



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS PARA LA ESTIMACIÓN GEOESTADÍSTICA  
DE RECUPERACIÓN METALÚRGICA DE COBRE**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MINERÍA**

**FERNANDO ALEXANDER VARGAS DIAZ**

**PROFESOR GUÍA:  
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
NADIA MERY GUERRERO  
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA  
SEBASTIÁN HURTADO LAGOS**

**SANTIAGO DE CHILE  
2018**

## RESUMEN

Hoy en día existe una creciente necesidad de incorporar modelos geometalúrgicos como una parte integral del proceso minero debido a su impacto en la toma de decisiones en planificación minera, procesamiento mineral y evaluación económica.

Este trabajo aplica una serie de metodologías para la estimación de recuperación metalúrgica de cobre, describiendo para cada una de ellas: las ideas que lo soportan, los supuestos que asume y los que obvia. Finalmente se cuantifica su desempeño, con el fin de dilucidar las fortalezas y debilidades de cada método, para tratar de concluir que metodología aplicada es la mejor para el caso de estudio.

El trabajo se realiza con una base de datos de un pórfido de cobre molibdeno ubicado en Chile, que cuenta con datos de recuperación de cobre; variables continuas como: ley de cobre total y cobre soluble; y variables categóricas como: litología, alteración y zona mineral.

Las metodologías empleadas para la estimación corresponden a kriging, a cosimulación, y a simulación en función de unidades geológicas, las cuales también son simuladas. Las problemáticas a enfrentar en este estudio guardan relación con el carácter no aditivo de la variable de interés, un fuerte muestreo heterotópico y a distintos soportes, además de tener una relación multivariable compleja con atributos geológicos como leyes, litología, alteración, etc.

Para comparar el desempeño de las metodologías, se utiliza jackknife a un tercio de los datos disponibles de recuperación. De las metodologías empleadas en el estudio, la que mejor resultados obtiene corresponde a la simulación de la variable en función de unidades geológicas. Los resultados utilizando kriging y simulación de la variable en el dominio completo muestran resultados equiparables. Las estimaciones indican un pobre desempeño en todas las metodologías al tratar de reproducir los valores más extremos de los datos, esto en parte a la baja cantidad de datos disponibles. Para tratar de paliar el muestreo heterotópico se realizó cosimulación con ley de cobre, aprovechando la gran cantidad de datos de ésta, pero como era previsible, los resultados no arrojan mejora debido a la pobre correlación entre las variables.

Se concluye que a pesar del mayor gasto computacional y trabajo, la estimación de recuperación de cobre mediante simulación por unidades geológicas es lo óptimo. Esto cuando se disponen de pocos datos y la variable tiene un fuerte control de tipo litológico, mineral o alteración, que conlleva a contactos duros entre ellos. También es importante destacar, que utilizando esta metodología el resultado supondría una estimación preliminar, o un precedente, debido a la alta variabilidad y escasos de datos que presenta la recuperación de cobre en este caso de estudio.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero partir este agradecimiento a mi familia. Gracias por el amor y apoyo incondicional que me han dado a lo largo de mi vida. Padres, hermanos, tíos y abuelos gracias por estar siempre presentes, en los buenos y malos momentos. Gracias por creer siempre en mí, motivarme a ser cada día un poco mejor, y a esforzarme por conseguir mis metas, los quiero mucho!

Creo que agradecer a mi profesor guía, sería poco, creo que esta tesis fue realizada en gran parte gracias a toda la ayuda que usted me brindó. Gracias por sus consejos, su paciencia y sus conversaciones, me honra haber sido alumno suyo. Un gran abrazo profesor Xavier.

También aprovecho de agradecer a mis profesores co-guías: Alejandro Cáceres, Nadia Mery y Sebastián Hurtado por darse el tiempo de aportar con ideas, datos y correcciones para poder llevar a cabo este trabajo de la mejor manera, muchas gracias!!

Por último quisiera agradecer, por la confianza, apoyo y financiamiento recibido para concebir esta tesis a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT), a través del proyecto Fondecyt 1170101; al centro de investigación Advanced Mining Technology Center (AMTC) de la Universidad de Chile; y al Departamento de Ingeniería de Minas de la Universidad de Chile.

## TABLA DE CONTENIDO

1	Introducción.....	1
2	Objetivos y alcances .....	3
2.1	Objetivo general .....	3
2.2	Objetivos específicos.....	3
2.3	Alcances.....	3
3	Revisión bibliográfica .....	4
3.1	Conceptos básicos de geoestadística .....	4
3.1.1	Función aleatoria .....	4
3.1.2	Variograma .....	5
3.2	Métodos de estimación local .....	8
3.2.1	Kriging.....	8
3.2.2	Cokriging.....	9
3.3	Métodos de simulación.....	10
3.3.1	Modelo multigaussiano .....	10
3.3.2	Modelo Plurigaussiano.....	13
3.4	Validación.....	14
3.4.1	Validación estimaciones .....	14
3.4.2	Validación simulaciones.....	17
3.5	Problemas al estimar o simular variables geometalúrgicas.....	17
3.5.1	Variables no aditivas.....	17
3.5.2	Complejas relaciones multivariadas.....	17
3.5.3	Muestreo heterotópico .....	18
3.6	Pruebas de flotación.....	18
4	Metodología.....	19
5	Caso de estudio .....	20
5.1	Estudio exploratorio de datos .....	20
5.1.1	Presentación de los datos.....	20
5.1.2	Ajustes en los datos.....	23
5.1.3	Estadística descriptiva .....	27

5.1.4	Estudio de deriva .....	34
5.1.5	Estudio de contacto entre unidades.....	36
6	Modelos de Estimación y simulación.....	41
6.1	Kriging de la recuperación de cobre .....	41
6.1.1	Estudio variográfico .....	41
6.1.2	Elección del plan kriging .....	43
6.1.3	Resultados.....	43
6.2	Simulación de la recuperación metalúrgica de cobre .....	45
6.2.1	Transformación y validación de datos.....	46
6.2.2	Variograma .....	47
6.2.3	Resultados.....	48
6.3	Cosimulación de recuperación de cobre y ley de cobre total .....	50
6.3.1	Transformación y validación de los datos .....	50
6.3.2	Variograma .....	51
6.3.3	Resultados.....	52
6.4	Simulación recuperación de cobre por unidad geológica .....	56
6.4.1	Simulación de la recuperación de cobre en UGs conocidas.....	56
6.4.2	Simulación plurigaussiana de unidades geológicas (UG) .....	62
7	Discusion y conclusiones .....	71
7.1	Acerca del estudio exploratorio de datos.....	71
7.2	Acerca de los modelos .....	72
7.3	Comparación de los resultados .....	73
8	Bibliografía .....	76
9	Anexos .....	77
9.1	Gráficos de derivas .....	77

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 Variograma pepítico, tomado de Emery 2011. ....	6
Ilustración 2 Variograma esférico, tomado de Emery 2011. ....	6
Ilustración 3 Variograma exponencial, tomado de Emery 2011.....	7
Ilustración 4 Variograma gaussiano, tomado de Emery 2011. ....	7
Ilustración 5 Ejemplo anamorfosis gaussiana y su efecto en la distribución de los datos. .....	11
Ilustración 6 Nube de correlación diferida para distancias pequeñas (izquierda) y para distancias grandes (derecha) .....	12
Ilustración 7 Nube correlación entre valores estimados por kriging ( $Z^*$ ) y valores reales ( $z$ ) .....	15
Ilustración 8 Ejemplo de histograma de errores estandarizados para una variable estimada. Como se aprecia en este grafico existen valores que escapan del rango aceptable.....	16
Ilustración 9 Ejemplo de nube de correlación entre los valores estimados y el error. ..	16
Ilustración 10 Mapas de ubicación de los datos de cobre total (CuT). Arriba a la izquierda vista perfil este-oeste; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica.....	20
Ilustración 11 Mapas de ubicación de los datos de recuperación de cobre (ReCu). Arriba a la izquierda vista perfil este-oeste; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica. ....	22
Ilustración 12 Histogramas y estadística descriptiva de ley de cobre total. Arriba: compósito de 9 metros; abajo: compósito de 3 metros. ....	23
Ilustración 13 Gráfico de probabilidad Recuperación de cobre (ReCu).....	24
Ilustración 14 Histograma recuperacion de cobre. Flecha indica donde se realiza ajuste al vacío. ....	25
Ilustración 15 Media desagrupada de CuT (rojo), CuS (azul) y ReCu (negro). ....	26
Ilustración 16 Vista perfil norte-sur indicando el peso de los datos en el desagrupamiento.....	27
Ilustración 17 Histograma ReCu (datos desagrupados y con tratamiento de outliers).	28
Ilustración 18 Nube correlación CuT v/s CuS. ....	29
Ilustración 19 Nube correlación ReCu v/s CuT.....	29
Ilustración 20 Nube correlación ReCu v/s CuS.....	30
Ilustración 21 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de alteración (Arg: Argílica; CL: Clorítica; K: Potásica, QS: Cuarzo sericita).....	31

Ilustración 22 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de zona mineral (Hy: Hipógeno; SuCc: Supérgeno calcosina; SuCv: Supérgeno covelina; Tran: Transicional) .....	31
Ilustración 23 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de litología (BXH: Brecha hidrotermal; BXI: Brecha intrusiva; Ptar: Pórfido tardío; Ptem: Pórfido temprano; RC: Roca caja) .....	31
Ilustración 24 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de unidad geológica (UG)...	32
Ilustración 25 Gráfico de probabilidad normal ReCu según tipo de UG. ....	33
Ilustración 26 Nube de correlación entre recuperación de cobre y razón de solubilidad para las UG4 y UG5, además de la totalidad de los datos. ....	34
Ilustración 27 Gráficos de derivas de ReCu. Izquierda: en función de la cota; derecha: deriva este - oeste. ....	35
Ilustración 28 Gráficos de derivas leyes de CuT (azul) y CuS (rojo). Izquierda: en función de la cota; derecha: deriva este - oeste. ....	35
Ilustración 29 Correlogramas de recuperación de cobre para distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3. ....	37
Ilustración 30 Gráficos de recuperación media de cobre entren el contacto entre distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3. ....	38
Ilustración 31 Correlogramas de ley de cobre para distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3. ....	38
Ilustración 32 Gráficos de ley media entren el contacto entre distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3. ....	39
Ilustración 33 Variogramas de ReCu plano horizontal direcciones NS (color rojo), N30E (color amarillo), N60E (color celeste) N90E (color verde) N120 (color azul) N150 (color negro). ....	41
Ilustración 34 Variograma experimental y modelado de recuperación de cobre (ReCu) .....	42
Ilustración 35 Nube de correlación entre los valores reales y los estimados.....	44
Ilustración 36 Nube correlacion entre los valores estimados y el error estandarizado. ....	45
Ilustración 37 Histograma errores estandarizados. ....	45
Ilustración 38 Histogramas de los datos de recuperación de cobre (ReCu). A la izquierda los datos originales; a la derecha los datos transformados.....	46

Ilustración 39 Nubes correlación diferida de los valores transformados de recuperacion de cobre (ReCu_nscore) para: 20 metros (arriba a la izquierda); 40 metros (arriba a la derecha); 80 metros (abajo a la izquierda); y 120 metros (abajo a la derecha).....	47
Ilustración 40 Variograma experimental y modelado de recuperación de cobre (ReCu) .....	48
Ilustración 41 Nube de correlación entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados.....	49
Ilustración 42 Nube de correlación entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados (jackknife)...	49
Ilustración 43 Histograma de errores estandarizados (jackknife). .....	50
Ilustración 44 Histograma de ReCu e histograma de la variable transformada ReCu $N(0,1)$ . .....	51
Ilustración 45 Variogramas directos y cruzados experimentales y modelados de recuperación de cobre (ReCu) y ley de cobre total (Cu). .....	52
Ilustración 46 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores cosimulados (jackknife). .....	53
Ilustración 47 Nube de correlación para recuperacion de cobre (ReCu) entre el promedio simple de los valores cosimulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los cosimulados (jackknife). .....	54
Ilustración 48 Histograma de errores estandarizados de cobre recuperado (jackknife). .....	54
Ilustración 49 Nube de correlación para ley de cobre (Cu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores cosimulados (jackknife). .....	55
Ilustración 50 Nube de correlación para ley de cobre (Cu) entre el promedio simple de los valores cosimulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los cosimulados (jackknife). .....	55
Ilustración 51 Histograma de errores estandarizados de ley de cobre (Cu) (jackknife). .....	56
Ilustración 52 Comparación de histograma ReCu e histograma de la variable transformada ReCu $N(0,1)$ , para los datos de la UG1.....	57
Ilustración 53 Nube correlación diferida de los valores transformados de recuperación de cobre, correspondientes a la UG1 para: 20 metros (izquierda); y 180 metros (derecha). .....	58
Ilustración 54 Variogramas experimentales y modelados de la recuperación de cobre (ReCu) para las distintas UGs, donde ReCu1, ReCu2 y ReCu3 corresponden a la ReCu en UG1, UG2 y UG3 respectivamente. ....	59



Ilustración 55 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados por UG conocidas (jackknife).....	60
Ilustración 56 Nube de correlación para recuperación de cobre por UGs conocidas, entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados (jackknife). .....	61
Ilustración 57 Histograma errores estandarizados de recuperacion de cobre por UGs conocidas (valor real). .....	61
Ilustración 58 Variogramas modelados de funciones aleatorias gaussianas.....	64
Ilustración 59 Mapas de ubicación de los datos de unidades geológicas (UG). Arriba a la izquierda vista perfil este-oeste; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica.....	65
Ilustración 60 Vista perfil en este = 360m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.....	66
Ilustración 61 Vista perfil en este = 480m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.....	67
Ilustración 62 Vista perfil en este = 600m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.....	68
Ilustración 63 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados por UG, cuando la UG es simulada. ....	69
Ilustración 64 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados. ....	70
Ilustración 65 Histograma de los errores estandarizados de recuperación de cobre por UG, cuando ésta es simulada.....	70
Ilustración 66 Gráficos de derivas de estimación de ReCu (%) mediante kriging.....	77
Ilustración 67 Gráficos de derivas de simulación de ReCu (%). ....	78
Ilustración 68 Gráficos de derivas de cosimulación de ReCu (%). ....	79
Ilustración 69 Gráficos de derivas de ReCu (%) mediante simulación por UGs reales.	80
Ilustración 70 Gráficos de derivas de ReCu (%) mediante simulación por UGs simuladas. ....	81

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Resumen ajuste datos aberrantes.....	24
Tabla 2 Estadística descriptiva CuT. Izquierda: datos sin desagrupar; derecha: datos desagrupados.....	26
Tabla 3 Estadística descriptiva ReCu, Cut y Cus (datos desagrupados y con tratamiento de outliers).....	28
Tabla 4 Coeficiente de correlación entre recuperacion de cobre y solubilidad.....	34
Tabla 5 Parámetros variograma experimental.....	42
Tabla 6 Ajuste variograma.....	42
Tabla 7 Comparación distintos planes de kriging para recuperación de cobre (ReCu)	43
Tabla 8 Ajuste variograma.....	47
Tabla 9 Estadística 50 simulaciones. ....	48
Tabla 10 Ajuste variogramas directos y cruzados .....	51
Tabla 11 Estadística 50 simulaciones, para recuperación y cobre total. ....	52
Tabla 12 Parámetros variograma experimental.....	58
Tabla 13 Ajuste variografico para las recuperaciones de cobre según su UG. ....	59
Tabla 14 Estadística 50 simulaciones, para recuperación de cobre según UG.....	60
Tabla 15 Parámetros para variograma experimental funciones aleatorias gaussianas. ....	63
Tabla 16 Ajuste variografico para las funciones gaussianas. ....	63
Tabla 17 Proporciones por UGs. ....	64
Tabla 18 Parámetros simulación plurigaussiana. ....	65
Tabla 19 Estadística 50 simulaciones, para recuperación de cobre según UG simulada. ....	69
Tabla 20 Resumen comparativo distintos metodologías. ....	74

# 1 INTRODUCCIÓN

La evaluación y planificación de proyectos mineros consideran, dentro de varios otros aspectos, la geología, la minería, la metalurgia y el medio ambiente.

Los atributos correspondientes a la geología comúnmente se estiman espacialmente mediante métodos geoestadísticos, para que luego la planificación entregue escenarios económicos posibles considerando los atributos anteriormente evaluados, además de procesos mineros como secuenciamiento de minado, procesos, etc. Una optimización en la aplicación de los conceptos anteriores permite generar un mayor beneficio económico al proyecto.

El conocer la variabilidad espacial de atributos claves, en este caso la recuperación metalúrgica, permite mejorar el uso de recursos minerales, lo cual retroalimenta la planificación generando un mayor rédito económico. Dado lo anterior es de importancia la inclusión de modelos geometalúrgicos que sirvan como complementos a los modelos de recursos.

La recuperación metalúrgica de cobre es una variable crítica en la evaluación y explotación de sulfuros en un contexto de extracción, ya que el beneficio económico neto es dependiente de esta variable. Por lo anterior, generar un modelo de estimación de la recuperación, que sea confiable es de gran importancia.

$$\text{Beneficio} = \text{Ton} \cdot \text{Ley} \cdot \text{Rec} \cdot (P - C_v) - C_m \cdot \text{Ton} - C_p \cdot \text{Ton}$$

donde Ton = tonelaje; Rec = recuperación; P = precio; C<sub>v</sub> = costo venta; C<sub>m</sub> = costo mina; C<sub>p</sub> = costo planta.

Para generar un modelo de estimación, se tiene la necesidad de una caracterización espacial local de la recuperación. Surge la pregunta de: ¿Cómo hacerlo?

Actualmente se discuten alternativas geoestadísticas como: kriging, simulación, cosimulación, recuperación en función de otras variables, entre otras.

Al evaluar la caracterización espacial de la recuperación de cobre surgen problemáticas prácticas que hay que trabajar. Dentro de éstas se encuentran:

- Variable no aditiva. Se dice que una variable regionalizada es aditiva cuando se cumple que el valor de la unión de varios dominios sea igual a la media de sus valores sobre cada uno de ellos.
- Muestreo heterotópico. En general se dispone de menos muestras de recuperación que de leyes de cobre total y variables geológicas.

- Relaciones multivariadas complejas. Diversas variables geológicas afectan la recuperación (arcillas, limonitas, óxidos, etc.).
- Distintas condiciones en tests de laboratorios (p80, aditivos, etc.).
- Problemas de soporte muestral, generalmente distinto a los otros atributos.

## **2 OBJETIVOS Y ALCANCES**

### **2.1 Objetivo general**

Comparar diferentes metodologías geoestadísticas para la estimación de recuperación de cobre, determinando aquella de mejor desempeño, es decir, aquel que estima de forma más certera el valor real.

### **2.2 Objetivos específicos**

Para poder realizar el objetivo general se requiere lograr los siguientes objetivos específicos:

- Conocer el estado de arte de la forma de realizar estimación de variables geometalúrgicas comprendiendo cuáles son los actuales desafíos y problemáticas que enfrenta.
- Estimar recuperación mediante distintas metodologías geoestadísticas.
- Cuantificar el desempeño de la estimación.
- Plantear condiciones para la elección de la metodología óptima.

### **2.3 Alcances**

La elección del método óptimo para la estimación de la recuperación es aplicada a un caso particular de estudio, correspondiente a un pórfido de cobre molibdeno. Los datos que se cuentan para el trabajo corresponden a:

- Variable geometalúrgica: recuperación metalúrgica de cobre.
- Variables continuas: leyes de cobre total (CuT), cobre soluble (CuS).
- Variables categóricas: litología, alteración y zona mineral.

### 3 REVISION BIBLIOGRÁFICA

Lo expuesto en este capítulo son conceptos citados de Deutsch & Journel (1988), Armstrong et al. (2011), Chilés & Delfilner (2012) y Emery (2012, 2013), con la excepción del último punto (3.5), donde las referencias son oportunamente citadas.

#### 3.1 Conceptos básicos de geoestadística

Se puede definir la geoestadística como el estudio de variables regionalizadas, que se entienden como: fenómenos con variabilidad en el espacio (geográfico, temporal u otros más abstractos). Para entender y modelar la variabilidad espacial, la geoestadística ofrece una gama de herramientas determinísticas y probabilísticas.

Dentro de los objetivos en la geoestadística está la caracterización de un valor  $\mathbf{z}$  en un sitio del espacio como una realización de una variable aleatoria (VA)  $\mathbf{Z}$ . Esta VA puede tomar una variedad de valores en función de una distribución de probabilidad. Para poder determinar el valor  $\mathbf{z}$  desconocido se asume que la distribución de probabilidad de  $\mathbf{Z}$  es dependiente de su ubicación, por lo que se denota  $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{x}$  es un vector de coordenadas.

##### 3.1.1 Función aleatoria

Una función aleatoria (FA) es un conjunto de VA definidas sobre un dominio  $\mathbf{D}$  (zona de estudio). En adelante se denota como  $Z = \{Z(x):x \text{ pertenece a } D\}$ . También la FA es caracterizada por una distribución, conocida como distribución espacial, que reúne todas sus funciones de distribución finito dimensionales, de la forma:

$$F(x_1, \dots, x_k; z_1, \dots, z_k) = \text{Prob}\{Z(x_1) \leq z_1, \dots, Z(x_k) \leq z_k\}$$

para todo conjunto de sitios  $x_1, \dots, x_k$  y de umbrales  $z_1, \dots, z_k$ .

Se asumen hipótesis simplificadoras para determinar la distribución espacial:

1. Estacionaridad: la distribución es invariante por traslación en el espacio.
2. Ergodicidad: se puede aproximar las esperanzas por promedios en el espacio.

También existen parámetros sintéticos que resumen la distribución espacial de la FA, conocidos como momentos:

1. Esperanza: representa la media en la que se distribuyen los valores de las distintas realizaciones.

$$E [Z(\mathbf{x})] = m(\mathbf{x})$$

2. Varianza: medida de dispersión de la VA en torno al valor medio (esperanza).

$$\text{var}[Z(\mathbf{x})] = E \{[Z(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x})]^2\}$$

3. Covarianza: medida de dispersión, de segundo orden, que relaciona dos variables aleatorias.

$$\text{cov}[Z(\mathbf{x}_1), Z(\mathbf{x}_2)] = E [Z(\mathbf{x}_1)Z(\mathbf{x}_2)] - m(\mathbf{x}_1)m(\mathbf{x}_2)$$

4. Variograma: mide la varianza de la diferencia entre dos VA.

$$\gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\text{var}[Z(\mathbf{x}_1) - Z(\mathbf{x}_2)]}{2}$$

### 3.1.2 Variograma

Los valores de una variable regionalizada son dependientes de los valores de los sitios vecinos. Esta característica sirve, en la estimación y simulación, para sacar provecho de la continuidad espacial de la variable regionalizada. Con el fin de medir la continuidad espacial de la variable regionalizada, se utiliza el variograma, que se define, para un caso de una FA estacionara, y un vector  $\mathbf{h}$  de separación como:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \text{var} \{Z(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})\} / 2$$

Para un caso multivariable, conocido como variograma cruzado entre dos FA (indexadas por "i" y "j", respectivamente), se define:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \text{cov} \{Z_i(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Z_i(\mathbf{x}), Z_j(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Z_j(\mathbf{x})\} / 2$$

Un estimador de la primera expresión viene dado por:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_i^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{x}_i) - z(\mathbf{x}_i + \mathbf{h})]^2$$

Donde  $\{x_i$  y  $x_i+h\}$  son los pares de puntos con datos separados por el vector  $\mathbf{h}$ , y  $N(\mathbf{h})$  es el número total de tales pares.

Debido al conocimiento parcial del fenómeno en estudio, en concreto al número finito de datos usualmente distribuidos en forma irregular en el espacio, se permiten tolerancias en el cálculo; sobre las direcciones y distancias. Los parámetros de cálculo de un variograma experimental son:

1. Dirección de interés: azimut e inclinación.
2. Distancia de interés: pasos y número de pasos.
3. Tolerancia en dirección: tolerancia angular, ancho de bandas.
4. Tolerancia en distancia.

Se hace necesario modelar el variograma experimental, debido a que este se calcula solamente para ciertas distancias y direcciones en el espacio, no cumple condiciones matemáticas de una función variograma, además de que los valores obtenidos son sensibles a los parámetros de cálculo. Para esto existen modelos elementales, que permiten realizar esta tarea. Los más utilizados son:

### 1. Efecto pepita

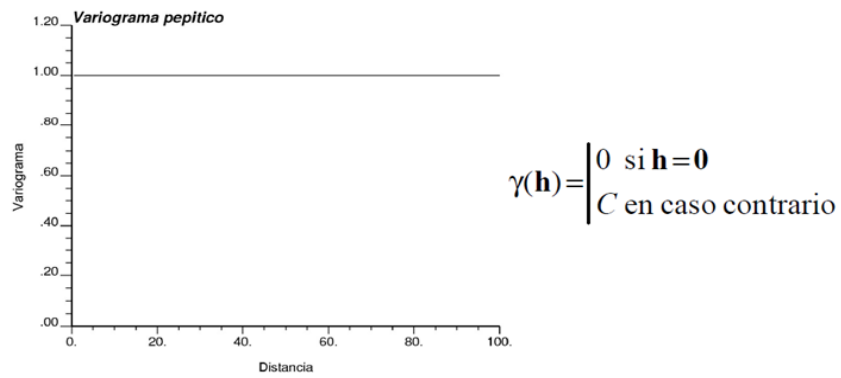


Ilustración 1 Variograma pepítico, tomado de Emery 2011.

### 2. Modelo esférico

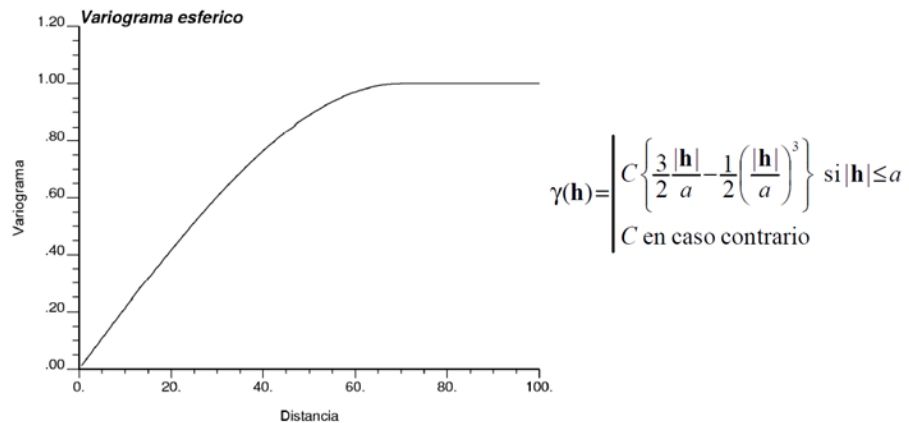


Ilustración 2 Variograma esférico, tomado de Emery 2011.



### 3. Modelo exponencial

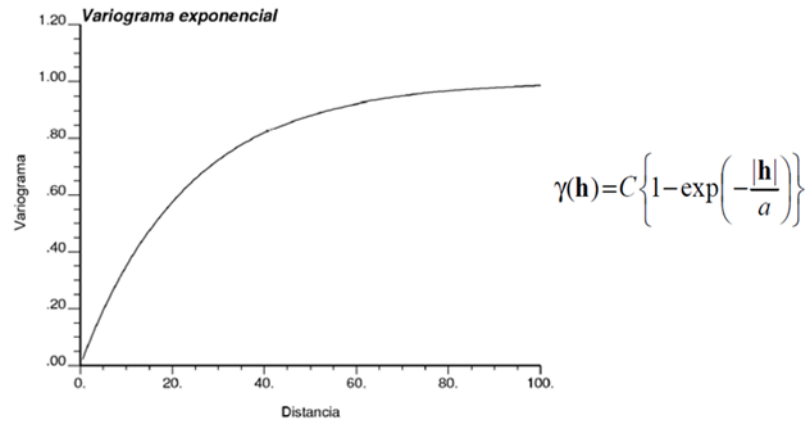


Ilustración 3 Variograma exponencial, tomado de Emery 2011.

### 4. Modelo gaussiano

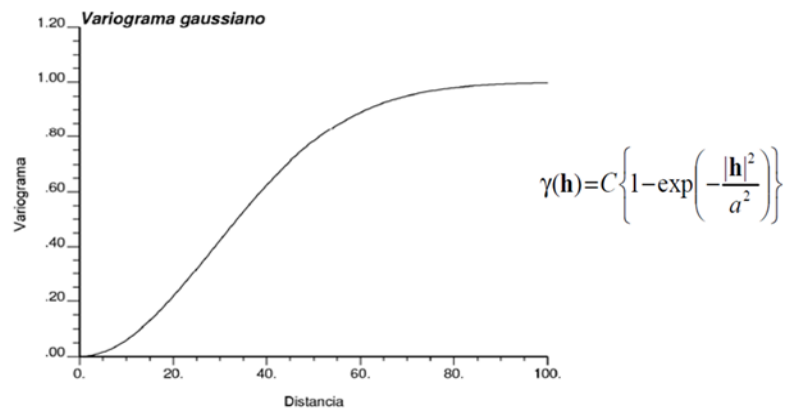


Ilustración 4 Variograma gaussiano, tomado de Emery 2011.

Por lo general es necesario más de un modelo elemental para poder representar el variograma experimental, lo que se conoce como variograma anidado, que se expresa:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \gamma_1(\mathbf{h}) + \gamma_2(\mathbf{h}) + \dots + \gamma_n(\mathbf{h})$$

donde cada termino corresponde a un modelo de variograma.

## 3.2 Métodos de estimación local

Existen varios métodos que pretenden predecir o estimar el valor de la variable regionalizada en un sitio del espacio utilizando los datos circundantes. Entre estas metodologías se encuentran el estimador del vecino más cercano, el inverso a la distancia y el kriging.

### 3.2.1 Kriging

El kriging es una técnica de estimación mediante regresión lineal que minimiza la varianza del error de estimación definida a partir de un modelo de variograma. El estimador debe cumplir con tres restricciones:

1. Linealidad: ser una combinación lineal ponderada de los datos.
2. Insesgo: la esperanza del error de estimación debe ser cero.
3. Optimalidad: minimizar la varianza del error.

Considera un valor por estimar  $z(\mathbf{x})$  en una vecindad con  $n$  valores conocidos  $z(\mathbf{x}_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Si se considera  $Z(\mathbf{x})$  como una función aleatoria estacionaria con una media conocida  $m$  y covarianza  $C(\mathbf{h})$ , se denota como kriging simple (KS) al estimador lineal:

$$Z^*(\mathbf{x}) = \alpha + \sum_i^n \lambda_i Z(\mathbf{x}_i)$$

donde el estimador encuentra solución resolviendo el sistema:

$$\alpha = \left\{ 1 - \sum_i^n \lambda_i \right\} m$$

$$\sum_j^n \lambda_j C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

Del kriging se puede estimar la varianza mínima del error en un sitio  $\mathbf{x}_i$ , conocido como varianza de kriging, mediante la forma (para kriging simple):

$$\sigma_{KS}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 - \sum_i^n \lambda_i C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x})$$

donde  $\sigma^2$  corresponde a  $C(\mathbf{0})$ .

