



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

ORGANIZACIONES ROBUSTAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

LEÓN ANTONIO HENNEN RODRÍGUEZ

PROFESOR GUÍA:  
JUAN ESCOBAR CASTRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RAHMI ILKILIÇ  
MATTEO TRIOSSI VERONDINI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por MIPP

SANTIAGO DE CHILE  
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA  
POR: LEÓN ANTONIO HENNEN RODRÍGUEZ  
FECHA: 2018  
PROF. GUÍA: JUAN ESCOBAR CASTRO

## ORGANIZACIONES ROBUSTAS

En este trabajo consideramos que las organizaciones se ven expuestas a un riesgo particular: algunos integrantes podrían abandonar la organización en forma repentina y de esta forma, afectar la productividad de los demás. Este trabajo tiene por objetivo explorar como este riesgo puede afectar la forma en que los individuos se organizan. Sugerimos que si el impacto causado por un abandono en la productividad de los demás individuos es importante, las organizaciones enfrentan un trade-off entre el aprovechamiento de economías de escala y ambito por una parte, y la robustez de la organización frente a los abandonos por otra.

Para estudiar esta relación, sugerimos un modelo de formación de redes, en el cual un conjunto de agentes elige como vincularse para producir y suponemos que algunos de estos agentes desaparecen en forma aleatoria. A través de la caracterización de las redes fuertemente estables en este modelo, mostramos que los individuos se organizan de una forma robusta a las desapariciones, lo cual supone que se mantengan redundancias en las vías de comunicación al interior de la organización, que se desaprovechen economías de escala y se limite el grado de especialización al interior de la organización.



A mi abuela Julia Tobar.



# Agradecimientos

Agradezco a mi padres por el apoyo incondicional a lo largo de este proceso, por su confianza y cariño.

A mis amigos, especialmente a Matias Parra por compartir conmigo su entusiasmo y alegría, a Martín Abbott y Felipe Barrios por la siempre grata compañía y a los compañeros de “Matemáticas para Economistas” por la buena risa, su disposición a ayudar con lo que hiciera falta y sus “relinchos” en los pasillos de Beauchef.

A Juan Escobar por la libertad y confianza que me entregó para explorar esta idea, por sus buenos consejos y por la guía que brindó.

A Pedro Jara por todo lo que me ha enseñado y por el apoyo en mi formación académica. Además, le agradezco también haberse dado el tiempo para comentar este trabajo.

.



# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Modelo</b>	<b>8</b>
1.1. Redes y desapariciones . . . . .	8
1.2. Valores esperado de la red . . . . .	11
1.3. Regla de asignación . . . . .	15
1.4. Conceptos de solución . . . . .	16
1.5. Pago y valor de una organización de tamaño $m$ . . . . .	17
<b>2. Modelo de comunicaciones</b>	<b>19</b>
2.1. Modelo de comunicaciones . . . . .	19
2.1.1. Estructura de las organizaciones . . . . .	21
2.1.2. Eficiencia . . . . .	27
2.1.3. Un Ejemplo numérico . . . . .	29
2.2. Una extensión del modelo de comunicaciones . . . . .	32
2.2.1. Otro ejemplo numérico . . . . .	34
<b>3. Jerarquías</b>	<b>37</b>
3.1. Modelo y notación . . . . .	37
3.2. Solución sin deserciones . . . . .	39
3.3. Solución con deserciones . . . . .	42
3.3.1. Ejemplo numérico . . . . .	51
<b>Conclusión</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>
<b>A.</b>	<b>57</b>
A.1. Apéndice de demostraciones modelo de comunicaciones . . . . .	57
A.2. Apéndice de demostraciones modelo de Jerarquías . . . . .	62
A.2.1. Caracterización RFE y RE . . . . .	63
A.3. Teorema de Topkis . . . . .	69



# Introducción

Es ampliamente aceptado que un grupo organizado de individuos puede producir más de lo que lograrían producir los individuos trabajando por separado. La división del trabajo y la especialización al interior de una organización permiten explotar economías de escala y ámbito, de esta forma la organización logra producir en forma más eficiente. Sin embargo, cuando un individuo se coordina con otros para producir, se expone a un riesgo particular poco estudiado en la literatura: eventualmente alguno de los individuos que tomó parte de la organización podría “desaparecer” o “desertar” y no cumplir con los compromisos que adquirió con los demás, provocando, que la organización produzca menos de lo que hubiese producido si nunca se hubiera relacionado con el “desertor”.

En este trabajo sostenemos que cuando los agentes tienen libertad para elegir como se relacionan para producir, el riesgo asociado a las “deserciones” afecta la estructura de las organizaciones. Los individuos se anticipan y eligen vincularse de forma tal que la estructura de la organización sea robusta frente a los abandonos. Los siguientes ejemplos muestran algunas situaciones en las que un abandono afectó en forma importante la productividad de una organización y ilustran también como esto afectó posteriormente la estructura de estas organizaciones:

## (i) **Riesgo en cadenas de proveedores:**

La producción de bienes complejos, involucra cadenas extensas de firmas, donde algunas firmas se especializan en la producción de componentes y otras firmas se especializan en ensamblar y combinar estos componentes para producir el bien final. Esta forma de organizar la producción permite a cada firma aprovechar los beneficios asociados a la especialización, sin embargo, esta forma de organizar la producción puede ser muy frágil, puesto una interrupción en el suministro de algún componentes podría incluso interrumpir la producción del bien final.

En [23], por ejemplo, se relata como un pequeño incendio en el año 2000 en la planta de un proveedor de Ericsson en Albuquerque, causó una interrupción total en el suministro de micro chips, lo cual supuso una reducción importante en la producción de celulares y una pérdida estimada en 400 millones de dólares para Ericsson. Tras el accidente Ericsson implementó medidas para lidiar con el riesgo que supone la interrupción de suministros que, entre otras, incluye mantener fuentes alternativas de suministros y proveedores alternativos.

En este caso podemos observar claramente como el riesgo que supone para una firma la interrupción en el suministro por parte de algún proveedor, afecta la forma en que se organiza la cadena de producción, que en este caso implica mantener una red más densa de proveedores.

- (ii) **Innovación inter firma:** En [7] se sostiene que en algunas industrias parte importante de la innovación y reducción de costos ocurre a nivel interfirmas y no a nivel de la firma individual. Los autores muestran que uno de los problemas más importantes para mantener redes formales de aprendizaje e innovación inter firma, es el riesgo de que alguna firma abandone la red y filtre conocimientos a las firmas en la competencia.

Un único abandono de la red podría dejar a las firmas participantes en una posición muy desventajosa. Este riesgo, según los autores, explica en gran parte la ausencia de redes de aprendizaje inter firma en la industria automovilística, pese a su demostrada importancia en el ahorro de costos e innovación. Los autores muestran además que parte del éxito de Toyota para implementar una red formal de innovación inter firma, deviene de medidas para impedir abandonos de la red de innovación y para evitar “free riders”.

- (iii) **Disrupción de redes oscuras:** En [2] los autores estudian la resiliencia de las redes “oscuras” (redes ilegales que operan en la clandestinidad). Los autores estudian como diferentes perturbaciones afectan esta clase de redes adoptando una metodología de estudios de casos. Un caso en particular mencionado en dicho artículo es de especial interés para nosotros: En 1963 se arrestó en Rivonia Raid a todo el alto mando del MK en una sola redada (El MK era el grupo de lucha contra el apartheid en Sudáfrica liderado por Nelson Mandela). Tras la redada, el MK quedó sin cabeza y las diferentes partes de la organización quedaron desconectadas y sin acceso a los recursos de las demás. Este ejemplo muestra como los abandonos, pueden afectar el desempeño de una red al desconectar sus diferentes partes.

Los ejemplos anteriores ilustran diversas formas en las que los abandonos afectan a las organizaciones y sus estructuras, reflejan además que hay una tensión elemental entre el aprovechamiento de economía de escala o de ámbito y la robustez de la organización frente a abandonos. Estos ejemplos sugieren en particular, que aquellas organizaciones que explotan en mayor grado las economías de escala y ámbito, son las más frágiles frente a los abandonos.

Para estudiar el fenómeno descrito, sugerimos un modelo de formación de redes en el cual cada individuo tiene discreción para elegir como se relaciona con los demás y donde cada individuo desaparece con una probabilidad positiva. Caracterizamos entonces las redes estables en pares y fuertemente estables e interpretamos cada componente en estas redes como una organización, y de esta forma podemos estudiar la relación entre el riesgo de desertión y la estructura de las organizaciones.

Obtenemos de este modelo principalmente tres lecciones. En primer lugar, en este entorno es peligroso concentrar las vías de comunicación en algunos pocos individuos, puesto si alguno de estos desaparece, se podrían desconectar las diferentes partes de la organización. Esto provoca que se mantenga una densidad mayor de vínculos respecto de los que se mantendría en ausencia de desertiones. En segundo lugar, encontramos que el riesgo de abandono limita el

número de individuos vinculados en las organizaciones, en este entorno es posible incluso que los individuos prefieran permanecer solos en lugar de asociarse para producir, aun si esto implica desaprovechar economías de escalas importantes. En tercer lugar, encontramos que este riesgo puede limitar el grado de especialización de los individuos al interior de la organización.

En el capítulo 1 presentamos el modelo de formación de redes con deserciones en su forma más general. Si bien no tenemos resultados para este modelo, su enunciación es una contribución en sí misma, en tanto se elabora las herramientas y lenguaje para representar el fenómeno de interés de forma clara y flexible.

En el capítulo 2, siguiendo el modelo de comunicación de [22], suponemos que el valor producido en un componente depende únicamente del número de individuos vinculados al interior del componente y no de la estructura particular de vinculaciones. Estudiamos primero el caso en que sólo desaparece un agente y mostramos que esta mera posibilidad afecta la estructura de la organización de dos formas. En primer lugar, cada componente tendrá una densidad mínima de vínculos por lo cual, sin importar quien desaparezca, las diferentes partes de una organización no se desconectarán. En segundo lugar, mostramos que mientras más dañina sea una desaparición para la organización, se formarán más componentes con menos miembros cada uno, en el caso límite, cada individuo preferirá producir solo en lugar de vincularse con otros.

En una segunda instancia, extendemos el modelo para el caso en que cada agente desaparece con una probabilidad  $p$  independiente de la probabilidad con las que desaparece los otros agentes. Generalizamos para este caso los resultados obtenidos y volvemos a encontrar las mismas relaciones.

En el capítulo 3, exploramos un segundo modelo con una mayor complejidad y riqueza. En este modelo cada individuo puede especializarse en labores productivas o administrativas al interior de la organización dependiendo del lugar que ocupa en la red. En una primera instancia, estudiamos a modo de caso base, el caso en que no hay deserciones y mostramos que en ese caso los individuos se organizan en un árbol en el cual cada individuo es un especialista, de esta forma, se explotan completamente las economías asociadas a la especialización. En un segundo momento, estudiamos el caso en que un único individuo desaparece y mostramos que esta simple desaparición basta para provocar que, en una organización fuertemente estable, no haya ningún especialista. Esto deviene del hecho de que, sin importar que los individuos ex ante sean idénticos y que se repartan el producto en forma igualitaria, las desapariciones inducen una asimetría en los pagos recibidos por cada individuo a favor de los individuos que ocupan posiciones de mayor centralidad en la red, lo cual provoca una especie de “competencia” por ocupar los lugares con mayor centralidad en las redes y como consecuencia, inestabilidad en las redes especializadas.

Por último, en 3.3.1 sintetizamos las principales lecciones que extrajimos de este modelo y indicamos algunas direcciones que podrían tomar futuras investigaciones.

# Literatura relacionada

Dada la naturaleza de este trabajo, este se relaciona estrechamente con dos clases de literatura: la literatura de redes y la literatura de economía organizacional. En este apartado exponemos como se enmarca este trabajo en cada una de estas ramas.

## Formación de redes

En nuestro modelo se busca caracterizar las estructuras de redes que se forman cuando los individuos tienen libertad para elegir como se vinculan y, en este sentido, este trabajo forma parte de la literatura de formación de redes. Hay un desarrollo muy amplio de esta clase de literatura, especialmente tras la publicación de [16]. Aquí presentamos algunos de los principales enfoques de formación de redes, sin pretender en ningún momento que la presente sea una revisión exhaustiva <sup>1</sup>.

En [1], se modela por primera vez la formación explícita de redes en el contexto de juegos cooperativos. Los autores describen un juego extensivo, el cual comienza con una red vacía y luego se le ofrece a cada par de jugadores, secuencialmente de acuerdo a algún orden, la posibilidad de vincularse. Si ambos jugadores eligen vincularse, entonces se añade el link entre ambos a la red. En cada etapa del juego, cada jugador tiene un conocimiento completo de la historia de vinculaciones que ha tenido lugar. Una vez se forma un vínculo, este no se puede eliminar. . Cada historia completa de acciones en este juego forma una red y cada red que emerge asociada a un equilibrio perfecto en subjuegos es llamada “estructura natural” de red.

[13] argumenta que si bien este enfoque tiene características interesantes, la forma extensiva del juego hace difícil de tratar y analizar las estructuras de redes que se forman más allá de algunos ejemplos y casos concretos simples.

En [21] se sugiere un modelamiento alternativo y más sencillo. El autor define un juego en forma normal en cual el espacio de estrategias de cada jugador está compuesto por el conjunto de todos los subconjuntos de los demás jugadores. Cada jugador elige un subconjunto de jugadores con los cuales desea vincularse. Si dos jugadores se anuncian mutuamente, entonces el vínculo entre ambos se forma. Se puede asociar a cada equilibrio de Nash del juego descrito una red.

Si bien esta aproximación es muy sencilla, no carece de problemas. Este juego tiene una multiplicidad importante de equilibrios de Nash sin importar siquiera el tipo de pagos que se puede asociar a cada red (por ejemplo los perfiles de estrategias de los cuales emerge una

---

<sup>1</sup> Dos completos surveys sobre formación de redes son [13] y el capítulo 6 de [14] para quien desee revisar en mayor profundidad.

red vacía es siempre equilibrio de Nash), esto hace poco informativa esta aproximación para estudiar las estructuras de red formadas por los jugadores.

Para obtener resultados más informativos en este tipo de juego, se deben utilizar algún refinamiento del equilibrio de Nash. [5] trata en detalle los conceptos de equilibrio de Nash fuerte y Equilibrio de Nash a prueba de coaliciones, cada uno de los cuales involucra la posibilidad de que coaliciones de jugadores hagan algún desvío en forma conjunta <sup>2</sup>.

Una aproximación diferente de estas y muy prolífica para estudiar la formación de redes, consiste en prescindir de las particularidades de los juegos no cooperativos y modelar directamente una noción de estabilidad en redes. Este camino sigue [16] al definir el concepto de estabilidad en pares y que se sigue en este trabajo.

Una red es estable en pares si ningún jugador desea cortar un vínculo en el cual está involucrado y si algún link no está en la red, entonces, si alguno de los jugadores involucrados se beneficiaría al añadir ese vínculo, entonces, para el otro jugador, añadir el vínculo es desventajoso.

En [13], el mismo Jackson sugiere que, si bien esta aproximación es simple, tiene algunas limitaciones importantes: este concepto considera únicamente desviaciones de un único link y otras clases de desvíos más complejos pueden ser atractivos. En segundo lugar, se considera desviaciones de un par de jugadores a la vez. Una alternativa que permite desvíos complejos para coaliciones más grandes de jugadores es la “estabilidad fuerte” tratado primero por [5] y desarrollado también en [15], adoptado en este trabajo.

Una segunda clase de literatura de redes relacionada con este trabajo es aquella que trata sobre la robustez de una red. Una red es robusta si puede seguir operando o cumpliendo su objetivo pese a que algunos de sus nodos o arcos sean destruidos. Nuestro trabajo argumenta que la estructura de las organizaciones suele constituirse en forma robusta para limitar el daño que puede ocasionar a la organización un abandono. En este sentido, nuestra investigación estudia la robustez de las organizaciones.

Si bien esta característica ha sido estudiada ampliamente en el contexto de las redes de comunicación e informática, en economía, está siendo estudiada sólo recientemente. El primer paper en mi conocimiento que estudia la robustez de redes desde la economía es [10], en este, el autor modela una situación en la que un diseñador debe elegir una red para vincular un conjunto de nodos y otro individuo, desea atacar la red y elige un conjunto de nodos para atacar. Ambos individuos juegan un juego en el cual el diseñador elige primero que red crea entre los nodos y como distribuye su presupuesto de defensa entre los diferentes nodos. Tras esto, el agresor elige como distribuye su presupuesto de ataque entre los nodos. El autor de-

---

<sup>2</sup>Otros refinamientos alternativos en el contexto de estructuras de cooperación es tratado en [6] y [25]

fine una red como “robusta” si forma parte de un equilibrio perfecto en subjuegos en el juego descrito. Varias publicaciones han seguido esta dirección y este ha mostrado ser un enfoque prolífico <sup>3</sup>.

Puesto que en este trabajo se considera un sistema descentralizado de formación de redes y consideramos que los abandonos no son motivados por el deseo de dañar la red, el enfoque de este trabajo es muy diferente del que sigue esta clase de literatura, sin embargo, contienen ideas de un espíritu similar.

## Economía organizacional

La economía organizacional es la rama de la economía que por antonomasia se ocupa de la naturaleza de las organizaciones, su diseño y desempeño. Puesto en este trabajo se intenta explicar como las deserciones afectan las estructuras de las organizaciones, este trabajo está estrechamente ligado a esta clase de literatura.

En particular, este trabajo está muy relacionado con la temprana teoría de la firma y su preocupación por la naturaleza de las firmas y sus límites. Explicar la organización de los individuos en una firma únicamente mediante las potenciales economías de escala y especialización resultó insuficiente, puesto en dicho caso, no se explicaría que el tamaño de las organizaciones estuviese limitado. En este sentido Ronald Coase propuso que la naturaleza de la firma y sus límites está fundada en los costos de transacción:

“ The limit to the size firm ... [is reached] when the costs of organizing additional transaction within the firm [exceed] the cost of carrying out the same transaction through the market”. <sup>4</sup>

Una segunda explicación para los límites de la firma es expuesta en [26], donde el autor muestra que la racionalidad acotada impone una limitación estática al tamaño de la firma a través de la pérdida de control de los administradores sobre sus subordinados a medida que la firma crece. Otros artículos que explotan la racionalidad acotada para explicar la forma jerárquica de las firmas y la limitación de su tamaño son [3], [17], [24] y [28].

En este trabajo, mostramos una forma particular de contrato incompleto que puede dar límite de tamaño de las firmas. Planteamos que las organizaciones con un mayor grado de división del trabajo y especialización, son aquellas organizaciones donde un abandono puede hacer más daño. Esto, en conjunto con la incapacidad para contratar sobre la contingencia en la que un individuo simplemente desaparece, proporciona una limitación estática al tamaño y grado de especialización de las firmas.

---

<sup>3</sup>Ver por ejemplo [12], [8], y [19]

<sup>4</sup> Ronald Coase en “The Nature of the firm” (1952), citado en [27]



# Capítulo 1

## Modelo

### 1.1. Redes y desapariciones

Consideramos un conjunto  $N = \{1, \dots, n\}$  de individuos, cada uno de los cuales tiene discreción para elegir con quienes de los demás jugadores se relaciona para producir un bien o trabajar por un objetivo común.

La organización elegida por los individuos es descrita por una red no dirigida  $g$ , que es una lista no ordenada de pares de jugadores. Para cualquier par de jugadores  $\{i, j\} \subseteq N$ ,  $ij \in g$  indica que los jugadores  $i$  y  $j$  están directamente vinculados en  $g$ . En este contexto, un vínculo entre los jugadores  $i$  y  $j$ , significa que estos se comunican y coordinan para producir. Como es habitual en la literatura de formación de redes notaremos como  $g + ij$  a la red que se obtiene añadiendo el vínculo  $ij$  a la red  $g$  y  $g - ij$  a la red que se obtiene quitando el vínculo  $ij$  a la red  $g$ .

Llamamos  $g^N$  a la red completa, esto es, la red en la cual cada miembro del conjunto  $N$  está directamente vinculado a todos los demás. Designamos por  $G = \{g \subseteq g^N\}$  el conjunto de redes o organizaciones factible.

Denotamos por  $N(g)$  al conjunto de jugadores conectados en  $g$  y  $n(g) = |N(g)|$  al número de jugadores conectados en  $g$ . Adicionalmente definimos el grado de un individuo  $i \in N$  al número de vínculos directos que mantiene ese individuo en  $g$  y lo denotamos  $n_i(g)$ .

Un camino en  $g$  entre los jugadores  $i$  y  $j$  es una secuencia de jugadores  $i_1, \dots, i_\ell$ , tal que  $i_k i_{k+1} \in g$  para cada  $k \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  con  $i_1 = i$  y  $i_\ell = j$ . En este contexto, un camino entre dos individuos indica que estos coordinan su trabajo también, aunque sea en forma indirecta por medio de terceros. Tomemos a modo de ejemplo la red ilustrada en la figura 1.1, en esta figura, si bien los individuos 2 y 3 no están directamente conectados, ambos pueden coordinar

a través del individuo 1. Por otra parte, dado que no hay ningún camino entre el individuo 4 y alguno de los demás jugadores, este no coordina con los demás.

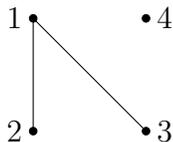


Figura 1.1: Ejemplo coordinación

Usando la noción de camino, se puede particionar naturalmente un grafo en sus diferentes subgrafos conectados, comúnmente llamados componentes. Un componente de una red  $g$  se define como una subred no vacía  $h \subset g$  tal que:

- Si  $i \in N(h)$  y  $j \in N(h)$ , con  $i \neq j$ , entonces existe un camino en  $h$  entre  $i$  y  $j$ .
- Si  $i \in N(h)$  y  $ij \in g$ , entonces  $ij \in h$ .

