



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MODELO PARA EL CAMPO DE TEMPERATURAS EN LA CARA SUPERIOR DE
UNA PILA DE LIXIVIACIÓN EN PRESENCIA DE EVAPORACIÓN.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

DONATO MAXIMILIANO VÁSQUEZ VARAS

PROFESOR GUÍA:
RAÚL GORMAZ ARANCIBIA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CARLOS CONCA ROSENDE
JORGE SAN MARTÍN HERMOSILLA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto CMM- Conicyt PIA
AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE: MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE: INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: DONATO MAXIMILIANO VÁSQUEZ VARAS
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: RAÚL GORMAZ ARANCIBIA

MODELO PARA EL CAMPO DE TEMPERATURAS EN LA CARA SUPERIOR DE UNA PILA DE LIXIVIACIÓN EN PRESENCIA DE EVAPORACIÓN.

En este trabajo se presenta y estudia un modelo para el campo de temperaturas en la cara superior de una pila de lixiviación en presencia de evaporación e irrigada de forma puntual. El modelo consiste en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales deducido del balance de los flujos de calor y masa en la cara superior de la pila. En estas ecuaciones las incógnitas son el flujo de masa en la superficie de la cara superior de la pila y la temperatura de la pila. Se muestran distintos resultados acerca de la existencia de soluciones para estas ecuaciones evaluando tres casos:

- Modelo radial: La cara superior es un círculo.
- Modelo geometría general sin evaporación: La cara superior es una superficie plana con borde suave y evaporación nula.
- Modelo geometría general con evaporación: La cara superior es una superficie plana con borde suave, tomando en cuenta evaporación no nula.

En cada uno de los modelos se estudian las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales tienen solución y además que propiedades cumplen estas soluciones.

En el modelo radial se demuestra la existencia y unicidad del campo bajo ciertas condiciones. También obtiene la existencia y unicidad de soluciones en el modelo con geometría general sin evaporación asumiendo que el riego no es puntual, en caso contrario solo se puede asegurar la existencia. En el modelo con geometría general y evaporación no nula, solo se logra demostrar la existencia de soluciones en un sentido débil.

En todos los modelos se obtienen cotas que permiten entender el comportamiento del campo de temperaturas en función de las variables del problema.

Dedicado a Javiera por su amor y apoyo en todo lo que hago.

Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones	vi
Introducción	1
0.1. La minería del cobre en Chile	1
0.2. Lixiviación en pilas	1
0.3. Ecuación del calor en medios porosos	2
0.4. Estudios numéricos previos	4
0.4.1. Temperatura en la cara superior	4
0.5. Objetivo General	5
0.5.1. Objetivos específicos	5
0.6. Estructura de la Tesis	5
1. Modelamiento	6
1.1. Descripción del problema	6
1.2. Balance de calor y masa	8
1.3. Campo de temperaturas en el borde	13
1.4. Problema estandarizado	15
2. Modelo radial	17
2.1. Ecuación en coordenadas polares	18
2.2. Propiedades operador S	23
2.3. Existencia y unicidad	29
3. Modelo geometría general sin evaporación	43
3.1. Definición del nuevo problema	44
3.2. Espacios $X_u(\Omega)$ e $Y_u(\Omega)$	45
3.3. Existencia y unicidad	52
4. Modelo general con evaporación	65
4.1. Problema aproximado	65
4.2. Solución problema aproximado	71
4.3. Solución en el limite	79
Conclusión	87
Bibliografía	91

Índice de Ilustraciones

1.	Esquema pila de lixiviación	2
1.1.	Flujo de masa por la irrigación	8
1.2.	Flujo de masa por escorrentía	9
1.3.	Flujo de masa por evaporación	9
2.1.	Dominio, modelo radial	17
2.2.	Comportamiento campo de temperaturas en función del coeficiente de convección h , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $\dot{M}_0 = 10$, $\rho = c = R = 1$	35
2.3.	Comportamiento cotas campo de temperaturas en función del coeficiente de convección h , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $\dot{M}_0 = 10$, $\rho = c = R = 1$, $L = 2000$	37
2.4.	Comportamiento cotas campo de temperaturas en función del coeficiente de convección M_0 , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $h = \rho = c = R = 1$, $L = 2000$	38
3.1.	Dominio general	43
3.2.	Distancia solución utilizando FEM vs solución analítica para $\alpha = 10$, $T_0 = 1$ y $R = 1$	60
3.3.	Comportamiento campo de temperaturas en un disco en función de $\alpha = \frac{h}{c\dot{M}_0 \Omega }$ para $T_a = 1$, $T_0 = 70$ y $R = 1$	63
3.4.	Solución numérica FEM en un el cuadrado $\Omega = (0, 1)^2$ para $\alpha = 1, 10, 100$ y $T_0 = 1$	64
4.1.	Solución numérica problema aproximado usando FEM para $h = 1$, $L = 2000$, $\rho = 1$ y $T_0 = 1$	87
4.2.	Solución numérica problema aproximado usando FEM para $h = 100$, $L = 2000$, $\rho = 1$ y $T_0 = 1$	88

Introducción

0.1. La minería del cobre en Chile

La minería ha sido importante a lo largo de toda la historia de Chile, pasando por distintas etapas. Como un primer antecedente de la importancia de la minería se puede mencionar la del salitre entre los años 1880 y 1920, donde la contribución de esta industria al PIB (producto interno bruto) fluctuó en torno al 30%. Producto de la aparición del salitre sintético, la producción de salitre cae bruscamente en el año 1930.

En contraposición, en la década de 1930 el cobre comienza tomar impulso en la minería chilena por la creciente demanda internacional, debido entre otras cosas a la urbanización, la industria eléctrica, etc. Este aumento en la demanda hace rentable la explotación de yacimientos de cobre con baja ley (1 %-2 % de cobre). Previamente solo se explotaba en minas con una alta ley [13]. Actualmente la minería del cobre es una de las principales industrias de Chile, representando un 10 % del PIB, además de representar un 30 % de la producción de cobre en todo el planeta.

Uno de los principales métodos de extracción del cobre utilizados en Chile es el de lixiviación en pilas, el cual será descrito en la siguiente sección. Para ejemplificar la importancia de este método, se puede notar que el aumento entre 1981 y 2010 la producción total de cobre se puede explicar en un 50% por el proceso de lixiviación. En este periodo la producción aumento desde 1.1 millón a más de 5.4 millones de toneladas [7].

0.2. Lixiviación en pilas

El proceso de lixiviación consiste en disolver de forma total o parcial un sólido con el fin de extraer un mineral, en este caso, cobre. Una de las formas más utilizadas para aplicar este método es la lixiviación en pilas utilizando una solución de ácido sulfúrico y agua, la cual consiste en los siguientes pasos [5]:

- Chancado: El material es extraído de la mina y luego es chancado para que quede de un tamaño adecuado para dejar expuestos los minerales oxidados de cobre a la infiltración de la solución.
- Formación de la pila: El material chancado es llevado por correas transportadoras al

lugar donde se llevará a cabo la lixiviación. En este trayecto el material es irrigado con la solución para iniciar el proceso previo a la formación de la pila. Esto se llama proceso de curado. En el destino final el material es depositado en forma de trapecoide de entre 6 y 8 metros: esta es la pila de lixiviación. Sobre las pilas existe un sistema de riego por goteo para irrigar la solución y bajo esta existe una membrana impermeable junto con un sistema de recolección.

- Riego de la pila: A través del sistema de riego sobre la pila se vierte lentamente la solución ácida, la cual se infiltra por la pila hasta llegar a la base, proceso en el cual se forma una disolución de sulfato de cobre, que luego es extraído por el sistema de recolección. Este riego se mantiene por entre 45 y 60 días, extrayéndose la mayor parte del cobre. Luego de este tiempo se transportan los restos de la pila a un botadero para extraer lo que queda de cobre.

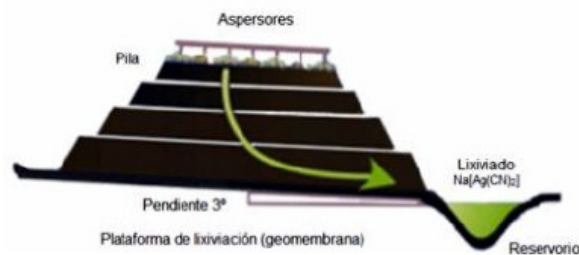


Figura 1: Esquema pila de lixiviación
extraído desde www.arquimed.cl el 21 de octubre del 2016

Uno de los aspectos que afectan la extracción del cobre es la temperatura al interior de la pila. En [14] se prueba el proceso de lixiviación con 3 temperaturas distintas ($50^{\circ}C$, $60^{\circ}C$ y $70^{\circ}C$), llegando a la conclusión que la temperatura en la cual se produce la mayor velocidad de recuperación es a los $60^{\circ}C$. Por esta razón es de especial interés determinar el comportamiento del campo de temperaturas en la pila. Una forma común de hacer esto es modelar la pila como un medio poroso y utilizar la ecuación del calor en medios porosos.

0.3. Ecuación del calor en medios porosos

Como referencia para la ecuación del calor en medios porosos se puede revisar [15]. Para simplificar, se modela la pila de lixiviación como un dominio $\Omega \times [0, H]$, es decir, un cilindro de base $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y altura H . Se considera además que la pila es un medio poroso.

Un medio poroso se refiere a un material sólido que contiene vacíos. Estos se pueden caracterizar por la porosidad, que es la relación entre el volumen vacío y el volumen total del material (φ):

$$\varphi = \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen total}}$$

Si se asume que hay un fluido con una velocidad v por unidad de área, dada por la ley de

Darcy, que se difunde a través del medio, la ecuación del calor está dada por:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}((\rho c)_f T v) - \nabla \cdot (k_m \nabla T) = q \text{ en } \Omega \times [0, H]$$

$$T(0) = T_i \text{ en } \Omega \times [0, H]$$

Donde

- c : Calor específico.
- ρ : Densidad.
- k : Conductividad térmica.
- v : velocidad del fluido por unidad de área.
- q : fuentes de calor interna.
- T : Campo de temperatura de la pila.
- T_i : Temperatura inicial de la pila.
- $(\rho c)_m = \varphi \rho_f c_f + (1 - \varphi) \rho_s c_s$.
- $(\rho c)_f = \rho_f c_f$
- $(k)_m = \varphi k_f + (1 - \varphi) k_s$.

El sub-índice f se refiere a propiedades relativas al fluido y s se refieren al sólido. En lo anterior se asume un equilibrio térmico local, es decir, que localmente el fluido y el medio poroso se encuentran a la misma temperatura. Como condiciones de borde se asume que se conoce la temperatura en la parte superior de la pila:

$$T = T_{sup} \text{ en } \Omega \times \{H\}$$

En la parte inferior de la pila se asume que también se conoce la temperatura:

$$T = T_{inf} \text{ en } \Omega \times \{0\}$$

También se puede asumir que se produce un intercambio de calor con el medio producido por la salida del fluido, lo cual se formula como:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \rho V_{salida} T \text{ en } \Omega \times \{0\}$$

donde V_{salida} es la velocidad por unidad de área con la que sale el fluido.

Las paredes de la pila están en contacto con el medio ambiente (aire) y por lo tanto existe un intercambio de calor con el mismo, es decir, se permite un flujo de calor que es proporcional a la diferencia de temperatura de la pila con el medio ambiente que esta dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{h}{k_m} (T_a - T)$$

donde T_a es la temperatura ambiente, $\frac{\partial T}{\partial n}$ es la derivada normal con respecto a la pared de la pila y h es la constante de convección, específicamente en este caso se considero h la constante de convección del aire.

En la parte superior de la pila se producen varios intercambios de calor de carácter no lineal que hacen difícil conocer la temperatura T_{sup} . En este trabajo solo consideraremos la evaporación.

0.4. Estudios numéricos previos

En [6] se estudia de manera numérica el campo de temperaturas en una pila de lixiviación tomando en cuenta los efectos de la radiación y la evaporación, pero asumiendo que la temperatura solo depende de la profundidad en la pila. Bajo esta hipótesis la temperatura debe cumplir una ecuación en derivadas parciales en una dimensión.

En [12] se da un modelo más complejo de la pila utilizando la ecuación de temperaturas en medios porosos y la ley de Darcy, que se refiere a la velocidad de un fluido que se infiltra en un medio poroso. En este caso se estudia la temperatura en una sección trapezoidal de la pila.

Tanto en [12] y como en [6] se asumen condiciones de borde sobre las derivadas normales del campo de temperaturas y además se asume que el fluido es irrigado de forma uniforme en la cara superior de la pila, lo cual no es necesariamente cierto, pues el riego es realizado por goteo. En contraposición a esto, en este trabajo estudiaremos cual es la temperatura en la cara superior de la pila en presencia de evaporación y asumiendo que la irrigación se produce en un punto de la cara superior de la pila.

0.4.1. Temperatura en la cara superior

Como fue mencionado anteriormente, la temperatura en la parte superior de la pila es difícil de determinar por la presencia de efectos no lineales. En este caso solo se considerará la evaporación.

Para estudiar la temperatura se establecerá un sistema de ecuaciones en derivadas parciales utilizando la conservación de la masa y la energía. Estas ecuaciones serán de carácter no lineal por la presencia de evaporación.

Para hacer el balance de calor y masa se modelará la evaporación por unidad de área como una función $\Phi : (\mathbb{R}, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, creciente y acotada inferiormente, tal que en T_{max} la evaporación es infinita, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow T_{max}} \Phi(x) = +\infty$$

Es importante notar que Φ puede ser negativa, lo cual se interpreta como condensación.

Como la irrigación de la pila es realizada por goteo, se asumirá que el líquido llega solo a un punto de la cara superior. Claramente esto se puede generalizar cuando el líquido entra en una cantidad finita de puntos mayor a 1, pero por simplicidad se trabajará con uno. Esto se traduce en la presencia de un delta de Dirac en las ecuaciones, lo cual añade una dificultad adicional al modelo.

Se asumirá además, que el fluido se infiltra en la pila a una velocidad constante correspondiente a la masa no evaporada y además no cae por los bordes.

0.5. Objetivo General

El objetivo de esta tesis es estudiar la temperatura en la cara superior de la pila de lixiviación en presencia de evaporación.

0.5.1. Objetivos específicos

- Determinar la ecuación para la temperatura en la cara superior de la pila.
- Establecer bajo que condiciones se tiene la existencia y unicidad de la solución de la ecuación.
- Utilizar la ecuación para ver propiedades de la temperatura en la cara superior, especialmente ver la diferencia con respecto a la temperatura de irrigación.

0.6. Estructura de la Tesis

En el Capítulo 1 se plantea un modelo para determinar la temperatura T_{sup} en presencia de evaporación y convección con el ambiente, que tiene como resultado una ecuación en derivadas parciales, además se reduce la ecuación a un caso estándar.

En el segundo Capítulo se estudia las propiedades del campo de temperaturas cuando Ω es un disco, es decir, cuando la pila de lixiviación es un cilindro de base circular.

En el tercer Capítulo se asumirá un dominio más general, pero en ausencia de evaporación. En este caso se logrará demostrar que la ecuación para la temperatura tiene una única solución y además establecer la distancia del campo de temperaturas a la temperatura de irrigación.

Finalmente en el cuarto Capítulo se establece un problema aproximado, en el cual se logra demostrar la existencia de soluciones y propiedades similares a las vistas en el capítulo 2 y 3. A través de estas propiedades se logra demostrar la existencia de soluciones en un sentido débil para el campo de temperaturas.

Capítulo 1

Modelamiento

Este capítulo está dedicado a la descripción y deducción del modelo, que da origen a la ecuación de la temperatura en la cara superior Ω de una pila de lixiviación. En la primera sección se presenta el problema, luego en la siguiente sección se deduce un sistema de ecuaciones para el campo de temperaturas y el flujo másico. También se deduce una condición de borde para la temperatura en Ω y finalmente se reduce el problema a un caso estándar.

1.1. Descripción del problema

El problema consiste en determinar la temperatura en la cara superior de una pila de lixiviación, considerando que hay un goteo de líquido a temperatura T_0 en el centro de esta. Las hipótesis para el modelo son las siguientes

- El líquido se infiltra desde la cara superior de la pila, hacia el interior, con una velocidad constante V .
- Se considera que la cara superior de la pila está en equilibrio térmico con respecto al interior de la pila y el fluido.
- Se produce un intercambio de calor entre la cara superior de la pila y medio ambiente por convección, dado por una constante de convección h .
- El fluido no cae por el borde externo de la cara superior.

En lo que sigue la cara superior corresponde a una superficie $\Omega \subset R^2$ que contiene al origen. Para este modelo se consideran los siguientes parámetros

c	capacidad calórica del fluido
ρ	Densidad del fluido
T_0	Temperatura de irrigación
T_a	Temperatura ambiente
h	Coefficiente de convección con el ambiente
C_0	Caudal del fluido inyectado
L	Calor latente de evaporación

Tabla 1.1: Constantes

Todos los los parámetros de la tabla son constantes y no negativos. Además el modelo considera una evaporación por unidad de área y unidad de tiempo como función de la temperatura. Dicha función se denota por $\Phi : (\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$, donde T_{max} es una constantes mayor a 0 que representa una temperatura a la cual la evaporación por unidad de área y tiempo se indefine (es infinita). Se asume que Φ cumple las siguientes propiedades:

- Φ es una función creciente.
- Φ es una función continuamente diferenciable entre $[0, T_{max})$.
- $\Phi(0) \leq 0$ y $\Phi(T_0) \geq 0$.
- $\lim_{t \rightarrow T_{max}^-} \Phi(t) = +\infty$.
- Para $t < 0$, $\Phi(t) = \Phi(0)$

De estas propiedades se puede deducir que Φ es una función Lipchitz en su dominio y que además existe una temperatura $T^* \in \mathbb{R}$ en la cual la evaporación es nula:

Lema 1.1 *Existe una temperatura T^* a la cual se anula la evaporación y tal que $0 \leq T^* \leq T_0$. Además para t_1 y t_2 tales que $t_1 < t_2 < 100$, se tiene:*

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq \max_{t \in [0, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2|$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\Phi(0) \leq 0$ y $\Phi(T_0) \geq 0$, entonces por el Teorema del valor medio debe existir un T^* en $[0, T_0]$ tal que $\Phi(T^*) = 0$. Por otro lado, asumamos que $t_1, t_2 \geq 0$, entonces por el Teorema del valor intermedio, se tiene que:

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq \max_{t \in [t_1, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2| \leq \max_{t \in [0, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2|$$

Para $t_1, t_2 < 0$

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = |\Phi(0) - \Phi(0)| \leq \max_{t \in [t_1, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2|$$

Ahora supongamos que $t_1 < 0$ y $t_2 \geq 0$, entonces

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| = |\Phi(0) - \Phi(t_2)| \leq \max_{t \in [0, t_2]} |\Phi'(t)| |t_2|$$

Como $t_1 < 0$ y $t_2 \geq 0$, entonces $|t_2| \leq |t_1 - t_2|$ y por lo tanto.

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq \max_{t \in [0, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2|$$

□

1.2. Balance de calor y masa

Para encontrar la temperatura y tener suficientes ecuaciones se hace un balance entre el flujo másico y el flujo de calor. Se denota \dot{M} por el flujo de masa por unidad de largo en la superficie de la cara superior y T la temperatura en la cara superior de la pila. En lo que sigue $\omega \subset \Omega$ es una superficie de control en la cual se hace el balance de calor.

- Si se considera que el liquido es irrigado en $(0, 0)$, entonces el flujo de masa que entra en ω producto de la irrigación es $\dot{M}_0 = \rho C_0$ si $(0, 0) \in \omega$ y 0 si $(0, 0) \notin \omega$, de forma resumida el flujo másico que entra en ω debido a la irrigación es:

$$\int_{\omega} \delta_0 \dot{M}_0 dx$$

donde δ_0 es el delta de Dirac.

- De forma análoga a la parte anterior, el flujo de calor que entra en ω debido a la irrigación es:

$$\int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx$$

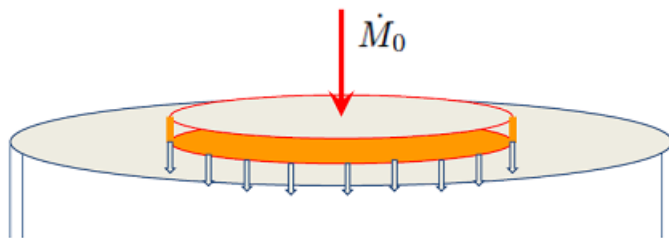


Figura 1.1: Flujo de masa por la irrigación

- El flujo de calor debido a la convección con el ambiente solo ocurre en la parte superior y está dado por

$$\int_{\omega} h(T - T_a) dx,$$

donde h es el coeficiente de convección con el medio ambiente.

- El flujo de masa que sale por la escorrentía de ω es

$$\int_{\partial\omega} \dot{M} \cdot \hat{n} dl,$$

donde dl es el elemento diferencial asociado al borde de ω y \hat{n} el vector normal.

- El flujo de calor debido a la escorrentía es dado por

$$\int_{\partial\omega} c\dot{M} \cdot (T - T_a)\hat{n}dl$$

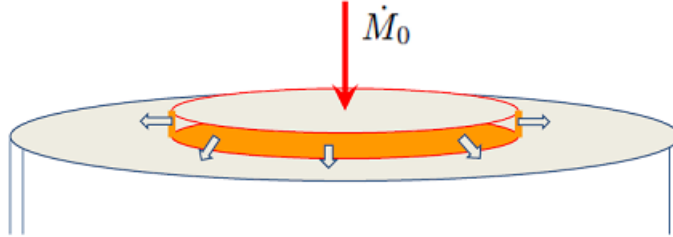


Figura 1.2: Flujo de masa por escorrentía

- Asumiendo que se conoce la velocidad con la cual se infiltra el líquido V en la pila, los flujos de masa y calor debidos a la infiltración son:

- Flujo de masa

$$\int_{\omega} \rho V dx$$

- Flujo de calor

$$\int_{\omega} c\rho V(T - T_a)dx$$

- Los flujos de masa y calor debidos a la evaporación son:

- Flujo de masa por evaporación

$$\int_{\omega} \Phi(T)dx$$

- Flujo de calor por evaporación

$$\int_{\omega} \Phi(T)(L + c(T - T_a))dx$$

Donde $\Phi(T)$ es la evaporación por unidad de área a temperatura T .

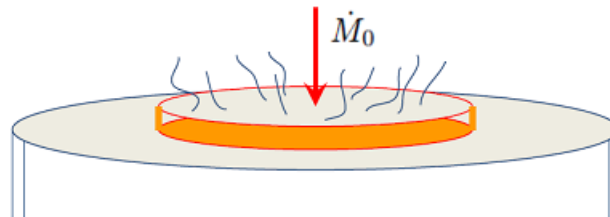


Figura 1.3: Flujo de masa por evaporación

De lo anterior, el flujo de masa que entra en ω es

$$\int_{\omega} \delta_0 \dot{M}_0 dx$$

y el flujo de masa que sale es

$$\int_{\partial\omega} \dot{M} \cdot \hat{n} dl + \rho V \int_{\omega} dx + \int_{\omega} \Phi(T) dx$$

Luego por la conservación de la masa

$$\int_{\omega} \delta_0 \dot{M}_0 = \int_{\partial\omega} \dot{M} \cdot \hat{n} dl + \rho V \int_{\omega} dx + \int_{\omega} \Phi(T) dx$$

Ahora usando el Teorema de la divergencia en lo anterior, queda:

$$\int_{\omega} \delta_0 \dot{M}_0 dx = \int_{\omega} \nabla \dot{M} dx + \rho V \int_{\omega} dx + \int_{\omega} \Phi(T) dx$$

Además, asumiendo que \dot{M} proviene de un potencial, es decir $\dot{M} = -\nabla\psi$, se obtiene:

$$\int_{\omega} \delta_0 \dot{M}_0 dx = - \int_{\omega} \Delta\psi dx + \rho V \int_{\omega} dx + \int_{\omega} \Phi(T) dx$$

Como esto es para todo $\omega \subset \Omega$, entonces se debe cumplir la siguiente ecuación en el sentido de las distribuciones:

$$\delta_0 \dot{M}_0 = -\Delta\psi + \rho V + \Phi(T)$$

También de lo anterior, el flujo de calor que entra es

$$\int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx$$

y el calor que sale

$$\begin{aligned} \int_{\omega} h(T - T_a) dx + \int_{\partial\omega} c \dot{M} (T - T_a) \hat{n} dl + \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \\ \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Usando la conservación de la energía podemos igualar el calor que sale de ω y el que entra:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx = \int_{\omega} h(T - T_a) dx + \int_{\partial\omega} c \dot{M} (T - T_a) \hat{n} dl \\ + \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Usando el Teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_{\partial\omega} \dot{M} (T - T_a) \hat{n} dl = \int_{\omega} \nabla (\dot{M} (T - T_a)) dx$$

reemplazando esto en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx &= \int_{\omega} h(T - T_a) dx + \int_{\omega} c \nabla (\dot{M}(T - T_a)) dx + \\ &\quad \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Desarrollando el termino $\nabla(\dot{M}(T - T_a))$

$$\nabla(\dot{M}(T - T_a)) = \nabla \dot{M}(T - T_a) + \dot{M} \nabla T$$

y reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx &= \int_{\omega} h(T - T_a) dx + \int_{\omega} c \nabla \dot{M}(T - T_a) dx + \int_{\omega} c \dot{M} \nabla T dx \\ &\quad + \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Reemplazando $\dot{M} = -\nabla \psi$, queda:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx &= \int_{\omega} h(T - T_a) dx - \int_{\omega} c \Delta \psi (T - T_a) dx - \int_{\omega} c \nabla \psi \nabla T dx \\ &\quad + \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Ahora usando que $\delta_0 \dot{M}_0 = -\Delta \psi + \rho V + \Phi(T)$ y reemplazando, se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx &= \int_{\omega} h(T - T_a) dx - \int_{\omega} c (-\delta_0 \dot{M}_0 + \rho V + \Phi(T)) (T - T_a) dx \\ &\quad - \int_{\omega} c \nabla \psi \nabla T dx + \int_{\omega} c \rho V (T - T_a) dx + \int_{\omega} \Phi(T) (L + c(T - T_a)) dx \end{aligned}$$

Podemos cancelar el termino $\int_{\omega} c (\rho V + \Phi(T)) (T - T_a) dx$ a ambos lados de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T_a) dx &= \int_{\omega} h(T - T_a) dx + \int_{\omega} c (\delta_0 \dot{M}_0) (T - T_a) dx \\ &\quad - \int_{\omega} c \nabla \psi \nabla T dx + \int_{\omega} \Phi(T) L dx \end{aligned}$$

Si pasamos restando $\int_{\omega} c (\delta_0 \dot{M}_0) (T - T_a) dx$ del lado derecho de la ecuación al lado izquierdo, se obtiene

$$\int_{\omega} \delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T) dx = \int_{\omega} h(T - T_a) dx - \int_{\omega} c \nabla \psi \nabla T dx + \int_{\omega} \Phi(T) L dx$$

Como esto se cumple para todo $\omega \subset \Omega$, entonces se debe cumplir la siguiente igualdad (al menos en el sentido de las distribuciones)

$$\delta_0 c \dot{M}_0 (T_0 - T) = h(T - T_a) - c \nabla \psi \nabla T + \Phi(T) L$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones a resolver es

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) = \dot{M}_0\delta_0 \quad (1.1a)$$

$$-c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L = \delta_0\dot{M}_0c(T_0 - T) \quad (1.1b)$$

Donde ψ y T son las incógnitas. Además, como el fluido no coe por el borde externo de Ω , entonces se pide que $\dot{M}\hat{n} = 0$ y por lo tanto $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0$ en el borde del dominio. Si integramos la ecuación 1.1a en Ω

$$\int_{\Omega} \dot{M}_0\delta_0 dx = - \int_{\Omega} \Delta\psi dx + \int_{\Omega} \rho V dx + \int_{\Omega} \Phi(T) dx$$

Como ρ y V son constantes, entonces

$$\dot{M}_0 = - \int_{\Omega} \Delta\psi dx + |\Omega|\rho V dx + \int_{\Omega} \Phi(T) dx$$

donde $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$. Luego, usando el teorema de la divergencia

$$\int_{\Omega} \Delta\psi dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} dl \overset{0}{\rightarrow}$$

y por lo tanto

$$\dot{M}_0 = |\Omega|\rho V dx + \int_{\Omega} \Phi(T) dx$$

Esta última relación dice que el flujo de masa que entra debe ser igual al flujo que se infiltra más la evaporación. De lo anterior es razonable tomar V como una constante que depende de T y \dot{M}_0 , dada por la expresión:

$$V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right)$$

Con esto se puede definir el siguiente problema

Problema 1.1 Sean $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \geq T_a \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) \leq 0$. Sea también Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. El problema (P) es encontrar $T \in C(\Omega)$ y $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$ tal que cumplan

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) = \delta_0\dot{M}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.2a)$$

$$-c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L = \delta_0c(T_0 - T) \quad \text{en } \Omega \quad (1.2b)$$

y $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0$ en el sentido de las distribuciones, donde $V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right)$

La idea es estudiar propiedades de T y ψ soluciones del problema (P) y con esto obtener conclusiones que puedan ayudar a entender el fenómeno. La primera complicación que aparece es la existencia y unicidad de soluciones del problema (P). Para esto necesitaremos debilitar la regularidad de estas soluciones y/o resolver problemas aproximados que ayudan a comprender el comportamiento de T y ψ .

