



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

SELECCIÓN DE ESCALAS DE PRODUCCIÓN QUE PERMITAN  
OBTENER UN BENEFICIO ECONÓMICO DE LA INCERTEZA DEL  
PRECIO DEL COBRE EN PROYECTOS MINEROS A CIELO ABIERTO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE  
MINAS

GONZALO EDUARDO MONSALVES DEL PICO

PROFESOR GUÍA:

FERNANDO ACOSTA BARRIGA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

CRISTIAN POBLETE MATAMALA

EDUARDO VALDEBENITO DURÁN

SANTIAGO DE CHILE

2018

# **SELECCIÓN DE ESCALAS DE PRODUCCIÓN QUE PERMITAN OBTENER UN BENEFICIO ECONÓMICO DE LA INCERTEZA DEL PRECIO DEL COBRE EN PROYECTOS MINEROS A CIELO ABIERTO**

Una de los grandes desafíos que un proyecto minero debe enfrentar es el manejo de la incertidumbre asociada a los factores que lo definen, entre estos se encuentra la estimación de la cantidad y calidad de los recursos, el escenario económico en el que se desenvolverá, la realidad política y social en la que estará inmerso, entre otros. Estas fuentes de incertidumbre externa, ajenas a la organización y sus activos, impactan en la viabilidad del proyecto y son parte de las causas de las vulnerabilidades de estos, que generan un alto riesgo a la inversión a realizar.

El objetivo de este trabajo es proponer una metodología de evaluación de escalas de producción (capacidad de minado, capacidad de procesamiento y ley de corte) que permita obtener un valor económico competitivo frente al resto de las escalas, y que presente un valor agregado explicado por la incertidumbre del precio del cobre. Además, la configuración seleccionada aumenta la certeza con la que se conoce el valor del proyecto cuando este se enfrenta a un escenario de precios bajos, y otorga una mayor holgura a los retornos cuando los niveles de precio son elevados.

Para esto, se desarrolló un modelo de pronosticación del precio del cobre, que permitió representar la variabilidad de su comportamiento en el tiempo, para luego ingresarlo a un escenario de planificación donde se evaluó el desempeño económico de cada escala de producción sometida a la volatilidad del precio. Por último, mediante una serie de criterios basados en la estadística de las distribuciones encontradas, se definió la combinación de escalas de producción que cumplió con los requisitos antes mencionados.

Se evaluaron 480 combinaciones de escalas de producción, en 100 escenarios de precios distintos, lo que permitió evaluar 48.000 planes mineros en función de su valor económico y comportamiento frente a la incertidumbre del precio. La configuración seleccionada correspondió a 75 [Mton/año] de capacidad de mina, 16 [Mton/año] de capacidad de procesamiento y una ley de corte de 0,75% de cobre. Esta combinación de escalas de producción presentó una mediana de VPN equivalente a 3.700 [MMUS\$] donde 167 [MMUS\$] se justifican a raíz de la incerteza del precio considerada.

La metodología propuesta en este trabajo sugiere una nueva forma de planificación estratégica, en la que se utiliza la incertidumbre del precio del cobre para posicionar al proyecto en un escenario ventajoso con respecto a un escenario determinista del precio. De esta forma, la incerteza del precio pasa de ser un obstáculo para los proyectos mineros, a ser un factor generador de valor para estos.

# **PRODUCTION SCALES SELECTION THAT ALLOW TO OBTAIN PROFITS OF THE COPPER PRICE UNCERTAINTY IN OPEN PIT MINING PROJECTS**

One of the most biggest challenges of a mining project is how to deal uncertainty related to it's parameters, like the estimation of the quality and quantity of mineral resource, the economic scenario in which the project will perform, the socio-political reality that it will has to confront, etc. These external uncertainty, apart from organization and its assets, impacts on the project viability and causes its vulnerability, submitting the inversion at a high risk.

The objective of these work is to propose an evaluation methodology on production scales (mining capacity, plant capacity and cutoff) that allows to obtain a competitive scale, that also present an additional value explained on the copper price uncertainty. Furthermore, selected scale increases the certainty on the projects value when it has to face low levels of price, and gives more options to the possibilities of value at a high price scenario.

In order to accomplish this objective, a predictive model of the price was developed, to represent the variability of its temporal behavior, so then consider it as an input to the planning scenario that allows to evaluate the economic performance of every scale on the presence of price uncertainty. Finally, through a series of criteria based on the distribution statistics, it was defined the combination of production scales that fulfilled the previous requirements.

480 combinations were studied, with a 100 different prices scenarios, resulting in 48.000 mining plans evaluated in terms of the economic performance and the behavior in presence of price uncertainty. The selected configuration was 75 [Mton/year] of mining capacity, 16 [Mton/year] of processing capacity and a cutoff of 0,75% of copper. These combination has a median VPN equivalent to 3.700 [MUSD], in which 167 [MUSD] are justified on uncertainty.

These methodology suggest a new form of strategic mine planning, in which uncertainty of the copper price is used to position the project in an advantage scenario with respect to a deterministic price scenario. In this way, uncertainty of the price goes from being an obstacle to mining projects, to be a factor that generates value for them.

# TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1. Objetivos .....	2
1.1.1. Objetivo general.....	2
1.1.2. Objetivos específicos .....	2
1.2. Alcances .....	2
2. ANTECEDENTES .....	3
2.1. Planificación minera.....	3
2.1.1. Planificación minera estratégica .....	4
2.1.2. El problema de la planificación .....	4
2.2. Modelamiento del precio del cobre.....	6
2.2.1. Series de tiempo.....	7
2.2.2. Raíz unitaria.....	9
2.2.3. Test de normalidad.....	10
2.2.4. Metodología de Box Jenkins.....	10
2.3. Incertidumbre en minería .....	15
2.4. Fragilidad y Antifragilidad.....	15
2.5. Diseño robusto.....	16
2.6. Programas utilizados .....	17
3. METODOLOGÍA .....	19
3.1. Modelamiento del precio del cobre.....	19
3.2. Construcción del escenario de planificación .....	20
3.2.1. Definición del Pit Final .....	20
3.2.2. Selección de fases .....	21
3.2.3. Definición de planes mineros.....	21
3.3. Valorización de escalas de producción .....	21
3.4. Criterios de selección .....	24
3.4.1. Criterio de ordenamiento de las medias.....	24
3.4.2. Criterio de aprovechamiento de la incerteza.....	25
3.4.3. Criterio de comportamiento frente a los niveles de precio .....	25
4. CASO DE ESTUDIO .....	27
5. RESULTADOS.....	31
5.1. Modelo del precio del cobre.....	31
5.1.1. Análisis de normalidad .....	31
5.1.2. Estacionariedad de los datos .....	31

5.1.3.	Identificación de rezagos .....	32
5.1.4.	Estimación del modelo ARIMA .....	33
5.1.5.	Desempeño de los modelos ARIMA .....	34
5.1.6.	Evaluación de residuos .....	34
5.1.7.	Selección del modelo final.....	35
5.2.	Selección de escalas de producción que se benefician de la incerteza.....	37
5.3.	Selección de la mejor escala de producción.....	40
6.	ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	44
6.1.	Selección de escalas de producción .....	44
6.2.	La mejor escala de producción.....	45
7.	DISCUSIÓN .....	48
7.1.	Modelamiento del precio del cobre.....	48
7.2.	Atribución del valor agregado a la incerteza del precio del cobre .....	48
7.3.	Criterios de selección .....	49
8.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	50
9.	BIBLIOGRAFÍA .....	52
10.	ANEXOS .....	55
10.1.	Anexo 1: Demostración de varianza en camino aleatorio .....	55
10.2.	Anexo 2: Cálculo de coeficientes de autocorrelación .....	56
10.3.	Anexo 3: Resultados ADF, PP y DFGLS.....	57
10.4.	Anexo 4: Demostración MA infinito.....	58
10.5.	Anexo 5: Resumen de distribuciones extremas.....	59
10.6.	Anexo 6: Planes de las configuraciones que se benefician de la incertidumbre .....	60
10.7.	Anexo 7: Alternativa de criterios de selección.....	63
10.8.	Anexo 8: Impacto de variables estratégicas en la distribución de VPN.....	67
10.9.	Anexo 9: Superficies de valor .....	69

## ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 2.1: Restricción a la esperanza.....	7
Ecuación 2.2: Restricción al a varianza.....	7
Ecuación 2.3: Restricción a la covarianza.....	7
Ecuación 2.4: Proceso autorregresivo de orden p.....	8
Ecuación 2.5: Proceso autorregresivo de primer orden.....	8
Ecuación 2.6: Proceso me medias móviles de orden q.....	8
Ecuación 2.7: Proceso mixto autorregresivo de orden p, q.....	8
Ecuación 2.8: Proceso del camino aleatorio.....	9
Ecuación 2.9: Estadístico de Shapiro-Wilk.....	10
Ecuación 3.1: Criterio de aprovechamiento de la incertidumbre.....	24
Ecuación 3.2: Criterio de posicionamiento frente a los niveles de precio.....	25
Ecuación 4.1: Regresión polinómica sobre el CAPEX.....	29
Ecuación 5.1: Parámetros modelo final.....	36
Ecuación 5.2: Modelo final.....	36

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2.1: Componentes de la planificación.....	3
Ilustración 2.2: Variables que interactúan en el plan de producción.....	5
Ilustración 2.3: Metodología de Box Jenkins.....	11
Ilustración 2.4: Ejemplo FAS.....	13
Ilustración 2.5: Ejemplo FAP.....	13
Ilustración 2.6: Fuentes de incerteza en proyectos mineros.....	15
Ilustración 3.1: Diseño experimental para evaluación de escalas de producción.....	21
Ilustración 3.2: Flujo de información para la evaluación de escalas.....	23
Ilustración 3.3: Metodología de selección de escalas de producción.....	26
Ilustración 3.4: Flujograma criterios de selección.....	26
Ilustración 4.1: Planta del yacimiento en cota 4000 [m].....	27
Ilustración 4.2: Sección XZ del yacimiento.....	27
Ilustración 4.3: Sección YZ del yacimiento.....	28
Ilustración 4.4: Ejemplo plan de producción.....	29
Ilustración 5.1: FAS de la base de datos.....	32
Ilustración 5.2: FAP de la base de datos.....	33
Ilustración 5.3: Bandas de Bartlett ARMA(2,2).....	35
Ilustración 5.4: Bandas de Bartlett AR(1).....	35

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 2.1: Precio histórico del cobre .....	6
Gráfico 5.1: Visualización modelo de pronóstico.....	36
Gráfico 5.2: Test de hipótesis sobre equivalencia de las medias de VPN .....	38
Gráfico 5.3: Evaluación de escalas que se benefician de la incertidumbre .....	39
Gráfico 5.4: Distribuciones de escalas finalistas .....	41
Gráfico 5.5: Plan de producción configuración seleccionada.....	43
Gráfico 5.6: Flujos descontados configuración seleccionada .....	43

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Razón señal ruido de Taguchi.....	17
Tabla 3.1: Variables estratégicas .....	22
Tabla 4.1: Parámetros estratégicos .....	28
Tabla 5.1: Normalidad de la base de datos .....	31
Tabla 5.2: Estacionariedad de la base de datos.....	31
Tabla 5.3: Coeficientes del modelo ARIMA .....	33
Tabla 5.4: Tendencia y varianza del modelo ARIMA.....	34
Tabla 5.5: Criterios de información aplicado a los modelos .....	34
Tabla 5.6: Valores límite del modelo.....	36
Tabla 5.7: Distribuciones con media de VPN equivalente .....	37
Tabla 5.8: Aplicación criterio de aprovechamiento de la incertidumbre.....	38
Tabla 5.9: Valor agregado por incerteza del precio .....	39
Tabla 5.10: Estadística configuraciones finales.....	40
Tabla 5.11: Indicadores de un proyecto minero.....	42
Tabla 5.12: IVAN del proyecto minero .....	42

# 1. INTRODUCCIÓN

Las condiciones fluctuantes del mercado de minerales inciden directamente en la viabilidad de los proyectos mineros, ejemplo clave de esto es el caso nacional donde, según informe de SignumBox (2017), aproximadamente el 40% de los proyectos mineros con estudio o declaración de impacto ambiental aprobado, no se encuentran en ejecución debido a la incertidumbre en el comportamiento del precio del cobre.

Es por esto que uno de los grandes desafíos que enfrenta el negocio minero actual, es cómo planificar la estrategia de consumo de los recursos, cuando las condiciones del mercado son inciertas y generan amplias variaciones en los indicadores del proyecto. En otras palabras, de qué manera se van a definir los lineamientos bajo los cuáles se procederá al diseño y extracción de recursos, de una forma acorde con los objetivos estratégicos de la empresa.

Según A. Sabour y R. Dimitrakopoulos (2011) los dos grandes factores que influyen en el riesgo asociado a los proyectos mineros son la incertidumbre geológica, asociada a la calidad y cantidad de recursos, y la incerteza asociada al comportamiento del mercado de metales, referente a la variabilidad del precio de los *commodities* y tasas de interés.

La metodología tradicional de generación de planes mineros, definición de escalas de producción y determinación de la estrategia de leyes de corte, consideran escenarios deterministas de precios, buscando encontrar el plan que entregue mayores retornos en el horizonte de vida del proyecto. Esto los convierte en planes vulnerables a las condiciones fluctuantes del mercado, sometiendo a un alto riesgo la inversión.

Para hacer frente a esta problemática se propone una metodología de evaluación de escalas de producción capaz de determinar entre las escalas más competitivas en valor presente neto, aquella que permita obtener un beneficio económico producto de la incertidumbre del precio del metal de interés, y que además, permita al proyecto quedar bien posicionado para enfrentar altos y bajos niveles de precio. Cabe destacar que con escalas de producción se hace referencia a la capacidad de mina, capacidad de planta y ley de corte del proyecto minero.

Para esto se definen una serie de criterios de selección que permiten discriminar entre las escalas que cumplen las condiciones anteriores. Además, para representar la incertidumbre asociada al precio, se elabora un modelo predictivo de este en base a datos históricos.

A continuación, se presentan los objetivos y alcances del trabajo, para luego en el capítulo de antecedentes sentar las bases teóricas que lo fundamentan. Posteriormente en el capítulo metodología se explica la obtención y justificación de cada criterio de evaluación de las escalas de producción y el paso a paso para la confección del modelo de pronóstico del precio. En el capítulo de resultados se expone el modelo final de pronóstico y la escala de producción seleccionada para el caso de estudio, para luego en el capítulo de análisis realizar las observaciones pertinentes. En el capítulo de discusión se comenta sobre la validez de los resultados para finalmente en el capítulo de conclusiones y recomendaciones sintetizar la información más relevante y proponer oportunidades de mejora.



## 1.1. Objetivos

### 1.1.1. Objetivo general

Desarrollar una metodología que permita establecer una combinación de escalas de producción competitiva en valor, que utilice la incertidumbre del precio del cobre para obtener un beneficio económico de esta y que permita conocer con la mayor precisión posible el valor del proyecto ante un escenario de precios bajos, dando mayores holguras de valor para altos niveles de precio.

### 1.1.2. Objetivos específicos

- Ajustar un modelo de evolución del precio del cobre en un horizonte de 4 años.
- Implementar un flujo de trabajo que permita evaluar el valor de un proyecto minero, con respecto a sus escalas de producción, CAPEX y el escenario de precios en el que se desenvuelve.
- Establecer criterios de selección reproducibles que permitan distinguir que configuraciones de escalas de producción son mejores que otras en términos del valor presente neto del proyecto.

## 1.2. Alcances

- El trabajo se enmarca en el contexto de la planificación estratégica de faenas mineras a cielo abierto.
- Para el modelamiento del precio del cobre se emplea la metodología de Box Jenkins, en un horizonte temporal de 4 años y empleando los datos anuales del precio histórico del cobre desde 1960.
- Para la evaluación económica de largo plazo del proyecto, se considera el precio del cobre estimado por el Comité Consultivo del Precio de Referencia del Cobre para el periodo 2018 – 2027, equivalente a 2,77 [US\$/lb].
- Con el motivo de evitar la presencia de valores atípicos del precio, este se limita a  $\pm 2$  desviaciones estándar del precio esperado por el modelo.
- El modelo de pronóstico del precio del cobre tiene como objetivo suministrar a la planificación estratégica del proyecto, la variabilidad de este. El propósito no es pronosticar con certeza los valores futuros del precio.
- Para la evaluación económica de las configuraciones de escalas de producción se emplea el algoritmo Milawa del software Whittle.
- Aspectos como restricciones operativas, geotécnicas y la incerteza en el modelo de costos, no son consideradas para el estudio en cuestión, debido a limitaciones del recurso computacional.

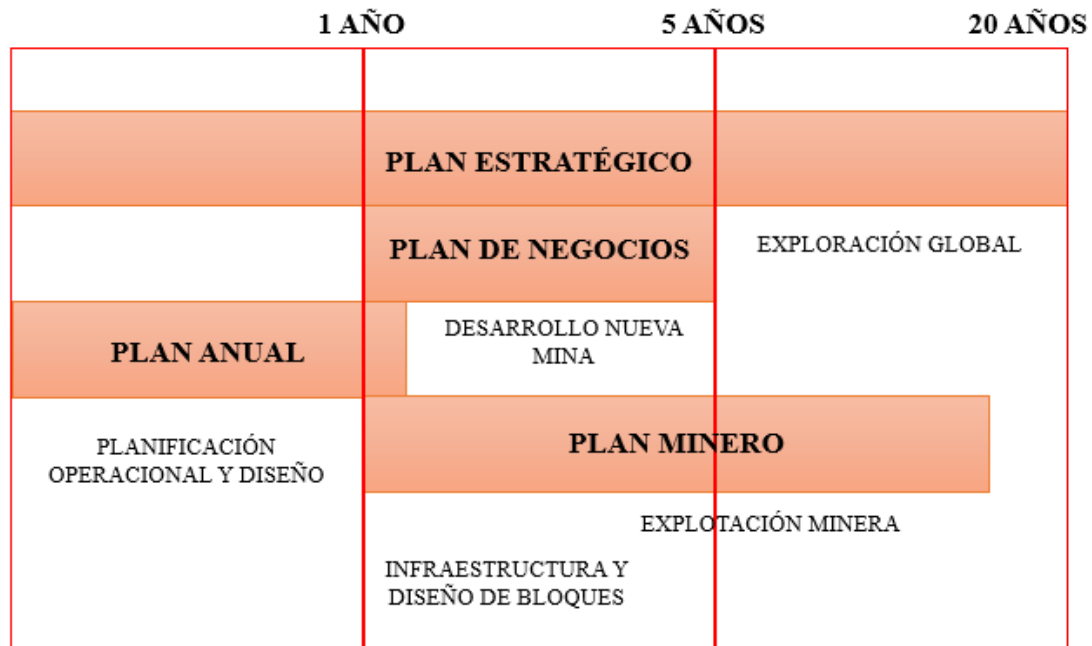
## 2. ANTECEDENTES

### 2.1. Planificación minera

Para entender la metodología propuesta en este trabajo es necesario comprender los alcances de la planificación minera estratégica y su propósito dentro de los proyectos mineros.

La planificación es una etapa esencial en la obtención de valor a partir de un recurso minero, según E. Rubio (2006) esta se define como un proceso en el que se transforma el recurso mineral en el mejor negocio productivo, alineando los objetivos estratégicos de la empresa minera y considerando restricciones inherentes al recurso mineral, mercado de minerales y el entorno en general (legislativo, ambiental, social, entre otros) en el que se desarrolla el proyecto.

Horsley, en el año 2002, identifica cuatro componentes de la planificación minera, estas son la planificación estratégica, que busca posicionar el proyecto de forma tal que genere valor continuamente, el plan de negocios, que reúne los lineamientos de la planificación estratégica para coordinar cada departamento, división y/o área de la compañía, el plan minero, que recopila los requerimientos de los recursos mineros necesarios, proyectos de desarrollo y gestión de la producción, y por último, el plan anual, que incorpora el presupuesto anual, agendamiento de actividades y planes de acción. En la ilustración 2.1 se esquematizan estas cuatro componentes y su horizonte temporal objetivo.



**Ilustración 2.1: Componentes de la planificación**

Estas 4 componentes de la planificación minera permiten dar origen, sustento y finalización a un proyecto minero, dando sentido a la inversión realizada y justificando la promesa de valor que lo motiva. Según Smith (2012) las compañías mineras requieren generar un plan de negocios y de producción, para así, atraer el interés financiero y social y lograr la realización y continuidad del proyecto.

En 2007, Newman et al. definen en base a los niveles de gestión del proyecto, los siguientes niveles de planificación:

- **Estratégica:** Se encarga de alinear los objetivos estratégicos de la empresa con el potencial negocio minero que otorga un yacimiento. En el capítulo siguiente se ahondará en la definición de este nivel de planificación, según distintos autores.
- **Táctica:** Son las acciones requeridas para lograr los lineamientos de la planificación estratégica, considerando restricciones de los recursos disponibles para llevar a cabo el proyecto, como por ejemplo el número de equipos a emplear en la mina, o el tipo de chancador a utilizar en la planta. En resumen, se encarga de identificar los recursos necesarios para llevar a cabo el plan estratégico.
- **Operativa:** Ejecución de la planificación táctica, considerando restricciones operativas y requerimientos de cada cliente interno del proceso. En esta etapa se recopila la mayor cantidad de información para actualizar las planificaciones previas, pues es en esta etapa donde se obtienen los resultados de los planes anteriores. Algunos ejemplos de aspectos técnicos a considerar son la utilización efectiva de los equipos, disponibilidades mecánicas, velocidades y tiempos de ciclo, recuperación y *make-up* de agua, etc.

### **2.1.1. Planificación minera estratégica**

Según Horsley (2002), la planificación estratégica se define como el posicionamiento para tomar ventaja de posibles escenarios futuros, tales como cambios de gobierno, demanda de minerales, precio de los *commodities*, entre otros. Cualquier evento que afecte directa o indirectamente a una compañía, debe ser identificado y evaluado, lo que involucra estar en constante revisión de las definiciones de un proyecto, ya que las condiciones que lo impactan cambian reiteradamente.

Según Hustrulid y Kuchta (2006), la finalidad de la planificación estratégica es identificar todos los posibles escenarios que permitan lograr los objetivos bajo los cuales se realiza la inversión. De esta forma, la planificación estratégica busca sincronizar los movimientos del mercado, los recursos disponibles y los objetivos estratégicos de la compañía.

Smith (2012), en su trabajo “*Strategic long term planning in mining*”, sostiene que un buen modelo de negocios aplicado al recurso disponible permite la generación de valor del proyecto. Para esto, se deben incorporar a la planificación estratégica elementos como optimización de la cartera de activos, refiriéndose al recurso mineral disponible y la estrategia de consumo a emplear, enfoque a largo plazo, para contemplar posibles escenarios futuros del negocio y flexibilidad en las opciones de explotación a corto plazo, que permitan ajustarse a la realidad en la que se desenvuelve el proyecto.

Así, la planificación estratégica se encarga de entender y monitorear cada variable que afecte el desempeño de una compañía, analizando distintos escenarios y buscando aquel que permita cumplir los objetivos estratégicos bajo los cuales se realizó la inversión, pero siempre preparado para cambiar el curso del proyecto de forma que constantemente se agregue valor.

### **2.1.2. El problema de la planificación**

En 1989, J. Whittle enuncia que la forma del rajo que genera los mayores retornos, no puede ser determinada hasta conocer el valor de los bloques, pero este no puede ser conocido hasta que la secuencia de minado esté definida, y esta a su vez, no puede ser determinada hasta que la forma del pit no esté calculada.

Según K. Dagdelen (2000), esto se traduce en un problema de optimización matemática que puede ser resuelto dividiendo el problema en otros más pequeños como se observa en el esquema de la ilustración 2.2.

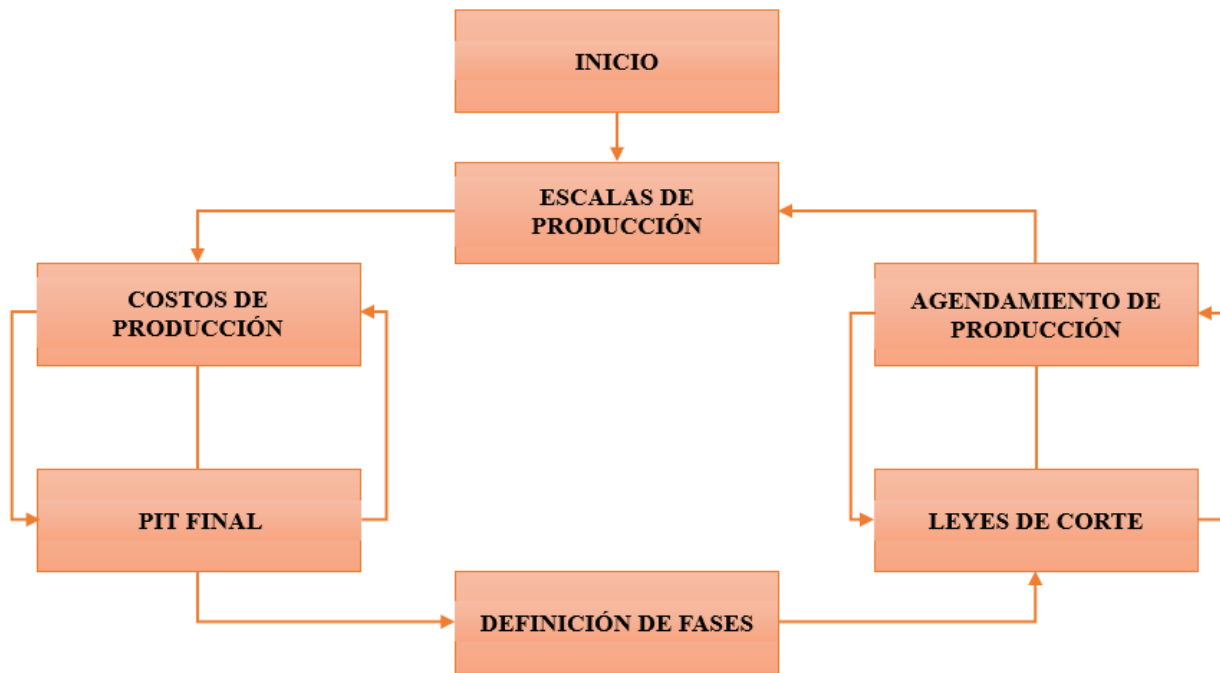


Ilustración 2.2: Variables que interactúan en el plan de producción

Para dar comienzo a la planificación, es necesario contar con un modelo de bloques. Este es una forma discreta de representar el depósito del cual se desea extraer el beneficio económico, mediante atributos como densidad, leyes de minerales, tipos de roca, alteraciones, litologías, entre otras.

La metodología de solución comienza suponiendo las capacidades de producción del sistema minero, estimando los costos asociados tanto a la producción como al procesamiento y la comercialización. Además, se debe determinar el escenario económico en el cual se desenvuelve el proyecto, formando así, un modelo de bloques valorizado.

Luego, considerando restricciones geométricas y geomecánicas sobre ángulos de precedencia, direcciones de preferencia, restricciones de crecimiento, entre otras, se evalúa si el valor de un bloque es capaz de pagar la extracción de aquellos que lo anteceden, para luego, por medio de algoritmos de la teoría de grafos (tradicionalmente el de Lerchs y Grossmann) optimizar el flujo de caja del proyecto, logrando así el Pit Final.

