



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PUNTES BROWNIANOS NO-INTERSECTANTES Y LA FAMILIA DE MATRICES
INVARIANTES DE LAGUERRE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS
APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

NICOLÁS MAURICIO ZALDUENDO VIDAL

PROFESOR GUÍA:
DANIEL REMENIK ZISIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM- Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
POR: NICOLÁS MAURICIO ZALDUENDO VIDAL
FECHA: 2019
PROF. GUÍA: DANIEL REMENIK ZISIS

PUENTES BROWNIANOS NO-INTERSECTANTES Y LA FAMILIA DE MATRICES
INVARIANTES DE LAGUERRE

En este trabajo se estudia la distribución de la variable aleatoria correspondiente a la altura máxima alcanzada en el intervalo $[0, p]$, para $p \in (0, 1)$, por la trayectoria de N puentes Brownianos en $[0, 1]$ condicionados a no intersectarse. Para este fin, se introduce un proceso estacionario conocido como Movimiento Browniano de Dyson, el cual será de utilidad para encontrar la distribución mencionada por la estrecha relación que guarda con el modelo estudiado. El primer resultado corresponde a entregar una fórmula en forma de determinante de Fredholm sobre $L^2(\mathbb{R})$ para la altura máxima. Se estudian posteriormente los límites $p \rightarrow 1$ y $p \rightarrow 0$, y se prueba que el primero es consistente con los resultados ya conocidos para este modelo, mientras que para el otro se prueba que, modificando levemente el proceso, se obtiene una distribución no trivial, la cual se cree guarda relación con la teoría de matrices aleatorias, ya que además se prueba que esta distribución límite converge, bajo el reescalamiento adecuado, a la distribución límite del valor propio más grande de una matriz GUE: la distribución de Tracy-Widom 2. Es por esto, junto con el resultado para el caso $p = 1$ expuesto en [21] que relaciona el modelo con la familia del Laguerre Orthogonal Ensemble (un modelo de matrices simétrica reales cuya ley es invariante bajo conjugación por matrices ortogonales), que se conjetura que el modelo aquí expuesto en el caso $p \rightarrow 0$ guarda relación con la familia de matrices invariantes de Laguerre para el caso complejo hermítico: el Laguerre Unitary Ensemble. En la última parte se estudia el límite de la altura máxima reescalada cuando el número de puentes Brownianos tiende a infinito, y se prueba que la distribución resultante en el límite corresponde a la distribución marginal del proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$.

“Wit beyond measure is man’s greatest treasure”
- Rowena Ravenclaw

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres. Es gracias a ellos que estoy donde estoy ahora. A mis hermanos Macarena, Sebastián y Matías que siempre me apoyaron. Agradezco a todos los amigos y amigas que hice en la universidad durante todos estos años, algunos desde el comienzo y otros que conocí más al final de mi carrera. En particular, agradezco a mis amigos de la sección 6, Diego, Esteban, Danilo, Cami, Suelo. A mis amigos que hice en mi generación en el DIM, con quienes viví experiencias enriquecedoras y de harta matraca, en especial a Ian, Cata, Joselito, Dani, Yasser, Arturo, Pancho, entre tantos otros. A mis amigos del DIM de otro años; Vale Toro, Garrido, Edgardo, Bob, Edo, PL, Bitar, Papitas, Matus, Diego, Freddy. A los amigos del núcleo, Amitai, Niko y Checo con quienes además comparto el gusto por el café y las probabilidades. Me gustaría agradecer y de todo corazón a mis amigos con los que el año 2017 fuimos la mesa del Centro de Estudiantes de Ingeniería, con quienes viví un año lleno de experiencias, de altos y bajos, y a quienes les tengo mucho cariño. A la Flo y la Gatu, que saben que las quiero mucho y que les estaré eternamente agradecido por todas esas risas, los carretes, los almuerzos, los tés y la buena compañía. A la Cata Gamboa, con quien compartí el año en el consejo de escuela.

No todo es universidad, y por eso tengo mucho que agradecer a gente que conozco de afuera. En particular a Luciano, mi hermano de otro padre y otra madre, quien fue un apoyo fundamental durante todos estos años. A la Topi, que es una amiga espectacular y de la cual he aprendido demasiado y le estoy eternamente agradecido. Juntos somos the three hackmigos. Ahora y siempre.

Agradezco a Daniel, quien además de un excelente director de tesis ha sido un gran apoyo y consejero durante todo este año. Agradezco a Servet Martínez y Joaquín Fontbona, quienes aceptaron ser parte de mi comisión. Son los profesores del área de las probabilidades del departamento los que me encantaron con esta carrera y gracias a ellos escogí esta opción para mi futuro. Agradezco también a los funcionarios del departamento: Karen, Eterin, Kuky, Silvia, Gladys, Ceci, Óscar y Don Luis, que sin ellos el departamento no sería lo que es. Agradezco especialmente a Natacha, con quien he compartido muchísimo en estos 4 años en el departamento, como profesor auxiliar de sus cursos y como coordinador, pero además con quien he entablado una relación muy linda de amistad.

Finalmente le agradezco a Francisca. Mi pilar fundamental. Sin ti jamás habría llegado tan lejos. Hay veces en que no hay forma de agradecer con palabras lo que uno siente, así que sólo te pido que me dejes seguir a tu lado, de la mano, por el resto de nuestra vida.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Elementos Básicos de Matrices Aleatorias	4
1.1. Determinante de Fredholm	4
1.2. Procesos Puntuales y Determinantales	6
1.3. Teoría de Matrices Aleatorias	10
1.4. Las distribuciones de Tracy-Widom	14
2. Percolación de Última Pasada y Procesos Airy	18
2.1. Percolación de Última Pasada	18
2.2. Procesos Airy	21
2.3. Estadísticos Continuos para el Proceso Airy ₂	24
2.4. El Supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola sobre una semi-recta	26
3. Puentes Brownianos No-Intersectantes	28
3.1. El puente Browniano y la fórmula de Karlin-McGregor	28
3.2. El Movimiento Browniano de Dyson Estacionario	29
3.3. Estadísticos Continuos para el SDBM	31
3.4. Distribución del máximo y conexión con LOE	32
4. La distribución del máximo en $[0, p]$	35
4.1. Distribución del máximo	35
4.2. Consistencia con $\alpha \rightarrow \pm\infty$	43
4.3. Reescalamiento con $\cosh(\alpha)$ y el límite $\alpha \rightarrow -\infty$	48
4.4. La convergencia de la distribución límite a GUE	49
4.5. Simulaciones de $F_N^{-\infty}$ y conexión con LUE	52
4.6. La convergencia a $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$	59
Conclusión	62
Bibliografía	64

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la altura máxima de N puentes Brownianos no-intersectantes en $[0, 1]$. Para entender por qué es interesante el estudio de esta distribución, tenemos que introducir dos conceptos previos: la teoría de matrices aleatorias y los procesos Airy.

La teoría de matrices aleatorias corresponde al estudio de variables aleatorias que toman valores en algún espacio de matrices, por ejemplo, las matrices reales simétricas o las complejas hermíticas. En nuestro caso nos interesa el estudio del valor propio más grande de algunos de estos modelos de matrices, y su comportamiento asintótico a medida que estas matrices aumentan su tamaño a infinito. Este estudio se remonta a varios años atrás, y se atribuye principalmente a Eugene Wigner, un físico y matemático que en los años sesenta introdujo el estudio de los gaps entre los valores propios de matrices aleatorias como modelo para el esparcimiento entre las líneas espectrales de átomos pesados. Más adelante Craig Tracy y Harold Widom estudiaron los modelos Gaussianos de matrices aleatorias (ver [32], [33], entre otros) y caracterizaron dos variables aleatorias que gobiernan el límite bajo el reescalamiento apropiado de distintos modelos de matrices: la distribución GOE (o Tracy-Widom 1) para el límite del valor propio más grande en el caso real simétrico, y la distribución GUE (Tracy-Widom 2) para el caso complejo hermítico. La importancia de estas variables aleatorias es que aparecen recurrentemente en otros modelos. Algunos ejemplos interesantes donde estas variables aleatorias aparecen son el modelo de buses de la ciudad de Cuernavaca, México (ver [12]), o el problema de la secuencia creciente más larga en una permutación aleatoria de S_N (ver [29]). En general, estas distribuciones aparecen recurrentemente en distintos modelos de crecimiento aleatorio, enmarcados en la denominada *clase de universalidad de Kardar-Parisi-Zhang*. No existe una definición precisa de la clase de universalidad de KPZ, pero basta tener en mente que corresponde a una colección de procesos estocásticos que se identifica principalmente porque las fluctuaciones crecen como $t^{1/3}$ con estructura espacial no trivial a escala $t^{2/3}$.

Por otro lado, los procesos Airy son una familia de procesos estocásticos que, se conjetura, gobiernan las fluctuaciones en el límite de todos de procesos enmarcados en la clase de universalidad de KPZ. Dentro de todos estos procesos, a nosotros nos interesan sólo tres de ellos. Por un lado, el proceso Airy₁ (que denotaremos \mathcal{A}_1), cuyas marginales distribuyen según una variable aleatoria TW₁, y el proceso Airy₂ (que denotaremos \mathcal{A}_2), cuyas marginales distribuyen según una variable aleatorias TW₂. El tercer proceso corresponde a una suerte de “interpolación” entre los últimos dos: el proceso Airy_{2→1}, (que denotaremos por $\mathcal{A}_{2→1}$). Decimos que este proceso interpola los otros dos en el sentido de que $\mathcal{A}_{2→1}(x + y)$ converge

en distribución a $\mathcal{A}_2(x)$ cuando $y \rightarrow -\infty$; y a $2^{1/3}\mathcal{A}_1(2^{-2/3}x)$ cuando $y \rightarrow \infty$.

Como comentamos, las marginales de los procesos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 corresponden a las distribuciones de Tracy-Widom. Luego, si denotamos por $F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r)$ a la distribución marginal del proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$ a tiempo $\alpha \in \mathbb{R}$, se probó (ver [24]) que

$$F_{\text{GUE}}(r) \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r). \quad (1)$$

La conexión entre los procesos Airy y el modelo de puentes Brownianos no-intersectantes es la siguiente: si consideramos la trayectoria superior de los N puentes Brownianos y reescalamos apropiadamente, ésta converge en distribución al proceso \mathcal{A}_2 menos una parábola. Si a este hecho le sumamos el siguiente notable resultado ([13]),

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (\mathcal{A}_2(t) - t^2) = F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r),$$

una pregunta natural sería estudiar el máximo de la trayectoria superior de los N puentes Brownianos no-intersectantes, y verificar si el límite se preserva (es decir, realizar un intercambio entre límite y máximo). Remenik y Nguyen estudiaron este máximo en [21] y probaron además que este distribuye como el valor propio más grande de una familia de matrices aleatorias conocido como el *Laguerre Orthogonal Ensemble*.

En resumen, se tiene el siguiente esquema

$$F_{\text{GUE}}(r) \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r) \begin{array}{c} \xleftarrow{F_{\text{LOE}}(2r^2)} \\ \downarrow N \rightarrow \infty \end{array} \quad (2)$$

Una pregunta natural, y que intentaremos responder en este trabajo es: ¿existen dos distribuciones que completen el esquema anterior?

La estructura de esta tesis se divide de la siguiente forma:

- En el Capítulo 1 se abordan resultados previos necesarios para la comprensión de este trabajo relacionados con determinantes de Fredholm (el cual se puede pensar como la generalización del determinante de matrices a operadores lineales en $L^2(\mathbb{R})$), para luego hablar sobre procesos puntuales y determinantaes y cerrar con la teoría de matrices aleatorias y las distribuciones de Tracy-Widom mencionadas anteriormente.
- En el Capítulo 2 se habla sobre un modelo llamado percolación de última pasada, para construir los procesos Airy a través de un proceso límite en este modelo. Finalmente, se estudia una variable aleatoria que distribuye como la marginal del proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$, lo cual nos entrega el esquema (1).

- En el Capítulo 3 se habla sobre puentes Brownianos no-intersectantes. Se discute brevemente sobre la construcción de este proceso usando la fórmula de Karlin y McGregor y se presenta el resultado de [21] sobre la distribución del máximo de N puentes no-intersectantes, su conexión con el modelo de LOE y la convergencia a GOE. Esto entrega el esquema (2).
- En el Capítulo 4 se presenta el resultado principal de esta tesis. Se estudia el máximo de N puentes Brownianos no-intersectantes sobre $[0, p]$, donde $p \in (0, 1)$ está fijo. Se prueba además que, reescalando apropiadamente, esta distribución cierra el esquema (2). Además se presenta una conjetura para la distribución que aparece en el caso $p \rightarrow 0$, donde se piensa que esta distribución está íntimamente relacionada con el *Laguerre Unitary Ensemble*.

Capítulo 1

Elementos Básicos de Matrices Aleatorias

Este capítulo está dedicado a las definiciones y resultados básicos relacionados a la teoría de matrices aleatorias, que serán de utilidad más adelante. Sin embargo, muchos de los resultados serán enunciados sin demostración, pero con una referencia pertinente en caso de que el lector desee profundizar más el tema. Se asume que el lector está familiarizado con los resultados principales de Teoría de la Medida y de Probabilidades, los cuales pueden ser consultados en [27]. En la sección 1.1 hablaremos sobre la noción básica de determinantes de Fredholm, útiles al momento de describir una familia especial de procesos puntuales, llamados procesos determinantes, los que se desarrollarán en la sección 1.2. Todo esto tiene como objetivo introducir la Teoría de Matrices Aleatorias, fundamental para el desarrollo de esta tesis, en la sección 1.3. Finalmente en la sección 1.4 discutiremos sobre dos distribuciones clásicas que aparecen en la teoría de matrices aleatorias, conocidas como las distribuciones de Tracy-Widom.

1.1. Determinante de Fredholm

En esta sección desarrollaremos las nociones básicas de determinante de Fredholm, el cual puede ser pensado como la generalización natural de determinante a operadores en algún espacio de funciones. Para mayor detalle el lector puede revisar [25], sección 2.

En lo que sigue X será espacio vectorial dotado de alguna medida μ y K un operador lineal actuando en $L^2(X, \mu)$ a través de su kernel integral:

$$(Kf)(x) = \int_X K(x, y)f(y)\mu(dy) \tag{1.1}$$

Definición 1.1 Dado un operador como en (1.1) y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el determinante de Fredholm de K como:

$$\det(I + \lambda K)_{L^2(X, \mu)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_X \cdots \int_X \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) \quad (1.2)$$

siempre que la serie anterior converja.

Observación 1.2 Siempre que no haya confusión, escribiremos simplemente $\det(I + \lambda K)$.

Notemos que si existe una constante B tal que $K(x, y) \leq B$, $\forall x, y \in X$ y μ es una medida finita, entonces la serie en (1.2) converge gracias a la desigualdad de Hadamard

$$|\det(C_1, \dots, C_n)| \leq \|C_1\| \cdots \|C_n\|$$

donde $\|C_i\|$ denota la norma euclidiana de la columna i -ésima.

Por supuesto, necesitamos algunas condiciones sobre K para que la serie de Fredholm en (1.2) sea convergente, siendo la más natural de ellas la norma traza de los operadores:

$$\|K\|_1 := \operatorname{tr}(|K|)$$

donde $|K| = \sqrt{K^*K}$ es la única raíz cuadrada del operador K^*K , y

$$\operatorname{tr}(K) = \int_X K(x, x) \mu(dx).$$

Un operador con norma traza finita es llamado un operador de *clase traza*. Notar que un operador clase traza es necesariamente un operador compacto.

Una norma con la que es más fácil de trabajar es la norma de *Hilbert-Schmidt*, definida como sigue:

$$\|K\|_2 := \left(\int_X \int_X |K(x, y)|^2 \mu(dx) \mu(dy) \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Proposición 1.3 Denotemos por $\|K\|_{op}$ a la norma del operador K , entonces se cumple que:

$$\|K\|_{op} \leq \|K\|_2 \leq \|K\|_1, \quad (1.4)$$

y si K_1 y K_2 son dos operadores, se tiene que

$$\|K_1 K_2\|_1 \leq \|K_1\|_2 \|K_2\|_2 \quad (1.5)$$

Lema 1.4 (a) Si K es un operador clase traza, entonces $\text{tr}(K) = \sum_n \lambda_n$, donde λ_n son los valores propios del operador.

(b) La función $K \rightarrow \det(I + K)$ es continua en clase traza. Más aún, se tiene que:

$$|\det(I + K_1) - \det(I + K_2)| \leq \|K_1 - K_2\|_1 \exp(\|K_1\|_1 + \|K_2\|_1 + 1) \quad (1.6)$$

En particular, podemos usar el resultado (a) del lema anterior para obtener una definición alternativa de determinante, equivalente a la enunciada en (1.2). Si $(\lambda_n)_n$ son los valores propios de un operador clase traza, entonces:

$$\det(I + K) = \prod_n (1 + \lambda_n)$$

Para finalizar esta sección, enunciamos algunas propiedades del determinante de Fredholm.

Proposición 1.5 Sean K, K_1, K_2 operadores lineales actuando en $L^2(X, \mu)$. El determinante de Fredholm, al igual que el determinante usual de matrices, cumple las siguientes propiedades:

(a) Cumple con la propiedad cíclica:

$$\det(I + K_1 K_2) = \det(I + K_2 K_1). \quad (1.7)$$

(b) Si K_1 es invertible, gracias a (a), el determinante es invariante bajo conjugaciones:

$$\det(I + K_1^{-1} K_2 K_1) = \det(I + K_2). \quad (1.8)$$

(c) Si K depende suavemente de un parámetro β y $I + K(\beta)$ es invertible, entonces:

$$\partial_\beta \det(I + K(\beta)) = \det(I + K(\beta)) \text{tr}((I + K(\beta))^{-1} \partial_\beta K(\beta)). \quad (1.9)$$

1.2. Procesos Puntuales y Determinantales

En esta sección daremos las nociones básicas de procesos puntuales, y estudiaremos un caso particular de ellos, correspondiente a los procesos determinantales. El lector interesado en profundizar sobre la teoría de procesos puntuales puede referirse a [9]. Para leer sobre procesos determinantales, ver [16].

Consideremos Λ un espacio métrico separable dotado de la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Lambda)$. Definimos $\mathcal{N}(\Lambda)$ como el conjunto de todas las medidas localmente finitas en Λ a valores en \mathbb{N} .

Es decir,

$$\mathcal{N}(\Lambda) := \{ \xi : \mathcal{B}(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{N} \text{ medida} : \xi(B) < \infty, \forall B \in \mathcal{B}(\Lambda) \text{ acotado} \}$$

A las medidas en $\mathcal{N}(\Lambda)$ las llamaremos medidas puntuales. Diremos que una medida puntual ξ es simple si $\xi(\{x\}) \in \{0, 1\}$ para todo $x \in \Lambda$. Como además $\xi(B)$ es finito para cada B Boreliano acotado, podemos denotar

$$\xi \upharpoonright_B = \sum_{i=1}^{\xi(B)} \delta_{x_i} \quad (1.10)$$

donde los puntos $x_1, \dots, x_{\xi(B)}$ son algunos puntos de Λ . Podemos dotar a $\mathcal{N}(\Lambda)$ de la σ -álgebra más pequeña que hace que la aplicación $A \rightarrow \xi(A)$ sea medible para todo Boreliano A .

Definición 1.6 *Un proceso puntual es una medida de probabilidad \mathbb{P} en $\mathcal{N}(\Lambda)$.*

Diremos que \mathbb{P} es un proceso puntual simple si $\mathbb{P}(\xi \text{ es simple}) = 1$

Observación 1.7 *Una forma alternativa de pensar los procesos puntuales es como una colección aleatoria de puntos en Λ .*

Ejemplo Si $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sus tiempos de salto, entonces $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{T_n}$ es un proceso puntual en \mathbb{R}_+ .