1.3. Campo de temperaturas en el borde

Para resolver las ecuaciones (1.2), no vamos a trabajar directamente con el delta de Dirac, sino con una sucesión de funciones f_ε , tales que $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ en el sentido de las distribuciones y además $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces en vez de estudiar una condición de borde para el sistema (1.2), se estudia una condición de borde para un sistema de la forma

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) = f \quad \text{en } \Omega \quad (1.3a)$$

$$-c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L = fc(T_0 - T) \quad \text{en } \Omega \quad (1.3b)$$

Donde f es una función $C_0^\infty(\Omega)$ dada y T y ψ son las incógnitas, además vamos a considerar que $\partial\Omega$ es una curva simple cerrada de clase C^1 .

Teorema 1.2 Sean $M_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} \geq T_0 \geq T_a \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente y acotada inferiormente con $\Phi(0) \leq 0$. Sea también Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase C^1 . Si $\psi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y $T \in C^1(\bar{\Omega})$ cumplen (1.3) y $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces $T = \bar{T}$ en $\partial\Omega$, tal que \bar{T} es el único número que cumple la igualdad

$$h(\bar{T} - T_a) + L\Phi(\bar{T}) = 0$$

además $T^* \leq \bar{T} \leq T_0$, donde $T^* > 0$ es la temperatura en la cual la evaporación se anula, es decir, $\Phi(T^*) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. De la continuidad de las funciones y de la ecuación (1.3b), se puede deducir que en el borde de Ω se cumple que

$$fc(T_0 - T) = -c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L$$

Pero $f|_{\partial\Omega} = 0$, entonces

$$0 = -c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L$$

Por otra parte, si denotamos por \hat{t} al vector tangente a $\partial\Omega$, entonces

$$\nabla\psi\nabla T = \frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} \frac{\partial T}{\partial\hat{n}} + \frac{\partial\psi}{\partial\hat{t}} \frac{\partial T}{\partial\hat{t}} \quad \text{en } \partial\Omega$$

Pero $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\nabla\psi\nabla T = \frac{\partial\psi}{\partial\hat{t}} \frac{\partial T}{\partial\hat{t}} \quad \text{en } \partial\Omega$$

y por lo tanto

$$0 = -c \frac{\partial\psi}{\partial\hat{t}} \frac{\partial T}{\partial\hat{t}} + h(T - T_a) + \Phi(T)L \quad \text{en } \partial\Omega$$

Como $\partial\Omega$ es acotado en \mathbb{R}^2 , entonces T debe alcanzar su mínimo y su máximo en $\partial\Omega$. Luego si $\varphi_{min} : [0, 1] \rightarrow \partial\Omega$ es una parametrización $C^1([0, 1])$ de $\partial\Omega$, tal que el mínimo de T en $\varphi([0, 1])$ se alcanza en un $t_{min} \in (0, 1)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} T \circ \varphi(t_{min}) = 0$$

y por regla de la cadena

$$\nabla T(\varphi_{min}(t_{min})) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t_{min}) = 0$$

Esto quiere decir que

$$\nabla T(x_{min}, y_{min}) = \lambda_{min} \hat{n}$$

donde $\lambda_{min} \in \mathbb{R}$ y $(x_{min}, y_{min}) \in \partial\Omega$ es un punto donde se alcanza el mínimo. Luego en el mínimo se debe cumplir

$$0 = -c \frac{d\psi}{dt} \frac{dT}{dt}(x_{min}, y_{min}) + h(T(x_{min}, y_{min}) - T_a) + \Phi(T(x_{min}, y_{min}))L$$

$$0 = h(T(x_{min}, y_{min}) - T_a) + \Phi(T(x_{min}, y_{min}))L$$

Análogamente se puede ver que si T alcanza su máximo en (x_{max}, y_{max}) en $\partial\Omega$, entonces

$$0 = h(T(x_{max}, y_{max}) - T_a) + \Phi(T(x_{max}, y_{max}))L$$

Pero si $\Phi(x)$ es una función creciente, entonces

$$g(x) = h(x - T_a) + L\Phi(x)$$

debe ser estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva, luego como

$$h(T(x_{max}, y_{max}) - T_a) + \Phi(T(x_{max}, y_{max}))L = h(T(x_{min}, y_{min}) - T_a) + \Phi(T(x_{min}, y_{min}))L$$

entonces

$$T(x_{max}, y_{max}) = T(x_{min}, y_{min}) = \bar{T}$$

donde

$$h(\bar{T} - T_a) + L\Phi(\bar{T}) = 0$$

Podemos asegurar la existencia de \bar{T} por el teorema del valor medio, pues por las propiedades de Φ sabemos que $T^* \leq T_0$ y además

$$\Phi(T^*) = 0 \text{ y } \Phi(T_0) \geq 0$$

entonces

$$g(T^*) = h(T^* - T_0) \leq 0 \text{ y } g(T_0) = L\Phi(T_0) \geq 0$$

y por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema del valor medio, con lo cual concluimos que existe \bar{T} y que $T^* \leq \bar{T} \leq T_0$ \square

Este teorema nos da una condición de borde sobre T dada por \bar{T} , que es la temperatura a la cual se anulan el calor aportado por la evaporación y la convección, que por definición de T es la solución de (1.3b) cuando $f = 0$ en $\partial\Omega$.

1.4. Problema estandarizado

Antes de seguir, por comodidad, vamos a reducir el problema a uno equivalente en que $\bar{T} = T_a = 0$ para hacer los cálculos más simples.

Teorema 1.3 Sean $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \geq T_a \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) \leq 0$. Sea También Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Entonces $T \in C^1(\Omega)$ y $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$ son soluciones del problema (P) para $\dot{M}_0, h, T_a, T_0, L, c, \rho, \Phi$ si y solo si $\hat{T} \in C^1(\Omega)$ y ψ son soluciones del problema (P) para $\dot{M}_0, h, \hat{T}_a = 0, \hat{T}_0, L, c, \rho, \hat{\Phi}$, donde

$$\hat{T} = T - \bar{T}, \quad \hat{T}_0 = T_0 - \bar{T}, \quad \hat{T}_{max} = T_{max} - \bar{T}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} : (-\infty, \hat{T}_{max}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \hat{\Phi}(x) &= \frac{1}{L}(\Phi(x + \bar{T}) + h(\bar{T} - T_a)) \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$\begin{aligned} \hat{T}_0 &= T_0 - \bar{T} \\ L\hat{\Phi}(T) &= L\Phi(T + \bar{T}) + h(\bar{T} - T_a) \\ \hat{V} &= \frac{1}{|\Omega|\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \hat{\Phi}(T) dx \right) \end{aligned}$$

y $\hat{T} = T - \bar{T}$. En la ecuación

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) = \dot{M}_0\delta_0$$

Reemplazamos $\hat{T} = T - \bar{T}$

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(\hat{T} + \bar{T}) = \dot{M}_0\delta_0$$

Ahora sumando y restando $\frac{h}{L}(\bar{T} - T_a)$ al lado izquierdo

$$-\Delta\psi + \rho V - \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a) + \Phi(\hat{T} + \bar{T}) + \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a) = \dot{M}_0\delta_0$$

Ahora reemplazamos $\hat{\Phi}(\hat{T}) = \Phi(\hat{T} + \bar{T}) + \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a)$

$$-\Delta\psi + \rho V - \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a) + \hat{\Phi}(\hat{T}) = \dot{M}_0\delta_0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{|\Omega|\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \left(\Phi(\hat{T} + \bar{T}) + \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a) \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{|\Omega|\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(\hat{T} + \bar{T}) dx \right) - \frac{1}{\rho|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{h}{L}(\bar{T} - T_a) dx \end{aligned}$$

Como $V = \frac{1}{|\Omega|\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) = \frac{1}{|\Omega|\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(\hat{T} + \bar{T}) dx \right)$, entonces

$$\hat{V} = V - \frac{1}{\rho|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{h}{L} (\bar{T} - T_a) dx$$

Como $\frac{h}{L} (\bar{T} - T_a)$ es constante, entonces

$$\hat{V} = V - \frac{1}{\rho} \frac{h}{L} (\bar{T} - T_a)$$

Luego reemplazamos esto en la ecuación

$$-\Delta\psi + \rho V - \frac{h}{L} (\bar{T} - T_a) + \hat{\Phi}(\hat{T}) = \dot{M}_0 \delta_0$$

y queda

$$-\Delta\psi + \rho\hat{V} + \hat{\Phi}(\hat{T}) = \dot{M}_0 \delta_0$$

Para la ecuación

$$\delta_0 \dot{M}_0 c(T_0 - T) = -c \nabla\psi \nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L$$

Reemplazamos $\hat{T} = T - \bar{T}$ y $\hat{T}_0 = T_0 - \bar{T}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_0 \dot{M}_0 c(T_0 - \bar{T} - \hat{T}) &= -c \nabla\psi \nabla \hat{T} + h(\hat{T} + \bar{T} - T_a) + \Phi(\hat{T} + \bar{T})L \\ &= -c \nabla\psi \nabla \hat{T} + h\hat{T} + h(\bar{T} - T_a) + \Phi(\hat{T} + \bar{T})L \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos

$$L\hat{\Phi}(T) = L\Phi(T + \bar{T}) + h(\bar{T} - T_a)$$

en

$$\delta_0 \dot{M}_0 c(\hat{T}_0 - \hat{T}) = -c \nabla\psi \nabla \hat{T} + h\hat{T} + h(\bar{T} - T_a) + \Phi(\hat{T} + \bar{T})L$$

y obtenemos

$$\delta_0 \dot{M}_0 c(\hat{T}_0 - \hat{T}) = -c \nabla\psi \nabla \hat{T} + h\hat{T} + L\hat{\Phi}(\hat{T})$$

Luego resolver el sistema (1.2) para ψ, T es equivalente a resolver

$$-\Delta\psi + \rho\hat{V} + \hat{\Phi}(\hat{T}) = \dot{M}_0 \delta_0$$

$$\delta_0 \dot{M}_0 c(\hat{T}_0 - \hat{T}) = -c \nabla\psi \nabla \hat{T} + h\hat{T} + L\hat{\Phi}(\hat{T})$$

y definir $T = \hat{T} - \bar{T}$, donde ahora \hat{T} es la nueva incógnita. \square

Lo importante del teorema anterior es que para el sistema para ψ, \hat{T} la condición de borde de \hat{T} es $\hat{T} = 0$ en $\partial\Omega$ y además hay menos términos en las ecuaciones.

Capítulo 2

Modelo radial

Recordemos que el problema consiste en dadas las constantes $\dot{M}, h, T_0, T_a, T_{max}, L, c, \rho > 0$, la función $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable creciente y acotada inferiormente con $\Phi(0) \leq 0$. Sea también Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera lipschitz. Debemos encontrar $T \in C(\Omega)$ y $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$ con $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = 0$ en $\partial\Omega$, tales que cumplan (1.2), es decir,

$$\begin{aligned} -\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) &= \delta_0 \dot{M}_0 && \text{en } \Omega \\ -c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L &= \delta_0 c_f(T_0 - T) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

donde \dot{M}_0 representa el flujo másico, h la constante de convección, T_0 la temperatura de irrigación, L el calor latente de vaporización del líquido irrigado, c capacidad calórica del líquido, ρ densidad del líquido y Φ una función de la temperatura que representa la evaporación por unidad de área. En este caso se asume que la cara superior de la pila es un disco de radio R , esto es

$$\Omega = B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < R\}$$

Para simplificar los cálculos asumiremos que además $T_a = 0$ y $\Phi(0) = 0$, ya que la ecuación

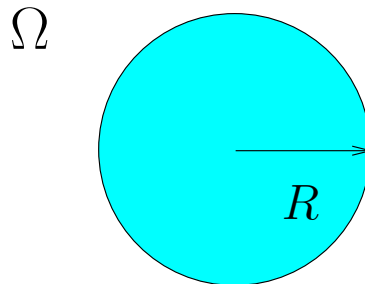


Figura 2.1: Dominio, modelo radial

siempre se puede reducir a este caso por el Teorema 1.3. Estas simplificaciones nos permiten asumir que las funciones deben ser radiales, es decir, solo dependen del radio en coordenadas polares.

En la primera sección se realiza el cambio a coordenadas polares y se redefine las incógnitas en la ecuación, en la segunda se dan algunas propiedades importantes que deben cumplir las

soluciones de la ecuación en este modelo y en la última sección se demuestra la existencia y unicidad de la solución.

2.1. Ecuación en coordenadas polares

Lo primero es hacer el cambio de coordenadas y definir el problema en coordenadas polares. Para esto consideremos, $T \in C^1(\Omega)$ y $\psi \in W^{1,1}(\Omega)$ soluciones de (P) , donde \dot{M} , h , T_0 , T_{max} , $T_a = 0$, L , c , $\rho > 0$ son las constantes del modelo y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Entonces se debe cumplir:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) &= \delta_0 \dot{M}_0 && \text{en } \Omega \\ -c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L &= \delta_0 c_f(T_0 - T) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

tal que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad V = \frac{1}{\rho|\Omega|}(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T)dx)$$

Lo anterior en coordenadas polares queda

$$\begin{aligned} \dot{M}_0\delta_0 &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}\psi) + \rho V + \Phi(T) \\ -c\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + hT + L\Phi(T) &= c\delta_0\dot{M}_0(T_0 - T) \end{aligned}$$

Definamos $M = \frac{\partial\psi}{\partial r}$ y reemplazamos en las igualdades anteriores, con esto las igualdades se transforman en:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM) + \rho V + \Phi(T) = \dot{M}_0\delta_0 \quad (r, \theta) \in [0, R) \times [0, 2\pi] \quad (2.1a)$$

$$-c\frac{\partial T}{\partial r}M + hT + L\Phi(T) = c\delta_0\dot{M}_0(T_0 - T) \quad (r, \theta) \in [0, R) \times [0, 2\pi] \quad (2.1b)$$

Además como $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0$ en $\partial\Omega$, entonces $M(R) = 0$. Entonces el problema es encontrar T y M tales que cumplan (2.1):

Problema 2.1 Sean \dot{M}_0 , h , $T_0 < T_{max}$, L , c , $\rho > 0$, $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. El problema (P_{rad}) es encontrar $T \in C^1(\Omega)$ y $M \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ funciones radiales tal que cumplen (2.1) en el sentido de las distribuciones:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM) + \rho V + \Phi(T) &= \dot{M}_0\delta_0 && (r, \theta) \in [0, R) \times [0, 2\pi] \\ -c\frac{\partial T}{\partial r}M + hT + L\Phi(T) &= c\delta_0\dot{M}_0(T_0 - T) && (r, \theta) \in [0, R) \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

y $M(R) = 0$, donde $V = \frac{1}{\rho|\Omega|}(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T)dx)$.

Notemos que, intuitivamente, el campo de temperaturas $T \in C^1(\Omega)$ debería ser T_0 en el origen para mantener el balance de energías en (2.1b).

Teorema 2.1 Sean $\dot{M}_0, h, T_0 < T_{max}, L, c, \rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea También $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Consideremos $(T, M) \in C^1(\Omega) \times C^1(\Omega \setminus \{0\})$. Si T, M resuelven el problema (P_{rad}) , entonces

$$M(r) = -\frac{1}{r} \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1$$

$$T(r) = \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) \left(\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{cM} \Phi(T) dr_2 + T_0\right)$$

en particular $T(R) = 0$ y $T(0) = T_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si multiplicamos por r e integramos entre r y R (2.1a), nos queda

$$0 = -\int_r^R \frac{\partial r M}{\partial r} dr + \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1$$

$$0 = -\cancel{M(R)R} - M(r)r + \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1$$

de donde

$$M = -\frac{1}{r} \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1$$

Ahora en (2.1b) dividimos por $-cM$ y obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{h}{cM} T = \frac{L}{cM} \Phi(T) - \frac{c}{cM} \delta_0 \dot{M}_0 (T_0 - T)$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right)$, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) T \right) = \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) \left(\frac{L}{cM} \Phi(T) - \frac{c}{cM} \delta_0 \dot{M}_0 (T_0 - T) \right)$$

Integrando esto último entre 0 y r se obtiene

$$\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) T - T(0) = \int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \left(\frac{L}{cM} \Phi(T) - \frac{c}{cM} \delta_0 \dot{M}_0 (T_0 - T) \right) dr_2$$

Notemos que

$$-\int_0^r \frac{c}{cM} \delta_0 \dot{M}_0 (T_0 - T) dr_2 = -\int_0^r \frac{r_1}{\int_{r_1}^R r_2 (\rho V + \Phi(T)) dr_2} \delta_0 \dot{M}_0 (T_0 - T) dr_2$$

Luego por definición del delta de Dirac la integral anterior es

$$\begin{aligned} & - \int_0^r \frac{r_1}{\int_{r_1}^R r_2(\rho V + \Phi(T))dr_2} \delta_0 \dot{M}_0(T_0 - T) dr_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r_1}{\int_{r_1}^R r_2(\rho V + \Phi(T))dr_2} \delta_0 \dot{M}_0(T_0 - T) dr_1 d\theta \end{aligned}$$

Ahora utilizando que $dx = r dr d\theta$ en coordenadas polares, queda

$$\int_0^r \frac{c}{cM} \delta_0 \dot{M}_0(T_0 - T) dr_2 = \frac{\dot{M}_0}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{T_0 - T}{\int_{r_1}^R r_2(\rho V + \Phi(T))dr_2} \delta_0 dx = \frac{\dot{M}_0}{2\pi} \frac{T_0 - T(0)}{\int_0^R r_1(\rho V + \Phi(T))dr_1}$$

Pero además $\int_0^R r_1(\rho V + \Phi(T))dr_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (\rho V + \Phi(T))dx = \frac{\dot{M}_0}{2\pi}$ y con esto se obtiene

$$- \int_0^r \frac{r_1}{\int_{r_1}^R r_2(\rho V + \Phi(T))dr_2} \delta_0 \dot{M}_0(T_0 - T) dr_2 = T_0 - T(0)$$

y por lo tanto

$$\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) T - T(0) = \int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{cM} \Phi(T) dr_2 + T_0 - T(0)$$

Luego

$$T = \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1\right) \left(\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{cM} \Phi(T) dr_2 + T_0\right)$$

Según esto, T es continua y de clase C^1 para $0 < r < R$ y en particular $T(0) = T_0$. \square

De lo hecho anteriormente se deduce una fórmula para las soluciones del problema (P_{rad}) y además se tiene que $T(0) = T_0$, con esto podemos resolver el problema buscando T y M que cumplan las fórmulas y que además $T(0) = T_0$. Definamos ahora los operadores:

Definición 2.2 Sean $\dot{M}_0, h, T_0 < T_{max}, L, c, \rho > 0, \Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea además $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Se definen los operadores

$$M : C([0, R]) \rightarrow C((0, R])$$

y

$$S : C([0, R]) \rightarrow C([0, R])$$

como

$$M(X)(r) = \frac{-1}{r} \int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(X)) dr_1$$

$$S(X)(r) = \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \left(\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \frac{L}{cM(X)} \Phi(X) dr_2 + T_0\right)$$

para X continua en $[0, R]$, donde $V(X) = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx\right)$

Ahora definamos el espacio donde buscaremos el punto fijo

$$E = \{X \in C([0, R]) \mid X(0) = T_0, X(r) \leq T_0 \forall r \in [0, R]\}$$

En el Teorema 2.1 se ve que el campo de temperaturas T que soluciona (P_{rad}) es un punto fijo de S . Pero falta ver que efectivamente un punto fijo de S restringido a E soluciona el problema (P_{rad}) .

Teorema 2.3 Sean $\dot{M}_0, h, T_0 < T_{max}, L, c, \rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Si $T \in E$ es tal que

$$S(T) = T$$

Entonces T y $M(T)$ solucionan (P_{rad}) .

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $T(x, y) = T(r(x, y))$ y $M(x, y) = M(T)(r(x, y))$ resuelven el sistema de ecuaciones (2.1) en el sentido de las distribuciones. Sea $\phi \in C^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R M(r) \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R M(r) \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R \frac{-1}{r} \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1 \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R -1 \int_r^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1 \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) dr d\theta \end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini, queda

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R M(r) \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) \phi(r_1, \theta) dr_1 d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R \phi(\varepsilon, \theta) r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1 d\theta \right) \end{aligned}$$

Como $\phi(\varepsilon, \theta) \rightarrow \phi(0)$ y ϕ es continua, entonces por el Teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R M(r) \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta &= - \int_0^{2\pi} \int_0^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) \phi(r_1, \theta) dr_1 d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^R \phi(0) r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1 d\theta \end{aligned}$$

Pero por definición de V , se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \phi(0) r_1 (\rho V + \Phi(T)) dr_1 d\theta = \phi(0) \dot{M}_0$$

luego

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R M(r) \frac{d}{dr} \phi(r, \theta) r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^R r_1 (\rho V + \Phi(T)) \phi(r_1, \theta) dr_1 d\theta + \dot{M}_0 \phi(0)$$

Por lo anterior $-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rM) = -\rho V - \Phi(T) + \dot{M}_0\delta_0$ en el sentido de las distribuciones. Para T vemos que

$$-c\nabla \cdot (T\nabla M) + hT + c\rho VT + L\Phi(T) + c\Phi(T)T = c\dot{M}_0T_0$$

en el sentido de las distribuciones, es decir,

$$c \int_{\Omega} TM\nabla\phi dx + \int_{\Omega} (hT + c\rho VT + L\Phi(T) + c\Phi(T)T)\phi dx = \int_{\Omega} c\dot{M}_0T_0\delta_0\Phi dx$$

En coordenadas polares, esto es

$$-c \int_0^{2\pi} \int_0^R TM \frac{d}{dr}\phi r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^R (hT + c\rho VT + L\Phi(T) + c\Phi(T)T)\phi r dr d\theta = c\dot{M}_0T_0\phi(0)$$

Notemos que por la definición de M tenemos

$$c \int_0^{2\pi} \int_0^R TM \frac{d}{dr}\phi r dr d\theta = -c \int_0^{2\pi} \int_0^R T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \frac{d}{dr}\phi r dr d\theta$$

Vamos a calcular esto como el siguiente límite

$$\int_0^R T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \frac{d}{dr}\phi r dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \frac{d}{dr}\phi r dr$$

Usando integración por partes

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \frac{d}{dr}\phi r dr = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \phi(r, \theta) \Big|_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} \right. \\ \left. - \int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} \frac{d}{dr}T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \phi(r, \theta) dr \right. \\ \left. + \int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} T(r)(\rho V + \Phi(T))r\phi(r, \theta) dr \right) \end{aligned}$$

Para $0 < r < R$

$$\frac{d}{dr}T(r) = \frac{1}{cM}(hT + L\Phi(T)) = -\frac{r}{c \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1}(hT + L\Phi(T))$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} T(r) \int_r^R (\rho V + \Phi(T))r_1 dr_1 \frac{d}{dr}\phi r dr = -\frac{\dot{M}_0}{2\pi}T_0\phi(0) + \frac{1}{c} \int_0^R (hT + L\Phi(T))\phi(r, \theta)r dr \\ + \int_0^R T(r)(\rho V + \Phi(T))r\phi(r, \theta) dr \end{aligned}$$

Entonces por el Teorema de convergencia dominada

$$c \int_0^{2\pi} \int_0^R TM \frac{d}{dr} \phi r dr d\theta = c \dot{M}_0 T_0 \phi(0) - \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^R (hT + L\Phi(T)) \phi(r, \theta) r dr$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^R T(r) (\rho V + \Phi(T)) r \phi(r, \theta) dr$$

y por lo tanto T cumple lo deseado. \square

Con esto nos limitaremos a estudiar la existencia de puntos fijos de S restringidos a E . Para esto primero estudiaremos algunas propiedades de S y sus puntos fijos.

2.2. Propiedades operador S

En esta sección se demuestran propiedades del operador S y de sus puntos fijos, en particular se demostrará que los puntos fijos de S son funciones acotadas, lo cual es necesario, ya que la evaporación $\Phi(\cdot)$ presenta una discontinuidad.

Lema 2.4 Sean $\dot{M}_0, h, T_0 < T_{max}$, $L, c, \rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea además $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Si $T \in E$ es tal que

$$S(T) = T$$

y además

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Entonces $0 \leq T \leq T_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $S(T) = T$, entonces

$$hT - c \frac{dT}{dr} M(T) + L\Phi(T) = 0 \quad (2.2)$$

Denotemos la parte positiva de una función v como v^+ , es decir,

$$v^+ = \max(v, 0)$$

Multiplicamos (2.2) por $(T - T_0)^+ r$ e integramos entre 0 y R :

$$h \int_0^R T(T - T_0)^+ r dr - c \int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) (T - T_0)^+ r dr + L \int_0^R \Phi(T) (T - T_0)^+ r dr = 0$$

Notemos que

$$\frac{d(T - T_0)^+}{dr} = \frac{dT}{dr} 1_{T \geq T_0}$$

Entonces

$$\frac{d(T - T_0)^+}{dr} (T - T_0)^+ = \frac{dT}{dr} (T - T_0)^+$$

Por lo anterior se tiene que

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T)(T - T_0)^+ r dr = \int_0^R \frac{1}{2} \frac{d((T - T_0)^+)^2}{dr} M(T) r dr$$

Luego integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{1}{2} \frac{d((T - T_0)^+)^2}{dr} M(T) r dr = \\ \frac{1}{2} \left(((T - T_0)^+)^2 M(T) r \Big|_0^R - \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 \frac{d}{dr} (M(T) r) dr \right) \end{aligned}$$

Como $T(0) = T_0$ y $M(T)(R) = 0$, resulta

$$\int_0^R \frac{1}{2} \frac{d((T - T_0)^+)^2}{dr} M(T) r dr = -\frac{1}{2} \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 \frac{d}{dr} (M(T) r) dr$$

Por definición de $M(T)$ sabemos que

$$\frac{d}{dr} (M(T) r) = r(\rho V(T) + \Phi(T))$$

Entonces integrando se tiene

$$\int_0^R \frac{1}{2} \frac{d((T - T_0)^+)^2}{dr} M(T) r dr = -\frac{1}{2} \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 r(\rho V(T) + \Phi(T)) dr$$

por lo tanto podemos escribir

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T)(T - T_0)^+ r dr = -\frac{1}{2} \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 r(\rho V(T) + \Phi(T)) dr$$

Con esto obtenemos que

$$h \int_0^R T(T - T_0)^+ r dr + \frac{c}{2} \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 r(\rho V(T) + \Phi(T)) dr + L \int_0^R \Phi(T)(T - T_0)^+ r dr = 0$$

Notemos que $V(T) \geq 0$, ya que

$$V(T) \geq \frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0) \geq 0$$

Además para $T \geq T_0$ tenemos que $\Phi(T) \geq 0$, entonces

$$h \int_0^R T(T - T_0)^+ r dr \leq 0$$

y por lo tanto

$$h \int_0^R (T - T_0)(T - T_0)^+ r dr + h \int_0^R T_0(T - T_0)^+ r dr \leq 0$$

Esto último permite concluir que

$$h \int_0^R ((T - T_0)^+)^2 r dr \leq 0$$

Por lo tanto $(T - T_0)^+ = 0$ c.t.p. en $[0, R]$. Como T es continua, entonces $T \leq T_0$ en $[0, R]$.