Una variante de esta versión se conoce como kriging ordinario (KO), donde se supone que la media  $m$  es desconocida, lo que lleva a elegir ponderadores cuya suma sea igual a 1. Lo cual se logra introduciendo un multiplicador de Lagrange, que se denota como  $\mu$ . El estimador queda definido por el sistema:

$$\sum_j^n \lambda_j C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \mu = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$\sum_j^n \lambda_j = 1$$

La varianza de kriging ordinario toma la forma de:

$$\sigma_{KO}^2(\mathbf{x}) = \sum_i^N \lambda_i \gamma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) - \mu$$

Dentro de las propiedades del kriging se encuentra:

1. Interpolación exacta: la estimación en un sitio con dato es igual al valor del dato.
2. Suavizamiento: la variación de los valores estimados es menor a la real.
3. Insesgo: a nivel global es un estimador insesgado.

### 3.2.2 Cokriging

Es la extensión multivariable de la estimación por kriging. El Cokriging permite estimar la variable de interés a partir de la medición de ésta más otras variables secundarias, que se esperan correlacionadas con la variable de interés. Al igual que el kriging, esta estimación es una combinación lineal de ponderadores de los valores muestreados donde se minimiza la varianza de error y no tiene sesgo.

Para el caso donde las medias son conocidas, al igual que en el kriging, se puede estimar mediante cokriging simple, el estimador está dado por:

$$Z^*(\mathbf{x}) = \alpha + \sum_i^N \Lambda_i^T Z(\mathbf{x}_i)$$

donde  $\alpha$  es un vector de  $N \times 1$ , con  $N$  el número de variables, y  $\Lambda$  corresponde a matriz de  $N \times N$ , que son ponderadores del cokriging. El estimador queda definido al resolver el sistema:

$$\alpha = \left\{ 1 - \sum_i^N \Lambda_i^T \right\} m$$

$$\sum_j^N \sum_i^j \Lambda_i^T C(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

Para el caso de medias desconocidas, se agrega la restricción que la suma de los ponderadores sea igual a 1, lo cual se logra introduciendo multiplicadores de Lagrange. Esta forma se denomina cokriging ordinario.

### 3.3 Métodos de simulación

La simulación es un método estocástico que entrega alternativas equiprobables de realizaciones de la FA. Cada realización, también llamada imagen estocástica, refleja las propiedades del modelo  $Z(\mathbf{x})$  de FA. la principal ventaja con respecto a las estimaciones es que permite cuantificar la incertidumbre, mediante la realización de múltiples escenarios posibles.

Las simulaciones pueden clasificarse en no condicionales (a priori) y condicionales (a posteriori). Las no condicionales reproducen la distribución de la función aleatoria, sin tomar en cuenta los datos conocidos. En cambio las simulaciones condicionales reproducen las distribuciones locales dependientes de los datos conocidos.

En la práctica se utilizan a menudo -dentro de varios otros métodos- el modelo multigaussiano para variables continuas y el modelo plurigaussiano para variables categóricas.

#### 3.3.1 Modelo multigaussiano

Este modelo se utiliza para simular variables continuas, como son las leyes de elementos de interés (cobre total y cobre soluble) y variables geometalúrgicas como

porcentaje de recuperación mineral, dureza de rocas, entre otras. Considera que la FA es estacionaria en su dominio y tiene distribuciones finito-dimensionales multigaussiana. Para eso se requiere en una primera etapa la transformación de los datos originales, desagrupados, a una distribución gaussiana estándar, mediante una función denominada anamorfosis gaussiana. La ventaja de este modelo es que la distribución multigaussiana queda caracterizada por sus dos primeros momentos (media y covarianza o variograma). Los pasos resumidos para realizar esta simulación son:

1. Desagrupamiento de los datos: esto con el fin de obtener una distribución representativa, reduciendo la importancia de muestreos preferentes.
2. Anamorfosis gaussiana: transformación de los datos originales a valores gaussianos estándar, es decir: que tengan una media 0 y varianza 1. Esto en la práctica se realiza mediante una función conocida como anamorfosis gaussiana (ilustración 5).

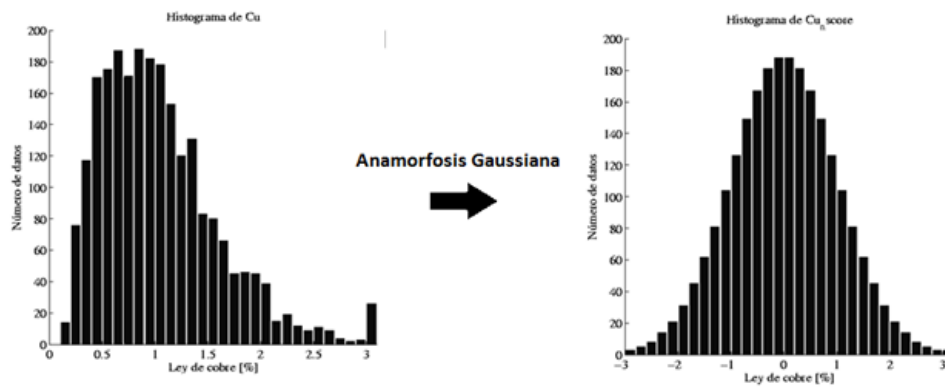


Ilustración 5 Ejemplo anamorfosis gaussiana y su efecto en la distribución de los datos.

3. Verificación hipótesis multigaussiana: este paso tiene la finalidad de corroborar que la variable transformada del modelo cumple con condición de multigaussianidad. En la práctica solo se comprueba que cumpla con una distribución bigaussiana, es decir, solo se examinan distribuciones que involucran a lo más a dos sitios a la vez. Esto es comprobable, mediante test gráficos como el examen de nubes de correlación diferida:

Para distancias mayores, estas nubes deben graficarse de una forma circular, y para distancias pequeñas esta forma debe ser elíptica (ilustración 6).

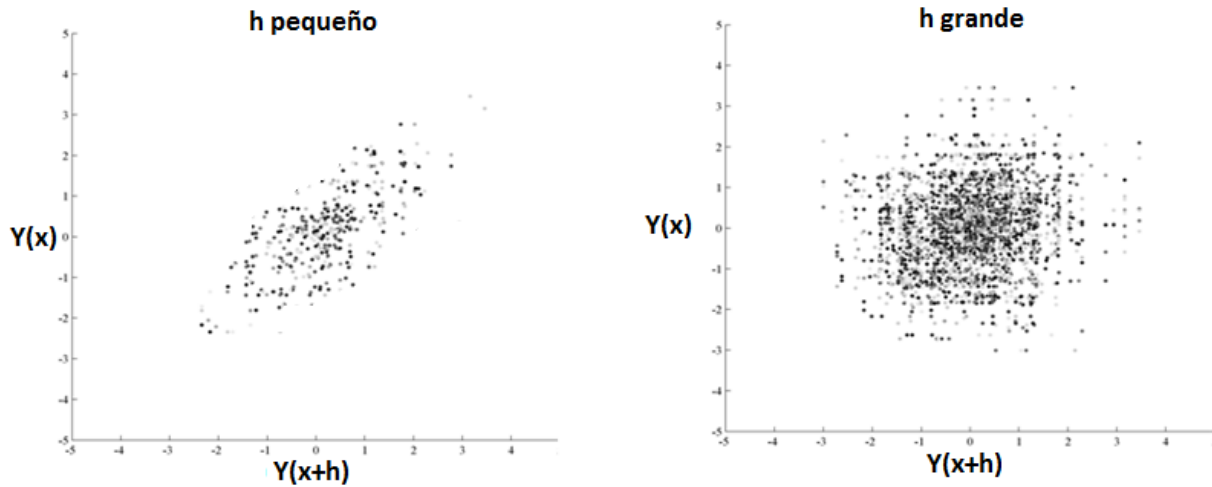


Ilustración 6 Nube de correlación diferida para distancias pequeñas (izquierda) y para distancias grandes (derecha)

4. Modelamiento consistente en variograma de la variable transformada gaussiana: Esto se realiza a través de un estudio variográfico, consistente en la obtención de un variograma empírico de los datos para luego modelarlo en función de variogramas teóricos.

5. Simulación: se elige un algoritmo de simulación por ejemplo, el algoritmo secuencial o el de banda rotantes, luego se construyen varias realizaciones condicionadas a los datos. El condicionamiento se realiza mediante una etapa basada en kriging (simple, si la media se supone conocida, y ordinario, si se flexibiliza el modelo y se supone la media desconocida).

6. Transformación inversa, se transforma la variable gaussiana a la variable original mediante el uso de la anamorfosis inversa.

Para el caso multivariable, se realiza la anamorfosis para cada variable a cosimular, luego se realiza la variografía conjunta de las variables transformadas (cálculo y modelamiento de variogramas directos y cruzados), y se utiliza cokriging en vez de kriging en el algoritmo de condicionamiento.

### 3.3.1.1 Método secuencial

Como lo indica su nombre este algoritmo simula los valores en los sitios de interés a partir de los datos previamente simulados (en secuencia). Esto quiere decir que en

cada etapa se simula la función aleatoria en un sitio y se agrega este valor simulado a los datos condicionantes para los siguientes sitios. La ventaja de este algoritmo es que produce simulaciones condicionales directamente. Por otra parte tiene la desventaja que el sistema de kriging se vuelve cada vez más complejo a medida que avanza la simulación. Para paliar este defecto se usa una vecindad móvil.

El sistema queda descrito por:

$$Y(x) = Y^{KS}(x_i) + \sigma_{KS}(x_i)U_i$$

donde,  $Y^{KS}$  y  $\sigma_{KS}$  es kriging simple y su desviación estándar; y  $U_i$  es una variable gaussiana estándar, es decir de media 0 y desviación estándar 1.

### 3.3.1.2 Bandas rotantes

La idea del método es reducir la simulación de un espacio de varias dimensiones a una simulación unidimensional, mediante la realización de estas simulaciones en rectas a lo largo del espacio total e implicando que la suma de éstas como la simulación. La gracia de este algoritmo es que reduce el tiempo de cálculo y reproduce la covarianza o el variograma de la función aleatoria a simular con exactitud. El algoritmo toma la forma:

$$Y(x_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i^N Y_i^{(1)} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle)$$

donde  $u_i$  vectores direcciones en el espacio  $R^3$ ,  $Y_i^{(1)}$  simulación independientes unidimensionales; y  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle$  es el producto escalar.

### 3.3.2 Modelo plurigaussiano

Se emplea para simular variables categóricas sobre la base de la truncación de varias funciones aleatorias multigaussianas, considerando relaciones de contacto entre los dominios categóricos a simular. Su principal ventaja en relación a otros modelos utilizados para simular variables categóricas, como el modelo gaussiano truncado, radica en la posibilidad de trabajar con un número elevado de dominios geológicos, además de poder reproducir escenarios no regulares.

La definición de la truncación puede considerar varios umbrales, de la forma:

$$l_j < Y_i(x) \leq u_i \Leftrightarrow \text{Unidad cat\u00e9gorica "i"}$$

Donde  $l_j$  define el umbral de truncación inferior, y  $u_i$  el superior, los cuales definen los límites de pertenencia para la unidad categórica. Estas categorías pueden corresponder a unidades geológicas tales como litología y alteración; unidades geomecánicas tales como zonas de peligro y fallas; unidades minerales tales como zonas de lastre y mineral; etc.

Los pasos para realizar esta simulación son:

1. Determinación unidades a simular del modelo. Esto es establecer el número y tipo de unidades a estimar, con sus relaciones y tipos de contacto. Esta parte está ligada al estudio exploratorio de datos y al correcto entendimiento de lo que se quiere y debe simular.
2. Definir regla de truncación, en función del contacto entre las unidades y su jerarquía. Al simular variables como litología, es conveniente seguir un orden cronológico.
3. Establecer las proporciones de cada unidad con respecto al total e indicar los umbrales de truncación. Para determinar estos umbrales, generalmente se utilizan las proporciones del total de muestras desagrupadas que se disponen.
4. Modelamiento de la covarianza para las funciones aleatorias gaussianas, a partir de la información categórica (variogramas de indicadores).
5. Simular las funciones gaussianas en los sitios de muestreo condicionado por los datos categóricos codificados. Esta etapa se realiza mediante un algoritmo iterativo conocido como muestreador de Gibbs.
6. Simular las funciones gaussianas en el resto del dominio condicionadas a los valores obtenidos en el punto 5, utilizando algoritmos de simulación multigaussiano como el método secuencial o bandas rotantes.
7. Aplicar la truncación de las simulaciones condicionales, para la obtención de las unidades categóricas simuladas.

### **3.4 Validación**

#### **3.4.1 Validación estimaciones**

En la práctica se requiere cuantificar el desempeño de las estimaciones, de medir la capacidad que tiene para reproducir los valores reales. Existen dos técnicas ampliamente usadas, que corresponden a validación cruzada y Jackknife.



La validación cruzada consiste en sustraer un dato del total de la muestra, y estimarlo con el resto de data, así sucesivamente para el total de los datos, siempre reponiendo el dato sustraído anteriormente.

El Jackknife consiste en extraer una cantidad del total de muestras, y estimar o simular esos valores en función del resto de la muestra, para poder cuantificar el desempeño de esta.

Los resultados del Jackknife y validación cruzada son presentados mediante test gráficos, donde se observa:

1. Nube de correlación diferida entre los valores medidos  $\{z(x_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$  y los valores estimados o simulados  $\{z^*(x_\alpha), \alpha = 1, \dots, n\}$ . Lo ideal es que en este test los valores se acerquen a la diagonal, u en otras palabras que el coeficiente de correlación tienda a 1.

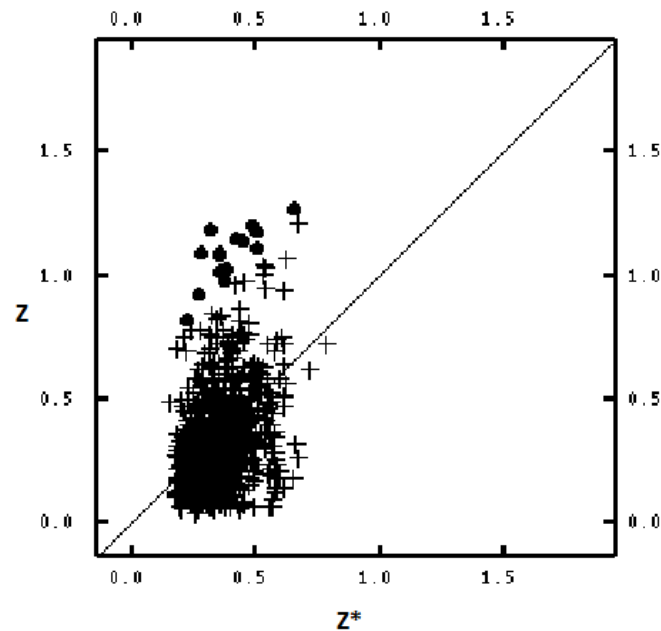


Ilustración 7 Nube correlación entre valores estimados por kriging ( $Z^*$ ) y valores reales ( $z$ ).

2. El histograma de los errores estandarizados, mediante:

$$\frac{z^*(x_\alpha) - z(x_\alpha)}{\sigma^*(x_\alpha)}$$

Donde  $\sigma^*(x_\alpha)$  es la desviación estándar del error de kriging para el punto  $x_\alpha$ . Comúnmente una estimación se considera aceptable si el error estandarizado asociado está situado en el intervalo  $[-\alpha, \alpha]$ , con  $\alpha = 2.5$ .

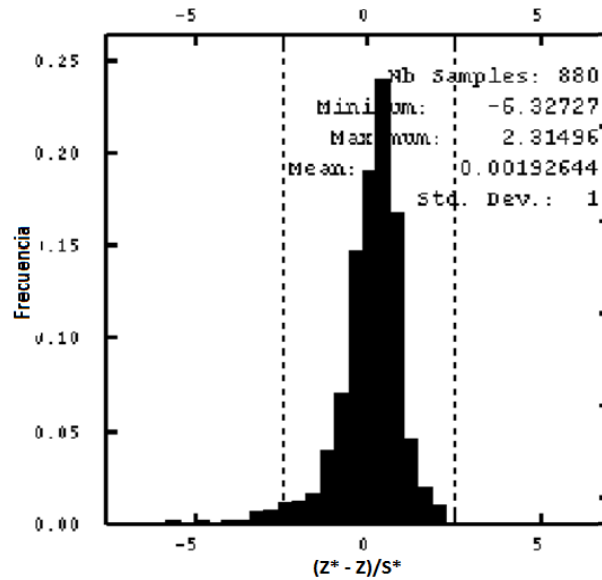


Ilustración 8 Ejemplo de histograma de errores estandarizados para una variable estimada. Como se aprecia en este grafico existen valores que escapan del rango aceptable.

### 3. La nube de correlación entre los errores estandarizados y los valores estimados.

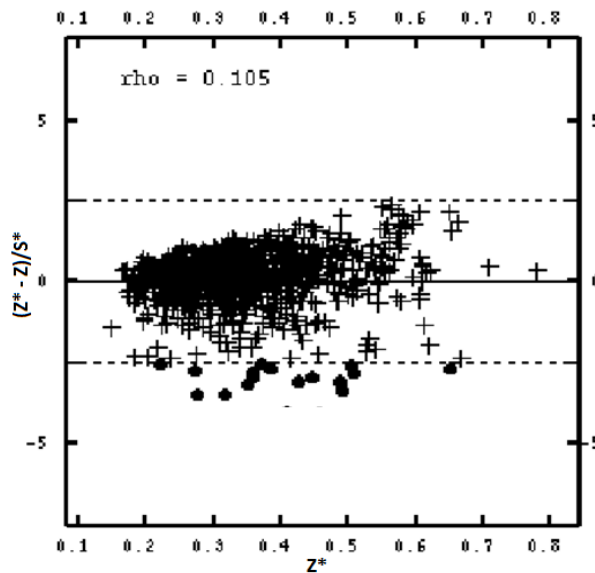


Ilustración 9 Ejemplo de nube de correlación entre los valores estimados y el error.

### **3.4.2 Validación simulaciones**

El modelo simulado para ser validado, debe tener como condición:

1. Reproducir los valores en los sitios muestreados.
2. Tener la distribución de la muestra simulada, es decir mantiene la forma del histograma y respeta parámetros estadísticos como medias y varianzas.
3. Respeta la continuidad espacial de las variables.

En la práctica la verificación del cumplimiento de estas propiedades se realiza empíricamente sobre un conjunto de realizaciones.

Por otro lado para cuantificar el nivel de predicción del modelo en término de precisión y exactitud, se puede utilizar técnicas como Jackknife y Validación Cruzada.

## **3.5 Problemas al estimar o simular variables geometalúrgicas**

### **3.5.1 Variables no aditivas**

El comportamiento no lineal en la recuperación por flotación es uno de los temas más problemáticos. Si bien la variable puede ser estimada mediante kriging, esto serviría solamente para visualizar tendencias y comprender mejor la caracterización espacial. Pero no debería ser utilizado por que introduciría un sesgo ya que, por su construcción el kriging pondera promedios, y la variable de recuperación no sigue un comportamiento lineal (Carrasco et al. 2008), ya que es una variable no aditiva.

Una solución planteada es utilizar algoritmos de simulación, donde no se toma como supuesto promedios, y donde se puede representar todo el rango de variabilidad. El problema con esto es un mayor recurso computacional (Deutsch et al. 2013 y 2015).

### **3.5.2 Complejas relaciones multivariadas**

Generalmente el modelamiento geometalúrgico se enfrenta con una gran cantidad de variables, siendo complejo el manejo y entendimiento de éstas. Para comprender qué variables son las más significativas en la variación de una variable geometalúrgica se aconseja emplear técnicas estadísticas para entender mejor la relación, siendo útiles: matrices de correlación, escalamiento multidimensional (MDS) y análisis de componentes principales (PCA), entre otras técnicas.

### **3.5.3 Muestreo heterotópico**

Las variables geometalúrgicas cuentan en general con bastante menos información que atributos geológicos como litología, leyes de elementos de interés. Esto se debe a que el uso de esta información es un tema más reciente, por lo que la data histórica es menor, además de un tema de costo. Al utilizar técnicas de correlación como el análisis de componentes principales, se requiere que cada dato tenga el valor asignado para cada variable, por lo que un primer acercamiento podría ser en considerar eliminar los valores restantes, con la consiguiente pérdida de información de los datos con variables geológicas donde hay información. Otra opción es realizar simulaciones en esos valores faltantes o usar técnicas de imputación para suplir la información faltante.

### **3.6 Pruebas de flotación**

En un ambiente controlado se requiere estimar cuanto es la recuperación de cobre de una muestra. Lo primero que se hace es chancar la muestra, generalmente 1000 gramos representativos de lo que se quiere estimar, esto con el fin de reducir el tamaño del mineral hasta llegar a una cierta malla (#10, 100%).

La muestra es traspasada a una celda acrílica de flotación donde se inicia la agitación de la pulpa a una velocidad definida. La flotación es realizada en condiciones de aireación, frecuencia de paleteo, pH y reactivos (colector, espumante y modificador) específicos y controlados.

Luego se realiza la descarga del concentrado hacia bandejas. Esta colección se realiza a distintos intervalos de tiempo, hasta un tiempo final de 12 minutos.

Finalmente se prepara para el análisis químico el concentrado recolectado y el relave (remanente en la celda). Con los resultados de los análisis se obtienen los valores recuperación y ley de concentrado.

## 4 METODOLOGÍA

Se considera las siguientes etapas:

1. Estudio bibliográfico y de antecedentes. En una primera parte se recopila información acerca de los factores que controlan la recuperación de cobre. Posteriormente se estudian diferentes trabajos en la estimación de variables regionalizadas.

2. Estudio exploratorio de datos. Se selecciona la población a estudiar, dentro del total de la base de datos. A estos datos se les realiza estadística descriptiva, donde se estudia el comportamiento de la recuperación geometalúrgica con respecto a otros atributos en el sistema.

3. Desarrollo de modelos de recuperación de cobre mediante diferentes técnicas geoestadísticas:

- Kriging de recuperación de cobre.
- Simulación de recuperación de cobre.
- Cosimulación de ley de cobre total y recuperación de cobre.
- Simulación de recuperación de cobre por unidad geológica real.
- Simulación de recuperación de cobre por unidad geológica simulada.

4. Comparación del desempeño de los distintos métodos.

## 5 CASO DE ESTUDIO

### 5.1 Estudio exploratorio de datos

#### 5.1.1 Presentación de los datos

El estudio es realizado en un pórfido cuprífero ubicado en el norte de Chile. La base de datos consiste en 91388 muestras de sondaje, a un soporte mayoritario de 3 metros con información de leyes químicas de cobre total (CuT) y soluble (CuS); información categórica del tipo de litología, alteración y zona mineral; además de las coordenadas de estas muestras (ilustración 10). Se presenta un muestreo heterotópico producido por condiciones inherentes del trabajo de una mina, a modo de ejemplo: la exención de información de leyes de cobre en las zonas de sobrecarga.

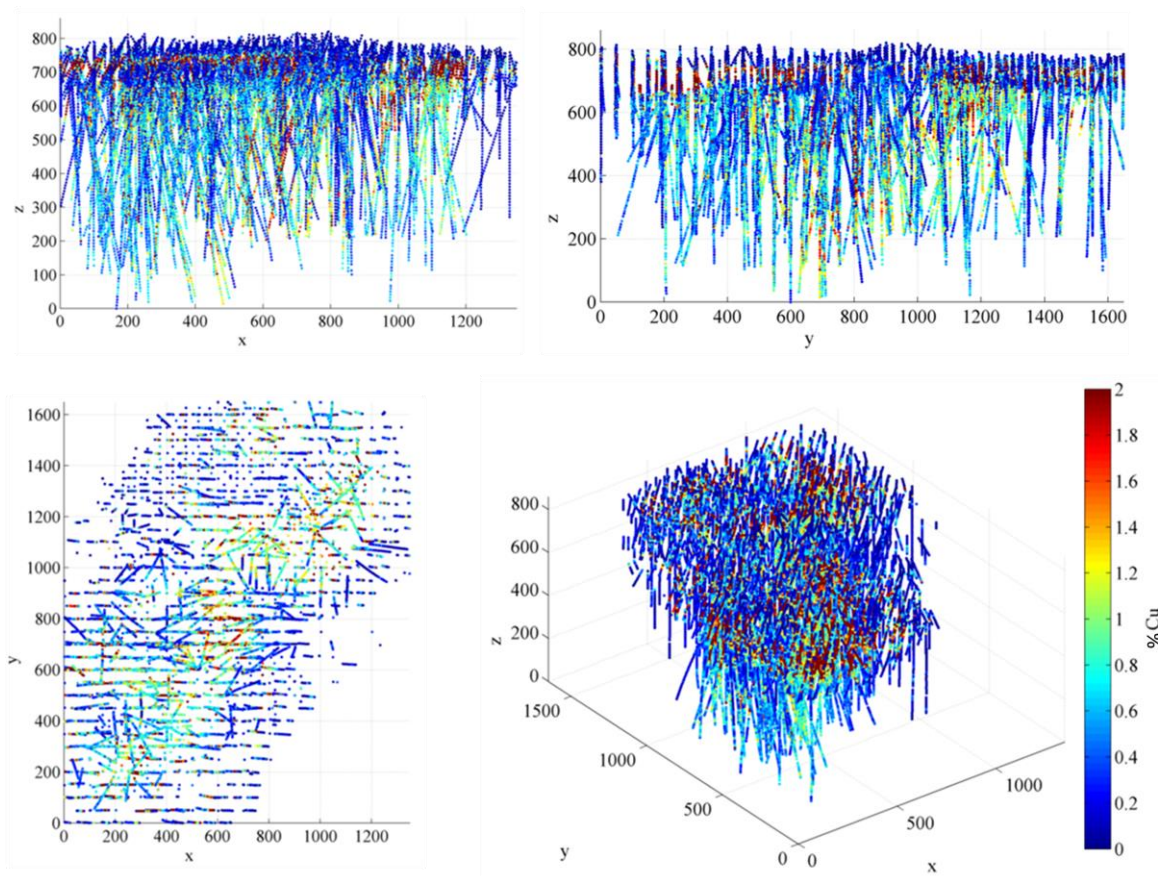


Ilustración 10 Mapas de ubicación de los datos de cobre total (CuT). Arriba a la izquierda vista perfil este-oeste; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica.

Como se menciona, los datos son obtenidos de un pórfido cuprífero del norte de Chile, donde para efectos de este estudio es conveniente indicar la litología, alteración y zona mineral que conforman este yacimiento.

La litología está dividida en:

- Roca caja (RC): Unidad más antigua del depósito, corresponde a secuencias de andesitas y rocas sedimentarias.
- Pórfido temprano (Ptem): Intrusivo de textura porfídica con predominancia de cuarzo y feldespatos. Esta unidad intruye a las unidades de la roca caja.
- Pórfido tardío (Ptar): Intrusivo de textura porfídica con predominancia de cuarzo y feldespatos. Esta unidad intruye a las unidades de la roca caja, asimismo como corta al pórfido temprano.
- Brecha hidrotermal (BxH): Brechas de origen hidrotermal, con matriz de turmalina y pirita, asociada a debilidades estructurales.
- Brecha intrusiva (Bxl): Brecha ígnea asociada a la intrusión del pórfido tardío.

La alteración hidrotermal está dividida en:

- Potásica (k): Zona de alteración más profunda caracterizada por el tipo de roca a la cuál altera con presencia mayoritaria de biotita en andesitas y feldespato potásico en las secuencias sedimentarias y rocas intrusivas.
- Clorítica (Cl): Zona de alteración transicional entre la zona cuarzo sericita y potásica, caracterizada por presencia dominante de clorita.
- Cuarzo sericita (QS): Alteración sobreimpuesta a la alteración potásica con presencia mayoritaria de cuarzo, sericita y menor caolinita.
- Argílica (Arg): Zona de alteración supérgena caracterizada por presencia mayoritaria de arcillas. Alteración más distal de la intrusión, sobreimpuesta al resto.

La zona mineral está dividida en:

- Hipógeno (Hy): Mineralogía asociada a la intrusión de pórfidos, donde predomina la presencia de calcopirita como mineral de mena. Ausencia de minerales supérgenos.
- Supérgeno calcosina (SuCc): Zona mineral supérgena caracterizado por predominio mayoritario de calcosina.
- Supérgeno covelina (SuCv): Zona mineral supérgena determinada por la aparición de covelina con menor calcosina.

- 4. Transicional (Tran): Zona mineral determinada por coexistencia de minerales supérgenos e hipógenos, es decir, presencia de calcopirita con menor calcosina y covelina.

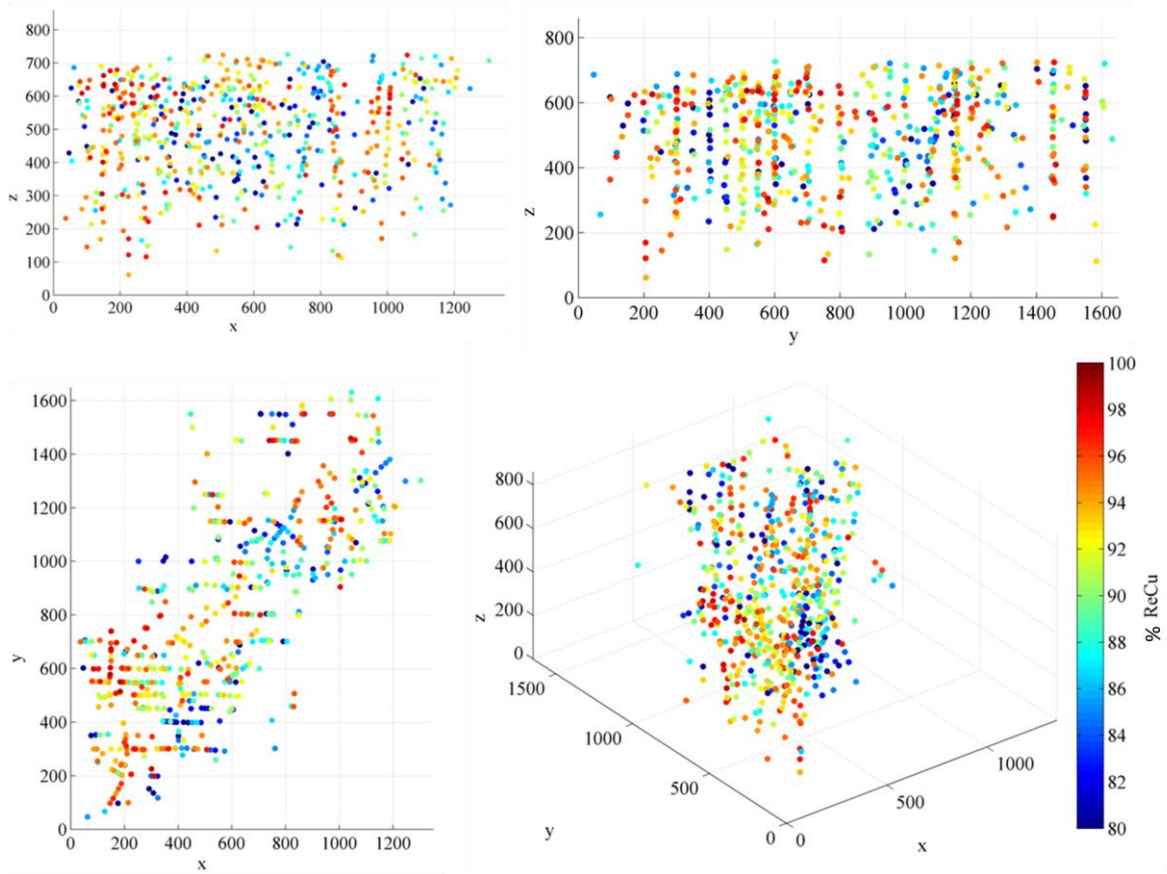


Ilustración 11 Mapas de ubicación de los datos de recuperación de cobre (ReCu). Arriba a la izquierda vista perfil este-oeste; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica.