Observación 1.8 *Para no sobrecargar la notación, a un proceso puntual lo denotaremos simplemente ξ , y puede ser pensado como una medida aleatoria escogida de $\mathcal{N}(\Lambda)$, usando la medida de probabilidad \mathbb{P} .*

Consideremos ahora B un Boreliano acotado. Si $\phi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con soporte en B , escribimos

$$\prod_i (1 + \phi(x_i)) = \prod_{i=1}^{\xi(B)} (1 + \phi(x_i)) \quad (1.11)$$

donde los puntos $x_1, \dots, x_{\xi(B)}$ son los definidos en (1.10). Una forma natural de estudiar los procesos puntuales es a través de productos como los de (1.11). Podemos escribir

$$\prod_i (1 + \phi(x_i)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{x_{i_1} \neq \dots \neq x_{i_n}} \phi(x_{i_1}) \dots \phi(x_{i_n}) \quad (1.12)$$

donde la suma sobre todas las n -tuplas distintas, donde incluimos todas las permutaciones de los n puntos, lo cual compensamos dividiendo por $n!$. Incluimos todas las permutaciones posibles ya que a priori no tenemos algún orden para los puntos del proceso puntual. Notar

que para $n = 0$ la suma vale 1 por definición. Además, como ϕ tiene soporte acotado, la suma al lado derecho es finita c.s.

Estudiando la forma de (1.12), construimos un proceso puntual en Λ^n , con $n \in \mathbb{N}$:

$$\Xi_n := \sum_{x_{i_1} \neq \dots \neq x_{i_n}} \delta_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})}, \quad (1.13)$$

es decir, cada n -tupla del proceso original, considerando todas las permutaciones posibles, da origen a un punto en el nuevo proceso.

Definición 1.9 Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos M_n una medida en Λ^n por

$$M_n(A) := \mathbb{E}(\Xi_n(A)) \quad (1.14)$$

para cada $A \subseteq \Lambda^n$ Boreliano acotado. M_n se llama el n -ésimo momento factorial.

La definición anterior nos dice que M_n es el número esperado de n -tuplas de puntos distintos que caen en A construidas con el proceso puntual original.

Consideremos ahora λ una medida de referencia en Λ . Podemos pensar en la medida de Lebesgue en el caso $\Lambda = \mathbb{R}$ o la medida cuenta puntos en el caso $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Definición 1.10 Si la medida M_n es absolutamente continua con respecto a la medida λ^n en Λ^n , por Radon-Nikodým, existe una función ρ_n que cumple

$$M_n(A) = \int_A \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n).$$

A la función ρ_n la llamamos la función de correlación en n -puntos.

Volviendo a (1.12), podemos usar la definición de Ξ_n y obtenemos:

$$\prod_i (1 + \phi(x_i)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \prod_{j=1}^n \phi(x_j) \Xi(d^n x) \quad (1.15)$$

Asumamos ahora que los momentos factoriales cumplen

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\|\phi\|_\infty^n}{n!} M_n(\Lambda^n) < \infty,$$

y entonces por Fubini, obtenemos

$$\mathbb{E} \left(\prod_i (1 + \phi(x_i)) \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \prod_{j=1}^n \phi(x_j) M_n(d^n x).$$

Esto nos entrega la siguiente propiedad:

Proposición 1.11 *Si ξ es un proceso puntual con función de correlación ρ_n y $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ es una función a soporte compacto que verifica*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|\phi\|_\infty^n \int_{\Lambda^n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n) < \infty,$$

entonces

$$\mathbb{E} \left(\prod_i (1 + \phi(x_i)) \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \prod_{j=1}^n \phi(x_j) \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n). \quad (1.16)$$

Una aplicación interesante de la propiedad anterior es calcular la probabilidad de gaps. Consideremos B un Boreliano acotado y $\phi = -\mathbb{1}_B$. Luego,

$$\mathbb{P}(x_i \notin B, \forall i) = \mathbb{E} \left(\prod_i (1 - \mathbb{1}_B(x_i)) \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{B^n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n). \quad (1.17)$$

Un caso importante de procesos puntuales en \mathbb{R} es el de procesos con una última partícula. Esto es, tal que $\exists t < \infty$ con $\xi((t, \infty)) < \infty$ c.s.

Usando la proposición 1.23 y TCD, se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.12 *Si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \int_{(t, \infty)^n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n) < \infty$$

entonces ξ tiene una última partícula, que llamaremos x_{\max} , y se tiene que

$$\mathbb{P}(x_{\max} \leq s) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{(s, \infty)^n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n) \quad (1.18)$$

Notemos la similitud de (1.17) y (1.18) con la definición de determinante de Fredholm (1.2). Es esta similitud la que nos lleva a definir lo que conoceremos como *procesos determinantaes*.

Definición 1.13 Sea ξ un proceso puntual con función de correlación en n -puntos ρ_n . Decimos que ξ es un proceso determinantal si existe $K : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$. A K lo llamaremos el kernel de correlación del proceso.

Podemos pensar en el K de la definición anterior como el kernel de un operador integral definido en $L^2(\Lambda, \lambda)$, en cuyo caso se tiene que

$$\mathbb{P}(x_{\max} \leq s) = \det(I - K)_{L^2((s, \infty))} \quad (1.19)$$

1.3. Teoría de Matrices Aleatorias

La Teoría de Matrices Aleatorias se entiende como el estudio de matrices cuyas componentes son variables aleatorias. Equivalentemente, se puede pensar como el estudio de variables aleatorias definidas en algún espacio de probabilidad, a valores en algún espacio de matrices. Para más detalles sobre estos temas el lector puede consultar [20], [1], [16], [22], [31].

Dentro de todos los modelos de matrices aleatorias existentes, nos interesaremos principalmente en dos: el Gaussian (o Hermitian) Ensemble y el Laguerre Ensemble.

Definición 1.14 Dado $N \in \mathbb{N}$, una matriz real simétrica $H \in \mathbb{R}^{N,N}$ se dice que pertenece al Gaussian Orthogonal Ensemble (en adelante GOE) si cumple $H_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ para $i > j$ y $H_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2)$, donde las variables son independientes sujetas a la condición de simetría. Lo denotaremos como $H \sim \text{GOE}(N)$.

Observación 1.15 La ley de la familia de matrices GOE es invariante bajo conjugación de matrices ortogonales (es decir, matrices reales O que cumplen $O^{-1} = O^t$), y es este el motivo de su nombre.

Definición 1.16 Dado $N \in \mathbb{N}$, una matriz compleja hermitica $H \in \mathbb{C}^{N,N}$ se dice que pertenece al Gaussian Unitary Ensemble (en adelante GUE) si cumple $H_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1/4) + i\mathcal{N}(0, 1/4)$ para $i > j$ y $H_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$. Nuevamente, las variables son independientes sujetas a la condición de que la matriz es hermitica. Lo denotaremos como $H \sim \text{GUE}(N)$.

Observación 1.17 Como es de esperarse, la ley de la familia de matrices GUE es invariante bajo conjugación de matrices unitarias (es decir, matrices complejas U que cumplen $U^{-1} = U^*$).

En lo que sigue en esta sección, el parámetro β corresponde a $\beta = 1$ para el caso GOE y $\beta = 2$ para el caso GUE. Nos interesa en particular encontrar la ley de ambos ensembles.

Proposición 1.18 Sea $\mu^{(\beta)}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}}$ para $\beta = 1$ y \mathbb{R}^{N^2} para $\beta = 2$. Si $\mathcal{P}_N^{(\beta)}$ es la ley de GOE/GUE(N), entonces $\mathcal{P}_N^{(\beta)}$ es absolutamente continua con respecto a $\mu^{(\beta)}$, y se tiene que

$$\frac{d\mathcal{P}_N^{(\beta)}}{d\mu^{(\beta)}} = \frac{1}{Z_N^{(\beta)}} e^{-\frac{\beta}{2} \text{tr}(HH^*)},$$

donde $Z_N^{(\beta)}$ es una constante de normalización apropiada.

Notemos ahora que si consideramos una matriz GOE/GUE(N), sus valores propios forman un proceso puntual en \mathbb{R} . Nuestro interés se centrará en entender este proceso puntual. Para eso, primero definamos un determinante conocido que nos será de utilidad para describir la densidad conjunta de los valores propios de estas matrices.

Definición 1.19 Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. El determinante de Vandermonde es

$$\Delta_n(\vec{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (1.20)$$

Con esto, podemos encontrar la densidad conjunta de los valores propios.

Teorema 1.20 Sea $H \sim \text{GOE/GUE}(N)$ y sean $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ sus valores propios ordenados. La densidad de la variable aleatoria $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N es

$$f_\beta(x_1, \dots, x_N) = C_N^{(\beta)} N! \mathbb{1}_{x_1 \leq \dots \leq x_N} \Delta_N(\vec{x})^\beta \prod_{i=1}^N e^{-\beta x_i^2/4} \quad (1.21)$$

con $\beta = 1$ para GOE(N), $\beta = 2$ para GUE(N), y $C_N^{(\beta)}$ una constante de normalización apropiada.

Observación 1.21 Notemos en particular que la presencia del determinante de Vandermonde en la densidad de los valores propios nos dice que casi seguramente serán todos distintos entre sí.

Antes de continuar con nuestro estudio de los valores propios, consideremos la siguiente propiedad que será de utilidad más adelante:

Proposición 1.22 Sea μ una medida en \mathbb{R} con momentos finitos de todo orden, esto es:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx) < \infty, \forall k \geq 0$$

Entonces, existe una única familia de polinimios $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

- p_k es de grado k
- $\forall m, n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\mu(dx) = \mathbb{1}_{n=m}$

Estos polinomios se conocen como polinomios ortogonales asociados a μ .

Consideremos ahora una medida de la forma $\mu(dx) = w(x)dx$, con $w(x) = e^{-x^2}$. Sean $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los polinomios asociados a esta medida, llamados los polinomios de Hermite. Definamos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \tag{1.22}$$

llamadas las funciones de Hermite.

Usando estas funciones construimos, para cada $N \in \mathbb{N}$, el operador $K_H^N : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ con kernel integral dado por:

$$K_H^N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x)\varphi_n(y) \tag{1.23}$$

llamado el kernel de Hermite.

Teorema 1.23 Los valores propios de una matriz $GUE(N)$ forman un proceso determinantal en \mathbb{R} y su kernel de correlación es el kernel de Hermite K_H^N .

Notemos que como los valores propios de una matriz $GUE(N)$ son finitos, en particular el proceso puntual que forman tiene una última partícula. Si al valor propio más grande lo llamamos $\lambda_{GUE}^{\max}(N)$, en virtud de (1.19), se tiene que

$$\mathbb{P}(\lambda_{GUE}^{\max}(N) \leq s) = \det(I - K_H^N)_{L^2(s, \infty)}. \tag{1.24}$$

Definimos en $L^2(\mathbb{R})$, para cada $s \in \mathbb{R}$, los operadores P_s y \bar{P}_s dados por:

$$P_s f(x) = (I - \bar{P}_s) f(x) = \mathbb{1}_{x \geq s} f(x), \tag{1.25}$$

y con esto, la distribución (1.24) puede escribirse como

$$\mathbb{P}(\lambda_{\text{GUE}}^{\text{máx}}(N) \leq s) = \det(I - P_s K_{\mathbb{H}}^N P_s)_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.26)$$

Observación 1.24 *El proceso puntual formado por los valores propios de una matriz $\text{GOE}(N)$ **no** forman un proceso determinantal.*

Ahora volcamos nuestra atención a una segunda familia de matrices aleatorias que serán de utilidad: el Laguerre Ensemble.

Definición 1.25 *Sean $N, n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, y sea $X \in \mathbb{R}^{n, N}$, una matriz donde todas sus entradas verifican que distribuyen como variables $\mathcal{N}(0, 1)$ independientes. La matriz $M = X^T X$ decimos que pertenece al Laguerre Orthogonal Ensemble (en adelante $\text{LOE}(N, n)$) y lo denotaremos $M \sim \text{LOE}(N, n)$. Si $n = N + 1$, lo denotaremos simplemente como $\text{LOE}(N)$.*

En particular, nos interesará el caso $n = N + 1$, y en este caso, al igual que en el caso Gaussiano, la densidad conjunta de los valores propios es explícita.

Proposición 1.26 *Sea $N \in \mathbb{N}$ y $M \sim \text{LOE}(N)$. Si $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ son los valores propios ordenados de M , se tiene que la densidad conjunta de los valores propios es*

$$f_{\text{LOE}}(x_1, \dots, x_n) = C_N N! \mathbf{1}_{x_1 \leq \dots \leq x_n} \Delta_N(\vec{x}) \prod_{i=1}^N e^{-x_i/2},$$

donde $\Delta_N(\vec{x})$ es el determinante de Vandermonde (1.20).

Definición 1.27 *Sean $N, n \in \mathbb{N}$ y sea $X \in \mathbb{C}^{n, N}$, una matriz donde todas sus entradas verifican que son de la forma $\mathcal{N}(0, 1/2) + i\mathcal{N}(0, 1/2)$, donde las variables normales son todas independientes entre sí. La matriz $M = X^* X$ decimos que pertenece al Laguerre Unitary Ensemble (en adelante $\text{LUE}(N, n)$) y lo denotaremos por $M \sim \text{LUE}(N, n)$. Si $N = n$, lo denotaremos simplemente como $\text{LUE}(N)$.*

Proposición 1.28 (ver [11]) *Sea $M \sim \text{LUE}(N, n)$ y sea $\alpha = n - N$. Si $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ son los valores propios ordenados de M , se tiene que la densidad conjunta de los valores propios es*

$$f_{\text{LUE}}(x_1, \dots, x_n) = C_N N! \mathbf{1}_{x_1 \leq \dots \leq x_n} \Delta_N(\vec{x})^2 \prod_{i=1}^N x_i^\alpha e^{-x_i}. \quad (1.27)$$

Más aún, al igual que en el caso $\text{GUE}(N)$, el proceso puntual formado por una matriz perteneciente al $\text{LUE}(N, n)$ forman un proceso determinantal.

Definición 1.29 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen los polinomios de Laguerre Generalizados, como los polinomios ortogonales a la función peso $x^\alpha e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}$. Al polinomio de grado n lo denotaremos por $L_n^{(\alpha)}$.

Definición 1.30 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos las funciones de Laguerre Generalizadas $\{\psi_n^{(\alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) = x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x). \quad (1.28)$$

Definición 1.31 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$. Se define el Kernel Generalizado de Laguerre como aquel cuyo kernel integral viene dado por

$$K_L^{N,\alpha}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n^{(\alpha)}(x) \psi_n^{(\alpha)}(y). \quad (1.29)$$

Proposición 1.32 (ver [11]) Sea $M \sim LUE(N, n)$ y $\alpha = n - N$. Entonces el proceso puntual formado por los valores propios de M es un proceso determinantal, cuyo kernel de correlación viene dado por el Kernel Generalizado de Laguerre (1.29). En particular si denotamos por $\lambda_{LUE}^{\max}(N, n)$ al valor propio más grande de M , su distribución viene dada por

$$P(\lambda_{LUE}^{\max}(N, n) \leq r) = \det \left(I - K_L^{N,\alpha} P_r K_L^{N,\alpha} \right)$$

Observación 1.33 Al igual que en el caso Gaussiano, las leyes de las familias de matrices LOE y LUE son invariantes bajo conjugaciones por matrices ortogonales y unitarias, respectivamente.

1.4. Las distribuciones de Tracy-Widom

Para cerrar este primer capítulo, estudiaremos dos distribuciones de probabilidad muy importantes en la teoría de matrices aleatorias, que nacen al estudiar el comportamiento asintótico del valor propio más grande de una matriz GOE/GUE: las distribuciones de Tracy-Widom. La importancia de estas distribuciones es que surgen, además de en los modelos de matrices aleatorias, en muchísimos otros modelos, como algunos que veremos más adelante, por lo que se dice que son un resultado de *universalidad*.

Antes de enunciar las distribuciones de Tracy-Widom, enunciaremos otro resultado de universalidad, llamado la ley del semicírculo de Wigner.

Definición 1.34 Una matriz de Wigner es una matriz real o compleja tal que:

- (a) $(X_{ij})_{i < j}$ iid (reales o complejos) con $\mathbb{E}(X_{ij}) = 0$ y $\mathbb{E}(X_{ij}^2) = 1$.
- (b) $(X_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ iid reales tal que $\mathbb{E}(X_{ii}) = 0$ y $\text{Var}(X_{ii}) < \infty$.

(c) $X = X^*$.

(d) $\mathbb{E}(|X_{ij}|^k) < \infty$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \geq 0$.

Ejemplo Una matriz $\text{GOE}(N)$ es una matriz de Wigner. $2H$ donde $H \sim \text{GUE}(N)$ es también una matriz de Wigner.

La idea es, si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son los valores propios de una matriz de Wigner, estudiar el proceso puntual formado por los valores propios reescalados:

$$S_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{\lambda_i}{\sqrt{N}}}. \quad (1.30)$$

Teorema 1.35 (*Ley del Semicírculo de Wigner, ver [36]*) Si S_N es el proceso puntual definido en (1.30), entonces

$$\frac{1}{N} S_N \longrightarrow \sigma$$

débilmente y c.s., cuando $N \rightarrow \infty$, donde σ es la ley del semicírculo de Wigner:

$$\sigma(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{|x| \leq 2} dx. \quad (1.31)$$

Más precisamente, con probabilidad 1 se tiene que para toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a soporte compacto:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{N}}\right) \longrightarrow \int_{-2}^2 f(x) \sigma(dx).$$

Notemos que el teorema anterior nos dice que si $\lambda_{\text{máx}}$ es el valor propio más grande de una matriz de Wigner, entonces

$$\frac{\lambda_{\text{máx}}}{\sqrt{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2$$

En particular, si $H \sim \text{GUE}(N)$, entonces $2H$ es una matriz de Wigner y se tiene que $\frac{2\lambda_{\text{GUE}}^{\text{máx}}(N)}{\sqrt{N}}$ converge a 2. Más aún, se puede probar que

$$2N^{-1/6} (\lambda_{\text{GUE}}^{\text{máx}}(N) - \sqrt{N})$$

converge en distribución a algo no trivial cuando $N \rightarrow \infty$.

Para definir este límite, introduciremos primero una función especial, llamada la función Airy.

Definición 1.36 *Definimos la función Airy, $Ai(x)$, como la solución a la ecuación diferencial ordinaria*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

con la condición $y \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Definición 1.37 *Definimos el Kernel Airy como el operador en $L^2(\mathbb{R})$ con kernel integral dado por:*

$$K_{Ai}(x, y) = \int_0^\infty d\lambda Ai(x + \lambda) Ai(y + \lambda). \quad (1.32)$$

Con esto ya podemos definir la primera de las dos distribuciones de Tracy-Widom.

Teorema 1.38 (ver [32]) *Sea $H \sim GUE(N)$ y $\lambda_{GUE}^{\max}(N)$ su valor propio más grande. Entonces,*

$$2N^{-1/6}(\lambda_{GUE}^{\max}(N) - \sqrt{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \zeta_2, \quad (1.33)$$

en distribución, donde ζ_2 es la llamada distribución de Tracy-Widom GUE (en adelante TW_2), cuya función de distribución viene dada por

$$F_{GUE}(s) := \mathbb{P}(\zeta_2 \leq s) = \det(I - P_s K_{Ai} P_s) \quad (1.34)$$

Observación 1.39 *Notemos que la fórmula (1.36) parece ser la distribución de la última partícula de un proceso determinantal. En efecto, ζ_2 es la distribución de la última partícula del llamado proceso puntual Airy, correspondiente al límite del proceso determinantal formado por los valores propios reescalados de una matriz GUE.*

La historia para la distribución de Tracy-Widom GOE es similar. A pesar de que los valores propios de una matriz GOE(N) no forman un proceso determinantal, tenemos una fórmula con determinante de Fredholm para esta distribución (ver [28], [10]).

