



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

AGREEMENTS IN A DECENTRALIZED MATCHING PARTY

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

BASTIÁN ANDRÉS GÓMEZ RIVERA

PROFESOR GUÍA:
MATTEO TRIOSSI VERONDINI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN ESCOBAR CASTRO
RAHMI ILKILIÇ

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA; INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: BASTIÁN ANDRÉS GÓMEZ RIVERA
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: MATTEO TRIOSSI VERONDINI

AGREEMENTS IN A DECENTRALIZED MATCHING PARTY

El presente trabajo estudia la infinita interacción descentralizada de un mercado *two-sided*, el cual se comporta de manera análoga a una fiesta, donde hombres y mujeres se emparejan a partir de propuestas de baile. En cada instante, cualquiera de los dos podría abandonar al otro para obtener una mejor asignación, teniendo todos un factor de descuento común δ . Utilizando como refinamiento al equilibrio Markoviano perfecto (restringido en cuanto a la formación de nuevas parejas), se analiza la relación entre el conjunto de *matchings* estables \mathfrak{M}^* y el conjunto de asignaciones $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ ante el cual ya no se generen más “cambios” dentro de la fiesta, entendiendo a estos últimos como “acuerdos”. Los resultados son que: (1) todo acuerdo debe ser estable, es decir, $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta \subseteq \mathfrak{M}^*$; (2) en caso de existir más de un *matching* estable, existe un $\hat{\delta}$ fijo tal que $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta \geq \hat{\delta}} \subset \mathfrak{M}^*$; (3) los incentivos opuestos del mercado son los generan que *matchings* estables puedan no ser acuerdos en la fiesta. La contribución de esta investigación viene dada por mostrar que los incentivos opuestos entre los dos lados del mercado, no permiten a los agentes alcanzar o mantener asignaciones estables de manera perpetua a lo largo del tiempo.

*A todas las personas que siempre me apoyaron y creyeron en mí,
porque sin ellas no estaría aquí.*

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Marcelo y Mónica, por darme la oportunidad de estudiar y realizar este trabajo, siempre exigiendo lo mejor de mí. A mis hermanos, Andrés y Tamara, por estar ahí siempre que los he necesitado. Le agradezco a mis amigos y compañeros de Industrias, Diego, Valentina, Rosario, Javi, Tamara, Mario y Caro, por estos increíbles 4 años juntos que he podido disfrutar gracias a su compañía. A Mauricio, Sven y Carolina, por apoyarnos mutuamente durante los difíciles años de plan común. A mis profesores, Triossi y Escobar, que me han guiado y aconsejado durante mis estudios en economía, y al Profesor Rahmi por formar parte de mi comisión. Finalmente, le agradezco a mis amigos de toda la vida, Nicolás y Valentina, por todo lo que han hecho y sobre todo por creer en mí. A todos ustedes, les estoy profundamente agradecido.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Literatura	4
3. Notación y Definiciones Previas	6
4. El Modelo	8
5. Equilibrio Markoviano Perfecto	12
6. Imposibilidad de Acuerdos Inestables	18
7. Incentivos Reticulares	24
8. Ejemplos	28
9. Discusión	33
10. Conclusiones	35
Bibliografía	36

Índice de Figuras

1.	Ejemplo 1: matriz U y resultados	29
2.	No existencia de EMP EE con $f_i^t : \mathfrak{M} \rightarrow \phi_i$	30
3.	Ejemplo 2: matriz U y resultados	30
4.	Ejemplo 3: matriz U y resultados	32
5.	Ejemplo 4: matriz U y resultados	32

1. Introducción

Hace medio siglo, Gale & Shapley [13] introdujeron lo que se conoce hoy como el modelo estándar de la teoría de *matching*, “*the marriage market*”. Años más tarde, la teoría fue aplicada en un contexto económico por Roth [30], influyendo en una serie de mercados y rediseñando: las pasantías de estudiantes médicos en US, Canadá y UK [31]; las donaciones de órganos [32]; los procesos de admisión escolar dentro de las ciudades de New York y Boston [1]; e inclusive, los mecanismos de subastas para la venta de ondas de radio y electricidad [21].

Usualmente, estos mercados se dividen en centralizados o descentralizados. En el primero, cada agente debe enviar un *ranking* de preferencias¹, para luego, a través de un mecanismo (o algoritmo) “óptimo”, entregar el *matching* o asignación final del mercado. Tal criterio de optimalidad, se basa directamente en un *matchmaker*, quien (la mayoría de las veces) busca maximizar el bienestar social en una asignación estable. En el segundo, son directamente las interacciones entre los agentes del mercado, las que determinan el resultado final. Esto genera un espacio de acciones mucho más amplio y complejo que en el primer caso, donde la dimensión temporal toma relevancia en el *output* final. La rama dedicada a estudiar mecanismos, tomando en cuenta la respuesta estratégica de los agentes involucrados, ha sido denominada como “*market design*” (ver Roth [29]).

No se puede negar el éxito, tanto teórico como práctico, de esta teoría. No obstante, el esfuerzo dentro del campo ha priorizado “resolver” (por sobre entender) el problema inicial, mostrado indirectamente en [30, pág. 992], esto es: el hecho de que en un mercado *two-sided* descentralizado los agentes no sean capaces de alcanzar o mantener una asignación estable a lo largo del tiempo, justificando de una forma u otra su centralización.

Fudenberg [12] resalta el hecho anterior como una de las importantes incógnitas que aún permanecen sin respuesta satisfactoria por los economistas, y es que si bien, la teoría actual ha logrado explicar de manera satisfactoria la razón de por qué un grupo de agentes podría encontrarse satisfecho o no con su respectiva asignación, no explica como es que tales agentes fallan haciendo esto por sí mismos (actuando bajo sus propios intereses) si no existe tal *matchmaker* que organice el mercado. Inclusive, Echeñique, Wilson & Yariv [9] han expuesto empíricamente que el concepto clásico de estabilidad (ver Gale & Shapley [13, pág. 12]) probablemente no sea una buena aproximación del *output* final en un mercado descentralizado.

Como ejemplo de lo dicho, el proceso de selección escolar del estado de New York entre los años 1969 y 1990 fue un sistema completamente descentralizado, luego de la aprobación del plan denominado “*Academic Excellence: Community and Teachers Assume Responsibility for the Education of the Ghetto Child*” en el año 1967 (ver Ravitch [27, pág. 312]). Tal plan, manifestado por el choque entre la burocracia y las nuevas etnias raciales de la época, hizo que el sistema de escuelas públicas más extenso de USA se volviera a su vez uno de los más complejos, teniendo que tanto escuelas como estudiantes podían realizar ofertas y postulaciones, respectivamente, dentro de un periodo indefinido de tiempo, donde ambos

¹ Esto es, un orden parcial o estricto entre las asignaciones “aceptables” de un individuo.

podían rechazar a su contraparte en base a criterios propios (ver Schneider et al. [37, pág. 21]). Esto culminó en el año 2002, con la puesta en marcha de una reforma fundada en centralizar tales escuelas, en respuesta a la alta corrupción del sistema y, por sobre todo, a la gran ineficiencia en cuanto asignación escolar. Teniendo a más de diez mil alumnos sin escuelas a fines de la década de los noventa [27, 37].

Dicho esto, la motivación de este trabajo proviene de estudiar la siguiente interacción (junto con sus análogos): dentro de una “fiesta”, hombres y mujeres interactúan dinámicamente a través de propuestas de “baile” y aceptaciones o rechazos de éstas, con el fin de disfrutar bailando el mayor tiempo posible junto a sus parejas más preferidas. Ante esto **a)** ¿Existe algún “acuerdo” entre los participantes? y, de existir, **b)** ¿Son capaces de alcanzarlos o mantenerlos? **c)** ¿Cual es la relación entre la estabilidad y lo anterior? y, sea cual sea el *output*, **d)** ¿Como se justifica racionalmente el comportamiento anterior?

Para esto, se analiza teóricamente un modelo dinámico no-cooperativo con información completa y perfecta, similar a lo que se conoce como un proceso discreto de Markov (ver Puterman [26]). Entendiendo a tal “fiesta” como un *marriage market* en el cual los agentes pueden interactuar en un horizonte infinito, hombres y mujeres desean “bailar” el mayor tiempo que les sea posible con sus parejas preferidas (entendiendo “bailar” como una asignación uno-a-uno que genera utilidad). Es decir, en cada instante de tiempo:

- (t.1) un hombre o mujer (aleatoriamente) tiene la oportunidad
- (t.2) de pedirle a otra persona un baile (o de no bailar),
- (t.3) la persona que recibió la propuesta debe aceptarla (A) o rechazarla (R) y,
- (t.4) en caso de ser aceptada, tal pareja comienza a bailar. De otra forma, la fiesta no sufre cambios.
- (t.5) Finalmente, cada uno “disfruta” bailar con su pareja correspondiente (o estar solo).

Por simplicidad, tal fiesta será “privada” (sin la entrada de agentes externos), “monógama” (con asignaciones *one-to-one*) y “heterosexual” (mercado *two-sided*)². Todos los participantes poseen una relación de preferencias, tal que cumplan con los supuestos de:

- (A.1) no-indiferencia,
- (A.2) estacionariedad,
- (A.3) impaciencia y
- (A.4) representación en utilidad esperada.

La impaciencia se representa con un factor de descuento común $\delta \in [0, 1)$ y por “acuerdo” se entenderá como una asignación que logre perdurar de forma infinita a lo largo del tiempo (equivalente, a tener un estado absorbente dentro de una cadena de Markov). Para evitar

²La razón de asumir que los hombres solo pueden emparejarse con mujeres, y viceversa, es meramente por simplicidad y no se encuentra relacionada a ninguna ideología del autor.

confusiones, es necesario aclarar que el modelo a estudiar no se encuentra en las categorías de: (i) *search and matching*, (ii) búsquedas unilaterales o (iii) utilidad transferible.

Como refinamiento, se utilizará una versión “estricta” y estacionaria del equilibrio Markoviano perfecto (EMP), propuesto en principio por Tirole & Maskin [40]. Su uso se debe a que, como muestra Alcalde [3], el equilibrio de Nash (EN) es un concepto insuficiente para analizar el resultado estratégico dentro de un mercado *two-sided*. Por otra parte, el EMP permite mantener cierta “consistencia” al momento de analizar comportamientos en horizontes finitos e infinitos, así, a medida que el horizonte crece, las diferencias entre las soluciones de equilibrio para horizontes finitos e infinitos tienden a volverse nulas. Tal propiedad no la posee el equilibrio perfecto en subjuegos (EPS) al depender de la “historia” completa de acciones y no de la “historia relevante en los pagos”. El prefijo de estricto se refiere exclusivamente a que la formación de nuevas parejas dentro de la fiesta entregue un valor estrictamente mayor a la pareja que comienza un nuevo baile, siendo utilizado por simplicidad.

La literatura más reciente (detallada en la Sección 2) depende de comportamientos estratégicos bajo “reglas” que generan un acuerdo en base a la limitación de acciones en los agentes³. Lo anterior, repercute en una gran variedad de equilibrios (bajo distintos refinamientos) estables e inestables. En contraste, el modelo presente estudia un comportamiento inducido por la constante incertidumbre bilateral de perder a una actual (o futura) pareja, sacando provecho de la recursividad del problema, y centrando el análisis en la cadena de Markov resultante del EMP.

A parte del ejemplo de selección escolar dentro del estado de New York, los hombres y mujeres pueden ser interpretados como firmas y trabajadores que buscan iniciar una relación laboral a lo largo del tiempo, teniendo siempre la posibilidad de terminarla si al menos una de las dos partes lo desea. En este caso, un acuerdo correspondería a un punto de estabilidad laboral tal que en el mercado no se desee destruir o generar ninguna otra relación laboral.

En resumen, los resultados de este trabajo son que:

- (1) no es posible que la fiesta llegue a un acuerdo inestable,
- (2) los incentivos que inducen acuerdos estables son los mismos que, para valores “altos” de δ , generan la inexistencia de estos y,
- (3) los incentivos opuestos del mercado son los que “destruyen” acuerdos y, en algunos casos, no permiten la existencia de éstos.

Estos resultados, se asemejan al trabajo empírico de Echeñique & Yariv [10], en el cual los *matchings* alcanzados son, comúnmente, los del centro en el retículo de asignaciones estables (ver Conway [33, pág. 36]). Ya que los primeros acuerdos en destruirse a medida que aumenta δ son los extremos del retículo resultante del conjunto de *matchings* estables.

La contribución a la literatura, viene dada por mostrar que intentar lograr estabilidad para todo $0 \leq \delta < 1$ es un problema de “construcción”. No es posible generar acuerdos estables

³Ya sea por la imposibilidad de realizar ofertas a jugadores que rechazaron previamente una unión, o si al momento de emparejarse, la pareja abandona inmediatamente el mercado.

para agentes impacientes sin al mismo tiempo destruirlos para los más pacientes. Por otra parte, la obtención de una asignación inestable resulta ser simplemente una “realización” de una “discusión” entre los participantes de la fiesta, que podría nunca llegar a terminar.

Finalmente, el orden de la Tesis es el siguiente. La [Sección 2](#) muestra una breve reseña de la investigación reciente del tema, indicando las principales diferencias del modelo a presentar. La [Sección 3](#) presenta la notación y definiciones previas que se utilizarán a lo largo del trabajo, para luego, describir formalmente en la [Sección 4](#) el modelo a analizar. En la [Sección 5](#) se muestra la existencia de un equilibrio Markoviano perfecto, estricto y estacionario, mientras que los resultados (1), (2) y (3) se muestran en la [Sección 6](#) y [7](#). Para ilustrar los resultados, la [Sección 8](#) analiza cuatro ejemplos (resueltos computacionalmente). Por último, la [Sección 9](#) y [10](#), discuten la interpretación y contraste de los resultados, junto a las principales conclusiones de la Tesis.

2. Literatura

Parte de las incógnitas planteadas en la sección anterior ya han sido previamente estudiadas. Por ejemplo, entre los primeros, Kamecke [\[18\]](#) muestra que en un juego de dos periodos el resultado (mediante propuestas/aceptaciones) del equilibrio perfecto en subjuegos es equivalente al conjunto de asignaciones estables. Roth & Vande Vate [\[34\]](#), consideran un mercado descentralizado tal que en cada periodo se alcance una asignación secuencialmente aleatoria (a partir de “preferencias reveladas”), donde también el resultado del EPS es siempre un *matching* estable.

Por otro lado, Roth & Xing [\[35\]](#) analizan teórica y empíricamente el mercado descentralizado de psicólogos clínicos en US, resaltando la importancia que tiene el *timing* en las interacciones de propuestas/aceptaciones y sus connotaciones estratégicas en los agentes, las que generan “cuellos de botella” que no permiten una correcta limpieza de mercado. Blum, Roth & Rothblum [\[5\]](#) modelan el mercado laboral *senior*, donde a partir de la entrada y salida de agentes, un *matching* sólo puede estabilizarse a través de un proceso descentralizado similar al conocido algoritmo *deferred acceptance* (ver Gale & Shapley [\[13\]](#)).

Con respecto a la literatura más reciente de los últimos años se han propuesto varios modelos teóricos descentralizados, los que se pueden clasificar en modelos de: (i) *search and matching* y (ii) ofertas/aceptaciones. Los primeros poseen un proceso de *meeting* exógeno, el cual está definido comúnmente por una función de “contacto” que determina la probabilidad de ocurrencia para un encuentro. Los segundos se basan en ciertas “reglas del juego” que permiten a un lado del mercado realizar ofertas hacia el lado opuesto con el fin de lograr emparejamientos. En ambos, el *match* final se forma solamente en caso de que las dos partes deseen la unión.

Dentro de (i), resaltan los trabajos de: Adachi [\[2\]](#), quien considera un modelo con agentes continuos tal que al formarse una pareja, esta abandona el mercado y “clones” suyos entran a ocupar su lugar. Él muestra que al tener costos de búsqueda (en su caso, el “tiempo”) el estado estacionario en equilibrio no asegura estabilidad y, sólo cuando estos costos se reducen,

el resultado concuerda al conjunto de *matchings* estables. Concluye que cuando un “sexo” se vuelve más selectivo, el otro se “conforma” más fácilmente. Lauerman & Nöldeke [20] garantizan la convergencia del resultado anterior, en el caso de que exista un solo *matching* estable. Wu [41] estudia un modelo similar a los anteriores, restringiendo las estrategias ante un criterio de simplicidad y/o utilizando *aligned preferences*. Sus resultados muestran que estas condiciones por sí solas, eliminan equilibrios con resultados inestables, pero juntas, no son capaces de asegurar estabilidad.

En Adachi [2], Lauerman & Nöldeke [20] y Wu [41], las parejas que se forman mediante mutuo convenio abandonan el mercado (equivalente a formar un acuerdo irreversible). Esto indica que el “pago” sólo se realiza una vez en el tiempo, y que tras cada unión, el espacio de acciones para cada participante del mercado disminuye. Esto difiere del modelo a analizar, ya que las parejas no abandonan el mercado cuando comienzan a bailar, sino que obtienen tantos “pagos” como bailes a lo largo del tiempo. Lo que es equivalente a la suma descontada de la utilidad que cada participante le asigna a su pareja (tal suma es en esperanza debido a la aleatoriedad dentro de $(t,1)$ por parte de la naturaleza).

Respecto a (ii): Diamantoudi, Miyagawa & Xue [6], analizan el rol del “compromiso” dentro de la descentralización. Para esto, consideran el juego de una etapa de Alcalde & Romero-Medina [4] repetido infinitamente. En él, las firmas (mujeres) poseedoras de una sola vacante, realizan ofertas a los trabajadores (hombres), quienes de entre todas las propuestas deben decidir cuál aceptar. Sus resultados muestran que sin “compromiso”, el equilibrio secuencial siempre es estable pero, en caso de que las firmas o ambas partes se “comprometan”, siempre es posible alcanzar cualquier resultado individualmente racional. Haeringer & Wonders [14], investigan un juego dinámico basado en el algoritmo *deferred acceptance*, con “reglas” similares a las de Diamantoudi, Miyagawa & Xue [6], llegando a su fin si todas las firmas poseen un *match*. Ellos muestran que con “movidas” secuenciales, el único EPS es el *matching* óptimo para los trabajadores, pero de haber simultaneidad, cualquier resultado puede ser alcanzable.

Niederle & Yariv [22] revisan un modelo similar, analizando cómo la información completa e incompleta influye en el equilibrio. Concluyendo que, de no haber “fricciones de mercado”, existe al menos un equilibrio que termina en un resultado estable. Pais [25] analiza un mercado descentralizado aleatorio, tal que en cada periodo, la naturaleza escoge el orden en que las firmas podrán realizar sus ofertas. Ella utiliza preferencias “ordinales”⁴ y señala que todo resultado en el EPS es estable. Además, muestra que a partir del *matching* vacío (todos emparejados a sí mismos o ningún agente con pareja), cualquier asignación estable es alcanzable en equilibrio.

