



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

SIMULACIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEL  
TRANSIENTE HIDRÁULICO EN SISTEMAS DE TRANSPORTE DE FLUIDOS  
MONOFÁSICOS A LARGAS DISTANCIAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MECÁNICO

FERNANDO ANDRÉS TAPIA CÁRDENAS

PROFESOR GUÍA:  
ÁLVARO VALENCIA MUSALEM

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
WILLIAMS CALDERÓN MUÑOZ  
JORGE CASANOVA SILVA

SANTIAGO DE CHILE  
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE: Ingeniero Civil Mecánico  
POR: Fernando Andrés Tapia Cárdenas  
FECHA: 11/04/2018  
PROF. GUÍA: Álvaro Valencia Musalem

## SIMULACIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DEL TRANSIENTE HIDRÁULICO EN SISTEMAS DE TRANSPORTE DE FLUIDOS MONOFÁSICOS A LARGAS DISTANCIAS

El fenómeno de transientes hidráulicos en sistemas de transporte de fluidos por cañerías es un aspecto que debe ser analizado en detalle por las empresas de ingeniería especializadas del área. A lo largo de la historia moderna se han registrado desastres a las instalaciones, las personas y las comunidades cercanas a estas conducciones como consecuencia de un diseño inapropiado. El presente estudio desarrolla una herramienta computacional (algoritmo) que predice la variación de presión y velocidad del fluido al interior de las cañerías en un sistema de transporte de fluidos monofásicos a larga distancia durante un evento transiente.

En la actualidad existen distintos modelos que permiten predecir el coeficiente de fricción existente entre el fluido y la pared interna de la cañería, los cuales junto a las ecuaciones de conservación de masa y de movimiento, permiten calcular los valores de presión y velocidad del fluido en cualquier punto del sistema (componente espacial), y para cualquier instante de tiempo (componente temporal) luego de que el evento transiente, o golpe de ariete, se ha generado en el sistema.

Sin embargo, estos modelos se han determinado analíticamente, o bien, realizando experimentaciones en sistemas de transporte de fluido de algunos cientos metros de largo, mientras que sistemas reales, como por ejemplo de transporte de agua de mar, alcanzan varios kilómetros de distancia, por lo que realizar una validación de los modelos del coeficiente de fricción existente entre el fluido y la pared interna de la cañería cobra gran importancia, ya que permite realizar un buen diseño de estas instalaciones en etapas tempranas de un proyecto de ingeniería.

Para lo anterior, se desarrolló un algoritmo que resuelve las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete, utilizando el método de elementos finitos, y programando en el lenguaje de MATLAB. Se utilizó un escenario ficticio, el que está compuesto por un estanque con nivel constante del pelo de agua, conectado a una cañería de 5000[m] de longitud, y en el otro extremo una válvula de bola que cierra rápidamente. Este escenario corresponde a una extrapolación de los existentes en la literatura.

Se concluye con este estudio que el modelo estacionario de pérdida de energía por fricción es un buen estimador. Los resultados de presión obtenidos, si bien son conservadores en comparación con los modelos cuasi-estacionario y no-estacionario, son bastante precisos para utilizarlos en el diseño de sistemas de transporte de fluidos. Además, se observó que el modelo no-estacionario estima que se pierde más energía por roce entre el fluido y la pared de la cañería, que los otros dos modelos.

*A mi familia*

# Agradecimientos

Agradezco a todos quienes han sido parte de mi etapa universitaria, pero por sobretodo, a quienes me ayudaron a encontrar las fuerzas para llegar hasta este punto: Iris, Gaspar, Salvador, ustedes no solo son mi familia, y quienes más amo en esta vida, sino que han sido mi motor, mi motivación y mi inspiración.

Agradezco enormemente a mis amigos de plan común y de la vida, quienes han estado junto a mi en los momentos más duros, y en así como en los más felices, *loh BIC*: Olivia Aravena, Camilo Córdova, Claudia Bravo, Claudio Pareja, Damián Baeza, Jaime Fariña, y Luis Marabolí.

Agradezco a mis profesores guía y co-guía, por la oportunidad, apoyo y consejos brindados, los cuales me ayudaron a definir un objetivo claro en una etapa temprana de la memoria.

Muchas gracias a todos.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Alcance . . . . .	2
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1. Flujo Permanente en Cañerías . . . . .	3
2.1.1. Propiedades de los fluidos . . . . .	4
Flujo uniforme . . . . .	4
Líneas de corriente . . . . .	4
Densidad . . . . .	4
Peso específico . . . . .	4
Compresibilidad . . . . .	4
Velocidad del sonido . . . . .	5
Presión de vapor . . . . .	5
Viscosidad . . . . .	6
2.1.2. Esgurrimiento por cañerías en presión de fluidos incompresibles . . . . .	6
Ecuación de continuidad . . . . .	6
Ecuación de Bernoulli . . . . .	7
Número de Reynolds . . . . .	7
Pérdidas de carga . . . . .	7
2.2. Flujo no Permanente en Cañerías . . . . .	8
2.2.1. Descripción física del fenómeno del golpe de ariete . . . . .	9
2.2.2. Conceptos generales . . . . .	11
Ecuación de velocidad de onda . . . . .	11
Sobrepresión de Joukowsky . . . . .	13
Tiempo crítico . . . . .	14
Gráfico de presiones envolventes . . . . .	14
2.2.3. Deducción de las ecuaciones básicas sobre el golpe de ariete . . . . .	15
Ecuación de movimiento de Newton . . . . .	15
Ecuación de conservación de Masa . . . . .	17
2.2.4. Condiciones de Borde . . . . .	19
Reservóreo . . . . .	20
Válvula en el extremo de una cañería . . . . .	20
2.2.5. Modelos de Fricción . . . . .	20
2.2.6. Métodos de control de Golpes de Ariete . . . . .	23

2.3. Método de Elementos Finitos . . . . .	24
<b>3. Metodología</b>	<b>26</b>
3.1. General . . . . .	26
3.2. Desarrollo del algoritmo . . . . .	27
3.2.1. Forma débil de las ecuaciones del golpe de ariete . . . . .	27
3.2.2. Discretización temporal . . . . .	29
3.2.3. Construcción de las funciones de forma y matrices locales . . . . .	31
3.2.4. Construcción de la matriz de rigidez global . . . . .	34
3.2.5. Implementación de las condiciones iniciales e imposición de las condi- ciones de borde . . . . .	34
Condiciones iniciales . . . . .	35
Perturbación del estado estacionario y condiciones de borde . . . . .	35
Modelos de pérdida de energía por fricción . . . . .	37
3.3. Programas utilizados . . . . .	37
<b>4. Memoria de Cálculo</b>	<b>39</b>
4.1. Validación del algoritmo . . . . .	39
4.2. Implementación algoritmo en una conducción a larga distancia . . . . .	45
4.2.1. General . . . . .	45
4.2.2. Resultados con $f$ modelo estacionario . . . . .	46
4.2.3. Resultados con $f$ modelo cuasi-estacionario . . . . .	46
4.2.4. Resultados con $f$ modelo no-estacionario . . . . .	46
<b>5. Análisis de los Resultados</b>	<b>50</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>
<b>Anexos</b>	<b>60</b>
<b>A. Nomenclatura</b>	<b>61</b>
<b>B. Codigos MATLAB</b>	<b>62</b>
B.1. Algoritmo utilizado para replicar el experimento de Wichowski . . . . .	62
B.2. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso $f$ estacionario	69
B.3. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso $f$ cuasi- estacionario . . . . .	73
B.4. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso $f$ no- estacionario . . . . .	79

# Índice de Figuras

2.1.	Interpretación física del golpe de ariete para el cierre instantáneo. . . . .	11
2.2.	Volumen de control en una cañería durante un golpe de ariete. . . . .	12
2.3.	Modos de sujeción de cañerías en función del Coeficiente de Poisson. . . . .	12
2.4.	Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido. . . . .	14
2.5.	Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido. . . . .	15
2.6.	Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido. . . . .	17
2.7.	Cuerpo libre de una sección de cañería. . . . .	18
2.8.	Aproximaciones polinomiales del tiempo de cierre de una válvula. Fuente [1]	21
2.9.	Gráfico del factor de fricción en función del tiempo, segun Saika [2]. . . . .	22
2.10.	Gráficos de presión en función del tiempo medidos y calculados en una válvula ( $H_v$ ) y en el punto medio ( $H_{mp}$ ) del sistema estudiado por Bergant, utilizando el modelo cuasi-estacionario. Fuente [3] . . . . .	22
2.11.	Gráficos de presión en función del tiempo medidos y calculados en una válvula ( $H_v$ ) y en el punto medio ( $H_{mp}$ ) del sistema estudiado por Bergant, utilizando el modelo no-estacionario. Fuente [3] . . . . .	23
3.1.	Función de base con soporte local. . . . .	28
3.2.	Funciones de base para elementos finitos lineales. . . . .	32
3.3.	A la izquierda, elemento de referencia. A la derecha, elemento físico o real. . . . .	32
3.4.	Esquema del problema abordado en el estudio. . . . .	35
3.5.	Esquema del problema abordado en el estudio, con el perfil de presiones estática y dinámica. . . . .	36
3.6.	Ventana principal del software MathWorks MATLAB. . . . .	38
3.7.	Ventana principal del software Bentley HAMMER. . . . .	38
4.1.	Resultados del experimento de Wichowski[4]. Arriba, medición de la presión en función del tiempo medido en la válvula. Abajo, simulación con el método de las características en el mismo punto. . . . .	40
4.2.	Resultados simulación contra mediciones del experimento de Wichowski, considerando método de los elementos finitos, $L = 41[m]$ , 30 elementos, 3 nodos por elemento, y paso temporal $0,001[s]$ . . . . .	41
4.3.	Resultados simulación contra mediciones del experimento de Wichowski, considerando método de los elementos finitos, 30 elementos, 3 nodos por elemento, paso temporal $0,001[s]$ . La Figura de la izquierda consideró $L^* = 41[m]$ y $a^* = 1320[m/s]$ , mientras que la Figura de la derecha, $L^* = 39,2[m]$ y $a^* = 1260[m/s]$ . . . . .	42

4.4.	Arriba, presiones máximas; abajo, mínimas, registrados para simulación de experimento de Wichowski, al variar la cantidad de elementos y la cantidad de nodos por elemento, considerando $L = 41[m]$ y $a = 1260[m/s]$ . . . . .	44
4.5.	A la izquierda, presiones máximas; a la derecha, mínimas, registrados para simulación de experimento de Wichowski, al variar el paso temporal, considerando $L = 41[m]$ , $a = 1260[m/s]$ , $nel = 30$ y $nnel = 2$ . . . . .	44
4.6.	Seteo del programa Bentley HAMMER, para calcular el golpe de ariete con los tres modelos de pérdida de carga $f$ . . . . .	46
4.7.	Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo $f$ estacionario. A la izquierda, presiones registrados en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación. . . . .	47
4.8.	Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo $f$ cuasi-estacionario. A la izquierda, presiones registrados en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación. . . . .	48
4.9.	Variación del factor de fricción $f$ modelo cuasi-estacionario con el tiempo en el punto medio del trazado. . . . .	48
4.10.	Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo $f$ no-estacionario. A la izquierda, presiones registrados en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación. . . . .	49
4.11.	Variación del factor de fricción $f$ modelo no-estacionario con el tiempo en el punto medio del trazado. . . . .	49
5.1.	A la izquierda, presión en la válvula hasta el tiempo $20[s]$ . A la derecha, presiones normal, de sobrepresión de Joukowski y envolventes máximas y mínimas. . . . .	51
5.2.	Envolvente de presiones, considerando $f$ estacionario. . . . .	53
5.3.	Comparación del valor del factor de fricción para los tres modelos estudiados, tomados en el punto medio del trazado para una simulación de $100[s]$ del problema planteado. . . . .	53
5.4.	Detalle de los primeros $100[s]$ de la Figura 5.3. . . . .	54
5.5.	Envolventes de presión máxima (izquierda) y mínima (derecha), con los tres modelos de pérdida de energía por fricción. . . . .	54
5.6.	Presión en la válvula con los tres modelos de pérdida de energía por fricción. . . . .	55
5.7.	Detalle de las presiones en la válvula, entre los tiempos $200[s]$ y $250[s]$ . . . . .	55



# Capítulo 1

## Introducción

Un transiente hidráulico es una condición de un fluido que es transportado a través de una cañería, donde la velocidad y la presión cambian rápidamente en el tiempo. El que estos fenómenos sucedan puede provocar grandes esfuerzos en las paredes de la cañería producto de la variación de presión al interior, y de la aceleración del fluido en el sistema.

Cuando la velocidad del fluido cambia rápidamente producto del cierre de un componente de control del sistema (como, por ejemplo, una válvula se cierra o una bomba se detiene), provoca que dentro de la cañería se propague una onda de presión. Los transientes hidráulicos pueden causar que los equipos hidráulicos en una red de cañerías fallen.

Debido a los devastadores efectos que un transiente hidráulico puede causar, su análisis es muy importante para establecer criterios de diseño adecuados que proporcionen un nivel de protección aceptable en caso de falla del sistema.

En el presente trabajo, se estudiaron tres modelos matemáticos para calcular el factor de fricción entre el fluido y la pared interna de la cañería durante un transiente hidráulico en un sistema de transporte de fluidos monofásico (como agua de mar, por ejemplo), utilizando un lenguaje de programación apropiado. Lo anterior cobra importancia, ya que los tres modelos estudiados permiten predecir con distinta precisión las variables de presión y velocidad del fluido en el sistema, en donde mayor precisión requiere un mayor consumo de recursos computacionales.

### 1.1. Motivación

Dado lo enorme de las instalaciones de bombeo que se están implementando en Chile, así como la complejidad de sus problemas operativos, el análisis detallado de sus transientes hidráulicos cobra una importancia muy grande.

Con el fin de proteger las mencionadas instalaciones, las empresas de ingeniería, encargadas de los cálculos y del diseño de estas instalaciones, deben calcular el efecto de un transiente

hidráulico. Actualmente, estos cálculos reposan en su inmensa mayoría en simplificaciones o bien, en criterios de diseño adoptados por la experiencia de los ingenieros. Sin embargo, a la hora de establecer qué modelo de cálculo de factor de fricción entre el fluido y la pared de la cañería adoptar no existe un consenso teórico que lo respalde, sino que más bien se adopta el criterio de utilizar el modelo que menor recursos computacionales requiera.

Se hace imprescindible estudiar la variación de los resultados del efecto de un transiente hidráulico en un sistema de transporte de un fluido monofásico considerando distintos modelos del factor de fricción entre la pared de la cañería y el fluido, con el fin de respaldar, o bien, para actualizar las actuales prácticas de la ingeniería.

## 1.2. Objetivos

El presente Trabajo de Tesis tiene por objetivo desarrollar un algoritmo que permita predecir las presiones resultantes de un evento transiente en un sistema de transporte de fluidos monofásicos. Para esto, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Determinar las ecuaciones y condiciones de borde que gobiernan el fenómeno de un transiente hidráulico.
- Desarrollar un algoritmo, en un lenguaje de programación adecuado, que resuelva las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de un transiente hidráulico mediante el método de elementos finitos.
- Validar el algoritmo desarrollado al simular una experiencia real documentada.
- Obtener el perfil de presiones y velocidades resultantes de un evento transiente para un escenario que incluya una conducción a larga distancia con los tres modelos matemáticos que permiten predecir el factor de fricción entre el fluido y la pared interna de la cañería, y comparar los resultados obtenidos.

## 1.3. Alcance

El alcance del presente trabajo corresponde a eventos transientes producto del cierre brusco de una válvula de corte. Quedan fuera del alcance de este estudio fluidos bifásicos, el efecto de la cavitación, así como transientes en sistemas de tuberías con ramificaciones.

# Capítulo 2

## Antecedentes

En este capítulo se exhiben los antecedentes utilizados en el desarrollo del presente estudio. Aquí se introducen conceptos básicos de mecánica de fluidos, de flujos impermanentes, y del método de elementos finitos. Estos temas son los cimientos para el desarrollo del algoritmo elaborado por el alumno, el cual permite resolver las ecuaciones que gobiernan el golpe de ariete.

### 2.1. Flujo Permanente en Cañerías

La Mecánica de Fluidos es la disciplina que estudia el comportamiento estático y dinámico de los fluidos (líquidos o gaseosos), los cuales se deforman de forma continua cuando se ejerce sobre ellos un esfuerzo de cizalle.

Si bien la estructura molecular de los fluidos es importante, esta no sirve para describir el comportamiento de éstos en reposo o movimiento, por lo que el estudio de los fluidos se realiza caracterizando el valor medio o macroscópico de una variable de interés (velocidad, presión, etc.), donde éste valor medio se evalúa en un volumen pequeño con un gran número de moléculas (el cual se denominará de ahora en adelante como *volumen de control*).

El flujo permanente tiene lugar cuando, en un punto cualquiera, la velocidad de las sucesivas partículas que ocupan ese punto en los sucesivos instantes es la misma. Por tanto, la velocidad es constante respecto del tiempo, pero puede variar de un punto a otro, es decir, ser variable respecto a las coordenadas espaciales.

### 2.1.1. Propiedades de los fluidos

Se presentan a continuación las propiedades de los fluidos que son útiles para entender el comportamiento de estos en estado permanente y no-permanente.

#### Flujo uniforme

El flujo uniforme tiene lugar cuando el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad no varían de un punto a otro del fluido. El flujo es no uniforme cuando la velocidad, la profundidad, la presión, etc., varían de un punto a otro en la región del flujo.

#### Líneas de corriente

Las líneas de corriente son curvas imaginarias dibujadas a través de un fluido en movimiento y que indican la dirección de éste en los diversos puntos del flujo fluido. La tangente en un punto de la curva representa la dirección instantánea de la velocidad de las partículas fluidas en dicho punto. Las tangentes a las líneas de corriente pueden representar de esta forma la dirección media de la velocidad.

#### Densidad

La densidad se define como la masa por unidad de volumen

$$\rho = \frac{m}{v}$$

#### Peso específico

El peso específico se define como el peso por unidad de volumen, y se relaciona con la densidad mediante la siguiente relación:

$$\gamma = \rho \cdot g$$

#### Compresibilidad

La compresibilidad de un fluido mide el cambio de volumen que experimenta un fluido que está sujeto a un cambio de presión. Se representa por el módulo volumétrico de elasticidad, o simplemente, módulo de compresibilidad:

$$K = -\frac{dP}{dv/v}$$

Como  $m = \rho \cdot v$ , se obtiene:

$$K = \frac{dP}{d\rho/\rho} \quad (2.1)$$

### Velocidad del sonido

Una consecuencia importante que se desprende de la compresibilidad de los fluidos es que una variación pequeña de la presión se expande o propaga en forma de onda longitudinal en el fluido con una velocidad finita. La velocidad con que se propaga esta onda se denomina velocidad acústica o velocidad del sonido, que para una compresión isoentrópica, es decir, sin fricción ni transferencia de calor, es:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

En honor al ingeniero italiano Lorenzo Allievi, quien es conocido por ser el primero en explicar el fenómeno del golpe de ariete, se utiliza la letra  $a$  en vez de la letra  $c$  para referirse a la velocidad de propagación de onda en un evento no estacionario. En lo que sigue de este estudio también se utilizará la letra  $a$ .

### Presión de vapor

Si un líquido, como agua o bencina por ejemplo, es dejado en un recipiente abierto a la atmósfera, éste comienza a evaporarse. La evaporación ocurre como efecto del movimiento de las moléculas en el fluido.

Algunas de las moléculas que se encuentran en la superficie del líquido poseen suficiente cantidad de movimiento para vencer las fuerzas cohesivas y escapar a la atmósfera. Si el mismo recipiente es sellado y se extrae el aire que queda sobre la superficie del líquido provocando un vacío, se generará una presión debido a las moléculas que escapan del fluido. Cuando se alcanza el equilibrio, es decir, que el número de moléculas que sale es igual al número de moléculas que entran al fluido, se dice que el vapor está saturado y la presión que el vapor ejerce sobre la superficie del líquido se denomina presión de vapor.

La presión de vapor depende de la temperatura (actividad molecular) y aumenta con ella. Cuando la presión sobre un líquido, que se encuentra a una temperatura dada, es igual a la presión de vapor del líquido, ocurre la ebullición. Para la mecánica de fluidos éste es un punto de importancia ya que en fluidos en movimiento, las presiones involucradas pueden llegar a ser muy pequeñas, incluso debajo de la presión de vapor, lo que genera ebullición. Este fenómeno se denomina cavitación. Las burbujas producidas en la ebullición pueden viajar a zonas de mayor presión donde colapsan con suficiente intensidad como para producir problemas operacionales y/o estructurales.

### Viscosidad

Para que exista movimiento de un fluido dentro de una cañería o de un canal (flujo interno), se debe ejercer una fuerza que sobrepase la resistencia ofrecida por el fluido. La magnitud de la resistencia ofrecida por el fluido es una resistencia a la deformación y está determinada por la velocidad de deformación, así como por una propiedad del fluido denominada viscosidad. En la práctica se utilizan dos tipos de viscosidad:

1. Viscosidad dinámica
2. Viscosidad cinemática

**Viscosidad dinámica** La viscosidad dinámica, denominada también viscosidad absoluta, es una propiedad característica de cada fluido, que es dependiente de la temperatura y la presión, y da cuenta de la relación entre el esfuerzo tangencial y la velocidad angular de deformación del fluido, según se indica en la siguiente relación:

$$\mu = \frac{\tau}{dV/dy}$$

Dependiendo de la relación funcional que exista entre la viscosidad y la velocidad de deformación de los fluidos, se pueden clasificar en fluidos newtonianos y fluidos no-newtonianos.

Para un fluido newtoniano la viscosidad dinámica es independiente de la velocidad de deformación, mientras que para un fluido no-newtoniano la relación es no-lineal.

**Viscosidad cinemática** La viscosidad cinemática se define como el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

### 2.1.2. Esguerrimiento por cañerías en presión de fluidos incompresibles

#### Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es una consecuencia del principio de conservación de la masa. Para un flujo permanente, la masa de fluido que atraviesa cualquier sección de una corriente de fluido, por unidad de tiempo, es constante. Esta puede calcularse según la Ecuación 2.2

$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot V_2 = \text{constante} \quad (2.2)$$

Para fluidos incompresibles, la Ecuación ?? se transforma en 2.3

$$Q = A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 = \text{constante} \quad (2.3)$$

### Ecuación de Bernoulli

La energía que posee un fluido en movimiento está compuesta por la energía interna y las energías debidas a la presión, a la velocidad y a su posición en el espacio. En la dirección del flujo, en los flujos permanentes de fluidos incompresibles con variaciones en su energía interna es despreciable, se reduce a la expresión de la Ecuación 2.4

$$\begin{array}{l} \text{Energía en la} \\ \text{sección 1} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{añadida} \end{array} - \begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{perdida} \end{array} - \begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{extraída} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Energía en la} \\ \text{sección 2} \end{array} \quad (2.4)$$

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 \right) + H_A - H_L - H_E = \left( \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \right)$$

La ecuación 2.4 se conoce como Teorema de Bernoulli.

### Número de Reynolds

El número de Reynolds, que es un parámetro adimensional que representa la razón entre las fuerzas de inercia y las viscosas. La Ecuación 2.5 corresponde a la expresión del número de Reynolds para el caso de una cañería de sección circular y que se encuentra llena de fluido.

$$Re = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L_e^2} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (2.5)$$

Según sea el valor del número de Reynolds, se puede determinar el tipo de flujo que escurre por una cañería, ya sea laminar, turbulento, o de transición entre éstos dos tipos de flujos.

$$Re \in \begin{cases} [0, 2300] & \text{flujo laminar} \\ (2300, 4000] & \text{flujo de transición/crítico} \\ (4000, \infty) & \text{flujo turbulento} \end{cases} \quad (2.6)$$

### Pérdidas de carga

Como consecuencia del transporte de un fluido al interior de una cañería se generan pérdidas de energía, también conocidas como pérdidas de carga, las cuales pueden ser producto de la fricción entre el fluido y las paredes de las cañerías, o bien, debidas a cambios puntuales en las condiciones del flujo, como por ejemplo, cambio de dirección, una reducción en el área de paso de un flujo, o bien, por elementos externos, como filtros, válvulas, elementos de medición como flujómetros, etc.

En lo que sigue se presentan las pérdidas regulares y las singulares.

**Pérdidas regulares** La pérdida de energía por fricción es la energía que se utiliza para vencer los esfuerzos de corte existentes en el sistema. La Ecuación 2.7 corresponde a la expresión para determinar las pérdidas friccionales en una cañería de diámetro constante [5].

$$h_f = \frac{L}{D} f \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2.7)$$

La Ecuación 2.7 es válida tanto para un flujo laminar como uno turbulento. La diferencia reside en cómo evaluar el factor de fricción  $f$ .

Las siguientes relaciones matemáticas permiten determinar el valor de  $f$ , dependiendo si el flujo es laminar o turbulento [5].

$$\begin{aligned} f &= \frac{64}{Re} \quad \text{flujo laminar} \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -0,86 \ln \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{flujo turbulento} \\ \text{Ecuación de Colebrook} \end{array} \end{aligned}$$

**Pérdidas singulares** Los elementos adicionales existentes en todo sistema de tuberías, como por ejemplo, válvulas, codos, expansiones, etc., introducen pérdidas energéticas adicionales. Los fenómenos de disipación energética, que tienen lugar en éstos elementos, son tan complejos, que sólo pueden ser determinados, en forma efectiva, experimentalmente, y se representan mediante un factor de pérdida singular  $k$  [5].

La pérdida de carga se representa como pérdida de energía cinética del fluido mediante la relación de la Ecuación 2.8.

$$h_l = k \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2.8)$$

## 2.2. Flujo no Permanente en Cañerías

Los escurrimientos no permanentes son aquellos en los que al menos una variable (presión, caudal, etc.) varía con el tiempo, y pueden ser considerados como fenómenos que se propagan por ondas.

Ocurren tanto en cañerías (ondas de Joukowsky), así como en canales (ondas de Saint Venant). Los primeros pueden ser rápidos (como resultado del corte del suministro eléctrico, o la obstrucción repentina y rápida de una cañería), o bien, lentos (por vibraciones en la bomba de impulsión, por ejemplo).

En esta sección se presentan los antecedentes necesarios que permiten comprender el fenómeno de escurrimientos no permanentes rápidos en cañerías, o conocidos también como golpes de ariete.



### 2.2.1. Descripción física del fenómeno del golpe de ariete

La Figura 2.1 representa en una secuencia de dibujos, una cañería de diámetro  $D$  y longitud  $L$ , conectado a un embalse de capacidad infinita inclinado, para mayor generalidad. La conducción puede ser regulada por la válvula  $O$  situada aguas abajo y las coordenadas se miden desde el mismo punto, hasta el embalse  $M$  donde adquiere el valor  $L$ .

El primero de los dibujos esquematiza las condiciones previas al cierre instantáneo de la válvula, es decir el régimen permanente y uniforme. Los dibujos representan situaciones posteriores al cierre, el que se opera en un instante inicial  $t_0$ .

La primera capa de líquido en contacto con el mismo y de espesor diferencial, pasa de velocidad  $U$  a velocidad nula. Necesariamente la energía cinética se transforma en potencial, elevándose la presión a un valor  $\Delta h$  y comprimiéndose el líquido en  $\rho + \Delta\rho$ .

Para un instante posterior ( $t_0 + \Delta t$ ) otra capa de líquido pasa por el mismo proceso, dando como resultado que el fenómeno de aquietamiento de las capas, y consecuentemente, el aumento de presión se propague en el sentido de  $O$  a  $M$  con una velocidad  $a$ .

Por otra parte, el material de la cañería tiene un módulo de elasticidad  $E$ , se deformará la cañería a causa del aumento de presión.

En la Figura 2.1 se representa todo el proceso.

Transcurrido un tiempo  $\Delta t$  del cierre de la válvula, el fenómeno alcanzará la sección a la distancia  $a \Delta t$ .

La conducción entre  $O$  y  $L$  se encontrará con una sobrepresión  $h$  y consecuentemente dilatada en un  $D + \Delta D$ . Por otra parte, el líquido se encontrará comprimido siendo su masa específica  $\rho + \Delta\rho$ .

En la longitud  $L - l$  las condiciones son las de antes del tiempo de cierre de la válvula, puesto que el fenómeno aún no ha llegado a esa región.

En el tercer dibujo se esquematiza la situación para el preciso instante en que la perturbación ha llegado, en virtud de su celeridad  $a$ , al punto  $M$ . Toda la cañería se encuentra dilatada en  $D + \Delta D$ , el líquido detenido ( $U = 0$ ) y su masa específica aumentada  $\Delta\rho$ . Todo ocurre en el tiempo  $t_0 + L/a$ .

Analizando la sección  $M$ , se aprecia que un infinitésimo dentro de la conducción reina la presión  $hM + \Delta h$  y un infinitésimo dentro del embalse la presión es  $hM$ .

Esta situación de no equilibrio se resuelve mediante una nueva conversión de energía, pero ahora de potencial a cinética. Obviamente el sentido de la velocidad será ahora de  $O$  a  $M$  y su magnitud igual a  $U$ , puesto que ésta fue la causa de la generación de  $\Delta h$ .

En un instante  $t_0 + L/a + \Delta t$ , la situación será la del 5º dibujo. En el tramo  $L - l$  tendremos diámetro  $D$ , puesto que ha desaparecido la sobrepresión, el líquido a la masa específica por la misma razón y a la velocidad  $U$ , propagándose el fenómeno de descompresión también con

celeridad  $a$ .

Un infinitésimo antes del tiempo  $t_0 + 2L/a$ , esta situación está llegando a la válvula, encontrándose la conducción en el mismo estado que instantes previos al cierre de la válvula, con la sola excepción de la velocidad que tiene ahora signo opuesto.

Al llegar a la sección de la válvula (tiempo  $t_0 + 2L/a$ ) la velocidad  $U$  no puede propagarse puesto que éste está cerrado por lo que ocurre un proceso similar al del instante de cierre, con la diferencia que ahora  $U$  se convierte en depresión  $-\Delta h$ .

En el 6<sup>o</sup> dibujo se esquematiza el proceso para el instante  $t_0 + 2L/a + \Delta t$ , donde se aprecia que hasta la sección la conducción está sometida a una presión disminuida en  $\Delta h$  con respecto a la estática, la masa específica del líquido disminuida también en  $\Delta \rho$  y el líquido detenido. El resto de la cañería se encuentra en condiciones normales a excepción de la velocidad que tiene signo negativo.

