\pi i n f_0 x) \quad (3.1.1.1)$$

$$g(x, y) = r(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(2\pi i n f_0 (x + s(x, y))) \quad (3.1.1.2)$$

donde $g(x, y)$ y $g_0(x, y)$ son las funciones asociadas a los patrones proyectados, f_0 su frecuencia fundamental en el espacio, $r(x, y)$ la reflectividad de la señal perturbada, $s(x, y) = \overline{EE'}$ es el corrimiento en el espacio (Figura 3.1) y A_n los coeficientes de las series de Fourier.

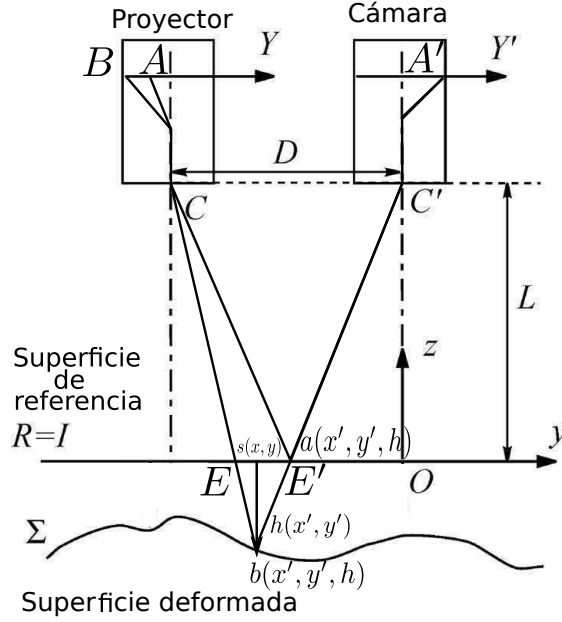


Figura 3.1: Esquema de la FTP modificado de Maurel et al. (2009).

En la Figura 3.1 se esquematiza la configuración de los equipos de medición. El sistema de referencia (x, y) con origen O mide desde la superficie de referencia sin deformar, mientras que las coordenadas del plano perturbado se denotan por (x', y') . Los ejes de los focos de los lentes del proyector y la cámara deben estar alineados y paralelos en el mismo plano (Takeda et al., 1982). Los ejes ópticos de la cámara y el proyector están separados por una distancia D y a una distancia L sobre la superficie de referencia. $R(x, y)$ es el plano de referencia de la superficie sin perturbar perpendicular a los ejes de la cámara y h la elevación de la superficie perturbada $\Sigma(x', y')$ que se quiere medir.

Un haz de luz proyectado en $a(x, y, 0)$ desde A , cuya fase es $\phi_a = f_0 y_a$, es capturado por la cámara en A' , mientras que el haz proyectado en $b(x', y', -h)$ desde B tiene una fase $\phi_b = f_0 y_b$ en la imagen registrada en A' , donde $f_0 = 2\pi/p$ es la frecuencia fundamental de las franjas en el espacio y $p=10$ pixeles la periodicidad de ellas. Se genera una señal sinusoidal de esta frecuencia debido al tamaño de las ondas que se quieren medir. Mediante una semejanza geométrica de los triángulos $\Delta CbC'$ y $\Delta EbE'$ en el sistema de referencia de la Figura 3.1 se tiene:

$$\frac{-h}{\overline{EE'}} = \frac{L - h}{D} \quad (3.1.1.3)$$

donde $\Delta\phi = f_0 \overline{EE'}$, con la cual es posible escribir la elevación $h(x', y')$ en función de $\Delta\phi$:

$$h = \frac{\Delta\phi L}{\Delta\phi - f_0 D} \quad (3.1.1.4)$$

Las nuevas coordenadas para la superficie deformada $h(x', y')$ en Σ , se obtienen de Maurel et al. (2009) como $(x', y') = (1 - h/L) \cdot (x, y)$.

Para obtener $\Delta\phi$ se aplica la transformada de Fourier tanto a las imágenes de la superficie de referencia como la deformada y se filtran utilizando un filtro Gaussiano y de Hanning en torno a la frecuencia fundamental f_0 para eliminar el espectro cero en el espacio de frecuencias (Figura 3.2).

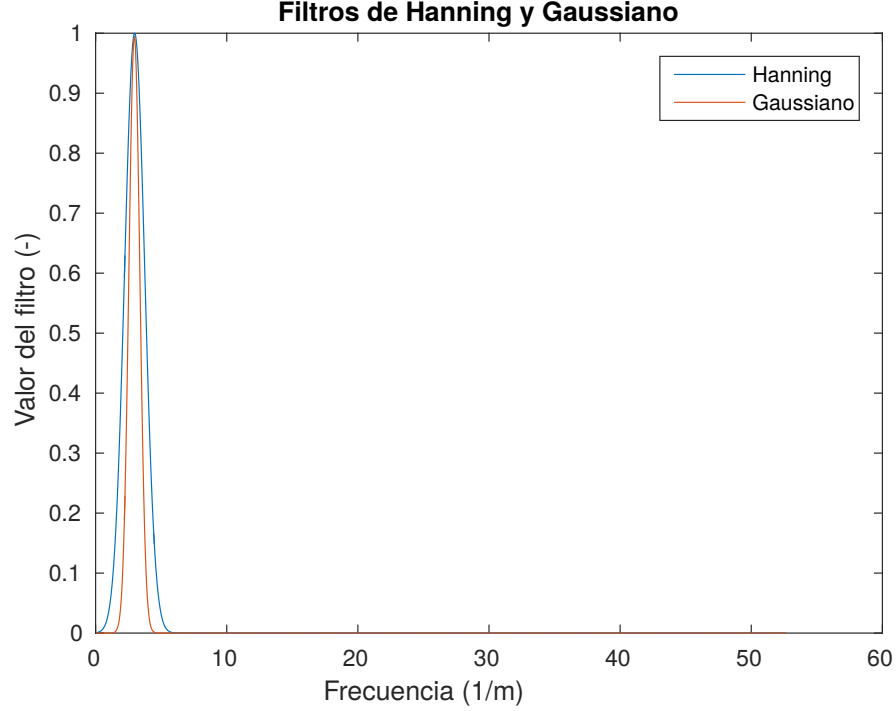


Figura 3.2: Filtros de Hanning y Gaussiano.

A las señales filtradas en el espacio de frecuencias se les aplica la transformada inversa obteniendo la señal original filtrada:

$$\hat{g}(x, y) = A_1 r(x, y) e^{i(f_0 x + \phi(x, y))} \quad (3.1.1.5)$$

$$\hat{g}_0(x, y) = A_1 e^{i(f_0 x + \phi_0(x, y))} \quad (3.1.1.6)$$

Para obtener el desfase $\Delta\phi$ del patrón sinusoidal de franjas de la superficie deformada, se multiplica el complejo conjugado de la señal en el plano de referencia por la señal en la superficie perturbada. Luego se extrae el argumento del producto complejo resultando:

$$\hat{g}(x, y) \cdot \hat{g}_0^*(x, y) = A_1^2 r(x, y) e^{i\Delta\phi(x, y)} \quad (3.1.1.7)$$

Utilizando este desfase (3.1.1.7) en la ecuación (3.1.1.4) se obtiene la elevación de la superficie.

Para observar de mejor forma el patrón proyectado sobre la superficie se utilizan partículas de dióxido de Titanio (TiO_2) de tipo anatasa, las cuales consisten en un pigmento de nanopartículas difusivas de luz las cuales crean una superficie reflectante sin dejar una delgada película que atenúe las ondas superficiales (Przadka et al., 2012) y que no alteran las propiedades hidrodinámicas del agua (Cobelli et al., 2009). Si bien Minagawa & White (1976) observaron que a concentraciones sobre el 5 % en peso, las mezclas de polímeros con TiO_2 adquieren un esfuerzo de fluencia a ser deformadas, las soluciones utilizadas en este estudio contiene 0,5 % o 5 g/l al igual que Cobelli et al. (2009), con tal de obtener un contraste cercano a 150 en intensidad de grises (Przadka et al., 2012) y se utiliza agua destilada para prevenir su aglomeración. Es importante mantener la concentración bajo el punto de saturación de 10 % v/v (Przadka et al., 2012).

3.1.2 Velocimetría de Imágenes de Partículas Digital

La Velocimetría de Imágenes de Partículas Digital (DPIV) (Adrian, 1991) es una técnica óptica no intrusiva utilizada para visualizar campos de velocidades de flujos en enfoque Euleriano. El método consiste en iluminar un plano de micropartículas de inercia despreciable inmersas neutralmente boyantes inmersas en un fluido, cuyo desplazamiento relativo es registrado mediante una cámara digital, cuyo eje focal es alineado perpendicularmente a dicha región. La cámara registra planos de iluminación conteniendo partículas entre intervalos sucesivos de tiempo Δt .

El campo de desplazamiento se calcula para grupos de partículas mediante la correlación cruzada de sub-ventanas de interrogación, entregando una matriz de correlación, cuyo peak en el espacio de frecuencias representa la posición del vector de desplazamiento mas probable para un conjunto de partículas (Figura 3.3). Luego el campo de velocidad en cada sub-dominio se calcula como:

$$u_i(x, z, t + \Delta t) = \frac{\vec{r}_i(x, z, t + \Delta t) - \vec{r}_i(x, z, t)}{\Delta t} \quad (3.1.2.1)$$

La correlación cruzada (R_{II}) entre dos imágenes sucesivas en t y $t + \Delta t$, se obtiene en virtud del teorema de correlación cruzada, el cual establece que la transformada de Fourier de dicha función está dada por el producto entre la transformada de una función y el complejo conjugado de la transformada de la otra, en el espacio de frecuencias:

$$\mathcal{F}(R_{II}) \equiv \mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}^*(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (3.1.2.2)$$

donde \star denota la correlación cruzada. Aplicando la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} (IFFT) se obtiene la correlación real a partir de la señal procesada por transformada de Fourier. De esta forma es posible reducir las iteraciones de la correlación directa $\mathcal{O}(N^2)$ a $\mathcal{O}(N \log_2(N))$ mediante la transformada de Fourier Discreta o FFT (Figura 3.3).

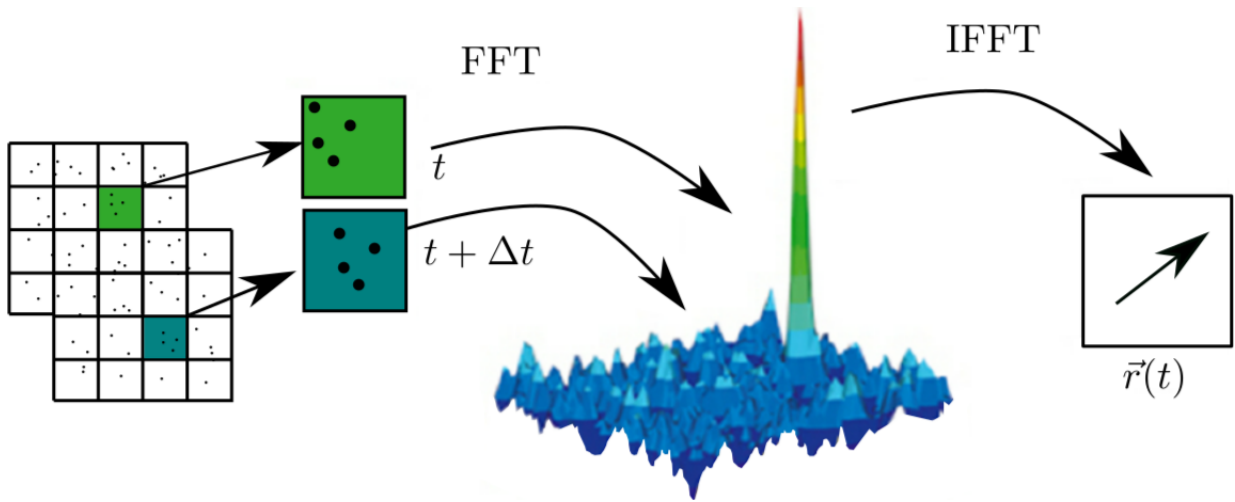


Figura 3.3: Correlación mediante FFT.

Los campos de velocidades se calculan a partir de series de imágenes sucesivas a una frecuencia de adquisición de 500 fps o $\Delta t = 0,002(s)$. La mínima frecuencia de adquisición necesaria para realizar PIV se calcula mediante (Adrian, 1991):

$$\Delta T \leq \frac{M L}{4 U} \quad (3.1.2.3)$$

donde $M=9,375e - 6 px/m$ es el factor de magnificación de la cámara. Considerando un campo de visión de $L = 0,12$ (m) y estimando la velocidad con la escala horizontal como $\varepsilon\sqrt{gh}$ (capítulo 2.2) se obtiene un valor de $\mathcal{O}(\Delta t) = 0,01$, mayor al utilizado.

El post proceso se realiza utilizando el software PIVlab versión 1.41 el cual es un código disponible para toda la comunidad científica escrito en MATLAB. OpenPIV es otro software utilizado, gratuito y de código abierto escrito en python y C++, el cual a diferencia de PIVlab, se sigue actualizando hasta la fecha por su creador. Se opta por PIVlab por su mayor estabilidad, extensa documentación y por estar validado por una amplia comunidad de usuarios (Thielicke & Stamhuis, 2014; Thielicke, 2014).

En PIVlab las ventanas de interrogación se fijan a $32 \times 32 px^2$ debido a que la FFT requiere dominios de cálculo de potencias de 2^N (Stamhuis, 2006) y de forma tal de mantener una densidad de partículas alrededor de $\mathcal{O}(10)$ en cada sub dominio (Stamhuis, 2006). El programa posee distintas herramientas de preproceso, entre ellas filtros pasa alto para filtrar las bajas intensidades de luz gris (Figura 3.4) y filtros de intensidad para uniformar el efecto de la distribución Gaussiana del láser sobre las partículas (Thielicke, 2014).

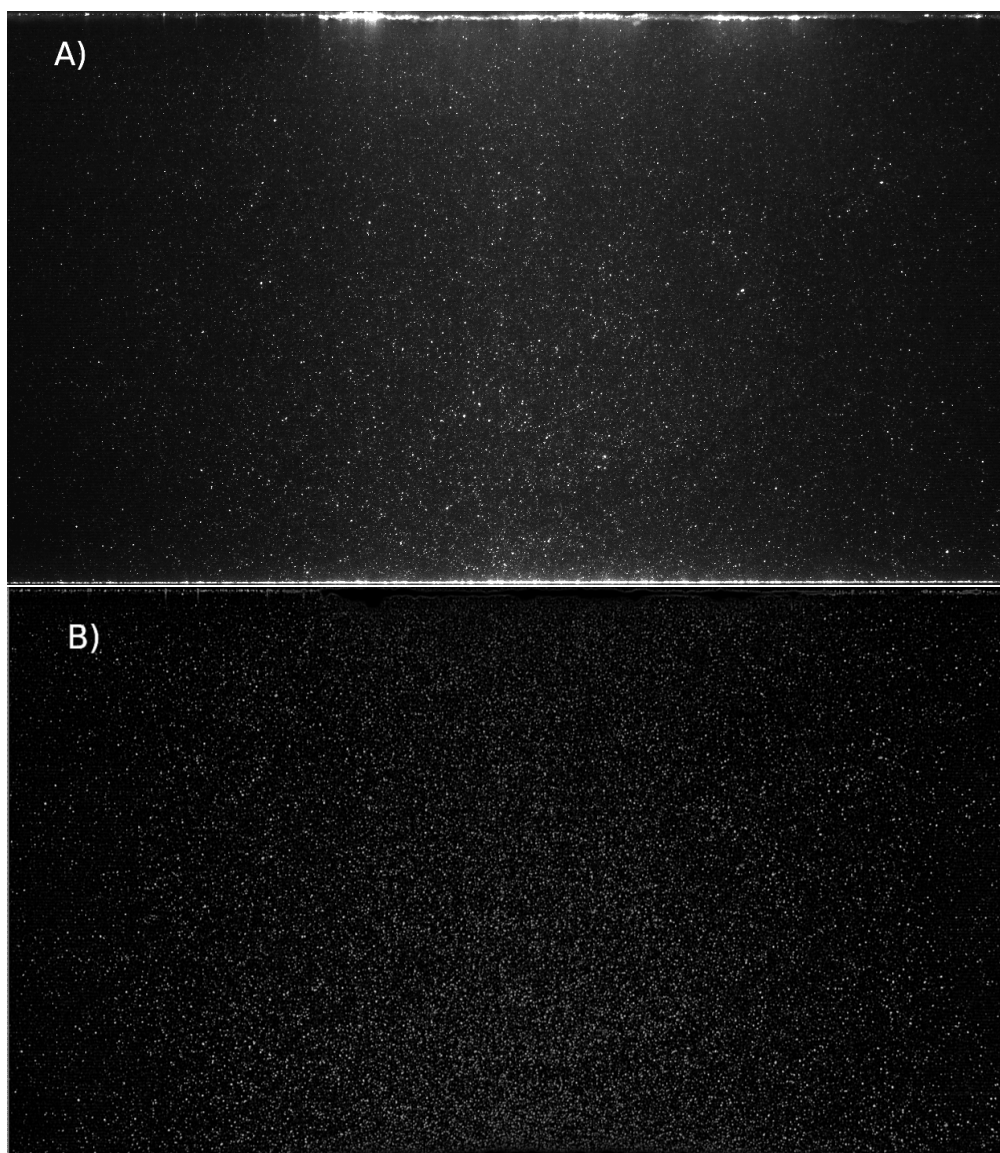


Figura 3.4: A) Imagen original. B) Imagen filtrada en PIVlab. (Elaboración propia).

3.1.3 Trazadores

Para realizar el PIV se utiliza una mezcla solidificada de una solución de 100 c.c. de resina de poliéster líquida, con 4 gotas de Rodamina B líquida al 20 % v/v y 15 gotas de solidificador de peróxido MEK. El compuesto se pulveriza utilizando un esmeril conectado a un minitorno eléctrico Dremel 4000 de 175 Watts. El polvo resultante se tamiza bajo la malla N° 300 de 53 μm , ya que Pedocchi et al. (2008) sugieren utilizar partículas bajo 65 μm para realizar PIV. El material resultante se mezcla al 0,4 % v/v en dos soluciones de 7 litros de agua destilada y agua destilada con CMC al 0,9 % p/p .

3.2 Descripción de la instalación experimental

3.2.1 Instalación experimental para medir por FTP

Para el estudio experimental se utiliza la instalación de las Figuras 3.5, 3.8, 3.9, y 3.10 ubicada en el laboratorio de Materia Fuera del Equilibrio (LMFE) del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

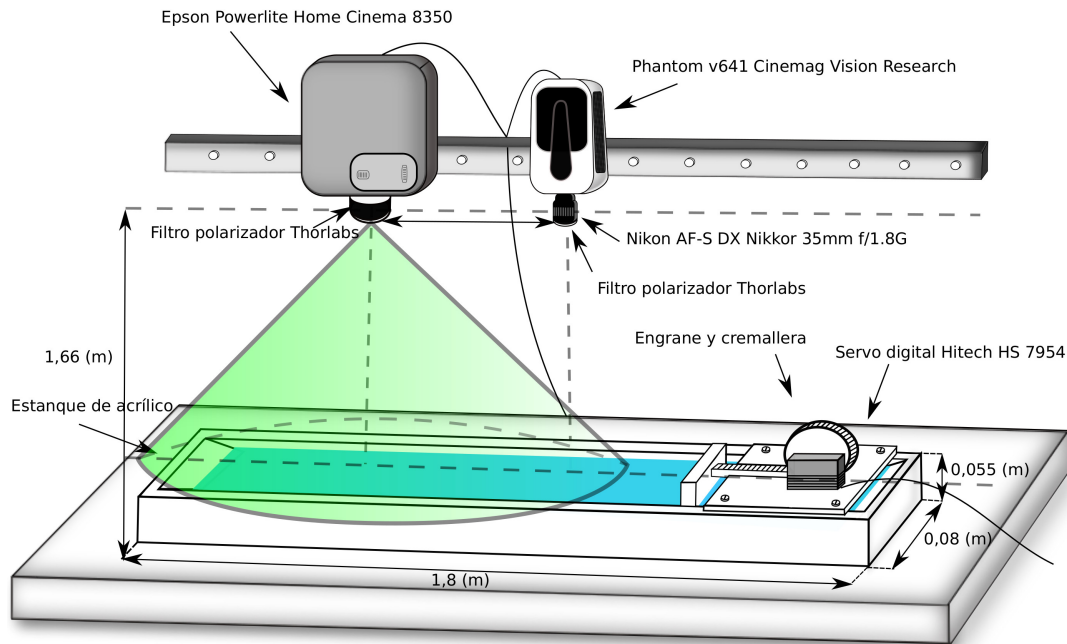


Figura 3.5: Esquema del montaje experimental para FTP.

La instalación experimental consiste en un estanque prismático de acrílico de 0,001m de espesor y de 1,8 m de largo; 0,08m de ancho y 0,055m de alto. El largo del reservorio se escoge con tal de generar ondas de $\mathcal{O}(\lambda) \sim 0,1m$ pudiendo registrar varias longitudes de onda y alturas con FTP, mientras que el alto del estanque se escoge con tal de generar pequeñas perturbaciones $\mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1$ en el rango débilmente no lineal y considerando una profundidad de aguas someras tal que $h/\lambda \ll 1$.

La superficie libre es perturbada mediante un mecanismo compuesto por un servomotor digital programable Hitec HS-7954HS de máximo voltaje 7,4 V y torque 29 $kg \cdot cm$ ensamblado a una impresión 3D de un engranaje mecánico de PLA fabricado en una impresora 3D MAKERBOT REPLICATOR 2 en el FabLab de la facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. El motor se alimenta mediante una fuente reguladora de voltaje a 6,5V y se conecta a través de un cable micro USB a una placa Teensy 3.1 programable en Arduino.

Para registrar la superficie de las perturbaciones se utiliza una cámara Phantom v641 Cinemag Vision Research Inc., de profundidad de color de 12-bits, sensor full frame de 35mm, resolución de 4 Megapíxeles, la cual graba a 1450 frames por segundo a máxima resolución.

Se coloca un lente Nikon AF-S DX Nikkor 35mm f/1.8G con un filtro polarizador Marumi y dos filtros polarizadores Thorlabs para eliminar reflejos de luz (Figura 3.6).

La superficie se ilumina con un proyector Epson Powerlite Home Cinema 8350 paralelo y alineado con la cámara (Figura 3.7).



Figura 3.6: Phantom v641 Cinemag.



Figura 3.7: Epson Powerlite HomeCinema 8350.

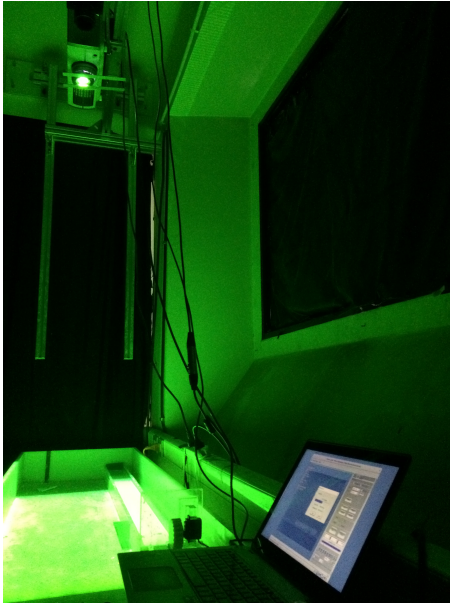


Figura 3.8: Configuración de FTP.



Figura 3.9: Montaje para la cámara y proyector.