Las preferencias de los participantes que conforman la fiesta son similares a las utilizadas en [6] y [22]. A diferencia de “bailar”, en Diamantoudi et al. [6], Niederle & Yariv [22] y Pais [25], no siempre es posible para los jugadores romper un acuerdo. En el primero (caso sin compromiso), sólo un lado del mercado realiza las ofertas, por lo que, aún cuando se llegara a un resultado no deseado por parte del lado que recibe las propuestas, estos solamente podrían cambiar el *matching* actual en caso de recibir una propuesta de parte de una firma distinta (mismo caso para Niederle & Yariv [22]).

⁴Un orden parcial o estricto sobre las posibles loterías de asignaciones

Si bien, en Pais [25, pág. 646] se discute sobre la incorporación de búsquedas bilaterales, en éste las firmas no pueden ofrecerse más de una vez al mismo trabajador. A priori, esto indicaría que un acuerdo puede formarse por la inexistencia de un conjunto de acciones por parte de los jugadores, en tal caso, ninguno de los dos lados podría “reaccionar” (o tomar una acción) con el fin de destruir el *matching* actual en el cual se encontrarían. Finalmente, se aclara que la diferencia entre la aleatoriedad considerada en este estudio y la vista en Pais [25] se encuentra en el “sub-periodo” (*t.1*), ya que en el modelo presente solo un jugador (independiente del sexo) es escogido por la naturaleza y no un orden de múltiples jugadores.

3. Notación y Definiciones Previas

En esta sección, se muestra la notación y las definiciones que serán utilizadas en lo que sigue del trabajo, la mayoría de estas siguen el estándar de la teoría de *matching* y cadenas de Markov. Para un desarrollo más exhaustivo de las ideas e intuición que hay detrás de algunos conceptos, se recomiendan los libros de Roth & Sotomayor [33], y Puterman [26, pág. 587], ambos muy rigurosos y autocontenidos. Luego de esta sección, sólo se resaltarán definiciones relevantes para los resultados.

Sean M y W , dos conjuntos finitos y disjuntos de agentes, interpretados como los hombres y mujeres dentro de un mercado. A cada agente (indexado por i) se le asociará el conjunto

$$\Phi_i = \begin{cases} M \cup \{i\} & \text{si } i \in W \\ W \cup \{i\} & \text{si } i \in M \end{cases},$$

teniendo un orden \succsim_i sobre Φ_i , y utilizando los índices $i, j, k, l \in M \cup W$ para referirse a los agentes de forma general.

Un *matching* μ corresponderá a un mapa *one-to-one* $\mu : M \cup W \rightarrow M \cup W$, este será factible siempre y cuando $\mu(i) \in \Phi_i$ para todo $i \in M \cup W$ y $\mu(i) = j$ implique $\mu(j) = i$. Entendiendo por $\mu(i) = j$ como la asignación de i por parte de μ e igual a j . Si un *matching* posee un par de bloqueo, esto hace referencia a un par $(i, j) \in M \times W$ tal que $j \succ_i \mu(i)$ y $i \succ_j \mu(j)$, indicando que ambos se prefieren estrictamente por sobre sus actuales asignaciones. Luego, un *matching* es estable si no posee ningún par de bloqueo.

Tomando en cuenta lo anterior, se denominará por \mathfrak{M} y \mathfrak{M}^* a los conjuntos de todos los *matchings* factibles⁵ y estables, respectivamente. Para indicar las preferencias comunes entre todos los agentes de un grupo se usará $>_M$ y $>_W$, donde $\mu >_M \mu'$ (análogo a $\mu' >_W \mu$)

⁵ Notar que la cardinalidad de este conjunto es perfectamente caracterizable. Para esto, sólo basta ver que el problema es equivalente a encontrar todas las posibles combinaciones de matrices $|\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{M}|$ tal que cada fila y columna pueda sumar a lo más 1 (ver Somos [39] y Vande Vate [33, pág. 71]). Lo anterior, se obtiene resolviendo la recurrencia $f(n, m) = f(n, m-1) + nf(n-1, m-1)$, con $f(n, 0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$. Entonces, si se considera a $|M| = m$ y $|W| = n$,

$$|\mathfrak{M}| = \sum_{k=0}^m k! \binom{n}{k} \binom{m}{k}.$$

significa que al menos un $i \in M$ cumple con $\mu(i) >_i \mu'(i)$, mientras que para todo $k \in M$ y $k \neq i$, $\mu(k) \succeq_k \mu'(k)$.

El retículo de \mathfrak{M}^* (ver Conway [33, pág. 36]), denotado por \mathfrak{L} , estará caracterizado por el orden de las preferencias comunes del mercado ($>_M$ o $>_W$) donde μ_M y μ_W corresponderán al supremo e ínfimo del retículo (dependiendo de cuales preferencias se consideren). Usualmente, se les denominará como los *matchings* M -óptimo y W -óptimo para hombres y mujeres, respectivamente.

Se escribirá como $\mu_{(i,j)}$ al *matching* actualizado de μ por el par $(i, j) \in M \times W$. Esto es, el *matching* $\mu_{(i,j)}$ que satisface $\mu_{(i,j)}(k) = \mu(k)$ para todo $k \notin \{i, j, \mu(i), \mu(j)\}$, $\mu_{(i,j)}(i) = j$ y $\mu_{(i,j)}(\mu(l)) = \mu(l)$ para $l = i, j$. En otras palabras, el *matching* $\mu_{(i,j)}$ une al par (i, j) , dejando solas (sin asignación o asignadas consigo mismas) a sus antiguas parejas.

Con respecto a la teoría de cadenas de Markov, se interpretará cada $\mu \in \mathfrak{M}$ como un “estado” posible del sistema (es decir, de la fiesta). Una matriz de transición corresponderá a Q de $|\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{M}|$ tal que en cada componente $(\mu, \mu') \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ posea al elemento $q(\mu|\mu') \in [0, 1]$. Este último se interpreta como la probabilidad de pasar al estado (*matching*) μ , dado el estado actual μ' . Evidentemente, se debe cumplir $\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} q(\mu|\mu') = 1$, para todo $\mu' \in \mathfrak{M}$.

Dada una matriz de transición Q , cada estado $\mu \in \mathfrak{M}$ se puede clasificar de absorbente si $q(\mu|\mu) = 1$, o de transitorio si $q(\mu|\mu) < 1$. Luego, toda matriz Q posee una forma canónica y un límite de Cesaro, Q^* , de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \mathbf{0} & \gamma \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad Q^* = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q^n.$$

Donde α corresponde a la matriz de transición de los estados transitorios-a-transitorios, β de los transitorios-a-absorbentes, γ de los absorbentes-a-absorbentes (lo implica una matriz identidad) y $\mathbf{0}$ desde los absorbentes-a-transitorios (una matriz de ceros). Además, la existencia del límite de Cesaro (o de orden cero) se encuentra asegurada para toda secuencia de matrices tal que $Q_n = Q^n$ para todo $n \geq 0$.⁶

Finalmente, dentro de la [Sección 5](#), se utilizará la norma suprema definida como

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \text{con } f : X \rightarrow F.$$

De esta forma; si $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|y\| = \sup\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$; si Q es una matriz de transición, entonces $\|Q\| = \sup_{\mu} \sum_{\mu'} |q(\mu'|\mu)|$. Dicho lo anterior, $\vartheta(Q)$ denotará el radio espectral de Q , lo que quiere decir

$$\vartheta(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Q^n\|^{\frac{1}{n}},$$

por lo que siempre $\vartheta(Q) \leq \|Q\|$.

⁶ Notar que Q^n se refiere a n veces la multiplicación de Q . Por lo que, si $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n$ existe, el límite de Cesaro también. Dado ésto, para toda matriz de transición con al menos un estado absorbente y un camino a tal estado (esto de denomina cadena absorbente), Q^* cumple con $\alpha = \mathbf{0}$ en su forma canónica.

4. El Modelo

Se tiene una fiesta compuesta por jugadores hombres y mujeres, representados por los conjuntos M y W , respectivamente (con $I = M \cup W$). Estos dos grupos interactuarán dinámicamente por un número infinito de periodos tal que, en cada instante de tiempo, sólo una pareja pueda formarse mediante una propuesta (por parte de un individuo seleccionado por la “naturaleza”) y aceptación (de parte del jugador que recibió la propuesta de baile). Formalmente, en cada periodo (indexado por $t = 1, 2, 3, \dots$):

- (t.1) un jugador $i \in I$ es seleccionado aleatoriamente por la naturaleza con probabilidad uniforme,
- (t.2) tal jugador debe solicitarle a $j \in \Phi_i$ un baile. Luego,
- (t.3) el jugador j debe escoger entre A (aceptar) o R (rechazar) tal propuesta,
- (t.4) si escoge A , $\mu^t = \mu_{(i,j)}^{t-1}$, si escoge R , $\mu^t = \mu^{t-1}$.
- (t.5) Finalmente, cada jugador $i \in I$ disfruta bailar o estar solo.

Sea $>_i$ la relación de preferencias (completa, reflexiva y transitiva) de cada participante $i \in I$ sobre el conjunto Φ_i de posibles parejas, se define $>_i^t$ como las preferencias “intertemporales” de i , sobre el conjunto de los posibles “caminos” de asignaciones \mathfrak{M}^∞ (cada elemento de \mathfrak{M}^∞ corresponde a un vector infinito compuesto de *matchings* factibles), tal que sean “consistentes” con $>_i$. En cada periodo t , tales preferencias se encuentran limitadas por los siguientes supuestos:

- (A.1) $>_i$ es un orden estricto⁷ sobre Φ_i ;
- (A.2) $>_i^t \equiv >_i^{t+1}$ para todo $t \in \mathbb{N}$;
- (A.3) si $\mu'(i) >_i \mu''(i)$, entonces $(\mu', \mu'', \dots) >_i^t (\mu'', \mu', \dots)$;
- (A.4) $>_i^t$ es monótona, cuasi-lineal, convexa y continua sobre \mathfrak{M}^∞ .⁸

El supuesto (A.1) es necesario para asegurar que $\mathfrak{M}^* \neq \emptyset$ (ver Gale & Shapley [13]) y exista el retículo \mathfrak{L} . (A.2) indica la estacionariedad en las preferencias con respecto a cada periodo $t \in \mathbb{N}$, equivalente a decir que los jugadores no cambian sus “gustos” a lo largo del tiempo. (A.3) impone que cada jugador sea impaciente con respecto a sus posibles asignaciones futuras. (A.4) asegura que $>_i^t$ posea representación en utilidad esperada, por lo que cada participante tiene una “opinión” concreta para cualquier distribución de probabilidad sobre el conjunto \mathfrak{M}^∞ .

OBSERVACIÓN. La estructura de las preferencias $>_i^t$ es equivalente a la utilizada en la

⁷ $j \succeq_i k$ implica que $k \not\succeq_i j$, para todo $j, k \in \Phi_i$ tal que \succeq_i sea un orden sobre Φ_i .

⁸ Específicamente, y con respecto a $>_i$, esto significa que: si $\mu'(i) >_i \mu''(i)$, entonces $(\mu', \dots) >_i^t (\mu'', \dots)$; si $\mu'(i) >_i \mu''(i)$, entonces $(\mu'(i) + \varepsilon\mu(i)) >_i (\mu''(i) + \varepsilon\mu(i))$, con $\varepsilon \sim 0$; si $\mu'(i) >_i \mu''(i)$, entonces $\lambda(\mu', \dots) + (1-\lambda)(\mu'', \dots) >_i^t (\mu', \dots)$, con $\lambda \in (0, 1)$; si $\{\mu'_n\} \rightarrow \mu'$, $\{\mu''_n\} \rightarrow \mu''$ y $\mu'_n(i) >_i \mu''_n(i)$, entonces $\mu'(i) >_i \mu''(i)$.

“teoría del consumidor”. Tomando cada $j \in \Phi_i$ como un elemento de \mathbb{R}_+ , $>_i^t$ sería un orden sobre \mathbb{R}_+^∞ , donde la cantidad de cada “bien” x_t correspondería al valor de cada asignación, obtenida en su respectivo periodo t . Por (A.4), estas preferencias deben poder representarse de la forma $\sum_{t=0}^\infty \alpha_t x_t$ (donde $(x_0, x_1, \dots) \in \mathbb{R}_+^\infty$), tal suma es finita ya que por (A.3) α_t puede tomar la forma de δ^t , con $\delta \in [0, 1)$ (ver Rubinstein [36, pág. 55]).

Hecha la observación anterior, se utiliza la función $u_i : \Phi_i \rightarrow \mathbb{R}$ tal que represente a $>_i$ (abusando de la notación, se entenderá $u_i(\mu) \equiv u_i(\mu(i))$, entendiendo que se hace referencia a la asignación de i y no al *matching* completo μ), es decir,

$$u_i(\mu') > u_i(\mu'') \quad \text{ssi} \quad \mu'(i) >_i \mu''(i).$$

Como Φ_i es finito, tal función se encuentra acotada por un mínimo y máximo (ambos finitos). De esta forma, $>_i^t$ se encuentra representada por la suma descontada

$$\sum_{d=t}^{\infty} \delta^d u_i(\mu^d), \quad \text{con } \delta \in [0, 1) \text{ por (A.3).}$$

Siendo este último, un factor de descuento común para todos los jugadores.

Se define una historia como un “camino” de acciones realizadas, $(\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^{t-1})$, donde $\mu^0 \in \mathfrak{M}$ es dado. El conjunto de historias posibles en t se denomina por H , utilizando $h \in H$ para referirse a una posible historia. Luego, toda historia es perfectamente observable por todos los participantes de la fiesta. De igual forma, el conjunto de preferencias $\{>_i\}_{i \in I}$ es de conocimiento común, por lo que el juego es de información completa y perfecta.

Cabe agregar que es importante distinguir los dos subjuegos que existen para cada periodo $t \in \mathbb{N}$. El primero se encuentra en (t.2), notar que si i es el jugador seleccionado por la naturaleza, las acciones de los otros participantes en caso de ser seleccionados no afectan los pagos que i obtiene al realizar una propuesta (otro punto de vista es decir que i observa la decisión que toma la naturaleza, antes de realizar su propuesta). El segundo subjuego se ubica en (t.3), si a j le toca decidir entre A o R , necesariamente debe identificar al jugador que le realizó la propuesta de bailar, por lo que si j juega en (t.3), su decisión es condicional al jugador seleccionado en (t.1). Dicho esto, el modelo podría ser visto como un juego secuencial, viendo a (t.2) y (t.3) como “nodos” *singleton* de información, con sus respectivos espacios de acciones.

OBSERVACIÓN. Dado un periodo t , $H \neq \mathfrak{M}^{t-1}$ ya que el conjunto H posee a los caminos que cumplan con las “reglas” de interacción derivadas de (t.1-5). Por ejemplo, si $t = 2$ y μ^\emptyset es el *matching* vacío ($\mu^\emptyset(i) = i$ para todo $i \in I$), podría darse que $(\mu^0, \mu^\emptyset) \in \mathfrak{M}^t$ pero $(\mu^0, \mu^\emptyset) \notin H$, donde $\mu^0 \neq \mu^\emptyset$. Lo último, debido a que no todos los participantes podrían abandonar a sus parejas dentro de un mismo periodo.

OBSERVACIÓN. Notar que, cual sea el caso: $\mu^t(i) = i$ o $\mu^t(i) \neq i$; un jugador $i \in I$ sólo puede permanecer sin bailar si en el momento de ser seleccionado en (t.1) por la naturaleza, se ofrece a $i \in \Phi_i$, es decir, a sí mismo. Esta limitación, aunque es bien criticable, permite estudiar las decisiones de no bailar, sin condicionarlas en las posibles acciones de los demás participantes, es decir, sin que importe si estos deciden bailar o no dentro de la fiesta, al mismo tiempo que otros jugadores.

Por otra parte, \mathbf{f} corresponde a la colección de funciones $f_i^t : \mathfrak{M} \rightarrow \Delta(\phi_i)$, es decir, $\mathbf{f} = \{f_i^t\}_{i \in I, t \in \mathbb{N}}$ (donde por $\Delta(X)$ se entiende como el conjunto de todas las posibles distribuciones de probabilidad sobre el conjunto X). Se utiliza también $\mathbf{f}_i = \{f_i^t\}_{t \in \mathbb{N}}$, en otras palabras, la colección de todas las funciones utilizadas por un jugador $i \in I$ a lo largo de los infinitos periodos de la fiesta, y

$$\mathbf{f}_{-i} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{f}_{i+1}, \dots, \mathbf{f}_{|I|}\},$$

refiriéndose a la colección de funciones usadas por todos los jugadores distintos de i . De manera análoga, se define \mathbf{g} como la colección de todas las funciones $g_i^t : \mathfrak{M} \times \phi_i \rightarrow \{A, R\}$, con \mathbf{g}_i y \mathbf{g}_{-i} ordenados de forma idéntica a \mathbf{f} . Los conjuntos de todas las posibles colecciones \mathbf{f} y \mathbf{g} corresponden a F y G , respectivamente (abusando de la notación en el sentido de indicar colecciones sólo de i o en un tiempo fijo t , añadiendo el índice/sub-índice correspondiente).

Tales funciones también se denominarán como “estrategias” dependiendo de su respectivo contexto. Para un periodo de tiempo $t \in \mathbb{N}$ y *matching* $\mu \in \mathfrak{M}$ como dados, $\sigma_i(\mu, j)$ corresponde a la probabilidad que le designa el jugador i a realizarle la propuesta de baile a $j \in \phi_i$, dada la asignación $\mu^{t-1} = \mu$. Evidentemente, $\sum_{j \in \phi_i} \sigma_i(\mu, j) = 1$ y si $\sigma_i(\mu, j) < 0$ 1 para todo $j \in \phi_i$, se tendría que f_i^t es una estrategia mixta (un vector de probabilidades sobre ϕ_i sin que todo el peso se encuentre sobre una única componente). Se abusará de la notación, utilizando

$$f_i^t(\mu) = j \quad \text{si} \quad \sigma_i(\mu, j) = 1.$$

Resumiendo, el vector de probabilidades $f_i^t(\mu)$ es equivalente a un vector

$$(\sigma_i(\mu, 1), \sigma_i(\mu, 2), \dots, \sigma_i(\mu, |\phi_i|)) \in \Delta(\phi_i).$$

La interpretación de f_i^t y g_i^t corresponde a un plan contingente en caso de estar en los sub-periodos (t.2) y (t.3), respectivamente. Dicho en otras palabras: ante el *matching* μ^{t-1} , si un jugador $i \in I$ es seleccionado por la naturaleza en (t.1); i realizará sus propuestas dentro de (t.2) en base al vector de probabilidades $f_i^t(\mu^{t-1})$; a lo que j , habiendo observado la realización de tal vector, responde $g_j(\mu^{t-1}, i)$ en (t.3); actualizando μ^t en (t.4) y recibiendo pagos $u_k(\mu^t)$ en (t.5) para todos los participantes $k \in I$.