En el instante  $t_0 + 3L/a$ , la situación anterior habrá llegado al embalse siendo válido el análisis hecho para el instante  $t_0 + L/a$  (3<sup>o</sup> dibujo) a excepción de los cambios de signo. En efecto, un infinitésimo dentro del embalse la presión es  $hM$  y un infinitésimo dentro de la conducción es  $hM - \Delta h$ .

Esta situación de no equilibrio se resuelve con una nueva conversión de energía de potencial en cinética, dando lugar nuevamente a la velocidad original  $U$ .

En el instante  $t_0 + 3L/a + \Delta t$ , esta perturbación habrá llegado en mérito a la celeridad a hasta la sección  $L - l$ , siendo de destacar que en ese tramo se ha llegado finalmente a las condiciones iniciales.

Finalmente, en el instante  $t_0 + 4L/a$  se vuelve a los parámetros iniciales, encontrándose la válvula cerrada y reiniciándose nuevamente el proceso, el que habrá de continuar indefinidamente si no se tienen en cuenta los efectos amortiguadores de las pérdidas de energía.

Ahora, dicho ciclo se repite una y otra vez, pudiendo ocasionar graves daños a la cañería. En la práctica, la onda es amortiguada por las pérdidas de fricción producidas por el escurrimiento, lo que hace que se extinga luego de un intervalo de tiempo que depende de cada situación.

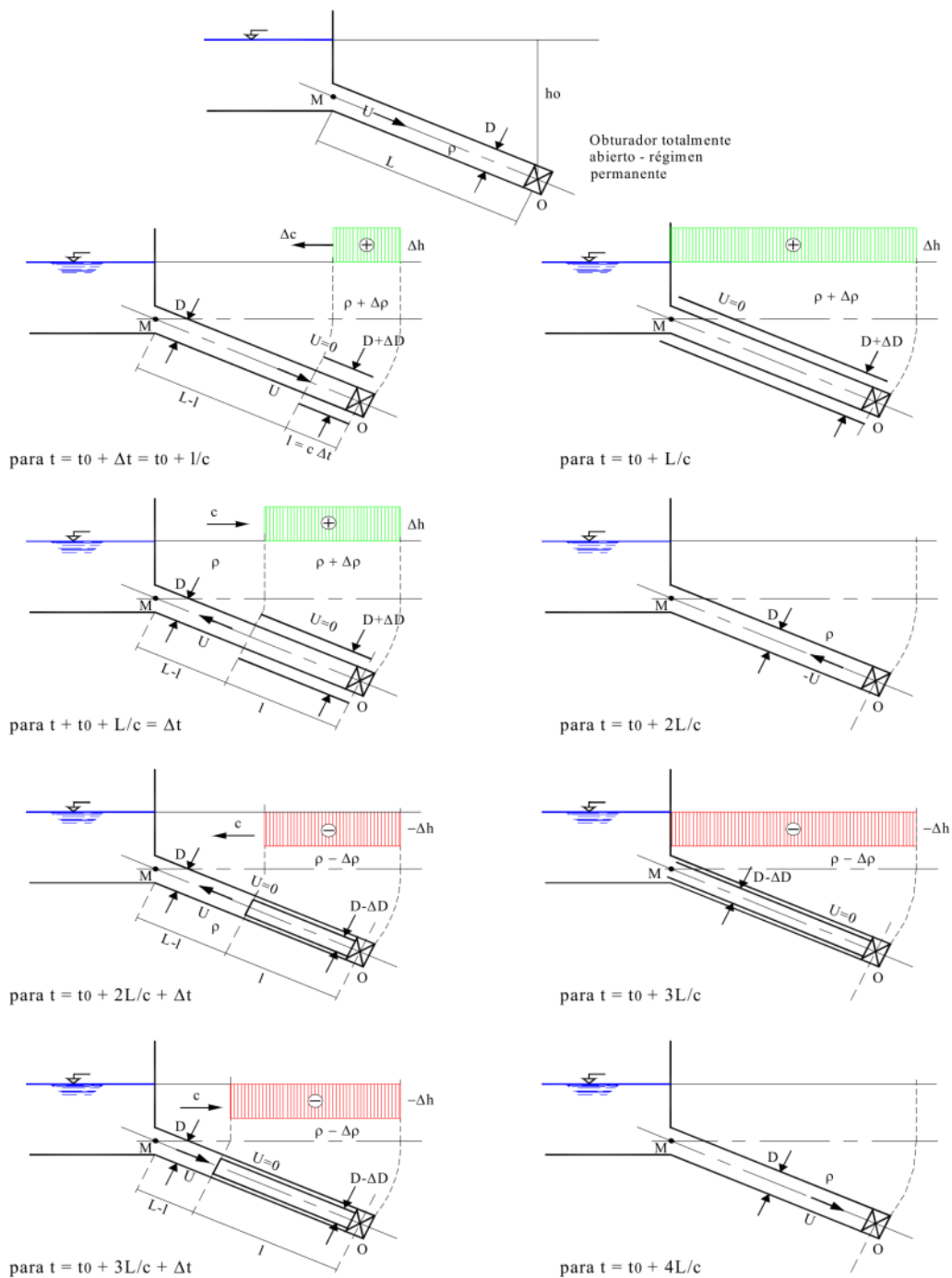


Figura 2.1: Interpretación física del golpe de ariete para el cierre instantáneo.

### 2.2.2. Conceptos generales

#### Ecuación de velocidad de onda

La ley de conservación de masa establece que, para un flujo estacionario o cuasi-estacionario, el caudal que entra al volumen de control de la Figura 2.2 debe ser igual al que sale del mismo

volumen. Si los pequeños cambios de densidad y sección de la cañería se denominan por  $\partial\rho$  y  $\partial A$ , respectivamente, se cumple lo indicado en la Ecuación 2.9.

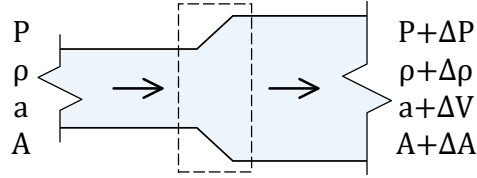


Figura 2.2: Volumen de control en una cañería durante un golpe de ariete.

$$\begin{aligned}
 (\rho + \partial\rho)(A + \partial A)(a + \Delta V) &= \rho A a \quad \left| \cdot \frac{1}{\rho A a}, y, \Delta V = -\frac{\Delta P}{\rho a} \right. \quad (2.9) \\
 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\partial\rho}{\rho}\right) \left(1 + \frac{\partial A}{A}\right) \left(1 - \frac{\Delta P}{\rho a^2}\right) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\rho} + \frac{\partial A}{A} - \frac{\Delta P}{\rho a^2} &= 0 \quad \left| \frac{\partial\rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{K} \right. \\
 \Rightarrow a &= \sqrt{\frac{1}{\rho \left[\frac{1}{K} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p}\right]}} \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Esta es la forma general de la velocidad de propagación de las ondas de presión en líquidos en cañerías y túneles. Para cañerías de pared delgada,  $D/e > 10$ , la Ecuación 2.10 es equivalente a la Ecuación 2.11.

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left[\frac{1}{K} + \frac{D}{eE}\phi\right]}} \quad (2.11)$$

En donde,  $\phi$  es el factor de sujeción de la cañería, y depende de la forma en que la cañería es soportada y del coeficiente de Poisson del material de la cañería  $\mu$ . La Tabla 2.1 presenta valores de este factor, según los modos de sujeción de la Figura 2.3.

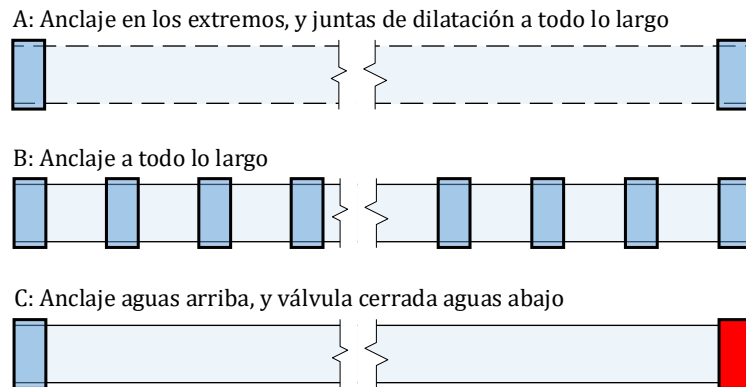


Figura 2.3: Modos de sujeción de cañerías en función del Coeficiente de Poisson.

Por ejemplo, para una cañería de acero ASTM A53 Gr.B, de 8" de diámetro, y espesor estándar, que transporta agua a temperatura ambiente, se tiene lo siguiente:

- Diámetro exterior,  $D = 0,2911$  [m].
- Espesor de pared,  $e = 8,18 \cdot 10^{-03}$  [m]
- Módulo de elasticidad del material de la cañería,  $E = 1,9 \cdot 10^{11}$  [Pa].
- Módulo de Poisson del material de la cañería,  $\mu = 0,3$ .
- Densidad del fluido,  $\rho = 1000$  [kg/m<sup>3</sup>].
- Módulo de compresibilidad del agua,  $K = 2,2 \cdot 10^{09}$  [Pa].
- Tipo de sujeción de la cañería: tipo C, según Figura 2.3.
- Coeficiente de sujeción cañería,  $\phi = 0,85$ .

Luego, la celeridad de la onda  $a$  será:

$$a^2 = \left[ 1000 \left[ \frac{1}{2,2 \cdot 10^{09}} + \frac{0,2911 - 2 \cdot 8,18 \cdot 10^{-03}}{8,18 \cdot 10^{-03}} \frac{0,85}{1,9 \cdot 10^{11}} \right] \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow a = 1336 \text{ [m/s]}$$

MODO DE SUJECIÓN	$\phi$ TUBERÍAS DELGADAS
A	1
B	$1 - \mu^2$
C	$1 - \mu/2$

Tabla 2.1: Valor coeficiente de sujeción de cañerías.

### Sobrepresión de Joukowsky

El golpe de ariete se propaga mediante ondas, llamadas de Joukowsky. Ellas se propagan muy rápidamente, y las subpresiones y sobrepresiones que representan pueden ser muy violentas.

Las ondas pueden considerarse generadas por una percusión, choque o pulso en un medio continuo. Ya que la perturbación dura solamente un instante, la onda, una vez formada, viaja igual a sí misma sin modificarse, en ausencia de disipación.

Para calcular su velocidad se supone que se percute en una sección transversal una cañería de paredes elásticas (por ejemplo, acero) lleno con un líquido (por ejemplo, agua) en reposo.

La onda que se genera se traslada con una velocidad  $a$ , y la sobrepresión máxima se calcula según la Ecuación 2.12.

$$\Delta H = a \cdot \frac{V}{g} \tag{2.12}$$

### Tiempo crítico

El tiempo que emplea la onda de presión en ir desde el punto donde se genera la perturbación hasta el punto donde se refleja y vuelve al punto inicial se denomina tiempo crítico, y se define según la Ecuación 2.13.

$$t_c = \frac{2L}{a} \quad (2.13)$$

Este valor es de importancia, ya que se toma como parámetro para establecer si el tiempo que le toma a una válvula cerrarse ( $t_{cv}$ ) se considera lento o rápido, según la siguiente relación:

$$\begin{aligned} t_{cv} \leq t_c &\implies \text{ tiempo de cierre rápido} \\ t_{cv} > t_c &\implies \text{ tiempo de cierre lento} \end{aligned}$$

### Gráfico de presiones envolventes

Usualmente, las presiones máximas y mínimas ocurridas durante un golpe de ariete en un sistema son de particular interés para los diseñadores de estas instalaciones. La manera más frecuente de representar estas curvas, es directamente en el gráfico de perfil de presiones del sistema de cañerías. La Figura 2.4, que corresponde al ejemplo presentado por Thorley [6], provee una manera rápida y fácil para identificar puntos de diseño críticos en el sistema, a la vez que es práctico para buscar estrategias de atenuación del efecto del golpe de ariete.

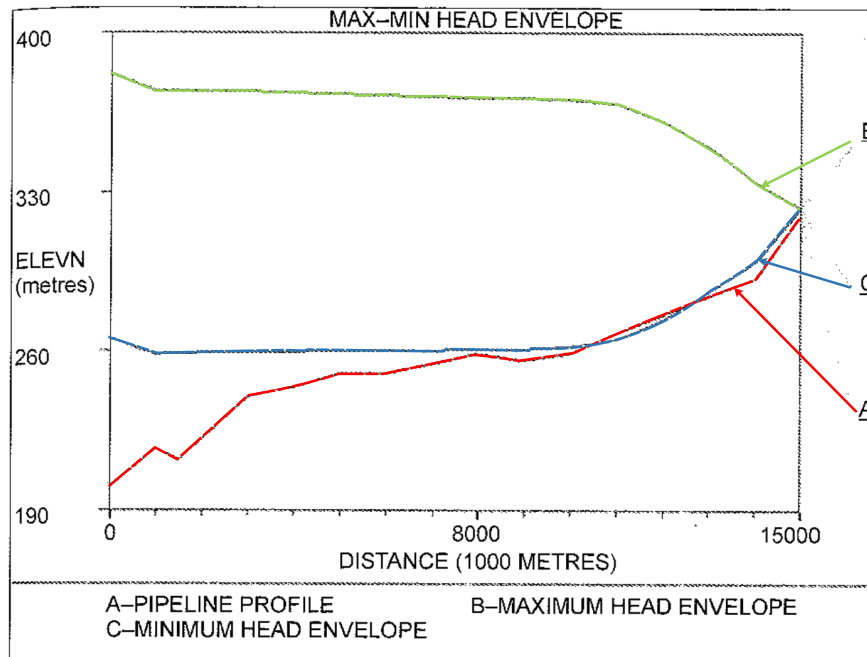


Figura 2.4: Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido.

### 2.2.3. Deducción de las ecuaciones básicas sobre el golpe de ariete

Se aplican las dos ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos de la Sección 2.1, segunda ley de movimiento de Newton y Conservación de masa, a un volumen de control de largo  $dx$  para obtener las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete en una cañería.

Las variables dependientes son la presión  $P$  al interior de la cañería, y la velocidad promedio del fluido en una sección transversal  $V$ . Las variables independiente son la espacial  $x$  y la temporal  $t$ . Luego, se tiene que:

$$P = P(x, t) \quad V = V(x, t)$$

#### Ecuación de movimiento de Newton

Un flujo no permanente es caracterizado por la ecuación de movimiento, en la que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre una masa de fluido en una dirección establecida, es igual al producto de la masa y la aceleración en la dirección de la fuerza. La Ecuación 2.14 corresponde a este equilibrio, según el diagrama de de la Figura 2.5.

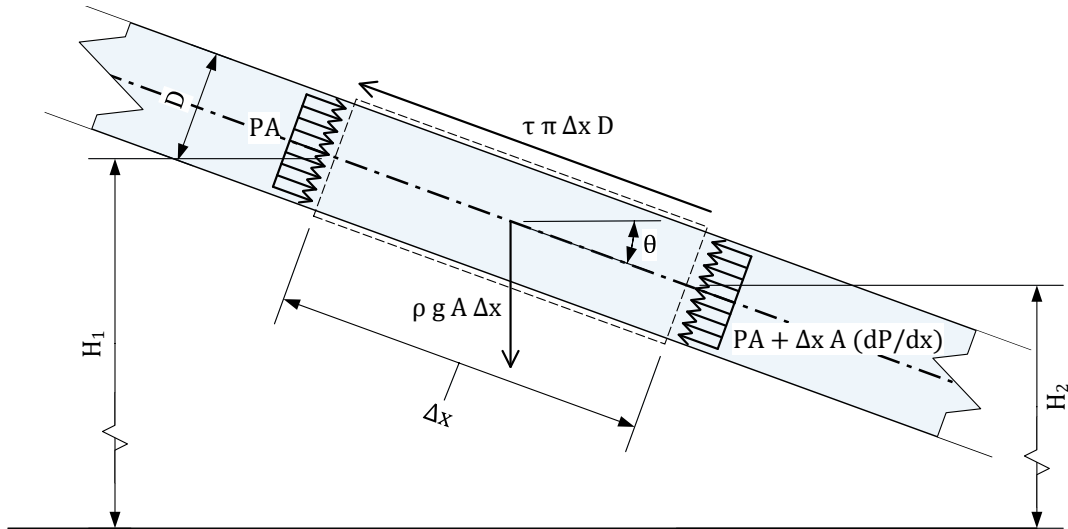


Figura 2.5: Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido.

$$P A - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x \right) A - \tau \pi D \Delta x + \rho g A \Delta x \sin \theta = \rho A \Delta x \frac{DV}{Dt} \quad \left| \cdot \frac{1}{\Delta x} \right. \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial P}{\partial x} A - \tau \pi D + \rho g A \sin \theta = \rho A \frac{DV}{Dt} \quad (2.15)$$

De la ecuación de Darcy-Weisbach, se establece la relación de la Ecuación 2.16. En esta expresión, el valor absoluto de la velocidad  $V$  es para asegurar que la fuerza de fricción siempre será opuesta a la dirección del flujo.

$$H_1 - H_2 = \frac{f L V^2}{2 g D} \Rightarrow H_1 - H_2 = \frac{f \Delta x V |V|}{2 g D} \quad (2.16)$$

## 2.2. FLUJO NO PERMANENTE EN CAÑERÍAS

Por otro lado, se asume que la tensión de corte en la pared de la cañería durante el golpe de ariete es igual al del estado estacionario, con lo cual se obtiene la relación de la Ecuación 2.17, en donde, además, se despreció el efecto de la diferencia de altura entre los puntos de entrada y salida del volumen de control de la Figura 2.5.

$$\begin{aligned}
 P_1 A - P_2 A &= \tau \pi \Delta x D & (2.17) \\
 \Leftrightarrow \rho g (H_1 - H_2) A &= \tau \pi \Delta x D & \left| \begin{array}{l} \text{Reemplazando con la Ecuación 2.16} \\ \cdot \frac{1}{\Delta x} \end{array} \right. \\
 \Leftrightarrow \frac{\rho g f \Delta x V |V| A}{2 g D} &= \tau \pi \Delta x D & \\
 \Rightarrow \tau \pi D &= \frac{\rho f V |V| A}{2 D} & (2.18)
 \end{aligned}$$

Luego, al sustituir la Ecuación 2.18 en la Ecuación 2.15 se tiene:

$$\rho g A \sin \theta - \frac{\rho f V |V| A}{2 D} - A \frac{dP}{dx} = \rho A \frac{dV}{dt} \quad \left| \cdot \frac{1}{\rho A} \right.$$

Pero,  $V = V(x, t)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
 \Rightarrow \frac{dV}{dt} &= V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, durante el transcurso de un golpe de ariete el término  $V \partial V / \partial x$  es despreciable con respecto al término  $\partial V / \partial t$  [5], por lo que se cumple lo siguiente

$$\frac{dV}{dt} \approx \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.19)$$

Luego,

$$\rho \sin \theta - \frac{f V |V|}{2 D} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{P}{\rho g} + z \\
 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dz}{dx} & \left| \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin \theta \right. \\
 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x} - \sin \theta \\
 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial H}{\partial x} + \rho g \sin \theta
 \end{aligned}$$



Entonces,

$$\begin{aligned}
 g \sin \theta - \frac{f V |V|}{2 D} - \frac{1}{\rho} \cdot \left[ \rho g \frac{\partial H}{\partial x} + \rho g \sin \theta \right] &= \frac{\partial V}{\partial t} \\
 \implies \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f V |V|}{2 D} + g \frac{\partial H}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

### Ecuación de conservación de Masa

La ley de conservación de masa aplicada al volumen de control establece que el flujo de masa a través de la superficie de control debe ser igual al cambio de masa dentro del volumen de control en una unidad de tiempo. Esto se presenta en la Ecuación 2.21.

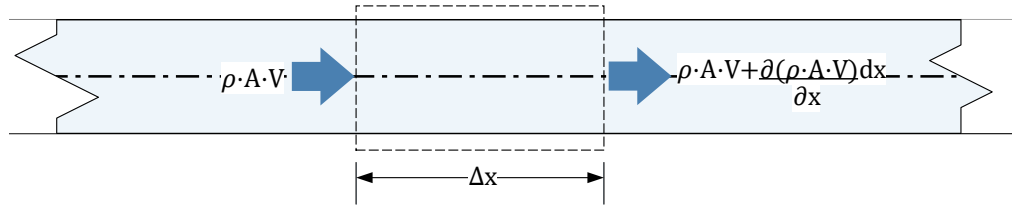


Figura 2.6: Diagrama de cuerpo libre de una sección de fluido.

$$\begin{aligned}
 \rho AV - \left[ \rho AV + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} dx \right] &= \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} & (2.21) \\
 \iff -\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} dx &= \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} \\
 \iff -\left( \rho A \frac{\partial V}{\partial x} dx + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} dx + AV \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) &= \rho dx \frac{\partial A}{\partial t} + A dx \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 \iff -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{V}{A} - \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 \iff \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\
 \implies \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 & (2.22)
 \end{aligned}$$

En donde, en el último paso de la Ecuación 2.22 se utilizaron las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA(x.t)}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\
 \frac{d\rho(x.t)}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\
 \frac{dx}{dt} &= V
 \end{aligned}$$

Ahora, de la deformación circunferencial de las cañerías [5] [7], se cumple que:

$$\begin{aligned}
 dA &= \pi D \frac{D dP D}{2 e E 2} \\
 dA &= \frac{\pi D^2 D dP}{4 e E} \\
 dA &= \frac{A D dP}{e E} \\
 \frac{1}{A} dA &= \frac{D}{e E} \rho g dH \\
 \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} &= \frac{D}{e E} \rho g \frac{dH}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Mientras que de la definición del módulo de compresibilidad para la cañería de pared delgada de la Figura 2.8 [5] [7], se tiene lo siguiente:

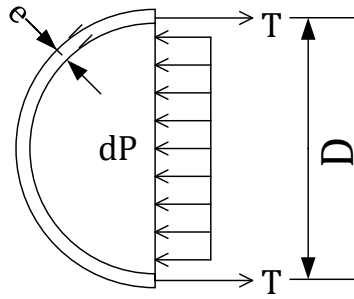


Figura 2.7: Cuerpo libre de una sección de cañería.

$$\begin{aligned}
 K = \frac{dP}{d\rho/\rho} &\iff K = \frac{\rho}{d\rho} dP \\
 &\iff K = \frac{\rho}{d\rho} \rho g dH \\
 &\iff \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{\rho g}{K} dH \quad \left| \frac{d(\cdot)}{dt} \right. \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho g}{K} \frac{dH}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Al sustituir las relaciones de las Ecuaciones 2.23 y 2.24 en la Ecuación 2.22, se tiene:

$$\begin{aligned}
 &\implies \frac{\rho g}{K} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{A} \frac{AD}{eE} \rho g \frac{dH}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\
 &\iff \frac{\rho g}{K} \frac{dH}{dt} + \frac{D}{eE} \rho g \frac{dH}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} = 0 \\
 &\iff \frac{dH}{dt} \left( \frac{\rho g}{K} + \rho g \frac{D}{eE} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{g} \right. \\
 &\iff \frac{dH}{dt} \left( \frac{\rho}{K} + \frac{\rho D}{eE} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\
 &\iff \frac{dH}{dt} \left( \frac{\frac{\rho}{K} \cdot \frac{K}{\rho} + \frac{\rho D}{eE} \cdot \frac{K}{\rho}}{\frac{K}{\rho}} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\
 &\iff \frac{dH}{dt} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \left| \cdot a^2 \text{ (celeridad de la onda)} \right. \\
 &\implies \frac{dH}{dt} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

Pero,  $H = H(x, t)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \\
 \Rightarrow \frac{dH}{dt} &= V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, durante el transcurso de un golpe de ariete el término  $V \partial H / \partial x$  es despreciable con respecto al término  $\partial H / \partial t$  [5], por lo que se cumple lo siguiente

$$\frac{dH}{dt} \approx \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.25}$$

Finalmente, se cumple que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{2.26}$$

### 2.2.4. Condiciones de Borde

Las Ecuaciones 2.20 y 2.26, que son las que gobiernan el efecto del golpe de ariete, requieren de condiciones de borde para poder ser resueltas.

De esta forma, existen condiciones de borde dadas por las siguientes componentes [8] [2] [6] [9] [10]:

- Estanque en el inicio de la conducción.
- Válvula que se cierra en el extremo de la conducción.

- Bomba centrífuga que impulsa el fluido a través de la cañería.
- Estanque hidroneumático amortiguador de golpe de ariete.
- Válvulas de alivio a lo largo del trazado.
- Ramificaciones de la cañería principal.
- Chimenea de equilibrio para amortiguar el golpe de ariete.

De todas estas condiciones, son de interés para el presente estudio la del estanque al inicio de la conducción, y de la válvula al final de la conducción con cierre rápido.

### Reservóreo

Para un sistema que consiste en un estanque, una cañería horizontal, y una válvula de corte aguas abajo, la condición de borde en el inicio del trazado de la cañería (donde está el estanque) se llama condición de reservóreo [10] [6], si se asegura que el nivel del pelo de agua en el estanque se mantenga invariable con el tiempo en el estado estacionario, entonces este valor se mantendrá invariable incluso ante un evento transiente rápido.

### Válvula en el extremo de una cañería

Para una válvula ubicada en el extremo de una cañería, la condición de borde es la ecuación de pérdida de carga a través de la válvula [1] [10] [6] [9]. Esto se expresa en la Ecuación 2.27

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & \text{en estado estacionario} \\ \tau(t) V_0 \frac{\sqrt{H(t)}}{\sqrt{H_0}}, & \text{durante el cierre de la válvula} \\ 0, & \text{luego de cerrada la válvula} \end{cases} \quad (2.27)$$

En donde  $\tau(t)$  se aproxima según las curvas de la Figura 2.8. La potencia  $y$  define qué tan rápido se cierra una válvula, por lo que el tipo de válvula viene definido por este factor. Por ejemplo, para una válvula de globo se tiene  $y = 1$ , mientras que para una válvula de bola,  $y = 3$  [1].

Es importante que se cumpla el tiempo de cierre de la válvula sea igual o menor al tiempo crítico, para asegurar la generación del golpe de ariete.

### 2.2.5. Modelos de Fricción

En la literatura relacionada con el cálculo del golpes de ariete en sistemas de conducción de fluidos existen diversos modelos para calcular el factor de fricción [11] [3] [2] [12], los cuales se pueden clasificar en seis grupos:

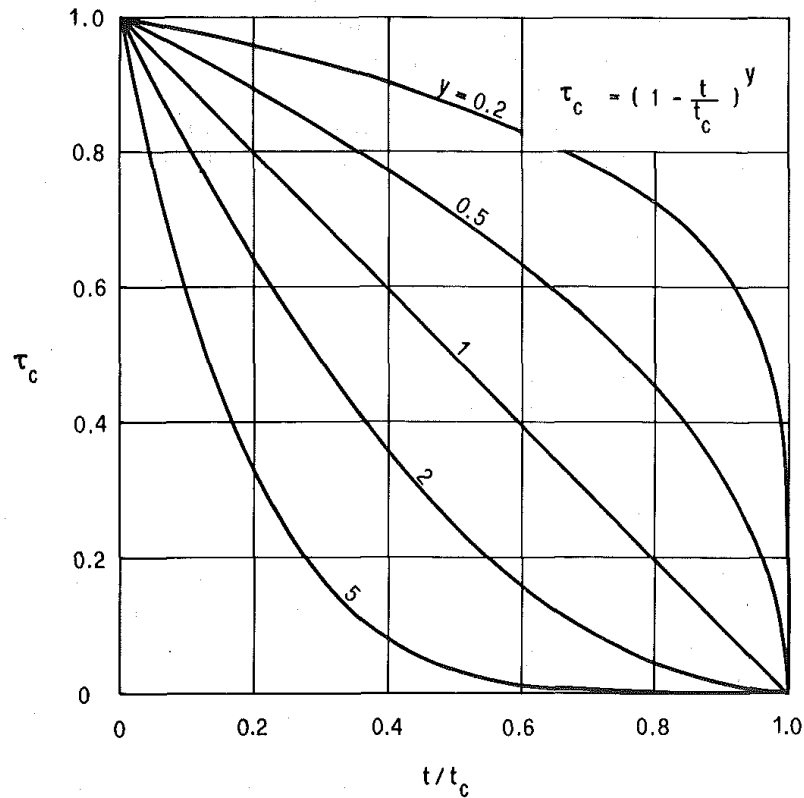


Figura 2.8: Aproximaciones polinomiales del tiempo de cierre de una válvula. Fuente [1]

1. La fricción es dependiente del promedio de la velocidad instantánea del flujo ( $V$ ).
2. La fricción es dependiente del promedio de la velocidad instantánea del flujo ( $V$ ) y de la aceleración local instantánea ( $\partial V/\partial t$ ).
3. La fricción es dependiente del promedio de la velocidad instantánea del flujo ( $V$ ), de la aceleración local instantánea ( $\partial V/\partial t$ ) y de la aceleración convectiva instantánea ( $\partial V/\partial x$ ).
4. La fricción es dependiente del promedio de la velocidad instantánea del flujo ( $V$ ) y de la difusión ( $\partial^2 V/\partial x^2$ ).
5. La fricción es dependiente del promedio de la velocidad instantánea del flujo ( $V$ ) y de los pesos por cambios de velocidad en el pasado ( $W(\tau)$ ).

Por otro lado, los programas de computador comerciales usualmente utilizan el factor de fricción  $f$  de Darcy-Weisbach constante a lo largo del tiempo.

Una alternativa a esto, consiste en utilizar un factor no-estacionario  $f$ , el que puede ser expresado como la suma de una parte cuasi-estacionaria  $f_q$  y una parte no-estacionaria  $f_u$ . Al establecer  $f_u = 0$ , se obtiene el modelo cuasi-estacionario (ver Figura 2.9), el cual corresponde a actualizar el valor del número de Reynolds en el método de Colebrook en cada nuevo cómputo.