Llamaremos  $C(g)$  al conjunto de componente de  $g$  y llamaremos  $h \in C(g)$  a un elemento arbitrario de este conjunto. Consideremos a modo de ejemplo la red  $g = \{12, 13, 23, 45\}$  ilustrada en la figura 1.2, esta red tiene dos subgrafos conectados: el subgrafo  $h_1 = \{12, 13, 23\}$  y el subgrafo  $h_2 = \{45\}$ . Observemos además que por vacuidad un individuo aislado es un componente.

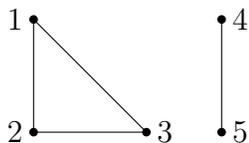


Figura 1.2: Ejemplo componentes

Como hemos mencionado con anterioridad, en este trabajo interpretamos cada componente como una organización. Todos los individuos que pertenezcan a un mismo componente de  $g$  coordinan su trabajo de alguna forma, puesto hay un camino entre cada par de individuos en el componente.

Un ciclo o circuito en una red  $g$  es una secuencia de jugadores  $i_1, \dots, i_\ell, i_1$ , tal que  $i_k i_{k+1} \in g$  para todo  $k \in 1, \dots, \ell - 1$  y  $i_\ell i_1 \in g$ . Usando la idea de ciclo, podemos caracterizar una red según tenga o no ciclos.

Una estructura particular de red que usaremos aquí es llamada *árbol*, que se caracteriza por ser conectada y no contener ciclos. Por definición, notemos que un árbol con  $n$  individuos tiene  $n - 1$  vínculos y contiene un único camino entre cada par de individuos <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>En el primer capítulo de [18] se puede obtener una descripción más detallada de la estructura de árbol.

Otra estructura que usaremos comúnmente en este trabajo es el *circulo* o *anillo*. El circulo se caracteriza por ser una red conectada en la cual cada agente en un anillo tiene grado 2. Observemos que en un anillo hay dos caminos entre cada par de jugadores.

Una última estructura que usaremos, es conocida como red completamente interconectada o full interconectada. Un red full interconectada se caracteriza porque cada agente mantiene un vínculo directo con todos los demás. Si la red involucra a  $n$  individuos, entonces cada individuo mantiene  $n - 1$  vínculos.

Sea  $\mathcal{P}(N)$  el conjunto de todos los subconjuntos de jugadores. Una vez establecida una red  $g$ , cada subconjunto de jugadores  $K \in \mathcal{P}(N)$  tiene una probabilidad  $P : \mathcal{P}(N) \rightarrow [0, 1]$  de “desaparecer” o “desertar”, donde  $\sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) = 1$ . Podemos interpretar una deserción de formas muy heterogéneas, una deserción puede significar que un agente simplemente desapareció sin avisar, o bien, que sin haber desaparecido no realizó las tareas que se supone debía hacer, o puede significar que murió. Notemos que, en el caso particular en el que  $P(\emptyset) = 1$ , estamos ante una situación estándar de formación de redes <sup>2</sup>.

Dado la desaparición del subconjunto  $K$ , si los jugadores decidieron relacionarse según  $g$ , la estructura de relaciones posterior a la desaparición del subconjunto  $K$  de jugadores es una red “residual”,

$$g_K = g \setminus \{\cup_{i \in K} g_i\}$$

donde  $g_i = \{\ell j \in g : \ell = i \text{ o } j = i\}$ . Esto es la red que se obtiene quitando a  $g$  todos los vínculos que involucran a los jugadores en  $K$ . Tomemos por ejemplo la red  $g = \{12, 13, 23, 34, 56, 57, 67\}$  ilustrada en la parte superior de la figura 1.3, al desaparecer el conjunto  $K = \{3, 5\}$  tenemos que la red residual resultante es  $g_{\{3,5\}} = \{12, 67\}$ .

Observemos que cuando desaparecen jugadores, la red posterior a las desapariciones podría tener una cantidad de componentes mayor que la red original. En el ejemplo ilustrado en la figura 1.3 el componente  $h_1 = \{12, 13, 23, 34\}$  es fragmentado en dos partes, la organización compuesta por el conjunto  $\{1, 2\}$  de jugadores y la parte compuesta por el individuo 4 aislado. Esta observación es de suma importancia para este trabajo, puesto el hecho de que una desaparición puede desconectar las distintas partes de una organización tendrá efectos muy importantes en este modelo (piense en el ejemplo del MK y cómo fueron desconectadas las diferentes partes de la organización al ser arrestado todo el grupo de mando). La siguiente definición captura esta idea,

---

<sup>2</sup>Puede ser interesante también definir esta probabilidad en forma endógena, de manera que la estructura de relaciones que elijan los jugadores afecte la probabilidad con que los conjuntos de individuos desaparecen, en cuyo caso  $P : \mathcal{P}(N) \times G \rightarrow [0, 1]$  con la propiedad de que  $\sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K|g) = 1$ .

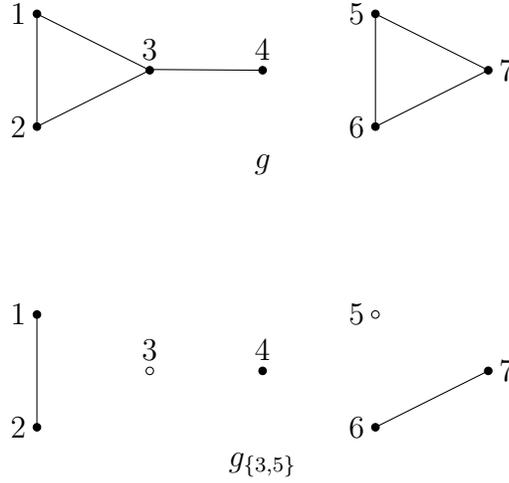


Figura 1.3: Ejemplo red residual

**Definición 1.1** (Fractura)

Un componente  $h \in C(g)$  se *fractura* bajo  $K$ , si se satisface que:

$$|C(g)| < |C(g_K)|$$

Notemos que  $\forall h' \in C(g_K), \exists h \in C(g)$  tal que  $h' \subseteq h$ , esto es, a cada componente en la red resultante tras la desaparición de los jugadores, le podemos asociar un componente en la red original que lo contiene.

## 1.2. Valores esperado de la red

Los individuos se asocian para producir y el valor que logran producir tras la desaparición del conjunto  $K$  de individuos está descrito por la función de valor “posterior”,

**Definición 1.2** (Función de valor posterior)

La *Función de valor posterior* es la función  $V : G \times \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada red  $g \in G$  y conjunto de jugadores “desertores”  $K \in \mathcal{P}(N)$ , le asigna el valor total generado por la red resultante tras las desapariciones,  $v = V(g, K)$ .

Notemos que para dos redes diferentes  $g$  y  $g'$ , que tras la desaparición del subconjunto  $K$  quedan “iguales”, esto es,  $g_K = g'_K$ ,  $V(g, K)$  y  $V(g', K)$  pueden no ser iguales. Observemos por último que  $V(g, \emptyset)$  se corresponde con la función de valor usual en la literatura.

Para representar la idea central de que para la organización es perjudicial haber coordinado y dividido el trabajo con individuos que más tarde desertaron, asumiremos que  $V$  es “sensible”.

**Definición 1.3** (Sensibilidad en  $K$ )

$V$  es sensible a la desaparición de individuos, si se satisface que,

$$V(g_K, \emptyset) > V(g, K) \quad (1.1)$$

Esta propiedad señala que el valor generado por una organización que desde un principio decidió organizarse según  $g_K$  es mayor que el valor de una organización que en principio se organizó según  $g$  y terminó en  $g_K$  por la desaparición del conjunto  $K$  de individuos. A modo de ejemplo, consideremos las organizaciones  $h_1 = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$  y  $h_2 = \{56, 57, 67\}$  ilustradas en la figura 1.4. Supongamos por ejemplo que desaparece 3 en la primera organización, mientras que no desaparece nadie en  $h_2$ . Tras esta desaparición  $h_1$  y  $h_2$  son iguales (ambas son un triangulo de jugadores), el supuesto de sensibilidad nos dice que dado que  $h_1$  perdió un miembro debe tener un desempeño peor que  $h_2$ , esto es  $V(h_1, 3) < V(h_2, \emptyset)$ .

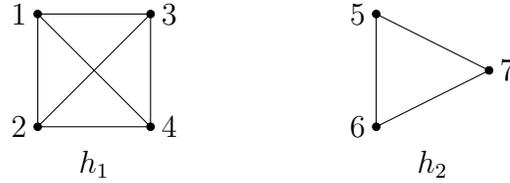


Figura 1.4: Ejemplo red Sensible

Podemos establecer también cierta monotocidad en la desaparición de individuos,

**Definición 1.4** (Sensibilidad monótona)

La función de valor es “monotonamente sensible” si  $\forall g, g' \in G$  y conjuntos de desapariciones  $K, K' \in \mathcal{P}(N)$  tales que  $g_K = g'_{K'}$  se satisface que,

$$V(g, K) \geq V(g', K') \Rightarrow |K| \leq |K'|$$

Esta propiedad nos indica que, para cualquier par de organizaciones idénticas a posteriori de las desapariciones, aquella que haya perdido más miembros debe necesariamente producir menos valor.

Para simplificar asumiremos en las próximas secciones que,

$$V(g, K) = \alpha^{|K|} V(g_K, \emptyset)$$

con  $\alpha \in [0, 1]$ . Observemos que cuando  $\alpha \rightarrow 1$  la función de valor se vuelve insensible a las desapariciones y cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , el valor generado por una organización en la que hubieron desapariciones es 0. Notemos por último que la función de valor propuesta es monótona en las desapariciones.

Asumiremos también que la función de valor posterior es aditiva en componentes y anónima, ambas propiedades formuladas originalmente en [16] y adaptadas a este contexto.

**Definición 1.5** (Función de Valor Aditiva en componentes)

La función de valor posterior  $V$  es aditiva en componentes si satisface que para toda  $g \in G$  y  $K \in \mathcal{P}(N)$ :

$$V(g, K) = \sum_{h \in C(g_K)} V(h, K)$$

esto es, el valor total producido en la red, es la suma de lo que produce cada uno de sus componentes.

Dada una permutación  $\pi$  de jugadores y una red  $g \in G$ , definimos  $g^\pi = \{\pi(i)\pi(j) | ij \in g\}$ , esto es  $g^\pi$  es una red que tiene la misma estructura que  $g$  pero donde los jugadores fueron cambiados de posición de acuerdo a  $\pi$ .

**Definición 1.6** (Función de valor Anónima)

La función de valor posterior es anónima si para cualquier permutación de jugadores  $\pi$ ,  $V(g^\pi) = V(g)$

Por último, la siguiente propiedad rescata la idea de que una organización que incluya un mayor número de individuos podrá aprovecharse de una mejor división del trabajo.

**Definición 1.7** (Economías de escala en número de miembros de la organización)

Diremos que la función de valor posterior exhibe economías en el número de individuos conectados si,  $\forall h, h' \in C(g_K), \exists h'' \in G$  con  $N(h'') = N(h) \cup N(h')$  tal que,

$$V(h'', K) > V(h, K) + V(h', K)$$

Observemos que esta propiedad no exige que el valor producido por una red con un mayor número de individuos sea mayor que el valor producido por cualquier otra red con una menor cantidad de individuos relacionados, sino que exista al menos una configuración para la cual, una red con mayor cantidad de individuos produzca más valor.

Asumir simultáneamente que hay economías de escala aprovechables en el tamaño de la organización y que hay sensibilidad a la desapariciones, sugiere un tradeoff muy claro: una organización que incluya un mayor número de individuos puede eventualmente aprovechar mejor las economías de escala y de ámbito, pero simultáneamente, al crecer el tamaño de la organización es más probable tener abandonos y la organización se vuelve más frágil.

Dado que, en este modelo, interpretamos cada componente en  $g$  como una organización, es importante observar que las deserciones afectan a una organización de dos formas: en primer lugar, dada la sensibilidad, un abandono reduce directamente el valor producido por los

demás individuos, pero, además, las deserciones pueden desconectar las partes de un componente y así fracturar la organización en componentes más pequeños.

Si la función de valor exhibe economías en el tamaño de la organización, una fractura en la organización puede reducir de forma drástica el valor al desconectar las diferentes partes de la organización, y de esta forma afectar el valor total generado en una forma adicional a la sensibilidad.

A priori de la desaparición del subconjunto  $K \in \mathcal{P}(N)$ , el valor esperado por organizar la producción según  $g$ , es:

$$\mathbb{E}_K [V(g, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) V(g, K)$$

**Definición 1.8** (Valor esperado aditivo en componentes)

Diremos que el la función de valor esperado de la red  $g$  es aditiva en componentes, si se satisface que:

$$\mathbb{E}_K [V(g, K)] = \sum_{h \in C(g)} \mathbb{E}_K [V(h, K)]$$

Si la función de valor posterior es aditiva en componentes, entonces el valor esperado también lo es. En efecto, si la función de valor posterior es aditiva en componentes, entonces:

$$\mathbb{E}_K [V(g, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) \left[ \sum_{h' \in C(g_K)} V(h', K) \right]$$

estableciendo para cada  $h \in C(g)$ ,  $V(h, K) = \sum_{h' \in C(g_K): h' \subseteq h} V(h', K)$ , tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [V(g, K)] &= \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) \left[ \sum_{h \in C(g)} V(h, K) \right] \\ &= \sum_{h \in C(g)} \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) V(h, K) \\ &= \sum_{h \in C(g)} \mathbb{E}_K [V(h, K)] \end{aligned}$$

**Definición 1.9** (Valor esperado Anónimo)

La función de valor esperado es anónima, si para cualquier permutación  $\pi$  de jugadores  $\mathbb{E}_K [V(g^\pi, K)] = \mathbb{E}_K [V(g, K)]$

Si la función de valor posterior es anónima, entonces la función de valor esperado también lo es. Para ver por qué, observemos primero que se verifica que,

$$\mathbb{E}_K [V(g^\pi, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) V(g^\pi, K)$$

como la función de valor posterior es anónima  $V(g^\pi, K) = V(g, K)$ , luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [V(g^\pi, K)] &= \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) V(g, K) \\ &= \mathbb{E}_K [V(g), K] \end{aligned}$$

### 1.3. Regla de asignación

Por participar de la organización  $g$  un individuo espera recibir como pago una parte del valor total producido por la organización, la regla de asignación sigue la pista de como se reparte el valor generado por la red entre los individuos que la componen.

**Definición 1.10** (regla de asignación posterior)

La función  $Y : G \times \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$  especifica la porción del valor generado por  $g$  tras la desaparición del subconjunto  $K$ , que se asigna a cada jugador con la propiedad de que  $\sum_{i=1}^n Y_i(g, K) = V(g, K)$ .

supondremos que los individuos que desertan no obtienen valor, esto es,

$$Y_i(g, K) = 0 \quad \text{si } i \in K$$

Asumiremos también a lo largo de este trabajo que la regla de asignación posterior  $Y$  es *igualitaria en componentes*, esto es, posterior a la desaparición del conjunto  $K$ , el valor generado por el componente se reparte entre quienes lo componen.

**Definición 1.11** (Regla de asignación igualitaria en componentes)

La regla de asignación  $Y$  es igualitaria en componentes, si se satisface que para todo  $i \notin K$ ,  $K \in \mathcal{P}(N)$ ,  $h \in C(g_K)$  y  $i \in N(h)$  se satisface que,

$$Y_i(g, K) = \frac{V(h, K)}{|N(h)|}$$

El pago esperado que obtiene el jugador  $i$  por relacionarse bajo  $g$  es entonces,

$$\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N)} P(K) Y_i(g, K)$$

## 1.4. Conceptos de solución

Usaremos como concepto de solución, una adaptación del concepto de estabilidad en pares definido originalmente en [16] y adaptado a este contexto,

**Definición 1.12** ( estabilidad en pares)

La red  $g$  es estable en pares si,

- i.  $\forall ij \in g, \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] \geq \mathbb{E}_K [Y_i(g - ij, K)]$  y  $\mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] \geq \mathbb{E}_K [Y_j(g - ij, K)]$ .
- ii.  $\forall ij \notin g$ , si  $\mathbb{E}_K [Y_i(g + ij, K)] > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$  entonces  $\mathbb{E}_K [Y_j(g + ij, K)] < \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)]$ .

Llamaremos REP al conjunto de redes estables en pares.

La primera condición exige que, a priori de las desapariciones, ningún par de individuos conectados bajo  $g$  deseen desvincularse y la segunda exige que si hay algún individuo en  $g$  que obtendría beneficios por vincularse con algún individuo más, ese individuo prefiere mantenerse desvinculado. La estabilidad en pares nos dará una primera idea de las estructuras de relaciones que forman los individuos.

Un segundo concepto de solución mucho más restrictivo y fuerte es la “estabilidad fuerte”, adaptado desde [15]. Para ello, definimos primero una idea de desviaciones de coaliciones,

**Definición 1.13**

Una red  $g' \in G$  es obtenible desde  $g \in G$  vía desviaciones de  $S \subseteq N$  si,

- (i)  $ij \in g'$  y  $ij \notin g$  implica que  $\{i, j\} \subseteq S$ .
- (ii)  $ij \in g$  y  $ij \notin g'$  implica que  $\{i, j\} \cap S \neq \emptyset$ .

La definición identifica los cambios que la coalición  $S$  de jugadores puede realizar a una red  $g$  sin consentimiento de los jugadores fuera de la coalición.

**Definición 1.14** (Red fuertemente estable)

Una red  $g \in G$  es fuertemente estable si para todo  $S \subseteq N$ ,  $g'$  obtenible vía desvíos en  $S$ , si existe un  $i \in S$ , tal que:

$$\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$$

existe entonces un  $j \in S$  tal que,

$$\mathbb{E}_K [Y_j(g', K)] \leq \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] \tag{1.2}$$

Llamamos RFE al conjunto de redes fuertemente estables.

Una observación importante es que, en [15], se prueba que si  $g \in RFE$  entonces  $g \in REP$ , luego  $RFE \subseteq REP$ . Podemos usar una versión más estricta de este concepto,

**Definición 1.15** (Red estrictamente fuertemente estable)

Una red  $g \in G$  es fuertemente estable si para todo  $S \subseteq N$ ,  $g'$  obtenible vía desvíos en  $S$ , si

existe un  $i \in S$ , tal que:

$$\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$$

entonces existe un  $j \in S$  tal que,

$$\mathbb{E}_K [Y_j(g', K)] < \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] \quad (1.3)$$

Llamamos REFE al conjunto de redes fuertemente estables.

La única diferencia entre las redes en RFE y REFE, es que en la segunda clase de redes, los individuos que no ganan nada desviándose desde  $g$  a  $g'$  (pero no pierden), eligen participar de los desvíos. Más adelante podremos ver que el concepto de red REFE nos permitirá caracterizar las redes estables en el modelo 3 con gran detalle, pero nos planteará importantes problemas de existencia. Evidentemente se verifica que  $\text{REFE} \subseteq \text{RFE}$ .

Un último concepto que examinaremos, es el de red eficiente:

**Definición 1.16** (red eficiente)

La red  $g^* \in G$  es eficiente si satisface que,

$$g^* \in \underset{g \in G}{\text{Argmax}} \mathbb{E}_K [V(g, K)]$$

Una red es eficiente, si genera un mayor valor esperado que cualquier otra red.

## 1.5. Pago y valor de una organización de tamaño $m$

En este apartado definiremos una función que será muy útil a lo largo de este trabajo para caracterizar las redes estables. Consideremos primero el problema de encontrar la organización con  $m$  individuos conectados que maximiza el pago individual del jugador  $i$ , esto es:

$$\underset{g \in G}{\text{Argmax}} \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] \quad \text{s.t.} \quad n(g) = m \quad \text{y} \quad C(g) = 1$$

Sea  $g^*(m)$  la solución de este problema. La función  $W_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  asigna a cada tamaño  $m$ , el mayor valor posible que puede alcanzar el individuo  $i$  en una organización que incluye  $m$  individuos conectados,

$$W_i(m) = \mathbb{E}_K [Y_i(g^*(m), K)]$$

En forma análoga, podemos considerar el problema de encontrar la organización con  $m$  individuos conectados que maximiza el valor producido en un componente:

$$\operatorname{Argmax}_{g \in G} \mathbb{E}_K [V(g, K)] \quad \text{s.t.} \quad n(g) = m \quad \text{y} \quad C(g) = 1$$

Sea  $\tilde{g}(m)$  la solución de este problema. La función  $Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  asigna a cada tamaño  $m$ , el mayor valor posible que se puede alcanzar en un componente que incluye a  $m$  individuos conectados. Esto es,

$$Z(m) = \mathbb{E}_K [V(\tilde{g}(m), K)]$$

# Capítulo 2

## Modelo de comunicaciones

### 2.1. Modelo de comunicaciones

En esta sección, estudiamos la forma más simple para el modelo de formación de redes con desapariciones. Basandonos principalmente en el modelo de “comunicaciones” propuesto en [22], supondremos que el valor producido por un componente en la red, depende únicamente del número de individuos conectados en el componente y no de la estructura particular mediante la cual están vinculados. Por su simplicidad, este modelo permite centrar la atención en cómo el riesgo que supone la desaparición de un miembro para la organización acota su tamaño y por otra parte, se establece una densidad de conexiones mínima entre los individuos que participan de la organización.

Asumiremos en un principio, desaparece un individuo con seguridad, pero no se sabe cual de los individuos en  $N$  es el que desaparecerá. En la sección 2.2 trataremos un caso más general, en el cual cada individuo desaparece con probabilidad  $p$ , independiente de la desaparición de los demás sujetos.

Consideramos el conjunto  $N = \{1, \dots, n\}$  de individuos idénticos, cuyas probabilidades de “desaparición” o “deserción” están dadas por,

$$P(K) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{Si } |K| = 1 \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

esto es, con seguridad desaparece un individuo y cada uno de los individuos en  $N$  desaparece con la misma probabilidad.