OBSERVACIÓN. Notar que por la estructura de f_i^t y g_i^t , necesariamente para toda historia $h', h'' \in H$ tal que ambas terminen en el mismo *matching* μ^{t-1} , se debe cumplir que en el óptimo, $f_i^t|_{h'} = f_i^t|_{h''}$ y $g_i^t|_{h'} = g_i^t|_{h''}$. Esto es porque, indirectamente, se han definido tales funciones como “estrategias Markovianas”, es decir, que sólo dependen de la historia relevante en los pagos. Siendo ésta el último *matching* μ^{t-1} antes de comenzar el periodo t .

OBSERVACIÓN. Notar que en la fiesta se pueden dar ciertos comportamientos “redundantes” dentro del juego, por ejemplo: dado $\mu^{t-1}(i) = j$, i le solicita un baile a j , si j escoge A o R , de todas formas $\mu^t(j) = i$. Para tener cierta concordancia entre las acciones de un jugador, el refinamiento que se utilizará considera en parte que, un jugador siempre aceptará una propuesta en caso de no obtener una utilidad estrictamente menor a la que tendría si rechaza. Por lo que en el ejemplo anterior, j solo podría escoger A ante una propuesta de i . En la siguiente sección, se entrará formalmente en los detalles a considerar en caso de indiferencias por parte de los jugadores.

Teniendo un perfil de estrategias (\mathbf{f}, \mathbf{g}) , es posible definir una matriz de transición Q_t de $|\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{M}|$, tal que en cada componente “ (μ, μ') ” se encuentre el elemento

$$q_t(\mu'|\mu) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \Phi_i} (\sigma_i(\mu, j)/|I|) \mathbb{1}_{[\mu_{(i,j)} = \mu']}, \quad (1)$$

siendo $\mathbb{1}_{[X]}$ la función indicatriz que toma el valor de 1 en caso de cumplirse la condición X y 0 si no. En otras palabras, ya que el juego es de información completa, $q_t(\mu'|\mu)$ pondera la probabilidad de cada camino posible (cada jugador que podría ser seleccionado de manera uniforme por la naturaleza) con la condición de que en tal camino, las estrategias utilizadas dirijan el *matching* actualizado de μ a μ' . Se dirá que la probabilidad de pasar de μ a μ' es simplemente $q_t(\mu'|\mu)$.

OBSERVACIÓN. Q_t se determina de forma endógena, es decir, cada jugador $i \in I$ influye, mediante sus estrategias (f_i^t, g_i^t) , al resultado de las componentes en Q_t . Necesariamente por construcción, existen algunos *matchings* imposibles alcanzar ya que requieren de la formación de más de una pareja en un sólo periodo, por lo que $q_t(\mu'|\mu)$ debe tomar el valor de 0 para algunos *matchings* $\mu' \in \mathfrak{M}$.

Luego, se define $v_i^t : \mathfrak{M} \times F \times G \rightarrow \mathbb{R}$ como la utilidad esperada de i , desde el punto de vista del periodo t , dado un perfil (\mathbf{f}, \mathbf{g}) y con $\mu^{t-1} = \bar{\mu}$. Es decir,

$$v_i^t(\bar{\mu} | \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbb{E} \left[\sum_{d=t}^T \delta^{d-t} u_i(\mu^d) | \mathbf{f}, \mathbf{g}, \bar{\mu} \right], \quad (2)$$

donde la función esperanza, $\mathbb{E}[\cdot]$, se realiza sobre la secuencia $\{Q_d\}_{d \geq t}$ determinada por (\mathbf{f}, \mathbf{g}) . Interpretando el modelo como un proceso discreto de Markov, es posible aprovechar la recursividad del problema en cada periodo. Teniendo que cada jugador i debe maximizar

$$\vec{v}_i^t = Q_t(\vec{u}_i + \delta \vec{v}_i^{t+1}), \text{ que por (A.2) queda, } \vec{v}_i = Q(\vec{u}_i + \delta \vec{v}_i).$$

\vec{v}_i^t y \vec{u}_i corresponden a vectores de $1 \times |\mathfrak{M}|$ tal que en cada fila “ μ ”, éstos poseen los valores de $v_i^t(\mu | \mathbf{f}, \mathbf{g})$ y $u_i(\mu)$, respectivamente. De manera explícita, tal sistema corresponde a

$$\begin{bmatrix} v_i(\mu_1 | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \\ v_i(\mu_2 | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \\ \vdots \\ v_i(\mu_{|\mathfrak{M}|} | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(\mu_1 | \mu_1) & \cdots & q(\mu_{|\mathfrak{M}|} | \mu_1) \\ q(\mu_1 | \mu_2) & & q(\mu_{|\mathfrak{M}|} | \mu_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q(\mu_1 | \mu_{|\mathfrak{M}|}) & \cdots & q(\mu_{|\mathfrak{M}|} | \mu_{|\mathfrak{M}|}) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_i(\mu_1) \\ u_i(\mu_2) \\ \vdots \\ u_i(\mu_{|\mathfrak{M}|}) \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} v_i(\mu_1 | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \\ v_i(\mu_2 | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \\ \vdots \\ v_i(\mu_{|\mathfrak{M}|} | \mathbf{f}, \mathbf{g}) \end{bmatrix} \right). \quad (3)$$

Después de lo expuesto, resulta oportuno explicar formalmente la noción de acuerdo que se utilizará. Si bien, tal concepto podría entenderse de igual forma por el nombre de “estabilidad dinámica”, se evitará tal designación debido a dos conceptos previamente ya expuestos por Doval [8] y Kadam & Kotowski [17] (nociónes distintas entre sí).⁹

⁹ Doval [8] estudia una economía *two-sided* tal que en cada periodo, un grupo de agentes puede entrar al mercado con cierta probabilidad, esto dentro del contexto de la donación de órganos y las oportunidades que enfrentan los agentes al rechazar un donante, por la posibilidad de obtener algo mejor en el futuro. Su noción de estabilidad dinámica se basa en que (i) un *matching* sea un plan contingente, (ii) siempre que

DEFINICIÓN 1: Se dirá que $\mu \in \mathfrak{M}$ corresponde a un *acuerdo* si μ es un estado absorbente dentro de la cadena Q_t , esto es, $q_t(\mu|\mu) = 1$ para todo $t \in \mathbb{N}$. $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta \subseteq \mathfrak{M}$ será el conjunto de todos los posibles acuerdos dentro la fiesta, dado un factor de descuento $\delta \in [0, 1)$.

En otras palabras, un acuerdo corresponde a un punto donde los jugadores están conformes (ya sea por no tener otra alternativa mejor o encontrarse realmente satisfechos con su asignación), tal que cada uno pueda asegurarle a su respectiva pareja que seguirán bailando hasta el infinito. En capítulos posteriores, se mostrará explícitamente que a pesar de la intuición, en algunos casos $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta \neq \mathfrak{M}^*$.

Finalmente, el *trade-off* de cada jugador viene dado por la inseguridad (en cuanto a la aleatoriedad de la naturaleza) de que al comenzar un baile con una pareja del sexo opuesto, uno de los dos abandone al otro en el futuro por una oportunidad mejor (quedando sin bailar por una incierta cantidad de periodos). Esto se debe a que siempre cada jugador puede destruir un acuerdo en caso de no encontrarlo conveniente. De la misma forma, bailar con una pareja de menor preferencia conlleva un costo de oportunidad, ya que quizás, tal incertidumbre decrezca a lo largo del tiempo.

5. Equilibrio Markoviano Perfecto

El objetivo de esta sección es mostrar la existencia de un EMP estricto, en estrategias estacionarias, a partir de los supuestos (A.1-4). El hecho de emplear al EMP como refinamiento se debe a la ya conocida “debilidad” del EN, a la hora de estudiar interacciones dinámicas, y a la dificultad de trabajar con la perfección en subjuegos dentro de horizontes infinitos, por el gran número de posibles estrategias dependientes de una misma historia de acciones. La construcción del EMP utilizado, se basa en utilizar a \mathbf{g} como una colección de estrategias puras, dándole a \mathbf{f} la libertad de poseer estrategias mixtas.

Ya que esta fiesta será vista como un proceso discreto de Markov, se vuelve inevitable hablar de “juegos dinámicos estocásticos”. Estos comparten una clara similitud estructural con los procesos Markovianos, diferenciándose sólo en el enfoque del problema y la cantidad de jugadores a analizar. Los juegos estocásticos fueron introducidos por Shapley [38] y conllevan una larga literatura que, al día de hoy, no sólo ha garantizado la existencia de distintos refinamientos, si no que también ha entregado cierta estructura al conjunto de posibles equilibrios, especialmente al de EMP. Esta ha tenido varias aplicaciones econométricas, de entre las cuales se destaca el modelo dinámico de Ericson & Pakes [11] para analizar industrias oligopólicas competitivas. Como es habitual, se explotará la recursividad del modelo, sacando provecho de su forma normal, vista como un juego en el que cada jugador debe escoger una

en el último periodo sólo se alcance la estabilidad entre los participantes disponibles y (iii) que cada *match* se forma solo si ambos participantes (paciente-donador) se encuentran disponibles en el mercado. Por otro lado, Kadam & Kotowski [17] extienden los conceptos clásicos del *marriage market*, teniendo agentes con preferencias “dinámicas” sobre un conjunto de posibles caminos finitos (similares a la estructura que se le dio a las historias en este estudio). Su estabilidad dinámica es, en el mismo sentido, una extensión de la propuesta por Gale & Shapley [13], tal que no existan las parejas de bloqueo para ninguno de los periodos que dura la economía.

vez sus acciones (manteniendo los “pagos de continuación” fijos y evaluados en la realización perpetua de su elección). Tal forma reducida, permite garantizar la existencia de equilibrios a través de un EN dentro de este juego denominado de “una etapa”.

Siguiendo la misma línea, Nowak & Raghavan [23] y Horst [16] generalizan las condiciones necesarias para la existencia de EMP en juegos estocásticos dinámicos con espacios continuos de acciones. Doraszelski & Escobar [7] muestran como extender varios resultados fundamentales de la teoría estándar del EN, dentro de los juegos en forma normal (estos son *genericity*, *stability* y *purifiability*), dentro de ambientes dinámicos. Ellos introducen una noción de regularidad, exponiendo que ésta última es una propiedad genérica del equilibrio Markoviano perfecto. Deducen que, una consecuencia inmediata de que los EMP de casi todos juegos dinámicos estocásticos sean regulares, es que la mayoría de estos juegos poseen un numero finito de EMP localmente aislados. De esta manera, los EMP pueden ser obtenidos como el límite de los pagos del juego “equivalente” de información incompleta, en la medida que las fluctuaciones aleatorias desaparecen.

Como se dijo en la Sección 1, el uso del equilibrio Markoviano perfecto se debe a la incapacidad del EN para explicar comportamientos más allá de las estrategias que suceden en el “camino” del equilibrio. Como muestra Alcalde [3], todo matching individualmente racional puede ser justificado por un EN, mediante una interacción o mecanismo estratégicamente “razonable”. La siguiente proposición muestra porque este modelo tampoco es la excepción. Considerando EN a un perfil $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}})$, tal que $v_i(\mu | \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}}) \geq v_i(\mu | \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i, \bar{\mathbf{f}}_{-i}, \bar{\mathbf{g}}_{-i})$ para todo $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i) \in F_i \times G_i$, $i \in I$ y $\mu \in \mathfrak{M}$.

PROPOSICIÓN 1: *Todo matching $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$, individualmente racional, es un acuerdo inducido por un equilibrio de Nash.*

DEMOSTRACIÓN: Considerar un perfil $(\bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{g}})$ tal que

$$\bar{f}_i^t(\mu) = \bar{\mu}(i) \text{ para todo } \mu \in \mathfrak{M} \quad \text{y} \quad \bar{g}_i^t(\mu, j) = \begin{cases} A, & \text{si } j = \bar{\mu}(i), \\ R, & \text{si } j \neq \bar{\mu}(i). \end{cases}$$

Tal perfil es un EN ya que ningún jugador $i \in I$ le propondrá un baile a otra persona que no sea $\bar{\mu}(i)$ porque sería rechazado, y debido a que la asignación $\bar{\mu}$ es individualmente racional, $\bar{\mu}(i)$ es aceptable. Por otro lado, todo i se encuentra indiferente entre A o R a jugadores $j \neq \bar{\mu}(i)$, ya que estos nunca llegan a solicitar un baile. Al ser $\bar{\mu}(i)$ aceptable, se tiene que i siempre $\bar{g}_i^t(\mu, \bar{\mu}(i)) = A$ será mejor o igual a estar sin bailar. Por lo que en un horizonte infinito, todo jugador alcanzará a ofrecerse a su asignación en $\bar{\mu}$ y nadie deseará moverse de tal *matching* debido a que cualquier otra propuesta de baile será rechazada.¹⁰ ■

Si bien, es clara la necesidad de considerar un refinamiento que induzca EN en cada subjuego, esto no asegura la existencia de estacionariedad en las estrategias y, por ende, no supondría una simplificación del problema original. Y es que el concepto de EPS todavía es muy “amplio”, sobre todo para un horizonte infinito, como el que se desea estudiar. Para mostrarlo, primero se dirá que un perfil de estrategias $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}})$ corresponderá a un EPS si en

¹⁰Notar que la estrategia propuesta para la demostración puede ser modificada en el *matching* $\bar{\mu}$, haciendo $\bar{g}_i^t(\bar{\mu}, j) = R$ si $j = \bar{\mu}(i)$. Esto se debe a que en caso de rechazar o aceptar, tal jugador i no cambiaría su asignación $\bar{\mu}(i)$, por lo que también es EN.

cada subjuego dentro de (t.2) y (t.3), tales estrategias conforman un EN. Formalmente, lo anterior corresponde a $v_i(\mu|\hat{\mathbf{f}}_i, \hat{\mathbf{f}}_{-i}, \hat{\mathbf{g}}) \geq v_i(\mu|\mathbf{f}_i, \hat{\mathbf{f}}_{-i}, \hat{\mathbf{g}})$ y $v_i(\mu|\mathbf{f}, \hat{\mathbf{g}}_i, \hat{\mathbf{g}}_{-i}) \geq v_i(\mu|\mathbf{f}, \mathbf{g}_i, \hat{\mathbf{g}}_{-i})$ para todo $\mathbf{f} \in F$, $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i) \in F_i \times G_i$, $i \in I$ y $\mu \in \mathfrak{M}$. Luego, pudiendo catalogar este modelo como un juego secuencial, es fácil intuir lo siguiente.

PROPOSICIÓN 2: Aunque se considerara $g_i^t : \mathfrak{M} \times \phi_i \rightarrow \Delta(\{A, R\})$, toda fiesta posee un equilibrio perfecto en subjuegos $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}})$ de manera que (1) $\hat{\mathbf{f}}$ sea pura y/o (2) $\hat{\mathbf{g}}$ sea pura.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}})$ un EPS, la idea es mostrar que en cada “nodo” una estrategia pura pertenece al argumento del máximo de la función v_i , para todo $i \in I$. Dado un periodo t , es posible definir $V_i(\mu, j)$ como el conjunto de todas las funciones $v_i(\mu|\hat{\mathbf{f}}, \mathbf{g}_i, \hat{\mathbf{g}}_{-i})$ evaluadas para $g_i^t(\mu, j) \in \{A, R\}$ (análogo con f_i^t). Por construcción, $V_i(\mu, j)$ es un conjunto parcialmente ordenado con un máximo y mínimo finitos. Si se toma a v^* como el máximo elemento de $V_i(\mu, j)$, por (A.4) se tendrá que toda distribución $\varphi_i \in \Delta(\{A, R\})$ debe cumplir con

$$\sum_{s \in \{A, R\}} \varphi_i(\mu, s) v_i(\mu | \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{g}_i, \hat{\mathbf{g}}_{-i}) \leq v^*.$$

Por lo que siempre existe una estrategia pura \hat{g}_i^t que alcanza el máximo de $V_i(\mu, j)$. Tomando en cuenta que el máximo de $V_i(\mu, j)$ no tiene porqué ser único, se puede tener (1) y/o (2) dependiendo del numero de elementos que posea el argumento del máximo. ■

De la proposición anterior se deduce que siempre es posible encontrar un EPS fijando alguna de las dos colecciones, $\mathbf{f} \in F$ o $\mathbf{g} \in G$, como pura. Esto muestra que la decisión tomada por un jugador $i \in I$ es independiente de las acciones que hubieran realizado los otros agentes en caso de ser seleccionados. El inconveniente de lo anterior, es que esto no descarta la existencia de una gran multiplicidad de EPS, debido a la gran variedad de posibles estrategias que pueden depender de un historia infinita de acciones. Como se mostrará más adelante, el simple hecho de considerar estrategias Markovianas asegura que al menos sólo exista un posible pago de equilibrio para cada participante de la fiesta, y permite simplificar el problema considerablemente.

A continuación, se define formalmente el refinamiento ha utilizar. Este sigue a Tirole & Maskin [40] con algunas salvedades en cuanto la formación de nuevas parejas, que le entregarán el apellido de “estricto”, simplificando el análisis posterior (especialmente en los casos de indiferencia, como se comentó en la sección anterior).