Teorema 1.40 (ver [33]) *Sea $H \sim GOE(N)$ y $\lambda_{GOE}^{\max}(N)$ su valor propio más grande. Entonces,*

$$N^{-1/6}(\lambda_{GOE}^{\max}(N) - 2\sqrt{N}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \zeta_1, \quad (1.35)$$

en distribución, donde ζ_1 es la llamada distribución de Tracy-Widom GOE (en adelante TW_1), cuya función de distribución viene dada por

$$F_{GOE}(s) := \mathbb{P}(\zeta_1 \leq s) = \det(I - P_0 B_s P_0) \quad (1.36)$$

donde B_s es un operador en $L^2(\mathbb{R})$ con kernel integral dado por

$$B_s(x, y) = \text{Ai}(x + y + s)$$

Observación 1.41 *Tracy y Widom dieron una fórmula diferente para la distribución de GOE (1.36). La aquí expuesta fue enunciada por Sasamoto en [28] y probada por Ferrari y Spohn en [10].*

Para el caso LOE(N), se puede probar (ver [19]) que los valores propios están concentrados en $[0, 4N]$ y que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\lambda_{\text{LOE}}^{\max}(N) \leq 4N + 2^{4/3} N^{1/3} r) = F_{GOE}(r). \quad (1.37)$$

Capítulo 2

Percolación de Última Pasada y Procesos Airy

En esta sección veremos algunos tópicos que se relacionan con la denominada *clase de universalidad de Kardar-Parisi-Zhang*. A pesar de que no existe definición precisa de la clase de universalidad de KPZ, puede ser pensada a grandes rasgos como una gran familia de modelos estocásticos caracterizada por la inusual escala de fluctuaciones de $t^{1/3}$. En la sección 2.1 veremos un modelo perteneciente a esta clase llamado percolación de última pasada, para luego en la sección 2.2 dar a conocer una serie de procesos estocásticos que, se conjetura, gobiernan las distribuciones asintóticas de los modelos de la clase de universalidad de KPZ. Por último en las últimas dos secciones veremos una propiedad interesante llamada *estadísticos continuos*, y una aplicación de esta para uno de los procesos introducidos en la sección 2.2.

2.1. Percolación de Última Pasada

En esta sección revisaremos algunos conceptos sobre polímeros, y un caso particular, denominado percolación de última pasada, lo cual nos ayudará a definir los denominados *procesos de Airy* en la sección 2.2, que jugarán un rol crucial en esta tesis. Para mayor detalle sobre esto, consultar [25]. Consideremos el siguiente modelo de polímeros dirigidos en un ambiente aleatorio: una trayectoria *arriba y a la derecha* en $(\mathbb{Z}_+)^2$ es una trayectoria $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ con $\pi_0 = (0, 0)$ y $\pi_k - \pi_{k-1} \in \{(1, 0), (0, 1)\}$. En $(\mathbb{Z}_+)^2$ colocamos una colección de pesos independientes idénticamente distribuidos $\{\omega_{i,j}\}_{i,j>0}$. La *energía* de un segmento de largo N de un polímero la definimos como

$$H_N(\pi) = - \sum_{k=1}^N \omega_{\pi_k}$$

y definimos el *peso* de dicho segmento de polímero como

$$W_N(\pi) = e^{-\beta H_N(\pi)} = e^{\beta \sum_{k=1}^N \omega_{\pi_k}}$$

donde $\beta > 0$ es un valor fijo que se denomina la *temperatura inversa* del proceso.

Sea ahora $\Pi_{M,N}$ el conjunto de todos los caminos que conectan el origen con el punto $(M, N) \in (\mathbb{Z}_+)^2$. Si restringimos nuestra atención sólo a los caminos en $\Pi_{M,N}$, hablamos de un *polímero punto-a-punto*, definido a través de la siguiente medida sobre $\Pi_{M,N}$:

$$Q_{M,N}^{\text{punto}}(\pi) = \frac{1}{Z^{\text{punto}}(M, N)} W_{M+N}(\pi), \quad (2.1)$$

donde la constante de normalización

$$Z^{\text{punto}}(M, N) = \sum_{\pi \in \Pi_{M,N}} W_{M+N}(\pi)$$

es conocida como la *función de partición punto-a-punto*. Si ahora consideramos todos los caminos de largo $2N$, hablamos de los polímeros *punto-a-línea*, definidos a través de la siguiente medida sobre $\bigcup_{k=-N, \dots, N} \Pi_{N+k, N-k}$ (es decir, los caminos de largo $2N$):

$$Q_N^{\text{línea}}(\pi) = \frac{1}{Z^{\text{línea}}(N)} W_{2N}(\pi), \quad (2.2)$$

con la *función de partición punto-a-línea*:

$$Z^{\text{línea}}(N) = \sum_{k=-N}^N Z^{\text{punto}}(N+k, N-k)$$

Centraremos nuestra atención en el caso temperatura inversa límite $\beta \rightarrow \infty$, llamado *percolación de última pasada*. En particular además, asumiremos que los pesos $\{\omega_{i,j}\}_{i,j>0}$ distribuyen como variables geométricas de parámetro $0 < q < 1$, es decir, $\mathbb{P}(\omega_{i,j} = k) = q(1-q)^{k-1}$, para $k \in \mathbb{N}$. Además fijaremos $\omega_{i,j} = 0$ para $i = 0$ o $j = 0$.

Notemos que a medida que $\beta \rightarrow \infty$, las medidas (2.1) y (2.2) se concentran en los caminos de peso máximo. Luego, tiene sentido definir el *tiempo de última pasada punto-a-punto*:

$$L^{\text{punto}}(M, N) = \max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \sum_{i=0}^{M+N} \omega_{\pi_i}$$

y el *tiempo de última pasada tiempo-a-línea*:

$$L^{\text{línea}}(N) = \max_{k=-N, \dots, N} L^{\text{punto}}(N+k, N-k)$$

Un resultado muy importante, y que relaciona percolación de última pasada con las distribuciones de Tracy-Widom, es un resultado de Johansson que estudia el límite bajo rescalamiento del tiempo de última pasada punto-a-punto (ver [13]). Antes de enunciar el resultado, introducimos una notación que será útil durante el resto de la sección. Cada vez que denotemos la relación:

$$Z_N \sim aN + bN^\kappa \zeta$$

cuando $N \rightarrow \infty$, queremos decir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{Z_N - aN}{bN^\kappa} \leq m \right) = \mathbb{P}(\zeta \leq m)$$

Ahora, el resultado de Johansson nos dice que

$$L^{\text{punto}}(N, N) \sim c_1 N + c_2 N^{1/3} \zeta_2, \quad (2.3)$$

donde c_1 y c_2 son constantes que sólo dependen de q y pueden ser encontradas en [13], y ζ_2 es la distribución de TW_2 (1.33).

El resultado para el caso de tiempo de última pasada tiempo-a-línea fue probado por primera vez en [7], aunque en [2] se probó antes para un modelo similar.

$$L^{\text{línea}}(N) \sim c'_1 N + c'_2 N^{1/3} \zeta_1, \quad (2.4)$$

donde ζ_1 ahora es la distribución de TW_1 (1.35).

La razón por la que estos resultados pueden ser obtenidos a través de percolación de última pasada es la rica estructura algebraica que este modelo posee, pudiendo incluso obtener fórmulas explícitas para los tiempos de última pasada. En particular, usando herramientas combinatoriales, Johansson (ver [13]) probó el siguiente notable resultado:

Proposición 2.1 *Para $M \leq N$*

$$\mathbb{P}(L^{\text{punto}}(M, N) \leq s) = \det(I - P_s K_N^{\text{Meix}} P_s)$$

donde el kernel Meixner K_N^{Meix} viene dado por

$$K_N^{\text{Meix}}(x, y) = \frac{\kappa_N}{\kappa_{N-1}} \frac{p_N(x)p_{N-1}(y) - p_{N-1}(x)p_N(y)}{x - y} \sqrt{w(x)w(y)}$$

donde $w(x) = \binom{M - N + x}{x}$, y las funciones p_N son los polinomios ortogonales asociados a

la función $w(x)$ definidos en la Proposición 1.21, con $p_N(x)$ de grado N y coeficiente principal κ_N .

Un análisis asintótico no trivial del kernel Meixner fue el que permitió a Johansson concluir que el determinante anterior converge al determinante apareciendo en la definición (1.36) de la distribución de Tracy-Widom GUE.

2.2. Procesos Airy

Los procesos de Airy son una colección de procesos estocásticos que se espera que gobiernen las fluctuaciones espaciales a larga escala de modelos de crecimiento aleatorio en la clase de universalidad de KPZ para distintos tipos de datos iniciales. Dedicaremos esta sección a definir los procesos de Airy y algunas de sus propiedades a través de las fluctuaciones espaciales asintóticas del modelo de percolación de última pasada, estudiado en la sección anterior. En particular, son varios los procesos que han sido estudiado de manera exacta, pero en esta sección nos interesarán tres: el proceso de Airy_1 , el proceso de Airy_2 , y el proceso de $\text{Airy}_{2 \rightarrow 1}$.

Los procesos de Airy surgen a través de percolación de última pasada cuando uno analiza las fluctuaciones del tiempo de última pasada no sólo en un solo punto sino que en varios. Para esto, definimos el proceso el proceso punto-a-punto reescalado $u \rightarrow H_N^{\text{punto}}(u)$ interpolando linealmente los valores resultantes al reescalar $L^{\text{punto}}(M, N)$ mediante la relación:

$$L^{\text{punto}}(N + u, N - u) = c_1 N + c_2 N^{1/3} H_N^{\text{punto}}(c_3 N^{-2/3} u), \quad (2.5)$$

para $u = -N, \dots, N$, donde las constantes c_i tienen expresiones explícitas que dependen solamente de q y pueden ser encontradas en [14]. La idea es que este proceso punto-a-punto reescalado converge al proceso Airy_2 , el cuál fue introducido por Phähofer y Spohn en [23] y es definido a través de sus distribuciones finito-dimensionales, dadas por un determinante de Fredholm: dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $u_1 < \dots < u_n \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_2(u_1) \leq x_1, \dots, \mathcal{A}_2(u_n) \leq x_n) = \det(I - f^{1/2} K_{\text{Ai}}^{\text{ext}} f^{1/2})_{L^2(\{u_1, \dots, u_n\} \times \mathbb{R})}, \quad (2.6)$$

donde estamos considerando la medida cuenta puntos en $\{u_1, \dots, u_n\}$ y la medida de Lebesgue en \mathbb{R} ; f es definida en $\{u_1, \dots, u_n\} \times \mathbb{R}$ por

$$f(u_j, x) = \mathbb{1}_{x \in (x_j, \infty)}, \quad (2.7)$$

y el *kernel Airy extendido* (ver [23]) es definido como

$$K_{\text{Ai}}^{\text{ext}}(u, \xi; u', \xi') = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda(u-u')} \text{Ai}(\xi + \lambda) \text{Ai}(\xi' + \lambda), & \text{si } u \geq u' \\ - \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{-\lambda(u-u')} \text{Ai}(\xi + \lambda) \text{Ai}(\xi' + \lambda), & \text{si } u < u' \end{cases} \quad (2.8)$$

A partir de su definición, se puede probar que el proceso Airy_2 es estacionario, y es de esperarse a partir de (2.3) que $\mathbb{P}(\mathcal{A}_2 \leq m) = F_{\text{GUE}}(m)$.

Teorema 2.2 (ver [14]) *Existe una versión continua del proceso \mathcal{A}_2 y*

$$H_N^{\text{punto}}(u) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_2(u) - u^2$$

en distribución en la topología de convergencia uniforme de funciones continuas sobre compactos.

Podemos pensar en extender el modelo de percolación de última pasada, asignando pesos $\omega_{i,j}$ siempre que $i + j > 0$. Para recuperar el modelo original, simplemente basta imponer δ_0 como condición inicial. Si esto último no es impuesto, es decir, dejamos que los caminos puedan partir en cualquier punto de la forma $(k, -k)$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos repetir el reescalamiento realizado para la obtención del proceso Airy_2 . Lo anterior se puede realizar de la siguiente forma: comencemos redefiniendo el tiempo de última pasada a este modelo (conocido como modelo con condición inicial *flat*)

$$L_{\text{flat}}^{\text{punto}}(M, N) = \max_{i \in \mathbb{Z}} \max_{\pi \in \Pi_{(i, -i) \rightarrow (M, N)}} \sum_{j=0}^{2i+M+N} \omega_{\pi_j}$$

donde la notación se explica por si misma. Ahora definamos el proceso reescalado $u \rightarrow H_N^{\text{línea}}(u)$ interpolando linealmente mediante la relación

$$L_{\text{flat}}^{\text{punto}}(N + u, N - u) = c_1 N + c_2 N^{1/3} H_N^{\text{línea}}(c_3 N^{-2/3} u)$$

para $U = -N, \dots, N$. Este proceso en el límite hace aparecer un proceso conocido como Airy_1 (\mathcal{A}_1), el cuál fue introducido por Sasamoto en [28], y está definido a través de sus distribuciones finito dimensionales

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_1(u_1) \leq \xi_1, \dots, \mathcal{A}_1(u_n) \leq \xi_n) = \det(I - f K_1^{\text{ext}} f)_{L^2(\{u_1, \dots, u_n\} \times \mathbb{R})}, \quad (2.9)$$

con f como en (2.7) y

$$K_1^{\text{ext}}(u, \xi; u', \xi') = -\frac{1}{\sqrt{4\pi(u' - u)}} \exp\left(-\frac{(\xi' - \xi)^2}{4(u' - u)}\right) \mathbf{1}_{u' > u} \\ + \text{Ai}(\xi + \xi' + (u' - u)^2) \exp((u' - u)(\xi + \xi') + \frac{2}{3}(u' - u)^3),$$

El proceso Airy_1 es estacionario, y es de esperarse a partir de (2.4) que las marginales del proceso vienen dadas por la distribución de TW_1 : $\mathbb{P}(\mathcal{A}_1(u) \leq m) = F_{\text{GOE}}(2m)$ para todo u .

Teorema 2.3 (ver [7];[4];[5])

$$H_N^{\text{línea}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2^{1/3} \mathcal{A}_1(2^{-2/3}u)$$

en el sentido de convergencia de las distribuciones finito-dimensionales.

Finalmente, veremos un último proceso de Airy, muy importante para el desarrollo de esta tesis: el proceso $\text{Airy}_{2 \rightarrow 1}$.

Consideremos nuevamente el modelo de percolación de última pasada, pero modifiquemos la condición inicial: pondremos pesos geométricos $\omega_{i,j}$ cuando $i, j > 0$ o $i + j > 0$ con $i < 0$, y $\omega_{i,j} = 0$ en cualquier otro caso. Dejamos luego que los caminos comiencen en cualquier punto de la semi-línea que comienza en el origen y tiene dirección $(-1, 1)$. Notemos que esto combina las condiciones iniciales que dan origen a \mathcal{A}_1 y a \mathcal{A}_2 . Reescalando el tiempo de última pasada como en los casos anteriores obtenemos el proceso $H_N^{\text{semi-línea}}(u)$ y da origen al proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$. Fue introducido por Borodin, Ferrari y Sasamoto en [6], y viene dado por:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}(u_1) \leq \xi_1, \dots, \mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}(u_m) \leq \xi_m) = \det(I - f K_{2 \rightarrow 1}^{\text{ext}} f)_{L^2(\{u_1, \dots, u_m\} \times \mathbb{R})},$$

con f como en (2.7) y $K_{2 \rightarrow 1}^{\text{ext}}$ tiene fórmula explícita y puede ser encontrada en [6]. El proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$ puede ser pensado como una suerte de interpolación entre los procesos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 en el sentido de que $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}(u + v)$ converge a $2^{1/3} \mathcal{A}_1(2^{-2/3}u)$ cuando $v \rightarrow \infty$, y converge a $\mathcal{A}_2(u)$ cuando $v \rightarrow -\infty$. El resultado de convergencia al proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$ es el siguiente:

Teorema 2.4 (ver [6])

$$H_N^{\text{semi-línea}}(u) - u^2 \mathbf{1}_{u \leq 0} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}(u)$$

en el sentido de convergencia de las distribuciones finito-dimensionales.

Para finalizar esta sección, enunciaremos un resultado notable que fue probado por Johanson en [14]

Teorema 2.5

$$\mathbb{P} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ \mathcal{A}_2(x) - x^2 \} \leq m \right) = F_{GOE}(4^{1/3}m), \quad (2.10)$$

Una prueba más directa a la utilizada por Johansson en [14] fue dada en [8] y utiliza un argumento denominado *estadísticos continuos* para el proceso \mathcal{A}_2 , y son el tema de nuestra próxima sección, ya que es éste resultado una de las principales motivaciones para el problema a trabajar en esta tesis.

2.3. Estadísticos Continuos para el Proceso Airy₂

Consideremos el siguiente problema: calcular la probabilidad de que el proceso \mathcal{A}_2 se mantenga debajo de una función g dada, en un intervalo $[\ell, r]$. Esta probabilidad puede ser calculada en términos de un determinante de Fredholm, y el desarrollo se encuentra en [8]. La idea es sencilla: una forma de proceder sería tomar una partición del intervalo $[\ell, r]$ dada por $\ell = t_0 < t_1 < \dots < t_n = r$, y tomar $x_i = g(t_i)$ en la distribución de \mathcal{A}_2 (2.6). La idea es que luego uno puede tomar el tamaño de la partición $n \rightarrow \infty$. La desventaja de realizar esto es que el determinante apareciendo en (2.6) es un determinante en el espacio $L^2(\{t_0, \dots, t_n\} \times \mathbb{R})$, por lo que el espacio va cambiando a medida que n crece. Para evitar este problema, trabajaremos con una variante de las distribuciones finito-dimensionales de \mathcal{A}_2 dada en [23], que corresponde a la siguiente: sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y $t_1 < \dots < t_n$, entonces

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_2(t_1) \leq x_1, \dots, \mathcal{A}_2(t_n) \leq x_n) = \det \left(I - K_{\text{Ai}} + \bar{P}_{x_1} e^{(t_1-t_2)H} \bar{P}_{x_2} e^{(t_2-t_3)H} \dots \bar{P}_{x_n} e^{(t_n-t_1)H} K_{\text{Ai}} \right)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.11)$$

donde P_s fue definido en (1.25), K_{Ai} es el Kernel Airy (1.32) y H es el Hamiltoniano Airy dado por $H = -\partial_x^2 + x$. La ventaja de esta fórmula es que el espacio donde es tomado el determinante no depende de n , y por lo tanto es más factible tomar el límite. Luego, volviendo a nuestro problema, la idea es tomar límite a la expresión

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_2(t_1) \leq g(t_1), \dots, \mathcal{A}_2(t_n) \leq g(t_n)) = \det \left(I - K_{\text{Ai}} + \bar{P}_{g(t_1)} e^{(t_1-t_2)H} \dots \bar{P}_{g(t_n)} e^{(t_n-t_1)H} K_{\text{Ai}} \right)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (2.12)$$

Como por el Teorema 2.2 existe una versión continua de \mathcal{A}_2 , el lado izquierdo converge a la probabilidad buscada $\mathbb{P}(\mathcal{A}_2(t) \leq g(t), \forall t \in [\ell, r])$, por lo que para resolver la pregunta inicial, se debe estudiar el lado izquierdo de (2.12). Notemos que el último término exponencial del lado derecho corresponde a $e^{(r-\ell)H}$, y por lo tanto no depende de n . Por otro lado, para $s < t$, el operador $e^{(s-t)H}$ puede ser pensado como el operador que cada función f le asigna la solución $u(t, \cdot)$ a tiempo t de la EDP $\partial_t u + Hu = 0$, con condición inicial $u(s, \cdot) = f(\cdot)$. Con esto en mente, el operador

$$\bar{P}_{g(t_1)} e^{(t_1-t_2)H} \bar{P}_{g(t_2)} e^{(t_3-t_2)H} \dots \bar{P}_{g(t_n)}, \quad (2.13)$$

puede ser pensado como resolver la misma EDP (hacia atrás en tiempo) sobre el intervalo $[\ell, r]$, con la condición adicional de que toda la masa sobre $g(t_i)$ es removida en cada uno de los instantes t_i . Como resolver la EDP hacia atrás o hacia adelante en tiempo entrega la misma solución, si queremos pensar (2.13) como resolver la ecuación hacia adelante en tiempo, lo único que tenemos que hacer es cambiar el orden en que los $g(t_i)$ aparecen. El resultado es el siguiente. Dada $g \in H^1([\ell, r])$, se define el operador $\Theta_{[\ell, r]}^g$ actuando en $L^2(\mathbb{R})$ como sigue: $\Theta_{[\ell, r]}^g f(\cdot) = u(r, \cdot)$, con $u(r, \cdot)$ la solución a tiempo r del siguiente problema

$$\begin{aligned} \partial_t u + Hu &= 0 \text{ para } x < \widehat{g}(t), \quad t \in (\ell, r) \\ u(\ell, x) &= f(x) \mathbb{1}_{x < \widehat{g}(\ell)} \\ u(t, x) &= 0 \text{ para } x \geq \widehat{g}(t), \end{aligned}$$

donde $\widehat{g}(t) = g(r + \ell - t)$.