Denotemos la parte negativa de v como

$$T^- = \min(T, 0)$$

Integrando (2.2) por $T^- r$ entre 0 y R , se obtiene

$$h \int_0^R T T^- r dr - c \int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T^- r dr + L \int_0^R \Phi(T) T^- r dr = 0$$

Como $\Phi(\cdot)$ es una función creciente, entonces $\Phi(T) T^- \geq 0$, luego

$$h \int_0^R (T^-)^2 r dr - c \int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T^- r dr \leq 0$$

Notemos además que

$$\frac{dT^-}{dr} = 1_{T \leq 0} \frac{dT}{dr}$$

Esto implica que

$$\frac{dT}{dr} T^- = \frac{dT^-}{dr} T^-$$

y por lo tanto

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T^- r dr = \int_0^R \frac{dT^-}{dr} M(T) T^- r dr$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int_0^R \frac{dT^-}{dr} M(T) T^- r dr = \frac{1}{2} \left(r (T^-)^2 M(T) \Big|_0^R - \int_0^R (T^-)^2 \frac{d}{dr} (M(T) r) dr \right)$$

Por definición de $M(T)$ sabemos que

$$\frac{d}{dr} (M(T) r) = r(\rho V(T) + \Phi(T))$$

entonces

$$\int_0^R \frac{dT^-}{dr} M(T) T^- r dr = \frac{1}{2} \left(r (T^-)^2 M(T) \Big|_0^R - \int_0^R (T^-)^2 r (\rho V(T) + \Phi(T)) dr \right)$$

Como $T(0) = T_0 \geq 0$, entonces $T^-(0) = 0$, además $M(R) = 0$:

$$r (T^-)^2 M(T) \Big|_0^R = 0$$

y por lo tanto

$$\int_0^R \frac{dT^-}{dr} M(T) T^- r dr = -\frac{1}{2} \int_0^R (T^-)^2 r (\rho V(T) + \Phi(T)) dr$$

Entonces

$$h \int_0^R (T^-)^2 r dr + \frac{c}{2} \int_0^R (T^-)^2 r (\rho V(T) + \Phi(T)) dr \leq 0$$

Para terminar, veamos que $\rho V(T) + \Phi(T)$ es no negativo. En efecto

$$\rho V(T) + \Phi(T) = \frac{1}{\pi R^2} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) + \Phi(T)$$

Como $T \leq T_0$, entonces $\Phi(T) \leq \Phi(T_0)$ y por lo tanto

$$\rho V(T) + \Phi(T) = \frac{1}{\pi R^2} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) + \Phi(T) \geq \frac{1}{\pi R^2} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T_0) dx \right) + \Phi(T)$$

$$\rho V(T) + \Phi(T) \geq \frac{1}{\pi R^2} \dot{M}_0 - \Phi(T_0) + \Phi(T) \geq \frac{1}{\pi R^2} \dot{M}_0 - \Phi(T_0) + \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x) \geq 0$$

Con esto se concluye que

$$\int_0^R (T^-)^2 r dr \leq 0$$

y así $T^- = 0$ c.t.p en $[0, R]$. Como T es continua, esto implica $T \geq 0$ en $[0, R]$. \square

Con lo anterior vemos que cuando la temperatura ambiente es nula y además la evaporación se anula a temperatura nula, entonces el campo de temperaturas debe ser positivo y menor a la temperatura de irrigación, si se cumple la relación

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Esta última relación nos asegura que la velocidad con la que se infiltra el fluido es estrictamente positiva.

Notemos que para $t_1 < t_2 \leq T_0$ sabemos que

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq \max_{t \in [0, t_2]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2| \leq \max_{t \in [0, T_0]} |\Phi'(t)| |t_1 - t_2|$$

Como además trabajaremos con $T \leq T_0$, entonces podemos suponer que el dominio de Φ es $(-\infty, T_0]$ y por lo tanto

$$\|\Phi'\|_{\infty} = \max_{t \in [0, T_0]} |\Phi'(t)|, \quad \|\Phi\|_{\infty} = \max_{t \in [0, T_0]} |\Phi(t)|$$

y en consecuencia

$$|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)| \leq \|\Phi'\|_{\infty} |t_1 - t_2|$$

Ahora veremos algunas propiedades de S que serán de utilidad en la demostración de la existencia de puntos fijos.

Lema 2.5 Sean $M_0, h, T_0 < T_{max}, L, c, \rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, 100) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Supongamos que

$$\frac{M_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Si $X \in E$, entonces

- $S(X)(0) = T_0, S(X)(R) = 0$
- $S(X) \in C([0, R])$
- $S(X) \in C^1((0, R))$ y

$$\frac{d}{dr} S(X)(r) = \frac{hS(X)(r)}{cM(X)(r)} + \frac{L\Phi(X(r))}{cM(X)(r)}$$

- $S(X) \leq T_0$ y $\|S(X)\|_\infty \leq \max\{\frac{L}{h}\Phi(T_0), T_0\}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X \in E$. Veamos que $S(X) \in E$, es decir, veamos que $S(X)$ es una función continua en $[0, R]$, $S(X)(0) = T(0)$ y $S(X)(R) = 0$. Notemos que la expresión

$$1/M(X)(r) = -r / \int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(X)) dr_1$$

está bien definida para r entre tal que $0 \leq r < R$, pues $\int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(X)) dr_1 > 0$ para $0 \leq r < R$, y por lo tanto $1/M(X)$ es una función continua para $0 \leq r < R$ y además $1/M(X)(0) = 0$. Más aún

$$S(X)(r) = \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \left(\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \frac{L}{cM(X)} \Phi(X) dr_2 + T_0\right)$$

define una función continua para $0 \leq r < R$ con $S(X)(0) = T_0$. Por otro lado, como $X \leq T_0$ y Φ es creciente, se tiene la desigualdad

$$\int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(X)) dr_1 \leq \int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(T_0)) dr_1 = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)(\rho V + \Phi(T_0))$$

de esto último se tiene que

$$-\frac{1}{\int_r^R r_1(\rho V(X) + \Phi(X)) dr_1} \leq -\frac{2}{(R^2 - r^2)(\rho V + \Phi(T_0))}$$

Entonces

$$\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1 \leq \int_0^r -\frac{2hr_1}{c(R^2 - r_1^2)(\rho V + \Phi(T_0))} dr_1$$

$$\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1 \leq \log(R^2 - r^2) \frac{h}{c(\rho V + \Phi(T_0))} \Big|_0^r = \log\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \frac{h}{c(\rho V + \Phi(T_0))}$$

Entonces

$$\exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \leq \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{h}{c(\rho V + \Phi(T_0))}}$$

y por lo tanto

$$\exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right) \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow R^-$$

Supongamos que el término

$$\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{cM(X)} \Phi(X) dr_2$$

es no acotado para r cercano R , entonces

$$\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{-cM(X)} \Phi(X) dr_2 \rightarrow \infty \text{ si } r \rightarrow R^-$$

Luego por la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{-cM(X)} \Phi(X) dr_2}{\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right)} &= \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{-cM(X)} \Phi(X) dr_2}{\frac{\partial}{\partial r} \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right)} \\ &= \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{\exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1\right) \frac{L}{-cM(X)} \Phi(X)}{-\frac{h}{cM(X)} \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(X)} dr_1\right)} \\ &= \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{L\Phi(X)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Por lo anterior $S(X)(R) = 0$. Claramente $S(X)$ es derivable para $0 < r < R$ con

$$\frac{d}{dr} S(X)(r) = \frac{h}{cM(X)(r)} S(X)(r) + \frac{L\Phi(X(r))}{cM(X)(r)}$$

Como $S(X)$, $1/M(X)$ y $\Phi(X)$ son funciones continuas en $(0, R)$, entonces $S(X)$ es de clase C^1 en $(0, R)$. Para ver que la norma de $S(X)$ es acotada debemos acotar el máximo y el mínimo de $S(X)$. Estos últimos se pueden alcanzar en 0 , en R o en $(0, R)$, en los primeros dos casos sabemos que $S(X)(0) = T_0$ y $S(X)(R) = 0$, pero si el máximo o el mínimo se alcanzan en $r^* \in (0, R)$ entonces

$$\frac{d}{dr} S(X)(r^*) = 0$$

Esto implica que

$$S(X)(r^*) = -\frac{L}{h} \Phi(X(r^*))$$

y por lo tanto se tiene

$$|S(X)(r^*)| \leq \frac{L}{h} \Phi(T_0)$$

En cualquiera de los tres casos, sabemos que

$$\|S(X)\|_\infty = \sup_{r \in [0, R]} |S(X)(r)| \leq \max\left\{\frac{L}{h} \Phi(T_0), T_0\right\}$$

□

2.3. Existencia y unicidad

En esta sección se demuestra la existencia y la unicidad del punto fijo de S , bajo ciertas hipótesis sobre las constantes del modelo.

Teorema 2.6 (Existencia modelo radial) *Sean \dot{M}_0 , h , $T_0 > T_{max}$, L , c , $\rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Supongamos que*

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Entonces existe un $T \in C([0, R]) \cap C^1([0, R])$ tal que $T(0) = T_0$ y

$$S(T) = T$$

Si además, $\frac{2\|\Phi'\|_{L^\infty([0, T_0])}}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} T_0 < 1$, entonces T es único.

DEMOSTRACIÓN. Para probar la existencia de la solución, argumentamos como sigue. La sucesión de funciones S_n definida de manera recursiva por

$$S_0 = T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$S_{n+1}(r) = \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)} dr_1\right) \left(\int_0^r \exp\left(-\int_0^{r_2} \frac{h}{cM(S_n)} dr_1\right) \frac{L}{cM(S_n)} \Phi(S_n) dr_2 + T_0\right)$$

Claramente $S_0 \in E$, además usando inducción y el lema anterior se tiene que $S_n \in E \forall n \in \mathbb{N}$ y en particular $\|S_n\|_\infty \leq C$ para alguna constante positiva C . Luego debe existir $T \in L^\infty([0, R])$ tal que existe una sub-sucesión de S_n converge débil-* a T . Es decir, para todo $\phi \in L^1([0, R])$ se tiene

$$\int_0^R S_n \phi dr \rightarrow \int_0^R T \phi dr$$

Sin pérdida de generalidad no se hará distinción entre la sub-sucesión y la sucesión. Además como $\Phi(S_n(r))$ también es una función acotada, entonces se puede extraer otra sub-sucesión de S_n tal que $\Phi(S_n(r))$ converge débil-* a una función $\bar{\Phi} \in L^\infty([0, R])$

$$\Phi(S_n) \xrightarrow{*} \bar{\Phi}$$

Por lo anterior

$$V(S_n) = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(S_n) dx\right) \rightarrow \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \bar{\Phi} dx\right) = V$$

Notemos además que para $r > 0$ fijo:

$$M(S_n) = -\frac{1}{r} \int_r^R r_1(\rho V(S_n) + \Phi(S_n)) dr_1 \rightarrow -\frac{1}{r} \int_r^R r_1(\rho V + \bar{\Phi}) dr_1 = M$$

Entonces $M(S_n) \rightarrow M$ *c.t.p.* en $[0, R]$. Además $M(S_n) \neq 0$ para $0 < r < R$, entonces

$$\frac{1}{M(S_n)} \rightarrow \frac{1}{M} \text{ c.t.p.}$$

Además

$$\frac{r}{\int_r^R r_1(\rho V(S_n) + \Phi(S_n))dr_1} \leq \frac{r}{(R-r)r(\rho V(S_n) + \Phi(T_0))} \leq \frac{1}{(R-r)(\rho V(S_n) + \Phi(T_0))}$$

Entonces por el Teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\frac{1}{M(S_n)} \rightarrow \frac{1}{M} \text{ en } L^p([0, r])$$

para todo $0 \leq r < R$ y $1 \leq p < \infty$. De esto obtenemos que

$$\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1 \rightarrow \int_0^r \frac{h}{cM}dr_1$$

Entonces por continuidad

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1\right) &\rightarrow \exp\left(\int_0^r \frac{h}{cM}dr_1\right) \\ \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1\right) &\rightarrow \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM}dr_1\right) \end{aligned}$$

para $0 \leq r < R$ fijo. Además,

$$\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1\right) \leq \exp\left(\int_r^R \frac{2hr_1dr_1}{c\rho(R^2 - r_1^2)V(S_n)}\right)$$

pero $\rho V(S_n) \geq \frac{1}{\Omega}(\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0))$, entonces

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1\right) &\leq \exp\left(\int_r^R \frac{2hr_1dr_1}{c\rho(R^2 - r_1^2)\frac{1}{\Omega}(\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0))}\right) \\ &\leq \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{-h}{c\frac{1}{\Omega}(\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0))}} \end{aligned}$$

Luego por Teorema de convergencia dominada resulta

$$\exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM(S_n)}dr_1\right) \rightarrow \exp\left(-\int_0^r \frac{h}{cM}dr_1\right) \text{ en } L^p([0, r])$$

Para $0 \leq r < R$ y $1 \leq p < \infty$, juntando todo lo anterior se tiene que S_n converge *c.t.p.* a T en $[0, R]$ y nuevamente por el Teorema de convergencia dominada se tiene que $S_n \rightarrow T$ en $L^p([0, R])$, entonces como

$$|\Phi(S_n) - \Phi(T)| \leq \|\Phi'\|_\infty |S_n - T|$$

se obtiene que $\Phi(S_n) \rightarrow \Phi(T)$ en $L^p([0, R])$ y por unicidad del limite

$$\bar{\Phi} = \Phi(T)$$

$$M = \frac{-1}{r} \int_r^R r_1(\rho V + \Phi(T)) dr_1$$

$$V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right)$$

$$T = \exp \left(\int_0^r \frac{h}{cM} dr_1 \right) \left(\int_0^r \exp \left(- \int_0^{r_2} \frac{h}{cM} dr_1 \right) \frac{L}{cM} \Phi(T) dr_2 + T_0 \right)$$

Para ver la unicidad, consideremos T_1 y T_2 puntos fijos de S con $M_1 = M(T_1)$, $V_1 = V(T_1)$ y $M_2 = M(T_2)$, $V_2 = V(T_2)$. Derivando T_1 y T_2 y después restando ambas expresiones, se obtiene:

$$-c \left(M_1 \frac{d}{dr} T_1 - M_2 \frac{d}{dr} T_2 \right) + h(T_1 - T_2) + L(\Phi(T_1) - \Phi(T_2)) = 0$$

Esto implica que

$$\frac{d}{dr} (T_1 - T_2) - \frac{1}{M_1} \frac{d}{dr} T_2 (M_1 - M_2) - \frac{h}{cM_1} (T_1 - T_2) - \frac{L}{cM_1} (\Phi(T_1) - \Phi(T_2)) = 0$$

Multiplicando a ambos lados por $T_1 - T_2$ queda

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dr} (T_1 - T_2) \right) (T_1 - T_2) - \frac{1}{M_1} \frac{d}{dr} T_2 (M_1 - M_2) (T_1 - T_2) \\ & - \frac{h}{cM_1} (T_1 - T_2)^2 - \frac{L}{cM_1} (\Phi(T_1) - \Phi(T_2)) (T_1 - T_2) = 0 \end{aligned}$$

Como Φ es una función monótona creciente y M_1 es negativa, entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (T_1 - T_2)^2 - \frac{h}{cM_1} (T_1 - T_2)^2 \leq \frac{1}{M_1} \frac{d}{dr} T_2 (M_1 - M_2) (T_1 - T_2)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\exp \left(-\frac{2h}{c} \int_0^r \frac{1}{M_1} dr_1 \right)$ a ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left((T_1 - T_2)^2 \exp \left(-\frac{2h}{c} \int_0^r \frac{1}{M_1} dr_1 \right) \right) \leq \\ & \exp \left(-\frac{2h}{c} \int_0^r \frac{1}{M_1} dr_1 \right) \frac{1}{M_1} \frac{d}{dr} T_2 (M_1 - M_2) (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Integrando lo anterior entre 0 y R se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (T_1 - T_2)^2 \exp \left(-\frac{2h}{c} \int_0^r \frac{1}{M_1} dr_1 \right) \leq \\ & \int_0^r \exp \left(-\frac{2h}{c} \int_0^{r_2} \frac{1}{M_1} dr_1 \right) \frac{1}{M_1} \frac{d}{dr} T_2 (M_1 - M_2) (T_1 - T_2) dr_2 \end{aligned}$$

Notemos que

$$M_1(r) - M_2(r) = \frac{1}{r} \int_r^R r_1 ((\rho(V_2 - V_1)) + \Phi(T_2(r_1)) - \Phi(T_1(r_1))) dr_1$$

Entonces

$$|M_1(r) - M_2(r)| \leq \frac{1}{r} \frac{(R^2 - r^2)}{2} ((\rho|V_2 - V_1|) + \|\Phi(T_2) - \Phi(T_1)\|_\infty)$$

Pero

$$\rho|V_1 - V_2| \leq \frac{1}{\Omega} \int_\Omega |\Phi(T_1) - \Phi(T_2)| dx \leq \|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)\|_\infty$$

Juntando lo anterior se obtiene la siguiente cota para $|M_1(r) - M_2(r)|$

$$|M_1(r) - M_2(r)| \leq \frac{R^2 - r^2}{r} \|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)\|_\infty$$

además

$$\frac{1}{|M_1|} = \frac{r}{\int_r^R (\rho V_1 + \Phi(T_1)) r_1 dr_1} \leq \frac{2r}{(R^2 - r^2) \rho V_1} = \frac{2r}{(R^2 - r^2) \frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(T_1) dx \right)}$$

Entonces

$$\frac{1}{|M_1|} \leq \frac{2r}{(R^2 - r^2) \left(\frac{\dot{M}_0}{\Omega} - \Phi(T_0) \right)}$$

Como además $\exp\left(-\frac{2h}{c} \int_0^{r^2} \frac{1}{M_1} dr_1\right)$ es creciente, entonces

$$\frac{1}{2} (T_1 - T_2)^2 \leq \frac{2}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} \int_0^r \left| \frac{d}{dr} T_2 \right| dr_2 \|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)\|_\infty \|T_1 - T_2\|_\infty$$

Como $\frac{d}{dr} T_2 = \frac{1}{cM_2} (hT_2 + L\Phi(T_2)) \leq 0$, entonces $\left| \frac{d}{dr} T_2 \right| = -\frac{d}{dr} T_2$ y por lo tanto

$$\frac{1}{2} (T_1 - T_2)^2 \leq \frac{2}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} (T_0 - T_2(r)) \|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)\|_\infty \|T_1 - T_2\|_\infty$$

Tomando supremo a ambos lados se obtiene que

$$\|T_1 - T_2\|_\infty \leq \frac{2}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} T_0 \|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)\|_\infty$$

Como $|\Phi(T_1) - \Phi(T_2)| \leq \|\Phi'\|_\infty \|T_1 - T_2\|_\infty$, entonces

$$\|T_1 - T_2\|_\infty \leq \frac{2\|\Phi'\|_\infty}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} T_0 \|T_1 - T_2\|_\infty$$

Como $\frac{2\|\Phi'\|_\infty}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} T_0 < 1$, entonces se tiene la unicidad del problema. \square

De lo anterior y del Teorema 2.3 podemos concluir del problema (P_{rad}) tiene solución. Además del lema 2.4 sabemos que el campo de temperaturas está entre 0 y T_0 . Cuando los parámetros \dot{M} , h , T_0 , L , c y $\rho > 0$ cambian, tenemos el siguiente resultado que ayuda a entender el comportamiento al interior del dominio:

Teorema 2.7 Sean \dot{M}_0 , h , $T_0 < T_{max}$, L , c , $\rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Supongamos que

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Si $T \in E$ tal que

$$S(T) = T$$

Entonces

$$T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{c \frac{(h+L\|\Phi'\|_\infty)}{\left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)\right)}} \leq T \leq T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{h}{c \left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} + \Phi(T_0)\right)}}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que como $0 \leq T \leq T_0$, entonces

$$\Phi(T) \leq \|\Phi'\|_\infty T$$

Luego si multiplicamos por $\frac{1}{M}$ la desigualdad se invierte, pues $M \leq 0$, entonces podemos asegurar que

$$\frac{d}{dr} T = \frac{1}{cM(T)} (hT + L\Phi(T)) \geq \frac{1}{cM(T)} (hT + L\|\Phi'\|_\infty T),$$

ya que T es un punto fijo de S . Por lo anterior:

$$\frac{d}{dr} T - \frac{T(h + L\|\Phi'\|_\infty)}{cM(T)} \geq 0$$

Entonces

$$\frac{d}{dr} \left(T \exp \left(- \int_0^r \frac{h + L\|\Phi'\|_\infty}{cM(T)} dr_1 \right) \right) \geq 0$$

Integrando lo anterior entre 0 y r se obtiene

$$T(r) \exp \left(- \int_0^r \frac{h + L\|\Phi'\|_\infty}{cM(T)} dr_1 \right) - T(0) \geq 0$$

$$T(r) \geq T_0 \exp \left(\int_0^r \frac{h + L\|\Phi'\|_\infty}{cM(T)} dr_1 \right)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{dr_1}{M(T)} &= - \int_0^r \frac{r_1 dr_1}{\int_{r_1}^R r_2 (\rho V(T) + \Phi(T)) dr_2} \\ &\geq - \int_0^r \frac{r_1 dr_1}{\int_{r_1}^R r_2 (\rho V(T)) dr_2} = - \int_0^r \frac{2r_1 dr_1}{(R^2 - r_1^2) \rho V(T)} = \frac{1}{\rho V(T)} \log \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Como $V(T) > 0$, se tiene

$$\int_0^r \frac{dr_1}{M(T)} \geq \frac{1}{\rho V(T)} \log \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

Entonces

$$T(r) \geq \exp \left(\frac{h + L \|\Phi'\|_\infty}{cV(T)} \log \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right) = \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{\frac{h+L\|\Phi'\|_\infty}{cV(T)}}$$

Además

$$\rho V(T) = \frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(T) dx \right) \geq \frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)$$

Entonces

$$T(r) \geq T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{\frac{(h+L\|\Phi'\|_\infty)}{c \left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0) \right)}}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{d}{dr} T - hT \frac{1}{cM(T)} \leq 0$$

Entonces multiplicando la expresión anterior por

$$\exp \left(- \int_0^r \frac{h}{cM(T)} dr_1 \right)$$

queda

$$\frac{d}{dr} \left(T \exp \left(- \int_0^r \frac{h}{cM(T)} dr_1 \right) \right) \leq 0$$

Integrando entre 0 y $r < R$, se obtiene

$$T(r) \exp \left(- \int_0^r \frac{h}{cM(T)} dr_1 \right) - T_0 \leq 0$$

y por lo tanto

$$T(r) \leq T_0 \exp \left(\int_0^r \frac{h}{cM(T)} dr_1 \right)$$

Por la definición de $M(T)$ tenemos que

$$\int_0^r \frac{dr_1}{M(T)} = - \int_0^r \frac{r_1 dr_1}{\int_{r_1}^R r_2 (\rho V(T) + \Phi(T)) dr_2}$$

Como $\Phi(T)$ es una función creciente y $T \leq T_0$, entonces

$$\int_0^r \frac{dr_1}{M(T)} \leq - \int_0^r \frac{r_1 dr_1}{\int_{r_1}^R r_2 (\rho V(T) + \Phi(T_0)) dr_2} = \frac{1}{\rho V(T) + \Phi(T_0)} \log \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

Por la definición de $V(T)$

$$\rho V(T) = \frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(T) dx \right) \leq \frac{\dot{M}_0}{|\Omega|}$$

Entonces como $\log\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \leq 0$ para $r < R$, se tiene

$$\int_0^r \frac{dr_1}{M(T)} \leq \frac{1}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} + \Phi(T_0)} \log\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

y con esto podemos concluir que

$$T(r) \leq T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{h}{c\left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} + \Phi(T_0)\right)}}$$

y se concluye lo deseado. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es que en el caso sin evaporación $\Phi = 0$, la única solución esta dada por

$$T = T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{h|\Omega|}{c\dot{M}_0}$$

Esto es interesante, pues permite ver gráficamente el comportamiento del campo de temperaturas en función de h , \dot{M}_0 , R y c .

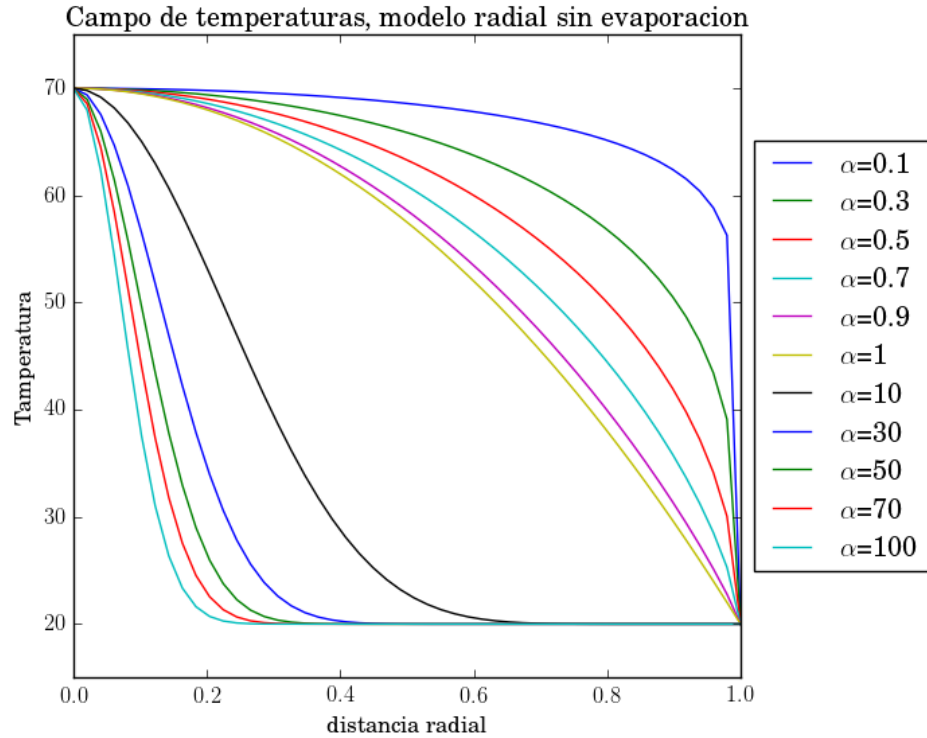


Figura 2.2: Comportamiento campo de temperaturas en función del coeficiente de convección h , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $\dot{M}_0 = 10$, $\rho = c = R = 1$

En la figura 2.2 se puede observar que si h crece, el campo de temperaturas se acerca a 0 en casi todas partes, excepto en 0, donde siempre vale T_0 , por otra parte cuando h tiende

a 0, entonces T tiende a T_0 casi en todas partes, excepto en el borde, donde siempre vale 0. De manera similar, cuando \dot{M}_0 crece, se tiene que T se acerca T_0 y cuando \dot{M}_0 decrece a 0, el campo de temperaturas se aproxima a 0.