DEFINICIÓN 2: Un perfil de estrategias $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ será un *equilibrio Markoviano perfecto estricto* si para todo $i \in I$, $\mu \in \mathfrak{M}$ y $t \in \mathbb{N}$:

si $j \neq \mu(i)$, entonces

$$(M.1) \quad \sigma_i(\mu, j) > 0 \text{ implica } v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_i(\mu|\mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}), \text{ para todo } \mathbf{f}_i \in F_i,$$

$$(M.2) \quad \tilde{g}_i^t(\mu, j) = A \text{ implica } v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_{-i}), \text{ para todo } \tilde{\mathbf{f}} \in F, \mathbf{g}_i \in G_i;$$

si $j = \mu(i)$, entonces

$$(M.3) \quad \sigma_i(\mu, j) > 0 \text{ implica } v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq v_i(\mu|\mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}), \text{ para todo } \mathbf{f}_i \in F_i,$$

(M.4) $\tilde{g}_i^t(\mu, j) = A$ implica $v_i(\mu|\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq v_i(\mu|\mathbf{f}, \mathbf{g}_i, \tilde{\mathbf{g}}_{-i})$, para todo $\mathbf{f} \in F$, $\mathbf{g}_i \in G_i$;

y,

(M.5) para toda historia $h', h'' \in H$ tal que ambas terminen en el mismo *matching* μ^{t-1} ,

$$\tilde{\mathbf{f}}_i|h' = \tilde{\mathbf{f}}_i|h'' \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{g}}_i|h' = \tilde{\mathbf{g}}_i|h''.$$

De forma general, las condiciones (M.1-4) exigen que el perfil $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ sea un EN es los subjuegos dentro de (t.2) y (t.3). (M.1-2) denotan la componente estricta del equilibrio y especifican que si una pareja $(i, j) \neq (\mu(j), \mu(i))$ comienza un baile, es porque ambos obtienen un beneficio estrictamente mejor al bailar (recordar que (A.1) no implica que $>_i^t$ sea un orden estricto), en otras palabras, las asignaciones en esta fiesta no cambian si los participantes no tienen incentivos estrictos para proponer y aceptar bailar. Por otro lado, (M.3-4) relajan las restricciones anteriores en caso de que un jugador no pueda optar por una pareja estrictamente mejor. Por último, (M.5) limita a que las estrategias $\tilde{f}_i^t, \tilde{g}_i^t$, se basen solo en la historia relevante en los pagos (que es el último *matching* observado), es decir, que los participantes utilicen estrategias Markovianas (lo que por construcción, siempre se cumple).

A partir de la definición anterior, es directo ver que si existe un EPS $(\hat{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{g}})$ en estrategias puras (específicamente con $\hat{\mathbf{g}}$ pura), entonces tal equilibrio debe ser un EMP ya que cumple con (M.5). La dificultad de trabajar con tal resultado es que, a pesar de (A.2), no es posible asegurar estacionariedad entre las estrategias jugadas en t y $t + 1$ (ver el [Ejemplo 1](#) para un caso explícito). Por lo que hace falta otra noción al refinamiento que se estudiará.

DEFINICIÓN 3: Sea $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ un equilibrio Markoviano perfecto. Se dirá *estacionario* si para todo $i \in I$ y $t \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{f}_i^t = \tilde{f}_i^{t+1} \quad \text{y} \quad \tilde{g}_i^t = \tilde{g}_i^{t+1}. \quad (4)$$

Para simplificar la notación, si $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ es un perfil de estrategias estacionarias, se utilizará

$$\tilde{\mathbf{f}}_i = \{\tilde{f}_i, \tilde{f}_i, \dots\} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{g}}_i = \{\tilde{g}_i, \tilde{g}_i, \dots\},$$

obviando el índice t para cada una de las funciones, a menos de que se desee explicitar una acción dentro de un periodo en específico.

En lo que sigue, se utilizarán los teoremas del punto fijo de Banach [[26](#), pág. 150] y Nash [[24](#), pág. 33] para mostrar la existencia deseada. Sin pérdida de generalidad, la [Proposición 2](#) permite definir

$$A_i(\mu) = \{k \in \Phi_i \mid \tilde{g}_k(\mu, i) = A, \tilde{\mathbf{g}}_k \text{ cumple (M.2) y (M.4)}\},$$

para todo $\mu \in \mathfrak{M}$. En otras palabras, esto es el conjunto de jugadores que aceptarían bailar con el jugador i dentro del *matching* μ en caso de que éste les llegara a realizar una propuesta (obteniendo una utilidad estrictamente mayor). De forma similar, A_i corresponde al vector de $1 \times |\mathfrak{M}|$ tal que en cada fila “ μ ” posea al conjunto $A_i(\mu)$.

OBSERVACIÓN. Notar que $A_i(\mu)$ necesariamente es distinto de vacío, ya que por (M.3-4): si $\mu(i) = i$, al menos el mismo jugador i debiera aceptar su decisión de estar solo (o no

bailar); si $\mu(i) \neq i$, $\mu(i)$ no tiene más opción que aceptar a i , ya que el jugador $\mu(i)$ cumple con (M.4). Por lo que al menos i o $\mu(i)$ pertenecen al conjunto $A_i(\mu)$ (recordar lo comentado en la sección anterior).

Con esto, para un perfil $(\mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i}) \in F_{-i} \times G_{-i}$ como dado, el problema a resolver de cada participante de la fiesta viene dado por el mapa

$$\mathbf{v}_i(\mu \mid \mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i}) = \max_{\mathbf{f}_i \in A_i(\mu)} \sum_{\bar{\mu} \in \mathfrak{M}} q(\bar{\mu} \mid \mu) [u_i(\bar{\mu}) + \delta \mathbf{v}_i(\bar{\mu} \mid \mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i})]. \quad (5)$$

En otras palabras, \mathbf{v}_i es la función v_i evaluada en la estrategia óptima ante un perfil oponente que, gracias a (A.2), es capaz de cumplir tal recursividad. De manera general, se toma a $\vec{\mathbf{v}}_i$ como el vector de $1 \times |\mathfrak{M}|$ tal que en cada fila “ μ ” se tenga a $\mathbf{v}_i(\mu \mid \mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i})$.

Generalizando lo anterior, sea V_i un espacio lineal normado y ordenado parcialmente por la norma suprema, construido a partir de los vectores $\vec{\mathbf{v}}_i$, evaluados sobre el conjunto \mathfrak{M} . El proceso discreto de Markov que debe resolver todo jugador $i \in I$ dentro de cada periodo, se puede resumir con el mapa $L : V_i \rightarrow V_i$, tal que

$$L\vec{\mathbf{v}}_i = \max_{\mathbf{f}_i \in A_i} Q(\vec{\mathbf{u}}_i + \delta \vec{\mathbf{v}}_i). \quad (6)$$

Similar al proceso descrito en la [Sección 4](#), con la distinción de que L evalúa el vector $\vec{\mathbf{v}}_i$ en la colección \mathbf{f} tal que el máximo elemento sea $\vec{\mathbf{v}}_i \in V_i$.

OBSERVACIÓN. De la ecuación (6), se aprecia que los participantes determinan indirectamente los valores de las componentes en la matriz Q , a partir del vector de probabilidades $f_i^t(\mu)$ que le asigna $\sigma(\mu, j)$ a cada jugador $j \in A_i(\mu)$, tomando los vectores $\vec{\mathbf{v}}_i$ y $\vec{\mathbf{u}}_i$ fijos, para cada uno de los posibles perfiles oponentes, $(\mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i}) \in F_{-i} \times G_{-i}$.

PROPOSICIÓN 3: *El mapa L tiene un punto fijo $\vec{\mathbf{v}}_i^*$.*

OBSERVACIÓN. Si $\vec{\mathbf{v}}_i^* \in V_i$ es tal que $L\vec{\mathbf{v}}_i^* = \vec{\mathbf{v}}_i^*$, entonces existe una colección $\tilde{\mathbf{f}}_i \in F_i$ que cumpla con (M.1-5) para al menos ese jugador i en cualquier perfil oponente fijo. En otras palabras, hay una “mejor respuesta” estacionaria para i . Esta colección $\tilde{\mathbf{f}}_i$ debe ser tal que $v_i(\mu \mid \tilde{\mathbf{f}}_i, \mathbf{f}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) \equiv \mathbf{v}_i^*(\mu \mid \mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i})$, con $\vec{\mathbf{v}}_i^*$ único gracias al teorema del punto fijo de Banach.

DEMOSTRACIÓN: Tomando un perfil fijo $(\mathbf{f}_{-i}, \mathbf{g}_{-i}) \in F_{-i} \times G_{-i}$, primero se debe mostrar que $\vec{\mathbf{v}}_i^*$ es la solución del sistema $\vec{\mathbf{v}}_i = Q(\vec{\mathbf{u}}_i + \delta \vec{\mathbf{v}}_i)$. Para esto, notar que lo anterior implica $\vec{\mathbf{v}}_i^* = (I_d - \delta Q)^{-1} Q \vec{\mathbf{u}}_i$ (donde I_d corresponde a una matriz identidad de $|\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{M}|$). Al ser V_i un espacio normado, la existencia de $(I_d - \delta Q)^{-1}$ se encuentra garantizada por $\|Q\| = 1$ y $1 > \delta = \|\delta Q\| \geq \vartheta(\delta Q)$.

Luego, sean $\vec{\mathbf{v}}_i$ y $\vec{\mathbf{u}}_i$ dos elementos de V_i , con $\vec{\mathbf{u}}_i(\mu)$ como el valor en la celda “ μ ” del vector $\vec{\mathbf{u}}_i$. Si para $\mu \in \mathfrak{M}$ se tiene $L\vec{\mathbf{v}}_i(\mu) \geq L\vec{\mathbf{u}}_i(\mu)$, entonces

$$0 \leq L\vec{\mathbf{v}}_i(\mu) - L\vec{\mathbf{u}}_i(\mu) \leq \sum_{\bar{\mu} \in \mathfrak{M}} \bar{q}(\bar{\mu} \mid \mu) [u_i(\bar{\mu}) + \delta \vec{\mathbf{v}}_i(\bar{\mu})] - \sum_{\bar{\mu} \in \mathfrak{M}} \tilde{q}(\bar{\mu} \mid \mu) [u_i(\bar{\mu}) + \delta \vec{\mathbf{u}}_i(\bar{\mu})]. \quad (7)$$

Donde en el máximo se debe cumplir que $\bar{q}(\mu' \mid \mu) = \tilde{q}(\mu' \mid \mu)$ para cualquier *matching* $\mu' \in \mathfrak{M}$. Por lo que (7) es menor que

$$\sum_{\mu' \in \mathfrak{M}} \bar{q}(\mu' \mid \mu) \delta [\vec{\mathbf{v}}_i(\mu') - \vec{\mathbf{u}}_i(\mu')] \leq \delta \|\vec{\mathbf{v}}_i(\mu') - \vec{\mathbf{u}}_i(\mu')\|.$$

Repitiendo el mismo argumento para el caso de $L\vec{u}_i(\mu) \geq L\vec{v}_i(\mu)$, por la norma suprema siempre se cumple que $\|L\vec{v}_i - L\vec{u}_i\| \leq \delta \|\vec{v}_i - \vec{u}_i\|$, es decir, que L sea una contracción del conjunto V_i para todo $i \in I$. Por el teorema del punto fijo de Banach [26, pág. 150], al ser V_i un espacio normado, la contracción L tiene un punto fijo único e igual a \vec{v}_i^* . ■

Como la estrategia \tilde{f}_i , que maximiza la utilidad esperada de cada jugador, es al mismo tiempo estacionaria, falta demostrar que existe un punto tal que todos los participantes $i \in I$ jueguen sus estrategias óptimas $(\tilde{f}_i, \tilde{g}_i) \in F_i \times G_i$, dado un perfil de colecciones oponentes y óptimas $(\tilde{f}_{-i}, \tilde{g}_{-i}) \in F_{-i} \times G_{-i}$. Para esto, se analiza el juego reducido de una etapa, entendiendo a éste como la interacción entre cada participante, tal que la acción realizada en todo periodo t se mantenga de manera perpetua para el resto de los demás periodos, hacia el infinito. Siendo equivalente a que, en cada t , los participantes se enfrenten al problema de la ecuación (6) de manera simultánea. Si en tal periodo t hay un EN, por (A.2) se tiene que en todo $t + 1, t + 2, \dots$ siguientes también lo habrá. Finalmente, un EN en este juego de una etapa necesariamente corresponde también a un EMP estricto con estrategias estacionarias.

PROPOSICIÓN 4: Toda fiesta posee al menos un equilibrio Markoviano perfecto y estricto, con estrategias estacionarias.

DEMOSTRACIÓN: Primero, se sabe a partir de la [Proposición 2](#) que existe un \tilde{g}_i óptimo que satisface (M.2,4,5) y (4), definiendo el conjunto $A_i(\mu)$ sobre el cual maximizará el agente i en (t ,2). Segundo, se sabe a partir de la [Proposición 3](#) que existe un \tilde{f}_i óptimo que cumple con (4), dentro del juego de una etapa. Luego, si no existiera un EN tal que \tilde{f}_i cumpla con (M.2,4,5), significa que para un conjunto de acciones \mathfrak{A} que sí satisfacen (M.2,4,5), se cumple $\mathfrak{A} \cap A_i(\mu) = \emptyset$ para al menos un $\mu \in \mathfrak{M}$. Lo anterior claramente llevaría a una contradicción, porque necesariamente $\mu(i)$ debe pertenecer a esa intersección. Finalmente, el espacio de acciones donde cada jugador i maximiza siempre es distinto de vacío, siendo entonces $\Delta(\mathfrak{A} \cap A_i(\mu))$ no vacío, compacto y convexo dentro de un algún espacio euclidiano. Luego, por (A.4), las preferencias $>_i^t$ son continuas y convexas en \mathfrak{M}^∞ , y por ende, cuasi-cóncavas en $\Delta(\mathfrak{A} \cap A_i(\mu))$. Por el teorema de Nash [24, pág. 33] se concluye que existe un perfil $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in F \times G$ tal que cumple con (M.1-5), (4), y es EN en cada periodo t . Teniendo entonces que efectivamente existe un EMP y estricto, con estrategias estacionarias. ■

Del resultado anterior, se tiene que el límite de Cesaro de la matriz de transición Q , denominado en adelante por Q^* , se encuentra correctamente definido (ya que para la secuencia $\{Q_d\}_{d \geq t}$, $Q_d = Q$ en todo $d \geq t$). Además, basándose en el teorema de Banach utilizado en la [Proposición 3](#), toda secuencia de estrategias $\{\tilde{f}_i^t\}$ que resuelva la ecuación (6) para un horizonte de $T - t$ periodos, debe converger a la estrategia \tilde{f}_i . Dicho de otra forma, que el

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \vec{v}_i^t - \vec{v}_i^* \right\| = 0 \quad \text{implica que} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \{\tilde{f}_i^t\} = \tilde{f}_i. \quad (8)$$

Resumiendo, en lo que sigue se trabajará con un equilibrio Markoviano perfecto, estricto y estacionario (de ahora en adelante, denominado también por EMP EE), $(\tilde{f}, \tilde{g}) \in F \times G$, siendo estricto en cuanto a la formación de nuevas parejas de baile, y estacionario en estrategias, con \tilde{g} estrictamente pura y \tilde{f} mixta.

6. Imposibilidad de Acuerdos Inestables

A continuación, se analizarán algunas propiedades importantes del EMP EE. El fin de esta sección, es mostrar que ningún *matching* inestable es un acuerdo dentro de la fiesta. Para mostrar esto último, se estudia el comportamiento más “simple” derivado de imponer que δ sea cercano a 0 ($\delta \sim 0$). Pudiendo garantizar siempre la existencia y convergencia hacia un acuerdo, dado que los agentes no fundan sus estrategias en los pagos futuros de bailar. Luego, se presentan 5 lemas que servirán para demostrar que, de existir acuerdos, estos deben corresponder a *matchings* estables. La importancia del resultado recae en que cualquier asignación inestable es meramente una realización aleatoria que se destruirá a lo largo del tiempo.

Repasando lo visto en las secciones 4 y 5, si un acuerdo es tal que $q(\mu|\mu) = 1$, necesariamente dentro de tal *matching* μ se deben cumplir las condiciones (M.3-4) con igualdad. Equivalente a afirmar que para cada participante de la fiesta, no existe ninguna otra pareja en el conjunto $A_i(\mu)$ que pueda aumentar estrictamente la utilidad de los jugadores. Por lo que, un *matching* será acuerdo si todos los jugadores deciden mantener a su actual pareja. Teniendo que la diferencia principal entre el concepto de estabilidad y acuerdo, es que en el último los jugadores contemplan la aleatoriedad futura de sus acciones en la “actualidad”.

Antes de continuar, es necesario formalizar algunos aspectos acerca de los valores que pueden tomar las componentes de la matriz Q , iguales a las probabilidades de transición dado cada posible asignación dentro de \mathfrak{M} . Así, la formación de nuevas parejas o el cambio entre un estado y otro (entre un *matching* y otro) se define por $q(\cdot|\cdot)$, que a su vez depende implícitamente de (\mathbf{f}, \mathbf{g}) .

Sea $\mu_{(i,j)} \in \mathfrak{M}$ el *matching* actualizado de μ , por alguna pareja $(i, j) \in M \times W$, con $\mu_{(i,j)} \neq \mu$.¹¹ El término $q(\mu_{(i,j)}|\mu)$ corresponde específicamente a la probabilidad de que tal pareja (i, j) comience un baile a partir del *matching* μ . Si $q(\mu_{(i,j)}|\mu) = 0$, implícitamente debe significar que el perfil $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ cumple con

$$\sigma_i(\mu, j) = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_j(\mu, i) = 0. \quad (9)$$

En palabras, la no formación de esa pareja (i, j) implica que ambos no tienen los incentivos suficientes como para bailar con el otro dentro de la fiesta.

Si $0 < q(\mu_{(i,j)}|\mu) < 1$, entonces en $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ debe tenerse que

$$\sigma_k(\mu, l) > 0 \quad \text{y} \quad \tilde{g}_l(\mu, k) = A, \quad (10)$$

para: $(k, l) = (i, j)$ o; $(l, k) = (i, j)$. Lo que por (M.1) significa que ambos aumentan estrictamente su utilidad bailando, pero al menos uno de ellos se encuentra en el argumento del máximo valor esperado del otro (razón por la cual la probabilidad de bailar es positiva). Por último, tomando en cuenta que $\mu_{(i,j)} \neq \mu$, el valor de $q(\mu_{(i,j)}|\mu)$ debe ser siempre distinto de 1. Ya que no es posible para los demás jugadores $k \neq i, j$ generar el baile de la pareja (i, j) en caso de ser seleccionados, a pesar de que la pareja (i, j) pudiera juntarse con probabilidad

¹¹El otro caso, se considerarían parejas del estilo (i, i) , para las cuales se debe realizar otro análisis.

positiva. Esto es puramente un resultado de las “reglas” de interacción (t.1-5) al momento de construir el modelo.

En lo que sigue, en algunas ocasiones se denominará vagamente por “equilibrio” al EMP EE para evitar redundancia o un uso excesivo.

DEFINICIÓN 4: Sea Q la matriz de transición de la fiesta, se dice que Q induce al conjunto $X \subseteq \mathfrak{M}$, con $|X| \geq 2$, si el límite de Cesaro Q^* cumple con

$$\sum_{x \in X} q^*(x|\mu) = 1 \quad \text{para todo } \mu \in \mathfrak{M}, \quad \text{y} \quad q^*(x|\mu) < 1.$$

De la definición anterior se resalta lo siguiente. El primer lugar, el hecho de $\sum_{x \in X} q^*(x|\mu) = 1$ indica que, la cadena de Markov Q , tiene que ser absorbente en X para inducirlo o, dicho de otra forma, que siempre exista una secuencia finita de asignaciones $\{\mu^t, \mu^{t+1}, \dots, \mu^d\}$ con probabilidad positiva, tal que termine en algún elemento μ^d del conjunto X . En segundo lugar, $q^*(x|\mu) < 1$, indica que desde cualquier *matching* $\mu \notin X$ se pueden alcanzar al menos dos elementos de X (siempre y cuando este conjunto no sea un singleton). La necesidad de introducir ésto último en la definición anterior, es para resaltar el hecho de que pueden existir estados absorbentes que nunca se alcancen¹², u otros estados que se dirijan solamente hacia un absorbente, de manera que la existencia de acuerdos no implica que estos se induzcan en equilibrio.