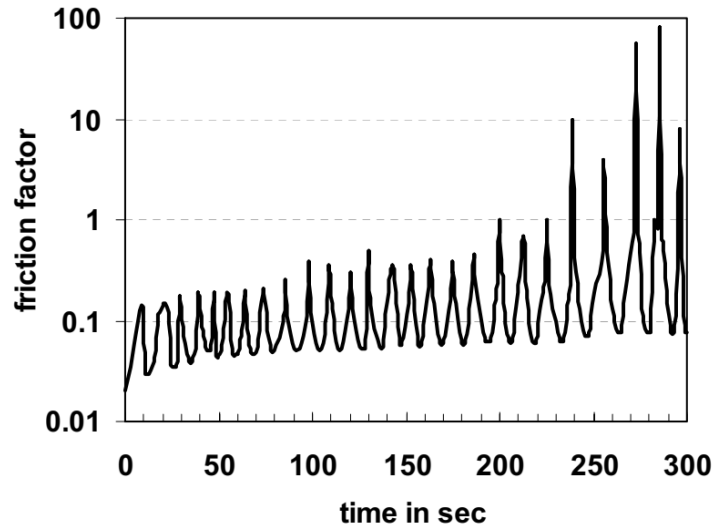


Figura 2.9: Gráfico del factor de fricción en función del tiempo, según Saika [2].

Para el modelo no-estacionario, se utiliza en este estudio el modelo de Brunone [11] modificado por Vítkovský [3], el que se presenta en la Ecuación 2.28.

Las Figuras 2.10 y 2.11 grafican los valores de presión en función del tiempo para los modelos cuasi-estacionario y no-estacionario, respectivamente, obtenidos por Bergant [3] en su experimento.

$$f = f_q + \frac{\sqrt{C^*}}{2} \frac{D}{V|V|} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + a \operatorname{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \quad (2.28)$$

Donde

$$C^* = \begin{cases} 0,00471, & \text{flujo laminar} \\ \frac{7,41}{Re^{\log(14,3/Re^{0,05})}}, & \text{flujo turbulento} \end{cases} \quad (2.29)$$

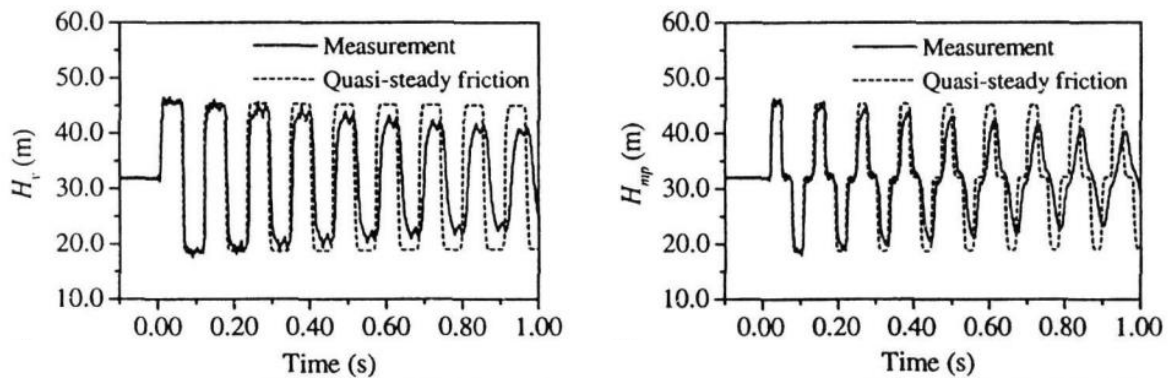


Figura 2.10: Gráficos de presión en función del tiempo medidos y calculados en una válvula ( $H_v$ ) y en el punto medio ( $H_{mp}$ ) del sistema estudiado por Bergant, utilizando el modelo cuasi-estacionario. Fuente [3]

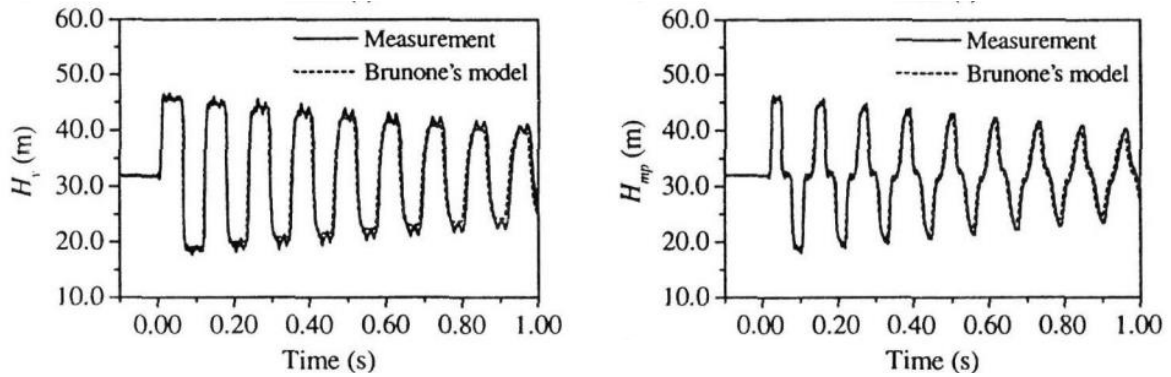


Figura 2.11: Gráficos de presión en función del tiempo medidos y calculados en una válvula ( $H_v$ ) y en el punto medio ( $H_{mp}$ ) del sistema estudiado por Bergant, utilizando el modelo no-estacionario. Fuente [3]

### 2.2.6. Métodos de control de Golpes de Ariete

Con el fin de evitar daños a las instalaciones, las personas y las comunidades, es que a todo sistema de transporte de fluidos se le debe de calcular las sobre-presiones y las sub-presiones producto de un golpe de ariete. Actualmente existen diversas soluciones que buscan minimizar las consecuencias del efecto no-estacionario rápido [6], los que se indican a continuación:

- Cañerías con espesor de pared robusto: una opción es aumentar el espesor de pared, de manera de asegurar que soporte las sobre-presiones, al mismo tiempo que las sub-presiones a las que se verá afectada la cañería.
- Cambiar el trazado de la cañería: existen trazados o *ruteos* de los sistemas de cañerías que favorecen la ampliación de las ondas cuando se genera el golpe de ariete. De ser posible, los trazados de las cañerías se deben escoger de manera de evitar la cañería cavite (que las subpresiones alcancen la presión de evaporación del agua).
- Evitar el cierre rápido de válvulas: si el tiempo de cierre de la válvula es mayor que el tiempo crítico de la onda, la amplitud de las sobre-presiones, así como las sub-presiones, se verá disminuida.
- Evitar el cierre brusco de las válvulas de retención.
- Aumentando la inercia de las bombas y los motores.
- Estanques hidroneumáticos: es uno de los elementos más usados para disminuir el efecto de un golpe de ariete. Consiste en un estanque que en su interior posee un volumen de un gas, y una membrana que lo separa del volumen de agua contenido dentro del recipiente. Este equipo logra disminuir la energía que genera la onda del golpe de ariete, al comprimir el aire al interior del estanque.
- Chimeneas de equilibrio: son unos estanques atmosféricos, abiertos por la parte superior

que son usados habitualmente en sistemas hidroeléctricos. Permiten el ingreso de aire a la cañería principal, de manera de evitar que se produzcan sub-presiones inferiores a la evaporación del agua.

- Válvulas de alivio: son válvulas que permiten el ingreso de aire a la línea en caso de sub-presión, o bien, pueden permitir que las burbujas de aire que se puedan generar en el interior de la cañería salgan a la atmósfera, o ambas cosas.

## 2.3. Método de Elementos Finitos

Muchos fenómenos físicos en ingeniería y en las ciencias pueden ser descritos en términos de ecuaciones de derivadas parciales. En general, resolver estas ecuaciones por métodos analíticos clásicos es casi imposible. El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) es una aproximación numérica en donde estas ecuaciones de derivadas parciales pueden ser resueltas aproximadamente. Desde un punto de vista de la ingeniería, el FEM es un método para resolver problemas de ingeniería tales como análisis de esfuerzos, transferencia de calor, flujo de fluidos y electromagnetismo, por simulación computacional.

La idea básica del método de elementos finitos consiste en dividir un cuerpo en elementos finitos (llamados *elementos*), conectados por *nodos* [13]. Para problemas lineales, la solución es determinada resolviendo un sistema de ecuaciones lineales; el número de incógnitas es igual al número de nodos. Para obtener una solución razonablemente precisa, se necesitan cientos de nodos, por lo que el uso de computadores es esencial para resolver estas ecuaciones.

El desarrollo del método de elementos finitos posee tres etapas generales que permiten obtener las ecuaciones del sistema, que luego deben ser resueltas en un computador [14]. Estas etapas son:

- La forma fuerte, la que consiste en las ecuaciones que gobiernan el modelo y sus respectivas condiciones de borde.
- La forma débil.
- La funciones de aproximación.

Las funciones de aproximación se combinan con la forma débil de las ecuaciones para obtener las ecuaciones de elementos finitos discretos.

En el problema planteado en este estudio, las Ecuaciones 2.20, 2.26, 2.27 y la condición de reservóreo corresponden a la forma fuerte. Esto es, las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete y sus condiciones de borde.

Para desarrollar las ecuaciones de elementos finitos, las ecuaciones de derivadas parciales deben ser re-escritas en forma de integrales, llamadas forma débil. Esta forma débil debe ser equivalente a las ecuaciones diferenciales en su forma fuerte.



En el caso del golpe de ariete, las ecuaciones en su forma débil son:

$$\begin{aligned} \int_0^L w_1 \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f V |V|}{2 D} \right] dx &= 0 \quad \forall w_1 \\ \int_0^L w_2 \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right] dx &= 0 \quad \forall w_2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

En donde  $w_1$  y  $w_2$  son denominadas funciones de peso, y tienen la particularidad de ser funciones arbitrarias. La arbitrariedad de las funciones de peso es crucial, ya que de lo contrario, una forma débil no es equivalente a una forma fuerte.

Además, de ahora en adelante, los valores de  $V$  y  $H$  no son los valores exactos, sino que se consideran como funciones de aproximación de sus respectivos valores reales. Estas funciones de aproximación deben satisfacer las condiciones de borde del sistema.

Si bien es cierto las funciones de peso pueden seleccionarse arbitrariamente, existen métodos que permiten su selección [15]. Algunos de estos métodos son:

- Método de colocación
- Método de los mínimos cuadrados
- Método de Galerkin

En la Sección 3.2 se profundizará el método de elementos finitos con el método de Galerkin.

# Capítulo 3

## Metodología

### 3.1. General

En el presente capítulo se presenta la metodología adoptada y los recursos utilizados para resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete en un sistema de transporte de agua en tuberías.

El estudio se inició con una investigación profunda de la literatura relacionada, la cual incluyó el curso de Mecánica de Fluidos [5], dictada en 2007 por el profesor del Departamento de Ingeniería Civil Mecánica de la Universidad de Chile, el sr. Carlos Gherardelli †, y pasó por clásicos de la materia como los estudios de los sres. Lorenzo Allievi [16], A.R. David Thorley [6] y Victor L. Streeter [8]. De esta indagación, nació el planteamiento de las ecuaciones que gobiernan el golpe de ariete presentadas en la Sección 2.2.3, así como las condiciones de borde indicadas en la Sección 2.2.4, de este documento.

Así mismo, el alumno estudió el método de los elementos finitos. Esta parte de la investigación incluyó los cursos Elementos Finitos [17] y Métodos de Elemento Finito Generalizado [15], dictados en 2011 por los profesores del Departamento de Ingeniería Civil Mecánica de la Universidad de Chile, los srs. Alejandro Font y Alejandro Ortiz, respectivamente. También fueron parte del estudio las obras de los srs. Jacob Fish [14] y O.C. Zienkiewicz [18].

Dado que el objetivo principal de este trabajo es desarrollar un algoritmo que permita calcular las variaciones de presión y velocidad en un sistema de tuberías por efecto del golpe de ariete, es que se utilizó el lenguaje de programación de MATLAB [19]. La elección de este programa se justifica en que posee ambiente de desarrollo interactivo (IDE, por sus siglas en inglés), la eficiencia en manipulación de matrices, y la representación de datos.

Con el fin de validar el algoritmo desarrollado, es que el alumno contrastó los resultados obtenidos con los registrados por el sr. Roman Wichowski en su estudio *Hydraulic Transients Analysis in Pipe Networks by the Method of Characteristics (MOC)* [4]. Si bien el estudio de Wichowski corresponde a una impulsión de corta distancia (42 m), es de interés para el presente estudio, ya que la experimentación realizada por él, está completamente detallada

en el artículo publicado, lo cual facilita su reproducción, al menos a nivel de simulación.

Una vez validado el algoritmo, el alumno extrapoló el problema planteado por Wichowsky, definiendo una conducción de larga distancia (5 000 m). Las variaciones de este problema vienen dadas por el modelo seleccionado de fricción: coeficiente de fricción estacionario, cuasi-estacionario, y cuasi-estacionario más no-permanente (ver Sección 2.2.5).

Más aún, estos resultados fueron contrastados y validados con los resultados de simular el mismo problema de conducción de larga distancia en el software comercial Bentley HAMMER [20] [21].

## 3.2. Desarrollo del algoritmo

Como se indicó en la Sección 2.2.3 de este documento, el golpe de ariete es un fenómeno que depende de una variable espacial y de otra temporal. La metodología que se usa para resolver estos problemas, es solucionar una variable con el método de elementos finitos, y la otra, con el método de diferencias finitas. En este trabajo, la variable espacial fue resuelta con el método de elementos finitos, por lo que la variable temporal, fue resuelta con el método de diferencias finitas.

### 3.2.1. Forma débil de las ecuaciones del golpe de ariete

En la Sección 2.2.3 de este documento se presentaron las ecuaciones del golpe de ariete en su forma fuerte. El método de los elementos finitos establece que para poder resolver las ecuaciones, éstas deben ser transformadas a su forma débil, las que se presentan en las Ecuaciones 3.2 y 3.2.

$$\int_0^L w_1 \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f V |V|}{2 D} \right] dx = 0 \quad \forall w_1 \quad (3.1)$$

$$\int_0^L w_2 \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right] dx = 0 \quad \forall w_2 \quad (3.2)$$

Dado que el método de elementos finitos busca aproximar de la mejor manera posible los valores de  $V$  y  $H$ , se usaron las siguientes funciones de aproximación:

$$V^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) V_i$$

$$H^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) H_i$$

donde  $\phi_i(x)$  es un set de funciones de base linealmente independientes con soporte local definido sobre los elementos que está rodeando a un nodo de una malla. Esto último se ve gráficamente en la Figura 3.1.

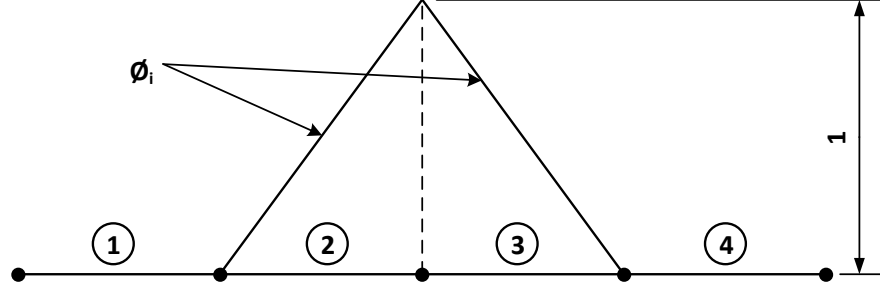


Figura 3.1: Función de base con soporte local.

Asimismo, las funciones  $\phi_i(x)$  cumplen con la condición de desvanecer en el contorno de Dirichlet.

Por otro lado, en las Ecuaciones 3.2 y 3.2 se introdujeron las funciones  $w_1$  y  $w_2$ , respectivamente, que son las funciones de peso, y que cumplen con la condición de ser arbitrarias. Si bien es cierto existen diversas formas de seleccionar las funciones de peso, el método de Galerkin establece que  $w_1$  y  $w_2$  deben ser iguales a la función  $\phi_i$ . Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} V^h(x) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) V_i \\ H^h(x) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) H_i \\ w_1(x) &= \phi_j(x) \\ w_2(x) &= \phi_j(x) \end{aligned}$$

Entonces, al desarrollar las 3.2 y 3.2, se obtienen las Ecuaciones 3.3 y 3.4.

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[ \phi_j \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial V_j^h(t)}{\partial t} + \phi_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} g H_j^h + \phi_j \sum_{i=1}^n \phi_i V_i^h \frac{f|V|}{2D} \right] dx = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^L \phi_j \phi_i dx \frac{\partial V_j^h(t)}{\partial t} + \int_0^L \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx g H_j^h + \int_0^L \phi_j \phi_i dx V_i^h \frac{f|V|}{2D} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[ K_{ij}^{(2)} \frac{\partial V_j^h(x,t)}{\partial t} + K_{ij}^{(1)} g H_j^h + K_{ij}^{(2)} V_i^h \frac{f|V|}{2D} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H} + \frac{f|V|}{2D} \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V} + \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}^t = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

Donde  $K_{ij}^{(1)} = \int_0^L \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx$  y  $K_{ij}^{(2)} = \int_0^L \phi_j \phi_i dx$ .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left[ \phi_j \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial H^h(t)}{\partial t} + \phi_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x} V_i^h \frac{a^2}{g} \right] dx = 0 \\
 \iff & \sum_{i=j}^n \left[ \int_0^L \phi_j, \phi_i dx \frac{\partial H^h(t)}{\partial t} + \int_0^L \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx V_i^h \frac{a^2}{g} dx \right] = 0 \\
 & \iff \sum_{i=j}^n \left[ K_{ij}^{(2)} \frac{\partial H^h(t)}{\partial t} + K_{ij}^{(1)} V_i^h \frac{a^2}{g} \right] dx = 0 \\
 & \iff \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V} + \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}^t = 0 \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Donde  $\mathbb{H}^t = \frac{\partial \mathbb{H}_j}{\partial t}$  y  $\mathbb{V}^t = \frac{\partial \mathbb{V}_j}{\partial t}$ .

### 3.2.2. Discretización temporal

Para resolver la componente temporal de las Ecuaciones 3.3 y 3.4 se utilizó el método de aproximación de familia  $\alpha$ , en el cual un promedio ponderado de la derivada temporal de la variable dependiente se aproxima en dos pasos temporales consecutivos por interpolación lineal de los valores de la variable en esos dos pasos.

$$(1 - \alpha) \mathbb{V}_s^t + \alpha \mathbb{V}_{s+\Delta t}^t = \frac{\mathbb{V}_{s+\Delta t} - \mathbb{V}_s}{\Delta t} \tag{3.5}$$

$$(1 - \alpha) \mathbb{H}_s^t + \alpha \mathbb{H}_{s+\Delta t}^t = \frac{\mathbb{H}_{s+\Delta t} - \mathbb{H}_s}{\Delta t} \tag{3.6}$$

Según el valor de  $\alpha$ , se pueden obtener diferentes esquemas numéricos de integración como los siguientes:

- $\alpha = 0$ , esquema de diferencias de Euler: condicionalmente estable, con orden de precisión  $\mathcal{O}(dt)$ .
- $\alpha = 1/2$ , esquema de diferencias de Crank-Nicolson: estable, con orden de precisión  $\mathcal{O}(dt)^2$ .
- $\alpha = 2/3$ , método de Galerkin: estable, con orden de precisión  $\mathcal{O}(dt)^2$ .
- $\alpha = 1$ , esquema de diferencias hacia atrás: estable, con orden de precisión  $\mathcal{O}(dt)$ .

De la Ecuación 3.5, se obtiene.

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha) \mathbb{V}_s^t + \alpha \mathbb{V}_{s+\Delta t}^t &= \frac{\mathbb{V}_{s+\Delta t} - \mathbb{V}_s}{\Delta t} \Bigg| \cdot \Delta t \\
 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \Delta t \mathbb{V}_s^t + \alpha \Delta t \mathbb{V}_{s+\Delta t}^t &= \mathbb{V}_{s+\Delta t} - \mathbb{V}_s \Bigg| \cdot \mathbb{K}^{(2)}(\cdot) \\
 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \Delta t \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s^t + \alpha \Delta t \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t}^t &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} - \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s \\
 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \Delta t \left( -g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_s - \frac{f|V|}{2D} \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s \right) + \\
 \alpha \Delta t \left( -g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_{s+\Delta t} - \frac{f|V|}{2D} \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} \right) &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} - \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s \\
 \Leftrightarrow -\alpha \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_{s+\Delta t} - \left( \alpha \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1 \right) \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} &= (1 - \alpha) \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_s + \\
 &\quad \left( (1 - \alpha) \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1 \right) \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

En donde se aplicaron las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 - \left( g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_s + \frac{f|V|}{2D} \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s \right) &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_s^t \\
 - \left( g \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{H}_{s+\Delta t} + \frac{f|V|}{2D} \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} \right) &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{V}_{s+\Delta t}^t
 \end{aligned}$$

De la Ecuación 3.6 se tiene:

$$\begin{aligned}
 (1 - \alpha) \mathbb{H}_s^t + \alpha \mathbb{H}_{s+\Delta t}^t &= \frac{\mathbb{H}_{s+\Delta t} - \mathbb{H}_s}{\Delta t} \Bigg| \cdot \Delta t \\
 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \Delta t \mathbb{H}_s^t + \alpha \Delta t \mathbb{H}_{s+\Delta t}^t &= \mathbb{H}_{s+\Delta t} - \mathbb{H}_s \Bigg| \cdot \mathbb{K}^{(2)}(\cdot) \\
 \Leftrightarrow -(1 - \alpha) \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_s - \alpha \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_{s+\Delta t} - \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_s \\
 \Leftrightarrow -\mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_{s+\Delta t} - \alpha \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} &= -\mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_s + (1 - \alpha) \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_s
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

En donde se aplicaron las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 -\frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_s &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_s^t \\
 -\frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \mathbb{V}_{s+\Delta t} &= \mathbb{K}^{(2)} \mathbb{H}_{s+\Delta t}^t
 \end{aligned}$$

Reordenando las Ecuaciones 3.7 y 3.8 en forma matricial, se obtiene la expresión de la Ecuación 3.9.

$$\begin{bmatrix} -\alpha \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} & -\left(\alpha \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1\right) \mathbb{K}^{(2)} \\ -\mathbb{K}^{(2)} & -\alpha \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{s+\Delta t} \\ \mathbb{V}_{s+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} & \left((1-\alpha) \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1\right) \mathbb{K}^{(2)} \\ -\mathbb{K}^{(2)} & (1-\alpha) \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_s \\ \mathbb{V}_s \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Sean

$$\begin{bmatrix} -\alpha \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} & -\left(\alpha \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1\right) \mathbb{K}^{(2)} \\ -\mathbb{K}^{(2)} & -\alpha \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbb{M}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha) \Delta t g \mathbb{K}^{(1)} & \left((1-\alpha) \Delta t \frac{f|V|}{2D} + 1\right) \mathbb{K}^{(2)} \\ -\mathbb{K}^{(2)} & (1-\alpha) \Delta t \frac{a^2}{g} \mathbb{K}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbb{N}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbb{H}_{s+\Delta t} \\ \mathbb{V}_{s+\Delta t} \end{bmatrix} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{N} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_s \\ \mathbb{V}_s \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.2.3. Construcción de las funciones de forma y matrices locales

En la formulación de las formas débiles de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete se introdujeron las funciones de base  $\phi_i$ . Éstas están definidas sobre un número reducido de elementos en la malla de elementos finitos (soporte local o compacto), ver Figura 3.2. Esto permite definir funciones de forma que tienen definición local en un elemento determinado, en contraste con las funciones de base, que tienen un carácter global definidas en todo el dominio discretizado. Las coordenadas que definen a una función de forma local en el elemento se pueden escribir en forma paramétrica (coordenadas naturales). Luego, para el elemento  $\textcircled{e}$  se tiene la Figura 3.3, donde los nodos  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  indican numeración local de nodos dentro de un elemento.

Por otro lado, la numeración de nodos sin círculos indican numeración global en la malla. La coordenada natural es  $\xi$ . El mapeo isoparamétrico define la relación entre el elemento de referencia y el elemento físico indicado en la Ecuación 3.11.

$$x = \sum_{I=1}^n N_I(\xi) x_I^e \quad (3.11)$$

Cuando  $n = 2$ , se tiene el caso de elementos lineales, y  $N_I(\xi)$  es la función de forma del elemento finito, y se cumple la Ecuación 3.12.

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.12)$$

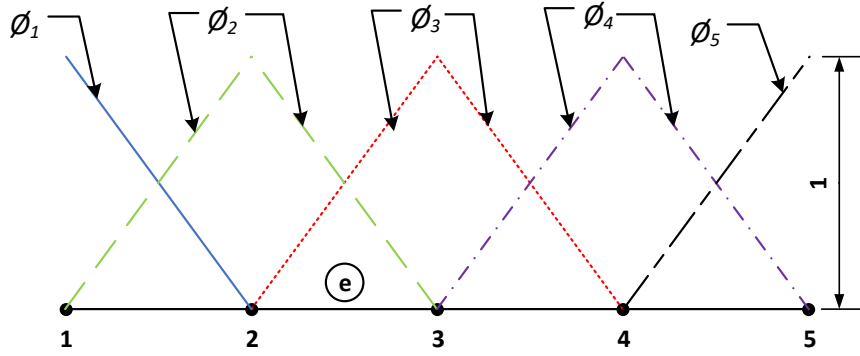


Figura 3.2: Funciones de base para elementos finitos lineales.

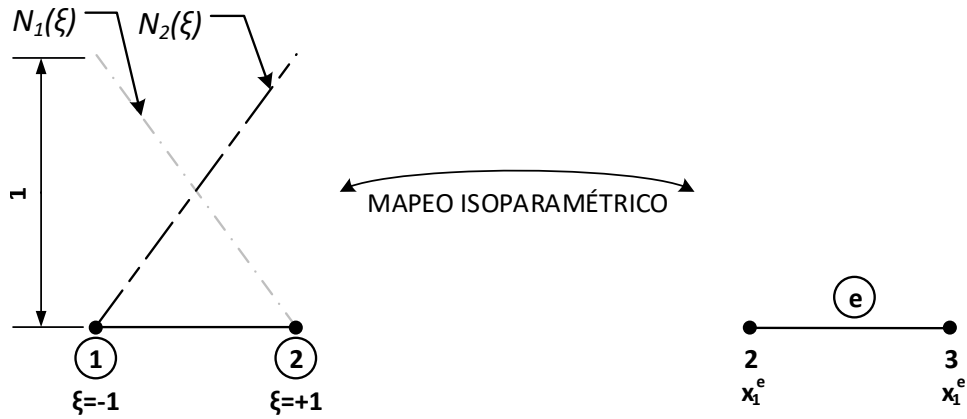


Figura 3.3: A la izquierda, elemento de referencia. A la derecha, elemento físico o real.

Luego, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{I=1}^2 N_I(\xi) x_I^e \\
 x &= N_1(\xi) x_1^e + N_2(\xi) x_2^e \\
 x &= \frac{1-\xi}{2} x_1^e + \frac{1+\xi}{2} x_2^e \quad \left| \frac{d(\cdot)}{d\xi} \right. \\
 dx &= \frac{d}{d\xi} \left( \frac{x_1^e + x_2^e}{2} + \frac{\xi}{2} \underbrace{(x_2^e - x_1^e)}_{le} \right) \\
 dx &= \frac{le}{2} \\
 dx &= j
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de las matrices  $K_{ij}^{(1)}$  y  $K_{ij}^{(2)}$  para cualquier elemento tienen las



siguientes formas:

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(1)} &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \phi_j \frac{d\phi_i}{dx} dx \\
 K_{ij}^{(1)} &= \int_{-1}^{+1} N_I(\xi) \frac{dN_J(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} j d\xi \\
 K_{11}^{(1)} &= \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} j d\xi = \frac{-1}{2} \\
 K_{12}^{(1)} &= \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} j d\xi = \frac{1}{2} \\
 K_{21}^{(1)} &= \int_{-1}^{+1} N_2(\xi) \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} j d\xi = \frac{-1}{2} \\
 K_{22}^{(1)} &= \int_{-1}^{+1} N_2(\xi) \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \frac{1}{j} j d\xi = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(2)} &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \phi_j \phi_i dx \\
 K_{ij}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} N_I(\xi) N_J(\xi) j d\xi \\
 K_{11}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) N_1(\xi) j d\xi = le \frac{1}{3} \\
 K_{12}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) N_2(\xi) j d\xi = le \frac{1}{6} \\
 K_{21}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} N_2(\xi) N_1(\xi) j d\xi = le \frac{1}{6} \\
 K_{22}^{(2)} &= \int_{-1}^{+1} N_2(\xi) N_2(\xi) j d\xi = le \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Re-escribiendo estas expresiones en forma matricial, se tiene para cualquier elemento

$$K_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$K_{ij}^{(2)} = le \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para el caso de tres nodos por cada elemento ( $n = 3$ ), se cumple lo siguiente:

$$N_1(\xi) = \frac{(\xi - 1)\xi}{2} \quad N_2(\xi) = -(\xi + 1)(\xi - 1) \quad N_3(\xi) = \frac{(\xi + 1)\xi}{2} \quad (3.15)$$

$$K_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/2 & 2/3 & -1/6 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/6 & -2/3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$K_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3}x_1^e + \frac{2}{5}x_2^e - \frac{1}{15}x_3^e & \frac{-1}{5}x_1^e + \frac{4}{15}x_2^e - \frac{1}{15}x_3^e & \frac{1}{30}x_1^e - \frac{1}{30}x_3^e \\ \frac{-1}{5}x_1^e + \frac{4}{15}x_2^e - \frac{1}{15}x_3^e & \frac{-8}{15}x_1^e + \frac{8}{15}x_3^e & \frac{1}{15}x_1^e - \frac{4}{15}x_2^e + \frac{1}{5}x_3^e \\ \frac{1}{30}x_1^e - \frac{1}{30}x_3^e & \frac{1}{15}x_1^e - \frac{4}{15}x_2^e + \frac{1}{5}x_3^e & \frac{1}{15}x_1^e - \frac{2}{5}x_2^e + \frac{1}{3}x_3^e \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.2.4. Construcción de la matriz de rigidez global

Las matrices 3.13 y 3.14, así como las 3.16 y 3.17 corresponden a las matrices de rigidez local para cada elemento, ya sea con dos nodos, o bien, tres nodos, respectivamente. Sin embargo, para determinar una solución para el sistema, es necesario resolver las ecuaciones involucradas considerando el sistema completo, razón por la cual es necesario ensamblar la matriz de rigidez global. Para realizar esto, se consideró que en el método de los elementos finitos cada elemento debe tener un nodo en cada uno de sus extremos, y que estos nodos, también son extremos de los elementos adyacentes. Es decir, existen nodos ubicados en los extremos de dos elementos que aportan con información.