Para el caso con evaporación se puede ver un comportamiento parecido utilizando Φ como

$$\Phi(x) = \exp\left(\frac{1}{100 - x}\right)$$

función que cumple las hipótesis del teorema. Además se considera una solución numérica dada por

$$T_{k+1}^{i+1} = T_{k+1}^i + \frac{R}{N}(hT_{k+1}^{i+1} + L\Phi(T_k^{i+1}))\frac{1}{cM_{k+1}^{i+1}}, \quad i = 0, \dots, N$$

$$M_{k+1}^i = -\frac{1}{i} \sum_{j=0}^i j(\rho V(T_k) + \Phi(T_k^j))\frac{R}{N}$$

donde T_k^i aproxima al campo de temperaturas T_k en el punto $i\Delta x$ con $\Delta x = R/N$, cabe mencionar que esta ecuación es no lineal y por lo tanto se puede resolver con el método de iteraciones de Picard. En este contexto T_k se refiere al campo de la k -ésima iteración de Picard, lo mismo aplica para el término M_k^i .

Se puede apreciar que cuando h tiende a ∞ ambas cotas tienden a 0, pero cuando h tiende a 0 la cota inferior no tiende a T_0 como sucedía en el caso sin evaporación, lo cual se puede apreciar en la figura 2.3. Análogamente, en 2.4 se observa que cuando \dot{M}_0 crece, ambas cotas tienden a T_0 , pero cuando \dot{M}_0 tiende a $\Phi(T_0)|\Omega|$ la cota inferior se acerca a 0, pero la cota superior no, ya que el exponente de esta cota se acerca $\frac{h}{c\Phi(T_0)}$. Además, en ambos gráficos se puede ver que la solución de la ecuación cumple las cotas.

Como se observa, este teorema es muy relevante, pues da una idea del comportamiento del campo de temperaturas al interior del dominio en función de todos los parámetros del problema. En particular se puede ver que la temperatura decae desde T_0 hasta 0 en el borde del disco $B(0, R)$. Otra cosa interesante es que la temperatura solo es T_0 (temperatura del líquido irrigado) en el origen y que luego en todos los puntos es menor estrictamente a esta temperatura.

En el siguiente teorema se puede apreciar una cota para la norma $L^2(\Omega)$ del campo de temperatura y también una cota para la norma $L^2(\Omega)$ de $T - T_0$, es decir, de la distancia de T a T_0 en $L^2(\Omega)$.

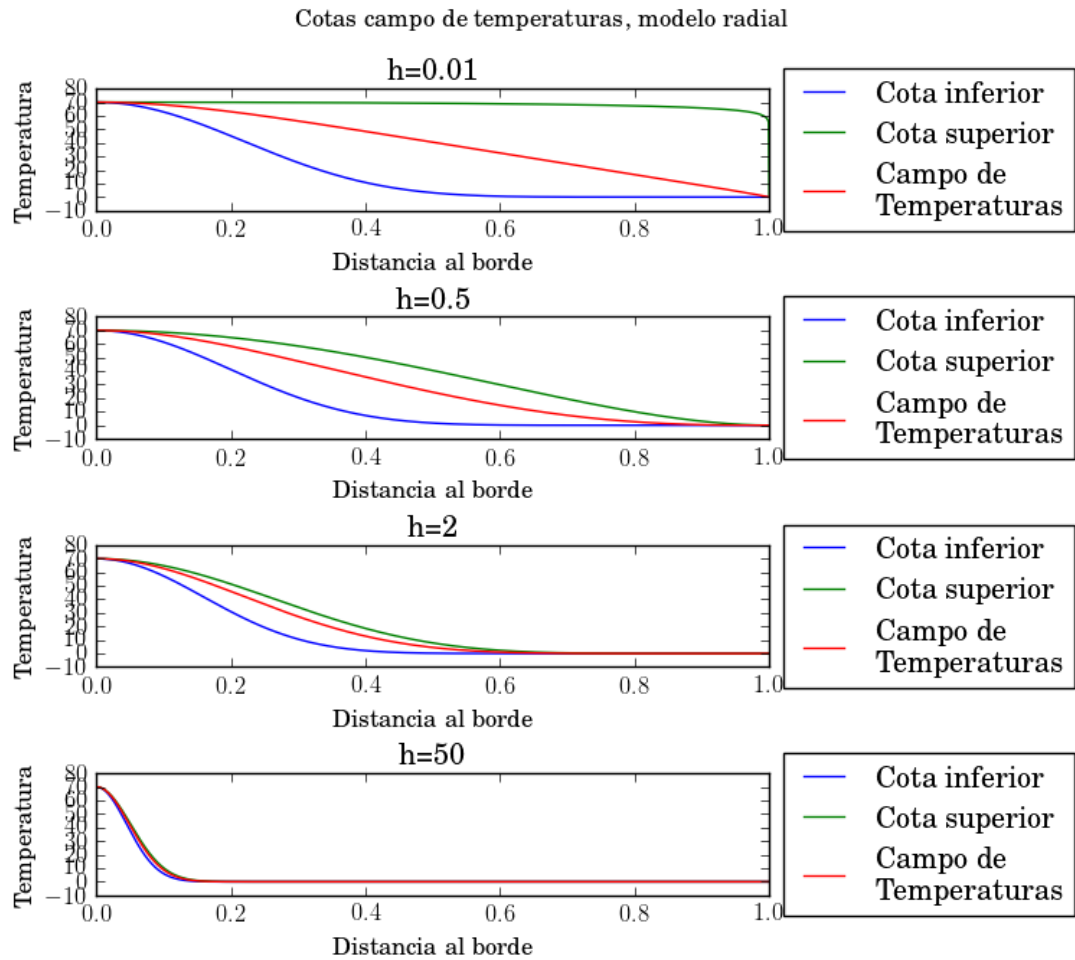


Figura 2.3: Comportamiento cotas campo de temperaturas en función del coeficiente de convección h , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $\dot{M}_0 = 10$, $\rho = c = R = 1$, $L = 2000$

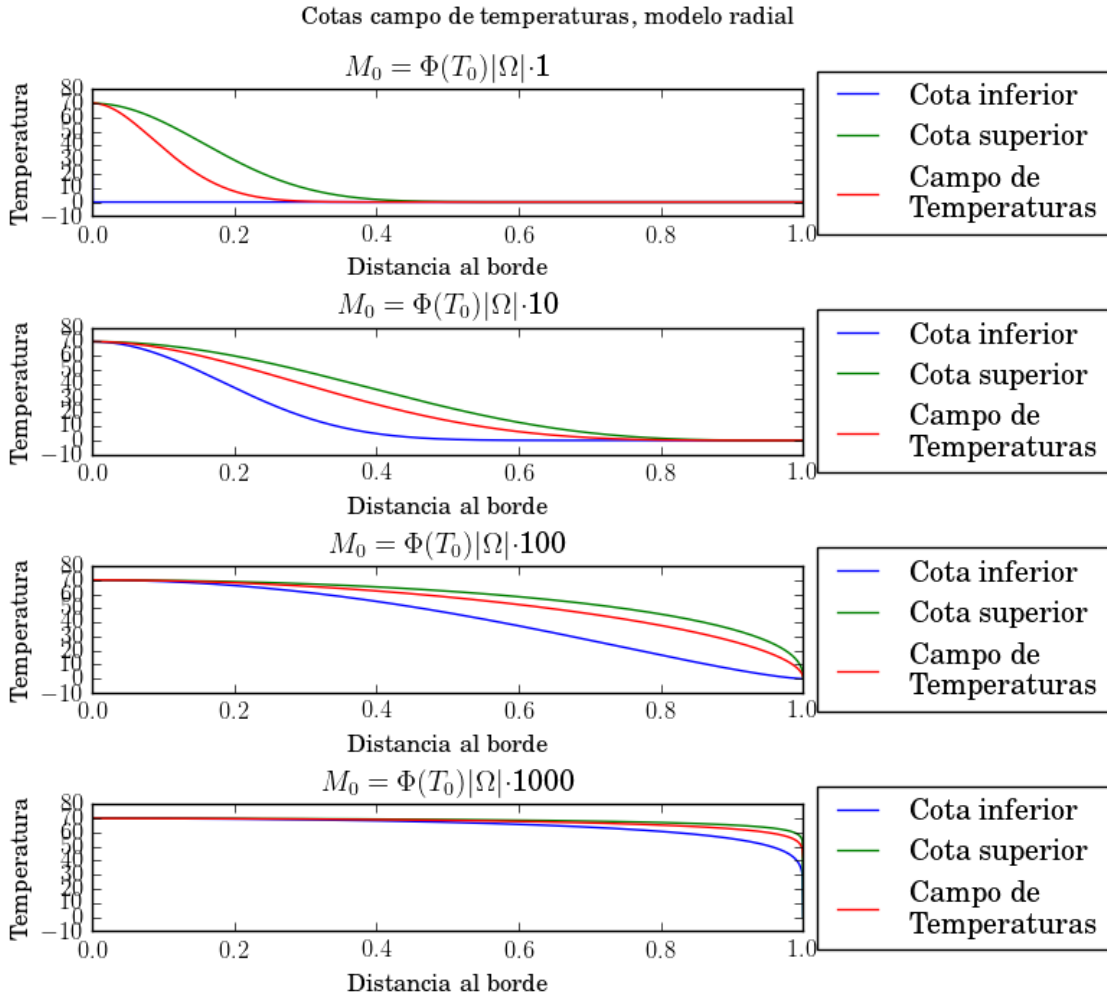


Figura 2.4: Comportamiento cotas campo de temperaturas en función del coeficiente de convección M_0 , modelo radial con evaporación, $T_0 = 70$, $T_a = 0$, $h = \rho = c = R = 1$, $L = 2000$

Teorema 2.8 Sean \dot{M}_0 , h , $T_0 > T_{max}$, L , c , $\rho > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ con $R > 0$. Si

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

y además, $T \in E$ es tal que

$$S(T) = T$$

Entonces

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{\dot{M}_0}{h}}$$

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(h + \Phi(T_0))|\Omega|^{3/2}}{\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0)}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $S(T) = T$, entonces

$$hT - cM(T)\frac{dT}{dr} + L\Phi(T) = 0 \quad (2.3)$$

Multiplicando por Tr e integrando entre 0 y R se obtiene

$$h \int_0^R T^2 r dr - c \int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T r dr + L \int_0^R \Phi(T) T r dr = 0$$

Notemos que

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T r dr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d}{dr} (T^2) M(T) r dr$$

Integrando por partes resulta

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T r dr = \frac{1}{2} \left(T^2 M(T) r \Big|_0^R - \int_0^R T^2 \frac{d}{dr} (M(T) r) dr \right)$$

Como

$$\frac{d}{dr} (M(T) r) = r(\rho V(T) + \Phi(T))$$

y

$$T^2 M(T) r \Big|_0^R = \frac{\dot{M}_0 T_0^2}{2\pi}$$

entonces

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T) T r dr = \frac{1}{2} \left(\dot{M}_0 T_0^2 - \int_0^R T^2 r (\rho V(T) + \Phi(T)) dr \right)$$

y por lo tanto

$$h \int_0^R T^2 r dr - \frac{c}{2} \frac{\dot{M}_0 T_0^2}{2\pi} + \frac{c}{2} \int_0^R T^2 r (\rho V(T) + \Phi(T)) dr + L \int_0^R \Phi(T) T r dr = 0$$

Así

$$h \int_0^R T^2 r dr \leq c \frac{\dot{M}_0 T_0^2}{4\pi}$$

De lo anterior y el hecho de que T sea una función radial, se tiene que

$$\|T\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{c\dot{M}_0 T_0^2}{2h}$$

que es lo mismo que

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{2h}}$$

Si se multiplica (2.3) por $(T_0 - T)r$ y se integran entre 0 y R , entonces queda

$$h \int_0^R T(T_0 - T)rdr - c \int_0^R \frac{dT}{dr} M(T)(T_0 - T)rdr + L \int_0^R \Phi(T)(T_0 - T)rdr = 0$$

Notemos que

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T)(T - T_0)rdr = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d}{dr} ((T - T_0)^2) M(T)rdr$$

y usando integración por partes se llega a

$$\int_0^R \frac{dT}{dr} M(T)(T - T_0)rdr = -\frac{1}{2} \int_0^R (\rho V(T) + \Phi(T))(T - T_0)^2 rdr$$

y por lo tanto

$$h \int_0^R T(T_0 - T)rdr - \frac{c}{2} \int_0^R (\rho V(T) + \Phi(T))(T - T_0)^2 rdr + L \int_0^R \Phi(T)(T_0 - T)rdr = 0$$

que es lo mismo que

$$\frac{c}{2} \int_0^R (\rho V(T) + \Phi(T))(T - T_0)^2 rdr = h \int_0^R T(T_0 - T)rdr + L \int_0^R \Phi(T)(T_0 - T)rdr$$

Como $\Phi(T) \geq 0$, entonces

$$\frac{c}{2} \int_0^R \rho V(T)(T - T_0)^2 rdr \leq h \int_0^R T(T_0 - T)rdr + L \int_0^R \Phi(T)(T_0 - T)rdr$$

Podemos integrar en θ entre 0 y 2π y se obtiene

$$\frac{c}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho V(T)(T - T_0)^2 rdr \leq \int_0^{2\pi} \int_0^R (hT + L\Phi(T))(T_0 - T)rdr$$

Usando el cambio de variables a coordenadas cartesianas

$$\frac{c}{2} \int_{\Omega} \rho V(T)(T - T_0)^2 dx \leq \int_{\Omega} (hT + L\Phi(T))(T_0 - T)dx$$

Usando la desigualdad de Hölder en el lado derecho, se subentiende

$$\frac{c}{2} \int_{\Omega} \rho V(T)(T - T_0)^2 dx \leq \|(hT + L\Phi(T))\|_{L^2(\Omega)} \|T_0 - T\|_{L^2(\Omega)}$$

es decir

$$\frac{c\rho V(T)}{2} \|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(hT + L\Phi(T))\|_{L^2(\Omega)}$$

Como $|T| \leq T_0$ y $\rho V(T) \geq \frac{1}{|\Omega|}(\dot{M}_0 - \Phi(T_0)) > 0$, entonces

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(h + \Phi(T_0))|\Omega|^{3/2}}{\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0)}$$

□

Lo anterior se puede ver como una distancia entre el campo de temperaturas T con respecto a T_0 y a la temperatura nula en función de \dot{M}_0 , h , la evaporación Φ y el área de donde se esta irrigando. Los resultados vistos hasta ahora son para el caso en que $T_a = 0$ y $\Phi(0) = 0$, sin embargo, utilizando el teorema 1.3 se pueden obtener los mismos resultados para el caso en que $\Phi(0) < 0$ y $T_a \neq 0$:

Teorema 2.9 Sean \dot{M}_0 , h , L , c , $\rho > 0$, $T_{max} > T_0 \geq T_a \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) \leq 0$ y $\Phi(T_0) \geq 0$. Sea también $\Omega = B(0, R)$ para $R > 0$. Si

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Entonces el problema (P) tiene al menos una solución T, ψ radiales. Si además

$$\frac{2\|\Phi'\|_\infty}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} T_0 < 1$$

y

$$\int_{\Omega} \psi dx = 0$$

entonces la solución radial es única.

En este caso el campo de temperaturas está entre $\bar{T} \geq 0$ y T_0 , además $T = \bar{T}$ en el borde y $T = T_0$ en el origen. Si $\Phi(0) < 0$ hay un cambio en la temperatura en el borde 0 a $\bar{T} > 0$ con respecto al caso $\Phi(0) = 0$. La explicación de esto se encuentra en que una evaporación negativa(condensación) significa una ganancia de energía y por lo tanto la temperatura aumenta en \bar{T} con respecto al caso $\Phi(0) = 0$. También se puede obtener el comportamiento limite del campo de temperaturas en función de h , \dot{M}_0 , $|\Omega|$ (área que está siendo irrigada), T_0 , T_a y Φ usando el Teorema 2.8, dicho comportamiento se puede resumir en lo siguiente

- Notemos que si $h \rightarrow \infty$, entonces

$$\bar{T} \rightarrow T_a$$

ya que \bar{T} cumple con

$$\bar{T} - T_a + \frac{L}{h}\Phi(\bar{T}) = 0$$

Luego de esto y del teorema 2.8 vemos que $T \rightarrow T_a$ cuando $h \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que si el coeficiente de convección con el ambiente es muy alto, entonces la temperatura estará muy cerca de la temperatura ambiental. Más aún tenemos una estimación de esa distancia.

- Si asumimos que no hay evaporación, entonces del teorema 2.8 se obtiene

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2h|\Omega|^{3/2}}{\dot{M}_0}$$

ya que $\bar{T} = T_a$. Luego es claro que cuando $h \rightarrow 0$, entonces $T \rightarrow T_0$, es decir, mientras más pequeña sea la convección con el ambiente, más cercano será el campo de temperaturas a T_0 , pero esto es casi en todas partes, ya que para $h > 0$ y $\Phi = 0$, en el borde siempre se tiene $T = T_a$. En presencia de evaporación no se obtiene lo mismo, de hecho si $T \in C^1(\Omega)$ es solución de (P) cuando $h = 0$, se debe cumplir la ecuación

$$-c\nabla T \nabla \psi + L\Phi(T) = c\dot{M}_0(T_0 - T)$$

y por lo tanto no se puede tener $T = T_0$. De hecho, en este caso la temperatura en el borde es

$$\bar{T} = T^*$$

donde T^* es la temperatura a la cual se anula la evaporación.

Capítulo 3

Modelo geometría general sin evaporación

Consideremos $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$ y Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ como en el Capítulo 1, y una función $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. El problema en este modelo es encontrar $\psi \in H^2(\Omega)$ y $T \in L^\infty(\Omega)$ con $\nabla T \nabla \psi \in L^2(\Omega)$ tales que cumplan lo siguiente

$$-\Delta \psi + \rho V = c \dot{M}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1a)$$

$$hT - c \nabla T \nabla \psi + c \dot{M}_0 f T = c \dot{M}_0 f T_0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1b)$$

donde $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} = 0$ en $\partial \Omega$ y $V = \frac{\dot{M}_0}{\rho |\Omega|}$.

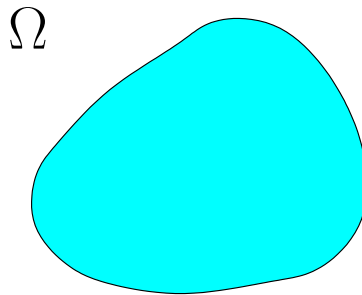


Figura 3.1: Dominio general

Notemos que este problema es similar al problema (P) con $\Phi = 0$, sin embargo en este caso se cambia el delta de Dirac por la función f , que se interpreta como la distribución que sigue la irrigación sobre Ω . Lo importante de este nuevo problema es que permitirá demostrar existencia y unicidad de las soluciones y obtener propiedades similares a las vistas en el Capítulo 2 para las soluciones radiales del problema (P) .

En la primera sección se define el problema en el nuevo modelo y que se entenderá por solución del mismo, en la segunda sección se ven resultados teóricos relacionados con la existencia de las soluciones y finalmente en la tercera sección se muestran resultados relativos a la existencia y unicidad de soluciones del problema.

3.1. Definición del nuevo problema

Al igual que lo hecho en el Capítulo 1, vamos a considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como un abierto acotado de frontera $C^{1,1}$, las constantes $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0, T_0 \geq T_a \geq 0$, donde estas representan los mismo que en el Capítulo 1, pero además vamos a asumir que la evaporación es nula (esto es $\Phi = 0$) y que la irrigación esta distribuida en Ω según una función $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$, con esto se representa el flujo másico irrigado por unidad de área como $f\dot{M}_0$ en lugar de $\delta_0\dot{M}_0$. Lo anterior significa que en este modelo la irrigación no esta limitada a un punto, sino que esta distribuida en el área de Ω . Según esto, el problema que se desea resolver en este modelo es:

Problema 3.1 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0, T_0 \geq T_a \geq 0, \Omega$ un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. El problema (P_f) es encontrar $T \in L^\infty(\Omega)$ y $\psi \in H^1(\Omega)$ tal que $\nabla T \nabla \psi$ y cumplen

$$-\Delta \psi + \rho V = f \dot{M}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.2a)$$

$$-c \nabla \psi \nabla T + h(T - T_a) = f \dot{M}_0 c (T_0 - T) \quad \text{en } \Omega \quad (3.2b)$$

y $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} = 0$ en $\partial \Omega$, donde $V = \frac{\dot{M}_0}{\rho |\Omega|}$.

Notemos que pedir $\nabla T \nabla \psi \in L^2(\Omega)$ tiene sentido, pues para $u \in (H^1(\Omega))^2$ y $T \in L^2(\Omega)$, se puede definir $\nabla T \cdot u$ como una distribución, de manera de que para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene la expresión:

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot u \phi dx = - \int_{\Omega} \text{div}(u) T \phi - \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot u T dx$$

La principal diferencia de este problema con lo visto en los capítulos anteriores es que se cambia el delta de Dirac por una función f , la cual es acotada, positiva y con norma unitaria en $L^1(\Omega)$, además se pide que el campo de temperaturas este en $L^\infty(\Omega)$ en vez de ser una función continua. Estos dos cambios son para tener un problema más fácil de resolver, mas aún, si se considera por ejemplo

$$g_\varepsilon = 1_{B(0,\varepsilon)} \Big/ \int_{B(0,\varepsilon)} dx$$

donde 1_A la indicatriz del conjunto A , se obtiene un problema aproximado (P_{g_ε}) , tal que g_ε tiende a δ_0 en el sentido de las distribuciones cuando ε tiende a 0, los cuales tienen asociado una sucesión de soluciones que, como veremos más adelante, tienden a una solución del problema (P) .

Para resolver el problema (P_f) se define el operador S de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ y se va a demostrar que es una biyección desde su dominio en $L^2(\Omega)$.

Definición 3.1 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0, T_0 \geq T_a \geq 0, \Omega$ un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ un $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Se define el operador $S : D(S) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ para $f \in L^\infty(\Omega)$ como

$$S(T) = hT - c \nabla T \nabla \psi + c \dot{M}_0 T f, \quad T \in D(S)$$

donde $D(S) = \{T \in L^2(\Omega) \mid \nabla T \nabla \psi \in L^2(\Omega)\}$ y $\psi \in H^2(\Omega)$ es la única función que cumple

$$-\Delta \psi + c\rho V = M_0 f \quad \text{en } \Omega \quad (3.3)$$

con $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$, $V = \frac{M_0}{\rho|\Omega|}$ y $\int_{\Omega} \psi dx = 0$.

Para que el operador anterior este bien definido, hay que ver la existencia y unicidad del $\psi \in H^2(\Omega)$ que cumple (3.3) y $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$, para lo cual se tiene el siguiente Teorema demostrado en [10]:

Teorema 3.2 *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea también $g \in L^2(\Omega)$ con $\int_{\Omega} g dx = 0$. Entonces existe una única función $u \in H$ tal que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Donde

$$H = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v dx = 0 \right\}$$

Además existe una constante que depende de Ω tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.5)$$

En el teorema anterior, la hipótesis de que Ω tenga frontera de clase $C^{1,1}$ puede ser cambiada por Ω conjunto poligonal o Ω convexo. Lo importante para este trabajo es que la hipótesis sea tal que la solución de (3.1a) este en $H^2(\Omega)$.

En la definición de S se pide $\int_{\Omega} \psi dx = 0$ para tener la unicidad de ψ . Esto no afecta el problema, pues lo que realmente interesa es $-\nabla \psi$ que representa el flujo másico. Además en este operador no aparece T_a , pero como vimos en el teorema 1.3 (en este caso las soluciones son menos regulares, pero el procedimiento es análogo), el problema se puede reducir al caso $T_a = 0$ usando el cambio $T = \hat{T} + T_a$ y $T_0 = \hat{T}_0 + T_a$. En lo que viene se demostrarán propiedades necesarias para ver la biyectividad del operador S .

3.2. Espacios $X_u(\Omega)$ e $Y_u(\Omega)$

Como se vio en la sección anterior, para $T \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ se puede definir $\nabla T \cdot u$ como una distribución, a partir de esto se puede pedir que dicha distribución sea una función en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto se pueden definir los siguientes espacios:

Definición 3.3 *Para $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y $u \in (H^1(\Omega))^d$, tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz de \mathbb{R}^d , se definen los espacios de Banach*

$$X_u(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \cdot u \in L^2(\Omega)\}$$

$$Y_u(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \cdot u \in L^1(\Omega)\}$$

con sus respectivas normas

$$\|v\|_{X_u(\Omega)} = \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v \cdot u\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

$$\|v\|_{Y_u(\Omega)} = \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v \cdot u\|_{L^1(\Omega)}^2}$$

Con estas normas, ambos espacios son espacios de Banach.

Según la definición del operador S , es claro que para $u = \nabla \psi$ se tiene $X_u(\Omega) = D(S)$, luego como S es un operador no acotado, se necesitan resultados relativo al limite de funciones en los espacios $X_u(\Omega)$ y también para $Y_u(\Omega)$ para estudiar las propiedades de S , los cuales se presentan a continuación:

Teorema 3.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$, entonces para todo $z \in Y_u(\Omega)$ existe una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \text{ en } L^2(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla z_n \cdot u = \nabla z \cdot u \text{ en } L^1(\Omega)$$

Este teorema fue demostrado en la Sección 3 de [9] y fue utilizado para resolver ecuaciones de transporte en estado permanente cuando la velocidad del transporte tiene componente normal 0. El Teorema 3.4 básicamente dice que las funciones con soporte compacto en $\overline{\Omega}$ son densas en $Y_u(\Omega)$.

El siguiente teorema nos dice que $L^\infty(\Omega) \cap X_u(\Omega)$ es denso en $X_u(\Omega)$. Esto es importante pues, junto con el Teorema 3.4, permitirá integrar por partes funciones de $X_u(\Omega)$. Este resultado fue demostrado en [1] y fue usado para integrar por partes funciones es $X_u(\Omega)$ cuando $\text{div}(u) = 0$. En nuestro caso en lugar de asumir $\text{div}(u) = 0$, se supondrá que $\text{div}(u) \in L^\infty(\Omega)$.