Se comienza analizando el caso de $\delta \sim 0$. Dado que el factor de descuento toma valores muy pequeños, los jugadores deciden sus acciones en base a

$$\vec{v}_i \approx \max_{f_i \in A_i} Q \vec{u}_i.$$

La importancia de las dos siguientes proposiciones se debe a la similitud que existe entre el EMP EE y el conocido algoritmo *deferred acceptance*, para mercados o fiestas muy “impacientes”.

PROPOSICIÓN 5: Para δ muy cercano a 0. El equilibrio Markoviano perfecto, estricto y estacionario (\tilde{f}, \tilde{g}) corresponde a

$$\tilde{f}_i(\mu) = \arg \max_{j \in A_i(\mu)} u_i(j) \quad \text{y} \quad \tilde{g}_j(\mu, i) = A, \quad \text{para todo } \mu \in \mathfrak{M}, i \in I.$$

DEMOSTRACIÓN: Tomar (\tilde{f}, \tilde{g}) como el perfil de estrategias recién descrito. Se corroborará que tal perfil cumple con las condiciones (M.1-5). Dado que $\vec{v}_i \approx Q \vec{u}_i$ para valores pequeños de δ , cada jugador $i \in I$ maximiza su utilidad si le propone bailar a $j \in A_i(\mu)$, tal que j sea el argumento que maximiza la función $u_i(j)$. Por lo que cumple con (M.1-3). Luego, si $j \in A_i(\mu)$, necesariamente el par (i, j) corresponde a una pareja de bloqueo y cumple con (M.2-4). Finalmente, por construcción se satisface (M.5) y la estacionariedad. ■

¹² Por ejemplo, si $\mathfrak{M} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, considerar la cadena de Markov

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } Q^* = \begin{bmatrix} .5 & .5 & 0 \\ .5 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como su límite de Cesaro. En este ejemplo, el único estado absorbente es μ_3 y, es fácil distinguir que no existe ningún “camino” a partir de los *matchings* μ_1 y μ_2 que entregue la asignación μ_3 , ya que en el límite los *matchings* μ_1 y μ_2 se alternan infinitamente, sin cruzarse nunca por el *matching* absorbente.

PROPOSICIÓN 6: Para δ muy cercano a 0. Q induce $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$.

DEMOSTRACIÓN: Primero se muestra que $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$. Tomando $\mu^* \in \mathfrak{M}^*$, si lo anterior no fuera cierto, existiría una pareja $j \neq \mu^*(i)$ dentro de $A_i(\mu^*)$ tal que, debido a (M.1-2), al menos un jugador $i \in I$ puede mejorar estrictamente su utilidad si comienza a bailar con j . Pero ya que $\tilde{v}_i \approx Q\tilde{u}_i$, eso implicaría que el par (i, j) es una pareja de bloqueo en μ^* , lo que no puede ser ya que contradice el hecho de que tal *matching* sea estable. Por lo que el conjunto de acuerdos es igual al de *matchings* estables y cumple con igualdad las condiciones (M.3-4). Luego, se sabe que a partir del algoritmo *deferred acceptance* existe al menos una secuencia de parejas de bloqueo que retorna cada asignación estable de \mathfrak{M}^* , a partir de cualquier $\mu \in \mathfrak{M}$ (ver Roth & Sotomayor [33, pág. 66]). Debe ser entonces que con probabilidad 1 se logre tal secuencia ya que cada jugador puede proponerse con probabilidad $1/|I|$ ante un horizonte infinito de interacción. Teniendo que Q induce a \mathfrak{M}^* . ■

OBSERVACIÓN. En equilibrio, para valores pequeños del factor de descuento δ , todos los jugadores actúan de forma idéntica al comportamiento dictado por el algoritmo *deferred acceptance*, ya que cada nueva pareja de baile corresponde a un par de bloqueo que para al menos uno de los dos, corresponde a la contraparte de bloqueo más preferida. Con tal comportamiento, varias de las propiedades estudiadas del algoritmo pueden ser aplicables para este caso en específico. Lo que abre un nueva interrogante de si a medida que δ aumenta, tal comportamiento es capaz de persistir o no.

Esto entrega la idea de que una fiesta compuesta por participantes impacientes siempre es capaz de llegar a un acuerdo que además, es estable, aún cuando los jugadores se encuentran velando por sus propios intereses. Tal comportamiento es resultado exclusivo de que los jugadores no consideren las repercusiones que pueden tener sus acciones dentro de los pagos futuros. Como se ve más adelante, este comportamiento no se sostiene en todo δ , encontrando EMP EE muy distintos al de la [Proposición 5](#).

Los siguientes cinco lemas muestran algunas propiedades importantes que se satisfacen en equilibrio para cualquier $\delta \in [0, 1)$. De forma breve: se muestra la relación entre las estrategias \tilde{f}_i y \tilde{g}_i con tal de que sean “consistentes” dentro de un mismo periodo; las condiciones que deben cumplir comportamientos distintos a los vistos en la [Proposición 5](#) y [6](#); y los casos en que algunos jugadores prefieren desplazarse de asignaciones aparentemente absorbentes.

LEMA 1: Sea $\mu \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(i) \neq j$. Si $\tilde{g}_i(\mu, j) = A$ y $\tilde{g}_j(\mu, i) = A$, entonces $\tilde{f}_i(\mu) \neq \mu(i)$ y $\tilde{f}_j(\mu) \neq \mu(j)$.

OBSERVACIÓN. El [Lema 1](#) dice que si dos jugadores, i y j , fueran capaces de aceptarse ante una posible propuesta del otro, ambos prefieren cambiar a su actual pareja en caso de que la naturaleza los seleccione en $(t.1)$. Esto no significa que uno sea la mejor respuesta del otro, por lo que no necesariamente $q(\mu_{(i,j)}|\mu) > 0$. Solo se podría asegurar que $q(\mu|\mu) < 1$ (El [Lema 1](#) también es válido para $i = j$).

DEMOSTRACIÓN: Suponiendo lo contrario, si el jugador i fuera a aceptar una propuesta del jugador j (el caso es análogo para j aceptando a i , e incluso para $i = j$), por (M.1) se tendría que, de ser seleccionado por la naturaleza, $u_i(\mu_{(i,j)}) + \delta v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{f}, \tilde{g}) > u_i(\mu) + \delta v_i(\mu|\tilde{f}, \tilde{g})$. Si $\tilde{f}_i(\mu) = \mu(i)$, por (M.3), implicaría que ningún jugador $k \in A_i(\mu)$ puede mejorar estrictamente

la utilidad de i , esto indicaría que $\mu(i)$ es mejor elección que j , contradiciendo que en equilibrio se tenga $\tilde{g}_i(\mu, j) = A$. Por lo que $\tilde{f}_i(\mu) \neq \mu(i)$ (junto con $\tilde{f}_j(\mu) \neq \mu(j)$). ■

LEMA 2: Sea $\mu \notin \mathfrak{M}^*$. Si $q(\mu|\mu) = 1$, entonces todo par de bloqueo (i, j) en μ cumple con $v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, para $k = i, j$.

OBSERVACIÓN. El Lema 2 dice que si μ es un acuerdo y no corresponde a un *matching* estable, toda pareja de bloqueo debe preferir de manera estricta estar en el *matching* μ , antes que comenzar a bailar entre ellos, eliminando cualquier caso de indiferencia por parte de alguno de estos dos, en caso de no aceptarse.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mu \notin \mathfrak{M}^*$ es un acuerdo, entonces $q(\mu|\mu) = 1$. Por (M.3) se tiene que $v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ para todo par $(i, j) \neq (\mu(j), \mu(i))$. Al ser un acuerdo, todo par de bloqueo (i, j) cumple con $u_i(\mu) + \delta v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq u_i(\mu_{(i,j)}) + \delta v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, pero como $u_i(\mu_{(i,j)}) - u_i(\mu) > 0$, debe ser que $v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ para $k = i, j$. Es decir, las parejas de bloqueo prefieren estrictamente el *matching* μ . ■

LEMA 3: Sea $\mu \in \mathfrak{M}$. Si $q(\mu|\mu) = 1$, entonces para todo $\mu' \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu'_{(i,j)} = \mu$, $\mu' \neq \mu$ e (i, j) como un par de bloqueo en μ' , se tiene $q(\mu'|\mu') \neq 1$.

OBSERVACIÓN. El Lema 3 dice que si μ es un acuerdo, en todo *matching* “cercano” a μ , es decir, tal que a través de una pareja de bloqueo se pueda llegar a μ , los jugadores prefieren de manera estricta dirigirse hacia μ . Lo que evidentemente permite afirmar que μ' no puede ser un acuerdo dentro de la fiesta.

DEMOSTRACIÓN: Suponiendo lo contrario, $q(\mu'|\mu') = q(\mu|\mu) = 1$. Como ambos son acuerdos, necesariamente $v_k(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \neq v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ para $k = i, j$. Dado que $>_i$ es un orden estricto, $k = i, j$ debe cumplir con $v_k(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ o $v_k(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) < v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$. Si (i, j) es un par de bloqueo, $v_k(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) < v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, por lo que ambos preferirían juntarse estrictamente dentro un periodo, en vez de no desviarse de μ' . Lo que contradice $q(\mu'|\mu') = 1$. ■

LEMA 4: Sea $\mu \in \mathfrak{M}$ y $q(\mu_{(i,j)}|\mu) > 0$ con $\sigma_i(\mu, j) > 0$. Si k es la pareja de bloqueo más preferida de i con $k >_i j$, entonces al menos una de las siguientes es cierta: (1) existe al menos un $\mu' \in \mathfrak{M}$ con $q^*(\mu'|\mu) > 0$ y $\tilde{f}_k(\mu') \neq i$, para $i = \mu'(k)$; (2) $v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > u_i(k)/(1 - \delta)$.

OBSERVACIÓN. El Lema 4 dice que si el jugador i no se le propuso a su “mejor pareja de bloqueo” k en el *matching* μ pero si a otro jugador $j \in \Phi_i$, tal acción debe estar fundada en el hecho de que k abandonará a i en alguna posible secuencia alcanzable con probabilidad positiva, o sino, que i es capaz de lograr un pago esperado mayor al estar bailando con j en vez de con k a perpetuidad.

DEMOSTRACIÓN: Suponiendo que (1) y (2) son falsas, debe ser posible que tal jugador $i \in I$ (que satisface las características del enunciado) cumpla con que $v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq u_i(k)/(1 - \delta)$ y $\tilde{f}_k(\mu') = i$, para todo $\mu' \in \mathfrak{M}$ tal que $q^*(\mu'|\mu) > 0$ y $\mu'(k) = i$. Si el jugador k fuera siempre a mantener a su pareja de baile i en cualquier secuencia posible de μ , el jugador i puede al menos asegurarse un pago perpetuo de $u_i(k)/(1 - \delta)$ si decide mantener como pareja a k . Dado que j es el óptimo de i , por (M.1) debe ser que $v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_i(\mu_{(i,k)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, pero esto implica que debiera cumplirse $v_i(\mu_{(i,k)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq u_i(k)/(1 - \delta)$ que llevaría a afirmar

$v_i(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > u_i(k)/(1 - \delta)$. Lo que contradice la suposición inicial, por lo que al menos una de ellas debe ser cierta. ■

LEMA 5: *Sea $\mu \notin \mathfrak{M}^*$ con $q(\mu|\mu) = 1$. Para todo (i, j) que sea par de bloqueo en μ existe al menos $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}$ tal que: $\mu'(i) = j$ y $\mu''(j) = i$; $q^*(\mu'|\mu) > 0$ y $q^*(\mu''|\mu) > 0$; con $\tilde{f}_i(\mu') \neq j$ y $\tilde{g}_i(\mu'') \neq j$.*

OBSERVACIÓN. La interpretación del Lema 5 es que si un *matching* inestable μ fuera un acuerdo, toda pareja de bloqueo en μ no desearía comenzar un baile entre ellos mismos por “miedo” a ser abandonados por su otra contraparte, en algún *matching* futuro y alcanzable. Tal comportamiento se podría resumir a partir de la frase “te podría abandonar porque tú también podrías abandonarme”.

DEMOSTRACIÓN: Caso 1: Para $\mu'' = \mu'$, suponer que no existe $\mu'' \in \mathfrak{M}$ tal que $\tilde{f}_j(\mu'') \neq i$ con $\mu''(j) = i$. Esto significaría que el jugador j , para ninguna secuencia aleatoria de asignaciones, abandonaría a i en caso de bailar. Por el Lema 4, esto implica que $v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > u_i(j)/(1 - \delta)$. Pero, si $q(\mu|\mu) = 1$ entonces $v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) = u_i(\mu)/(1 - \delta)$, lo que es una contradicción porque $u_i(j) > u_i(\mu)$. Luego, $\mu'' \in \mathfrak{M}$ debe existir. Caso 2: Para $\mu' \neq \mu''$, en caso de que ambos, $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}$ no existieran, j e i cumpliría con los mismos argumentos recién dados. Por lo que μ' y μ'' existen. ■

Ahora, las siguientes dos proposiciones descartan la existencia de acuerdos en *matchings* inestables para dos casos particulares: individualmente no racionales y con parejas aceptables no emparejadas. Ambos son fáciles de intuir si se distingue que el pago mínimo al cual los jugadores pueden optar en un *matching* individualmente racional, es el de nunca bailar con nadie (ver Wu [41, pág. 222] para un argumento similar). Luego de descartar los casos anteriores, solo restaría mostrar que un *matching* inestable e individualmente racional, que no posee parejas aceptables no emparejadas entre sí, no puede ser un acuerdo de la fiesta.

PROPOSICIÓN 7: *Si $\mu \in \mathfrak{M}$ no es individualmente racional, entonces $q(\mu|\mu) \neq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $q(\mu|\mu) = 1$, siendo $\mu \in \mathfrak{M}$ individualmente racional. Dado que μ es un acuerdo, por el Lema 2 y (M.1-2), tiene que ser $v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_i(\mu_{(i,i)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ para un $i \in I$ tal que $i >_i \mu(i)$ (tal i existe al no ser μ individualmente racional). Por otro lado, el jugador i siempre puede decidir no bailar con ningún participante, por lo que es posible definir siempre un emparejamiento a perpetuidad con “sigo mismo”, equivalente a $\mu_{(i,i)}$ (o cualquier $\mu' \in \mathfrak{M}$, tal que $\mu'(i) = i$) de manera de obtener $u_i(i)/(1 - \delta)$. Teniendo en cuenta lo anterior, por el Lema 3, el *matching* μ no podría ser un acuerdo ante este par de bloqueo (i, i) . Por lo que μ es un acuerdo solo si es individualmente racional. ■

PROPOSICIÓN 8: *Sea $\mu \notin \mathfrak{M}^*$, con $\mu(k) = k$ para $k = i, j$. Si (i, j) es un par aceptable, entonces $q(\mu|\mu) \neq 1$.*

OBSERVACIÓN. La Proposición 8 dice que si un *matching* inestable μ fuera un acuerdo, este no puede dejar si bailar a una pareja que es mutuamente aceptable, porque el pago mínimo que ambos podrían generar en cualquier secuencia resultante, es el de decidir no bailar con nadie a lo largo de la fiesta (esto siempre es posible ya que, en el infinito, todos los jugadores debieran poder ser seleccionados por la naturaleza).

DEMOSTRACIÓN: Por el [Lema 2](#), si $q(\mu|\mu) = 1$ se tendría que cumplir $v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$ para $k = i, j$. Debido a que en el “peor” de los casos los jugadores pueden al menos asegurarse de estar solos, es decir, $\mu(k) = k$, cualquier *matching* $\mu' \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu'(k) \neq k$ y $\mu'(k) >_k k$ posee $v_k(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) = u_k(k)/(1 - \delta)$. Pero, ya que $\mu_{(i,j)}$ cumple con esas dos condiciones, debe ser que $v_k(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_k(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, lo que contradice $q(\mu|\mu) = 1$. Luego, μ no es un acuerdo. ■

Finalmente, se presenta uno de los principales resultados, que equivale a decir que ningún *matching* inestable puede llegar a ser un acuerdo dentro de la fiesta. Teniendo al mismo tiempo que, de existir acuerdo alguno, este debe ser al menos un *matching* estable. Dicho de otra forma, $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta \subseteq \mathfrak{M}^*$ para todo $\delta \in [0, 1)$.

TEOREMA 1: Si $\mu \notin \mathfrak{M}^*$, entonces $q(\mu|\mu) \neq 1$.