Posteriormente, se parametriza el beneficio de cada bloque, mediante la aplicación de distintos niveles de precio o *revenue factor* al modelo, y se generan envolventes anidadas que van desde el pit más pequeño, pero de mayor valor por tonelada de mineral, al pit más grande, con el menor valor por tonelada de mineral. Estas envolventes anidadas, son de gran utilidad para la definición de fases a emplear en el proyecto, las cuales vienen a proporcionar una guía para el agendamiento de la producción anual de forma operativa y que considere restricciones técnico-económicas.

Por último, se define el agendamiento de la producción, que corresponde a la estrategia de consumo de reservas del proyecto, junto con la estrategia de leyes de corte, que permite discriminar entre mineral y estéril durante el proceso de agendamiento.

Como resultado de esta etapa se obtiene el plan minero de producción, el cual está sujeto a cambios y variaciones de diversa naturaleza, por lo que es un proceso iterativo que requiere tiempo, experiencia y recursos.

## 2.2. Modelamiento del precio del cobre

Según S.A. Abdel y R. Dimitrakopoulos (2011) la incerteza asociada al comportamiento del mercado de minerales, son la segunda, pero no menos importante, fuente de riesgo que afecta la rentabilidad de los proyectos mineros, la primera corresponde a la incerteza geológica.

En el gráfico 2.1 se muestra, el promedio anual del precio del cobre entre los periodos 1960 y 2016 según datos del Banco Mundial. En este se observa un comportamiento bastante errático a contar del año 2004 aproximadamente, donde se quiebra la leve tendencia alcista demostrada en los 40 años anteriores.

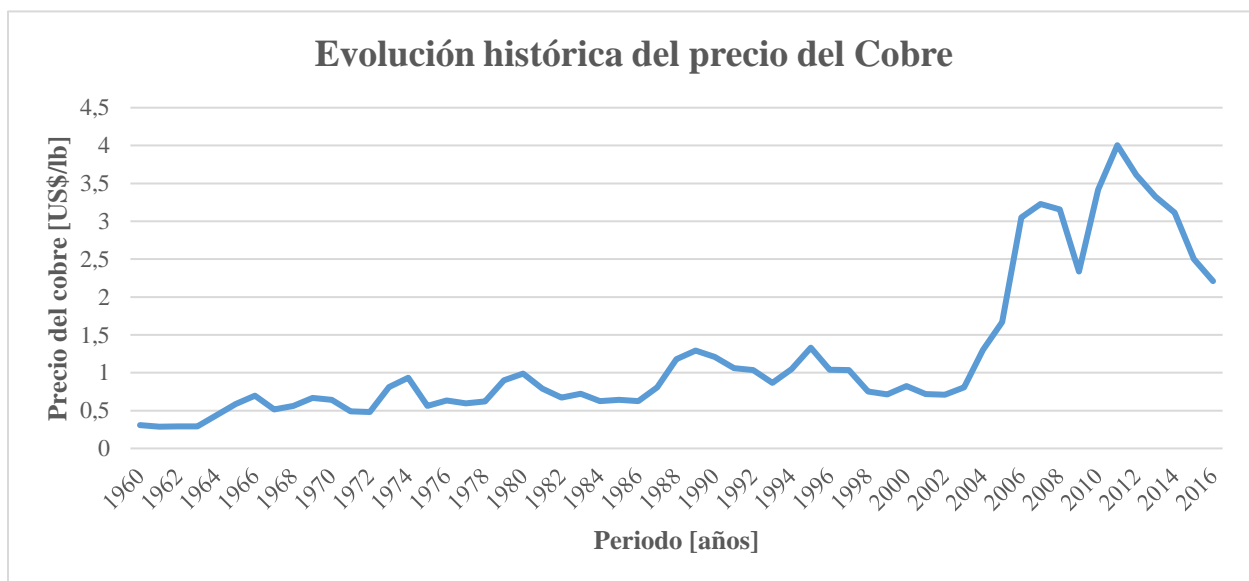


Gráfico 2.1: Precio histórico del cobre

Este comportamiento volátil, invalida la suposición determinística sobre el precio del cobre, realizada a la hora de evaluar planes de producción mediante la metodología tradicional.

Existen variados tipos de modelos del precio del cobre, entre estos se encuentran los modelos econométricos, series temporales, modelos no lineales ESTAR, entre otros. Según E. Engel y R. Valdés (2001), en la creación de proyecciones de corto y mediano plazo, entre 1 a 5 años, existe evidencia de que los modelos de series de tiempo entregan mejores predicciones que los modelos econométricos más complejos. Una de las razones para esto es la complejidad del modelamiento del comportamiento futuro de las variables involucradas en un modelo econométrico, que puede incluso ser más laborioso que el pronóstico de la variable de interés.

La ventaja de emplear series de tiempo para el pronóstico de variables, con respecto a los modelos econométricos tradicionales, radica en que en estas no es necesario conocer el comportamiento de otras variables en los mismos periodos que la variable a modelar, lo que los transforma en modelos

más sencillos y parsimoniosos. Pero sin duda, estas variables explicativas pueden contener correlaciones importantes con la variable a modelar, y mediante el uso de series temporales, se prescinde de ellas.

### 2.2.1. Series de tiempo

En el trabajo de G. Ríos y C. Hurtado (2008) se definen las series de tiempo como una sucesión de variables aleatorias ordenadas con respecto al tiempo y espaciadas entre sí de manera uniforme.

Los modelos de series de tiempo tienen un enfoque netamente predictivo y en ellos los pronósticos se elaboran sólo en base al comportamiento pasado de la variable de interés, en este caso, el precio del cobre.

Dentro de las series temporales se distinguen:

- Modelos deterministas: No se hace referencia a la fuente de aleatoriedad de la serie, lo que disminuye su precisión. Por ejemplo, el promedio móvil.
- Modelos estocásticos: Describen la componente aleatoria de la serie, sin necesidad de determinar la distribución conjunta de las variables aleatorias (lo que es una ventaja pues muchas veces es difícil de determinar), por lo que sólo se necesita caracterizar la media y varianza de las variables y la covarianza entre ellas.

En términos de las propiedades estadísticas de los datos, las series de tiempo pueden ser:

- Series no estacionarias: Su media, varianza y covarianza cambian a través del tiempo, es decir, existe una tendencia a crecer o decrecer en el tiempo.
- Series estacionarias: La esperanza de las variables aleatorias son constantes a través del tiempo (ecuación 2.1), las varianzas son constantes y finitas (ecuación 2.2) y la covarianza entre dos variables aleatorias cualquiera, sólo depende del lapso o rezago temporal entre ellas (ecuación 2.3).

$$E(Y_t) = E(Y_{t+m}) \forall t, m$$

**Ecuación 2.1: Restricción a la esperanza**

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t+m}) \neq \infty, \forall t, m$$

**Ecuación 2.2: Restricción al a varianza**

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(Y_{t+m}, Y_{t+m+k}), \forall t, m, k$$

**Ecuación 2.3: Restricción a la covarianza**

- Series no estacionarias homogéneas: Serie no estacionaria a la cual si se le diferencia una o más veces se obtiene una serie estacionaria.

Entre los modelos de series de tiempo, existen los denominados procesos ARIMA o procesos autorregresivos integrados de medias móviles. La predicción mediante estos modelos se emplea cuando se espera que el comportamiento futuro de la variable a explicar mantenga alguna característica de su evolución en el pasado.

Para comprender los modelos ARIMA, primero hay que entender los procesos autorregresivos (AR) y los procesos de media móvil (MA) por separado.

### 2.2.1.1. Proceso autorregresivo de orden p

También denotado por  $AR(p)$ , se modela como una suma ponderada de observaciones pasadas de la variable de interés:

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ecuación 2.4: Proceso autorregresivo de orden p

El número de rezagos o de observaciones pasadas  $p$ , determina el orden del modelo. Los coeficientes  $\varphi_p$  son parámetros calibrados en base a la información histórica de la variable de interés. El parámetro  $\delta$  es una constante o *drift*, que reproduce una tendencia en la variable de interés. Por último, el término  $\varepsilon_t$  corresponde a la componente aleatoria del modelo, llamado ruido blanco o innovación. El ruido blanco es un proceso estocástico de distribución normal con esperanza cero, varianza constante y covarianza nula entre errores de observaciones diferentes, es decir, las variables aleatorias de ruido blanco son independientes entre sí.

A modo de ejemplo, la expresión para un modelo autorregresivo de orden 1 es:

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ecuación 2.5: Proceso autorregresivo de primer orden

Donde se observa que la variable de interés  $Y_t$ , es explicada únicamente por el valor pasado  $Y_{t-1}$ , el *drift* y el ruido blanco.

### 2.2.1.2. Modelo de media móvil de orden q

También denominado  $MA(q)$ , este proceso se representa como una suma ponderada del error actual y errores anteriores, donde el número de rezagos del error,  $q$ , determina el orden del modelo.

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Ecuación 2.6: Proceso de medias móviles de orden q

En este modelo  $\theta_q$  son los parámetros por calibrar mediante los datos de la serie temporal.

### 2.2.1.3. Modelos mixtos autorregresivos de orden p, q

También denominados  $ARMA(p, q)$ , son de la forma:

$$Y_t = \alpha + \varphi_1 Y_{t-1} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Ecuación 2.7: Proceso mixto autorregresivo de orden p, q

Estos modelos se emplean cuando una serie de tiempo posee características de procesos  $AR(p)$  y  $MA(q)$ , por lo que se explican en función de las observaciones pasadas de la variable y del valor actual y valores rezagados del error.

### 2.2.1.4. Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil

Denotado por  $ARIMA(p, d, q)$ , estos modelos aplican a series no estacionarias homogéneas. Sea  $Y_t$  una serie no estacionaria homogénea de orden  $d$ , entonces  $W_t = \Delta^d Y_t$  es estacionaria. Si esta nueva serie estacionaria,  $W_t$ , obedece a un proceso  $ARMA(p, q)$ , se dice que  $Y_t$  responde a un proceso  $ARIMA(p, d, q)$ .

El modelamiento de los procesos antes descritos se emplea para series estacionarias. En presencia de series no estacionarias se utiliza el conocido camino aleatorio.

### 2.2.1.5. Camino aleatorio o *Random walk*

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Ecuación 2.8: Proceso del camino aleatorio

En este modelo, la varianza de  $Y_t$  aumenta a través del tiempo, lo que es, como ya se mencionó anteriormente, propio de un proceso no estacionario.

E. Engel y R. Valdés (2001) compararon distintos modelos de series de tiempo, en el corto y mediano plazo, para el precio del cobre. Los resultados encontrados para horizontes de un año definen al camino aleatorio como el mejor modelo predictivo según la raíz el error cuadrático medio. Para horizontes de predicción de 2 a 5 años, el modelo autorregresivo de primer orden resulta ser el más adecuado, según el mismo indicador, arrojando valores de entre 30% y 35% con respecto a los valores fuera de muestra.

### 2.2.2. Raíz unitaria

Para la comprensión del modelamiento de series de tiempo es necesario revisar el concepto de raíz unitaria. Una serie de tiempo tiene raíz unitaria cuando una de las soluciones de su polinomio característico es 1.

Por ejemplo, considerando una serie de tiempo que se puede modelar por un proceso autorregresivo de primer orden, ecuación 2.5, su polinomio característico es  $r - \varphi_1 = 0$ . Si el polinomio tiene como raíz  $r = 1$ , estamos en presencia de una raíz unitaria y por ende, esta serie es no estacionaria, ya que diverge con varianza  $t\sigma^2$  como se demuestra en el anexo 1, tomando la forma de un camino aleatorio.

En resumen, una serie de tiempo  $Y_t$  converge, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a una serie de tiempo estacionaria si  $|\varphi_1| < 1$ . En caso de que  $|\varphi_1| = 1$ , se tiene que la serie no es estacionaria y diverge. Finalmente, si  $|\varphi_1| > 1$ , la serie no es estacionaria y su varianza crece exponencialmente con  $t$ .

Algunas propiedades de los procesos con raíz unitaria son:

- Divergen al infinito, ya que su varianza es creciente con el tiempo.
- Al contrario de los procesos estacionarios, si se aplica una perturbación a la serie, esta tiene efectos permanentes en el tiempo.
- Al diferenciarlos se logra una serie estacionaria.

Se han propuesto variados métodos para detectar la presencia de raíces unitarias en modelos ARIMA, entre estos, se encuentran los test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), Phillips-Perron (PP) y Dickey Fuller GLS (DFGLS).



Las hipótesis de los tres test son:

$H_0$ : *la serie tiene raíz unitaria, es decir, es no estacionaria .*

$H_1$ : *la serie no tiene raíz unitaria, es decir, es estacionaria.*

Si el resultado del test genera un p-valor menor a la significancia objetivo entonces se rechaza la hipótesis nula y la serie es estacionaria, en caso contrario, si el p-valor es mayor a la significancia objetivo, no se puede rechazar la hipótesis nula y la serie en estudio resultaría no estacionaria.

Autores como Elliott, Rothenberg y Stock (1996), definen que el test DFGLS es más poderoso que los otros test mencionados, pues es menos probable incurrir en un error de tipo II, es decir, aumenta la probabilidad de que la hipótesis nula sea rechazada cuando la alternativa es verdadera.

### **2.2.3. Test de normalidad**

La lógica de un test de normalidad se basa en las desviaciones existentes entre la estadística de orden de una muestra con respecto a la estadística de orden de una distribución normal estándar. Las hipótesis para someter a evaluación son:

$H_0$ : *la muestra aleatoria tiene distribución normal.*

$H_1$ : *la muestra aleatoria no tiene distribución normal.*

Los test empleados en este trabajo para evaluar normalidad son:

#### **2.2.3.1. Test de Shapiro – Wilk**

Considera el cálculo del estadístico  $W$ , suponiendo que la muestra aleatoria proviene de una distribución normal. Se debe calcular la varianza muestral  $S^2$ , y ordenar las observaciones de menor a mayor. Luego se calculan las diferencias entre el primero y el último dato, el segundo y el penúltimo, el tercero y el antepenúltimo, y así sucesivamente. Por último, se corrigen estas diferencias mediante coeficientes tabulados por Shapiro - Wilk. La ecuación 2.9 corresponde al estadístico mencionado.

$$W = \frac{D^2}{n * S^2}$$

**Ecuación 2.9: Estadístico de Shapiro-Wilk**

Con  $D$ , suma de las diferencias corregidas y  $n$  número de las muestras.

#### **2.2.3.2. Test de Shapiro – Francia**

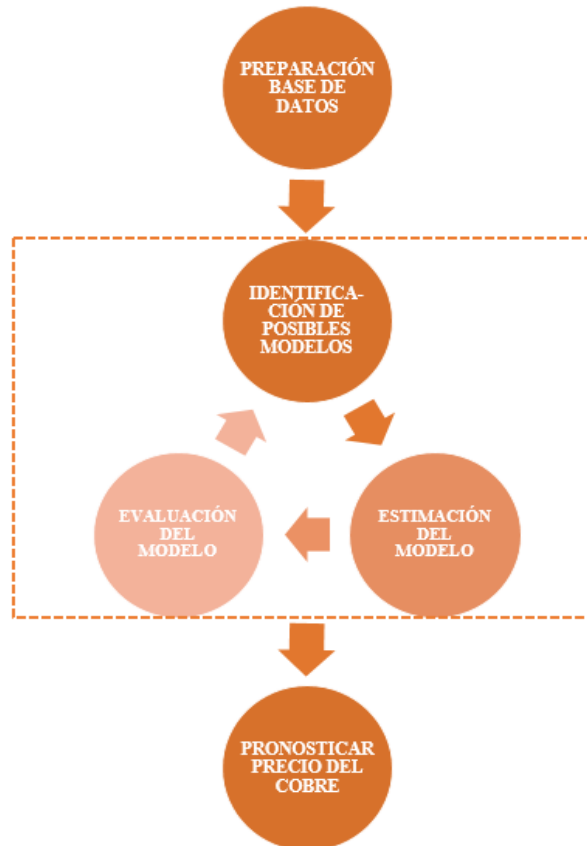
Es una adaptación del test de Shapiro - Wilk que, según F. Ahmad y R.A. Khan (2015), resulta ser comparativamente más poderosa para algunas series de datos.

### **2.2.4. Metodología de Box Jenkins**

Esta metodología desarrollada por George Box y Gwilym Jenkins en 1970 permite modelar series de tiempo, sean estas estacionarias o no, logrando que los propios datos temporales de la variable reproduzcan las estructuras probabilísticas de la serie. Posteriormente, Makridakis, Wheelwright y Hyndman, (1998) extendieron la metodología resumiéndola en las siguientes etapas.

1. Preparación de los datos: Se verifica la estacionariedad de la serie, de no serlo, se diferencia hasta lograr la estacionariedad. Otro tipo de transformación es la logarítmica, que también permite obtener bases de datos con varianza estable.
2. Identificación de un modelo tentativo: Empleando los datos ya transformados y con la ayuda de herramientas gráficas como la función de autocorrelación simple y parcial se identifican potenciales modelos ARIMA que se ajusten a los datos.
3. Estimación: En esta etapa se estiman los coeficientes que componen los modelos antes definidos y se generan nuevas opciones de modelos predictivos, cambiando el orden del proceso ARIMA.
4. Evaluación: Empleando los denominados criterios de información, se evalúa la bondad de ajuste de los modelos obtenidos en la etapa anterior. Además, se evalúan los supuestos del modelo para identificar zonas en las que sea inválido, de ser así, es necesario volver al paso 2.
5. Pronosticación de valores futuros.

A modo de resumen, en la ilustración 2.3 se ilustra un esquema de la metodología de Box Jenkins.



**Ilustración 2.3: Metodología de Box Jenkins**

El primer paso de la metodología se verifica por medio de los test ADF, PP y DFGLS, luego de aplicar las transformaciones pertinentes a la base de datos.

Para el segundo paso de identificación, es necesario conocer la relación existente entre los valores de la serie. Según Aguirre (1994), una vía para describir lo que tiende a sucederle a un valor si se da un cambio en otro, es emplear los conceptos de autocorrelación simple y parcial.

- Autocorrelación simple: Evalúa la relación lineal entre las observaciones de la serie espaciadas por  $k$  rezagos. Esta operación aplica sobre todos los datos de la serie, comparando la variación conjunta entre estos.
- Autocorrelación parcial: Se define como la estimación de la autocorrelación simple, para los mismos retardos  $k$ , pero eliminando el efecto generado por las autocorrelaciones de retardos menores a  $k$ , es decir, no considera las autocorrelaciones acumuladas para este retardo.

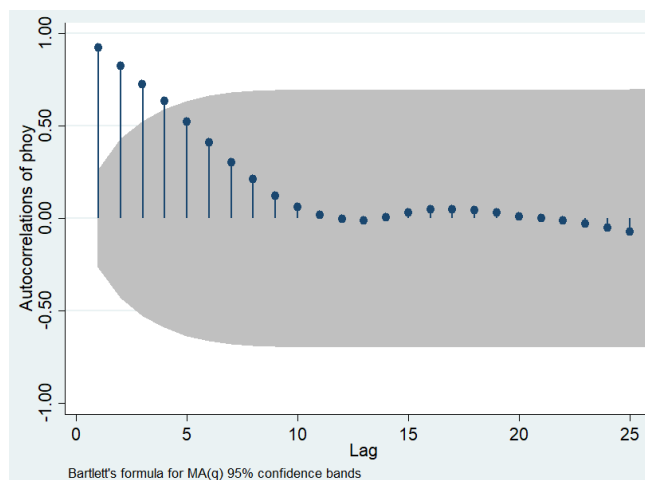
Específicamente, la diferencia radica en que la autocorrelación simple entrega tanto la relación entre observaciones realizadas con  $k$  retardos como la relación para retardos menores, mientras que la parcial brinda solo la relación para la diferencia estricta en  $k$  rezagos.

El grado de relación entre las variables se mide mediante el coeficiente de correlación para la autocorrelación simple y mediante el coeficiente de correlación parcial para la autocorrelación parcial. Ambos coeficientes varían entre +1 y -1. Cuando el valor es +1 implica que los valores, separados  $k$  unidades de tiempo, están directamente relacionados, es decir, cuando un valor crece, el otro también, y viceversa. Si el valor es -1, denota una relación inversa entre las observaciones, es decir, si un valor aumenta, el otro disminuye y viceversa. Un coeficiente igual a 0 indica que no existe correlación entre las observaciones.

En el anexo 2 se presenta el cálculo de los coeficientes de autocorrelación simple y parcial.

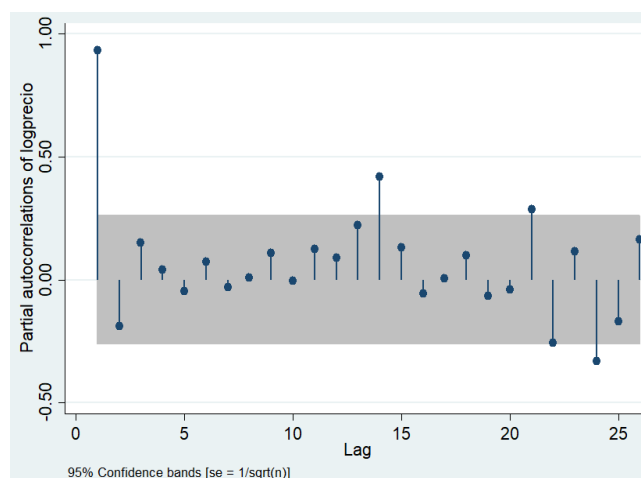
Ambos coeficientes de autocorrelación se grafican en el correlograma, obteniendo la función de autocorrelación simple (FAS) y función de autocorrelación parcial (FAP). Estas funciones, pese a que son muy útiles para el análisis de series de tiempo, no son decisivas a la hora de estimar el modelo, pero sugieren un punto de partida para esto. En la práctica, la FAS da una aproximación de los rezagos a considerar por los errores del modelo, es decir, impacta en el término “q” del modelo ARIMA ya que considera las autocorrelaciones acumuladas de los datos. Por su parte, la FAP al no considerar las autocorrelaciones acumuladas, sugiere el número de rezagos de los periodos de tiempo a evaluar, es decir, impacta el parámetro “p” del modelo ARIMA.

A modo de ejemplo, en la ilustración 2.4, se observa una FAS que sugiere 4 términos de error a considerar en el modelo ( $q=4$ ).



**Ilustración 2.4: Ejemplo FAS**

En la ilustración 2.5, se observa una FAP que sugiere solo un rezago del precio ( $p=1$ ).



**Ilustración 2.5: Ejemplo FAP**

De esta forma el modelo sugerido por las funciones anteriores es un proceso ARMA(1,4).

El tercer punto de la metodología consiste en estimar los coeficientes que ponderan a los rezagos del modelo de orden  $p, q$ . Estos coeficientes se evalúan en términos de la significancia que logran sus coeficientes, no siendo una barrera dura para determinar si un modelo es o no válido.

En el cuarto punto se evalúa la bondad de ajuste del modelo, es decir, se analiza la diferencia entre los valores observados de la serie y los generados por el modelo. Para esto, se utilizan los criterios de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (SBC).

AIC y SBC son criterios por minimizar, siendo un modelo mejor que otro aquel que tenga el menor valor. Por construcción, estos criterios realizan un balance entre la complejidad del estimador y la bondad de ajuste de ellos, por lo que al incrementar el número de parámetros se castiga al modelo

aumentando el valor del criterio, pero si estos parámetros tienen gran poder explicativo sobre la variable a modelar, entonces el valor el criterio disminuirá.

Así, una vez jerarquizados los candidatos en base a los criterios de información, es necesario verificar si los residuos siguen un proceso de ruido blanco. Esto es muy importante, pues cualquier evidencia de que los residuos estén serialmente correlacionados, puede implicar oscilaciones regulares en la variable a pronosticar que no fueron considerados dentro de los coeficientes del modelo.

Para evaluar el comportamiento de los residuos existen diversas pruebas, entre ellas el test Q de Ljung-Box para ruido blanco. La hipótesis nula de este test es que los residuos del modelo siguen un proceso de ruido blanco, es decir, que tienen esperanza cero, varianza constante y correlación nula. Otro test es el de Bandas de Bartlett, donde se evalúa si un estimador de covarianza está dentro del intervalo  $[-\frac{2}{T}, \frac{2}{T}]$ , con T número de periodos a considerar. De ser así, se dice que existe evidencia en que los residuos son ruido blanco y por tanto, se puede proceder al siguiente paso de pronosticación. En caso de que algún valor este fuera de las bandas, entonces se tiene evidencia de que el residuo no puede ser ruido blanco y tiene dinámica autorregresiva por lo que sería necesario volver a modelar.

Por último, el quinto paso corresponde a pronosticar valores futuros.

### 2.3. Incertidumbre en minería

Según O'Hara (1982), los retornos obtenidos por un proyecto minero, difieren sustancialmente de aquellos prometidos en el estudio de perfil. Esto se justifica por la elevada probabilidad de errores de estimación en el CAPEX, la magnitud de las reservas, los costos operacionales (de minado, procesamiento y comercialización principalmente), productividad y leyes de los minerales de interés. A esto se suma la incerteza asociada al valor de venta de los metales del proyecto.

Según Mayer y Kazakidis (2007) las fuentes de incertidumbre en minería se pueden clasificar en internas y externas. Las internas están relacionadas con la organización de la empresa y sus activos, así como también por sus procesos. Las externas, son aquellas ajenas a la empresa, como la incertidumbre del mercado, políticas gubernamentales, riesgo del país, etc. La ilustración 2.6 resume las principales fuentes de incertidumbre internas y externas para proyectos mineros.