Teorema 2.6 (ver [8])

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_2(t) \leq g(t), \forall t \in [\ell, r]) = \det \left(I - K_{Ai} + \Theta_{[\ell, r]}^g e^{(r-\ell)H} K_{Ai} \right). \quad (2.14)$$

Una expresión en términos del determinante de un operador solución de un problema de valor acotado puede no parecer muy práctico, pero es posible dar una expresión explícita para el kernel del operador $\Theta_{[\ell, r]}^g$ en términos de un puente Browniano. Para esto, en [8] se utiliza la fórmula de Feynman-Kac y de Cameron-Martin-Girsanov.

Teorema 2.7 (ver [8]) *Sea $\Theta_{[\ell, r]}^g(x, y)$ el kernel integral de $\Theta_{[\ell, r]}^g$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \Theta_{[\ell, r]}^g(x, y) &= e^{\ell x - r y + (r^3 - \ell^3)/3} \frac{e^{-(x-y)^2/4(r-\ell)}}{\sqrt{4\pi(r-\ell)}} \\ &\quad \cdot \mathbb{P}_{B(\ell)=x-\ell^2, B(r)=y-r^2} (B(s) \leq g(s) - s^2, \forall s \in [\ell, r]) \end{aligned}$$

donde B es un puente Browniano con coeficiente de difusión 2.

Una aplicación interesante de estos dos teoremas es el caso $-\ell = r = L$, para $L > 0$, y $g(t) = t^2 + m$, $m \in \mathbb{R}$. En este caso el valor de la probabilidad que aparece en el teorema anterior se puede calcular utilizando el principio de reflexión del movimiento Browniano, y el límite $L \rightarrow \infty$ entrega una demostración alternativa para el resultado de Johansson (2.10).

Otra aplicación interesante corresponde a estudiar el supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola pero sobre una semi-recta en vez de \mathbb{R} , el cual es el tema de la última sección de este capítulo.

2.4. El Supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola sobre una semi-recta

Un resultado interesante, y que tiene incidencia directa en la pregunta que intentaremos resolver en esta tesis, corresponde a estudiar, para $\alpha \in \mathbb{R}$ la distribución de

$$\sup_{t \leq \alpha} (\mathcal{A}_2 - t^2) + \min\{0, \alpha\}^2, \quad (2.15)$$

En [24] no sólo se estudia la distribución de esta variable aleatoria, si no que además se prueba que tiene la misma distribución que la distribución marginal del proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$. La técnica para encontrarla consiste en utilizar la fórmula (2.14) del Teorema 2.6 con $\ell = -L$, $r = \alpha$ y $g(t) = t^2 + \bar{r}$, donde $\bar{r} = r - \min\{0, \alpha\}^2$, para $r \in \mathbb{R}$. Luego de varios cálculos, y tomando $L \rightarrow \infty$, se obtiene la distribución deseada.

Teorema 2.8 (ver [24])

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \leq \alpha} (\mathcal{A}_2 - t^2) \leq \bar{r} \right) = \det \left(I - K_{Ai} P_{\bar{r} + \alpha^2} K_{Ai} - K_{Ai} e^{\alpha \xi} \varrho_{\bar{r} + \alpha^2} e^{-\alpha \xi} \bar{P}_{\bar{r} + \alpha^2} K_{Ai} \right), \quad (2.16)$$

donde $e^{\alpha \xi} f(x) = e^{\alpha x} f(x)$ y $\varrho_r f(x) = f(2r - x)$ es un operador de reflexión.

Por otro lado, definimos para $\alpha \in \mathbb{R}$, la distribución

$$F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) = \det(I - P_m K_\alpha P_m), \quad (2.17)$$

donde $K_\alpha = K_\alpha^1 + K_\alpha^2$, con K_α^1 con kernel integral dado por

$$K_\alpha^1(x, y) = \int_0^\infty d\lambda e^{2\alpha\lambda} \text{Ai}(x - \lambda + \max\{0, \alpha\}^2) \text{Ai}(y + \lambda + \max\{0, \alpha\}^2), \quad (2.18)$$

y K_α^2 tiene kernel integral

$$K_\alpha^2(x, y) = \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(x + \lambda + \max\{0, \alpha\}^2) \text{Ai}(y + \lambda + \max\{0, \alpha\}^2). \quad (2.19)$$

Se puede verificar que (ver [24])

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}(\alpha) \leq r) = F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r)$$

y más aún, se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) = \det(I - P_r K_{\text{Ai}} P_r), \quad (2.20)$$

que corresponde a $F_{\text{GUE}}(r)$. Por otro lado,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) = \det(I - P_{4^{1/3}r} B P_{4^{1/3}r}), \quad (2.21)$$

que corresponde a $F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r)$.

Para finalizar este capítulo, se enuncia la relación entre (2.15) y el proceso $\text{Airy}_{2 \rightarrow 1}$.

Teorema 2.9 (ver [24]) *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \leq \alpha} (\mathcal{A}_2 - t^2) \leq r - \min\{0, \alpha\}^2 \right) = F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r).$$

Es decir, se tiene el siguiente esquema

$$F_{\text{GUE}}(r) \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r)$$

Capítulo 3

Puentes Brownianos No-Intersectantes

En este capítulo se expone el problema que, se puede pensar, antecede al problema principal que se trabaja en esta tesis, correspondiente al de estudiar la distribución del máximo de N puentes Brownianos no-intersectantes (para todo este capítulo, ver [21]). Para eso, en la sección 3.1 recordaremos la definición de puente Browniano y hablaremos de la construcción de puentes Brownianos no-intersectantes utilizando la fórmula de Karlin y McGregor. En la sección 3.2 veremos una relación que existe entre este modelo y de otro conocido como Movimiento Browniano de Dyson Estacionario, del cuál se calculan en la sección 3.3 sus estadísticos continuos, similares a las del proceso Airy_2 en el capítulo anterior. Finalmente en la última sección se calculan la distribución del máximo de estos puentes y se comenta su relación con el modelo de matrices aleatorias LOE introducido en el capítulo 1.

3.1. El puente Browniano y la fórmula de Karlin-McGregor

Para comenzar esta sección, recordaremos lo que es un puente Browniano. Para más detalles, consultar [17].

Consideremos $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un movimiento Browniano estándar en $[0, 1]$ y definamos el proceso

$$B_t^0 = B_t - tB_1$$

para $t \in [0, 1]$. Este proceso se conoce como *puente Browniano*, y corresponde a un proceso Gaussiano definido por $\mathbb{E}(B_t^0) = 0$ y $\mathbb{E}(B_t^0 B_s^0) = s(1-t)$ para $0 \leq s \leq t \leq 1$. Además, para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ y $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, las probabilidades de transición vienen dadas por

$$p_{t_1, \dots, t_n}^0(A_1, A_2, \dots, A_n) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} \frac{1}{p_1(0, 0)} \prod_{i=1}^{n+1} p_{t_i - t_{i-1}}(x_{i,1}, x_i) dx_n \cdots dx_1,$$

donde $x_0 = x_{n+1} = 0$ y $p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right)$. El puente Browniano puede ser pensado como un Movimiento Browniano en $[0, 1]$ “condicionado” a que $B_1 = 0$ (notar que esto no es posible directo de la definición de condicionamiento, ya que el evento $\{B_1 = 0\}$ tiene medida nula).

Ahora consideremos N puentes Brownianos. La idea es calcular las probabilidades de transición en el evento en que estos puentes no se intersectan en la región $(0, 1)$ (notar que el evento en que los puentes no se cruzan tiene medida nula). Para eso, basta considerar la fórmula de Karlin-McGregor que enunciamos a continuación.

Teorema 3.1 (ver [18]) *Sean $X_1(t), \dots, X_N(t)$ procesos estocásticos unidimensionales independientes idénticamente distribuidos definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, tal que cada X_i es un proceso de Markov fuerte con respecto a la filtración del espacio. Asuma además que $X_1(0) < \dots < X_N(0)$. Suponga además que si $X_i(s) \geq X_j(s)$ para algún $s > 0$ y $i < j$, entonces existe un tiempo $\tau \leq s$ tal que $X_i(\tau) = X_j(\tau)$. Entonces, para cualquier colección disjunta $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que si $x \in A_i, y \in A_j$ y $i < j$, implica que $x < y$,*

$$\mathbb{P}(X_1(t) \in A_1, \dots, X_N(t) \in A_N; X_1(s) < \dots < X_N(s), \forall s \in [0, t]) = \det(p_t(X_i(0), A_j))_{i,j=1}^N, \quad (3.1)$$

donde $p_t(x, A)$ es la probabilidad de transición a tiempo t para el proceso X_i de moverse de x a A .

Con esto, ya podemos construir el modelo de los puentes Brownianos no-intersectantes, y encontrar la distribución del máximo, el cual es el contenido del resto de las secciones de este capítulo.

3.2. El Movimiento Browniano de Dyson Estacionario

El estudio de trayectorias aleatorias que no se intersectan ha sido ampliamente estudiado, tanto en áreas de la física como de las probabilidades. En particular, ha sido probado para diversos modelos que, a medida que aumenta el número de trayectorias $N \rightarrow \infty$, bajo el reescalamiento adecuado, estos modelos convergen a procesos universales, tales como los procesos de Airy.

Consideremos una colección de N puentes Brownianos $(B_1(t), \dots, B_N(t))$ en $[0, 1]$ partiendo y terminando en 0, condicionados a no intersectarse en la región $(0, 1)$. Asumiremos además que las trayectorias están ordenadas de forma que

$$B_1(t) < B_2(t) < \dots < B_N(t)$$

Se tiene que el vector $(B_1(t), \dots, B_N(t))$, para t fijo, distribuye, haciendo el reescalamiento

apropiado, a los valores propios de una matriz GUE, y luego, el modelo converge al proceso puntual Airy, y en particular, la trayectoria superior $B_N(t)$ converge al proceso \mathcal{A}_2 .

La idea de esta sección, es presentar los resultados del trabajo expuesto en [21], y corresponde a estudiar una versión finita del modelo de \mathcal{A}_2 menos una parábola (2.10). En particular, se estudia la distribución del máximo de N puentes Brownianos que no se intersectan, es decir, la distribución de la variable aleatoria

$$\mathcal{M}_N := \max_{t \in [0,1]} B_N(t)$$

Una de las desventajas al estudiar el modelo anterior es que el proceso formado por los puentes Brownianos no es estacionario. Una forma de solucionar esto es mapear las trayectorias de los puentes Brownianos a un proceso que sí sea estacionario. Con esto en mente, consideremos una matriz GUE, y dejemos que cada una de las componentes de la matriz evolucione según copias independientes del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, definido como la solución de la Ecuación Diferencial Estocástica

$$dX_t = -X_t dt + \sigma dB_t$$

donde B_t es un movimiento Browniano estándar y $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ para las variables fuera de la diagonal, y $\sigma = 1$ para las de la diagonal. El proceso formado por los valores propios a tiempo t , $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$, con λ_i creciente en i , corresponde a un proceso denominado el *Movimiento Browniano de Dyson Estacionario* (en adelante SDBM, por su sigla en inglés), y define N curvas que casi seguramente no se intersectan, indexadas por \mathbb{R} . En particular, existe la siguiente relación entre el modelo de puentes Brownianos y el SDBM

Proposición 3.2 (ver [35]) *Si $B_1(t) < \dots < B_N(t)$, $t \in [0, 1]$, son puentes Brownianos no-intersectantes y $\lambda_1(t) < \dots < \lambda_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$ es un SDBM, entonces*

$$(B_i(t))_{i=1, \dots, N} = \left(\sqrt{2t(1-t)} \lambda_i \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{t}{1-t} \right) \right) \right)_{i=1, \dots, N}, \quad (3.2)$$

en distribución, como procesos definidos para $t \in [0, 1]$.

Usando la proposición anterior con el cambio $t \rightarrow \frac{e^{2s}}{1 + e^{2s}}$, obtenemos que

$$\sqrt{2} \mathcal{M}_N = \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{\lambda_N(s)}{\cosh(s)}, \quad (3.3)$$

en distribución. Por lo tanto, para calcular la distribución deseada, se debe calcular

$$\mathbb{P}(\lambda_N(t) \leq r \cosh(t), \quad \forall t \in \mathbb{R})$$

para $r > 0$. La forma de calcular esta probabilidad, es desarrollar estadísticos continuos para el SDBM, similar al caso del proceso \mathcal{A}_2 en el capítulo 2.

3.3. Estadísticos Continuos para el SDBM

Consideremos el problema de calcular la probabilidad de que un SBDM se mantenga bajo una función g dada, dentro de un intervalo $[\ell_1, \ell_2]$. Es fácil notar la similitud de este problema con el de estadísticos continuos para \mathcal{A}_2 . Más aún, la forma de resolverlo es equivalente recordando que, como $B_N(t)$ converge bajo reescalamiento a \mathcal{A}_2 , gracias a (3.2), también lo hace $\lambda_N(t)$.

Para $g \in H^1([\ell_1, \ell_2])$, se define el operador $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g$ actuando en $L^2(\mathbb{R})$ como sigue: $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g f(\cdot) = u(\ell_2, \cdot)$, con $u(\ell_2, \cdot)$ la solución a tiempo ℓ_2 del siguiente problema

$$\begin{aligned} \partial_t u + Du &= 0 \text{ para } x < \widehat{g}(t), \quad t \in (\ell_1, \ell_2) \\ u(\ell_1, x) &= f(x) \mathbb{1}_{x < \widehat{g}(\ell_1)} \\ u(t, x) &= 0 \text{ para } x \geq \widehat{g}(t), \end{aligned}$$

donde $\widehat{g}(t) = g(\ell_2 + \ell_1 - t)$, y $D = -\frac{1}{2}(\Delta - x^2 + 1)$.

La elección del operador D no es arbitraria. En efecto, si recordamos la definición del kernel Hermite (1.23):

$$K_H^N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$$

donde φ_n son las funciones de Hermite (1.22), entonces se cumple que $D\varphi_n = n\varphi_n$. Es decir, φ_n es función propia del operador D , y con esto no es difícil convencerse de que K_H^N no es más que la proyección sobre el subespacio vectorial generado por las primeras n funciones propias de D . El kernel de Hermite jugará un rol fundamental, ya que juega el rol que tenía el kernel Airy para el proceso \mathcal{A}_2 .

Teorema 3.3 (ver [3]) *Para todo $\ell_1 < \ell_2$ y $g \in H^1([\ell_1, \ell_2])$*

$$\mathbb{P}(\lambda_N(t) \leq g(t), \quad \forall t \in [\ell_1, \ell_2]) = \det \left(I - K_H^N + \Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g e^{(\ell_2 - \ell_1)D} K_H^N \right). \quad (3.4)$$

Por supuesto, poca utilidad tiene el teorema anterior si no encontramos una fórmula explícita para $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g$. Por suerte, el problema de valor de frontera asociado es fácil de resolver al convertirla en una ecuación del calor utilizando un cambio de variable apropiado. En efecto,

si $u(t, x)$ corresponde a la solución de la EDP, consideremos la transformación $u(t, x) = e^{x^2/2+t}v(\tau, z)$, con $\tau = \frac{1}{4}e^{2t}$ y $z = e^t x$. No es difícil convencerse de que $v(\tau, z)$ satisface la siguiente EDP relacionada a la ecuación del calor

$$\begin{aligned}\partial_\tau v - \partial_z^2 v &= 0 \text{ para } z < \sqrt{4\tau}\widehat{g}(\log(4\tau)/2), \tau \in (\alpha, \beta) \\ v(\alpha, z) &= e^{-z^2/(8\alpha) - \log(4\alpha)/2} f\left(z/\sqrt{4\alpha}\right) \mathbf{1}_{z < \sqrt{4\alpha}\widehat{g}(\log(4\alpha)/2)} \\ v(\tau, z) &= 0 \text{ para } z \geq \sqrt{4\alpha}\widehat{g}(\log(4\alpha)/2),\end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{1}{4}e^{2\ell_1}$ y $\beta = \frac{1}{4}e^{2\ell_2}$. Esta EDP puede resolverse de manera explícita usando la fórmula de Feynman-Kac, y deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la fórmula para $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g$.

Proposición 3.4 *Sea $\alpha = \frac{1}{2}e^{2\ell_1}$, $\beta = \frac{1}{4}e^{2\ell_2}$, y denotemos por $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g(x, y)$ al kernel integral de $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^g(x, y) &= e^{\frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \ell_2} \frac{e^{-(e^{\ell_1}x - e^{\ell_2}y)^2 / (4(\beta - \alpha))}}{\sqrt{4\pi(\beta - \alpha)}} \\ &\quad \cdot \mathbb{P}_{B(\alpha) = e^{\ell_1}x, B(\beta) = e^{\ell_2}y} \left(B(t) \leq \sqrt{4t}g\left(\frac{1}{2}\log(4t)\right), \forall t \in [\alpha, \beta] \right),\end{aligned}$$

donde B corresponde a un puente Browniano de coeficiente de difusión 2.

Usando esto, se puede calcular la distribución de \mathcal{M}_N usando (3.3).

3.4. Distribución del máximo y conexión con LOE

En esta última sección de este capítulo, se muestra la distribución de \mathcal{M}_N encontrada en [21].

Para calcular $\mathbb{P}(\sqrt{2}\mathcal{M}_N \leq r)$, para $r > 0$, basta usar $g(t) = r \cosh(t)$ en (3.4). En tal caso, la probabilidad en la Proposición 3.4 se transforma en

$$\mathbb{P}_{B(\alpha) = e^{\ell_1}x, B(\beta) = e^{\ell_2}y} \left(B(t) \leq 2rt + \frac{1}{2}r, \forall t \in [\alpha, \beta] \right)$$

la cual puede ser calculada usando la fórmula de Cameron-Martin-Girsanov y el principio de reflexión para el movimiento Browniano. Usando esto, más el hecho de que el primer factor en la probabilidad de la Proposición 3.4 corresponde a imponer $g = \infty$, y por lo tanto es

simplemente $e^{-(\ell_2-\ell_1)D}$, se obtiene que para el caso $g(t) = r \cosh(t)$, el operador $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^{g(t)=r \cosh(t)}$, que denominaremos simplemente $\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^{(r)}$, viene dado por

$$\Psi_{[\ell_1, \ell_2]}^{(r)} = \bar{P}_{r \cosh(\ell_1)} \left(e^{-(\ell_2-\ell_1)D} - R_{[\ell_1, \ell_2]}^{(r)} \right) \bar{P}_{r \cosh(\ell_2)}, \quad (3.5)$$

donde $R_{[\ell_1, \ell_2]}^{(r)}$ es un operador en $L^2(\mathbb{R})$ con kernel integral dado por

$$R_{[\ell_1, \ell_2]}^{(r)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\beta - \alpha)}} e^{\frac{1}{2}(y^2-x^2)+\ell_2-r(e^{\ell_2}y-e^{\ell_1}x)+r^2(\beta-\alpha)-(e^{\ell_1}x+e^{\ell_2}y-2r(\alpha+\beta)-r)^2/(4(\beta-\alpha))}. \quad (3.6)$$

Luego, para encontrar la probabilidad buscada, basta imponer $\ell_1 = \ell_2 = L$, y tomar límite cuando $L \rightarrow \infty$. El lado izquierdo de (3.4) converge a la probabilidad buscada, mientras que al estudiar el lado derecho, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.5 (ver [21]) *Sea $r > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}(\sqrt{2}\mathcal{M}_N \leq r) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq r\right) = \det(I - K_H^N \varrho_r K_H^N), \quad (3.7)$$

donde $\varrho_r f(x) = f(2r - x)$.

Ya han quedado claras las similitudes entre este problema y el caso del supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola, el cual, como probó Johansson (2.10), distribuye como TW_1 . Las similitudes entre los dos problemas van más allá, pues \mathcal{M}_N también está relacionada con la teoría de matrices aleatorias.