La base de datos se completa con la variable de interés de estudio: recuperación metalúrgica de cobre (ReCu), a un soporte muestral de 9 metros (al menos). Esta variable cuenta con 603 datos, los que se reparten a lo largo de todo el cuerpo mineralizado (ilustración 11). El muestreo se observa altamente heterotópico en relación a las variables presentadas anteriormente.

La información se despliega en un área de más de 1600 metros de norte a sur; más de 1300 metros de este a oeste; y más de 800 metros de profundidad. Como se observa en las ilustraciones 10 y 11, los sondeos se encuentran ubicados en formar irregular.



## 5.1.2 Ajustes en los datos

### 5.1.2.1 Composición

Para compensar los distintos soportes que difieren de la variable de interés versus el resto, se procedió a compositar a un soporte de 9 metros. En la ilustración 12 se observa el caso de los datos de ley de cobre total, donde la data se reduce a casi un tercio, la varianza disminuye y los valores extremos (altos) son reducidos.

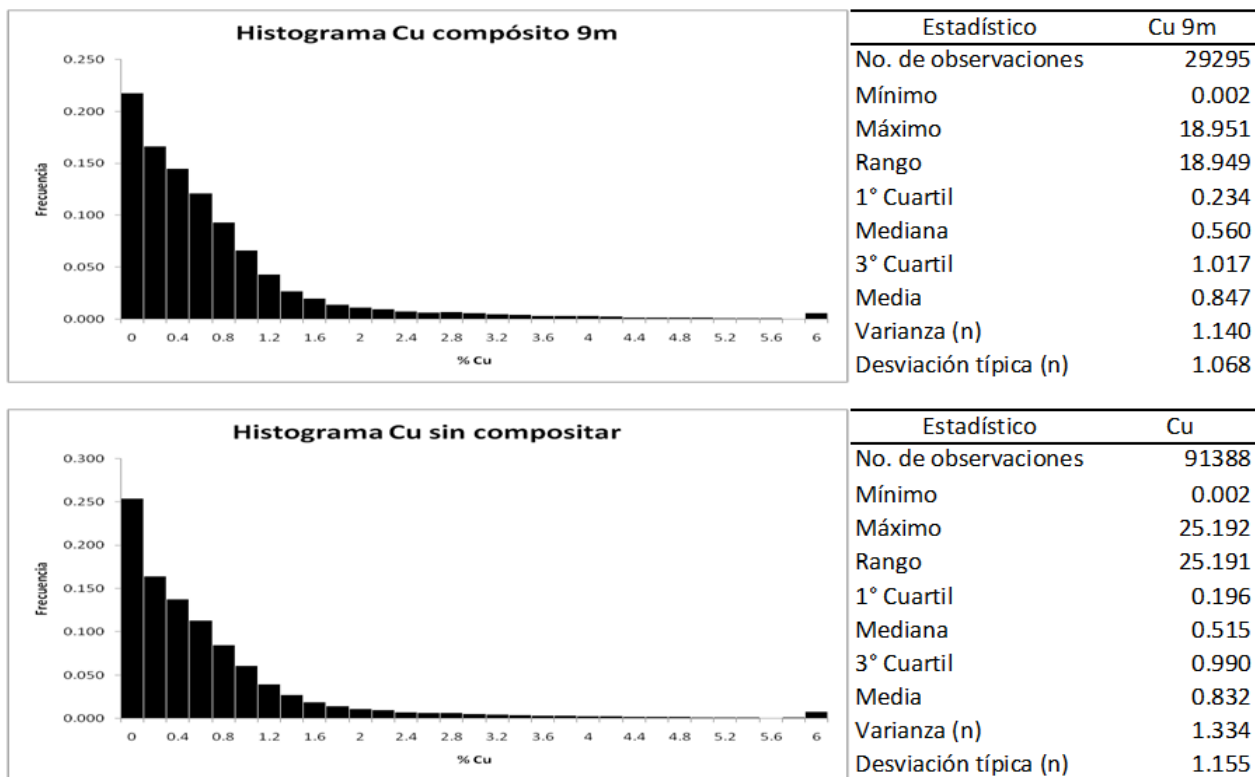


Ilustración 12 Histogramas y estadística descriptiva de ley de cobre total. Arriba: compósito de 9 metros; abajo: compósito de 3 metros.

### 5.1.2.2 Outliers

En el caso de las variables continuas (CuT, CuS y ReCu), se procede a revisar la data en busca de valores anómalos. Para identificar estos valores, se utiliza gráficos de probabilidad (ilustración 13), además de conocimientos prácticos en valores que

deberían tomar estas variables en un yacimiento de pórfido cuprífero, a modo de ilustración los depósitos porfídicos en la zona mineral tienen una ley promedio de 0.5 a 1.5% (Sillitoe, 2010)

Se procede a realizar *capping*, con el fin de no perder mayor información. Para determinar el valor de corte se utiliza gráficos de probabilidad y ajuste al vacío utilizando histogramas (ilustración 14). La información modificada, con número de datos y el valor de *capping* es resumida en la tabla 1.

Tabla 1 Resumen ajuste datos aberrantes.

Variable	Capping	Muestras	Proporción
CuT	6%	173	0.59%
CuS	4%	144	0.49%
ReCu	66%	6	0.99%

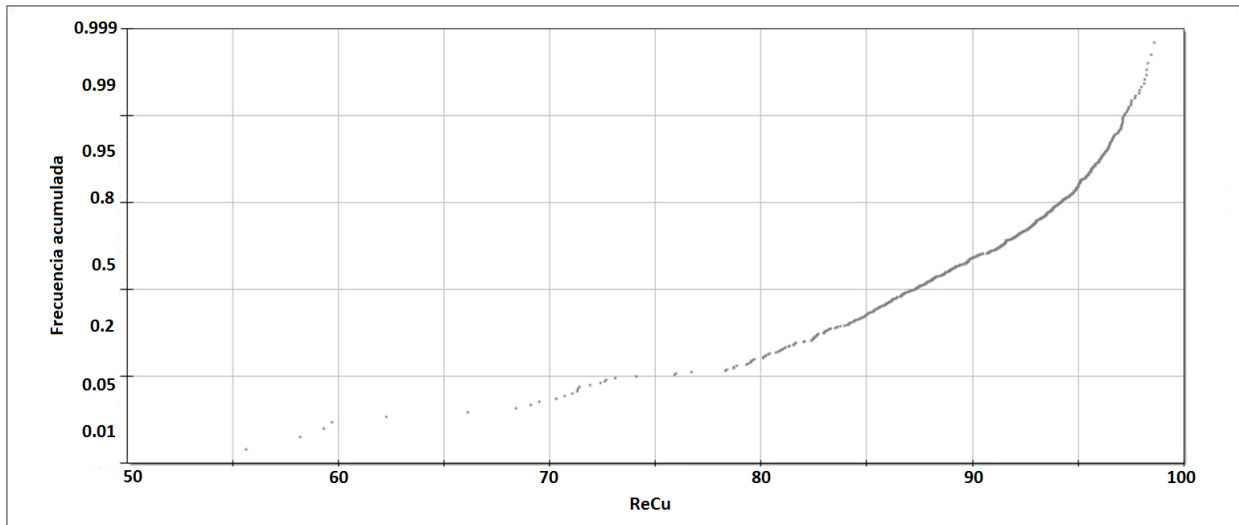


Ilustración 13 Gráfico de probabilidad Recuperación de cobre (ReCu).

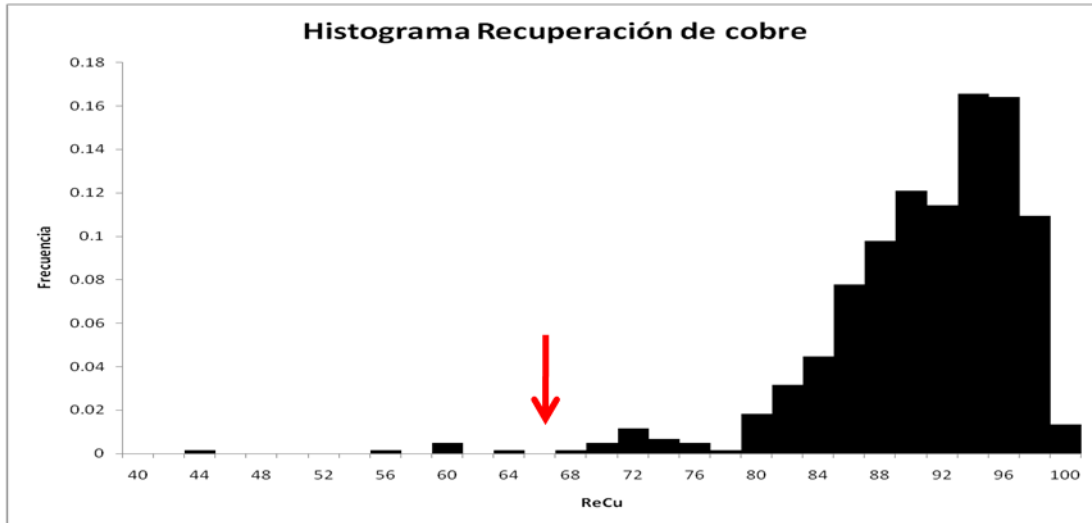


Ilustración 14 Histograma recuperacion de cobre. Flecha indica donde se realiza ajuste al vacio.

### 5.1.2.3 Desagrupamiento

Se procede a desagrupar, mediante el método de las celdas, utilizando dimensiones de 200 x 200 x 120 metros. Para la elección del tamaño se considera la media desagrupada por tamaño de celda, como se observa en la ilustración 15; el menor valor de la media para CuT se encuentra para celdas de tamaño cercano a los 200 metros, indicando que existe un muestreo preferencial sobre las leyes altas (tabla 2). Además, como es de esperar, el muestreo se concentra en la parte más somera y central del yacimiento (en zonas de explotación), implicando que hacia los extremos y parte baja, el muestreo se considerablemente menor (ilustración 16).

Este muestreo preferencial es menos latente, e incluso indiferente en el caso ReCu. Lo anterior indicaría una aleatorización de su muestreo, como se observa en la ilustración 15, dado que la media es prácticamente indiferente al tamaño de celda.

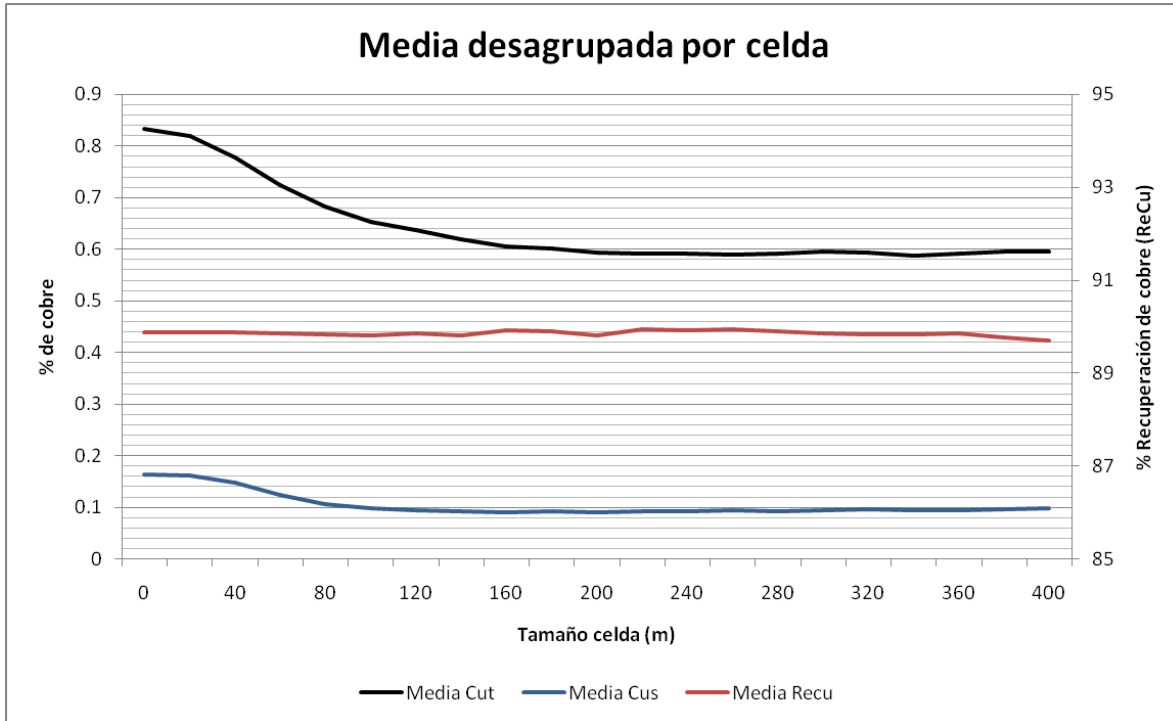


Ilustración 15 Media desagrupada de CuT (rojo), CuS (azul) y ReCu (negro).

Tabla 2 Estadística descriptiva CuT. Izquierda: datos sin desagrupar; derecha: datos desagrupados.

Estadístico	Cu sin desagrupar	Cu Desagrupado
No. de observaciones	29295	29295
Mínimo	0.002	0.002
Máximo	6.000	6.000
Rango	5.998	5.998
1° Cuartil	0.234	0.155
Mediana	0.560	0.417
3° Cuartil	1.017	0.769
Media	0.833	0.594
Varianza (n)	0.923	0.497
Desviación típica (n)	0.961	0.705

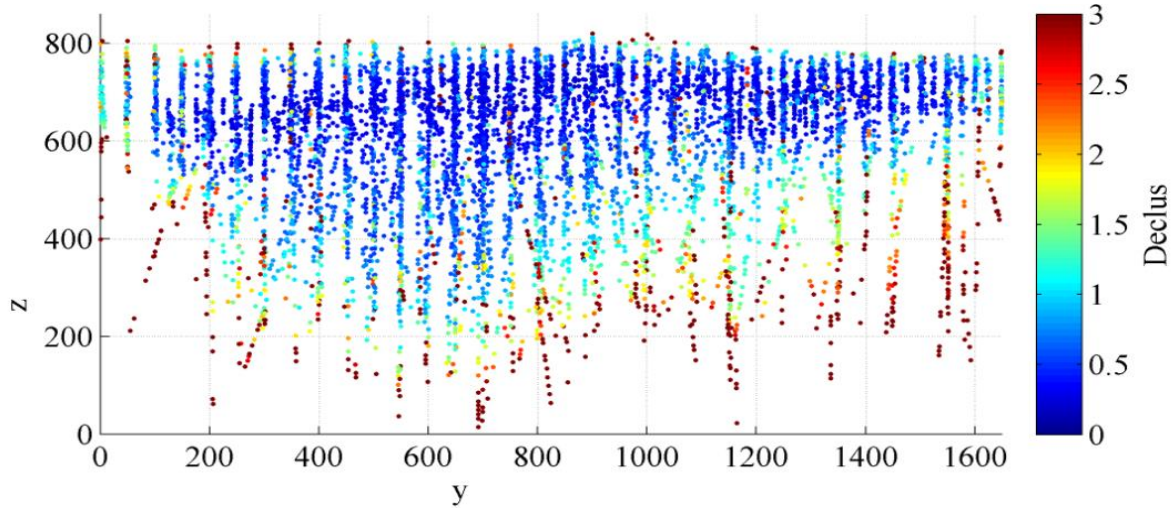


Ilustración 16 Vista perfil norte-sur indicando el peso de los datos en el desagrupamiento.

### 5.1.3 Estadística descriptiva

Con los datos desagrupados y considerando *capping*, se realiza estadística descriptiva. A continuación se entrega un resumen con las principales características encontradas en esta parte del estudio.

La recuperación metalúrgica de cobre (ReCu) tiene 603 datos, repartidos uniformemente en la zona de estudio, con valores que oscilan entre 66% y 99% de recuperación, con una media de 89.8% (tabla 3). No existen evidencias que soporten una correlación significativa con las leyes de cobre total o soluble (ilustración 19 y 20), donde se obtiene un coeficiente de correlación de 0.16 para el caso de cobre total y de 0.02 para el cobre soluble.

Tabla 3 Estadística descriptiva ReCu, Cut y Cus (datos desagrupados y con tratamiento de outliers)

Estadístico	ReCu	Cut	Cus
No. de observaciones	603	29295	29268
Mínimo	66.000	0.002	0.002
Máximo	98.860	6.000	4.000
Rango	32.860	5.998	3.998
1° Cuartil	86.655	0.155	0.009
Mediana	91.200	0.417	0.017
3° Cuartil	94.506	0.769	0.035
Media	89.818	0.594	0.091
Varianza	37.954	0.497	0.122
Desviación típica	6.161	0.705	0.349

La ley de cobre total (CuT) posee 29295 datos, con valores que oscilan entre 0% y 6%, con una media de 0.59% (tabla 3). No tiene mayor correlación con ReCu.

La ley de cobre soluble (CuS) posee 29268 datos, con valores que oscilan entre 0% y 4%, con una media de 0.06% (tabla 3). Se reconocen dos poblaciones, una de alta ley, asociada a la parte más somera del depósito con buena correlación con CuT, y otra de baja ley asociada a zonas más profundas, esto último inferido por la nube de correlación con el cobre total (ilustraciones 18), estudio de deriva (será profundizado más adelante) y conocimientos prácticos de la zonación mineral típico de un pórfido (Sillitoe, 2010).

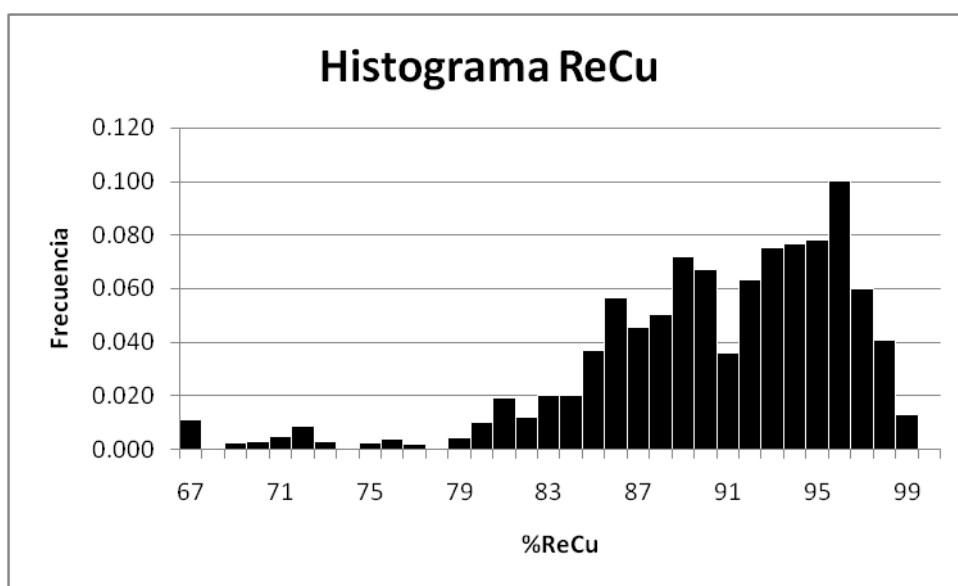


Ilustración 17 Histograma ReCu (datos desagrupados y con tratamiento de outliers).

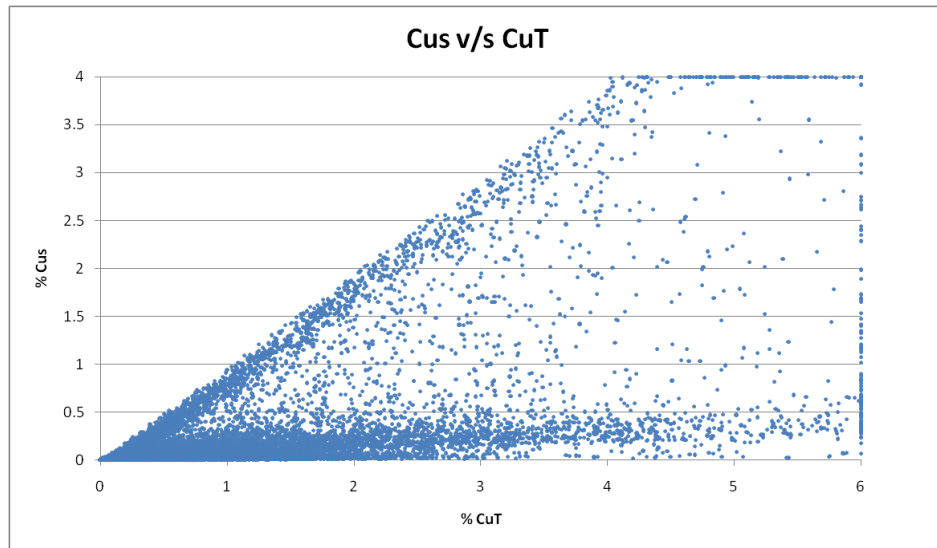


Ilustración 18 Nube correlación CuT v/s CuS.

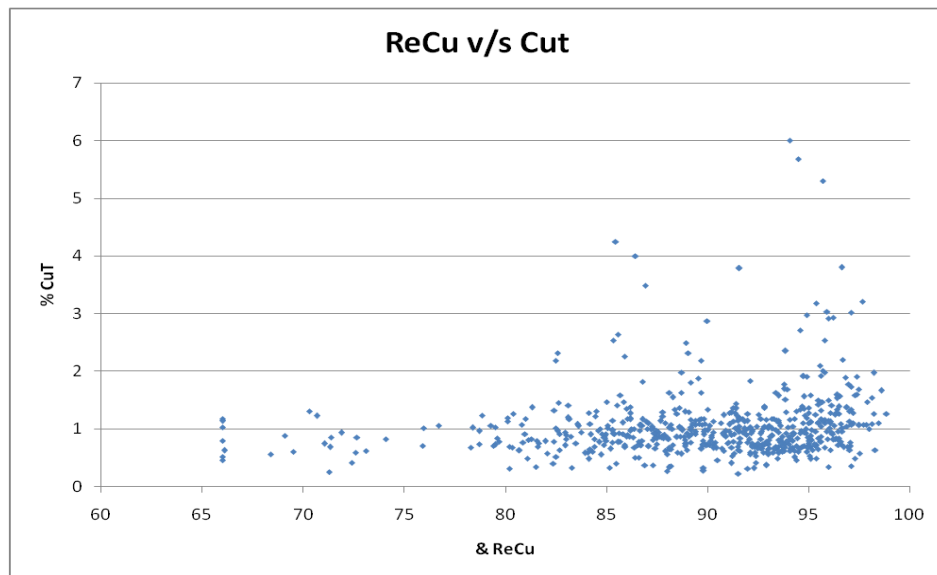


Ilustración 19 Nube correlación ReCu v/s CuT.

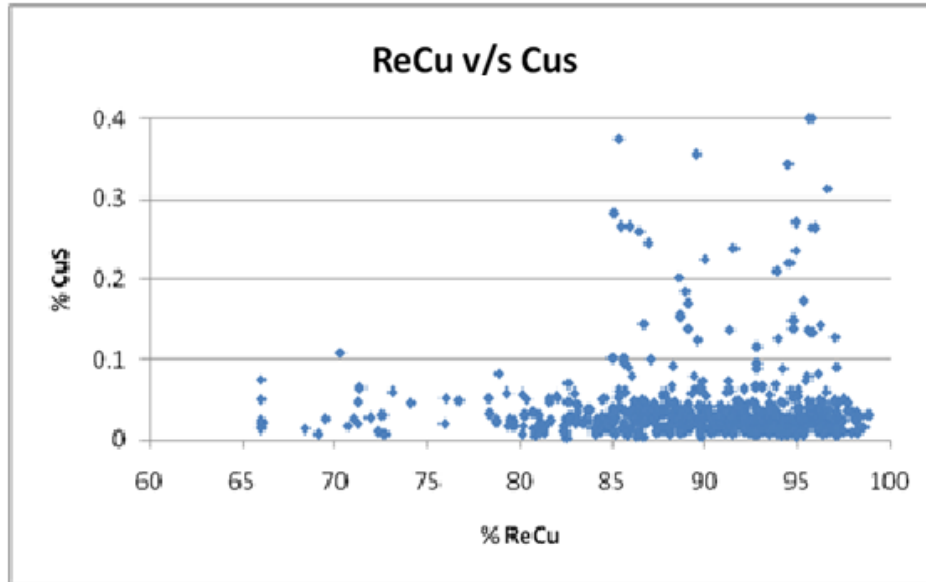


Ilustración 20 Nube correlación ReCu v/s CuS

De acuerdo al tipo de alteración hidrotermal, se observa que ReCu tiene un mejor desempeño con alteración de la etapa más tardía del depósito como cuarzo-sericita, en desmedro de alteraciones más tempranas como la potásica. El resto de las alteraciones, al poseer pocos datos, son desestimadas de mayor análisis, aunque cabe destacar que poseen un buen índice de recuperación (ilustración 21).

De acuerdo al tipo zona mineral, la mayoría de la data se encuentra ubicada en la zona hipógena por lo que no cabe mayor análisis.

De acuerdo a la litología, se observa que las mejores recuperaciones de cobre se encuentran en las unidades intrusivas y brechas por sobre la roca caja, con una notable diferencia en la distribución de los valores donde el tercer cuartil de porcentaje de recuperación en la roca caja es menor que el primer cuartil en el resto de litologías. También la media muestra diferencias sustentables entre las mismas litologías (ilustración 23).



Estadístico	recu   Arg	recu   CL	recu   K	recu   QS
Observaciones	17	8	175	403
Mínimo	70.70	87.50	66.00	66.00
Máximo	96.94	96.60	97.51	98.86
1° Cuartil	85.58	89.65	83.14	88.81
Mediana	89.80	91.24	86.81	92.68
3° Cuartil	92.10	92.80	91.56	95.02
Media	89.08	91.47	86.42	91.38
Varianza	39.20	8.95	49.71	26.62
Desviación	6.26	2.99	7.05	5.16

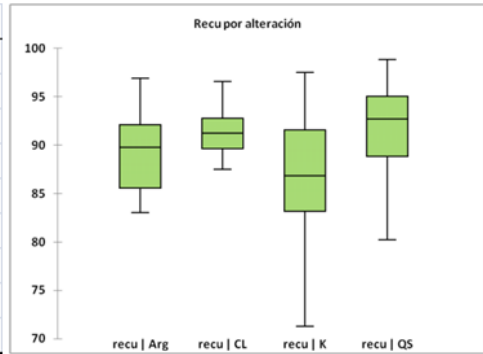


Ilustración 21 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de alteración (Arg: Argílica; CL: Clorítica; K: Potásica, QS: Cuarzo sericita).

Estadístico	recu   HY	recu   SuCc	recu   SuCv	recu   Tran
Observaciones	548	27	10	18
Mínimo	66.00	70.31	85.02	66.00
Máximo	98.86	97.02	97.11	98.60
1° Cuartil	86.70	87.78	87.80	85.40
Mediana	91.36	91.38	93.81	89.75
3° Cuartil	94.40	94.75	95.57	92.57
Media	89.89	90.58	91.95	87.22
Varianza	37.59	31.83	20.51	77.55
Desviación	6.13	5.64	4.53	8.81

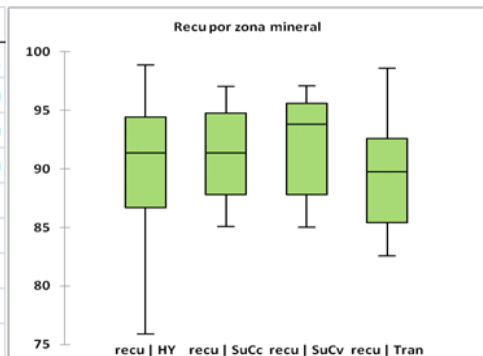


Ilustración 22 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de zona mineral (Hy: Hipógeno; SuCc: Supérgeno calcosina; SuCv: Supérgeno covelina; Tran: Transicional)

Estadístico	recu   BXH	recu   BXI	recu   Ptar	recu   Ptem	recu   RC
Observaciones	10	36	34	236	287
Mínimo	87.30	71.33	70.31	78.70	66.00
Máximo	97.90	98.30	98.86	98.45	97.00
1° Cuartil	91.10	90.19	92.70	92.07	83.59
Mediana	93.47	93.75	94.84	94.09	86.80
3° Cuartil	96.08	95.23	96.63	95.60	89.91
Media	93.40	92.16	94.06	93.42	86.07
Varianza	11.34	26.62	22.67	10.44	37.80
Desviación	3.37	5.16	4.76	3.23	6.15

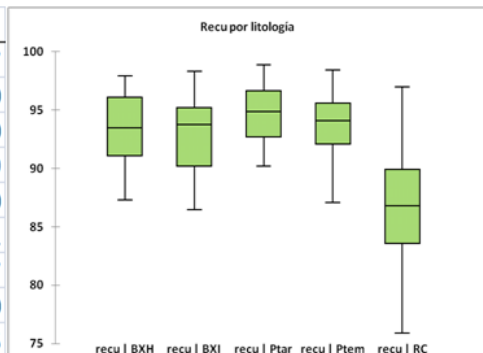


Ilustración 23 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de litología (BXH: Brecha hidrotermal; BXI: Brecha intrusiva; Ptar: Pórfido tardío; Ptem: Pórfido temprano; RC: Roca caja).

La unidad geológica, es una clasificación que se emplea uniendo los atributos comentados anteriormente. La elección para agrupar estas unidades se basa en parámetros estadísticos y en el conocimiento geológico que se tenga. Para este estudio se utiliza:

- UG1: hipógeno en litología distinta a roca caja.
- UG2: hipógeno en roca caja alteraciones tardías (Qz, Arg, Cl).
- UG3: hipógeno en roca caja alteraciones tempranas (K).
- UG4: zona mineral supérgena en roca caja
- UG5: zona mineral supérgena en litología distinta a roca caja.