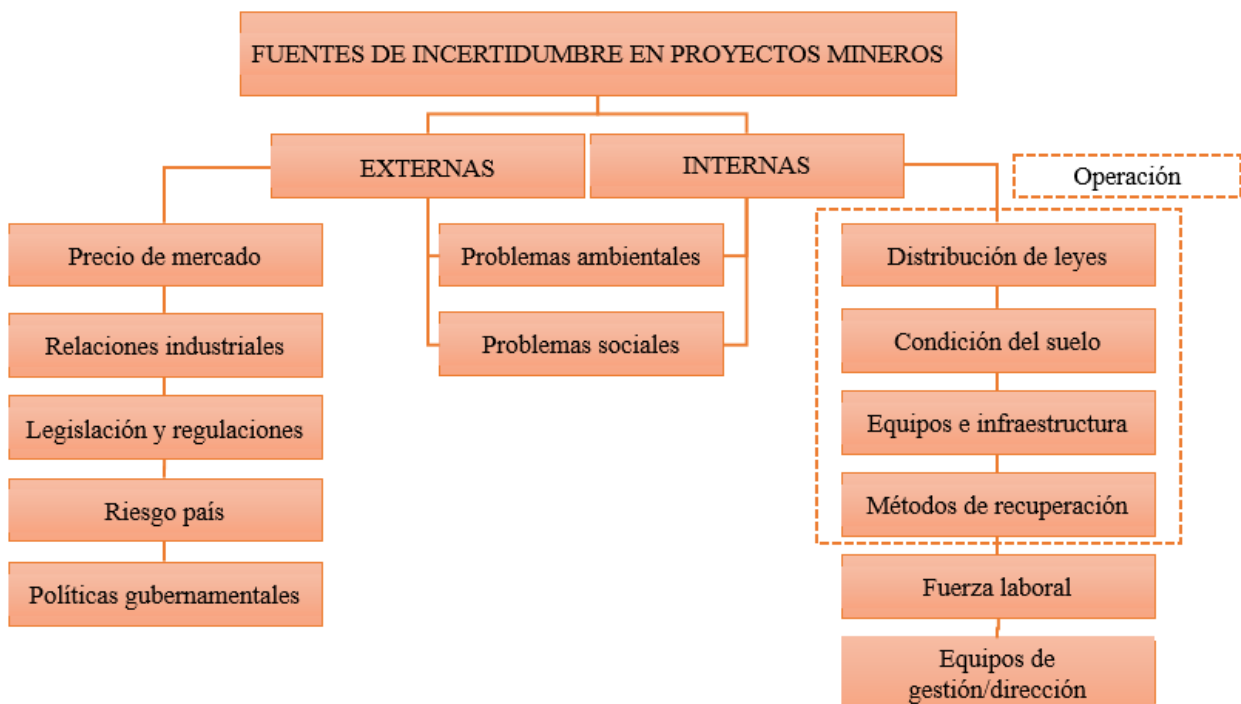


Ilustración 2.6: Fuentes de incerteza en proyectos mineros

### 2.4. Fragilidad y Antifragilidad

En 2012, Nahim Taleb en su trabajo “Mathematical Definition, Mapping, and Detection of (Anti)Fragility” define la fragilidad como la forma en la que un sistema sufre por la variabilidad de su entorno luego de cierto umbral predefinido.

A modo de ejemplo, Taleb propone que una taza de porcelana sufre más daño por la aplicación de un esfuerzo elevado, que por la acumulación de varios esfuerzos de menor intensidad, en otras palabras, la taza es más sensible a eventos de “cola”, considerando que el estrés aplicado a la tasa se modela como una distribución estadística de esfuerzos, que a eventos regulares cercanos al centro de la distribución. De esta forma, se dice que la taza es frágil ante los eventos provenientes de las colas (valores extremos) de la distribución de esfuerzos aplicados sobre ella.

Por otra parte, la antifragilidad se refiere a cuando un sistema se beneficia de la variabilidad del entorno en el que se desenvuelve. Por ejemplo, en un proceso evolutivo la selección natural es antifrágil para especies más robustas a la volatilidad del ambiente, pues frente a entornos hostiles la tasa de sobrevivencia de estas especies aumenta, y elimina aquellas que su superioridad es altamente dependiente del entorno

Típicamente, los sistemas están diseñados para ser robustos a cierto nivel de variabilidad y estrés (edificios, puentes, plantas nucleares, etc.) pero pueden colapsar o fallar si estos niveles son excedidos. A estos sistemas se les categoriza como frágiles ante la incerteza de la distribución del estresor.

Nahim Taleb en su libro “Antifrágil - Las cosas que se benefician del desorden” (2013) detalla que para detectar antifragilidad simplemente se puede aplicar una prueba de asimetría, aquello que salga más beneficiado que perjudicado ante sucesos aleatorios será antifrágil; en caso contrario será frágil.

## **2.5. Diseño robusto**

Este concepto está orientado a los métodos de ingeniería de calidad propuestos por el ingeniero japonés Genichi Taguchi hacia la década de 1950. Taguchi propone que la calidad de un producto debe medirse en base al daño que produce a la sociedad, a lo largo de toda su cadena de producción y hasta que cumple su vida útil. Sostiene que la clave para alcanzar una calidad competitiva, en términos económicos, es enfocarse en las etapas de diseño, tanto para los productos como para los procesos.

Según H. G. Pulido y R. de la Vara (2008) el objetivo del diseño robusto es generar productos y procesos insensibles ante la variabilidad de factores internos y/o externos (ruidos) no controlables, con respecto a las funcionalidades para los cuales fue diseñado, y así, disminuir los costos de calidad asociados a la desviación de sus valores óptimos. En otras palabras, es lograr que el producto o proceso tenga el desempeño deseado, sin verse afectado por los factores de ruido.

Para aplicar el diseño robusto sobre un proceso, es necesario que exista como mínimo un factor de ruido, del cual se quiere controlar sus efectos en la variable resultado, para hacerla insensible. En ningún sentido se desea controlar la variable de ruido, lo que se busca es atenuar sus efectos en los resultados.

Para evaluar la robustez de un sistema, Taguchi propone el cociente señal/ruido. Este estadístico, basado en la media y desviación estándar de la distribución objetivo, mide la robustez de la respuesta de cada combinación de factores de control ante la variabilidad del factor de ruido.

Dado un tipo de característica de calidad, se define la razón señal/ruido de acuerdo a la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Razón señal ruido de Taguchi

TIPO DE CARACTERÍSTICA	RAZÓN SEÑAL/RUIDO
Más pequeño es mejor	$-10 \log \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 \right]$
Más grande es mejor	$-10 \log \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i^2} \right]$
Valor nominal es mejor (tipo I)	$10 \log \left[ \frac{\bar{Y}^2}{S^2} \right]$
Valor nominal es mejor (tipo II)	$-10 \log[S^2]$

Donde  $Y_i$  corresponde a los valores de la variable de interés,  $n$  corresponde al número de observaciones de la variable,  $\bar{Y}$  es la media de la variable de interés y  $S$  es la desviación estándar de esta. Cabe destacar que el estadístico está construido de forma tal que siempre hay que maximizarlo.

Los problemas del tipo “más pequeño es mejor” consideran una característica de calidad continua y no negativa, donde el valor más deseado para el coeficiente es cero. Típicamente se emplea cuando se trabajan los costos de un proceso o producto. Problemas del tipo “lo más grande es mejor” también consideran una característica de calidad continua y no negativa, por lo que se desea maximizar su valor. Este último es útil cuando la característica de calidad se trata del valor alcanzable por un proyecto.

Con respecto a los estadísticos de tipo nominal, el de tipo I se emplea para respuestas no negativas que van de cero a infinito, con valor objetivo distinto de cero y con varianza cero cuando la respuesta también es cero. El de tipo II, es para respuestas que abarcan valores positivos y negativos, permitiendo que el valor nominal sea cero.

## 2.6. Programas utilizados

Para la realización de este trabajo se utilizaron variados programas que permitieron obtener, analizar y visualizar los resultados. A continuación, se resumen las funcionalidades principales de cada uno, a modo de interiorizar al lector en el propósito y las ventajas de estos.

Stata® es un software que permite manejar diversos tipos de bases de datos, facilitando su análisis, modelamiento y visualización. Entre sus herramientas se encuentran el análisis de estadística descriptiva, test de hipótesis, modelamiento de base de datos, un vasto repertorio de gráficos, análisis multivariable, entre otras.

GEOVIA Whittle™ de la empresa Dassault Systèmes permite obtener la planificación estratégica de un proyecto minero a cielo abierto, secuenciando la extracción de cada fase de producción y evaluando la rentabilidad de este. En otras palabras, permite evaluar la viabilidad financiera de un proyecto minero, considerando estrategias óptimas de extracción de mineral. Este software es altamente utilizado en la industria minera actual, no solo por la fiabilidad de sus resultados, sino



también por la inclusión de restricciones que posee una faena minera real en el desarrollo de planes de producción.

SIMULIA Isight™ también de la empresa Dassault Systèmes, permite encadenar flujos de procesos de diferentes paquetes de software y ejecutarlos rápidamente, sin la necesidad de intervenir en el traspaso de la información o en su análisis. La automatización de estos flujos, que involucran la utilización de diversos programas computacionales y la preparación de bases de datos, permite agilizar la obtención de resultados y disminuir potenciales errores asociados al traspaso de la información.

### 3. METODOLOGÍA

La presente metodología explica cómo se desarrollaron los criterios de evaluación empleados para evaluar distintas configuraciones de escalas de producción (capacidad de minado, capacidad de procesamiento y ley de corte) que permiten seleccionar aquella que posea un valor presente neto competitivo comparativamente al resto, se beneficie de la incerteza en el precio del metal de interés y permita posicionar al proyecto en un escenario ventajoso con respecto a los niveles de precio.

A continuación el lector encontrará 4 subcapítulos, el primero tiene relación con la obtención del modelo evolutivo del precio del cobre, el segundo se encarga de explicar el escenario de planificación estratégica que se utilizará para la evaluación de las configuraciones, el tercer capítulo se refiere a la implementación del proceso iterativo que permite evaluar el desempeño económico de cada configuración de escalas de producción, y por último, el cuarto capítulo resume los criterios que se emplearon para escoger la configuración que permite aprovecharse económicamente de la volatilidad del precio.

#### 3.1. Modelamiento del precio del cobre

Para la confección del modelo que generó las series de precio, se utilizó una base de datos anual del precio histórico del cobre, extraída del Banco Mundial. La elección de una escala anual de medición del precio fue para no incluir en el modelo tendencias de origen especulativo u otro tipo de correlaciones de naturaleza estacional, política, financiera, entre otras más recurrentes a escala mensual.

En el gráfico 2.1, precio histórico del cobre, se puede visualizar la base de datos considerada para la confección del modelo, esta comprendió los valores del precio desde 1960 hasta 2016. Es de vital importancia emplear estos 57 valores del precio, ya que el modelo debe captar la mayor cantidad de información posible para ajustar sus parámetros de manera más fehaciente.

Antes de buscar la estacionariedad de la serie, como propone la metodología de Box Jenkins, y con el objetivo de mejorar el análisis de los parámetros de ajuste del modelo predictivo, se resolvió buscar la normalidad de los datos. De esta forma, la justificación y el análisis de los coeficientes del modelo adquirió mayor sentido, ya que la totalidad de los test a emplear en esta metodología arrojan coeficientes e indicadores que asumen normalidad.

Para su evaluación, se utilizaron los test de Shapiro - Francia y de Shapiro - Wilk sobre una base de datos sometida a transformaciones del tipo diferencial y logarítmica. El nivel de significancia utilizado para estos test es de 5%.

Una vez lograda la normalidad se procedió con la evaluación de la estacionariedad de la base de datos (primer paso de la metodología de Box Jenkins). Para esto, se emplearon los test de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), Phillips - Perron (PP) y Dickey - Fuller GLS (DFGLS) sobre la base de datos normalizada y considerando una significancia del 5%. De ser necesario continuar transformando la base de datos, se debe volver a verificar la hipótesis de normalidad.

El siguiente paso de la metodología de Box Jenkins consiste en identificar los modelos que mejor representan la serie temporal en estudio. Para esto se utilizó la función de autocorrelación simple (FAS) y parcial (FAP), que sugirieron una primera aproximación de los rezagos a emplear. Es necesario recordar que estas funciones sólo aplican como una sugerencia, o un punto de partida para la identificación del modelo definitivo, en ningún sentido tienen carácter decisivo en la elección final de los rezagos.

Con esto se procedió a la estimación del modelo ARIMA, etapa donde se busca que cada coeficiente tenga la mayor significancia posible, es decir, que estos tengan baja probabilidad de ser cero. Se realizaron varias iteraciones, modificando los rezagos del modelo tanto para los valores del precio como para sus errores, hasta lograr definir aquellos más prioritarios en términos de significancia o aquellos que tienen alta probabilidad de ser descartados.

El cuarto paso de la metodología es diagnosticar el desempeño del modelo de pronóstico, para esto se emplearon los criterios de información Bayesiano y de Akaike, que permitieron evaluar la bondad de ajuste y jerarquizar los modelos de acuerdo a la minimización de estos. Luego se evaluó que el mejor modelo encontrado, no presente correlación entre sus residuos, para lo que se emplearon los criterios de Ljung Box y Bandas de Bartlett. En caso de presentar alguna correlación, es necesario cambiar el modelo y volver al paso 3 de la metodología.

El quinto y último paso de la metodología, corresponde a pronosticar los precios para el horizonte proyectado. De esta forma, con el modelo de predicción ya calculado y los valores del precio futuro estimados, se dio por finalizada la metodología de Box Jenkins.

Aun así, fue necesario corregir este modelo para que no genere valores atípicos que puedan alterar en gran medida la evaluación de las escalas de producción. Para esto se limitaron los valores del modelo a  $\pm 2$  desviaciones estándar de distancia con respecto a la media del modelo original. Si las distribuciones resultantes siempre fueran normales, con esta medida se logra considerar un 95,5% de la totalidad de los datos generados.

Las series de precio finales correspondieron a los precios generados por el modelo predictivo en los primeros 4 periodos de vida de la mina, y para el resto de ella se utilizó el precio de largo plazo.

De esta forma, se generaron las 48.000 series de precio que dieron vida al diseño experimental que permitió evaluar las distintas configuraciones de escalas de producción en términos de su desempeño para generar valor a raíz de la volatilidad del precio del cobre y su potencial para situar al proyecto en un contexto ventajoso con respecto al precio.

## **3.2. Construcción del escenario de planificación**

Esta etapa se realizó por medio del software Whittle. Para esto, se cargó el modelo de bloques, empleando un tamaño de 40 metros de ancho, 40 metros de largo y 15 metros de altura de bloques, la que corresponde al tamaño de cada banco a explotar. En esta etapa fue posible identificar la cantidad de recursos minerales y los tipos de roca presentes en el yacimiento.

### **3.2.1. Definición del Pit Final**

Para la extracción de los bloques fue necesario definir restricciones geométricas que permitan incorporar direcciones de avance vertical. Dado que no se realizó un estudio estructural en la zona, que restrinja la forma y el avance de este, se utilizó un ángulo de talud global de  $47^\circ$  a lo largo de todo el yacimiento.

Posteriormente para determinar el pit final, fue necesario asignar los parámetros económicos y metalúrgicos que dominaron la operación de la mina, los cuales son presentados en el capítulo 4 “Caso de estudio”. Una vez lograda la valorización económica de los bloques, se obtiene el pit final, generando así una primera visión de las reservas extraíbles del depósito.

### 3.2.2. Selección de fases

Para esto se buscó que no existan vacíos en la extracción de mineral en el tiempo, que generen potenciales pérdidas de valor a lo largo de la vida de la mina. Además, se definió que las fases no deben tener una diferencia considerable de mineral entre ellas, con motivo de darle holgura al software para que pueda agendar correctamente cuando pasar de una fase a otra, sin generar vacíos en la alimentación de mineral a planta.

Otro criterio empleado, es que la primera fase debió ser tal que pudiera alimentar a la planta por al menos tres años, operando en capacidad máxima. El motivo de esto fue agendar de manera óptima el material de mayor ley dentro de los 3 primeros años, permitiendo la disponibilidad del mineral de mayor ley para que el software encuentre la mejor opción de procesamiento.

### 3.2.3. Definición de planes mineros

Una vez determinadas las fases a emplear, se asignan las capacidades de mina y planta, su CAPEX respectivo y las leyes de corte que determinarán el comportamiento de los planes mineros frente a la variabilidad del precio. La definición de estas variables se realizó en la siguiente etapa de valorización de escalas de producción, ya que son factores móviles dentro del proceso.

Así, ya construido el modelo de planificación en Whittle, se dio inicio a la implementación de los procesos a evaluar en Isight.

## 3.3. Valorización de escalas de producción

Una vez construido el modelo de planificación en Whittle, se extrajeron los archivos necesarios para comenzar la implementación del modelo en Isight. Este permitió obtener las métricas de evaluación de cada configuración de escalas de producción y escenarios de precios, en un tiempo razonable para luego dar paso a la selección de la configuración deseada.

En la ilustración 3.1 se presenta el esquema en Isight del diseño experimental que se empleó para la obtención de resultados:

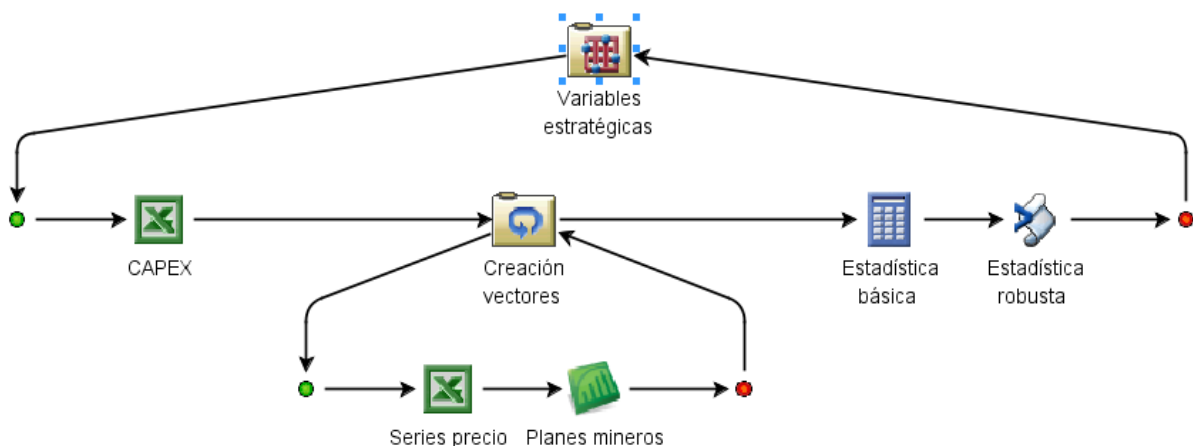


Ilustración 3.1: Diseño experimental para evaluación de escalas de producción

Las variables de interés del proceso son:

- Valor Presente Neto (VPN)
- Vida de la mina (LOM – *Life Of Mine*)
- Tasa Interna de Retorno (TIR)
- *Payback*

Las estadísticas recopiladas sobre las variables de interés fueron:

- Media y desviación del Valor Presente Neto.
- Media y desviación de la vida de la mina.
- Media y desviación de la Tasa Interna de Retorno.
- Media y desviación del *Payback*.
- Razón señal – ruido de Taguchi sobre el VPN.
- Mediana, asimetría y curtosis de las distribuciones de VPN.

A continuación la definición de cada nodo de la ilustración 3.1.

1. **“Variables estratégicas”**: se asignaron los valores de la capacidad mina, planta y ley de corte resumidas en la tabla 3.1. En este nodo, además se recogieron los resultados del proceso completo, es decir, se guardó la estadística de las distribuciones asociadas a las variables de interés.

Tabla 3.1: Variables estratégicas

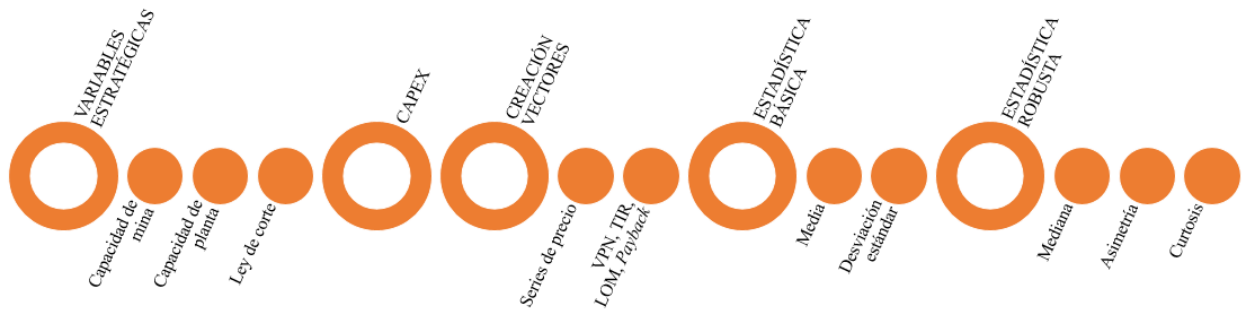
VARIABLES ESTRATÉGICAS	MÍNIMO	MÁXIMO	PASO	UNIDAD
Capacidad de mina	55	90	5	Mton/año
Capacidad de planta	10	20	2	Mton/año
Ley de corte	0,30	0,75	0,05	%

Los 8 valores de capacidad de minado, junto a los 6 valores de capacidad de procesamiento y los 10 valores de leyes de corte, equivalen a un total de 480 posibles combinaciones entre las variables estratégicas.

2. **“CAPEX”**: se ingresaron los valores de la capacidad mina y planta a una planilla Excel que contiene la fórmula para el cálculo de la inversión a realizar en el proyecto. Para esto se empleó la ecuación 4.1, descrita en el capítulo 4 donde se presenta el caso de estudio. La justificación de la utilización de una planilla Excel radica en que esta permite el ordenamiento de la información en celdas, facilitando la lectura de los resultados.
3. **“Creación vectores”**: se recibió la información del CAPEX y las escalas de producción, para ser ingresadas al *loop* de generación de planes mineros. Además, en este nodo se almacenó el valor de las variables de interés de cada plan.
4. **“Series de precio”**: este nodo está conformado por una planilla Excel con los pronósticos del precio del cobre, calculados con el modelo de pronosticación.
5. **“Planes mineros”**: Correspondiente al proceso que Whittle realizó para el cálculo del VPN, TIR, *payback* y vida de la mina. De esta forma, al nodo “Planes Mineros” se ingresó la información de las 480 combinaciones de variables estratégicas, junto a sus CAPEX respectivos, y las 100 series de precio aplicadas a cada una de las combinaciones, resultando en un total de 48.000 planes mineros.

6. **“Estadística básica”**: Se evalúa el comportamiento en media y desviación estándar de las 480 distribuciones obtenidas por la variación del precio del cobre almacenadas en el nodo “Creación vectores”. Este cálculo se realizó por medio de una herramienta de Isight llamada “Calculadora” que contiene las funciones media y desviación estándar predefinidas.
7. **“Estadística robusta”**: se calcularon los estadísticos que permitieron fundamentar los criterios de evaluación de cada escala, la robustez de cada distribución (estadístico de Taguchi) y otros estadísticos descriptores como la curtosis, asimetría, rangos intercuartiles y valores extremos. Se empleó la herramienta “Script” de Isight que permite programar las funciones antes mencionadas utilizando los lenguajes Python, Java o Jython.

En la ilustración 3.2 se resumen las entradas y salidas de cada nodo.



**Ilustración 3.2: Flujo de información para la evaluación de escalas**

### 3.4. Criterios de selección

Una vez determinado el valor económico generado por cada configuración de escalas de producción al ser evaluadas en distintos escenarios de precios, junto con la media, mediana, desviación estándar, curtosis, asimetría, cuartiles y parámetros de Taguchi, se procedió a evaluar cada configuración en busca del cumplimiento del objetivo general de este trabajo.

La configuración a seleccionar no solo debe ser óptima en términos de la magnitud de su valor (VPN), sino que también debe ofrecer un beneficio económico superior a raíz de la incerteza del precio del cobre, comparativamente a un caso sin incerteza. Para esto, fue necesario definir un conjunto de criterios que permitieran distinguir aquellas configuraciones que generen un valor económico mayor, al ser evaluadas a precios variables, que al ser evaluadas a precios fijos.

Los escenarios de precios variables fueron asignados por el modelo de pronosticación del precio del cobre (para los primeros 4 años de operación), mientras que el escenario de precios fijos corresponde al precio esperado por el modelo de predicción (también para los 4 primeros años). Para los años posteriores, correspondientes al largo plazo, el valor del precio del cobre correspondió al estimado por el Comité Consultivo del Precio de Referencia del Cobre.

Lo anterior se traduce en la ecuación 3.1.

$\exists i$  tal que,

$$\text{Mediana}_i(\text{VPN}) > \text{VPN}_i(E(P_{cu}))$$

**Ecuación 3.1: Criterio de aprovechamiento de la incertidumbre**

Con  $i$  la configuración  $i$ -ésima de escalas de producción.

Al lado izquierdo de la desigualdad se tiene la mediana de la distribución de VPN para la configuración  $i$ -ésima de escalas de producción obtenidas mediante el flujo de trabajo de la ilustración 3.1, mientras que al lado derecho se encuentra el VPN obtenido al evaluar la configuración  $i$ -ésima de escalas de producción en Whittle, con un precio del cobre equivalente a la esperanza del modelo de pronosticación antes desarrollado y al precio de largo plazo.

De esta forma se aseguró que la/s distribución/es seleccionada/s presente/n más de la mitad de sus valores por sobre el valor de VPN generado por una evaluación a precios fijos. Además, la mediana tiene la particularidad de ser un estadístico más robusto que la media, en presencia de valores aberrantes, por lo que es una métrica de comparación más confiable considerando que hay una fuente de varianza constante asociada al modelo de precios.

#### 3.4.1. Criterio de ordenamiento de las medias

Para distinguir entre las configuraciones más óptimas en magnitud del VPN, se ordenó las escalas de producción en forma decreciente con respecto a la media de su VPN. Con esto, se garantizó la selección de las escalas de producción que mejor se comportan para el caso de estudio. Luego se realizó un test de hipótesis con el objetivo de distinguir cuales configuraciones tienen significativamente el mismo valor que la configuración de más alto VPN.

Para esto fue necesario verificar si las medias de VPN para todas las configuraciones distribuyen de manera normal. En caso de no existir normalidad de los datos, o en caso de que el inversionista considere que el criterio de significancia no es apto o no representa sus intereses, se puede aplicar

otro tipo de criterio para la selección de las escalas que entren a competir, por ejemplo, un criterio de máxima pérdida de valor con respecto al óptimo global.

### 3.4.2. Criterio de aprovechamiento de la incerteza

Una vez determinadas las configuraciones de escalas de producción que presentan un VPN significativamente equivalente a la configuración de más alto valor, se analizó cuáles de estas cumplen con la desigualdad de la ecuación 3.1.

### 3.4.3. Criterio de comportamiento frente a los niveles de precio

Por último, para la selección final de la combinación de escalas de producción, fue necesario discriminar en base a las características propias de cada distribución, en términos del comportamiento a altos y bajos precios del cobre. Para esto se emplearon las diferencias intercuartílicas de cada distribución, buscando aquella que presente alta diferencia entre el tercer y segundo cuartil (comportamiento frente a escenarios de altos precios), y baja diferencia entre el segundo y primer cuartil (comportamiento ante escenarios de bajos precios). Se seleccionó aquella distribución que maximiza la razón entre ambas diferencias respectivamente, como se presenta en la ecuación 3.2.

$$\text{Razón diferencias intercuartílicas} = \frac{(Q_3 - Q_2)}{(Q_2 - Q_1)}$$

Ecuación 3.2: Criterio de posicionamiento frente a los niveles de precio

La justificación para seleccionar aquella distribución que presente alta diferencia entre el tercer y segundo cuartil, radica en que se desea una alta dispersión en la región que representa el comportamiento de la distribución ante altos precios del cobre, ya que de esta forma, se garantiza que la distribución seleccionada tendrá más opciones que el resto, de alcanzar mayores valores de VPN. En otras palabras, no es de interés que el proyecto sea robusto a altos valores del precio, más bien se desea que este se beneficie de la volatilidad de los altos precios.

Con respecto a la minimización de la diferencia entre el segundo y primer cuartil (valores por debajo de la mediana), que representan el comportamiento ante bajos precios del cobre, se busca una baja dispersión del VPN, pues esta zona es desfavorable para el proyecto, siendo deseable conocer con mayor certeza su valor en esta región y así disminuir el riesgo para el inversionista.