Teorema 3.6 (ver [21], sección 3) *Sea $r > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}(\sqrt{2}\mathcal{M}_N \leq r) = F_{LOE}^N(2r^2)$$

donde F_{LOE}^N es la distribución del valor propio más grande de una matriz $LOE(N)$.

Esto último, junto con la convergencia de LOE a GOE (1.37), nos dice que el modelo aquí presentado converge en distribución al modelo de \mathcal{A}_2 menos una parábola del capítulo 2, (2.10).

En resumen, se tiene el siguiente esquema para la convergencia de las distribuciones hasta ahora expuestas

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & F_{\text{LOE}}(2r^2) \\
& & & & \downarrow \text{N} \rightarrow \infty \\
F_{\text{GUE}}(r) & \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} & F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r) & \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} & F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r)
\end{array}$$

Una pregunta natural que surge es ¿existirán dos distribuciones que logren cerrar el esquema anterior? La respuesta es sí, y es el tema del próximo capítulo.

Capítulo 4

La distribución del máximo en $[0, p]$

Este capítulo está dedicado al resultado principal de esta tesis. En los capítulos anteriores se han expuesto dos modelos de procesos estocásticos: el del supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola y el del máximo de N puentes Brownianos sin intersección. Más aún, se sabe que el segundo modelo converge bajo el reescalamiento adecuado al primero, en distribución. Una pregunta natural que surge es, ¿se podrá construir un modelo similar al del supremo de \mathcal{A}_2 menos una parábola sobre una semirecta para el caso de los puentes Brownianos? De ser así, debería esperarse que este modelo convergiera bajo reescalamiento al proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$.

4.1. Distribución del máximo

Consideremos una colección de N puentes Brownianos $(B_1(t), \dots, B_N(t))$ en $[0, 1]$ partiendo y terminando en 0, condicionados a no intersectarse en la región $(0, 1)$. Asumiremos además que las trayectorias están ordenadas de forma que

$$B_1(t) < B_2(t) < \dots < B_N(t)$$

Dado $p \in (0, 1)$, queremos estudiar la distribución de la variable aleatoria

$$\mathcal{M}_N^p := \max_{t \in [0, p]} B_N(t), \tag{4.1}$$

que gracias a (3.2), podemos reescribirlo en función del SDBM como

$$\mathcal{M}_N^p = \sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)},$$

donde $\alpha = \frac{1}{2} \log \left(\frac{p}{1-p} \right)$.

Con esto, para encontrar la distribución de \mathcal{M}_N^p , debemos estudiar la probabilidad

$$\mathbb{P}(\lambda_N(t) \leq r \cosh(t), \forall t \in (-\infty, \alpha])$$

donde $r > 0$ (notemos que $\mathbb{P}(\mathcal{M}_N^p \leq r) = 0$, $\forall r < 0$). Con ese fin, fijemos $L \in \mathbb{R}$ tal que $-L \leq \alpha$, y usando los estadísticos continuos para el SDBM del capítulo anterior, tenemos que

$$\mathbb{P}(\lambda_N(t) \leq r \cosh(t), \forall t \in [-L, \alpha]) = \det(I - K_H^N + \Psi_{[-L, \alpha]}^{(r)} e^{(\alpha+L)D} K_H^N), \quad (4.2)$$

donde, recordemos, $\Psi_{[-L, \alpha]}^{(r)} = \Psi_{[-L, \alpha]}^{g(t)=r \cosh(t)}$.

Gracias a la continuidad de las trayectorias del SDBM, si tomamos $L \rightarrow \infty$ el lado izquierdo converge a la probabilidad buscada. Luego, tenemos que calcular el límite cuando $L \rightarrow \infty$ en el lado derecho. En primer lugar, notemos que aún cuando e^{tD} está bien definido generalmente para $t < 0$, $e^{tD} K_H^N$ está bien definido para todo t , y usando que las funciones de Hermite son las funciones propias de D , tenemos una fórmula explícita para su kernel integral y viene dado por

$$\begin{aligned} e^{tD} K_H^N(x, y) &= e^{tD} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{tD} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k \varphi_n(x)}{k!} \varphi_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k}{k!} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{tn} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \end{aligned}$$

y gracias a esto, es fácil notar que $e^{tD} K_H^N e^{-tD} K_H^N = K_H^N$, y que $K_H^N e^{tD} K_H^N = e^{tD} K_H^N$. Usando esto y la propiedad cíclica del determinante, el determinante del lado derecho queda

$$\det(I - K_H^N + e^{(\alpha+L)D} K_H^N \Psi_{[-L, \alpha]}^{(r)} K_H^N)$$

Por otro lado, recordando la descomposición de $\Psi_{[-L,\alpha]}^{(r)}$ usando (3.5)

$$\Psi_{[-L,\alpha]}^{(r)} = \overline{P}_{r \cosh(L)} \left(e^{-(\alpha+L)D} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \right) \overline{P}_{r \cosh(\alpha)}$$

notamos que el término $\overline{P}_{r \cosh(L)}$ se parece cada vez más al operador identidad a medida que L crece. Con este fin, descompondremos $\Psi_{[-L,\alpha]}^{(r)}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Psi_{[-L,\alpha]}^{(r)} &= (I - P_{r \cosh(L)}) \left(e^{-(\alpha+L)D} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \right) \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} \\ &= \left(e^{-(\alpha+L)D} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \right) \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} - P_{r \cosh(L)} \left(e^{-(\alpha+L)D} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \right) \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} \\ &= e^{-(\alpha+L)D} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} - \Omega_{L,\alpha} \\ &= e^{-(\alpha+L)D} - e^{-(\alpha+L)D} P_{r \cosh(\alpha)} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} - \Omega_{L,\alpha} \end{aligned}$$

donde $\Omega_{L,\alpha} := P_{r \cosh(L)} (e^{-(\alpha+L)D} - R_{[-L,\alpha]}^{(r)}) \overline{P}_{r \cosh(\alpha)}$.

Juntando todo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_N(t) \leq r \cosh(t), \forall t \in (-\infty, \alpha]) \\ = \lim_{L \rightarrow \infty} \det(I - K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(\alpha)} K_{\mathbb{H}}^N - e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} K_{\mathbb{H}}^N - e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha} K_{\mathbb{H}}^N) \end{aligned}$$

con $R_{[-L,\alpha]}^{(r)}$ como en (3.6).

La idea es que $e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha} K_{\mathbb{H}}^N$ es un término de “error” que tiende a cero cuando $L \rightarrow \infty$, en norma traza.

Lema 4.1 *Asuma $r > 0$, entonces $e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha} K_{\mathbb{H}}^N \rightarrow 0$ en norma traza cuando $L \rightarrow \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. A lo largo de esta demostración denotamos por c_1 y c_2 a constantes positivas que no dependen de L y que pueden ir variando paso a paso.

Recordemos que

$$\|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha} K_{\mathbb{H}}^N\|_1 \leq \|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha}\|_2 \|K_{\mathbb{H}}^N\|_2$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma Hilbert-Schmidt de un operador en $L^2(\mathbb{R})$, definida en (1.3).

Notemos que gracias a la ortogonalidad de las funciones de Hermite,

$$\begin{aligned}
& \|K_{\mathbb{H}}^N\|_2^2 \\
&= \sum_{n,m=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} dx \varphi_n(x) \varphi_m(x) \int_{\mathbb{R}} dy \varphi_n(y) \varphi_m(y) \\
&= N < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, basta probar que $\|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha}\|_2 \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow \infty$. Recordando la definición de $\Omega_{L,\alpha}$, tenemos que

$$\|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N \Omega_{L,\alpha}\|_2 \leq \|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} e^{-(\alpha+L)D} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2 + \|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2$$

- Notemos que

$$\begin{aligned}
& e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} e^{-(\alpha+L)D} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}(x, y) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz e^{(\alpha+L)n} \varphi_n(x) \varphi(z) e^{-(\alpha+L)D}(z, y) \mathbb{1}_{y \leq r \cosh(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} e^{-(\alpha+L)D} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2^2 \\
&= \sum_{n,n'=0}^{N-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{r \cosh(\alpha)} dy e^{(\alpha+L)(n+n')} \varphi_n(x) \varphi_{n'}(x) \right. \\
&\quad \left. \iint_{[r \cosh(L), \infty)^2} dz dz' \varphi_n(z) \varphi_{n'}(z) e^{-(\alpha+L)D}(z, y) e^{-(\alpha+L)D}(z', y) \right)
\end{aligned}$$

Usando que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{N-1} e^{2n(\alpha+L)} \int_{-\infty}^{r \cosh(\alpha)} dy \left(\int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz \varphi_n(z) e^{-(\alpha+L)D}(z, y) \right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{2n(\alpha+L)} \int_{-\infty}^{r \cosh(\alpha)} dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi_n(z) \mathbb{1}_{r \cosh(L) \leq z} e^{-(\alpha+L)D}(z, y) \right)^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{N-1} e^{2n(\alpha+L)} \int_{-\infty}^{r \cosh(\alpha)} dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi_n^2(z) \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dy (e^{-(\alpha+L)D}(z, y))^2 \right) \\
&\leq N e^{2(N-1)(\alpha+L)} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy (e^{-(\alpha+L)D}(z, y))^2
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

De la definición de $\Psi_{[-L,\alpha]}^{(r)}(x, y)$, podemos obtener una fórmula para el kernel de $e^{-(\alpha+L)D}(z, y)$ imponiendo $g = \infty$, y gracias a esto obtenemos que

$$\left(e^{-(\alpha+L)D}(z, y)\right)^2 = \frac{e^{2(\alpha+L)}}{\pi(e^{2(\alpha+L)} - 1)} e^{-v_1 y^2 + v_2 y + v_3}$$

con

$$v_1 = \frac{2e^{2(\alpha+L)}}{e^{2(\alpha+L)} - 1} - 1, \quad v_2 = \frac{4e^{(\alpha+L)}z}{e^{2(\alpha+L)} - 1}, \quad v_3 = -z^2 - \frac{2z^2}{e^{2(\alpha+L)} - 1}$$

Así, la integral en y es simplemente una integral Gaussiana, y al calcularla obtenemos:

$$\frac{Ne^{2N(\alpha+L)}}{\sqrt{\pi(e^{4(\alpha+L)} - 1)}} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz e^{-\tanh(\alpha+L)z^2}$$

como además tenemos que $\alpha + L > 0$, entonces $\tanh(\alpha + L) > 0$ y con esto, podemos acotar la integral en z por $\frac{e^{-r^2 \cosh^2(L) \tanh(\alpha+L)}}{2r \tanh(\alpha+L) \cosh(L)}$, y así:

$$\begin{aligned} & \|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} e^{-(\alpha+L)D} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2^2 \\ & \leq \frac{Ne^{2N(\alpha+L) - r^2 \cosh^2(L) \tanh(\alpha+L)}}{\sqrt{\pi(e^{4(\alpha+L)} - 1)} 2r \cosh(L) \tanh(\alpha + L)} \\ & \leq c_1 e^{2NL - r^2 \cosh^2(L) \tanh(\alpha+L)} \\ & \leq c_1 e^{2NL - c_2 e^{2L}}. \end{aligned}$$

Lo que acota la primera norma.

- Para el segundo término, razonamos de manera análoga. Luego,

$$\|e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(L)} R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2^2 \leq Ne^{2(N-1)(\alpha+L)} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(R_{[-L,\alpha]}^{(r)}(z, y)\right)^2$$

donde el kernel integral de $R_{[-L,\alpha]}^{(r)}$ lo podemos escribir como:

$$R_{[-L,\alpha]}^{(r)}(z, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(e^{2\alpha} - e^{-2L})}} e^{-q_1 y^2 + q_2 y + q_3}$$

con

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1 + e^{2\alpha+2L}}{2(e^{2\alpha+2L} - 1)}, \quad q_2 = \frac{2e^\alpha(r + e^{2L}r - e^L z)}{e^{2\alpha+2L} - 1}, \\ q_3 &= -\frac{2(1 + e^{2\alpha})(1 + e^{2L})r^2 - 4e^L(1 + e^{2\alpha})rz + (1 + e^{2\alpha+2L})z^2}{2(e^{2\alpha+2L} - 1)} \end{aligned}$$

Como $\alpha + L > 0$, tenemos que $q_1 > 0$ y con esto la integral en y es una integral Gaussiana, que al calcularla obtenemos que:

$$\|e^{(\alpha+L)D}K_H^N P_{r \cosh(L)} R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2^2 \leq \frac{N e^{2(N-1)(\alpha+L)}}{\sqrt{e^{2\alpha} + e^{-2L}}} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz e^{-w_1 z^2 + w_2 z + w_3}$$

con:

$$w_1 = \frac{e^{2\alpha+2L} - 1}{e^{2\alpha+2L+1}}, \quad w_2 = \frac{4re^L(e^{2\alpha} - 1)}{e^{2\alpha+2L} + 1}, \quad w_3 = 2\alpha - \frac{2(e^{2\alpha} - 1)(e^{2L} + 1)r^2}{e^{2\alpha+2L} + 1}$$

La idea es usar una cota similar a la norma anterior. Con ese fin notemos que

$$\int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz e^{-w_1 z^2 + w_2 z + w_3} = e^{\frac{w_2^2}{4w_1} + w_3} \int_{r \cosh(L)}^{\infty} dz e^{-w_1 \left(z - \frac{w_2}{2w_1}\right)^2} = e^{\frac{w_2^2}{4w_1} + w_3} \int_{r \cosh(L) - \frac{w_2}{2w_1}}^{\infty} dz e^{-w_1 z^2}$$

Notemos que $\frac{w_2}{2w_1} = -\frac{2re^L(e^{2\alpha}-1)}{e^{2\alpha+2L}-1} \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow \infty$. Luego, $\exists \ell > 0$ tal que $\forall L > \ell$, $r \cosh(L) - \frac{w_2}{2w_1} > 0$, y gracias a esto y el hecho de que $w_1 = \tanh(\alpha + L) > 0$, podemos acotar la integral del lado derecho por $c_1 e^{-w_1 r^2 \cosh^2(L) + w_2 \cosh(L) + w_3}$ para todo $L > \ell$.

Reemplazando esto en la cota de la norma y procediendo de manera similar que para la primera cota, obtenemos que

$$\|e^{(\alpha+L)D}K_H^N P_{r \cosh(L)} R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)}\|_2^2 \leq c_1 e^{2NL - c_2 e^{2L}}$$

Juntando todo, obtenemos que

$$\|e^{(\alpha+L)D}K_H^N \Omega_{L,\alpha} K_H^N\|_1^2 \leq \|e^{(\alpha+L)D}K_H^N \Omega_{L,\alpha}\|_2^2 \|K_H^N\|_2^2 \leq c_1 e^{2NL - c_2 e^{2L}}$$

que converge a 0 cuando $L \rightarrow \infty$, lo que concluye la demostración. \square

Gracias a la continuidad del determinante en la norma traza, si tenemos que existe algún operador Λ que cumpla $e^{(\alpha+L)D}K_H^N R_{[-L,\alpha]}^{(r)} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_H^N \rightarrow \Lambda$ cuando $L \rightarrow \infty$, y la convergencia es lo suficientemente fuerte para implicar la convergencia en determinante, como por ejemplo norma traza, tendremos que el límite buscado es

$$\det(I - K_H^N P_{r \cosh(\alpha)} K_H^N - \Lambda)$$

Como es de esperar, al igual que en los casos del supremo de \mathcal{A}_2 (ver [8]) y el SDBM (ver [21]), el término en cuestión no depende de L .

Teorema 4.2 *Para todo $r > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq r \right) = \det \left(I - K_H^N P_{r \cosh(\alpha)} K_H^N - K_H^N e^{r \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_H^N \right), \quad (4.3)$$

donde $e^{c\xi}f(x) = e^{cx}f(x)$, para $c \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que para todo $L \geq -\alpha$,

$$e^{(\alpha+L)D}K_{\mathbb{H}}^N R_{[-L,\alpha]}^{(r)} = K_{\mathbb{H}}^N e^{r \sinh(\alpha)\xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha)\xi}$$

En efecto, lo que haremos es escribir el kernel integral de $R_{[-L,\alpha]}^{(r)}$ como

$$R_{[-L,\alpha]}^{(r)}(x, y) = \frac{e^\alpha}{\sqrt{\pi(e^{2\alpha} - e^{-2L})}} e^{-u_1 x^2 + u_2 x + u_3}$$

con,

$$u_1 = \frac{1 + e^{2\alpha+2L}}{2(e^{2\alpha+2L} - 1)}, u_2 = \frac{2e^L(r + e^{2\alpha}r - e^\alpha y)}{e^{2\alpha+2L} - 1},$$

$$u_3 = -\frac{2(1 + e^{2\alpha})(1 + e^{2L})r^2 - 4e^\alpha(1 + e^{2L})ry + (1 + e^{2\alpha+2L})y^2}{2(e^{2\alpha+2L} - 1)}$$

Esto, junto con la representación como integral de contorno de la función de Hermite:

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/2} \frac{n!}{2\pi i} \oint dt \frac{e^{2tx-t^2}}{t^{n+1}}$$

donde el contorno de integración envuelve el origen, nos da

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha+L)D}K_{\mathbb{H}}^N R_{[-L,\alpha]}^{(r)}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dz \sum_{n=0}^{N-1} e^{(\alpha+L)n} \varphi_n(x) \varphi_n(z) R_{[-L,\alpha]}^{(r)}(z, y) \\ &= \frac{e^\alpha}{\sqrt{\pi(e^{2\alpha} - e^{-2L})}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{(\alpha+L)n} \varphi_n(x) (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \frac{n!}{2\pi i} \oint dt \frac{e^{-t^2}}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-z^2/2+2tz-u_1 z^2+u_2 z+u_3} \end{aligned}$$

La integral en z es una integral Gaussiana, y luego de calcularla, la integral en t queda

$$\frac{\sqrt{\pi(e^{2\alpha} - e^{-2L})}}{e^\alpha} \oint dt \frac{e^{-r^2 - e^{-2\alpha}r^2 + 2e^{-2\alpha-L}rt + 2e^{-L}rt - e^{-2\alpha-2L}t^2 + 2e^{-\alpha}ry - 2e^{-\alpha-L}ty - y^2/2}}{t^{n+1}}$$

Realizando el cambio $t \rightarrow e^{(\alpha+L)t}$ y agrupando términos obtenemos

$$\frac{\sqrt{\pi(e^{2\alpha} - e^{-2L})}}{e^\alpha} \oint dt \frac{e^{-t^2 + 2t(e^{-\alpha}r + e^\alpha r - y) - (e^{-\alpha}r + e^\alpha r - y)^2/2 + \frac{1}{2}r^2(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}) + r(e^{-\alpha} - e^\alpha)y}}{t^{n+1}e^{(\alpha+L)n}}$$

Juntando todo, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) \left((2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-(e^{-\alpha}r + e^\alpha r - y)^2/2} \frac{n!}{2\pi i} \oint dt \frac{e^{-t^2 + 2t(e^{-\alpha}r + e^\alpha r - y)}}{t^{n+1}} \right) e^{r^2 \sinh(2\alpha) - 2r \sinh(\alpha)y},$$

donde el término entre paréntesis corresponde a $\varphi_n(e^{-\alpha}r + e^\alpha r - y) = \varphi_n(2r \cosh(\alpha) - y)$.

Notando que el último término a la derecha es igual a:

$$e^{r \sinh(\alpha)(2r \cosh(\alpha) - y)} e^{-r \sinh(\alpha)y}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} & e^{(\alpha+L)D} K_{\mathbb{H}}^N R_{[-L, \alpha]}^{(r)}(x, y) \\ &= K_{\mathbb{H}}^N(x, 2r \cosh(\alpha) - y) e^{r \sinh(\alpha)(2r \cosh(\alpha) - y)} e^{-r \sinh(\alpha)y} \\ &= K_{\mathbb{H}}^N e^{r \sinh(\alpha)\xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha)\xi}(x, y) \end{aligned}$$

concluyendo la demostración. □

En particular, por la relación entre el modelo de los puentes Brownianos y el SDBM, se tiene que para todo $r > 0$.