3.2.2 Instalación experimental para medir por PIV

Para medir por PIV se registran imágenes con una cámara Photron Fastcam Mini UX50 a 500 fps y un láser Flex marca BW TEC inc. modelo *BWI – 532 – 100 – E66969* de 5 mW. El haz de luz es de tipo continuo con una señal de bajo ruido. El plano se genera utilizando un lente colimador cilíndrico ubicado cerca del origen de la señal de luz. La longitud de onda del láser es de 532 nm, el diámetro del láser al cual la energía del peak ha perdido 13,5 % es de 1 mm y su divergencia es menor a 1.5 mrad como se esquematiza en la Figura 3.10:

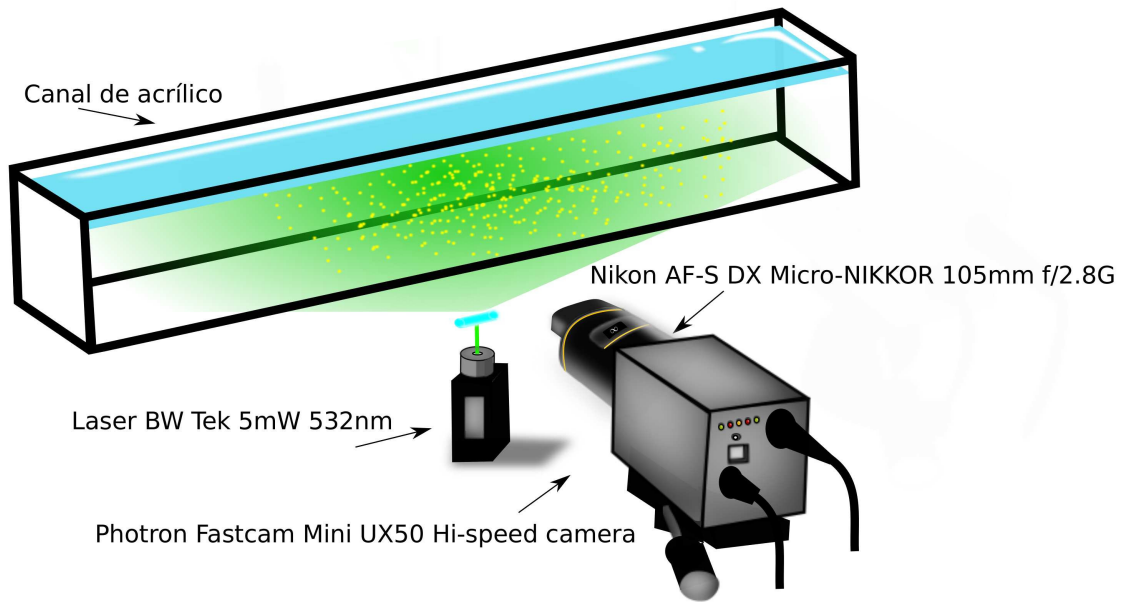


Figura 3.10: Esquema del montaje experimental para PIV.

Con el fin de obtener un campo de visión mas pequeño y minimizar el tamaño físico del pixel se utiliza un lente micro Nikon AF-S DX Micro-NIKKOR de longitud focal 105 mm y f/2.8G (Figuras 3.11 y 3.12):



Figura 3.11: Micro Nikon AF-S DX Micro-NIKKOR 105mm f/2.8G.

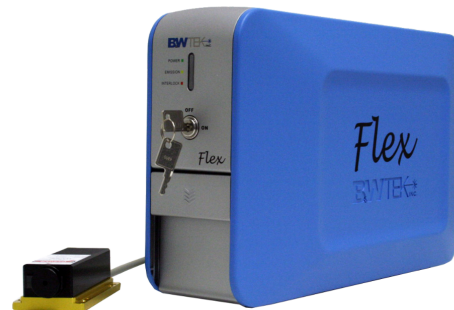


Figura 3.12: Laser Flex BW TEC inc.

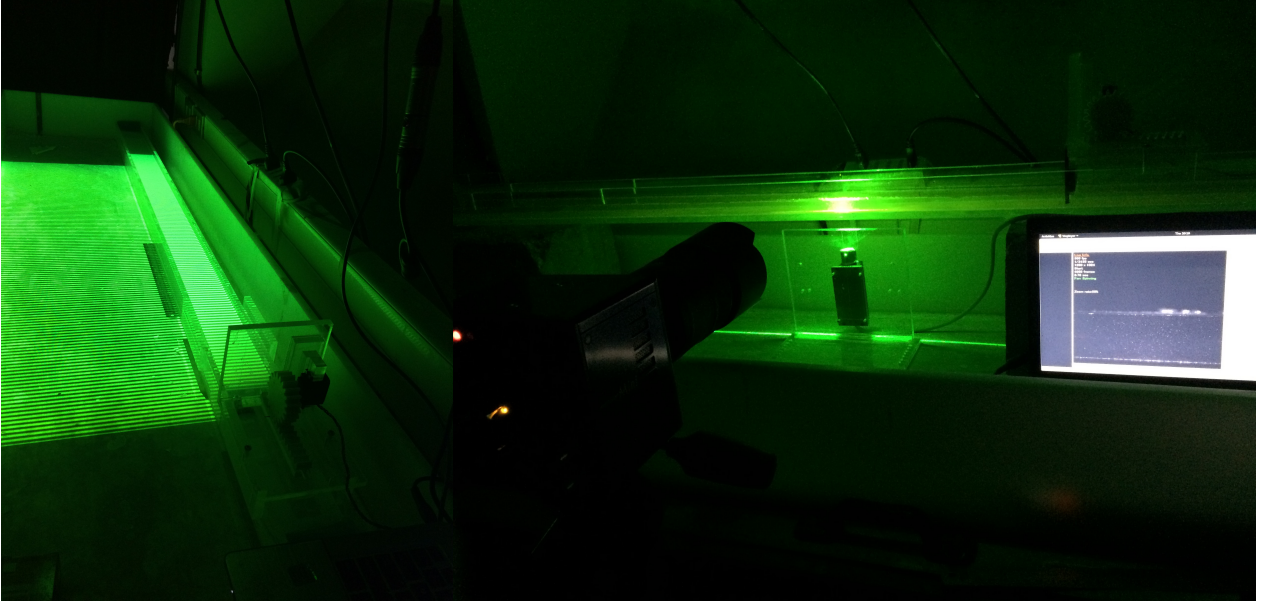


Figura 3.13: Generador de ondas.

Figura 3.14: Configuración de PIV.

3.2.3 Generación de ondas

El método ampliamente utilizado para obtener ondas solitarias a escala de laboratorio es el generador de ondas por movimiento controlado de pistón de Goring & Raichlen (1980); Katell & Eric (2002); Synolakis (1990); Hafsia et al. (2009); Lin et al. (2006); Paprota et al. (2016); Malek-Mohammadi & Testik (2010); Wu et al. (2014); Seelam & Baldock (2011).

Todos los autores reportan pequeñas oscilaciones dispersivas detrás del solitón generado. Hammack & Segur (1974) demuestran teórica y experimentalmente que cualquier variación positiva de volumen de agua sobre el nivel medio de agua, generará por lo menos una onda solitaria seguida de un tren de ondas dispersivas. Para generar ondas solitarias de la manera más prolija posible, la metodología de Goring & Raichlen (1980) consiste en igualar la velocidad del pistón con la velocidad horizontal promediada en la vertical de la onda. En variables físicas se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{u}(x, t) \quad (3.2.3.1)$$

Donde x es la posición de la paleta móvil. En función de la fase $\xi = ct - x$ (Katell & Eric, 2002):

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\bar{u}(\xi(x))}{c - \bar{u}(\xi(x))} \quad (3.2.3.2)$$

En el volumen de control de la Figura 3.15 para onda larga $\bar{u}_2 = 0$ (Katell & Eric, 2002; Goring & Raichlen, 1980; Malek-Mohammadi & Testik, 2010), luego la ecuación de continuidad

considerando frentes infinitesimales de onda resulta:

$$c\eta b - \bar{u}_1(h + \eta) = 0 \quad (3.2.3.3)$$

La velocidad media de la onda está dada por (Katell & Eric, 2002; Goring & Raichlen, 1980; Malek-Mohammadi & Testik, 2010):

$$\bar{u} = \frac{c\eta}{h + \eta} \quad (3.2.3.4)$$

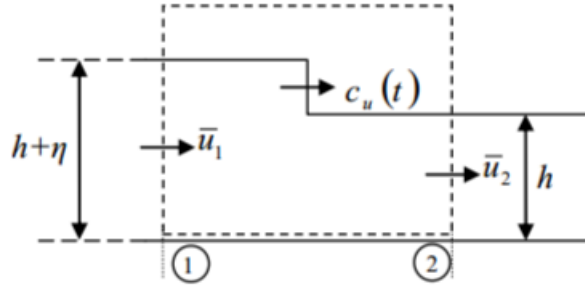


Figura 3.15: Volumen de control de (Malek-Mohammadi & Testik, 2010).

Reemplazando (3.2.3.4) en (3.2.3.2) e integrando en la fase se obtiene la trayectoria (Goring & Raichlen, 1980):

$$x(t) = \frac{1}{h} \int_0^\xi \eta(\xi') d\xi' \quad (3.2.3.5)$$

donde $\eta(\xi)$ es el perfil de la onda el cual depende de la teoría que se utilice, como por ejemplo Boussinesq, Rayleigh, Grimshaw de tercer orden, entre otras. En el caso de Goring, propone la solución de Boussinesq obteniendo:

$$\eta = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3A}}{2h\sqrt{h}} (ct - x) \right) \quad (3.2.3.6)$$

$$x(t) = \frac{2A\sqrt{h}}{\sqrt{3A}} \tanh \left(\frac{\sqrt{3A}}{2h\sqrt{h}} (ct - x) \right) \quad (3.2.3.7)$$

3.2.4 Generación de ondas en agua

Para generar las ondas solitarias en agua se utiliza la metodología de (Malek-Mohammadi & Testik, 2010) la cual toma en cuenta la naturaleza impermanente de la generación de la

onda solitaria durante su evolución, para la cual considera frentes infinitesimales de onda, los cuales se superponen para generar un perfil suave del solitón (Figura 3.16).

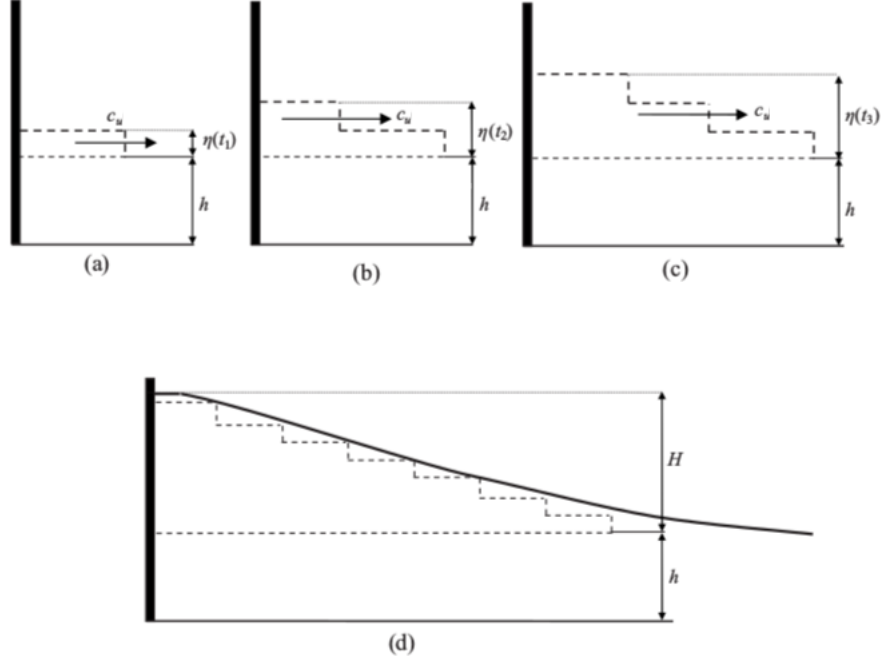


Figura 3.16: Secuencia de frentes de onda, (Malek-Mohammadi & Testik, 2010).

Para determinar la celeridad impermanente C_u y la velocidad media \bar{u} se utilizan las ecuaciones de continuidad y momentum en el volumen de control de la Figura 3.15:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \sum \rho \bar{v} A = 0 \quad (3.2.4.1)$$

$$C_u \eta - (h + \eta) \bar{u}_1 = h \bar{u}_2 \quad (3.2.4.2)$$

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \bar{v} dV + \sum \rho \bar{v} \cdot \hat{n} \bar{v} dA \quad (3.2.4.3)$$

$$\frac{g\eta}{2}(2h + \eta) = h \bar{u}_2^2 - (h + \eta) \bar{u}_1^2 + C_u \bar{u}_1 (h + \eta) - C_u \bar{u}_2 h \quad (3.2.4.4)$$

donde el coeficiente de Boussinesq se aproxima a $\beta = 1$, dado que se están resolviendo frentes de flujo horizontal y paralelo, aproximado a un flujo uniforme en cada intervalo infinitesimal. Resolviendo (3.2.4.2) y (3.2.4.4) mediante la aproximación de onda larga (Katell & Eric, 2002; Goring & Raichlen, 1980; Malek-Mohammadi & Testik, 2010):

$$\bar{u}_1 = \frac{dx}{dt} = \sqrt{g \frac{\eta}{h} \left(h + \frac{\eta}{2} \right) \left(\frac{\eta}{h + \eta} \right)} \quad (3.2.4.5)$$

La ecuación (3.2.4.5) se resuelve numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 y el perfil de onda teórico de Rayleigh el cual entrega mejores perfiles geométricos, minimizando el tren de ondas dispersivas y desarrollando las ondas en menores distancias que otros métodos (Katell & Eric, 2002).

Referido a la Figura 3.17, la condición inicial es $\dot{x}(x = -S/2, t = 0) = 0$. El resultado de la integración es una función $x(t) = \alpha \tanh(\beta(t - \gamma))$, donde las constantes α , β y γ dependen de las configuraciones experimentales h y A para la cual se ajusta dicha función de 3 parámetros, α , β y γ , como Katell & Eric (2002) lo hicieron utilizando la metodología de Goring & Raichlen (1980). Dicha función se programa en Arduino 1.6.11.

Los dominios temporales y espaciales se calculan mediante las ecuaciones de Goring & Raichlen (1980) ya que el coeficiente β no cambia al considerar las mismas funciones para la superficie η (Malek-Mohammadi & Testik, 2010), las cuales establecen una fase máxima para la duración del movimiento debido a que el recorrido máximo y la velocidad cero se alcanzan teóricamente en una fase infinita $\tanh(\xi_f = x_f - ct_f) = \tanh(\infty) = 1$, lo cual es imposible experimentalmente. De este modo se trunca la duración cuando $\tanh(\xi) = 0,999$ (Malek-Mohammadi & Testik, 2010; Katell & Eric, 2002).

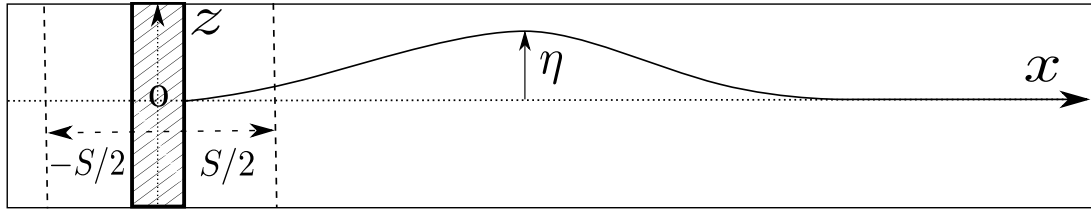


Figura 3.17: Sistema de referencia para generar ondas.

El recorrido total corresponde al doble de la amplitud del movimiento:

$$S = \frac{2A}{kh} \quad (3.2.4.6)$$

Como la condición inicial está a $x = -S/2$ en el origen del sistema de referencia, $x_f = S/2$. Despejando el tiempo final:

$$\tanh^{-1}(0,999) = k \left(ct_f - \frac{A}{kh} \right) \quad (3.2.4.7)$$

$$t_f = \frac{1}{kc} \left(\tanh^{-1}(0,999) + \frac{A}{h} \right) \quad (3.2.4.8)$$

La duración total del movimiento se obtiene de la suma del tiempo total del movimiento entre $[-S/2, S/2]$ (Malek-Mohammadi & Testik, 2010; Katell & Eric, 2002; Goring & Raichlen, 1980):

$$T = 2t_f = \frac{2}{kc} \left(\tanh^{-1}(0,999) + \frac{A}{h} \right) \quad (3.2.4.9)$$

La discretización temporal para resolver el desplazamiento es de $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s.

3.2.5 Validación de la generación de ondas

Para validar las señales generadas se comparan dichos resultados con la trayectoria y velocidad adimensional del pistón obtenidas por Malek-Mohammadi & Testik (2010) en las Figuras 3.18 y 3.19.

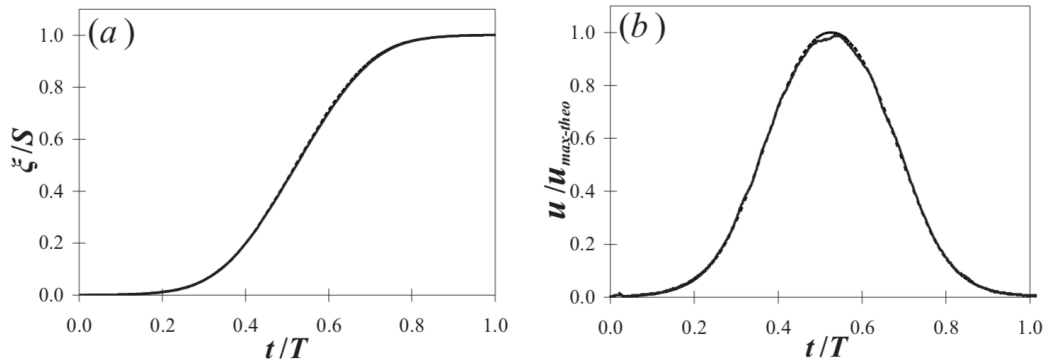


Figura 3.18: Señal para $h_0 = 0,2m$ y $\varepsilon = 0,6$ (Malek-Mohammadi & Testik, 2010).

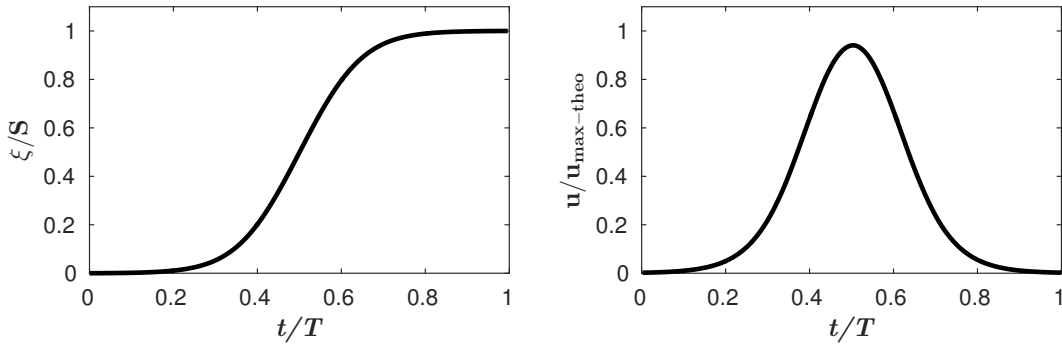


Figura 3.19: Señal calculada con $h_0 = 0,2m$ y $\varepsilon = 0,6$.

3.2.6 Generación de ondas en Glicerina y CMC

Para generar ondas en fluidos donde la viscosidad no es despreciable se sigue la metodología de Malek-Mohammadi & Testik (2010), considerando los esfuerzos viscosos en el fondo producto de la capa límite. Dicha fuerza es incluida en la ecuación (3.2.4.4) integrando en todo el volumen de control donde la función de esfuerzo bajo la onda solitaria está dada por (2.4.1.18) (Liu & Orfila, 2004), con una viscosidad constante para la glicerina y una función de la tasa de deformación para el fluido no newtoniano.

En el caso del CMC la viscosidad dinámica y el esfuerzo de corte dentro de la capa límite se aproximan suponiendo un flujo de Couette plano y paralelo donde la distribución de velocidad está dada por la capa límite laminar. En variables físicas:

$$\rho\nu_{eff} = K \left(\frac{du}{dz} \right)^{n-1} \approx K \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{u}}{\delta} \right)^{n-1} \quad (3.2.6.1)$$

donde $\delta = h \left(\frac{\nu_{eff}}{Ch} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$ de Mei et al. (1989). Reemplazando δ en (3.2.6.1):

$$\rho\nu_{eff} = K^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{\bar{u}^2}{4h} \rho \sqrt{gA} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad (3.2.6.2)$$

En variables físicas el esfuerzo de corte (2.4.1.18) se reescribe como (Liu et al., 2006):

$$\tau'_b = \rho g A \sqrt{\frac{\nu_{eff} k}{\sqrt{gh}}} \int_0^{t'} \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}}{\varepsilon \sqrt{gh}^{\frac{3}{2}} \sqrt{k(t' - T)}} dT \quad (3.2.6.3)$$

Reemplazando (3.2.6.3) en (3.2.4.3) la ecuación de momentum integral por unidad de ancho resulta:

$$\gamma \eta \left(h + \frac{\eta}{2} \right) - \int_{CV} A \sqrt{\rho} \left(K^{\frac{2}{n+1}} k \sqrt{\frac{g^3}{h}} \left(\frac{\bar{u}^2 \rho \sqrt{Ag}}{4h} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\tau_b}{\sqrt{k\pi\varepsilon}(gh)^{\frac{3}{4}}} dl = \rho(h + \eta) \frac{h\bar{u}^2}{\eta} \quad (3.2.6.4)$$

La ecuación (3.2.6.4) se resuelve mediante un esquema de diferencias finitas explícito. La integral de (3.2.6.4) en el volumen de control se calcula en cada intervalo de tiempo Δt a lo largo de la onda solitaria impermanente, utilizando el método numérico de integración trapezoidal “trapz”. La integral de (3.2.6.3) se aproxima siguiendo la fórmula de Niño & García (1998):

$$\int_0^{t'} \frac{\frac{\partial u'}{\partial T}}{\sqrt{t - T}} dT = \int_0^{t' - \Delta t} \frac{\frac{\partial \bar{u}}{\partial T}}{\sqrt{t' - T}} d\tau + 2\sqrt{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial T} \quad (3.2.6.5)$$

donde $\partial u' / \partial \tau$ se puede considerar constante entre $[t' - \Delta t, t']$ para Δt pequeño (Niño & García, 1998). La integral de (3.2.6.5) se calcula mediante la cuadratura de Simpson para integración numérica:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (3.2.6.6)$$

Una vez resueltas las señales para las distintas configuraciones experimentales se ajusta una función $x(t) = \alpha \tanh(\beta(t - \gamma))$ con 3 parámetros mediante mínimos cuadrados no lineales,

para obtener el desplazamiento del pistón $\xi(t)$. Las señales se envían al servo motor a través de Arduino 1.6.11 (Figura 3.20).

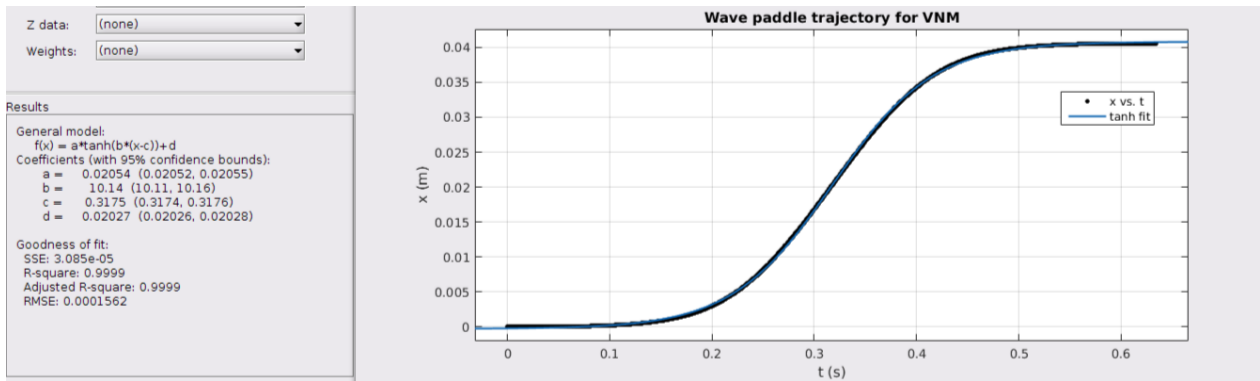


Figura 3.20: Señal y regresión tipo tanh de 3 parámetros.

3.2.7 Calibración del servomotor

El movimiento circular acelerado del servo se trasmite a un desplazamiento lineal mediante una impresión en 3D de un engrane y cremallera. Para transformar las señales obtenidas anteriormente en metros a los milisegundos que procesa el servo, se realiza una regresión lineal de una serie de señales enviadas al servo en milisegundos, con su desplazamiento mediante un Calibre de Vernier (Figura 3.21). De esta forma, esta función corrige desviaciones mecánicas y eléctricas que pueda tener el mecanismo obteniendo una señal precisa del movimiento del servo.