Para el caso de dos nodos por cada elemento, se tiene que la matriz de rigidez global  $\mathbb{K}^{(k)}$  tiene la siguiente forma, donde  $k = 1, 2$ .

$$\mathbb{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_1 & \begin{bmatrix} K_{12}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} K_{22}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_2 & \begin{bmatrix} K_{12}^{(k)} \\ K_{11}^{(k)} \end{bmatrix}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} K_{22}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_{n-1} + \begin{bmatrix} K_{11}^{(k)} \\ K_{21}^{(k)} \end{bmatrix}_n & \begin{bmatrix} K_{12}^{(k)} \\ K_{22}^{(k)} \end{bmatrix}_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

En donde  $\begin{bmatrix} K_{ij}^{(k)} \end{bmatrix}_e$  corresponde al componente  $(i, j)$  de la matriz de rigidez local  $K_{ij}^{(k)}$  del elemento  $e$ .

### 3.2.5. Implementación de las condiciones iniciales e imposición de las condiciones de borde

Como se ha indicado a lo largo de este documento, el fenómeno golpe de ariete se produce por la apertura/cierre brusco de una válvula, la detención repentina de una bomba, etc. Esto es, se origina el evento no-estacionario producto de una perturbación de un sistema estacionario.

### 3.2. DESARROLLO DEL ALGORITMO

Para resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete, es necesario, primero determinar completamente el estado estacionario, y segundo, perturbar el sistema.

En el presente estudio se analiza la situación de un estanque con nivel de pelo de agua constante ubicado a uno de los extremos de una conducción por medio de una tubería recta (tanto en planta como en elevación), cuyo espesor, sección interna y material de cañería es constante a lo largo de todo el trazado, y en el otro extremo una válvula de bola reguladora de presión. Este esquema se representa en la Figura 3.4, y se detalla a continuación.

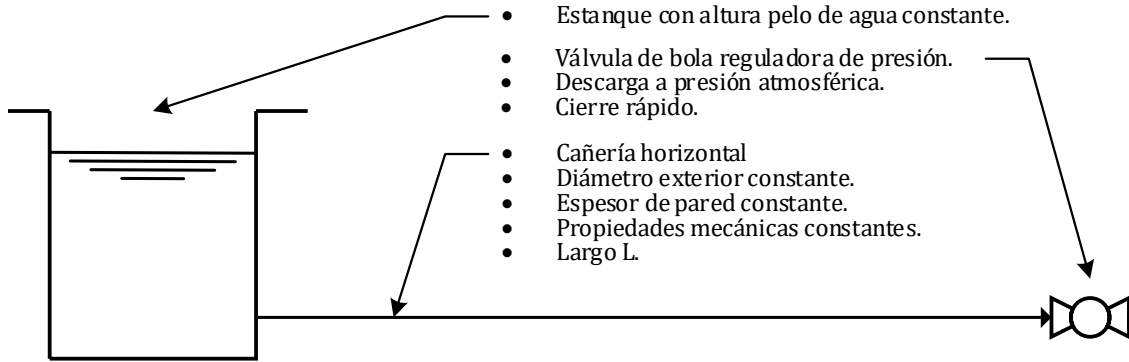


Figura 3.4: Esquema del problema abordado en el estudio.

#### Condiciones iniciales

En el estado estacionario del problema planteado, se cumplen las siguientes condiciones:

- La velocidad del fluido al interior de la cañería, en cualquier punto del trazado y en cualquier instante, tiene el mismo valor  $V_0$  (en m/s).
- La presión en la válvula, es constante a lo largo del tiempo, y tiene valor  $H_0$  (en m.c.a).
- La presión interna de la cañería que ejerce el fluido no varía con el tiempo, pero sí con la distancia, ya que el fluido debe superar las pérdidas de energía producto de la fricción entre el fluido y la pared rugosa de la cañería (presión dinámica).

Estas condiciones se muestran esquemáticamente en la Figura 3.5.

#### Perturbación del estado estacionario y condiciones de borde

La perturbación del estado estacionario en el presente estudio se obtiene al cerrar rápidamente la válvula de bola del esquema de la Figura 3.4. Esta condición, genera la siguiente condición de borde en la válvula:

$$V(x = L, t) = \begin{cases} \tau(t) V_0 \sqrt{\frac{H(x=L, t)}{H_0}}, & t_{ic} \leq t \leq t_{ic} + t_{cv} \\ 0, & t > t_{ic} + t_{cv} \end{cases} \quad (3.18)$$

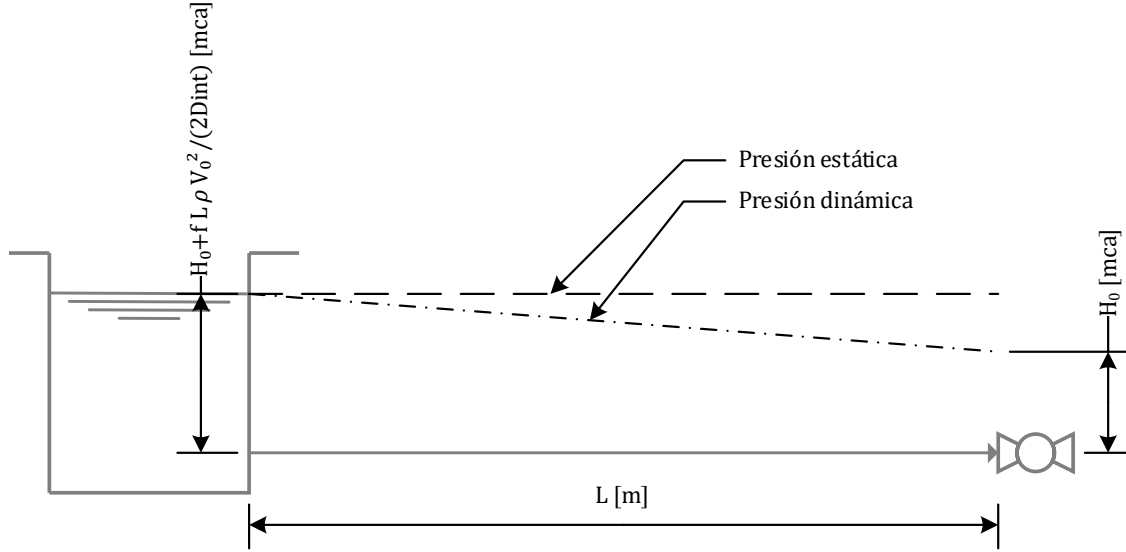


Figura 3.5: Esquema del problema abordado en el estudio, con el perfil de presiones estática y dinámica.

En donde

- $\tau(t)$ , es la apertura efectiva de la válvula en función del tiempo.
- $t_{ic}$ , es el tiempo en que comienza la válvula a cerrarse.
- $t_{cv}$ , es el tiempo que le toma a la válvula cerrarse.
- $H_0$  y  $V_0$ , son los valores de presión y velocidad del fluido en la válvula, en el estado estacionario.

La apertura efectiva de la válvula se puede aproximar con la Función 3.19.

$$\tau(t) = \left(1 - \frac{t - t_{ic}}{t_{cv}}\right)^n \quad (3.19)$$

Para una válvula de bola, el valor de  $n$  es tres, y es el valor que se usó en el presente estudio.

Por otro lado, el estanque en el extremo opuesto de la cañería genera otra condición de borde: la presión debe ser igual a la altura del pelo de agua con respecto a la descarga del fluido. Dado que se asumió que el pelo de agua es constante a lo largo del tiempo (condición de reservóreo, o represa), se cumple lo indicado en la Ecuación 3.20.

$$H(x = 0, t) = H_0(x = 0) \quad \forall t \quad (3.20)$$

#### Modelos de pérdida de energía por fricción

En la Ecuación 3.9 aparece el valor  $f$  en ambos lados de la igualdad, el cual corresponde a al valor del factor de fricción como resultado del roce entre el fluido y la pared de la cañería. De acuerdo a Bergant [3], en la literatura relacionada con este tema, se han presentado diversos modelos que permiten estimar  $f$ , y que se pueden agrupar de la siguiente forma:

- Modelo estacionario: consiste en considerar el valor de  $f$  constante a lo largo del tiempo.
- Modelo cuasi-estacionario: consiste en actualizar el valor de  $f$  en cada instante de tiempo.
- Modelo no-estacionario: consiste en asumir que  $f$  tiene una componente cuasi-estacionaria y otra no-estacionaria. Este último valor puede ser calculado según el modelo de Zielke, o bien, el de Vítkovský [3].

Dado esto, es que en el presente estudio se generaron tres rutinas, idénticas entre ellas, con la variante del método de estimación del parámetro  $f$ .

### 3.3. Programas utilizados

Dado que el trabajo desarrollado a lo largo del presente estudio fue completamente teórico, fue necesario utilizar un programa de computador que permitiese programar la solución numérica desarrollada, y otro programa que permitiera contrastar los resultados propios contra resultados validados (programa comercial de cálculo de golpe de ariete). Para esto, el alumno utilizó los programas MathWorks MATLAB y Bentley HAMMER (versión de prueba). Las Figuras 3.6 y 3.7 muestran el aspecto general de cada uno de los programas utilizados. Este último programa tiene la particularidad de que utiliza el método de las características para resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete.

### 3.3. PROGRAMAS UTILIZADOS

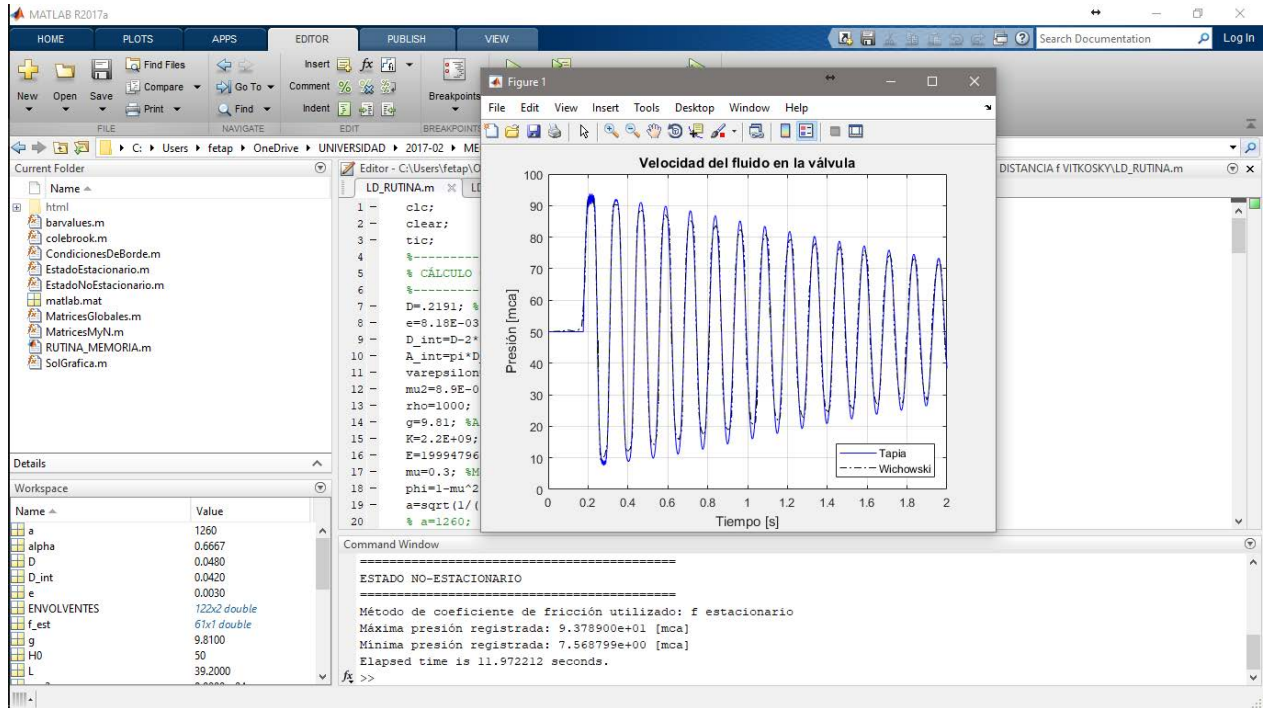


Figura 3.6: Ventana principal del software MathWorks MATLAB.

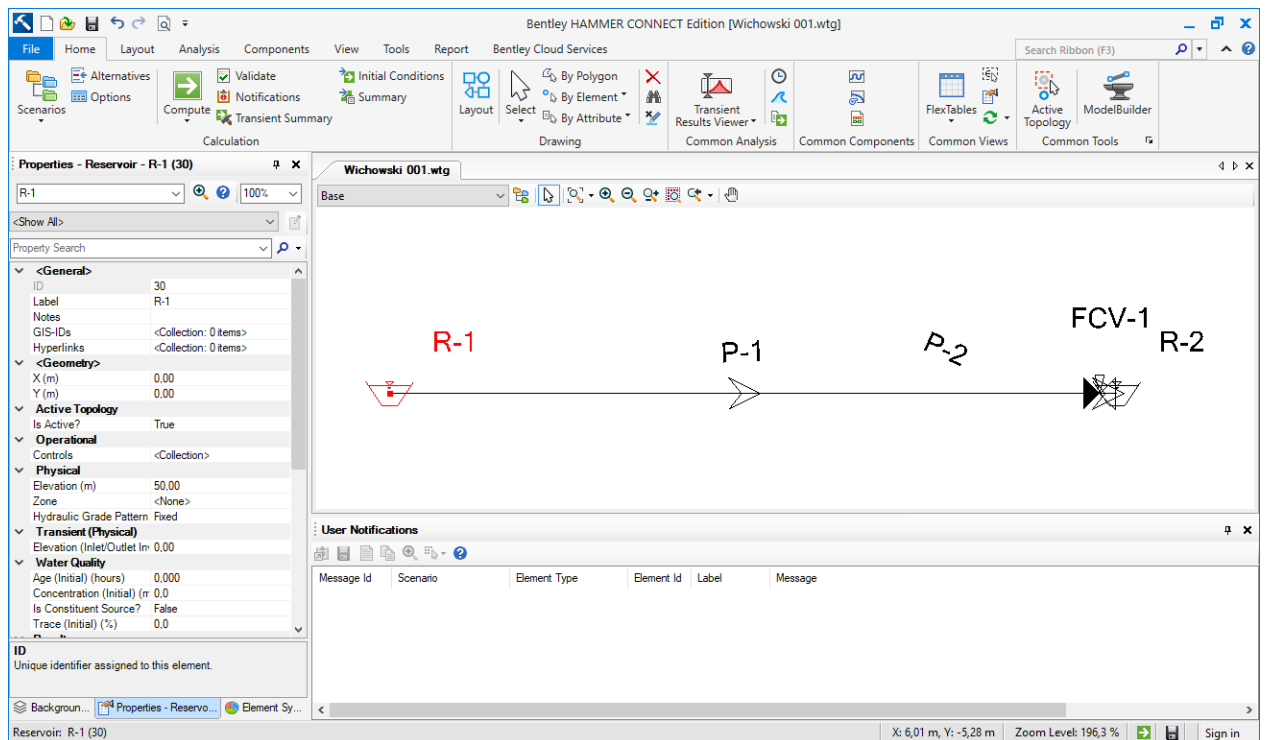


Figura 3.7: Ventana principal del software Bentley HAMMER.

# Capítulo 4

## Memoria de Cálculo

En esta parte del informe se presentan las consideraciones adoptadas a lo largo del estudio, primero, para validar el algoritmo desarrollado por el estudiante, y luego, para los tres métodos de pérdidas de energía por fricción entre el fluido y la pared interna de la cañería que son de interés.

### 4.1. Validación del algoritmo

Con el fin de lograr el objetivo principal de este estudio, es necesario, en primera instancia, validar el algoritmo desarrollado en la Sección 3.2. Para esto, se tomó como referencia la experimentación y simulación por el método de las características obtenidos por Wichowski [4].

La experimentación consideró el esquema planteado en la Figura 3.4, con los siguientes parámetros:

- Largo de la cañería  $L = 41[m]$ .
- Diámetro interno de la cañería  $D_{int} = 42[mm]$ .
- Espesor de pared de cañería  $e = 3[mm]$ .
- Módulo de elasticidad del material de la cañería  $E = 2,06E11[Pa]$ .
- Módulo de compresibilidad del agua  $K = 2,19E09[Pa]$ .
- Temperatura del agua  $t_w = +4,5^{\circ}C$ .
- Celeridad de la onda  $a = 1260[m/s]$ .
- Presión en la válvula en estado estacionario  $H_0(x = 41[m]) = 50[m.c.a]$ .

## 4.1. VALIDACIÓN DEL ALGORITMO

- Caudal en estado estacionario  $Q_0 = 0,453[dm^3/s]$ .
- Tiempo de cierre de la válvula  $t_{cv} = 0,034[s]$ .

Los resultados obtenidos por Wichowski se muestran en la Figura 4.1.

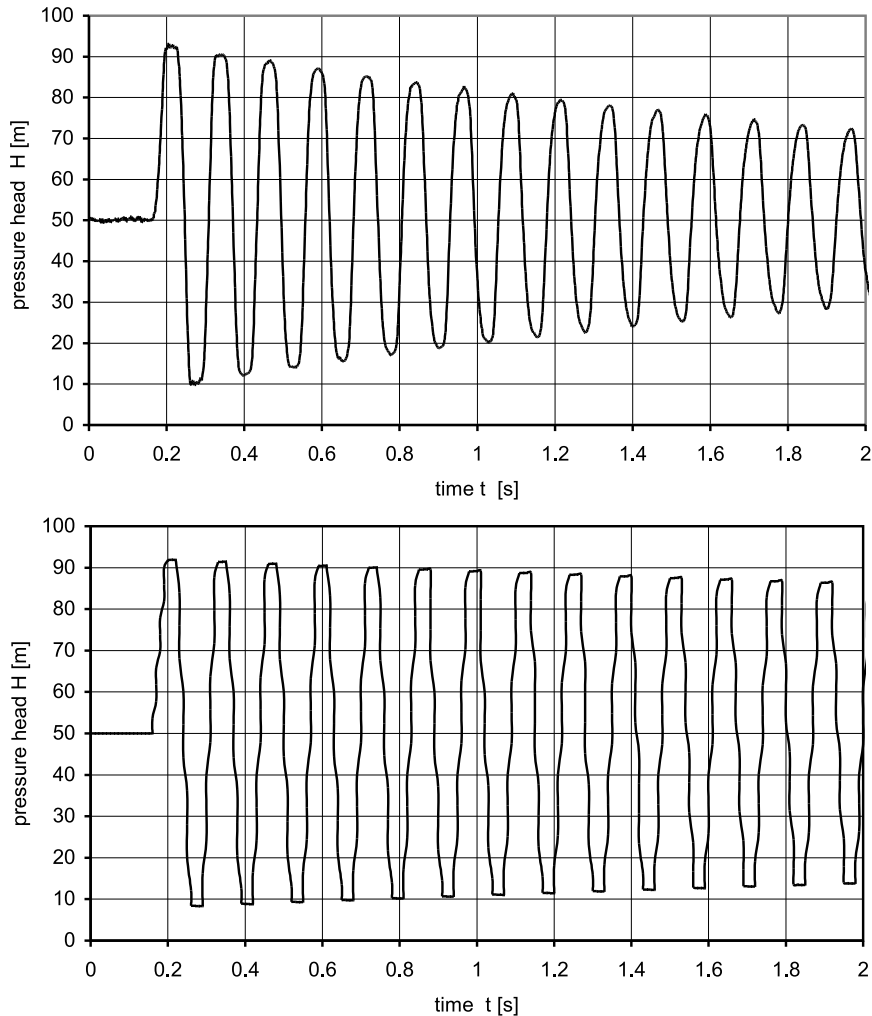


Figura 4.1: Resultados del experimento de Wichowski[4]. Arriba, medición de la presión en función del tiempo medido en la válvula. Abajo, simulación con el método de las características en el mismo punto.

Después, el autor indica que para la simulación numérica del problema, el trazado fue dividido en 30 elementos, se consideró un paso temporal de  $0,0011[s]$ , y el valor de  $f$  según el modelo estacionario. En primera instancia, se utilizan estos datos para ejecutar el algoritmo del alumno (ver Anexo B.1). El resultado de esto, se presenta en la Figura 4.2.

Si bien es cierto que las presiones máximas y mínimas obtenidas con el algoritmo del alumno se ajustan bien al perfil de presiones medido por Wichowski, existe una diferencia entre los periodos de las ondas. Al calcular el tiempo crítico de la onda según la Ecuación 2.13, se obtiene  $t_c = 0,065[s]$ , sin embargo, al medir el valor del periodo de la onda directamente desde la Figura 4.1 (experimento), se obtiene un  $t_c^* = 0,062[s]$ .



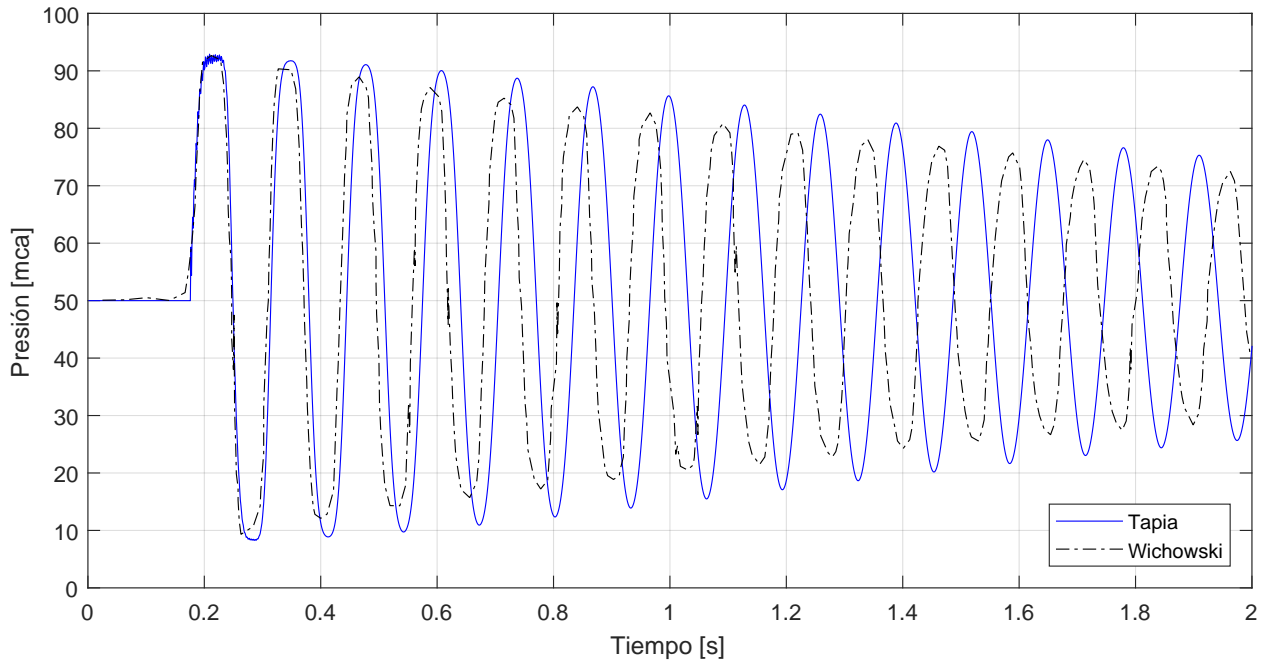


Figura 4.2: Resultados simulación contra mediciones del experimento de Wichowski, considerando método de los elementos finitos,  $L = 41[m]$ , 30 elementos, 3 nodos por elemento, y paso temporal  $0,001[s]$ .

Dado que existe un número infinito de combinaciones de  $L$  y  $a$  cuyo cociente entrega como resultando el tiempo crítico  $t_c^*$ , se consideró dejar uno de los parámetros de la publicación de referencia constante, y se buscó el valor del otro parámetro que arrojara un  $t_c^* = 0,062[s]$ . Éstos valores se presentan en la Ecuación 4.1. Entonces, al ingresar estos parámetros en el algoritmo del alumno, se obtienen los resultados presentados en la Figura 4.1.

$$t_c^* = 0,062[s] \begin{cases} a^* = 1260[m/s] & \Rightarrow L^* = 39,2[m] \\ L^* = 41,0[m] & \Rightarrow a^* = 1320[m/s] \end{cases} \quad (4.1)$$

Con el fin de validar el modelo, se simuló el experimento realizado por Wichowski, cambiando el valor de los parámetros que aseguran la calidad del resultado en el algoritmo. Éstos son:

- $nel$ , número de elementos.
- $nnel$ , número de nodos por elemento. El algoritmo permite 2 ó 3.
- $\Delta t$ , paso temporal.
- $\alpha$ , ponderador del paso temporal.

Los resultados de estas simulaciones se presentan en la Tabla 4.1, en donde además se presentan las resultantes de la distancia entre nodos  $\Delta x_{nodos}$ , el número de Courant  $C_r$ , las presiones máximas y mínimas registradas, y la diferencia de éstos valores, con los valores máximos y mínimos registrados por Wichowski en su experimento.

## 4.1. VALIDACIÓN DEL ALGORITMO

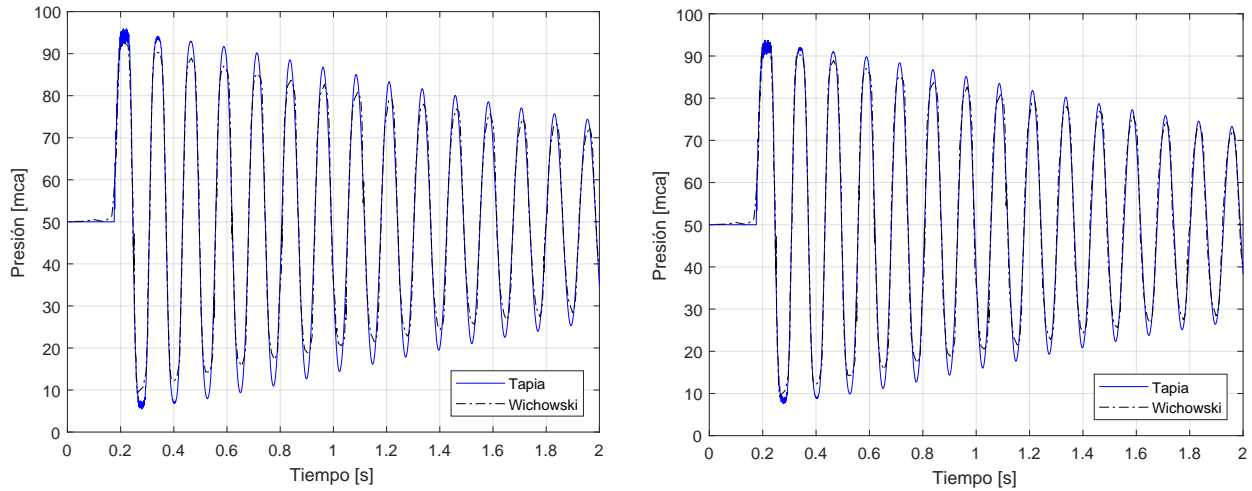


Figura 4.3: Resultados simulación contra mediciones del experimento de Wichowski, considerando método de los elementos finitos, 30 elementos, 3 nodos por elemento, paso temporal 0,001[s]. La Figura de la izquierda consideró  $L^* = 41[m]$  y  $a^* = 1320[m/s]$ , mientras que la Figura de la derecha,  $L^* = 39,2[m]$  y  $a^* = 1260[m/s]$

Así mismo, las Figuras 4.4 y 4.5 muestran cómo varían los resultados de presiones máximas y mínimas al variar la cantidad de elementos, y el paso temporal, respectivamente.

Tabla 4.1: Simulaciones realizadas para validar el algoritmo desarrollado por el alumno. Se toman como base las presiones máximas y mínimas registradas por Wichowski en su experimento (primera línea, en negrillas).