DEMOSTRACIÓN: Si $q(\mu|\mu) = 1$, de la [Proposición 7](#) μ solo podría ser individualmente racional. De igual manera, por la [Proposición 8](#), en μ no existe ningún par (i, j) aceptable tal que $\mu(k) = k$ para $k = i, j$. Como $\mu \notin \mathfrak{M}^*$, existe una pareja de bloqueo (i, j) en μ y, por el [Lema 4](#), cumple con $v_k(\mu) > v_k(\mu_{(i,j)})$. Dado que μ es un acuerdo de equilibrio, por (M.1-2) no existe otro perfil $(\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{g}}'_i)$ distinto, que aumente el valor del vector \vec{v}_i . Del [Lema 5](#), se tiene que ambos debieran rechazarse dentro de algún *matching* alcanzable. Sean tales *matchings* $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}$ para i y j , respectivamente, siempre existe $\tilde{\mathbf{f}}'_i \in F_i$ tal que i le asigne una probabilidad $\pi_i(\mu', \tilde{\mathbf{f}}'_i(\mu'))$ menor a 1, de manera que $v_j(\mu|\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) > v_j(\mu_{(i,j)}|\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) = u_j(i)/(1 - \delta) - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ muy pequeño. Ante tal situación, la mejor respuesta de j sería $\tilde{g}'_j(\mu, i) = A$, pero ya que $\tilde{\mathbf{g}}'_i$ no ha cambiado en (M.4), debe mantenerse el valor de $v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}_i, \tilde{\mathbf{g}}_i) = v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}'_j, \tilde{\mathbf{g}}_{-j})$ y $u_j(i)/(1 - \delta) > v_j(\mu, i|\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}'_j, \tilde{\mathbf{g}}_{-j})$. Al ser un juego secuencial, lo mejor que puede realizar j es una acción similar a la de i , haciendo que i escoja $\tilde{g}'_i(\mu, j) = A$ y así aumentar efectivamente el valor de $v_j(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$. Ante este desvío, $v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) = u_i(\mu)/(1 - \delta) < v_i(\mu|\tilde{\mathbf{f}}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) \approx u_i(j)/(1 - \delta)$, y por el [Lema 1](#), i si tiene incentivos a desviarse de $(\tilde{\mathbf{f}}_i, \tilde{\mathbf{g}}_i)$. Por ende, μ no es un acuerdo. Luego, en equilibrio $\mu \notin \mathfrak{M}^*$ no puede cumplir $q(\mu|\mu) = 1$ porque no cumpliría con las condiciones (M.1-4). ■

Resumiendo las ideas más importantes, las proposiciones [5](#) y [6](#) muestran que la impaciencia no sólo garantiza estabilidad, si no que también la capacidad de lograr acuerdos en equilibrio y alcanzarlos. Siendo crucial la valoración del futuro que posean los participantes, pudiéndose interpretar como: estudiantes que valoran menos a su establecimiento en el futuro son más propensos a lograr acuerdos estables con sus colegas, siempre que estos últimos sean impacientes en cuanto a la obtención de estudiantes, en un contexto de interacción descentralizada; de la misma forma, trabajadores que son más impacientes por la obtención de mejores trabajos, debieran lograr un mercado con asignaciones estables, siempre y cuando las firmas también sean impacientes con respecto a obtener mejores trabajadores (de manera implícita, las interpretaciones deben considerar el hecho de que el factor de descuento es común para ambos lados del mercado, dicho de otra forma, el supuesto (A.3)).

Por otro lado, la importancia del [Teorema 1](#) recae en que el “miedo” mutuo que poseen las parejas de bloqueo, en caso de comenzar un baile, nunca es suficiente como para impedir que estas decidan desviarse de su asignación actual. En un contexto de selección escolar, todo *matching* inestable, que sea el resultado de un mecanismo centralizado, no debiera

poder “soportarse” si los agentes son capaces de interactuar descentralizadamente, luego del proceso de asignación. Además, se puede apreciar que desde la perspectiva del modelo, cualquier *matchings* inestable no más que una realización dentro de una “discusión” que los jugadores no han logrado terminar.¹³

7. Incentivos Reticulares

En esta sección se presenta el segundo resultado de la investigación. En palabras, este corresponde a que los incentivos que permiten a la fiesta alcanzar un acuerdo, son los mismos que motivan a sus participantes a destruirlos en cuanto más valoren sus pagos futuros. La idea de los “incentivos reticulares” proviene indirectamente de la relación entre los *matchings* estables y la posibilidad de que no sean acuerdos, pues son los intereses opuestos (entre hombres y mujeres) los que generan la inexistencia de acuerdos entre los jugadores, con el fin de lograr bailar con una pareja de mayor preferencia.

En base a lo dicho, se postula que el problema de los mercados descentralizados viene de su construcción. No es posible esperar obtener acuerdos en jugadores pacientes e impacientes (a menos de que exista una única asignación estable en el mercado), porque jugadores de un mismo lado siempre puede “coludirse” o “colaborar” entre ellos para desviarse a un asignación estrictamente mejor en base a las preferencias conjuntas de ese lado del mercado.

El siguiente lema muestra la equivalencia entre imponer que la matriz de transición Q induzca al conjunto de acuerdos $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y la existencia de estrategias indirectamente “cooperativas” en jugadores de un mismo lado del mercado o sexo.

LEMA 6: Sea $|\mathfrak{M}^*| \geq 2$, $\mu', \mu'' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y $\mu'' >_k \mu'$. Si Q induce a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, entonces para $f'_k(\mu') = k$, con $\mu'_{(k,k)} \neq \mu'$, existe un jugador l en el mismo grupo, tal que \tilde{f}_l produce $q^*(\mu''|\mu'_{(k,k)}) > 0$.

OBSERVACIÓN. El Lema 6 indica que para $\mu', \mu'' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, tal que los grupos M y W no se encuentren indiferentes entre los elementos de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, es decir, que exista un retículo sobre $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$. Si un jugador k desea alcanzar un acuerdo estable μ'' mejor que el actual μ' , existe un jugador del mismo grupo de k que desea “ayudarlo” a alcanzar el *matching* μ'' . Más aún, sin su ayuda, k no podría lograr $q^*(\mu''|\mu'_{(k,k)}) > 0$ con $\mu'_{(k,k)} \notin \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ (por el Lema 3).

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mu', \mu'' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ tal que $\mu'' >_M \mu'$, por Romero-Medina & Triossi [28] se sabe que existen al menos dos jugadores, $k, l \in M$ (caso análogo para $k, l \in W$) tales que para esos dos *matchings* estables cumplan con $\mu'(k) >_l \mu'(l)$ y $\mu'(l) >_k \mu'(k)$. Como Q induce a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, debe ser que dado el *matching* $\mu'_{(k,k)}$ se tenga $q^*(\mu''|\mu'_{(k,k)}) > 0$, por lo que $q(\mu'|\mu'_{(k,k)}) + q(\mu'_{(k,k)}|\mu'_{(k,k)}) < 1$. Lo anterior permite deducir que existe un *matching* resultante de una interacción infinita desde $\mu'_{(k,k)}$ distinto del mismo $\mu'_{(k,k)}$ y μ' , donde se

¹³ En este caso, “discusión” hace referencia a la cadena de Markov asociada al EMP EE, se dice que no termina porque se podría llegar a una asignación estable o, la fiesta podría transitar de un estado a otro hacia el infinito, siendo ésta un discusión que nunca termina.

pueda llegar a μ'' . Suponiendo que no existe tal jugador $l \in M$ que juegue $\tilde{f}_l(\mu'_{(k,k)}) = \mu'(k)$ o $\tilde{f}_l(\mu'_{(k,k)}) = l$, debiese ser otra la estrategia que produce $q^*(\mu''|\mu'_{(k,k)}) > 0$, teniendo dos casos. Caso 1: $l \in W$, como $\mu'' >_M \mu'$ debe ser que $\mu' >_W \mu''$, por lo que l tendría $v_l(\mu'|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq v_l(\mu''|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$. Luego, ya que en $\mu'_{(k,k)}$ todo $l \in W$ distinto de $\mu'(k)$ no posee ninguna una pareja de bloqueo mejor que $\mu'_{(k,k)}(l)$, tal jugador tendría que disminuir su utilidad para llegar a un valor esperado menor o igual al actual, lo que claramente no sería óptimo. Caso 2: $l \in M$ y $\tilde{f}_l(\mu'_{(k,k)}) \neq \mu'(k)$, como todos los jugadores en W distintos de $\mu'(k)$ no poseen una pareja de bloqueo, ninguno tiene incentivos a desviarse (por el caso 1) Por último, si solo $\mu'(k)$ es capaz de desviarse para aumentar su utilidad, debe ser que $\tilde{f}_l(\mu'_{(k,k)}) = \mu'(k)$ tal que $\mu'(k) >_l \mu'(l)$ y $v_l(\mu''|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq v_l(\mu''|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$. De otra forma, se tendría que $q^*(\mu''|\mu'_{(k,k)}) = 0$, lo que no puede ser. ■

Ahora, para las siguientes 2 proposiciones se trabajará desde otro punto de vista, el cual corresponde a la “versión finita” de la fiesta. Por “versión finita”, se entiende como la recursiva aplicación de la contracción L para un número finito de veces (ver la [Sección 5](#)). Entonces, la fiesta de horizonte T estará definida por contraer T veces la función de valor \tilde{v}_i^1 , es decir, \tilde{v}_i^T . Uno podría interpretar cada aplicación de la contracción como un periodo hacia “atrás” con respecto al término de la fiesta (esto es, los pagos \tilde{v}_i^t se obtienen en t y los pagos $L\tilde{v}_i^t$ en $t - 1$). Ante tal punto de vista, la convergencia hacia la estacionariedad se alcanzaría con $t \rightarrow -\infty$, pero para evitar confundir al lector se utilizará $t \rightarrow +\infty$, asumiendo un significado equivalente.

PROPOSICIÓN 9: Sea $|\mathfrak{M}^*| \geq 2$. Para δ muy cercano a 1, si Q induce $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, en toda fiesta existe un horizonte finito $\tilde{t} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \geq \tilde{t}$ se tiene $\mathfrak{M}_\delta \subset \mathfrak{M}^*$.

OBSERVACIÓN. Teniendo en cuenta que si $|\mathfrak{M}^*| \geq 2$, entonces existe un retículo sobre el conjunto de *matchings* estables. La [Proposición 9](#) dice que si las estrategias en equilibrio dirigen hacia el conjunto de acuerdos (por la [Proposición 6](#) se sabe que, para δ cercano a 0, $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$), entonces para jugadores muy “pacientes” existe un horizonte finito tal que al menos uno de ellos posea los incentivos suficientes como para destruir un acuerdo $\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, a partir de la “colaboración” de un integrante en el mismo lado del mercado.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, por el [Teorema 1](#) se tiene que $\mu \in \mathfrak{M}^*$, entonces existen $k, l \in M$ (caso análogo para $k, l \in W$) tales que $\mu(k) >_l \mu(l)$ y $\mu(l) >_k \mu(k)$. A partir de la transformación recursiva de L sobre \tilde{v}_i^t , se desea encontrar un horizonte \tilde{t} tal que al menos uno de estos dos jugadores posea como óptima una estrategia \tilde{f} distinta de su asignación en μ . La demostración se realizará considerando la estrategia $\tilde{f}_k(\mu) = k$, pero es igual de válida para un desvío con alguna pareja $i \neq \mu(k)$ que acepte una propuesta de baile. Se comienza postulando lo contrario: sea $\delta \sim 1$, para todo $t \in \mathbb{N}$ se tiene que por (M.3-4)

$$u_k(\mu) + \delta v_k^{t+1}(\mu|\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \geq u_k(\mu_{(k,k)}) + \delta v_k^{t+1}(\mu_{(k,k)}|\mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}). \quad (11)$$

Resaltando que, para valores de δ muy cercanos a 1, el valor esperado se aproxima cada vez más a la suma descontada de la esperanza evaluada en base a la distribución límite Q^* , mientras el horizonte t aumenta (equivalente a aplicar indefinidamente el mapa L). Formalmente,

esto quiere decir que para δ muy grande,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_k^{t+1}(\mu_{(k,k)} | \mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\mu' \in \mathfrak{M}} \delta^d q^*(\mu' | \mu) < \infty. \quad (12)$$

Luego, denominando como v_{Q^*} al valor futuro descontado de la distribución límite Q^* , no es difícil ver que si se resta v_{Q^*} a ambos lados de la ecuación (11) y se toma el límite cuando $t \rightarrow \infty$, se obtendrá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_k^t(\mu | \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) - v_{Q^*} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} u_k(\mu_{(k,k)}) + \delta v_k^{t+1}(\mu_{(k,k)} | \mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) - v_{Q^*}. \quad (13)$$

El lado derecho es 0 y el lado izquierdo es negativo para al menos uno de los 2 *matchings* óptimos (en este caso, μ_W), ya que por el [Lema 6](#) debe ser que $q^*(\mu' | \mu_{(k,k)}) > 0$ con $\mu' \in \tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y $\mu' >_M \mu_W$. De lo anterior, se tendría que $0 > \lim_{t \rightarrow \infty} v_k^t(\mu | \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) - v_{Q^*} > 0$, lo que es una contradicción. Se concluye que para algunos posibles horizontes $t \in \mathbb{N}$, no es cierto que $\tilde{f}_k(\mu) = \mu(k)$. Considerando a \tilde{t} como el mínimo de los horizontes que cumplen con lo anterior, se tiene la dicha proposición. ■

Con lo anterior, si para un δ muy cercano a 1 existe un horizonte finito capaz de garantizar $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta \subset \mathfrak{M}^*$, ahora se verá el mínimo horizonte tal que exista δ satisfaciendo lo último (es decir, para un horizonte fijo ¿Cuál es el rango de δ 's que destruye acuerdos?). Teniendo este propósito, la definición que sigue formaliza lo anterior cumpliendo que siempre existe un límite tal que los participantes sean capaces de inducir el conjunto de *matchings* estables como acuerdos.

DEFINICIÓN 5: La secuencia $\{\hat{\delta}_t\}$ se define en todo $t \in \mathbb{N}$, $t \geq \tilde{t}$, correspondiendo al factor de descuento necesario para que, ante una fiesta de horizonte t , se tenga $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta \subset \mathfrak{M}^*$.

PROPOSICIÓN 10: $\{\hat{\delta}_t\}$ tiene un único punto límite $\hat{\delta} > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Primero, $\hat{\delta}_{t+1} < \hat{\delta}_t$ para todo $t \geq \tilde{t}$. Para ver lo anterior, suponiendo lo contrario, $\hat{\delta}_{t+1} \geq \hat{\delta}_t$ para todo t . Caso 1: $\hat{\delta}_{t+1} = \hat{\delta}_t$, esto no puede ser porque significaría que ante un horizonte de $t + 1$ periodos, para el instante siguiente ya es óptimo desviarse de un *matching* estable. Caso 2: $\hat{\delta}_{t+1} > \hat{\delta}_t$, de la misma forma que en el caso anterior, ahora el jugador $i \in I$ que genera el desvío, tiene aún más incentivos a desviarse con un horizonte de t periodos, lo que contradice la definición. Segundo, $\hat{\delta}_t > 0$ para todo $t \geq \tilde{t}$. Si se escoge $\delta = 0$ (siendo más general se puede tomar $\hat{\delta}_t = \epsilon > 0$, para ϵ muy pequeño), por la [Proposición 6](#) nunca es óptimo desviarse de un *matching* estable, o en otras palabras, no existe un horizonte t que permita un desvío para algún $\mu^* \in \mathfrak{M}^*$. Por último, dado que $\{\hat{\delta}_t\}$ es estrictamente decreciente y acotada por 0, debe existir un límite único $\hat{\delta} > 0$. ■

Habiéndose introducido las últimas dos proposiciones, no es difícil intuir el [Teorema 2](#). Intuitivamente, la idea es mostrar que $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$ solo se puede obtener para un rango de δ 's menor al límite $\hat{\delta}$, ya que de otra forma, agentes de un mismo lado del mercado desearían destruir ciertos acuerdos en base a los incentivos opuestos del mercado. El hecho de que el teorema siguiente sea para el caso de $|\mathfrak{M}^*| \neq 1$ se debe a los ya nombrados “incentivos reticulares” (no existiría \mathfrak{L} sobre \mathfrak{M}^*). Más adelante, se concluirá para el caso específico en que exista un único *matching* estable.

TEOREMA 2: Sea $|\mathfrak{M}^*| \geq 2$. Si Q induce $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$, entonces $\delta < \hat{\delta}$.

DEMOSTRACIÓN: A partir de la [Proposición 9](#) se tiene que para todo $\delta \geq \hat{\delta}$, Q no puede inducir a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$ porque si ante un horizonte finito existe un jugador $i \in I$ capaz de destruir al menos un acuerdo $\mu \in \mathfrak{M}^*$, con un horizonte infinito sus incentivos a desviarse de tal asignación debieran aumentar más aún. Luego, por la [Proposición 10](#) la secuencia $\{\hat{\delta}_t\}$ posee un límite $\hat{\delta} > 0$. Entonces, para todo $\delta \in [0, \hat{\delta})$ no existe un horizonte capaz de hacer que el conjunto de acuerdos sea distinto de \mathfrak{M}^* . ■

Del [Teorema 2](#), es claro que no todos los *matchings* estables pueden ser acuerdos para cualquier $\delta \in [0, 1)$, si se pretende que los participantes del mercado puedan alcanzarlos y mantenerlos, independientemente de su valoración del futuro. También, se afirma de manera indirecta que en toda fiesta, siempre existe un conjunto de acuerdos equivalente a \mathfrak{M}^* para $\delta \in [0, \hat{\delta})$.

Una aplicación importante del último resultado es que, aún cuando un mercado centralizado sea capaz de retornar una asignación estable, si los participantes del mercado tienen la oportunidad de interactuar descentralizadamente, el *matching* resultante podría igualmente destruirse, independientemente de su estabilidad. Esto último se interpreta como los incentivos opuestos del mercado actuando conjuntamente para lograr un “bien común” a través de una mejor asignación.

Por otro lado, esto abre la interrogante sobre cuales son los elementos que se encuentran dentro de un conjunto de acuerdos, resultante de un factor de descuento $\delta \in [\hat{\delta}, 1)$. Las últimas dos proposiciones, no se centran explícitamente en el análisis de tal “destrucción” de acuerdos en vecindades tipo δ y $\delta + \varepsilon$ (para $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta+\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$ muy pequeño). En cambio, sí muestran que para el caso límite de una “paciencia extrema” ($\delta \rightarrow 1$) $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ puede ser vacío y que, en caso de no serlo, los acuerdos deben poseer una estructura específica, la cual es, dejar indiferente a ambos grupos ante las preferencias $>_M$ y $>_W$. Todo esto, siempre y cuando, los participantes sean capaces de alcanzar el conjunto $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ en caso de no ser vacío.

PROPOSICIÓN 11: Si para todo $\mu', \mu'' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ se tiene $\mu' \sim_M \mu''$, en $\delta \rightarrow 1$, Q no puede inducir $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$.