Suponemos que  $V$  es anónima, aditiva en componentes y además, para simplificar la exposición de resultados, asumiremos que cada link tiene un costo  $c \approx 0$ . Asumimos entonces que el valor generado por cada componente  $h \in C(g_K)$  posterior a la desaparición de  $K$  es,

$$V(h, K) = \begin{cases} f(n(h)) - c|h| & \text{Si } \forall i \in N(h) \text{ y } j \in K, ij \notin K \\ \alpha f(n(h)) - c|h| & \text{Si } \exists i \in N(h) \text{ y } j \in K \text{ tal que } ij \in g \end{cases}$$

donde  $n(h)$  es el número de individuos conectados en el componente  $h$ ,  $|h|$  es el número de vínculos en  $h$  y  $f$  es una función creciente en  $n(h)$ , la cual satisface que para todo  $\tau > 1$ ,  $f(\tau z) > \tau f(z)$ , reflejando de esta forma que hay economías de escalas asociadas a la división del trabajo en la organización. Por último, la función de valor de la red captura mediante el parámetro  $\alpha \in (0, 1)$  cuan perjudicial es para el grupo haberse relacionado y asignado tareas a un individuo que más tarde desapareció.

Notemos que el valor posterior generado en un componente sólo depende de la estructura de la red a través del costo de los vínculos y dado que este costo es arbitrariamente pequeño, podemos decir que el valor posterior generado en la red depende en forma exclusiva del número de individuos conectados. Observemos en segundo lugar que debido a las posibles desapariciones de nodos, la estructura de  $g$  influye de todas formas en el valor esperado de la red, aunque no lo haga en el valor posterior.

Un aspecto importante a tener en cuenta, es que para esta función de valor, resulta evidente que cuando no desaparece ningún individuo, hay incentivos muy fuertes para conectar a todos los jugadores en un único componente. Por otra parte, el costo de vinculación por pequeño que sea, asegura que dicho componente será un árbol. Debido a que asumimos que la regla de repartición es igualitaria en componentes, en este caso tenemos que el conjunto de redes fuertemente estable coincidirá con el conjunto de redes eficientes. Podremos observar en los apartados siguientes que apenas la desaparición de un único individuo afectará de forma significativa la estructura de la red que deciden formar los individuos.

El valor total de la red  $g$  posterior a la desaparición de  $K$  es,

$$V(g_K, K) = \sum_{h \in C_k(g)} V(h, K)$$

el valor esperado de la red  $g$  es entonces,

$$\mathbb{E}_K [V(g, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N): |K|=1} \frac{1}{n} V(g_K, K)$$

Asumiremos que la regla de repartición es igualitaria y aditiva en componentes. El pago que espera recibir el jugador  $i \in N$  por asociarse según  $K$  es entonces,

$$\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] = \sum_{K \in \mathcal{P}(N): |K|=1} \frac{1}{n} Y_i(g, K)$$

### 2.1.1. Estructura de las organizaciones

Para caracterizar las redes estables en pares, definimos,

**Definición 2.1** (jugador crítico)

Un jugador  $i \in N$  es *crítico* en  $g$  si,  $|C(g)| < |C(g \setminus g_i)|$

En palabras simples, un individuo es crítico en la organización si, al desaparecer este, la organización se fractura. Por ejemplo, el individuo 3 en la figura 1.3 es un individuo crítico. Notemos que un individuo aislado no es un individuo crítico y que un individuo en una pareja tampoco lo es; puesto las desapariciones en esta clase de componentes no provocan un aumento en el número de componentes en la red residual, de lo cual se sigue que un componente  $h \in C(g)$  solo puede contener un individuo crítico si  $n(h) \geq 3$ .

La siguiente proposición establece que en cualquier componente de una red estable en pares, se satisface que hay una densidad mínima de conexiones. El riesgo de que un abandono desconecte las diferentes partes de la organización, provoca que se deseen mantener una redundancia en las vías de comunicación al interior de la organización.

**Proposición 2.1** (Redundancia en vías de comunicación)

si la red  $g$  es estable en pares, entonces  $g$  no tiene jugadores críticos. Además  $\forall h \in C(g)$  tal que  $n(h) \geq 3$ , se satisface que  $h$  es un círculo formado por  $n(h)$  individuos.

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos un componente  $h \in C(g)$  en el cual hay por lo menos un individuo crítico  $i \in N(h)$ . Cuando desaparece el individuo crítico,  $h$  se “fractura” en al menos dos componente, llamemos  $h_1$  y  $h_2$  dos de los componente en  $C(h_{\{i\}})$ . Para simplificar la notación llamemos  $n(h) = k$  al número de individuos conectados en el componente  $h$  y llamemos  $n(h_1) = k_1$  y  $n(h_2) = k_2$  al número de individuos conectados en los fragmentos  $h_1$  y  $h_2$  del componente  $h$ . El pago que recibe el jugador  $j_\ell \in N(h_\ell)$  con  $\ell = \{1, 2\}$  cuando desaparece el individuo crítico  $i$  es,

$$Y_{j_\ell}(h, \{i\}) = \alpha \frac{f(k_\ell)}{k_\ell} - c|h_1|$$

mientras que el pago posterior a la desaparición del individuo crítico que se obtiene añadiendo el vínculo  $j_1j_2$  es:

$$Y_{j_\ell}(h + j_1j_2, \{i\}) = \alpha \frac{f(k_1 + k_2)}{k_1 + k_2} - c(|h_1| + |h_2| + 1)$$

Notemos ahora que puesto añadir el vínculo  $j_1j_2$  tiene costo  $c \rightarrow 0$  se cumple que  $\forall s \in N(h) \setminus \{i, j_\ell\}$ ,

$$Y_{j_\ell}(h + j_1j_2, s) - Y_{j_\ell}(h, s) \geq c/k \approx 0$$

podemos establecer entonces que el pago esperado marginal por añadir el link  $j_1j_2$  es

$$\mathbb{E}_K [Y_j(h + j_1 j_2, K)] - \mathbb{E}_K [Y_{j_\ell}(h, K)] \geq \frac{\alpha}{n} \left[ \frac{f(k_1 + k_2)}{(k_1 + k_2)} - \frac{f(k_\ell)}{k_\ell} \right] - c(|h - \ell| + 1)$$

el signo de esta expresión depende del signo del término entre corchetes. Notemos que el valor por añadir el link es positivo si,

$$\frac{f(k_1 + k_2)}{f(k_\ell)} > \frac{k_1 + k_2}{k_\ell}$$

como  $k_1 + k_2 > k_\ell$ , existe un  $\tau > 1$  tal que  $\tau k_\ell = k_1 + k_2$ , tenemos:

$$\frac{f(\tau k_\ell)}{f(k_\ell)} > \frac{\tau k_\ell}{k_\ell}$$

Notemos que la desigualdad es verdadera por hipótesis, en tanto  $f(\tau k_\ell) > \tau f(k_\ell)$ , luego el lado izquierdo de esta expresión es mayor que  $\tau$  y se cumple la desigualdad, con lo cual queda demostrado que en una red estable en pares no hay individuos críticos, porque esto da incentivos suficientes para que dos individuos formen un vínculo adicional en la red.

Tenemos entonces que en la red estable o eficiente no hay individuos críticos, por lo cual existen dos caminos entre cada par de jugadores en cualquier componente de la red, luego cada componente de la red estable o eficiente debe contener algún círculo formado por los  $n(h)$  jugadores.

Resta entonces mostrar que un componente es un círculo, para esto basta con notar que dado que cualquier componente estable en pares contiene al círculo, si un componente tiene más enlaces que un círculo, conviene cortar el enlace que no pertenece al círculo y así obtener un valor adicional de  $c$ ,  $V(h - ij, K) - V(h, K) = c$  para todo  $K$ , luego cualquier componente en una red estable en pares con más de tres miembros debe ser un círculo.

□

Notemos que el costo de vinculación arbitrariamente pequeño que hemos considerado, tiene como único rol en esta demostración eliminar del conjunto de redes estables cualquier red con una densidad mayor de vínculos que el círculo. Observemos en segundo lugar que esta caracterización de las redes estables en pares deviene de que concentrar el “flujo de información” en un único individuo es perjudicial para la organización, puesto cuando desaparece un individuo “crítico”, esta se fractura y se desconectan sus diversas partes. Dado que la vinculación es arbitrariamente barata, en cualquier organización debe haber una densidad mínima de conexiones, puesto cada individuo que pertenezca a un componente con más de dos individuos, debe tener al menos dos vínculos, o alternativamente, debe haber dos caminos entre cualquier par de jugadores en un componente.

Un corolario importante de esta proposición es que podemos caracterizar la función  $W_i$  para este caso particular, puesto sabemos que cualquier componente con  $m$  miembros no se fracturará sin importar quien desaparezca.

## Corolario 2.2

La función  $W_i$  en este contexto es:

$$W_i(m) = \alpha \frac{m-1}{n} \frac{f(m-1)}{m-1} + \frac{n-m}{n} \frac{f(m)}{m} - 2c \quad (2.1)$$

En el primer término,  $(m-1)/n$  es la probabilidad de que el individuo que desaparece pertenezca al mismo componente que el individuo  $i$  y  $\alpha f(m-1)/(m-1)$  es la porción del valor asignada al individuo  $i$  en esta contingencia. En el segundo término,  $(n-m)/n$  es la probabilidad de que el individuo que desaparece no pertenezca al mismo componente que  $i$  y  $f(m)/m$  es la porción del valor asignado a  $i$ . Observemos que la suma de probabilidad de ambos eventos es  $(n-1)/n$ , mientras que el restante  $1/n$  corresponde al evento en que desaparece el individuo  $i$  y por tanto obtiene un valor igual a 0. Finalmente, el tercer término de la expresión es el costo de vinculación, que despreciaremos a partir de este momento.

Observemos que en la ecuación (2.1), cuando crece el tamaño de la organización, por una parte aumenta la explotación de las economías de escala, pero por otra parte de hace más probable que el desertor pertenezca al mismo componente que  $i$ . Esta ecuación entonces, expresa claramente el trade-off en este problema: involucrar una mayor cantidad de individuos en una organización permite explotar más profundamente las economías de escala asociadas al tamaño de la organización, pero además, se la organización se expone en más a un abandono.

La forma de  $W_i$  depende de  $\alpha$ . En la medida que  $\alpha$  decrece,  $W_i$  se vuelve más “cóncava”, en efecto, observemos que

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{d^2 W_i}{dm^2}(m) \right] = \frac{f''(m-1)}{n} > 0$$

puesto  $f'' > 0$ . En otras palabras, mientras más daño haga una desaparición a la organización residual, la función  $W_i$  se vuelve más cóncava. Esto se ilustra en la figura 2.1.

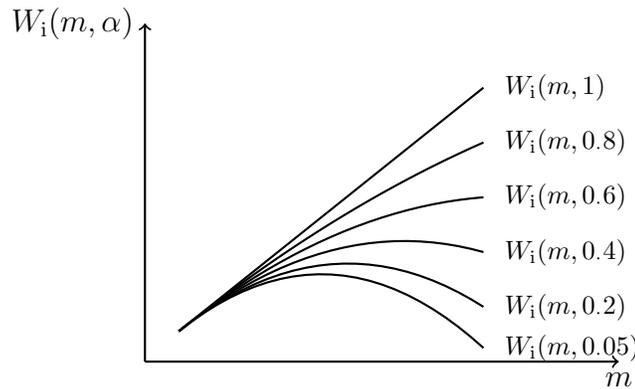


Figura 2.1:  $W_i$  para  $f(m) = m^{3/2}$ .

Sea  $m^*$  el número de miembros en una organización que maximiza el pago individual que recibe cada uno de sus miembros, esto es es:

$$m^* \in \operatorname{Argmax}_{m \in \{1, \dots, n\}} W_i(m) \quad (2.2)$$

Las siguientes proposiciones caracterizan las redes RFE y REFE. Con el objetivo de simplificar la exposición, nos centraremos en el caso en que  $m^*$  es único y  $n/m^* \in \mathbb{N}$ . En el apéndice A.1 se encontrarán proposiciones equivalente para el caso en que no se cumpla ninguno de estas dos condiciones.

**Proposición 2.3** (Caracterización RFE )

*Si  $g \in \text{RFE}$ , entonces en  $g$  hay  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  miembros formando un círculo. Además  $\text{RFE} \neq \emptyset$ .*

DEMOSTRACIÓN.

Dado que  $\text{RFE} \subseteq \text{REP}$ , tenemos por la proposición 2.1 que cualquier componente de una red fuertemente estable con más de dos miembros debe necesariamente ser un círculo. Por tanto cualquier individuo  $i$  que participe de un componente con  $m$  miembros en una red fuertemente estable obtiene un pago esperado igual a  $W_i(m)$ .

Supongamos ahora con intención de llegar a una contradicción que la red  $g$  es fuertemente estable y no hay  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  miembros. Si este es el caso hay entonces un conjunto de jugadores  $S \subset N$  con  $|S| > m^*$  que no forman parte de un componente con  $m^*$  miembros.

Cualquier conjunto  $M \subseteq S$  de jugadores tal que  $|M| = m^*$  puede alcanzar vía desvíos en  $M$  una red en la cual los individuos en  $M$  forman un círculo con  $m^*$  miembros. En efecto, para alcanzar la red sugerida basta que los individuos en  $M$  corten todos los vínculos que mantienen en  $g$  y añadan los vínculos necesarios entre ellos para formar un círculo.

Si los individuos de  $M$  se desvían, entonces, obtienen de esta forma un pago  $W_i(m^*)$  por definición de  $m^*$ ,  $W_i(m^*) > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$ , por lo cual los individuos en  $m^*$  tienen incentivos a desviarse y no se satisface la segunda condición de estabilidad fuerte, de lo cual se concluye que  $g$  no es fuertemente estable.

Probemos ahora que cualquier red con  $|C(g)| = n/m^*$  donde cada  $h \in C(g)$  es un círculo con  $N(h) = m^*$  individuos es fuertemente estable. Para esto, basta simplemente observar que dado que asumimos que  $n/m^* \in \mathbb{N}$  todo individuo en esta red es parte de un componente con  $m^*$  individuos formando un círculo y obtiene de esta forma un pago  $W_i(m^*)$  que es por definición el máximo pago que puede obtener un individuo en un componente y no existirá entonces un subconjunto  $S$  de jugadores y una red  $g'$  alcanzable vía desvíos en  $S$  que permita a algún jugador obtener un mayor pago que  $W_i(m^*)$  y por tanto se cumplen las condiciones

de estabilidad fuerte.

Por último, notemos que el problema (2.2) siempre tiene solución puesto que el espacio factible es contable finito y  $W_i(m)$  está acotada superiormente (por ejemplo por  $f(m)/m$ ), luego siempre se puede determinar  $m^*$  y encontrar una red fuertemente estable.

□

**Proposición 2.4** (Caracterización REFE)

- (i) Si  $n/m^* \in \mathbb{N}$ , REFE = RFE.
- (ii) Si  $n/m^* \notin \mathbb{N}$  entonces REFE =  $\emptyset$ .

DEMOSTRACIÓN.

- (i) La demostración de la proposición 2.3 basta para probar que si  $n/m^* \in \mathbb{N}$ , entonces si  $g \in \text{REFE}$ ,  $g$  contiene  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  miembros formando un círculo y por tanto RFE = REFE.
- (ii) Si  $n/m^*$  no es natural, entonces, una vez se forman  $n/m^*$  componentes de  $m^*$  miembros, hay un subconjunto  $S$  con  $|S| < m^*$  que no forman parte de un componente con  $m^*$  integrantes. Consideremos entonces cualquier conjunto  $M$  de individuos tal que  $S \subset M$  y  $|M| = m^*$ . El conjunto  $M$  puede alcanzar vía desvíos en  $M$  una red  $g'$  en la cual los individuos de  $M$  han formado un círculo. En efecto, basta que los individuos en  $M/S$  corten todos sus vínculos en  $g$  y los individuos en  $M$  añadan los vínculos necesarios para hacer un círculo. Para todo individuo en  $i \in S$  se satisface que  $\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] = W_i(m^*) > \mathbb{E} [Y_i(g, K)]$  y para todo individuo en  $M \setminus S$  se satisface que  $\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] = \mathbb{E} [Y_i(g, K)] = W_i(m^*)$ , luego no se cumplen las condiciones para la estabilidad fuerte.

□

La intuición tras las proposiciones 2.3 y 2.4 es muy sencilla: los individuos tienen incentivos para reunirse en grupos de  $m^*$  miembros, los individuos que no pertenezcan a componentes con  $m^*$  miembros, tienen incentivos a desviarse a redes en las cuales si forman parte de una organización de tamaño  $m^*$ . Es esta la misma fuerza que provoca que cuando  $n/m^*$  tenga resto no podamos encontrar redes REFE, puesto habrán siempre individuos que no son parte de un grupo de  $m^*$  individuos y que ganarían desviándose a una red en la que son parte de un componente con  $m^*$  miembros.

Para examinar ahora como cambian las redes en el conjunto RFE cuando cambia  $\alpha$ , llamemos  $m^*(\alpha)$  a la solución de (2.2) dado  $\alpha$ . La siguiente proposición establece que el tamaño de las organizaciones está limitado, esto es, el aprovechamiento de las economías de escala está acotado por el riesgo de que desaparezca algún miembro de la organización.

**Proposición 2.5** (Límite del tamaño de la organización)

- (i)  $m^*(\alpha)$  creciente en  $\alpha$ .
- (ii)  $\forall n, f \exists \underline{\alpha}$  tal que  $\forall \alpha < \underline{\alpha}, m^* < n$ .

DEMOSTRACIÓN. (i) Dado que en cualquier red estable en pares un componente con más de dos miembros debe ser un círculo, sea  $W_i(m, \alpha)$  definida por (2.1).

La demostración consiste simplemente en verificar que el problema (2.2) satisface las condiciones del teorema A.5, que se puede encontrar en el apéndice A.3.

Tenemos que en la función  $W_i : \{1, \dots, n\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  el conjunto  $\{1, \dots, n\}$  es obviamente un retículo completo y  $[0, 1]$  es obviamente un conjunto parcialmente ordenado. Tenemos también que el conjunto factible para la solución del problema (2.2) es creciente en  $\alpha$  (de hecho el conjunto factible no depende de  $\alpha$ ). Tenemos además que  $W_i$  es supermodular en  $m$  puesto, para todo  $m_1, m_2 \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$W_i(m_1 \wedge m_2) + W_i(m_1 \vee m_2) = W_i(m_1) + W_i(m_2).$$

Falta verificar entonces que la función exhibe diferencias estrictamente crecientes en  $(m, \alpha)$ , en efecto  $W_i$  se verifica diferencias crecientes puesto para  $\alpha' > \alpha$  y  $m' > m$  que:

$$\begin{aligned} W(m', \alpha') - W(m', \alpha) &> W(m, \alpha') - W(m, \alpha) \\ \alpha' f(m' - 1) - \alpha f(m' - 1) &> \alpha' f(m - 1) - \alpha f(m - 1) \\ \alpha' [f(m' - 1) - f(m - 1)] &> \alpha [f(m' - 1) - f(m - 1)] \end{aligned}$$

como  $f(m' - 1) > f(m - 1) > 0$ , la desigualdad se cumple. Con lo cual se verifica que el problema (2.2) satisface todas las condiciones para aplicar el teorema A.5 y la solución  $m^*(\alpha)$  debe ser creciente en  $\alpha$ .

- (ii) Para esto, basta con notar que, cuando hay un círculo formado por  $n$  jugadores, una red formada por un círculo de  $n - 1$  jugadores y un individuo aislado es alcanzable vía desviaciones en  $S \subset N$  de jugadores con  $|S| = n - 1$ , luego tenemos que la red formada por un círculo de  $n$  jugadores no es estable si:

$$\begin{aligned} W_i(n - 1) &> W_i(n) \\ \alpha \frac{n - 2}{n} \frac{f(n - 2)}{n - 2} + \frac{1}{n} \frac{f(n - 1)}{n - 1} &> \alpha \frac{n - 1}{n} \frac{f(n - 1)}{n - 1} \\ \alpha &< \frac{f(n - 1)}{n - 1} \frac{1}{f(n - 1) - f(n - 2)} = \underline{\alpha} \end{aligned}$$

puesto  $f(n - 1) - f(n - 2) > 0$ ,  $\underline{\alpha} > 0$ .

□

La primera parte de esta proposición establece un resultado muy natural: mientras mayor sea el impacto que tiene un abandono en una organización, las organizaciones se vuelven más pequeñas y las redes fuertemente estables tienen un mayor número de componentes, incluso en un caso límite, los individuos preferirán trabajar aislados en lugar de asociarse con otros para producir pese a las potenciales ganancias asociadas a la división del trabajo.

La segunda parte de la proposición sólo es interesante en cuanto establece que sin importar la magnitud de las economías de escala asociadas al número de individuos en una organización, si el impacto de un abandono es lo suficientemente importante, entonces ninguna organización estable incluirá a todos los individuos.

Observemos cuan diferente es la red estable cuando hay apenas una deserción respecto de la red que se forma cuando nadie desaparece. En el primer caso se forman varios componentes y cada componente es un círculo, mientras que en el segundo caso, hay un único componente y ese componente es un árbol.

## 2.1.2. Eficiencia

Estudiaremos ahora las redes eficientes de este modelo. Esta primera proposición, equivalente a la proposición 2.1 del apartado de estabilidad, establece que cada componente en una red eficiente es un círculo.

**Proposición 2.6** *Si la red  $g$  es eficiente, entonces en  $g$  no hay individuos críticos. Además  $\forall h \in C(g)$  tal que  $n(h) \geq 3$ , se satisface que  $h$  es un círculo formado por  $n(h)$  individuos.*

La demostración de esta proposición es análoga a la de la proposición 2.1, usando la función  $\mathbb{E}_K [V(h, K)]$  en lugar de  $\mathbb{E}_K [Y_i(h, K)]$  y por tanto es relegada al apéndice A.1.