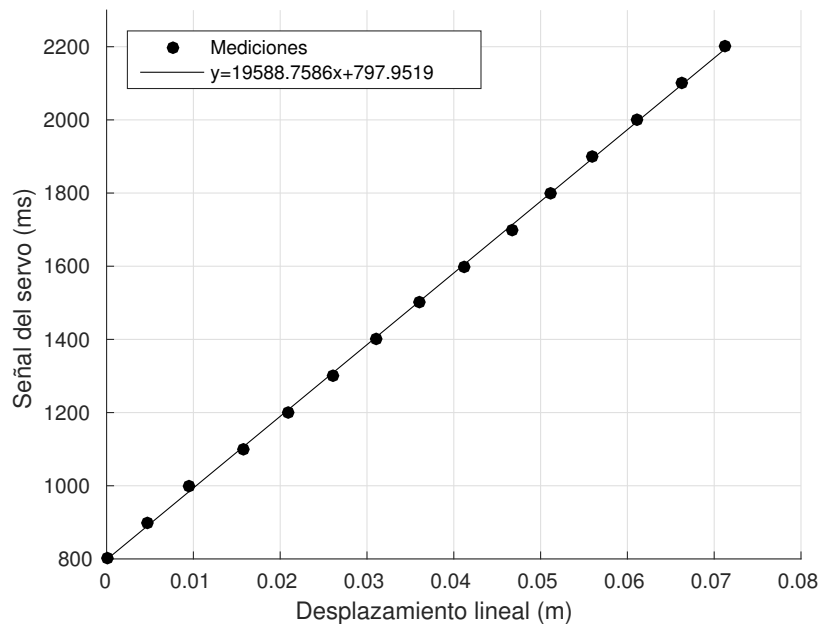


Figura 3.21: Calibración del servo.

El servo se mueve en un rango de $[0^\circ, 195^\circ]$ y 1400 ms con una resolución de $0,162^\circ$ y una banda ancha muerta de $2\ \mu\text{s}$ donde la posición inicial corresponde a 800 ms y la final a 2200 ms debido a las restricciones mecánicas del sistema.

3.3 Medición de las propiedades físicas de los fluidos

3.3.1 Medición de reología

La reología de los fluidos se mide mediante un Reómetro rotacional de cilindros concéntricos Rheolab QC Anton Paar y un regulador de temperatura Peltier C-PTD 180/AIR/QC de la Figura 3.22.



Figura 3.22: Reómetro rotacional Rheolab QC Anton Paar. Fuente: www.anton-paar.com/.. /RheolabQC-01_web.jpg.

El instrumento registra torque T (μNm) y velocidad angular Ω ($1/s$), además de calcular el esfuerzo de corte τ (Pa) y la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ ($1/s$) mediante las relaciones de la norma ISO 3219:1994.

3.3.1.1 Método de la norma ISO 3219:1994

La norma (ISO 3219:1994, 1994) establece que para un flujo de Couette axisimétrico el esfuerzo de corte se calcula como una tensión representativa promediada entre los dos cilindros a partir del torque M aplicado:

$$t_{rep} = \frac{\tau_{externo} + \tau_{interno}}{2} \quad (3.3.1.1.1)$$

donde los esfuerzos internos y externos resultan del flujo de Couette en equilibrio para un cilindro de base cónica con ángulo de deflexión α , tal que $90^\circ < \alpha < 150^\circ$ (ISO 3219:1994, 1994):

$$\tau_{interno} = \frac{M}{2\pi R_1^2 LC_l} \quad (3.3.1.1.2)$$

$$\tau_{externo} = \frac{M}{2\pi R_2^2 LC_l} \quad (3.3.1.1.3)$$

A partir de (3.3.1.1.1) el esfuerzo representativo en función del torque M es:

$$\tau_{rep} = \frac{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}{2} \frac{M}{2\pi R_2^2 LC_l} \quad (3.3.1.1.4)$$

donde C_l es un factor de calibración del reómetro que depende de la geometría del viscosímetro, L el largo del cilindro, R_1 y R_2 los radios interno y externo, respectivamente. El reómetro Rheolab QC Anton Paar tiene este coeficiente calibrado. La tasa de deformación representativa resulta (ISO 3219:1994, 1994):

$$\dot{\gamma}_{rep} = \Omega \frac{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1} \quad (3.3.1.1.5)$$

Finalmente la norma (ISO 3219:1994, 1994) establece realizar un ajuste a la curva de flujo $\tau = f(\dot{\gamma})$ para obtener los parámetros del comportamiento reológico de los fluidos.

3.3.2 Medición de la densidad, pH y temperatura

Las densidades de las mezclas acuosas de glicerina y carboximetilcelulosa se miden utilizando un densímetro (Figura 3.23).

Para mantener la estabilidad de la solución acuosa es necesario controlar el pH en un rango de [7, 9] para lo cual se disuelven 0,2 ml de una solución de NaOH al 5 N con la solución de agua y CMC. La temperatura se registra utilizando un conductivímetro y termómetro Amprobe WT-60 (Figura 3.24).



Figura 3.23: Densímetro (Carrillo, 2011).



Figura 3.24: Conductivímetro y termómetro.

4. Modelo Numérico

4.1 Solver de OpenFOAM

Para analizar el efecto de la viscosidad en la celeridad y la amplitud de la onda solitaria en distintos fluidos pseudoplásticos, más allá de los rangos medidos experimentales, se realizan simulaciones numéricas mediante un modelo bidimensional de volúmenes finitos en el modelo OpenFOAM, utilizando el solver y diccionarios de OLAFOAM (Higuera et al., 2015), actualización del mismo creador de IHFOAM.

OpenFOAM es una colección de librerías gratuita, de código libre y abierto, enfocado principalmente a CFD (Computational Fluid Dynamics). Esta herramienta multifísica implementa una amplia gama de diccionarios y solvers para simular diversos fenómenos como mecánica de fluidos, reacciones químicas, transferencia de calor, sonido, mecánica de sólidos y electromagnetismo.

OLAFOAM se basa en el solver bifásico de interFOAM, implementando esquemas en el estado del arte de generación y absorción de ondas a través de las condiciones de borde, ya sea variando la velocidad en la generación de las ondas o utilizando una malla dinámica (olaDyMFoam), lo cual permite simular la dinámica de ondas para régimen laminar o turbulento en medios porosos o sólo fluidos.

El modelo resuelve las ecuaciones de VARANS o Volume Averaged Reynolds Averaged Navier-Stokes para dos fases, en este caso líquido y gas. Emplea la discretización de volúmenes finitos y el método del Volumen de Fluido (VOF) (Berberović et al., 2009) para describir las dos fases, el cual consiste en representar cada fluido por una fracción α ocupada en el volumen i -ésimo de la celda.

4.2 Ecuaciones del modelo

OLAFOAM resuelve las ecuaciones de continuidad (4.2.1) y momentum (4.2.2) para fluido incompresible. Si no se utiliza un modelo de turbulencia ni porosidad, el modelo resuelve las ecuaciones en régimen laminar sin porosidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{U}) = -\nabla p^* - \mathbf{g} \cdot \mathbf{X} \nabla \rho + \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla : \nabla \mu_{eff} + \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (4.2.2)$$

donde p^* es la presión dinámica, \mathbf{U} el vector velocidad, ρ la densidad, \mathbf{g} el vector de aceleración de gravedad, \mathbf{X} el vector de posición en la dirección vertical positiva, σ el coeficiente de tensión superficial, $\kappa = \nabla \cdot \alpha / |\nabla \alpha|$ la curvatura de la superficie, $\mu_{eff} = \mu + \rho \nu_T$ la viscosidad laminar y turbulenta y α la fracción de volumen de fluido. El esfuerzo de corte está dado por la viscosidad laminar ($\nu_T = 0$), en el caso de los fluidos newtonianos $\mu_{eff} = \rho \nu$, y para los no newtonianos se emplea un modelo de ley de potencia:

$$\mu_{eff} = K \left(\sqrt{\frac{(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) : (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)}{2}} \right)^{n-1} \quad (4.2.3)$$

El dominio se resuelve como un fluido efectivo dentro del cual la densidad está dada por

$$\rho = \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g \quad (4.2.4)$$

En torno a la superficie, las ecuaciones de continuidad de las velocidades de las fracciones de líquido (\mathbf{U}_l) y gas (\mathbf{U}_g) resultan, respectivamente:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}_l \alpha = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial (1 - \alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}_g \alpha = 0 \quad (4.2.6)$$

Definiendo velocidad total como un promedio ponderado y la “velocidad de compresión” (Berberović et al., 2009) activa sólo en la interfaz como \mathbf{U}_c :

$$\mathbf{U} = \alpha \mathbf{U}_l + (1 - \alpha) \mathbf{U}_g \quad (4.2.7)$$

$$\mathbf{U}_c = \mathbf{U}_l - \mathbf{U}_g \quad (4.2.8)$$

Reescribiendo (4.2.5) $+\nabla \cdot \alpha \mathbf{U} - \nabla \cdot \alpha \mathbf{U}$ para resolver en función de la velocidad \mathbf{U} :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} \alpha + \nabla \cdot \mathbf{U}_c \alpha (1 - \alpha) = 0 \quad (4.2.9)$$

4.3 Malla numérica

La malla corresponde a dos bloques rectangulares de mallas estructuradas hexaedrales, estableciendo el número de celdas horizontal y vertical tal que la razón de las dimensiones de la celda sea $\Delta z/\Delta x \sim \mathcal{O}(1)$. Dicha grilla posee las dimensiones del canal del laboratorio con un número de 297.280 celdas hexaedrales. La discretización espacial es de 0,69 mm en la dirección vertical y 0,4 mm en la horizontal y una celda en la transversal, ya que el modelo es 2D. La malla bidimensional se presenta en la Figura 4.1, donde se aprecia el refinamiento hecho cerca de la superficie y el fondo del estanque, para resolver de mejor forma la capa límite:

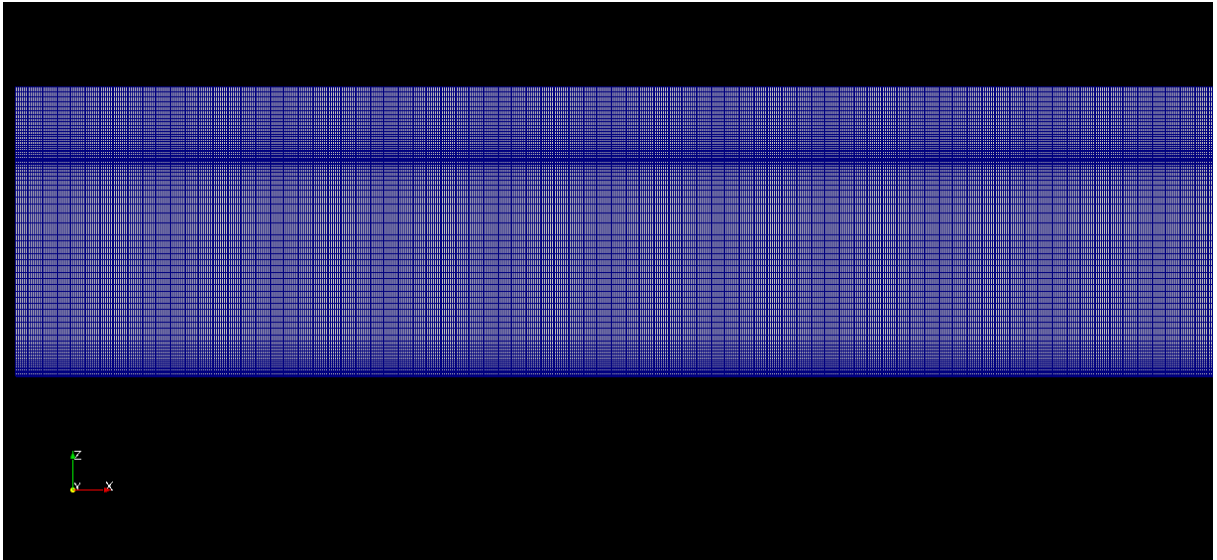


Figura 4.1: Malla numérica bidimensional.

4.4 Discretización temporal

La discretización temporal es de 10^{-4} s y se adapta según la malla mientras que el número de Courant máximo se fija igual a 0,5 para asegurar la convergencia en 2 dimensiones. Este valor se usa por defecto en librerías de olaFOAM. En OpenFOAM, el número de Courant se define de forma general:

$$C = \frac{\Delta t}{2V} \sum_{i=caras} |\phi_i| \quad (4.4.1)$$

donde V es el volumen de la celda, ϕ el flujo volumétrico el cual se suma sobre las caras del volumen.

4.5 Condiciones de borde de OLAFOAM

OLAFOAM tiene implementada una serie de teorías para la generación de ondas a partir de las condiciones de borde, entre ellas Stokes I o teoría de Airy, ondas Cnoidales, ondas solitarias y generadores de ondas tipo pistón, entre otros. Este último tipo de ondas se utiliza especialmente para replicar estudios experimentales. Para ello se escribe la serie temporal de desplazamientos o velocidades horizontales de las señales programadas en el diccionario “/constant/waveDict”. OLAFOAM calcula la velocidad de la paleta con la serie como:

$$U = \frac{X_{i+1} - X_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (4.5.1)$$

Esta condición de borde de tipo “movingWallVelocity” modifica la malla temporal y espacialmente, lo que se conoce como malla dinámica (olaDyMFOAM). Las condiciones de borde en el fondo y el extremo del canal son $\mathbf{U} = \mathbf{0}$. La velocidad en la interfaz se calcula resolviendo las ecuaciones (4.2.1), (4.2.2), (4.2.9) y sobre ella se obtiene imponiendo la presión atmosférica absoluta (Figura 4.2).

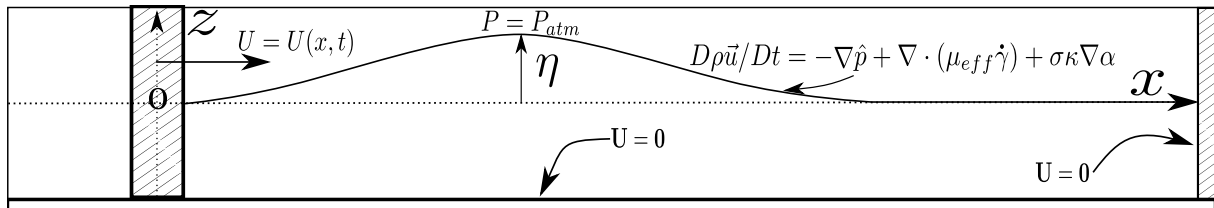


Figura 4.2: Esquema de condiciones de borde.

5. Presentación de Resultados y Análisis

5.1 Fluidos utilizados y configuraciones experimentales

Los fluidos corresponden a dos mezclas de fluidos newtonianos, agua destilada, una solución de glicerina USP 99,5% de pureza disuelta al 71% p/p en agua destilada y una solución no newtoniana pseudoplástica de carboximetilcelulosa en agua destilada al 0,2% p/p . Las mezclas se mantuvieron a temperatura ambiente en contenedores cerrados por menos de 24 horas.

Las configuraciones experimentales se determinan mediante los parámetros adimensionales $\varepsilon = A/h$ y c/\sqrt{gh} . Ya que $\mathcal{O}(c/\sqrt{gh} - 1) \sim \varepsilon/2$, para registrar una diferencia de la celeridad se varían h y ε de acuerdo a la Tabla 5.1. Para medir a distintos números Reynolds se fijan 5 profundidades y para estudiar la no linealidad de las ondas se generan 3 amplitudes por cada una de ellas. Cada uno de los experimentos de la Tabla 5.1 se repitió 5 veces con un total de 221 experimentos.

Tabla 5.1: Experimentos realizados.

Fluido	$\varepsilon_1(-)$	$\varepsilon_2(-)$	$\varepsilon_3(-)$	$\varepsilon_4(-)$	$h(m)$
Agua	0,20	0,35	0,49	-	0,02
Agua	0,19	0,31	0,42	-	0,025
Agua	0,16	0,28	0,35	-	0,030
Agua	0,14	0,25	0,32	-	0,035
Agua	0,14	0,22	0,27	-	0,040
Glicerina	0,04	0,10	0,21	0,24	0,028
Glicerina	0,05	0,10	0,20	-	0,039
CMC	0,08	0,18	0,31	-	0,020
CMC	0,06	0,22	0,26	-	0,025
CMC	0,05	0,16	0,30	-	0,030
CMC	0,06	0,12	0,24	-	0,035
CMC	0,05	0,13	0,273	-	0,040

Tabla 5.2: Viscosidad de agua y glicerina al 71 % p/p .

Fluido	μ ($Pa \cdot s$)	σ_μ ($Pa \cdot s$)
Agua	0,001	$\pm 0,193e-03$
Glicerina	0,024	$\pm 2,602e-04$

Tabla 5.3: Índices de consistencia y flujo para CMC a 0,2 % p/p .

Fluido	K ($Pa \cdot s^n$)	σ_K ($Pa \cdot s^n$)	n	σ_n (-)
CMC	0,099	$\pm 0,004$	0,756	$\pm 0,018$

Propiedades físicas de los fluidos

A continuación se presentan las mediciones de los parámetros físicos de los fluidos utilizados. La temperatura del agua destilada y las soluciones de glicerina al 71 % p/p y CMC a 0,2 % p/p corresponde a $18,5 \pm 0,6$ °C; $18,4 \pm 0,6$ °C y $18,1 \pm 0,6$ °C, respectivamente.

Las densidades de las soluciones acuosas de glicerina al 71 % p/p y CMC a 0,2 % p/p corresponden a 1002 ± 1 kg/m^3 y 1173 ± 1 kg/m^3 , respectivamente. Para la densidad del agua se utiliza un valor representativo de Kestin et al. (1978) de 998 ± 3 debido a la sensibilidad de los instrumentos de medición.

5.1.0.1 Viscosidad de los fluidos

El agua destilada y la solución de Glicerina presentan viscosidad constante al ser newtonianos. Las viscosidades de las mezclas medidas mediante un ensayo reológico se presentan en las Tablas 5.2 y 5.3, mientras que los gráficos de las curvas de flujo se muestran en las Figuras 5.1 y 5.1. Para el agua se utilizan valores representativos de Kestin et al. (1978).

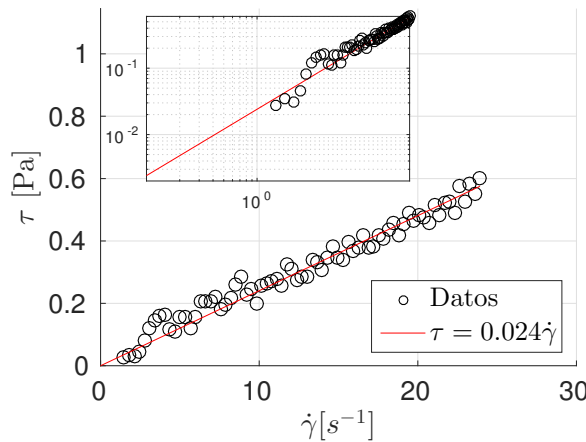


Figura 5.1: Esfuerzo de corte y tasa de deformación para la glicerina.

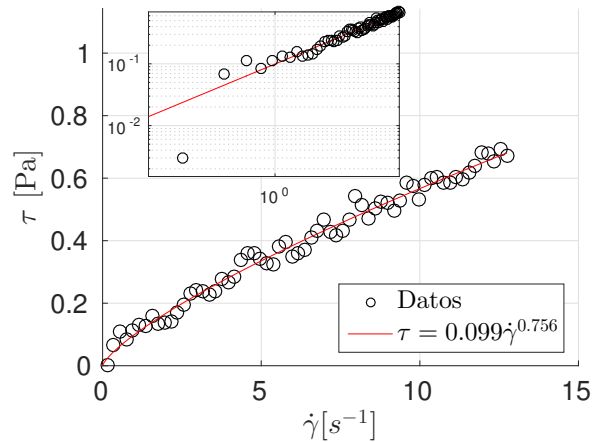


Figura 5.2: Esfuerzo de corte y tasa de deformación para el CMC.

Tabla 5.4: Tensión superficial de agua desionizada, CMC al 0,2% *p/p* (Hu et al., 1991) y glicerina al 71% *p/p* (Glycerine Producers' Association, 1963).

Fluido	Γ (<i>N/m</i>)
Agua	0,074
CMC	0,075
Glicerina	0,067

Tensión superficial de los fluidos

Para estimar la tensión superficial de las mezclas se utilizaron valores medidos a las mismas temperaturas y concentraciones utilizadas por Hu et al. (1991) para agua desionizada y CMC al 0,2% *p/p* y Glycerine Producers' Association (1963) para glicerina al 71% *p/p*.

5.2 Resultados de la perfilometría por transformada de Fourier

5.2.1 Celeridad de la onda variando la reología

Se presentan las velocidades de fase de las ondas solitarias calculadas en base a los experimentos en agua, glicerina al 70% y carboximetilcelulosa al 0,2%. Dicha celeridad se obtiene a partir de una regresión lineal de la trayectoria del centro de gravedad de la onda solitaria de las ondas solitarias, procedimiento equivalente a seguir el umbral de la onda, evitando el ruido que induce la transformada de Fourier en la perfilometría por transformada de Fourier para determinar la cresta de la onda.

5.2.1.1 Celeridad de la onda solitaria en agua

Se presentan los promedios de celeridad hechos adimensionales por la raíz de la elevación multiplicada por la gravedad en función del parámetro adimensional de amplitud y profundidad medida. Se presenta en la Figura 5.3 el promedio y la desviación estándar de la celeridad adimensional c/\sqrt{gh} en función de la elevación adimensional $\sqrt{1 + A/h}$.

Según la teoría de flujo potencial (2.2.19), la celeridad adimensional de la onda está dada por $\sqrt{1 + \varepsilon}$. En la Figura 5.3 se grafica la celeridad de fluido ideal como una línea recta, la celeridad teórica considerando la capa límite (2.4.2.3) evaluada en el tiempo donde se registra la onda y la celeridad medida experimentalmente. A partir de este gráfico se observa una evidente concordancia de las velocidades medidas con la teoría de flujo potencial.

En la Tabla 5.5 se presentan los valores de dicho gráfico, además del número de Bond B como se definió en en capítulo 1.

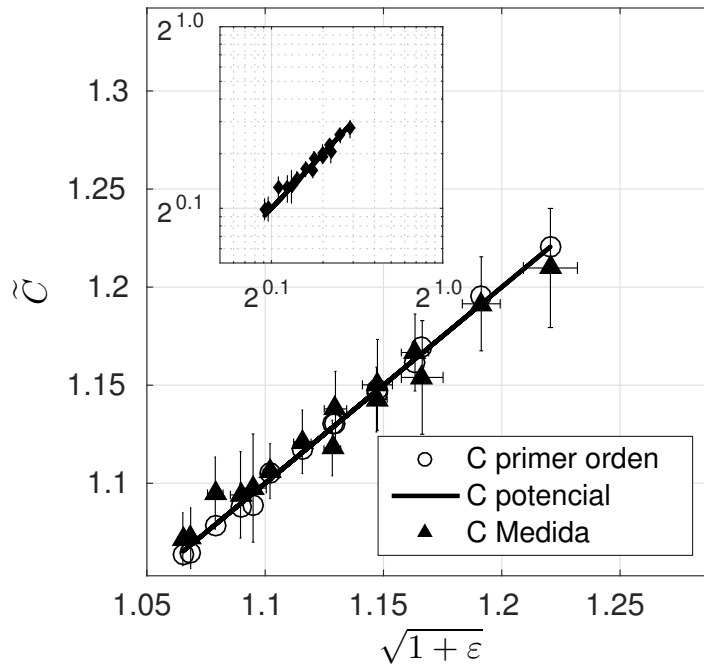


Figura 5.3: Celeridad experimental de la onda solitaria en agua.