OBSERVACIÓN. La [Proposición 11](#) dice de forma indirecta que si el conjunto de acuerdos es tal que ambos grupos están indiferentes entre sus elementos, no existe ningún jugador que desee “ayudar” a otro de su mismo grupo para alcanzar otro acuerdo más favorable. Por lo que cualquier desviación no podría llevar a una asignación mejor y por ende, μ' y μ'' no dejarían de ser acuerdos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ tal que $\mu' \sim_M \mu''$ para todo $\mu', \mu'' \in \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, por el [Teorema 1](#) $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}^*$. Si $\mu' \sim_M \mu''$, significa que cualquier jugador $i \in M$ (caso análogo a $i \in W$), con $\mu''(i) >_i \mu'(i)$, no puede alcanzar al acuerdo μ'' desde μ' sin empeorar a otro jugador $j \in M$. Por otro lado, ya que $\delta \rightarrow 1$, el valor futuro esperado de cada participante es aproximadamente la suma descontada de la distribución límite Q^* . Luego, analizando la estrategia $f_i(\mu') = i$ (estar solo), suponer que $q^*(\mu'' | \mu'_{(i,i)}) > 0$ implicaría por el [Lema 6](#) que $q(\mu' | \mu'_{(i,i)}) + q(\mu'_{(i,i)} | \mu'_{(i,i)}) < 1$ gracias a la estrategia de otro jugador $k \in I$. Pero los únicos que pueden ayudar a alcanzar μ'' son: $l = \mu'(\mu''(i)) \in M$ (esto es la asignación en μ' de la

pareja de i en μ'), que debe cumplir $\mu'(l) >_l \mu''(l)$, por lo que no es posible que genere tal camino ya que

$$u_k(\mu'_{(i,i)}) + \delta v_k(\mu'_{(i,i)} | \mathbf{f}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}) > u_k(\mu'_{(i,i)}) + \delta v_k(\mu'_{(i,i)} | \mathbf{f}''_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}}),$$

donde $v_k(\mu'_{(i,i)} | \mathbf{f}'_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}})$ y $v_k(\mu'_{(i,i)} | \mathbf{f}''_i, \tilde{\mathbf{f}}_{-i}, \tilde{\mathbf{g}})$ se evalúan a partir de $q^*(\mu' | \mu'_{(i,i)}) = 1$ y $q^*(\mu' | \mu'_{(i,i)}) < 1$, respectivamente ; $l = \mu''(i) \in W$, que al ser ambos *matchings* estables, debe cumplir con $\mu'(l) >_l \mu''(l)$ (caso análogo a $\mu'(\mu''(i)) \in M$). Entonces $q^*(\mu'' | \mu'_{(i,i)}) = 0$ y Q no induce $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$. ■

PROPOSICIÓN 12: Si Q induce $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y $\delta \rightarrow 1$, entonces solo una de las siguientes es cierta; (1) $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta = \emptyset$; (2) $|\tilde{\mathfrak{M}}_\delta| > 0$ y $\mu' \sim_M \mu''$ para todo $\mu', \mu'' \in \tilde{\mathfrak{M}}_\delta$.

DEMOSTRACIÓN: De la Proposición 9 se tiene que en todo conjunto $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ tal que para $\mu', \mu'' \in \tilde{\mathfrak{M}}_\delta$, $\mu' >_M \mu''$ existe un horizonte finito que destruirá uno o ambos acuerdos, por lo que si ambos dejan de ser acuerdo se llegaría a (1) donde $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta = \emptyset$. Por otro lado, si llegará a quedar un conjunto $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ tal que $\mu' \sim_M \mu''$, por la Proposición 11 Q dejaría de inducir a $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$, concluyendo que los desvíos no conducen a un acuerdo mejor y no alterando al conjunto de acuerdos. ■

Si \mathfrak{M}^* es un *singleton*, se tendría de forma evidente que su único elemento μ^* cumple $\mu^* \sim_M \mu^*$. Por la Proposición 12, solo puede ser este el *matching* que perdure para cualquier factor de descuento, por lo que el siguiente corolario es fácil de deducir. Tal resultado, se contrasta con Lauerman & Nöldeke [20], quienes muestran convergencia hacia la estabilidad en caso de que solo exista un único *matching* estable (aunque con jugadores continuos). El siguiente corolario concluye la sección.

COROLARIO: Si $|\mathfrak{M}^*| = 1$, entonces $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta = \mathfrak{M}^*$ para todo $\delta \in [0, 1)$.

8. Ejemplos

A continuación, se ilustrarán los resultados de la Sección 5, 6 y 7, a través de 4 ejemplos. Debido a la dificultad de su obtención, los EMP EE fueron obtenidos mediante programación computacional a través del *software* MATLAB[®] R2015b. Para denotar los pagos de cada jugador con respecto a su asignación, se utiliza una matriz U de $|M| \times |W|$, tal que cada componente $(i, j) \in M \times W$ posea al elemento $(u_i(j), u_j(i))$ (normalizando $u_i(i) = 0$ para todo $i \in I$). Para cada uno de los ejemplos se muestra: la cardinalidad del conjunto de *matchings* (estados) factibles; el límite $\hat{\delta}$ de la Proposición 10; el conjunto de acuerdos $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ a medida que crece el valor de δ ; el número T de veces que la contracción L fue aplicada en la ecuación (6) para obtener convergencia en la función de valor \vec{v}_i , para todo $i \in I$.

El objetivo principal de esta sección es mostrar explícitamente las posibles desviaciones que existen en los *matchings* inestables (que impiden que sean acuerdos) y en los estables (que pueden no ser acuerdos para ciertos valores de δ). Además, las resoluciones dan indicios de que: el límite $\hat{\delta}$ es usualmente muy alto (alrededor de 0.9); Q siempre induce a $\tilde{\mathfrak{M}}_\delta$ (al menos

en mercados pequeños), en caso de que este último sea distinto de vacío; la destrucción de acuerdos en \mathfrak{M}^* , a medida que δ aumenta con respecto a $\hat{\delta}$, se va efectuando en los extremos del retículo \mathcal{L} de los *matchings* estables.

EJEMPLO 1. Se tiene una fiesta con los conjuntos de hombres y mujeres iguales a $M = \{m_1, m_2\}$ y $W = \{w_1, w_2\}$, respectivamente, tal que sólo existan dos *matchings* estables, que son al mismo tiempo los *matchings* M -óptimo y W -óptimo. A pesar de la simplicidad del mercado, este ejemplo permite ilustrar de manera directa lo visto en las secciones anteriores. La Figura 1 muestra la matriz U y los resultados en base a tal matriz de pagos.

	w_1	w_2	Resultados	
m_1	2, 1	1, 2	$ \mathfrak{M} = 7$, $\mathfrak{M}^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*\}$,
m_2	1, 2	2, 1	$\hat{\delta} \approx .952$, $T = 500$,
			$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta < .952} = \mathfrak{M}^*$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta \geq .952} = \emptyset$.

Figura 1

Como se dijo en la Sección 5, no necesariamente se tiene la existencia de un EMP EE si se restringe el espacio de funciones o estrategias a $f_i^t : \mathfrak{M} \rightarrow \Phi_i$, es decir, imponiendo que en ambos subjuegos se utilicen estrategias puras. A modo de ilustrar esto, la Figura 2 muestra la contracción de $T = 50$ veces la función de valor \vec{v}_i . Como se puede apreciar, es necesario que el espacio de estrategias A_i (que restringe a $\mathbf{f} \in F$) sea convexo, para que en el juego de una etapa exista EN y el sistema converja efectivamente a su solución de equilibrio.

Por otro lado, notar que para $\delta \geq 0.952$, los *matchings* óptimos, μ_M y μ_W , dejan de ser acuerdos dentro de la fiesta. Para comprender los incentivos que destruyen estos dos acuerdos, hay que considerar a la mujer w_1 en el *matching* μ_M , que cumple con $\mu_M(m_1) = w_1$ y $\mu_M(m_2) = w_2$, por lo que el conjunto de jugadores que prefieren intercambiar a sus parejas, son las mismas mujeres w_1 y w_2 . Cuando δ alcanza el límite $\hat{\delta}$, se tiene que tal mujer m_1 prefiere parar de bailar con m_1 , escogiendo $f_{w_1}^t(\mu_M) = w_1$, en caso de ser seleccionada por la naturaleza. Realizar esa acción debiera darle la oportunidad a w_2 de comenzar a bailar con m_1 , para que luego, w_1 pueda bailar con m_2 .

Ante la estrategia de w_1 en μ_M , cabe la pregunta de ¿Por qué el hombre m_1 debiera aceptar una propuesta de baile por parte de w_2 ?, la respuesta es que bajo la condición que la matriz Q induzca al conjunto \mathfrak{M}^* , si fuera el caso en que m_1 no aceptara bailar con w_2 a partir de una propuesta, w_2 aún puede escoger estar sola con el fin de llegar al *matching* vacío y generar algún “camino forzado” hacia el óptimo μ_W . Por como son los valores de la matriz U , si las mujeres tienen suficientes incentivos como para destruir el acuerdo μ_M , entonces los hombres también deberían desear romper el otro acuerdo μ_W , generando entonces que arriba de $\hat{\delta}$, el conjunto de acuerdos sea vacío. Luego, para $\delta \geq \hat{\delta}$, estos 4 participantes nunca logran ponerse de acuerdo (o comprometerse con alguna pareja) y terminan saltando de un estado a otro hacia el infinito.

EJEMPLO 2. Considerar ahora una fiesta de 3 hombres y 3 mujeres, tal que sus preferencias generen 3 *matchings* estables. Por (A.1), \mathfrak{M}^* es tal que cumple con $\mu_1^* = \mu_M >_M \mu_2^* >_M \mu_W = \mu_3^*$ y viceversa para $>_W$. La Figura 3 muestra la matriz de pagos U y los principales

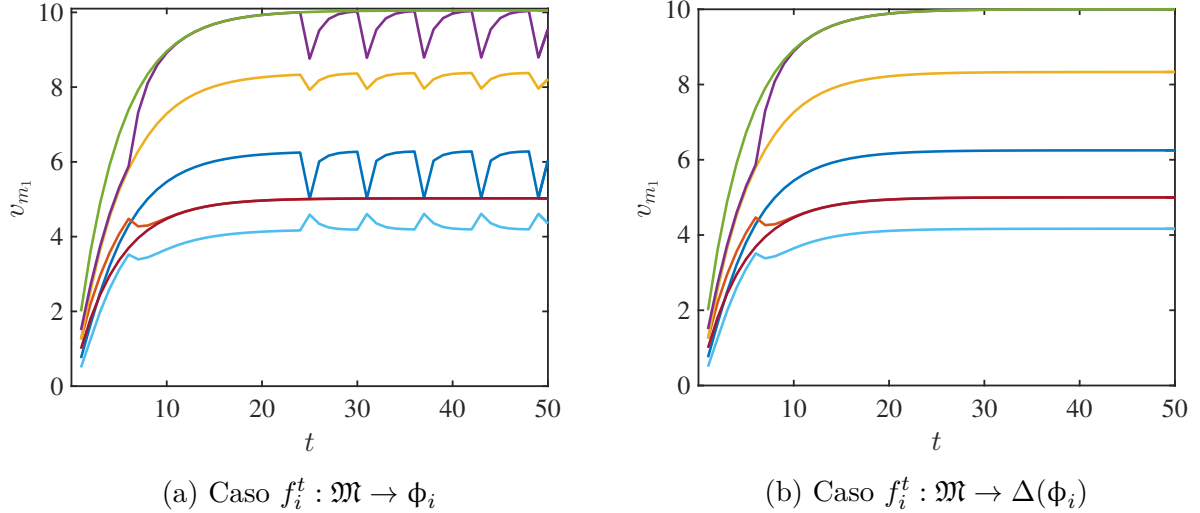


Figura 2

resultados. Al igual que el ejemplo anterior, las preferencias están construidas de manera que el comportamiento de los hombres hacia las mujeres sea equivalente al de estas últimas con respecto al grupo de hombres.

En esta fiesta, se pueden utilizar los mismos argumentos del [Ejemplo 1](#) para justificar la destrucción de alguno de los dos óptimos, con la salvedad de que no necesariamente se requiere que uno de los participantes termine de bailar por completo para lograr un camino mejor. Para ver esto, examinar el *matching* μ_2^* tal que: $\mu_2^*(w_1) = m_2, \mu_2^*(w_2) = m_3, \mu_2^*(w_3) = m_1$, y tomar sin pérdida de generalidad a cualquier hombre, suponiendo que tiene los incentivos suficientes como para destruir el acuerdo μ_2^* , teniendo en cuenta de que el conjunto de jugadores que desea intercambiar a sus parejas son todos los hombres. En este caso, no es difícil ver que escoger $f_{m_1}^t(\mu_2^*) = m_1$ no es el camino que entrega más utilidad si es que la propuesta $f_{m_1}^t(\mu_2^*) = w_2$ es aceptada.

	w_1	w_2	w_3	Resultados
m_1	3, 1	1, 3	2, 2	$ \mathfrak{M} = 34$, $\mathfrak{M}^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*\}$, $\hat{\delta} \approx .942$, $T = 500$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta < .942} = \mathfrak{M}^*$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta \geq .942} = \{\mu_2^*\}$.
m_2	2, 2	3, 1	1, 3	
m_3	1, 3	2, 2	3, 1	

Figura 3

Lo interesante de lo anterior, es que con ninguna de las dos estrategias existe un camino hacia los *matchings* óptimos, ya que ambos acuerdos son destruidos para un factor de descuento $\delta = 0.942$. Por lo que en μ_2^* , cualquier desviación debiera retornar nuevamente hacia μ_2^* , mostrando intuitivamente que no existen incentivos a desviarse para jugadores que valoran “fuertemente” el futuro. De esta forma, μ_2^* es un acuerdo que perdura independientemente de cuanto crezca el valor de δ .

Cambiando el enfoque, el presente ejemplo también permite ver porqué un *matching* ines-

table no puede ser un acuerdo dentro de esta fiesta. Suponiendo que un $\mu' \notin \mathfrak{M}^*$ es un acuerdo, considerar μ' tal que: $\mu'(m_1) = w_2, \mu'(m_2) = w_1, \mu'(m_3) = w_3$, donde la pareja de bloqueo existente corresponde a (m_1, w_3) . Ya que μ' es un acuerdo, por el [Lema 5](#), debe ser verdad que el hombre m_1 puede ser abandonado por la mujer w_1 (y viceversa) en caso de comenzar a bailar, esto no debiera ser difícil de ver ya que $w_1 >_{m_1} w_3$ y $m_2 >_{w_3} m_1$. El [Teorema 1](#) indica que de ser esto cierto, de todas formas m_1 y w_3 pueden asegurarse mutuamente no abandonarse con cierta probabilidad, logrando que ambos puedan obtener un valor esperado mayor a estar bailando juntos a perpetuidad, específicamente, mayor a $u_{m_1}(w_3)/(1 - \delta)$ y $u_{w_3}(m_1)/(1 - \delta)$. Es necesario resaltar, que a partir del [Lema 1](#), solamente se tiene que ambos aceptarían una propuesta del otro en equilibrio, es decir, $g_{m_1}^t(\mu', w_3) = A$ y $g_{w_3}^t(\mu', m_1) = A$. Lo anterior, no asegura que esta pareja de bloqueo se junte con probabilidad positiva en un EMP EE, debido al hecho que al “aceptarse”, las estrategias de ambos pueden repercutir en el comportamiento de los demás participantes.

Finalmente, por la estructura de las preferencias, si μ_M deja de ser un acuerdo dentro de la fiesta, también lo deja de ser el *matching* μ_W . Luego, para factores de descuento sobre $\hat{\delta} = 0.942$, el único acuerdo posible es μ_2^* para cualquier valor $\delta \in [\hat{\delta}, 1)$.

EJEMPLO 3. Las preferencias de la fiesta a continuación, fueron extraídas del clásico ejemplo de Knuth [\[19\]](#) utilizado para ilustrar de mejor manera el retículo \mathfrak{L} del conjunto de asignaciones estables. Se tienen 4 hombres y 4 mujeres que se comportan de forma “simétrica” ante sus grupos opuestos. Se resalta que el número de estados posibles se han incrementado considerablemente al agregar sólo un hombre y una mujer (de 34 a 209). La [Figura 4](#) muestra las preferencias de los participantes y los resultados del EMP EE.

Este ejemplo, permite apreciar cómo ocurre la destrucción de acuerdos a partir del retículo \mathfrak{L} . Si bien, esto no se muestra formalmente a lo largo del trabajo, se cumple en la totalidad de ejemplos analizados por el autor de forma computacional (estos no superan a un número de 9 participantes por fiesta). Del [Teorema 2](#), se sabe que si $\delta \geq 0.92$, entonces debe ser que $\mathfrak{M}_\delta \subset \mathfrak{M}^*$, pero en base a esto, surgen las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los primeros elementos que se eliminan de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$? y ¿Qué sucede a medida que $\delta = \hat{\delta} + \epsilon$, para $\epsilon \sim 0$ muy pequeño? La respuesta es que en $\delta = \hat{\delta}$, los *matchings* óptimos corresponden a los primeros acuerdos en ser destruidos, exactamente al mismo tiempo. Lo interesante es que, a partir de este punto, a medida que aumenta el valor del factor de descuento, son los extremos del “retículo” restante de $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ los que se eliminan con cada incremento de ϵ . Esto permite deducir que, en al menos este tipo de fiestas o mercados (en los que las preferencias son “simétricas” entre grupos opuestos), el conjunto de acuerdos $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ terminará siendo vacío, sólo si los elementos de este último, que son posibles diferenciar en base a $>_M$ o $>_W$, constituyen a un número par.

Luego, notar que en el [Ejemplo 1](#) tal número es par, teniendo que para $\delta \rightarrow 1$ no existen acuerdos que sobrevivan en un EMP EE. Del modo contrario, en el [Ejemplo 2](#), el número de elementos a diferenciar es 3, al ser impar, aún para factores de descuento muy altos existe al menos un acuerdo dentro de la fiesta que siempre perdura. La intuición detrás de este comportamiento es que los “extremos” (supremo e ínfimo) del retículo \mathfrak{L} corresponden a *matchings* o asignaciones que favorecen demasiado a un sólo grupo, por lo que la única forma de que $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ sea distinto de vacío, es que exista un acuerdo “intermedio”. Esto hace referencia

	w_1	w_2	w_3	w_4	Resultados
m_1	4, 1	3, 2	2, 3	1, 4	$ \mathfrak{M} = 209$, $ \mathfrak{M}^* = 10$,
m_2	3, 2	4, 1	1, 4	2, 3	$\hat{\delta} \approx .92$, $T = 150$,
m_3	2, 3	1, 4	4, 1	3, 2	$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta < .92} = \mathfrak{M}^*$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta \rightarrow 1} = \emptyset$.
m_4	1, 4	2, 3	3, 2	4, 1	

Figura 4

al intermedio de \mathfrak{L} sobre $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$.

Esta idea del “intermedio” se entrelaza con el estudio experimental de Echeñique & Yarov [10]. Ellos analizan una interacción similar (por no decir idéntica) en mercados *two-sided* de 8 “hombres” y 8 “mujeres”¹⁴ tales que las preferencias y el estado o *matching* sean de información pública (esto, a través de un “panel” informativo en tiempo real). Una vez iniciado el experimento, los participantes tienen plena libertad para formar parejas uno-a-uno de la forma que estimen más conveniente, con la única regla de que ante una propuesta sólo tienen 10 segundos para responder. Luego, si el mercado o “fiesta” se encuentra inactivo por más 30 segundos, el experimento finaliza y se entregan los pagos. Sus resultados muestran, que si el *output* del experimento es estable, usualmente corresponde a alguno en el centro del retículo \mathfrak{L} del respectivo mercado, similar a lo concluido de los resultados. Esto permite deducir que el hecho de tener una pareja en algún instante de tiempo, debiera entregar algún tipo de utilidad para los agentes, ya sea por no encontrarse solo, o por la posibilidad de mantener a su pareja actual.