Un corolario de esta proposición, equivalente al corolario 2.2, es que, dado que en una red eficiente, sin importar quien desaparezca ningún componente se fragmenta, el valor máximo generado en un componente con  $m$  miembros,  $Z(m)$ , es:

### Corolario 2.7

*La función  $Z$  en este contexto es:*

$$\begin{aligned} Z(m) &= \alpha \frac{m}{n} f(m-1) + \frac{n-m}{n} f(m) \\ &= mW_i(m) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para caracterizar las redes fuertemente estables, usábamos el hecho de que había incentivos para formar grupos de tamaño  $m^*$ , puesto de esta forma se maximizaba el pago individual de los sujetos que conformaban el grupo, sin embargo, no podemos hacer un argumento similar para caracterizar las redes eficientes. Para ilustrar la razón de esto, llamemos  $\tilde{m}$  al número

de miembros que maximiza el valor producido en un componente, esto es:

$$\tilde{m} \in \underset{m \in \{1, \dots, m\}}{\text{Argmax}} Z(m)$$

puede darse el caso en que exista un par de números  $s, t \in \mathbb{N}$  con que  $s + t = \tilde{m}$ , tales que  $Z(\tilde{m}) < Z(s) + Z(t)$  y la red eficiente no contenga componentes con  $\tilde{m}$  miembros. El siguiente caso numérico ilustra que este fenómeno puede ocurrir.

### Ejemplo 2.1

Sea  $f(x) = x^2$ ,  $n = 4$  y  $\alpha = 1/2 - \varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tenemos que,

$$\begin{aligned} Z(1) &= \frac{3}{4} \\ Z(2) &= 2 + \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \\ Z(3) &= 15/4 - 3\varepsilon \\ Z(4) &= \frac{9}{2} - 9\varepsilon \end{aligned}$$

tenemos entonces que  $\tilde{m} = 4$ , sin embargo, observemos que:

$$Z(3) + Z(1) = 4,5 - 3\varepsilon > 4,5 - 9\varepsilon = Z(4)$$

luego, aunque un componte con 4 miembros sea el que genere mayor valor, la red eficiente no contiene componentes con 4 miembros.

Si restringimos el problema a estudiar únicamente las redes con componentes de igual tamaño, tenemos que el valor esperado producido en una red con  $n/m$  componentes de  $m$  miembros es:

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} Z(m) &= \frac{n}{m} \left[ \alpha \frac{m}{n} f(m-1) + \frac{n-m}{n} f(m) \right] \\ &= n \left[ \alpha f(m-1) + \left( \frac{n-m}{n} \right) \frac{f(m)}{m} \right] \\ &= nW(m) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que en caso de que la red eficiente sea alguna con componentes simétricos y que  $n/m^* \in \mathbb{N}$ , las redes eficientes y fuertemente estables tienen el mismo número y tamaño de componentes, puesto:

$$\underset{m \in \{1, \dots, n\}: n/m \in \mathbb{N}}{\text{Argmax}} nW(m) = \underset{m \in \{1, \dots, n\}}{\text{Argmax}} W(m) \quad (2.4)$$

Es interesante notar además que, pese a que cuando no desaparece ningún individuo, las redes fuertemente estables y eficientes son iguales, una vez desaparece algún individuo las redes fuertemente estables y eficientes pueden divergir. Esto deviene del hecho de que los individuos no internalizan el daño que provocan a los demás jugadores como ilustra el siguiente ejemplo

### 2.1.3. Un Ejemplo numérico

Sea  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ . Observemos que por la proposición (2.1) las únicas estructuras candidatas a ser redes fuertemente estables o eficientes, son las redes con una arquitectura ilustradas en la figura 2.2.

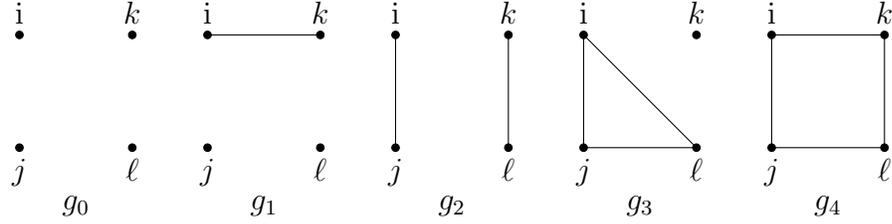


Figura 2.2: Candidatos a redes estables y eficientes

Asumamos que  $f(n(h)) = (n(h))^{3/2}$ . Comencemos por buscar las redes eficientes. El valor esperado de cada una de las redes ilustrada en 2.2 es:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_K [V(g_0, K)] &= 3 \\
 \mathbb{E}_K [V(g_1, K)] &= \frac{1}{2} [f(2) + f(1)] + \frac{1}{2} [\alpha f(1) + 2f(2)] \\
 &= 1 + \sqrt{2} + \frac{\alpha}{2} \\
 \mathbb{E}_K [V(g_2, K)] &= f(2) + \alpha f(1) \\
 &= 2^{3/2} + \alpha \\
 \mathbb{E}_K [V(g_3, K)] &= \frac{3}{4} [\alpha f(2) + f(1)] + \frac{1}{4} f(3) \\
 &= \frac{3\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{3^{3/2}}{4} + \frac{3}{4} \\
 \mathbb{E}_K [V(g_4, K)] &= \alpha f(3) \\
 &= \alpha 3^{3/2}
 \end{aligned}$$

El conjunto de redes eficientes RE es entonces,

$$\text{RE} = \begin{cases} g_0 & \text{si } \alpha < 0,172 \\ \{g_0, g_2\} & \text{si } \alpha = 0,172 \\ g_2 & \text{si } 0,172 < \alpha < 0,674 \\ \{g_2, g_4\} & \text{si } \alpha = 0,675 \\ g_4 & \text{Si } \alpha > 0,674 \end{cases}$$

Estudiemos ahora las redes fuertemente estables. Observemos que el problema de maximizar el tamaño del grupo es en este caso,

$$\max_{m \in [0,4]} \frac{\alpha}{4}(m-1)^{3/2} + m^{1/2} - \frac{1}{4}m^{3/2} \quad (2.5)$$

De donde obtenemos como CPO y CSO respectivamente:

$$\frac{dW}{dm}(m) = \alpha \frac{3}{8} \sqrt{m-1} + \frac{1}{2\sqrt{m}} - \frac{3}{8}m^{1/2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2W}{dm^2}(m) = \alpha \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{m-1}} - \frac{1}{2m(3/2)} - \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{m}} < 0 \quad (2.7)$$

podemos observar que (2.7) es negativa y por tanto la función objetivo en (2.5) es estrictamente cóncava y tiene un máximo global. La solución de (2.6) en función de  $\alpha$  está dada por,

$$m^*(\alpha) = \frac{3\alpha^2 - \sqrt{9\alpha^4 + 16\alpha^2} - 8}{6(\alpha^2 - 1)}$$

Tenemos entonces que el mayor componente en la red fuertemente estable tiene,

$$m^*(\alpha) = \begin{cases} 4 & \text{si } \alpha > \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \approx 0,73 \\ 3 & \text{si } \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \approx 0,73 > \alpha > 0,59 \approx \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \\ 2 & \text{si } \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \approx 0,59 > \alpha > 0,17 \approx 3 - 2\sqrt{2} \\ 1 & \text{si } \alpha < 0,17 \approx 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \quad (2.8)$$

El conjunto de redes fuertemente, RFE, es:

$$\text{RFE} = \begin{cases} g_4 & \text{si } \alpha > 0,73 \\ \{g_3, g_4\} & \text{si } \alpha = 0,73 \\ g_3 & \text{si } 0,73 > \alpha > 0,59 \\ \{g_2, g_3\} & \text{si } \alpha = 0,59 \\ g_2 & \text{si } 0,59 > \alpha > 0,17 \\ \{g_0, g_1, g_2\} & \text{si } \alpha = 0,17 \\ g_0 & \text{si } \alpha < 0,17 \end{cases}$$

Mientras que el conjunto de redes fuertemente, REFE, es:

$$\text{REFE} = \begin{cases} g_4 & \text{si } \alpha \geq 0,73 \\ \emptyset & \text{si } 0,73 > \alpha > 0,59 \\ g_2 & \text{si } 0,59 \geq \alpha > 0,17 \\ \{g_0, g_1, g_2\} & \text{si } \alpha = 0,17 \\ g_0 & \text{si } \alpha < 0,17 \end{cases}$$

Comparando las redes eficientes con las redes fuertemente estables, tenemos que estas son iguales cuando  $\alpha \in [0, 0,59] \cup [0,73, 1]$  mientras que difiere cuando  $\alpha \in [0,59, 0,73]$ . Notemos que cuando  $\alpha \in [0,59, 0,67]$  el componente más grande de la red socialmente eficiente tiene menos individuos que en el componente más grande de la red fuertemente estable y si  $\alpha \in [0,67, 0,73]$  el componente más grande de la red socialmente eficiente tiene más individuos que el de la red fuertemente eficiente.

## 2.2. Una extensión del modelo de comunicaciones

Estudiemos ahora un segundo modelo de comunicación algo más complejo. Asumiremos que cada individuo tiene una probabilidad  $p$  de desaparecer independiente de las probabilidades con que desaparezca el resto de individuos. Observaremos que se conservan las intuiciones que presentamos en el apartado anterior.

Asumiremos que  $V$  es monóticamente sensible a las desapariciones, en particular, asumiremos que el valor posterior producido por el componente  $h \in C(g_K)$ , donde  $h \subseteq h' \in C(g)$ , es

$$V(h, K) = \alpha^{k(h)} f(n(h))$$

donde  $k(h) = |\{N(h') \setminus N(h)\}|$ , esto es, el número de individuos con los que los miembros de  $h$  perdieron contacto, de esta forma, mientras más individuos desaparezcan de una organización, más castigada se ve su producción. Asumimos  $f$  cumple las mismas hipótesis que en el apartado anterior. El valor posterior a la desaparición de los  $K$  individuos producido por  $g$  es entonces,

$$V(g, K) = \sum_{h \in C(g_K)} V(h, K) \quad (2.9)$$

Consideraremos además que cada individuo tiene una probabilidad  $p$  de desaparecer independiente de la desaparición de los demás individuos. Por lo cual la probabilidad de que desaparezca cualquier conjunto  $K \in \mathcal{P}(N)$  es,

$$P(K) = p^{|K|} (1 - p)^{n - |K|}$$

La siguiente definición es una extensión natural de la definición 2.1 y nos ayudará a caracterizar las redes estables en pares.

**Definición 2.2** (Conjunto crítico de jugadores)

Un conjunto de jugador  $K \subset N(h)$ , es *crítico* en el componente  $h \in C(g)$  si  $|C(h_K)| > 1$

Usando la idea de conjunto de jugadores críticos, podemos determinar que cada componente en una red estable en pares está full interconectada. Esto es, se mantienen redundancias en las vías de comunicación en la organización.

**Proposición 2.8**

*Si la red  $g$  es estable en pares, entonces cada  $h \in C(g)$  está full interconectado y no contiene un conjunto de jugadores críticos.*

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos un componente  $h$  que no está full interconectado. Existe entonces al menos un individuo  $i$  que tiene un número de conexiones  $n_i(h) = k \leq n(h) - 1$ . Consideremos el conjunto  $S = N_i(h)$ , esto es, el conjunto de jugadores con los cuales el jugador  $i$  mantiene conexiones directas en  $h$ . Este conjunto de jugadores desaparece con probabilidad positiva,

en efecto,

$$P(S) = p^k(1-p)^{n-k} > 0 \quad (2.10)$$

tras la desaparición de  $S$ , el componente  $h$  se fractura en por lo menos 2 fragmentos, puesto hay al menos un jugador con el que  $i$  no estaba relacionado directamente y por tanto  $j \notin S$ . Notemos entonces que si los jugadores  $i$  y  $j$  se vinculan directamente agregando el link  $ij$  a  $h$ , tenemos para  $\ell \in \{i, j\}$  que :

$$Y_\ell(h + ij, S) - Y_\ell(h, S) \geq \alpha^k \left[ \frac{f(2)}{2} - f(1) \right]$$

notemos que dado que  $f(2) > 2f(1)$ ,  $f(2) - f(1) > 0$ . Por lo cual tenemos que, en la eventualidad particular en que desaparecen todos los individuos con los que  $i$  estaba conectado, el pago tanto de  $i$  como  $j$  aumenta cuando se vinculan directamente. Observemos también que, dado que no cambia el número de individuos en el componente y que la vinculación no es costosa,  $\forall K \in N(h)$  se satisface que

$$Y_i(h + ij, K) - Y_i(h, K) \geq 0$$

de donde se concluye que,

$$\mathbb{E}_K [Y_\ell(h + ij, K)] - \mathbb{E}_K [Y_\ell(h, K)] > 0$$

por lo cual, en una red estable en pares, no pueden haber conjuntos de jugadores críticos en el componente, de donde tenemos que cada miembro de un componente  $h$  con  $n(h)$  miembros debe mantener vínculos directos con los demás  $n(h) - 1$  individuos.  $\square$

Observemos que la intuición de esta proposición es idéntica a la 2.1. El peligro de que, al desaparecer algunos agentes, la organización se fragmente y deje a sus diversas partes aisladas, provoca que los individuos prefieran mantener redes de comunicación más densas.

Dado que, sin importar que conjunto de individuos desaparezca, ningún componente en una red estable en pares se fragmente, tenemos que:

### Corolario 2.9

La función  $W_i$  en este caso es:

$$W_i(m) = (1-p) \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m-\ell-1} \alpha^\ell \frac{f(m-\ell)}{m-\ell}$$

Observemos que todos los individuos que pertenecen al mismo componente obtienen el mismo pago. Podemos entonces seguir los mismos procedimientos que usamos en la sección 2.1.1 y realizar proposiciones análoga a la proposición 2.3, para esto llamemos,

$$m^* \in \underset{m \in \{1, \dots, n\}}{\text{Argmax}} W(m) \quad (2.11)$$

asumamos que  $m^*$  es único y que  $n/m^*$  es natural (en caso contrario podemos usar exactamente el mismo procedimiento que en A.1 para encontrar resultados equivalentes en caso de que no se cumpla ninguno de los dos supuestos),

**Proposición 2.10** (caracterización RFE)

Si  $g \in \text{RFE}$  entonces en  $g$  hay  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  individuos y cada componente está full interconectado. Además  $\text{RFE} \neq \emptyset$ .

DEMOSTRACIÓN.

Idéntico proceso a la demostración de la proposición 2.3 ( o más en general, a la demostración A.1 ), pero cambiando desvíos desde círculos de jugadores a círculos de jugadores, por desvíos desde componentes full interconectados a componentes full interconectados.  $\square$

**Proposición 2.11** (caracterización REFE)

- (i) Si  $n/m^* \in \mathbb{N}$ , entonces ?? REFE y cualquier red con  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  miembros cada uno y donde cada componente está full interconectado es fuertemente estable.  
(ii) Si  $n/m^* \notin \mathbb{N}$  no hay redes fuertemente estables.

DEMOSTRACIÓN.

Idéntica a la demostración de la proposición 2.4.  $\square$

**Proposición 2.12**

Si la probabilidad  $p$  de que desaparezca un individuo no es muy grande, la función  $m^*(\alpha, p)$ , definida como,

$$m^*(\alpha, p) = \underset{m \in \{1, \dots, n\}}{\text{Argmax}} W_i(m, \alpha, p)$$

Se satisface que  $m^*(\alpha, p)$  es creciente en  $\alpha$ .

DEMOSTRACIÓN. Ver apéndice A.1  $\square$

Por lo que rescatamos los principales resultados del primer modelo. Podemos observar que el tamaño de los grupos que se forman en la red fuertemente estable decrece tanto en caso de que los abandonos dañen mucho a la organización, cómo en el caso de que sea muy probable que un individuo desaparezca.

**2.2.1. Otro ejemplo numérico**

Consideremos  $f(N(h)) = (N(h))^2$ ,  $p = \frac{1}{2}$  y  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Observemos que dada la proposición 2.8, existen sólo siete tipos de estructuras de redes candidatas a redes fuertemente estables, las cuales están ilustradas y numeradas en la figura 2.3.

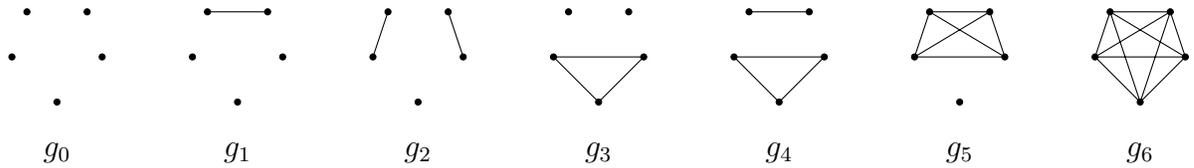


Figura 2.3: Candidatos a redes estables y eficientes

Antes de seguir, recordemos que algunas de las ilustraciones representan clases de redes y no una red en específico, por ejemplo hay 10 redes que siguen la estructura ilustrada en  $g_1$ .

Comencemos buscando las redes eficientes. Para esto, tenemos a continuación el pago esperado de cada una de las redes candidatas a eficientes es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_0, K)] &= 5(1-p)f(1) \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_1, K)] &= 2p(1-p)\alpha f(1) + (1-p)^2 f(2) + 3(1-p)f(1) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_2, K)] &= 2(2p(1-p)\alpha f(1) + (1-p)^2 f(2)) + (1-p)f(1) \\ &= \frac{3}{2} + \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_3, K)] &= (3p^2(1-p)\alpha^2 f(1) + 3p(1-p)^2 \alpha f(2) + (1-p)^3 f(3)) + 2(1-p)f(1) \\ &= \frac{17}{8} + \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_4, K)] &= (3p^2(1-p)\alpha^2 f(1) + 3p(1-p)^2 \alpha f(2) + (1-p)^3 f(3)) + 2p(1-p)\alpha f(1) + (1-p)^2 f(2) \\ &= \frac{17}{8} + 2\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_5, K)] &= 4p^3(1-p)\alpha^3 f(1) + 6p^2(1-p)^2 \alpha^2 f(2) + 4p(1-p)^3 \alpha f(3) + (1-p)^4 f(4) + (1-p)f(1) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{\alpha^3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [V(g_6, K)] &= 5p^4(1-p)\alpha^4 f(1) + 10p^3(1-p)^2 \alpha^3 f(2) + 10p^2(1-p)^3 \alpha^2 f(3) + 5p(1-p)^4 \alpha f(4) + (1-p)^5 f(5) \\ &= \frac{25}{32} + \frac{5}{2}\alpha + \frac{90}{32}\alpha^2 + \frac{5}{4}\alpha^3 + \frac{5}{32}\alpha^4\end{aligned}$$

Podemos observar que  $\forall \alpha \in (0, 1)$ ,  $\mathbb{E}_K [V(g_1, K)] > \mathbb{E}_K [V(g_0, K)]$ ,  $\mathbb{E}_K [V(g_1, K)] > \mathbb{E}_K [V(g_2, K)]$ ,  $\mathbb{E}_K [V(g_4, K)] > \mathbb{E}_K [V(g_3, K)]$ . Luego podemos desechar las redes con las estructuras  $g_0$ ,  $g_2$  y  $g_3$  de las candidatas a redes fuertemente estables. Comparando los pagos de los candidatos que quedan tenemos que la red eficiente sigue una arquitectura,

$$\text{RE} = \begin{cases} g_1 & \text{si } 0 < \alpha < \sqrt{5} - 2 \\ \{g_1, g_4\} & \text{si } \alpha = \sqrt{5} - 2 \\ g_4 & \text{si } \sqrt{5} - 2 < \alpha < 0,57 \\ \{g_4, g_6\} & \text{si } \alpha = 0,57 \\ g_6 & \text{si } \alpha > 0,57 \end{cases}$$

Encontremos ahora las redes fuertemente estables, en primer lugar verifiquemos que,

$$\begin{aligned}
 W_i(1) &= \frac{1}{2} \\
 W_i(2) &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\alpha \\
 W_i(3) &= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8}\alpha\sqrt{2} + \frac{3}{8}\alpha^2 \\
 W_i(4) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\alpha\sqrt{3} + \frac{6}{16}\alpha^2\sqrt{2} + \frac{1}{4}\alpha^3 \\
 W_i(5) &= \frac{\sqrt{5}}{32} + \frac{10}{32}\alpha + \frac{20}{64}(\alpha^2\sqrt{3} + \alpha^3\sqrt{2}) + \frac{5}{32}\alpha^4
 \end{aligned}$$

tenemos luego que,

$$m^*(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 0,29 \\ 2 & \text{si } 0,29 \leq \alpha \leq 0,56 \\ 3 & \text{si } 0,56 \leq \alpha \leq 0,69 \\ 4 & \text{si } 0,69 \leq \alpha \leq 0,76 \\ 5 & \text{si } \alpha \geq 0,76 \end{cases}$$

de donde podemos deducir que el conjunto RFE es,

$$\text{RFE} = \begin{cases} g_0 & \text{si } \alpha < 0,29 \\ g_2 & \text{si } 0,29 < \alpha < 0,57 \\ g_4 & \text{si } 0,57 < \alpha < 0,69 \\ g_5 & \text{si } 0,69 \leq \alpha \leq 0,76 \\ g_6 & \text{si } \alpha > 0,76 \end{cases}$$

Mientras que,

$$\text{REFE} = \begin{cases} g_0 & \text{si } \alpha \leq 0,29 \\ \emptyset & \text{si } 0,29 < \alpha < 0,76 \\ g_6 & \text{si } \alpha \geq 0,76 \end{cases}$$

Observemos que en este caso las redes fuertemente estables y eficientes coinciden únicamente en caso de que  $\alpha < 0,23$  o  $\alpha > 0,76$ , es decir cuando el impacto que genera una desaparición a la organización es muy importante, o por el contrario, poco significativo.

# Capítulo 3

## Jerarquías

En el siguiente apartado, presentaremos un segundo modelo el cual nos permitirá centrarnos en la especialización de los individuos al interior de las organizaciones. A diferencia del modelo de comunicaciones, en este modelo, la estructura de conexiones si importa para determinar el valor generado por un componente. Mostraremos que los abandonos provocan una asimetría en el pago esperado por los jugadores, en favor de los jugadores que ocupan posiciones de mayor centralidad. Esta asimetría se vuelve una fuente de inestabilidad en la organización, limitando el aprovechamiento de la especialización.