No se consideró analizar el comportamiento de cada escala entre el tercer y cuarto cuartil (valor máximo de la distribución) ni entre el primer cuartil y el cuartil número 0 (valor mínimo de la distribución), pues en estos rangos están presente valores aberrantes que pueden alterar en gran medida la referencia de medición de desempeño de las escalas, en caso de permitir un comportamiento más errático del precio.

En la ilustración 3.3 se presenta un resumen gráfico de los pasos a seguir por la metodología de selección de escalas de producción y en la ilustración 3.4 se entrega un diagrama de decisión con respecto a la metodología.



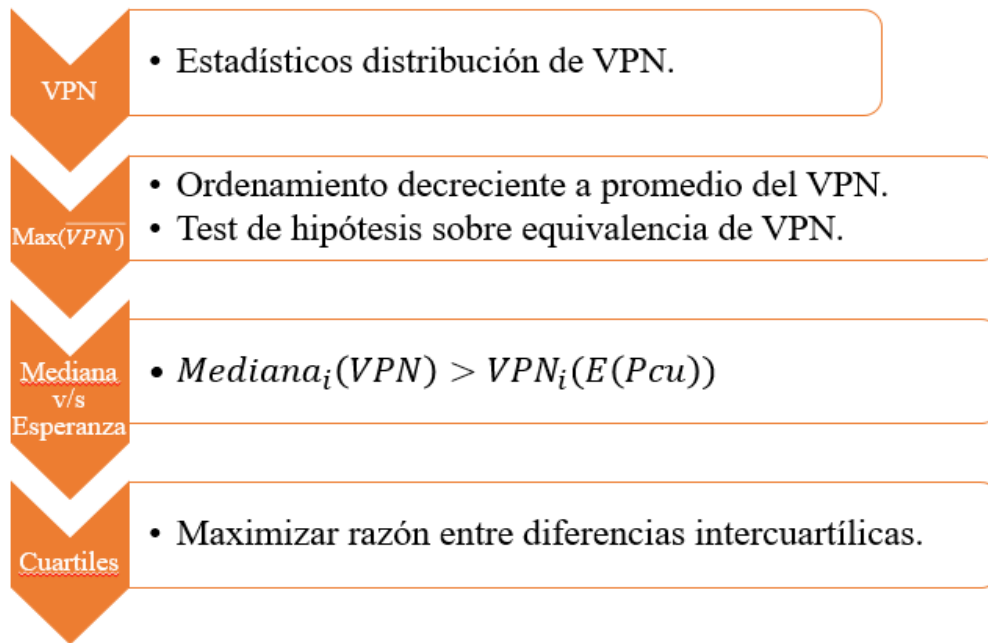


Ilustración 3.3: Metodología de selección de escalas de producción

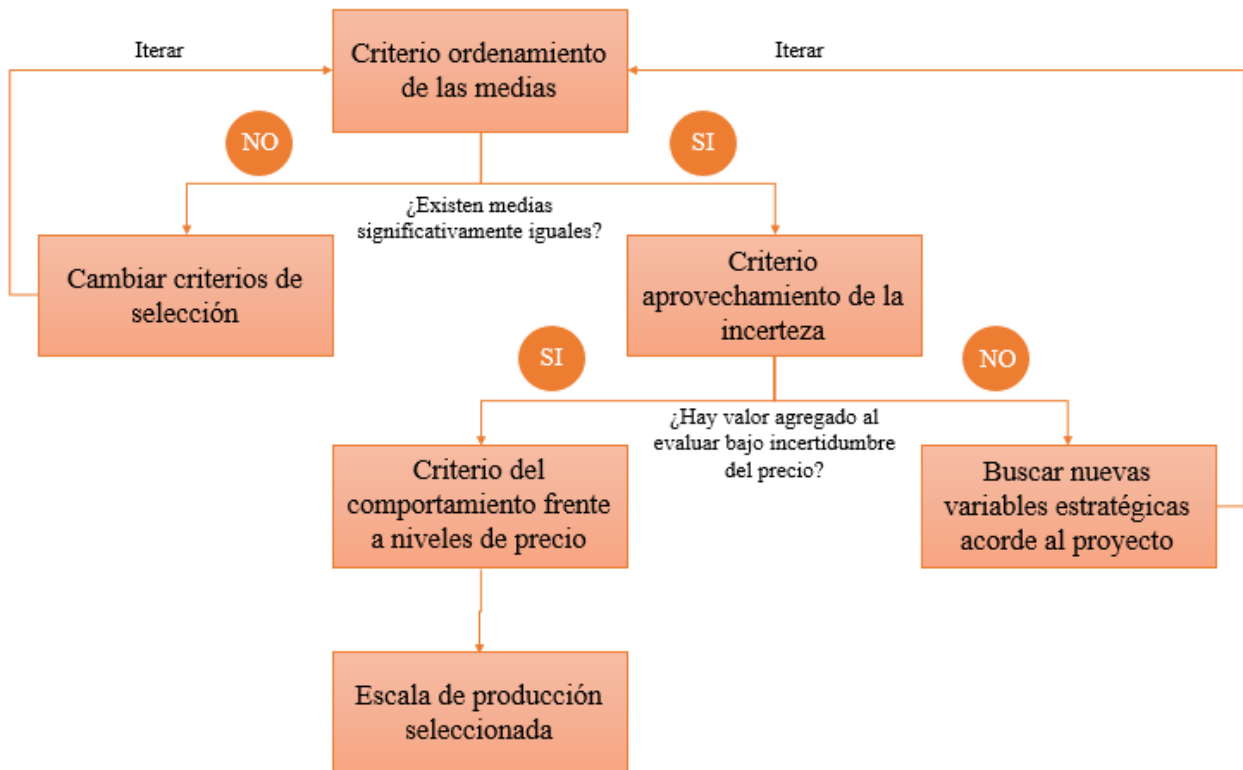


Ilustración 3.4: Flujograma criterios de selección

## 4. CASO DE ESTUDIO

El modelo de bloques empleado para la revisión de la metodología fue suministrado por la empresa Dassault Systèmes. Este corresponde a un yacimiento de tipo *skarn* de cobre, oro y plata, cuyos parámetros estratégicos reales y reservas son confidenciales. No obstante, los parámetros empleados para la evaluación del modelo están dentro de los rangos típicos de la industria minera en general.

En el yacimiento estudiado el cobre es el elemento principal, razón por la cual es necesario aplicar la metodología basando la incerteza del precio del metal de interés en el cobre. Además, el yacimiento está compuesto por dos tipos de sulfuro, el primario que representa un 99% del total del material, y el secundario que corresponde al resto. Esto tiene un impacto directo en el costo de procesamiento del mineral, ya que como se aprecia en la tabla 4.1 este es dependiente del tipo de material a procesar.

En las ilustraciones 4.1 a 4.3 se observan algunas imágenes del modelo de bloques.

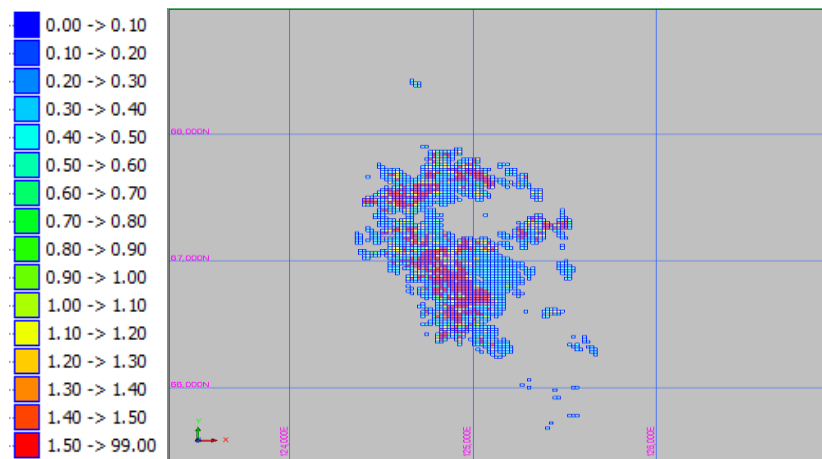


Ilustración 4.1: Planta del yacimiento en cota 4000 [m]

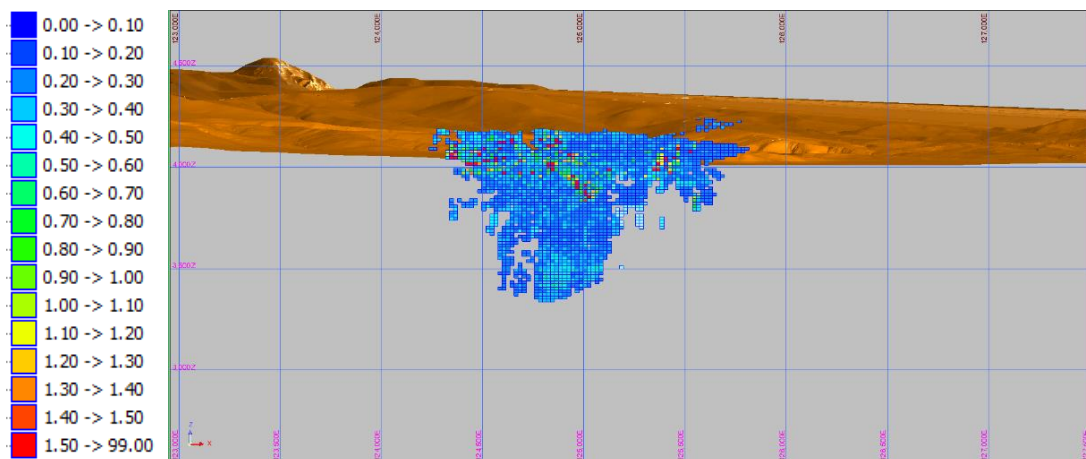
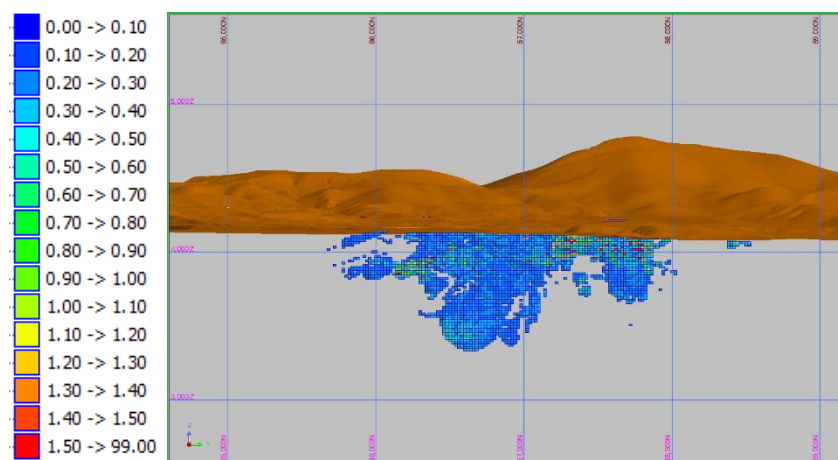


Ilustración 4.2: Sección XZ del yacimiento



**Ilustración 4.3: Sección YZ del yacimiento**

En las ilustraciones anteriores es posible observar que el mineral en general se encuentra dispuesto cerca de la superficie, y que los bloques de mayor ley están en las cotas superiores del yacimiento, lo que sugiere emplear un método de explotación a cielo abierto.

Los parámetros metalúrgicos y económicos empleados para la implementación del escenario de planificación se presentan en la tabla 4.1.

**Tabla 4.1: Parámetros estratégicos**

ELEMENTO	PRECIO	COSTO VENTA	RECUPERACIÓN
Cobre	2,77 [US\$/lb]	0,5 [US\$/lb]	90 [%]
Oro	1.250 [US\$/oz t]	400 [US\$/oz t]	59 [%]
Plata	20 [US\$/oz t]	4,5 [US\$/oz t]	69 [%]
COSTO		VALOR	
Costo mina	1.9 [US\$/ton]		
Costo procesamiento sulfuro primario	$7,4 - (0,8 - 0,0082 * IZ) + 0,2$ [US\$/ton]		
Costo procesamiento sulfuro secundario	$7,4 - (0,8 - 0,0082 * IZ) + 1,2$ [US\$/ton]		
Tasa de descuento	10 [%]		

Donde IZ corresponde a un índice propio de cada bloque, asignado en función de la altura del centroide con respecto a una cota de referencia.

El valor del precio del cobre de la tabla corresponde al de largo plazo. Este precio fue utilizado para los años posteriores a los periodos en que se empleó el modelo predictivo.

Para la determinación del costo capital utilizado en este trabajo, se definió una función polinómica dependiente de la capacidad de minado, capacidad de procesamiento y tamaño de la envolvente final. Esta función fue desarrollada por Fabián Miranda Jéldez, en su trabajo de tesis “Alineamiento de la selección del pit final con la optimización del secuenciamiento estratégico” en 2017 y está expresada en la ecuación 4.1.

$$CAPEX [MMUSD] = 0,0008x^4 - 0,14x^3 + 7,88x^2 - 65,04x + 658,76 + 4,6y + 0,5z$$

**Ecuación 4.1: Regresión polinómica sobre el CAPEX**

Con:

x: Capacidad de procesamiento [Mt/año]

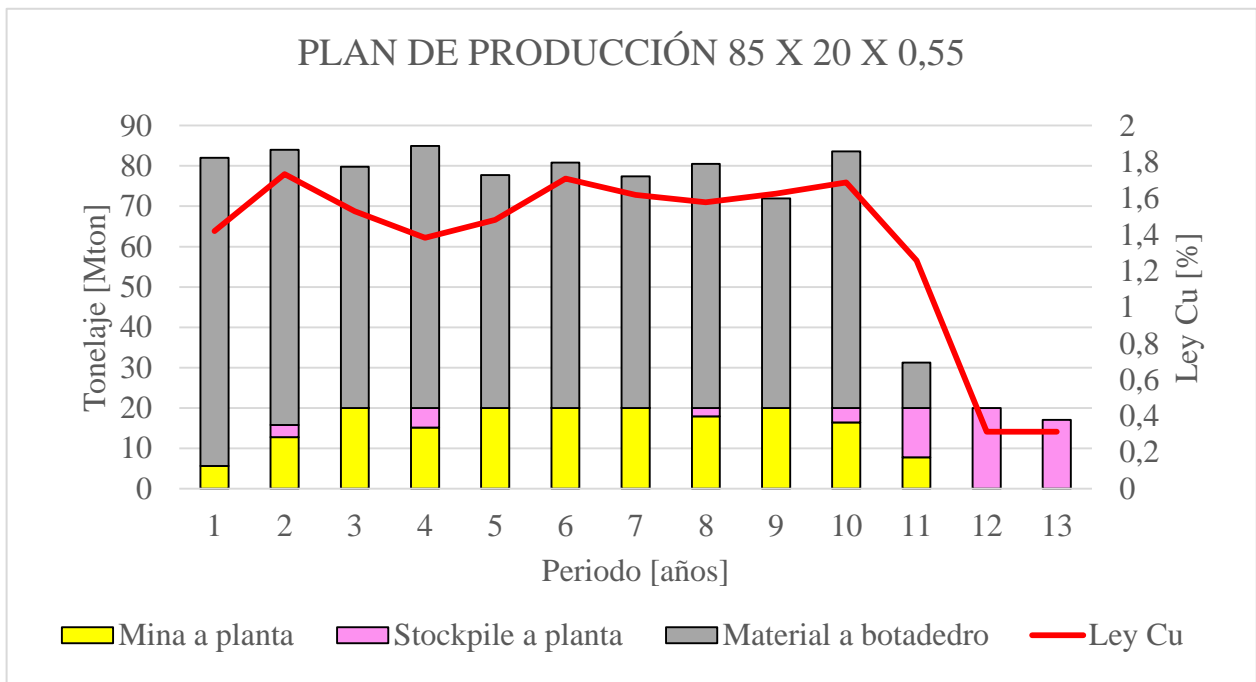
y: Capacidad de minado [Mt/año]

z: Tamaño de la envolvente final [Mt]

Cabe destacar que esta función fue calculada mediante una regresión aplicada a datos de la Comisión Chilena del Cobre sobre la cartera de proyectos mineros, a realizar en Chile entre los años 2015 y 2024.

Una vez definidos los parámetros geotécnicos, metalúrgicos y económicos, se procedió a la definición de las fases que rigen la extracción de mineral. Los criterios de búsqueda de fases, descritos en el capítulo 3, permitieron definir que un número de fases manejable por el usuario es de 5. De esta forma, se le permitió al software organizar la extracción sin generar pérdidas de valor y enviando un tonelaje de mineral continuo a procesamiento, manteniendo además un ancho mínimo de 80 metros entre fases, lo que fue una restricción operativa que garantizó un espacio suficiente para la operación conjunta de dos fases.

A continuación, en la ilustración 4.4 se presenta un ejemplo de plan minero ilustrando el movimiento de mineral a planta y a botadero.



**Ilustración 4.4: Ejemplo plan de producción**

La ley de cobre para los últimos periodos, donde la alimentación a planta es únicamente del *Stockpile*, se calculó en base a un promedio ponderado de finos por periodo.

El caso en estudio corresponde a 85 [Mton/año] de capacidad mina, 20 [Mton año] de capacidad planta y una ley de corte a planta de 0,55% de cobre. Se observa un periodo de *Ramp up* de tres años para alcanzar la capacidad máxima de diseño de la planta, donde la ley alcanza su mayor valor en el segundo periodo. Los últimos dos años son netamente de mineral proveniente de *Stockpile*. Cabe destacar que para los resultados propios de la metodología se realizará un análisis más acabado, estos gráficos son meramente referenciales.

## 5. RESULTADOS

En este capítulo el lector encontrará los principales resultados de la metodología desarrollada. Se da comienzo con la entrega de los resultados que guiaron a la obtención del modelo del precio del cobre, y se finaliza con la entrega de aquella escala de producción que cumple con los criterios de selección implementados.

### 5.1. Modelo del precio del cobre

Para los siguientes resultados se empleó una base de datos anual del precio del cobre.

#### 5.1.1. Análisis de normalidad

Los test de Shapiro – Francia y Shapiro – Wilk no arrojaron normalidad en la base de datos in situ, por lo que fue necesario aplicar transformaciones a esta. Al aplicar logaritmo natural a la base de datos y luego diferenciarla, se logró la normalidad. En la tabla 5.1 se resumen los p-valores de las configuraciones más relevantes.

Tabla 5.1: Normalidad de la base de datos

TRANSFORMACIÓN BASE DE DATOS	SHAPIRO - WILK	SHAPIRO - FRANCIA
Precio	0%	0%
Diferencias del precio	0%	0%
Logaritmo natural del precio	0.2%	0.5%
Diferencias del logaritmo natural del precio	70%	56%

El p-valor obtenido para las diferencias del logaritmo natural del precio, no permitió rechazar la hipótesis nula sobre la normalidad de los datos. Así, con una base de datos normal, se logró dar consistencia a los análisis posteriores de los coeficientes del modelo de precios.

Con esto, se dio comienzo a la aplicación de la metodología de Box Jenkins.

#### 5.1.2. Estacionariedad de los datos

Los test de Dickey - Fuller Aumentado (ADF), Phillips - Perron (PP) y Dickey - Fuller GLS (DFGLS) arrojaron resultados similares entre ellos, rechazando la hipótesis nula sobre la presencia de raíz unitaria en los datos, es decir, se confirmó que la base de datos empleada es estacionaria.

En la tabla 5.2 se presentan los principales resultados de los test.

Tabla 5.2: Estacionariedad de la base de datos

MÉTODO	ESTADÍSTICO	VALOR CRÍTICO (5%)	P-VALOR
ADF	-3.725	-2.928	0.004
PP	-6.148	-2.926	0.000
DFGLS	-5.075	-3.195	-

Ya que el estadístico de cada test es menor al valor crítico para una significancia de 5%, se rechazó la hipótesis nula de cada test. Esto también se puede verificar observando los p-valores, con excepción de DFGLS que por construcción no emplea este estadístico. En el anexo 3 se adjuntan los resultados obtenidos en Stata para los 3 test, con un mayor nivel de detalle.

De esta forma, con una base de datos normal y estacionaria, se procedió a la identificación de los rezagos sugeridos para definir el modelo final.

### 5.1.3. Identificación de rezagos

En esta etapa se empleó la función de autocorrelación simple (FAS) y función de autocorrelación parcial (FAP), como se aprecia en las ilustraciones 5.1 y 5.2 respectivamente.

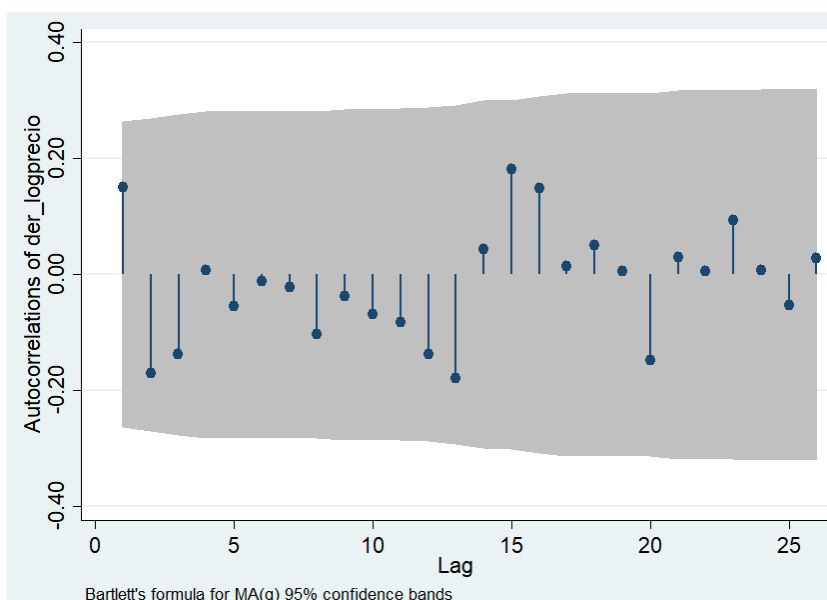


Ilustración 5.1: FAS de la base de datos

En la FAS se observó que no existe un rezago para el error que con un 95% de confianza tenga correlación entre los valores del error para la variable de interés. Esto implicó que el término que regula el número de rezagos del error ( $q$ ), del modelo  $ARIMA(p,d,q)$  tiende a infinito y por ende, como se demuestra en el anexo 4, es equivalente a tener un modelo  $AR(1)$ .

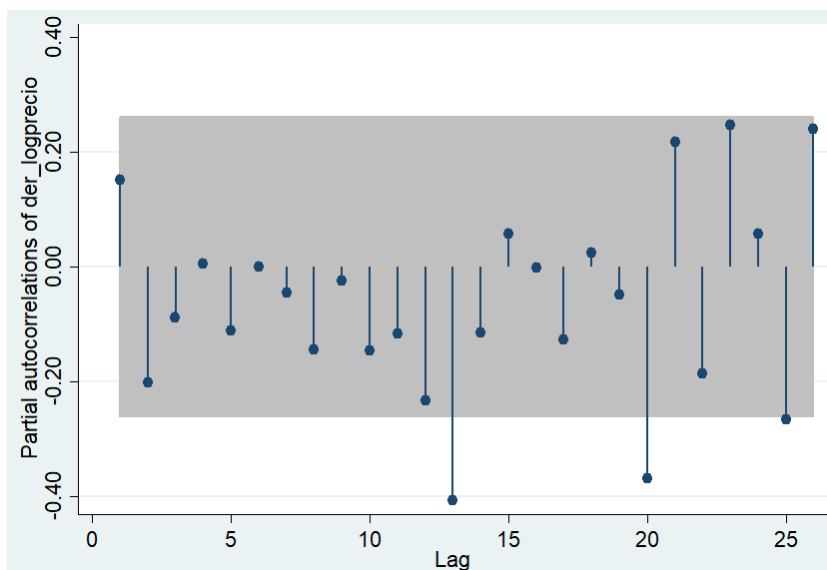


Ilustración 5.2: FAP de la base de datos

En la ilustración 5.2 se observó una correlación entre los rezagos separados por 13 y 20 años, lo que no es representativo considerando que la base de datos se refiere al precio del cobre.

Así, el modelo seleccionado como punto de partida para las siguientes etapas de la metodología, es el AR(1).

#### 5.1.4. Estimación del modelo ARIMA

En la tabla 5.3 se aprecian los coeficientes de distintos modelos de pronóstico y sus p-valores (p-val) respectivos.

Tabla 5.3: Coeficientes del modelo ARIMA

MODELO	$\phi_1$	p-val	$\phi_2$	p-val	$\phi_3$	p-val	$\theta_1$	p-val	$\theta_2$	p-val
AR(1)	0.149	40%	-	-	-	-	-	-	-	-
AR(2)	0.177	33%	-0.196	10%	-	-	-	-	-	-
AR(3)	0.159	39%	-0.182	13%	-0.084	60%	-	-	-	-
ARMA(1,1)	-0.21	74%	-	-	-	-	0.402	48%	-	-
ARMA(1,2)	0.702	0%	-	-	-	-	-0.679	99%	-0.321	99%
ARMA(2,2)	0.830	4%	-0.115	74%	-	-	-0.794	61%	-0.205	69%

Dado que el criterio de significancia, sobre la nulidad de los coeficientes del modelo, no es una barrera dura para la selección del modelo de pronóstico definitivo, en esta evaluación solo se definió aquellos modelos potencialmente descartables. Estos son los procesos ARMA(1,1), ARMA(1,2) y ARMA(2,2) pues la probabilidad de que sus coeficientes sean nulos es elevada.

En la tabla 5.4 se presentan los valores del drift y la desviación estándar asociada a cada modelo, junto a los p-valores respectivos.



Tabla 5.4: Tendencia y varianza del modelo ARIMA

MODELO	DRIFT	P-VALOR	$\sigma$	P-VALOR
AR(1)	0.034	34%	0.222	0%
AR(2)	0.036	23%	0.217	0%
AR(3)	0.037	19%	0.217	0%
ARMA(1,1)	0.035	33%	0.220	0%
ARMA(1,2)	0.035	0%	0.205	50%
ARMA(2,2)	0.035	0%	0.204	0%

Fue posible observar que el modelo ARMA(1,2), en su componente aleatoria (desviación estándar  $\sigma$ ) presentó alta probabilidad de ser nula, por lo que sumado a la condición de nulidad de los coeficientes de la regresión, este modelo quedó eliminado de la selección.

Con respecto a la componente tendencial (drift), no se puede generar decisiones concluyentes con respecto a la significancia de los valores de cada modelo.

Con los coeficientes anteriores determinados, se dio inicio a la evaluación de la bondad de ajuste de cada modelo.

### 5.1.5. Desempeño de los modelos ARIMA

En la tabla 5.5 se presenta la bondad de ajuste de cada modelo evaluado, según los criterios de información de Akaike y Bayesiano.