Tabla 5.5: Parámetros experimentales calculados para el agua.

h (m)	A/h	c/\sqrt{gh}	$\mu = kh$	$\sqrt{\mu R}$
$0,020 \pm 0,001$	$0,199 \pm 0,012$	$1,098 \pm 0,028$	$0,188 \pm 0,023$	$45,262 \pm 4,577$
$0,020 \pm 0,001$	$0,350 \pm 0,019$	$1,154 \pm 0,029$	$0,244 \pm 0,025$	$46,512 \pm 4,936$
$0,020 \pm 0,001$	$0,490 \pm 0,025$	$1,210 \pm 0,030$	$0,231 \pm 0,024$	$40,786 \pm 4,850$
$0,025 \pm 0,001$	$0,187 \pm 0,009$	$1,094 \pm 0,022$	$0,285 \pm 0,029$	$82,237 \pm 6,380$
$0,025 \pm 0,001$	$0,317 \pm 0,014$	$1,150 \pm 0,023$	$0,474 \pm 0,033$	$76,574 \pm 7,711$
$0,025 \pm 0,001$	$0,419 \pm 0,018$	$1,192 \pm 0,024$	$0,546 \pm 0,035$	$59,361 \pm 8,199$
$0,030 \pm 0,001$	$0,164 \pm 0,007$	$1,095 \pm 0,018$	$0,342 \pm 0,034$	$90,097 \pm 8,018$
$0,030 \pm 0,001$	$0,276 \pm 0,010$	$1,138 \pm 0,019$	$0,442 \pm 0,035$	$84,857 \pm 8,761$
$0,030 \pm 0,001$	$0,353 \pm 0,013$	$1,167 \pm 0,020$	$0,499 \pm 0,036$	$74,631 \pm 9,178$
$0,035 \pm 0,001$	$0,142 \pm 0,005$	$1,072 \pm 0,016$	$0,316 \pm 0,039$	$98,527 \pm 9,130$
$0,035 \pm 0,001$	$0,245 \pm 0,008$	$1,121 \pm 0,016$	$0,419 \pm 0,039$	$92,656 \pm 9,869$
$0,035 \pm 0,001$	$0,316 \pm 0,010$	$1,143 \pm 0,017$	$0,473 \pm 0,040$	$80,544 \pm 10,290$
$0,040 \pm 0,001$	$0,135 \pm 0,005$	$1,072 \pm 0,014$	$0,306 \pm 0,044$	$105,300 \pm 10,467$
$0,040 \pm 0,001$	$0,215 \pm 0,006$	$1,106 \pm 0,014$	$0,390 \pm 0,044$	$99,374 \pm 11,018$
$0,040 \pm 0,001$	$0,273 \pm 0,008$	$1,118 \pm 0,014$	$0,439 \pm 0,044$	$88,079 \pm 11,381$

5.2.1.2 Celeridad de la onda solitaria en glicerina y carboximetilcelulosa

De igual forma se promedian los resultados de la celeridad de la onda solitaria en las soluciones de glicerina y carboximetilcelulosa cada 5 repeticiones experimentales. En este caso, como la viscosidad es relevante en la velocidad de fase de la onda, se presentan las celeridades de las ondas solitarias y los números de Reynolds modificados. Para el caso de un fluido newtoniano, la raíz del número de Reynolds está dada por $\sqrt{\mu R} = (\mu\sqrt{gh}h/\nu)^{\frac{1}{2}}$ (Johnson, 1997) o equivalentemente $\mu/\alpha = (\mu\sqrt{gh}h/\nu)^{\frac{1}{2}}$ (Liu & Orfila, 2004). Es importante recalcar que este número de Reynolds modificado es exactamente el término disipativo de la relación de dispersión teórica (ecuación (2.3.2.2)).

Para obtener el número de Reynolds en el caso del fluido no newtoniano se procede análogamente a Liu (2006), quien considera ondas solitarias en un fluido con viscosidad efectiva no lineal, para las cuales la variable vertical z se reescala por el inverso de $\sqrt{\mu R}$ para conservar el orden de los términos disipativos en las ecuaciones de momentum, como se realizó en el capítulo 2.4.1. El sentido físico de esta variable es reescalar la coordenada vertical por el espesor de la capa límite. La ecuación de momentum adimensional para fluidos pseudoplásticos (2.5.2.4) entrega la siguiente escala:

$$\frac{K \left(\varepsilon \sqrt{gh^{-1}} \right)^{n-1}}{\rho \sqrt{gh} \mu h} \quad (5.2.1.2.1)$$

Para conservar los términos de éste orden se reescala la variable vertical z por el inverso de $\sqrt{\mu R_{NN}}$, donde R_{NN} es el número de Reynolds a determinar, con lo que dicho número de Reynolds (μR_{NN}) resulta:

$$\mu R_{NN} = \left(\frac{\rho \sqrt{gh} \mu h^n}{K (\varepsilon \sqrt{gh})^{n-1}} \right)^{\frac{2}{n+1}} \quad (5.2.1.2.2)$$

O de forma equivalente:

$$\sqrt{\mu R_{NN}} = \left(\frac{\rho \sqrt{gh} \mu h^n}{K (\varepsilon \sqrt{gh})^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (5.2.1.2.3)$$

Es fácil demostrar que para el caso newtoniano, $n = 1$ y $R_{NN} = R$, se recupera el número de Reynolds modificado $\sqrt{\mu R} = (\mu\sqrt{gh}h/\nu)^{\frac{1}{2}}$.

5.2.1.3 Análisis dimensional de la celeridad

Las principales variables involucradas en el fenómeno son c, A, g, h, k, K, n y ρ para el fluido pseudoplástico y c, A, g, h, k, ρ y μ para la glicerina, respectivamente. Las unidades básicas del sistema son masa (M), longitud (L) y tiempo (T). Luego el número de adimensionales del

problema resulta 5 y 4, respectivamente. Para el caso newtoniano éstos son: $Fr = c/\sqrt{gh}$, μ , ε y el número de Reynolds, mientras que para el no newtoniano resultan: $Fr = c/\sqrt{gh}$, μ , ε , n y el número de Reynolds modificado.

A continuación se grafican las celeridades promedio y la desviación estándar medidas en glicerina y carboximetilcelulosa para las configuraciones experimentales mencionadas anteriormente. El propósito de incluir experimentos con glicerina es cuantificar el efecto de la viscosidad sobre la velocidad de fase de las ondas con respecto al agua sin cambiar la no linealidad del problema.

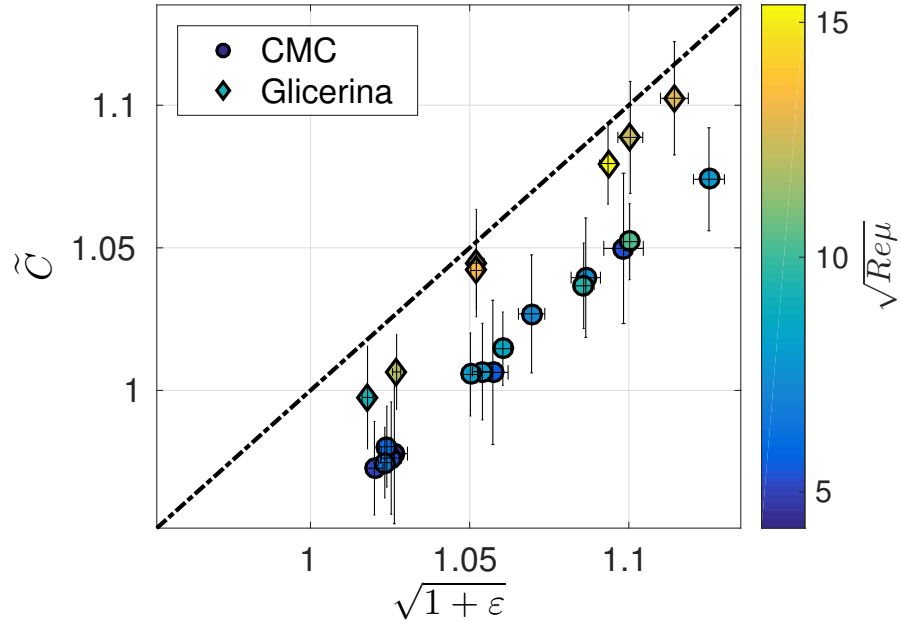


Figura 5.4: Celeridad y amplitud adimensional experimental de la onda solitaria en glicerina y CMC.

En la Figura 5.4 se compara la velocidad de fase medida para los casos de glicerina y carboximetilcelulosa, además del número de Reynolds presente en la parte real de la relación de dispersión lineal (2.3.2.2), donde la celeridad disminuye producto de los efectos viscosos. En efecto, los números de Froude medidos colapsan en la misma recta al incluir los números de Reynolds obtenidos a partir del análisis anterior en la raíz de la elevación adimensional de primer orden. La función que relaciona el número de Froude con el resto de los adimensionales se obtiene experimentalmente. En efecto, análogo a la celeridad no lineal (ecuación (2.2.19)), el número de Froude depende de la raíz de la elevación, mientras que para la relación de dispersión lineal (ecuación (2.3.2.2)) este número disminuye por una raíz del inverso del número de Reynolds, por lo que la celeridad debe depender de ambos adimensionales, en efecto:

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \chi(\mu R_{NN})^{-0,5} \quad (5.2.1.3.1)$$

Donde el coeficiente χ , que representa la solución de onda solitaria a las ecuaciones de

Navier-Stokes (Ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2)), se obtiene mediante una regresión de mínimos cuadrados no lineales de las mediciones experimentales. En la Figura 5.5 se aprecia dicha relación.

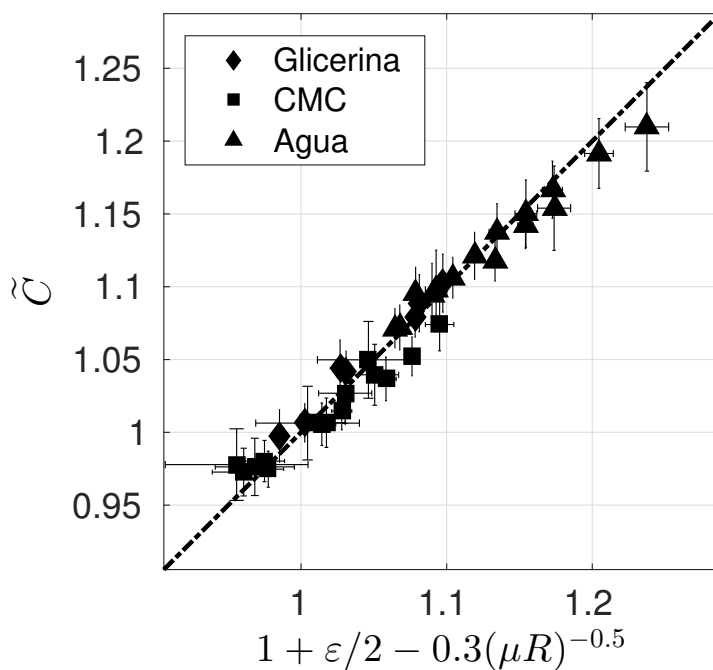


Figura 5.5: Números de Froude en función de la amplitud y el Reynolds.

Tabla 5.6: Coeficiente χ de la relación de dispersión.

χ	R^2
$0,3 \pm 0,07$	0,967

Los valores obtenidos experimentalmente se muestran en las Tablas 5.7 y 5.8.

Tabla 5.7: Parámetros experimentales calculados para la glicerina.

h (m)	A/h	c/\sqrt{gh}	$\mu = kh$	$\sqrt{\mu R}$
$0,028 \pm 0,001$	$0,036 \pm 0,003$	$1,003 \pm 0,018$	$0,075 \pm 0,006$	$8,992 \pm 0,433$
$0,028 \pm 0,001$	$0,107 \pm 0,003$	$1,045 \pm 0,019$	$0,113 \pm 0,007$	$11,03 \pm 0,465$
$0,028 \pm 0,001$	$0,211 \pm 0,003$	$1,089 \pm 0,020$	$0,136 \pm 0,008$	$12,102 \pm 0,490$
$0,028 \pm 0,001$	$0,242 \pm 0,003$	$1,102 \pm 0,020$	$0,145 \pm 0,008$	$12,512 \pm 0,501$
$0,0385 \pm 0,001$	$0,043 \pm 0,002$	$0,998 \pm 0,014$	$0,076 \pm 0,009$	$11,497 \pm 0,549$
$0,0385 \pm 0,001$	$0,107 \pm 0,002$	$1,042 \pm 0,014$	$0,098 \pm 0,008$	$13,029 \pm 0,554$
$0,0385 \pm 0,001$	$0,196 \pm 0,002$	$1,08 \pm 0,013$	$0,130 \pm 0,008$	$15,064 \pm 0,576$

Tabla 5.8: Parámetros experimentales calculados para el CMC.

h (m)	A/h	c/\sqrt{gh}	$\mu = kh$	$\sqrt{\mu R_{NN}}$
0,02 ± 0,001	0,078 ± 0,008	0,978 ± 0,025	0,123 ± 0,011	4,231 ± 0,457
0,02 ± 0,001	0,183 ± 0,010	1,006 ± 0,025	0,161 ± 0,012	5,547 ± 0,496
0,02 ± 0,001	0,306 ± 0,013	1,050 ± 0,026	0,131 ± 0,011	5,288 ± 0,500
0,025 ± 0,001	0,063 ± 0,007	0,976 ± 0,020	0,139 ± 0,012	5,245 ± 0,503
0,025 ± 0,001	0,223 ± 0,009	1,027 ± 0,021	0,179 ± 0,013	7,225 ± 0,550
0,025 ± 0,001	0,261 ± 0,010	1,040 ± 0,021	0,187 ± 0,013	7,569 ± 0,565
0,03 ± 0,001	0,047 ± 0,005	0,973 ± 0,016	0,108 ± 0,014	5,029 ± 0,559
0,03 ± 0,001	0,174 ± 0,006	1,007 ± 0,017	0,173 ± 0,014	7,899 ± 0,590
0,03 ± 0,001	0,309 ± 0,010	1,074 ± 0,018	0,151 ± 0,014	7,928 ± 0,637
0,035 ± 0,001	0,056 ± 0,005	0,980 ± 0,014	0,118 ± 0,016	6,106 ± 0,640
0,035 ± 0,001	0,122 ± 0,005	1,006 ± 0,015	0,158 ± 0,016	8,061 ± 0,659
0,035 ± 0,001	0,238 ± 0,007	1,037 ± 0,015	0,183 ± 0,016	9,624 ± 0,689
0,04 ± 0,001	0,054 ± 0,004	0,975 ± 0,012	0,110 ± 0,018	6,508 ± 0,745
0,04 ± 0,001	0,150 ± 0,005	1,015 ± 0,013	0,144 ± 0,018	8,747 ± 0,776
0,04 ± 0,001	0,273 ± 0,007	1,052 ± 0,013	0,167 ± 0,018	10,320 ± 0,802

5.2.2 Decaimiento de las ondas en fluidos pseudoplásticos

Adicionalmente se encuentra una relación entre el exponente del decaimiento adimensional y el número de Reynolds de las ondas solitarias en el fluido pseudoplástico. De acuerdo a la teoría de la atenuación de ondas solitarias con viscosidad en fluidos newtonianos, la onda decae en el tiempo como una potencia (2.4.1.36) (Liu & Orfila, 2004; Liu, 2006).

En base a lo desarrollado en la sección anterior y a la metodología de Liu (2006), la amplitud y el tiempo se adimensionalizan por la amplitud máxima $a = A(t)/A_{max}$ y $\tau = \sqrt{\mu R_{NN}}\sqrt{gh}kt'$ (5.2.1.2.3), respectivamente. Luego se ajusta una función potencia:

$$a = (1 + \alpha\tau)^{-\beta} \quad (5.2.2.1)$$

5.2.2.1 Análisis dimensional de los decaimientos

Las principales variables involucradas en el fenómeno son A, ρ, g, h, k, K, n y los coeficientes que se requieren determinar α y β . Las unidades básicas del sistema son masa (M), longitud (L) y tiempo (T). Luego el número de adimensionales del problema resulta 6, en este caso $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, n$ y un número de Reynolds: R_1 .

Los coeficientes α y β se grafican en función del resto de adimensionales μ, ε y $R = \rho h\sqrt{gh}/K$. Luego se obtiene una relación experimental mediante regresiones entre los coeficientes α y β con los números de Reynolds $Re_1 = \rho h\sqrt{gh}/K \left(\varepsilon\sqrt{g/h}\right)^{n-1}$ y μRe_1 , respectivamente,

donde:

$$\alpha = 0,001(Re_1)^{\frac{3}{2}} \quad (5.2.2.1.1)$$

$$\beta^{-1} = 2,108 \frac{\alpha}{\sqrt{\mu Re_1}} \quad (5.2.2.1.2)$$

5.2.3 Regresiones de los decaimientos

Debido a que los 15 experimentos en glicerina y CMC se repitieron 5 veces cada uno, los resultados se muestran como el promedio de cada 5 realizaciones y las desviaciones estándar. Los 15 ajustes realizados se encuentran en el Anexo A. A partir de dichos resultados se obtienen las regresiones de las Figuras 5.6 y 5.7 .

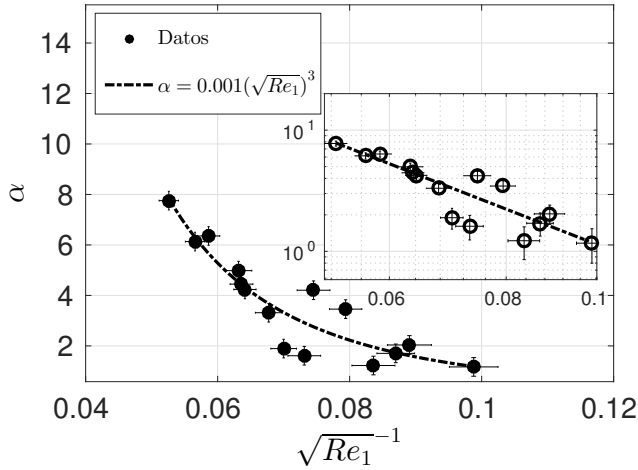


Figura 5.6: Coeficiente de decaimiento α en función del Reynolds.

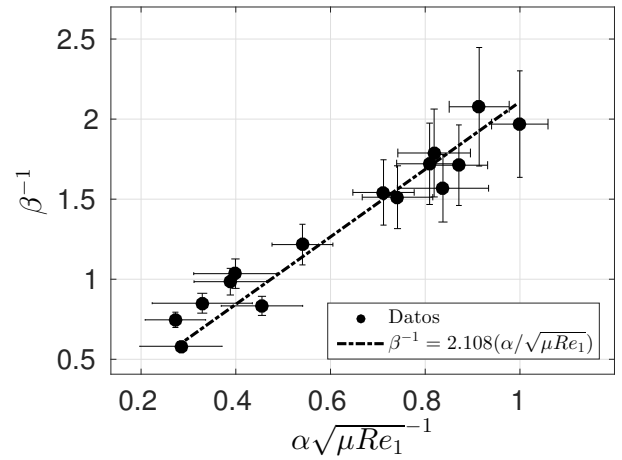


Figura 5.7: Coeficiente de decaimiento β en función del Reynolds.

Se observa una mayor dispersión horizontal para los puntos $Re^{-1} > 0,07$ a menores profundidades y mayores amplitudes, no así para los datos a menor amplitud en el mismo rango de Re^{-1} . Finalmente se obtiene una relación única para el coeficiente de decaimiento:

$$\beta^{-1} = 0,002 \frac{Re_1}{\sqrt{\mu}} \quad (5.2.3.1)$$

O de forma equivalente:

$$\beta^{-1} = 0,002 \frac{\rho h \sqrt{gh}}{\sqrt{\mu} K \left(\varepsilon \sqrt{g/h} \right)^{n-1}} \quad (5.2.3.2)$$

En la Tabla 5.9 se muestran los valores obtenidos del análisis dimensional.

Tabla 5.9: Número de Reynolds, μ y coeficientes α , β .

β	α	μ	$(\sqrt{\mu Re})^{-1}$
$1,176 \pm 0,086$	$1,168 \pm 0,369$	$0,123 \pm 0,011$	$0,282 \pm 0,0193$
$1,200 \pm 0,086$	$2,038 \pm 0,369$	$0,161 \pm 0,012$	$0,223 \pm 0,0265$
$1,720 \pm 0,086$	$1,223 \pm 0,369$	$0,131 \pm 0,011$	$0,232 \pm 0,0169$
$0,966 \pm 0,086$	$1,705 \pm 0,369$	$0,139 \pm 0,012$	$0,234 \pm 0,0194$
$0,661 \pm 0,086$	$4,206 \pm 0,369$	$0,179 \pm 0,013$	$0,176 \pm 0,0364$
$1,340 \pm 0,086$	$1,611 \pm 0,369$	$0,187 \pm 0,013$	$0,169 \pm 0,0135$
$0,638 \pm 0,086$	$3,458 \pm 0,369$	$0,108 \pm 0,014$	$0,242 \pm 0,0361$
$0,822 \pm 0,086$	$3,315 \pm 0,369$	$0,173 \pm 0,014$	$0,163 \pm 0,0229$
$0,581 \pm 0,086$	$4,983 \pm 0,369$	$0,151 \pm 0,014$	$0,162 \pm 0,0354$
$1,016 \pm 0,086$	$1,894 \pm 0,369$	$0,118 \pm 0,016$	$0,205 \pm 0,0146$
$0,649 \pm 0,086$	$4,448 \pm 0,369$	$0,158 \pm 0,016$	$0,160 \pm 0,0266$
$0,584 \pm 0,086$	$6,356 \pm 0,369$	$0,183 \pm 0,016$	$0,137 \pm 0,0337$
$0,559 \pm 0,086$	$4,237 \pm 0,369$	$0,110 \pm 0,018$	$0,193 \pm 0,0284$
$0,481 \pm 0,086$	$6,133 \pm 0,369$	$0,144 \pm 0,018$	$0,149 \pm 0,0315$
$0,508 \pm 0,086$	$7,756 \pm 0,369$	$0,167 \pm 0,018$	$0,129 \pm 0,0359$

5.3 Resultados del modelado numérico

A continuación se muestran los resultados obtenidos a partir del modelado bidimensional realizado en OpenFOAM mediante el solver OLAFOAM. Primero se presentan las validaciones del modelo realizando una comparación entre las mediciones experimentales y los valores numéricos obtenidos adimensionalizados para todas las reologías utilizadas. Dicho contraste se realiza tanto para el perfil de elevación de las ondas como para la trayectoria seguida por la onda y su velocidad de fase.

Utilizando estos modelos validados para la mezcla no newtoniana de carboximetilcelulosa, se varía el índice de flujo de la reología n entre 0,4 y 1 para cuantificar el efecto de la no linealidad de los esfuerzos viscosos en la celeridad de la onda. Finalmente se presenta una tabla resumiendo los resultados obtenidos.

5.3.1 Validación de los modelos numéricos

Los modelos numéricos simulados en OpenFOAM se contrastan con los resultados experimentales tanto para los fluidos newtonianos como para la solución de carboximetilcelulosa.

5.3.1.1 Validación del modelo en agua destilada

Este caso corresponde a $h_0 = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,2$. El perfil de la onda solitaria y la trayectoria son graficados en las Figuras 5.8 y 5.9 y presentados en la Tabla 5.10.

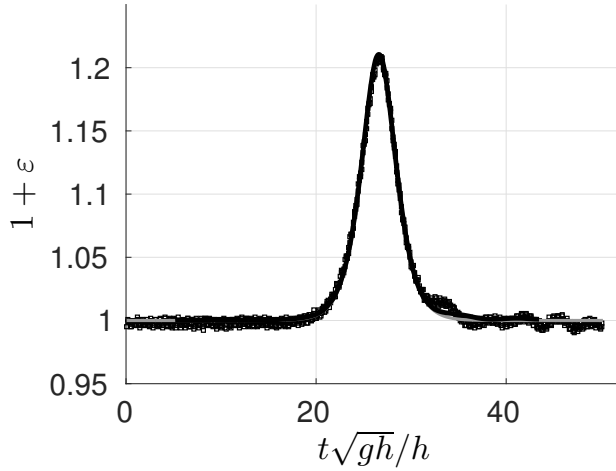


Figura 5.8: Perfil experimental (□), teórico (—) y numérico (—).

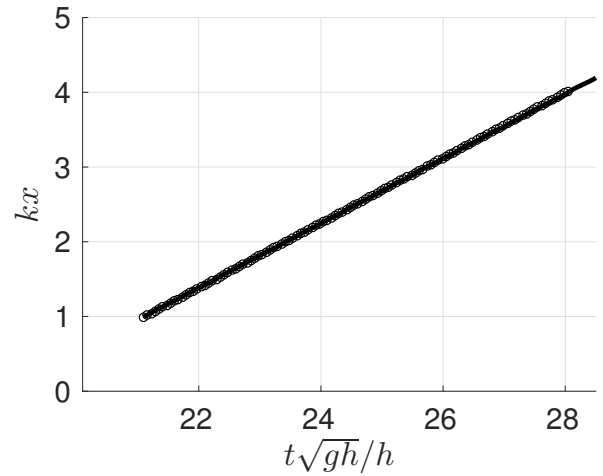


Figura 5.9: Trayectoria experimental (□) y numérica (—).

Tabla 5.10: Elevación relativa ε y celeridad.

Resultado	h (m)	A/h	c (m/s)
Experimental	0,04	0,207	$0,692 \pm 0,002$
Numérico	0,04	0,208	0,685

5.3.1.2 Validación del modelo en la solución de glicerina

Este caso corresponde a $h_0 = 0,039$ (m) y $\varepsilon = 0,1$. El perfil y la trayectoria de la onda son graficados en las Figuras 5.10 y 5.11 junto a la celeridad en la Tabla 5.11.