### 3.1. Modelo y notación

Asumimos que cada individuo en  $N = \{1, \dots, n\}$  está dotado de un tiempo total  $T$  que debe distribuir entre labores productivas y administrativas en la organización en que participa, normalizamos este tiempo a 1 para simplificar. Llamamos  $a_i(h)$  al tiempo que utiliza el individuo  $i$  en labores administrativas y  $p_i(h)$  al tiempo que dedica a producir en  $h$ .

Supondremos que el tiempo que el agente  $i$  dedica a labores administrativas depende del número de contactos directos que mantenga en  $h$ ,  $n_i(h)$ . Para simplificar, supondremos que cada conexión directa implica dedicar una cantidad de tiempo fija  $\tau$ , un individuo por tanto no puede tener más de  $1/\tau$  conexiones directas. Tenemos entonces para  $n_i(h) \leq 1/\tau$ :

$$\begin{aligned} a_i(h) &= \tau n_i(h) \\ p_i(h) &= 1 - \tau n_i(h) \end{aligned}$$

Para simplificar aún más, asumimos que  $1/\tau = 3$ , lo cual implica que el espacio de organizaciones factibles es:

$$G = \{g \in g^N : N_i(g) \leq 3 \quad \forall i \in N\}$$

Este supuesto no es crítico en ninguna demostración y pensamos que los resultados pueden ser generalizados para cualquier  $\tau$ . Agrupando los individuos según el tiempo que dedican a administrar, podemos particionar cada conjunto  $N(h)$  en tres subconjuntos: Especialistas en administrar  $\mathcal{A}(h)$ , especialistas en producir  $\mathcal{W}(h)$  y no especialista  $\mathcal{I}(h)$ , definidos respectivamente como:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(h) &= \{i \in N(h) : p_i(h) = 0\} \\ \mathcal{L}(h) &= \{i \in N(h) : p_i(h) = 2/3\} \\ \mathcal{I}(h) &= \{i \in N(h) : p_i(h) = 1/3\}\end{aligned}$$

Llamaremos además  $A(h) = |\mathcal{A}(h)|$ ,  $L(h) = |\mathcal{L}(h)|$  y  $I(h) = |\mathcal{I}(h)|$ .

La producción de cada individuo  $i$  en la organización está dada por una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada par de tiempo empleado en producción y número de trabajadores en la organización,  $(p_i(h), n(h))$  asigna la producción de este trabajador  $f(p_i(h), n(h))$ . Asumimos que  $f$  es creciente en ambas variables.

Asumimos que un individuo que no invierte tiempo en labores productivas produce 0, esto es,  $f(0, n(h)) = 0$ , además, suponemos que para  $\kappa > 1$ ,  $f(\kappa t, m) > \kappa f(t, m)$  de manera que hay economías asociadas a la especialización de los individuos. Por último supondremos que para  $\kappa > 1$ ,  $f(t, \kappa m) > \kappa f(t, m)$  por lo que hay también economías asociadas al tamaño de la organización.

Podemos observar en este modelo, que en una organización jerárquica existen individuos especializados en la coordinación de los demás y otros especializados en labores productivas, tal como señala [11].

En [9] y [20] podemos encontrar múltiples explicaciones que justifiquen estos supuestos sobre  $f$  (y por tanto sobre  $V(g, K)$ ), por ejemplo, una organización en la cual algunos individuos se especialicen en administrar, puede generar estructuras que faciliten el matching entre los problemas que surgen en la organización con los especialistas más capaces de solucionarlos, o se puede hacer más eficientes los lenguajes organizacionales al funcionar los administradores de bajo nivel como “traductores” entre los administradores de alto nivel y los especialistas.

El valor total generado en una organización  $h \in C(g_K)$  posterior a la desaparición de  $K$  es:

$$V(h, K) = \sum_{i \in N(h)} \alpha^{|K|} f(p_i(g), n(h)) \quad (3.1)$$

Observemos que el tiempo de producción del jugador  $i$  se mantiene fijo y no cambia al cambiar el número de individuos con los que está conectado tras las desapariciones. Esto implica que hay cierta inercia en la organización. El valor obtenido por vincularse según  $g$  es, posterior de la desaparición del subconjunto  $K$  de individuos es:

$$V(g, K) = \sum_{h \in C_K(g)} V(h, K)$$

El valor esperado de  $g$  por su parte es:

$$\mathbb{E}_K [V(g, K)] = \sum_{K \in P(N)} P(K) V(g, K)$$

El pago que obtiene un individuo por participar de la producción en la organización  $h$  es entonces

$$Y_i(g, K) = \frac{V(h, K)}{N(h)} \quad (3.2)$$

## 3.2. Solución sin deserciones

En este apartado estudiamos el caso particular en que no desaparece ningún individuo, esto es, el caso en que  $P(\emptyset) = 1$ . Estudiamos esta situación para tener un caso base con el cual comparar los resultados posteriores.

### Proposición 3.1

*Si  $P(\emptyset) = 1$ , entonces si la red  $g$  es eficiente o estable en pares, cada componente  $h \in c(g)$  no tiene ciclos.*

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos un componente  $h \in C(g)$  en el cual participan  $n(h) \geq 3$  individuos (En caso contrario la demostración es trivial puesto los componentes formados de parejas y individuos aislados obviamente no tienen circuitos).

Supongamos que en el componente  $h$  hay un ciclo  $i_1 i_2, i_2 i_3, \dots, i_k i_1$ , mostraremos que quitar el vínculo  $i_k i_1$  aumenta el valor del componente. Para esto basta con notar que en  $h - \{i_k i_1\}$ ,  $p_\ell(h) < p_\ell(h - \{i_k, i_1\})$  para  $\ell \in \{1, k\}$ , mientras que  $p_\ell(h) = p_\ell(h - \{i_k i_1\}) \forall i \in N(h) \setminus \{1, k\}$ ,

como  $f$  es creciente en  $p_i$ , se concluye que  $V(h - \{i_k i_1\}, \emptyset) > V(h, \emptyset)$ .

Como los individuos se reparten en forma igualitaria el valor generado en  $h$ , eliminar los ciclos en  $h$  aumenta también el pago que obtiene cada individuo en la organización, por lo cual una red estable en pares tampoco incluye ciclos.

□

Para completar la caracterización de las redes eficientes y estables en pares, la siguiente proposición establece que en las redes fuertemente estables y eficientes, hay una especialización completa de los individuos (cada individuo es un especialista), además, la red eficiente o estable en pares consta de un único componente.

**Proposición 3.2** (especialización sin abandonos)

*Si  $g$  es eficiente o fuertemente estable, entonces en todo componente  $h \in C(g)$  a lo más un individuo no está especializado,*

- i. Si  $n(h)$  es par, entonces en  $h$  hay  $A(h) = \frac{n(h)-2}{2}$ ,  $L(h) = \frac{n(h)+2}{2}$  y  $I(h) = 0$ .*
- ii. Si  $n(h)$  es impar, entonces en  $h$  hay  $A(h) = \frac{n(h)-3}{2}$ ,  $L(h) = \frac{n(h)+1}{2}$  y  $I(h) = 1$ .*

DEMOSTRACIÓN.

Por la proposición 3.1, el espacio de todas las redes candidatas para ser eficientes o fuertemente estables es:

$$\{g \subseteq G : \text{no hay ciclos en } g\}$$

Tomemos cualquier componente  $h \in C(g)$  con  $m$  individuos. Notemos ahora que como  $g$  es un árbol, cualquier componente con  $A$  administradores especialistas, tiene necesariamente  $L = A + 2$  trabajadores especialistas y  $I = m - 2A - 2$  no especialistas. Usando esta observación, podemos escribir una función  $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que asigne a cada organización con  $m$  miembros y  $A$  administradores, el valor producido por dicha organización,  $\phi(A, m)$ , en efecto,

$$\phi(A, m) = (A + 2)f\left(\frac{2}{3}, m\right) + (m - 2A - 2)f\left(\frac{1}{3}, m\right)$$

Observemos que el valor marginal por cambiar un par de individuos no especialistas por un administrador especialista y un trabajador especialista es:

$$\phi(A + 1, m) - \phi(A, m) = f\left(\frac{2}{3}, m\right) - 2f\left(\frac{1}{3}, m\right)$$

Esta expresión es mayor que 0 si,

$$2 < \frac{f(\frac{2}{3}, m)}{f(\frac{1}{3}, m)} \quad (3.3)$$

Como asumimos que hay economías asociadas a la especialización de  $f$ , tenemos que  $f(\frac{2}{3}, m) > 2f(\frac{1}{3}, m)$  y por tanto se cumple 3.3. Luego en la red eficiente o estable se debe minimizar el número de individuos no especialistas. Si  $m$  es par, entonces, se pueden obtener 0 no especialistas y si  $n$  es impar el mínimo de no especialistas que se puede alcanzar es 1. Esto basta para mostrar que una red eficiente está completamente especializada.

Observemos por otra parte, que una red  $g$  en la cual haya una especialización plena, es alcanzable vía desviaciones de los individuos en  $N(h)$ , luego en una red fuertemente estable, la red debe exhibir una plena especialización de los individuos, puesto en caso contrario todos los individuos estarán mejor desviándose a una organización full especializada .

□

Observemos que esto es importante para las intuiciones del modelo, cuando no hay desapariciones, conviene maximizar el número de especialistas en un componente y aprovechar de forma plena todas las economías asociadas a la especialización de los individuos.

Nos queda examinar el número de componentes que se forman en una red eficiente y estable. El número de componentes en las redes eficientes dependerá de la relación entre las economías asociadas a la especialización respecto de las economías asociadas al número de individuos en la organización. Para ilustrar esto, consideremos por ejemplo que  $n = 30$ , si formáramos un único componente para agotar completamente las economías por el tamaño de la organización, la proposición 3.2 establece que en la red hay 16 trabajadores especialistas y 14 administradores y se obtendría un valor de  $16V(2/3, 30)$ . Por otro lado, podríamos formar 10 componentes con tres miembros cada uno, de esta forma obtendríamos un total de 20 trabajadores especialistas y 10 no especialistas y se produciría un valor total igual a  $20V(2/3, 3) + 10V(1/3, 3)$ , es más, podríamos formar 30 componentes con un único individuo y obtener un valor igual a  $30f(1, 1)$ . Como se ilustra, el número y tamaño de componentes en la red óptima dependerá de cuan relevante sea aumentar el tamaño de la firma respecto de aumentar el número de especialistas.

Observemos que lo que se produce en un componente con  $m \geq 2$  individuos es,

$$Z(m) = \begin{cases} f(1, 1) & \text{si } m = 1 \\ \frac{m-2}{2}f(2/3, m) & \text{si } m > 1 \text{ y es par} \\ \frac{m-3}{2}f(2/3, m) + f(1/3, m) & \text{si } m > 1 \text{ y es impar} \end{cases} \quad (3.4)$$

**Proposición 3.3** (Número de individuos en cada componente)

- i. Si  $Z$  es superaditiva, entonces en una red  $g$  eficiente o fuertemente estable contiene un único componente con  $n$  individuos.*
- ii. Si  $Z$  es subaditiva, entonces en una red  $g$  eficiente o fuertemente estable contiene  $n$  componentes, esto es, cada individuo produce en forma aislada.*

DEMOSTRACIÓN. Obvia. □

Supondremos a partir de este momento que la función  $Z$  es superaditiva y por tanto, cuando nadie desaparece hay incentivos fuertes a formar redes full especializadas que conecten a todos los individuos.

La red fuertemente estable y eficiente, cuando no desaparece ningún jugador está ilustrada en la figura 3.1 para  $n = 10$ . Como se puede observar la red está formada por un único componente, donde dicho componente es un árbol y donde cada individuo se ha especializado como administrador o como trabajador.

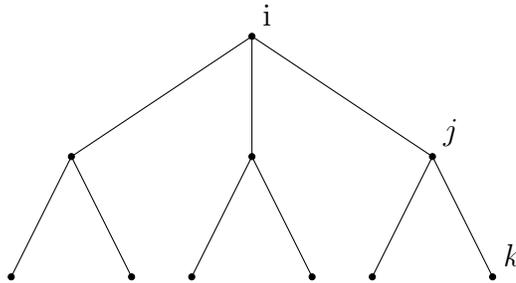


Figura 3.1: Ejemplo red estable sin desapariciones.

### 3.3. Solución con deserciones

Estudiemos ahora que sucede en este modelo cuando hay deserciones. Asumimos que la probabilidad de que desaparezca  $K \in \mathcal{P}(N)$  está dado por:

$$P(K) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } |K| = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Antes de continuar, observemos que una red se verá afectada de una forma desigual según que clase de individuo desaparezca, en particular, la desaparición de un sujeto que se especializa en administrar y ocupa una posición central, puede tener un impacto muy importante. Por ejemplo, en la organización ilustrada en la figura 3.2, la desaparición del sujeto  $i$  fragmente la organización en tres componentes con tres miembros cada uno.

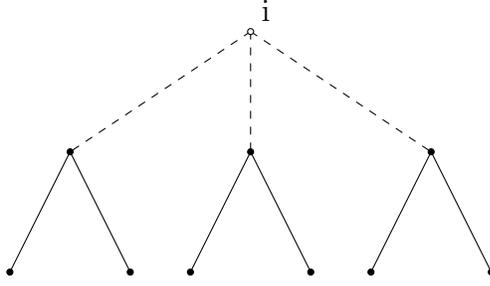


Figura 3.2: Impacto del abandono de un sujeto central en la organización.

En cambio, cuando desaparece un trabajador especialista, como  $k$ , la organización no se fragmenta y sus distintas partes no se desconectan, como se ilustrado en la figura 3.3.

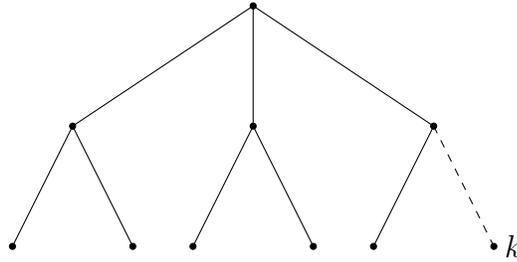


Figura 3.3: Impacto del abandono de un sujeto periférico en la organización

De estos ejemplos, se intuye directamente que en el modelo hay un riesgo directo asociado a especializar los miembros de la organización. En general, se tiende a pensar que en un entorno en que los individuos pueden desertar con facilidad, se formarán redes con una menor cantidad de especialistas.

Esta asimetría en el impacto de las desapariciones en la organización residual, tiene un importante impacto en el pago que recibe un individuo al formar parte de una organización: sin importar que los individuos sean idénticos y que la regla de asignación posterior sea igualitaria en componentes, un individuo con un grado de centralidad mayor obtendrá un mayor pago esperado. Para ver por qué, consideremos el siguiente ejemplo,

### Ejemplo 3.1

En la red ilustrada en la figura 3.1, podemos observar que hay tres clases diferentes de individuos, cuyos pagos esperados son:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] &= \frac{6}{n} [5\alpha f(3/2, 9)] + \frac{3}{n} [4\alpha^3 f(2/3, 7)] + \frac{n-10}{n} [6f(2/3, 10)] \\ \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] &= \frac{6}{n} [5\alpha f(2/3, 9)] + \frac{2}{n} [4\alpha^3 f(2/3, 7)] + \frac{1}{n} [2\alpha^7 f(2/3, 3)] + \frac{n-10}{n} [6f(2/3, 10)] \\ \mathbb{E}_K [Y_k(g, K)] &= \frac{5}{n} [5\alpha f(2/3, 9)] + \frac{2}{n} [4\alpha^3 f(2/3, 7)] + \frac{1}{n} [4\alpha^7 f(2/3, 3)] + \frac{1}{n} [\alpha^9 f(2/3, 1)] + \frac{n-10}{n} [6f(2/3, 10)] \end{aligned}$$

verifiquemos que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] - \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] &= \frac{1}{n} [4\alpha^3 f(2/3, 7) - 2\alpha^7 f(2/3, 3)] > 0 \\ \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] - \mathbb{E}_K [Y_k(g, K)] &= \frac{1}{n} [5\alpha f(2/3, 9) - \alpha^9 f(2/3, 1)] > 0\end{aligned}$$

explotando esta asimetría en los pagos esperados, podremos probar que en caso de existir una red REFE, en esta, cualquier componente con más de tres individuos no contendrá especialistas. Pero antes de esto, observemos que en una red fuertemente estable debe haber a lo más un subconjunto de jugadores formando un círculo, puesto de lo contrario se podría aumentar el número de trabajadores no especialistas, sin disminuir el número de trabajadores especialistas y sin volver a la red más frágil a las desapariciones.

**Proposición 3.4**

*Si  $g \in \text{RFE}$ , o  $g \in \text{RE}$ , entonces cada componente  $h \in C(g)$  con  $n(h) \geq 3$  tiene a lo más un subconjunto  $N' \subset N(h)$  de jugador, cuyos miembros forman un círculo.*

DEMOSTRACIÓN.

Asumamos que  $g$  es fuertemente estable y que hay un componente  $h \in c(g)$  en el cual hay dos o más conjuntos de jugadores cuyos miembros forman un ciclo. Sea  $N_1$  y  $N_2$  dos de estos conjuntos.

En cada red en la cual hay más de un ciclo, se cumple que  $N_\ell \cap \mathcal{A}(h) \neq \emptyset$  para  $\ell \in \{1, 2\}$ , en efecto, en caso de que  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ , como  $N_1$  y  $N_2$  pertenecen al mismo componente debe haber por lo menos un individuo  $i$  que mantenga un vínculo con un individuo fuera de  $N_\ell$  y de esta forma conecte los miembros de  $N_\ell$  con el resto del componente. Como dicho individuo forma parte de un ciclo,  $i$  debe mantener además dos vínculos con individuos al interior de  $N_\ell$  y de esta forma se verifica que  $n_i(g) = 3$ . En caso de que  $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ , debe haber por lo menos dos jugadores  $\{i, j\} \in N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$  que mantienen tres vínculos, en particular, porque  $N_1 \neq N_2$ , entonces al menos dos individuos deben mantener dos vínculos con ambos ciclos, sino alguno de los conjuntos de jugadores no formaría un ciclo ( ambos casos están ilustrados en la figura 3.4 ).

Mostraremos a continuación que podemos encontrar una red que genera mayor valor que  $g$  formando un único ciclo con los miembros de  $N_1$  y  $N_2$ . Definamos el conjunto  $g_{N_\ell}$  como el conjunto de todos los links que mantienen entre sí los jugadores de  $N_\ell$ , esto es:

$$g_{N_\ell} = \{ij \in g : i \in N_\ell \text{ y } j \in N_\ell\}$$

Definamos adicionalmente  $g^c$  como el red en la cual se forma un único anillo con el conjunto  $N(g^c) = N_1 \cup N_2$ . Sea  $\tilde{g}$  la red,

$$\tilde{g} = \{g \setminus \{g_{N_1} \cup g_{N_2}\}\} \cup g^c$$

esto es, la red que formamos retirando todos los links en ambos ciclos y añadiendo un anillo entre todos los individuos que formaban parte de dichos ciclos. Notemos que este desvío sólo supone añadir y cortar vínculos entre los jugadores de  $N_1 \cup N_2$ , por lo cual  $\tilde{g}$  es alcanzable vía desvíos en  $N_1 \cup N_2$ . . Tenemos que para todo  $i \in N_1 \cup N_2$ ,

$$V(\tilde{g}, \{i\}) - V(g, \{i\}) \geq \begin{cases} 2\alpha [f(1/3, N(g^c))] & \text{si } i \notin \{j_1, j_2\} \\ \alpha f(1/3, N(g^c)) & \text{si } i \in \{j_1, j_2\} \end{cases}$$

puesto el conjunto de jugadores ha ganado dos trabajadores no especializados, sin perder ningún trabajador especialista, esto sin volver al conjunto más vulnerable a la desconexión tras las desapariciones (de hecho se ha vuelto más resistente a las desapariciones en caso de que  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ). Tenemos entonces que para los individuos  $i \in \{N_1 \cup N_2\}$ ,

$$\mathbb{E}_K [V(\tilde{g}, k)] - \mathbb{E}_K [V(g, k)] \geq 2\alpha \frac{n-2}{n} [f(1/3, N(g^c))] + \alpha \frac{2}{n} f(1/3, N(g^c))$$

con lo que se verifica que una red eficiente no contiene más de un subgrafo que sea un anillo. Por otra parte, dado que la regla de asignación es igualitaria en componentes y todos los individuos en  $N_1 \cup N_2$  forman parte del mismo componente sin importar quien desaparezca, los individuos de  $N_1 \cup N_2$  aumentan su pago con el desvío, de donde obtenemos que la red que en la red fuertemente estable no puede haber más de un conjunto de jugadores que forme un ciclo.

□

La intuición de la proposición es muy simple, consideremos el ejemplo ilustrado en la figura 3.4, si en una red hay más de un ciclo, entonces hay por lo menos dos especialistas administradores ( $i$  y  $j$  en la figura). Si reubicamos los jugadores que forman parte de los diferentes ciclos en un único ciclo más grande, podemos transformar en trabajadores no especializados a los jugadores  $i$  y  $j$  sin alterar el número de trabajadores especializados ni la fragilidad ante las desapariciones (por el contrario).

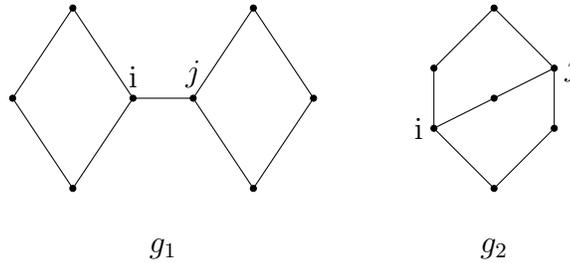


Figura 3.4: Red estable y eficiente cuando no hay desapariciones.

Volviendo ahora al argumento central, definimos,

$$C_i(\ell k, g) = \begin{cases} 1 & \text{Si todos los caminos entre } k \text{ y } \ell \text{ en } g \text{ pasan por } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con  $\{i, \ell, k\} \subset N(h)$  y definamos adicionalmente  $C_i^j(g)$  como el número de individuos que se desconectan de  $j$  cuando desaparece  $i$ , esto es:

$$C_i^j(g) = \sum_{k \in N(h) \setminus \{j\}} C_i(jk, g)$$

esta función nos permite determinar cuan importante es el jugador  $i$  al momento de mantener conectado al jugador  $j$  al resto del componente.