Tabla 5.5: Criterios de información aplicado a los modelos

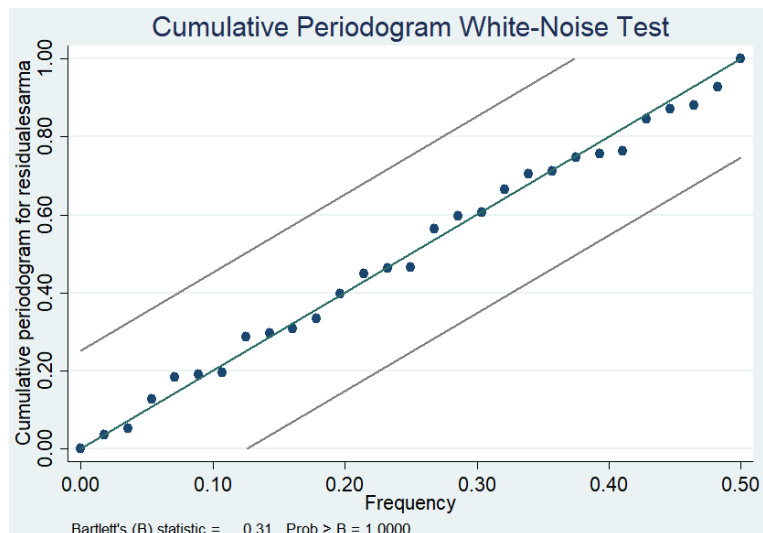
MODELO	AKAIKE	BAYESIANO
AR(1)	-3.42	2.65
AR(2)	-3.61	4.48
AR(3)	-2.01	8.11
ARMA(1,1)	-2.28	5.82
ARMA(1,2)	-6.46	3.66
ARMA(2,2)	-6.57	3.55

Con esto, fue posible determinar que los dos mejores modelos son los procesos AR(1), que minimiza el criterio Bayesiano, y ARMA(2,2) que minimiza el criterio de Akaike. Antes de seleccionar uno de ellos, se evaluó si existe correlación entre los residuos de cada uno, es decir, si sus residuos son ruido blanco.

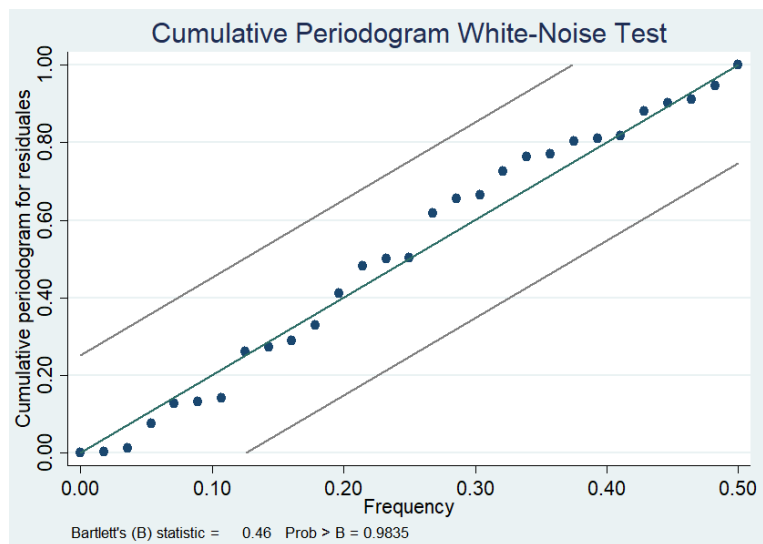
### 5.1.6. Evaluación de residuos

Al aplicar el test Q de Ljung Box para el modelo AR(1), se encontró que con un 95% de probabilidad los residuos son ruido blanco, mientras que al aplicarlo al modelo ARMA(2,2) se obtuvo un 98% de probabilidad, por lo que ambos modelos cumplieron el criterio.

Con respecto al test de Bandas de Bartlett, como se aprecia en las ilustraciones 5.3 y 5.4, ambos modelos cumplieron el criterio.



**Ilustración 5.4: Bandas de Bartlett AR(1)**



**Ilustración 5.3: Bandas de Bartlett ARMA(2,2)**

### 5.1.7. Selección del modelo final

Por todo lo anterior, se observó que el mejor modelo para pronosticar valores futuros del precio del cobre, fue el AR(1), ya que comparativamente con el proceso ARMA(2,2), presentó la mejor significancia de sus coeficientes y una de las mejores bondades de ajuste según los criterios de información empleados. Esto coincide con los resultados expuestos en el trabajo de E. Engel y R. Valdés (2001), donde se obtuvo que para el mediano plazo, el modelo que mejor explica el comportamiento del precio es el AR(1).

De esta forma, en la ecuación 5.1 se presentan las componentes del modelo final y en la ecuación 5.2 se presenta el modelo propiamente tal.

$$\Delta \ln(Y_t) = \delta + \varphi_1 \Delta \ln(Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

**Ecuación 5.1: Parámetros modelo final**

$$\Delta \ln(Y_t) = 0,034 + 0,149 * \Delta \ln(Y_{t-1}) + N(0 ; 0,222)$$

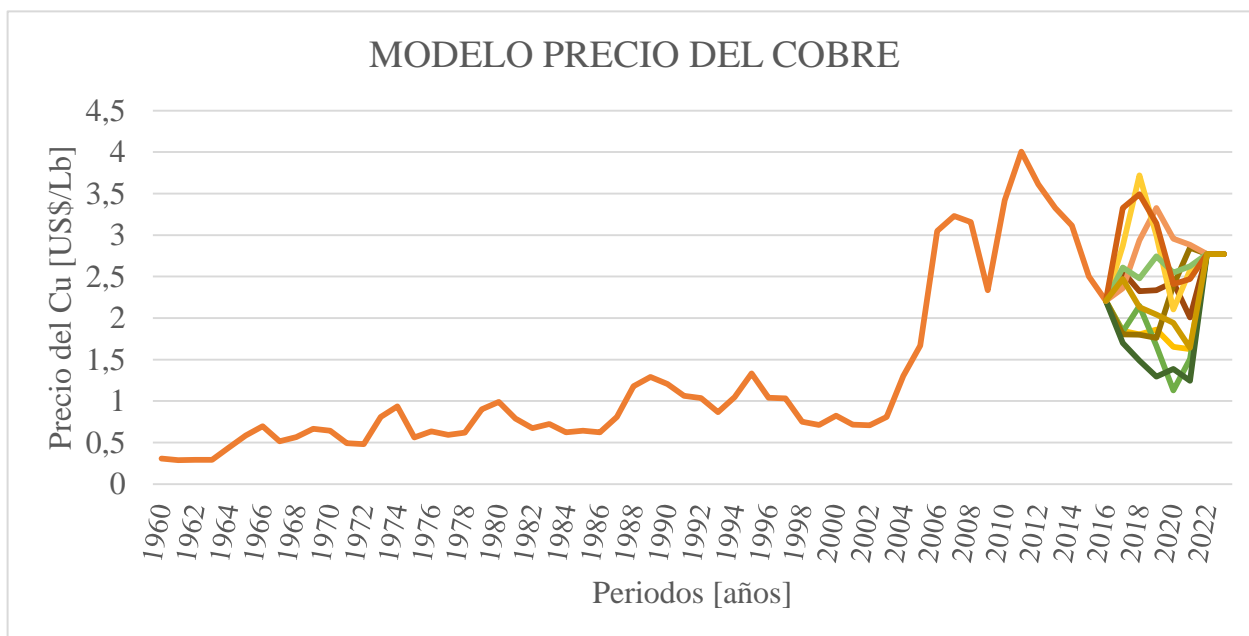
**Ecuación 5.2: Modelo final**

Este modelo fue acotado a  $\pm 2$  desviaciones estándar con respecto a la media del modelo original, con el objetivo de no ingresar a la metodología de evaluación, valores aberrantes del precio del cobre. En la tabla 5.6 se presentan los valores límites impuestos al modelo final.

**Tabla 5.6: Valores límite del modelo**

CARACTERÍSTICA	VALOR [US/Lb]
Media	2.57
Desviación estándar	0.98
Límite superior	4.54
Límite inferior	0.60

En el gráfico 5.1 se visualizan 10 series de precio obtenidas con el modelo de pronóstico acotadas por su límite inferior y superior, y convergiendo a un valor de largo plazo equivalente a 2,77 [US\$/Lb].



**Gráfico 5.1: Visualización modelo de pronóstico**

De esta forma, se obtuvo el modelo final que permitió proporcionar la variabilidad al precio del cobre y evaluar el desempeño económico de las distintas escalas de producción.

## 5.2. Selección de escalas de producción que se benefician de la incerteza

Como resultado del flujo de trabajo presentado en la ilustración 3.1, se obtuvieron 480 distribuciones de VPN asociadas a cada combinación de escalas de producción. Estas distribuciones se analizaron en términos de la media, mediana y los cuartiles que las caracterizan.

Con el objetivo de identificar las distribuciones más competitivas para el caso de estudio, se ordenaron decrecientemente las 480 distribuciones en términos de la media del VPN. Luego, a estas, se les aplicó el test de Shapiro - Wilk para determinar si distribuyen de manera normal, lo que resultó en un p-valor equivalente a 66%, no pudiendo rechazar la hipótesis nula sobre la normalidad de los datos.

Luego se aplicó un test de hipótesis para verificar cuales distribuciones fueron significativamente iguales a aquella distribución de mayor media ( $\mu_1$ ). Las hipótesis fueron:

$H_0$ : Las medias de las distribuciones son iguales;  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i$

$H_1$ : Las medias de las distribuciones no son iguales;  $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_i$

El resultado de este test arrojó que las distribuciones con media equivalente son las presentadas en la tabla 5.7.

Tabla 5.7: Distribuciones con media de VPN equivalente

NÚMERO	CONFIGURACIÓN	MEDIA VPN [MUSD]	PÉRDIDA VPN [%]
1	85 x 18 x 0,65	3.751	-
2	75 x 16 x 0,75	3.739	-0,3
3	90 x 18 x 0,60	3.723	-0,7
4	90 x 18 x 0,75	3.703	-1,3
5	80 x 18 x 0,65	3.697	-1,4

La distribución número 1 es la que presentó el mayor VPN para el caso de estudio y las siguientes 4 distribuciones se consideraron con una media significativamente igual. En la columna "PÉRDIDA VPN" se entrega una medida de la disminución en porcentaje del valor de cada distribución con respecto a la número 1.

En el gráfico 5.2 se entrega un esquema del test de hipótesis realizado graficando los parámetros empleados para el test.

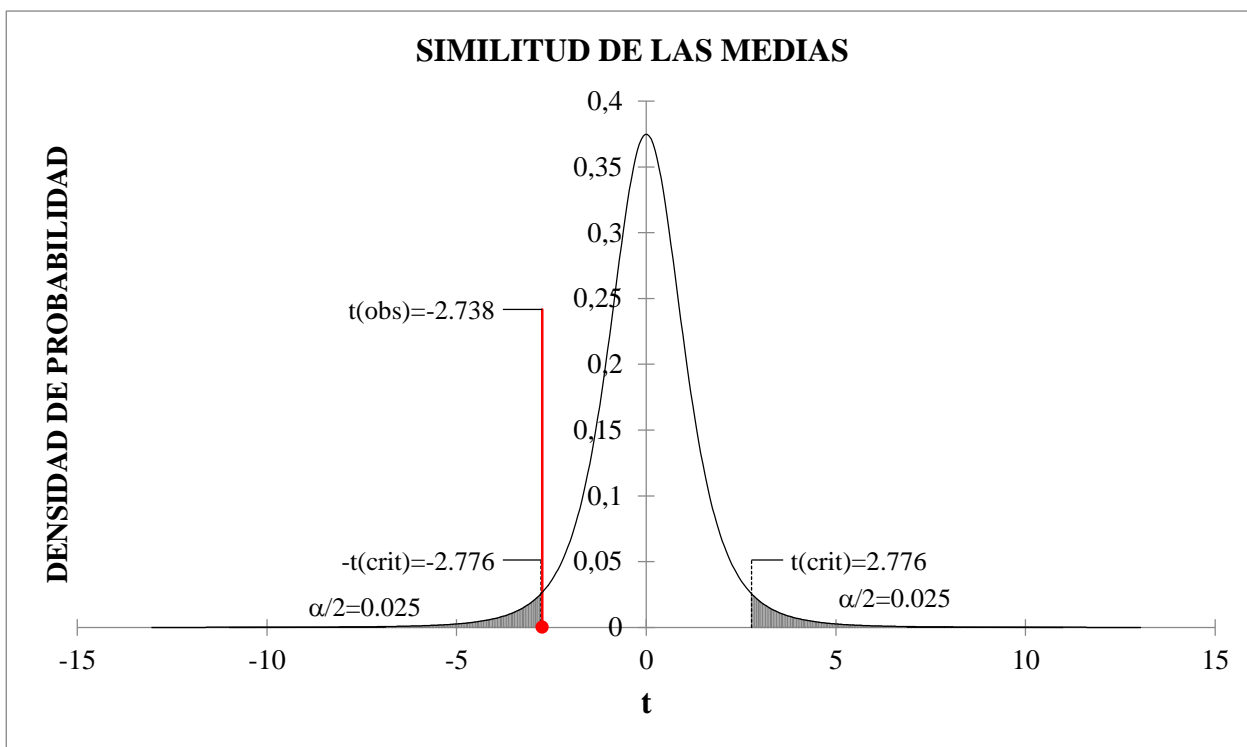


Gráfico 5.2: Test de hipótesis sobre equivalencia de las medias de VPN

Con la selección de estas 5 configuraciones, se procedió a la verificación de la ecuación 3.1 sobre la relación entre la mediana de las distribuciones de VPN (evaluadas a precios variables) y el VPN esperado al evaluar a precios fijos cada escala de producción. Para esto fue útil definir el percentil de la distribución de VPN en el que se encontró el VPN esperado a precios fijos.

En la tabla 5.8 se entregan los resultados numéricos de la condición anterior y en el gráfico 5.3 se entregan de forma visual en un diagrama de cajas.

Tabla 5.8: Aplicación criterio de aprovechamiento de la incertidumbre

NÚMERO	CONFIGURACIÓN	MEDIANA VPN [MUS\$]	VPN(E(Pcu)) [MUS\$]	PERCENTIL [%]
1	85 x 18 x 0,65	3.784	3.530	44
2	75 x 16 x 0,75	3.700	3.533	46
3	90 x 18 x 0,60	3.694	3.633	49
4	90 x 18 x 0,75	3.656	3.712	55
5	80 x 18 x 0,65	3.733	3.568	46

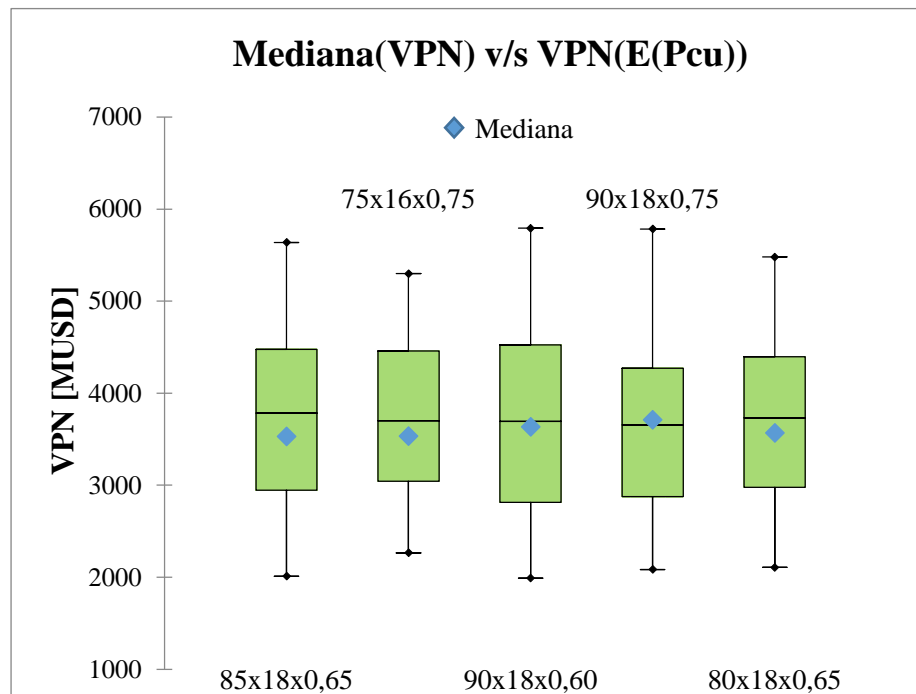


Gráfico 5.3: Evaluación de escalas que se benefician de la incertidumbre

Donde el rombo azul representa el VPN de referencia obtenido al evaluar cada escala de producción a precios fijos y la línea central negra representa la mediana de cada distribución de VPN obtenida al evaluar las escalas de producción con el modelo de pronosticación de precios del cobre.

De esta forma se encontró que la distribución número 4, 90 x 18 x 0,75, no cumple con la ecuación 3.1 por lo que quedó descartada del proceso de selección. El resto de las distribuciones cumplió con el criterio de que la mitad de sus valores se encuentren por sobre el VPN de referencia de cada escala de producción, en otras palabras, estas configuraciones se beneficiaron de la incertidumbre del precio del cobre, y generaron un valor adicional al valor de referencia obtenido por la evaluación a precios fijos.

En la tabla 5.9 se presenta el valor agregado por incertidumbre del precio para cada escala de producción.

Tabla 5.9: Valor agregado por incerteza del precio

CONFIGURACIÓN	MEDIANA VPN [MMUS\$]	VPN(E(Pcu)) [MMUS\$]	VALOR AGREGADO [MMUS\$]
85 x 18 x 0,65	3.784	3.530	254
75 x 16 x 0,75	3.700	3.533	167
90 x 18 x 0,60	3.694	3.633	62
80 x 18 x 0,65	3.733	3.568	165

### 5.3. Selección de la mejor escala de producción

Las cuatro distribuciones seleccionadas cumplieron el objetivo de beneficiarse de la volatilidad del precio del cobre, aun así, para escoger aquella distribución que permitió al proyecto situarse en un escenario más favorable frente a la incertidumbre del precio y las posibilidades de valor, se establecieron criterios basados en el comportamiento de cada escala de producción frente a regiones de altos y bajos precios.

En la tabla 5.10 se presentan los estadísticos necesarios para finalizar el proceso de selección mediante la maximización de la razón entre las diferencias intercuartílicas de cada escala de producción (ecuación 3.2).

Tabla 5.10: Estadística configuraciones finales

ESTADÍSTICOS	85x18x0,65	75x16x0,75	90x18x0,60	80x18x0,65
Observaciones	100	100	100	100
Mínimo [MMUS\$]	2.011	2.266	1.990	2.108
Máximo [MMUS\$]	5.639	5.299	5.794	5.480
1° Cuartil $Q_1$ [MMUS\$]	2.945	3.042	2.815	2.978
Mediana $Q_2$ [MMUS\$]	3.784	3.700	3.694	3.733
3° Cuartil $Q_3$ [MMUS\$]	4.475	4.459	4.524	4.396
Media [MMUS\$]	3.751	3.739	3.723	3.697
Desviación estándar [MMUS\$]	1.037	807	1.056	866
Asimetría (Fisher)	0.12	0.10	0.13	0.13
Curtosis (Fisher)	-1.02	-1.23	-0.98	-0.98
$Q_3-Q_2$ [MMUS\$]	692	758	830	663
$Q_2-Q_1$ [MMUS\$]	838	659	879	755
Razón intercuartílica	0,8	1,2	0,9	0,9
Taguchi	190,4	190,8	190,3	190,6
Rango intercuartil [MMUS\$]	1.530	1.418	1.709	1.418

En la tabla es posible observar que la razón intercuartílica se maximiza para la configuración 75 x 16 x 0,75, por lo que esta fue la escala de producción que cumplió con todos los criterios de la metodología, logrando una alta variedad de opciones frente a los escenarios de altos precios y una baja dispersión en el VPN para escenarios de precios bajos.

Cabe destacar que los indicadores de robustez no se emplearon como métrica de evaluación de escalas de producción, pero resulta interesante que la distribución seleccionada coincidiera con la distribución más robusta según Taguchi, dentro de las 480 distribuciones evaluadas. En la sección análisis de resultados se profundizará sobre estos resultados.

En el gráfico 5.4 se observan las distribuciones de VPN de las 4 combinaciones finalistas de escalas de producción.

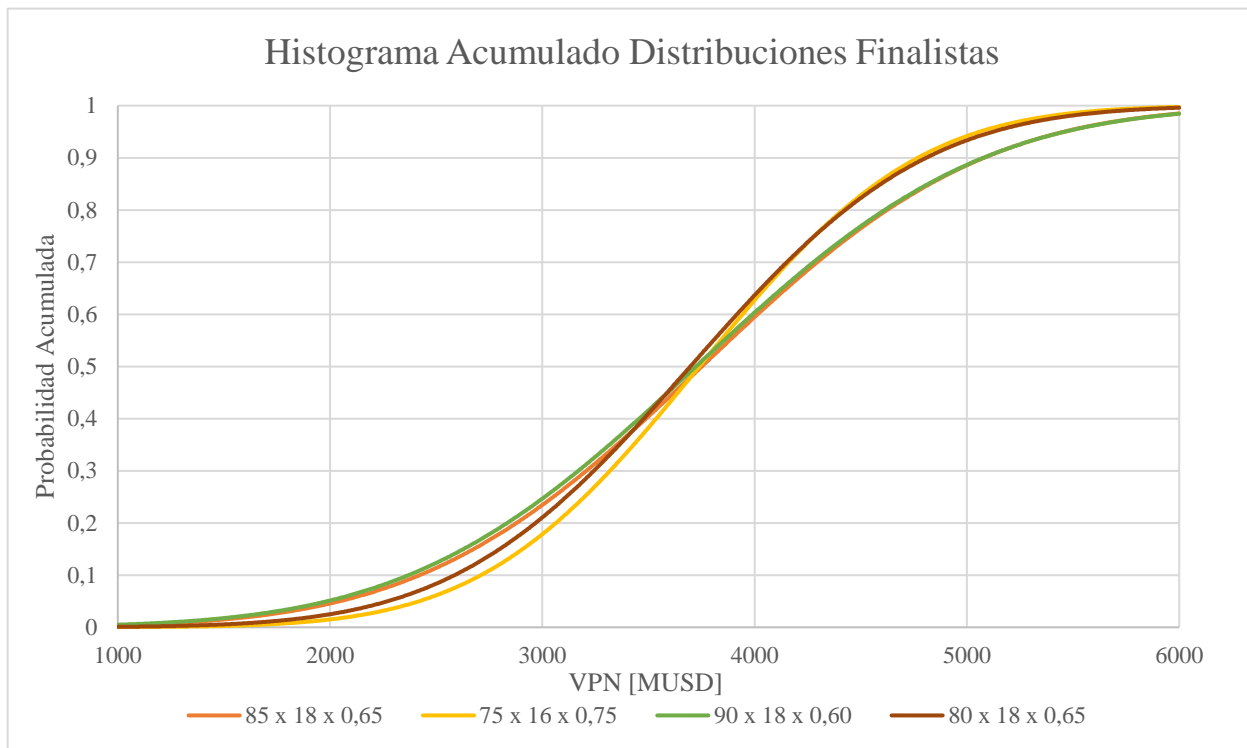


Gráfico 5.4: Distribuciones de escalas finalistas

Se observó que la distribución seleccionada,  $75 \times 16 \times 0,75$ , se comportó mejor que el resto para escenarios de bajo precio (curva por debajo del 50%), ya que a estos niveles se tuvieron los mayores VPN alcanzados. Además, al observar la diferencia entre el segundo y primer cuartil en la tabla 5.10, se pudo distinguir que, comparativamente al resto de las distribuciones, esta presentó la menor dispersión de todas, lo que la hizo la distribución más robusta para bajos precios.

Con respecto a la región de altos precios, se observó que la distribución que alcanza mayores VPN es la de  $90 \times 18 \times 0,6$ . Esta distribución alcanzó la mayor dispersión tanto para las zonas de alto como de bajo precio como se puede observar en la tabla 5.10, por lo que su razón de diferencias intercuartílicas no destacó de las otras. Además, al observar el percentil en el que se encuentra el VPN de referencia (al evaluar la combinación de escalas de producción a precios fijos) que es de 49%, quedó en evidencia que la condición de beneficiarse de la incertidumbre del precio no es tan fuerte como para el caso  $75 \times 16 \times 0,75$ .

En el anexo 5 se presenta un resumen de todas las distribuciones que obtuvieron los valores máximos y mínimos de cada estadístico empleado.

En las tablas 5.11 y 5.12 se presentan indicadores adicionales, propios de los proyectos mineros, para cada escala de producción que cumple el criterio de la ecuación 3.1.



Tabla 5.11: Indicadores de un proyecto minero

INDICADOR	85x18x0,65	75x16x0,75	90x18x0,60	80x18x0,65
<b>MEDIA VPN [MMUS\$]</b>	3.751	3.739	3.723	3.697
<b>DESV VPN [MMUS\$]</b>	1.037	807	1.056	867
<b>MEDIA TIR [%]</b>	33,2	33,1	33,6	32,3
<b>DESV TIR [%]</b>	8,6	6,8	8,8	7,0
<b>MEDIA LOM [años]</b>	15,1	16,6	14,3	15,1
<b>DESV LOM [años]</b>	0,3	0,5	0,6	0,3
<b>MEDIA PAYBACK [años]</b>	3,7	3,7	3,6	3,8
<b>DESV PAYBACK [años]</b>	1,2	1,0	1,2	1,0

Tabla 5.12: IVAN del proyecto minero

INDICADOR	85x18x0,65	75x16x0,75	90x18x0,60	80x18x0,65
<b>MEDIANA VPN [MMUS\$]</b>	3.784	3.700	3.694	3.733
<b>VPN REFERENCIA [MMUS\$]</b>	3.530	3.533	3.633	3.568
<b>CAPEX [MMUS\$]</b>	2.137	1.897	2.160	2.114
<b>IVAN ESPERADO</b>	1,76	1,97	1,72	1,75
<b>IVAN DE REFERENCIA</b>	1,65	1,86	1,68	1,69
<b>GAP DE VALOR POR DÓLAR</b>	6,7%	5,9%	2,4%	3,6%

Donde el IVAN esperado corresponde a la razón entre la mediana del VPN y el CAPEX, el IVAN de referencia es la razón entre el VPN de referencia, evaluado a precios fijos, y el CAPEX y por último, el gap de valor por dólar que es la diferencia porcentual entre ambos IVAN, logrando así cuantificar el valor adicional generado por la inversión realizada de un proyecto evaluado bajo incerteza versus uno evaluado a precios fijos.

En la sección análisis de resultados se ahondará en la comparación de estos indicadores.

Por último, en el gráfico 5.5 se observa el plan minero asociado a la configuración seleccionada y en el gráfico 5.6 los flujos descontados que permiten identificar explícitamente el desempeño anual de esta.