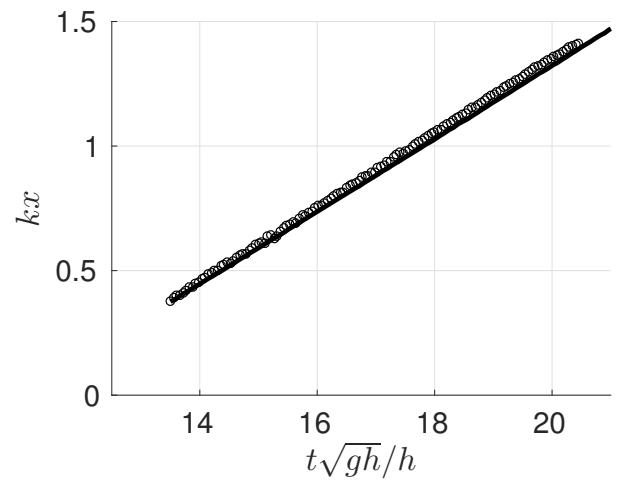
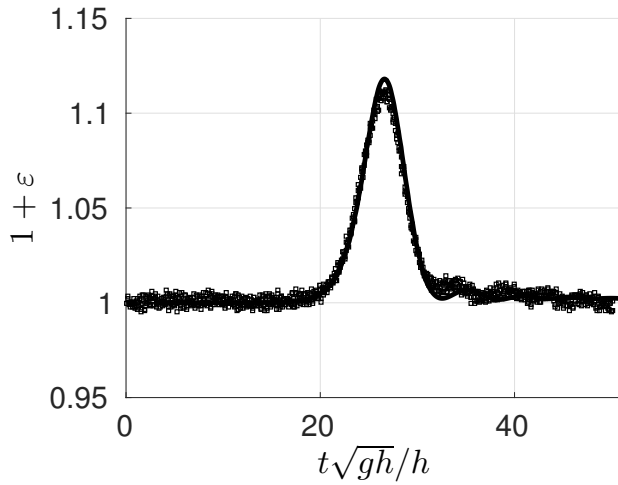


Figura 5.10: Perfil experimental (□) y numérico (—). Figura 5.11: Trayectoria experimental (□) y numérica (—).

Tabla 5.11: Elevación relativa ε y celeridad.

Resultado	h (m)	A/h	c (m/s)
Experimental	0,039	0,108	$0,638 \pm 0,002$
Numérico	0,039	0,113	0,623

5.3.1.3 Validación del modelo en la solución de carboximetilcelulosa

Este caso corresponde a $h_0 = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,13$. El perfil y la trayectoria son graficados en las Figuras 5.12 y 5.13 junto a la celeridad en la tabla 5.12.

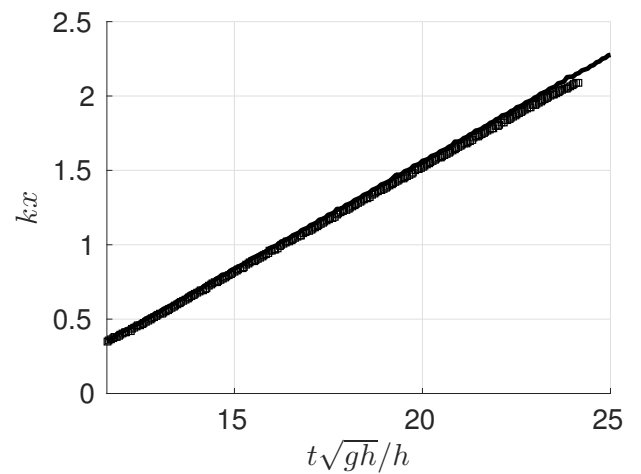
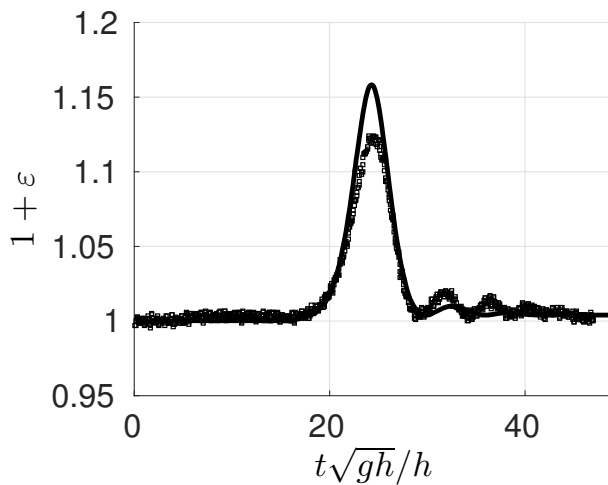


Figura 5.12: Perfil experimental (□) y numérico (—). Figura 5.13: Trayectoria experimental (□) y numérica (—).

Tabla 5.12: Elevación relativa ε y celeridad.

Resultado	h (m)	A/h	c (m/s)
Experimental	0,04	0,130	$0,637 \pm 0,002$
Numérico	0,04	0,145	0,644

A partir de los modelos realizados en glicerina y carboximetilcelulosa se observa un error menor al 12 % y 19 % en amplitud y menor al 4 % y 5 % en celeridad, respectivamente. Esto se debe probablemente a una incapacidad de representar completamente el efecto de los esfuerzos viscosos al simplificar la realidad por un modelo bidimensional. El error en la elevación para la simulación en agua es menor al 1 %, el que se incrementa a medida que aumenta la viscosidad al ser un modelo 2D.

5.3.2 Simulación a distintas reologías pseudoplásticas

Se simularon tres fluidos tipo Ley de Potencia distintos, variando el índice de flujo el cual representa el exponente no lineal de la viscosidad aparente del fluido, manteniendo constante el índice de consistencia entre $n = 0,4$ y $n = 1$. Para el experimento en que el índice de flujo es igual a la unidad, $n = 1$, se utiliza un modelo de fluido newtoniano para evitar inestabilidades en el cálculo de la viscosidad del fluido. Además se comparan las amplitudes de las ondas resultantes a $x = 0,6$ (m) de la paleta.

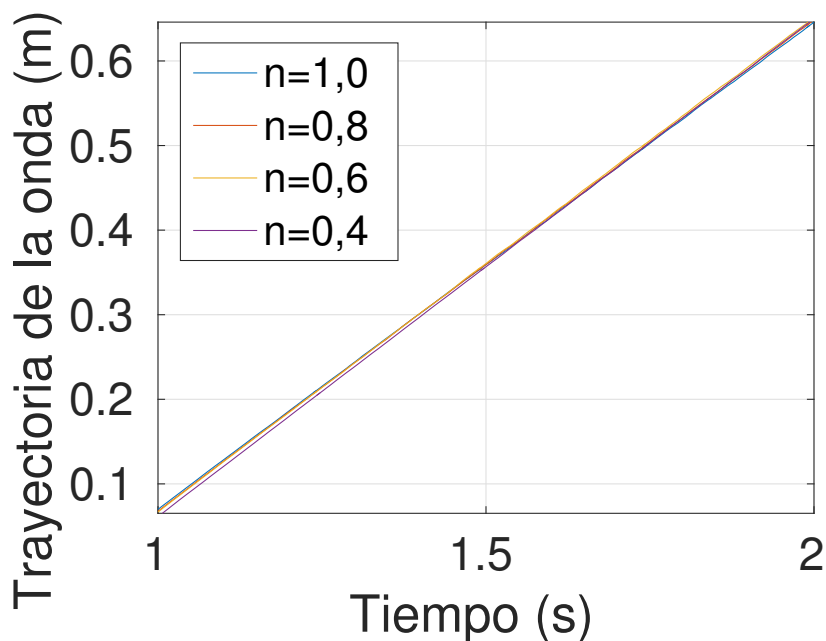


Figura 5.14: Trayectoria de las simulaciones a reología variable.

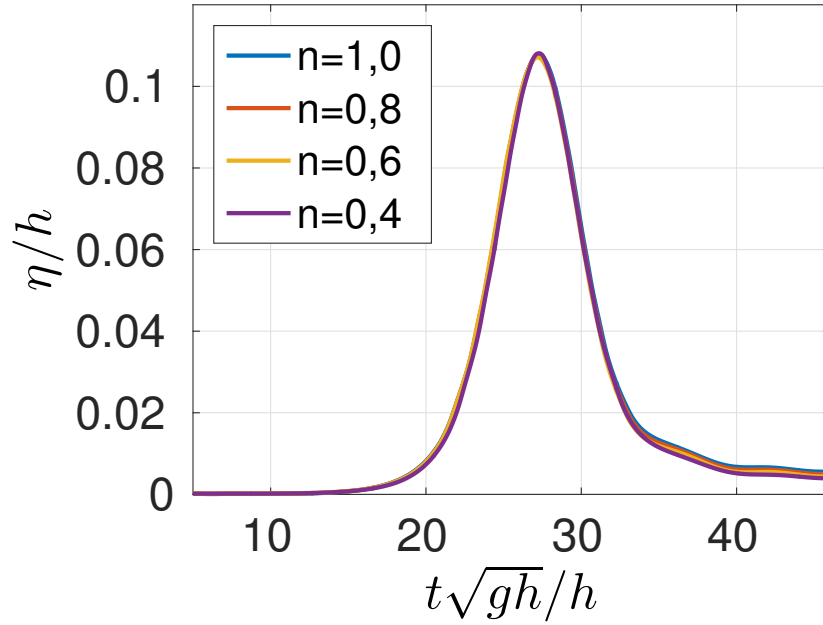


Figura 5.15: Amplitud de las simulaciones a reología variable.

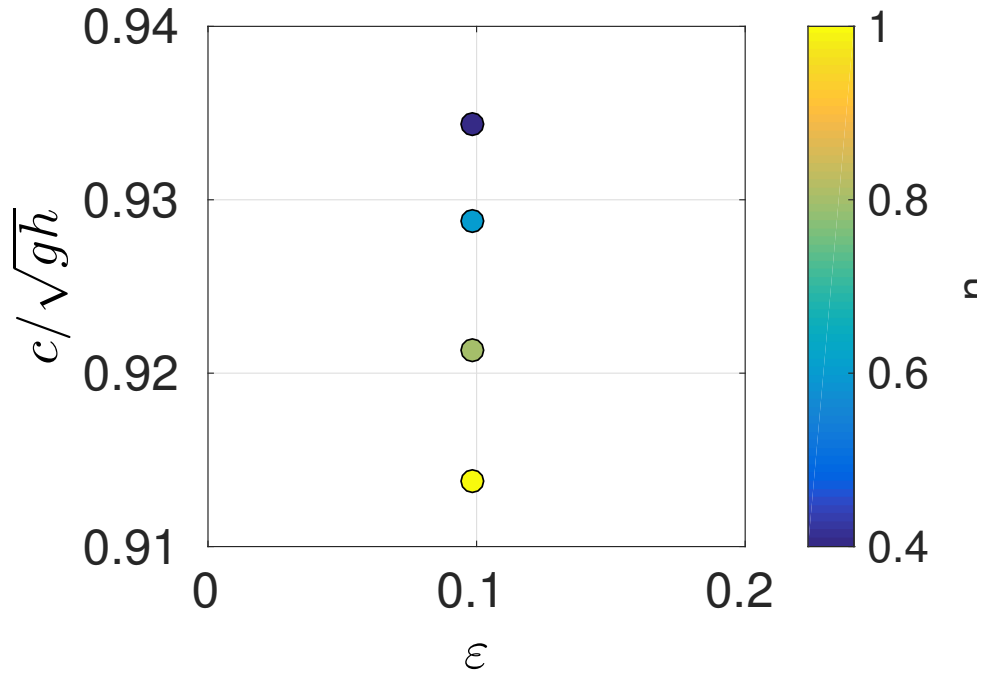


Figura 5.16: Celeridad de las simulaciones a reología variable.

Se observan diferencias en la celeridad a distintos exponentes del modelo de reología. Los parámetros calculados a partir del modelado se resumen en la Tabla 5.13.

Tabla 5.13: Resumen de las simulaciones a reología variable.

K ($Pa s^n$)	n (-)	h (m)	ε (-)	c/\sqrt{gh} (-)
0,099	0,400	0,04	0,110	0,934
0,099	0,600	0,04	0,110	0,929
0,099	0,800	0,04	0,110	0,921
0,099	1,000	0,04	0,110	0,914

A partir de las simulaciones se observa que la celeridad de las ondas solitarias en fluidos pseudoplásticos aumenta a medida que se disminuye el índice de flujo o exponente de la reología, manteniendo todos los demás parámetros reológicos constantes. A modo de complementar, se presentan los campos de velocidad y la presión dinámica en el Anexo C.

5.4 Resultados de la velocimetría de imágenes de partículas

En esta sección se presentan los perfiles verticales obtenidos tanto para la velocidad como la vorticidad en el centro de la imagen, en agua destilada y una mezcla de carboximetilcelulosa al 0,7% p/p . Dichos resultados se obtuvieron para observar el espesor de la capa límite en las mezclas de carboximetilcelulosa, comparando con el caso del agua.

Para el caso del agua las escalas verticales y horizontales se adimensionalizan de acuerdo a Klettner & Eames (2012). La escala vertical resulta $\zeta = z\sqrt{\varepsilon\sqrt{gh}}/\sqrt{A\nu}$, la velocidad asimensional $u^* = u/\varepsilon\sqrt{gh}$ y la vorticidad $\omega^* = \omega h/\varepsilon\sqrt{gh}$. En efecto, la coordenada vertical se escala por la longitud de la capa límite, es decir, $\zeta = z/h\delta$, donde $\delta = \alpha/\sqrt{\mu}$ es el inverso del número de Reynolds modificado por Klettner & Eames (2012) para fluidos newtonianos. Adicionalmente, los perfiles de velocidad y vorticidad medidos se comparan con la solución teórica considerando la suma de la velocidad dentro de la capa límite superficial (2.4.3.12) y la del fondo (2.4.1.17), más la solución de tercer orden de flujo potencial (2.2.21).

5.4.1 Perfiles de velocidad y vorticidad en el agua a $h = 0,02$ (m) y $\varepsilon = 0,31$

En las Figuras 5.17 y 5.18 se observan los perfiles verticales de velocidad y vorticidad en función de la altura en el centro de la imagen para la onda solitaria en $h = 0,02m$ y $\varepsilon = 0,11$, para la misma onda en distintas fases.

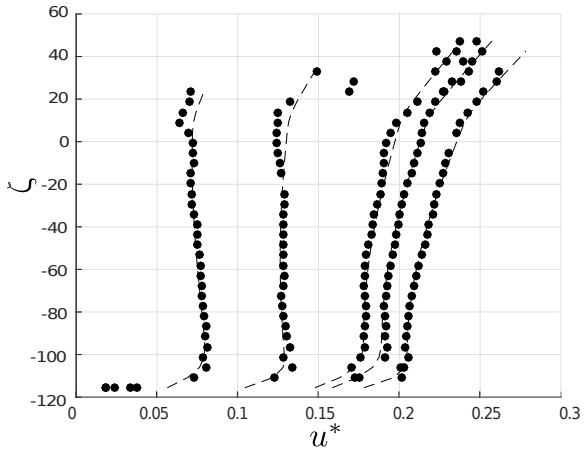


Figura 5.17: Perfil de velocidad en z , agua, $h = 0,02m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).

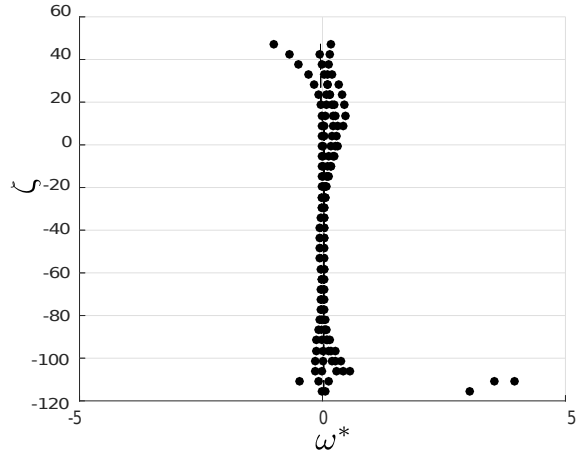


Figura 5.18: Vorticidad en z , agua, $h = 0,02m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).

5.4.2 Perfiles de velocidad y vorticidad en el agua $h = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,24$

Del mismo modo, se grafican los perfiles verticales de velocidad y vorticidad en agua para $h = 0,04m$ y $\varepsilon = 0,24$, para la misma onda a distintas fases..

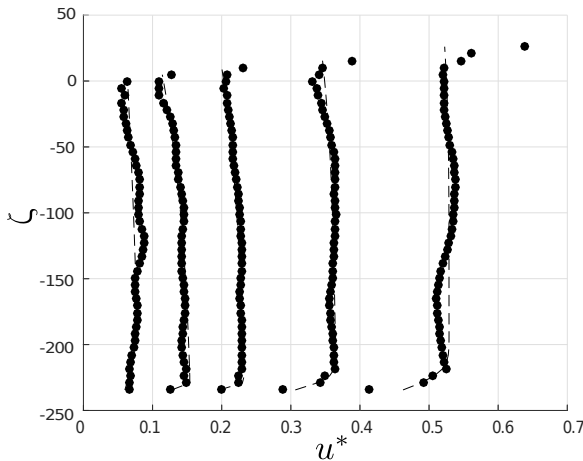


Figura 5.19: Velocidad en z , agua, $h = 0,04m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).

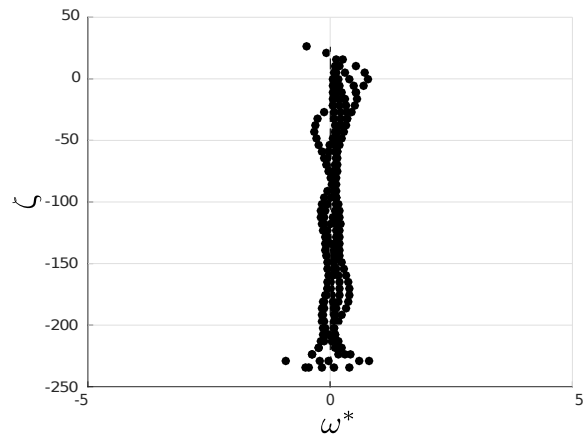


Figura 5.20: Vorticidad en z , agua, $h = 0,04m$ experimental (\bullet) y teórica ($-$).

Se observa una buena correlación entre los perfiles de velocidad (u^*) y vorticidad (ω^*) adimensionales con los valores teóricos de la onda solitaria en agua a baja profundidad $h = 0,02m$. Para el caso de $h = 0,4m$ las velocidades en la superficie son mayores, las que desplazan las partículas, distorsionando el seguimiento de sus desplazamientos. Asimismo, para menores números de froude (Figura 5.17), se captura de mejor manera la velocidad en la superficie libre.

5.4.3 Perfiles de velocidad y vorticidad en CMC $h = 0,02$ (m) y $\varepsilon = 0,14$

En esta sección se encuentran los perfiles verticales de velocidad y vorticidad en función de la altura en el centro de la imagen para la onda solitaria en carboximetilcelulosa con $h = 0,02m$ y $\varepsilon = 0,14$, para la misma onda a distintas fases. Acorde a lo explicado en la sección 5.2.1.2, y en concordancia con Klettner & Eames (2012), la escala vertical z se adimensionaliza por $\zeta = z/h\delta_{nn}$, donde $\delta_{nn} = \mu^{\frac{1}{n+1}}/\sqrt{\mu R_{NN}}$, con $\sqrt{\mu R_{NN}}$ según se definió en la sección 5.2.1.2. Es fácil demostrar que para el caso $n = 1$ se recupera la longitud definida anteriormente por Klettner & Eames (2012).

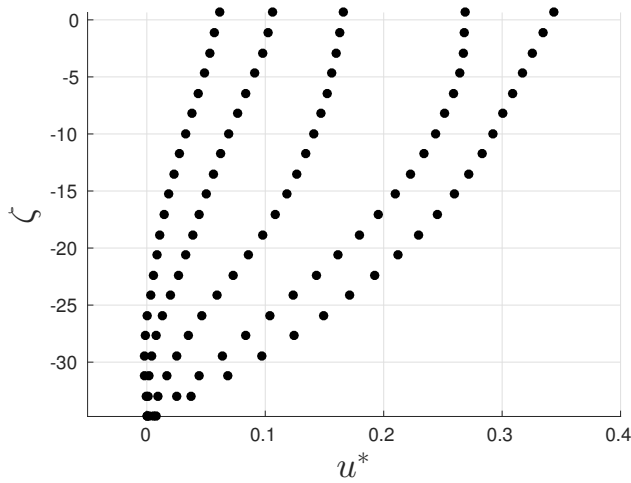


Figura 5.21: Velocidad en z , CMC, $h = 0,02m$.

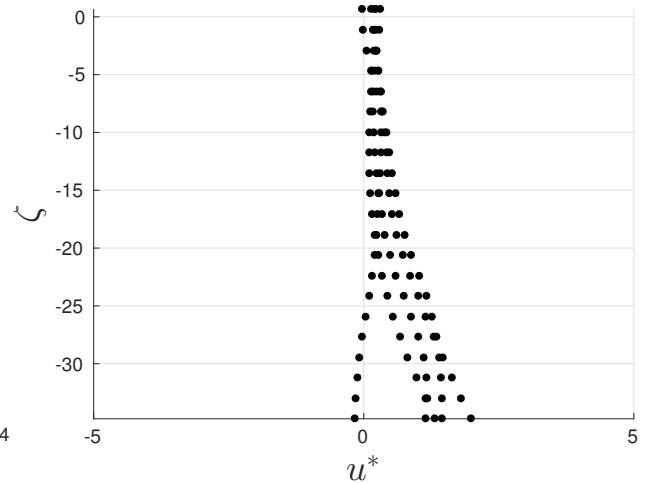


Figura 5.22: Vorticidad en z , CMC, $h = 0,02m$.

5.4.4 Perfiles de velocidad y vorticidad en CMC $h = 0,04$ (m) y $\varepsilon = 0,21$

Del mismo modo, se grafican los perfiles verticales de velocidad y vorticidad en carboximetilcelulosa para $h = 0,04m$ y $\varepsilon = 0,21$, para la misma onda a distintas fases.

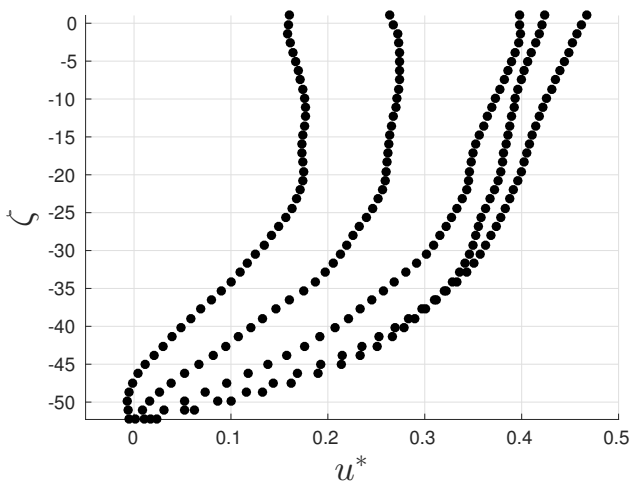


Figura 5.23: Velocidad en z , CMC, $h = 0,04m$.

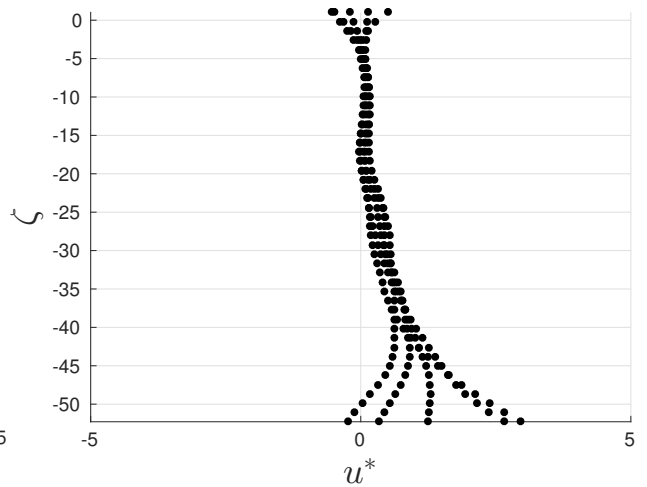


Figura 5.24: Vorticidad en z , CMC, $h = 0,04m$.

A partir de los perfiles de velocidad y vorticidad para el caso de la onda solitaria en agua presentan una estructura de capa límite cerca del fondo del canal y en la superficie, mientras que el resto del espacio predomina el flujo irrotacional. Esto se puede concluir a partir de los gráficos de vorticidad. Por otro lado, a raíz de los perfiles de velocidad y vorticidad de la onda en fluidos pseudoplásticos el efecto de la condición de no deslizamiento del fondo se propaga hasta la mitad del dominio vertical, por lo que el supuesto de flujo irrotacional en casi todo el espacio pierde validez.

Para complementar la información se presentan los campos de velocidad y líneas de corriente en dos dimensiones obtenidos mediante Velocimetría de Imágenes de Partículas en el Anexo B. Además para ayudar a observar la líneas de corriente cerca de la capa límite se grafica la convolución integral de línea, la cual integra las tangentes al campo de velocidades.

6. Discusión

En esta sección se realiza una breve discusión sobre la información presentada en las secciones de metodología y resultados.