Lamentablemente no hemos podido caracterizar mucho más el conjunto RFE en este modelo, en cambio, podemos caracterizar con mucha exactitud el conjunto REFE, en particular podemos establecer que las redes en este conjunto no tienen especialistas, como establece la siguiente proposición.

**Proposición 3.5** (Especialización con abandonos)

*Si  $g \in \text{REFE}$ , entonces en cada  $h \in C(g)$  con  $N(h) > 2$ , se satisface que  $\mathcal{A}(h) = \mathcal{W}(h) = \emptyset$ .*

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos un componente  $h$  que contiene al menos un trabajador especialista, sea  $i \in \mathcal{L}(h)$ , llamemos  $j$  al jugador a través del cual  $i$  está conectado al resto del componente.

Notemos que  $C_j^i(h) \geq C_i^j(h)$  y que cuando desaparece un jugador  $k \notin \{i, j\}$ ,  $i$  y  $j$  pertenecen al mismo componente  $h' \in C(g_k)$  y por tanto  $Y_i(h, K) = Y_j(h, k) = \frac{V(h, K)}{N(h')}$ . Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} Y_j(h, \{i\}) &= \alpha^{C_j^i(h)+1} f(2/3, 1) \\ Y_i(h, \{j\}) &= \alpha [L(h)f(2/3, n(h) - 1) + I(h)f(1/3, n(h) - 1)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

si tenemos que  $L(h) \geq 1$  (esto es, hay un trabajador especialista aparte de  $i$ , lo cual se cumple si es que  $h$  es por ejemplo un árbol) tenemos directamente que  $Y_i(h, \{j\}) > Y_j(h, \{i\})$  puesto  $f(2/3, n(h) - 1) > f(2/3, 1)$ . Por tanto,  $\mathbb{E}_K [Y_i(h, K)] > \mathbb{E}_K [Y_j(h, K)]$ .

Observemos ahora que el conjunto de nodos adyacentes de  $j$ ,  $S = N_j(g)$ , puede alcanzar vía desvíos en  $S$  una red con una arquitectura idéntica al de la red  $g$ , pero donde los jugadores  $i$  y  $j$  han intercambiado lugares en la red. En efecto, consideremos primero que el nodo  $j$  es de grado 2 y llamemos  $k$  el segundo nodo al que  $j$  está vinculado, la red  $g' = \{g \setminus jk\} \cup \{ik\}$  se puede alcanzar vía desvíos en  $S = \{i, k\}$ , dado que basta añadir un vínculo entre jugadores que pertenecen a  $S$  y eliminar vínculos con jugadores fuera de  $S$ . Por otro lado, consideremos ahora que  $j$  es de grado tres y  $S = \{i, k, \ell\}$ , la red  $g' = \{g \setminus \{jk, j\ell\}\} \cup \{i\ell, ik\}$  es alcanzable vía desvíos en  $S$  puesto sólo implica añadir vínculos entre los miembros de  $S$  y quitar vínculos

donde al menos una de las partes pertenece a  $S$ .

Tenemos entonces que  $\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] = \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)] > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$  y  $\mathbb{E} [Y_\ell(g', K)] = \mathbb{E} [Y_\ell(g, K)]$  para  $\ell \in N_j(h) \setminus \{i\}$ , luego hemos encontrado un subconjunto  $S \subset N$  tal que hay una red  $g'$  obtenible vía desvíos en  $S$ , en la cual  $\exists i \in S$  que obtiene un mayor pago en  $g'$  y donde no hay  $\ell \in S$  que esté peor bajo  $g'$ . Luego esta red no puede ser fuertemente estable.

Por último nos falta mostrar que cuando  $A(h_j) = 0$  en (3.5), entonces la red tampoco es fuertemente estable. Para esto notemos que si  $A(h_j) = 0$ , entonces  $I(h_j) = n(h) - 2 \geq 2$  y el nodo  $j$  tiene grado  $n_j(h) = 3$  (puesto que no hay otro especialista aparte del jugador  $i$  el conjunto de jugadores  $N(h) \setminus \{i\}$  necesariamente debe formar un círculo. Para este caso tenemos,

$$\begin{aligned} Y_i(h, \{j\}) &= \alpha [(I(h) - 2)f(1/3, n(h) - 1)] \geq \alpha [2f(1/3, 3)] \\ Y_j(h, \{i\}) &= \alpha^{I(h)+1} f(2/3, 1) \leq \alpha^3 f(2/3, 1) \end{aligned}$$

Si  $Y_j(h, \{i\}) > Y_i(h, \{j\})$  podemos repetir el argumento formulado anteriormente (esto es, que el pago esperado del individuo  $j$  es mayor que el de  $i$  y existe una coalición  $S$  de jugadores que no incluye a  $j$  que puede alcanzar una red  $g'$  vía desvíos en  $S$  en la que  $i$  y  $j$  han cambiado de posiciones). Como en este escenario,  $Y_i(h, \{j\})$  es estrictamente creciente en  $I(h)$  mientras que  $Y_j(h, \{i\})$  es estrictamente decreciente en  $I(h)$ , el caso más restrictivo sucede cuando  $I(h) = 2$ . En este caso, si tenemos que

$$\alpha [2f(1/3, 3)] > \alpha^3 f(2/3, 1)$$

tenemos lo buscado y solo queda explorar lo que sucede en caso contrario. Asumamos entonces que,

$$\alpha [2f(1/3, 3)] \leq \alpha^3 f(2/3, 1) \quad (3.6)$$

llamemos  $\ell$  y  $k$  los dos jugadores adyacentes  $j$  diferentes de  $i$ . Observemos que cada uno de estos jugadores obtiene un pago en  $g$  igual a,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [Y_\ell(g, K)] = \mathbb{E}_K [Y_k(g, K)] &= \alpha \frac{2}{n} \frac{f(1/3, 3)}{3} + \alpha^2 \frac{2}{n} \frac{f(1/3, 2)}{2} + \alpha \frac{1}{n} \frac{f(1/3, 3) + f(2/3, 3)}{3} \\ &\quad + \frac{n-4}{n} \frac{2f(1/3, 4) + f(2/3, 4)}{4} \end{aligned}$$

por otro lado, si  $k$  y  $\ell$  cortan el vínculo entre ambos,

$$\mathbb{E}_K [Y_\ell(g - k\ell, K)] = \mathbb{E}_K [Y_k(g - k\ell, K)] = \alpha \frac{4}{n} \frac{f(2/3, 3)}{3} + \alpha^3 \frac{1}{n} f(2/3, 1) + \frac{n-m}{n} \frac{3f(2/3, 4)}{4}$$

el pago esperado aumenta cortando el vínculo  $k\ell$  si,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [Y_\ell(g - k\ell, K)] - \mathbb{E}_K [Y_\ell(g, K)] &= \frac{\alpha}{n} [f(2/3, 3) - f(1/3, 3)] + \frac{1}{n} [\alpha^3 f(2/3, 1) - \alpha^2 f(1/3, 2)] \\ &\quad + \frac{n-4}{n} \frac{1}{2} [f(2/3, 4) - f(1/3, 4)] \geq 0 \end{aligned}$$

podemos observar que dado que  $f(2/3, m) > f(1/3, m)$  el primer y tercer término entre corchetes son positivos, mientras que la desigualdad (3.6) implica que el segundo término es también positivo (puesto que  $\alpha^3 f(2/3, 1) \geq 2\alpha f(1/3, 3) > \alpha^2 f(1/3, 2)$ ) y el pago de los jugador  $\ell$  y  $k$  aumenta al cortar el vínculo  $\ell k$  y por tanto  $g$  no puede ser fuertemente estable, puesto la red  $g - k\ell$  es alcanzable vía desvíos en  $S = \{\ell\}$  o  $S = \{k\}$  y su pago aumenta.

□

La intuición tras esta afirmación es bastante simple: dado que los jugadores que ocupan lugares más céntricos en un componente tienen un pago esperado mayor, hay incentivos para desviarse y formar una red similar, pero donde ha cambiado de posición un individuo con una posición céntrica por otro con una posición periférica. Esta permutación de la red siempre puede alcanzarse vía desviaciones por un conjunto de jugadores que no involucra al jugador perjudicado por el cambio. Esto se ilustra en la figura 3.5, podemos observar por ejemplo la red  $g_1$ , en esta red si los individuos 1 y 3 se coordinan, pueden alcanzar la red  $g'_1$  cortando el vínculo 23 y añadiendo el vínculo 13, de esta forma el jugador 1 ha adquirido una posición más central que antes y obtiene un pago mayor, mientras que el jugador 3 está igual que en  $g_1$ . Lo mismo ocurre en  $g_2$ , donde los jugadores 1, 2 y 3 han empujado a la periferia al individuo 4 cortando los vínculos 14 y 24, y añadiendo los vínculos 13 y 23. Pueden haber desvíos mucho más elaborados, como el que media entre las redes  $g_3$  y  $g'_3$  en la figura. En esta, se puede verificar que el conjunto  $S = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  puede alcanzar vía desvíos en  $S$  la red  $g'_3$  y, de esta forma, todos los miembros de  $S$  están igual o mejor que en  $g$  y los individuos  $\{1, 2, 3\}$  están en una peor posición que antes, pero dado que no están en  $S$ , no se necesita el consentimiento de estos para desviarse a  $g'_3$ .

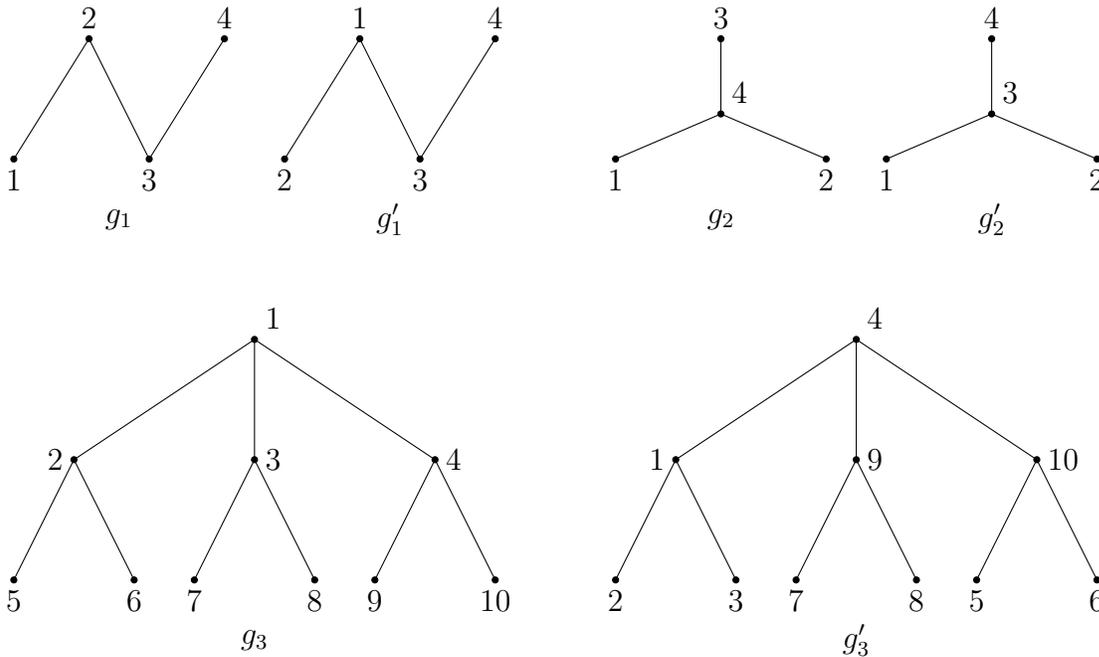


Figura 3.5: Red estable y eficiente cuando no hay desapariciones.

Más allá de la formalidad matemática, se puede criticar en este concepto de estabilidad

que no se exige que todos los participantes en un desvío ganen, sino simplemente que ninguno pierda. Podemos notar que para lograr que un jugador céntrico intercambie posición con un jugador periférico, deben participar jugadores en el desvío que no ganan nada con ello, luego no hay una razón real para que los individuos que no ganan al desvío participen. De cualquier forma, es indiscutible en este modelo que el riesgo de las deserciones introduce heterogeneidad en los pagos que obtienen los jugadores y que esta heterogeneidad se vuelve una fuente de inestabilidad.

Observemos además que esto supone de base una diferencia entre el conjunto RE y REFE. Puede ser socialmente óptimo que las organizaciones contengan trabajadores especialistas, pero cuando la decisión es privada nadie quiere ser un trabajador especialista. Esto deviene de que los individuos no internalizan el impacto que provocan a otros cuando desaparecen, daño que es especialmente severo cuando el individuo es un especialista en administrar.

### Corolario 3.6

*Si la red  $g \in \text{REFE}$ , entonces todo componente  $h \in C(g)$  con  $n(h) \geq 3$  es un círculo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 3.5 si  $g$  es fuertemente estable, entonces ningún componente  $h \in C(g)$  con  $n(h) \geq 3$  es un árbol, puesto en todo árbol  $L(h) \geq 2$  y por tanto hay especialistas. Sumando a esto la proposición 3.4 hay a lo más un círculo de jugadores en cada componente  $h$ , se sigue que todo  $h \in C(g)$  con  $n(g) \geq 3$  debe contener exactamente un círculo y ese círculo debe contener a todo los jugadores de  $N(h)$  puesto de lo contrario hay especialistas.  $\square$

Para caracterizar la red fuertemente estable en caso de que exista, llamemos  $h^c(m)$  a un círculo formado por  $m$  miembros. El pago que obtiene un individuo en cuando forma parte de  $h^c(m)$  es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_K [Y_i(h^c(m), K)] &= \frac{m-1}{n} \left[ (m-1) \alpha \frac{f(1/3, m-1)}{m-1} \right] + \frac{n-m}{n} \left[ m \frac{f(1/3, m)}{m} \right] \\ &= \frac{m-1}{n} [\alpha f(1/3, m-1)] + \frac{n-m}{n} [f(1/3, m)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

llamemos adicionalmente  $m^*$  al número de miembros que maximiza el pago obtenido en un círculo, esto es,

$$m^* \in \underset{m \in \{1, \dots, m\}}{\text{Argmax}} \mathbb{E}_K [Y_i(h^c(m), K)] \quad (3.8)$$

y asumamos que  $m^*$  es único por simplicidad.

### Proposición 3.7 (Número de organizaciones)

- (i) *Si existe una red fuertemente estable  $g$  y  $n/m^* \in \mathbb{N}$ , en  $g$  hay  $n/m^*$  componentes y cada uno de estos componentes es un círculo de  $m^*$  individuos.*

(ii) Si  $n/m^* \notin \mathbb{N}$ , entonces  $\text{REFE} = \emptyset$

DEMOSTRACIÓN.

- (i) Por el corolario 3.6 tenemos que, si  $g$  es fuertemente estable, cada componente en  $g$  es un círculo. Consideremos entonces una red en la que cada componente es circular, pero donde no hay  $n/m^*$  componentes de tamaño  $m^*$ . Como no hay  $n/m^*$  componentes con  $m^*$  miembros, existe un conjunto  $T \subset N$ , con  $|T| \geq m^*$  de jugadores que no participan de un círculo con  $m^*$  miembros. Notemos ahora que cualquier subconjunto  $S \subseteq T$ , con  $|S| = m^*$ , que puede alcanzar vía desvíos en  $S$  una red  $g' = \{g \setminus \{\cup_{i \in S} g_i\}\} \cup q$ , donde  $q$  es un círculo formado por los individuos en  $S$ , puesto para alcanzar esta red sólo se exige añadir vínculos entre los miembros de  $S$  y quitar vínculos en los cuales los miembros de  $S$  están involucrados. Dado que para  $i \in S$  se tiene que  $\mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] = \mathbb{E}_K [Y_i(h^c(m^*), K)] > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$ , luego, todo miembro de  $S$  obtiene en  $g'$  un pago mayor que en  $g$  y  $g$  no puede ser fuertemente estable.
- (ii) La demostración de la parte (ii) en la proposición 2.4 establece también la no existencia de elementos en  $\text{REFE}$  para este modelo.

□

En este modelo hay un importante problema de existencia de redes en  $\text{REFE}$ , donde no sólo se exige que  $n/m^* \in \mathbb{N}$  (lo cual ya es bastante exigente de por sí), sino que se exige también que el pago que obtiene cada individuo en el círculo sea mayor que el mínimo pago que se puede obtener en cualquier otra red. Para ilustrar por qué llamemos  $g^*$  a una red que sigue la arquitectura descrita en 3.7, si hay alguna red  $g'$  alcanzable vía desvíos por algún conjunto  $S \subseteq N$ , en la cual todos los miembros de  $S$  obtienen un pago mayor que en el círculo de  $m^*$  miembros, entonces no existirá una red fuertemente estable. Esto implica que para la existencia de una red fuertemente estable se debe cumplir que  $\forall S \subseteq N$  y  $\forall g'$  alcanzable vía desvíos en  $S$ ,

$$\min_{i \in S} \mathbb{E}_K [Y_i(g', K)] \geq \mathbb{E}_K [Y_i(g^*, K)]$$

No nos fue posible proveer condiciones de existencia más específicas y más simples de verificar, sin embargo, independiente de si  $\text{REFE} = \emptyset$  o no, la fuente de inestabilidad es en sí misma interesante e informativa en este modelo.

Por último, la siguiente proposición establece una relación entre el número y tamaño de componentes que se forman en la red fuertemente estable, y el parámetro  $\alpha$  que mide cuán perjudicial es un abandono para una organización. Para esto llamemos  $m^*(\alpha)$  a la solución de (3.8) como función de  $\alpha$ .

**Proposición 3.8** (Límite del tamaño de las organizaciones)

(i)  $m^*(\alpha)$  creciente en  $\alpha$ .

(ii)  $\forall n, f \exists \underline{\alpha}$  tal que  $\forall \alpha < \underline{\alpha}, m^* < n$ .

Dado que esta proposición sigue el mismo proceso que la demostración de la proposición 2.5 es relegada al apéndice A.2.

La primera parte de la proposición nos muestra que mientras más perjudicial sea para una organización una deserción, más pequeñas serán las organizaciones. La segunda parte establece que sin importar las economías de escalas asociadas al tamaño de la organización y especialización, siempre podemos encontrar valores de  $\alpha$  para los cuales las organizaciones en las redes en REFE no contienen a todos los individuos.

Más allá de estos resultados, no fue posible caracterizar en detalle los conjuntos RFE ni el conjunto RE. Sin embargo, en el apéndice A.2 entregamos algunas caracterizaciones parciales de ambos conjuntos. Para ambos casos, se puede mostrar que el conjunto factible de redes fuertemente estables y eficientes incluye únicamente a los árboles y las redes que contienen un único anillo de jugadores. Además podemos conjeturar con bastante certeza que el número de especialistas

### 3.3.1. Ejemplo numérico

Asumamos que  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $f(t, m) = (t + 1)^2 m^2$ . Bajo este contexto, las únicas candidatas a redes fuertemente estables, son las redes  $g_0, g_1, g_2, g_4$  y  $g_8$  ilustradas en la figura 3.6. Identificaremos a lo largo de este ejemplo las condiciones bajo cuales la red  $g_8$  es fuertemente estable y existe.

Cuando los individuos se organizan bajo  $g_8$ , el jugador  $\lambda \in N$  obtiene un pago igual a,

$$\mathbb{E}_K [Y_\lambda(g_8, K)] = 12\alpha$$

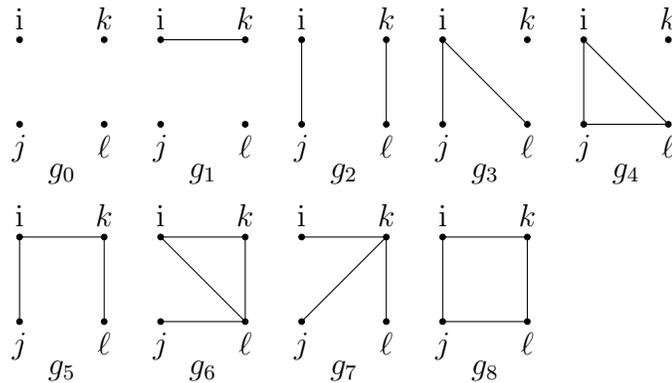


Figura 3.6: Candidatos a redes estables y eficientes

Debemos estudiar los posibles desvíos desde  $g_8$ . Para esto, la tabla 3.1 resume la información sobre los posibles desvíos desde  $g_8$ . La primera columna indica la red  $g'$  a la cual se desvía el subconjunto  $S$  de jugadores, indicado en la segunda columna. La tercera columna muestra los vínculos que deben añadir y quitar la coalición  $S$  de jugadores para alcanzar la red  $g'$ . La cuarta columna indica el jugador  $\lambda \in S$  que obtiene el menor pago de entre los individuos de  $S$ ,

$$\lambda = \underset{\lambda \in S}{\text{Argmin}} \mathbb{E}_K [Y_\lambda(g', K)].$$

La quinta columna se muestra el pago  $\mathbb{E}_K [Y_\lambda(g', K)]$  obtenido por el jugador  $\lambda$ . Finalmente, la sexta columna muestra los valores de  $\alpha$  para los cuales se cumple que  $\mathbb{E}_K [Y_\lambda(g_8, K)] \geq \mathbb{E}_K [Y_\lambda(g', K)]$ :

$g'$	$S$	Des	$\lambda$	$\mathbb{E}_K [Y_\lambda(g', K)]$	Est
$g_0$	$\{i, j, k\}$	$\{g_8 \setminus \{ik, lk, jl, ij\}\}$	$\{i, j, k\}$	3	$\alpha > \frac{1}{4}$
$g_1$	$\{i, k\}$	$\{g_8 \setminus \{lk, jl, ij\}\}$	$\{i, k\}$ o $\{i, l\}$	$\frac{50}{9} + \frac{25}{36}\alpha$	$\alpha > \frac{200}{407}$
$g_2$	$\{k, l\}$	$\{g_8 \setminus \{ik, jl\}\}$	$\{k, l\}$	$\frac{50}{9} + \frac{25}{36}\alpha$	$\alpha > \frac{200}{407}$
$g_3$	$\{i, l\}$	$\{g_8 \setminus \{ik, lk, jl\}\} \cup \{i, l\}$	$l$	$\frac{198}{36} + \frac{66}{36}\alpha + \frac{25}{36}\alpha^2$	$0,57 \lesssim \alpha \lesssim 14,1$
$g_4$	$\{i, l\}$	$\{g_8 \setminus \{ik, lk\}\} \cup \{i, l\}$	$\{i, l\}$	$4 + \frac{64}{18}\alpha$	$\alpha > \frac{72}{157}$
$g_5$	$\{j\}$ o $\{l\}$	$\{g_8 \setminus \{jl\}\}$	$j$ o $l$	$\frac{57}{12}\alpha + \frac{82}{36}\alpha^2 + \frac{25}{36}\alpha^3$	$\alpha < 2$
$g_6$	$\{i, l\}$	$\{g_8 \setminus \{ij\}\} \cup \{il\}$	$i$	$\frac{72}{12}\alpha + \frac{16}{9}\alpha^2$	$\alpha < \frac{27}{8}$
$g_7$	$\{j, k\}$	$\{g_8 \setminus \{ij, jl\}\} \cup \{jk\}$	$j$	$\frac{25}{3}\alpha + \frac{25}{36}\alpha^3$	$\alpha < 2,3$

Tabla 3.1: Desvíos desde  $g_8$  .