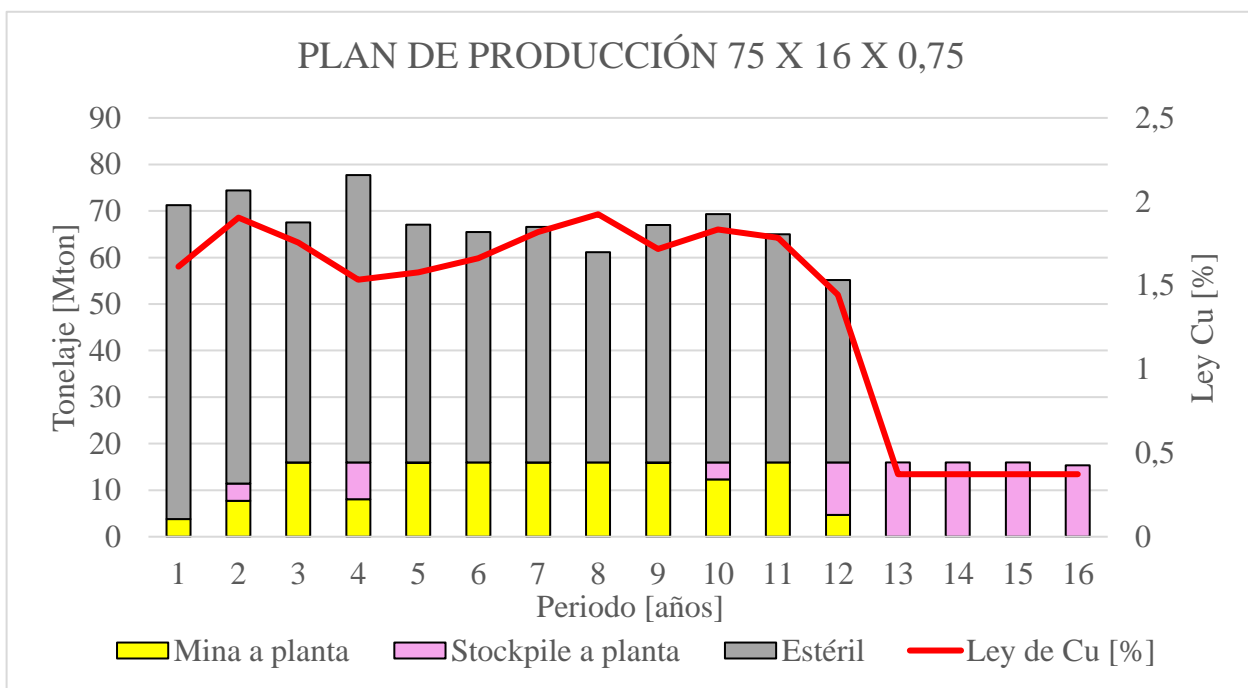


Gráfico 5.5: Plan de producción configuración seleccionada

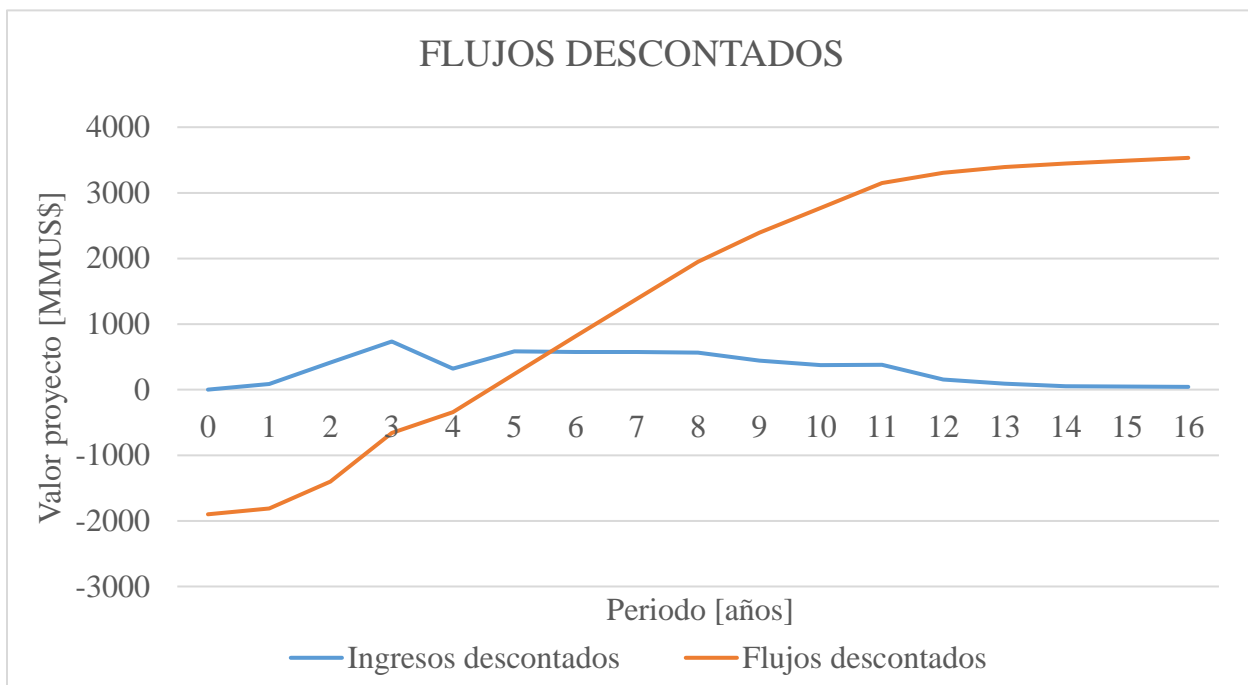


Gráfico 5.6: Flujos descontados configuración seleccionada

En la sección análisis de resultados se comenta sobre el comportamiento del presente plan. Además, en el anexo 6 se adjuntan los planes mineros resultantes para las otras configuraciones que cumplieron el criterio de la ecuación 3.1.

## 6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se comentarán los resultados directos de la metodología, así como también aquellos resultados secundarios que se desprenden de ella.

### 6.1. Selección de escalas de producción

En la tabla 5.7 se seleccionaron 5 configuraciones que poseen una media significativamente igual, este criterio puede no ser válido ante los ojos de algún inversionista por dos razones, o se está dispuesto a sacrificar más valor y aumentar el universo de posibilidades de escalas que puedan competir, o considera que una pérdida de 1,4% (54 MUSD) con respecto al valor mayor es excesivo.

En el primer caso, es posible cambiar el criterio de igualdad de las medias por otro definido en base a las pérdidas máximas de valor dispuestas a aceptar por el inversionista, en otras palabras, un criterio que permita mayor holgura a los retornos pero que amplíe las posibilidades de escalas de producción. Esto se transforma en un proceso más subjetivo de selección, ya que depende de las preferencias de cada inversionista, por lo que no se propone como metodología formal, no obstante son criterios válidos que pueden aplicarse.

En el anexo 7 se entregan los resultados y análisis sobre un caso donde se consideró que las escalas de producción que entran a competir, cumplen un criterio de pérdida de valor no mayor a 5% con respecto a la configuración de mayor valor.

En el segundo caso, si se considera que una pérdida de 1,4% es excesiva, sencillamente se puede acotar aún más la pérdida. Además, debido a la consideración de significancia sobre la media, se induce un posible sesgo ante valores aberrantes, pues esta tiene un punto de quiebre igual a 0% lo que la transforma en un estadístico susceptible a valores muy elevados de VPN. De ser este el caso, sería más conveniente emplear un criterio de significancia a la mediana, ya que tiene un punto de quiebre igual al límite teórico de 50%. Dado que el modelo de precios fue acotado a límites superiores e inferiores, la única posibilidad de que existan valores aberrantes de VPN es que las escalas de producción presenten un excelente o deplorable desempeño en valor.

En la tabla 5.8 se entregaron los percentiles en los que se encuentran los VPN esperados al evaluar cada escala a precios fijos, con respecto a las distribuciones de VPN encontradas al evaluarlas ante un escenario de precios variables, mediante el modelo de pronóstico. Lo relevante de esta información es que permitió identificar aquellas escalas de producción que poseen un beneficio adicional, justificado por la incertidumbre del precio del cobre, con respecto a otras escalas que no lo poseen. Esto por medio del criterio presente en la ecuación 3.1, donde se exige a las distribuciones que, para ser seleccionadas, más de la mitad de los datos de VPN estén por sobre el valor esperado al evaluarlas a precios fijos.

Siguiendo esta línea, se descartó la distribución número 4, donde el valor esperado se encuentra en el percentil del 55% de la distribución obtenida, por lo que no se pudo afirmar que la escala 90 x 18 x 0,75 se beneficie de la incerteza del precio. Para las cuatro distribuciones restantes, se obtuvieron valores acotados, en el rango 44% a 49%, logrando el criterio de aprovechamiento de la incertidumbre.

En el siguiente capítulo de discusión, se explica porque el valor agregado se atribuye a la incertidumbre del precio y no a otros factores y las nuevas posibilidades de la planificación minera estratégica con respecto al aprovechamiento de la incerteza en sus factores de planificación.

## 6.2. La mejor escala de producción

Como se observa en la tabla 5.6 el valor esperado por el modelo de pronóstico equivale a 2.57 [US/Lb], pero debido a la varianza propia del modelo se obtuvieron valores por sobre y por debajo de este valor central, siempre manteniéndose cerca de la media, ya que por construcción en el modelo no se involucró una componente tendencial en el tiempo que la modifique.

Por lo anterior, es que en el análisis de percentiles del VPN se consideró que la región por sobre la mediana, es una zona donde se evaluó una escala de producción a altos precios, y la región por debajo de la mediana es una zona donde se evaluó a bajos precios. El comportamiento en magnitud de estas regiones es la que permitió definir cuál es la escala de producción óptima con respecto a las posibilidades de valor del proyecto.

La tabla 5.10 permitió dejar en evidencia aquella distribución que maximizó la razón entre las diferencias de los cuartiles para altos y bajos precios, llamada razón intercuartílica. Esta distribución correspondió a 75 [Mton/año] de capacidad mina, 16 [Mton/año] de capacidad planta y una ley de corte de 0,75% para el cobre, que comparativamente a las otras distribuciones, presentó la menor dispersión en los cuartiles de la región de bajo precio y la segunda mayor dispersión para los cuartiles representativos de los altos precios.

Observando el valor de la diferencia entre los cuartiles 3 y 2, se identificó que la mayor diferencia se obtiene para la configuración 90 x 18 x 0,60, la que a su vez presentó también la mayor dispersión para la región que representa los bajos escenarios del precio, cuartiles 2 y 1, incluso, la dispersión para los cuartiles de bajos precios fue superior a la de los altos, lo que implicó que las posibilidades de VPN del proyecto fueran más extensas para estos escenarios, en otras palabras, se aumentó la incerteza sobre el valor real del proyecto cuando un factor externo a este como el precio no fue favorable, lo que no es atractivo para un inversionista que desea disminuir el riesgo asociado a la inversión realizada.

Por esto, la metodología busca acotar el rango de ocurrencia de bajos VPN, permitiendo conocer con mayor certeza cuál será el valor del proyecto cuando el precio no es favorable y posibilitar al proyecto una mayor holgura en valor cuando el precio es elevado.

Cabe destacar que la única distribución que presentó mayor dispersión en los cuartiles 3 y 2, comparativamente a los cuartiles 2 y 1, es la seleccionada. Esto es fácilmente reconocible cuando la razón intercuartílica es superior a 1, lo que no es un criterio propio de la metodología, pero da paso a un nuevo análisis que podría discriminar las escalas de producción en base a las posibilidades de valor para regiones de altos y bajos precios, lo que no es el objetivo principal de esta memoria.

Con respecto a los estadísticos de forma de las distribuciones, asimetría y curtosis, se observó que todas están aproximadamente distribuidas de manera uniforme en torno a la media, ya que la asimetría es similar para todas y bastante cercana a cero, dejando en evidencia una leve tendencia a presentar colas derechas más alargadas. A nivel de curtosis, tampoco fue posible determinar una distribución que destaque, más bien todas ellas presentaron baja concentración en torno a su media, lo que es propio de distribuciones platicúrticas o con curtosis negativa.

Al observar los mínimos y máximos del valor de cada distribución fue posible observar que los valores no distan considerablemente entre ellos y mantuvieron el mismo orden de magnitud, por lo que no se consideró realizar un test de *outliers*.

Con respecto al estadístico de Taguchi, se observó que las variaciones de este no son de elevada magnitud, pero si representaron la tendencia que propone el rango intercuartil. El estadístico de Taguchi, está basado en una combinación entre los valores esperados por la característica de calidad, en este caso el VPN, y su dispersión. En el Anexo 5 se observa que el estadístico de Taguchi para el caso de estudio oscila entre los valores 184,6 y 190,8, correspondiendo el máximo a la distribución seleccionada. Esto fue meramente una coincidencia y se justifica pues el estadístico busca maximizar la razón señal ruido perteneciente a la característica de calidad, lo que es equivalente a seleccionar la configuración que presente mayores valores de VPN, pero dando preferencia a aquellas con menor dispersión en torno a la media, es decir, que tengan menor desviación estándar. Como se apreció en la tabla 5.10 la configuración de menor desviación estándar y mayor media es la seleccionada tanto por Taguchi, como por la metodología propuesta, solo que esta última no buscó filtrar las escalas de producción por esta pauta, al contrario, buscó aquella configuración de mayor valor, capaz de beneficiarse de la incerteza del precio del metal de interés y que permitiera un mayor rango de opciones al proyecto ante escenarios de altos precios y otros más acotados para escenarios de bajo precio.

Aun así, la escala de producción seleccionada por un criterio basado en el estadístico de Taguchi, sería aquella de mayor media y menor dispersión, considerándola como la distribución más óptima en términos de valor y precisión, pudiendo perfectamente ser un criterio de selección de la escala de producción definitiva para el inversionista.

Al observar el criterio del rango intercuartil se observó que las distribuciones 75 x 16 x 0,75 y 80 x 18 x 0,65 presentaron la misma dispersión entre los cuartiles 3 y 1, siendo además, la brecha de valor más pequeña. Esto coincidió con la tendencia marcada por el estadístico de Taguchi, pero no definiendo un criterio de maximización de la media, ni tampoco uno de aprovechamiento de las opciones del proyecto.

Al analizar la tabla 5.11 se observó comportamientos bastante homogéneos entre cada escala de producción, pero al analizar cada escala por si sola se obtuvieron algunos comportamientos particulares. Con respecto a la TIR, se observó que no hay variaciones considerables en términos de su media entre las escalas, esta es de aproximadamente 33%. Pero al analizar la dispersión de este indicador se encontró que es bastante elevada para cada proyecto, lo que deja en evidencia la sensibilidad del indicador al escenario de precios en el que se desenvuelve el proyecto, en otras palabras, si el escenario de precios es bueno, la TIR será considerablemente más elevada y viceversa. Destaca la configuración seleccionada donde la dispersión a la TIR fue mínima, sugiriendo que esta escala de producción permitió obtener mayor robustez al indicador.

Con respecto a la vida de la mina (LOM) si se dieron variaciones considerables entre las configuraciones, la diferencia en la duración de los proyectos que presentaron mayor y menor horizonte temporal es de aproximadamente 2 años, lo que se explicó por las capacidades de procesamiento de estas escalas. La escala de mayor horizonte temporal presentó la menor capacidad mina y planta de las distribuciones seleccionadas, en contraste con la de menor duración que presentó las mayores capacidades. La desviación de este indicador no es relevante comparativamente a su valor.

Al observar el comportamiento del *payback* quedó en evidencia que no hay mayores variaciones entre las distintas escalas de producción, tanto para la media como para la desviación, pero si llama la atención la elevada magnitud de la dispersión considerando que la vida de la mina es aproximadamente cuatro veces el periodo estimado para la devolución de la inversión. Esto, al

igual que la TIR, se explicó dada la sensibilidad con respecto al precio del cobre del indicador, lo que impactó aún más en los primeros años de operación del proyecto.

En la tabla 5.12 se ilustraron dos indicadores relacionados al IVAN del proyecto en cuestión, donde la configuración que presentó mayores retornos por cada dólar invertido, es la escala de producción seleccionada, tanto para el IVAN esperado, como para el IVAN de referencia. Esto se justificó pues el nivel de inversión para la configuración seleccionada es del orden de 200 [MMUS\$] menor que el resto, considerando que los retornos de cada escala fueron significativamente iguales. Con respecto al gap de valor por dólar, se tuvo que la configuración de mayor diferencia en valor agregado por incertidumbre, presentó mayor rendimiento en IVAN, lo que es esperable pues el CAPEX es equivalente para ambos indicadores, esto quiere decir que la inversión bajo un escenario de incertidumbre en los precios genera más dólares de ganancia por dólar invertido que el escenario a precios fijos. Al comparar este indicador para distintas escalas de producción se deja en evidencia la diferencia porcentual entre los escenarios deterministas y variables para el precio.

En el Anexo 8 se adjunta un análisis del impacto que las escalas de producción tienen sobre las distribuciones de VPN obtenidos, para lo que se emplea como ejemplo distintas capacidades de mina, planta y leyes de corte.

Por último, con respecto al desempeño del plan minero obtenido por la escala de producción seleccionada, gráfico 5.5, se observa que los últimos 4 años fueron únicamente de mineral proveniente de *Stockpile*, esto se debió a que durante los 12 años de vida de la mina propiamente tal, la disponibilidad del recurso de alta ley fue elevada, como indica la curva “Ley de Cu”, lo que obligó a utilizar el *Stock* para almacenar mineral mayoritariamente de baja ley, y procesarlo una vez finalizada la extracción de mineral proveniente de la mina, a una tasa restringida por la capacidad de planta.

Además se observó que en el periodo 4, disminuye la disponibilidad de mineral proveniente de la mina, generando una caída en la ley media de mineral alimentado a planta. Esto es una debilidad del plan seleccionado pues trajo consigo una pérdida de valor considerable, como se puede observar en el gráfico 5.6.

En el anexo 9, se entregan gráficos de las colinas de valor alcanzadas por todas las configuraciones, con el objetivo de ilustrar el comportamiento tridimensional del valor en función de las escalas de producción.

## 7. DISCUSIÓN

En el presente capítulo se entrega una visión más global de los resultados obtenidos, con el objetivo de analizar nuevos escenarios que permitan ampliar el espectro de análisis, cuestionar algunos supuestos considerados y profundizar en otros que sientan las bases de este trabajo. Primero se comentará con respecto al modelo de precios del cobre y luego se discutirá sobre los resultados referentes a la planificación estratégica.

### 7.1. Modelamiento del precio del cobre

La metodología de Box Jenkins, desarrollada hacia 1970, ofrece una sencilla vía de implementación de modelos pronosticadores para el precio de los metales. Por este motivo fue seleccionada para la evaluación de escalas de producción en términos del comportamiento ante la variabilidad del precio, ya que permite desarrollar modelos predictivos, mediante una secuencia de pasos y criterios bien definidos, lo que también permite a este trabajo adaptarse a otros tipos de yacimiento donde el metal de interés no necesariamente sea el cobre.

El objetivo del modelo predictivo no fue realizar un pronóstico certero del precio, fue suministrar la fuente de varianza al escenario de planificación, para evaluar aquellas configuraciones que se benefician de esta. Para su confección, se utilizaron los datos históricos del precio del cobre, sin considerar la situación actual sobre la oferta y demanda del metal o distintas proyecciones sobre contracciones y distensiones de estas, que otros modelos predictivos más acabados si incluyen.

Las proyecciones para el precio del cobre en el largo plazo ascienden a 2,77 [US\$/lb], lo que es 0,2 [US\$/lb] más bajo que el precio esperado por el modelo de pronosticación, esto implicó un sesgo de subestimación del escenario económico ingresado al escenario de planificación, lo que podría ser mejorado si se considera un modelo que se adapte tanto a los datos históricos como a las proyecciones futuras del precio.

### 7.2. Atribución del valor agregado a la incerteza del precio del cobre

En la tabla 5.9 se hizo referencia al valor agregado por incertidumbre del precio del cobre de cada escala de producción, con respecto a su valor de referencia obtenido al evaluar estas escalas a precios fijos. La asignación de este valor adicional a la incertidumbre del precio del cobre se basó en que el modelo de precios no posee una componente tendencial en el tiempo, por lo que su valor esperado fue siempre el mismo. Con esto, se evitó introducir al escenario de planificación series de precio con un comportamiento sesgado, ya sea para una frecuencia de ocurrencia mayor en altos o bajos precios.

Para este trabajo se consideró que 100 realizaciones del precio del cobre fueron suficientes para atenuar la ocurrencia aleatoria de escenarios preferentes, ya sean optimistas o pesimistas con respecto al precio. En caso de desear aumentar este número de realizaciones, se deberá sacrificar ciertas combinaciones de escalas de producción, y así, aumentar el orden de magnitud del número de series de precios a evaluar. Esto se debe a que el recurso computacional disponible es limitado, no permitiendo evaluar un mayor número o de planes o de realizaciones del precio.

Tampoco es posible que ocurra el caso donde una escala de producción sea deficiente en términos de desempeño económico, pero se evalúe en escenarios mayormente optimistas generando una sobreestimación de la escala asociada. Esto sería fácilmente reconocible, ya que se tiene el valor de referencia del proyecto. Este valor evaluado a precios fijos, no admite escenarios optimistas, ni

pesimistas, por lo que si la escala de producción por naturaleza es deficiente en la generación de valor, se haría visible inmediatamente restando el VPN de referencia con la mediana del VPN. Además, cabe destacar que el modelo de pronosticación fue acotado a límites superiores e inferiores, con el objetivo de no ingresar datos aberrantes a la evaluación económica de las escalas de producción.

### **7.3. Criterios de selección**

Desde el inicio de la metodología se han establecido criterios que permitan evaluar condiciones siempre favorables con respecto a la incerteza del precio, pero esto no necesariamente es lo que el inversionista busca, este puede privilegiar escalas tales que sean robustas a la incerteza y permitan conocer con mayor exactitud el VPN del proyecto ante cualquier escenario económico. O sencillamente, si el objetivo del inversionista es generar empleos, desarrollar nuevas tecnologías, aumentar sus reservas y con ello su presencia a nivel bursátil, entre otros, entonces esta metodología aplicada directamente no será de mayor relevancia para él, pues también busca maximizar los retornos del proyecto.

La selección final de escalas de producción no solo fue la que más valor generó, fue la que además se benefició de la incerteza del precio y que permitió un mayor rango de opciones al proyecto cuando este se enfrentó a altos escenarios de precio, perdiendo el mínimo valor posible cuando se enfrentó a bajos precios.

No obstante, los criterios empleados se pueden relajar o modificar a gusto del planificador, maximizando otros parámetros como vida de la mina, cantidad de reservas y por ende nuevas escalas de producción, pérdida máxima de valor, entre otros, con la finalidad de apegarse a los objetivos estratégicos que rigen la operación.



## 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La capacidad para generar valor a raíz del recurso mineral se logra mediante una buena planificación. El negocio minero tradicional se basa en la obtención del mayor valor posible asociado al yacimiento, sus condiciones y el entorno en el que se enmarca. Así, la presente metodología otorga un método de planificación que permite obtener un espectro de opciones de escalas de producción que generan el mayor valor posible.

La realización de esta metodología también permitió encontrar una combinación de escalas de producción, que generen una ganancia adicional al valor esperado por un proyecto minero. Este valor agregado tiene su origen en la incerteza de uno de los factores que afectan al proyecto, no obstante, podría extenderse a todos los factores que lo definen, abriendo una gama de posibilidades no menor para la planificación estratégica de faenas mineras. Por ejemplo, incerteza asociada al modelo de costos, a la estimación de leyes del modelo de bloques, a la inversión a realizar, entre otros.

Además, mediante la utilización de esta metodología se puede discriminar entre distintas escalas de producción, cuáles de ellas presentan comportamientos más deseables en marcos de precios elevados o bajos, siempre teniendo en consideración que la última palabra la tiene el inversionista, y está en manos de este definir como prefiere abordar los niveles de precios.

La escala de producción que cumple con todos los atributos antes mencionados, maximización del valor, utilización de la incertidumbre para obtener valor económico y el posicionamiento más conveniente del proyecto ante los niveles de precio, es la de 75 [Mton/año] de capacidad planta, 16 [Mton/año] de capacidad de procesamiento y una ley de corte de 0,75% de cobre. Logrando un promedio de valor presente neto equivalente a 3.739 [MMUS\$], un valor agregado de 167 [MMUS\$] justificado por la incertidumbre del precio del cobre, un escenario de operación a bajos niveles de precio acotado, y por ende más certero, y un escenario de operación a altos niveles de precio más holgado y con mayores opciones de valor.

Los resultados expuestos en este trabajo permiten proponer una nueva forma de planificación estratégica, donde se utiliza la incertidumbre del precio del cobre para situar al proyecto en un contexto económico ventajoso, en vez de representar un obstáculo para su realización.

Como recomendaciones para un futuro trabajo hay principalmente dos enfoques en los cuales avanzar. El primero tiene relación con la confección del modelo de pronóstico, pues la metodología empleada es antigua y no considera factores explicativos relevantes propios de un modelo econométrico tradicional. Además, se puede incorporar a este modelo un sistema de ponderadores que den mayor importancia a la información más actualizada y resten relevancia a la información más antigua, esto permitiría generar un modelo más coherente con la realidad actual del mercado.

El segundo foco de mejora tiene relación con los criterios de selección empleados, por ejemplo, el criterio de significancia a la media podría reemplazarse por un criterio de significancia a la mediana y así dar mayor consistencia y robustez a los análisis posteriores, ya que estos no estarían sesgados por valores aberrantes.

Además, se puede evaluar la creación de un criterio que incorpore otros indicadores en la selección de las escalas, tales como TIR, CAPEX, LOM, mineral a planta, costos de operación, entre otros, con el objetivo de integrar más información que puede ser de mayor relevancia para el inversionista.

Un foco de mejora relevante es añadir a la metodología una estrategia de evaluación de fases mineras, que permita incorporar en el estudio distintas formas de extraer el recurso. Esto sería de alto impacto, pues las escalas de producción tienen desempeños distintos para una disponibilidad de mineral diferente, logrando así introducir una quinta dimensión al estudio, a parte de la capacidad mina, planta, ley de corte y el precio del metal de interés.

Por último, se destaca que estos resultados sugieren una forma distinta de realizar la planificación estratégica de proyectos mineros, evaluando con otros ojos la incertidumbre de los parámetros que la rigen. N. Taleb, en 2011, propone una forma de evaluar el impacto no lineal que ciertos estresores tienen sobre algún producto o proceso que se someta a ellos, en particular, define tres escenarios posibles para este comportamiento, la fragilidad, la antifragilidad y la robustez.

La metodología expuesta en este trabajo sugiere emplear los criterios de N. Taleb, para evaluar el comportamiento de los planes mineros ante la incerteza de los parámetros económicos, geológicos y/o metalúrgicos.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

- Box, G.E.P. y G.M. Jenkins (1970), Time series analysis: Forecasting and control, San Francisco.
- Chatfield, C. The Analysis of Time Series: An Introduction. 6ta edición. Washington D.C., Chapman & Hall/CRC, 2003 (p. 246).
- Dagdelen, K., Open pit optimization—strategies for improving economics of mining projects through mine planning. Application Computers for Mining Industry, 2000.
- Eduardo Engel y Rodrigo Valdés (2001). Prediciendo el precio del cobre: ¿Más allá del camino aleatorio? En “Dilemas y debates en torno al cobre” (pp. 269 – 288).
- F. Ahmad, R.A. Khan, “A power comparison of various normality tests”, Pakistan Journal of Statistics and Operation, Research 11, 2015.
- F. Miranda, “Alineamiento de la selección del pit final con la optimización del secuenciamiento estratégico” Tesis (Ingeniero Civil de Minas), Santiago de Chile, Universidad de Chile, 2017 (pp. 20 – 67).
- Gonzalo Ríos y Carlos Hurtado (2008). Series de tiempo. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Computación, Tópicos en minería de datos.
- Gutiérrez, H., y De la Vara, R. (2010). Análisis y diseño de experimentos. (McGraw-Hill Interamericana, Ed.) (Segunda ed). México D.F (pp. 294 – 312).
- Horstley T. P. “Dollar driven mine planning: The corporate perspective to operational mine planning”. 2002, AMC reference material.
- Hustrulid, W.A., & Kuchta, m. Open pit mine planning and design. Taylor & Francis, 2006.
- H. G. Pulido y R. de la Vara. Análisis y diseño de experimentos. Segunda edición, México. McGraw – Hill Interamericana. 2008 (pp. 296 – 312).
- J. Aguirre. Introducción al tratamiento de series temporales: aplicación a las ciencias de la salud. Madrid, España, Diaz de Santos, S.A. 1994 (p.191).
- Lerchs, H., & Grossmann, I. F. Optimum Design of Open-Pit Mines. Transactions, Canadian Institute of Mining, 1965 (pp. 17–24).
- Mayer Kazakidis 2007. Decission making in the flexible mine production system design using real options. Journal of construction Engineering and Management, Vol 133, N° 2 (pp. 169 – 180).