Definición 3.5 *Se define la truncatura de nivel $n > 0$ para $t \in \mathbb{R}$ como*

$$B_n(t) = \begin{cases} t & -n \leq t \leq n \\ n & t > n \\ -n & t < -n \end{cases}$$

Proposición 3.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz, $u \in (H^1(\Omega))^d$. Sea $z \in X_u(\Omega)$ y definamos*

$$E(c) = \{x \in \Omega \mid z(x) = c\}$$

para $c \in \mathbb{R}$, entonces $B_n(z) \in X_u$, más aún se tiene que

$$u \cdot \nabla B_n(z) = 0 \text{ c.t.p. en } E(n) \cup E(-n)$$

y

$$u \nabla B_n(z) = \begin{cases} B'_n(z) u \nabla z & \Omega \setminus (E(n) \cup E(-n)) \\ 0 & E(n) \cup E(-n) \end{cases}$$

Proposición 3.7 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen

1. B_n es fuertemente continua de X_u en $X_u(\Omega)$.
2. Sea $z \in X_u(\Omega)$. Entonces, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) = z \text{ fuerte en } X_u(\Omega)$$

Junto con lo anterior se puede obtener una noción de traza de las funciones en $X_u(\Omega)$ dado por el siguiente teorema:

Proposición 3.8 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$ con $\operatorname{div}(u) \in L^\infty(\Omega)$ y $r > d$ un número real. Denotemos por r' al número real tal que $1/r + 1/r' = 1$. La función $\gamma_n : z \rightarrow (zu)n|_{\partial\Omega}$ definida en $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ puede ser extendida por continuidad a una función lineal continua, que sigue llamando γ_n , desde Y_u en $W^{-1/r', r'}(\partial\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Para $z \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ y $\phi \in W^{1,r}(\Omega)$ se cumple

$$\int_{\Omega} \nabla zu \phi dx + \int_{\Omega} \nabla \phi u z dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) z \phi dx = \int_{\Omega} (zu)n \phi dS$$

Entonces

$$\left| \int_{\Omega} (zu)n \phi dS \right| \leq \|\nabla zu\|_{L^1(\Omega)} \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)} \|\nabla \phi\|_{L^r(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div} u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

Luego por las desigualdades de Sobolev, existen $C_{1,r}$ y $C_{2,r}$ tales que

$$\|u\|_{L^{\frac{2r}{r-2}}(\Omega)} \leq C_{1,r} \|u\|_{(H^1(\Omega))^d}$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{2,r} \|\phi\|_{W^{1,r}(\Omega)}$$

Por lo tanto

$$\left| \int_{\Omega} (zu)n \phi dS \right| \leq \left(\sqrt{(\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} C_{1,r} + C_{2,r} \sqrt{|\Omega|} \|\operatorname{div} u\|_{L^\infty(\Omega)})^2 + C_{2,r}^2} \right) \|z\|_{Y_u} \|\phi\|_{W^{1,r}(\Omega)}$$

Sea $\mu \in W(1 - 1/r, r)(\partial\Omega)$, entonces debe existir $\phi \in W^{1,r}(\Omega)$ tal que $\phi = \mu$ en $\partial\Omega$, entonces

$$\left| \int_{\Omega} (zu)n \mu dS \right| \leq \left(\sqrt{(\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} C_{1,r} + C_{2,r} \sqrt{|\Omega|} \|\operatorname{div} u\|_{L^\infty(\Omega)})^2 + C_{2,r}^2} \right) \|z\|_{Y_u} \|\mu\|_{W^{1-1/r, r}(\Omega)}$$

Entonces zun debe cumplir la siguiente cota para lo norma dual de $W^{1-1/r, r}(\Omega)$

$$\|uzn\|_{W^{-1/r', r'}(\Omega)} \leq$$

$$\left(\sqrt{(\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} C_{1,r} + C_{2,r} \sqrt{|\Omega|} \|\operatorname{div} u\|_{L^\infty(\Omega)})^2 + C_{2,r}^2} \right) \|z\|_{Y_u}$$

Luego como $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en Y_u , entonces γ_n puede ser extendida de manera continua y única tal que

$$\|\gamma_n\|_{\mathcal{L}(Y_u; W^{-1/r', r'}(\Omega))} \leq \sqrt{(\|u\|_{(H^1(\Omega))^d} C_{1,r} + C_{2,r} \sqrt{|\Omega|} \|\operatorname{div} u\|_{L^\infty(\Omega)})^2 + C_{2,r}^2}$$

□

Este teorema fue demostrado en [1] para dar sentido a las funciones de $X_u(\Omega)$ en el borde de Ω cuando $\operatorname{div}(u) = 0$ y así poder pedir una condición de borde sobre soluciones de ecuaciones de transporte en estado permanente, cuando la componente normal de la velocidad del transporte no es nula en todo el borde.

Ahora veamos la integración por partes de funciones en $Y_u(\Omega)$ para $u \in H^1(\Omega)$ con $\operatorname{div}(u) \in L^\infty(\Omega)$:

Proposición 3.9 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$ con $\operatorname{div}(u) \in L^\infty(\Omega)$ y $u \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces para todo $v, w \in X_u$ se tiene la siguiente fórmula*

$$\int_{\Omega} (u \nabla w) v dx + \int_{\Omega} (u \nabla v) w dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v w dx$$

y además

$$\int_{\Omega} (u \nabla v) v dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v^2 dx$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $(v_k = T_k(v))_{k \geq 0}$ y $(w_j)_{j \geq 0}$ sucesiones en X_u y $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ respectivamente, tales que

$$v_k \rightarrow v \text{ en } X_u$$

$$w_j \rightarrow w \text{ en } Y_u$$

Entonces

$$\int_{\Omega} (u \nabla(w_j)) v_k dx + \int_{\Omega} (u \nabla v_k)(w_j) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v_k(w_j) dx$$

Tomando $j \rightarrow \infty$

$$w_j \rightarrow w \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\nabla w_j u \rightarrow \nabla w u \text{ en } L^1(\Omega)$$

Como $\operatorname{div}(u), v_k \in L^\infty(\Omega)$, entonces la igualdad anterior se sigue manteniendo en el límite

$$\int_{\Omega} (u \nabla(w)) v_k dx + \int_{\Omega} (u \nabla v_k)(w) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v_k(w) dx$$

Tomando $k \rightarrow \infty$

$$v_k \rightarrow v \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\nabla v_k u \rightarrow \nabla v u \text{ en } L^2(\Omega)$$

Entonces como $\operatorname{div}(u) \in L^\infty(\Omega)$ y $w \in Y_u$ se puede pasar al limite en la última igualdad

$$\int_{\Omega} (u \nabla(w)) v dx + \int_{\Omega} (u \nabla v)(w) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v(w) dx$$

De esto último, tomamos $w = v$ y queda

$$\int_{\Omega} (u \nabla v) v dx = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) v^2 dx$$

□

Este último teorema es importante pues va a permitir demostrar la epiyectividad del operador S . Para demostrar propiedades del operador, necesitaremos ver que la parte positiva y el modulo de una función en $Y_u(\Omega)$ está en $Y_u(\Omega)$, para lo cual se tienen los siguiente resultados:

Lema 3.10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$ con $u \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$, sea $T \in Y_u(\Omega)$ y $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{R})$ tal que G' es acotada. Entonces $G(T) \in Y_u(\Omega)$ y*

$$\nabla G(T) \cdot u = G'(T) \nabla T \cdot u$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $C > 0$ tal que

$$\|G'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

Entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$|G(x) - G(y)| \leq C|x - y|$$

Luego, sea $T_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \text{ en } L^2(\Omega), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla T_n u = \nabla T u \text{ en } L^1(\Omega)$$

Notemos que en el sentido de las distribuciones

$$\int_{\Omega} \nabla G(T) u \phi dx = - \int_{\Omega} G(T) u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} G(T) \phi \operatorname{div}(u) dx$$

Para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Por otra parte, por regla de la cadena

$$\nabla G(T_n) u = G'(T_n) \nabla T_n u$$

y por lo tanto se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla G(T_n) u \phi dx = - \int_{\Omega} G(T_n) u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} G(T_n) \phi \operatorname{div}(u) dx$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Luego, como $T_n \rightarrow T$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(T_n) = G(T) \text{ en } L^2(\Omega)$$

por lo tanto

$$-\int_{\Omega} G(T_n)u\nabla\phi dx - \int_{\Omega} G(T_n)\phi\operatorname{div}(u)dx \rightarrow -\int_{\Omega} G(T)u\nabla\phi dx - \int_{\Omega} G(T)\phi\operatorname{div}(u)dx$$

es decir,

$$\int_{\Omega} \nabla G(T_n)u\phi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla G(T)u\phi dx$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Además

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla G(T_n)u - G'(T)\nabla Tu| dx &= \int_{\Omega} |G'(T_n)\nabla T_n u - G'(T)\nabla Tu| dx \\ &= \int_{\Omega} |G'(T_n)\nabla T_n \nabla\psi + G'(T_n)\nabla Tu - G'(T_n)\nabla Tu - G'(T)\nabla Tu| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |G'(T_n)| |\nabla Tu - \nabla T_n u| dx + \int_{\Omega} |G(T_n) - G(T)| |\nabla Tu| dx \end{aligned}$$

Por otro lado, como G es acotada

$$|G(T_n) - G(T)| |\nabla Tu| \leq C |\nabla Tu|$$

y como $G(T_n) \rightarrow G(T)$ c.t.p. en Ω , del Teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\int_{\Omega} |G(T_n) - G(T)| |\nabla Tu| dx \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como $\nabla T_n u$ converge a ∇Tu en $L^1(\Omega)$ y G' es acotada, entonces

$$\int_{\Omega} |G'(T_n)| |\nabla Tu - \nabla T_n u| dx \rightarrow 0$$

y de esto se concluye que

$$\int_{\Omega} |\nabla G(T_n)u - G'(T)\nabla Tu| dx \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

es decir, $\nabla G(T_n)u$ converge a $G'(T)\nabla Tu$ en $L^1(\Omega)$. Como $G'(\cdot)$ es una función acotada, tenemos que $G'(T)\nabla T\nabla\psi \in L^1(\Omega)$. En particular, esto implica convergencia débil:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla G(T_n)u\phi dx = \int_{\Omega} G'(T)\nabla Tu\phi dx \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pero como

$$\int_{\Omega} \nabla G(T_n)u\phi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla G(T)u\phi dx \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se debe tener que $\nabla G(T)u = G'(T)\nabla Tu$ en el sentido de las distribuciones. Esto implica $\nabla G(T)u \in L^1(\Omega)$ y

$$\nabla G(T)u = G'(T)\nabla Tu$$

□

Lema 3.11 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$ con $u \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$, $T \in U_u(\Omega)$, entonces $|T| \in Y_u(\Omega)$ y

$$\nabla|T|u = \text{sign}(T)\nabla Tu$$

donde

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. sea $G_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$. Notemos que

$$G'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}$$

Como

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon}$$

Entonces

$$|G'_\varepsilon(x)| \leq 1$$

Por el Lema anterior

$$G_\varepsilon(T) \in Y_u(\Omega)$$

y

$$\nabla G_\varepsilon(T)u = G'_\varepsilon(T)\nabla Tu$$

Por el Teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G'_\varepsilon(x) = \text{sign}(x) \text{ en } L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p < \infty$, por esto

$$\nabla G_\varepsilon(T)u = G'_\varepsilon(T)\nabla Tu \rightarrow \text{sign}(T)\nabla Tu$$

en $L^1(\Omega)$, pero además

$$\int_{\Omega} \nabla G_\varepsilon(T)u \phi dx = - \int_{\Omega} G_\varepsilon(T)u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} \text{div}(u)G_\varepsilon(T)\phi dx$$

Nuevamente por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x) = |x| \text{ en } L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p < \infty$. Por lo anterior

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} G_\varepsilon(T)u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} \Delta \psi G_\varepsilon(T)\phi dx \\ &= \int_{\Omega} |T|u \nabla \phi dx - \int_{\Omega} \text{div}(u)|T|\phi dx = \int_{\Omega} \nabla|T|u \phi dx \end{aligned}$$

Luego por unicidad

$$\int_{\Omega} \nabla|T|u \phi dx = \int_{\Omega} \text{sign}(T)\nabla Tu \phi dx$$

Como lo anterior es para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces

$$\nabla|T|u = \text{sign}(T)\nabla Tu$$

y además $\nabla|T|u \in L^1(\Omega)$ □

Lema 3.12 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tal que Ω es un abierto acotado de frontera Lipschitz y $u \in (H^1(\Omega))^d$ con $u \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$, $T \in Y_u(\Omega)$, entonces $T^+ \in Y_u(\Omega)$ y además

$$\nabla T^+ u = 1_{T>0} \nabla T u$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

Por el lema anterior

$$T^+ \in X_u(\Omega)$$

y además

$$\nabla T u = \frac{1}{2}(\text{sign}(T) + 1) \nabla T u = 1_{T>0} \nabla T u$$

□

3.3. Existencia y unicidad

En lo que viene se demostrará la existencia de solución para el problema (P_f) . Para esto primero se verá que S es un operador no acotado de dominio denso y luego usando resultados de la sección anterior se demostrará que es un operador sobreyectivo, con esto se tendrá la existencia de soluciones del problema y también la unicidad. También se demostrará que el campo de temperaturas debe cumplir que $T_a \leq T \leq T_0$ al igual que en el modelo con simetría radial y que debe cumplir las mismas cotas en $L^2(\Omega)$. Luego se verá que para $f \in L^2(\Omega)$ también se tiene existencia y unicidad y que para el problema (P) (con $\Phi = 0$) solo se puede asegurar la existencia. Para esto vamos a utilizar los siguientes teoremas y definiciones que se encuentran en [4]

Definición 3.13 Sea X un espacio de Hilbert, sea $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal, se dice que es no acotado si existe $C > 0$ tal que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in D(A)$$

Si $D(A)$ es denso en X se dice que A es un operador de dominio denso y si además el grafo de A es cerrado, se dice que A es cerrado.

Definición 3.14 Sea X un espacio de Hilbert y $A : D(A) \rightarrow X$ un operador no acotado densamente definido, se define el adjunto de A como $A^* : D(A^*) \rightarrow X$ tal que

$$D(A^*) = \{v \in X \mid \exists c > 0 \text{ tal que } (Au, v) \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)\}$$

en lo anterior (\cdot, \cdot) es el producto interno en X . Para $v \in D(A^*)$, se define A^*v como el único operador lineal

$$(A^*v, u) = (v, Au) \text{ para todo } u \in D(A)$$

Teorema 3.15 Sea X un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal no acotado cerrado y de dominio denso, las siguientes son equivalentes:

- A es sobreyectivo.
- Existe una constantes $C > 0$ tal que

$$\|v\| \leq C\|A^*v\| \text{ para todo } v \in D(A^*)$$

Según lo anterior nos centraremos en probar que S es un operador no acotado cerrado de dominio denso en $L^2(\Omega)$.

Teorema 3.16 Sean $M_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. S es un operador lineal cerrado con dominio denso en $L^2(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in C_0^\infty(\Omega)$, claramente

$$\nabla\psi\nabla T \in L^2(\Omega)$$

Entonces $C_0^\infty(\Omega) \subset D(S)$, luego como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$, entonces $D(S)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

Ahora veamos que S es cerrado: sea $(T_n)_{n \geq 1} \subset D(S)$ un sucesión tal que $T_n \rightarrow T$ en $L^2(\Omega)$ y $S(T_n) \rightarrow y$ en $L^2(\Omega)$, sea además $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} S(T_n)\phi dx = \int_{\Omega} hT_n\phi dx - c \int_{\Omega} \nabla T_n \nabla\psi\phi dx + cM_0 \int_{\Omega} fT_n\phi dx$$

Integrando por partes el término $\int_{\Omega} \nabla T_n \nabla\psi\phi dx$ se obtiene:

$$\int_{\Omega} S(T_n)\phi dx = \int_{\Omega} hT_n\phi dx + c \int_{\Omega} T_n \nabla\psi \nabla\phi dx + c\rho V \int_{\Omega} T_n\phi dx$$

Luego por la convergencia de $S(T_n)$ y T_n queda:

$$\int_{\Omega} y\phi dx = \int_{\Omega} hT\phi dx + c \int_{\Omega} T \nabla\psi \nabla\phi dx + c\rho V \int_{\Omega} T\phi dx$$

De lo anterior se puede deducir que $\text{div}(T\nabla\psi) = hT + c\rho VT + y$ en el sentido de las distribuciones y por lo tanto $\nabla T \nabla\psi \in L^2(\Omega)$, es decir, $T \in S(L)$, ya que

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla\psi\phi dx = - \int_{\Omega} \text{div}(T\nabla\psi)\phi dx - \int_{\Omega} \Delta\psi T\phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

De lo anterior se deduce que

$$\int_{\Omega} y\phi dx = \int_{\Omega} hT\phi dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla\psi\phi dx + cM_0 \int_{\Omega} fT\phi dx = \int_{\Omega} S(T)\phi dx$$

con esto $y = S(T)$ y se concluye que S es un operador cerrado con dominio denso en $L^2(\Omega)$ \square

Teorema 3.17 Sean $M_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. El operador adjunto de S es

$$S^*(v) = hv + c\nabla v \nabla\psi + c\rho Vv, \text{ para } v \in D(S^*)$$

y $D(S^*) = D(S)$

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos cual es el dominio de S^* . Por definición sabemos que

$$D(S^*) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \exists C > 0 \text{ tal que } \left| \int_{\Omega} S(T)v dx \right| \leq C \|T\|_{L^2(\Omega)}, \forall T \in D(S) \right\}$$

Sea $\phi \in D(S)$ y $T \in D(S)$, se tiene que

$$\int_{\Omega} S(T)\phi dx = \int_{\Omega} hT\phi dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx + c\dot{M}_0 \int_{\Omega} fT\phi dx$$

Como $D(S) = X_{\nabla\psi}(\Omega)$, entonces podemos integrar por partes y queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(T)\phi dx &= \int_{\Omega} hT\phi dx + c \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi T dx + c \int_{\Omega} \Delta \psi T \phi dx + c\dot{M}_0 \int_{\Omega} fT\phi dx \\ &= \int_{\Omega} hT\phi dx + c \int_{\Omega} T \nabla \psi \nabla \phi dx + c\rho V \int_{\Omega} T\phi dx \end{aligned}$$

entonces

$$\left| \int_{\Omega} S(T)\phi dx \right| \leq ((c\rho V + h) \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + c\|\nabla \phi \nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}) \|T\|_{L^2(\Omega)}$$

Luego $D(S) \subset D(S^*)$. Sean $v \in D(S^*)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces por definición del operador adjunto se tiene

$$\int_{\Omega} \phi S^*(v) dx = \int_{\Omega} S(\phi)v_n dx = \int_{\Omega} h\phi v dx - c \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi v_n dx + c\dot{M}_0 \int_{\Omega} f\phi v_n dx$$

Además, como $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, se tiene que

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi v dx - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi v dx$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \phi S^*(v) dx = \int_{\Omega} h\phi v dx + c \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi \phi dx + c\rho V \int_{\Omega} \phi v dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

De esto último, como $S^*(v) \in L^2(\Omega)$, entonces

$$\nabla v \nabla \psi \in L^2(\Omega)$$

y por lo tanto $v \in X_{\nabla\psi}(\Omega) = D(S)$ y se concluye que $D(S^*) = D(S)$ y además

$$S^*(v) = hv + c\nabla v \nabla \psi v + c\rho V v$$

□

Teorema 3.18 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Para todo $T \in D(S)$:

$$\left(h + \frac{1}{2}c\rho V\right) \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} S(T)T dx = \int_{\Omega} S^*(T)T dx$$

DEMOSTRACIÓN. Para $T \in S(L) = X_{\nabla\psi}(\Omega)$ se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla\psi \nabla T T dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta\psi T^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\dot{M}_0 f - \rho V) T^2 dx$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(T)T dx &= h \int_{\Omega} T^2 dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla\psi T dx - c\dot{M}_0 \int_{\Omega} f T^2 dx \\ \int_{\Omega} S(T)T dx &= h \int_{\Omega} T^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} (\dot{M}_0 f + \rho V) T^2 dx \end{aligned}$$

Como $f \geq 0$, entonces se concluye lo pedido. \square

Teorema 3.19 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. El operador $S : D(S) \rightarrow L^2(\Omega)$ es biyectivo.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior sabemos que

$$\left(h + \frac{1}{2}c\rho V\right) \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} S^*(T)T dx \leq \|S^*(T)\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{S^2(\Omega)}$$

por lo tanto

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(h + \frac{1}{2}c\rho V\right)^{-1} \|S^*(T)\|_{L^2(\Omega)}$$

análogamente

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(h + \frac{1}{2}c\rho V\right)^{-1} \|S(T)\|_{L^2(\Omega)}$$

De la primera desigualdad se concluye la epiyectividad de S y de la segunda, si $S(T) = 0$, entonces $T = 0$ y por lo tanto S es un operador inyectivo. \square

Con lo anterior ya se puede asegurar la existencia y unicidad para el problema (P_f) , pero además se pueden demostrar propiedades sobre estas soluciones, como las vistas en el capítulo anterior:

Teorema 3.20 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Entonces existe un único T en $D(S)$ tal que

$$S(T) = c\dot{M}_0 T_0 f$$

Además T cumple las siguientes propiedades

1. $0 \leq T \leq T_0$
2. $\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{h}} T_0$
3. $\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2h|\Omega|^{3/2}}{c\dot{M}_0} T_0$

DEMOSTRACIÓN. La existencia y unicidad del T se tiene de la biyectividad del operador S . Probemos que $T \geq 0$: Definamos $v = \min(T, 0) = -(-T)^+$, entonces

$$\int_{\Omega} S(v)v dx = h \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)v^2 dx$$

Además por definición de S y del Lema 3.12

$$\int_{\Omega} S(v)v dx = h \int_{\Omega} 1_{T \leq 0} T^2 dx - c \int_{\Omega} 1_{T \leq 0} \nabla T T dx + c\dot{M}_0 \int_{\Omega} f T^2 1_{T \leq 0} dx = \int_{\Omega} S(T)v dx$$

Luego como $S(T) = c\dot{M}_0 T_0 f$, entonces

$$c\dot{M}_0 \int_{\Omega} T_0 f v dx = h \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)v^2 dx$$

Notemos que

$$c\dot{M}_0 \int_{\Omega} T_0 f v dx = c\dot{M}_0 \int_{T \leq 0} T_0 T f dx \leq 0$$

por lo tanto

$$0 \geq h \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)v^2 dx$$

Entonces $\|T^-\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} = 0$, es decir, $T \geq 0$ c.t.p. en Ω . Ahora demostremos que $T \leq T_0$, para esto escogemos $v = \min(T_0 - T, 0)$. Análogamente a la parte anterior

$$\int_{\Omega} S(v)v dx = h \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)v^2 dx$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(v)v dx &= h \int_{\Omega} 1_{T_0 \leq T} (T - T_0)^2 dx - c \int_{T_0 \leq T} \nabla(T_0 - T) \nabla \psi(T_0 - T) dx \\ &\quad + c\dot{M}_0 \int_{T_0 \leq T} f(T_0 - T)^2 dx \end{aligned}$$

Como T_0 es constante $\nabla(T - T_0) \nabla \psi = \nabla T \nabla \psi$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(v)v dx &= h \int_{\Omega} 1_{T_0 \leq T} (T - T_0)^2 dx + c \int_{T_0 \leq T} \nabla T \nabla \psi(T_0 - T) dx \\ &\quad + c\dot{M}_0 \int_{T_0 \leq T} f(T_0 - T)^2 dx \end{aligned}$$

Desarrollando los términos del lado derecho se llega a que

$$\int_{\Omega} S(v)v dx = -h \int_{\Omega} S(T)(T_0 - T)^- - h \int_{\Omega} T_0(T_0 - T)^- dx + cT_0 \int_{\Omega} (f\dot{M}_0)(T_0 - T)^- dx$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& h \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V) v^2 dx \\
&= - \int_{\Omega} S(T)((T_0 - T)^-) dx - h \int_{\Omega} 1_{T_0 \leq T} T_0 (T - T_0) dx + cT_0 \int_{T_0 \leq T} (f\dot{M}_0)(T_0 - T) dx \\
&= -cT_0 \int_{T_0 \leq T} (f\dot{M}_0)(T_0 - T) dx - h \int_{\Omega} 1_{T_0 \leq T} T_0 (T - T_0) dx + cT_0 \int_{T_0 \leq T} (f\dot{M}_0)(T_0 - T) dx \\
&= -h \int_{\Omega} 1_{T_0 \leq T} T_0 (T - T_0) dx \leq 0
\end{aligned}$$

Entonces $\|(T_0 - T)^-\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 0$, es decir, $T \leq T_0$ c.t.p en Ω . Ahora veamos que

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{h}} T_0$$

$$\int_{\Omega} S(T)T dx = h \int_{\Omega} T^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)T^2 dx = c\dot{M}_0 \int_{\Omega} T_0 T f dx$$

Entonces

$$h \int_{\Omega} T^2 dx \leq c\dot{M}_0 \int_{\Omega} T_0 T f dx \leq T_0^2 c\dot{M}_0$$

Esto implica

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{h}} T_0$$

Ahora veamos que $\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2h|\Omega|^{3/2}}{c\rho\dot{M}_0} T_0$, para esto notemos que

$$\int_{\Omega} S(T - T_0)(T - T_0) dx = h \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)(T - T_0)^2 dx$$

por otra parte, por definición de S y utilizando que $S(T) = c\dot{M}_0 f T_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} S(T - T_0)(T - T_0) dx &= - \int_{\Omega} S(T)((T_0 - T)) dx - h \int_{\Omega} T_0 (T - T_0) dx \\
&+ cT_0 \int_{\Omega} (f\dot{M}_0)(T_0 - T) dx \\
&= h \int_{\Omega} T_0 (T_0 - T) dx
\end{aligned}$$

Entonces

$$h \int_{\Omega} T_0 (T_0 - T) dx = h \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} (f\dot{M}_0 + \rho V)(T - T_0)^2 dx$$

Luego utilizando que $\rho V = \frac{\dot{M}_0}{|\Omega|}$

$$\frac{c\rho V}{2} \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx \leq h \int_{\Omega} T_0 (T_0 - T) dx \leq h\sqrt{|\Omega|} T_0 \|T_0 - T\|_{L^2(\Omega)}$$

De lo anterior se concluye que

$$\|T_0 - T\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2h|\Omega|^{3/2}}{c\dot{M}_0} T_0$$

□

Antes de dar una interpretación al problema anterior, vamos a ver que la función f puede tener menos regularidad y que sigue existiendo una única solución:

Teorema 3.21 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq T_a \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$ y sea $f \in L^2(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Existe un único par $(T, \psi) \in L^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \psi dx = 0$, $\nabla T \nabla \psi \in L^2(\Omega)$ y

$$\begin{aligned} hT - c\nabla T \nabla \psi + c\dot{M}_0 f T &= c\dot{M}_0 T_0 f \text{ en } \Omega \\ -\Delta \psi + \rho V &= \dot{M}_0 f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ en } \partial \Omega \end{aligned}$$

Además T cumple las siguientes propiedades

1. $0 \leq T \leq T_0$
2. $\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{h}} T_0$
3. $\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2h|\Omega|^{3/2}}{c\dot{M}_0} T_0$

DEMOSTRACIÓN. Sea $g_n(x) = \min(f(x), n)$, con esto claramente g_n es acotada y positiva, para $n \in \mathbb{N}$. Ahora tomemos

$$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|_{L^1(\Omega)}}$$

Con esto f_n es una función acotada, positiva y con $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Luego por los Teoremas 3.20 y 3.2 existen $(T_n, \psi_n) \in L^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} hT_n - c\nabla T_n \nabla \psi_n + c\dot{M}_0 f T_n &= c\dot{M}_0 T_0 f_n \text{ en } \Omega \\ -\Delta \psi_n + \rho V_n &= \dot{M}_0 f_n \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ en } \partial \Omega \end{aligned}$$

Además $0 \leq T_n \leq T_0$. Por el Teorema de convergencia dominada $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\Omega)$. De esto podemos deducir que

$$\psi_n \rightarrow \psi \text{ en } H^2(\Omega)$$

donde ψ es la única función en H que cumple

$$-\Delta \psi + \rho V = \dot{M}_0 f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ en } \partial \Omega$$

Además $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto acotado de $L^\infty(\Omega)$, entonces debe existir un $T \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} T_n \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} T \phi dx \text{ para todo } \phi \in L^1(\Omega)$$

Luego, esto implica que

$$\int_{\Omega} T_n \nabla \psi_n \nabla \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} T \nabla \psi \nabla \phi dx \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$$

$$\int_{\Omega} T_n f_n \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} T f \phi dx \text{ para todo } \phi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & h \int_{\Omega} \phi T_n dx + c \int_{\Omega} T_n \nabla \psi_n \nabla \phi dx + c \rho V \int_{\Omega} T_n \phi dx - c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f_n \phi dx \\ & \rightarrow h \int_{\Omega} \phi T dx + c \int_{\Omega} T \nabla \psi \nabla \phi dx + c \rho V \int_{\Omega} T \phi dx - c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f \phi dx \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces T cumple

$$h \int_{\Omega} \phi T dx + c \int_{\Omega} T \nabla \psi \nabla \phi dx + c \rho V \int_{\Omega} T \phi dx - c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f \phi dx = 0$$

Además

$$- \int_{\Omega} T \phi \Delta \psi dx + \rho V \int_{\Omega} T \phi dx = \dot{M}_0 \int_{\Omega} T \phi f dx$$

Luego como se cumple la siguiente igualdad en el sentido de las distribuciones

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi T dx$$

entonces T cumple

$$h \int_{\Omega} \phi T dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx - c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f T \phi dx = c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f \phi dx$$

Por densidad lo anterior se cumple para todo $\phi \in L^2(\Omega)$ y con esto $\nabla T \nabla \psi \in L^2(\Omega)$. Para la unicidad, sea $g \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\nabla g \nabla \psi \in L^2(\Omega)$ y tal que

$$hg - c \nabla g \nabla \psi + c \dot{M}_0 g f = 0$$

Como $\nabla g \nabla \psi \in L^1(\Omega)$, entonces existe una sucesión $g_k \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que

$$g_k \rightarrow g \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y } \nabla g_k \nabla \psi \rightarrow \nabla g \nabla \psi \text{ en } L^1(\Omega)$$

Definamos r_k como

$$r_k = hg_k - c \nabla g_k \nabla \psi + c \dot{M}_0 g_k f$$

Tomando límite obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0 \text{ en } L^1(\Omega)$$

Multiplicando por $\text{sgn}(g_k)$ tenemos

$$r_k \text{sgn}(g_k) = h|g_k| - c \nabla |g_k| \nabla \psi + c \dot{M}_0 |g_k| f$$

Integrando lo anterior y usando el Teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_{\Omega} r_k \text{sgn}(g_k) dx = h \int_{\Omega} |g_k| dx + c \int_{\Omega} |g_k| \Delta \psi dx + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} |g_k| f dx$$

Como $\Delta \psi = \rho V - f \dot{M}_0$, entonces

$$\int_{\Omega} r_k \text{sgn}(g_k) dx = h \int_{\Omega} |g_k| dx + c \rho V \int_{\Omega} |g_k| dx$$

Lo que implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_k| dx = 0$$

Por lo tanto $g = 0$ c.t.p en Ω y con esto concluimos la unicidad de T . □

Al igual que en el modelo radial, el Teorema anterior entrega una cota para la distancia entre el campo de temperaturas T con respecto a T_a y T_0 en norma $L^2(\Omega)$. Además, de estas desigualdades se puede concluir una convergencia según el comportamiento de las constantes del modelo. A diferencia del caso radial, en este modelo no se puede asegurar la unicidad cuando f tiene poca regularidad, para esto hace falta poder integrar adecuadamente el termino $\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T T dx$, pero esto no es posible con los teoremas antes expuestos.