Se tiene que las UG4 y UG5 cuentan con pocos datos. Pero como era esperable en la UG5 hay mejor recuperación debido a no estar presente la roca caja.

Con respecto a las otras 3 unidades donde se tiene hipógeno (mayores cantidades de datos), se observa lo descrito anteriormente: mayor recuperación en UG1 debido a no estar en roca caja, recuperación mediana en UG2 debido a pertenecer a alteraciones más tardías, menor recuperación en la UG3 (ilustraciones 24 y 25).

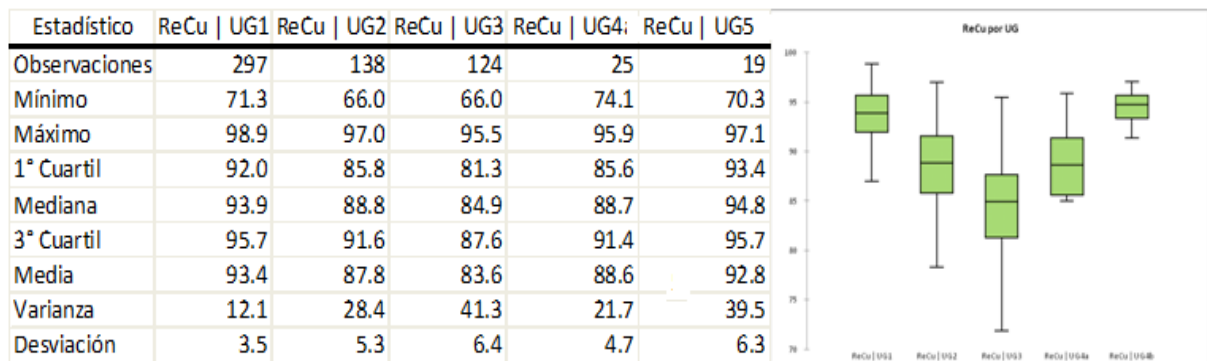


Ilustración 24 Estadística descriptiva ReCu según el tipo de unidad geológica (UG).

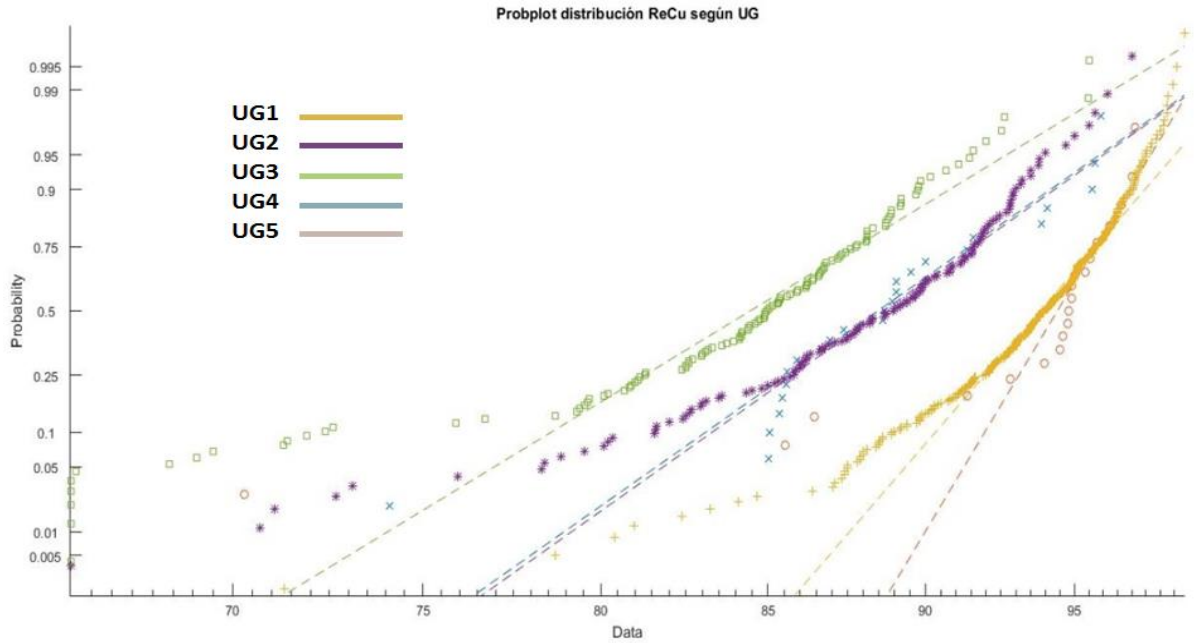


Ilustración 25 Gráfico de probabilidad normal ReCu según tipo de UG.

Se define como la razón de solubilidad a la relación de cobre soluble sobre el cobre total. Se observa que no hay mayor correlación entre la recuperación de cobre y la razón de solubilidad, esto tanto a nivel global como por UGs (ilustración 26). Esto último pensando en una posible correspondencia entre la recuperación y la solubilidad en las UGs ligadas a óxido (UG4 y UG5).

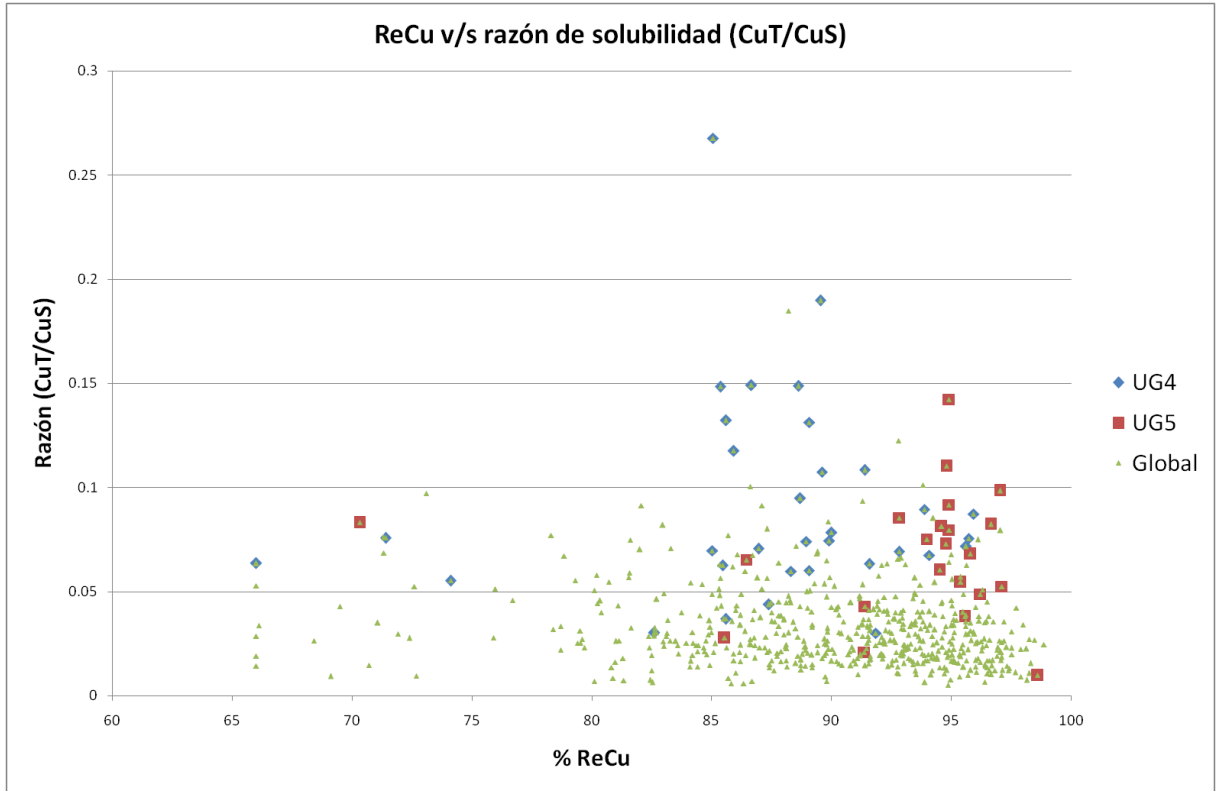


Ilustración 26 Nube de correlación entre recuperación de cobre y razón de solubilidad para las UG4 y UG5, además de la totalidad de los datos.

Tabla 4 Coeficiente de correlación entre recuperación de cobre y solubilidad

	Coef correlación
Global	-0.13
UG1	-0.16
UG2	-0.12
UG3	-0.23
UG4	0.04
UG5	0.00

#### 5.1.4 Estudio de deriva

Para el caso de la recuperación de cobre se observa que no muestra tendencia, ni en cota ni en movimientos horizontales, salvos incrementos y bajas puntuales; no existe información para ligar una mejor recuperación a una ubicación geográfica. Esto se condice con la estadística descriptiva que muestra recuperaciones similares de

acuerdo a la zona mineral, es decir tanto en hipógeno como en supérgeno los valores son similares, lo contrario se hubiese expresado en este gráfico con una tendencia en el eje z (supérgeno está en la parte somera).

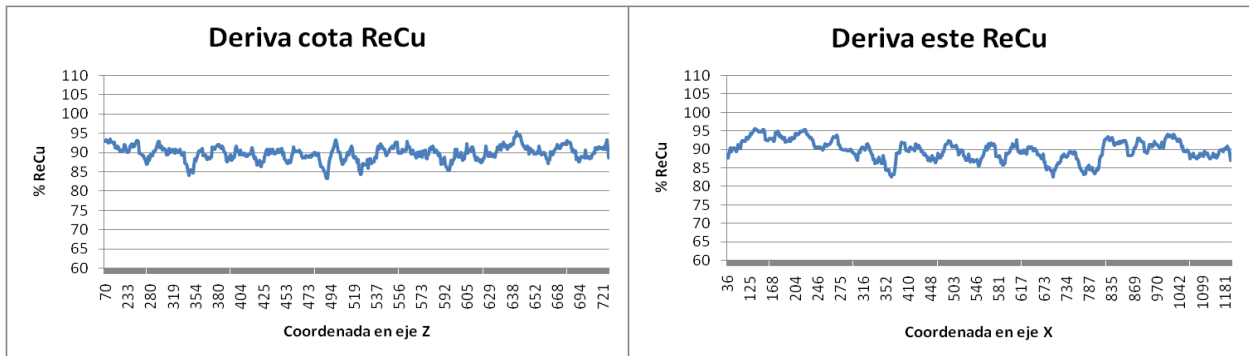


Ilustración 27 Gráficos de derivas de ReCu. Izquierda: en función de la cota; derecha: deriva este - oeste.

Con respecto a las leyes de cobre se observa tendencia principalmente con respecto a la cota. Esto es esperable, ya que mayores concentraciones de cobre se ubican en zona de supérgenos que representan la parte alta de un yacimiento; por otro lado las leyes de óxido de cobre están casi ausente en profundidad, lo que tiene relación a que en profundidad las condiciones fisicoquímicas no son óptimas para el desarrollo de cobre soluble.

Por otro lado existen tendencias de alzas a lo largo del eje este-oeste para las leyes; esto se puede deber a zonas donde se observan intrusiones de pórfidos, los cuales tienen una mejor ley. Pero esta sentencia no supone más que una conjetura.

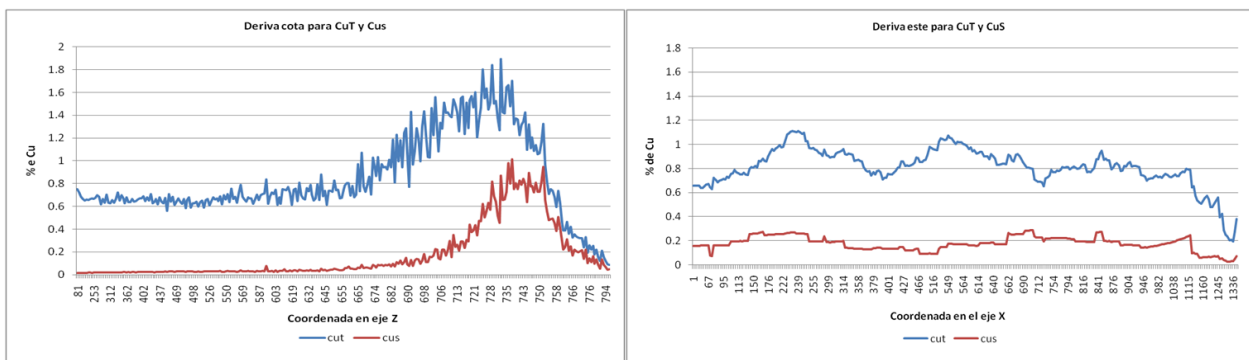


Ilustración 28 Gráficos de derivas leyes de CuT (azul) y CuS (rojo). Izquierda: en función de la cota; derecha: deriva este - oeste.

### 5.1.5 Estudio de contacto entre unidades

Como se describe en el punto anterior, la recuperación de cobre va a tener un comportamiento según su zona mineral, alteración hidrotermal y principalmente su tipo de litología, lo que es resumido en las unidades geológicas dando un buen pie para realizar el estudio de contacto en función de éstas, cabe mencionar que estas unidades fueron recomendadas por geólogos expertos en el yacimiento en estudio. Debido a la escasez de datos de recuperación de cobre en la zona más somera, donde se ubica la zona mineral distinta al hipógeno, ya sea zona de enriquecimiento, y óxido, esto es: UG4 y UG5, se desestiman estas unidades de mayor análisis.

Por el contrario las unidades geológicas 1, 2 y 3 poseen una cantidad de datos aceptables (297, 138 y 124 datos respectivamente), por lo que son tomadas en consideración. De este punto nace la interrogante si agrupar estas unidades o no. Para esto se realiza un análisis de contacto, donde se realizan dos tests gráficos:

1. El correlograma (función de correlación) de la recuperación metalúrgica entre estas unidades.
2. Ley media (o recuperación media) cerca de los contactos.

Estos análisis se hacen tanto para recuperación de cobre como para ley de cobre total. Se excluye de este estudio también la ley de cobre soluble, ya que está ligada a la mineralogía de óxidos, excluyéndose de las unidades en estudio.

Resumiendo, el análisis es empleado para recuperación metalúrgica de cobre (ReCu) y la ley de cobre total (Cu), para las unidades:

1. UG1: mineralogía hipógena en litología distinta de roca caja;
2. UG2: mineralogía hipógena perteneciente a roca caja con alteración tardía, es decir cuarzo sericita;
3. UG3: mineralogía hipógena en roca caja con alteración temprana.

El contacto entre las unidades 1 y 2 para recuperación de cobre indica que pierde la correlación rápidamente a distancias pequeñas, esto se observa en la ilustración 29, donde los valores decaen rápidamente; además de presenciar que la recuperación media en el límite de los contactos tienen una diferencia notoria (ilustración 30). Por consiguiente se asume un contacto duro entre estas unidades para la recuperación de cobre.

Los contactos entre las unidades 2 y 3; y las unidades 1 y 3, indican el mismo comportamiento señalado en el párrafo anterior y que se visualiza en los gráficos de

las ilustraciones 29 y 30. Por consiguiente se asumen contactos duros de recuperación de cobre entre todas las unidades.

Para el caso de la ley de cobre total, en el contacto entre las unidades 1 y 2 se observa que la correlación a distancias pequeñas decae lentamente, es decir tienen una buena correlación (ilustración 31). Con respecto al comportamiento de la ley media al llegar al contacto se observa que su brecha tiende a disminuir (ilustración 32), esto indica un contacto blando entre estas unidades.

Este tipo de comportamiento en los contactos se repite también entre las unidades 1 y 3 y entre las unidades 2 y 3, acentuándose este comportamiento en este último contacto donde, a pesar de tener leyes en promedio bastante disímiles, al llegar al contacto tienen a homogeneizarse. Por consiguiente se puede asumir que en ambos casos el contacto es de tipo blando.

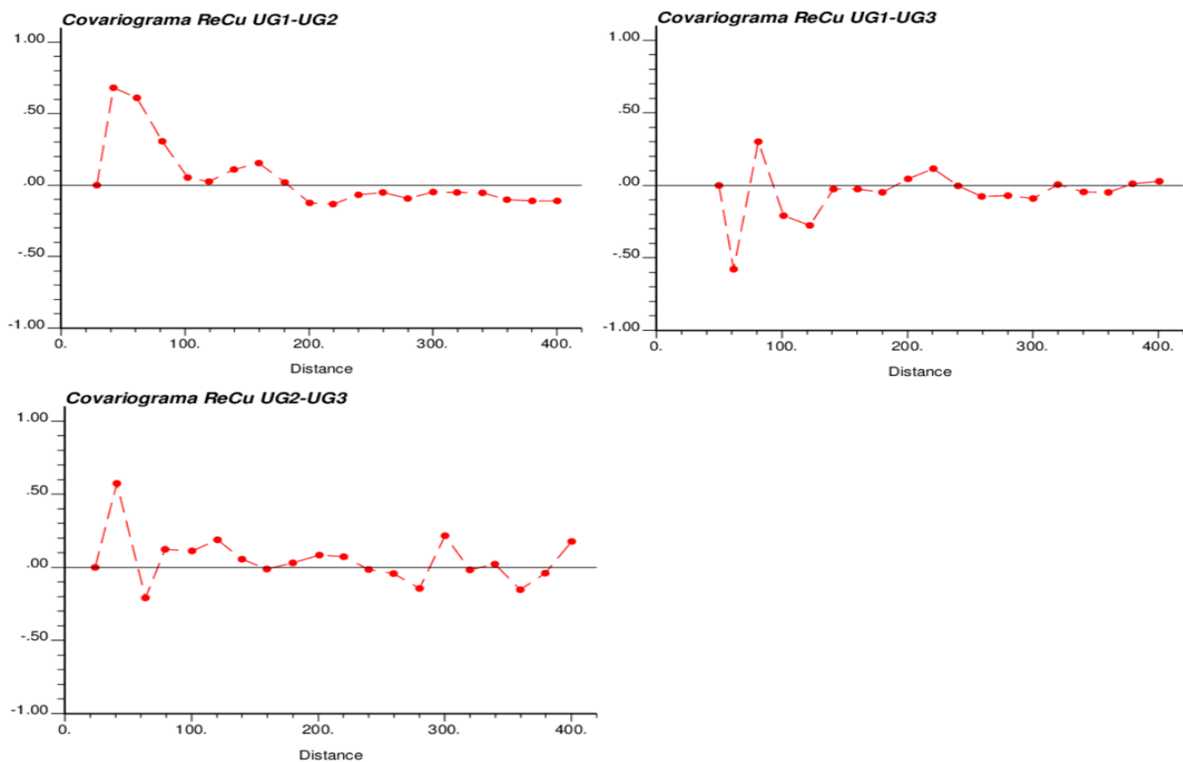


Ilustración 29 Correlogramas de recuperación de cobre para distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3.

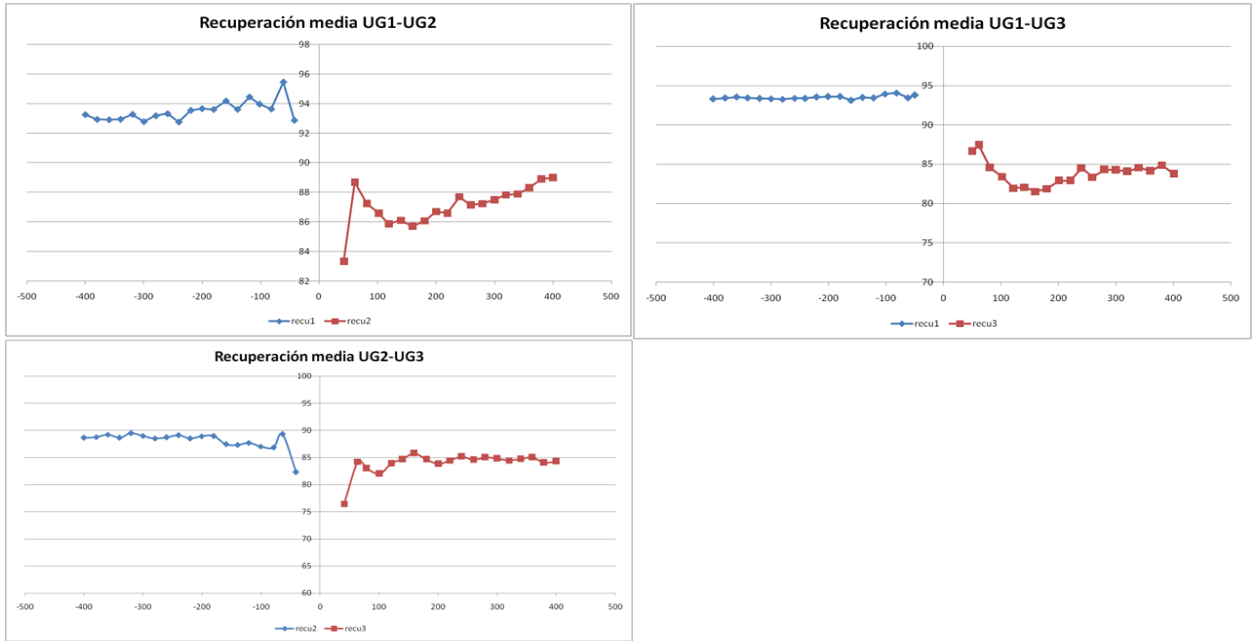


Ilustración 30 Gráficos de recuperación media de cobre entre el contacto entre distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3.

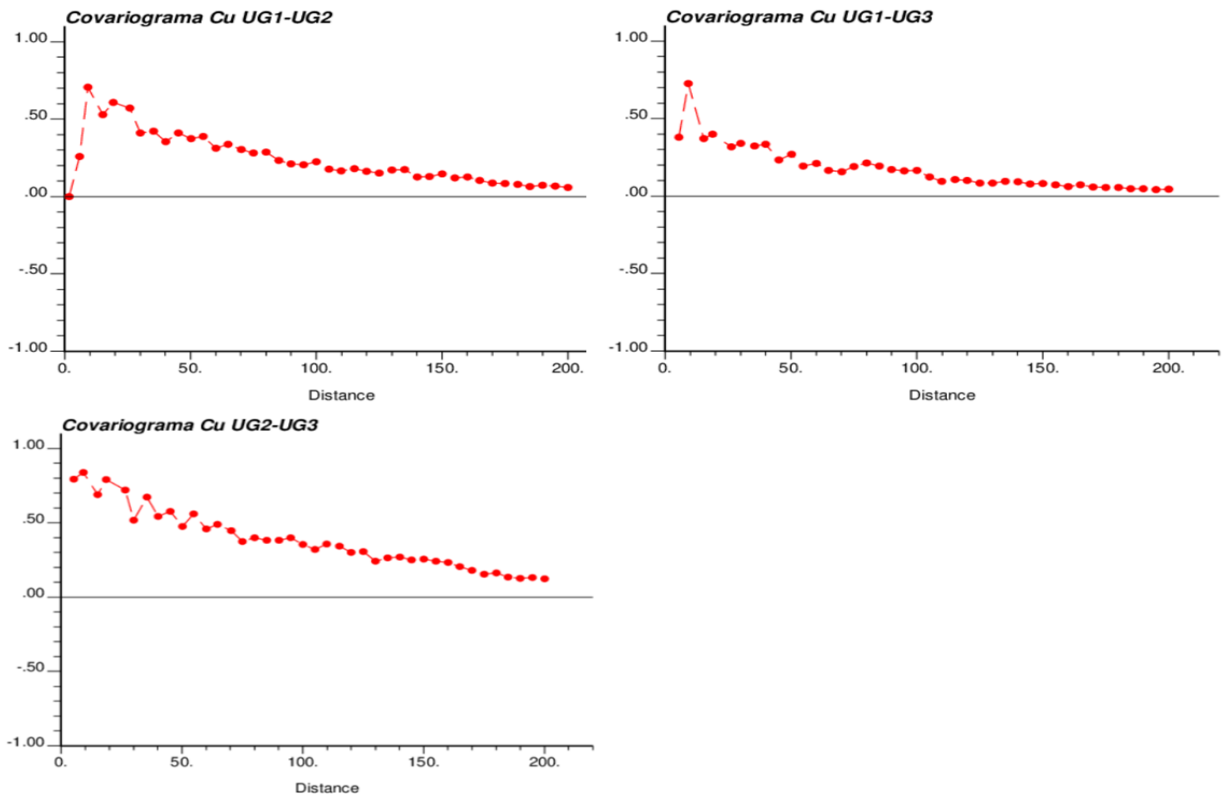


Ilustración 31 Correlogramas de ley de cobre para distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3.



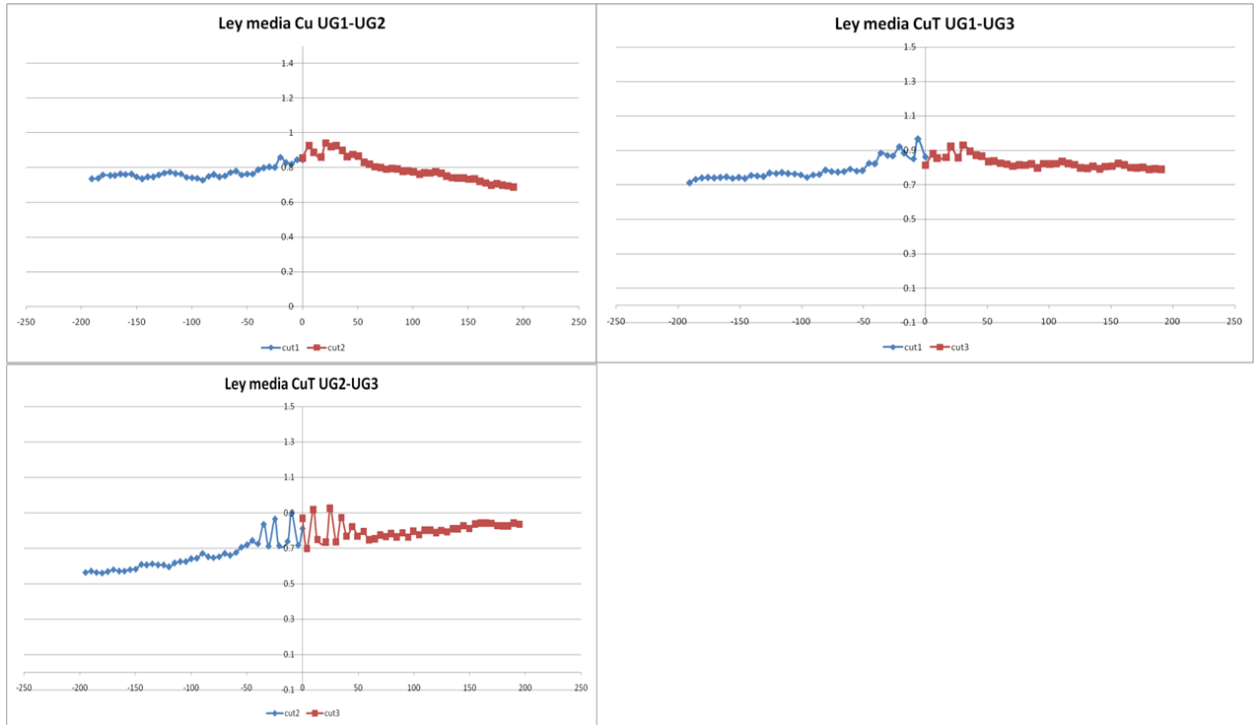


Ilustración 32 Gráficos de ley media entre el contacto entre distintas unidades geológicas. Izquierda arriba: UG1 v/s UG2; izquierda abajo: UG2 v/s UG3; derecha: UG1 v/s UG3.

Desde un punto de vista geológico, es aceptable pensar en este tipo de contacto para ley de cobre total, en parte debido a que todos corresponden a mineralogía hipógena. Al no estar afectada por procesos externos, esta mineralogía exhibe variaciones poco abruptas, ya que tienen correlación directa con la alteración, la cual tiene un comportamiento gradual. En otras palabras al pensar en la parte hipógena de un sistema porfídico no es descabellado idealizarlo como una mineralización más gradual en sus contactos, si es que esta no está afectada a un control de tipo litológico o estructural.

Por otra parte queda demostrado el control geológico, tanto litológico como de alteración hidrotermal, en la recuperación de cobre, esto visto anteriormente como estadística descriptiva y ahora en los cambios abruptos entre los contactos.

En resumen en el estudio exploratorio de datos se observa que la recuperación de cobre no está correlacionada en gran medida a la ley media de cobre sino más bien a características geológicas intrínsecas del dominio. Esto además se hace más palpable al ver la relación con el cobre soluble. Por consiguiente de aquí en más, la ley de cobre soluble será descartada de mayor análisis, y la ley de cobre total se mantendrá debido a la alta cantidad de datos que mantiene en el dominio en comparación a los datos de

recuperación de cobre, esto por el muestreo altamente heterotópico de la variable de interés.

También debido a la poca cantidad de datos en las unidades 4 y 5, además de por tener condiciones bastantes distintas geológicamente a las otras unidades, serán descartadas de ahora en más del estudio. Por consiguiente solo se trabajara por separado los dominios UG1, UG2 y UG3.

## 6 MODELOS DE ESTIMACIÓN Y SIMULACIÓN

### 6.1 Kriging de la recuperación de cobre

La primera estimación que se realiza corresponde a un kriging ordinario en todo el dominio, utilizando todos los datos de recuperación metalúrgica de cobre. Debido al carácter no aditivo de esta variable, este modelo es teóricamente incorrecto, siendo más adecuado un kriging de alguna variable auxiliar, como: cobre recuperado ( $CuT * ReCu$ ). Ahora bien, se decide realizar de todas maneras, a pesar de que es incorrecto teóricamente, debido a su simpleza y para poder tener un punto de partida de comparación a los modelos venideros. De los cuales hay unos que son teóricamente correctos, pero de más difícil elaboración.

#### 6.1.1 Estudio variográfico

Se realiza en una primera etapa un estudio variográfico de la variable. Al buscar direcciones de anisotropías, se distingue que no existe ninguna dirección preferencial, salvo una pequeña diferencia en la dirección N90E (ilustración 33).

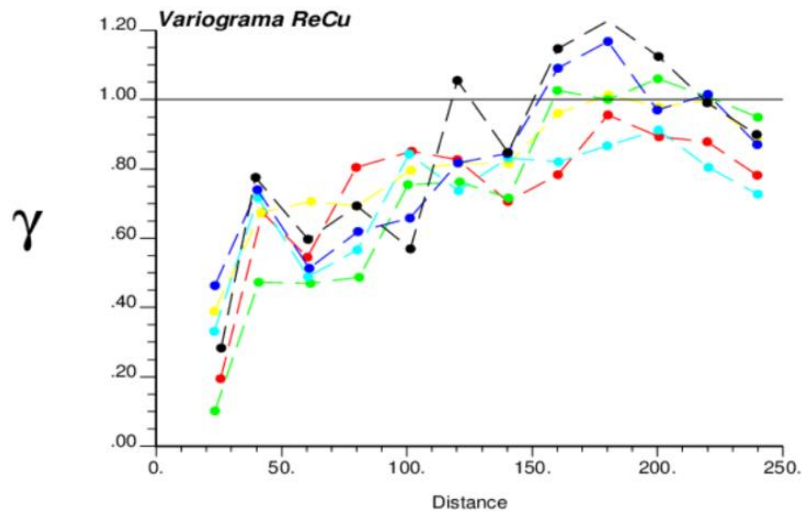


Ilustración 33 Variogramas de ReCu plano horizontal direcciones NS (color rojo), N30E (color amarillo), N60E (color celeste) N90E (color verde) N120 (color azul) N150 (color negro).