Podemos observar que basta que  $\alpha > 0,57$  para que el conjunto de todas las redes que siguen una arquitectura como  $g_8$  sea fuertemente estable.

# Conclusión

En este trabajo hemos explorado como el riesgo que supone un abandono determina la estructura de las organizaciones. Una vez asumimos que los abandonos afectan la productividad de la organización residual, hemos sido capaces de mostrar que los individuos se organizan de una forma robusta para minimizar el impacto de los abandonos. En primer lugar, hemos mostrado que el peligro de que un abandono desconecte las diversas partes de la organización, implica que se mantengan redundancias en las vías de comunicación. En segundo lugar, mostramos que este riesgo acota el tamaño de las organizaciones (y por tanto el aprovechamiento de economías de escala), debido a que las organizaciones de mayor tamaño son aquellas que con mayor probabilidad sufrirán deserciones. Por último, mostramos que este riesgo limita también el grado de especialización al interior de las organizaciones.

Hemos aportado con un modelo que permite modelar con mucha flexibilidad un rango muy amplio de situaciones en las que los jugadores abandonan las estructuras de redes que formaron y que puede funcionar bien para estudiar propiedades más generales para este tipo de situaciones .

Hemos mostrado además, que en este contexto, sin importar que los individuos sean ex ante idénticos y que se repartan el valor producido en partes iguales, el riesgo de que las diferentes partes de la organización se desconecten tras un abandono introduce una heterogeneidad en los pagos en favor de aquellos individuos que ocupan lugares centrales y esto, a su vez, introduce una fuente de inestabilidad en las organizaciones a través de una suerte de competencia por ocupar los lugares centrales en la organización.

Esta investigación sugiere además que la forma de las organizaciones puede depender críticamente del contexto legal en el que se desempeña. Las organizaciones en contextos menos formales y con consecuencias menos graves por abandonar (esto es, donde es más probable que alguien deserte) tenderán a funcionar en forma más horizontal y explotar en menor grado las economías asociadas a la división del trabajo y especialización. Los individuos comprenden que otorgar demasiada centralidad a un individuo puede volver a toda la supervivencia de la organización muy dependiente de que un individuo cumpla con los compromisos adquiridos y ese riesgo puede ser sencillamente intolerable. Por el contrario, en contextos donde sea muy difícil incumplir los compromisos adquiridos, las organizaciones tenderán a ser más verticales y explotarán en un mayor grado los beneficios de la especialización.

Podemos observar que a partir de este trabajo preliminar, se pueden abrir varias líneas de investigación. En especial conjeturamos que algunas de las características de los modelos de comunicación y jerarquías podrían ser bastante más generales. Cuando la función de valor es sensible a las desapariciones, hay incentivos importantes para que las organizaciones limiten su tamaño y mantengan una densidad mínima de conexiones. Por otra parte, se intuye que la heterogeneidad en los pagos introducidos por la sensibilidad monótona en la función de valor puede sostenerse para un rango mucho más amplio de distribuciones de probabilidad y en este sentido, dar incentivos importantes para que los individuos formen redes regulares. Queda pendiente entonces pendiente para trabajos futuros investigar si las propiedades que se han expuesto a lo largo de este trabajo se mantienen en condiciones más generales.

Una segunda línea de investigación que sugiere ser interesante, consiste en estudiar las estructuras que se forman cuando la probabilidad de que un individuo abandone la organización sea endógena y dependa de la porción del valor asignada al jugador. Conjeturamos que pueden existir equilibrios en que todos los individuos en una organización estén especializados y donde se pague una prima a los individuos que ocupen lugares centrales para prevenir que estos dejen la organización.

# Bibliografía

- [1] R.J. Aumann and R. B. Myerson. *Endogenous formation of links between players and coalitions: an application of Shapley value*, chapter 12, pages 175–191. Cambridge University Press, 1988.
- [2] René M. Bakker, Jorg Raab, and H. Brinton Milward. A preliminary theory of dark network resilience. *Journal of Policy Analysis and Management*, 31(1):33–62, 2011.
- [3] G. Calvo and S. Wellisz. Supervisión, loss of control and the optimal size of the firm. *Journal of Political Economy*, 86:943–952, 1979.
- [4] Michael Carter. *Mathematical Economics*. The MIT press, 2001.
- [5] Bhaskar Dutta and Suresh Mutuswami. Stable networks. *Journal of Economic Theory*, 76:322–344, 1997.
- [6] Bhaskar Dutta, Anne van den Nouweland, and Stef Tijs. Linkformation in cooperative situations. *Game Theory*, 27:245–256, 1998.
- [7] Jeffrey Dyer and Kentaro Nobeoka. Creating and managing a high-performance knowledge-sharing network: The toyota case. *Strategic Managment Journal*, 21(3):345–367, March 2000.
- [8] M. Dziubinski and S. Goyal. How do you defend a network? *Theoretical Economics*, 12:331–376, 2017.
- [9] L. Garicano and T. Van Zandt. *Handbook of Organizational Economics*, chapter Hierarchies and the Division of Labor, pages 604–654. Princeton University Press, 2013.
- [10] S. Goyal and A. Vigier. Attack, defence, and contagion in networks. *The Review of Economic Studies*, 81:1518–1542, 2014.
- [11] Oliver D. Hart and John Moore. On the design of hierarchies: Coordination versus specialization. *Journal of Polical Economy*, 113(4), 2005.
- [12] B Hoyer and K. De Jeagher. Strategic network disruption and defense. *Journal of Public Economic Theory*, 0(0):1–29, 2016.
- [13] M. O. Jackson. *A survey of Network Formation Models: Stability and Efficiency*, chap-

ter 1, pages 11–57. Cambridge University Press, 2005.

- [14] Matthew O. Jackson. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2008.
- [15] Matthew O. Jackson and Anne van den Nouweland. Strongly stable networks. *Games and Economic Behavior*, 51:420–444, 2005.
- [16] Matthew O. Jackson and Asher Wolinsky. Anetworks model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 71:44–74, 1996.
- [17] M. Keren and D. Levhari. The optimal span of control in a pure hierarchy. *Management Science*, 14:474–486, 1979.
- [18] Bernhard Korte and Jens Vygen. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, 2000.
- [19] D. Kovenock and B. Roberson. The optimal defense of networks of targets. August 2017.
- [20] D. Mookherjee. *The Handbook of Organizational Economics*, chapter Incentives in Hierarchies, pages 764–798. Princeton University Press, 2013.
- [21] R. B. Myerson. *Games Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press, 1991.
- [22] Roger B. Myerson. Graph and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*, 2(3), Aug. 1977.
- [23] Andreas Norman and Ulf Janson. Ericsson’s proactive supply chain risk management approach after a serious sub-supplier accident. *Internationakl Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 34(5):434–456, 2004.
- [24] Yingyi Qian. Incentives and loss of control in an optimal hierarchy. *The Review of Economic Studies*, 61(3):527–544, Jul. 1994.
- [25] Cheng-Zhong Qin. Endogenous formation of cooperation structures. *Journal of Economic Theory*, 69:218–226, 1996.
- [26] Oliver E. Williamson. Hierarchical control and optimum firm size. *Journal of Political Economy*, 75(2):123–138, Apr. 1967.
- [27] Oliver E. Williamson. The logic of economic organization. *Journal of Law, Economics & Organization*., 4(1):65–93, 1988.
- [28] Oliver E. Williamson. Hierarchies, markets and power in the economy: An economic perspective. *Industrial and Corporate Change*, 4(1), 1995.

# Apéndice A

## A.1. Apéndice de demostraciones modelo de comunicaciones

En este apartado damos, en primer lugar, un resultado análogo a la proposición 2.3 sin necesidad de suponer que el problema 2.2 tiene una única solución y sin necesidad de suponer que  $n/m^* \in \mathbb{N}$ . Podremos ver que si bien hay algunos cambios, las intuiciones principales de la proposición 2.3 se mantienen. En segundo lugar, presentaremos las demostraciones de las proposiciones pendientes de las secciones 2 y 2.2.

Para dar el resultado análogo a la proposición 2.3 comencemos por definir,

$$M = \underset{m \in \{1, \dots, n\}}{\text{Argmax}} W_i(m)$$

definamos además,

$$\begin{aligned} \underline{m}^* &= \min M \\ W_i(\underline{m}^*) &= \underset{m \in \{1, \dots, n\}}{\text{máx}} W_i(m) \end{aligned}$$

consideremos para una red cualquiera  $g$  una partición del conjunto de jugadores  $N$ , en la cual  $N^*(g)$  es el conjunto de jugadores que son parte de un componente con  $n(h) \in M$  y el conjunto  $N^e(g) = N \setminus N^*(g)$ , es el conjunto de individuos que no pertenece a un componente con  $n(h) \in M$ . Asimismo consideremos la partición de  $g$  en dos subgrafos  $g^*$  y  $g^e$  definidos por,

$$\begin{aligned} g^* &= \{ij \in g : \{i, j\} \in N^*(g)\} \\ g^e &= \{ij \in g : \{i, j\} \in N^e(g)\} \end{aligned}$$

observemos que  $g^* \cap g^e = \emptyset$  (Puesto la partición de  $N$  se hace a través de los componentes y por definición no hay vínculos entre individuos de diferentes componentes). Finalmente, la siguiente proposición caracteriza las redes fuertemente estables,

### Proposición A.1

Si  $g \in \text{RFE}$  entonces  $|N^e(g)| < \underline{m}^*$  y  $\forall h \in g^*, n(h) \in M$ .

DEMOSTRACIÓN.

Recordemos primero que por la proposición 2.1 cada componente en una red fuertemente estable debe ser un círculo y el pago que obtiene un individuo que participa de un componente cualquiera en una red fuertemente estable está dado por  $W_i(m)$ .

Ahora, el primer paso es mostrar que  $|N^e(g)| < \underline{m}^*$ , para esto observemos que si esto no se cumple,  $N^e(g) > \underline{m}^*$ , por tanto todo  $i \in N^e(h)$  obtienen un pago  $W_i(m) < W_i(m^*)$ . Notemos ahora que cualquier subconjunto  $S \subset N^e(g)$  con  $|S| \in M$  puede alcanzar vía desvíos en  $S$  una red  $g'$  en la cual los individuos de  $|S|$  forman un círculo, en efecto, para esto sólo basta que los individuos en  $S$  eliminen todos sus vínculos en  $g$  y añadan los vínculos necesarios entre los individuos en  $S$  para relacionarse según un círculo. En esta nueva red cada  $i \in S$  obtiene  $\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] = W_i(m^*) > \mathbb{E}_K [Y_i(g, K)]$ .

En segundo lugar, tenemos que en una red  $g$  con  $|N^e(g)| < \underline{m}^*$ , no existe ningún conjunto  $S \subseteq N$  y red  $g'$  alcanzable vía desvíos en  $S$  tal que al menos un individuo en  $N^*(g)$  obtenga un pago estrictamente mayor, ya que  $\forall i \in N^*(g)$ ,  $\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] = W_i(m^*)$ . Por lo cual sólo resta verificar que existe un subgrafo  $g^e$  fuertemente estable.

Para esto definimos el problema  $\ell$  – *simo* de tamaño óptimo como:

$$M_\ell = \underset{m \in \{1, \dots, |N^e(g_\ell)|\}}{\text{Argmax}} W_i(m) \quad (\text{A.1})$$

Entonces tenemos que si el subgrafo  $g_1^e$  es parte de una red fuertemente estable, entonces en  $g_1^e$  hay a lo más  $|N_1^e(g)| < \min M_1$  individuos que no forman parte de un componente con  $n(h) \in M_1$  miembros. Podemos repetir el proceso  $\ell$  veces, definiendo en cada ocasión  $|N_\ell^e(g_\ell)| = n - \sum_{k=1}^{\ell-1} |N^*(g_k)|$ , hasta que  $|N^e(g_\ell^e)| \leq 1$ . De esta forma tenemos que dado el problema (A.1) siempre tiene solución, siempre podremos encontrar un subgrafo  $g^e$  estable y por tanto la red descrita es fuertemente estable. Además mediante este proceso podemos construir siempre redes fuertemente estables y por tanto el conjunto RFE es no vacío.  $\square$

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 2.6.

Consideremos un componente  $h \in C(g)$  en el cual hay por lo menos un individuo crítico  $i \in N(h)$ . Cuando desaparece el individuo crítico,  $h$  se “fractura” en al menos dos componente, llamemos  $h_1$  y  $h_2$  dos de los componente en  $C(h_{\{i\}})$ . Para simplificar la notación llamemos  $n(h) = k$  al número de individuos conectados en el componente  $h$  y llamemos  $n(h_1) = k_1$  y  $n(h_2) = k_2$  al número de individuos conectados en los fragmentos  $h_1$  y  $h_2$  del componente  $h$ . El valor producido en el componente  $h$  tras la desaparición del jugador crítico  $i$  es:

$$V(h, \{i\}) = \alpha f(k_1) + \alpha f(k_2) - c|h_1| - c|h_2|$$

mientras que el valor posterior a la desaparición del individuo crítico que se obtiene añadiendo el vínculo  $j_1 j_2$  es, con  $j_1 \in N(h_1)$  y  $j_2 \in N(h_2)$ :

$$V(h + j_1 j_2, \{i\}) = \alpha f(k_1 + k_2) - c(|h_1| + |h_2| + 1)$$

Notemos ahora que puesto añadir el vínculo  $j_1j_2$  tiene costo  $c \rightarrow 0$ ,

$$V(h + j_1j_2, \{i\}) - V(h, \{i\}) = \alpha [f(k_1 + k_2) - f(k_1) - f(k_2)]$$

Observemos también que dado que el costo de añadir un vínculo es muy bajo,  $\forall \ell \in N \setminus \{i\}$ ,

$$V(h + j_1j_2, \ell) - V(h, \ell) \geq c/k \approx 0$$

podemos establecer entonces que el valor esperado marginal por añadir el link  $j_1j_2$  es

$$\mathbb{E}_K [V(h + j_1j_2, K)] - \mathbb{E}_K [V(h, K)] \geq \frac{\alpha}{n} [f(k_1 + k_2) - f(k_1) - f(k_2)]$$

el signo de esta expresión depende del signo del término entre corchetes. Notemos que el valor por añadir el link es positivo si,

$$f(k_1 + k_2) > f(k_1) + f(k_2)$$

lo cual es verdadero por hipótesis. □

DEMOSTRACIÓN DE PROPOSICIÓN 2.12 .

Tenemos al igual que en la demostración de la proposición 2.5 que los conjuntos de salida de la función  $W_i$  son obviamente retículos, que la función  $W_i(m, \alpha)$  es supermodular en  $m$  (puesto es una única variable y el conjunto  $1, \dots, m$  tiene siempre definido el máximo y mínimo entre dos elementos cualquiera ) y que el espacio factible es creciente en  $\alpha$  (puesto el espacio factible no depende de  $\alpha$  ), por lo cual para mostrar que  $m^*(\alpha, p)$  es creciente en  $\alpha$ , sólo falta mostrar la función  $W(m, \alpha)$  tiene diferencias crecientes en  $(m, \alpha)$  . Observemos primero que,

$$\begin{aligned} W(m', \alpha') - W(m', \alpha) &= (1-p) \sum_{\ell=0}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell-1} (\alpha')^\ell \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} \\ &\quad - (1-p) \sum_{\ell=0}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell-1} (\alpha)^\ell \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \end{aligned}$$

separando la sumatoria,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
&\quad + (1-p) \sum_{\ell=m}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

usando el hecho de que  $\binom{x}{y} = \binom{x-1}{y-1} + \binom{x-1}{y}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\binom{m'-1}{\ell} &= \binom{m'-2}{\ell-1} + \binom{m'-3}{\ell-1} + \dots + \binom{m-1}{\ell-1} + \binom{m-1}{\ell} \\
&= \left[ \sum_{k=m-1}^{m'-2} \binom{k}{\ell-1} \right] + \binom{m-1}{\ell}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Sustituyendo (A.3) en (A.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
W(m', \alpha') - W(m', \alpha) &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \left[ \sum_{k=m-1}^{m'-2} \binom{k}{\ell-1} + \binom{m-1}{\ell} \right] p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
&\quad + \sum_{\ell=m}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell)
\end{aligned}$$

por otra parte tenemos que,

$$W(m, \alpha') - W(m, \alpha) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m-\ell} \frac{f(m-\ell)}{m-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell)$$

la función  $W$  tiene diferencias crecientes si  $[W(m', \alpha') - W(m', \alpha)] - [W(m, \alpha') - W(m, \alpha)] > 0$ , esto es si,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{m-1} \left( \sum_{k=m-1}^{m'-2} \binom{k}{\ell-1} \right) p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
&\quad + \sum_{\ell=m}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
&\quad - \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m-\ell} \frac{f(m-\ell)}{m-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) > 0
\end{aligned}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell=0}^{m-1} \left( \sum_{k=m-1}^{m'-2} \binom{k}{\ell-1} \right) p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \\
& + \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^\ell ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) \left[ (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} - (1-p)^{m-\ell} \frac{f(m-\ell)}{m-\ell} \right] \\
& + \sum_{\ell=m}^{m'-1} \binom{m'-1}{\ell} p^\ell (1-p)^{m'-\ell} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} ((\alpha')^\ell - (\alpha)^\ell) > 0
\end{aligned}$$

observemos que en tanto  $(\alpha')^\ell > (\alpha)^\ell$  para  $\alpha' > \alpha$ , el primer y tercer término en la expresión anterior son positivos. El segundo término es también positivo si,

$$(1-p)^{m'-m} \frac{f(m'-\ell)}{m'-\ell} > \frac{f(m-\ell)}{m-\ell}$$

reordenando tenemos que,

$$1 - \left[ \frac{f(m-\ell)}{f(m'-\ell)} \frac{m'-\ell}{m-\ell} \right]^{\frac{1}{m'-m}} = \bar{p} > p$$

el caso más restrictivo es en el cual  $m' = m + 1$  y  $\ell = 0$ , por lo qué tenemos:

$$1 - \frac{f(m)}{f(m+1)} \frac{m+1}{m} = \bar{p} > p$$

esto es, cuando  $p$  no es muy grande, tenemos que la función  $W(m, \alpha)$  tiene diferencias crecientes y por el teorema de Topkins se cumple que  $m^*(\alpha)$  debe ser una función creciente en  $\alpha$ .  $\square$

## A.2. Apéndice de demostraciones modelo de Jerarquías

DEMOSTRACIÓN PROPOSICIÓN 3.8.

- (i) Llamemos  $m^*(\alpha)$  a la solución del problema (3.8) dado  $\alpha$  y llamemos  $W_i : \{1, \dots, n\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a la función objetivo en dicho problema, esto es:

$$W_i(m, \alpha) = \frac{m-1}{n} [\alpha f(1/3, m-1)] + \frac{n-m}{n} [f(1/3, m)]$$

Al igual que en las proposiciones 2.5 y 2.12, basta con mostrar que se satisfacen las condiciones del teorema A.5, presentado en A.3, para mostrar que  $m^*(\alpha)$  debe ser creciente en  $\alpha$ . Obviamente tenemos que  $\{1, \dots, n\}$  es un retículo y que el conjunto  $[0, 1]$  es un conjunto parcialmente ordenado. También tenemos que la función  $W_i(m, \alpha)$  es supermodular en  $m$ , puesto para  $m_1, m_2 \in \{1, \dots, n\}$

$$W_i(m_1 \wedge m_2, \alpha) + W_i(m_1 \vee m_2, \alpha) = W_i(m_1, \alpha) + W_i(m_2, \alpha)$$

luego, sólo resta probar que  $W_i$  tiene diferencias crecientes en  $(m, \alpha)$ , en efecto para  $\alpha' > \alpha$  y  $m' > m$ :

$$\begin{aligned} W_i(m', \alpha') - W_i(m, \alpha') &> W_i(m, \alpha') - W_i(m, \alpha) \\ \left(\frac{m'-1}{n}\right) (\alpha' - \alpha) f(1/3, m'-1) &> \left(\frac{m-1}{n}\right) (\alpha' - \alpha) f(1/3, m-1) \end{aligned}$$

del hecho de que  $m' - 1/n > m - 1/n$  y  $f(1/3, m' - 1) > f(1/3, m - 1)$  para  $m' > m$ , tenemos que la desigualdad se sostiene y  $w_i$  exhibe diferencias crecientes, luego se satisface todas las condiciones del teorema de Topkis y se concluye que  $m^*(\alpha)$  es creciente.