- Mun J. “Modelling risk, applying Monte Carlo simulation, real option analysis, forecasting, and optimization techniques”. John Wiley & Sons Inc., 2006, Hoboken, New Jersey.
- N. Taleb “Antifrágil - Las cosas que se benefician del desorden” Nueva York, PAIDOS, 2013 (pp 26 – 27).
- N. Taleb y R. Douady. “Mathematical Definition, Mapping, and Detection of AntiFragility”, 2012.
- O’Hara, T. A. “Analysis of risk in mining projects.” CIM Bulletin, Canadian Inst. of Mining and Metallurgy, 1982 (pp 84–90).
- Poblete, C., González, M., Romero, J., y Fuentes, D. (2016). “Impact of the starting point and of the direction of open pit exploitation on the mining plan”. En MINING Conference (Proceedings, capítulo 1).
- Ramazan, S., & Dimitrakopoulos, R. (2013). Production scheduling with uncertain supply: A new solution to the open pit mining problem. Optimization and Engineering, (pp. 361–380).
- Romero, J. Diseño robusto aplicado a planificación minera estratégica. Tesis (Magíster en Ingeniería de Minería). Santiago, Chile. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2016. (pp. 5 – 38).
- S.A. Abdel y R. Dimitrakopoulos. Evaluating mine plans under uncertainty: Can the real options make a difference? Resources policy, Vol 32, No 3, 2007, (pp. 116 – 125).
- S.A. Abdel y R. Dimitrakopoulos (2011). Incorporating geological and market uncertainties and operational flexibility into open pit mine design. En Journal of Mining Science (pp. 191 – 201).
- S. Makridakis, S.C. Wheelwright y R.J. Hyndman (1998), Forecasting: methods and applications, New York.
- Smith, G. L. (2012). Strategic long term planning in mining. En Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy (pp. 761–774).
- SignumBox - D. Desormeaux. El 40% de los proyectos mineros aprobados no se encuentran en ejecución por incertidumbre. [en línea] Emol. 29 de marzo, 2017. <<http://www.signumbox.com/industry-news-and-columns/40-de-los-proyectos-mineros-aprobados-aun-no-entran-en-ejecucion-por-daniela-desormeaux-el-mercurio/>> [Consulta: 12 diciembre 2017).
- Tao Wang y Richard de Neufville (2005). Real Options “in” projects. En 9th Real Options Annual international Conference en París, Francia. Massachusetts Institute of Technology.

- W. Enders. Applied Econometric Time series 4ta edición. Alabama, Estados Unidos, Wiley, 2015. (pp. 47 – 176).

## 10. ANEXOS

### 10.1. Anexo 1: Demostración de varianza en camino aleatorio

Sea  $Y_t$  un proceso modelado por un camino aleatorio, sin pérdida de generalidad con drift nulo.

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Sustituyendo  $Y_{t-1} = Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ , resulta:

$$Y_t = Y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$$

Reemplazando sucesivamente los valores de la serie  $Y_t$  resulta:

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

Calculando la varianza de  $Y_t$  y recordando que  $\varepsilon_i$  sigue una distribución  $N(0, \sigma^2)$  se obtiene:

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(Y_0) + \text{Var}\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i\right) = t\sigma^2$$

## 10.2. Anexo 2: Cálculo de coeficientes de autocorrelación

A continuación, se presenta el cálculo del coeficiente de autocorrelación simple ( $r_k$ ) y parcial ( $r_{kk}$ )

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y}) * (Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Con  $\bar{Y}$  media de los valores de la serie,  $Y_t$  valor de la observación en el periodo  $t$ ,  $Y_{t+k}$  valor de la observación con  $k$  retardos y  $n$  número total de periodos.

$$r_{k,k} = \begin{cases} r_1 & \text{si } k = 1 \\ \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} * r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} * r_j} & \text{si } k = 2, 3 \dots \end{cases}$$

Donde  $r_{k,j} = r_{k-1,j} - r_{kk} * r_{k-1,k-j}$  para  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ .

### 10.3. Anexo 3: Resultados ADF, PP y DFGLS

Test de Dickey – Fuller aumentado:

```
Augmented Dickey-Fuller test for unit root          Number of obs =      52
```

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(t)	-3.725	-3.577	-2.928	-2.599

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0038

Test de Phillips – Perron:

```
Phillips-Perron test for unit root          Number of obs =      55
                                           Newey-West lags =      3
```

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller			
	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value	
Z(rho)	-41.560	-18.990	-13.340	-10.730
Z(t)	-6.148	-3.573	-2.926	-2.598

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000

Test DFGLS:

```
DF-GLS for der_logprecio          Number of obs =      45
Maxlag = 10 chosen by Schwert criterion
```

[lags]	DF-GLS tau Test Statistic	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
10	-2.308	-3.747	-2.697	-2.408
9	-2.341	-3.747	-2.751	-2.465
8	-2.263	-3.747	-2.809	-2.524
7	-2.513	-3.747	-2.869	-2.584
6	-2.442	-3.747	-2.931	-2.644
5	-2.728	-3.747	-2.991	-2.702
4	-3.251	-3.747	-3.050	-2.758
3	-3.521	-3.747	-3.104	-2.808
2	-4.123	-3.747	-3.153	-2.854
1	-5.075	-3.747	-3.195	-2.892

Opt Lag (Ng-Perron seq t) = 0 [use maxlag(0)]  
 Min SC = -2.815481 at lag 1 with RMSE .2248475  
 Min MAIC = -.8195272 at lag 1 with RMSE .2248475



#### 10.4. Anexo 4: Demostración MA infinito

Sea  $Y_t$  un proceso autorregresivo de primer orden.

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Sustituyendo  $Y_{t-1} = \delta + \varphi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$ , resulta:

$$Y_t = \delta + \varphi_1(\delta + \varphi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Si volvemos a sustituir el siguiente término  $Y_{t-2} = \delta + \varphi_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$ , se obtiene:

$$Y_t = \delta + \varphi_1(\delta + \varphi_1(\delta + \varphi_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Agrupando términos y proyectando la serie a infinito se logra:

$$Y_t = (\delta + \varepsilon_t) + \varphi_1(\delta + \varepsilon_{t-1}) + \varphi_1^2(\delta + \varepsilon_{t-2}) + \dots$$

Reescribiendo:

$$Y_t = \delta * \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Empleando propiedades de las sumatoria en particular la de progresiones geométricas resulta:

$$Y_t = \frac{\delta}{1 - \varphi_1} + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

Lo que corresponde a un modelo de medias móviles de orden infinito.

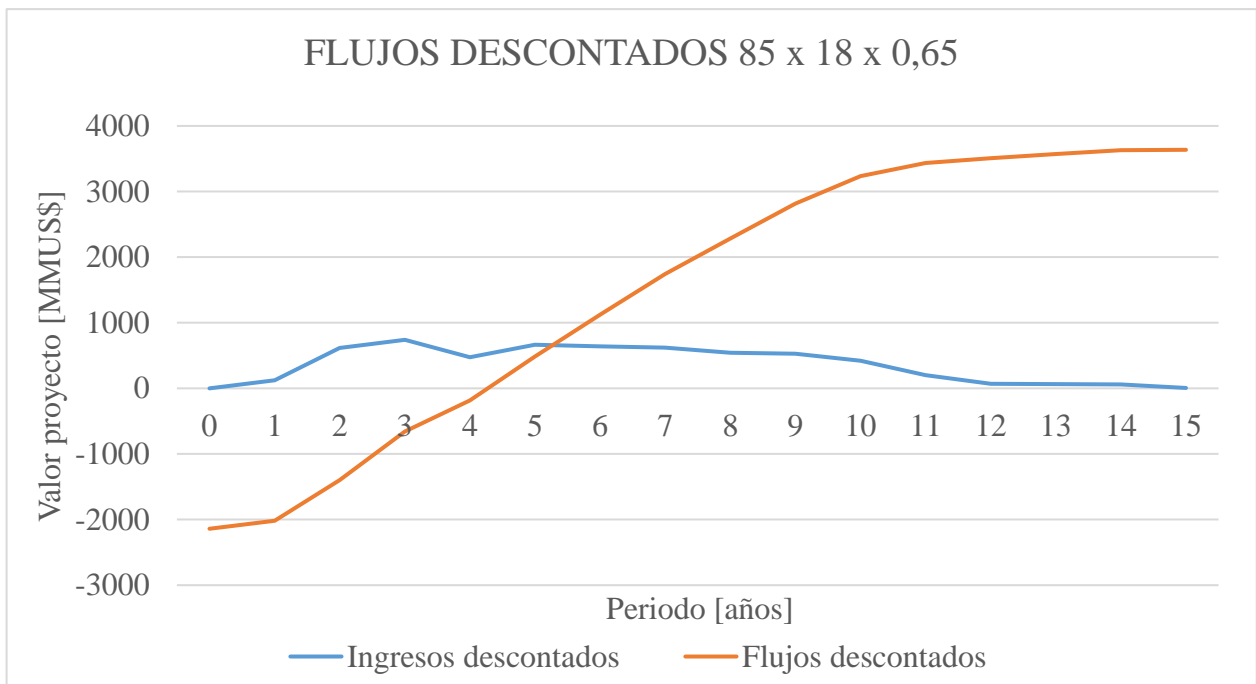
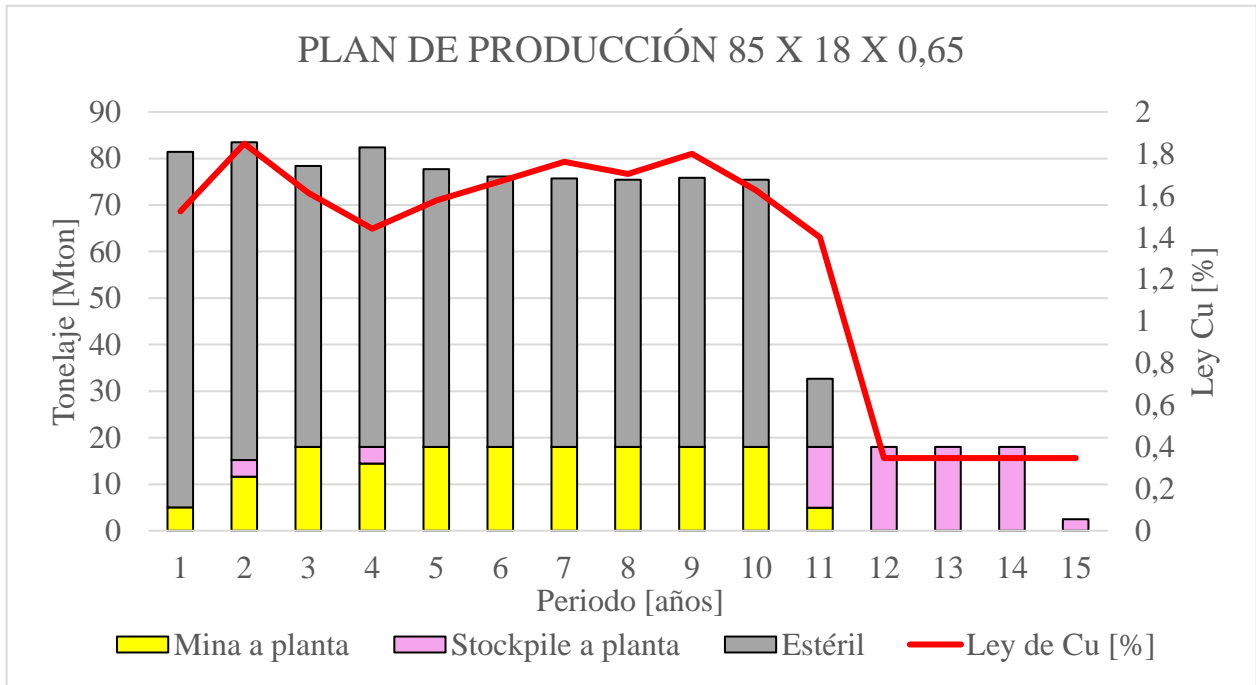
$$Y_t = \delta' + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = MA(\infty)$$

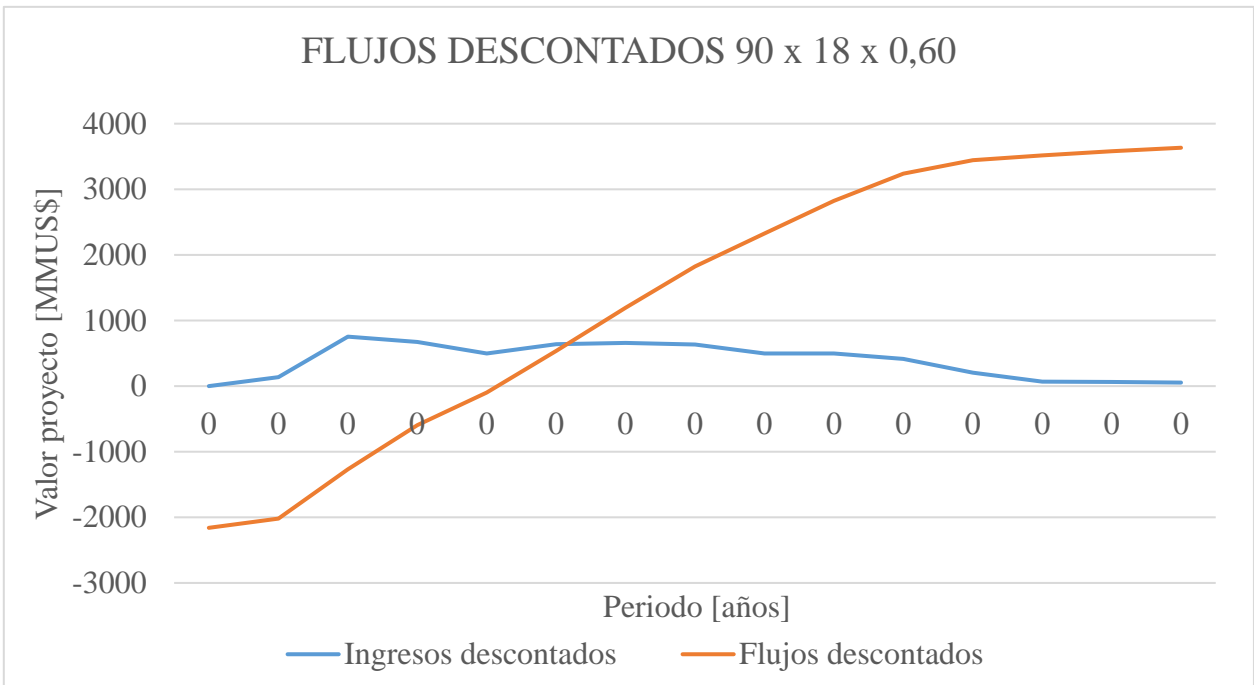
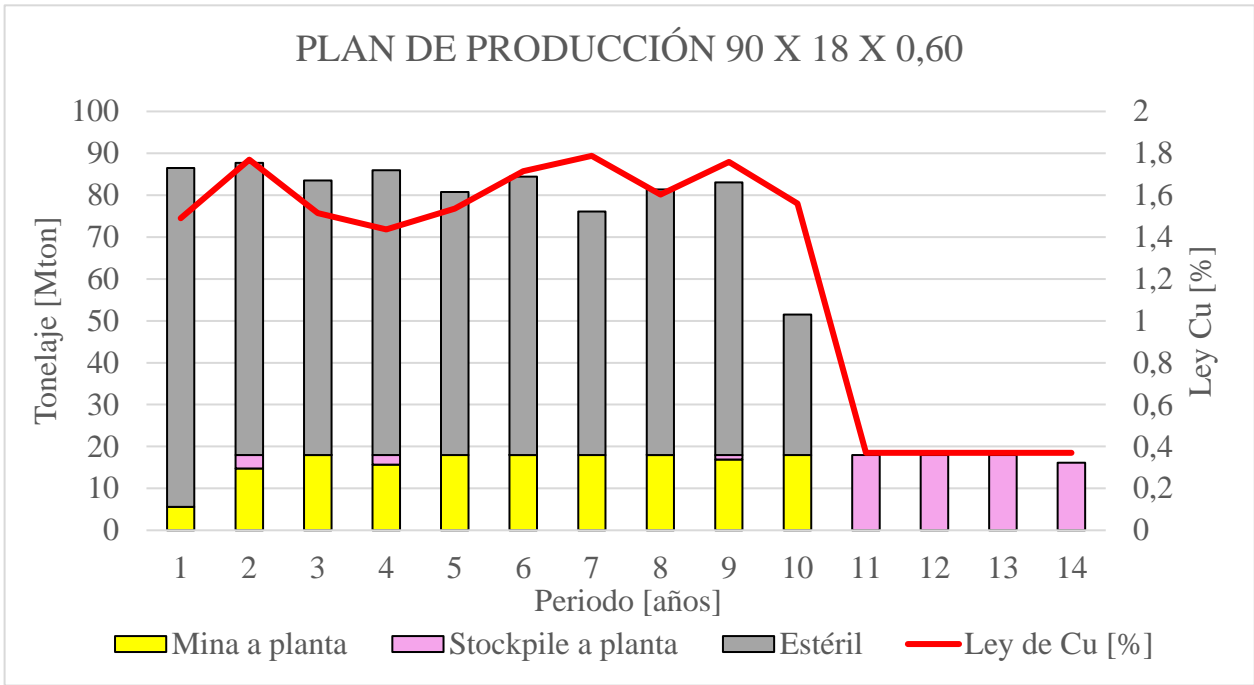
Con  $\delta' = \frac{\delta}{1 - \varphi_1}$  y  $\theta_i = \varphi_i$ .

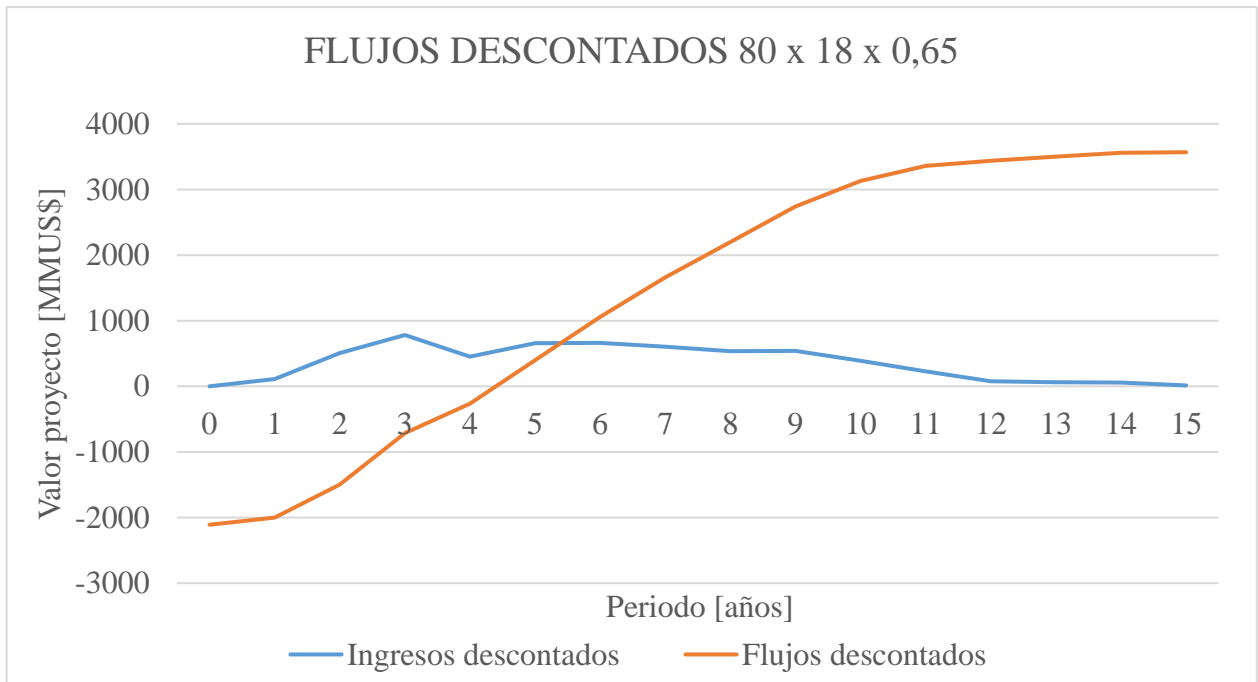
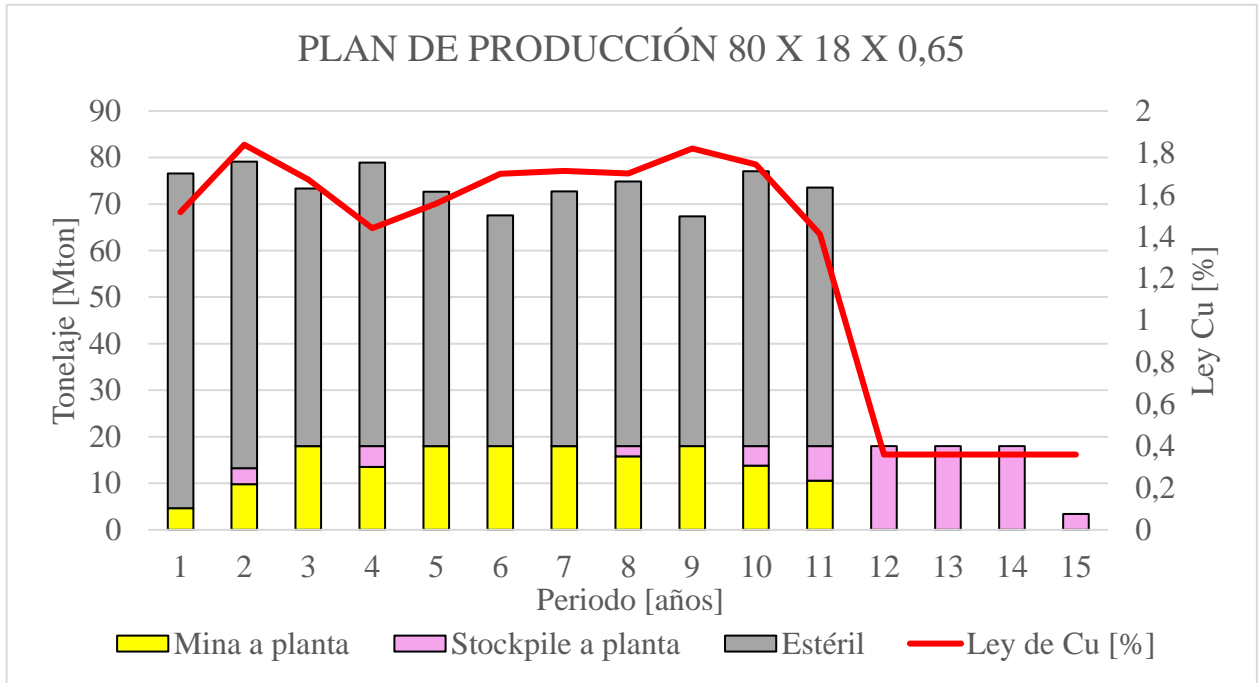
### 10.5. Anexo 5: Resumen de distribuciones extremas

<b>ESTADÍSTICO</b>	<b>MÍNIMO</b>		<b>MÁXIMO</b>	
<b>Media [MMUS\$]</b>	1.961	85x10x03	3.751	85x18x065
<b>Mediana [MMUS\$]</b>	1.761	85x10x03	3.784	85x18x065
<b>Desviación estándar [MMUS\$]</b>	463	55x10x055	1.109	90x20x03
<b>Asimetría</b>	-0,07	85x20x035	1,00	60x20x07
<b>Curtosis</b>	-1,62	55x14x07	0,18	60x16x06
<b>Mínimo [MMUS\$]</b>	950	85x10x03	2.405	70x16x075
<b>Q1 [MMUS\$]</b>	1.470	85x10x03	3.037	75x16x075
<b>Q3 [MMUS\$]</b>	2.280	90x10x035	4.666	90x20x07
<b>Máximo [MMUS\$]</b>	3.100	60x10x03	5.927	90x20x075
<b>Rango intercuartil [MMUS\$]</b>	617	55x10x03	1.952	90x20x07
<b>Taguchi</b>	184,64	85x10x03	190,83	75x16x075

10.6. Anexo 6: Planes de las configuraciones que se benefician de la incertidumbre







## 10.7. Anexo 7: Alternativa de criterios de selección

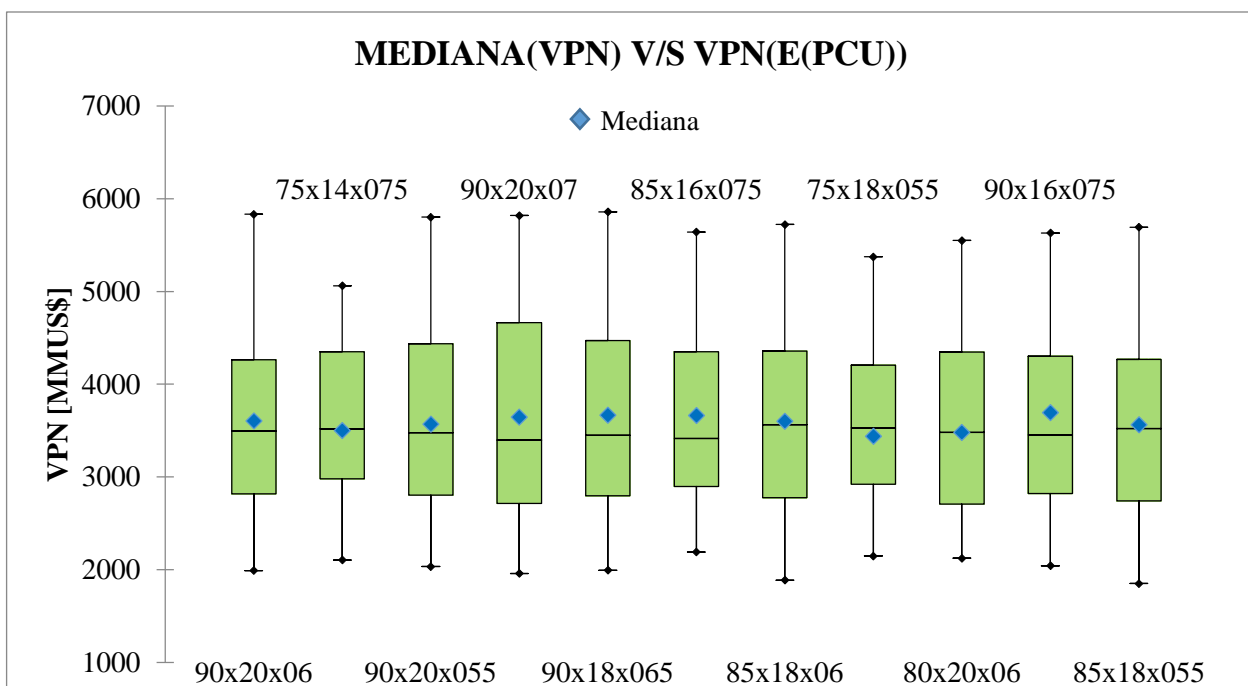
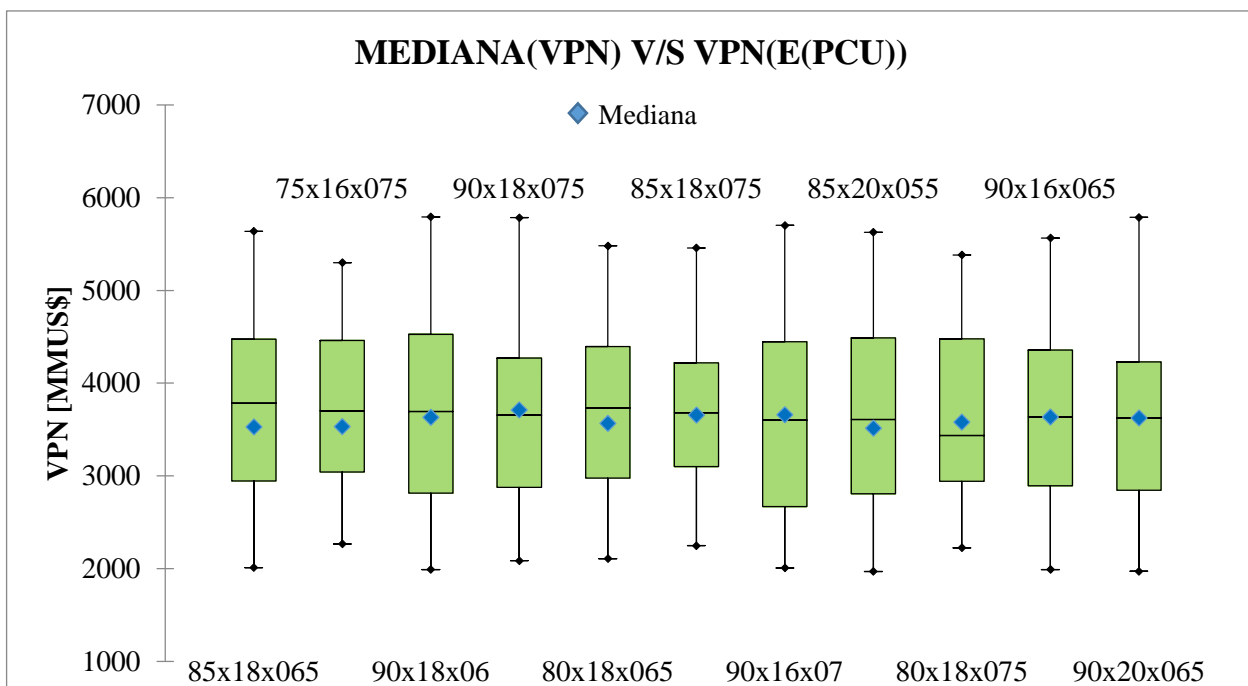
El objetivo de este anexo es proponer un nuevo criterio de selección de escalas de producción, donde el inversionista tras el negocio esté dispuesto a sacrificar parte del valor máximo al que puede optar, eligiendo las escalas de producción más competitivas, a cambio de ingresar a la metodología un mayor número de configuraciones que le den mayor flexibilidad a la operación.