Al no ser clara la anisotropía, y con el afán de hacer el modelo lo más simple posible, se prefiere generar un variograma bidireccional, con la primera dirección horizontal y la segunda vertical, utilizando como parámetros de cálculo los expuestos en la tabla 5.

Tabla 5 Parámetros variograma experimental

	Horizontal	Vertical
Azimut [°]	0	0
Tolerancia Azimut [°]	90	90
Dip [°]	0	90
Tolerancia Dip [°]	22.5	22.5
Paso [m]	20	20
Numero de pasos	15	10
Tolerancia paso [m]	10	10

El variograma modelado considera cuatro estructuras, y se modela según:

Tabla 6 Ajuste variograma

Tipo	Alcance Horizontal	Alcance Vertical	Meseta
Efecto pepita			10.2
Esférico	40	40	10.9
Esférico	150	150	5.4
Esférico	150	$\infty$	11.1

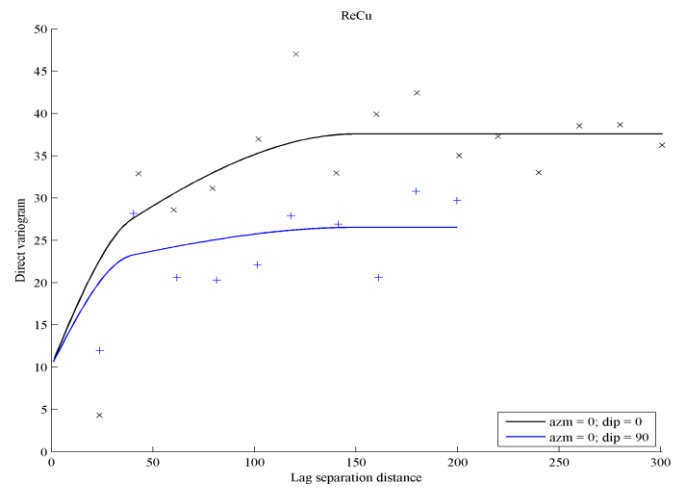


Ilustración 34 Variograma experimental y modelado de recuperación de cobre (ReCu)

### 6.1.2 Elección del plan kriging

Para establecer un plan de kriging, se realizaron diferentes modelos con distintos parámetros, los cuales fueron comparados en rendimiento por medio de validación cruzada. El resultado de los modelos se observa en la tabla 7. Cabe destacar que se utilizó un radio de búsqueda de 500 metros en todas las direcciones.

La elección del plan es realizada en función de tener mejor rendimiento en cuanto al promedio de error, la desviación y la correlación entre el valor real y el estimado. Para este caso el mejor plan corresponde al plan conteniendo 20 datos en total para un radio de búsqueda omnidireccional de 500 metros.

Tabla 7 Comparación distintos planes de kriging para recuperación de cobre (ReCu)

Plan	Promedio error	Desviación error	Correlación real-estimado
1 dato por octante	0.72	4.95	0.54
3 datos por octante	0.63	4.90	0.56
4 datos por octante	0.62	4.92	0.56
8 datos total	0.59	4.87	0.56
20 datos total	0.56	4.80	0.59
32 datos total	0.60	4.82	0.59
Ideal	0	0	1

### 6.1.3 Resultados

Para medir los resultados y la calidad de la estimación, se utiliza el método de Jackknife, donde se extrae un total de 182 muestras correspondientes a recuperación de cobre de las UG1, UG2 y UG3. Para evaluar la calidad, se utilizan tres métodos gráficos, además de la estadística del promedio del error entre el valor real y el valor estimado, la desviación del error, y el coeficiente de correlación entre valores reales y estimados. Los test gráficos que se utilizan y que tienen relación con los estadísticos son:

1. Nube de correlación entre el valor estimado y el valor real;
2. Nube de correlación entre el valor estimado y los errores estandarizados;
3. Histograma de errores estandarizados.

Cabe destacar que estimación será considerada de mejor calidad cuando cumpla:

1. Promedio de errores tienden a 0, y su desviación es la menor.
2. La correlación entre valores estimados y reales debe ser cercana a 1;
3. Las diferencias entre los valores estimados y reales tengan un error estandarizado aceptable, en este caso se utiliza como criterio que el error estandarizado sea menor a 2.5.

Los resultados del modelo de kriging de recuperación de cobre arrojan un error promedio de 0.56, una desviación de 4.8 y una correlación de 0.59. Además se observa que 4 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 36). El modelo tiene problemas para estimar valores bajos (ilustración 35).

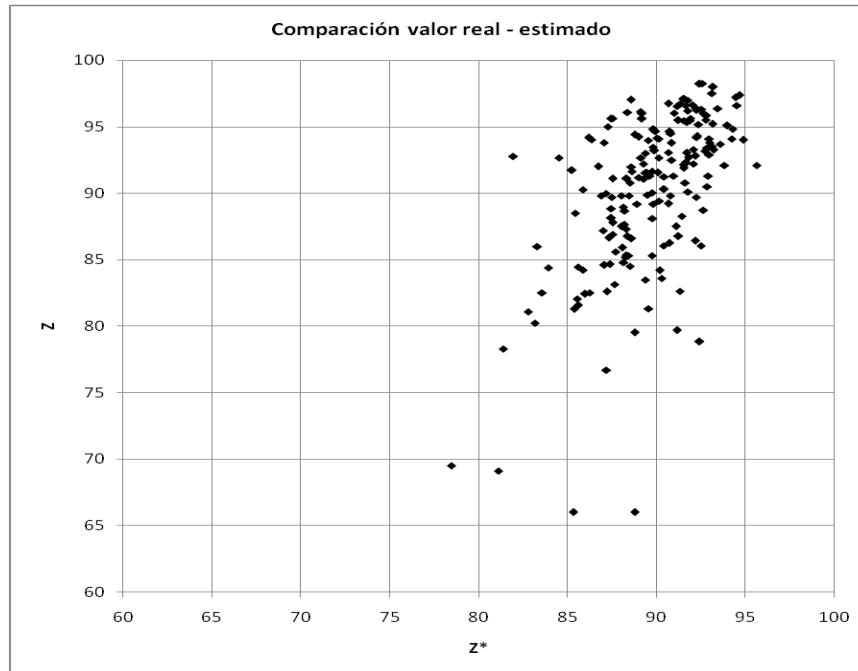


Ilustración 35 Nube de correlación entre los valores reales y los estimados.

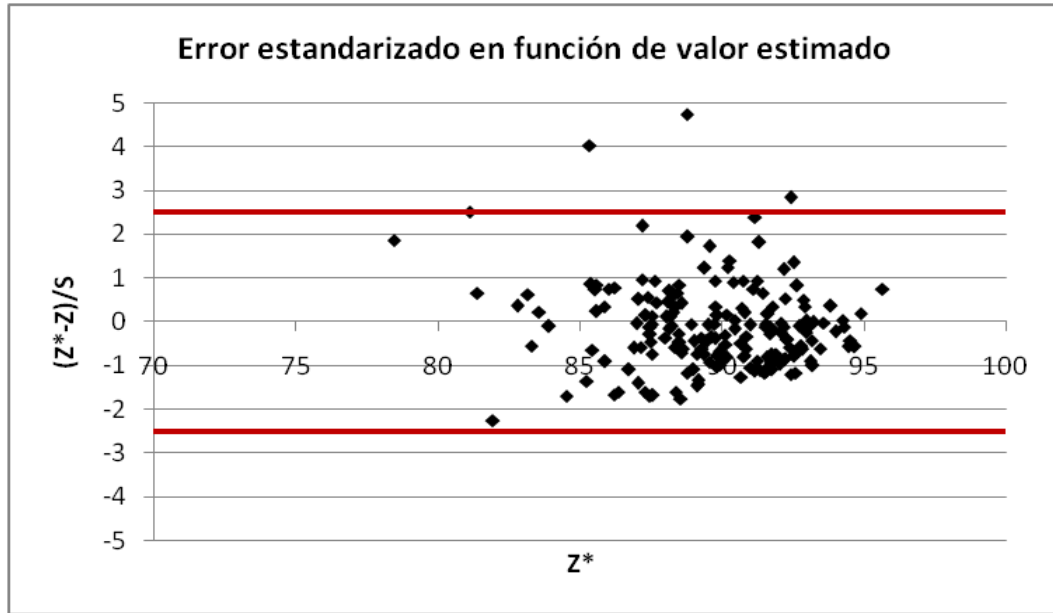


Ilustración 36 Nube correlacion entre los valores estimados y el error estandarizado.

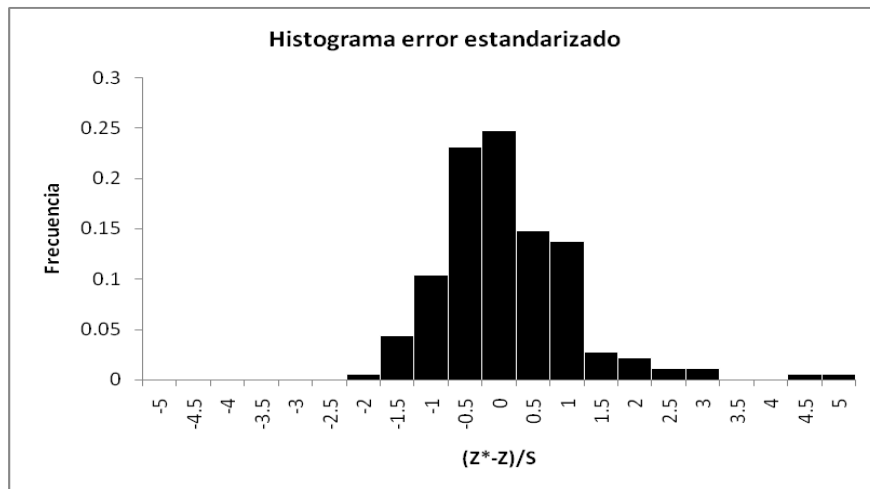


Ilustración 37 Histograma errores estandarizados.

## 6.2 Simulación de la recuperación metalúrgica de cobre

El segundo modelo que se emplea es la simulación de recuperación de cobre en el total del dominio. Se realiza una simulación multigaussiana con el método de bandas rotantes. Lo primero que se efectúa es la transformación a datos con distribución

normal gaussiana (anamorfosis) y la validación posterior de la hipótesis de bigaussianidad.

### 6.2.1 Transformación y validación de datos

Para realizar lo expuesto en el párrafo anterior se debe realizar una anamorfosis gaussiana a los datos de recuperación de cobre en estudio, esto es la transformación de la data en una con distribución normal gaussiana de media 0 y desviación 1. En el caso de estos datos la media fue de -0.02 y la desviación de 1.02. Como se observa en la ilustración 38, los datos transformados tienen una forma de campana de Gauss.

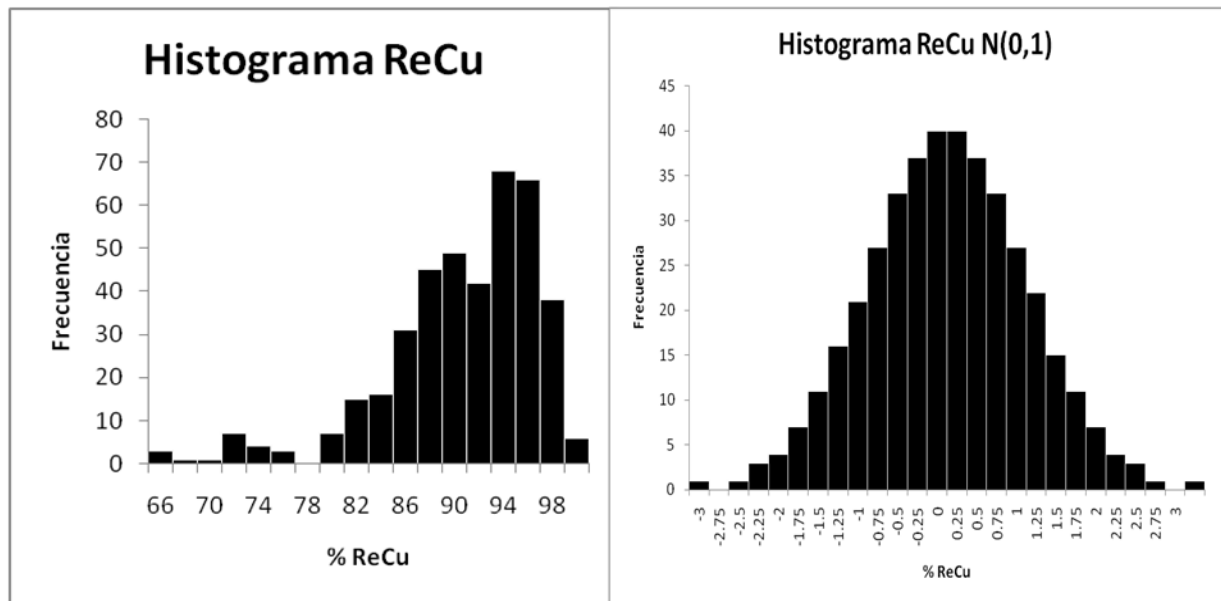


Ilustración 38 Histogramas de los datos de recuperación de cobre (ReCu). A la izquierda los datos originales; a la derecha los datos transformados.

Para verificar la hipótesis de bigaussianidad de la variable transformada, se examinan varias nubes de correlación diferida. Como se observa en la ilustración 39, se acepta la bigaussianidad debido a que se observa una tendencia elíptica a corta distancia (gráfico a la izquierda arriba) y una forma circular a mayores distancias (grafico a la derecha abajo).



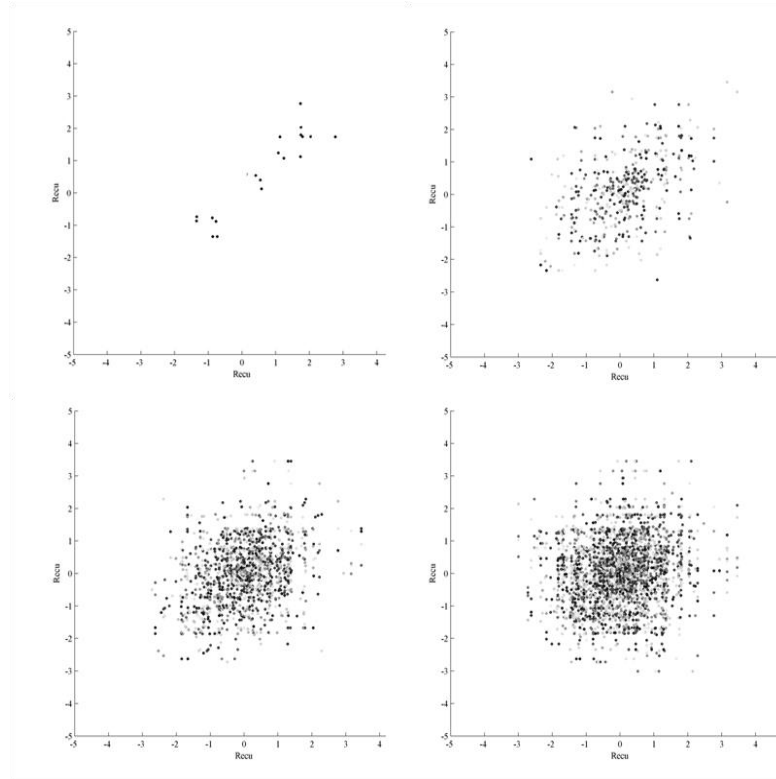


Ilustración 39 Nubes correlación diferida de los valores transformados de recuperacion de cobre (ReCu\_nscore) para: 20 metros (arriba a la izquierda); 40 metros (arriba a la derecha); 80 metros (abajo a la izquierda); y 120 metros (abajo a la derecha).

### 6.2.2 Variograma

Se decide realizar el variograma experimental en dos direcciones, considerando los parámetros expuestos en la tabla 5.

El variograma teórico de la variable transformada considera cuatro estructuras, y se modela según:

Tabla 8 Ajuste variograma

Tipo	Alcance Horizontales	Alcance Verticales	Meseta
Efecto pepita			0.26
Esférico	40	40	0.22
Esférico	150	150	0.21
Esférico	150	$\infty$	0.34

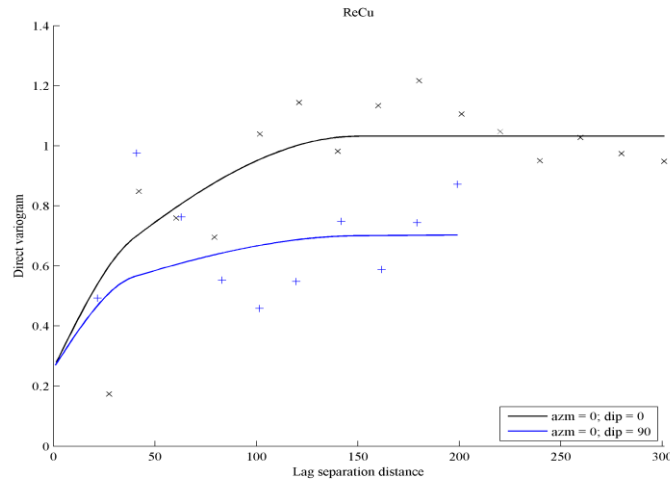


Ilustración 40 Variograma experimental y modelado de recuperación de cobre (ReCu)

### 6.2.3 Resultados

La simulación se realiza utilizando el método de bandas rotantes considerando 500 líneas, con un radio de búsqueda omnidireccional de 500 metros, utilizando 20 datos en total sin octantes. Se realizan 50 simulaciones y, para comparar la calidad de los métodos se utiliza un promedio simple de las realizaciones como el valor estimado.

Importante mencionar que para el cálculo de las métricas en las simulaciones, se calcula las métricas promedios de los escenarios y luego el promedio de estas métricas. A modo de ejemplo para el cálculo de la correlación entre el valor real y el estimado, primero se calcula un coeficiente de correlación por cada escenario simulado y el valor real, y posterior se promedia el resultado de esas correlaciones.

Tabla 9 Estadística 50 simulaciones.

	Mínimo	Máximo	Promedio
Simulación ReCu (%)	66.00	99.52	89.33

Los resultados del Jackknife indican un error promedio de -0.86, una desviación de 4.83 y una correlación de 0.58. Además se observa que 5 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 42). El promedio de las realizaciones indica un sesgo hacia valores mayores, con dificultad para predecir bien los valores reales de recuperación más bajos (ilustración 41).

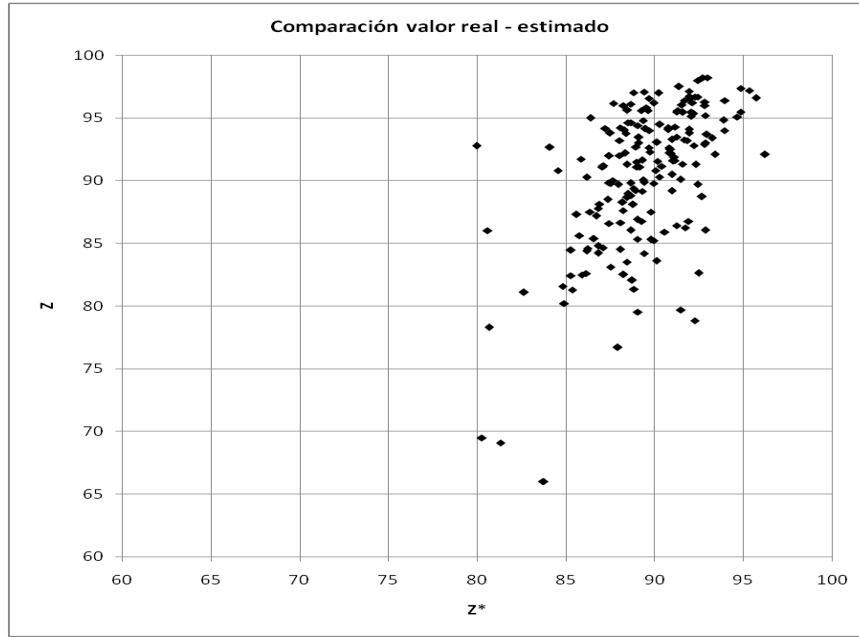


Ilustración 41 Nube de correlación entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados.

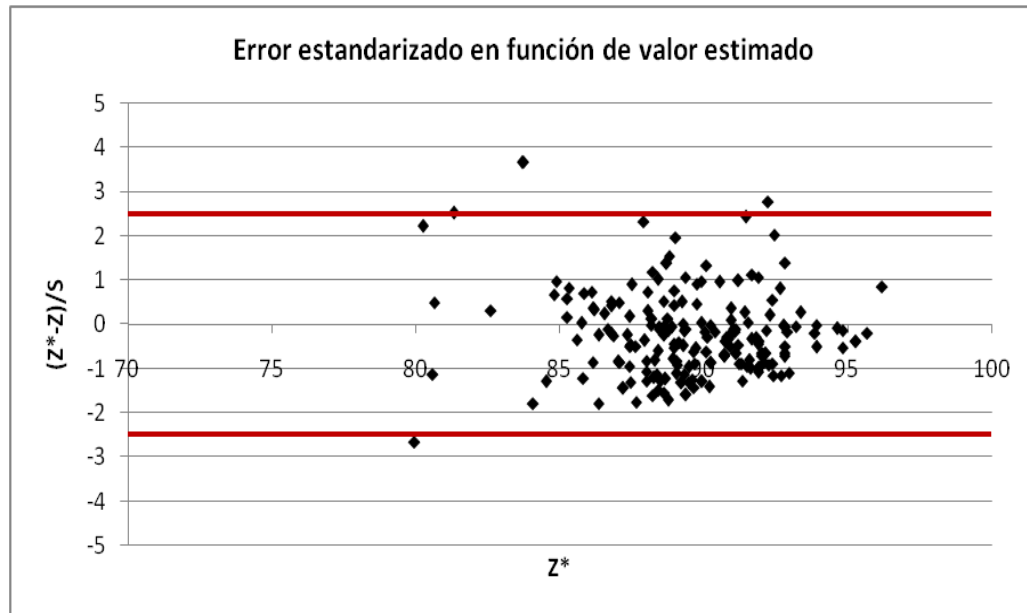


Ilustración 42 Nube de correlación entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados (jackknife).

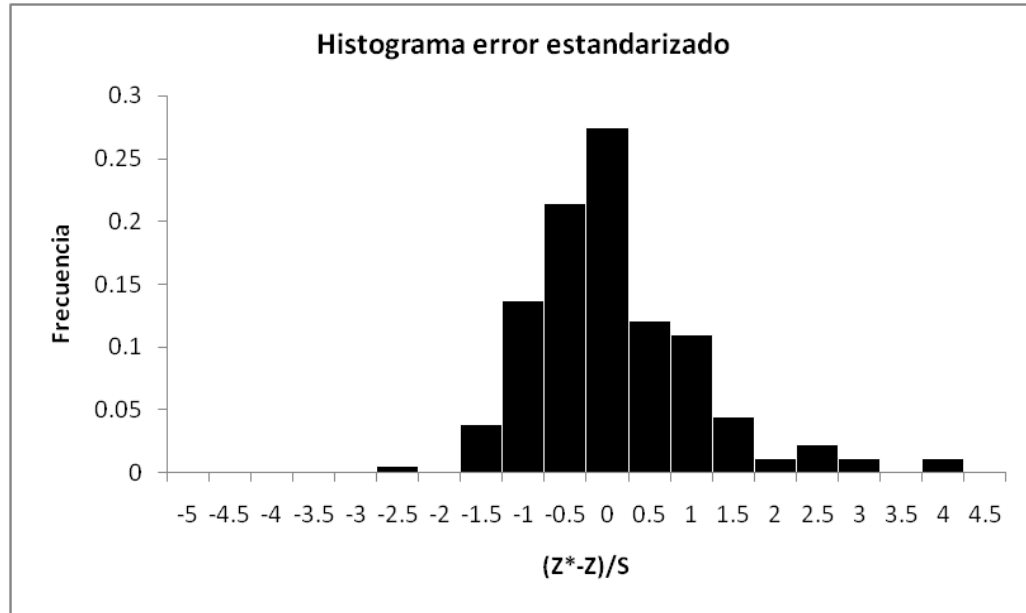


Ilustración 43 Histograma de errores estandarizados (jackknife).

### 6.3 Cosimulación de recuperación de cobre y ley de cobre total

Debido al carácter heterotópico de los datos en estudio, donde la variable de interés cuenta con un muestreo bastante menor que el resto de las variables, se realiza una cosimulación con la ley de cobre total. Si bien en el estudio exploratorio se observó que no hay demasiada correlación, el fin de este método es aprovechar la gran cantidad de datos que la covariable posee.

#### 6.3.1 Transformación y validación de los datos

Al igual que en el punto anterior, se realiza la transformación de los datos a gaussianos. Los resultados de la transformación de recuperación de cobre se pueden ver en los puntos anteriores. Para el caso de ley de cobre total se tiene una media de 0 y una desviación estándar de 1.

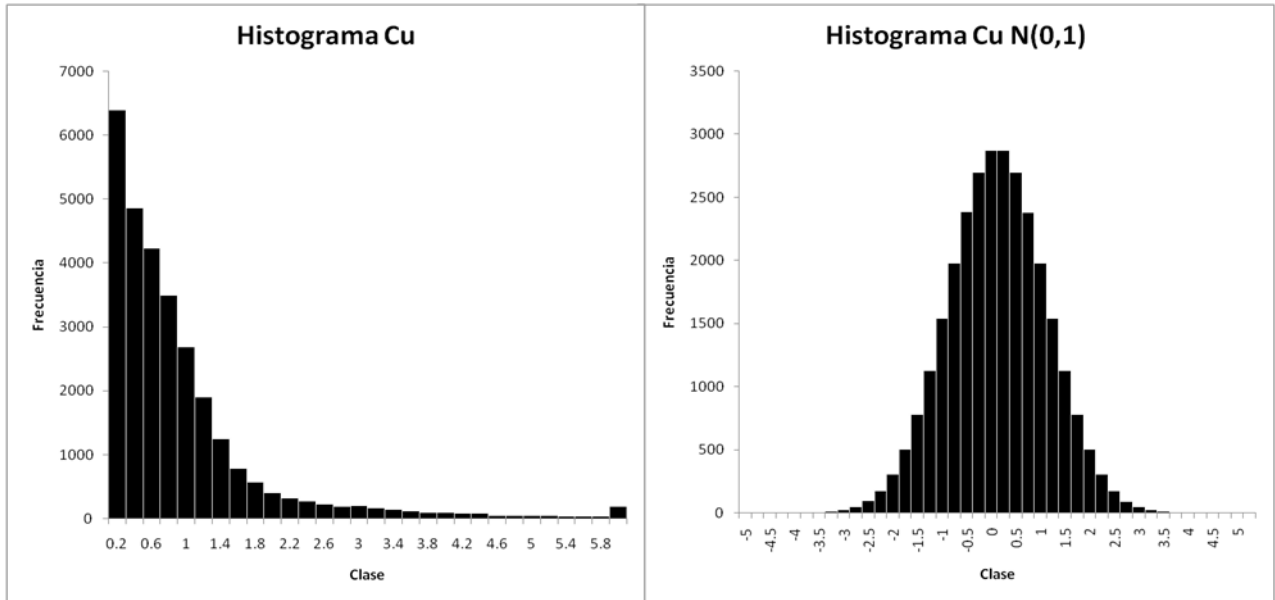


Ilustración 44 Histograma de ReCu e histograma de la variable transformada ReCu N(0,1).

### 6.3.2 Variograma

Se decide calcular los variogramas experimentales (directos y cruzados) en dos direcciones, considerando los parámetros expuestos en la tabla 5.

Los variogramas teóricos de las variables transformadas consideran cuatro estructuras, y se modelan según:

Tabla 10 Ajuste variogramas directos y cruzados

Tipo	Alcance Horizontales	Alcance Verticales	Meseta	
Efecto pepita			0.30	0.01
			0.01	0.00
Esférico	40	40	0.25	0.00
			0.00	0.00
Esférico	150	150	0.22	0.09
			0.09	0.75
Esférico	150	$\infty$	0.35	0.04
			0.04	0.35

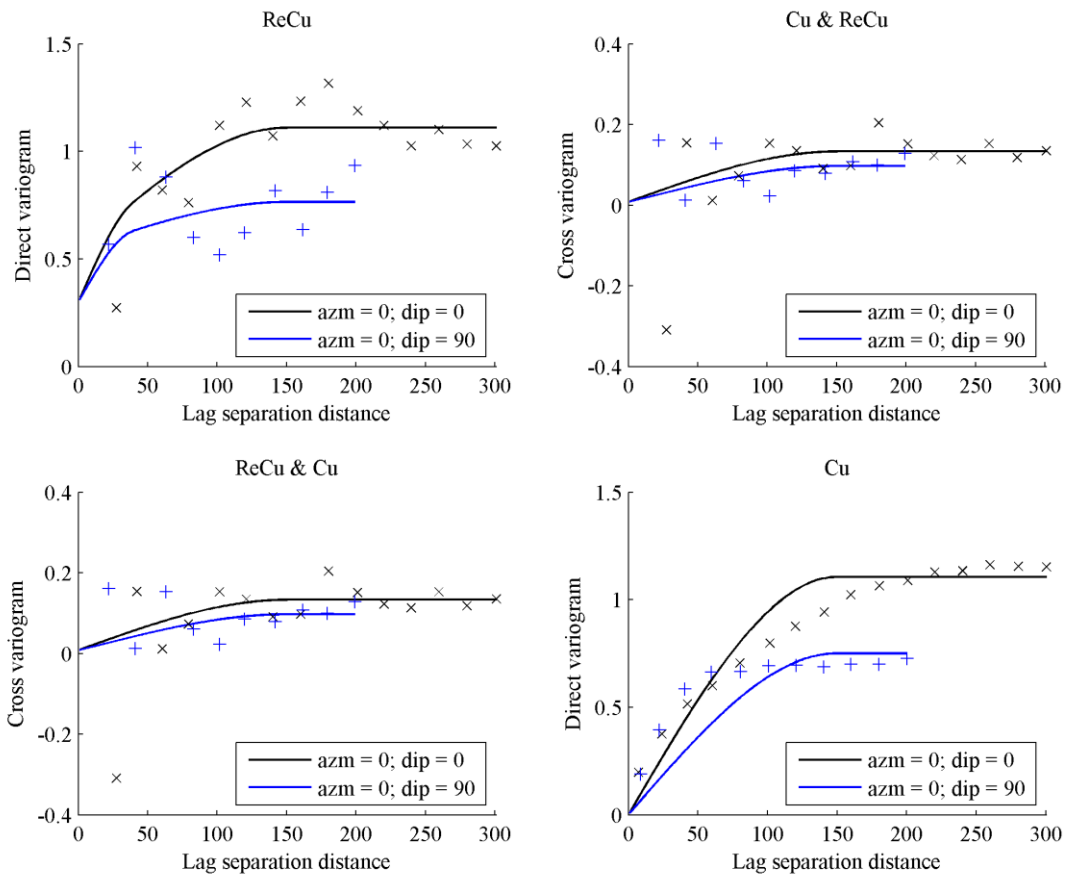


Ilustración 45 Variogramas directos y cruzados experimentales y modelados de recuperación de cobre (ReCu) y ley de cobre total (Cu).