6.1 Metodología experimental

A raíz de la validación realizada para la velocidad media de la señal resultante del movimiento del mecanismo digital de tipo pistón (Figura 3.19), se observa un peak de de velocidad ligeramente menor al obtenido por Malek-Mohammadi & Testik (2010) en la Figura 3.18, no así para la amplitud alcanzada por el sistema la cual es idéntica. De la Figura 3.18 el perfil de velocidad de Malek-Mohammadi & Testik (2010) presenta un quiebre en el peak de la velocidad máxima, lo que no representa la solución numérica de las ecuaciones de movimiento a diferencia de la solución obtenida en este trabajo.

Con respecto a la FTP, se corrige un evidente error de signo presente en los códigos existentes para transformar la diferencia de fase a altura, cuya fórmula está dada por la ecuación (3.1.1.4).

6.2 Resultados

Los resultados de la velocidad de fase obtenidos en las soluciones de glicerina y carboximetilcelulosa muestran una evidente disminución en la celeridad producto de la viscosidad del fluido (Figura 5.4). Asimismo, realizando una analogía con la relación de dispersión (ecuación (2.3.2.2)), obtenida a partir de la teoría lineal para ondas en aguas someras tal que $kh \ll 1$, la velocidad de fase disminuye con el inverso de la raíz del número de Reynolds y el parámetro de aguas someras kh . En efecto, al aumentar la viscosidad el número de Reynolds disminuye, por lo cual los efectos viscosos se vuelven importantes en la ecuación (2.3.2.2). Por otro lado, a menor viscosidad y mayor inercia, como en el caso del agua, el número de Reynolds aumenta y dichos efectos desaparecen en la relación de dispersión. Al comparar los resultados entre las soluciones de glicerina y carboximetilcelulosa, la disminución en la velocidad de fase de la onda solitaria es mayor en el caso del fluido no newtoniano, debido a su mayor viscosidad efectiva.

Producto de la relación obtenida para el decaimiento de la onda no lineal en el fluido pseudoplástico utilizado (ecuación (5.2.3.1)), se concluye que a mayores números de Reynolds el decaimiento de la onda solitaria es menor. Lo anterior se debe a que al disminuir la viscosidad aparente producto de los efectos inerciales, el fluido decae a una menor tasa producto de la disminución de los esfuerzos viscosos. Asimismo, al aumentar la raíz del parámetro de aguas someras \sqrt{kh} la atenuación aumenta. Lo anterior es consistente con el decaimiento teórico obtenido por Liu & Orfila (2004) (ecuación (2.4.1.36)), en el cual mediante un poco de álgebra se obtiene que al aumentar \sqrt{kh} , la atenuación es mayor. De la misma forma, Johnson (1997) afirma que a partir de su relación de dispersión, que el decaimiento viscoso es mayor en ondas mas cortas, es decir, mayores valores de kh . Por último, según Hunt (1964) el orden del decaimiento para ondas de gravedad de baja amplitud en aguas someras es de $\mathcal{O}(\sqrt{\nu})$, mientras que para aguas profundas es de $\mathcal{O}(\nu)$.

Respecto a la validación del modelo numérico con mediciones experimentales, se obtienen diferencias de amplitud menores al 1% y 4% para la simulación en agua y glicerina, respectivamente. En el caso del fluido pseudoplástico, la validación entrega una diferencia en la amplitud de la onda menor al 19%. El aumento de esta diferencia con respecto a los otros casos se debe a que la simulación es bidimensional, por consiguiente la pérdida friccional se debe completamente a la fricción del fondo del estanque y no se están considerando las pérdidas friccionales asociadas a las paredes del canal, como sí ocurre en las mediciones en laboratorio. Dicho esto, para obtener mejores resultados se aconseja implementar un modelo numérico tridimensional con malla dinámica, capaz de incorporar los esfuerzos viscosos en la superficie de las paredes. Sin embargo, se debe tomar en cuenta el incremento en el tiempo computacional de ejecutar dicho modelo. El actual modelo bidimensional demora alrededor de 12 horas en un computador de escritorio. Si bien un mayor número de Courant podría reducir este tiempo, éste se mantiene igual a 0,5 para asegurar la convergencia. Este valor se fija por defecto en los ejemplos de la librería olaFOAM.

La velocidad de fase de las ondas solitarias obtenida en el modelo numérico es levemente menor que la medida experimentalmente, lo que puede atribuirse a estar sobrestimando la viscosidad real de los fluidos, lo que resulta razonable a una escala tan pequeña de velocidades medidas. Recordando la relación de dispersión en el límite lineal (ecuación (2.3.2.2)), la celeridad disminuye producto de un mayor número de Reynolds.

7. Conclusiones y recomendaciones

A lo largo de este trabajo se estudió el efecto de la viscosidad en la velocidad de fase de ondas solitarias superficiales en fluidos newtonianos (agua y glicerina) y no newtonianos, del tipo pseudoplásticos (soluciones de CMC en agua). Para esto se analizó el fenómeno de forma experimental, teórica y numérica, con el fin de esclarecer de forma completa dicha influencia. Las principales conclusiones del trabajo se presentan a continuación.

7.1 Conclusiones

Gracias al montaje experimental se logra realizar un estudio experimental de ondas solitarias superficiales en fluidos newtonianos (agua y glicerina) y no newtonianos, del tipo pseudoplásticos (soluciones de CMC en agua). El montaje permite realizar mediciones utilizando la técnica de perfilometría por transformada de Fourier (FTP) y se logra implementar la técnica de velocimetría de imágenes de partículas (PIV) en agua destilada y una solución de carboximetilcelulosa. Utilizando estas técnicas se determinan experimentalmente los parámetros requeridos como celeridad y amplitud de las ondas solitarias en agua destilada, glicerina y carboximetilcelulosa. De esta forma se cumplen a cabalidad los objetivos de la parte experimental, incluyendo de forma complementaria la reología adicional de glicerina.

Producto del desarrollo de este trabajo se diseña y construye un estanque y un mecanismo generador de ondas impreso en 3D, de tipo pistón, controlado digitalmente, el cual fue validado con otros estudios y con la teoría de las ondas resultantes medidas en agua, tanto en la celeridad como la superficie. Este sistema permite obtener una amplia gama de distintas ondas paramétricas según la teoría deseada, controlando las configuraciones experimentales que se requieran de forma precisa. En efecto, la respuesta del servomotor a la señal enviada mediante arduino es de 2 microsegundos y su resolución de $0,162^\circ$.

Se establece el marco teórico que rige la fluidodinámica del problema para fluidos newtonianos y no newtonianos. En el caso del agua, se obtiene una relación teórica para predecir la velocidad de fase de la onda, utilizando la teoría de flujo potencial, incorporando los efectos de la capa límite a partir de la metodología de Liu & Orfila (2004), quienes obtuvieron el decaimiento, o dicho de otra forma, la parte imaginaria de la fase. Para el caso del fluido no newtoniano, debido a la alta no linealidad del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, se opta por la alternativa de utilizar un modelo numérico bidimensional de volúmenes finitos con malla dinámica, implementado en OpenFOAM. De igual manera, el modelo implementado

en dicho software entrega una herramienta versátil en el sentido de poder generar distintas ondas según la teoría lineal y no lineal, respondiendo a la necesidad de complementar estudios experimentales o teóricos y ampliar la investigación como en este caso. Por consiguiente se completan los objetivos del análisis teórico y modelado numérico, sin acortar los alcances iniciales del trabajo.

La relación teórica obtenida para la velocidad de fase incorporando los efectos de la capa límite (ecuación (2.4.2.4)), predice de forma adecuada dicha celeridad. Como estos tres resultados colapsan de buena forma en una misma recta, se concluye que el efecto de la viscosidad del agua en la propagación de la onda resulta despreciable, pero existe. En conclusión, la celeridad de la onda solitaria en agua depende del leve decaimiento de ésta.

En el caso de fluidos newtonianos de mayor viscosidad como la glicerina y no newtonianos del tipo pseudoplástico, el decaimiento adimensional no predice la celeridad de la onda sino que dicha disminución de velocidad está dada por el número de Reynolds, producto de la viscosidad del fluido. En efecto, a partir del análisis dimensional, (ecuación(2.3.2.2)), se relaciona dicha celeridad adimensional con la raíz de la elevación adimensional y los números de Reynolds modificados resultando en un modelo de reómetro utilizando ondas no lineales.

A raíz de los gráficos de vorticidad de la onda solitaria en agua y los de un fluido pseudoplástico, se concluye que el espesor de la capa límite en agua es milimétrico, no así para el caso del fluido no newtoniano, en el cual la vorticidad del fluido es distinta de cero en casi todo el dominio espacial. De esta manera, no se puede suponer un núcleo o zona irrotacional entre la superficie y el fondo para la onda solitaria en un fluido pseudoplástico a la viscosidad medida. Asimismo, el gradiente de presiones no se puede suponer nulo cerca del fondo, por lo que la teoría de flujo potencial más una delgada capa límite no resulta aplicable a este caso.

Respecto a los resultados obtenidos en el modelado numérico, se concluye que la celeridad de las ondas solitarias en fluidos pseudoplásticos se incrementa monotónicamente a medida que disminuye el índice de flujo o exponente de la reología, manteniendo todos los demás parámetros reológicos constantes. Esto se explica debido a que a mayores tasas de deformación, la viscosidad aparente del fluido tiende a disminuir, debido a que la reología pseudoplástica es de tipo *shear-thinning*. En conclusión, una mayor no linealidad del índice de flujo ($n \ll 1$) en el tensor de esfuerzos en una reología tipo Ostwald-de Waele afecta aumentando la celeridad de la onda solitaria. Por el contrario, el efecto preponderante es la disminución de la velocidad de fase con respecto al flujo irrotacional producto de la viscosidad aparente donde predomina el índice de consistencia (K) sobre la variación del índice de flujo (n) incluyendo el caso de (n) constante (Figura 5.4).

7.2 Recomendaciones

Resulta interesante y aconsejable aprovechar la tecnología actual, como las impresoras 3D, para estudios experimentales, debido a su dinámica y un sin fin de aplicaciones que proporcionan. En este estudio se utiliza específicamente para crear un mecanismo generador de ondas, pero podría utilizarse por ejemplo para fabricar obstáculos en el fondo del canal o

generar batimetrías variables en el espacio y/o en el tiempo mediante un mecanismo.

Se sugiere considerar el potencial de esta instalación experimental para realizar futuros estudios, incluyendo ondas armónicas u oscilaciones con turbulencia en fluidos de distinta reología.

Por otro lado, se podría mejorar la actual instalación experimental incorporando un sensor capacitivo, sensor láser o un acelerómetro con el objetivo de observar el movimiento de la paleta del servomotor y así monitorear la evolución de la velocidad y amplitud de dicho mecanismo en el tiempo. En la actualidad existe una serie de plataformas de diseño de sistemas automatizados, como por ejemplo LabView. En este sentido, se recomienda automatizar y sincronizar digitalmente el inicio del movimiento del pistón con el disparador de la cámara digital, para evitar producir desfases entre la evolución temporal de la onda generada y la onda medida.

Con respecto al potencial adicional del modelo en OpenFOAM , si bien no todas las ondas solitarias superficiales en la naturaleza se propagan en régimen laminar por un canal recto y largo, el modelo numérico permite utilizar batimetrías variables e incorporar modelos de turbulencia además del uso particular que se le dió en esta tesis.

Con respecto a la velocimetría de imágenes de partículas, debido a que PIVLAB, el código utilizado para el postproceso de la velocimetría de imágenes de partículas, se encuentra discontinuado en la actualidad, se recomienda utilizar otras rutinas de código abierto y gratuitos para la realización de PIV, como por ejemplo OpenPIV. Dicho software posee una variedad de versiones escritas en distintos lenguajes como Python, C++ y Matlab. Aunque este programa cuenta con una menor comunidad con respecto a PIVLAB, OpenPIV es gratuito y de código libre en sus dos versiones de Python y C++. Además cuenta con la ventaja de continuar siendo desarrollando a la fecha.

Se recomienda mantener las soluciones de carboximetilcelulosa en contenedores herméticamente cerrados, a temperatura ambiente y revolver mecánicamente en el tiempo debido a que este polímero sedimenta debido a su alto peso molecular. Además, se aconseja disolver en agua destilada y controlar el pH para obtener valores de viscosidad estables y nominales. Según el distribuidor Aqualon, la viscosidad de este polímero puede decaer en el tiempo si se mantiene expuesto al aire libre. Del mismo modo, se sugiere mantener la temperatura del fluido constante al momento de realizar las experiencias de laboratorio, esto debido a que ésta varía la viscosidad del fluido.

Bibliografía

- Abdusalam, H. (2005). On an improved complex tanh-function method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(2), 99–106.
- Adrian, R. J. (1991). Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1), 261–304.
- Bedard, R. J. (2013). *Laboratory scale experiments with water surface waves*. PhD thesis, Engineering Doctoral dissertation, University of Hull.
- Behroozi, F. (2003). Fluid viscosity and the attenuation of surface waves: a derivation based on conservation of energy. *European journal of physics*, 25(1), 115.
- Berberović, E., van Hinsberg, N. P., Jakirlić, S., Roisman, I. V., & Tropea, C. (2009). Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution. *Physical Review E*, 79(3), 036306.
- Borhanifar, A. & Kabir, M. (2009). New periodic and soliton solutions by application of exp-function method for nonlinear evolution equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 229(1), 158–167.
- Carrillo, D. A. (2011). Arrastre incipiente de partículas en flujos de fluidos no newtonianos. Memoria de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- Chhabra, R. P. & Richardson, J. F. (1999). *Non-Newtonian flow in the process industries: fundamentals and engineering applications*. Butterworth-Heinemann. pg. 63.
- Cobelli, P. J., Maurel, A., Pagneux, V., & Petitjeans, P. (2009). Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry. *Experiments in fluids*, 46(6), 1037.
- Connolly, J. A. & Podladchikov, Y. Y. (2015). An analytical solution for solitary porosity waves: dynamic permeability and fluidization of nonlinear viscous and viscoplastic rock. *Geofluids*, 15(1-2), 269–292.
- Dai, C.-Q. & Wang, Y.-Y. (2008). Exact travelling wave solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equation and the hybrid lattice equation obtained via the exp-function method. *Physica Scripta*, 78(1), 015013.

- Dutykh, D., Hoefler, M., & Mitsotakis, D. (2017). Solitary wave solutions and their interactions for fully nonlinear water waves with surface tension in the generalized Serre equations. *ArXiv e-prints*.
- El-Sabbagh, M. & Ali, A. (2005). New exact solutions for (3+ 1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation and generalized (2+ 1)-dimensional Boussinesq equation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(2), 151–162.
- Esteve-Taboada, J. J., Mas, D., & García, J. (1999). Three-dimensional object recognition by Fourier transform profilometry. *Applied optics*, 38(22), 4760–4765.
- Falcon, É., Laroche, C., & Fauve, S. (2002). Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer. *Physical Review Letters*, 89(20), 204501.
- Gleeson, T. & Ingebritsen, S. (2016). *Crustal permeability*. John Wiley & Sons.
- Glycerine Producers' Association (1963). *Physical properties of glycerine and its solutions*. Glycerine Producers' Association.
- Goring, D. & Raichlen, F. (1980). The generation of long waves in the laboratory. In *Coastal Engineering 1980* (pp. 763–783).
- Grimshaw, R. (1971). The solitary wave in water of variable depth. part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(3), 611–622.
- Grimshaw, R. (2007). *Solitary waves in fluids*, volume 47. WIT Press.
- Hafsia, Z., Ben Haj, M., Lamloumi, H., & Maalel, K. (2009). Comparison between moving paddle and mass source methods for solitary wave generation and propagation over a steep sloping beach. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 3(3), 355–368.
- Hammack, J. L. & Segur, H. (1974). The Korteweg-de Vries equation and water waves. part 2. comparison with experiments. *Journal of Fluid mechanics*, 65(2), 289–314.
- Higuera, P., Losada, I. J., & Lara, J. L. (2015). Three-dimensional numerical wave generation with moving boundaries. *Coastal Engineering*, 101, 35–47.
- Hu, R., Wang, A., & Hartnett, J. (1991). Surface tension measurement of aqueous polymer solutions. *Experimental thermal and fluid science*, 4(6), 723–729.
- Hunt, J. (1964). The viscous damping of gravity waves in shallow water. *La Houille Blanche*, (6), 685–691.
- Islam, M. H., Khan, K., Akbar, M. A., & Salam, M. A. (2014). Exact traveling wave solutions of modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation and viscous Burgers equation. *SpringerPlus*, 3(1), 105.
- ISO 3219:1994 (1994). *Plastics - Polymers/resins in the liquid state or as emulsions or dispersions - Determination of viscosity using a rotational viscometer with defined shear*

rate. Standard.

- Jafari, H., Borhanifar, A., & Karimi, S. (2009). New solitary wave solutions for the bad Boussinesq and good Boussinesq equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25(5), 1231–1237.
- Jafari, H., Borhanifar, A., & Karimi, S. (2010). New solitary wave solutions for generalized regularized long-wave equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(3), 509–514.
- Johnson, R. S. (1997). *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, volume 19. Cambridge University Press.
- Kakutani, T. & Matsuuchi, K. (1975). Effect of viscosity on long gravity waves. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(1), 237–246.
- Katell, G. & Eric, B. (2002). Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker. *Journal of Hydraulic Research*, 40(3), 321–331.
- Kestin, J., Sokolov, M., & Wakeham, W. A. (1978). Viscosity of liquid water in the range- 8 c to 150 c. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 7(3), 941–948.
- Klettner, C. A. & Eames, I. (2012). The laminar free surface boundary layer of a solitary wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 696, 423–433.
- Kohlstedt, D., Evans, B., & Mackwell, S. (1995). Strength of the lithosphere: Constraints imposed by laboratory experiments. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 100(B9), 17587–17602.
- Laloš, J., Mrak, M., Pavlovčič, U., & Jezeršek, M. (2015). Handheld optical system for skin topography measurement using fourier transform profilometry. *Strojniški vestnik-Journal of Mechanical Engineering*, 61(5), 285–291.
- Lin, C., Chang, S.-C., Ho, T.-C., & Chang, K.-A. (2006). Laboratory observation of solitary wave propagating over a submerged rectangular dike. *Journal of engineering mechanics*, 132(5), 545–554.
- Liu, P.-F., Simarro, G., Vandever, J., & Orfila, A. (2006). Experimental and numerical investigation of viscous effects on solitary wave propagation in a wave tank. *Coastal Engineering*, 53(2), 181–190.
- Liu, P. L.-F. (2006). Turbulent boundary-layer effects on transient wave propagation in shallow water. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 462 (pp. 3481–3491).
- Liu, P. L.-F. & Orfila, A. (2004). Viscous effects on transient long-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 520, 83–92.
- Longuet-Higgins, M. S. (1992). Capillary rollers and bores. *Journal of Fluid Mechanics*, 240.

- Lowman, N. K., Hoefler, M. A., & El, G. A. (2014). Interactions of large amplitude solitary waves in viscous fluid conduits. *Journal of Fluid Mechanics*, 750, 372–384.
- Malek-Mohammadi, S. & Testik, F. Y. (2010). New methodology for laboratory generation of solitary waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 136(5), 286–294.
- Maurel, A., Cobelli, P., Pagneux, V., & Petitjeans, P. (2009). Experimental and theoretical inspection of the phase-to-height relation in fourier transform profilometry. *Applied optics*, 48(2), 380–392.
- Mei, C. C. (1997). *Mathematical analysis in engineering: How to use the basic tools*. Cambridge University Press.
- Mei, C. C., Stiassnie, M., & Yue, D. K.-P. (1989). *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Part 1: Linear Aspects Part 2: Nonlinear Aspects*. World Scientific.
- Minagawa, N. & White, J. L. (1976). The influence of titanium dioxide on the rheological and extrusion properties of polymer melts. *Journal of Applied Polymer Science*, 20(2), 501–523.
- Mohapatra, S. & Soares, C. (2015). Comparing solutions of the coupled boussinesq equations in shallow water. *Maritime Technology and Engineering. London: Taylor & Francis*, (pp. 947–954).
- Mohyud-Din, S. T. & Irshad, A. (2016). On exact solutions of modified KdV-ZK equation. *Alexandria Engineering Journal*, 55(4), 3253–3265.
- Niño, Y. & García, M. (1998). Using Lagrangian particle saltation observations for bedload sediment transport modelling. *Hydrological Processes*, 12(8), 1197–1218.
- Paprota, M., Sulisz, W., & Reda, A. (2016). Experimental study of wave-induced mass transport. *Journal of Hydraulic Research*, 54(4), 423–434.
- Parkes, E. & Duffy, B. (1996). An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. *Computer physics communications*, 98(3), 288–300.
- Parra, C. & Beyá, J. (2017). Pronóstico operacional de oleaje para las costas y puertos de Chile, Santiago, Chile. *XXIII Congreso Chileno De Ingeniería Hidráulica*.
- Pedocchi, F., Martin, J. E., & García, M. H. (2008). Inexpensive fluorescent particles for large-scale experiments using particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 45(1), 183–186.
- Przadka, A., Cabane, B., Pagneux, V., Maurel, A., & Petitjeans, P. (2012). Fourier transform profilometry for water waves: how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface? *Experiments in fluids*, 52(2), 519–527.
- Ranalli, G. (1995). *Rheology of the Earth*. Springer Science & Business Media.

- Richard, G. C., Kanjilal, S., & Schmeling, H. (2012). Solitary-waves in geophysical two-phase viscous media: a semi-analytical solution. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 198, 61–66.
- Rojas, P. A. (2015). Estudio experimental de la respuesta espacio-temporal de ondas gravitacionales en un flujo afectado débilmente por la rotación del medio. Memoria de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- Sadek, M. M., Parras, L., Diamessis, P. J., & Liu, P. L.-F. (2015). Two-dimensional instability of the bottom boundary layer under a solitary wave. *Physics of Fluids*, 27(4), 044101.
- Scott, D. R. & Stevenson, D. J. (1984). Magma solitons. *Geophysical Research Letters*, 11(11), 1161–1164.
- Seelam, J. K. & Baldock, T. E. (2011). Comparison of bed shear under non-breaking and breaking solitary waves. *The International Journal of Ocean and Climate Systems*, 2(4), 259–278.
- Stamhuis, E. J. (2006). Basics and principles of particle image velocimetry (piv) for mapping biogenic and biologically relevant flows. *Aquatic Ecology*, 40(4), 463–479.
- Synolakis, C. E. (1990). Generation of long waves in laboratory. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 116(2), 252–266.
- Takeda, M., Ina, H., & Kobayashi, S. (1982). Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry. *Journal of the Optical Society of America*, 72(1), 156–160.
- Thielicke, W. (2014). The flapping flight of birds. analysis and application. *Aerospace Engineering Doctoral Dissertation. University of Groningen*.
- Thielicke, W. & Stamhuis, E. (2014). Pivlab—towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in matlab. *Journal of Open Research Software*, 2(1).
- Wang, M. & Li, X. (2005). Extended f-expansion method and periodic wave solutions for the generalized Zakharov equations. *Physics Letters A*, 343(1), 48–54.
- Wazwaz, A.-M. (2004). Distinct variants of the KdV equation with compact and noncompact structures. *Applied Mathematics and Computation*, 150(2), 365–377.
- Wehausen, J. V. & Laitone, E. V. (1960). Surface waves. In *Fluid Dynamics/Strömungsmechanik* (pp. 446–778). Springer.
- Wei, D., Borden, H., et al. (2011). Traveling wave solutions of Burgers equation for power-law non-newtonian flows. *Applied Mathematics E-Notes*, 11, 133–138.
- Winckler, G. P. (2015). *Long Waves In Channels Of Non-Uniform Cross-Section*. PhD thesis, Civil Engineering, Cornell University.

- Winckler, P. & Liu, P. L.-F. (2015). Long waves in a straight channel with non-uniform cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, 770, 156–188.
- Wu, N.-J., Tsay, T.-K., & Chen, Y.-Y. (2014). Generation of stable solitary waves by a piston-type wave maker. *Wave Motion*, 51(2), 240–255.
- Yomosa, S. (1987). Solitary waves in large blood vessels. *Journal of the Physical society of Japan*, 56(2), 506–520.
- Zhang, Z. (2008). New exact traveling wave solutions for the nonlinear Klein-Gordon equation. *Turkish Journal of Physics*, 32(5), 235–240.

Anexos

Anexo A. Resultados y ajustes del decaimiento de ondas solitarias en CMC.

A.1 Ajustes de los decaimientos.