- (ii) Observemos que basta que se cumpla que,

$$\frac{n-1}{n} [\alpha f(1/3, n-2)] + \frac{1}{n} [f(1/3, n-1)] > \alpha f(1/3, n-1)$$

para que se satisfaga que en una red  $g \in \text{REFE}$  los componentes no incluyan a todos los individuos, reordenando obtenemos que,

$$\alpha < \frac{f(1/3, n-1)}{nf(1/3, n-1) - (n-1)f(1/3, n-2)} = \underline{\alpha}$$

notemos por último que dado que  $nf(1/3, n-1) - (n-1)f(1/3, n-2) > 0$  y  $f(1/3, n-1) - (n-1)f(1/3, n-2) > f(1/3, n-1)$ ,  $\underline{\alpha} \in [0, 1]$ .

□

Para caracterizar el conjunto REFE explotamos el hecho de que todo trabajador especialista obtenía un pago estrictamente menor que el pago de vecino, quien ocupa un lugar de mayor centralidad. El siguiente lema permite extender esta idea y muestra que en al menos los árboles esta relación se extiende a todos los jugadores.

## Lema A.2

Si la red  $g$  es un árbol, entonces para dos nodos adyacentes  $i$  y  $j$  tales que  $P_i(g) > P_j(g)$ , se satisface entonces que,

$$\mathbb{E}_K [Y_i(h, K)] > \mathbb{E}_K [Y_j(h, K)]$$

DEMOSTRACIÓN.

Comencemos considerando dos nodos adyacentes  $i$  y  $j$  en el árbol  $g$ . Asumamos que  $P_i^j(g) > P_j^i(g)$ . Como  $i$  y  $j$  son adyacentes, tenemos que para cualquier desaparición  $K \notin i, j$ , los jugadores  $i$  y  $j$  pertenecen al mismo componente  $h \in C(g_k)$  y por tanto  $Y_i(g, k) = Y_j(g, K)$ . Por otro lado notemos que,

$$\begin{aligned} Y_i(g_j, \{j\}) &= \alpha^{P_i^j(g)} [A(g_j)f(2/3, n - P_i^j(g) + I(g_j)f(1/3, n - p_i^j(g))] \\ Y_j(g_i, \{i\}) &= \alpha^{P_j^i(g)} [A(g_i)f(2/3, n - P_j^i(g) + I(g_i)f(1/3, n - p_j^i(g))] \end{aligned}$$

dado que  $p_j^i(g) > p_i^j(g)$ ,  $\alpha^{P_i^j(g)} > \alpha^{P_j^i(g)}$ . Por otra parte, como  $g$  es un árbol y  $p_j^i(g) > p_i^j(g)$  se debe cumplir que  $A(g_j) + I(g_j) \geq A(g_i) + I(g_i)$ , finalmente, dado que por hipótesis  $f(1/3, m + 1) > f(2/3, m)$ , tenemos que,

$$\mathbb{E}_K [Y_i(g, K)] \geq \mathbb{E}_K [Y_j(g, K)]$$

□

### A.2.1. Caracterización RFE y RE

En este apartado, entregamos una caracterización parcial de los conjuntos RFE y RE. Para esto, comenzaremos recordando que la proposición 3.4 establece que una fuertemente estable o eficiente contiene a lo más un anillo de jugadores. Dicho esto, tenemos cómo candidatas a redes eficientes las redes con un único anillo y los árboles. Separaremos entonces el estudio de ambas clases de redes.

#### Redes con un único anillo

La siguiente afirmación será útil para restringir el conjunto de redes con un único anillo de jugadores que pueden ser eficientes,

#### Definición A.1 (Axón)

Si  $h$  es un componente con un único anillo  $h^c$ , un *axón* de  $i \in N(h^c)$  es una sub red  $h^a \subset h$  conectada, tal que  $i \in N(h^a)$  y  $\forall j \in N(h^a)$ ,  $j \notin N(h^c) \setminus \{i\}$  y  $d(ij) = \min_{\ell \in N(h \setminus h^a)} d(i\ell)$ .

Notemos que, puesto hemos definido el axón únicamente para redes con un único conjunto de jugadores que forman un anillo, un axón es necesariamente un árbol. La figura A.1 muestra una red con un ciclo y dos axones, en el ejemplo,  $h^c = \{12, 23, 34, 45, 51\}$ , la subred  $h_a^1 = \{46, 67, 68, 89, 810\}$  es un axón de 4 mientras que la subred  $h_a^2 = \{211\}$  es un axón de 2.

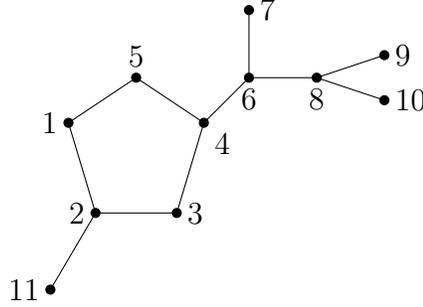


Figura A.1: Axones.

El siguiente Lema establece una relación entre el número de trabajadores especialistas y administradores en un axón que explotaremos luego para caracterizar las redes RE y RFE.

**Lema A.3**

*En un axón con  $L(h) = a$  trabajadores especialistas, hay  $A(h) = a$  administradores.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que el nodo  $i \in N(h^a) \cap N(h^c)$  es necesariamente un administrador, puesto mantiene dos vínculos en  $h^c$  y un vínculo en  $h^a$ . De esta forma  $L(h) = 1$  entonces  $A(h) = 1$  (puesto si  $A(h) = 0$  el trabajador especialista no está conectado al resto del componente y como  $h^a$  es un árbol, si  $A(h) > 1$  hay más trabajadores).

Consideremos ahora que un axón cualquiera con  $a$  trabajadores especialistas y  $a$  administradores. Si quisiéramos agregar un trabajador especialista, al axón debemos agregar también un administrador, en efecto, si conectamos ese especialista a un trabajador especialista no habrá aumentado el número de trabajadores especialistas, por otra parte no se puede conectar ese especialista a un administrador, pues estos ya mantienen el máximo número de vínculos que pueden sostener. Sólo queda entonces conectarlo a algún no especialista, transformándolo de esta forma en un administrador.

De esta forma por inducción, tenemos que siempre hay el mismo número de administradores y trabajadores especialistas en un axón.

□

**Proposición A.4**

*Si  $g \in \text{RFE}$  o  $g \in \text{RE}$  y  $g$  contiene un anillo de jugadores entonces, todo axón  $h^a \subset g$  sólo involucra dos individuo, esto es  $n(h^a) = 2$  (O alternativamente, todo individuo que no forma parte del anillo en  $g$  es adyacente de a un individuo que si es parte del anillo).*

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos un componente  $h \in C(g)$ , con un anillo  $h^c$  de jugadores y que tiene al menos un axón con más de 2 individuos. Tomemos un axón cualquiera  $h^a$  y consideremos que en el axón  $L(h^a) = a$ ,  $A(h) = a$  y  $I(h) = k$ .

Observemos que podemos construir otro componente con los individuos en  $N(h)$  que genere mayor valor, en efecto, sea  $q$  el componente en donde en el cual todo  $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{A}(h)$  se integró al anillo de jugadores y donde vinculamos cada  $i \in \mathcal{L}h$  únicamente con un individuo en  $\mathcal{A}(h)$ , como se ilustra en la figura A.2. Observemos que  $A(q) = A(h)$ ,  $L(q) = L(h)$  y  $I(q) = I(h)$ .

Cuando desaparece  $k \notin N(h^a)$  o para  $k \in \mathcal{L}(h)$  se tiene  $V(q, \{k\}) = V(h, \{k\})$ . llamemos  $r_i(k)$  al número de contactos que pierde el individuo  $i$  cuando desaparece el individuo  $k$ , tenemos:

$$V(h, \{k\}) = \sum_{i \in \mathcal{L}(h_k)} \alpha^{r_i(k)} f(2/3, n(h) - r_i(k)) + \sum_{i \in \mathcal{I}(h_k)} \alpha^{r_i(k)} f(1/3, n(h) - r_i(k))$$

Para  $k \in \mathcal{I}(h)$  tenemos,

$$V(q, \{k\}) = \alpha [(I(h) - 1) f(1/3, n(h) - 1) + L(h) f(2/3, n(h) - 1)]$$

dado que  $r_i(k) \geq 2$  para todo  $i \in N(h) \setminus \{k\}$  y  $k \in \mathcal{I}(h)$ ,

$$V(h, \{k\}) \leq \alpha^2 [(I(h) - 1) f(1/3, n(h) - 2) + L(h) f(2/3, n(h) - 2)]$$

puesto que  $\alpha^2 \leq \alpha$  y  $f$  es creciente en el número de individuos conectados, se concluye que  $V(q, \{k\}) > V(h, \{k\})$ . Examinemos ahora que sucede si  $k \in \mathcal{A}(h)$ , tenemos:

$$V(q, \{k\}) = \alpha^2 [I(h) f(1/3, n(h) - 2) + (L(h) - 1) f(2/3, n(h) - 2)] + \alpha^{n(h)-1} f(2/3, 1)$$

en este caso  $r_i(k) \geq 3$ , luego:

$$V(h, \{k\}) \leq \alpha^3 [I(h) f(1/3, n(h) - 3) + (L(h) - 2) f(2/3, n(h) - 3)] + 2\alpha^{n(h)-1} f(2/3, n(h) - 1)$$

de donde concluimos que  $V(q, \{k\}) > V(h, \{k\})$  concluimos por tanto que,

$$\mathbb{E}_K [V(q, k)] > \mathbb{E}_K [V(h, k)]$$

y la red  $h$  no puede ser eficiente.

Notemos por último que la red  $q$  es alcanzable vía desvíos en  $N(h)$  y que en  $g$  cada individuo obtiene un pago  $\mathbb{E}_K [Y_i(q, k)] > \mathbb{E} [Y_i(h, k)]$ , puesto con probabilidad  $n(h) - n(h^a)/n$  obtiene un pago igual y con probabilidad  $n(h^a)/n$  obtiene un pago estrictamente mayor.  $\square$

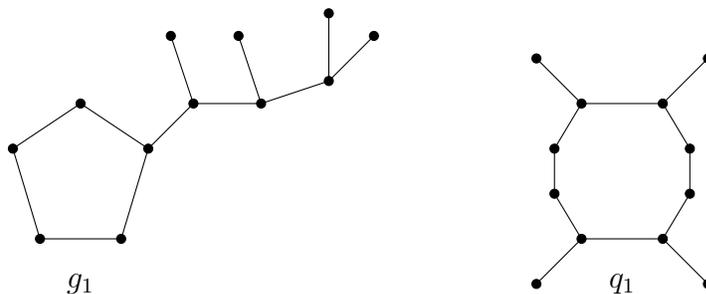


Figura A.2: Axones.

La intuición tras esta proposición es bastante obvia, es un poco absurdo organizarse en redes con un anillo de jugadores y axones de mayor tamaño, puesto en ese caso podemos formar una red alternativa con el mismo número de especialistas pero con una arquitectura más robusta a la disrupción. Un axón grande introduce una fragilidad adicional sin dar ningún beneficio adicional a la organización.

En conjunto con la proposición 3.4, esta proposición establece que las únicas candidatas a redes fuertemente estables que quedan son árboles, círculos o círculos con axones de tamaño 2. La figura A.3 ilustra diferentes redes que contienen un único anillo candidatas a formar parte de RFE o RE con varios niveles de especialización diferentes. La red  $g_1$  por ejemplo, está formada por cuatro trabajadores especialistas y cuatro especialistas en administrar mientras que en la red  $g_3$  no hay especialistas.

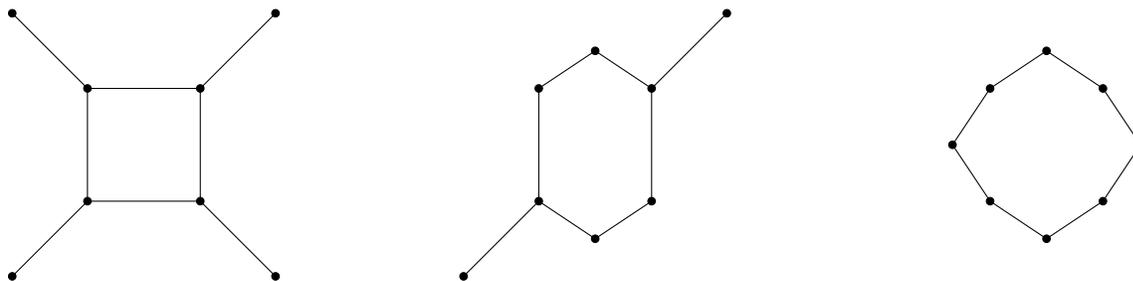


Figura A.3: Axones.

Cualquier componente  $h$  que siga esta arquitectura, nos referiremos al conjunto  $N(h^c)$ , como comité interno de administración y al conjunto  $N(h) \setminus N(h^c)$  como especialistas periféricos. Observemos respecto de estas redes que sigue la arquitectura descrita y en la cual hay  $a$  administradores especialistas, hay  $a$  trabajadores especialistas y  $m - 2a$  trabajadores no especialistas. Observemos además que cuando desaparece un administrador especialista, el componente se fragmenta en dos partes, uno que contiene  $m - 2$  miembros y otro con un miembro. Por otra parte cuando desaparece cualquiera de los demás integrantes el componente no se fragmenta. Llamemos  $\hat{h}(a, m)$  a una red que sigue la arquitectura descrita en la proposición y que cuenta con  $a$  administradores especialistas. El valor esperado de  $\hat{h}(a, m)$  cuando  $a \geq 1$  es,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(a, m) \right) \right] &= \frac{a}{n} \left[ \alpha^2(a-1)f(2/3, m-2) + \alpha^{m-1}f(2/3, 1) + (m-2a)\alpha^2f(1/3, m-2) \right] \\
&\quad + \alpha \frac{m-2a}{n} \left[ af(2/3, m-1) + (m-2a-1)f(1/3, m-1) \right] \\
&\quad + \alpha \frac{a}{n} \left[ (a-1)f(2/3, m-1) + (m-2a)f(1/3, m-1) \right] \\
&\quad + \frac{n-m}{n} \left[ af(2/3, m) + (m-2a)f(1/3, m) \right]
\end{aligned}$$

Reduciendo algunos términos

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{n} \left[ \alpha^2(a-1)f(2/3, m-2) + \alpha^{m-1}f(2/3, 1) + (m-2a)\alpha^2f(1/3, m-2) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{n} \left[ (am+a-a^2)f(2/3, m-1) + (m-2a)(m-a-1)f(1/3, m-1) \right] \\
&\quad + \frac{n-m}{n} \left[ af(2/3, m) + (m-2a)f(1/3, m) \right]
\end{aligned}$$

Mientras que para  $a = 0$  es,

$$\mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(0, m) \right) \right] = \alpha \frac{m}{n} \left[ (m-1)f(1/3, m-1) \right] + \frac{n-m}{n} \left[ mf(1/3, m) \right]$$

Para  $a \geq 1$  tenemos además que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da} \mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(a, m) \right) \right] &= \frac{1}{n} \left[ (2a-1)\alpha^2f(2/3, m-2) + \alpha^{m-1}f(2/3, 1) + (m-4a)\alpha^2f(1/3, m-2) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{n} \left[ (m-2a-1)f(2/3, m-1) + (4a+2-3m)f(1/3, m-1) \right] \\
&\quad + \frac{n-m}{n} \left[ f(2/3, m) - 2f(1/3, m) \right] \\
\frac{d^2}{da^2} \mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(a, m) \right) \right] &= \frac{2}{n} \left[ \alpha^2f(2/3, m-2) + 2\alpha f(1/3, m-1) - 2\alpha^2f(1/3, m-2) - \alpha f(2/3, m-1) \right]
\end{aligned}$$

Observemos que la concavidad/convexidad de  $\mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(a, m) \right) \right]$  no depende de  $a$ . En efecto,  $\mathbb{E} \left[ V \left( \hat{h}(a, m) \right) \right]$  es cóncava si,

$$\alpha \left[ f(2/3, m-2) - 2f(1/3, m-2) \right] < f(2/3, m-1) - 2f(1/3, m-1) \quad (\text{A.4})$$

y convexa en caso contrario. de donde se sigue evidentemente que el conjunto RFE y RE puede contener redes con un número  $0 < a < m/2$  de especialistas.

## Redes sin ciclos

Observemos que en cualquier componente  $h$  sin ciclos,  $\forall i \in \mathcal{A}$ ,  $C(h_{\{i\}}) = 3$ , y  $\forall i \in \mathcal{I}$   $C(h_{\{i\}}) = 2$ , por lo que en un componente sin ciclo cualquier especialista administrador y no

especialista son críticos en el componente, además es más dañino para la organización que desaparezca un administrador especialista en tanto la desaparición de este tipo de miembros fractura la organización en tres partes.

Lo menos grave que puede suceder cuando desaparece  $i \in \mathbb{A}$  es que quede un componente formado por  $m - 3$  individuos y dos trabajadores especialistas aislados, mientras que lo más dañino para la organización es que tras la desaparición del especialista en administrar queden tres componentes de aproximadamente  $(m - 1)/3$  cada uno. Por otro lado si desaparece un sujeto  $i \in \mathbb{I}$  en una red sin ciclos, lo menos dañino es que se tras la desaparición quede un componente formado por  $m - 2$  miembros y un trabajador aislado, mientras que lo más dañino es que la red se fragmente en dos componentes con aproximadamente  $(m - 1)/2$  miembros cada una.

Dado estas observaciones, el valor obtenido en un componente  $h$  sin ciclos posterior a la desaparición del individuo  $i$  está acotado superiormente por:

$$V(h, \{i\}) \leq \begin{cases} 2\alpha^{m-1}f(2/3, 1) + (W(h) - 2)\alpha^3f(2/3, m - 3) + I(h)\alpha^3f(1/3, m - 3) & \text{si } i \in \mathcal{A}(h) \\ \alpha^{m-1}f(2/3, 1) + (W(h) - 1)\alpha^2f(2/3, m - 2) + (I(h) - 1)\alpha^2f(1/3, m - 2) & \text{si } i \in \mathcal{I}(h) \\ (W(h) - 1)\alpha f(2/3, m - 1) + I(h)\alpha f(1/3, m - 1) & \text{si } i \in \mathcal{W}(h) \end{cases}$$

llamaremos entonces  $\bar{V}_{A(h)}$ ,  $\bar{V}_{I(h)}$  y  $\bar{V}_{L(h)}$  a cada una de estas cotas superiores. El valor posterior a la desaparición de  $i$  está además acotado inferiormente por:

$$V(h, \{i\}) \geq \begin{cases} W(h)\alpha^{2m/3}f(2/3, m/3) + I(h)\alpha^{2m/3}f(1/3, m/3) & \text{si } i \in \mathcal{A}(h) \\ \alpha [W(h)\alpha^{m/2}f(2/3, m/2) + (I(h) - 1)\alpha^{m/2}f(1/3, m/2)] & \text{si } i \in \mathcal{I}(h) \\ (W(h) - 1)\alpha f(2/3, m - 1) + I(h)\alpha f(1/3, m - 1) & \text{Si } i \in \mathcal{W}(h) \end{cases}$$

Llamaremos respectivamente  $\underline{V}_{A(h)}$ ,  $\underline{V}_{I(h)}$  y  $\underline{V}_{W(h)}$  a cada una de estas cotas inferiores. El valor esperado en un componente  $h$  sin ciclos está acotado superior e inferiormente por:

$$\begin{aligned} \frac{A(h)}{n}\underline{V}_{A(h)} + \frac{I(h)}{n}\underline{V}_{I(h)} + \frac{W(h)}{N}\underline{V}_{W(h)} + \frac{n-m}{n}[W(h)f(2/3, m) + I(h)f(1/3, m)] \\ \leq \mathbb{E}[V(h)] \leq \\ \frac{A(h)}{n}\bar{V}_{A(h)} + \frac{I(h)}{n}\bar{V}_{I(h)} + \frac{W(h)}{N}\bar{V}_{W(h)} + \frac{n-m}{n}[W(h)f(2/3, m) + I(h)f(1/3, m)] \end{aligned}$$

El trade off está aquí en que si los individuos se organizan en un árbol pueden aprovechar de mejor manera los beneficios asociados a la especialización, pero por otra parte, se vuelven más frágiles a las desapariciones, en tanto para cualquier  $i \in \mathcal{W} \cup \mathcal{I}$ ,  $C(h_{\{i\}}) \geq C(h)$ .

### A.3. Teorema de Topkis

**Definición A.2** (Función Supermodular) Una función  $f; X \rightarrow \mathbb{R}$  en un retículo  $X$  es (estrictamente) supermodular si para todo  $x_1, x_2 \in X$ ,

$$f(x_1 \vee x_2) + f(x_1 \wedge x_2) \geq (>) f(x_1) + f(x_2)$$

**Definición A.3** (Función con diferencias crecientes) Sean  $T$  y  $X$  retículos completos, entonces  $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$  tiene diferencias crecientes en  $x$  y  $t$  si para todo  $x' \succeq x$  y  $t' \succeq t$ , se cumple que:

$$f(x', t') - f(x, t') \geq f(x', t) - f(x, t)$$

**Teorema A.5** (Teorema de Topkis en [4]) Sea  $\Theta^* \subseteq \Theta$  el conjunto de valores para los parámetros para el cual el problema:

$$\max_{x \in G(\theta)} f(x, \theta)$$

existe. Si  $X$  es un retículo,  $\Theta$  es un conjunto parcialmente ordenado y

- La función objetivo  $f : X \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  es supermodular en  $X$ .
- $f$  tiene diferencias crecientes en  $(x, \theta)$ .
- La correspondencia  $G : \Theta \rightrightarrows X$  es creciente en  $\theta$ . Entonces la correspondencia de solución  $\phi : \Theta^* \rightrightarrows X$  definida por,

$$\phi(\theta) = \underset{x \in G(\theta)}{\text{Argmax}} f(x, \theta)$$

es creciente. Es más, si la función objetivo es creciente en  $x$  y  $\theta$ , la función de valor:

$$v(\theta) = \underset{x \in G(\theta)}{\text{Sup}} f(x, \theta)$$

es creciente.