### 6.3.3 Resultados

La cosimulación se realiza utilizando el método de bandas rotantes considerando 500 líneas, con un radio de búsqueda omnidireccional de 500 metros, utilizando 20 datos en total sin octantes. Se realizan 50 cosimulaciones y para comparar la calidad del método se utiliza un promedio simple de las realizaciones como el valor estimado.

Tabla 11 Estadística 50 simulaciones, para recuperación y cobre total.

		Mínimo	Máximo	Promedio
Cosimulación	ReCu (%)	66.00	98.85	90.50
	Cu %	0.06	6.00	1.01

Los resultados del Jackknife para el caso de recuperación de cobre (ReCu) indican un error promedio de 0.22, una desviación de 5.59 y una correlación de 0.32. Además se observa que 3 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 47). El promedio de las realizaciones indica un sesgo hacia valores mayores, con dificultad para predecir bien los valores reales de recuperación más bajos (ilustración 46).

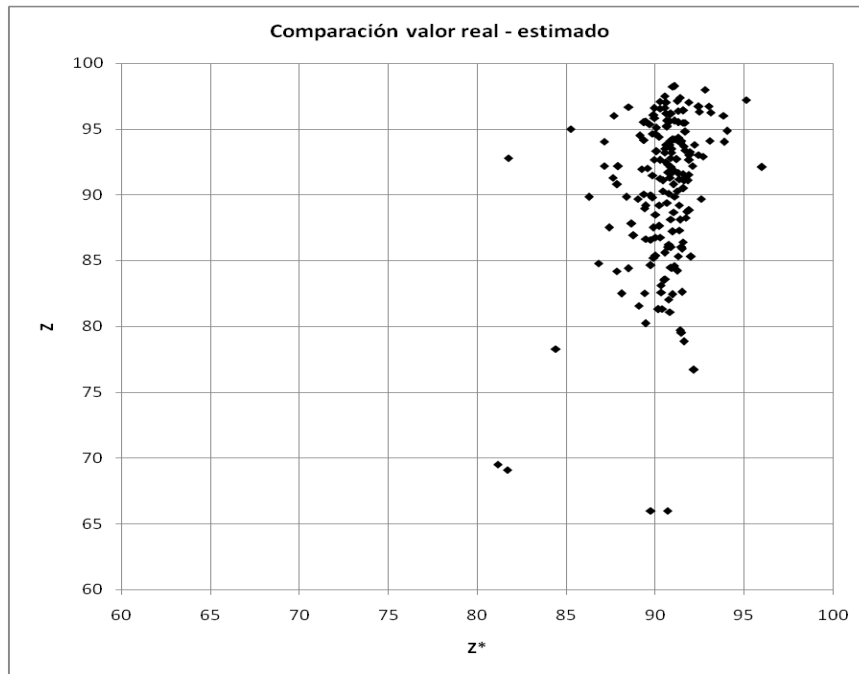


Ilustración 46 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores cosimulados (jackknife).

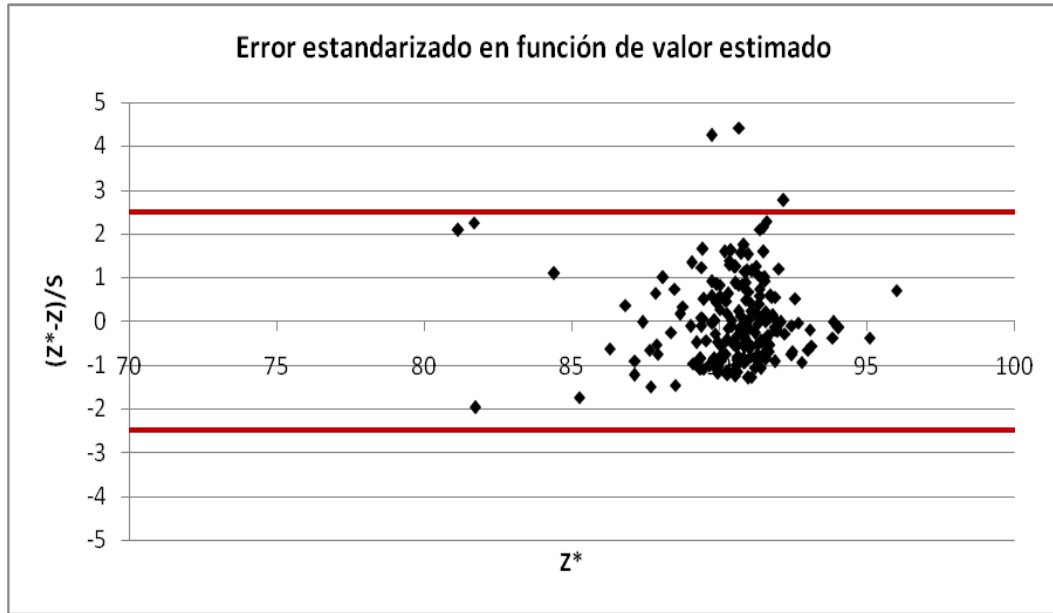


Ilustración 47 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre el promedio simple de los valores cosimulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los cosimulados (jackknife).

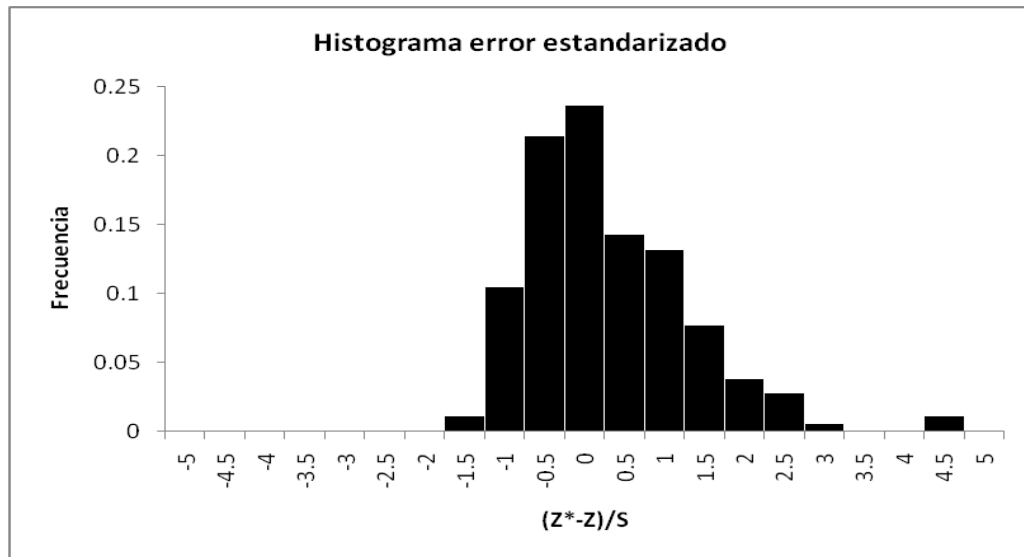


Ilustración 48 Histograma de errores estandarizados de cobre recuperado (jackknife).

Los resultados del Jackknife para el caso de la cosimulación de ley de cobre indican un error promedio de -0.04, una desviación de 0.41 y una correlación de 0.82. Además se observa que 8 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 50). Por otro lado se ve que el método tiene capacidad para predecir valores altos (ilustración 49).



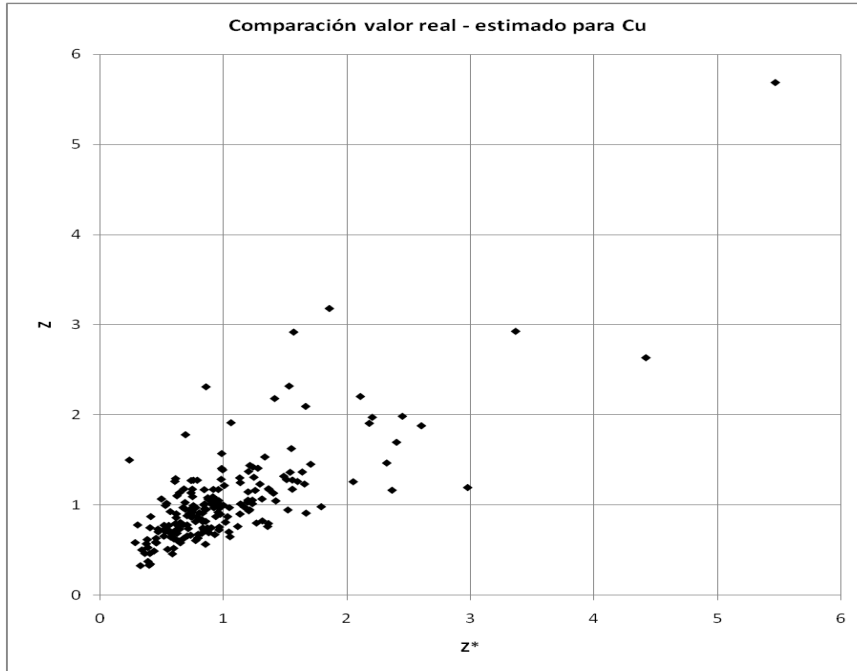


Ilustración 49 Nube de correlación para ley de cobre (Cu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores cosimulados (jackknife).

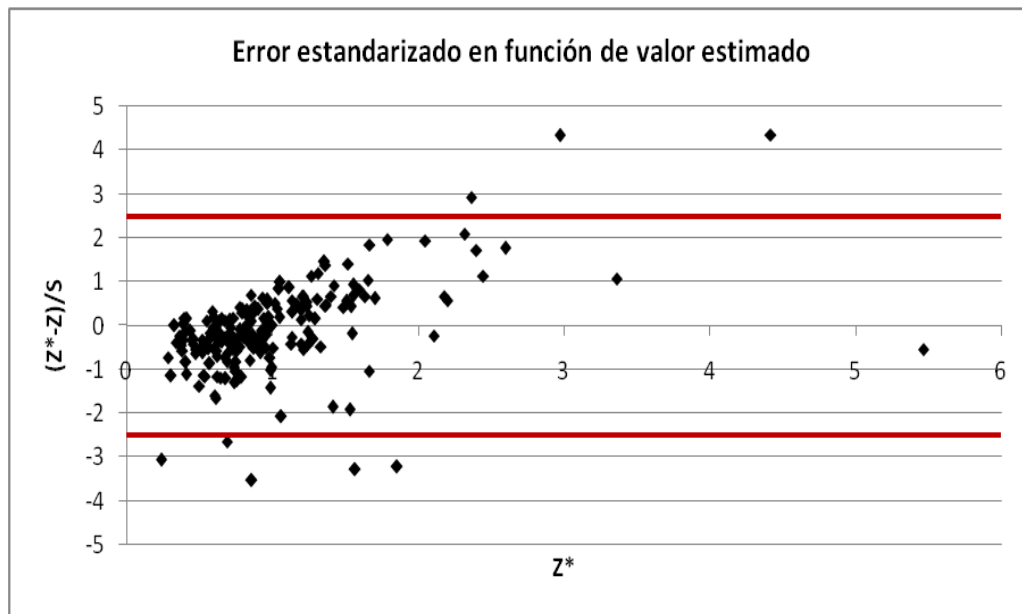


Ilustración 50 Nube de correlación para ley de cobre (Cu) entre el promedio simple de los valores cosimulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los cosimulados (jackknife).

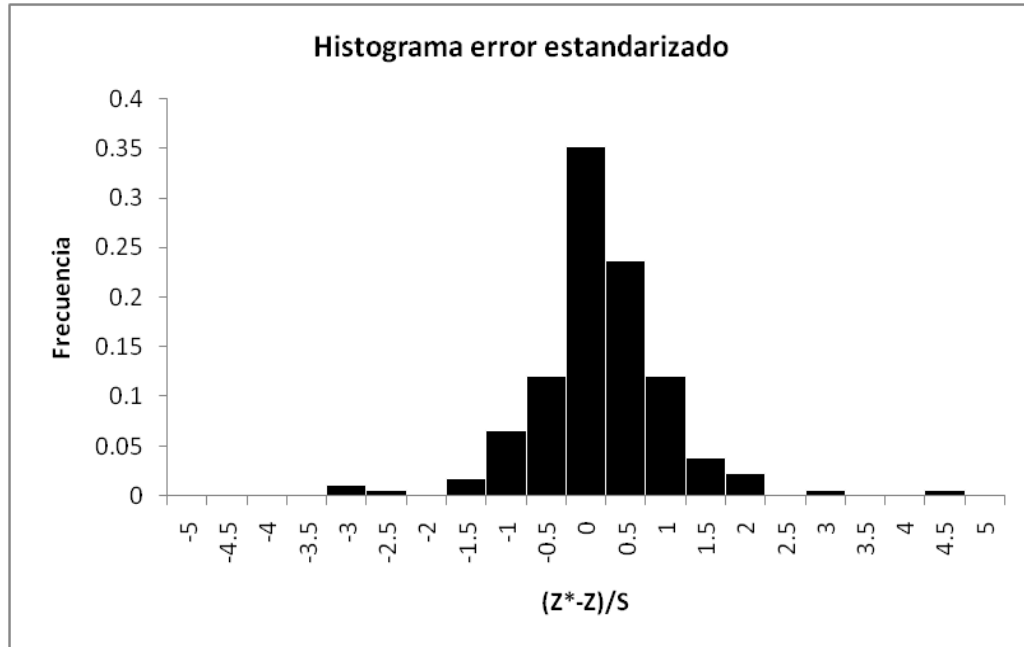


Ilustración 51 Histograma de errores estandarizados de ley de cobre (Cu) (jackknife).

## 6.4 Simulación recuperación de cobre por unidad geológica

Como cuarto modelo se emplea la simulación de recuperación de cobre (ReCu) en función de unidades geológicas. Como se observó en el estudio exploratorio de datos, la recuperación está controlada fuertemente por parámetros geológicos, a saber: litología y alteración. Para poder incluir este input en el estudio es necesario estudiar el comportamiento variográfico de la recuperación para cada una de estas unidades.

Para un primer acercamiento, se asume conocida la UG a la cual pertenecen los puntos a simular, teniendo en cuenta que los datos separados para el Jackknife tienen información de litología, alteración y zona mineral, por consiguiente se sabe a qué UG pertenecen, es decir, realizar un Jackknife por cada UG.

### 6.4.1 Simulación de la recuperación de cobre en UGs conocidas.

En este acercamiento, como se describe más arriba, se simula la recuperación de cobre según UG conociendo como dato en cada punto del Jackknife el valor real de la UG en cuestión. Por un tema práctico, no se tomará en cuenta en el estudio los valores de recuperación en las UGs 4 y 5, ya que tienen muy pocos datos de recuperación.

Lo primero que se debe realizar es la transformación de la data real a datos gaussianos, para cada una de las unidades de manera independiente, y luego comprobar si tienen un carácter bigausiano. Los datos a transformar corresponden a 196 de la UG1; 86 de la UG2 y 84 de la UG3.

En la ilustración 52 se observa la transformación para la UG1, que muestra una forma de campana de Gauss. En la ilustración 53 se observa que el comportamiento de las nubes de correlación diferida para distancias pequeñas tiene una forma de elipse y para distancias mayores pierde correlación y muestra una forma redonda, por lo que se asume que cumple con un carácter bigausiano.

Este ejercicio se realiza para las otras dos unidades con resultados similares.

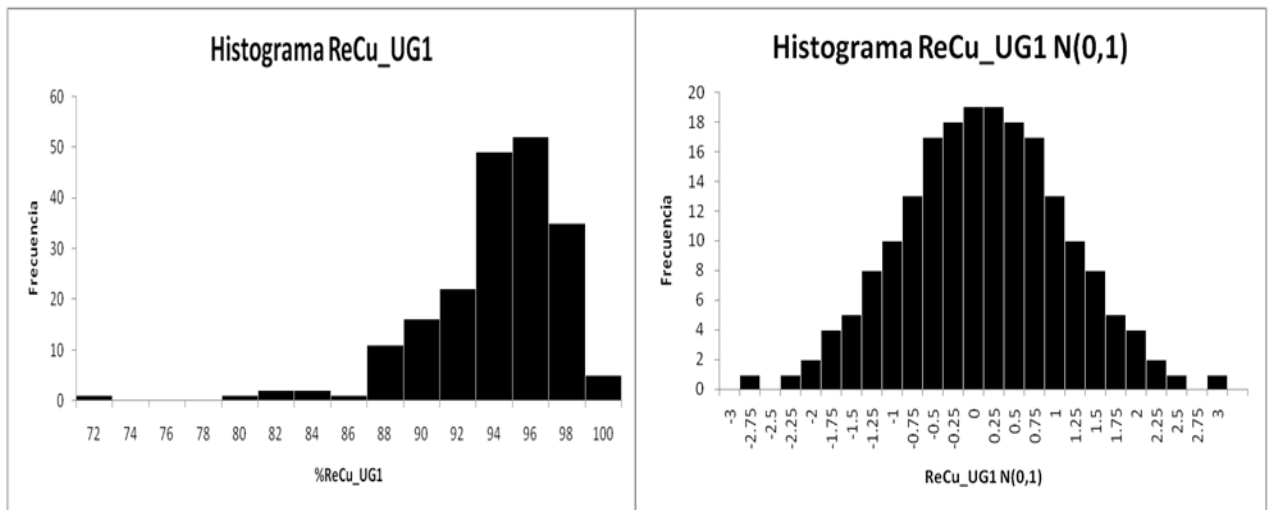


Ilustración 52 Comparación de histograma ReCu e histograma de la variable transformada ReCu  $N(0,1)$ , para los datos de la UG1.

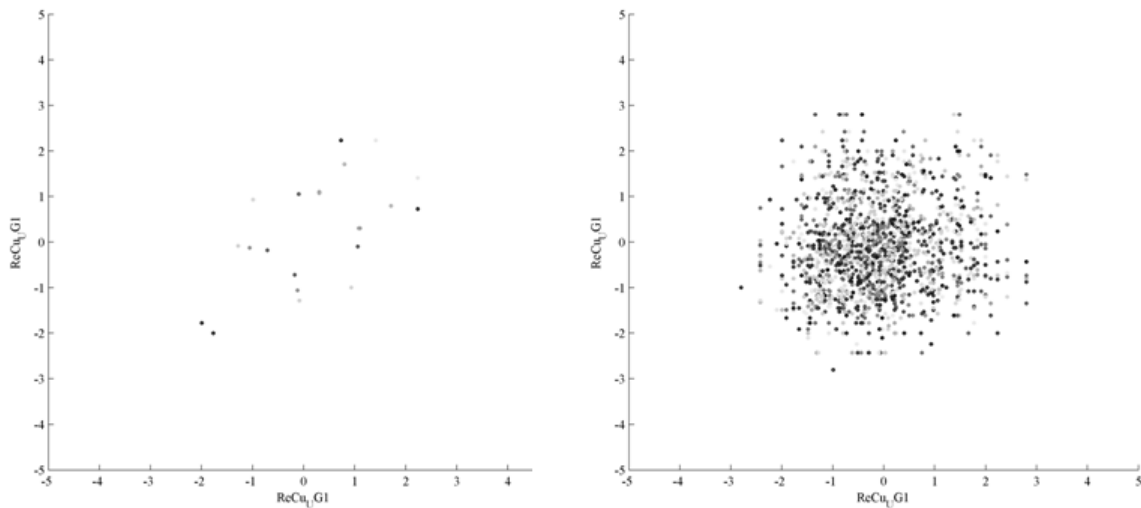


Ilustración 53 Nube correlación diferida de los valores transformados de recuperación de cobre, correspondientes a la UG1 para: 20 metros (izquierda); y 180 metros (derecha).

#### 6.4.1.1 Variografía

Se decide realizar el variograma experimental en forma omnidireccional, utilizando los parámetros de la tabla 12, esto debido a la poca cantidad de datos que se tienen de recuperación de cobre por unidad geológica. El variograma teórico de la variable transformada considera tres estructuras, y se modela según:

Tabla 12 Parámetros variograma experimental.

	Omnidireccional
Azimut [°]	0
Tolerancia Azimut [°]	90
Dip [°]	0
Tolerancia Dip [°]	90
Paso [m]	20
Numero de pasos	15
Tolerancia paso [m]	10

Tabla 13 Ajuste variografico para las recuperaciones de cobre según su UG.

Tipo	Alcance omnidireccionales	Meseta		
		UG1	UG2	UG3
Efecto pepita		0.14	-	-
		-	0.62	-
		-	-	0.53
Esférico	40	0.15	-	-
		-	0.00	-
		-	-	0.37
Esférico	150	0.73	-	-
		-	0.44	-
		-	-	0.03

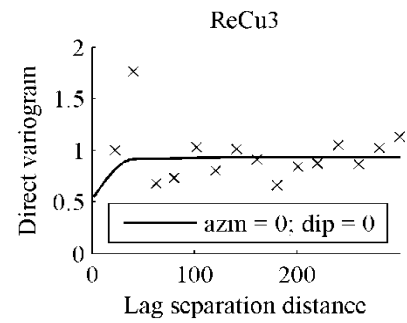
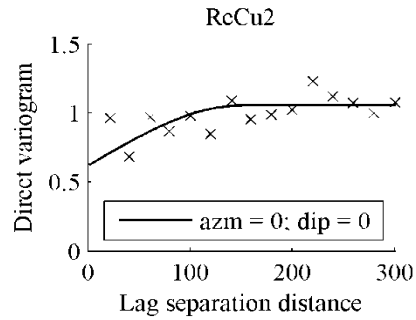
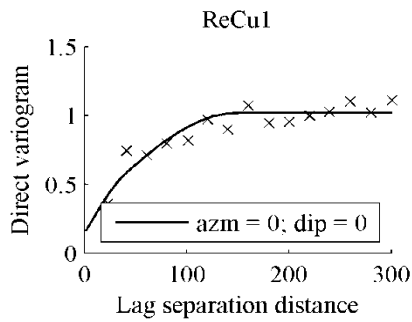


Ilustración 54 Variogramas experimentales y modelados de la recuperación de cobre (ReCu) para las distintas UGs, donde ReCu1, ReCu2 y ReCu3 corresponden a la ReCu en UG1, UG2 y UG3 respectivamente.

### 6.4.1.2 Resultados

La simulación se realiza utilizando el método de bandas rotantes considerando 500 líneas, con un radio de búsqueda omnidireccional de 500 metros, utilizando 20 datos en total sin octantes para el condicionamiento. Se realizan 50 simulaciones y, para comparar la calidad del método, se utiliza un promedio simple de las realizaciones como el valor estimado.

Tabla 14 Estadística 50 simulaciones, para recuperación de cobre según UG.

		Mínimo	Máximo	Promedio
Sim. UG real	UG1 ReCu (%)	68.22	99.41	92.77
	UG2 ReCu (%)	66.07	98.99	88.75
	UG3 ReCu (%)	66.00	98.47	86.12

Los resultados indican un error promedio de -0.57, una desviación de 4.13 y una correlación de 0.72. Además se observa que 4 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 56). El promedio de las realizaciones indica un sesgo hacia valores mayores, con dificultad para predecir bien los valores reales de recuperación más bajos (ilustración 55).

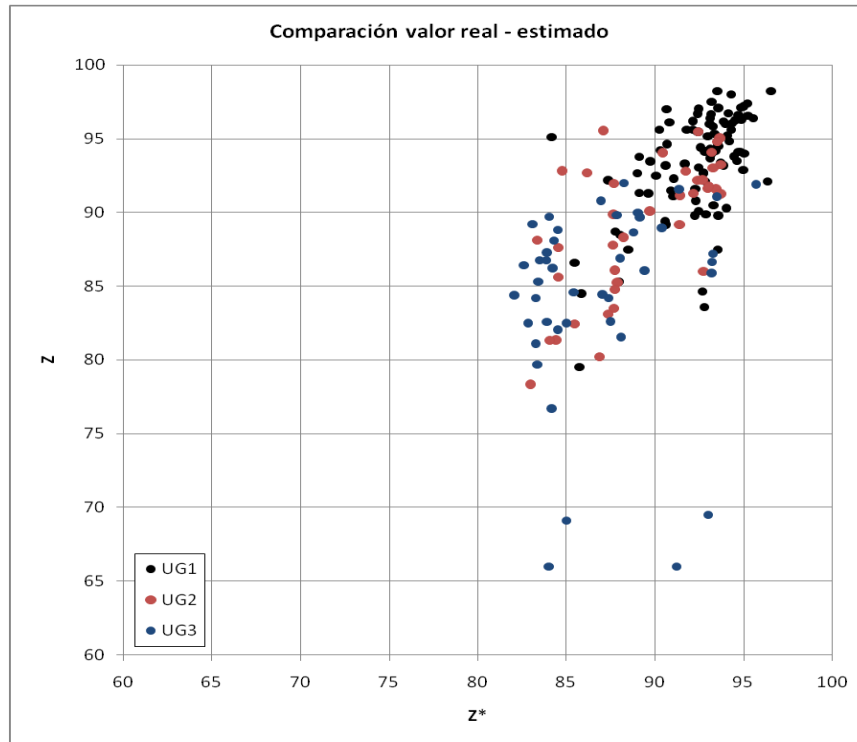


Ilustración 55 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados por UG conocidas (jackknife).

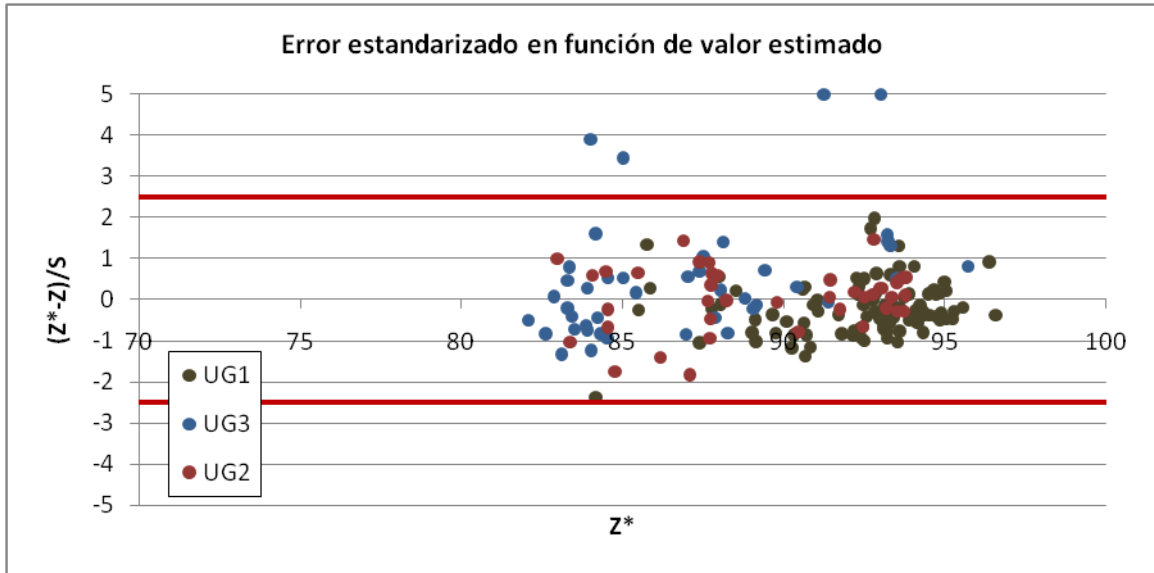


Ilustración 56 Nube de correlación para recuperación de cobre por UGs conocidas, entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados (jackknife).

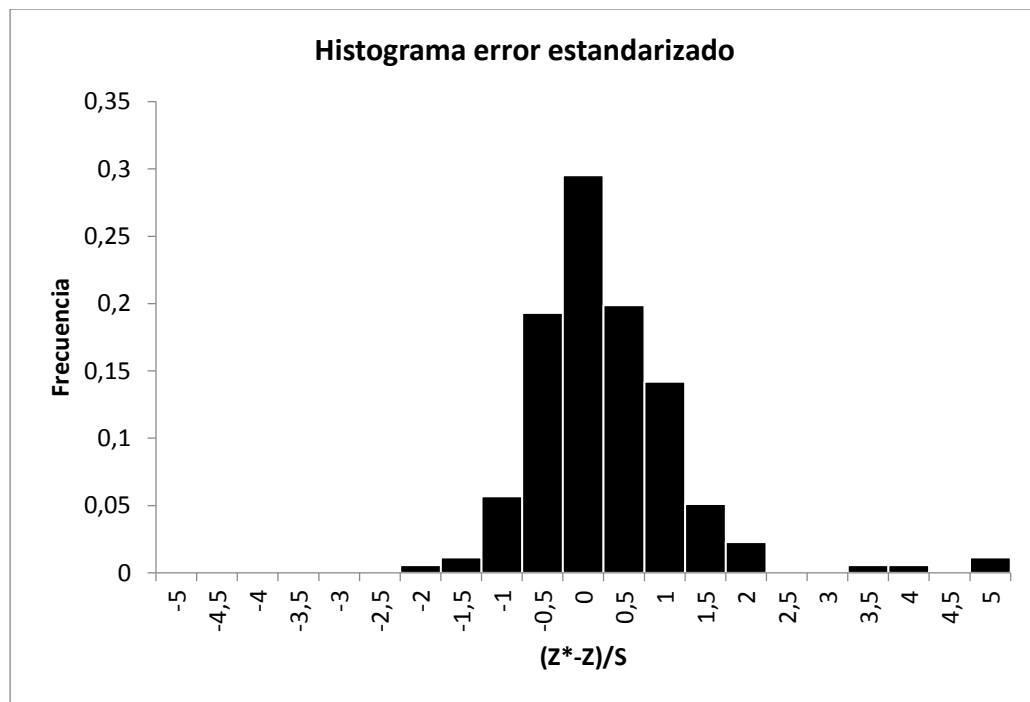


Ilustración 57 Histograma errores estandarizados de recuperacion de cobre por UGs conocidas (valor real).

#### 6.4.2 Simulación plurigaussiana de unidades geológicas (UG)

En caso de querer estimar la recuperación en todo el dominio por cada UG, es necesario en un primer paso generar un modelo que indique el tipo de unidad geológica en todo el campo, como se entiende los datos que se manejan entregan información parcial y puntual de tipos de rocas; para solucionar este problema se realiza una simulación plurigaussiana de las unidades geológicas en todo el dominio, que excluye datos usados para el Jackknife.