En la figura 3.2 se puede apreciar que la solución del problema (P_f) con $f = g_{\varepsilon}$ aproxima adecuadamente para un ε pequeño, ya que se tiene convergencia en norma $L^2(\Omega)$, al menor de forma numérica.

En lo anterior la solución numérica corresponde a resolver la ecuación

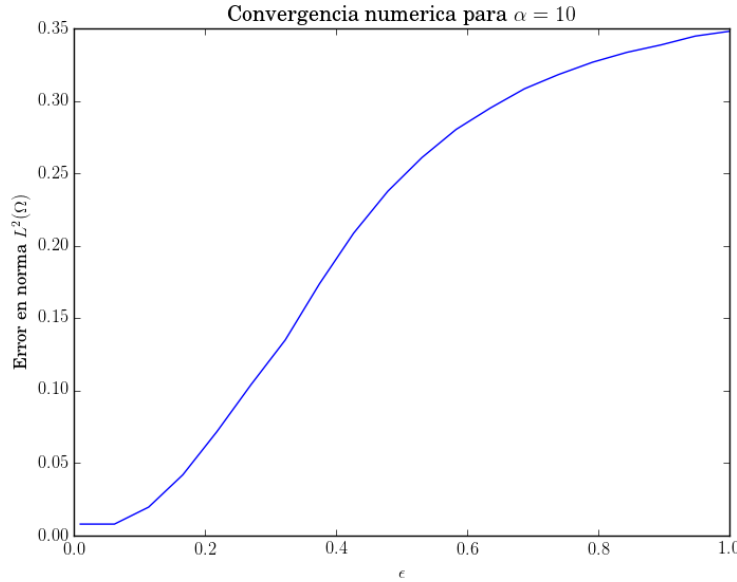


Figura 3.2: Distancia solución utilizando FEM vs solución analítica para $\alpha = 10$, $T_0 = 1$ y $R = 1$

$$S(T) = c\dot{M}_0 g_{\varepsilon} T_0$$

mediante elementos finitos de Lagrange de primer orden, es decir, dado un mallado triangular de Ω , encontrar $T_N \in V_N$, $\psi_N \in Q_N$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla \phi_1 dx + \rho V \int_{\Omega} \phi_1 dx + \int_{\Omega} a \phi_1 dx + \int_{\Omega} b \psi_N dx = \int_{\Omega} g_{\varepsilon} dx \dot{M}_0 \phi_1 dx \quad (3.7a)$$

$$\int_{\Omega} h T_n \phi_2 dx - c \int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla T_N \phi_2 dx + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} g_{\varepsilon} T_N \phi_2 dx = c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} g_{\varepsilon} \phi_2 dx \quad (3.7b)$$

para todo $\phi_1 \in Q_N$, $\phi_2 \in V_N$ y $b \in \mathbb{R}$, donde V_N es el espacio de elementos finitos de Lagrange de orden 1 y Q es el espacio de elementos finitos de orden 2, ambos sobre el mallado de Ω . El significado de N , es que cuando N tiende a infinito el radio de la circunferencia circunscrita de cada uno de los triángulos del mallado de Ω tiende a 0. Notemos que se agregan la incógnita $a \in \mathbb{R}$ y el termino $\int_{\Omega} b \psi_N dx$ en (3.7a) para asegurar que

$$\int_{\Omega} \psi_N dx = 0$$

La existencia ψ_N y T_N se puede asegurar viendo que las matrices involucradas en la resolución son definidas positivas, además se puede asegurar que $0 \leq T_N \leq T_0$

Teorema 3.22 Sean $\dot{M}_0, h, c, \rho > 0$, $T_0 \geq 0$, Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera poligonal y sea $f \in L^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$ y $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Sean V_N y Q_N los espacios de elementos finitos de Lagrange de primer y segundo orden respectivamente, sobre un mallado triangular de Ω . Existe un único elemento $(T_N, \psi_N, a) \in V_N \times Q_N \times \mathbb{R}$ tales que cumplen

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla \phi_1 dx + \rho V \int_{\Omega} \phi_1 dx + \int_{\Omega} a \phi_1 dx + \int_{\Omega} b \psi_N dx = \int_{\Omega} f dx \dot{M}_0 \phi_1 dx \quad (3.8a)$$

$$\int_{\Omega} h T_N \phi_2 dx - c \int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla T_N \phi_2 dx + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f T_N \phi_2 dx = c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f \phi_2 dx \quad (3.8b)$$

para todo $(\phi_1, \phi_2, b) \in Q_N \times V_N \times \mathbb{R}$. Además, se tiene

$$0 \leq T_N \leq T_0$$

DEMOSTRACIÓN. Encontrar a y $\psi_N \in Q_N$ que cumplen (3.8a) es equivalente a resolver el problema de minimización (3.9) (ver [3]) utilizando multiplicadores de Lagrange.

$$\min_{\psi \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \psi dx = 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx - \int_{\Omega} \psi (\dot{M}_0 g_\varepsilon - \rho V) dx \right\} \quad (3.9)$$

Ya que (3.8a) son las condiciones necesarias de primer orden asociadas a este problema. Con esto ψ_N es el minimizante de (3.9) y a es el multiplicador de Lagrange asociado a $\int_{\Omega} \psi_N = 0$. Ahora veamos que $a = 0$; tomando $b = 0$ en (3.7a) y $\phi_1 = 1$ queda:

$$\rho V |\Omega| + a |\Omega| = \dot{M}_0$$

pero $\rho V |\Omega| = \dot{M}_0$, luego $a = 0$. Con lo anterior la ecuación que cumple ψ_N es

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla \phi_1 dx + \rho V \int_{\Omega} \phi_1 dx = \int_{\Omega} f dx \dot{M}_0 \phi_1 dx \quad (3.10)$$

para todo $\phi_1 \in Q_N$. Para encontrar T_N que cumple (3.7b) consideremos la siguiente función bilineal definida en $V_N \times V_N$

$$A(T, \phi) = \int_{\Omega} h T \phi dx - c \int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla T \phi dx + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f T_N \phi dx$$

para $(T, \phi) \in V_N \times V_N$. Veamos que a es un operador coercitivo, para esto primero notemos que si $\phi \in V_N$, entonces $\phi^2 \in Q_N$, ya que Q_N es el espacio de elementos finitos de primer orden. Luego podemos tomar $\phi_1 = \phi^2$ en (3.10) y se obtiene

$$2 \int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla \phi \phi dx + \rho V \int_{\Omega} \phi^2 dx = \int_{\Omega} f dx \dot{M}_0 \phi^2 dx$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_N \nabla \phi \phi dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} f \dot{M}_0 \phi^2 dx - \rho V \int_{\Omega} \phi^2 dx \right)$$

Con esto

$$A(\phi, \phi) = \int_{\Omega} h\phi^2 dx + \frac{c\rho V}{2} \int_{\Omega} \phi^2 dx + \frac{c}{2} \dot{M}_0 \int_{\Omega} f\phi^2 dx \geq \left(h + \frac{c\rho V}{2} \right) \int_{\Omega} \phi^2 dx$$

Como V_N es un espacio de Hilbert con el producto interno de $L^2(\Omega)$, entonces por el teorema de Lax-Milgram existe un único T_N en V_N que cumple (3.8b). Notemos que $\phi \in V_N$ puede ser expresado como

$$\phi = \sum_{i=1}^{ngl_1} \phi(a_i) \hat{\phi}_{1,i}$$

donde $\{\hat{\phi}_{1,i}\}_{i=1}^{ngl_1}$ son las funciones base de V_N , ngl_1 es el número de nodos y a_i son los nodos asociados al mallado. Con esto, lo demostrado anteriormente es equivalente a demostrar que la matriz M dada por

$$(M)_{i,j} = \int_{\Omega} h\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j dx - c \int_{\Omega} \nabla\psi_N \nabla\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j dx + c\dot{M}_0 \int_{\Omega} f\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j dx,$$

es una matriz invertible.

Notemos que las funciones de la base de V_N son positivas y por lo tanto la parte positiva de $\phi \in V_N$ es

$$\phi^+ = \sum_{i=1}^{ngl_1} \phi^+(a_i) \hat{\phi}_{1,i}$$

De esto tenemos que ϕ^+ está en V_N . Luego, por las construcción de las funciones de la base, se tiene que $\sum_{i=1}^{ngl_1} \hat{\phi}_{1,i}(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$, entonces las constantes están en V_N . Luego, para demostrar que $0 \leq T_N \leq T_0$ basta ver que $T_N^- = 0$ y $(T - T_0)^+ = 0$ y esto se puede hacer de igual manera como fue hecho para demostrar el Teorema 3.20 . \square

En el teorema anterior se vio que $a = 0$ en (3.7a), pero esto no es necesariamente cierto cuando se resuelve el problema computacionalmente, pues las integrales no son calculadas de forma exacta. Sin embargo, si las aproximaciones de las integrales son suficientemente buenas, se puede esperar que a sea menor estricto a $\frac{1}{2}\rho V + h$ y con esto también se puede asegurar la existencia de las soluciones.

Para poder comparar con una solución conocida, se resolvió la ecuación numérica en $\Omega = B(0, R)$ con $R = 1$, utilizando el programa Fenics 1.6. Por los visto en el Capítulo 2, sabemos que la solución es:

$$T_{con} = T_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^\alpha, \text{ tal que } \alpha = \frac{h}{c\dot{M}_0|\Omega|}$$

En la figura 3.3 se logra apreciar que tanto la solución numérica, como la solución conocida tienen un comportamiento similar para distintos exponentes α , en todos los casos tomando $\varepsilon = 0,001$.

Si ahora se considera $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, tal que la irrigación está en el punto $(1/2, 1/2)$, se puede apreciar el mismo comportamiento que el predicho para el modelo radial, es decir, la temperatura es $T_0 = 1$ en el centro del dominio y decae a $T_a = 0$ en el borde del mismo, lo cual se puede apreciar en la figura 3.4.

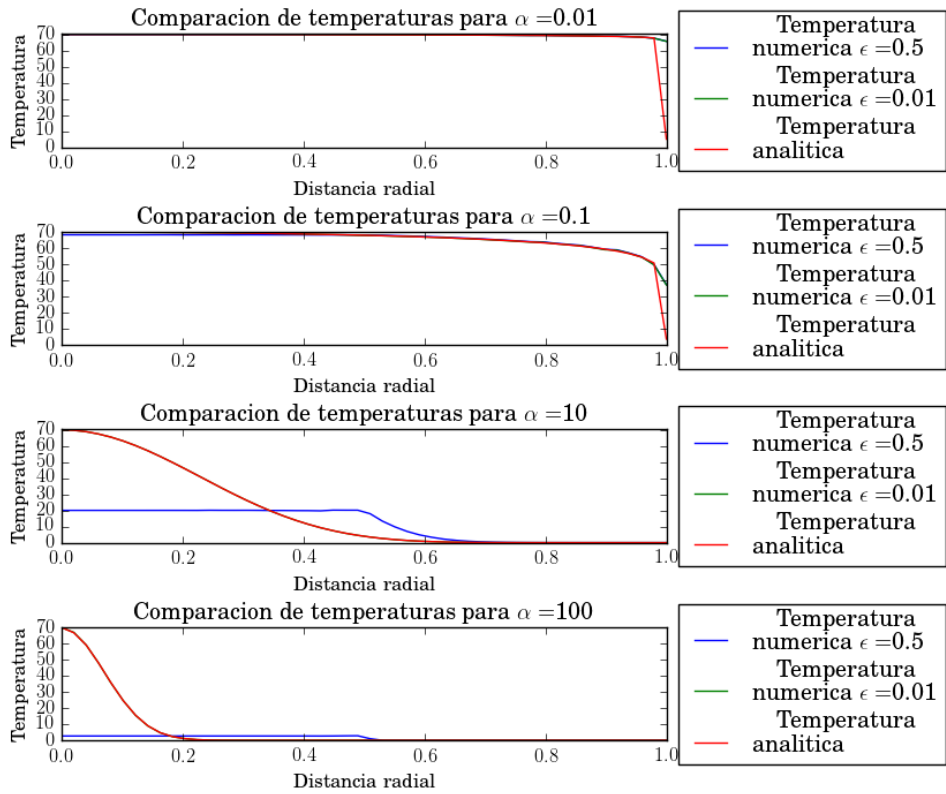
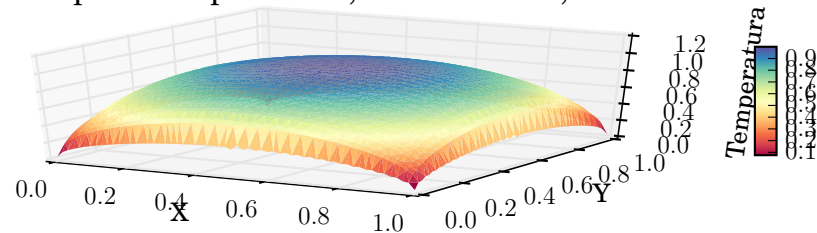
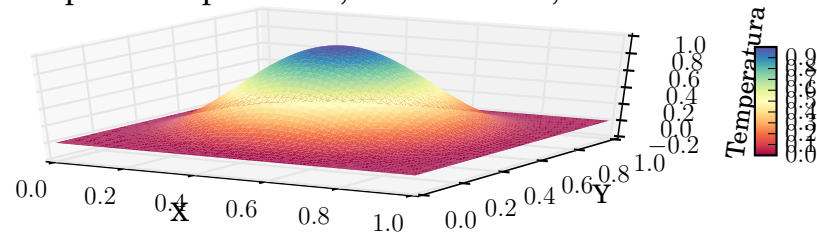


Figura 3.3: Comportamiento campo de temperaturas en un disco en función de $\alpha = \frac{h}{cM_0|\Omega|}$ para $T_a = 1$, $T_0 = 70$ y $R = 1$

Campo de temperaturas, solución FEM, $\alpha = 1$



Campo de temperaturas, solución FEM, $\alpha = 10$



Campo de temperaturas, solución FEM, $\alpha = 100$

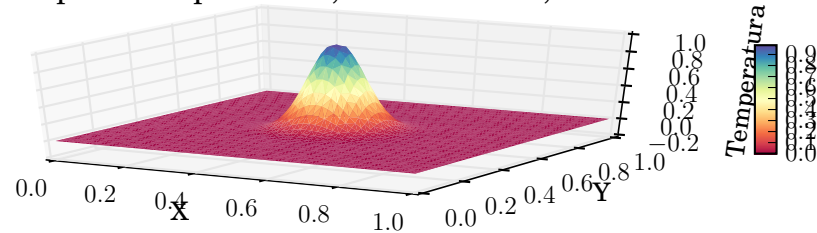


Figura 3.4: Solución numérica FEM en un el cuadrado $\Omega = (0, 1)^2$ para $\alpha = 1, 10, 100$ y $T_0 = 1$

Capítulo 4

Modelo general con evaporación

Resolver el problema (P) para $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0, T_{max} > T_0 \geq T_a \geq 0; \Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) \leq 0$ y Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$, no es trivial incluso cuando la evaporación es nula, como se vio en el capítulo 3. En lugar de resolver el problema P se resolverá un problema aproximado en cual se regulariza el delta de Dirac y se agrega un término viscoso $-k\Delta T$ a (1.3b), con lo cual queda:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) &= \dot{M}_0 f_\varepsilon && \text{en } \Omega \\ -c\nabla\psi\nabla T + hT + \Phi(T)L - k\Delta T &= f_\varepsilon \dot{M}_0 c(T_0 - T) && \text{en } \Omega \end{aligned}$$

donde $f_\varepsilon \rightarrow \delta_0$ en el sentido de las distribuciones. A estas ecuaciones les hace falta una condición de borde para T . Siguiendo el teorema (1.2) una condición de borde razonable es $T = \bar{T}$ en $\partial\Omega$. Como se verá luego, estas aproximaciones permiten demostrar las mismas propiedades para T que las vistas en los capítulos anteriores. Más aún, es posible demostrar que existe al menos un solución una sentido débil para el problema (P), pero con $T \in L^\infty(\Omega)$ en lugar de $T \in L^\infty(\Omega)$.

En la primera sección se define el problema aproximado y se demuestran propiedades de las soluciones del mismo, con estas propiedades se puede definir un nuevo problema aproximado equivalente al anterior, pero en el cual la evaporación se encuentra truncada. En la segunda sección se demuestra la existencia de soluciones del problema aproximado utilizando un método de punto fijo y finalmente utilizando las propiedades de las soluciones del problema aproximado, se demuestra la existencia de una solución en un sentido débil de la ecuación, la cual se define en la misma sección. Como trabajo futuro queda ver la regularidad de las soluciones y demostrar su unicidad.

4.1. Problema aproximado

Como ya fue mencionado, en esta sección se definirá un problema aproximado en el cual se regulariza el delta de Dirac y se agrega un término de viscosidad:

Problema 4.1 Sean $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \geq T_a \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable creciente acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) \leq 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Para $k, \varepsilon > 0$ se define el problema $(P)_{k,\varepsilon}$ como encontrar $T \in H^1(\Omega)$ con $\Delta\psi \in L^2(\Omega)$ y $T \in H^1(\Omega)$ con $\Delta T \in L^1(\Omega)$ tal que

$$-\Delta\psi + \rho V + \Phi(T) = \dot{M}_0 f_\varepsilon \quad c.t.p. \text{ en } \Omega \quad (4.2a)$$

$$-c\nabla\psi\nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L - k\Delta T = f_\varepsilon \dot{M}_0 c(T_0 - T) \quad c.t.p. \text{ en } \Omega \quad (4.2b)$$

Con $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}} = 0$ y $T = \bar{T}$ en $\partial\Omega$. Donde f_ε es una función en $C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = \delta_0 \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$y V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(T) dx \right)$$

El problema $(P)_{k,\varepsilon}$ es más fácil de resolver que el problema (P) por el término $-k\Delta T$. La idea es demostrar que para $\varepsilon, k \rightarrow 0$ la soluciones de este sistema tienden a una solución de (P) . Este método es conocido como '*vanishing viscosity method*' (como referencia se puede ver [11]), donde se resuelve la ecuación de transporte en régimen permanente en un dominio abierto $D \subset \mathbb{R}^n$

$$au + v \cdot \nabla u = f \text{ en } D$$

En esta ecuación la incógnita es una función escalar u y los datos son: a una constante real, f función escalar y v es un campo vectorial. Dependiendo de las regularidades de f , v y el borde de D se puede probar la existencia de u , bajo la hipótesis de que a sea suficientemente grande con respecto a las normas de f y v .

Ahora vamos a ver que las soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$ cumplen $0 \leq T \leq T_0$ para Φ tal que $\Phi(0) = 0$ y $T_a = 0$. Recordemos que por el Teorema 1.3 el problema siempre puede ser reducido a este caso.

Teorema 4.1 Sean $k > 0$, $\varepsilon > 0$, $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \geq 0$, $T_a = 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ un función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Consideremos $T \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi \in H^1(\Omega)$ que resuelven el problema $(P)_{k,\varepsilon}$. Si

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \min(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

entonces

$$0 \leq T \leq T_0, \text{ c.t.p. en } \Omega$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $\phi = (T - T_0)^+$, usando esta como función test en (4.2a)

$$\begin{aligned} \int_{T \geq T_0} f_\varepsilon \dot{M}_0 c(T_0 - T)(T - T_0) dx &= -c \int_\Omega \nabla\psi \nabla T \phi dx + \int_{T \geq T_0} hT(T - T_0) dx + \\ &\int_{T \geq T_0} \Phi(T)L(T - T_0) dx + k \int_{T \geq T_0} \nabla T \nabla(T - T_0) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla\psi\nabla T\phi dx &= \int_{T\geq T_0} \nabla\psi\nabla T(T - T_0)dx = \\ &\int_{T\geq T_0} \nabla\psi\nabla(T - T_0)(T - T_0)dx = \int_{\Omega} \nabla\psi\nabla\phi dx\end{aligned}$$

Ahora integrando por partes y reemplazando $\Delta\psi = \rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla\psi\nabla T\phi dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta\psi\phi^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon)\phi^2 dx\end{aligned}\tag{4.4}$$

Reemplazando (4.4) en (4.3) y reordenando

$$\begin{aligned}- \int_{T\geq T_0} f_\varepsilon \dot{M}_0 c(T - T_0)^2 dx &= c\frac{1}{2} \int_{T\geq T_0} (\rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon)(T - T_0)^2 dx \\ &+ \int_{T\geq T_0} hT(T - T_0)dx + \int_{T\geq T_0} \Phi(T)L(T - T_0)dx + k \int_{T\geq T_0} |\nabla T|^2 dx\end{aligned}\tag{4.5}$$

Juntando todo al lado derecho y reordenando

$$\begin{aligned}0 &= c\frac{1}{2} \int_{T\geq T_0} (\rho V + \Phi(T) + \dot{M}_0 f_\varepsilon)(T - T_0)^2 dx \\ &+ \int_{T\geq T_0} hT(T - T_0)dx + \int_{T\geq T_0} \Phi(T)L(T - T_0)dx + k \int_{T\geq T_0} |\nabla T|^2 dx\end{aligned}\tag{4.6}$$

Si asumimos que $\Phi(T_0) \geq 0$, entonces

$$\int_{T\geq T_0} \Phi(T)L(T - T_0)dx \geq 0$$

y además

$$k \int_{T\geq T_0} |\nabla T|^2 dx \geq 0$$

Luego podemos restar estos términos de (4.6) y se obtiene

$$\begin{aligned}0 &\geq c\frac{1}{2} \int_{T\geq T_0} (\rho V + \Phi(T) + \dot{M}_0 f_\varepsilon)(T - T_0)^2 dx \\ &+ \int_{T\geq T_0} hT(T - T_0)dx\end{aligned}\tag{4.7}$$

Como $\rho V + \Phi(T) + \dot{M}_0 f_\varepsilon \geq 0$, si $T \geq T_0$, entonces $c\frac{1}{2} \int_{T\geq T_0} (\rho V + \Phi(T) + \dot{M}_0 f_\varepsilon)(T - T_0)^2 dx \geq 0$, luego restamos este termino de (4.7)

$$0 \geq \int_{T\geq T_0} hT(T - T_0)dx\tag{4.8}$$

Además

$$\int_{T \geq T_0} hT(T - T_0)dx = \int_{T \geq T_0} h(T - T_0)^2 + T_0(T - T_0)dx$$

Como $T_0 \geq 0$, entonces $\int_{T \geq T_0} T_0(T - T_0)dx \geq 0$ y por lo tanto

$$0 \geq \int_{T \geq T_0} h(T - T_0)^2 dx = h \int_{\Omega} \phi^2 dx \quad (4.9)$$

entonces $\phi = 0$ *c.t.p.* y se concluye que $T \leq T_0$. Ahora vamos a demostrar que $T \geq 0$, sea $\phi = (-T)^+$, utilizando esta función como función test en (4.2b)

$$\begin{aligned} \int_{0 \geq T} f_\varepsilon \dot{M}_0 c (T_0 - T)(-T) dx &= -c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T \phi dx + \int_{0 \geq T} hT(-T) dx + \\ &\int_{0 \geq T} \Phi(T)L(-T) dx + k \int_{0 \geq T} \nabla T \nabla(-T) dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

Desarrollando ambos lados, la ecuación queda

$$\begin{aligned} \int_{0 \geq T} f_\varepsilon \dot{M}_0 c T_0 T dx + \int_{0 \geq T} f_\varepsilon \dot{M}_0 c T^2 dx &= -c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T \phi dx \\ - \int_{0 \geq T} hT^2 dx - \int_{0 \geq T} \Phi(T)LT dx - k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx = \int_{0 \geq T} \nabla T \nabla \psi (-T) dx = - \int_{0 \geq T} \nabla(-T) \nabla \psi (-T) dx = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \phi dx$$

Luego integrando por partes y se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \phi dx = - \int_{\Omega} \Delta \psi \phi^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi \phi dx$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \phi dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \psi \phi^2 dx \quad (4.12)$$

Gracias a que ψ cumple (4.2b), reemplazamos

$$\Delta \psi = \rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon$$

en (4.12) y $\phi = (-T)^+$ y se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \phi dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon) \phi^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) - \dot{M}_0 f_\varepsilon) T^2 dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

Reemplazando (4.13) en

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \phi dx$$

se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi \phi dx = \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) - M_0 f_{\varepsilon}) T^2 dx$$