$L$ [m]	$a$ [m/s]	$nel$	$nnel$	$\Delta x_{nodos}$ [m]	$\Delta t$ [s]	$C_r$	$\alpha$	$H_{max}$ [mca]	$\Delta H_{max}$ [%]	$H_{min}$ [mca]	$\Delta H_{min}$ [%]
<b>41</b>	<b>1260</b>	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	<b>93,07</b>	0	<b>9,8</b>	0
41	1260	2	2	20,5	0,001	0,06	2/3	150,83	-62,06	-4,74	148
41	1260	5	2	8,2	0,001	0,15	2/3	107,39	-15,39	-1,23	113
41	1260	10	2	4,1	0,001	0,31	2/3	97,17	-4,41	2,87	71
41	1260	20	2	2,05	0,001	0,61	2/3	93,97	-0,97	6,1	38
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	2/3	92,42	0,7	7,98	19
41	1260	40	2	1,03	0,001	1,22	2/3	92,27	0,86	8,68	11
41	1260	60	2	0,68	0,001	1,85	2/3	92,17	0,97	8,73	11
41	1260	70	2	0,59	0,001	2,14	2/3	92,54	0,57	8,7	11
41	1260	80	2	0,51	0,001	2,47	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	2	3	10,25	0,001	0,12	2/3	362,91	-289,93	-3,57	136
41	1260	5	3	4,1	0,001	0,31	2/3	95,79	-2,92	6,52	33
41	1260	10	3	2,05	0,001	0,61	2/3	93,27	-0,21	8,12	17
41	1260	20	3	1,03	0,001	1,22	2/3	92,38	0,74	8,28	16
41	1260	30	3	0,68	0,001	1,85	2/3	92,91	0,17	8,26	16
41	1260	40	3	0,51	0,001	2,47	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	60	3	0,34	0,001	3,71	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	70	3	0,29	0,001	4,34	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	80	3	0,26	0,001	4,85	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1320	2	2	20,5	0,001	0,06	2/3	159,18	N/A	-5,52	N/A

#### 4.1. VALIDACIÓN DEL ALGORITMO

$L$ [m]	$a$ [m/s]	$nel.$	$nnel$	$\Delta x_{nodos}$ [m]	$\Delta t$ [s]	$C_r$	$\alpha$	$H_{max}$ [mca]	$\Delta H_{max}$ [%]	$H_{min}$ [mca]	$\Delta H_{min}$ [%]
41	1320	5	2	8,2	0,001	0,16	2/3	109,34	N/A	-1,45	N/A
41	1320	10	2	4,1	0,001	0,32	2/3	99,28	N/A	7,47	N/A
41	1320	20	2	2,05	0,001	0,64	2/3	95,89	N/A	4,9	N/A
41	1320	30	2	1,37	0,001	0,96	2/3	94,22	N/A	6,19	N/A
41	1320	40	2	1,03	0,001	1,28	2/3	94,18	N/A	6,82	N/A
41	1320	60	2	0,68	0,001	1,94	2/3	94,14	N/A	6,79	N/A
41	1320	70	2	0,59	0,001	2,24	2/3	95,09	N/A	6,56	N/A
41	1320	80	2	0,51	0,001	2,59	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
39,2	1260	2	2	19,6	0,001	0,06	2/3	154,12	N/A	-5,04	N/A
39,2	1260	5	2	7,84	0,001	0,16	2/3	106,71	N/A	-1,16	N/A
39,2	1260	10	2	3,92	0,001	0,32	2/3	97,07	N/A	2,96	N/A
39,2	1260	20	2	1,96	0,001	0,64	2/3	93,81	N/A	6,27	N/A
39,2	1260	30	2	1,31	0,001	0,96	2/3	92,22	N/A	8,17	N/A
39,2	1260	40	2	0,98	0,001	1,29	2/3	92,18	N/A	8,78	N/A
39,2	1260	60	2	0,65	0,001	1,94	2/3	92,14	N/A	8,76	N/A
39,2	1260	70	2	0,56	0,001	2,25	2/3	93	N/A	8,59	N/A
39,2	1260	80	2	0,49	0,001	2,57	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
41	1320	2	3	10,25	0,001	0,13	2/3	422,21	N/A	-4,14	N/A
41	1320	5	3	4,1	0,001	0,32	2/3	97,77	N/A	4,56	N/A
41	1320	10	3	2,05	0,001	0,64	2/3	95,23	N/A	6,19	N/A
41	1320	20	3	1,03	0,001	1,28	2/3	94,37	N/A	6,29	N/A
41	1320	30	3	0,68	0,001	1,94	2/3	95,92	N/A	5,49	N/A
41	1320	40	3	0,51	0,001	2,59	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
41	1320	60	3	0,34	0,001	3,88	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
41	1320	70	3	0,29	0,001	4,55	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
39,2	1260	2	3	9,8	0,001	0,13	2/3	402,44	N/A	-3,9	N/A
39,2	1260	5	3	3,92	0,001	0,32	2/3	95,65	N/A	6,58	N/A
39,2	1260	10	3	1,96	0,001	0,64	2/3	93,19	N/A	8,18	N/A
39,2	1260	20	3	0,98	0,001	1,29	2/3	92,36	N/A	8,28	N/A
39,2	1260	30	3	0,65	0,001	1,94	2/3	93,79	N/A	7,57	N/A
39,2	1260	40	3	0,49	0,001	2,57	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
39,2	1260	60	3	0,33	0,001	3,82	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
39,2	1260	70	3	0,28	0,001	4,5	2/3	ERR	N/A	ERR	N/A
41	1260	30	2	1,37	0,1	91,97	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	30	2	1,37	0,01	9,2	2/3	ERR	ERR	ERR	ERR
41	1260	30	2	1,37	0,002	1,84	2/3	92,72	0,38	8,65	12
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	2/3	92,42	0,7	7,98	19
41	1260	30	2	1,37	0,0005	0,46	2/3	92,57	0,54	7,71	21
41	1260	30	2	1,37	0,0002	0,18	2/3	92,31	0,82	8,08	18
41	1260	30	2	1,37	0,0001	0,09	2/3	92,32	0,81	8	18
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	0	92,42	0,7	7,98	19
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	1/2	92,42	0,7	7,98	19
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	2/3	92,42	0,7	7,98	19
41	1260	30	2	1,37	0,001	0,92	1	92,42	0,7	7,98	19

#### 4.1. VALIDACIÓN DEL ALGORITMO

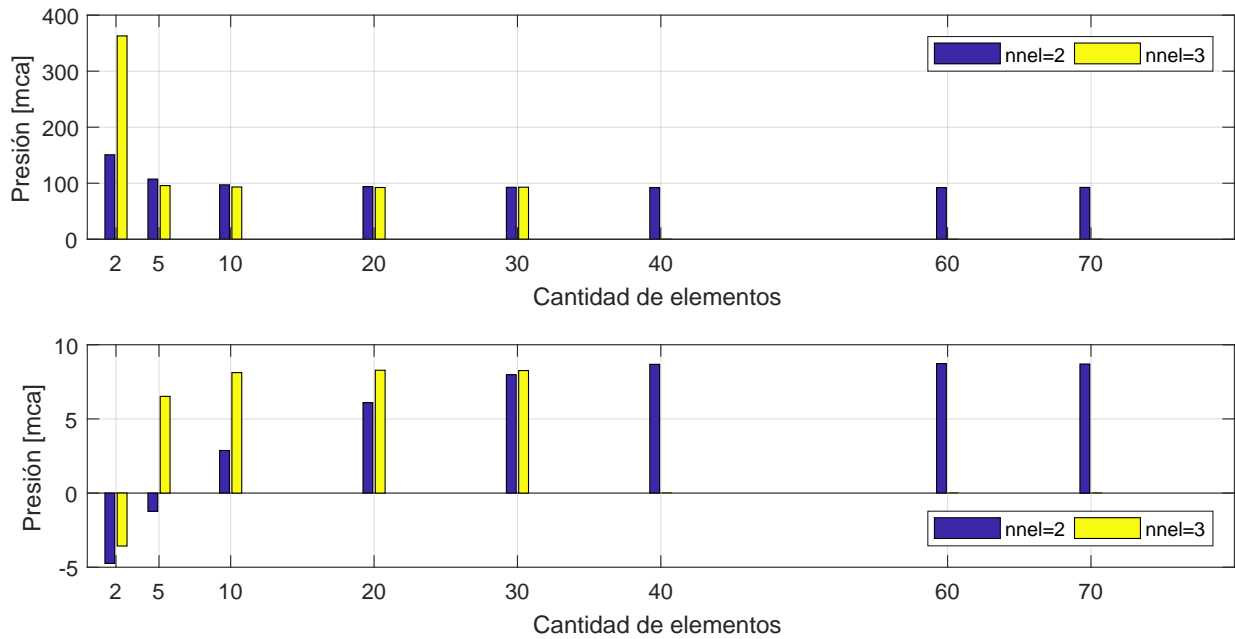


Figura 4.4: Arriba, presiones máximas; abajo, mínimas, registrados para simulación de experimento de Wichowski, al variar la cantidad de elementos y la cantidad de nodos por elemento, considerando  $L = 41[m]$  y  $a = 1260[m/s]$ .

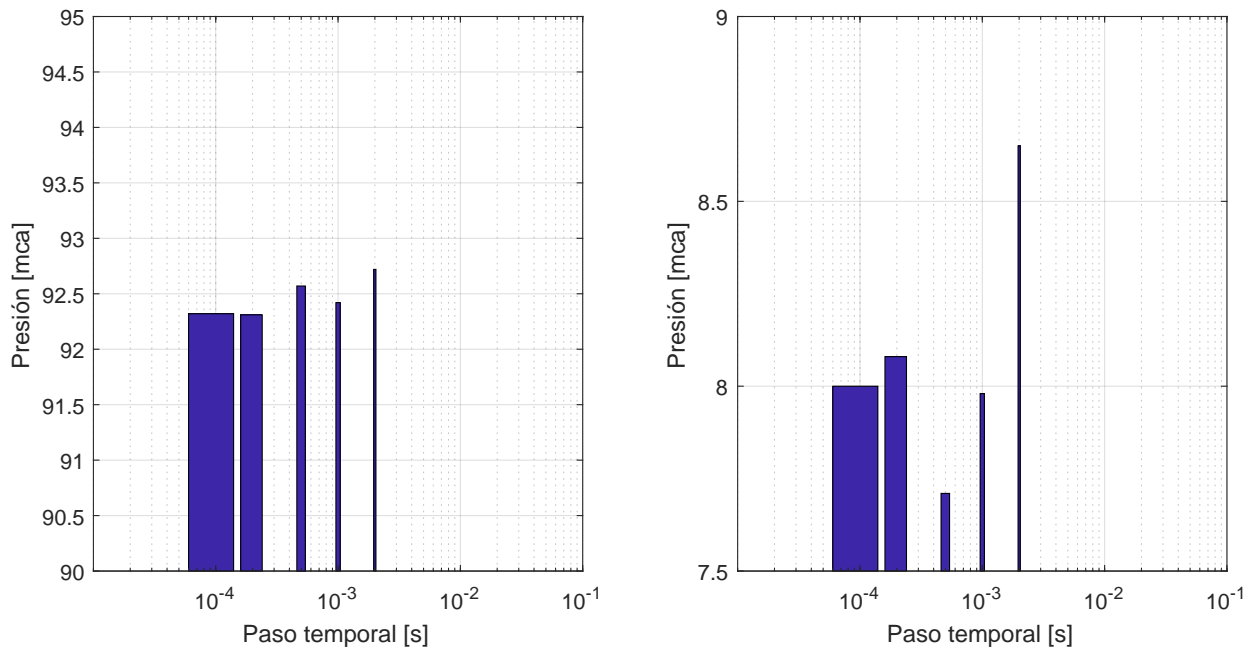


Figura 4.5: A la izquierda, presiones máximas; a la derecha, mínimas, registrados para simulación de experimento de Wichowski, al variar el paso temporal, considerando  $L = 41[m]$ ,  $a = 1260[m/s]$ ,  $nel = 30$  y  $nnel = 2$ .

## 4.2. Implementación algoritmo en una conducción a larga distancia

### 4.2.1. General

Una vez demostrado que el algoritmo desarrollado por el alumno es suficientemente robusto, se procedió a modificar el problema, de manera de introducir una conducción a larga distancia. Para esto, se consideraron los siguientes parámetros:

- Largo de la cañería  $L = 5000[m]$ .
- Diámetro exterior de la cañería  $D_{ext} = 0,2191[m]$ .
- Espesor de pared de cañería  $e = 8,18E - 03[m]$ .
- Material de la cañería ASTM A53 Gr.B.
- Módulo de elasticidad del material de la cañería  $E = 1,99E11[Pa]$ .
- Módulo de Poisson del material de la cañería  $\mu = 0,3$ .
- Módulo de compresibilidad del agua  $K = 2,2E09[Pa]$ .
- Temperatura del agua  $t_w = +4,5^\circ C$ .
- Presión en la válvula en estado estacionario  $H_0(x = 5000[m]) = 150[m.c.a]$ .
- Velocidad del fluido en estado estacionario  $V_0 = 1,5[m/s]$ .
- Tiempo de cierre de la válvula  $t_{cv} = 6[s]$ .

Si bien es cierto, éstos parámetros corresponden a un escenario ficticio, las propiedades mecánicas y dimensionales de la cañería fueron seleccionados de acuerdo a valores de Normas Internacionales<sup>1</sup> y de catálogos de proveedores de cañerías.

Por otro lado, la velocidad del fluido al interior de la cañería, y el tiempo de cierre de la válvula fueron escogidos de manera de cumplir con desarrollar un flujo turbulento al interior de la cañería, y tiempo de cierre rápido de la válvula, respectivamente.

La presión impuesta en la válvula en el estado estacionario permite que la subpresión desarrollada por efecto del golpe de ariete no alcance la presión de cavitación. Este fenómeno queda fuera del alcance del presente estudio.

Finalmente, se presentan las gráficas resultantes de considerar el factor de fricción  $f$  según el método estacionario, el cuasi-estacionario, y el no-estacionario de Vítkovský[3]. Estos re-

---

<sup>1</sup>ASME B36.10M, para las dimensiones de la cañería; ASMT A53, para las propiedades mecánicas de la cañería.

## 4.2. IMPLEMENTACIÓN ALGORITMO EN UNA CONDUCCIÓN A LARGA DISTANCIA

sultados se comparan con los obtenidos de simular el mismo problema en el programa para computador Bentley HAMMER, según los parámetros indicados en la Figura 4.6.

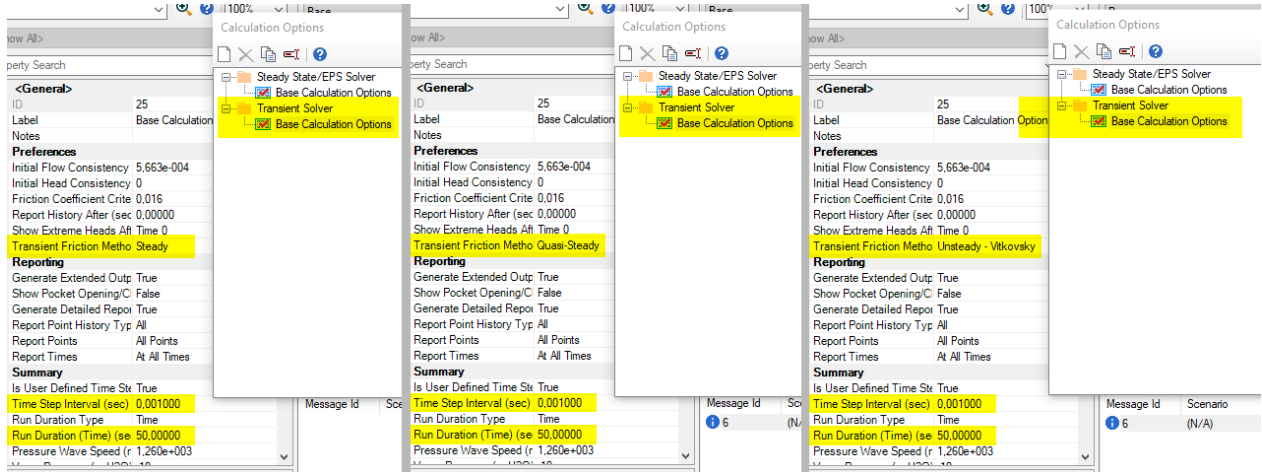


Figura 4.6: Seteo del programa Bentley HAMMER, para calcular el golpe de ariete con los tres modelos de pérdida de carga  $f$ .

### 4.2.2. Resultados con $f$ modelo estacionario

Los resultados de modelar el problema planteado en este estudio (ver Figura 3.5), considerando los parámetros indicados anteriormente en esta misma Sección, y utilizando el método de factor de fricción  $f$  estacionario se presentan en las Figura 4.7.

Además, el factor de fricción es constante con la distancia y con el tiempo, y tiene el valor de  $1,623172e - 02$

### 4.2.3. Resultados con $f$ modelo cuasi-estacionario

Bajo las mismas condiciones, se simuló el mismo problema, pero esta vez considerando el modelo de factor de fricción cuasi estacionario. Esto es, actualizar el valor de  $f$  según el método de Colebrook en cada instante.

El resultado de las presiones a lo largo del tiempo en la válvula se comparan con los resultados obtenidos del programa Bentley HAMMER, y se presentan en la Figura 4.8. Por otro lado, en la Figura 4.9 se presenta cómo varía el factor de fricción en el tiempo, en el punto medio del trazado.

### 4.2.4. Resultados con $f$ modelo no-estacionario

Finalmente, con las mismas condiciones, se ejecutó la simulación, pero esta vez considerando el modelo de factor de fricción cuasi no-estacionario. Esto es, considerar el modelo de

## 4.2. IMPLEMENTACIÓN ALGORITMO EN UNA CONDUCCIÓN A LARGA DISTANCIA

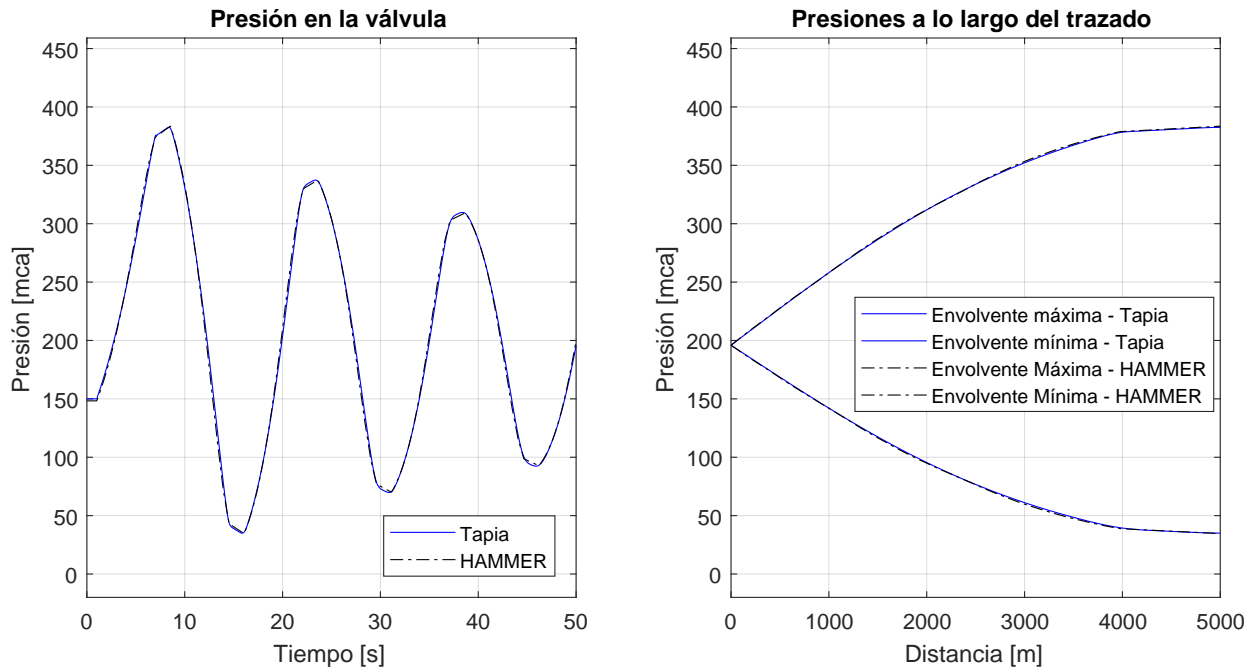


Figura 4.7: Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo  $f$  estacionario. A la izquierda, presiones registradas en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación.

factor de fricción del método cuasi-estacionario más la corrección propuesta por Vítkovský [3].

El resultado de las presiones a lo largo del tiempo en la válvula se comparan con los resultados obtenidos del programa Bentley HAMMER, y se presentan en la Figura 4.10. Por otro lado, en la Figura 4.11 se presenta cómo varía el factor de fricción en el tiempo, en el punto medio del trazado.

## 4.2. IMPLEMENTACIÓN ALGORITMO EN UNA CONDUCCIÓN A LARGA DISTANCIA

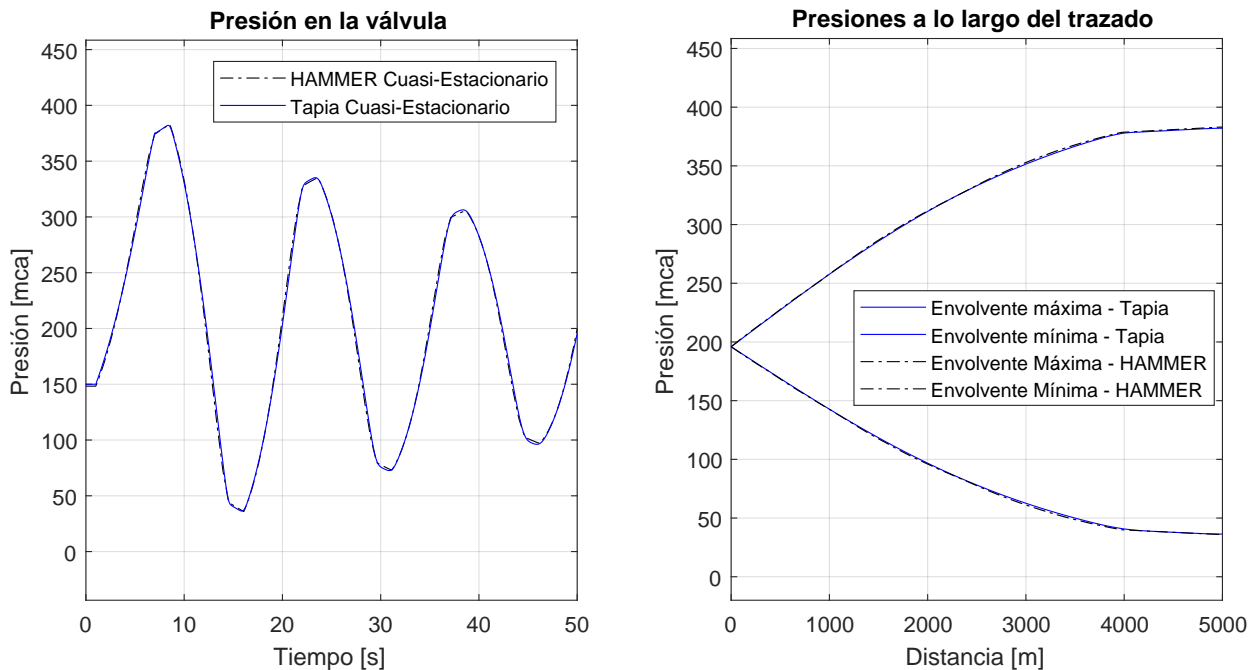


Figura 4.8: Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo  $f$  cuasi-estacionario. A la izquierda, presiones registradas en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación.

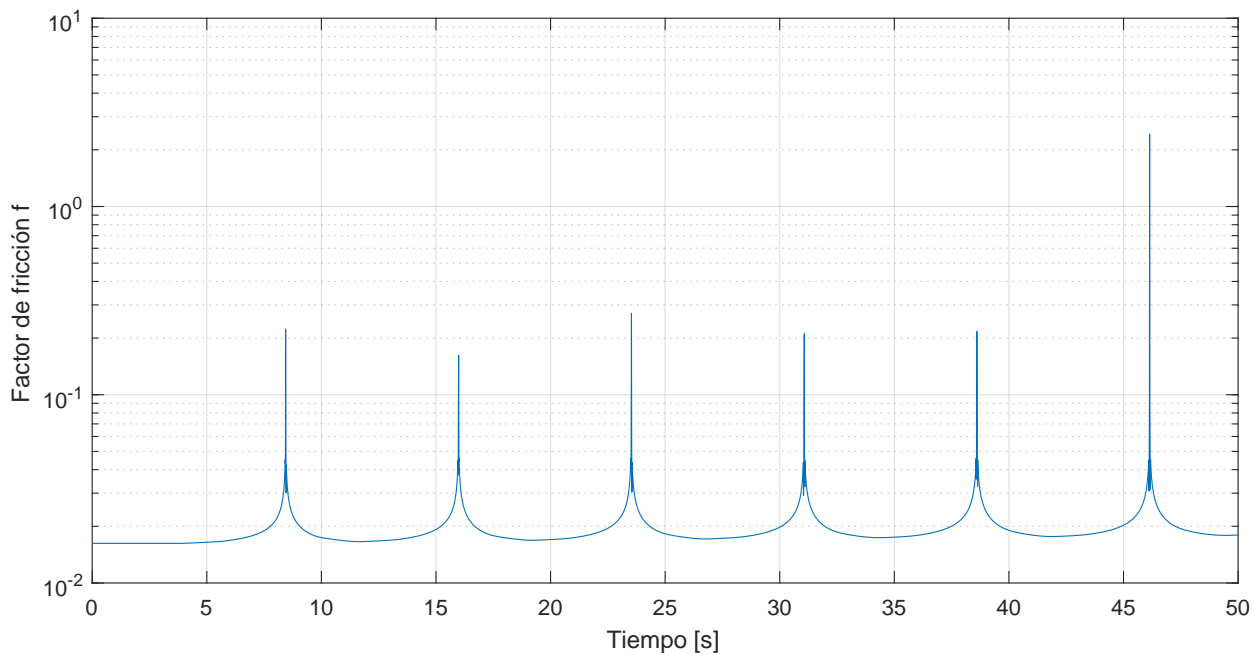


Figura 4.9: Variación del factor de fricción  $f$  modelo cuasi-estacionario con el tiempo en el punto medio del trazado.



## 4.2. IMPLEMENTACIÓN ALGORITMO EN UNA CONDUCCIÓN A LARGA DISTANCIA

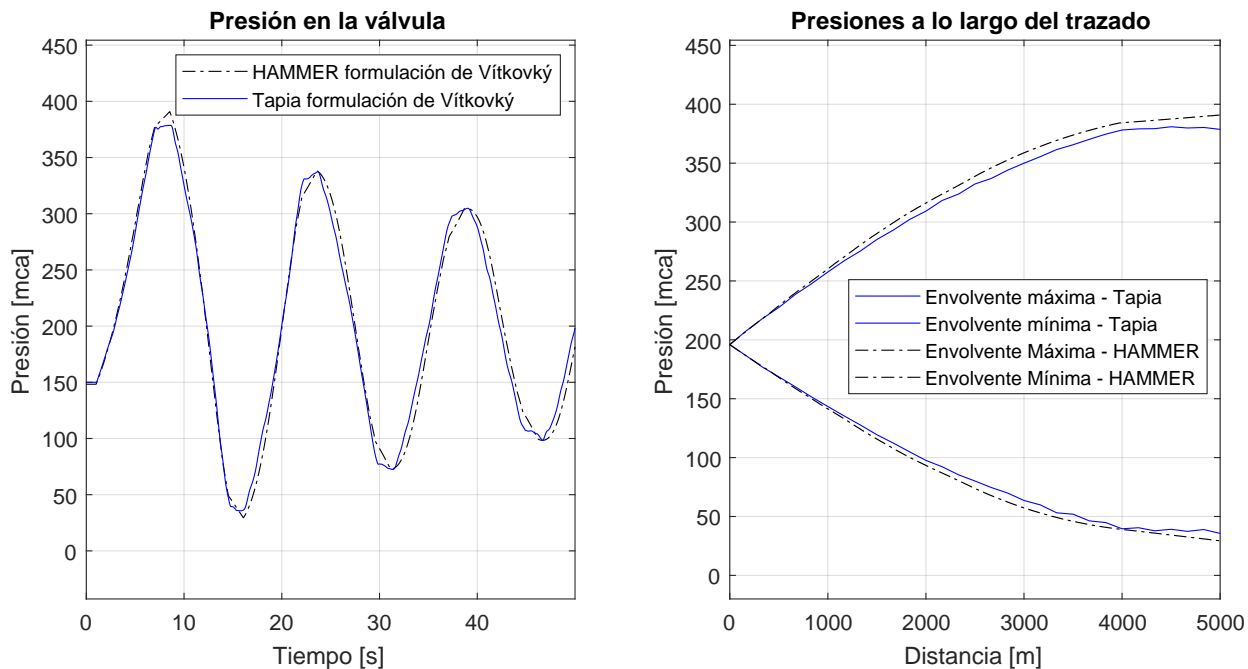


Figura 4.10: Comparación de las simulaciones con Bentley HAMMER y con el algoritmo desarrollado por Tapia con el modelo  $f$  no-estacionario. A la izquierda, presiones registrados en la válvula. A la derecha, envolventes de presiones máximas y mínimas durante la simulación.

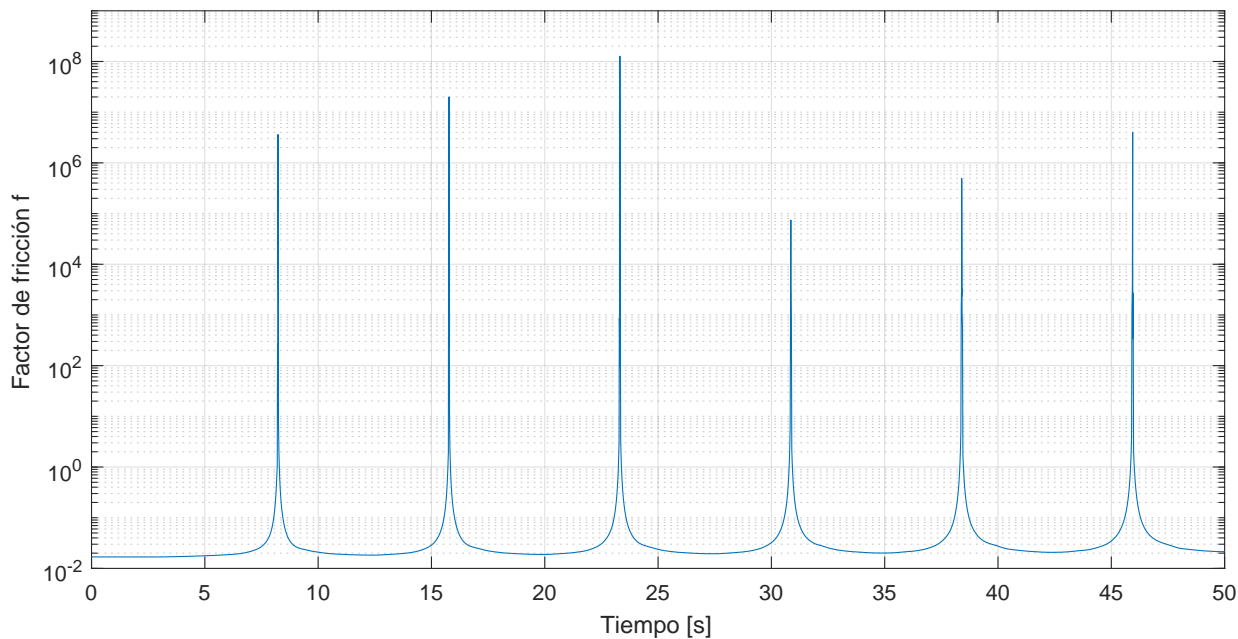


Figura 4.11: Variación del factor de fricción  $f$  modelo no-estacionario con el tiempo en el punto medio del trazado.

# Capítulo 5

## Análisis de los Resultados

En el Capítulo anterior se presentaron los resultados del algoritmo desarrollado por el alumno. En el presente capítulo se discuten los resultados más relevantes de los resultados obtenidos con el algoritmo.