Las unidades a simular corresponden a:

- UG1: hipógeno en roca caja alteraciones tardías (Qz, Arg, Cl).
- UG2: hipógeno en roca caja alteraciones tempranas (K).
- UG3: hipógeno en litología distinta a roca caja.
- UG4: zona mineral supérgena (suma de la UG4+ UG5)

Para realizar la simulación plurigaussiana es necesario definir una regla de truncación; en este caso debido al contacto complejo entre las unidades se estima seguir un patrón cronológico, partiendo desde la más joven a la más antigua.

Por geología se sabe que la roca caja está presente previo a la intrusión y mineralización del pórfido; asimismo que una vez intruido el pórfido se desarrolla, en un comienzo, la alteración potásica, y posterior a ésta la alteración argílica (esto claro, si es que existe formación de alteraciones hidrotermales). Por último, en el proceso típico de un yacimiento porfídico, se puede observar el desarrollo de minerales secundarios, producto de alteración supérgena.

Dicho lo anterior, la primera subdivisión que se hace es entre la unidad 4 (unidad más joven) y el resto. Posterior a esto, la segunda subdivisión ocurre entre la unidad 3, correspondiente a la mineralización hipógena no perteneciente a roca caja, y el resto de unidades. Finalmente la última subdivisión que se realiza es entre la unidad 1 y la unidad 2, correspondiente a la alteración potásica perteneciente a roca caja (la más antigua).

En resumen se tiene que: UG4 es la más joven, luego está la UG3, ésta a la vez es más joven que UG1, y por último la más antigua es la UG2



### 6.4.2.1 Variografía de funciones aleatorias gaussianas

Se calcula los variogramas experimentales para las tres funciones gaussianas, considerando los siguientes parámetros:

Tabla 15 Parámetros para variograma experimental funciones aleatorias gaussianas.

Omnidireccional	
Azimut [°]	0
Tolerancia Azimut [°]	90
Dip [°]	0
Tolerancia Dip [°]	22.5
Paso [m]	20
Numero de pasos	20
Tolerancia paso [m]	10

El variograma teórico de las variables transformadas considera cuatro estructuras, y se modela según:

Tabla 16 Ajuste variografico para las funciones gaussianas.

Función Gaussiana	Tipo	Alcance Horizontales	Alcance Verticales	Meseta
1	Gaussiano	400	400	1
2	Esférico	410	410	1
3	Esférico	475	475	1

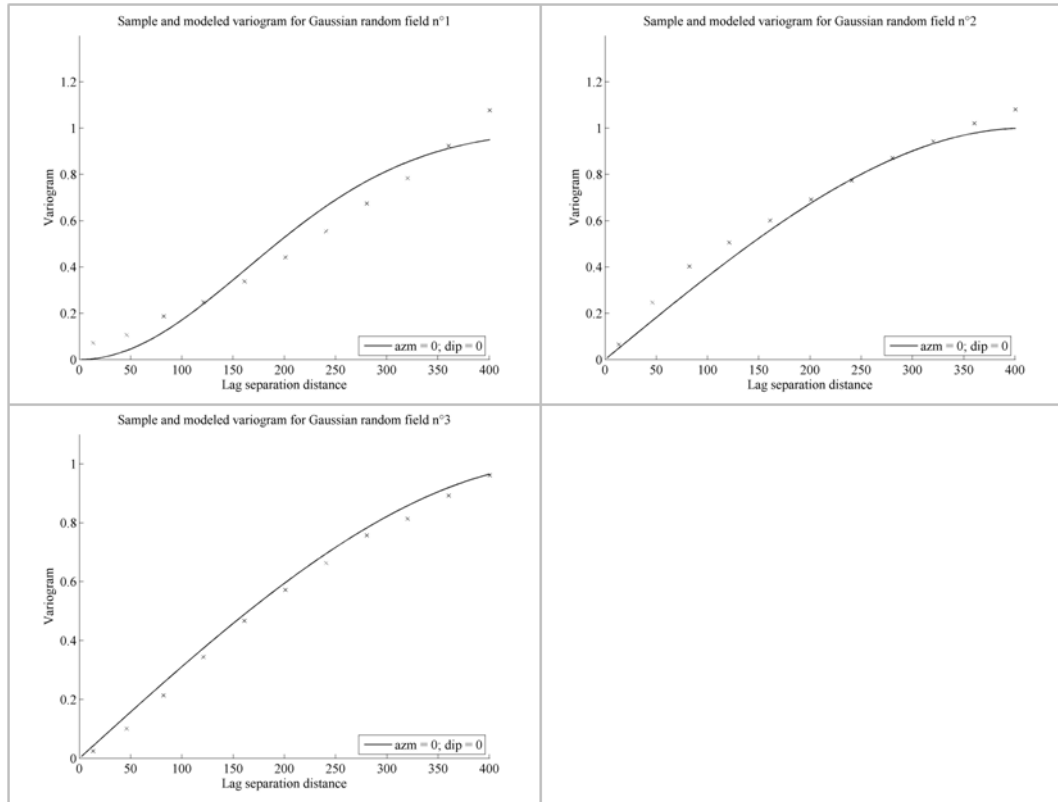


Ilustración 58 Variogramas modelados de funciones aleatorias gaussianas.

Para la definición de los umbrales de truncación entre tipos de roca, se utilizan proporciones globales. Los valores empleados corresponden a las proporciones que tienen las unidades dentro del muestreo desagrupadas en función de celdas de 200 metros cuadrados (tabla 17), que fueron utilizadas para el desagrupamiento de la ley de cobre total.

Tabla 17 Proporciones por UGs.

UG	Proporción
1	0.329
2	0.301
3	0.253
4	0.117

### 6.4.2.2 Resultados UG

Para la realización de la simulación plurigaussiana, se emplean los siguientes parámetros:

Tabla 18 Parámetros simulación plurigaussiana.

	Este	Norte	Cota(z)
Radio [m]	200	200	200
Angulo	0	0	0
Datos	3 datos por octante		
Inicio grilla [m]	0	0	0
Número de puntos	135	165	86
Tamaño	10	10	10

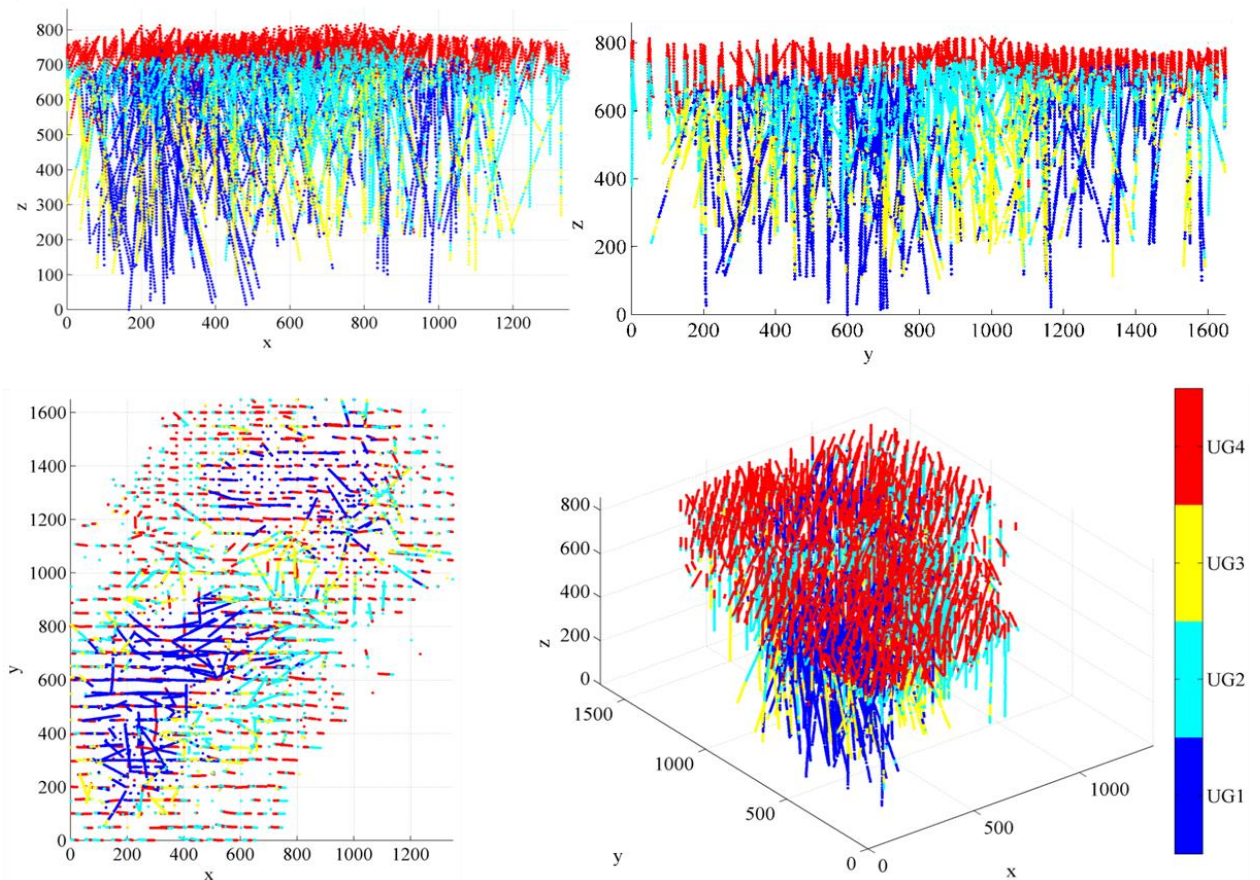


Ilustración 59 Mapas de ubicación de los datos de unidades geológica (UG). Arriba a la izquierda vista perfil este-este; arriba a la derecha vista perfil norte-sur; abajo a la izquierda vista planta; abajo a la derecha vista isométrica.

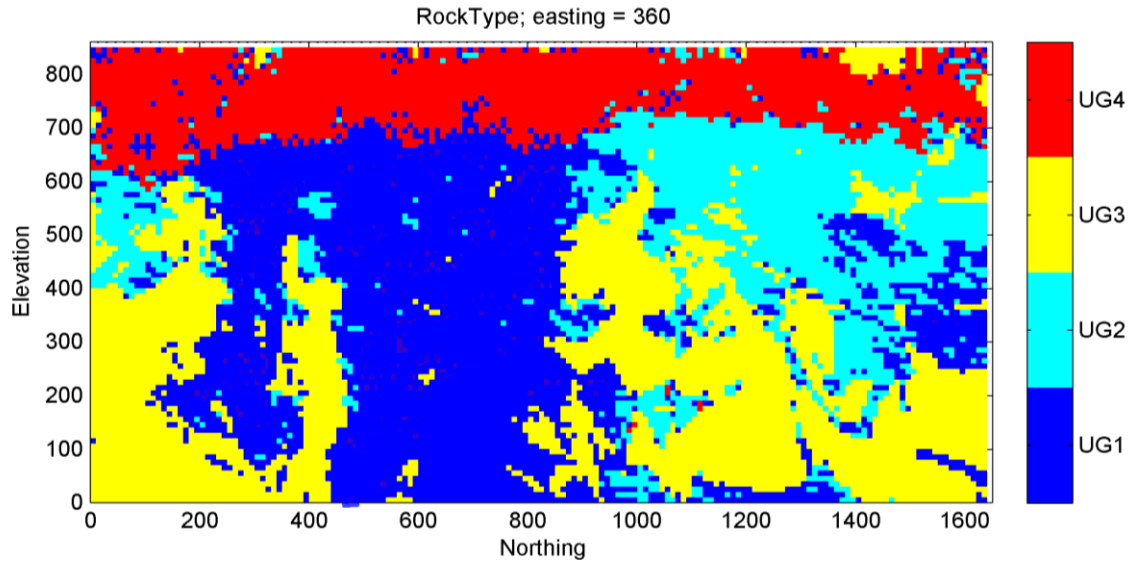
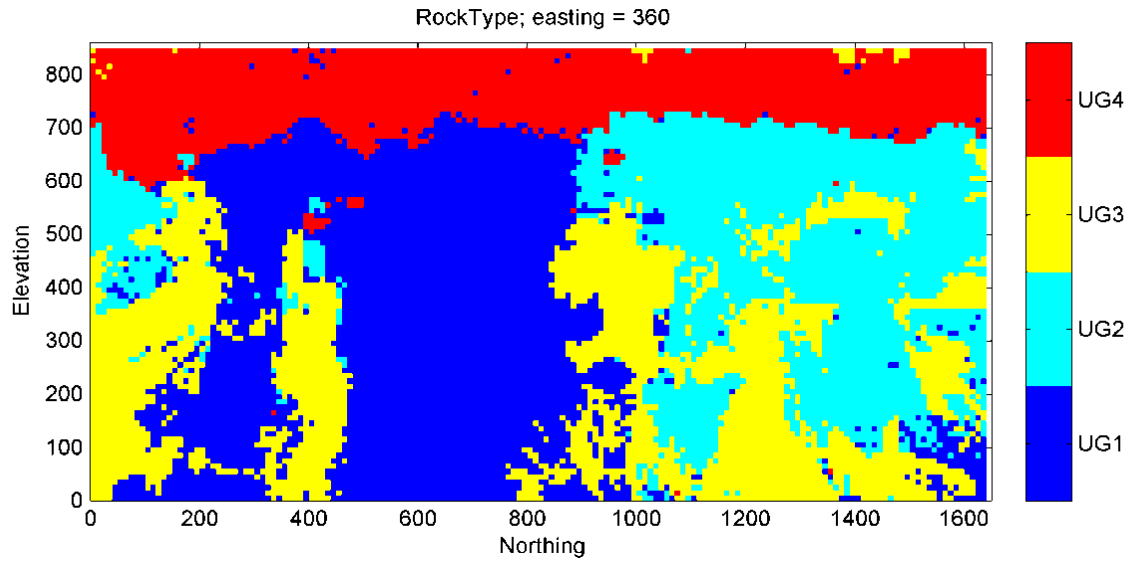


Ilustración 60 Vista perfil en este = 360m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.

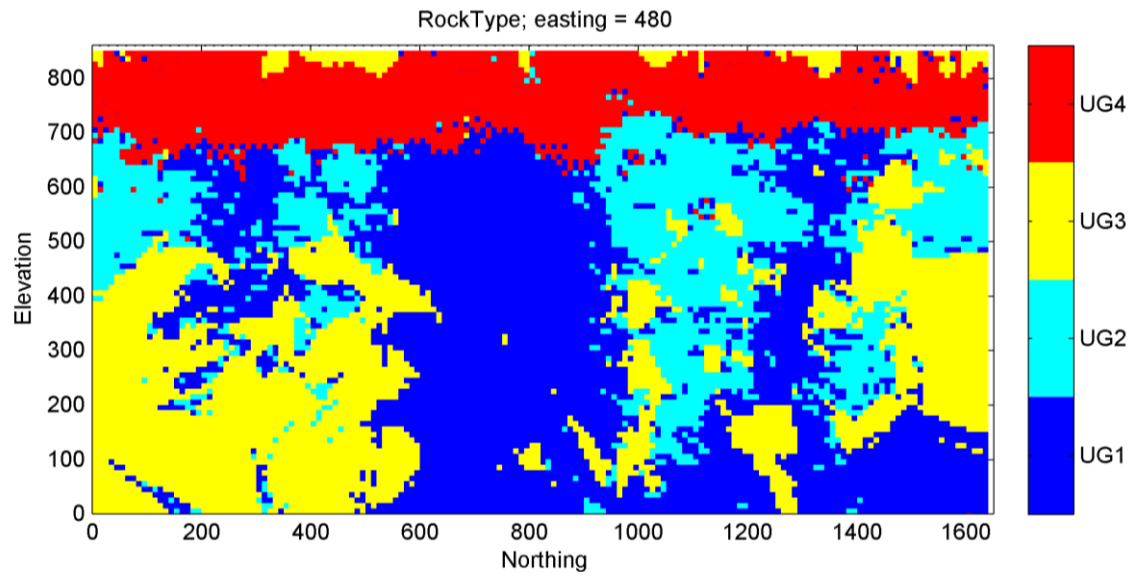
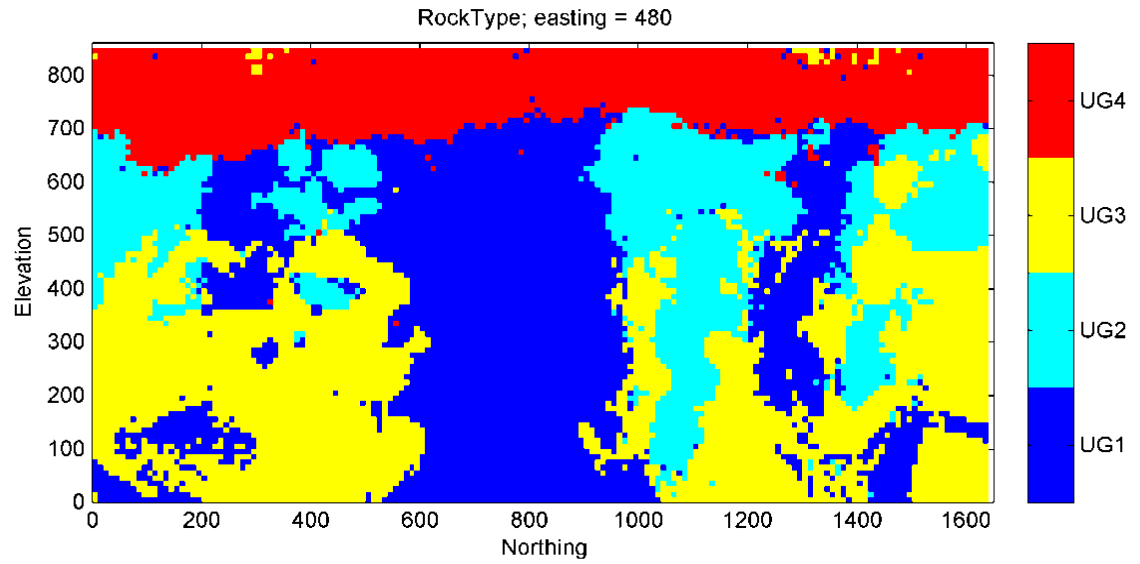


Ilustración 61 Vista perfil en este = 480m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.

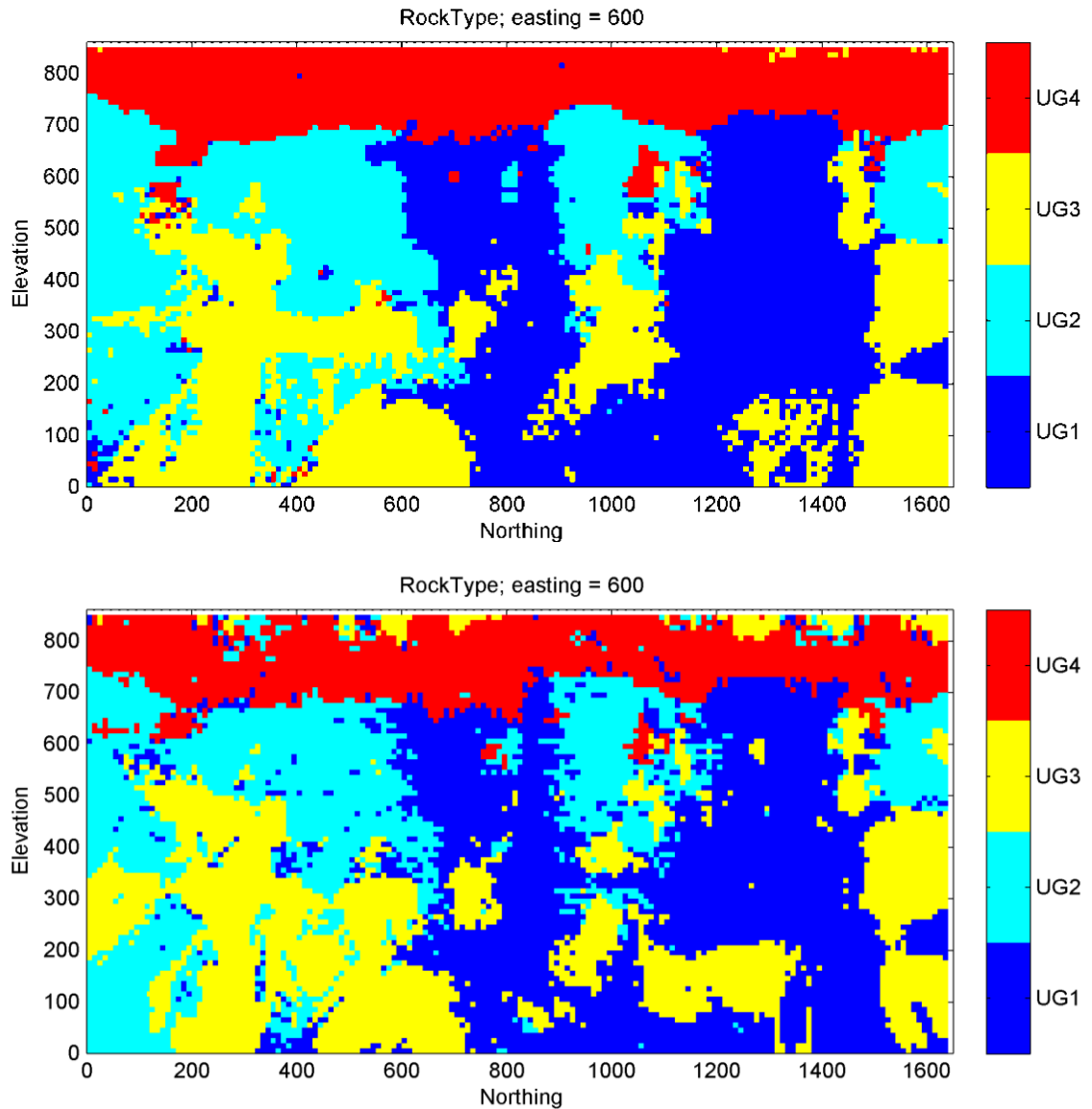


Ilustración 62 Vista perfil en este = 600m. Perfil superior muestra la moda de las simulaciones de UG, perfil inferior muestra resultados de la realización #1.

#### 6.4.2.3 Resultados simulación de recuperación por UGs simuladas

Con respecto a las simulaciones de las unidades geológicas, en una inspección visual el modelo tiene una forma similar a los datos, es decir: la unidad 4 está presente en la zona alta mayoritariamente (ilustración 60 a 62); la unidad 1 presenta dos cúmulos en los sectores medios, que se grafican bien en la ilustración 62.

En cuanto a los datos simulados en las muestras del Jackknife, se utiliza la moda de 20 realizaciones como el valor estimado para la unidad geológica, esto debido al

índole categórico de la variable, teniendo un índice de acierto de 85%, lo que se considera aceptable.

Con respecto a la simulación de recuperación se realiza con el método de bandas rotantes considerando 500 líneas, con un radio de búsqueda omnidireccional de 500 metros, utilizando 20 datos en total sin octantes para el condicionamiento. Se realizan 50 simulaciones y para comparar la calidad del método se utiliza un promedio simple de las realizaciones como el valor estimado.

Tabla 19 Estadística 50 simulaciones, para recuperación de cobre según UG simulada.

		Mínimo	Máximo	Promedio
Sim. UG simulada	UG1 ReCu (%)	67.33	99.20	92.85
	UG2 ReCu (%)	67.85	98.07	87.79
	UG3 ReCu (%)	66.00	97.60	84.09

Los resultados indican un error promedio de 0.08, una desviación de 4.46 y una correlación de 0.64. Además se observa que 4 datos tuvieron un error estandarizado mayor a 2.5 (ilustración 64). El promedio de las realizaciones indica un sesgo hacia valores mayores, con dificultad para predecir bien los valores reales de recuperación más bajos (ilustración 63).

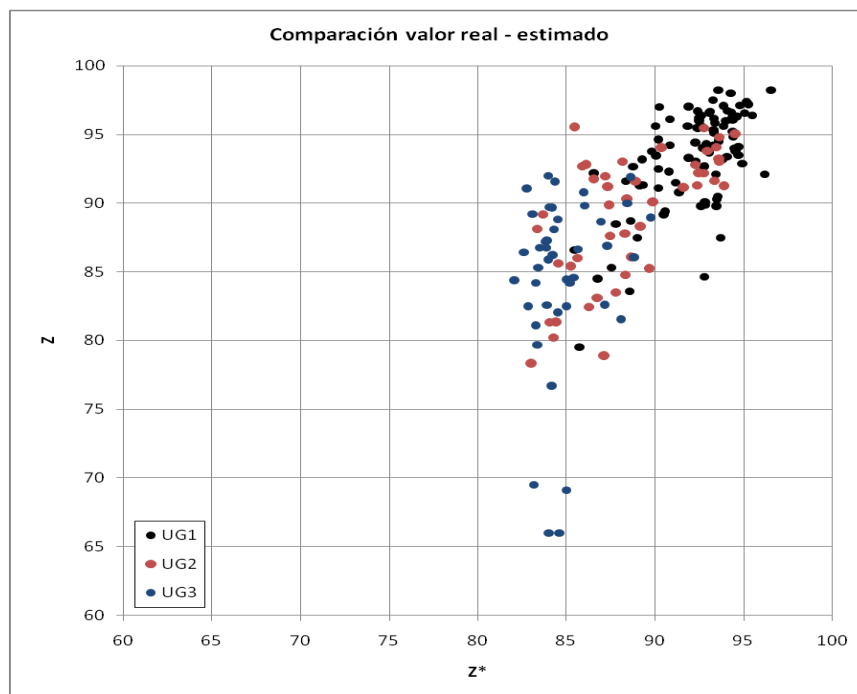


Ilustración 63 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre los valores reales y el promedio simple de los valores simulados por UG, cuando la UG es simulada.

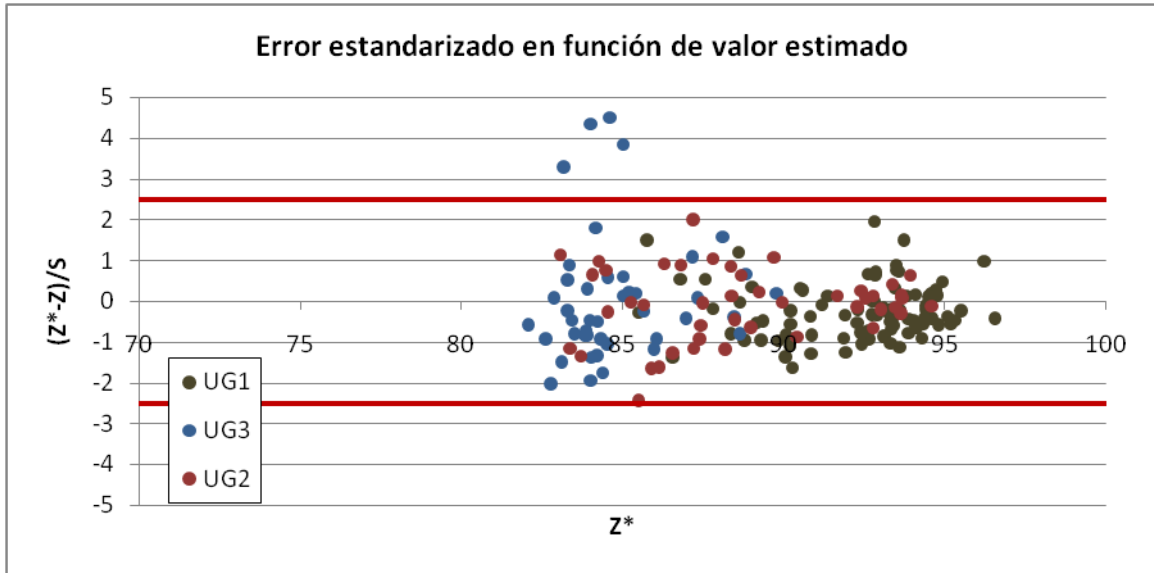


Ilustración 64 Nube de correlación para recuperación de cobre (ReCu) entre el promedio simple de los valores simulados y el error estandarizado entre el valor real y el promedio de los simulados.

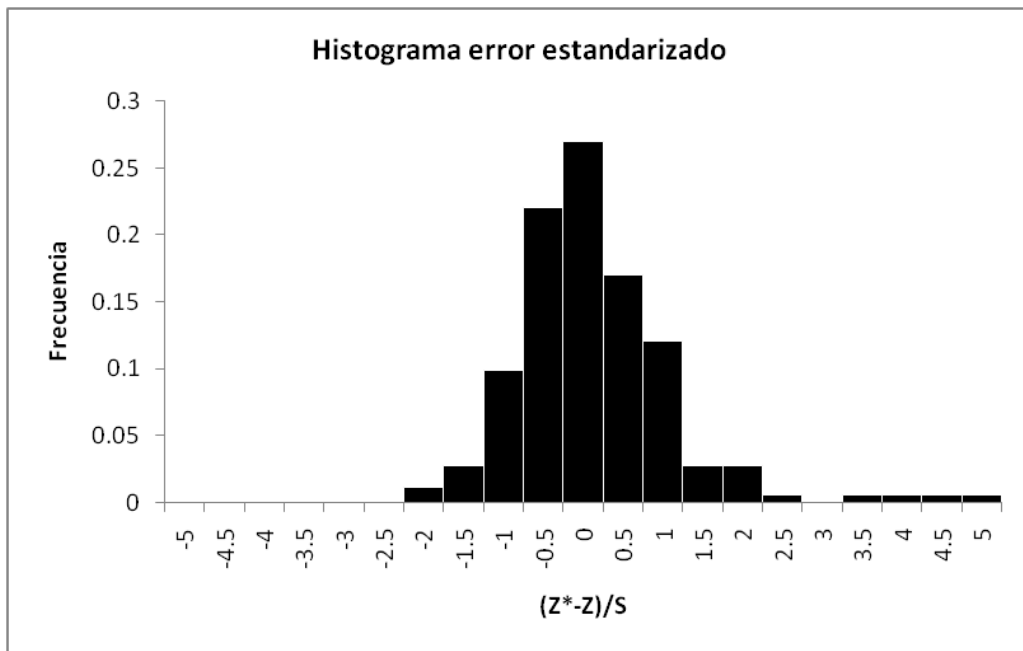


Ilustración 65 Histograma de los errores estandarizados de recuperación de cobre por UG, cuando ésta es simulada.



## 7 DISCUSION Y CONCLUSIONES

En este trabajo se comparan cuatro enfoques para estimar la recuperación metalúrgica de cobre en un dominio en particular, correspondiente a un pórfido de cobre. Se trabaja con variables categóricas: litología, alteración y zona mineral; variables continuas como ley de cobre total y soluble y, por supuesto, la variable de interés: recuperación de cobre (ReCu).

Las metodologías empleadas incluyen: estimación, simulación, cosimulación en conjunto con ley de cobre, y simulación por unidad geológicas conocida y también simulada.

Para comparar estas metodologías se utiliza Jackknife sobre una parte de la muestra, correspondiente a un tercio de los datos de recuperación de cobre.

### 7.1 Acerca del estudio exploratorio de datos

El primer problema que se encuentra en este trabajo es el muestreo altamente heterotópico y escaso de muestras de la variable en estudio. Con un total de 603 muestras para todo el dominio, esto significa que hay un muestreo menor al 0.01% con respecto al resto de las variables, tales como ley de cobre y variables categóricas.