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{2} \mathcal{M}_N^p \leq r \right) = \det \left(I - K_{\mathbb{H}}^N P_{r \cosh(\alpha)} K_{\mathbb{H}}^N - K_{\mathbb{H}}^N e^{r \sinh(\alpha)\xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha)\xi} \overline{P}_{r \cosh(\alpha)} K_{\mathbb{H}}^N \right) \quad (4.4)$$

$$\text{con } \alpha = \frac{1}{2} \log \left(\frac{p}{1-p} \right).$$

4.2. Consistencia con $\alpha \rightarrow \pm\infty$

Veamos ahora que nuestra distribución (3.7) es consistente cuando $\alpha \rightarrow \pm\infty$. En particular, tomar $\alpha \rightarrow \infty$ es equivalente a tomar $p \rightarrow 1$ en (4.1), por lo que es de esperar que la distribución se parezca cada vez más a (3.7) cuando α crece. Por otro lado, tomar $\alpha \rightarrow -\infty$ es equivalente a tomar $p \rightarrow 0$. Como los puentes Brownianos curzan infinitas veces el origen en cualquier vecindad del 0, la distribución debería ser constante e igual a 1 en este límite.

Con el objetivo de facilitar el cálculo de los límites, podemos usar el hecho de que K_H^N es un operador de rango finito para escribir el determinante de la distribución (4.3) como un determinante de matrices en $\mathbb{R}^{N,N}$. Para eso, definamos los siguientes operadores $K_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, y $K_2 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, actuando de la siguiente forma:

$$(K_1 v)(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) v_n, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$(K_2 f)_n = \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi_n(y) f(y), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Es facil verificar que $K_1 K_2 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ cumple $K_1 K_2 = K_H^N$ y que $K_2 K_1$ es la identidad en \mathbb{R}^N . Gracias a esto y la propiedad cíclica del determinante, obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \det(I - K_H^N P_{r \cosh(\alpha)} K_H^N - K_H^N e^{r \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_H^N) \\ &= \det(I - K_1 K_2 P_{r \cosh(\alpha)} K_1 K_2 - K_1 K_2 e^{r \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_1 K_2) \\ &= \det(I - K_2 P_{r \cosh(\alpha)} K_1 - K_2 e^{r \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_1) \end{aligned}$$

donde el último determinante corresponde a un determinante de matrices en $\mathbb{R}^{N,N}$ indexadas por $\{0, \dots, N-1\}^2$. Notemos que las dos componentes no triviales que forman este determinante cumplen que para todo $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} (K_2 P_{r \cosh(\alpha)} K_1 v)_i &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r \cosh(\alpha)}^{\infty} dx \varphi_i(x) \varphi_k(x) v_k, \quad y \\ (K_2 e^{r \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{r \cosh(\alpha)} e^{-r \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{r \cosh(\alpha)} K_1 v)_i &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\infty} dx e^{2r \sinh(\alpha) x} \varphi_i(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x) v_k \end{aligned}$$

Se concluye que el determinante corresponde a:

$$\det \left(\left[\begin{array}{c} \delta_{jk} - \int_{r \cosh(\alpha)}^{\infty} dx \varphi_j(x) \varphi_k(x) - \int_0^{\infty} dx e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x) \end{array} \right]_{j,k=0}^{N-1} \right). \quad (4.5)$$

Denotemos por $E, F \in \mathbb{R}^{N,N}$ a las matrices que cumplen:

$$E_{jk} = \int_{r \cosh(\alpha)}^{\infty} dx \varphi_j(x) \varphi_k(x), \text{ y } F_{jk} = \int_0^{\infty} dx e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x), \quad (4.6)$$

y usando la expresión anterior, calculemos cada límite:

- $\alpha \rightarrow -\infty$: En primer lugar, es fácil verificar que $E_{jk} \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow -\infty$. Por otro lado, si calculamos el límite $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} F_{jk}$, podemos hacer un cambio en el límite y en la integral, para obtener:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^0 e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_i(r \cosh(\alpha) - x) \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) dx.$$

Como las funciones de Hermite son acotadas (ver [30]), tenemos que

$$\left| \int_{-\infty}^0 e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_i(r \cosh(\alpha) - x) \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) dx \right| \leq K \int_{-\infty}^0 e^{2r \sinh(\alpha)x} dx = \frac{K}{2r \sinh(\alpha)},$$

para alguna constante $K > 0$, donde el último término converge a cero cuando $\alpha \rightarrow \infty$. Con esto, gracias a la continuidad del determinante, tenemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq r \right) = \det(I) = 1, \quad \forall r > 0.$$

- $\alpha \rightarrow \infty$: Definamos la matriz $H_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) \varphi_k(2r - x) dx$, $j, k \in \{0, \dots, N-1\}$. Se puede verificar de manera análoga que en (4.5), usando los operadores K_1 y K_2 que

$$\det(I - K_H^N \varrho_r K_H^N) = \det(I - H)$$

Con esto, queremos probar que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \det(I - E - F) = \det(I - H)$$

Descompondremos F como $F = F^1 - F^2$ con

$$F_{jk}^1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x) dx,$$

$$F_{jk}^2 = \int_{-\infty}^0 e^{2r \sinh(\alpha)x} \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x) dx$$

Trabajemos F^1 . Sabemos que la función generadora de momentos de los polinomios de Hermite es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2}$$

Usando esto, se puede probar (ver [21]) que

$$H_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x) \varphi_k(2r - x) dx = \frac{1}{\sqrt{2^{j+k} j! k!}} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j,k\}} (-2)^\ell \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} (2r)^{j+k-2\ell}$$

Por otro lado tenemos que, usando la definición de φ_n (1.22)

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\sqrt{2^{j+k} j! k! \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_j(r \cosh(\alpha) + x) H_k(r \cosh(\alpha) - x) e^{-x^2 - r^2 \cosh^2(\alpha) + 2r \sinh(\alpha)x}$$

donde H_n es el polinomio de Hermite de grado n . Usando esto,

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{t_1^j t_2^k}{j! k!} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_j(r \cosh(\alpha) + x) H_k(r \cosh(\alpha) - x) e^{-x^2 - r^2 \cosh^2(\alpha) + 2r \sinh(\alpha)x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2(r \cosh(\alpha) + x)t_1 - t_1^2} e^{2r \cosh(\alpha) - x)t_2 - t_2^2} e^{-x^2 - r^2 \cosh^2(\alpha) + 2r \sinh(\alpha)x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 + (2t_1 - 2t_2 + 2r \sinh(\alpha))x + (2r \cosh(\alpha)(t_1 + t_2) - t_1^2 - t_2^2 - r^2 \cosh^2(\alpha))} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2 - 2t_1 t_2 + 2r(t_1 + t_2) \cosh(\alpha) + 2r(t_1 - t_2) \sinh(\alpha)}. \end{aligned}$$

Notemos que en la última igualdad, el coeficiente que acompaña al factor $t_1^j t_2^k$ corresponde a

$$\sqrt{\pi} e^{-r^2} \partial_{t_1}^j \partial_{t_2}^k (e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2}) \Big|_{t_1=t_2=0}$$

donde $k_1 = 2r(\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha))$ y $k_2 = 2r(\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha))$.

Con esto,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx H_j(r \cosh(\alpha) + x) H_k(r \cosh(\alpha) - x) e^{-x^2 - r^2 \cosh^2(\alpha) + 2r \sinh(\alpha)x} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \partial_{t_1}^j \partial_{t_2}^k (e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2}) \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \partial_{t_1}^j [(k_2 - 2t_1)^k e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2}] \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \left(\sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} \partial_{t_1}^{\ell} (k_2 - 2t_1)^k \partial_{t_1}^{j-\ell} e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2} \right) \Big|_{t_1=t_2=0} \end{aligned}$$

Notemos que en la suma anterior, si $j > k$, el término $\partial_{t_1}^{\ell} (k_2 - 2t_1)^k$ es cero para $\ell > k$. Con esto, el límite superior de la suma podemos cambiarlo por $\min\{j, k\}$. Luego, el término anterior es igual a:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\pi} e^{-r^2} \left(\sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} \binom{j}{\ell} \partial_{t_1}^{\ell} (k_2 - 2t_1)^k \partial_{t_1}^{j-\ell} e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2} \right) \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \left(\sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} \binom{j}{\ell} \ell! \binom{k}{\ell} (k_2 - 2t_1)^{k-\ell} (-2)^{\ell} (k_1 - 2t_2)^{j-\ell} e^{k_1 t_1 + k_2 t_2 - 2t_1 t_2} \right) \Big|_{t_1=t_2=0} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} (-2)^{\ell} \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} k_2^{k-\ell} k_1^{j-\ell} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} (-2)^{\ell} \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} k_2^{k-\ell} k_1^{k-\ell} k_1^{j-k} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} (-2)^{\ell} \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} (k_1 k_2)^{k-\ell} k_1^{j-k}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= (2r \cosh(\alpha) + 2r \sinh(\alpha))(2r \cosh(\alpha) - 2r \sinh(\alpha)) = 4r^2 \\ k_2 &= 2r(\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)) = r(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 2re^{\alpha}. \end{aligned}$$

y usando esto, nos queda

$$\sqrt{\pi} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} (-2)^{\ell} \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} (4r^2)^{k-\ell} (2re^{\alpha})^{j-k}$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j,k\}} (-2)^\ell \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} (2r)^{j+k-2\ell} e^{\alpha(j-k)}$$

Juntando todo, obtenemos:

$$F_{jk}^1 = \frac{1}{\sqrt{2^{j+k} j! k!}} e^{-r^2} \sum_{\ell=0}^{\min\{j,k\}} (-2)^\ell \ell! \binom{j}{\ell} \binom{k}{\ell} (2r)^{j+k-2\ell} e^{\alpha(j-k)} = H_{jk} e^{\alpha(j-k)}$$

Se definimos la matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{N,N}$ que cumple $D_{ii} = e^{\alpha i}$, obtenemos que

$$F^1 = D H D^{-1}$$

y como el determinante es invariante bajo conjugaciones, obtenemos que

$$\det(I - E - F^1 + F^2) = \det(I - D^{-1} E D - H + D^{-1} F^2 D)$$

por lo que para concluir, tenemos que probar que $D^{-1} E D$ y $D^{-1} F^2 D$ convergen a cero cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

Tenemos que $(D^{-1} E D)_{jk} = e^{\alpha(k-j)} \int_{r \cosh(\alpha)}^{\infty} \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx$. Es claro que si $j \geq k$, entonces el límite es 0.

Por otro lado, si $k > j$, tenemos que, gracias a la regla de L'Hopital:

$$\begin{aligned} & \int_{r \cosh(\alpha)}^{\infty} \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} & \frac{r \cosh(\alpha)}{e^{-\alpha(k-j)}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varphi_j(r \cosh(\alpha)) \varphi_k(r \cosh(\alpha))}{(k-j) e^{-\alpha(k-j)}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{e^{-r^2 \cosh^2(\alpha) + \alpha(k-j)}}{(k-j)} H_j(r \cosh(\alpha)) H_k(r \cosh(\alpha)) \end{aligned}$$

donde el último término converge a cero (recordar que H_j y H_k son polinomios).

Para la otra matriz,

$$\begin{aligned} & (D^{-1} F^2 D)_{jk} \\ &= e^{\alpha(k-j)} \int_{-\infty}^0 e^{2 \sinh(\alpha)x} \varphi_j(r \cosh(\alpha) + x) \varphi_k(r \cosh(\alpha) - x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-x^2 + 2r \sinh(\alpha)x - r^2 \cosh^2(\alpha) + \alpha(k-j)} H_j(r \cosh(\alpha) + x) H_k(r \cosh(\alpha) - x) dx. \end{aligned}$$

donde el último término converge a cero por TCD.

Con esto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq r \right) = \det(I - H) = \det(I - K_H^N \varrho_r K_H^N)$$

4.3. Reescalamiento con $\cosh(\alpha)$ y el límite $\alpha \rightarrow -\infty$

Antes de continuar, notemos la similitud entre (4.6) con los kernel (2.18) y (2.19). Esto nos da una intuición de que nuestro determinante debería, en efecto, converger bajo algún reescalamiento a la distribución del proceso $\text{Airy}_{2 \rightarrow 1}$ (2.17). Por otro lado, notemos que los kernel K_α^1 y K_α^2 contienen el parámetro $\max\{0, \alpha\}^2$ que proviene de la parábola que se le resta al proceso $\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \mathcal{A}_2(t) - t^2$, sobre la semirecta $(-\infty, 0]$, para compensar el proceso en el límite $\alpha \rightarrow \infty$ (notar que si esta parábola no estuviera, el límite de $\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \mathcal{A}_2(t) - t^2$ es 0, como en nuestro caso).

Con lo anterior en mente, la idea es “compensar” de manera equivalente al del caso \mathcal{A}_2 nuestro proceso, para obtener:

1. Un límite no trivial en el caso $\alpha \rightarrow -\infty$.
2. Convergencia bajo reescalamiento al proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$.

La forma de proceder será multiplicar nuestro proceso por $\cosh(\alpha)$ sobre la semirecta $(-\infty, 0]$. O equivalentemente, estudiaremos de ahora en adelante el proceso

$$\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}). \quad (4.7)$$

Notemos que en particular el límite $\alpha \rightarrow \infty$ se preserva

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}) \leq r \right) = \det(I - K_H^N \varrho_r K_H^N)$$

Además por el teorema 4.2, tenemos que

Lema 4.3 *Para todo $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $\bar{r} = \frac{r}{\cosh(\min\{0, \alpha\})}$, y se tiene que*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}) \leq r \right) \\ &= \det \left(I - K_H^N P_{\bar{r} \cosh(\alpha)} K_H^N - K_H^N e^{\bar{r} \sinh(\alpha) \xi} \varrho_{\bar{r} \cosh(\alpha)} e^{-\bar{r} \sinh(\alpha) \xi} \bar{P}_{\bar{r} \cosh(\alpha)} K_H^N \right) \end{aligned}$$

A la distribución anterior la denominaremos F_N^α , y cumple en particular que el límite $\alpha \rightarrow -\infty$ en principio deja de ser trivial, puesto que para $\alpha < 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\alpha) \leq r \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq \frac{r}{\cosh(\alpha)} \right) \\ &= \det(I - K_{\mathbb{H}}^N P_r K_{\mathbb{H}}^N - K_{\mathbb{H}}^N e^{r \tanh(\alpha) \xi} \varrho_r e^{-r \tanh(\alpha) \xi} \overline{P}_r K_{\mathbb{H}}^N). \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}) \leq r \right) = \det(I - K_{\mathbb{H}}^N P_r K_{\mathbb{H}}^N - K_{\mathbb{H}}^N e^{-r \xi} \varrho_r e^{r \xi} \overline{P}_r K_{\mathbb{H}}^N). \quad (4.8)$$

Este límite lo llamaremos simplemente *distribución límite*, pues es a priori el único de los límites que no sabemos si converge a algo relacionado con la teoría de matrices aleatorias, y la denotaremos por $F_N^{-\infty}$. Una de las ventajas de esta distribución es la siguiente convergencia bajo reescalamiento a TW_2 , el cuál es el tema de la próxima sección de este capítulo

4.4. La convergencia de la distribución límite a GUE

El tema de esta sección es probar que, bajo el reescalamiento adecuado, $F_N^{-\infty}$ converge a la distribución TW_2 cuando $N \rightarrow \infty$. Para eso, usaremos el siguiente resultado para la convergencia de SDBM al proceso Airy_2 probado por Tracy y Widom.

Lema 4.4 (ver [34]) *Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\sqrt{2}N^{1/6}(\lambda_N(N^{1/3}t) - \sqrt{2N}) \longrightarrow \mathcal{A}_2(t), \quad (4.9)$$

en el sentido de convergencia de las distribuciones finito-dimensionales.

La idea entonces es basarnos en el reescalamiento usado en el lema anterior, recordando que las marginales de \mathcal{A}_2 son GUE.

Teorema 4.5 *Sea $r > 0$, entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{2}N^{1/6} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}) - \sqrt{2N} \right) \leq r \right) = F_{\text{GUE}}(r)$$

donde F_{GUE} es la distribución TW_2 .

DEMOSTRACIÓN. En lo que sigue, dado cualquier variable $h \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\mathbf{h} = 2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}h + \sqrt{2N}$.

Gracias a (4.8), tenemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq \frac{r}{\cosh(\alpha)} \right) = \det(I - K_{\mathbb{H}}^N P_r K_{\mathbb{H}}^N - K_{\mathbb{H}}^N e^{-r\xi} \varrho_r e^{r\xi} \bar{P}_r K_{\mathbb{H}}^N)$$

Es decir, el límite buscado es

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq \frac{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}r + \sqrt{2N}}{\cosh(\alpha)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq \frac{\mathbf{r}}{\cosh(\alpha)} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \det(I - K_{\mathbb{H}}^N P_{\mathbf{r}} K_{\mathbb{H}}^N - K_{\mathbb{H}}^N e^{-\mathbf{r}\xi} \varrho_{\mathbf{r}} e^{\mathbf{r}\xi} \bar{P}_{\mathbf{r}} K_{\mathbb{H}}^N) \end{aligned}$$

Trabajaremos las dos componentes del último determinante por separado. Además, en lo que sigue denotaremos $A(x, y) \sim B(x, y)$ cuando $\det(I - A) = \det(I - B)$. En particular notemos que de la definición de determinante de Fredholm (1.2), dado un operador con kernel $H(x, y)$, si definimos $\bar{H}(x, y) = \alpha H(\alpha x + \beta, \alpha y + \beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que $\det(I - H) = \det(I - \bar{H})$.

- Notemos que

$$\begin{aligned} & K_{\mathbb{H}}^N P_{\mathbf{r}} K_{\mathbb{H}}^N(x, y) \\ &= K_{\mathbb{H}}^N P_{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}r + \sqrt{2N}} K_{\mathbb{H}}^N(x, y) \\ &= \int_{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}r + \sqrt{2N}}^{\infty} dz K_{\mathbb{H}}^N(x, z) K_{\mathbb{H}}^N(z, y) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $z \rightarrow \mathbf{z} = 2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}z + \sqrt{2N}$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_r^{\infty} dz 2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}} K_{\mathbb{H}}^N(x, \mathbf{z}) K_{\mathbb{H}}^N(\mathbf{z}, y) \\ & \sim \int_r^{\infty} dz (2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}})^2 K_{\mathbb{H}}^N(\mathbf{x}, \mathbf{z}) K_{\mathbb{H}}^N(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \int_r^{\infty} dz \bar{K}_{\mathbb{H}}^N(x, z) \bar{K}_{\mathbb{H}}^N(z, y) \\ &= \bar{K}_{\mathbb{H}}^N P_{\mathbf{r}} \bar{K}_{\mathbb{H}}^N \end{aligned}$$

donde $\bar{K}_H^N(x, y) = 2^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{6}} K_H^N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

La ventaja de \bar{K}_H^N es que es sabido que converge a K_{Ai} en norma traza.

- Probaremos que $K_H^N e^{-r\xi} \varrho_r e^{r\xi} \bar{P}_r K_H^N \rightarrow 0$ en norma traza.

Notemos que

$$\begin{aligned} & K_H^N e^{-r\xi} \varrho_r e^{r\xi} \bar{P}_r K_H^N \\ &= K_H^N e^{-r\xi} e^{r(2r-\xi)} P_r \varrho_r K_H^N \\ &= e^{2r^2} K_H^N e^{-2r\xi} P_r \varrho_r K_H^N. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|K_H^N e^{-r\xi} \varrho_r e^{r\xi} \bar{P}_r K_H^N\|_1 = \|e^{2r^2} K_H^N e^{-2r\xi} P_r \varrho_r K_H^N\|_1 \leq \|e^{2r^2} K_H^N e^{-2r\xi} P_r\|_2 \|\varrho_r K_H^N\|_2$$

Como $\|\varrho_r K_H^N\|_2^2 \rightarrow \|\varrho_r K_{Ai}\|_2^2$, basta probar que la primera norma converge a 0 cuando $N \rightarrow \infty$.