A diferencia de la mayoría de la literatura existente que aborda el tema de fenómenos no-estacionarios en sistemas de transporte de fluidos por cañerías, el algoritmo desarrollado por el alumno no utiliza el método de las características, sino que el método de los elementos finitos para resolver la variable espacial de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete, y el método de diferencias finitas para resolver la variable temporal de las mismas ecuaciones. La calidad de los resultados depende entonces, de la cantidad de elementos en que se divide el trazado, la cantidad de nodos por elemento, el paso temporal escogido y el valor de  $\alpha$ , que es un ponderador que permite predecir el estado del sistema en el futuro (de acuerdo al paso temporal).

Con el fin de validar el algoritmo, se tomó como base el experimento elaborado por Wichowski[4]. Este experimento es usualmente desarrollado en los estudios de los golpe de ariete. Los resultados obtenidos con el algoritmo del alumno permiten concluir lo siguiente:

- El experimento provoca que en el estado estacionario, el fluido al interior de la cañería se encuentre en régimen turbulento, mientras que la válvula se cierra lo suficientemente rápido como para perturbar el estado estacionario, y generar el golpe de ariete.
- De la información publicada por el autor, se debe ajustar o bien la celeridad de la onda, o bien el largo de la cañería, de lo contrario, el periodo de las ondas medidas y resultantes de la simulación son distintos. De acuerdo a Wichowski, el tiempo crítico  $t_c = 0,065[s]$ , mas el periodo de la onda medido directamente del gráfico con las mediciones de la presión en la válvula por Wichowski es  $0,062[s]$ .
- Para números de Courant  $C_r = a \Delta t / \Delta x$  menores a 0,5, y para aquellos mayores a 2,4, los resultados de la simulación no son representativos de la realidad. Cuando el número de Courant es cercano a la unidad es cuando los resultados son más cercanos a lo medido por Wichowski.

- Para un mismo valor de Courant, la simulación realizada por Wichowski con el método de las características, predice de peor manera las presiones en la válvula, comparada con la simulación realizada por el alumno con el método de los elementos finitos.
- Aquellas simulaciones que se realizaron con tres nodos por elementos (funciones de forma cuadráticas) presentaron resultados más ajustados a lo medido por Wichowski, por sobre aquellas simulaciones con dos nodos por elemento (funciones lineales), a pesar de tener el mismo número de Courant.
- El efecto de atenuación del golpe de ariete solo es resultado de la fricción entre el fluido y la pared interna de la tubería (ver Figura 5.1 izquierda), por lo que es de interés estudiar aquellos modelos que varían con el tiempo (cuasi-estacionario y no-estacionario).
- El estimador de sobrepresión de Joukowski es un recurso barato (en términos computacionales) para estimar las presiones máximas, pero no asegura cubrir por completo las presiones máximas resultantes de un golpe de ariete, tal como se muestra en la Figura 5.1-derecha.

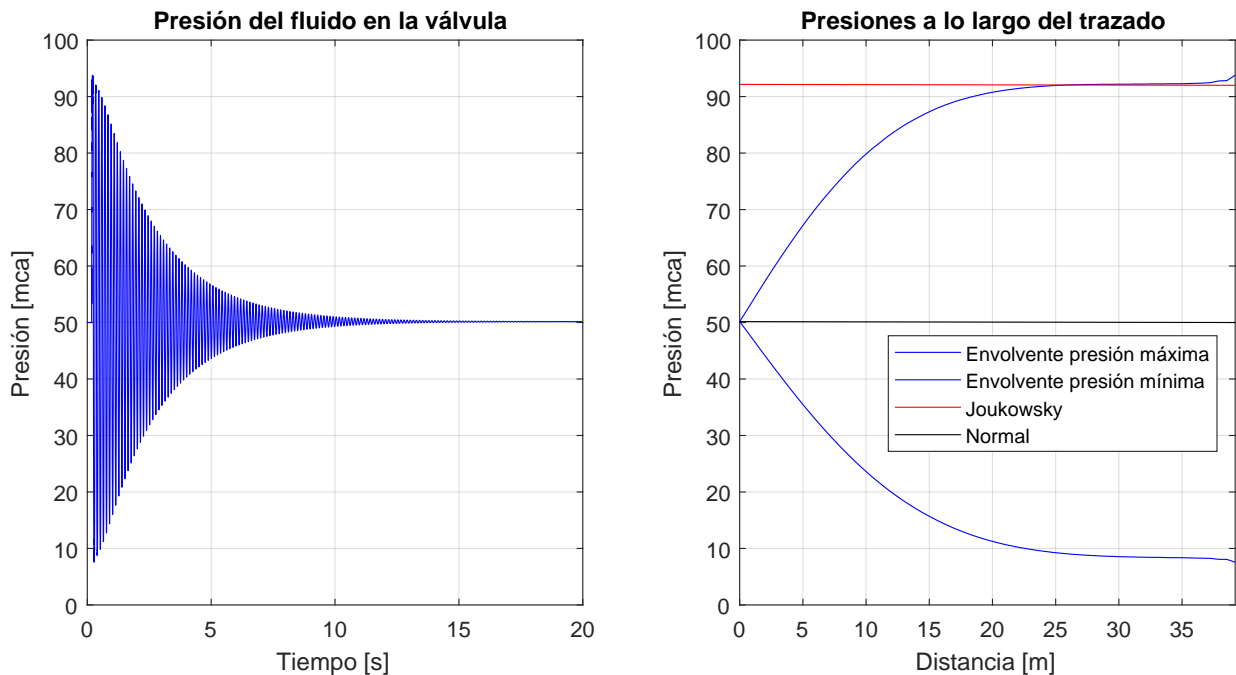


Figura 5.1: A la izquierda, presión en la válvula hasta el tiempo 20[s]. A la derecha, presiones normal, de sobrepresión de Joukowski y envolventes máximas y mínimas.

Una vez validado y demostrado que el algoritmo desarrollado por el alumno permite estimar el golpe de ariete, se creó un escenario ficticio, cuya principal característica es poseer un trazado a larga distancia ( $L = 5000[m]$ ). De esto, se desprenden las siguientes conclusiones:

- El algoritmo permite simular además conducciones a larga distancia.
- El algoritmo permite simular el flujo laminar. Sin embargo, esta condición no es de interés para el presente estudio.

- 
- El algoritmo no permite simular la cavitación. Si bien es cierto la rutina es capaz de determinar cuándo se alcanzan presiones inferiores a la presión de vapor del agua, la condición de explosión de la burbuja no fue satisfactoriamente desarrollada.
  - El estimador de sobrepresión de Joukowsky no da buenos resultados para conducciones a larga distancia. La Figura 5.2 da cuenta de cómo el valor de presión máxima obtenida para el sistema es superior al estimado por el estimador de Joukowsky. Esto es relevante, ya que usualmente, el diseño de las instalaciones se realiza considerando las envolventes de presiones del sistema.
  - La magnitud de los factores de fricción  $f$  calculados difieren en varios órdenes de magnitud, dependiendo del modelo de pérdida de carga adoptado. En general, el modelo estacionario presenta los valores más pequeños, mientras que el no-estacionario de Vítkovský los valores más altos. Esto se explica al considerar que el primer modelo no considera los cambios instantáneos de velocidad del fluido al interior de la cañería, al contrario que los modelos cuasi-estacionario y no-estacionario. Ver Figura 5.3.
  - En los modelos cuasi-estacionario y no-estacionario se calcularon *peaks* para los valores del factor de fricción. Estos valores puntas se obtienen cada vez que el fluido cambia de sentido al interior de la cañería. La Figura 5.4 muestra en detalle estos *peaks*, y la Figura 5.5 muestra que las envolventes de presiones son prácticamente idénticas para los tres modelos estudiados.
  - La Figura 5.6 muestra que a medida que avanza el tiempo, el efecto de la fricción va atenuando las ondas producto del golpe de ariete, hasta alcanzar la presión del pelo de agua del estanque. Esto es, en todo el trazado se tiene únicamente la presión estática, que es lo esperado.
  - El modelo de pérdida de energía por roce estacionario, si bien es cierto, genera resultados más conservadores comparado con los otros dos modelos, entrega resultantes aceptables, lo que sumado a su bajo gasto computacional para su cálculo, lo convierten en un excelente modelo predictor de golpe de ariete.
  - Se logra distinguir diferencias en los resultados de las presiones resultantes de los modelos de pérdidas de energía por fricción estacionarios, cuasi-estacionarios y no-estacionarios. Esto debido a los distintos valores de coeficiente de fricción calculado. Ver Figuras 5.6 y 5.7.

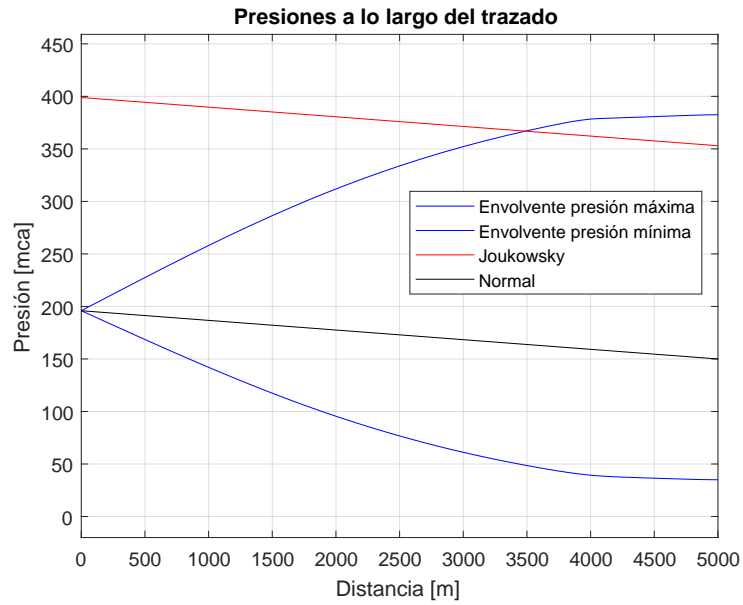


Figura 5.2: Envolvente de presiones, considerando  $f$  estacionario.

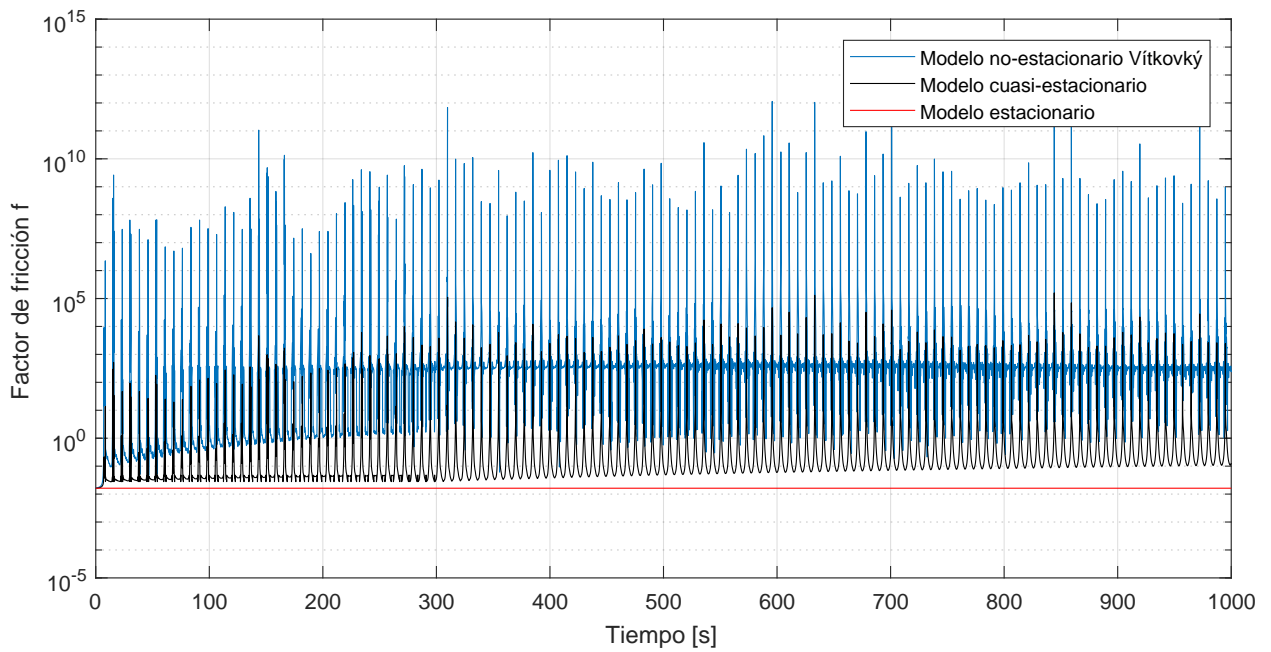


Figura 5.3: Comparación del valor del factor de fricción para los tres modelos estudiados, tomados en el punto medio del trazado para una simulación de 100[s] del problema planteado.

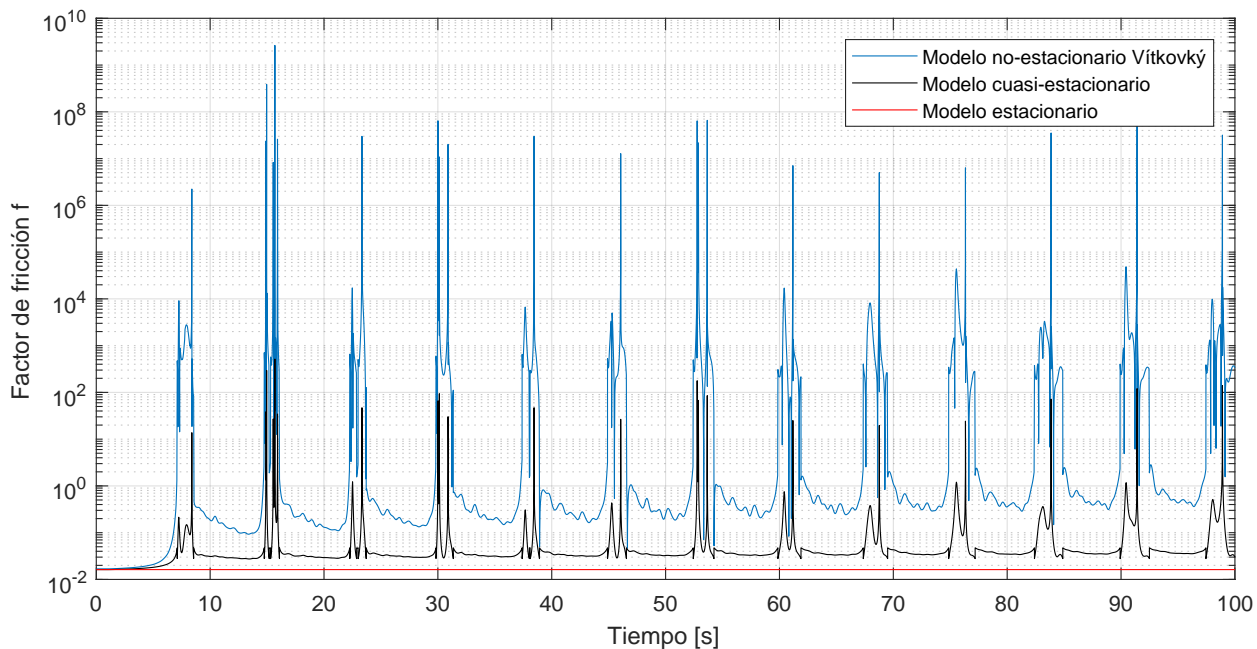


Figura 5.4: Detalle de los primeros 100[s] de la Figura 5.3.

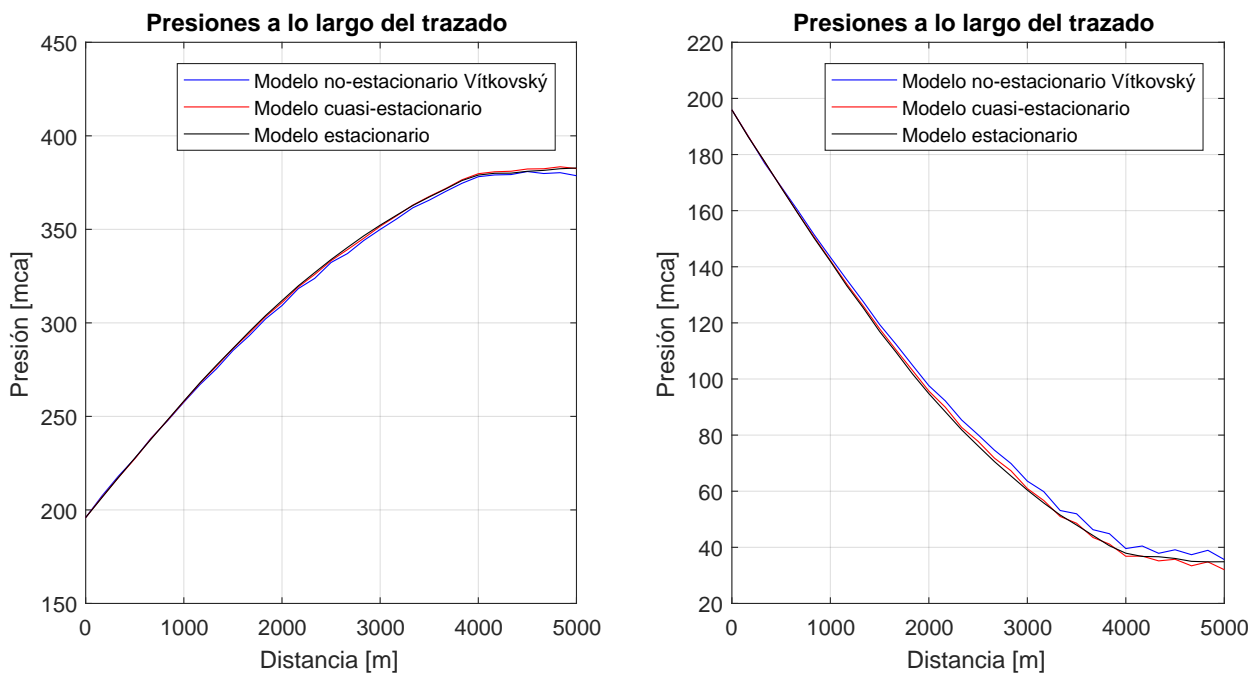


Figura 5.5: Envolventes de presión máxima (izquierda) y mínima (derecha), con los tres modelos de pérdida de energía por fricción.

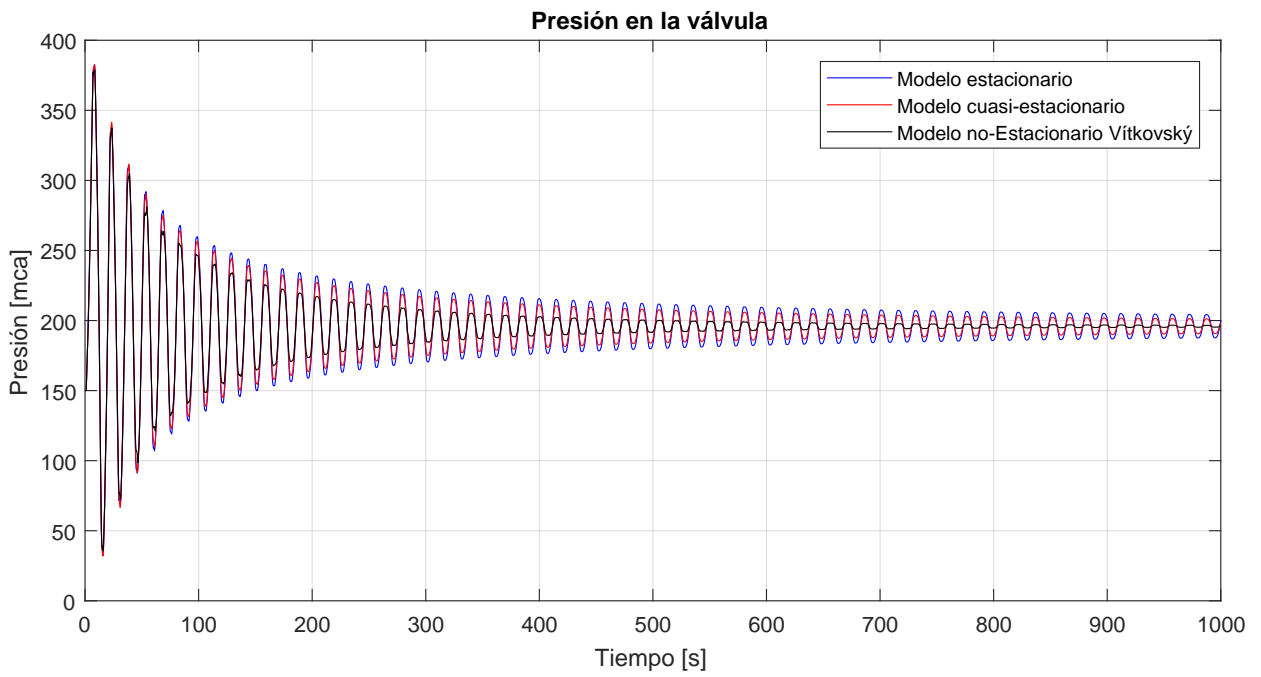


Figura 5.6: Presión en la válvula con los tres modelos de pérdida de energía por fricción.

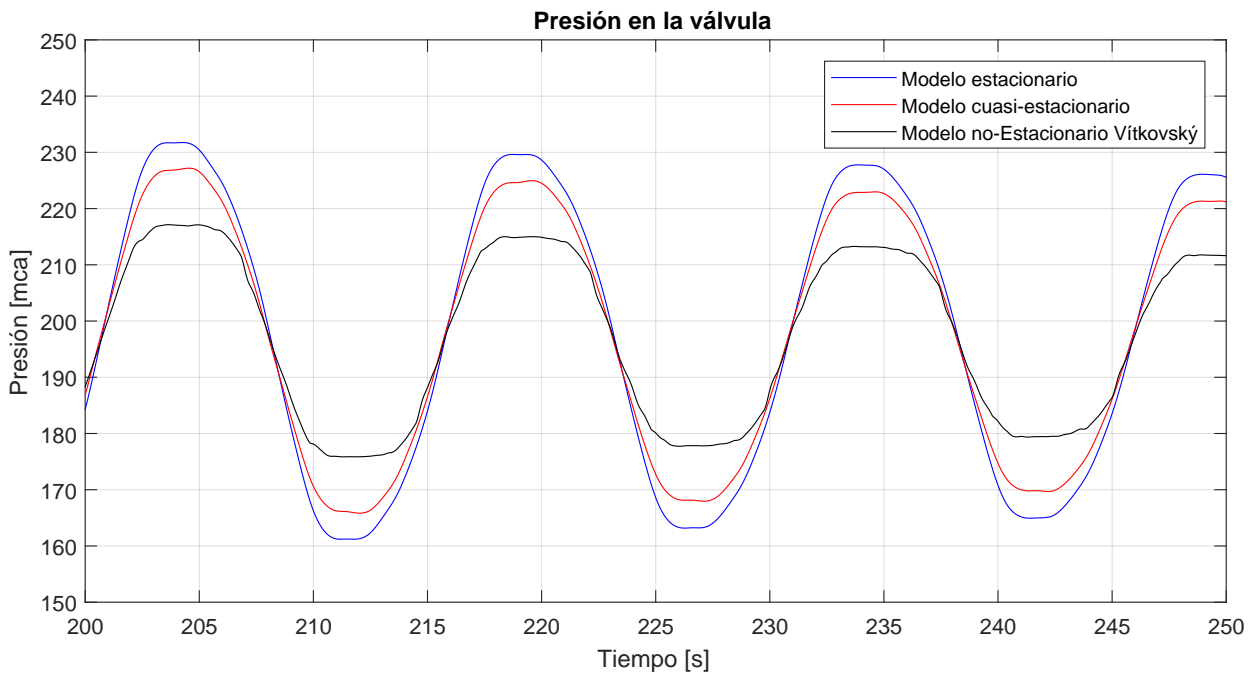


Figura 5.7: Detalle de las presiones en la válvula, entre los tiempos 200[s] y 250[s].

# Capítulo 6

## Conclusiones

El alumno desarrolló un algoritmo capaz de resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno transiente rápido en tuberías producto del cierre rápido de una válvula aguas abajo de un reservóreo, por el cual se transporta un fluido monofásico, que considera las pérdidas producto del roce del fluido con la pared interna de la cañería.

El algoritmo se desarrolló en el lenguaje de programación de MATLAB, y fue validado contrastando los resultados con las mediciones realizadas por Wichowski[4], así como por los resultados obtenidos con el programa para computadoras Bentley HAMMER.

Si bien el algoritmo es capaz de predecir adecuadamente conducciones de corta distancia (menores a 100[m]), también sirve para largas distancias, siempre y cuando las presiones mínimas no sean inferiores a la presión de vapor del agua (cavitación).

El algoritmo incluye tres modelos para determinar el factor de fricción  $f$ : estacionario, cuasi-estacionario, y no-estacionario. El primero, considera que el factor  $f$  es constante a lo largo del tiempo y tiene el valor del calculado con el método de Colebrook en el estado estacionario; el segundo, que el factor  $f$  se actualiza en cada instante según el método de Colebrook; mientras que en el último, el factor  $f$  corresponde a la suma del factor del modo cuasi-estacionario, más el aporte de la componente no-estacionaria. Para este último valor, se adoptó la formulación de Vítkovský[3].

La variación del valor del coeficiente  $f$  de fricción a lo largo del tiempo del modelo cuasi-estacionario es similar a la expuesta en la literatura existente al respecto[2].

Los coeficientes  $f$  de fricción de los modelos cuasi-estacionario y no-estacionario presentan valores puntuales elevados al compararlos con el modelo estacionario. Sin embargo, estos valores puntuales provocan pérdidas por roce despreciables durante un evento no-estacionario dado el breve periodo de tiempo en el cual son válidos.

El modelo estacionario genera envolventes de presiones máximas y mínimas conservadoras con respecto a los otros dos modelos. Sin embargo estos resultados son suficientemente precisos para el diseño de sistemas de transporte de fluidos, así como la selección de la mejor solución para prevenir los golpes de ariete.



---

Otras condiciones de borde, como ramificaciones de la cañería, impulsión del fluido por medio de un equipo rotatorio, detención brusca de una bomba, y elementos amortiguadores de golpe de ariete (tales como estanques hidroneumáticos, válvulas de venteo, columnas de agua, etc.), quedan fuera del alcance del presente estudio, y se propone que en estudios posteriores sean introducidos al algoritmo desarrollado en este estudio.

En esta misma línea, se propone comparar los resultados de simular un mismo problema, con el mismo coeficiente de Courant, tanto con el método de las características, así como con el método de los elementos finitos.

Finalmente, se propone incorporar un fluido bifásico al modelo, el cual es de interés para los proyectos mineros de nuestro País.

# Bibliografía

- [1] P. Azoury, M. Baasiri, and H. Najm, “Effect of valve-closure schedule on water hammer,” *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 112, no. 10, pp. 890–903, 1986.
- [2] M. D. Saikia and A. K. Sarma, “Simulation of water hammer flows with unsteady friction factor,” *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 1, no. 4, pp. 35–40, 2006.
- [3] A. Bergant, A. Ross Simpson, and J. Vítkovský, “Developments in unsteady pipe flow friction modelling,” *Journal of Hydraulic Research*, vol. 39, no. 3, pp. 249–257, 2001.
- [4] R. Wichowski, “Hydraulic transients analysis in pipe networks by the method of characteristics (moc),” *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, vol. 53, no. 3, pp. 267–291, 2006.
- [5] C. Gherardelli, “Mecánica de fluidos.” 2007.
- [6] D. A. Thorley, *Fluid transients in pipeline systems*. ASME Press, 2004.
- [7] M. H. Chaudhry, “Applied hydraulic transients,” tech. rep., Springer, 1979.
- [8] V. L. Streeter and C. Lai, “Water-hammer analysis including fluid friction,” *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 128, no. 1, pp. 1491–1523, 1963.
- [9] J. Parmakian, “Waterhammer analysis,” tech. rep., 1963.
- [10] J. P. Tullis, *Hydraulics of pipelines: Pumps, valves, cavitation, transients*. John Wiley & Sons, 1989.
- [11] B. Brunone, U. Golia, and M. Greco, “Some remarks on the momentum equation for fast transients,” in *Proc. Int. Conf. on Hydr. Transients With Water Column Separation*, pp. 201–209, 1991.
- [12] W. Zielke, “Frequency-dependent friction in transient pipe flow,” *Journal of basic engineering*, vol. 90, no. 1, pp. 109–115, 1968.
- [13] J. Kochupillai, N. Ganesan, and C. Padmanabhan, “A new finite element formulation based on the velocity of flow for water hammer problems,” *International journal of pressure vessels and piping*, vol. 82, no. 1, pp. 1–14, 2005.

- [14] J. Fish and T. Belytschko, *A first course in finite elements*. John Wiley & Sons Limited, 2007.
- [15] A. Ortiz, “Métodos de elemento finito generalizado.” 2011.
- [16] L. Allievi, *Theory of Water-hammer*, vol. 1. Typography R. Garroni, 1925.
- [17] A. Font, “Elementos finitos.” 2011.
- [18] *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*. Elsevier, 2014.
- [19] Y. W. Kwon and H. Bang, *The finite element method using MATLAB*. CRC press, 2000.
- [20] B. HAMMER, “Hammer-water hammer and transient analysis software,” 2010.
- [21] M. S. Ghidaoui, M. Zhao, D. A. McInnis, and D. H. Axworthy, “A review of water hammer theory and practice,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 58, no. 1/6, p. 49, 2005.