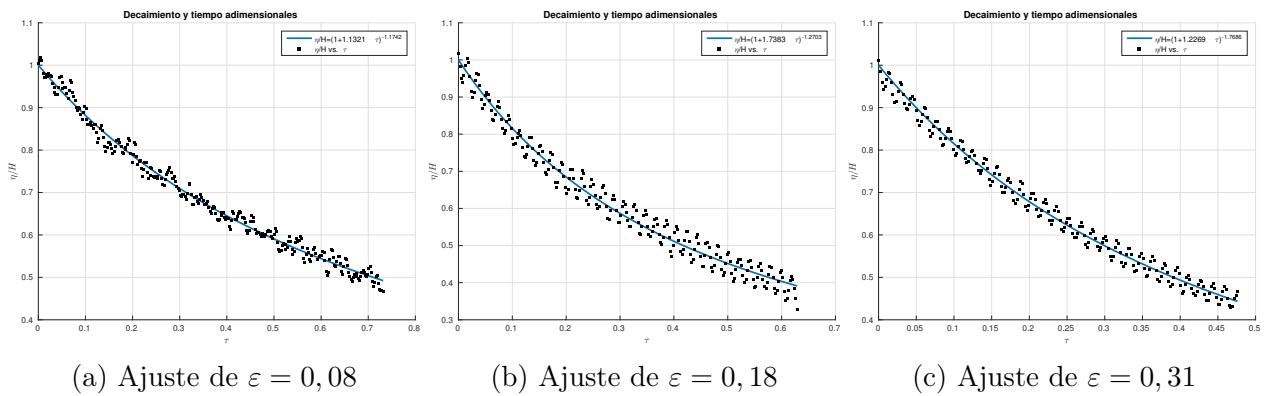


Figura A.1: Ajustes para $h = 0,02$ (m)

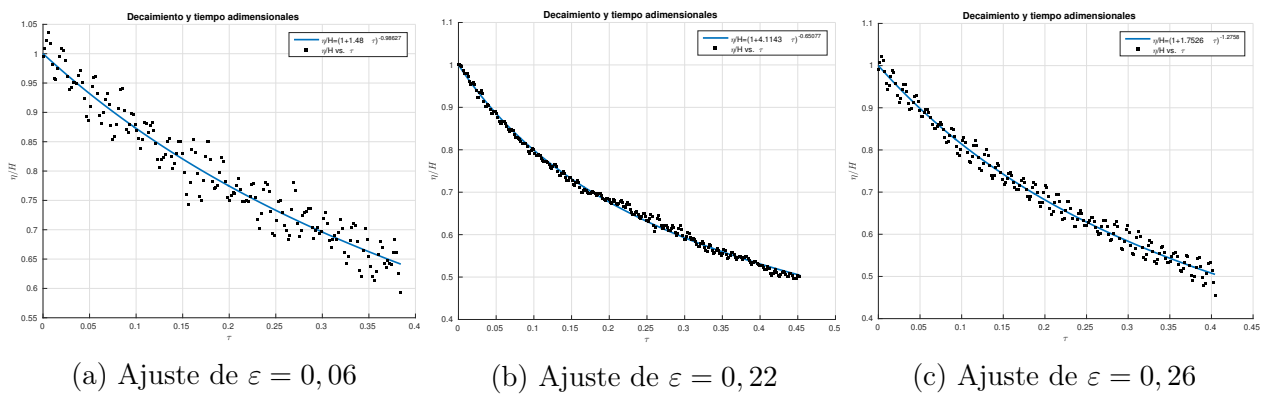
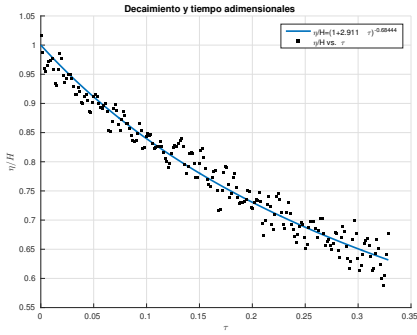
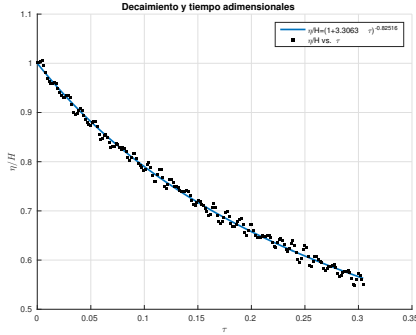


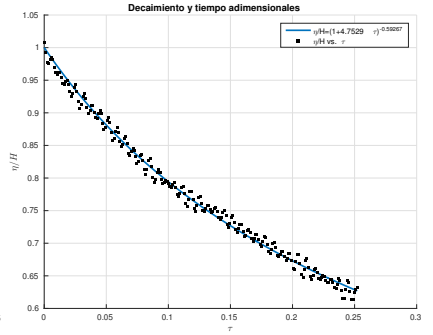
Figura A.2: Ajustes para $h = 0,025$ (m)



(a) Ajuste de $\varepsilon = 0,05$

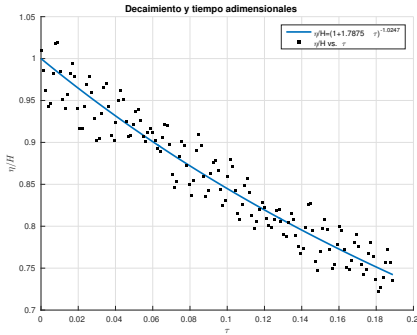


(b) Ajuste de $\varepsilon = 0,16$

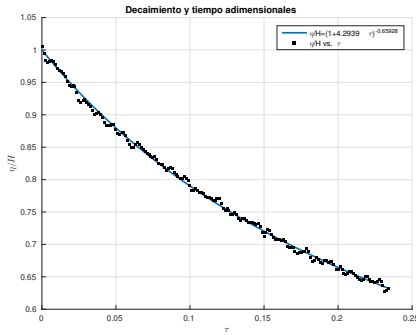


(c) Ajuste de $\varepsilon = 0,30$

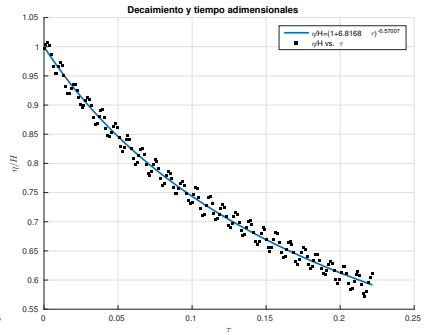
Figura A.3: Ajustes para $h = 0,03$ (m)



(a) Ajuste de $\varepsilon = 0,06$

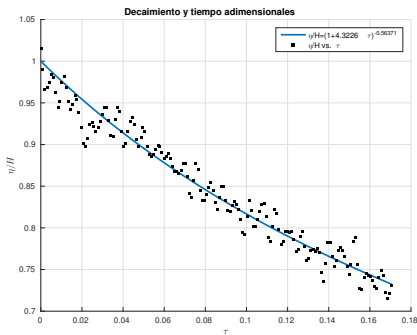


(b) Ajuste de $\varepsilon = 0,12$

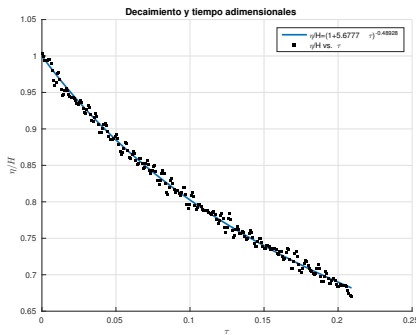


(c) Ajuste de $\varepsilon = 0,24$

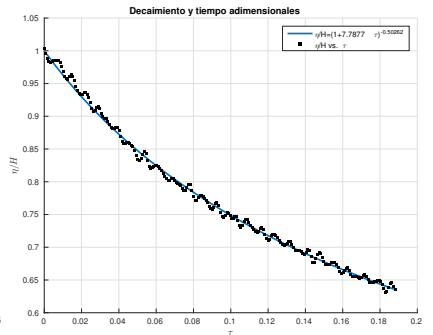
Figura A.4: Ajustes para $h = 0,035$ (m)



(a) Ajuste de $\varepsilon = 0,05$



(b) Ajuste de $\varepsilon = 0,13$



(c) Ajuste de $\varepsilon = 0,27$

Figura A.5: Ajustes para $h = 0,04$ (m)

Anexo B. Resultados cualitativos de velocimetría de imágenes de partículas.

B.1 Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. Agua a $h=0,02$ (m).

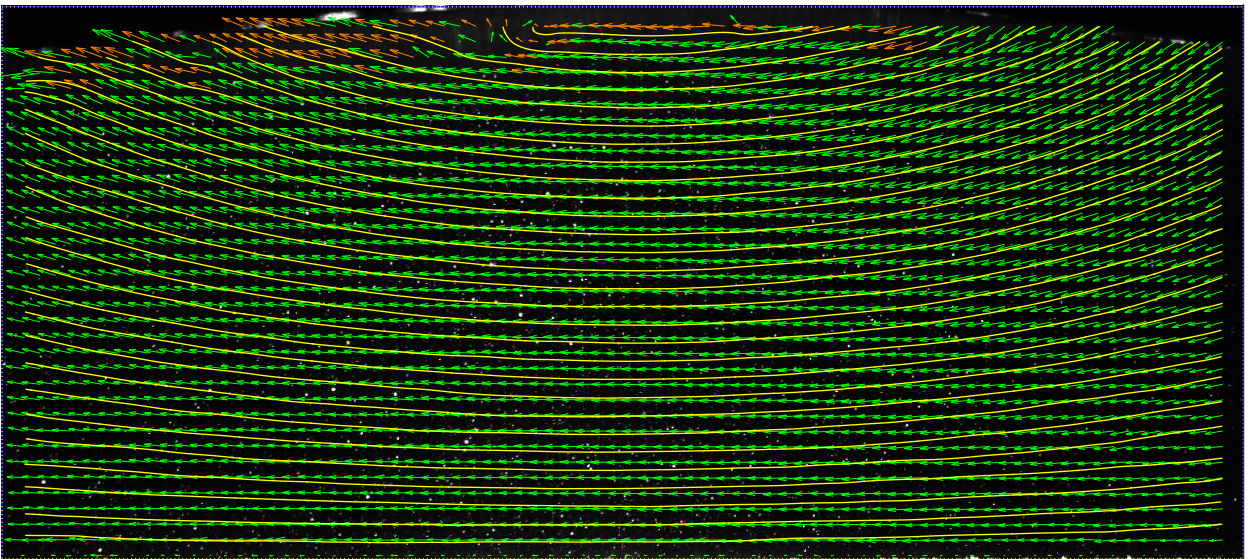


Figura B.1: Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.

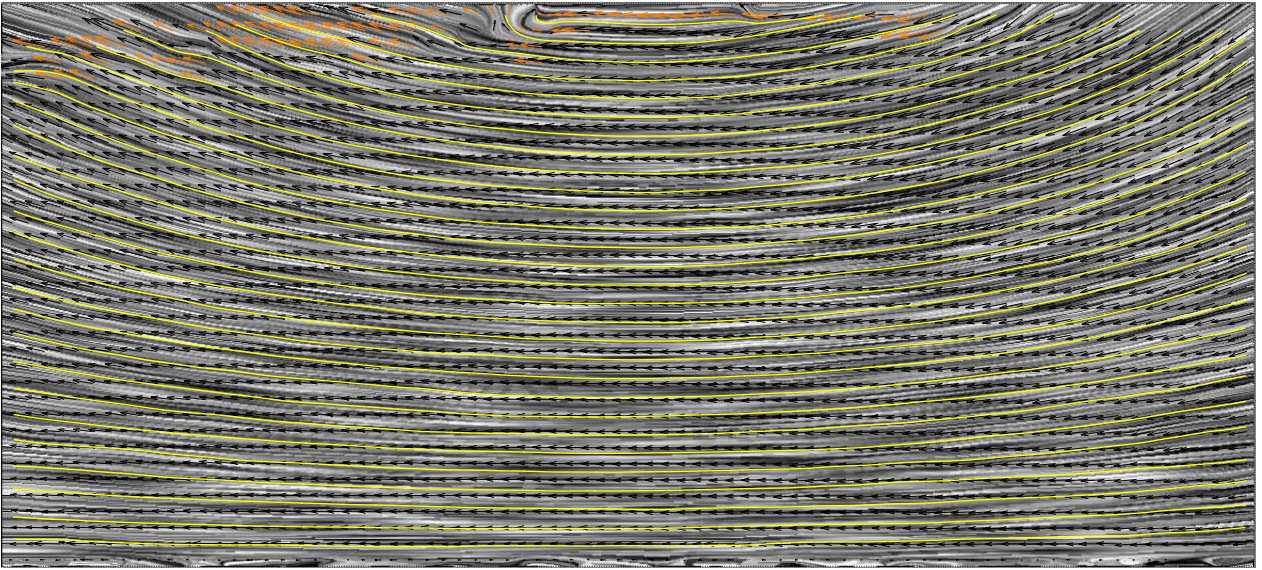


Figura B.2: Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.

B.2 Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. Agua a $h=0,04$ (m).

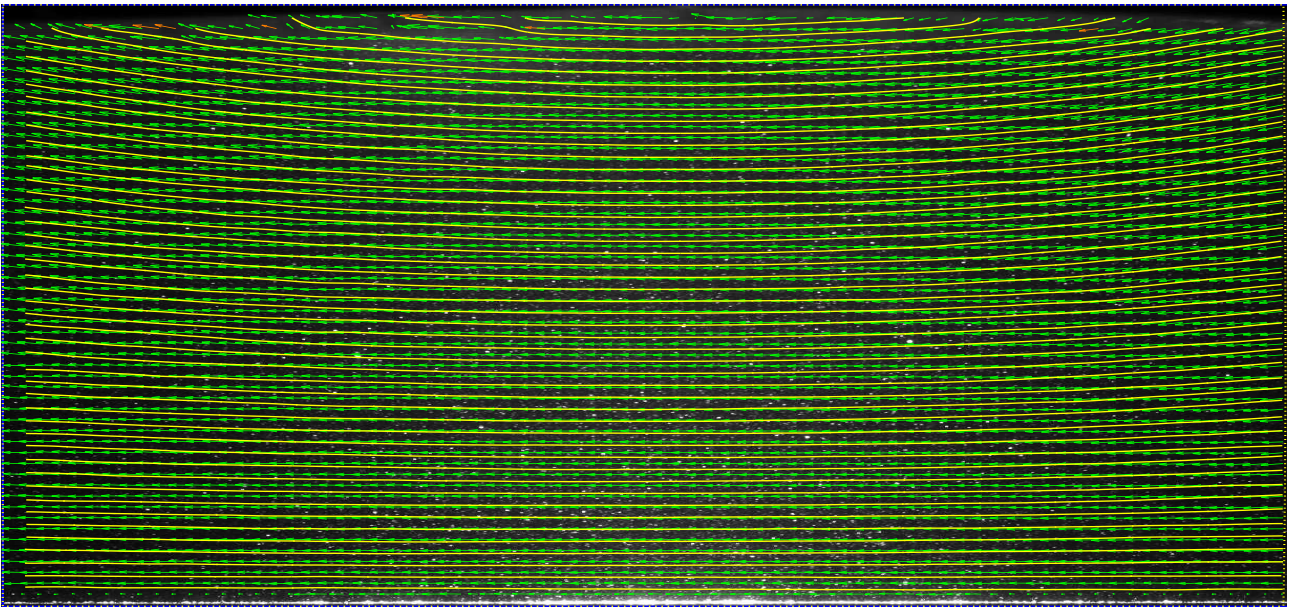


Figura B.3: Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.

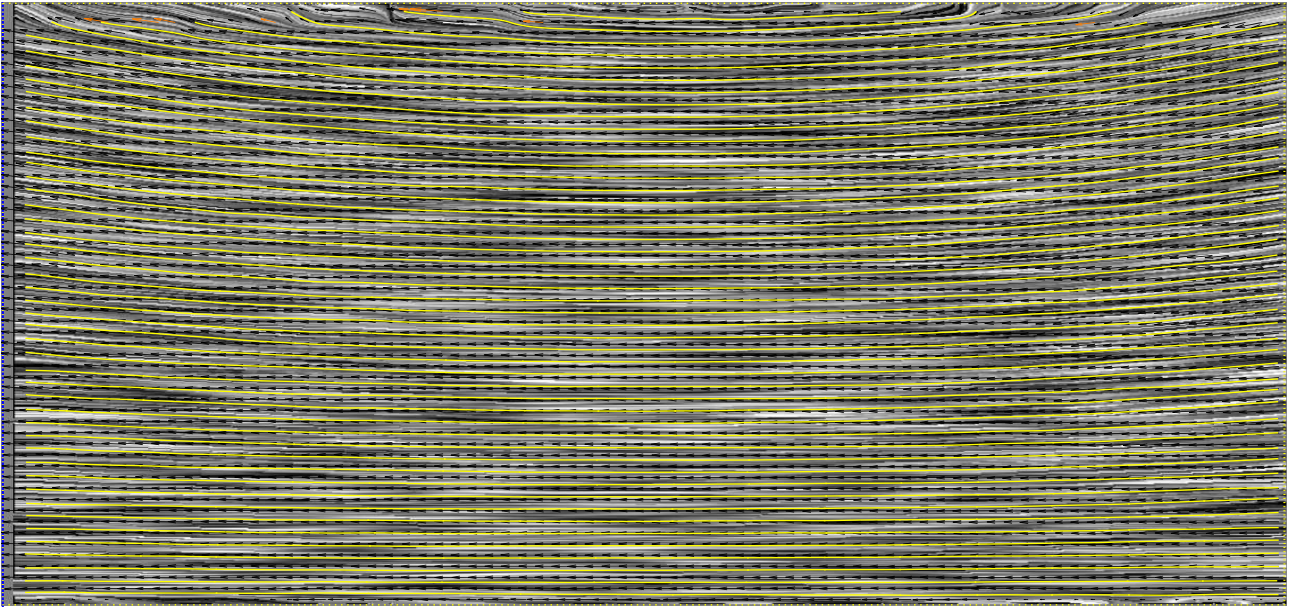


Figura B.4: Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.

B.3 Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. CMC a $h=0,02$ (m).

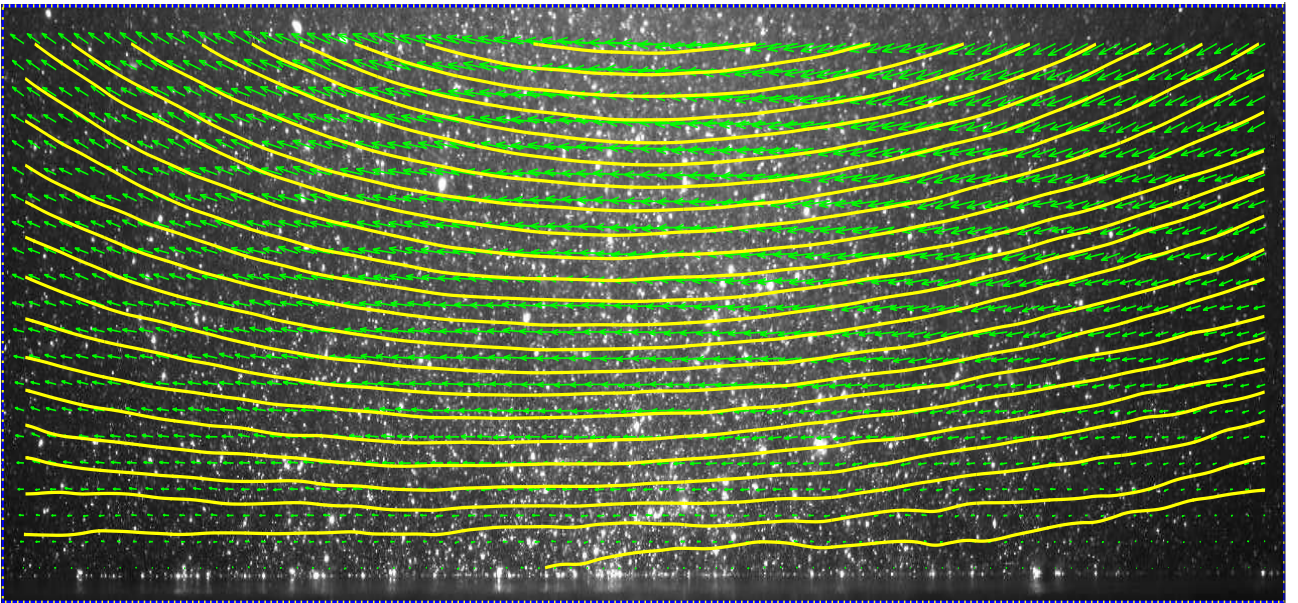


Figura B.5: Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.

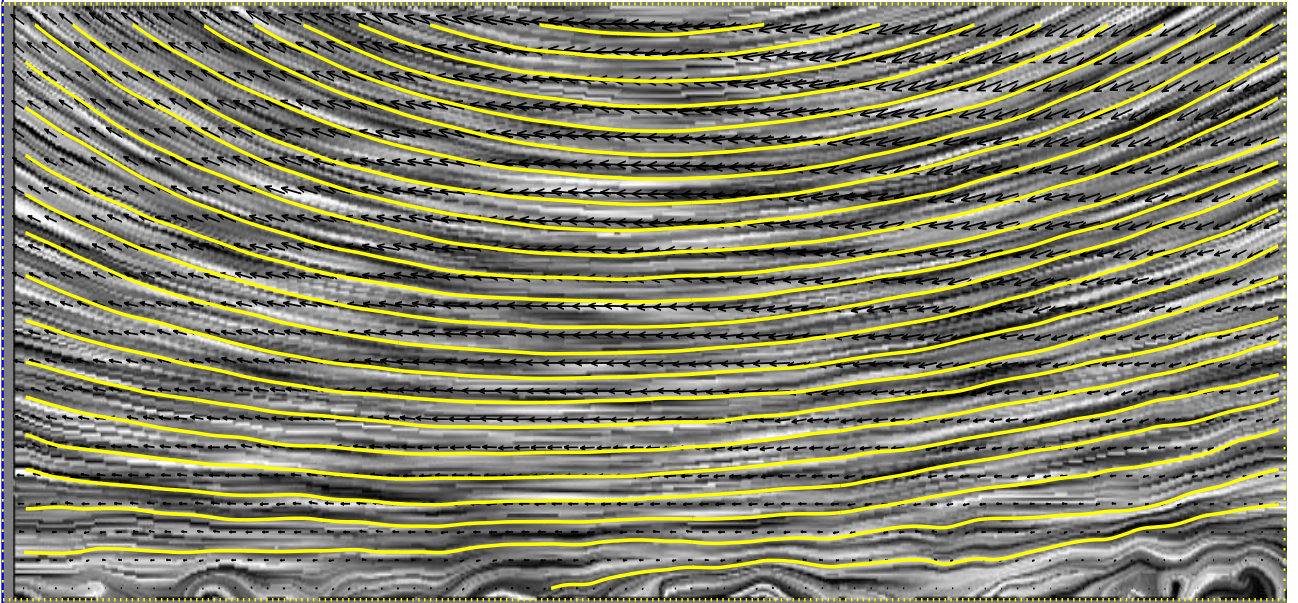


Figura B.6: Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.

B.4 Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea. CMC a $h=0,04$ (m).

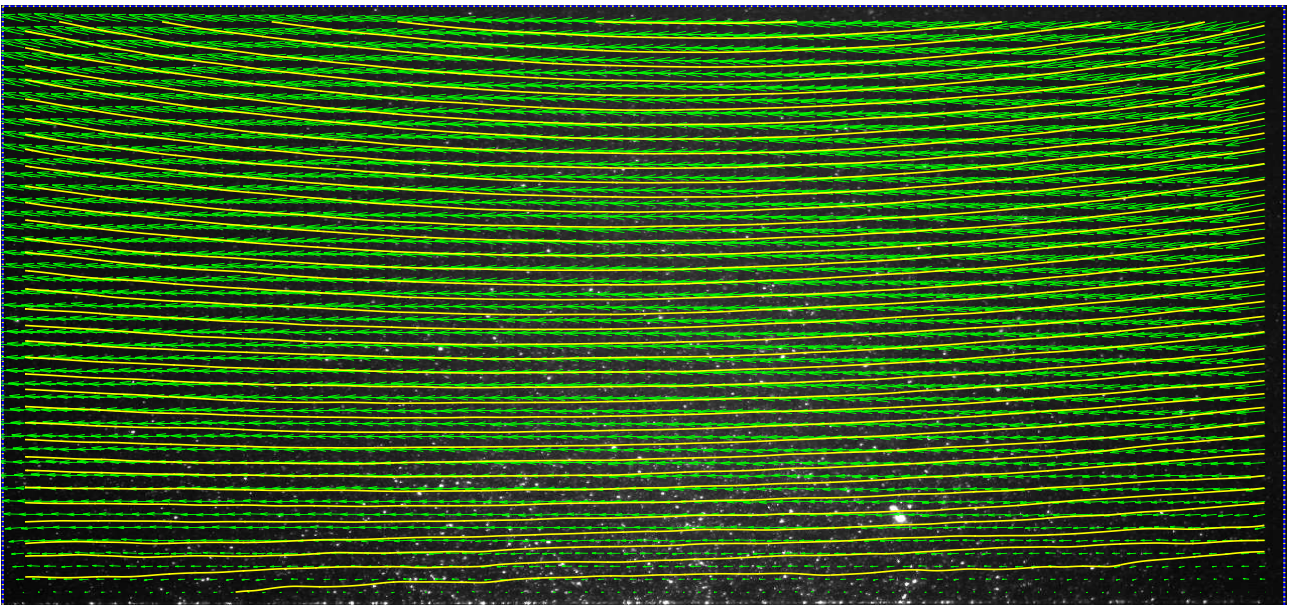


Figura B.7: Campo de velocidades y líneas de corriente bajo el peak de la onda.