El criterio empleado corresponde a seleccionar aquellas distribuciones que tengan menos de un 5% de pérdida de valor, con respecto a la configuración de mayor retorno, para que continúen con el proceso.

A continuación, se presentan las escalas de producción que cumplen lo anterior.

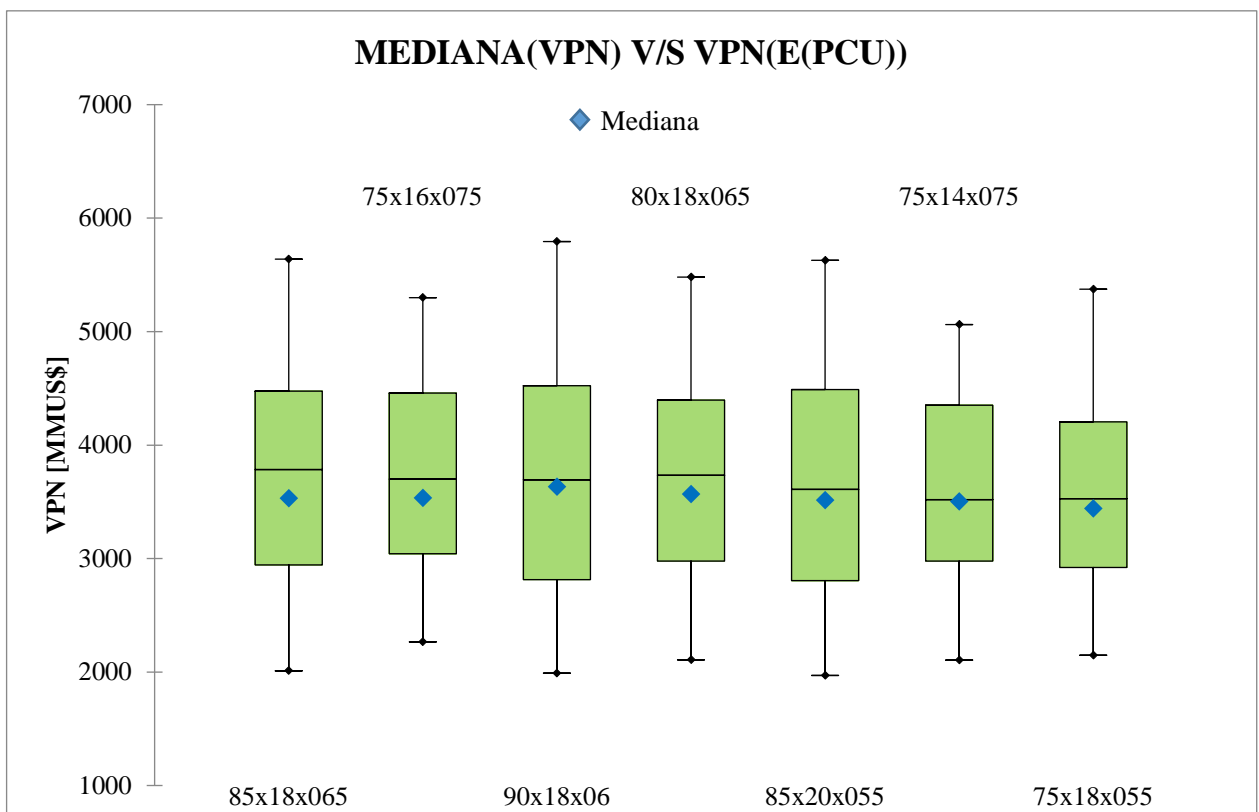
N°	CONFIGURACIÓN	MEDIA [MMUS\$]	PÉRDIDA
1	85x18x0,65	3.751	-
2	75x16x0,75	3.739	-0,3%
3	90x18x0,60	3.723	-0,7%
4	90x18x0,75	3,703	-1,3%
5	80x18x0,65	3,697	-1,4%
6	85x18x0,75	3,681	-1,9%
7	90x16x0,70	3,670	-2,1%
8	85x20x0,55	3,658	-2,5%
9	80x18x0,75	3,657	-2,5%
10	90x16x0,65	3,655	-2,5%
11	90x20x0,65	3,655	-2,5%
12	90x20x0,60	3,643	-2,9%
13	75x14x0,75	3,640	-2,9%
14	90x20x0,55	3,638	-3,0%
15	90x20x0,70	3,633	-3,1%
16	90x18x0,65	3,632	-3,1%
17	85x16x0,75	3,627	-3,3%
18	85x18x0,60	3,615	-3,6%
19	75x18x0,55	3,598	-4,0%
20	80x20x0,60	3,591	-4,2%
21	90x16x0,75	3,570	-4,8%
22	85x18x0,55	3,569	-4,8%

El siguiente paso corresponde a evaluar si las escalas seleccionadas cumplen el criterio de aprovechamiento de la incertidumbre, en el siguiente gráfico se aprecia el comportamiento de cada una.



De las configuraciones anteriores, las que cumplen el criterio de poseer más de la mitad de sus valores por sobre el valor de referencia de VPN son las siguiente.

N°	CONFIGURACIÓN	MEDIANA [MMUS\$]	VPN REFERENCIA [MMUS\$]	PERCENTIL
1	85x18x065	3784	3530	44%
2	75x16x075	3700	3533	46%
3	90x18x06	3694	3633	48%
5	80x18x065	3733	3568	46%
8	85x20x055	3608	3515	48%
13	75x14x075	3520	3501	49%
19	75x18x055	3527	3441	46%



Por último, en la siguiente tabla se presentan los valores de la razón entre las diferencias intercuartílicas que permiten definir la escala seleccionada.

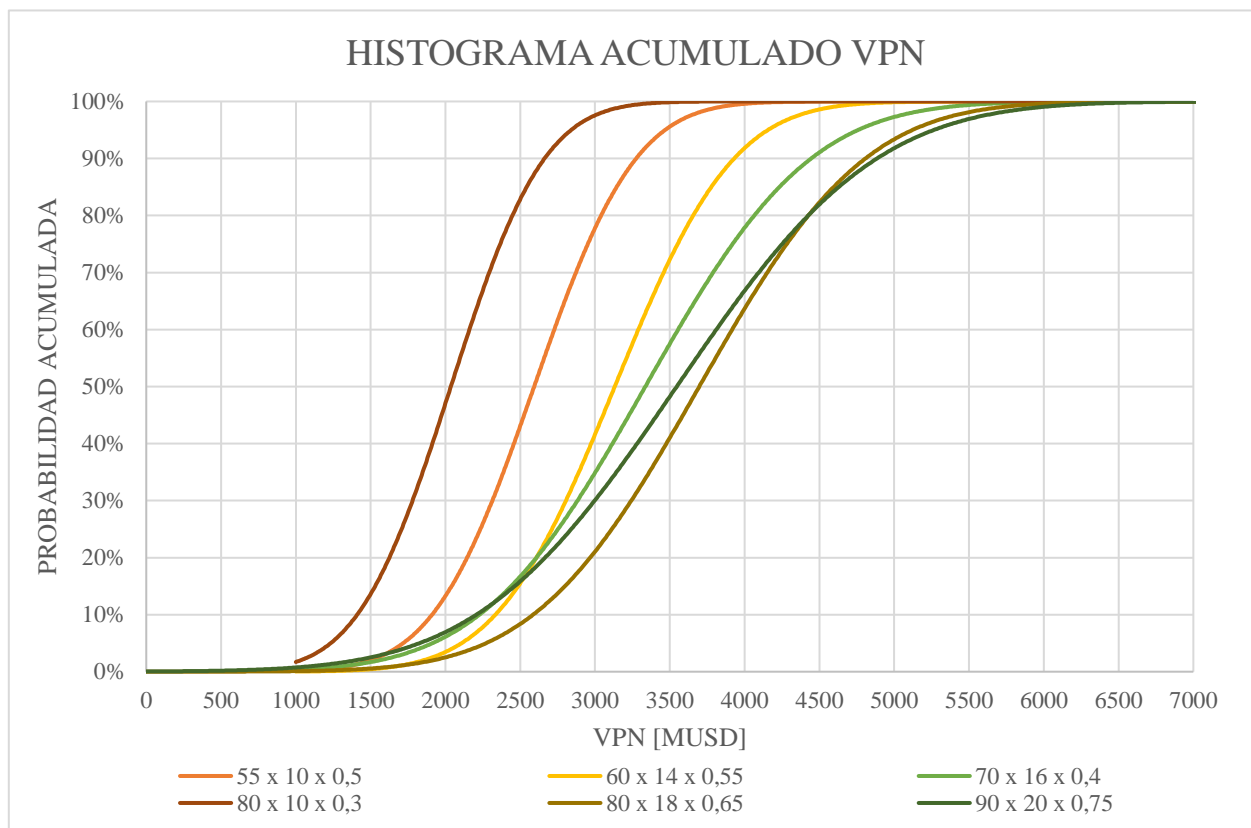


ESTADÍSTI COS	85X18X 0,65	75X16X 0,75	90X18X 0,60	80X18X 0,65	85X20X 0,55	75X14X 0,75	75X18X 0,55
Mínimo [MMUS\$]	2.011	2.266	1.990	2.108	1.970	2.105	2.148
Máximo [MMUS\$]	5.639	5.299	5.794	5.480	5.628	5.062	5.374
1° Cuartil [MMUS\$]	2.945	3.042	2.815	2.978	2.806	2.979	2.922
Mediana [MMUS\$]	3.784	3.701	3.694	3.733	3.608	3.520	3.527
3° Cuartil [MMUS\$]	4.475	4.459	4.524	4.396	4.488	4.351	4.204
Media [MMUS\$]	3.751	3.739	3.723	3.697	3.658	3.640	3.598
Asimetría	0,124	0,103	0,127	0,135	0,204	0,089	0,288
Curtosis	-1,018	-1,228	-0,978	-0,978	-1,106	-1,024	-0,854
Q3-Q2 [MMUS\$]	692	758	830	663	880	831	677
Q2-Q1 [MMUS\$]	838	659	879	755	802	541	605
Razón intercuartílica	0,82	1,15	0,94	0,88	1,1	1,54	1,12

De esta forma, la distribución seleccionada corresponde a 75 [Mton/año] de capacidad mina, 14 [Mton/año] de capacidad planta y una ley de corte de 0,75% de cobre.

Este resultado difiere de aquel encontrado cuando se maximiza el VPN, ya que al permitir holguras en los retornos del proyecto se incluyen nuevas configuraciones que presentan desempeños diferentes frente a los niveles de precio evaluados.

## 10.8. Anexo 8: Impacto de variables estratégicas en la distribución de VPN.

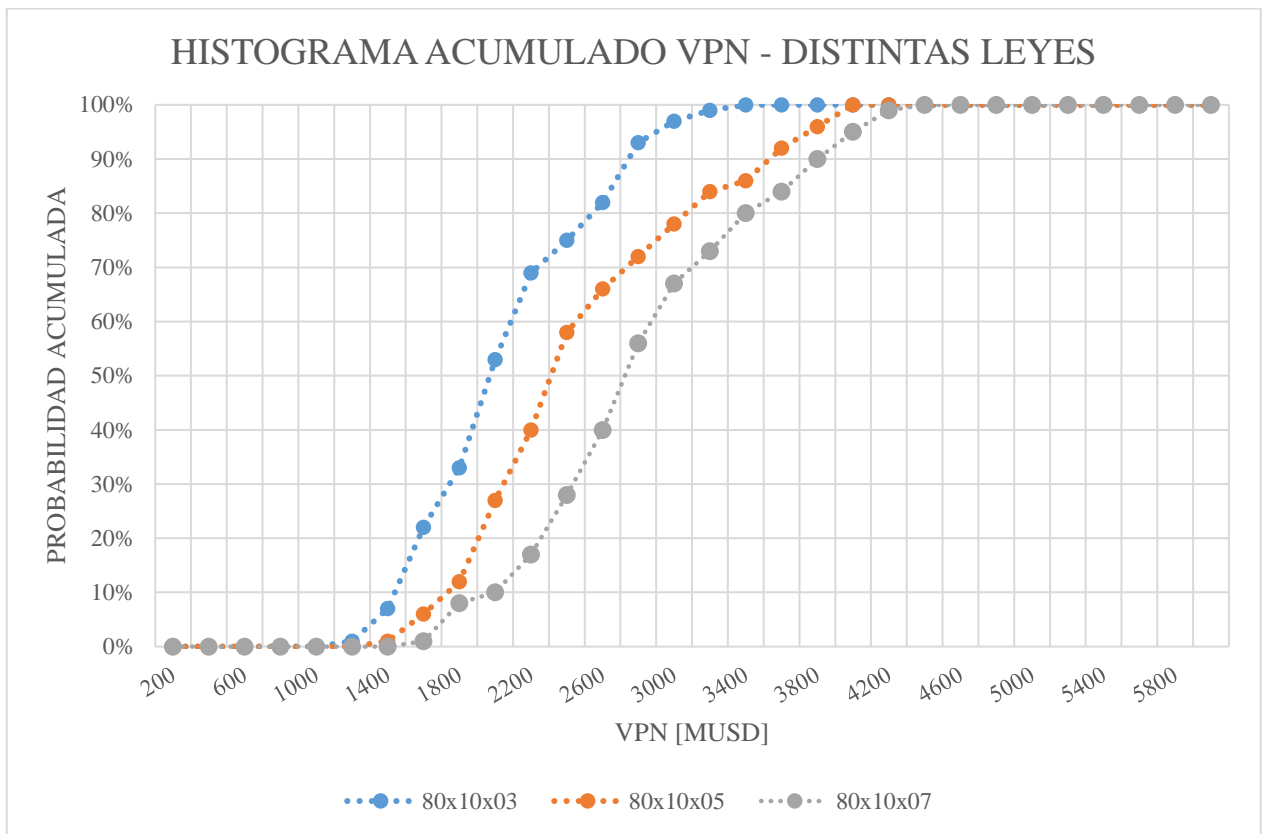


En el gráfico adjunto se observan 6 de las distribuciones obtenidas, a manera de ejemplificar el impacto de las escalas de producción en el VPN.

En el gráfico es posible observar que la distribución de menor mediana corresponde a la de 80 millones de toneladas por año de capacidad de minado, 10 millones de toneladas al año de capacidad de procesamiento y una ley de corte de 0,3% de cobre. Esto se explica dado que, en este caso, la capacidad de procesamiento juega el rol de cuello de botella para la operación, donde por más alta que sea la capacidad de minado, si la planta no puede procesar lo suficiente para tratar el mineral de la mina, los retornos se ven coartados tanto por el exceso de inversión en capacidad y por el costo de almacenamiento de este.

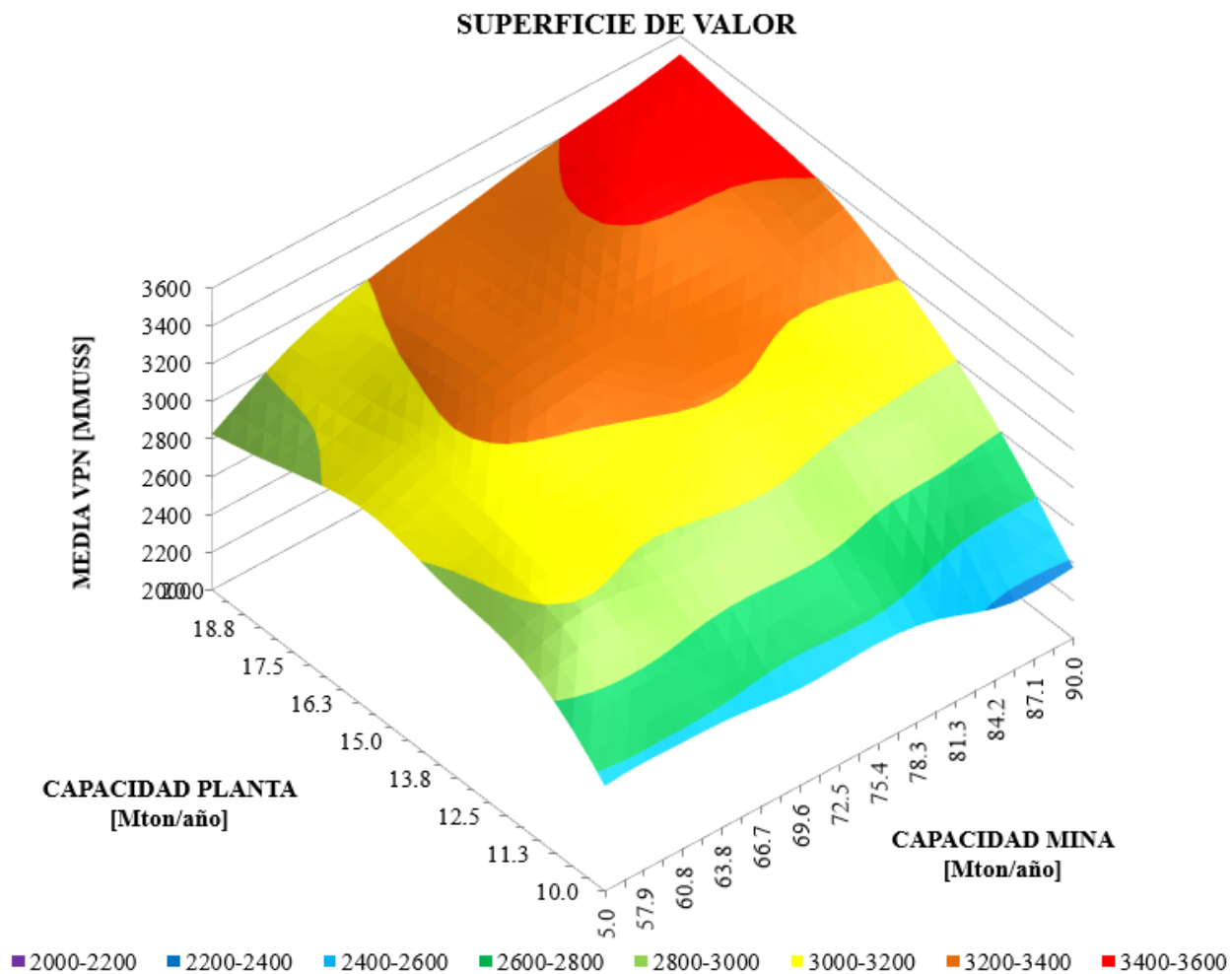
En el ejemplo también es posible observar que la mejor distribución en términos de media es la de 80 x 18 x 0,65 lo que implica que esta configuración presenta una esperanza más alta que el resto ante un escenario incierto de precios del cobre. Además, esta distribución tiene un comportamiento muy deseable para escenarios de bajo precio del cobre, donde alcanza altos valores de VPN, comparativamente al resto, para el percentil del 10% de los datos, lo que implica que esta configuración responde de mejor manera a precios bajos del metal.

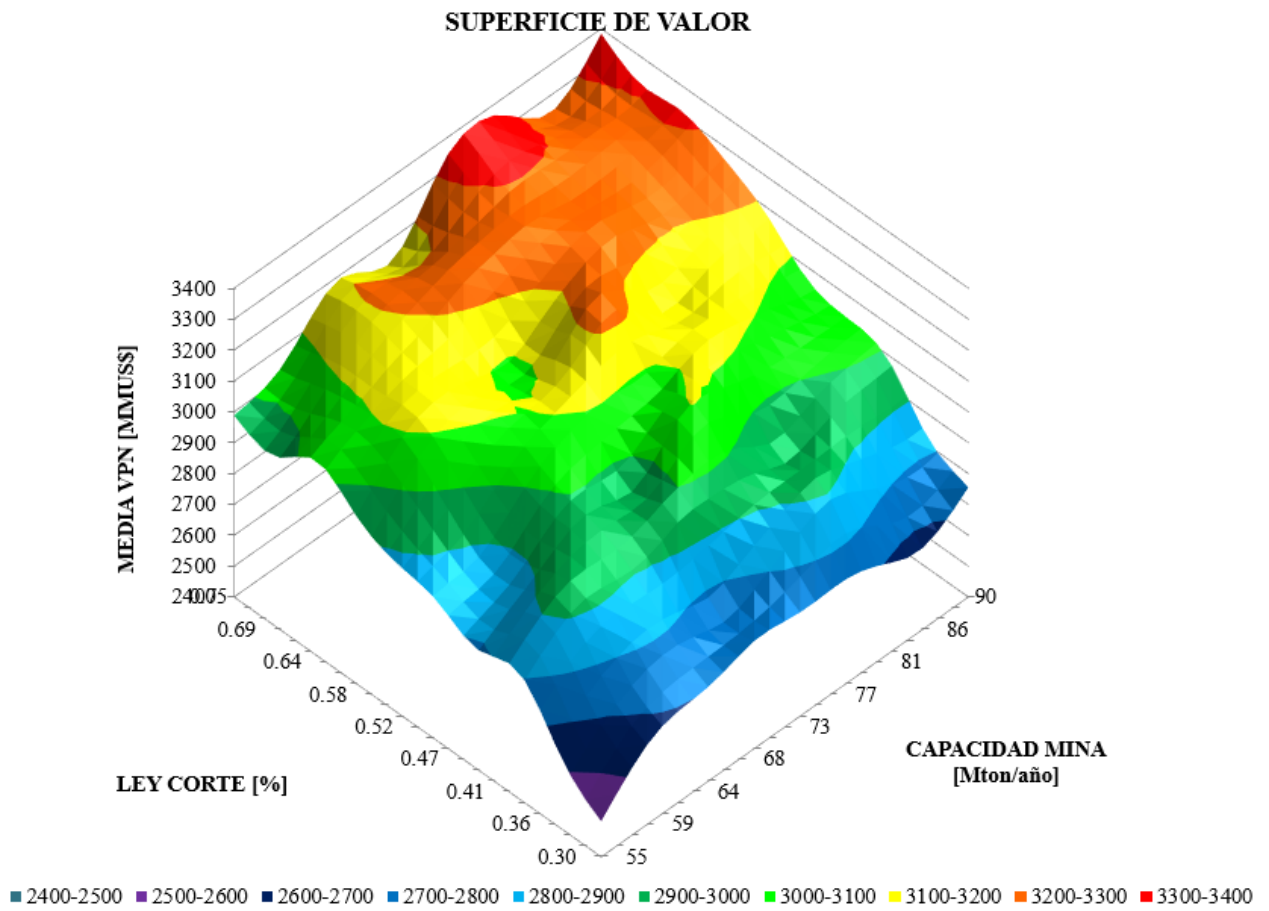
A precios altos, en el percentil 90%, la distribución de mayor valor es la de 90 x 20 x 0,75 lo que implica un comportamiento mejor que el resto, pues esta configuración tiene el potencial de alcanzar mayores valores para escenarios elevados el precio.



Además, en el gráfico “histograma acumulado VPN - distintas leyes” se observa que la ley de corte juega un rol fundamental, como se observa al comparar las distribuciones de 80 [Mton] de capacidad mina, 10 [Mton] de capacidad planta y tres leyes de corte 0,3, 0,5 y 0,7% de cobre. Este comportamiento se justifica pues un procesamiento selectivo del mineral, en términos de su cantidad de cobre por unidad de masa, a pesar de que pueda acortar la vida de la mina, genera mayores cantidades del producto final transable, por lo que paga sus costos y justifica su inversión antes que un caso de menor ley de corte.

## 10.9. Anexo 9: Superficies de valor





### SUPERFICIE DE VALOR