EJEMPLO 4. El propósito de este último ejemplo es mostrar que si los dos grupos no se comportan idénticamente hacia sus contrapartes, solamente puede significar que, en el límite $\hat{\delta}$, los acuerdos correspondientes a los *matchings* óptimos no se eliminan al mismo instante en que δ aumenta. Por lo que puede darse el caso en que un sexo tenga incentivos a desviarse con un δ menor que el necesario para el sexo opuesto.

	w_1	w_2	w_3	Resultados
m_1	2, 3	3, 2	1, 3	$ \mathfrak{M} = 34$, $\mathfrak{M}^* = \{\mu_1^*, \mu_2^*\}$,
m_2	3, 1	1, 1	2, 1	$\hat{\delta} \approx .898$, $T = 500$,
m_3	3, 2	2, 3	1, 2	$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta < .898} = \mathfrak{M}^*$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\delta \geq .898} = \{\mu_2^*\}$.

Figura 5

Se tiene una fiesta con 3 hombres y 3 mujeres tal que sus preferencias correspondan a las indicadas dentro de la matriz U de la Figura 5 (notar que estas preferencias difieren de la estructura expuesta en los 3 ejemplos anteriores). Los resultados, expuestos en la misma figura, indican que, para un factor de descuento por sobre $\hat{\delta} = 0.898$, el único acuerdo que perdura dentro de la fiesta es $\mu_2^* = \mu_W$, es decir, el *matching* W -óptimo tal que: $\mu_W(w_1) = m_3$,

¹⁴ Formalmente, en el experimento no se dividen los dos grupos por sexo, sino que por colores y frutas. Los términos que se utilizan para describir el experimento son meramente para conectar ambos trabajos.

$\mu_W(w_2) = m_1$, $\mu_W(w_3) = m_2$. Siendo $\mu_1^* = \mu_M$ el acuerdo destruido por las mujeres, que cumple: $\mu_M(m_1) = w_1$, $\mu_M(m_2) = w_3$, $\mu_M(m_3) = w_2$. Por lo que, dependiendo de cómo sean las preferencias de los participantes, es cómo se irán eliminando los acuerdos a medida que δ aumenta.

Luego, esto es posible de interpretar como que el grupo de las mujeres es más “fuerte” que el de los hombres. Esto, debido a que ellas poseen los incentivos suficientes como para desviarse de μ_M y “ayudarse” mutuamente para llegar a μ_W (en otras palabras, hacer que Q induzca a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$), dado un factor de descuento menor del necesario para que su contraparte, los hombres, deseen hacer lo mismo.

9. Discusión

Esta penúltima sección tiene el propósito de discutir, criticar e interpretar, los resultados y supuestos del modelo previamente expuesto. Los puntos a tocar abarcan desde los supuestos “implícitos” que conlleva el juego y su resolución en el EMP EE (algunos como la información completa o el modo de interacción entre los participantes), hasta posibles extensiones en asignaciones con contratos, con el fin de asimilar el modelamiento a la realidad de los mercados laborales.

El primero de estos puntos, corresponde al hecho de utilizar estrategias Markovianas en la decisión que prepara cada participante en caso de ser seleccionado por la naturaleza (o recibir una propuesta) en los periodos t . Por lo que cualquier estrategia fundada en la historia no relevante en los pagos no es considerada dentro del análisis. Lo anterior, podría considerarse no realista, ya que las personas en algunos casos poseen comportamientos “vengativos”, de manera que no permiten, o no aceptan, relaciones que previamente no funcionaron. Por ejemplo, una firma no acepta a un trabajador si éste la rechazó en el pasado y viceversa. Dicho esto, se resalta el hecho de que las estrategias son de tipo Markovianas meramente por simplicidad, y para no capturar los comportamientos anteriores, que de igual forma, podría ser catalogados como irracionales.

El segundo, contempla la importancia de que el número de posibles estados aumente de forma exponencial, en la medida que nuevos integrantes se unan al mercado. Implícitamente, se asume que los participantes son capaces de resolver la maximización de sus funciones de valor \vec{v}_i para cualquier cardinalidad de \mathfrak{M}^* , lo cual es bastante discutible si se considera que en una fiesta de 10 hombres y 10 mujeres, existen exactamente 234.662.231 estados o *matchings* factibles. Lo que ya de por sí posee una alta dificultad computacional.

Por otro lado, como se dijo anteriormente, en los procesos descentralizados de admisión escolar (como el de New York entre los años 1969 y 1990 [27, 37]) no existen “pagos” ante la aceptación de una escuela sino hasta que ambas partes se acepten formalmente. En base al modelo, los pagos dentro de cada periodo t pueden ser interpretados como la utilidad que genera el hecho de poder formar una relación permanente (un acuerdo) con la escuela o estudiante. De esta forma, los jugadores valoran a sus asignaciones, ya que en un tiempo incierto tendrá que formarse de una u otra forma un acuerdo (no puede ser que un estudiante

o escuela mantenga en espera a su contraparte indefinidamente). La información completa del juego no debiera ser un factor muy decisivo en el resultado final, ya que en estos procesos, la mayoría de los estudiantes conocen de forma pública cuales son las escuelas con mejor *ranking*, construyendo sus preferencias en base a esta misma información.

Otro punto importante a destacar es el desconocimiento de las desviaciones óptimas en el EMP EE para los $\mu \in \mathfrak{M}^*$ tal que $\mu \notin \widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, es decir, para los *matchings* estables que no son acuerdos. Notar que dentro de la [Sección 7](#), el análisis se basa en las desviaciones factibles bajo un perfil propuesto (\mathbf{f}, \mathbf{g}) de estrategias, mostrando que tal perfil no puede ser de equilibrio, pero sin caracterizar el comportamiento de los individuos ante tales acciones. Lo anterior, debido a la dificultad que conlleva caracterizar de alguna forma la estrategia óptima de desvío, ante cualquier conjunto $\{>_i\}_{i \in I}$ de preferencias heterogéneas. Para ilustrar esto, considerando el [Ejemplo 1](#), el lector podría afirmar o proponer que dentro del *matching* μ_M , solamente las estrategias $f_{w_1}^t(\mu_M) = w_1$ o $f_{w_2}^t(\mu_M) = w_2$ componen la colección $\tilde{\mathbf{f}}$ en el EMP EE. Esto no es del todo correcto, ya que siempre es posible argumentar lo siguiente: si m_1 sabe que será rechazado por w_1 en algún periodo futuro, puede ser mejor para él aceptar de inmediato una propuesta de la mujer w_2 , con el fin de disminuir el número esperado de periodos estando sin bailar. Esto indica que en el EMP EE existe la posibilidad de que $f_{w_2}^t(\mu_M) = m_1$ con $g_{m_1}^t(\mu_M, w_2) = A$, justificado por $f_{w_1}^t(\mu_M) = w_1$ (esto se desprende formalmente del [Lema 4](#)). El autor propone que para realizar alguna caracterización de tal desvío, debiera considerarse al menos un conjunto fijo de preferencias, como el visto dentro de los [Ejemplos 1-4](#). De manera formal, $|M| = |W|$, todos son aceptables y $>_i$ tal que

$$|\{x \mid x >_i j, x \in \Phi_i\}| = n \quad \text{ssi} \quad |\{y \mid y >_j i, y \in \Phi_j\}| = |M| - n + 1,$$

para todo $i \in I$ y $j \in \Phi_i$.

El penúltimo punto, consiste en resaltar que la mayoría de los resultados son condicionales a que la matriz de transición Q induzca al conjunto de acuerdos $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, en caso de que este no sea vacío. Esto no necesariamente debe cumplirse, y depende de qué tanto son capaces de “ayudarse” los participantes de un mismo sexo con el fin obtener una asignación mejor. Aunque en los 4 ejemplos de la [Sección 8](#), siempre se tuvo que Q inducía a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$, no hay nada aún que confirme la persistencia de tal comportamiento en mercados *two-sided* muy grandes. A pesar de esto, notar que, de no cumplirse tal condición, sólo significaría que el *matching* inicial μ^0 sí es relevante para definir el resultado final de la fiesta. Además, dentro de la fiesta se cumplirían exactamente las mismas propiedades previamente descritas, con la salvedad de que sólo dentro de cada “sub-cadena” de Q (entendiendo a una sub-cadena como un circuito cerrado de estados, tal que no es posible pasar de un estado μ , en la sub-cadena 1, a otro μ' , dentro de la sub-cadena 2).

Finalmente, una forma de extender el modelo para una visión más realista del mercado laboral, es introducir la posibilidad de realizar contratos a partir de la formación de cada pareja de baile. Siguiendo a Hatfield & Milgrom [[15](#)], un contrato especificaría una firma, trabajador y salario, es decir, un vector $(i, j, w) \in \mathfrak{X} \equiv M \times W \times \Omega$, donde Ω corresponde a un conjunto finito de salarios posibles. Luego, en cada propuesta vendría un salario asociado (la firma y el trabajador podrían proponer el inicio de una relación laboral, con un salario en específico), por lo que, dependiendo de como se cumplen los supuestos (A.1-4) ante un nuevo conjunto finito de posibles asignaciones \mathfrak{M}' , se mantendrían los resultados anteriores y la existencia de un EMP EE.

Vagamente hablando, de cumplirse los desvíos anteriores, significaría que un trabajador siempre puede decidir renunciar a su trabajo con tal de que otro trabajador lo obtenga, de manera que se genere una secuencia hacia un trabajo más valorado. Ante eso, los salarios jugarían un rol crucial para disipar estos incentivos, teniendo que las firmas ofrecen salarios más altos para mantener su asignación óptima y los trabajadores aceptan salarios más bajos para no perder sus trabajos. La existencia o no de acuerdos, dentro de este mercado, dependería fuertemente en cómo los agentes valoran la unión por sobre el salario incluido en el contrato y viceversa. Si el valor de tal unión para una de las partes es muy alto, tal lado del mercado debiera estar dispuesto a sacrificar más (en el contrato $x \in \mathfrak{X}$ que se acepta en equilibrio). De forma opuesta, si el valor de la relación laboral es muy bajo, la inexistencia de acuerdos podría darse de manera muy fácil.

10. Conclusiones

A modo de concluir, en lo que resta, se presentarán las interrogantes motivacionales de la [Sección 1](#), junto con sus respectivas respuestas, a partir de todo el análisis realizado. Éstas están sujetas a los supuestos (A.1-4) y las “reglas” del juego (t.1-5).

- a) ¿Existe algún “acuerdo” entre los participantes? R: Sí, por (A.1) se tiene que $\mathfrak{M}^* \neq \emptyset$, y por el [Teorema 2](#) en toda fiesta existe un rango para el factor de descuento δ tal que $\mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}^*$.
- b) ¿Son los participantes capaces de alcanzarlos o mantenerlos? R: Se alcanzan dependiendo de si Q es capaz de inducir a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ y sólo es posible mantenerlos para todo $\delta \in [0, 1)$ si $|\mathfrak{M}^*| = 1$. En caso de que $|\mathfrak{M}^*| \geq 2$, la [Proposición 10](#) indica que existe un límite de “impaciencia” $\hat{\delta}$, tal que para todo factor de descuento por sobre ese límite, al menos un acuerdo es destruido. La [Proposición 12](#) muestra que $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$ puede ser \emptyset cuando $\delta \rightarrow 1$.
- c) ¿Cual es la relación entre la estabilidad y lo anterior? R: Del [Teorema 1](#) se tiene que para un factor de descuento δ , siempre $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta \subseteq \mathfrak{M}^*$. Luego, todo acuerdo debe ser una asignación estable, pero no toda asignación estable es, en sí, un acuerdo.
- d) ¿Como se justifica racionalmente el comportamiento anterior? R: Se justifican a partir de los incentivos opuestos del mercado, definidos en base al retículo \mathfrak{L} de \mathfrak{M}^* . La [Proposición 9](#) muestra que, en la medida que se valora más el futuro, más desea ayudarse un grupo entre si, con tal de alcanzar una asignación mejor.

Ante un tiempo indefinido, un *output* inestable es meramente una realización de Q , tal fiesta podría saltar de un *matching* a otro hacia el infinito, en caso de que $\widetilde{\mathfrak{M}} = \emptyset$ o Q no induzca a $\widetilde{\mathfrak{M}}_\delta$. Cualquier mercado centralizado podría destruir su asignación resultante si los agentes pueden interactuar de forma descentralizada, luego del término en el proceso de asignación.

Bibliografía

- [1] Abdulkadiroğlu, A. y Sönmez, T. “[School Choice: A Mechanism Design Approach](#)”. *American Economic Review* 93 (1999), págs. 729-747.
- [2] Adachi, H. “[A Search Model of Two-Sided Matching Under Nontransferable Utility](#)”. *Journal of Economic Theory* 113 (2003), págs. 182-198.
- [3] Alcalde, J. “[Implementation of Stable Solutions to Marriage Problems](#)”. *Journal of Economic Theory* 69.50 (2001), págs. 240-254.
- [4] Alcalde, J. y Romero-Medina, A. “[Simple Mechanisms to Implement the Core of College Admissions Problems](#)”. *Games and Economic Behavior* 31 (2000), págs. 294-302.
- [5] Blum, Y., Roth, A. y Rothblum, U. “[Vacancy Chains and Equilibration in Senior-Level Labor Markets](#)”. *Journal of Economic Theory* 76 (1997), págs. 362-411.
- [6] Diamantoudi, E., Miyagawa, E. y Xue, L. “[Decentralized matching: The role of commitment](#)”. *Games and Economic Behavior* 92.1 (2015), págs. 1-17.
- [7] Doraszelski, U. y Escobar, J. “[A theory of regular Markov perfect equilibria in dynamic stochastic games: Genericity, stability, and purification](#)”. *Theoretical Economics* 5 (2010), págs. 369-402.
- [8] Doval, L. *A theory of stability in dynamic matching markets*. Yale University, Division of the Humanities y Social Sciences, 2017.
- [9] Echeñique, F., Wilson, A. J. y Yariv, L. “[Clearinghouses for two-sided matching: An experimental study](#)”. *Quantitative Economics* 7 (2016), págs. 449-482.
- [10] Echeñique, F. y Yariv, L. “” (ago. de 2012).
- [11] Ericson, R. y Pakes, A. “[Markov-perfect industry dynamics: A framework for empirical work](#)”. *Review of Economic Studies* 62.1 (1995), págs. 53-82.
- [12] Fudenberg, D. “[Predictive Game Theory](#)”. *American Economic Association, Ten Years and Beyond: Economists Answer NSF’s Call for Long-Term Research Agendas* (2010).
- [13] Gale, D. y Shapley, L. S. “[College Admissions and the Stability of Marriage](#)”. *The American Mathematical Monthly* 62.1 (1962), págs. 9-15.
- [14] Haeringer, G. y Wooders, M. “[Decentralized job matching](#)”. *International Journal of Game Theory* 40.1 (2011), págs. 1-28.
- [15] Hatfield, J. y Milgrom, P. “[Matching with Contracts](#)”. *American Economic Review* 95.4 (2005), págs. 913-935.
- [16] Horst, U. “[Stationary equilibria in discounted stochastic games with weakly interacting players](#)”. *Games and Economic Behavior* 51 (1992), págs. 83-108.
- [17] Kadam, S. y Kotowski, M. “[Time Horizons, Lattice Structures, and Welfare in Multi-Period Matching Markets](#)”. *HKS Faculty Research Working Paper Series* 15.031 (2015).
- [18] Kamecke, U. “[Non-Cooperative Matching Games](#)”. *International Journal of Game Theory* 18 (1985), págs. 423-431.
- [19] Knuth, D. *Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems*. American Mathematical Society, 1977.
- [20] Lauerman, S. y Nöldeke, G. “[Stable Marriages and Search Frictions](#)”. *Journal of Economic Theory* 151 (2013), págs. 163-195.
- [21] Milgrom, P. *Putting Auction Theory to Work*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] Niederle, M. y Yariv, L. *Decentralized Matching with Aligned Preferences*. Stanford University, NBER y Caltech, 2009.

- [23] Nowak, A. y Raghavan, T. “Existence of Stationary Correlated Equilibria with Symmetric Information for Discounted Stochastic Games”. *Mathematics of Operations Research* 17.2 (1992), págs. 519-526.
- [24] Osborne, M. y Rubinstein, A. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.
- [25] Pais, J. “Incentives in Decentralized Random Matching Markets”. *Games and Economic Behavior* 64 (2008), págs. 632-649.
- [26] Puterman, M. L. *Markov Decision Processes - Discrete Stochastic Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- [27] Ravitch, D. *The Great School Wars: A History of the New York City Public Schools*. 2715 North Charles Street: Basic Books Inc., The Johns Hopkins University Press, 2000.
- [28] Romero-Medina, A. y Triossi, M. “Acyclicity and singleton cores in matching markets”. *Economics Letters* 118 (2013), págs. 237-239.
- [29] Roth, A. “What Have We Learned From market Design?” *The Economic Journal* 118 (2008), págs. 285-310.
- [30] Roth, A. “The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory”. *Journal of Political Economy* 92.6 (1984), págs. 991-1016.
- [31] Roth, A. y Pearson, E. “The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design”. *American Economic Review* 89 (1999), págs. 748-780.
- [32] Roth, A., Sönmez, T. y Ünver, U. “Kidney Exchange”. *Quarterly Journal of Economics* 119 (2007), págs. 457-488.
- [33] Roth, A. y Sotomayor, M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*. Econometric Society Monographs: Cambridge University Press, 1992.
- [34] Roth, A. y Vande-Vate, J. “Incentives In Two-Sided Matching With Random Stable Mechanism”. *Journal of Economic Theory* 1 (1991), págs. 31-44.
- [35] Roth, A. y Xing, X. “Turnaround Time and Bottlenecks in Market Clearing: Decentralized Matching in the Market for Clinical Psychologists”. *Journal of Political Economy* 105.2 (1997), págs. 284-329.
- [36] Rubinstein, A. *Lecture Notes in Microeconomic Theory — The Economic Agent*. 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540: Princeton University Press, 2012.
- [37] Schneider, M., Teske, P. y Marschall, M. *Choosing Schools: Consumer Choice and the Quality of American Schools*. 41 William Street, New Jersey 08540 USA: Princeton University Press, 2002.
- [38] Shapley, L. “Stochastic Games”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 39.10 (1953), págs. 1095-1100.
- [39] Somos, M. “Sequence A088699”. *The On-Line Encyclopedia Of Integer Sequences* (2003).
- [40] Tirole, J. y Maskin, E. “Markov Perfect Equilibrium: I. Observable Actions”. *Journal of Economic Theory* 100.2 (2001), págs. 191-219.
- [41] Wu, Q. “A finite decentralized marriage market with bilateral search”. *Journal of Economic Theory* 160 (2015), págs. 216-242.