En efecto,

$$\begin{aligned} & \|e^{2r^2} K_H^N e^{-2r\xi} P_r\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(e^{2r^2} K_H^N e^{-2r\xi} P_r(x, y) \right)^2 \\ &= e^{4r^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_r^{\infty} dy \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \varphi_m(x) \varphi_m(y) e^{-4ry} \\ &= \sum_{n,m=0}^{N-1} e^{4r^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n(x) \varphi_m(x) \int_r^{\infty} dy e^{-4ry} \varphi_n(y) \varphi_m(y) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{4r^2} \int_r^{\infty} dy e^{-4ry} \varphi_n^2(y) \\ &\leq e^{4r^2} \sum_{n=0}^{N-1} \int_r^{\infty} dy e^{-8ry} \|\varphi_n^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= e^{4r^2} \int_r^{\infty} dy e^{-8ry} \sum_{n=0}^{N-1} \|\varphi_n^2\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

donde en la desigualdad usamos Cauchy-Schwarz.

La desigualdad de Cramér (ver [30]) establece que $|\varphi_n(x)| \leq \kappa \pi^{-1/4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, con $\kappa \leq 1, 2$. En particular, se tiene que $\|\varphi_n(x)\| \leq 1$, y luego $\varphi_n^2(x) \leq |\varphi_n(x)|$. Con esto $\|\varphi_n^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Usando esto en el último término, obtenemos:

$$N e^{4r^2} \int_r^{\infty} dy e^{-8ry} = \frac{N}{8r e^{4r^2}}$$

Recordando que $\mathbf{r} = 2^{-\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{6}} r + \sqrt{2N}$, es fácil ver que el último término converge a 0.

Juntando todo, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{2} N^{1/6} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{0, \alpha\}) - \sqrt{2N} \right) \leq r \right) &= \det(I - K_{\text{Ai}} P_r K_{\text{Ai}}) \\ &= \det(I - P_r K_{\text{Ai}} P_r) \\ &= F_{\text{GUE}}(r) \end{aligned}$$

lo que concluye lo pedido. \square

4.5. Simulaciones de $F_N^{-\infty}$ y conexión con LUE

Notemos que el límite $\alpha \rightarrow \infty$ de F_N^α corresponde a la distribución del valor propio más grande de una matriz LOE(N), que converge cuando $N \rightarrow \infty$ a la distribución TW_1 . Como el límite cuando $N \rightarrow \infty$ de $F_N^{-\infty}$ distribuye como TW_2 , tiene sentido pensar que $F_N^{-\infty}$ es la distribución del valor propio más grande de algún modelo de matrices aleatorias, tal que converga a TW_2 cuando $N \rightarrow \infty$. En primer lugar, es fácil notar que la distribución no puede ser $\text{GUE}(N)$, ya que $F_N^{-\infty}$ concentra su masa en \mathbb{R}_+ , mientras que la probabilidad de que $\text{GUE}(N)$ tenga todos sus valores propios negativos es positiva. Antes de intentar identificar esta distribución, como una forma de verificar la correctitud de la fórmula, se realizan simulaciones para verificarla utilizando el método de Monte-Carlo. Con esto en mente, utilizaremos el siguiente método para simular N puentes Brownianos sin intersección (ver [26]): luego de particionar el intervalo $[0, 1]$ en T partes, construimos para cada $i, j \leq N$ una marcha aleatoria discreta en tiempo y continua en espacio $(b_{ij}(k), 0 \leq k \leq T)$, donde cada salto en tiempo se da acorde a una variable normal estándar. Con esto, construimos el proceso $B_{ij}(k) = b_{ij}(k) - \frac{k}{T} b_{ij}(k)$, los que corresponden a puentes Brownianos discretos en $[0, 1]$. Finalmente, definimos la matriz que en cada paso $0 \leq k \leq T$ toma los valores

$$H_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{ij}(k) + iB_{ij}(k)), & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \\ B_{ii}(k) & \text{si } i = j, 1 \leq i \leq N \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{ij}(k) - iB_{ij}(k)), & \text{si } 1 \leq j < i \leq N \end{cases} \quad (4.10)$$

Interpolando el proceso discreto en tiempo formado por los valores propios ordenados de la matriz H se obtiene como resultado una versión discreta de N puentes Brownianos sin intersección. A continuación algunos ejemplos de simulaciones realizadas con este modelo.

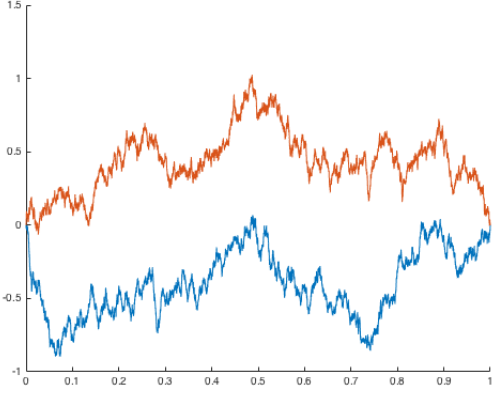


Figura 4.1: $N=2$, $T=10000$

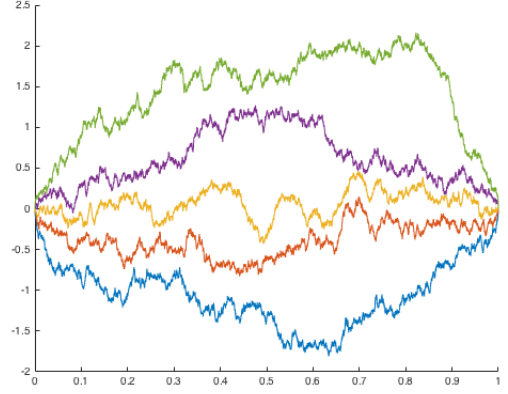


Figura 4.2: $N=5$, $T=10000$

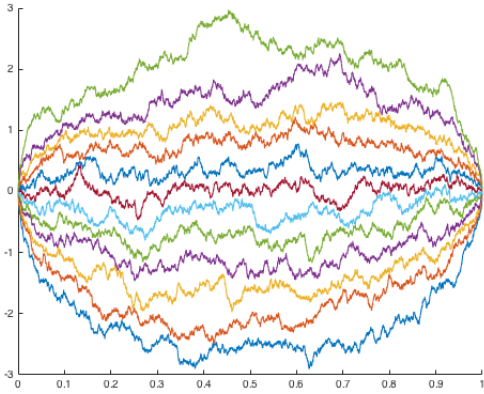


Figura 4.3: $N=12$, $T=10000$

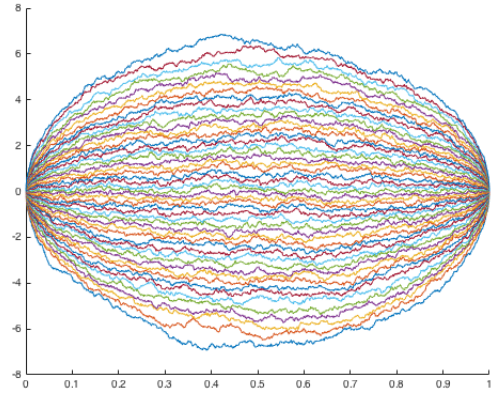


Figura 4.4: $N=50$, $T=10000$

Para verificar la distribución límite usando el modelo anterior, primero notemos que para $\alpha < 0$

$$\sup_{t \in (-\infty, \alpha]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\alpha) = \frac{\max_{t \in [0, p]} B_N(t)}{\sqrt{2p(1-p)}}$$

donde la igualdad es en distribución, y $p = \frac{e^{2\alpha}}{1 + e^{2\alpha}}$. Con esto en mente, la idea es escoger $\hat{p} \ll T$ y usar el modelo anterior para aproximar el valor de \mathcal{M}_N^p cuando $p \rightarrow 0$.

A continuación se muestran los resultados para el caso $N = 2$, donde para $r > 0$ y luego de calcular las integrales correspondientes se tiene que

$$F_2^{-\infty}(r) = \det \begin{pmatrix} 1 - \operatorname{erfc}(r) & -\sqrt{2}r\operatorname{erfc}(r) \\ -e^{-r^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} & 1 - \frac{2e^{-r^2}r}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix} = 1 - \frac{2re^{-r^2}}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{erfc}(r). \quad (4.11)$$

y se fija $T = 10^6$, $\hat{p} = 10^3$ y distintos números de iteraciones.

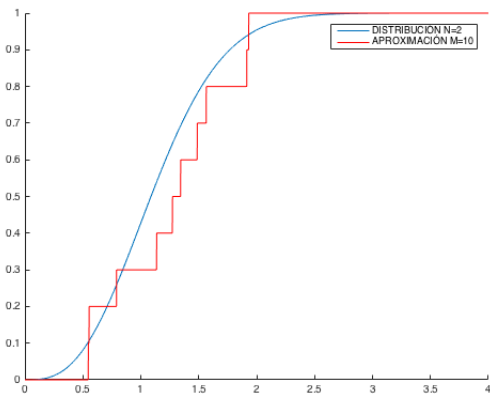


Figura 4.5: Aproximación con 10 iteraciones

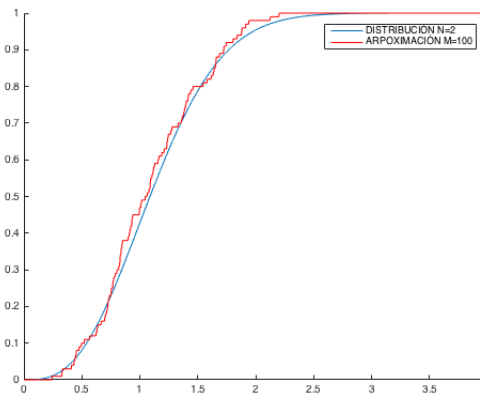


Figura 4.6: Aproximación con 100 iteraciones

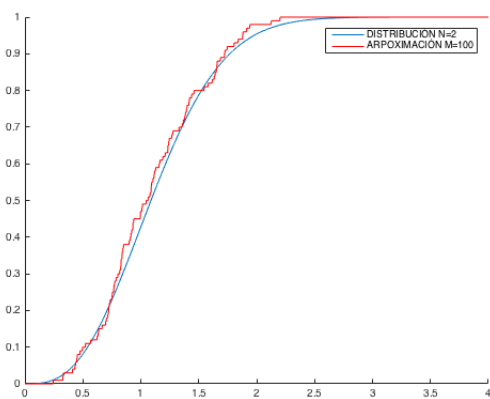


Figura 4.7: Aproximación con 100 iteraciones

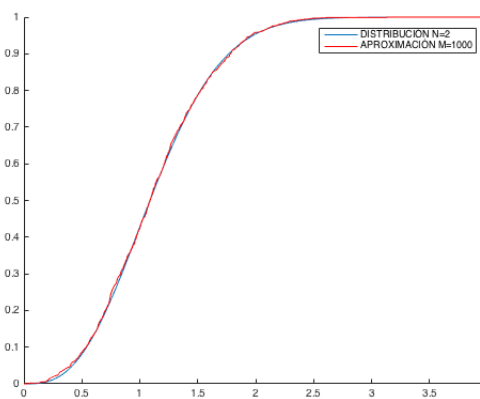


Figura 4.8: Aproximación con 1000 iteraciones

Se puede verificar para otros valores de N , y comprobar que nuestra distribución es la correcta.

La idea ahora es intentar identificar si esta distribución límite proviene de algún modelo conocido. Con este fin, se estudian los casos $N = 1$, que al calcular la integral resultante se obtiene

$$F_1^{-\infty}(r) = \begin{cases} 1 - \operatorname{erfc}(r), & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

y $N = 2$ que viene dado por (4.11). Derivando en ambos casos para obtener las densidades correspondientes, tenemos que

$$f_1^{-\infty}(r) = \frac{2e^{-r^2}}{\sqrt{\pi}} \mathbf{1}_{r \geq 0}, \quad (4.12)$$

mientras que para $N = 2$ la densidad corresponde a

$$f_2^{-\infty}(r) = \frac{4e^{-r^2}r^2}{\sqrt{\pi}} \mathbf{1}_{r \geq 0}. \quad (4.13)$$

Realizando el cambio $x^2 \rightarrow x$ en la siguiente integral

$$F_1^{-\infty}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2} x^{-1/2} e^{-x} dx$$

se puede apreciar que $F_1^{-\infty}(r) = \mathbb{P}(\chi_1^2 \leq 2r^2)$, donde χ_1^2 es una variable chi-cuadrado de 1 grado de libertad. Esto en particular se contradice con cualquier modelo de la familia perteneciente al LUE, pues en particular para $N = 1$ este modelo distribuye como una chi-cuadrado con una cantidad par de grados de libertad.

Repitiendo el mismo cambio de variable, se puede probar que para el caso $N = 2$, se puede concluir que $F_2^{-\infty}(r) = \mathbb{P}(\chi_3^2 \leq 2r^2)$, donde χ_3^2 es una chi-cuadrado de 3 grados de libertad.

Notemos por otro lado, que la distribución para $N = 1$ corresponde a utilizar el Kernel Generalizado de Laguerre para $\alpha = -1/2$, es decir:

$$F_1^{-\infty}(r) = \det \left(I - P_{r^2} K_L^{1,-1/2} P_{r^2} \right)$$

Por otro lado, esta idea no es consistente con $N = 2$. Sin embargo, si consideramos $N = 3$, se tiene que la densidad corresponde a

$$f_3^{-\infty}(r) = \frac{e^{-2r^2} \left(-6r + 4r^3 + e^{r^2} \sqrt{\pi} (3 - 4r^2 + 4r^4) \operatorname{erfc}(r) \right)}{\pi} \mathbf{1}_{r \geq 0}$$

y se puede verificar que corresponde a utilizar nuevamente el Kernel Generalizado de Laguerre, pero con $N = 2$. Esto es,

$$F_3^{-\infty}(r) = \det \left(I - P_{r^2} K_L^{2,-1/2} P_{r^2} \right)$$

Analogamente, se puede pensar para $N = 2$ en utilizar el Kernel Generalizado de Laguerre para $\alpha = 1/2$, lo que corresponde a

$$F_2^{-\infty}(r) = \det \left(I - P_{r^2} K_L^{1,1/2} P_{r^2} \right)$$

y nuevamente, se puede verificar numéricamente para los primeros números pares. En conclusión, se tiene la siguiente conjetura para la distribución $F_N^{-\infty}$.

Conjetura 4.6 *La distribución límite corresponde a*

$$F_N^{-\infty}(r) = \begin{cases} \det \left(I - P_{r^2} K_L^{\frac{N+1}{2}, -1/2} P_{r^2} \right) & \text{si } N \text{ es impar.} \\ \det \left(I - P_{r^2} K_L^{\frac{N}{2}, 1/2} P_{r^2} \right) & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Una propiedad que relaciona los polinomios de Hermite y de Laguerre Generalizados es la siguiente, que además hace entrever un camino para probar la conjetura anterior.

Proposición 4.7 *Si denotamos por $H_n(x)$ al polinomio de Hermite de orden n y a $L_n^{(\alpha)}(x)$ al polinomio de Laguerre Generalizado de grado n , entonces se tiene la siguiente relación*

$$H_{2n}(x) = (-1)^n L_n^{-1/2}(x^2), \quad (4.15)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n x L_n^{1/2}(x^2). \quad (4.16)$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio p_n dado por

$$p_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} L_{n/2}^{-1/2}(x^2) & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{(n-1)/2} x L_{(n-1)/2}^{1/2}(x^2) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

La idea es probar que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son ortogonales con respecto a e^{-x^2} y concluir por unicidad.

En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$. Asumamos primero que tanto n y m son pares, por lo que se pueden escribir como $n = 2j$, $m = 2k$, con $j, k \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p_n(x) p_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p_{2j}(x) p_{2k} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-1)^{j+k} L_j^{-1/2}(x^2) L_k^{-1/2}(x^2) dx \\
&= 2(-1)^{j+k} \int_0^{\infty} e^{-x^2} L_j^{-1/2}(x^2) L_k^{-1/2}(x^2) dx \\
&= (-1)^{j+k} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2} L_j^{-1/2}(x) L_k^{-1/2}(x) dx \\
&= \mathbf{1}_{j=k} \\
&= \mathbf{1}_{n=m}
\end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad se uso el cambio $x^2 \rightarrow x$ y en la quinta la definición de los polinomios generalizados de Laguerre.

El caso n, m ambos impares es análogo y se omite. Para el caso en n es par y m es impar, basta notar que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p_n(x) p_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p_{2j}(x) p_{2k+1} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-1)^{j+k} x L_j^{-1/2}(x^2) L_k^{1/2}(x^2) dx
\end{aligned}$$

donde la última integral vale cero pues es una función integrable impar integrada sobre \mathbb{R} , lo que concluye la demostración. \square

En particular la proposición anterior permite reescribir el determinante de (4.14) como un determinante de matrices expresado en función de las funciones de Hermite.

$$F_N^{-\infty}(r) = \begin{cases} \det \left(I - 2(-1)^{j+k} \int_r^{\infty} \varphi_{2j}(x) \varphi_{2k}(x) dx \right)_{j,k=0}^{\frac{N-1}{2}}, & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \det \left(I - 2(-1)^{j+k} \int_r^{\infty} \varphi_{2j+1}(x) \varphi_{2k+1}(x) dx \right)_{j,k=0}^{\frac{N}{2}-1}, & \text{si } N \text{ es par.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Una pregunta abierta que queda es si existe algún modelo de matrices tal que la distribución del valor propio más grande corresponda a la distribución límite. Por supuesto para valores naturales de α el modelo asociado a esa familia de polinomios ortogonales es LUE($N, N + \alpha$). La idea sería extender de alguna forma esta familia a un modelo LUE generalizado que acepte valores de $\alpha \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Una idea que surge es la siguiente: considerar $\alpha = -\frac{1}{2}$ corresponde a remover “media” fila de la matriz, mientras que $\alpha = \frac{1}{2}$ corresponde a agregar “media” fila a la matriz. Una posible forma de hacer esto es removiendo la parte imaginaria de una fila, o agregando una fila sólo con componentes reales, dependiendo el caso. Eso nos dejaría con la siguiente fórmula para la distribución límite

- Si N es impar, entonces consideremos $X \in \mathbb{C}^{\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}}$, donde todas las entradas de X son de la forma $\mathcal{N}(0, 1/2) + i\mathcal{N}(0, 1/2)$, a excepción de la primera fila, que es de la forma $\mathcal{N}(0, 1/2)$, y todas las variables son independientes. Se tendría entonces que $F_N^{-\infty}$ corresponde a la distribución del valor propio más grande de la matriz $M = X^*X$.
- Si N es par, entonces consideremos $X \in \mathbb{C}^{\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}}$, donde todas las entradas de X son de la forma $\mathcal{N}(0, 1/2) + i\mathcal{N}(0, 1/2)$, a excepción de la primera fila, que es de la forma $\mathcal{N}(0, 1/2)$, y todas las variables son independientes. Se tendría entonces que $F_N^{-\infty}$ corresponde a la distribución del valor propio más grande de la matriz $M = X^*X$.

Se realizan simulaciones para valores de N de 1 a 6, simulando las matrices correspondientes y haciendo una aproximación de tipo Monte-Carlo con 50,000 repeticiones para cada caso. A continuación se muestran los gráficos correspondientes, en ellos se aprecia que, como es de esperarse, la fórmula funciona para los casos $N = 1$ y $N = 2$ ya que en estos casos la distribución resultante usando el método de eliminar o agregar media fila da como resultado variables chi-cuadrado de 1 y 3 grados de libertad respectivamente. Por otra parte, para los casos $N > 2$ se tiene que este método aproxima bastante bien pero aún así existe una diferencia significativa entre ambas distribuciones. En particular, se aprecia que el error es más pequeño para los casos pares que para los impares. Esto nos podría indicar que, de existir un modelo de matrices adecuado, se debiese construir de manera similar al que construimos.