Una segunda problemática que se observa es la poca correlación de la recuperación con leyes de cobre, esto visualizado a través de nubes de correlación y en particular con el comportamiento que tienen estas variables en distintos tipos de unidades geológicas. Por un lado, la ley de cobre tiene un comportamiento más gradual en los contactos, haciendo estos del tipo blando, y por otro lado la recuperación muestra que existe un control geológico de tipo alteración y litológico, surgiendo la duda: ¿cuál sería la causal de esto?

Si bien el fin de este estudio no es explicar los factores que controlan la recuperación de cobre, el entendimiento de esto sí es importante para tomar en consideración mejores modelos de estimación. El fuerte control litológico, tipo de alteración y zona mineral puede estar dado por la suma de las siguientes causas:

- La cantidad de material fino entorpece la recuperación en el proceso;
- La mineralización al ser muy diseminada, induce a que los minerales no alcancen la liberación necesaria en el proceso de conminución, afectando el proceso de recuperación.

- Ciertas especies de mineral tienen un mejor comportamiento al ser procesados, como los presentes en mineralización secundaria como la calcosina y la covelina.

Como se observa, estas variables no tienen una correlación intrínseca con la cantidad de ley de cobre, sino más bien son características inherentes de las variables categóricas; lo que es concordante con el estudio exploratorio, donde se observa poca correlación entre ley y recuperación y donde sí hay un control geológico en la cantidad de recuperación.

En función de lo anterior se generan unidades geológicas, para agrupar estas variables categóricas en una sola. Estas se resumen en:

- UG1: hipógeno en litología distinta a roca caja.
- UG2: hipógeno en roca caja alteraciones tardías (Qz, Arg, Cl).
- UG3: hipógeno en roca caja alteraciones tempranas (K).
- UG4: zona mineral supérgena en roca caja
- UG5: zona mineral supérgena en litología distinta a roca caja.

Se observa que la litología que tiene un peor desempeño, en cuanto a recuperación de cobre, es la roca caja. Por otro lado las alteraciones más tempranas, llámese potásica, tienen peor recuperación de cobre. En relación al agrupamiento de las unidades geológicas según estas características, tenemos que: UG1 genera una mayor recuperación que la UG2, y esta a su vez mejor que la UG3.

Las muestras en estas unidades están repartidas mayoritariamente en las zonas de hipógeno, es decir: UG1, UG2 y UG3.

Con respecto a la ley de cobre soluble, debido a la localización y cantidad de datos disponibles, no se pudo ahondar más en la recuperación en las zonas con presencia de soluble, a saber, las partes más someras del estudio, donde se ubican las UG4 y UG5.

## **7.2 Acerca de los modelos**

Se realizaron cuatro enfoques: estimación por kriging, simulación, cosimulación con ley de cobre y simulación por unidad geológica.

En cuanto al método por kriging, se parte ignorando el hecho de que la variable en cuestión sea no aditiva, contraponiéndose al principio del kriging que es un estimar por ponderadores.

Lo positivo de este enfoque es que el modelo de kriging es el que requiere menos recursos computacionales, además de ser el método con el cual uno está más familiarizado. Por contrapartida, el método solo genera un valor determinístico en función de los input dados: variografía y plan de kriging, con lo cual no se puede generar un post procesamiento de los resultados como la probabilidad de alcanzar ciertos umbrales.

El segundo enfoque que es la simulación, requiere un poco más de recursos computacionales, además de trabajo previo, como es la transformación de datos a gaussianos y la verificación de que éstos cumplan con hipótesis de bigaussianidad. Por otro lado, este método tiene la ventaja de generar varios resultados posibles, con lo cual uno puede eventualmente generar modelos de probabilidad.

El tercer enfoque es la cosimulación en conjunto con ley de cobre total, este con el afán de aprovechar la gran cantidad de datos de ley que se dispone. Ahora bien, en el estudio exploratorio se demuestra que el comportamiento de estas variables no guarda mucha correlación. Este modelo requiere aún más recursos computacionales, además de más trabajo en la elaboración del modelo, debido a la variografía cruzada y la transformación gaussiana, además de probar la hipótesis de bigaussianidad para dos variables. Tiene a favor el hecho de generar varias imágenes estocásticas, con lo que es posible generar modelos de probabilidad, además de aprovechar, en cierta medida, la gran cantidad de datos de ley de cobre.

El último modelo trabajado es el de simulación por unidades geológicas; este enfoque es sin duda el que requiere más trabajo, y recursos computacionales. De partida hay que realizar la elección de unidades geológicas, mediante un estudio exploratorio de datos y análisis de contacto de éstas, además de la variografía para cada unidad. Ahora, si también se requiere simular esta variable categórica, la simulación plurigaussiana requiere aún más recursos computacionales y trabajo en su elaboración. Otro problema que se suma a este modelo se debe a la escasa información de recuperación de cobre, ya que las pocas muestras se van distribuyendo entre varias unidades.

Lo positivo de este enfoque es la posibilidad de generar modelos de probabilidad, debido a las múltiples imágenes estocásticas que se pueden generar. Por otro lado es la forma que se apega más a la realidad, debido al comportamiento de la recuperación de cobre, que es altamente controlado por la geología.

### **7.3 Comparación de los resultados**

Para la comparación de resultados se utiliza Jackknife en un total de 182 datos de los 603 datos en total de recuperación de cobre, midiéndose el error promedio, donde el ideal debe tender a 0; la desviación del error, que mientras menor sea, es mejor; la

correlación entre los valores estimados y reales, donde el ideal es un valor que tienda a 1; por último se asume un error estandarizado máximo de 2.5, donde se espera que haya la menor cantidad de valores estimados fuera de este límite.

Para las simulaciones se emplea el promedio simple de 50 realizaciones como el valor simulado para ser comparado con el valor real. En el caso de la simulación plurigaussiana, se utilizó la moda de 20 realizaciones como el valor real estimado de unidad geológica.

Dentro de los métodos empleados, el que muestra un mejor resultado es la simulación por UGs conocidas; esto debido al fuerte control litológico y de alteración que tiene la variable en estudio. Como se observa en la tabla 20, este método mejor se desempeña en cuanto a correlación entre los datos reales y estimados (simulados). El método que secunda a este es la misma simulación por UG, pero esta vez la UG no es conocida y es simulada mediante método plurigaussiano.

Tabla 20 Resumen comparativo distintos metodologías.

	Kriging ReCu	Simulación ReCu	Cosimulación ReCu - Cu	Simulación ReCu por UG real	Simulación ReCu por UG simulada
Error promedio	-0.56	-0.86	0.22	-0.57	0.08
Desviación error	4.80	4.83	5.59	4.13	4.62
Correlación Estimado - Rea	0.59	0.58	0.32	0.72	0.64

Se observa que en todos los modelos hay problemas para la predicción de valores bajos, lo que se observan en las nubes de correlación entre los valores reales y estimados; si bien las simulaciones en algunas realizaciones son capaces de reproducir estos mínimos, al momento de promediar quedan bastante por encima.

Todas las metodologías tienden a tener errores estandarizados dentro de lo aceptable, donde por lo general no más de 5 muestras superan el umbral de 2.5.

La cosimulación de recuperación en conjunto con la ley de cobre, es la que presenta los peores resultados, esto debido al comportamiento que tienen estas variables en este estudio, donde muestran poca correlación. Por consiguiente no se puede aprovechar la gran cantidad de muestro de ley de cobre que existe, haciendo necesario un mayor muestreo de recuperación.

En general se recomienda realizar simulación por UGs, aunque tenga un costo mayor de recurso computacional y de trabajo previo ya que, como se escribió, tiene mejor resultado y al ser simulaciones con varias realizaciones se pueden calcular

probabilidades de alcanzar los valores más inusuales, que en este caso son cuando la recuperación es baja.

Como recomendación final, una forma de refinar el modelo, es con la inclusión de nuevas variables geológicas, esto debido a la importancia que se demostró (punto 7.1) en el control de la recuperación. Estas variables pueden ser, entre otras: cantidad y tipo de finos; tipo de mineralización; y granulometría. La inclusión puede ser mediante la cosimulación de estos atributos y la recuperación de cobre, o bien la generación de nuevas unidades geológicas que incluyan esta información, sobre las cuales efectuar la estimación de recuperación.

## 8 BIBLIOGRAFÍA

Carrasco P, Cáceres A, Riquelme R, Emery X (2014) A review of metallurgical recovery estimation practices in the mining industry. Paper presentado en GeoMet 2014, Santiago, Chile.

Carrasco P, Chilès, J P and Ségurt, S (2008). Additivity, metallurgical recovery and grade, in Proceedings, Eighth International Geostatistics Congress, Santiago, 1188:237-246.

Chilès JP, Delfiner P (2012). Geostatistics: modeling spatial uncertainty. Wiley, New York.

David D (2013). Geometallurgical guidelines for miners, geologists and process engineers – discovery to design. Paper presentado en the Second AusIMM International Geometallurgy Conference, Brisbane, Queensland.

Deutch CV (2013). Geostatistical modelling of geometallurgical variables – problems and solution. Paper presented at the Second AusIMM International Geometallurgy Conference, Brisbane, Queensland.

Deutsch J, Palmer K, Deutsch CV, Szymanski J, Etsell T (2015). Spatial Modeling of Geometallurgical Properties: Techniques and a Case Study. Natural Resources Research.

Dunham S, Vann J, (2007). Geometallurgy, geostatistics and project value – Does your block model tell you what you need to know?, in Proceedings Project Evaluation 2007, pp 189-196 (The Australasian Institute of Mining and Metallurgy: Melbourne).

Emery X (2011). Geoestadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

Emery X (2012). Co-simulating total and soluble copper grades in an oxide ore deposit. Math Geosci 44:27–46.

Emery X (2013). Simulación Geoestadística. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

Huai-cheng G, Feng Z (2008). State-of-art on geostatistical methodology. Geographical research.

Journel AG, Huijbregts CJ (1978). Mining geostatistics. Academic Press, London.

Sillitoe R (2010). Porphyry Copper Systems. Economic Geology.

## 9 ANEXOS

### 9.1 Gráficos de derivas

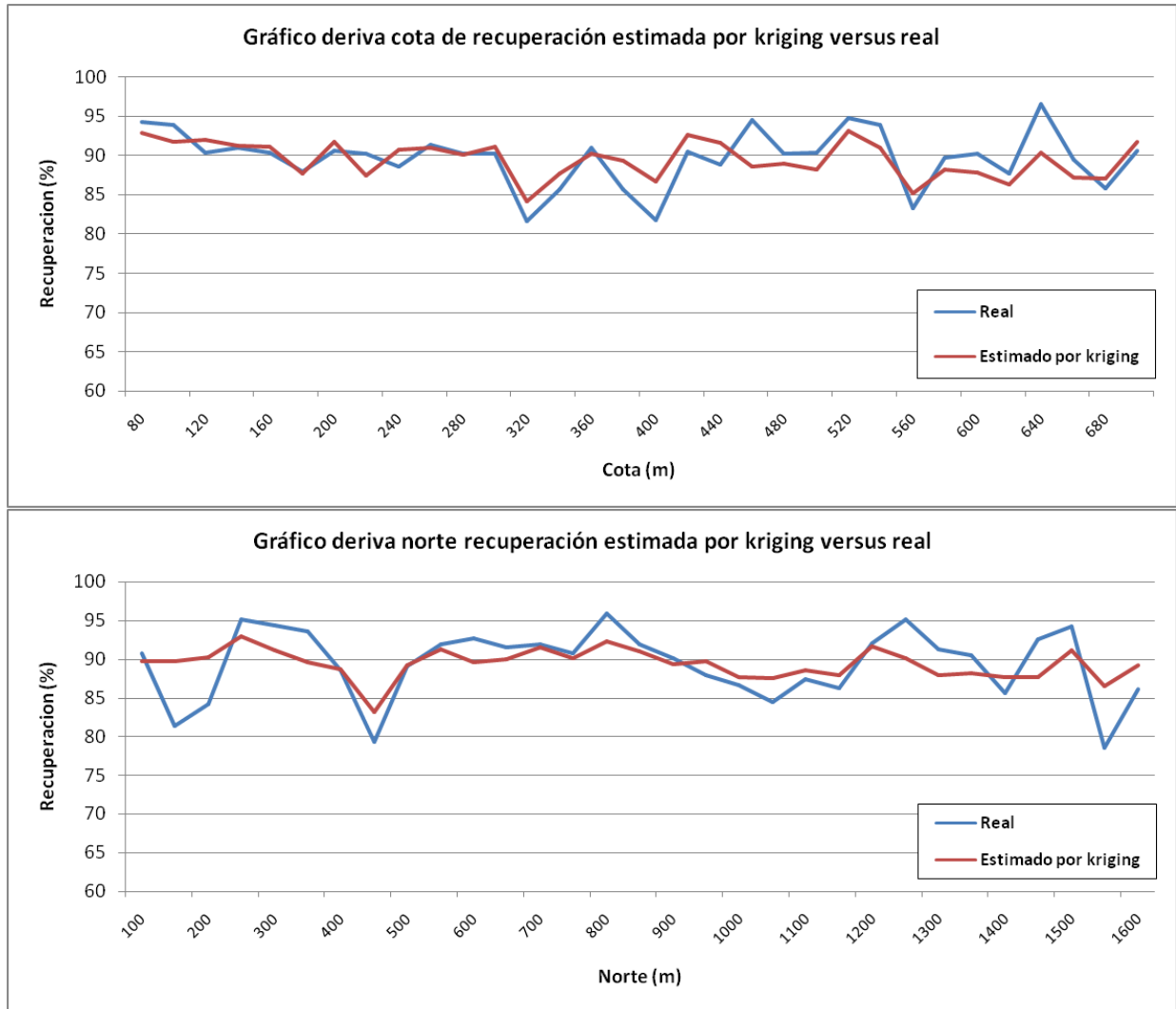


Ilustración 66 Gráficos de derivas de estimación de ReCu (%) mediante kriging.

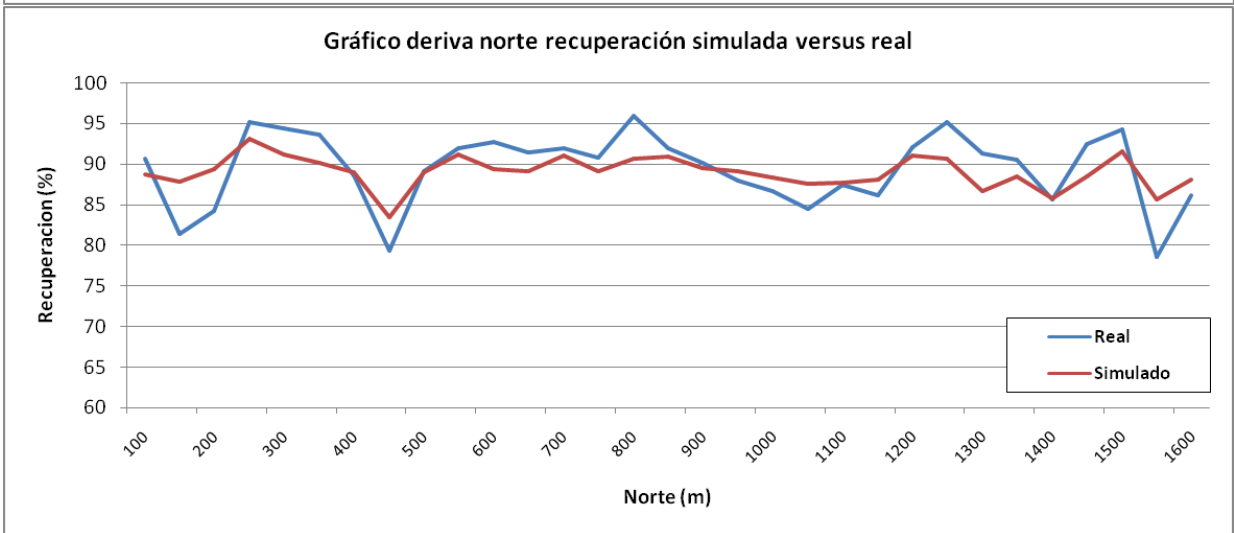
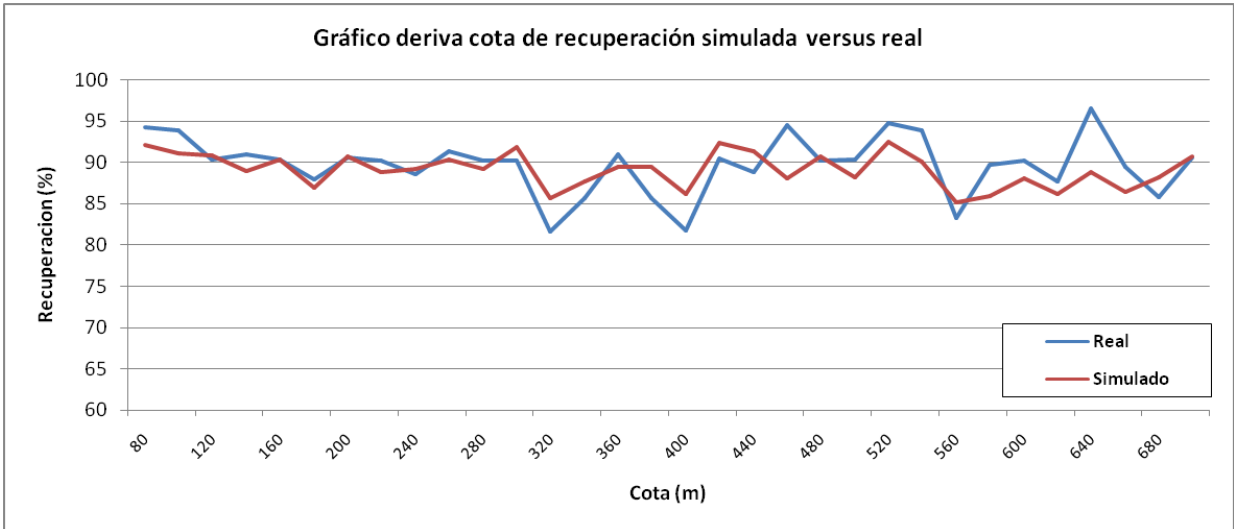


Ilustración 67 Gráficos de derivas de simulación de ReCu (%).



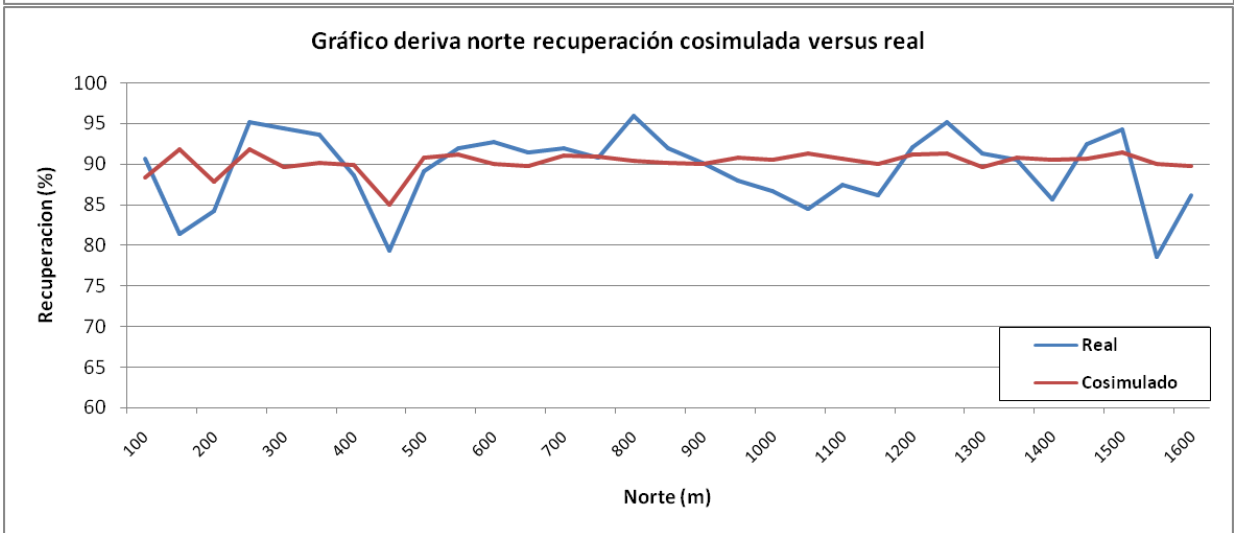
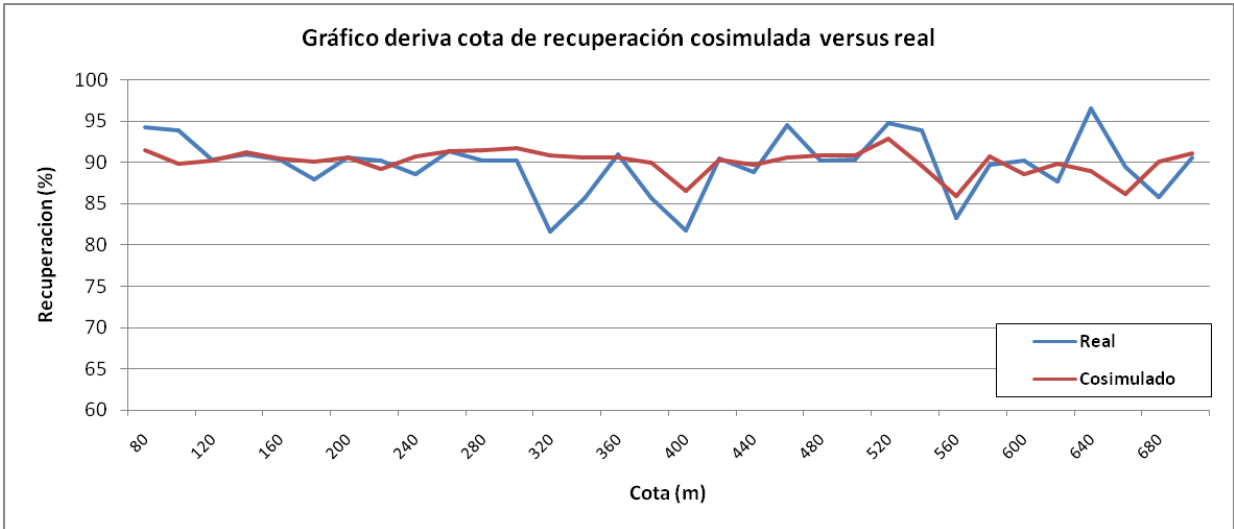


Ilustración 68 Gráficos de derivas de cosimulación de ReCu (%).

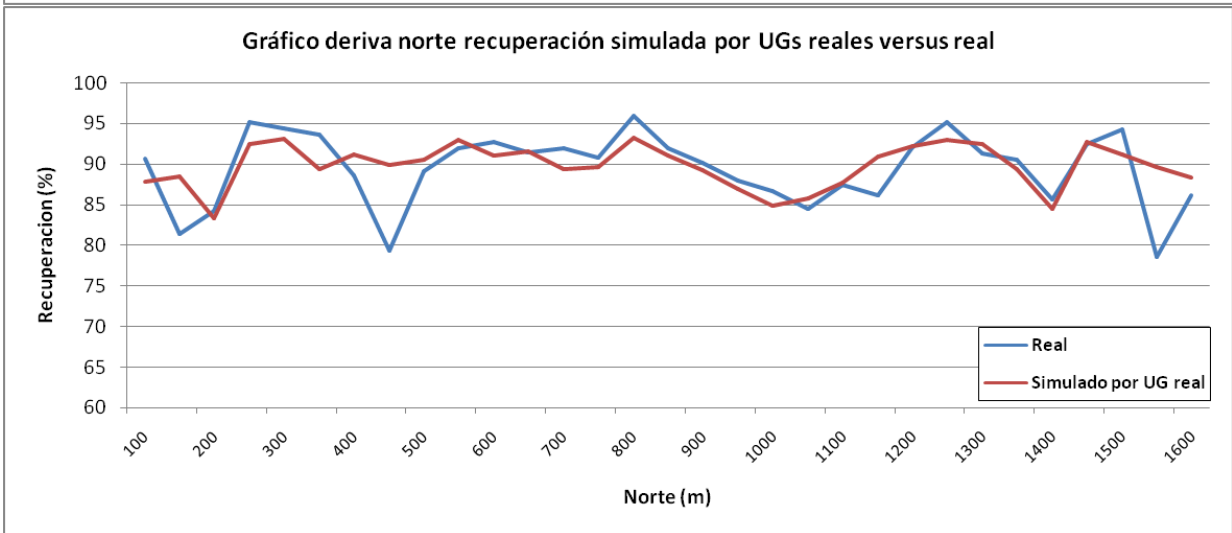
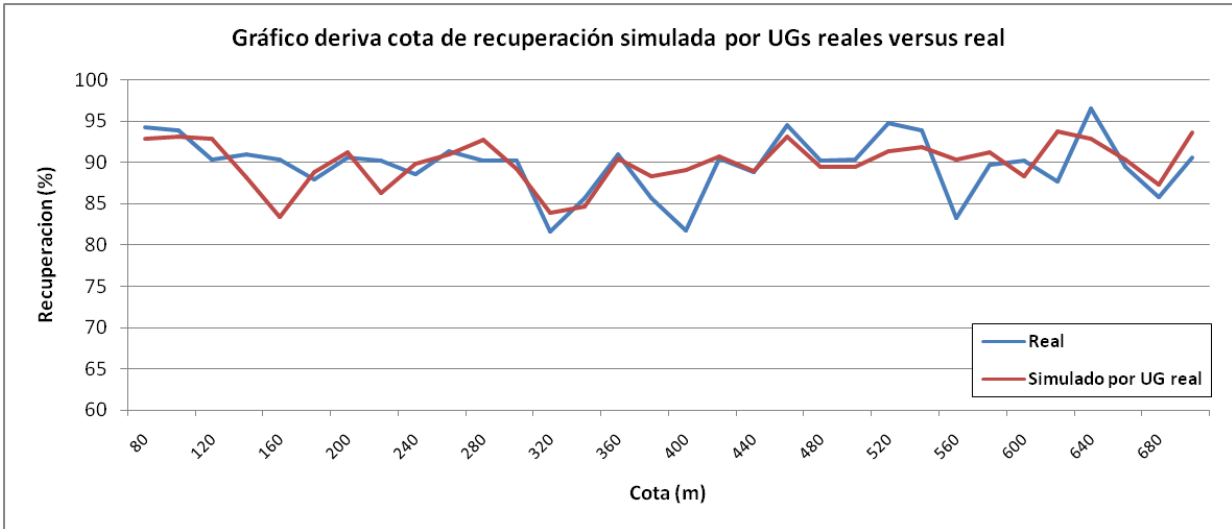


Ilustración 69 Gráficos de derivas de ReCu (%) mediante simulación por UGs reales.

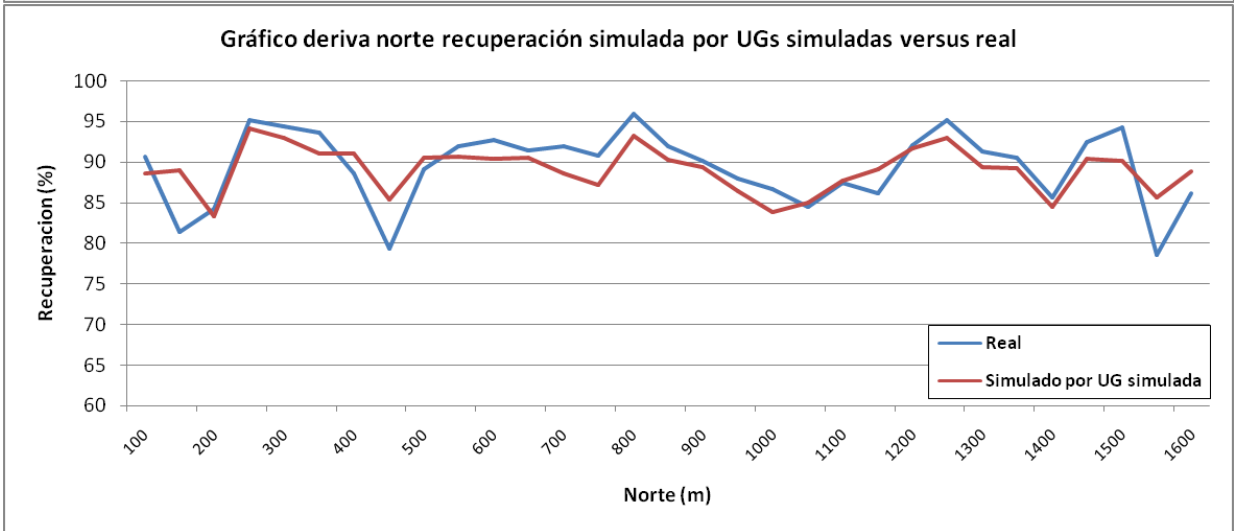
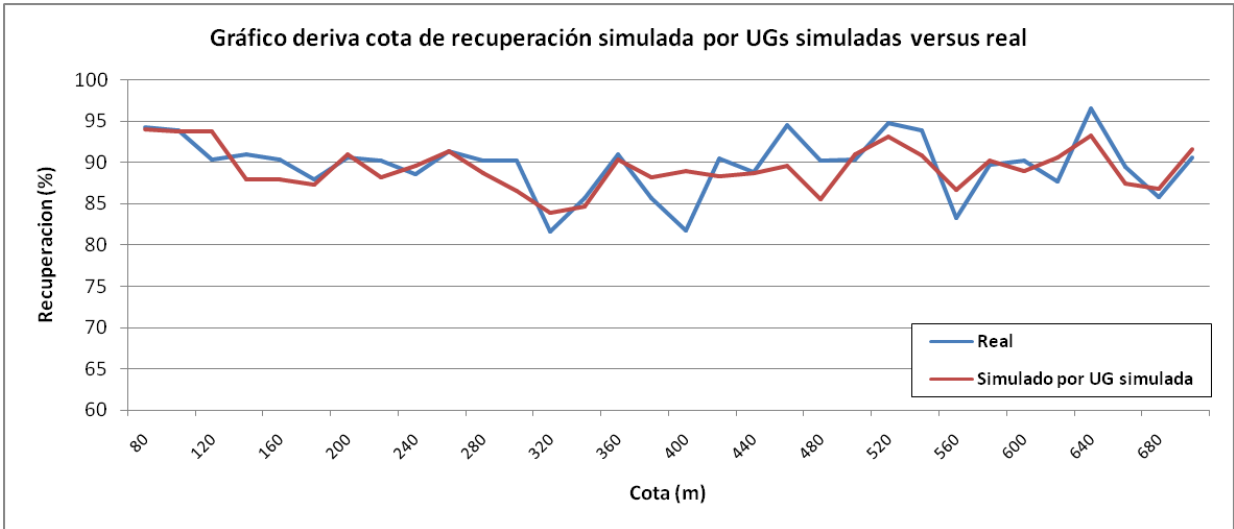


Ilustración 70 Gráficos de derivas de ReCu (%) mediante simulación por UGs simuladas.