# Anexos

# Anexo A

## Nomenclatura

$A$	Area interior de la cañería
$a$	Velocidad de la onda
$c$	Velocidad del sonido
$D$	Diámetro
$e$	Espesor de pared de cañería; Elemento
$E$	Módulo de elasticidad
$f$	Factor de fricción
$g$	Aceleración de gravedad
$H$	Cabeza de presión
$h_f$	Pérdidas por fricción
$h_l$	Pérdidas singulares
$K$	Módulo de compresibilidad
$k$	Factor de pérdida singular
$L$	Largo de la tubería
$l$	Largo de un elemento
$m$	masa
$P$	Presión
$Q$	Caudal
$Re$	Número de Reynolds
$T$	Fuerza de tracción
$t$	Tiempo
$t_{cv}$	Tiempo de cierre de válvula
$t_c$	Tiempo crítico
$V$	Velocidad
$v$	Volumen
$x$	Dimensión lineal
$z$	Elevación

### Símbolos griegos

$\gamma$	Peso específico
$\mu$	Viscosidad dinámica; Coeficiente de Poisson
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\phi$	Factor de sujeción de la cañería
$\rho$	Densidad del fluido
$\tau$	Tensión de corte
$\theta$	Ángulo
$\varepsilon$	Rugosidad de la pared interna de cañería

# Anexo B

## Codigos MATLAB

### B.1. Algoritmo utilizado para replicar el experimento de Wichowski

```
1 clear;
2 clc;
3 tic;
4 Q=4.53E-04; %Caudal, en m3/s
5 H0=50; %Cabeza de presion en la valvula, al final del trazado, en mca
6 L=39.2 ; %Largo del piping, en m
7 D=4.8E-02; %Diametro exterior de la caneria, en m
8 e=3E-03; %Espesor de pared de la caneria, en m
9 varepsilon=9E-05; %Rugosidad de la pared de caneria, en m
10 mu2=8.9E-04; %Viscosidad dinamica del agua, Pa
11 rho=1000; %Densidad del fluido, en kg/m3
12 a=1260; %Celeridad de la onda, en m/s
13 nel=30; %Numero de elementos, adimensional
14 nnel=3; %Numero de nodos por elemento, adimensional. Puede ser 2 o 3
15 tf=2; %Tiempo hasta donde se iterara
16 tic=0.175; %Tiempo inicio cierre de valvula
17 tcv=0.034; %Tiempo de cierre de valvula
18 paso_t=0.001; %Intervalo de tiempo (\Delta t)
19 g=9.81; %Aceleracion de gravedad
20 alpha=2/3; %Familia alpha; Metodo Galerkin
21 D_int=D-2 * e;
22 nnodes=nel * (nnel-1)+1;
23 %-----
24 % CALCULO DEL ESTADO ESTACIONARIO
25 %-----
26 [SOL_est, trazado, f_est]=EstadoEstacionario(Q, H0, L, D, e, ...
    varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel);
27 %-----
28 % CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO
29 %-----
30 [SOL_noest, tiempo]=EstadoNoEstacionario(SOL_est, nel, nnel, paso_t, ...
    tf, tic, tcv, f_est, D_int, a, trazado);
```

## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```
31 %-----  
32 % PRESENTACION GRAFICA DE LOS RESULTADOS  
33 %-----  
34 load('matlab.mat');  
35 [ ENVOLVENTES ] = SolGrafica( trazado, SOL_est, SOL_noest, tiempo, a, ...  
    nnodes, Wichowski);  
36 toc;
```

```
1 function [ SOL_est, trazado, f_est ] = EstadoEstacionario(Q, H0, L, D, ...  
    e, varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel)  
2 % Determina el perfil hidraulico en estado estacionario, e incluye  
3 % sobrepresion de Joukowsky  
4 % Q: caudal, en m3/s  
5 % H0: presion inicial, mca  
6 % L: largo del piping, en m  
7 % D: diametro exterior de la caneria, m  
8 % e: espesor de la caneria, m  
9 % varepsilon: rugosidad de la caneria, m  
10 % mu2: viscosidad dinamica del agua, Pa  
11 % rho: densidad del fluido, kg/m3  
12 % a: celeridad de la onda, m/s  
13 % ne:numero de elementos en que se dividira la caneria de largo L. Debe ser  
14 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema  
15 l=L/(nnodes-1);  
16 %Definicion de vectores  
17 trazado=zeros(nnodes, 1);  
18 D_int=zeros(nnodes, 1);  
19 A_int=zeros(nnodes, 1);  
20 V=zeros(nnodes, 1);  
21 Re=zeros(nnodes, 1);  
22 f_est=zeros(nnodes, 1);  
23 h_f=zeros(1, nnodes);  
24 H=zeros(1, nnodes);  
25 DeltaH=zeros(nnodes, 1);  
26 for i=1:1:nnodes  
27     D_int(i)=D-2 * e; %Diametro interior, en m  
28     A_int(i)=pi * D_int(i)^2/4; %Area interior caneria  
29     V(i)=Q/A_int(i); %Velocidad del flujo al interior de la caneria  
30     DeltaH(i)=a * V(i)/9.81;  
31     Re(i)=rho * V(i) * D_int(i)/mu2; %Numero de Reynolds  
32     if Re(i)<2300  
33         f_est(i)=64/Re(i);  
34     else  
35         f_est(i)=colebrook(Re(i), varepsilon, D_int(i));  
36     end  
37     h_f(i)=l/D_int(i) * f_est(i) * 0.5 * rho * V(i) * V(i)/9806.38;  
38 end  
39 h_f=fliplr(h_f);  
40  
41 H(1)=H0;  
42 for j=2:1:nnodes  
43     trazado(j)=trazado(j-1)+1;  
44     H(j)=H(j-1)+h_f(i);  
45 end  
46 H=fliplr(H);
```

## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```
47 H=H';
48 %DH=H+DeltaH;
49
50 % Presentar algunos valores representativos
51 fprintf('=====\\n');
52 fprintf('ESTADO ESTACIONARIO\\n');
53 fprintf('=====\\n');
54 fprintf('Velocidad de flujo: %s [m/s].\\n', V(1));
55 fprintf('Cantidad de elementos: %u.\\n', nel);
56 fprintf('Cantidad de nodos en el sistema: %u.\\n', nnodes);
57 fprintf('Numero de Reynolds: %s.\\n', Re(1));
58 if Re(1)≤2300
59     fprintf('Regimen de caudal: LAMINAR. \\n');
60 else
61     fprintf('Regimen de caudal: TURBULENTO. \\n');
62 end
63
64 fprintf('Coeficiente de friccion: %s.\\n\\n', f_est(1));
65 SOL_est=[H;V];
66 end
```

```
1 function [SOL_noest, tiempo]=EstadoNoEstacionario(SOL_est, nel, nnel, ...
2     paso_t, tf, tic, tcv, f_est, D_int, a, trazado)
3 % SOL_est vector con presiones y velocidades de fluido en la linea
4 % nel numero de elementos en el trazado
5 % nnel numero de nodos por elemento
6 % f_est, vector con los coeficientes de friccion del trazado
7
8 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema
9 SOL_noest=zeros(length(SOL_est), tf/paso_t); %Inicializacion matriz ...
10     solucion
11 tiempo=zeros(tf/paso_t, 1);
12 tiempo(end)=tf;
13 %-----
14 % RESOLUCION TEMPORAL
15 %-----
16 for t=1:1:tf/paso_t-1
17     tiempo(t)=paso_t * t;
18     SOL_noest(:, t)=CondicionesDeBorde(SOL_est, SOL_noest(:, t), t * ...
19         paso_t, tf, tic, tcv);
20     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_est, ...
21         SOL_noest(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
22     SOL_noest(:, t+1)=(M\\N) * SOL_noest(:, t);
23 end
24
25 %-----
26 % PRESENTACION DE RESULTADOS DE INTERES
27 %-----
28 fprintf('=====\\n');
29 fprintf('ESTADO NO-ESTACIONARIO\\n');
30 fprintf('=====\\n');
31 fprintf('Metodo de coeficiente de friccion utilizado: f estacionario\\n');
32 end
```



## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```
1 function [ SOL_noest_t ] = CondicionesDeBorde(SOL_est, SOL_noest_t, t, ...
    tf, tic, tcv)
2 % Impone las condiciones de borde, segun el tiempo
3 % SOL_noest_t, vector con presion y columnas para el tiempo t
4 % t, tiempo t
5 % tf, tiempo hasta donde se iterara
6 % tic, tiempo inicio cierre de valvula
7 % tcv, tiempo de cierre de valvula
8 nnodes=length(SOL_noest_t)/2; %Numero de nodos total del sistema
9 if t<tic
10     SOL_noest_t(:)=SOL_est(:);
11 elseif (t>=tic)&&(t<=tic+tcv)
12     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
13     SOL_noest_t(end)=(1-(t-tic)/tcv)^3 * SOL_est(end) * ...
        sqrt(SOL_noest_t(nnodes)/SOL_est(nnodes));
14     %SOL_noest_t(end)=(1-(t-tic)/tcv)^3 * SOL_noest_t(end);
15 else
16     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
17     SOL_noest_t(end)=0;
18 end
19
20
21 end
22 \end{verbatim}
23
24 \begin{lstlisting}[breaklines]
25 function [ K1, K2 ] = MatricesGlobales( trazado, nel, nnel )
26 % MatricesGlobales genera las matrices globales para resolver el problema
27 % trazado, corresponde al trazado de la caneria
28 % nel, numero de elementos
29 % nnel, numero de nodos por cada elemento.
30 %-----
31 % Establezco la ubicacion de cada nodo dentro del trazado
32 %-----
33 nglobales=zeros(nel, nnel);
34 for i=1:1:nel
35     nglobales(i, 1)=trazado((i-1) * (nnel-1)+1);
36     nglobales(i, 2)=trazado((i-1) * (nnel-1)+2);
37     if nnel==3
38         nglobales(i, 3)=trazado((i-1) * (nnel-1)+3);
39     end
40 end
41 if nnel==2
42     %-----
43     % Construccion de las matrices globales para nnel=2
44     %-----
45     % Matriz local 1 para cualquier elemento
46     k1=[-1/2 1/2; -1/2 1/2];
47     % Inicializacion matriz global K1
48     K1=zeros(nel * (nnel-1)+1, nel * (nnel-1)+1);
49     % Inicializacion matriz local 2
50     K2=zeros(nel * (nnel-1)+1, nel * (nnel-1)+1);
51     % Ensamblaje de las matrice K1 y K2
52     % Dado que la matriz k2 varia para cada elemento, se define k2 al
53     % mismo tiempo que se ensambla la matriz global K2
54     for i=1:1:nel
```

## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```

55     k2=[1/3 * (nglobales(i, 2)-nglobales(i, 1)), 1/6 * ...
        (nglobales(i, 2)-nglobales(i, 1));1/6 * (nglobales(i, ...
        2)-nglobales(i, 1)), 1/3 * (nglobales(i, 2)-nglobales(i, 1))];
56     for j=1:1:nnel
57         for k=1:1:nnel
58             K1(i * (nnel-1)-1+j, i * (nnel-1)-1+k)=K1(i * ...
                (nnel-1)-1+j, i * (nnel-1)-1+k)+k1(j, k);
59             K2(i * (nnel-1)-1+j, i * (nnel-1)-1+k)=K2(i * ...
                (nnel-1)-1+j, i * (nnel-1)-1+k)+k2(j, k);
60         end
61     end
62 end
63 else
64     %-----
65     % Construccion de las matrices globales para nnel=3
66     %-----
67     % Matriz local 1 para cualquier elemento
68     k1=[-1/2 2/3 -1/6; -2/3 0 2/3; 1/6 -2/3 1/2];
69     % Inicializacion matriz global K1
70     K1=zeros(nel * (nnel-1)+1, nel * (nnel-1)+1);
71     % Inicializacion matriz local 2
72     K2=zeros(nel * (nnel-1)+1, nel * (nnel-1)+1);
73     % Ensamblaje de las matrices K1 y K2
74     % Dado que la matriz k2 varia para cada elemento, se define k2 al
75     % mismo tiempo que se ensambla la matriz global K2
76     for i=1:1:nel
77         k2=[-1/3 * nglobales(i, 1)-1/15 * nglobales(i, 3)+2/5 * ...
            nglobales(i, 2) -1/5 * nglobales(i, 1)-1/15 * nglobales(i, ...
            3)+4/15 * nglobales(i, 2) 1/30 * nglobales(i, 1)-1/30 * ...
            nglobales(i, 3); -1/5 * nglobales(i, 1)+4/15 * nglobales(i, ...
            2)-1/15 * nglobales(i, 3) -8/15 * nglobales(i, 1)+8/15 * ...
            nglobales(i, 3) 1/15 * nglobales(i, 1)-4/15 * nglobales(i, ...
            2)+1/5 * nglobales(i, 3); 1/30 * nglobales(i, 1)-1/30 * ...
            nglobales(i, 3) 1/15 * nglobales(i, 1)-4/15 * nglobales(i, ...
            2)+1/5 * nglobales(i, 3) 1/15 * nglobales(i, 1)-2/5 * ...
            nglobales(i, 2)+1/3 * nglobales(i, 3)];
78     for j=1:1:nnel
79         for k=1:1:nnel
80             K1(i * (nnel-1)-2+j, i * (nnel-1)-2+k)=K1(i * ...
                (nnel-1)-2+j, i * (nnel-1)-2+k)+k1(j, k);
81             K2(i * (nnel-1)-2+j, i * (nnel-1)-2+k)=K2(i * ...
                (nnel-1)-2+j, i * (nnel-1)-2+k)+k2(j, k);
82         end
83     end
84 end
85 end
86 end

```

```

1 function [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f, V, D,int, ...
   trazado )
2 g=9.81; %Aceleracion de gravedad
3 alpha=2/3; %Familia alpha; Metodo Galerkin
4 %-----
5 % MATRICES GLOBALES K1 Y K2
6 %-----

```

## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```
7 [ K1, K2 ] = MatricesGlobales( trazado, nel, nnel );
8 M=[-alpha * paso_t * g. * K1, -alpha * paso_t. * f. * abs(V)./(2 * ...
    D_int). * K2-K2; -K2, -(alpha * paso_t * a.^2/g). * K1];
9 N=[((1-alpha) * paso_t * g). * K1, (((1-alpha) * paso_t). * f. * ...
    abs(V)./(2 * D_int)). * K2-K2; -K2, ((1-alpha) * paso_t * a.^2/g). * ...
    K1];
10 end
```

```
1 function [ ENVOLVENTES ] = SolGrafica( trazado, SOL_est, SOL_noest, ...
    tiempo, a, nnodes, Wichowski)
2 %UNTITLED Summary of this function goes here
3 % Detailed explanation goes here
4 % ENVOLVENTES contiene los valores maximos y minimos de presion y velocidad
5 % DeltaH_J contiene la sobrepresion segun la formula de Joukowsky
6 g=9.81;
7 %-----
8 ENVOLVENTES=zeros(nnodes, 2);
9 DeltaH_J=zeros(nnodes, 1);
10 for i=1:nnodes
11     %Envolvente de presiones
12     ENVOLVENTES(i, 1)=max(SOL_noest(i, 1:end));
13     ENVOLVENTES(i+nnodes, 1)=min(SOL_noest(i, 1:end));
14     %Envolvente de velocidades
15     ENVOLVENTES(i, 2)=max(SOL_noest(i+nnodes, 1:end));
16     ENVOLVENTES(i+nnodes, 2)=min(SOL_noest(i+nnodes, 1:end));
17     %Calculo de sobrepresion por metodo de Joukowsky
18     DeltaH_J(i)=a * SOL_est(i+nnodes)/g+SOL_est(i);
19 end
20 %-----
21 % PRESENTACION GRAFICA DE RESULTADOS
22 %-----
23 close all;
24
25 %subplot(1, 3, 1);
26 P1=plot(tiempo, SOL_noest(nnodes, :), 'b', Wichowski(:, 1), ...
    Wichowski(:, 2), 'k-.');
27 % P1(1).LineWidth=1;
28 % P1(2).LineWidth=2;
29 axis([0 tiempo(end) 0 100])
30 xlabel('Tiempo [s]')
31 ylabel('Presion [mca]')
32 title('Velocidad del fluido en la valvula')
33 grid on;
34 legend('Tapia', 'Wichowski');
35 legend('Location', 'southeast')
36 %subplot(1, 3, 3);
37 figure;
38 plot(trazado, ENVOLVENTES(1:nnodes, 1), 'b', trazado, ...
    ENVOLVENTES(nnodes+1:end, 1), 'g', trazado, DeltaH_J, 'r', trazado, ...
    SOL_est(1:nnodes), 'k');
39 axis([0 trazado(end) 0 100])
40 xlabel('Distancia [m]')
41 ylabel('Presion [mca]')
42 title('Presiones a lo largo del trazado')
43 legend('Envolvente presion maxima', 'Envolvente presion minima', ...
```

## B.1. ALGORITMO UTILIZADO PARA REPLICAR EL EXPERIMENTO DE WICHOWSKI

```
'Joukowsky', 'Normal');
44 grid on;
45 legend('Location', 'southoutside', 'Orientation', 'horizontal')
46 legend('boxoff')
47
48 %subplot(1, 3, 2);
49 figure;
50 for t=1:2:length(tiempo)
51     cla;
52     %plot(trazado, SOL.noest(1:nnodes, t), trazado, ...
53           ENVOLVENTES(1:nnodes, 1), 'b', trazado, ...
54           ENVOLVENTES(nnodes+1:end, 1), 'g', trazado, DeltaH-J, 'r', ...
55           trazado, SOL.est(1:nnodes), 'k');
56 plot(trazado, SOL.noest(1:nnodes, t));
57 text(2, 5, ['Tiempo: ' num2str(tiempo(t)) ' [s]']);
58 axis([0 trazado(end) 0 100])
59 xlabel('Distancia [m]')
60 ylabel('Presion [mca]')
61 title('Presiones a lo largo del trazado y del tiempo')
62 drawnow
63 M(t)=getframe;
64 end
65 end
```

```
1 function F = colebrook(R, varepsilon, D_int)
2 % F = COLEBROOK(R, K) fast, accurate and robust computation of the
3 % Darcy-Weisbach friction factor F according to the Colebrook equation:
4 %
5 % 
$$\frac{1}{\sqrt{F}} = -2 * \text{Log}_{10} \left[ \frac{K}{3.7} + \frac{2.51}{R * \sqrt{F}} \right]$$

6 %
7 %
8 %
9 % INPUT:
10 % R : Reynolds' number (should be  $\geq 2300$ ).
11 % K : Equivalent sand roughness height divided by the hydraulic
12 % diameter (default K=0).
13 %
14 % OUTPUT:
15 % F : Friction factor.
16 %
17 % FORMAT:
18 % R, K and F are either scalars or compatible arrays.
19 %
20 % ACCURACY:
21 % Around machine precision for all  $R > 3$  and for all  $0 \leq K$ ,
22 % i.e. for all values of physical interest.
23 %
24 % EXAMPLE: F = colebrook([3e3, 7e5, 1e100], 0.01)
25 %
26 % Edit the m-file for more details.
27
28 % Method: Quartic iterations.
29 % Reference: http://arxiv.org/abs/0810.5564
30 % Read this reference to understand the method and to modify the code.
31
```

## B.2. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F ESTACIONARIO

```
32 % Author: D. Clamond, 2008-09-16.
33
34 % Actualizando la secuencia para rutina EstadoEstacionario
35 K=varepsilon/D_int;
36
37 % Check for errors.
38 if (R<2300) == 1
39     warning('The Colebrook equation is valid for Reynolds'' numbers ≥ ...
40         2300.');
```

```
40 end
41 if nargin == 1 || isempty(K) == 1
42     K = 0;
43 end
44 if (K<0) == 1
45     warning('The relative sand roughness must be non-negative.');
```

```
46 end
47
48 % Initialization.
49 X1 = K * R * 0.123968186335417556; % X1 <- K * R * log(10) / 18.574.
50 X2 = log(R) - 0.779397488455682028; % X2 <- log( R * log(10) / 5.02 );
51
52 % Initial guess.
53 F = X2 - 0.2;
54
55 % First iteration.
56 E = ( log(X1+F) - 0.2 ) ./ ( 1 + X1 + F );
57 F = F - (1+X1+F+0.5 * E) * E * (X1+F) / (1+X1+F+E * (1+E/3));
58
59 % Second iteration (remove the next two lines for moderate accuracy).
60 E = ( log(X1+F) + F - X2 ) / ( 1 + X1 + F );
61 F = F - (1+X1+F+0.5 * E) * E * (X1+F) / (1+X1+F+E * (1+E/3));
62
63 % Finalized solution.
64 F = 1.151292546497022842 / F; % F <- 0.5 * log(10) / F;
65 F = F * F; % F <- Friction factor.
66 end
```

## B.2. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso f estacionario

```
1 clc;
2 clear;
3 tic;
4 %-----
5 % CALCULO CELERIDAD DE LA ONDA PARA CANERIA DN8" SCH.STD. ASTM A53 GR.B
6 %-----
7 D=.2191; %Diametro exterior de la caneria para DN 8", en m
8 e=8.18E-03; %Espesor de pared de la caneria, en m
9 D_int=D-2 * e; %Diametro interior caneria, en m
10 A_int=pi * D_int^2/4; %Area interior caneria, en m^2
11 varepsilon=4.6E-05; %Rugosidad de la pared de caneria, en m
```

## B.2. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F ESTACIONARIO

```
12 mu2=8.9E-04; %Viscosidad dinamica del agua, Pa
13 rho=1000; %Densidad del fluido, en kg/m3
14 g=9.81; %Aceleracion de gravedad
15 K=2.2E+09; %Modulo de compresibilidad del agua, Pa
16 E=199947961502.2; %Modulo de elasticidad de la caneria, Pa
17 mu=0.3; %Modulo de Poisson, adimensional
18 phi=1-mu^2; %Modo de sujecion de la caneria
19 a=sqrt(1/(rho * (1/K+D_int/e * phi/E)));
20 % a=1260; %Celeridad de la onda, en m/s
21 %-----
22
23 %-----
24 % IMPOSICION DE PERFIL DE TERRENO Y VELOCIDAD DE FLUIDO
25 %-----
26 V=1.5; %Velocidad del fluido al interior de la caneria
27 Q=V * A_int; %Caudal, en m3/s
28 H0=150; %Cabeza de presion en la valvula, al final del trazado, en mca
29 L=5000 ; %Largo del piping, en m
30 %-----
31
32 %-----
33 % TIEMPO CRITICO
34 %-----
35 t_critico=2 * L/a;
36 fprintf('=====\n');
37 fprintf('TIEMPO CRITICO\n');
38 fprintf('=====\n');
39 fprintf('Tiempo critico: %s [s].\n', t_critico);
40 %-----
41 % PARAMETROS DEL MODELO (#NODOS, #ELEMENTOS, PASO TIEMPO, ETC.
42 %-----
43 nel=80; %Numero de elementos, adimensional
44 nnel=3; %Numero de nodos por elemento, adimensional. Puede ser 2 o 3
45 tf=50; %Tiempo hasta donde se iterara
46 tic=1; %Tiempo inicio cierre de valvula
47 tcv=6; %Tiempo de cierre de valvula
48 paso_t=0.001; %Intervalo de tiempo (\Delta t)
49 alpha=2/3; %Familia alpha; Metodo Galerkin
50 nnodes=nel * (nnel-1)+1;
51 %-----
52
53 %-----
54 % INICIO CON EL CALCULO DEL ESTADO ESTACIONARIO
55 %-----
56 fprintf('=====\n');
57 fprintf('Inicio calculo estado estacionario\n');
58 [SOL_est, trazado, f_est, l]=LD.Estacionario(Q, H0, L, D, e, ...
    varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel);
59 fprintf('Fin calculo estado estacionario\n');
60 %-----
61
62 %-----
63 % CONTINUO CON EL CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO
64 %-----
65 fprintf('=====\n');
66 fprintf('Inicio calculo estado NO estacionario\n');
```

## B.2. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F ESTACIONARIO

```
67 fprintf('Modelo f estacionario\n');
68 [SOL_noest, tiempo, vol_aire]=LD.NoEstacionario(SOL_est, nel, nnel, ...
    paso_t, tf, tic, tcv, f_est, D_int, l, a, g, trazado);
69 %-----
70
71 %-----
72 % CARGO LOS RESULTADOS DEL HAMMER, PARA L=5000, tcv=6, f estacionario
73 %-----
74 load('HAMMER L5000 tcv6 festacionario.mat');
75 %-----
76
77 %-----
78 % PRESENTACION GRAFICA DE LOS RESULTADOS
79 %-----
80 fprintf('===== \n');
81 fprintf('Desplegando graficos de interes\n');
82 [ ENVOLVENTES ] = LD.SolGrafica( trazado, SOL_est, SOL_noest, vol_aire, ...
    tiempo, a, nnodes, HAMMER_H_VALVE, HAMMER_ENVOLVENTES);
83 toc;
```

```
1 function [ SOL_est, trazado, f_est, l ] = LD.Estacionario(Q, H0, L, D, ...
    e, varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel)
2 % Determina el perfil hidraulico en estado estacionario, e incluye
3 % sobrepresion de Joukowsky
4 % Q: caudal, en m3/s
5 % H0: presion inicial, mca
6 % L: largo del piping, en m
7 % D: diametro exterior de la caneria, m
8 % e: espesor de la caneria, m
9 % varepsilon: rugosidad de la caneria, m
10 % mu2: viscosidad dinamica del agua, Pa
11 % rho: densidad del fluido, kg/m3
12 % a: celeridad de la onda, m/s
13 % ne: numero de elementos en que se dividira la caneria de largo L.
14 %Definicion de escalares
15 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema
16 l=L/(nnodes-1);
17 %Definicion de vectores
18 trazado=zeros(nnodes, 1);
19 D_int=zeros(nnodes, 1);
20 A_int=zeros(nnodes, 1);
21 V=zeros(nnodes, 1);
22 Re=zeros(nnodes, 1);
23 f_est=zeros(nnodes, 1);
24 h_f=zeros(1, nnodes);
25 H=zeros(1, nnodes);
26 DeltaH=zeros(nnodes, 1);
27 for i=1:1:nnodes
28     D_int(i)=D-2 * e; %Diametro interior, en m
29     A_int(i)=pi * D_int(i)^2/4; %Area interior caneria
30     V(i)=Q/A_int(i); %Velocidad del flujo al interior de la caneria
31     DeltaH(i)=a * V(i)/9.81;
32     Re(i)=rho * V(i) * D_int(i)/mu2; %Numero de Reynolds
33     if Re(i)<2300
34         f_est(i)=64/Re(i);
```

## B.2. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F ESTACIONARIO

```

35     else
36         f_est(i)=colebrook(Re(i), varepsilon, D_int(i));
37     end
38     h_f(i)=l/D_int(i) * f_est(i) * 0.5 * rho * V(i) * V(i)/9806.38;
39 end
40 h_f=fliplr(h_f);
41
42 H(1)=H0;
43 for j=2:1:nnodes
44     trazado(j)=trazado(j-1)+l;
45     H(j)=H(j-1)+h_f(i);
46 end
47 H=fliplr(H);
48 H=H';
49 SOL_est=[H;V];
50 end

```

```

1 function [SOL_noest, tiempo, vol_aire]=LD_NoEstacionario(SOL_est, nel, ...
    nnel, paso_t, tf, tic, tcv, f_est, D_int, l, a, g, trazado)
2 % SOL_est vector con presiones y velocidades de fluido en la linea
3 % nel numero de elementos en el trazado
4 % nnel numero de nodos por elemento
5 % f_est, vector con los coeficientes de friccion del trazado
6
7 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema
8 SOL_noest=zeros(length(SOL_est), tf/paso_t); %Inicializacion matriz ...
    solucion
9 tiempo=zeros(tf/paso_t, 1);
10 vol_aire=zeros(tf/paso_t, 1); %Volumen de aire producto de la cavitacion
11 tiempo(end)=tf;
12 %-----
13 % RESOLUCION TEMPORAL
14 %-----
15
16 for t=1:1:tf/paso_t-1
17     tiempo(t)=paso_t * t;
18     SOL_noest(:, t)=CondicionesDeBorde(SOL_est, SOL_noest(:, t), t * ...
        paso_t, paso_t, vol_aire(t), l, a, g, D_int, f_est, tic, tcv);
19     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_est, ...
        SOL_noest(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
20     SOL_noest(:, t+1)=(M\N) * SOL_noest(:, t);
21 end
22 end

```

```

1 function [ SOL_noest_t ] = CondicionesDeBorde(SOL_est, SOL_noest_t, t, ...
    paso_t, vol_aire_t, l, a, g, D_int, f, tic, tcv)
2 % Impone las condiciones de borde, segun el tiempo
3 % SOL_noest_t, vector con presion y columnas para el tiempo t
4 % l, distancia entre dos nodos consecutivos, en m
5 % t, tiempo t
6 % tf, tiempo hasta donde se iterara
7 % tic, tiempo inicio cierre de valvula
8 % tcv, tiempo de cierre de valvula

```



### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```
9 nnodes=length(SOL_noest_t)/2; %Numero de nodos total del sistema
10 %-----
11 % CIERRE DE VALVULA
12 %-----
13 if t<tic
14     SOL_noest_t(:)=SOL_est(:);
15 elseif (t>=tic)&&(t<=tic+tcv)
16     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
17     SOL_noest_t(end)=(1-(t-tic)/tcv)^(1.18) * SOL_est(end) * ...
        sqrt(SOL_noest_t(nnodes)/SOL_est(nnodes));
18 else
19     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
20     SOL_noest_t(end)=0;
21 end
22 %-----
23
24 end
```

### B.3. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso f cuasi-estacionario

```
1 clc;
2 clear;
3 tic;
4 %-----
5 % CALCULO CELERIDAD DE LA ONDA PARA CANERIA DN8" SCH.STD. ASTM A53 GR.B
6 %-----
7 D=.2191; %Diametro exterior de la caneria para DN 8", en m
8 e=8.18E-03; %Espesor de pared de la caneria, en m
9 D_int=D-2 * e; %Diametro interior caneria, en m
10 A_int=pi * D_int^2/4; %Area interior caneria, en m^2
11 varepsilon=4.6E-05; %Rugosidad de la pared de caneria, en m
12 mu2=8.9E-04; %Viscosidad dinamica del agua, Pa
13 rho=1000; %Densidad del fluido, en kg/m3
14 g=9.81; %Aceleracion de gravedad
15 K=2.2E+09; %Modulo de compresibilidad del agua, Pa
16 E=199947961502.2; %Modulo de elasticidad de la caneria, Pa
17 mu=0.3; %Modulo de Poisson, adimensional
18 phi=1-mu^2; %Modo de sujecion de la caneria
19 a=sqrt(1/(rho * (1/K+D_int/e * phi/E)));
20 % a=1260; %Celeridad de la onda, en m/s
21 %-----
22
23 %-----
24 % IMPOSICION DE PERFIL DE TERRENO Y VELOCIDAD DE FLUIDO
25 %-----
26 V=1.5; %Velocidad del fluido al interior de la caneria
27 Q=V * A_int; %Caudal, en m3/s
28 H0=150; %Cabeza de presion en la valvula, al final del trazado, en mca
29 L=5000 ; %Largo del piping, en m
30 %-----
```

### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```
31
32 %-----
33 % TIEMPO CRITICO
34 %-----
35 t_critico=2 * L/a;
36 fprintf('=====\\n');
37 fprintf('TIEMPO CRITICO\\n');
38 fprintf('=====\\n');
39 fprintf('Tiempo critico: %s [s].\\n', t_critico);
40 %-----
41 % PARAMETROS DEL MODELO (#NODOS, #ELEMENTOS, PASO TIEMPO, ETC.
42 %-----
43 nel=80; %Numero de elementos, adimensional
44 nnel=3; %Numero de nodos por elemento, adimensional. Puede ser 2 o 3
45 tf=50; %Tiempo hasta donde se iterara
46 tic=1; %Tiempo inicio cierre de valvula
47 tcv=6; %Tiempo de cierre de valvula
48 paso_t=0.02; %Intervalo de tiempo (\\Delta t)
49 alpha=2/3; %Familia alpha; Metodo Galerkin
50 nnodes=nel * (nnel-1)+1;
51 tiempo=zeros(tf/paso_t, 1);
52 for t=1:1:tf/paso_t
53     tiempo(t)=paso_t * t;
54 end
55 %-----
56
57 %-----
58 % INICIO CON EL CALCULO DEL ESTADO ESTACIONARIO
59 %-----
60 fprintf('=====\\n');
61 fprintf('Inicio calculo estado estacionario\\n');
62 [SOL_est, trazado, f_est, l]=LD.Estacionario(Q, H0, L, D, e, ...
63     varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel);
64
65 %-----
66 % CONTINUO CON EL CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO f ESTACIONARIO
67 %-----
68 fprintf('=====\\n');
69 fprintf('Inicio calculo estado NO estacionario\\n');
70 fprintf('Modelo f estacionario\\n');
71 [SOL_noest_f_est]=LD.NoEstacionario_f_est(SOL_est, nel, nnel, paso_t, ...
72     tiempo, tic, tcv, f_est, D_int, a, trazado, nnodes);
73
74 %-----
75 % CONTINUO CON EL CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO f CUASI-ESTACIONARIO
76 %-----
77 fprintf('=====\\n');
78 fprintf('Inicio calculo estado NO estacionario\\n');
79 fprintf('Modelo cuasi-estacionario\\n');
80 [SOL_noest_f_q, f_q, Re_f_q]=LD.NoEstacionario_f_q(D_int, SOL_est, ...
81     varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel, nnodes, tiempo, tic, tcv, ...
82     paso_t, trazado);
```

### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```

83 % PRESENTACION GRAFICA DE LOS RESULTADOS
84 %-----
85 fprintf('=====\\n');
86 fprintf('Desplegando graficos de interes\\n');
87 close all;
88 [ ENVOLVENTES_f_est ] = LD_SolGrafica( trazado, SOL_est, ...
      SOL_noest_f_est, tiempo, a, nnodes);
89 [ ENVOLVENTES_f_q ] = LD_SolGrafica( trazado, SOL_est, SOL_noest_f_q, ...
      tiempo, a, nnodes);
90 plot(trazado, ENVOLVENTES_f_est(1:nnodes, 1), 'k-.', trazado, ...
      ENVOLVENTES_f_q(1:nnodes, 1), 'b', trazado, ...
      ENVOLVENTES_f_est(nnodes+1:2 * nnodes, 1), 'k-.', trazado, ...
      ENVOLVENTES_f_q(nnodes+1:2 * nnodes, 1), 'b');
91 axis([0 trazado(end) -1.2 * min(ENVOLVENTES_f_q(nnodes+1:2 * nnodes, ...
      1)) 1.2 * max(ENVOLVENTES_f_q(1:nnodes, 1))])
92 xlabel('Distancia [m]')
93 ylabel('Presion [mca]')
94 title('Presiones a lo largo del trazado')
95 legend('P.Max Estacionario', 'P.Max Cuasi-Estacionario', 'P.Min ...
      Estacionario', 'P.Min Cuasi-Estacionario');
96 grid on;
97 figure;
98 plot(tiempo, SOL_noest_f_est(nnodes, :), 'k-.', tiempo, ...
      SOL_noest_f_q(nnodes, :), 'b');
99 axis([0 tiempo(end) -1.2 * min(SOL_noest_f_q(nnodes, :)) 1.2 * ...
      max(SOL_noest_f_q(nnodes, :))])
100 xlabel('Tiempo [s]')
101 ylabel('Presion [mca]')
102 title('Presion en la valvula')
103 legend('Estacionario', 'Cuasi-Estacionario');
104 grid on;
105 %
106 figure;
107 load('HAMMER L5000 tcv6 fqest.mat');
108 plot(HAMMER_H_VALVE_f_q(:, 1), HAMMER_H_VALVE_f_q(:, 2), 'k-.', tiempo, ...
      SOL_noest_f_q(nnodes, :), 'b');
109 axis([0 tiempo(end) -1.2 * min(SOL_noest_f_q(nnodes, :)) 1.2 * ...
      max(SOL_noest_f_q(nnodes, :))])
110 xlabel('Tiempo [s]')
111 ylabel('Presion [mca]')
112 title('Presion en la valvula')
113 legend('HAMMER Cuasi-Estacionario', 'Tapia Cuasi-Estacionario');
114 grid on;
115 toc;

```

```

1 function [ SOL_est, trazado, f_est, l ] = LD_Estacionario(Q, H0, L, D, ...
      e, varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel)
2 % Determina el perfil hidraulico en estado estacionario, e incluye
3 % sobrepresion de Joukowski
4 % Q: caudal, en m3/s
5 % H0: presion inicial, mca
6 % L: largo del piping, en m
7 % D: diametro exterior de la caneria, m
8 % e: espesor de la caneria, m
9 % varepsilon: rugosidad de la caneria, m

```

### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```
10 % mu2: viscosidad dinamica del agua, Pa
11 % rho: densidad del fluido, kg/m3
12 % a: celeridad de la onda, m/s
13 % ne:numero de elementos en que se dividira la caneria de largo L.
14 %Definicion de escalares
15 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema
16 l=L/(nnodes-1);
17 %Definicion de vectores
18 trazado=zeros(nnodes, 1);
19 D_int=zeros(nnodes, 1);
20 A_int=zeros(nnodes, 1);
21 V=zeros(nnodes, 1);
22 Re=zeros(nnodes, 1);
23 f_est=zeros(nnodes, 1);
24 h_f=zeros(1, nnodes);
25 H=zeros(1, nnodes);
26 DeltaH=zeros(nnodes, 1);
27 for i=1:1:nnodes
28     D_int(i)=D-2 * e;      %Diametro interior, en m
29     A_int(i)=pi * D_int(i)^2/4; %Area interior caneria
30     V(i)=Q/A_int(i);    %Velocidad del flujo al interior de la caneria
31     DeltaH(i)=a * V(i)/9.81;
32     Re(i)=rho * V(i) * D_int(i)/mu2; %Numero de Reynolds
33     if Re(i)<2300
34         f_est(i)=64/Re(i);
35     else
36         f_est(i)=colebrook(Re(i), varepsilon, D_int(i));
37     end
38     h_f(i)=l/D_int(i) * f_est(i) * 0.5 * rho * V(i) * V(i)/9806.38;
39 end
40 h_f=fliplr(h_f);
41
42 H(1)=H0;
43 for j=2:1:nnodes
44     trazado(j)=trazado(j-1)+1;
45     H(j)=H(j-1)+h_f(j);
46 end
47 H=fliplr(H);
48 H=H';
49 %DH=H+DeltaH;
50
51 % Presentar algunos valores representativos
52 fprintf('=====\n');
53 fprintf('ESTADO ESTACIONARIO\n');
54 fprintf('=====\n');
55 fprintf('Velocidad de flujo: %s [m/s].\n', V(1));
56 fprintf('Cantidad de elementos: %u.\n', nel);
57 fprintf('Cantidad de nodos en el sistema: %u.\n', nnodes);
58 fprintf('Numero de Reynolds: %s.\n', Re(1));
59 if Re(1)<=2300
60     fprintf('Regimen de caudal: LAMINAR. \n');
61 else
62     fprintf('Regimen de caudal: TURBULENTO. \n');
63 end
64
65 fprintf('Coeficiente de friccion: %s.\n\n', f_est(1));
```

### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```
66 SOL_est=[H;V];
67 end
```

```
1 function [SOL_noest_f_est]=LD.NoEstacionario_f_est(SOL_est, nel, nnel, ...
    paso_t, tiempo, tic, tcv, f_est, D_int, a, trazado, nnodes)
2 % SOL_est vector con presiones y velocidades de fluido en la linea
3 % ne numero de elementos en el trazado
4 % nnel numero de nodos por elemento
5 % f_est, vector con los coeficientes de friccion del trazado
6 SOL_noest_f_est=zeros(length(SOL_est), length(tiempo)); %Inicializacion ...
    matriz solucion con f estacionario
7 %-----
8 % RESOLUCION TEMPORAL f ESTACIONARIO
9 %-----
10 for t=1:1:length(tiempo)-1
11     SOL_noest_f_est(:, t)=CondicionesDeBorde_f_est(SOL_est, ...
        SOL_noest_f_est(:, t), t * paso_t, tic, tcv);
12     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_est, ...
        SOL_noest_f_est(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
13     SOL_noest_f_est(:, t+1)=(M\N) * SOL_noest_f_est(:, t);
14 end
15 end
```

```
1 function [ SOL_noest_f_q, f_q, Re_f_q] = LD.NoEstacionario_f_q( D_int, ...
    SOL_est, varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel, nnodes, tiempo, tic, ...
    tcv, paso_t, trazado)
2 SOL_noest_f_q=zeros(length(SOL_est), length(tiempo)); %Inicializacion ...
    matriz solucion con f estacionario
3 f_q=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
4 Re_f_q=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
5 %-----
6 % RESOLUCION TEMPORAL f ESTACIONARIO
7 %-----
8 for t=1:1:length(tiempo)-1
9     SOL_noest_f_q(:, t)=CondicionesDeBorde_f_q(SOL_est, ...
        SOL_noest_f_q(:, t), t * paso_t, tic, tcv);
10     [ SOL_noest_f_q(:, t), f_q(:, t), Re_f_q(:, ...
        t)]=PerdidasCuasiEstacionarias(SOL_noest_f_q(:, t), nnodes, rho, ...
        D_int, mu2, varepsilon);
11     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_q(:, t), ...
        SOL_noest_f_q(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
12     SOL_noest_f_q(:, t+1)=(M\N) * SOL_noest_f_q(:, t);
13 end
14 end
```

```
1 function [ SOL_noest_t ] = CondicionesDeBorde_f_est(SOL_est, ...
    SOL_noest_t, t, tic, tcv)
2 % Impone las condiciones de borde, segun el tiempo
3 % SOL_noest_t, vector con presion y columnas para el tiempo t
4 % l, distancia entre dos nodos consecutivos, en m
5 % t, tiempo t
6 % tf, tiempo hasta donde se iterara
```

### B.3. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F CUASI-ESTACIONARIO

```

7 % tic, tiempo inicio cierre de valvula
8 % tcv, tiempo de cierre de valvula
9 nnodes=length(SOL_noest_t)/2; %Numero de nodos total del sistema
10 %-----
11 % CIERRE DE VALVULA
12 %-----
13 if t<tic
14     SOL_noest_t(:)=SOL_est(:);
15 elseif (t>=tic)&&(t<=tic+tcv)
16     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
17     SOL_noest_t(end)=(1-(t-tic)/tcv)^(1.18) * SOL_est(end) * ...
        sqrt(SOL_noest_t(nnodes)/SOL_est(nnodes));
18 else
19     SOL_noest_t(1)=SOL_est(1);
20     SOL_noest_t(end)=0;
21 end
22
23 end

```

```

1 function [ SOL_noest_f_q ] = CondicionesDeBorde_f_q(SOL_est, ...
    SOL_noest_f_q, t, tic, tcv)
2 % Impone las condiciones de borde, segun el tiempo
3 % SOL_noest_t, vector con presion y columnas para el tiempo t
4 % l, distancia entre dos nodos consecutivos, en m
5 % t, tiempo t
6 % tf, tiempo hasta donde se iterara
7 % tic, tiempo inicio cierre de valvula
8 % tcv, tiempo de cierre de valvula
9 nnodes=length(SOL_noest_f_q)/2; %Numero de nodos total del sistema
10
11 %-----
12 % CIERRE DE VALVULA
13 %-----
14 if t<tic
15     SOL_noest_f_q(:)=SOL_est(:);
16 elseif (t>=tic)&&(t<=tic+tcv)
17     SOL_noest_f_q(1)=SOL_est(1);
18     SOL_noest_f_q(end)=(1-(t-tic)/tcv)^(1.18) * SOL_est(end) * ...
        sqrt(SOL_noest_f_q(nnodes)/SOL_est(nnodes));
19 else
20     SOL_noest_f_q(1)=SOL_est(1);
21     SOL_noest_f_q(end)=0;
22 end
23
24 end

```

```

1 function [ SOL_noest_f_q, f_q_t, Re_f_q ] = ...
    PerdidasCuasiEstacionarias(SOL_noest_f_q, nnodes, rho, D_int, mu2, ...
    varepsilon)
2 %UNTITLED2 Summary of this function goes here
3 % Detailed explanation goes here
4 f_q_t=zeros(nnodes, 1);
5 Re_f_q=zeros(nnodes, 1);

```

#### B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```
6 for i=1:1:nnodes
7     Re_f_q(i)=rho * abs(SOL_noest_f_q(nnodes+i)) * D_int/mu2;
8     if Re_f_q(i)==0
9         f_q_t(i)=0;
10    elseif Re_f_q(i)<2300
11        f_q_t(i)=64/Re_f_q(i);
12    else
13        f_q_t(i)=colebrook(Re_f_q(i), varepsilon, D_int);
14    end
15 end
16 end
```

### B.4. Algoritmo para calcular el golpe de ariete en largas distancias: caso f no-estacionario

```
1 clc;
2 clear;
3 tic;
4 %-----
5 % CALCULO CELERIDAD DE LA ONDA PARA CANERIA DN8" SCH.STD. ASTM A53 GR.B
6 %-----
7 D=.2191; %Diametro exterior de la caneria para DN 8", en m
8 e=8.18E-03; %Espesor de pared de la caneria, en m
9 D_int=D-2 * e; %Diametro interior caneria, en m
10 A_int=pi * D_int^2/4; %Area interior caneria, en m^2
11 varepsilon=4.6E-05; %Rugosidad de la pared de caneria, en m
12 mu2=8.9E-04; %Viscosidad dinamica del agua, Pa
13 rho=1000; %Densidad del fluido, en kg/m3
14 g=9.81; %Aceleracion de gravedad
15 K=2.2E+09; %Modulo de compresibilidad del agua, Pa
16 E=199947961502.2; %Modulo de elasticidad de la caneria, Pa
17 mu=0.3; %Modulo de Poisson, adimensional
18 phi=1-mu^2; %Modo de sujecion de la caneria
19 a=sqrt(1/(rho * (1/K+D_int/e * phi/E)));
20 % a=1260; %Celeridad de la onda, en m/s
21 %-----
22
23 %-----
24 % IMPOSICION DE PERFIL DE TERRENO Y VELOCIDAD DE FLUIDO
25 %-----
26 V=1.5; %Velocidad del fluido al interior de la caneria
27 Q=V * A_int; %Caudal, en m3/s
28 H0=150; %Cabeza de presion en la valvula, al final del trazado, en mca
29 L=5000 ; %Largo del piping, en m
30 %-----
31
32 %-----
33 % TIEMPO CRITICO
34 %-----
35 t_critico=2 * L/a;
36 fprintf('=====\\n');
```

#### B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```
37 fprintf('TIEMPO CRITICO\n');
38 fprintf('=====\n');
39 fprintf('Tiempo critico: %s [s].\n', t_critico);
40 %-----
41 % PARAMETROS DEL MODELO (#NODOS, #ELEMENTOS, PASO TIEMPO, ETC.
42 %-----
43 nel=80; %Numero de elementos, adimensional
44 nnel=3; %Numero de nodos por elemento, adimensional. Puede ser 2 o 3
45 tf=50; %Tiempo hasta donde se iterara
46 tic=1; %Tiempo inicio cierre de valvula
47 tcv=6; %Tiempo de cierre de valvula
48 paso_t=0.0001; %Intervalo de tiempo (\Delta t)
49 alpha=2/3; %Familia alpha; Metodo Galerkin
50 nnodes=nel * (nnel-1)+1;
51 tiempo=zeros(tf/paso_t, 1);
52 for t=1:1:tf/paso_t
53     tiempo(t)=paso_t * t;
54 end
55 %-----
56
57 %-----
58 % INICIO CON EL CALCULO DEL ESTADO ESTACIONARIO
59 %-----
60 fprintf('=====\n');
61 fprintf('Inicio calculo estado estacionario\n');
62 [SOL_est, trazado, f_est, l]=LD.Estacionario(Q, H0, L, D, e, ...
        varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel);
63 fprintf('Fin calculo estado estacionario\n');
64 %-----
65
66 %-----
67 % CONTINUO CON EL CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO f ESTACIONARIO
68 %-----
69 fprintf('=====\n');
70 fprintf('Inicio calculo estado NO estacionario\n');
71 fprintf('Modelo cuasi-estacionario\n');
72 [SOL_noest_f_est]=LD.NoEstacionario_f_est(SOL_est, nel, nnel, paso_t, ...
        tiempo, tic, tcv, f_est, D_int, a, trazado, nnodes);
73 %-----
74
75 %-----
76 % CONTINUO CON EL CALCULO DEL ESTADO NO ESTACIONARIO f CUASI-ESTACIONARIO
77 %-----
78 fprintf('=====\n');
79 fprintf('Inicio calculo estado NO estacionario\n');
80 fprintf('Modelo cuasi-estacionario + Vitkovsky\n');
81 [SOL_noest_f]=LD.NoEstacionario_f_v(D_int, SOL_est, varepsilon, mu2, ...
        rho, a, nel, nnel, nnodes, tiempo, tic, tcv, paso_t, trazado);
82 %-----
83 %-----
84 % PRESENTACION GRAFICA DE LOS RESULTADOS
85 %-----
86 fprintf('=====\n');
87 fprintf('Desplegando graficos de interes\n');
88 close all;
```



## B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```

89 [ ENVOLVENTES_f_est ] = LD_SolGrafica( trazado, SOL_est, ...
    SOL_noest_f_est, tiempo, a, nnodes);
90 [ ENVOLVENTES_f_q ] = LD_SolGrafica( trazado, SOL_est, SOL_noest_f_q, ...
    tiempo, a, nnodes);
91 plot(trazado, ENVOLVENTES_f_est(1:nnodes, 1), 'k-.', trazado, ...
    ENVOLVENTES_f_q(1:nnodes, 1), 'b', trazado, ...
    ENVOLVENTES_f_est(nnodes+1:2 * nnodes, 1), 'k-.', trazado, ...
    ENVOLVENTES_f_q(nnodes+1:2 * nnodes, 1), 'b');
92 axis([0 trazado(end) -1.2 * min(ENVOLVENTES_f_q(nnodes+1:2 * nnodes, ...
    1)) 1.2 * max(ENVOLVENTES_f_q(1:nnodes, 1))])
93 xlabel('Distancia [m]')
94 ylabel('Presion [mca]')
95 title('Presiones a lo largo del trazado')
96 legend('P.Max Estacionario', 'P.Max Cuasi-Estacionario', 'P.Min ...
    Estacionario', 'P.Min Cuasi-Estacionario');
97 grid on;
98 figure;
99 plot(tiempo, SOL_noest_f_est(nnodes, :), 'k-.', tiempo, ...
    SOL_noest_f_q(nnodes, :), 'b');
100 axis([0 tiempo(end) -1.2 * min(SOL_noest_f_q(nnodes, :)) 1.2 * ...
    max(SOL_noest_f_q(nnodes, :))])
101 xlabel('Tiempo [s]')
102 ylabel('Presion [mca]')
103 title('Presion en la valvula')
104 legend('Estacionario', 'Cuasi-Estacionario');
105 grid on;
106 %
107 figure;
108 load('HAMMER L5000 tcv6 fvitkovsky.mat');
109 plot(HAMMER_H-VALVE_f_v(:, 1), HAMMER_H-VALVE_f_v(:, 2), 'k-.', tiempo, ...
    SOL_noest_f(nnodes, :), 'b');
110 axis([0 tiempo(end) -1.2 * min(SOL_noest_f(nnodes, :)) 1.2 * ...
    max(SOL_noest_f(nnodes, :))])
111 xlabel('Tiempo [s]')
112 ylabel('Presion [mca]')
113 title('Presion en la valvula')
114 legend('HAMMER formulacion de Vitkovky', 'Tapia formulacion de Vitkovky');
115 grid on;
116 toc;

```

```

1 function [ SOL_est, trazado, f_est, l ] = LD_Estacionario(Q, H0, L, D, ...
    e, varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel)
2 % Determina el perfil hidraulico en estado estacionario, e incluye
3 % sobrepresion de Joukowsky
4 % Q: caudal, en m3/s
5 % H0: presion inicial, mca
6 % L: largo del piping, en m
7 % D: diametro exterior de la caneria, m
8 % e: espesor de la caneria, m
9 % varepsilon: rugosidad de la caneria, m
10 % mu2: viscosidad dinamica del agua, Pa
11 % rho: densidad del fluido, kg/m3
12 % a: celeridad de la onda, m/s
13 % ne:numero de elementos en que se dividira la caneria de largo L.
14 %Definicion de escalares

```

## B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```
15 nnodes=nel * (nnel-1)+1; %Cantidad de nodos del sistema
16 l=L/(nnodes-1);
17 %Definicion de vectores
18 trazado=zeros(nnodes, 1);
19 D_int=zeros(nnodes, 1);
20 A_int=zeros(nnodes, 1);
21 V=zeros(nnodes, 1);
22 Re=zeros(nnodes, 1);
23 f_est=zeros(nnodes, 1);
24 h_f=zeros(1, nnodes);
25 H=zeros(1, nnodes);
26 DeltaH=zeros(nnodes, 1);
27 for i=1:1:nnodes
28     D_int(i)=D-2 * e; %Diametro interior, en m
29     A_int(i)=pi * D_int(i)^2/4; %Area interior caneria
30     V(i)=Q/A_int(i); %Velocidad del flujo al interior de la caneria
31     DeltaH(i)=a * V(i)/9.81;
32     Re(i)=rho * V(i) * D_int(i)/mu2; %Numero de Reynolds
33     if Re(i)<2300
34         f_est(i)=64/Re(i);
35     else
36         f_est(i)=colebrook(Re(i), varepsilon, D_int(i));
37     end
38     h_f(i)=l/D_int(i) * f_est(i) * 0.5 * rho * V(i) * V(i)/9806.38;
39 end
40 h_f=fliplr(h_f);
41
42 H(1)=H0;
43 for j=2:1:nnodes
44     trazado(j)=trazado(j-1)+1;
45     H(j)=H(j-1)+h_f(j);
46 end
47 H=fliplr(H);
48 H=H';
49 %DH=H+DeltaH;
50
51 % Presentar algunos valores representativos
52 fprintf('=====\n');
53 fprintf('ESTADO ESTACIONARIO\n');
54 fprintf('=====\n');
55 fprintf('Velocidad de flujo: %s [m/s].\n', V(1));
56 fprintf('Cantidad de elementos: %u.\n', nel);
57 fprintf('Cantidad de nodos en el sistema: %u.\n', nnodes);
58 fprintf('Numero de Reynolds: %s.\n', Re(1));
59 if Re(1)≤2300
60     fprintf('Regimen de caudal: LAMINAR. \n');
61 else
62     fprintf('Regimen de caudal: TURBULENTO. \n');
63 end
64
65 fprintf('Coeficiente de friccion: %s.\n\n', f_est(1));
66 SOL_est=[H;V];
67 end
```

```
1 function [ SOL_noest_f_v ] = LD.NoEstacionario-f_v( D_int, SOL_est, ...
```

#### B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```

    varepsilon, mu2, rho, a, nel, nnel, nnodes, tiempo, tic, tcv, ...
    paso_t, trazado)
2 SOL_noest_f_q=zeros(length(SOL_est), length(tiempo)); %Inicializacion ...
    matriz solucion con f estacionario
3 SOL_noest_f_v=zeros(length(SOL_est), length(tiempo));
4 f_q=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
5 f_v=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
6 Re_f_q=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
7 Re_f_v=zeros(nnodes, length(tiempo)-1);
8 %-----
9 % RESOLUCION TEMPORAL f CUASI-ESTACIONARIO
10 %-----
11 for t=1:1:length(tiempo)-1
12     SOL_noest_f_q(:, t)=CondicionesDeBorde_f_v(SOL_est, ...
        SOL_noest_f_q(:, t), t * paso_t, tic, tcv);
13     [ SOL_noest_f_q(:, t), f_q(:, t), Re_f_q(:, ...
        t)]=PerdidasCuasiEstacionarias(SOL_noest_f_q(:, t), nnodes, rho, ...
        D_int, mu2, varepsilon);
14     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_q(:, t), ...
        SOL_noest_f_q(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
15     SOL_noest_f_q(:, t+1)=(M\N) * SOL_noest_f_q(:, t);
16 end
17
18 %-----
19 % RESOLUCION TEMPORAL f VITKOVSKY
20 %-----
21 SOL_noest_f_v(:, 1)=CondicionesDeBorde_f_v(SOL_est, SOL_noest_f_q(:, ...
    1), 1 * paso_t, tic, tcv);
22 for t=2:1:length(tiempo)-1
23     SOL_noest_f_v(:, t)=CondicionesDeBorde_f_v(SOL_est, ...
        SOL_noest_f_q(:, t), t * paso_t, tic, tcv);
24     [ SOL_noest_f_v(:, t), f_v(:, t), Re_f_v(:, ...
        t)]=PerdidasVitkovsky(SOL_noest_f_v(:, t), SOL_noest_f_v(:, ...
        t-1), SOL_noest_f_q(:, t+1), nnodes, rho, D_int, mu2, ...
        varepsilon, a);
25     [ M, N ] = MatricesMyN( a, nel, nnel, paso_t, f_q(:, t)+f_v(:, t), ...
        SOL_noest_f_v(nnodes+1:end, t), D_int, trazado );
26     SOL_noest_f_v(:, t+1)=(M\N) * SOL_noest_f_v(:, t);
27 end
28 end

```

```

1 function [ SOL_noest_f_v ] = CondicionesDeBorde_f_v(SOL_est, ...
    SOL_noest_f_v, t, tic, tcv)
2 % Impone las condiciones de borde, segun el tiempo
3 % SOL_noest_t, vector con presion y columnas para el tiempo t
4 % l, distancia entre dos nodos consecutivos, en m
5 % t, tiempo t
6 % tf, tiempo hasta donde se iterara
7 % tic, tiempo inicio cierre de valvula
8 % tcv, tiempo de cierre de valvula
9 nnodes=length(SOL_noest_f_v)/2; %Numero de nodos total del sistema
10
11 %-----
12 % CIERRE DE VALVULA
13 %-----

```

#### B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

```

14 if t<tic
15     SOL_noest_f_v(:)=SOL_est(:);
16 elseif (t>tic)&&(t<tic+tcv)
17     SOL_noest_f_v(1)=SOL_est(1);
18     SOL_noest_f_v(end)=(1-(t-tic)/tcv)^(1.18) * SOL_est(end) * ...
        sqrt(SOL_noest_f_v(nnodes)/SOL_est(nnodes));
19 else
20     SOL_noest_f_v(1)=SOL_est(1);
21     SOL_noest_f_v(end)=0;
22 end
23
24 end

```

```

1 function [ SOL_noest_f_q_t, f_q_t, Re_f_q ] = ...
    PerdidasCuasiEstacionarias(SOL_noest_f_q_t, nnodes, rho, D_int, mu2, ...
    varepsilon)
2 f_q_t=zeros(nnodes, 1);
3 Re_f_q=zeros(nnodes, 1);
4 for i=2:1:nnodes-1
5     Re_f_q(i)=rho * abs(SOL_noest_f_q_t(nnodes+i)) * D_int/mu2;
6     if Re_f_q(i)==0
7         f_q_t(i)=0;
8     elseif Re_f_q(i)<2300
9         f_q_t(i)=64/Re_f_q(i);
10    else
11        f_q_t(i)=colebrook(Re_f_q(i), varepsilon, D_int);
12    end
13 end
14 end

```

```

1 function [ SOL_noest_f_v_t, f_v_t, Re_f_v_t ] = ...
    PerdidasVitkovsky(SOL_noest_f_v_t, SOL_noest_f_v_tm1, ...
    SOL_noest_f_q_tm1, nnodes, rho, D_int, mu2, varepsilon, a)
2 f_v_t=zeros(nnodes, 1);
3 Re_f_v_t=zeros(nnodes, 1);
4 k=zeros(nnodes, 1);
5 for i=2:1:nnodes-1
6     Re_f_v_t(i)=rho * abs(SOL_noest_f_v_t(nnodes+i)) * D_int/mu2;
7     if Re_f_v_t(i)==0
8         f_v_t(i)=0;
9         k(i)=0;
10    elseif Re_f_v_t(i)<2300
11        f_v_t(i)=64/Re_f_v_t(i);
12        k(i)=sqrt(0.00476)/2;
13    else
14        f_v_t(i)=colebrook(Re_f_v_t(i), varepsilon, D_int);
15        k(i)=sqrt(7.41/(Re_f_v_t(i)^log(14.3/(Re_f_v_t(i))^0.05)))/2;
16    end
17    f_v_t(i)=k(i) * D_int/(SOL_noest_f_v_t(nnodes+i) * ...
        abs(SOL_noest_f_v_t(nnodes+i))) * ...
        (((SOL_noest_f_v_tm1(nnodes+i)+SOL_noest_f_q_tm1(nnodes+i))/2)+a ...
        * sign(SOL_noest_f_v_t(nnodes+i)) * ...
        abs((SOL_noest_f_v_t(nnodes+i+1)+SOL_noest_f_v_t(nnodes+i-1))/2));

```

#### B.4. ALGORITMO PARA CALCULAR EL GOLPE DE ARIETE EN LARGAS DISTANCIAS: CASO F NO-ESTACIONARIO

---

```
18 end  
19 end
```