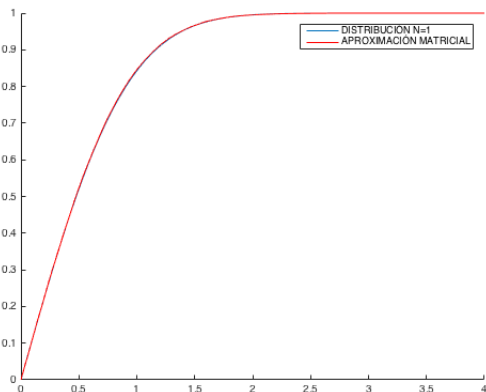


Figura 4.9: Aproximación para $N = 1$

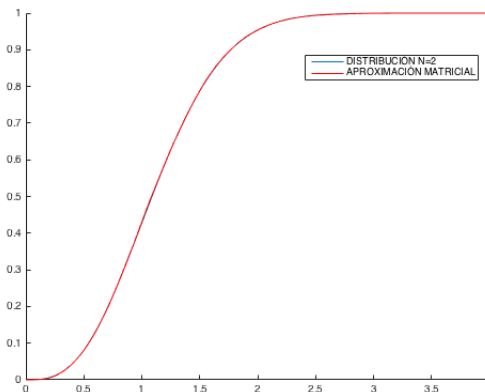


Figura 4.10: Aproximación para $N = 2$

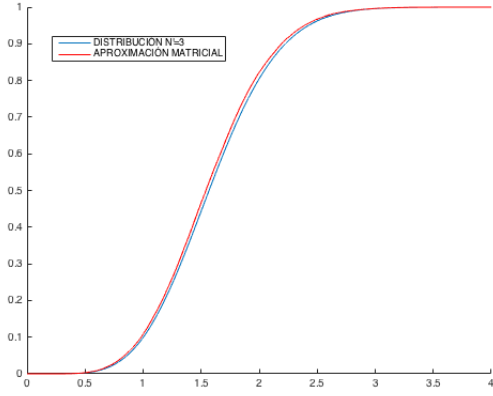


Figura 4.11: Aproximación para $N = 3$

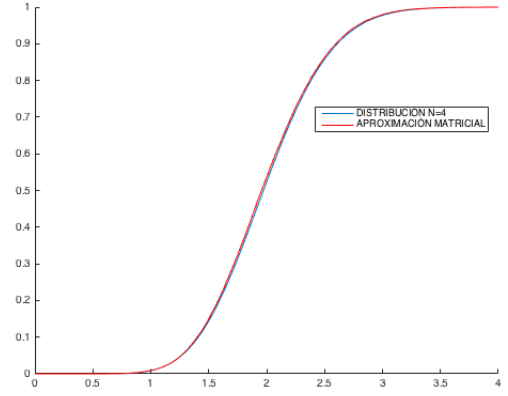


Figura 4.12: Aproximación para $N = 4$

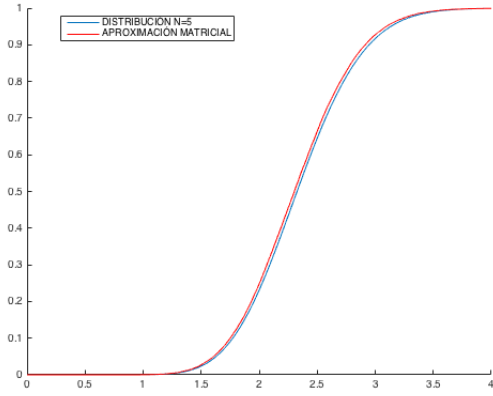


Figura 4.13: Aproximación para $N = 5$

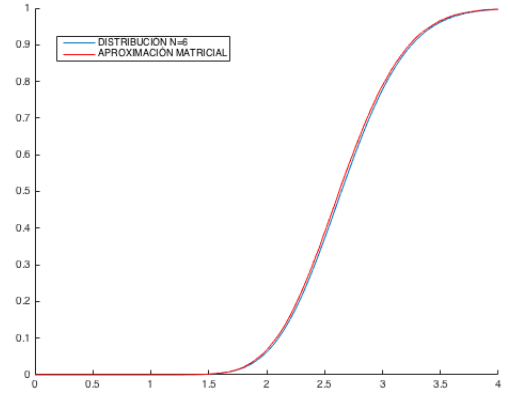


Figura 4.14: Aproximación para $N = 6$

4.6. La convergencia a $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$

Por último, para cerrar este capítulo, probaremos la convergencia bajo el reescalamiento apropiado de $F_N^\alpha(r)$ a la distribución marginal del proceso $\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}$.

Teorema 4.8 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $r > 0$, entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{2}N^{1/6} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha N^{-1/3}] } \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\min\{\alpha N^{-1/3}, 0\}) - \sqrt{2N} \right) \leq r \right) = F_{2 \rightarrow 1}^\alpha(r)$$

donde $F_\alpha^{2 \rightarrow 1}$ es la distribución marginal del proceso $\text{Airy}_{2 \rightarrow 1}$.

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente, dado alguna variable $h \in \mathbb{R}$, denotaremos por \mathbf{h} al valor $2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}h + \sqrt{2N}$.

Definamos:

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{\cosh(\min\{0, \alpha N^{-\frac{1}{3}}\})} = \frac{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}r + \sqrt{2N}}{\cosh(\min\{0, \alpha N^{-\frac{1}{3}}\})}$$

Es decir, buscamos calcular:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha N^{-\frac{1}{3}}]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \leq \mathbf{r}^* \right)$$

y en virtud del Teorema 4.2, debemos calcular:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(I - K_{\mathbf{H}}^N P_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} K_{\mathbf{H}}^N - K_{\mathbf{H}}^N e^{\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})\xi} \varrho_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} e^{-\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})\xi} \bar{P}_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} K_{\mathbf{H}}^N \right)$$

Nuevamente, trataremos con ambos términos del determinante por separado:

- Trabajando el primer término como en la demostración del Teorema 4.5, tenemos que

$$K_{\mathbf{H}}^N P_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} K_{\mathbf{H}}^N = \bar{K}_{\mathbf{H}}^N P_{2^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{6}}(\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N})} \bar{K}_{\mathbf{H}}^N$$

donde recordemos que $\bar{K}_{\mathbf{H}}^N = 2^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{6}}K_{\mathbf{H}}^N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Como ya sabemos que $\bar{K}_{\mathbf{H}}^N \rightarrow K_{\text{Ai}}$ cuando $N \rightarrow \infty$, debemos calcular el límite de $2^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{6}}(\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N})$. Notemos que si $\alpha < 0$, entonces $2^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{6}}(\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N}) = r$, por lo que para esta parte asumamos $\alpha \geq 0$.

Recordando quien es \mathbf{r}^* , buscamos el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) + 2 \frac{\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1}{N^{-\frac{2}{3}}}$$

donde el primer término converge a r . Para el segundo término, consideremos el límite conocido para $\cosh(\cdot)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2 \frac{\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1}{N^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\alpha^2 \frac{\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1}{\alpha^2 N^{-\frac{2}{3}}} = \alpha^2$$

Juntando ambos cálculos, tenemos que

$$2^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{6}} (\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N}) \longrightarrow r + \max\{0, \alpha\}^2$$

Si denotamos $\bar{r} = r - \min\{0, \alpha\}^2$, tenemos que

$$K_{\mathbf{H}}^N P_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} K_{\mathbf{H}}^N \longrightarrow K_{\text{Ai}} P_{\bar{r} + \alpha^2} K_{\text{Ai}}$$

- Notemos que el segundo término es:

$$\begin{aligned} & K_{\mathbf{H}}^N e^{\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \rho_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} e^{-\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \bar{P}_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} K_{\mathbf{H}}^N(x, y) \\ &= \int_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})}^{\infty} dz e^{2\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - \mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}))} K_{\mathbf{H}}^N(x, z) K_{\mathbf{H}}^N(z, y) \end{aligned}$$

Realizando el cambio $z \rightarrow \mathbf{z}$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})}^{\infty} dz e^{2\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}))} K_{\mathbf{H}}^N(x, \mathbf{z}) K_{\mathbf{H}}^N(\mathbf{z}, y) \\ & 2^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{6}} (\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N}) \\ & \sim \int_{2^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{6}} (\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{2N})}^{\infty} dz e^{2\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}))} \bar{K}_{\mathbf{H}}^N(x, z) \bar{K}_{\mathbf{H}}^N(z, y) \end{aligned}$$

Por la parte anterior ya conocemos a qué converge en límite inferior de la integral, por lo que nos falta sólo estudiar el límite de la exponencial dentro. Trabajaremos primero el caso $\alpha \geq 0$ (es decir, el caso $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}$):

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{r} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r} \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) \\ &= 2(2^{-1} N^{-\frac{1}{3}} r \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - r \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) - N^{\frac{1}{3}} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1) \\ &+ N^{\frac{1}{3}} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - r \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) - 2N \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1)) \end{aligned}$$

La expresión anterior se compone de 4 términos, de los cuales es claro que el primero converge a 0. Los 3 términos restantes podemos calcularlos usando los límites conocidos para $\sinh(\cdot)$ y $\cosh(\cdot)$. Con esto, obtenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{3}} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{3}} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - r \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) = \alpha(z - r)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2N \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) - 1) = \alpha^3$$

Juntando todo, obtenemos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2\mathbf{r} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r} \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) = -2\alpha(\alpha^2 + r - z)$$

en otras palabras:

$$\mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} e^{\mathbf{r} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \varrho_{\mathbf{r} \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} e^{-\mathbf{r} \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \overline{P}_{\mathbf{r} \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} \mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{K}_{\text{Ai}} e^{\alpha \xi} \varrho_{r+\alpha^2} e^{-\alpha \xi} \overline{P}_{r+\alpha^2} \mathbf{K}_{\text{Ai}}$$

Ahora, para el caso $\alpha < 0$, tenemos que $\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{\cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})}$, y con esto:

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})) \\ &= 2\mathbf{r} \tanh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(\mathbf{z} - \mathbf{r}) \\ &= \sqrt{2} N^{-\frac{1}{6}} r \tanh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - r) + 2N^{-\frac{1}{3}} \tanh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})(z - r). \end{aligned}$$

Es fácil ver que el primer término converge a 0 y el segundo a $2\alpha(z - r)$

Con esto:

$$\mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} e^{\mathbf{r} \tanh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \varrho_{\mathbf{r}} e^{-\mathbf{r} \tanh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \overline{P}_{\mathbf{r}} \mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{K}_{\text{Ai}} e^{\alpha \xi} \varrho_r e^{-\alpha \xi} \overline{P}_r \mathbf{K}_{\text{Ai}}$$

Recordando que $\bar{r} = r - \text{mín}\{0, \alpha\}^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{2} N^{1/6} \left(\sup_{t \in (-\infty, \alpha N^{-\frac{1}{3}}]} \frac{\lambda_N(t)}{\cosh(t)} \cdot \cosh(\text{mín}\{0, \alpha N^{-\frac{1}{3}}\}) - \sqrt{2N} \right) \leq r \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \det \left(I - P_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} \mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} - \mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} e^{\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \varrho_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} e^{-\mathbf{r}^* \sinh(\alpha N^{-\frac{1}{3}}) \xi} \overline{P}_{\mathbf{r}^* \cosh(\alpha N^{-\frac{1}{3}})} \mathbf{K}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{N}} \right) \\ &= \det \left(I - \mathbf{K}_{\text{Ai}} P_{\bar{r}+\alpha^2} \mathbf{K}_{\text{Ai}} - \mathbf{K}_{\text{Ai}} e^{\alpha \xi} \varrho_{\bar{r}+\alpha^2} e^{-\alpha \xi} \overline{P}_{\bar{r}+\alpha^2} \mathbf{K}_{\text{Ai}} \right) \end{aligned}$$

Donde el último determinante es justamente $F_{2 \rightarrow 1}^{\alpha}(r)$ (ver [24]) □

Juntando todas las convergencias anteriores, se tiene el siguiente esquema resumen:

$$\begin{array}{ccccc} F_N^{-\infty}(r) & \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} & F_N^{\alpha}(r) & \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} & F_{\text{LOE}}(2r^2) \\ \downarrow N \rightarrow \infty & & \downarrow N \rightarrow \infty & & \downarrow N \rightarrow \infty \\ F_{\text{GUE}}(r) & \xleftarrow{\alpha \rightarrow -\infty} & F_{2 \rightarrow 1}^{\alpha}(r) & \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} & F_{\text{GOE}}(4^{1/3}r) \end{array}$$

Conclusión

El estudio de trayectorias no-intersectantes ha sido motivo de estudio desde hace ya varios años, tanto en el área de la física estadística como en la teoría de probabilidades. En particular en esta última, el interés surge en particular por la estrecha relación entre estos modelos con la teoría de matrices aleatorias, y más aún, con la clase de universalidad de KPZ.

En esta tesis se trabajó con un modelo particular esta familia, correspondiente a puentes Brownianos no-intersectantes en $[0, 1]$ (llamado modelo de *sandías sin muralla* en la literatura de física estadística). En particular, utilizando técnicas expuestas en [8], [24] y más recientemente en [21] (donde en este último se estudio el modelo que precede a este trabajo), se logró caracterizar la distribución del máximo de estos puentes sobre $[0, p]$, donde $p \in (0, 1)$ está fijo. Una de las ventajas de este trabajo es que además, utilizando técnicas con polinomios ortogonales y algunas propiedades del Movimiento Browniano, se logró expresar la distribución en cuestión a través de un determinante de Fredholm en $L^2(\mathbb{R})$, lo cual facilita el trabajo con ella debido a la rica estructura algebraica del determinante, pero como contraparte genera algunas complicaciones como por ejemplo, probar que efectivamente la fórmula encontrada corresponde a una distribución de probabilidad.

Por otro lado, de ser cierta la conjetura 4.6, se lograría una relación más estrecha entre este modelo y los ensembles de Laguerre. En el caso particular de la distribución límite, a pesar de que no necesariamente los polinomios generalizados de Laguerre utilizados en este trabajo pueden tener relación con algún modelo de matrices aleatorias (aunque por supuesto, no se descarta), sí tiene relación con algunos modelos de física estadística, en particular con los denominados *Log-Gases*. Para leer más sobre esto, el lector puede referirse a [11].

Este trabajo no queda acá, y por supuesto aún queda por demostrar la conjetura en cuestión. Por ejemplo, para la conexión entre el modelo de puentes en $[0, 1]$ y el Laguerre Orthogonal Ensemble que se muestra en [21], la gran dificultad de la prueba de esta conexión era que no existía una relación explícita entre el determinante que dependen de los polinomios de Laguerre y el que depende de los polinomios de Hermite. La ventaja es que en nuestro caso la proposición 4.7 y la fórmula (4.17) nos entregan ya una relación explícita y por lo tanto la demostración es probable que sea más simple y vaya por ese camino.

Como posibles extensiones para el problema, se puede intentar probar algo similar pero utilizando paseos aleatorios simples simétricos. Para el caso en que uno cuenta con N paseos aleatorios de este estilo, cada uno partiendo en un punto de la forma $2k$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces la fórmula de Karlin-McGregor para generar una versión de paseos no-intersectantes sigue siendo cierta. Más aún, Johansson probó en [15] que el proceso puntual resultante en este modelo

es un proceso determinantal, cuyo kernel de correlación se construye de manera similar a los usados en este trabajo, pero utilizando los polinomios ortogonales de Hahn. Una pregunta natural es si se podrá replicar parte de lo expuesto acá en ese modelo, e intentar obtener algún modelo conocido a través de algún proceso límite bajo el reescalamiento apropiado.

Bibliografía

- [1] Guionnet A. Anderson, G. W. and O. Zeitouni. *An Introduction to Random Matrices*. Vol. 118. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, pp. xiv+492, 2010.
- [2] J. Baik and E. M. Rains. *Symmetrized random permutations*. Random matrix models and their applications. Vol. 40. Math. Sci. Res. Inst. Publ. Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp. 1–19, 2001.
- [3] Corwin I. Borodin, A. and D. Remenik. *Multiplicative functionals on ensembles of non-intersecting paths*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 51.1, pp. 28–58, 2015.
- [4] Ferrari P. L. Borodin, A and M. Prähofer. *Fluctuations in the discrete TASEP with periodic initial configurations and the Airy₁ process*. Int. Math. Res. Pap. IMRP, Art. ID rpm002, 47, 2007.
- [5] Ferrari P. L. Borodin, A. and T. Sasamoto. *Large time asymptotics of growth models on space-like paths. II. PNG and parallel TASEP*. Comm. Math. Phys. 283.2, pp. 417–449, 2008.
- [6] Ferrari P. L. Borodin, A. and T. Sasamoto. *Transition between Airy₁ and Airy₂ processes and TASEP fluctuations*. Comm. Pure Appl. Math. 61.11, pp. 1603–1629, 2008.
- [7] Ferrari P.L. Prähofer M. Borodin, A. and T. Sasamoto. *Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration*. J. Stat. Phys. 129.5-6, pp. 1055–1080, 2007.
- [8] Quastel J. Corwin, I. and D. Remenik. *Continuum Statistics of the Airy₂ process*. Comm. Math. Phys. 317.2, pp. 347–362, 2013.
- [9] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes, Vol. 1*. Springer, 2nd edition, 2003.
- [10] P. L. Ferrari and H. Spohn. *A determinantal formula for the GOE Tracy-Widom distribution*. J. Phys. A 38.33, pp. L557–L561, 2005.
- [11] P. J. Forrester. *Log-Gases and Random Matrices*. London Mathematical Society Monographs, 2010.
- [12] P. Deift T. Suidan J. Baik, A. Borodin. *A model for the bus system in Cuernavaca*

- (Mexico). *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 8965–8975, 2006.
- [13] K. Johansson. *Shape fluctuations and random matrices*. *Comm. Math. Phys.* 209.2, pp. 437–476, 2000.
- [14] K. Johansson. *Discrete polynuclear growth and determinantal processes*. *Comm. Math. Phys.* 242.1-2, pp. 277–329, 2003.
- [15] K. Johansson. *Non-Intersectiong, simple, symmetric random walks and the extended Hahn Kernel*. arXiv: 0409013v1, 2004.
- [16] K. Johansson. *Random Matrices and Determinantal Processes*. arXiv: math-ph/0510038v1, 2005.
- [17] Ioannis Karatzas. and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2000.
- [18] S. Karlin and J. McGregor. *Coincidence Probability*. *Pac.J.Math.*9,1141–1164, 1959.
- [19] V. A. Marcenko and L. A. Pastur. *Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices*. *Mathematics of the USSR-Sbornik* 1.4, p. 457. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.10 of 2015-08-07, 1967.
- [20] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Second. Boston, MA: Academic Press Inc., pp. xviii+562, 1991.
- [21] B. Nguyen and D. Remenik. *Non-intersecting Brownian Bridges and the Laguerre Orthogonal Ensemble*. arXiv:1505.01708v2, 2015.
- [22] L. Pastur and M. Shcherbina. *Eigenvalue Distributions of Large Random Matrices*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1st edition, 2010.
- [23] M. Phähofer and H. Spohn. *Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process*. *J. Stat. Phys.* 108.5-6, pp. 1071–1106, 2002.
- [24] J. Quastel and D. Remenik. *Supremum of the Airy₂ minus a parabola on a half line*. *J. Stat. Phys.* 150.3, pp. 442–456, 2013.
- [25] J. Quastel and D. Remenik. *Airy Processes and Variational Problems*. arXiv: 1301.0750v2, 2015.
- [26] J. Rambeau and G. Schehr. *Distribution of the time at which N vicious walkers reach their maximal height*. arXiv: 1102.1640v2, 2011.
- [27] J. San Martín. *Teoría de la Medida*. Editorial Universitaria, Chile, 1st edition, 2018.
- [28] T. Sasamoto. *Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate*. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.33, p. L549, 2005.
- [29] T. Suidan. *Random Matrices, Non-intersecting Random Walks, and Some Aspects of*

Universality. V. Sidoravicius (ed.), New Trends in Mathematical Physics, Springer Science + Business Media B.V., 2009.

- [30] Gábor Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1955.
- [31] T. Tao. *Topics in Random Matrix*. Department of Mathematics, UCLA, Los Angeles, CA, 1st edition.
- [32] C. A. Tracy and H. Widom. *Level-spacing distributions and the Airy kernel*. 1994.
- [33] C. A. Tracy and H. Widom. *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*. 1996.
- [34] C. A. Tracy and H. Widom. *Differential equations for Dyson processes*. Comm. Math. Phys. 252.1-3, pp. 7–41, 2004.
- [35] C. A. Tracy and H. Widom. *Non-intersecting Brownian Excursions*. Ann. Appl. Probab. 17.3, pp. 953–979, 2007.
- [36] E. P. Wigner. *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*. Annals of Mathematics. Second Series 62.3, pp. 548 - 564, 1955.