Luego reemplazando en (4.11), queda

$$\begin{aligned} c \int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 T_0 T dx + c \int_{0 \geq -T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 T^2 dx &= -c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) - M_0 f_{\varepsilon}) T^2 dx \\ &- \int_{0 \geq T} h T^2 dx - \int_{0 \geq T} \Phi(T) L T dx - k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ahora multiplicando por -1 ambos lados queda

$$\begin{aligned} c \int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 T_0 T dx - c \int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 T^2 dx &= c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) - M_0 f_{\varepsilon}) T^2 dx \\ &+ \int_{0 \geq T} h T^2 dx + \int_{0 \geq T} \Phi(T) L T dx + k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pasando $\int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T^2 dx$ sumando del lado izquierdo al lado derecho

$$\begin{aligned} \int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx &= c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) + M_0 f_{\varepsilon}) T^2 dx \\ &+ \int_{0 \geq T} h T^2 dx + \int_{0 \geq T} \Phi(T) L T dx + k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Como $\int_{0 \geq T} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\geq c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) + M_0 f_{\varepsilon}) T^2 dx \\ &+ \int_{0 \geq T} h T^2 dx + \int_{0 \geq T} \Phi(T) L T dx + k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por el crecimiento de $\Phi(\cdot)$ tenemos que

$$\Phi(T) \leq 0 \text{ si } T \leq 0$$

y por lo tanto

$$\int_{0 \geq T} \Phi(T) L T dx \geq 0$$

luego de (4.17) podemos deducir que

$$0 \geq c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) + M_0 f_\varepsilon) T^2 dx + \int_{0 \geq T} h T^2 dx + k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \quad (4.18)$$

Claramente $k \int_{0 \geq T} |\nabla T|^2 dx \geq 0$ para $k \geq 0$, entonces

$$0 \geq c \frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) + M_0 f_\varepsilon) (T)^2 dx + \int_{0 \geq T} h T^2 dx \quad (4.19)$$

Ahora veamos que $\frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T) + M_0 f_\varepsilon) (T)^2 dx \geq 0$, como $f_\varepsilon \geq 0$, entonces basta demostrar que

$$\frac{1}{2} \int_{0 \geq T} (\rho V + \Phi(T)) (T)^2 dx \geq 0$$

y para esto basta que

$$\rho V + \Phi(T) \geq 0$$

para $T \leq 0$, esto se cumple si

$$\rho V \geq - \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x)$$

Como $V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right)$, entonces lo anterior es

$$\frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) \geq - \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x)$$

Como $T \leq T_0$, entonces lo anterior es cierto si

$$\frac{1}{|\Omega|} \dot{M}_0 \geq \Phi(T_0) - \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x)$$

Lo cual es parte de las hipótesis, entonces (4.19) queda

$$0 \geq \int_{0 \geq T} h T^2 dx = \int_{\Omega} \phi^2 dx \quad (4.20)$$

Entonces $\phi = 0$ *c.t.p.* en Ω y por lo tanto $T \geq 0$ \square

Luego en vez de considerar $\Phi(T)$ en (4.2), se puede tomar $\tilde{\Phi}(T) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{cases} \Phi(T_0) & \text{si } x \geq T_0 \\ \Phi(x) & \text{si } 0 \leq x \leq T_0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

4.2. Solución problema aproximado

Para resolver el problema $(P)_{k,\varepsilon}$ con $\Phi(0) = 0$ y $T_a = 0$, utilizaremos un argumento de punto fijo, para esto se va a definir un operador $S : H_0^1 \times H \rightarrow H_0^1 \times H$ de tal manera que si

$$S(T, \psi) = (T, \psi)$$

entonces T, ψ sean soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$. Al igual que en el Teorema 3.2 el espacio H esta dado por:

$$H = \left\{ Y \in H^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} Y dx = 0 \right\}$$

Definición 4.2 Sean $k > 0, \varepsilon > 0, \dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0, T_{max} > T_0 \geq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Sean además $X \in H_0^1(\Omega)$ e $Y \in H$, se define el operador

$$S : H_0^1 \times H \rightarrow H_0^1 \times H$$

dado por $S(X, Y) = (T, \psi) \in H_0^1 \times H$, donde (T, ψ) son las únicas funciones en $H_0^1(\Omega) \times H$ que cumplen con:

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_1 dx + \int_{\Omega} \rho V \phi_1 dx + \int_{\Omega} \Phi(X) \phi_1 dx = \int_{\Omega} \dot{M}_0 f_{\varepsilon} \phi_1 dx \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} -c \int_{\Omega} \nabla Y \nabla X \phi_2 dx + \int_{\Omega} h X \phi_2 dx + \int_{\Omega} \Phi(X) L \phi_2 dx + k \int_{\Omega} \nabla T \nabla \phi_2 dx \\ = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c (T_0 - X) \phi_2 dx \end{aligned} \quad (4.21b)$$

$$\forall (\phi_1, \phi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ Donde } V = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(X) dx \right).$$

Por Teorema 3.2 sabemos que existe un único $\psi \in H$ que cumple (4.21a) para todo $\phi \in H^1(\Omega)$ y $T \in H_0^1(\Omega)$ dado.

Para la ecuación (4.21b), notemos que usando la desigualdad de Hölder, las inyecciones de Sobolev y la desigualdad de Poincare (asumiendo que $\partial\Omega$ es suficientemente regular)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla Y \nabla X \phi dx \right| &\leq \|\nabla Y\|_{L^3(\Omega)} \|\phi\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla X\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\psi\|_{H^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \|X\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Luego por el lema de Lax-Milgram existe una única solución T del sistema anterior y por esta razón el operador S esta bien definido.

La idea ahora es encontrar un punto fijo de S . Para probar la existencia de este punto fijo se puede utilizar el Teorema del Punto Fijo de Schaefer (ver [8]):

Teorema 4.3 (Teorema del Punto Fijo de Schaefer) *Sea X un espacio de Banach. Suponga que*

$$A : X \rightarrow X$$

es una función compacta y continua. Además asuma que el conjunto

$$\{u \in X \mid u = \lambda A(u) \text{ para un } \lambda \in [0, 1]\}$$

es acotado. Entonces A tiene al menos un punto fijo, es decir, existe un $u \in X$ tal que $A(u) = u$.

En el contexto del teorema anterior, una función $A : X \rightarrow X$ es compacta si para cada sucesión acotada $\{u_k\}_{k \geq 0}$, la sucesión $\{A(u_k)\}_{k \geq 0}$ es pre-compacta, es decir, que existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j \geq 0}$ de $\{u_k\}_{k \geq 0}$ tal que $\{A(u_{k_j})\}_{j \geq 0}$ converge.

Teorema 4.4 Sean $k > 0$, $\varepsilon, \dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} \leq T_0 > 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Si

$$\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \geq \Phi(T_0) - \min(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x))$$

Entonces existe al menos un punto fijo de S .

DEMOSTRACIÓN. Sean $X_n \in H_0^1(\Omega)$ y $Y_n \in H$ convergentes a X en $H_0^1(\Omega)$ y $Y \in H$, debemos probar que $(T_n, \psi_n) = S(X_n, Y_n)$ converge fuerte a $(T, \psi) = S(X, Y)$ en $H_0^1(\Omega) \times H$. Denotemos por ψ_n y V_n las soluciones de

$$\int_{\Omega} \dot{M}_0 f_{\varepsilon} \phi dx = \int_{\Omega} \nabla \psi_n \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \rho V_n \phi dx + \int_{\Omega} \Phi(X_n) \phi dx \quad (4.22)$$

$$V_n = \frac{1}{|\Omega| \rho} \left(\int_{\Omega} \dot{M}_0 - \Phi(X_n) dx \right) \quad (4.23)$$

Notemos que como Φ es diferenciable y además

$$|\Phi(a) - \Phi(b)| \leq \|\Phi'\|_{L^{\infty}([a,b])} |a - b| \leq \|\Phi'\|_{\infty} |a - b| \quad (4.24)$$

Donde $\|\Phi'\|_{\infty} = \|\Phi'\|_{L^{\infty}([0, T_0])}$, además como X_n converge en $H_0^1(\Omega)$, entonces por el teorema de inyección continua se tiene que X_n converge fuerte en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Entonces, por (4.24) y la convergencia de X_n en $L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\Phi(X_n) - \Phi(X)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \|\Phi'\|_{\infty}^2 |X_n - X|^2 \rightarrow 0$$

Con esto $\Phi(X_n) \rightarrow \Phi(X)$ en $L^2(\Omega)$. Por otro lado

$$\int_{\Omega} \dot{M}_0 f_{\varepsilon} \phi dx = \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \rho V_n \phi dx + \int_{\Omega} \Phi(X) \phi dx \quad (4.25)$$

$$V = \frac{1}{|\Omega| \rho} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(X) dx \right) \quad (4.26)$$

Restando las ecuaciones (4.26) y (4.23) y acotando adecuadamente, queda

$$|V_n - V| \leq \frac{1}{\rho} \|\Phi(X_n) - \Phi(X)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.27)$$

Entonces por la convergencia de $\Phi(X_n)$, se obtiene que $V_n \rightarrow V$. Notemos que, restando (4.22) y (4.25), $\psi_n - \psi$ cumple la ecuación

$$0 = \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_n) \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \rho(V_n - V) \phi dx + \int_{\Omega} (\Phi(X) - \Phi(\hat{X}_n)) \phi dx$$

Luego gracias a (3.5), tenemos

$$\begin{aligned} \|\psi - \psi_n\|_{H^2(\Omega)} &\leq C \|\rho V - \rho V_n + \Phi(X_n) - \Phi(X)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C (\rho |V_n - V| + \|\Phi(X_n) - \Phi(X)\|_{L^2(\Omega)}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego ψ_n converge fuerte a ψ en H . Para T_n , se debe cumplir la ecuación

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla T_n \nabla \phi dx &= c \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 (T_0 - X_n) \phi dx - \int_{\Omega} h X_n \phi dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \Phi(X_n) L \phi dx + c \int_{\Omega} \nabla Y_n \nabla X_n \phi dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

Por otro lado T debe cumplir

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla T \nabla \phi dx &= c \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 (T_0 - X) \phi dx - \int_{\Omega} h X \phi dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \Phi(X) L \phi dx + c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla X \phi dx \end{aligned} \quad (4.29)$$

Como X_n converge débil en $H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c (T_0 - X_n) \phi dx - \int_{\Omega} h X_n \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c (T_0 - X) \phi dx - \int_{\Omega} h X \phi dx$$

para cualquier $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Como $\Phi(X_n) \rightarrow \Phi(X)$ en $L^2(\Omega)$, entonces

$$L \int_{\Omega} \Phi(X_n) \phi dx \rightarrow L \int_{\Omega} \Phi(X) \phi dx$$

Ahora por otro lado

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla Y_n \nabla X_n Y dx - \int_{\Omega} \nabla Y \nabla X \phi dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla (Y_n - Y) \nabla X_n \phi dx - \int_{\Omega} \nabla Y (\nabla X_n - \nabla X) \phi dx \end{aligned}$$

Para el primer termino, podemos usar la desigualdad de Hölder y obtener

$$\left| \int_{\Omega} \nabla (Y_n - Y) \nabla X_n \phi \right| \leq \|Y_n - Y\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla X_n\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^3(\Omega)}$$

Usando las desigualdades de Sobolev y el hecho de que X_n es acotada por ser convergente, entonces queda

$$\left| \int_{\Omega} \nabla(Y_n - Y) \nabla X_n \phi \right| \leq C \|Y_n - Y\|_{H^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0$$

Como $Y \in H^2(\Omega)$ y $\phi \in H_0^1(\Omega)$, entonces por las desigualdades de Sobolev

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla Y|^2 |\phi|^2 dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla Y|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\phi|^4 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C (\|Y\|_{H^2(\Omega)})^{1/2} (\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por lo tanto $\nabla Y \phi \in (L^2(\Omega))^3$, entonces por la convergencia débil de X_n en $H_0^1(\Omega)$ se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla Y (\nabla X_n - \nabla X) \phi dx \rightarrow 0$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \nabla Y_n \nabla X_n \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla Y \nabla X \phi dx$$

Por lo anterior, tomando limite $n \rightarrow \infty$ en (4.28), y recordando la ecuación (4.29), se obtiene:

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla T_n \nabla \phi dx &\rightarrow c \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 (T_0 - X) \phi dx - \int_{\Omega} h X \phi dx \\ &- \int_{\Omega} \Phi(X) L \phi dx + c \int_{\Omega} \nabla Y \nabla X \phi dx = k \int_{\Omega} \nabla T \nabla \phi dx \end{aligned}$$

y por lo tanto T_n converge débil a T en $H_0^1(\Omega)$. Para ver que la convergencia es fuerte, podemos restar las ecuaciones (4.28) y (4.29) y ver que $T_n - T$ cumple la ecuación

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla (T_n - T) \nabla \phi dx &= c \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 (X - X_n) \phi dx - \int_{\Omega} h (X_n - X) \phi dx \\ &- \int_{\Omega} (\Phi(X_n) - \Phi(X)) L \phi dx + c \int_{\Omega} (\nabla Y_n \nabla X_n - \nabla Y \nabla X) \phi dx \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando $\phi = (T_n - T)$ en (4.31)

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla (T_n - T)|^2 dx &= c \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 (X - X_n) (T_n - T) dx - \int_{\Omega} h (X_n - X) (T_n - T) dx \\ &- \int_{\Omega} (\Phi(X_n) - \Phi(X)) L (T_n - T) dx + c \int_{\Omega} (\nabla Y_n \nabla X_n - \nabla Y \nabla X) (T_n - T) dx \end{aligned}$$

Los términos del lado derecho convergen a 0 de manera evidente, excepto el último, para este hay que trabajar un poco más

$$\int_{\Omega} (\nabla Y_n \nabla X_n - \nabla Y \nabla X) (T_n - T) dx =$$

$$\int_{\Omega} (\nabla(Y_n - Y)\nabla X_n - \nabla Y\nabla(X - X_n))(T_n - T)dx$$

El primer termino converge a 0 por la convergencia de Y_n . Para el segundo termino, podemos integrar por partes

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla Y\nabla(X - X_n)(T_n - T)dx = \\ & - \int_{\Omega} \Delta Y(X - X_n)(T_n - T)dx - \int_{\Omega} \nabla Y(X - X_n)\nabla(T_n - T)dx \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \nabla Y\nabla(X - X_n)(T_n - T)dx \right| \\ & \leq \|Y\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla X - \nabla X_n\|_{L^2(\Omega)} \|T_n - T\|_{L^3(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Luego $T_n \rightarrow T$ en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto S es un operador continuo. Para demostrar que S es compacto la demostración es análoga, pero asumiendo que $X_n \rightarrow X$ débil en $H_0^1(\Omega)$ y $Y_n \rightarrow Y$ en H débil, luego la demostración es la misma pues la convergencia de $S(X_n, Y_n)$ depende de la convergencia de X_n y ∇Y_n en $L^2(\Omega)$, lo cual se tiene por el Teorema de inyección compacta.

Ahora, sean T y ψ tal que $(T, \psi) = \lambda S(T, \psi)$, para $0 < \lambda \leq 1$. Por la definición de S y (4.21b), esto significa

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla \frac{T}{\lambda} \nabla \phi dx &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c (T_0 - T) \phi dx - \int_{\Omega} h T \phi dx \\ & - \int_{\Omega} \Phi(T) L \phi dx + c \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T \phi dx \end{aligned}$$

Luego usando $\phi = T$

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{1}{\lambda} dx + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T^2 dx + \int_{\Omega} h T^2 \phi dx &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx \\ & - \int_{\Omega} \Phi(T) L T dx + c \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T T dx \end{aligned} \quad (4.32)$$

Análogamente a (4.12), se tiene

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T T dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \psi T^2 dx$$

Reemplazando en la ecuación (4.32), queda

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{1}{\lambda} dx + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T^2 dx + \int_{\Omega} h T^2 \phi dx &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx \\ & - \int_{\Omega} \Phi(T) L T dx + \frac{c}{2\lambda} \int_{\Omega} \Delta \psi T^2 dx \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como $\frac{1}{\lambda} \Delta \psi = \rho V - \dot{M}_0 f_{\varepsilon} + \Phi(T)$, en $L^2(\Omega)$, gracias a que $\frac{1}{\lambda} \psi$ debe cumplir (4.21a). Entonces reemplazando en (4.33) se obtiene

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{1}{\lambda} dx + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T^2 dx + \int_{\Omega} h T^2 \phi dx &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx - \int_{\Omega} \Phi(T) L T dx \\ & - \frac{c}{2} \int_{\Omega} (\rho V - \dot{M}_0 f_{\varepsilon} + \Phi(T)) T^2 dx \end{aligned}$$

Reordenando los términos queda

$$k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 \frac{1}{\lambda} dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} (\rho V + \dot{M}_0 f_{\varepsilon} + \Phi(T)) T^2 dx + \int_{\Omega} h T^2 \phi dx = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx - \int_{\Omega} \Phi(T) L T dx \quad (4.34)$$

Luego usando Hölder, el lado derecho de (4.34) se puede acotar como

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \dot{M}_0 c T_0 T dx - \int_{\Omega} \Phi(T) L T dx \leq C(T_0 \dot{M}_0 \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + L \|\Phi\|_{\infty}) \|T\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Entonces, volviendo a la igualdad (4.34) y eliminando los términos que no nos interesan (se pueden sacar porque son positivos) queda

$$\frac{k}{\lambda} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx \leq C(T_0 \dot{M}_0 \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + L \|\Phi\|_{\infty}) \|T\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Entonces

$$\|T\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\lambda}{k} C(T_0 \dot{M}_0 \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + L \|\Phi\|_{\infty})$$

Como $0 < \lambda \leq 1$, entonces

$$\|T\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{k} (T_0 \dot{M}_0 \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + L \|\Phi\|_{\infty})$$

Por otro lado, como $\frac{1}{\lambda} \Delta \psi = \rho V - \dot{M}_0 f_{\varepsilon} + \Phi(T)$, por (3.5)

$$\left\| \frac{1}{\lambda} \psi \right\|_{H^2(\Omega)} \leq \rho V |\Omega| + \dot{M}_0 \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi(T)\|_{L^2(\Omega)}$$

Ahora usando que $V = \frac{1}{|\Omega|^{\rho}} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) \leq \frac{1}{|\Omega|^{\rho}} \left(\dot{M}_0 + \|\Phi(T)\|_{L^1(\Omega)} \right)$, tenemos la cota

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda \left(\dot{M}_0 (1 + \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}) + 2|\Omega| \|\Phi(T)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right)$$

Como $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \leq \left(\dot{M}_0 (1 + \|f_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}) + 2|\Omega| \|\Phi(T)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right)$$

Por lo tanto, los elementos de $H_0^1(\Omega) \times H$ que cumplen $(T, \psi) = \lambda S(T, \psi)$ están uniformemente acotados, entonces por el Teorema del punto fijo de Schaefer existe al menos un punto fijo de S . \square

Para concluir, veamos que todo punto fijo de S soluciona el problema $(P)_{k,\varepsilon}$ con $\Phi(0) = 0$ y $T_a = 0$.

Teorema 4.5 Sean $k > 0$, $\varepsilon > 0$, $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \leq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Si el par $(T, \psi) \in H_0^1 \times H$ es un punto fijo de S , entonces (T, ψ) soluciona el problema $(P)_{k,\varepsilon}$ con $T_a = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si para $u \in H^1(\Omega)$ y $g \in L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) si

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{\Omega} g \phi dx \text{ para todo } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Esto implica que

$$\Delta u = g$$

en el sentido de las distribuciones y por lo tanto $\Delta u \in L^p(\Omega)$. Luego como (T, ψ) es punto fijo de S , entonces se deduce que (T, ψ) cumplen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_1 dx + \int_{\Omega} \rho V \phi_1 dx + \int_{\Omega} \Phi(T) \phi_1 dx &= \int_{\Omega} \dot{M}_0 f_\varepsilon \phi_1 dx \\ -c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla T \phi_2 dx + \int_{\Omega} h T \phi_2 dx + \int_{\Omega} \Phi(T) L \phi_2 dx + k \int_{\Omega} \nabla T \nabla \phi_2 dx \\ &= \int_{\Omega} f_\varepsilon \dot{M}_0 c (T_0 - T) \phi_2 dx \end{aligned}$$

$\forall (\phi_1, \phi_2) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ Con

$$V = \frac{1}{\rho |\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right)$$

Luego esto implica que

$$\begin{aligned} -\Delta \psi + \rho V + \Phi(T) &= \dot{M}_0 f_\varepsilon && \text{c.t.p. en } \Omega \\ -c \nabla \psi \nabla T + h(T - T_a) + \Phi(T)L - k \Delta T &= f_\varepsilon \dot{M}_0 c (T_0 - T) && \text{c.t.p. en } \Omega \end{aligned}$$

en el sentido de las distribuciones, por lo tanto $\Delta T \in L^1(\Omega)$, ya que

$$\|\nabla T \nabla \psi\|_{L^1(\Omega)} \leq \|T\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|f_\varepsilon T\|_{L^1(\Omega)} \leq \|T\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Y con esto (T, ψ) cumplen todo lo pedido para resolver el problema $(P)_{k,\varepsilon}$ con $T_a = 0$. \square

Con esto podemos ver que el problema aproximado tiene al menos una solución. Para finalizar esta sección vamos a ver unas cotas para el campo de temperaturas como en los Capítulos anteriores:

Teorema 4.6 Sean $k > 0$, $\varepsilon > 0$, $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \leq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Si $(T, \psi) \in H_0^1 \times H$ son soluciones de $(P)_{k,\varepsilon}$ con $T_a = 0$, entonces:

- $\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c \dot{M}_0}{h}} T_0$
- $\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(h+L\Phi(T_0))|\Omega|^{3/2}}{c(\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0))} T_0$

DEMOSTRACIÓN. Multiplicando (4.2b) por T (lo cual se puede pues $T \in L^\infty(\Omega)$) e integrando:

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx + h \int_{\Omega} T^2 dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi T dx + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T^2 dx + L \int_{\Omega} \Phi(T) T dx \\ = c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T dx \end{aligned}$$

Como ya vimos se tiene:

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi T dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \psi T^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\dot{M}_0 f_\varepsilon - \Phi(T) - \rho V) T^2 dx$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla T|^2 dx + h \int_{\Omega} T^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} (\rho V + \Phi(T)) T^2 dx + L \int_{\Omega} \Phi(T) T dx + \frac{c}{2} \dot{M}_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T^2 dx \\ = c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T dx \end{aligned}$$

Luego como $\Phi(T) \geq 0$, $T \geq 0$, $f_\varepsilon \geq 0$ y $\|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} = 1$, se obtiene:

$$\|T\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{c \dot{M}_0 T_0^2}{h}$$

Lo que implica

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{c \dot{M}_0}{h}}$$

Para probar la otra desigualdad, multiplicamos (4.2b) por $T - T_0$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla(T - T_0)|^2 dx + h \int_{\Omega} T(T - T_0) dx - c \int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi (T - T_0) dx \\ + c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon (T - T_0)^2 dx + L \int_{\Omega} \Phi(T) (T - T_0) dx = 0 \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} \nabla T \nabla \psi (T - T_0) dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \psi (T - T_0)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\dot{M}_0 f_\varepsilon - \Phi(T) - \rho V) (T - T_0)^2 dx$$

además

$$h \int_{\Omega} T(T - T_0) dx = h \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx + h \int_{\Omega} T_0(T - T_0) dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} |\nabla(T - T_0)|^2 dx + h \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx + c \rho V \int_{\Omega} (T - T_0)^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} \Phi(T) (T - T_0)^2 dx \\ + \frac{c}{2} \dot{M}_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon (T - T_0)^2 dx = h \int_{\Omega} T_0(T_0 - T) dx + L \int_{\Omega} \Phi(T) (T_0 - T) dx \end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$\frac{c \rho V}{2} \|T - T_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq h \int_{\Omega} T_0(T_0 - T) dx + L \int_{\Omega} \Phi(T) (T_0 - T) dx$$

Usando la desigualdad de Hölder y que $0 \leq \Phi(T) \leq \Phi(T_0)$ en lo anterior, se obtiene

$$\frac{c\rho V}{2} \|T - T_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (hT_0 + L\Phi(T_0)) \|T_0 - T\|_{L^2(\Omega)} |\Omega|^{1/2}$$

y por lo tanto

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(hT_0 + L\Phi(T_0))}{c\rho V} |\Omega|^{1/2}$$

Por definición

$$\rho V = \frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_{\Omega} \Phi(T) dx \right) \geq \frac{1}{|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - |\Omega| \Phi(T_0) \right) \geq 0$$

Con lo cual se concluye que:

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(hT_0 + L\Phi(T_0)) |\Omega|^{3/2}}{c \left(\dot{M}_0 - |\Omega| \Phi(T_0) \right)}$$

□

Con esto el campo de temperaturas que soluciona $(P)_{k,\varepsilon}$ cumple propiedades similares a las vistas en el capítulo anterior.

4.3. Solución en el limite

Ahora la idea es encontrar una solución del problema (P) como limite de soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$ cuando k, ε convergen a 0, caso en el cual f_ε converge al delta de Dirac y la viscosidad se anula. Para esto se necesitan acotar las soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$ independientemente de k y ε en espacios que permitan pasar al limite.