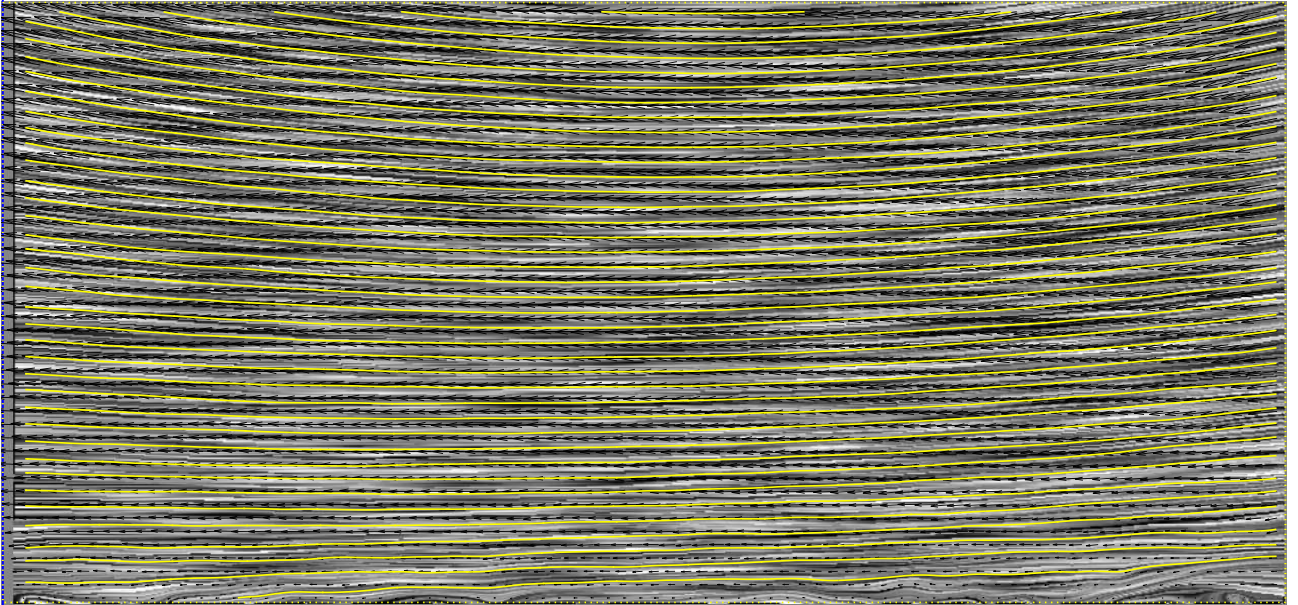


Figura B.8: Campo de velocidades, líneas de corriente y convolución integral de línea bajo el peak de la onda.

Anexo C. Distribuciones de velocidad, presión dinámica y tasa de deformación numéricas.

C.1 Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido newtoniano.

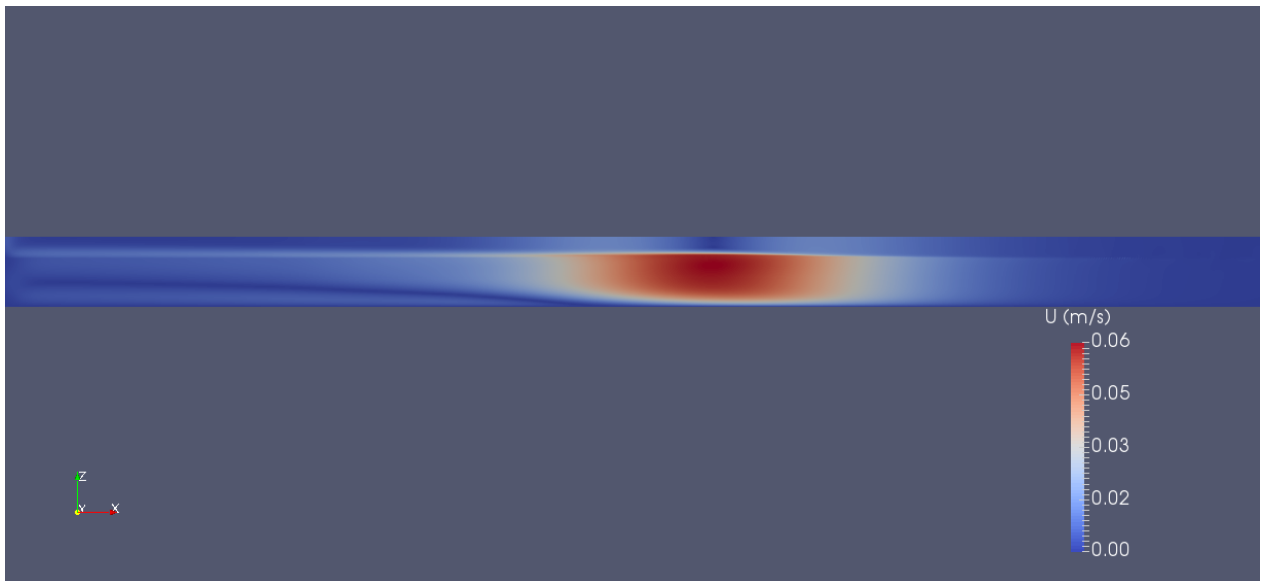


Figura C.1: Campo de velocidades numéricas para el fluido newtoniano.

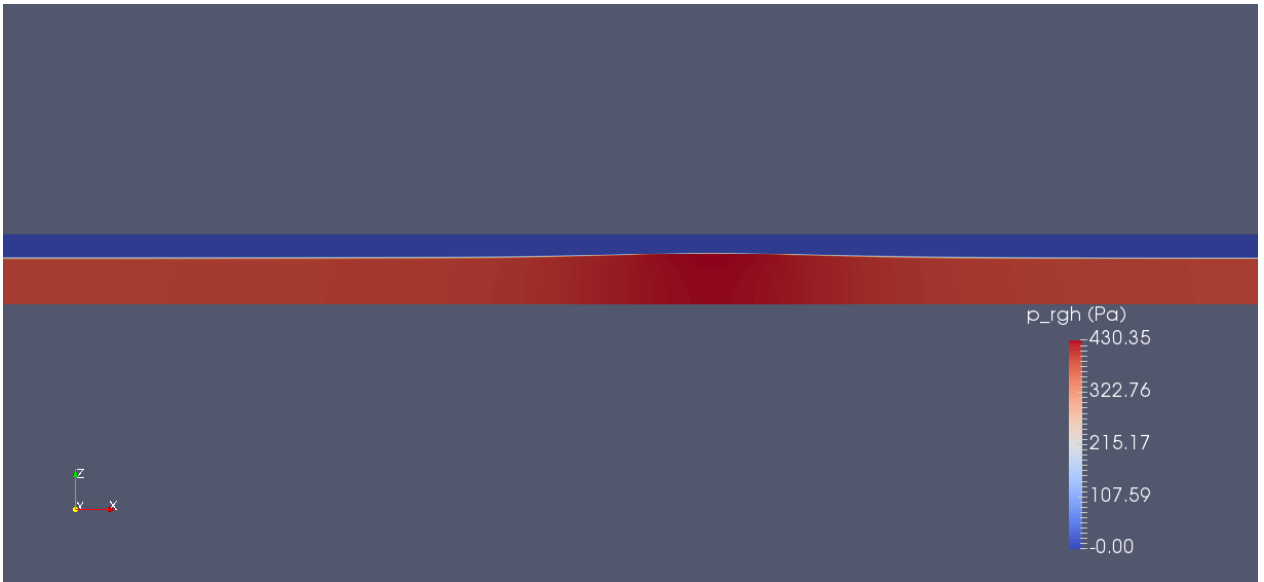


Figura C.2: Distribución de presión dinámica numérica para el fluido newtoniano.



Figura C.3: Tasa de deformación numérica para el fluido newtoniano.

C.2 Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,8$.

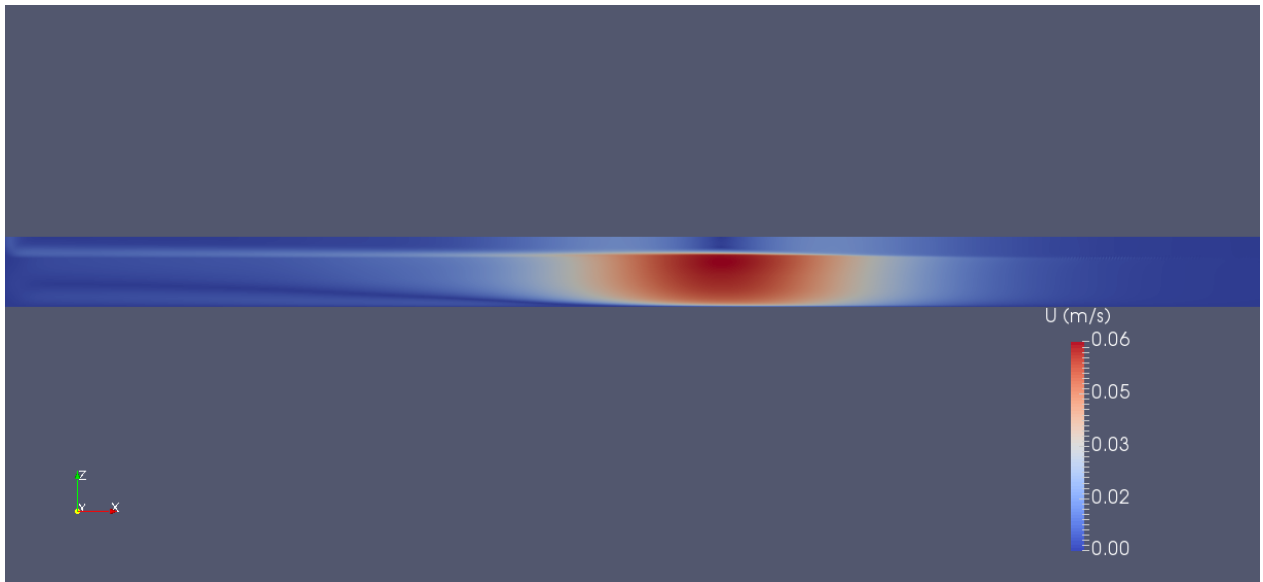


Figura C.4: Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$.

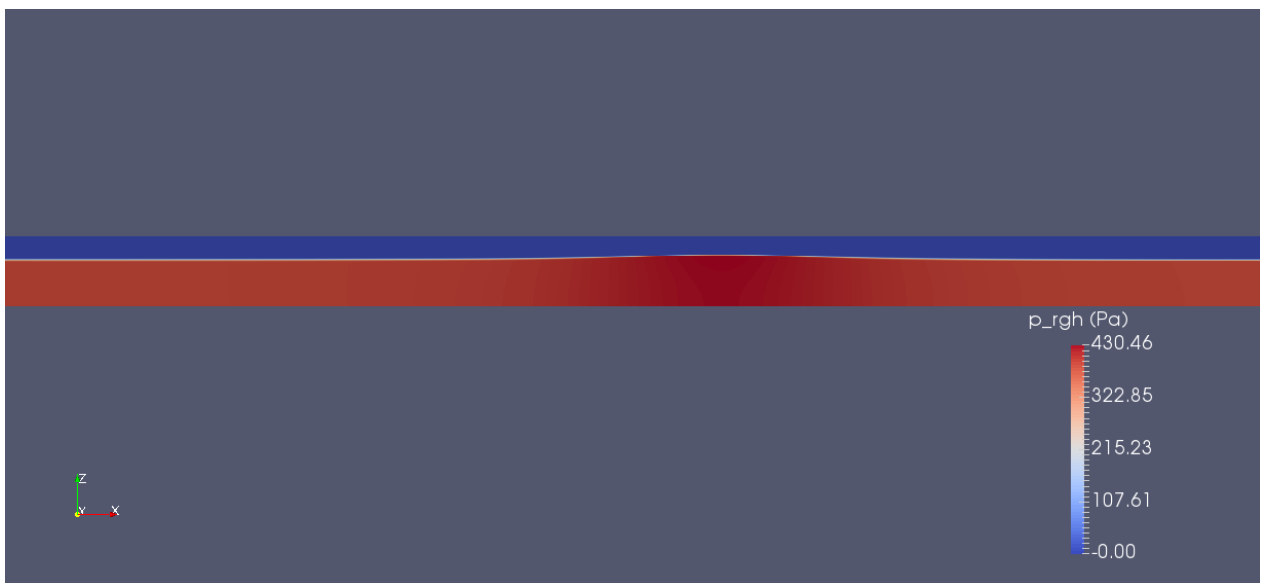


Figura C.5: Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$.



Figura C.6: Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,8$.

C.3 Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,6$.

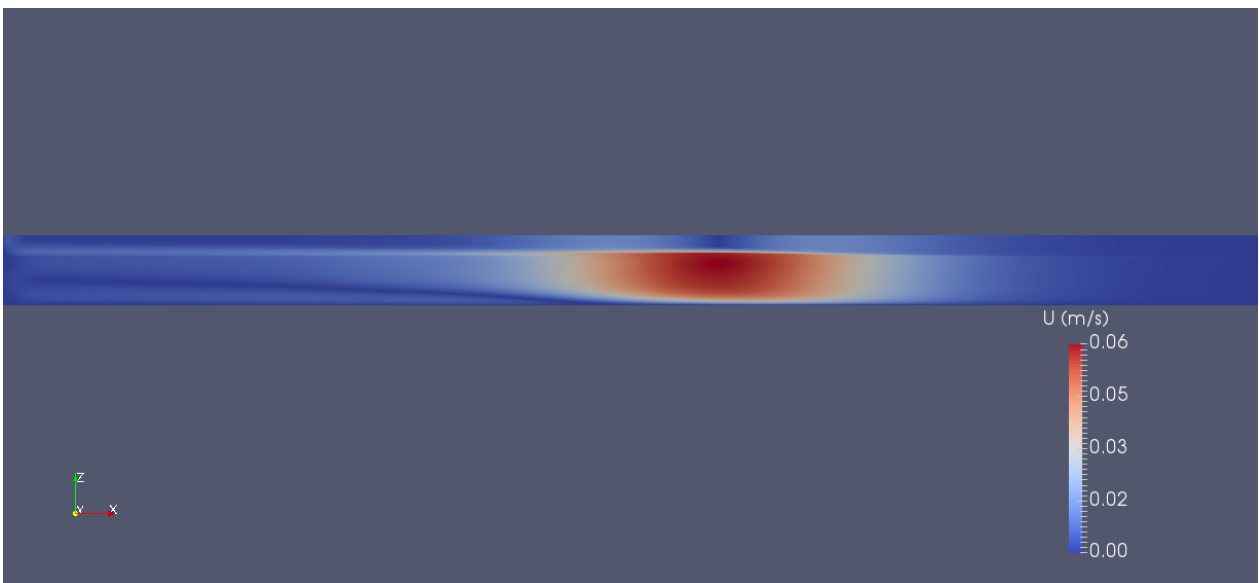


Figura C.7: Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$.

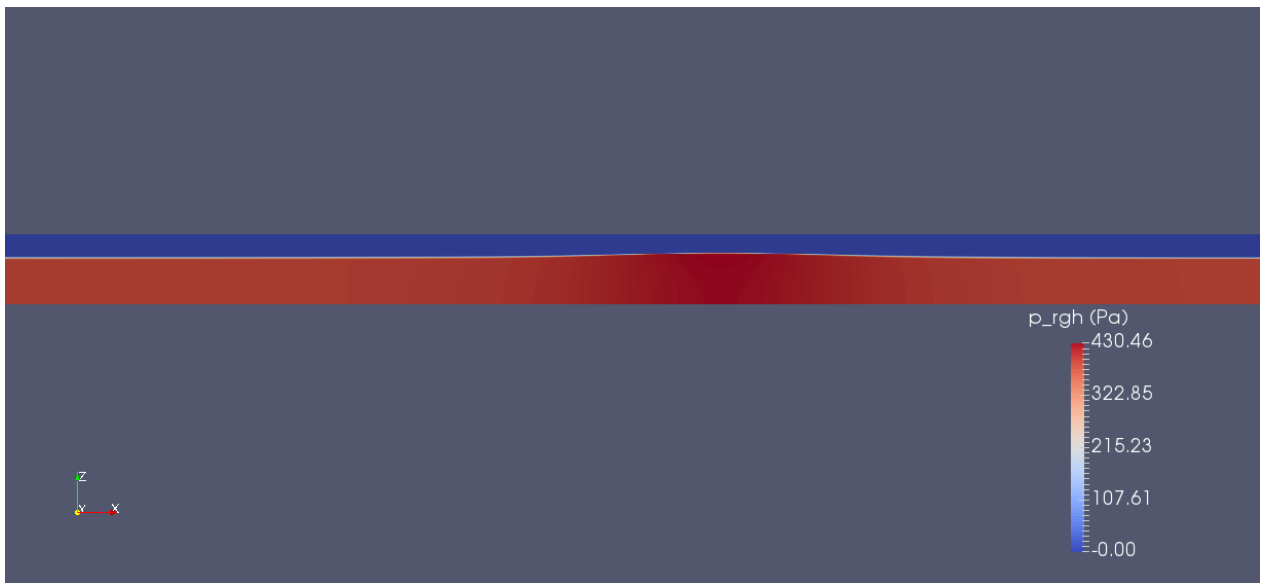


Figura C.8: Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$.



Figura C.9: Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,6$.

C.4 Distribuciones velocidad, presión dinámica y tasa de deformación para un fluido pseudoplástico con $n=0,4$.

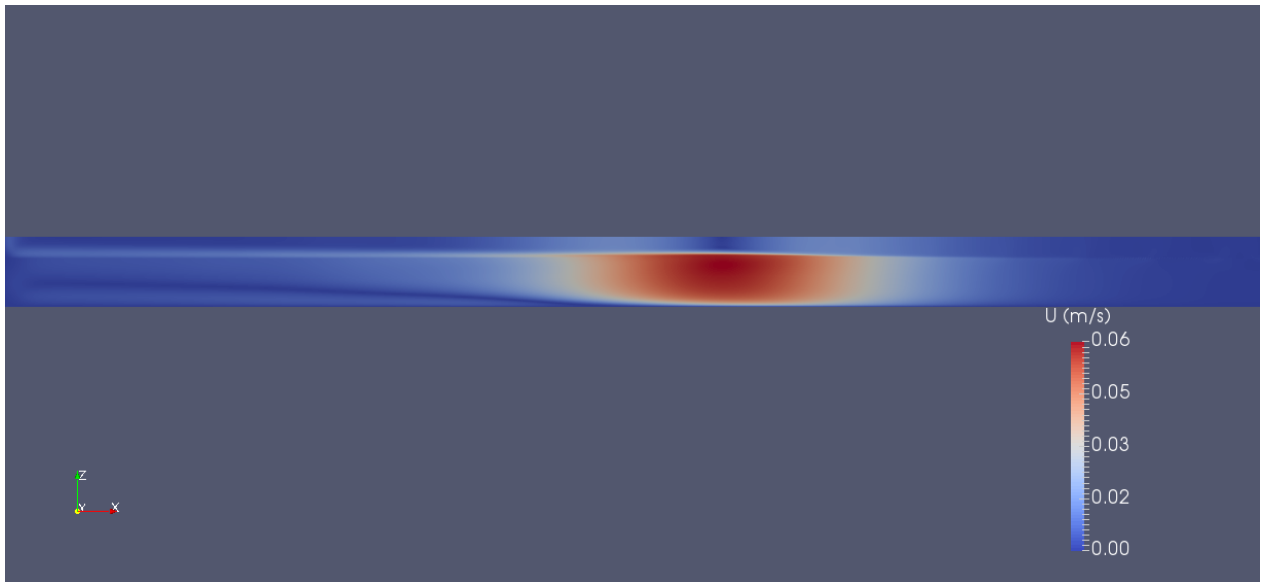


Figura C.10: Campo de velocidades numéricas para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$.

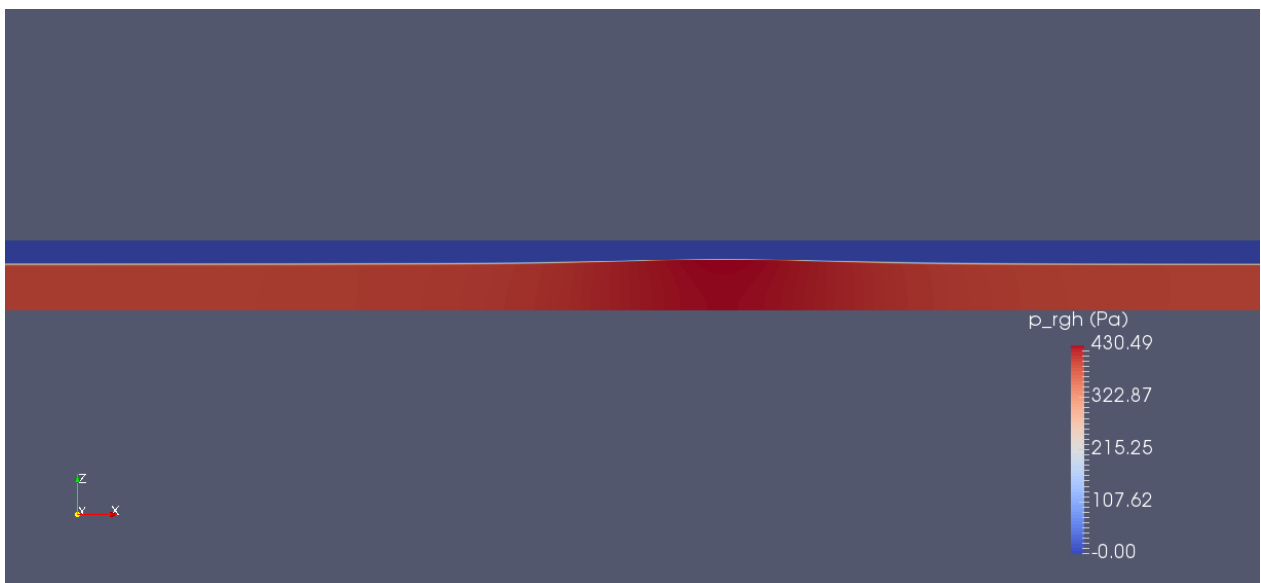


Figura C.11: Distribución de presión dinámica numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$.



Figura C.12: Tasa de deformación numérica para el modelo pseudoplástico con $n=0,4$.

Anexo D. Propagación de errores.

La varianza de cualquier función diferenciable $f(\mathbf{x})$ con respecto a \mathbf{x} está dada por su aproximación de primer orden en series de Taylor en función de las variables independientes \mathbf{x} la cual resulta

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \quad (\text{D.1})$$

Donde σ_f^2 es la varianza de la función que se quiere determinar y σ_{x_i} el error de cada variable de la función f . La varianza de cada variable independiente se estima repitiendo cada medición 5 veces, con lo que se calcula la desviación estándar de este valor. Esta fórmula se utiliza para calcular el error experimental de las variables adimensionales definidas en el capítulo de resultados.

Error de la amplitud adimensional

$$\sigma_{\frac{H}{h}} = \left(\frac{\sigma_H^2}{h^2} + \frac{\sigma_h^2 H^2}{h^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.2})$$

Error del Froude

$$\sigma_{\frac{c}{\sqrt{gh}}} = \left(\frac{\sigma_c^2}{gh} + \frac{\sigma_h^2 c^2}{4gh^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.3})$$

Error de μ

$$\sigma_{kh} = \left(\sigma_h^2 k^2 + \sigma_k^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.4})$$

Error de $\sqrt{\mu R}$

$$\sigma_{\sqrt{\mu R}} = \left(\sigma_\mu^2 \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\sqrt{\mu R}} \right)^2 + \sigma_R^2 \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu R}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.5})$$

Error de $\sqrt{\mu R}^{-1}$

$$\sigma_{\sqrt{\mu R}} = \left(\sigma_{\mu}^2 \frac{1}{4} \left(\frac{R}{(\mu R)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 + \sigma_R^2 \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{(\mu R)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.6})$$