Lema 4.7 Sean $k > 0$, $\varepsilon > 0$, $\dot{M}_0, h, L, c, \rho > 0$, $T_{max} > T_0 \leq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Si $(T_{k,\varepsilon}, \psi_{k,\varepsilon})$ solucionan el problema $(P)_{k,\varepsilon}$, entonces

$$\|\nabla T_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{cM_0}{k}}$$

DEMOSTRACIÓN. Multiplicando la ecuación por $T_{k,\varepsilon}$ e integrando en Ω tenemos

$$\begin{aligned} -k \int_{\Omega} T_{k,\varepsilon} \Delta T_{k,\varepsilon} dx - c \int_{\Omega} \nabla T_{k,\varepsilon} \nabla \psi_{k,\varepsilon} T_{k,\varepsilon} dx + L \int_{\Omega} \Phi(T_{k,\varepsilon}) T_{k,\varepsilon} dx \\ + cM_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T_{k,\varepsilon}^2 = cM_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T_0 T_{k,\varepsilon} dx \end{aligned}$$

integrando por partes queda

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} \nabla T_{k,\varepsilon}^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\Omega} T_{k,\varepsilon}^2 (V_{k,\varepsilon} + f_\varepsilon) dx + L \int_{\Omega} \Phi(T_{k,\varepsilon}) T_{k,\varepsilon} dx = \\ cM_0 \int_{\Omega} f_\varepsilon T_0 T_{k,\varepsilon} dx \end{aligned}$$

Como Φ es una función creciente y $\Phi(0) = 0$, entonces $\Phi(T_{k,\varepsilon})T_{k,\varepsilon} \geq 0$. Como además $|T_{k,\varepsilon}| \leq T_0$, reemplazando en lo anterior queda

$$k \int_{\Omega} \nabla T_{k,\varepsilon}^2 dx \leq cM_0 T_0^2$$

y por lo tanto

$$\|\nabla T_{k,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{cM_0}{k}}$$

□

Para pasar al límite vamos a necesitar el siguiente teorema

Teorema 4.8 Sea $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

Entonces existe $C > 0$ que depende de Ω y de $\|f\|_{L^1(\Omega)}$, tal que

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq C$$

para todo $1 \leq q < 2$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$g(x) = \begin{cases} n & x > n \\ x & |x| \leq n \\ -n & x < -n \end{cases}$$

Claramente $g(u) \in H^1(\Omega)$, entonces, podemos tomar $\phi = g(u)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 g'(u) dx = \int_{\Omega} f g(u) \phi dx$$

Notemos que

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & x > n \\ 1 & |x| \leq n \\ 0 & x < -n \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{B_n} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f g(u) \phi dx \tag{4.37}$$

donde

$$B_n = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \leq n\}$$

por la definición de g se tiene $|g(u)| \leq n$, entonces

$$\int_{B_n} |\nabla u|^2 dx \leq n \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Ahora tomemos

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > n + 1 \\ x - n & n \leq x \leq n + 1 \\ 0 & |x| \leq n \\ x + n & -n - 1 \leq x \leq -n \\ -1 & x < -n - 1 \end{cases}$$

Luego usando $\phi = g(u)$ nos queda

$$\int_{D_n} |\nabla u|^2 dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (4.38)$$

donde

$$D_n = \{x \in \Omega \mid n \leq |u(x)| \leq n + 1\}$$

Ahora por la desigualdad de Hölder

$$\int_{D_n} |\nabla u|^q dx \leq \left(\int_{D_n} |\nabla u|^2 \right)^{q/2} |D_n|^{(2-q)/2}$$

para $1 \leq q < 2$. Ahora tomando $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$, entonces por la definición de D_n

$$|D_n| \leq \frac{1}{n^{q^*}} \int_{B_n} |u|^{q^*} dx$$

Luego con lo anterior y (4.38) se obtiene

$$\int_{D_n} |\nabla u|^q dx \leq (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} \left(\frac{1}{n^{q^*}} \int_{B_n} |u|^{q^*} dx \right)^{(2-q)/2}$$

Ahora tomemos un $n_0 \in \mathbb{N}$, sumando sobre $n \geq n_0$ y usando la desigualdad de Hölder con exponentes $2/(2-q)$ y $2/q$ en el lado derecho

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{D_n} |\nabla u|^q dx \leq (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q^*(2-q)/2}} \right)^{q/2} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{B_n} |u|^{q^*} dx \right)^{(2-q)/2}$$

Agregando a lo anterior (4.38) para $n = n_0$ y utilizando la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^q dx \leq (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} \left(n_0^{q/2} |\Omega|^{(2-q)/2} + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q^*(2-q)/2}} \right)^{q/2} \|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{q^*(2-q)/2} \right) \quad (4.39)$$

ahora aplicando la desigualdad de Sobolev y por lo recién demostrado, se obtiene

$$\|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q \leq C (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} \left(n_0^{q/2} |\Omega|^{(2-q)/2} + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q^*(2-q)/2}} \right)^{q/2} \|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{q^*(2-q)/2} \right)$$

Notemos que $q^*(2-q)/q = 2$ y $q^*(2-q)/2 = q$. Entonces lo anterior queda

$$\|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q \leq C (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} \left(n_0^{q/2} |\Omega|^{(2-q)/2} + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{q/2} \|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q \right)$$

Ahora tomando n_0 suficientemente grande para que

$$\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{q/2} C (\|f\|_{L^1(\Omega)})^{q/2} < 1$$

se tiene que

$$\|u\|_{L^{q^*}(\Omega)}^q \leq C_2$$

donde $C_2 > 0$ depende de $\|f\|_{L^1(\Omega)}$ y Ω . Ahora reemplazando en (4.39)

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_3$$

donde $C_3 > 0$ depende de $\|f\|_{L^1(\Omega)}$ y Ω . □

Este Teorema también es valido cuando la igualdad se cumple solo para funciones ϕ están en H_0^1 con $u \in H_0^1$, ya que lo único relevante es poder tomar la norma del gradiente como la norma del espacio de Sobolev correspondiente. Un resultado más general para el caso en que $u \in H_0^1(\Omega)$ es demostrado en [2]. También vamos a usar el siguiente teorema

Teorema 4.9 *Suponga que K es un conjunto acotado de \mathbb{R}^P y Ω un abierto en \mathbb{R}^N . Sea $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^P$ tal que $u_n(x) \in K$ c.t.p. Entonces existe una subsucesión $\{u_m\}$ y una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ sobre \mathbb{R}^P con $\text{supp}(\nu_x) \subset \overline{K}$, tal que si F es una función continua en \mathbb{R}^P y*

$$\overline{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^P} F(\lambda) d\nu_x(\lambda)$$

Entonces

$$F(u_m) \xrightarrow{*} \overline{F} \text{ en } L^\infty(\Omega)$$

El Teorema anterior puede ser revisado en [16]. En dicho artículo el resultado es utilizado para ver la existencia para ciertas ecuaciones diferenciales no lineales, de manera similar a como se hará en lo que viene. En el teorema anterior, las medidas ν_x asociadas a la función limite u son únicas y se conocen como las medidas de Young asociadas a u . Con lo anterior podemos demostrar el siguiente resultado de existencia para el campo de temperaturas:

Teorema 4.10 *Sean $M_0, h, L, c, \rho > 0, T_{max} > T_0 \leq 0$ y $\Phi : (-\infty, T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, creciente, acotada inferiormente y tal que $\Phi(0) = 0$. Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 de frontera de clase $C^{1,1}$. Existe al menos un $T \in L^\infty(\Omega)$ y $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que para todo $\phi_1 \in C_0^1(\Omega), \phi_2 \in C^1(\overline{\Omega})$*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_2 dx + \rho V \int_{\Omega} \phi_2 dx + \int_{\Omega} \overline{\Phi} \phi_2 dx &= \int_{\Omega} \delta_0 \phi_1 dx \\ \int_{\Omega} h T \phi_1 dx + c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_1 T dx + L \int_{\Omega} \overline{\Phi} \phi_1 dx + c \rho V(T) \int_{\Omega} T \phi_1 dx &= c M_0 T_0 \int_{\Omega} \delta_0 \phi_1 dx \\ &+ c \int_{\Omega} \overline{T \Phi} \phi_1 dx \end{aligned}$$

donde I es la función identidad en \mathbb{R} , $V(T) = \frac{1}{|\Omega|^\rho} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \bar{\Phi} dx \right)$ y además

$$\bar{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^p} F(\lambda) d\nu_x(\lambda)$$

para $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ una familia de medidas de probabilidad, para $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dicha solución cumple también

- $0 \leq T \leq T_0$.
- $\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{c\dot{M}_0}{h}} T_0$
- $\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(h+L\Phi(T_0))|\Omega|^{3/2}}{c(\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0))} T_0$

DEMOSTRACIÓN. Para $k, \varepsilon > 0$ sabemos que existen $T_{k,\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ y $\psi_{k,\varepsilon} \in H^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla \psi_{k,\varepsilon} \nabla \phi_2 dx + \rho V \int_\Omega \phi_2 dx + \int_\Omega \Phi(T_{k,\varepsilon}) \phi_2 dx = \int_\Omega f_\varepsilon \phi_2 dx \\ -k \int_\Omega \Delta T_{k,\varepsilon} \phi_1 dx + \int_\Omega h T_{k,\varepsilon} \phi_1 dx - c \int_\Omega \nabla \psi_{k,\varepsilon} \nabla T_{k,\varepsilon} \phi_1 dx &= c\dot{M}_0 \int_\Omega f_\varepsilon (T_0 - T_{k,\varepsilon}) \phi_1 dx \\ & \quad + L \int_\Omega \Phi(T_{k,\varepsilon}) \phi_1 dx \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$V(T_{k,\varepsilon}) = \frac{1}{\rho|\Omega|} \left(\dot{M}_0 - \int_\Omega \Phi(T_{k,\varepsilon}) dx \right)$$

para todo $\phi_1 \in C_0^1(\Omega)$, $\phi_2 \in C^1(\bar{\Omega})$, donde

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon = \delta_0 \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Sabemos que $0 \leq T_{k,\varepsilon} \leq T_0$, luego por el Teorema 4.9 existe una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ con $\text{supp}(v_x) \subset [0, T_0]$, tal que para $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y

$$\bar{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\lambda) d\nu_x(\lambda)$$

se tiene

$$F(T_{k,\varepsilon}) \xrightarrow{*} \bar{F} \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0$$

en particular esto implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(T_{k,\varepsilon}) \phi_1 dx &\rightarrow \int_\Omega \bar{\Phi} \phi_1 dx \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0 \\ \int_\Omega T_{k,\varepsilon} \Phi(T_{k,\varepsilon}) \phi_1 dx &\rightarrow \int_\Omega T \bar{\Phi} \phi_1 dx \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Además, existe $T \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$T_{k,\varepsilon} \xrightarrow{*} T \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0$$

Por otro lado, notemos que

$$\int_{\Omega} |\Phi(T_{k,\varepsilon}) - \rho V(T_{k,\varepsilon}) + \dot{M}_0 f_{\varepsilon}| dx \leq 2\dot{M}_0 + 2|\Omega|\Phi(T_0)$$

Luego por el teorema (4.8), existe una constantes $C > 0$ tal que

$$\|\nabla\psi_{k,\varepsilon}\|_{L^q(\Omega)} \leq C$$

para $1 \leq q < 2$. Por la desigualdad de Poincare se obtiene que

$$\|\psi_{k,\varepsilon}\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C$$

En este caso C absorbe la constante de la desigualdad de Poincare. Por lo anterior, debe existir un $\psi \in W^{1,q}(\Omega)$ y una sub-sucesión de $\psi_{k,\varepsilon}$ (que se denotará de la misma forma), tal que

$$\psi_{k,\varepsilon} \rightharpoonup \psi \text{ en } W^{1,q}(\Omega) \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\psi_{k,\varepsilon} \rightarrow \psi \text{ en } L^q(\Omega) \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0$$

Ahora vamos a demostrar que $\nabla\psi_{k,\varepsilon}$ converge fuerte a $\nabla\psi$ en $L^1(\Omega)$. Para $\delta > 0$ definamos

$$g(x) = \begin{cases} \delta & x > \delta \\ x & |x| \leq \delta \\ -\delta & x < -\delta \end{cases}$$

Ahora sean $k_1 \neq k_2 > 0$ y $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 > 0$ y denotemos por $L^{k,\varepsilon} = \Phi(T_{k,\varepsilon}) - \rho V(T_{k,\varepsilon}) + \dot{M}_0 f_{\varepsilon}$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla\phi\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})dx = \int_{\Omega} \phi(L^{k_1,\varepsilon_1} - L^{k_2,\varepsilon_2})dx$$

podemos tomar $\phi = g(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})$, con lo cual queda

$$\int_{\Omega} g'(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})|\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})|^2 dx = \int_{\Omega} g(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})(L^{k_1,\varepsilon_1} - L^{k_2,\varepsilon_2})dx$$

Por la definición de g y por la cota que debe cumplir $L^{k,\varepsilon}$, entonces

$$\int_{D_{k_1,k_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta}} |\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})|^2 dx \leq 2\delta C$$

donde

$$D_{k_1,k_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta} = \{x \in \Omega \mid |\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2}| \leq \delta\}$$

Utilizando Hölder en lo anterior queda

$$\int_{D_{k_1,k_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta}} |\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})| dx \leq \sqrt{2|\Omega|\delta C}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})| dx &= \int_{D_{k_1,k_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta}} |\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})| dx \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus D_{k_1,k_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta}} |\nabla(\psi_{k_1,\varepsilon_1} - \psi_{k_2,\varepsilon_2})| dx \end{aligned}$$

Por lo anterior y la desigualdad de Hölder

$$\int_{\Omega} |\nabla(\psi_{k_1, \varepsilon_1} - \psi_{k_2, \varepsilon_2})| dx \leq \sqrt{2|\Omega|\delta C} + C|\{x \in \Omega \mid |\psi_{k_1, \varepsilon_1} - \psi_{k_2, \varepsilon_2}| > \delta\}|^{1-1/q}$$

donde $\int_A dx = |A|$ para $A \subset \mathbb{R}^2$. Luego como $\psi_{k, \varepsilon}$ converge en medida, entonces debe ser una sucesión de Cauchy en medida y por lo tanto

$$\int_{\Omega} |\nabla(\psi_{k_1, \varepsilon_1} - \psi_{k_2, \varepsilon_2})| dx \leq \sqrt{2|\Omega|\delta C} + \delta$$

entonces $\nabla\psi_{k, \varepsilon}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega)$, luego se puede extraer otra sub-sucesión tal que $\nabla\psi_{k, \varepsilon}$ converge *c.t.p.* a $\nabla\psi$ y por el Teorema de convergencia dominada $\psi_{k, \varepsilon} \rightarrow \psi$ en $W^{1,q}(\Omega)$. La demostración de la convergencia de $\nabla\psi_{k, \varepsilon}$, mediante una subsucesión, está basada en lo hecho en [2], con la diferencia que en nuestro caso la condición de borde para ψ es tipo Neumann y en [2] es Dirichlet. De la convergencia de $\nabla\psi_{k, \varepsilon}$ se deduce que

$$\int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\phi_2 dx + \rho V(T) \int_{\Omega} \phi_2 dx + \int_{\Omega} \bar{\Phi} \phi_2 dx = \int_{\Omega} \delta_0 \phi_2 dx$$

Por otro lado, podemos usar integración por partes en el lado derecho de (4.40) y obtener

$$\begin{aligned} & -k \int_{\Omega} \Delta T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx + \int_{\Omega} h T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx + c \int_{\Omega} \nabla\psi_{k, \varepsilon} \nabla\phi_1 T_{k, \varepsilon} dx = c \dot{M}_0 \int_{\Omega} f_{\varepsilon} T_0 \phi_1 dx \\ & + L \int_{\Omega} \Phi(T_{k, \varepsilon}) \phi_1 dx + c \rho V(T_{k, \varepsilon}) \int_{\Omega} T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx + c \int_{\Omega} T_{k, \varepsilon} \Phi(T_{k, \varepsilon}) \phi_1 \end{aligned}$$

Notemos ahora que para $\phi_1 \in C_0^1(\Omega)$

$$-k \int_{\Omega} \Delta T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx = k \int_{\Omega} \nabla T_{k, \varepsilon} \nabla \phi_1 dx$$

Luego

$$\left| k \int_{\Omega} \Delta T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx \right| \leq k \|\nabla T_{k, \varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \phi_1\|_{L^2(\Omega)}$$

Entonces por el Lema 4.7

$$\left| k \int_{\Omega} \Delta T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx \right| \leq T_0 \sqrt{k c \dot{M}_0} \|\nabla \phi_1\|_{L^2(\Omega)}$$

y por lo tanto

$$\lim_{k, \varepsilon \rightarrow 0} k \int_{\Omega} \Delta T_{k, \varepsilon} \phi_1 dx = 0$$

para todo $\phi_1 \in C_0^1(\Omega)$. Ahora, como $\nabla\psi_{k, \varepsilon} \rightarrow \nabla\psi$ en $L^q(\Omega)$ y $T_{k, \varepsilon} \xrightarrow{*} T$ en $L^\infty(\Omega)$ cuando $k, \varepsilon \rightarrow 0$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla\psi_{k, \varepsilon} \nabla\phi_1 T_{k, \varepsilon} dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\phi_1 T dx \text{ cuando } k, \varepsilon \rightarrow 0$$

para todo $\phi_1 \in C_0^1(\Omega)$. y por lo tanto se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_2 dx + \rho V \int_{\Omega} \phi_2 dx + \int_{\Omega} \bar{\Phi} \phi_2 dx &= \int_{\Omega} \delta_0 \phi_2 dx \\ \int_{\Omega} h T \phi_1 dx + c \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi_1 T dx + L \int_{\Omega} \bar{\Phi} \phi_1 dx &= c \dot{M}_0 T_0 \int_{\Omega} \delta_0 \phi_1 dx \\ + c \rho V(T) \int_{\Omega} T \phi_1 dx + c \int_{\Omega} \bar{T} \bar{\Phi} \phi_1 dx & \end{aligned}$$

□

Este Teorema solo da la existencia en sentido muy débil, sin embargo, lo que falta para demostrar que la existencia es más fuerte hay que probar que las medidas de Young asociadas a T son deltas de Dirac. En este contexto hay problemas similares en los cuales esto se puede demostrar a través de un argumento de compacidad compensada. En [16] se afronta un problema de condición inicial:

$$\frac{du}{dt} + \operatorname{div}(f(u)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.41)$$

$$u(0) = u_0 \quad (4.42)$$

donde f es una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ y la incógnita es u . En este caso el argumento de compacidad compensada se utiliza para demostrar que soluciones de

$$-k \Delta u + \frac{du}{dt} + \operatorname{div}(f(u)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(0) = u_0$$

convergen a una solución del problema original cuando $k \rightarrow 0$. En el mismo artículo [16] se estudia la ecuación

$$\frac{du}{dt} + v \cdot \nabla u = F(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (4.43)$$

$$u = u_0 \quad (4.44)$$

para v un campo vectorial y F una función de clase $C^1(\mathbb{R})$ y se llega a la existencia de subsoluciones para F convexa. Las ecuaciones (4.41) y (4.43) son similares a (1.2), sin embargo, pero los términos $\operatorname{div}(f(u))$ y $v \cdot \nabla u$ son más fáciles de trabajar que $\nabla \psi \nabla T$, ya que ψ depende de T y además esta la no linealidad por la presencia de evaporación. Otra alternativa para estudiar la convergencia de las soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$ es utilizar la monotonía de Φ y ver que $\Phi(T_{k,\varepsilon})$ converge a $\Phi(T)$ en el teorema anterior.

Para tener una mejor idea del efecto de agregar un término viscoso, esto se puede apreciar en los siguientes gráficos de soluciones numéricas del problema aproximado para $h = 1$ y $h = 100$ en el disco unitario y una evaporación dada por

$$\Phi(x) = \frac{1}{100 - x} - \frac{1}{100}$$

Se escoge $h = 1$ y $h = 100$ para lograr apreciar el comportamiento cuando el campo de temperaturas es cercano a T_0 y cuando es cercano a \bar{T} (en este caso $\bar{T} = 0$).

En ambos gráficos se calcula las soluciones para $\varepsilon = k = 1/N$, en el caso de $h = 100$ se logra apreciar que para ε pequeño la solución aproximada es constante cerca de lo origen y menor a T_0 , a medida que ε decrece la temperatura comienza a acercarse a T_0 cerca del origen, este comportamiento no se logra ver para $h = 1$, ya que como vimos en los teoremas anteriores, se espera que para h pequeño la solución sea cercana a T_0 en $L^2(\Omega)$. Por otra parte, los dos casos, el decrecimiento de k se traduce e una perdida de regularidad de las soluciones, esto se puede ver de forma clara en el caso $h = 1$, lo cual es esperable, pues en general agregar un termino viscoso o difusivo aumenta la regularidad.

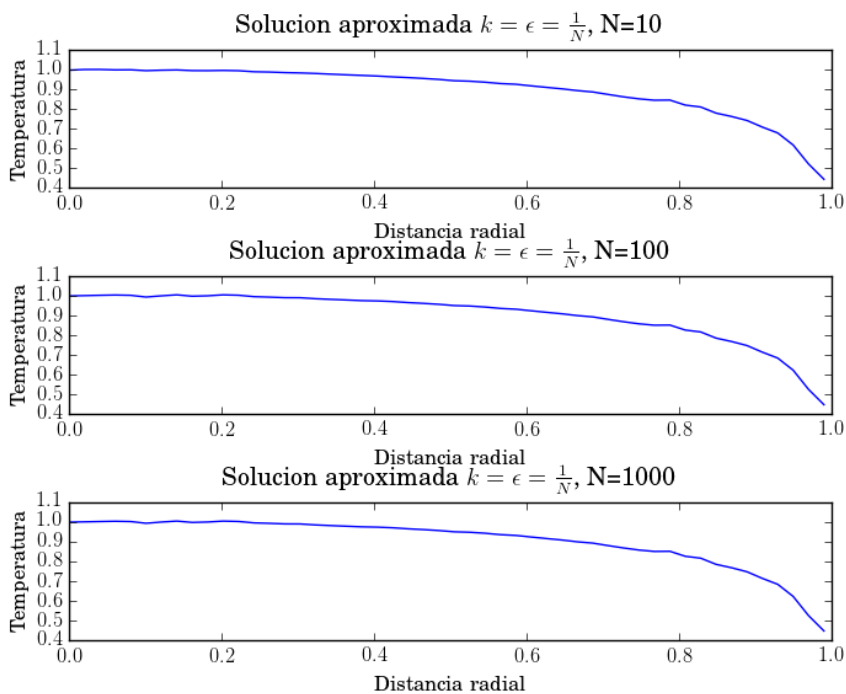


Figura 4.1: Solución numérica problema aproximado usando FEM para $h = 1$, $L = 2000$, $\rho = 1$ y $T_0 = 1$.

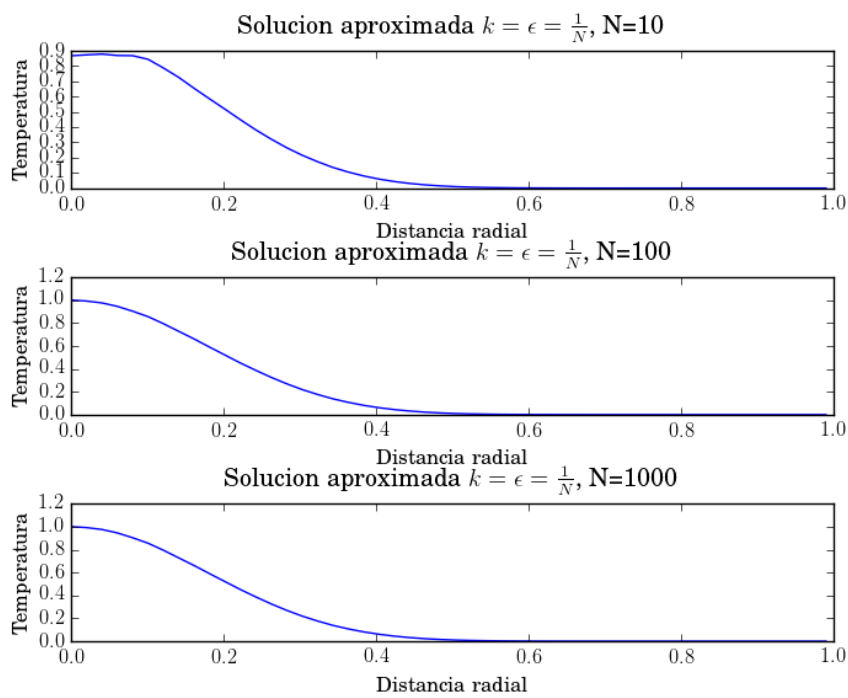


Figura 4.2: Solución numérica problema aproximado usando FEM para $h = 100$, $L = 2000$, $\rho = 1$ y $T_0 = 1$.

Conclusión

El objeto de este trabajo fue dividido en el estudio de tres modelos:

- 1) Modelo radial
- 2) Modelo con geometría general, sin evaporación.
- 3) Modelo con geometría general, con evaporación.

Estos tres modelos están ordenados de forma creciente en función de su complejidad. De esta manera el modelo radial es más simple, pues se reduce a analizar las propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso se logró demostrar la existencia de soluciones bajo las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned} \Phi(T_0) - \max(0, \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi(x)) &\leq \frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} \\ \frac{2\|\Phi'\|_{L^\infty([0, T_0])} T_0}{\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)} &< 1 \end{aligned}$$

La primera sirve para asegurar que la velocidad de infiltración en presencia de evaporación es positiva y la segunda es útil para demostrar la unicidad de soluciones del problema. Además se logró demostrar las siguientes propiedades para T (el campo de temperaturas):

1. Se tiene que

$$(T_0 - \bar{T}) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{(h+L\|\Phi'\|_\infty)}{c\left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} - \Phi(T_0)\right)}} \leq T - \bar{T} \leq (T_0 - \bar{T}) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^{\frac{h}{c\left(\frac{\dot{M}_0}{|\Omega|} + \Phi(T_0)\right)}} \quad (4.46)$$

Donde

$$h(\bar{T} - T_a) + L\Phi(\bar{T}) = 0$$

- 2.

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} \leq T_0 \sqrt{\frac{\dot{M}_0}{h}} \quad (4.47)$$

- 3.

$$\|T - T_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2(h + \Phi(T_0))|\Omega|^{3/2}}{\dot{M}_0 - |\Omega|\Phi(T_0)} \quad (4.48)$$

En el segundo modelo se obtuvo la existencia y unicidad del problema de las soluciones de (P_f) (problema 3.1). Recordamos que (P_f) consiste en encontrar el flujo másico y el campo de temperatura en ausencia de evaporación y con irrigación distribuida en Ω por una función acotada f . Al igual que en el modelo radial, se demostraron las cotas (4.48) y (4.47) para el campo de temperaturas. Más aún, se comprobó numéricamente que el campo de temperaturas que soluciona (P_f) con $\Omega = B(0, R)$ y $f = g_\varepsilon$ (una función que aproxima el delta de Dirac cuando $\varepsilon \rightarrow 0$), está cerca del campo de temperaturas que soluciona el problema radial. También se comprobó de forma numérica, que para el caso de $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ la temperatura tiene un comportamiento similar al de la temperatura del modelo radial, vale decir, la solución vale T_0 en el origen y decae a T_a en el borde.

En el modelo con geometría general y evaporación no nula, se obtuvo que el problema aproximado $(P)_{k,\varepsilon}$ (problema 4.1) tiene al menos una solución y que cumple con las cotas (4.48) y (4.47). El problema $(P)_{k,\varepsilon}$ consiste en agregar un término difusivo a la ecuación para la temperatura y cambiar el delta de Dirac por una sucesión $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de funciones a soporte compacto que converjan al delta de Dirac en $D'(\Omega)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Utilizando lo anterior se demostró que las soluciones del problema $(P)_{k,\varepsilon}$ convergen a una solución de (P) en un sentido débil y que además dicha solución debe cumplir con (4.48), (4.47) y están entre \bar{T} y T_0 . También se pudo ver numéricamente que las soluciones del problema aproximado vale T_0 en el origen y decae a \bar{T} en el borde de Ω , al igual que en los dos primeros modelos. Como trabajo futuro queda propuesto analizar la regularidad de la solución encontrada y su unicidad.

Todo lo demostrado en los tres modelos permiten tener una idea del comportamiento del campo de temperaturas, en especial es importante (4.48) ya que permite medir que tan lejos está el campo de temperaturas de la temperatura de irrigación en función de los parámetros del problema.

Bibliografía

- [1] J.-M. Bernard. Solutions H^1 of the Steady Transport Equation in a bounded polygon with a fully non-homogeneous velocity. *ArXiv e-prints*, December 2016.
- [2] L. Boccardo and T. Gallouët. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*, 87(1):149 – 169, 1989.
- [3] P. B. Bochev and R. B. Lehoucq. On finite element discretization of the pure neumann problem. Technical report, Sandia National Laboratories, P.O. Box 5800 Albuquerque, NM 87185, Technical Report SAND2001-0733J, 2001.
- [4] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Series. Springer, 2010.
- [5] P. Cuadra. Lixiviación en pilas, extracción por solvente y electroobtención: Una cadena de tecnología moderna. Accedido en 15-01-2018 a https://www.codelcoeduca.cl/procesos_productivos/escolares_lixiviacion.asp, 2018.
- [6] D. G. Dixon. Analysis of heat conservation during copper sulphide heap leaching. *Hydrometallurgy*, 58(1):27 – 41, 2000.
- [7] E. Domic. Historia del proceso actual de lixiviación en pilas y la producción de cátodos en Chile. Accedido en 22-01-2018 a <http://www.portalminero.com/pages/viewpage.action?pageId=10911860>, 2012.
- [8] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.
- [9] V. Girault and L.R. Scott. Analysis of a two-dimensional grade-two fluid model with a tangential boundary condition. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 78(10):981 – 1011, 1999.
- [10] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [11] B. Da Veiga H. Existence results in sobolev spaces for a stationary transport equation. *Ricerche di Matematica*, 36, 1989.
- [12] R. Rodriguez Merino. Estudio del comportamiento térmico en pilas de biolixiviación.

Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Mecánico, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 10 2014.

- [13] Gobierno de Chile Ministerio de Minería. Historia de la minería en Chile. Consultado en 22-01-2018 a http://www.minmineria.gob.cl/%C2%BFque-es-la-mineria/historia-de-la-mineria-en-chile/#El_cobre__1920_-_1971_, 2016.
- [14] Muzenda, Ramatsa, Ntuli, Belaid, and Tshwabi. An investigation into the effect of temperature on the leaching of copper-matte. *World Academy of Science, engineering and Technology*, 52, 2011.
- [15] D.A. Nield and A. Bejan. *Convection in Porous Media*. Springer New York, 2012.
- [16] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. *Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium*, Vol. 4 (R. J. Knops, ed.), 1979.