



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

**ESTUDIO DE TSUNAMIS PROVOCADOS POR DESLIZAMIENTOS DE TIERRA
CON ÉNFASIS EN EL CASO CHILENO**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA

FRANCISCO JAVIER URIBE COLILLANCA

PROFESOR GUÍA:
JAIME CAMPOS MUÑOZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MAURICIO FUENTES SERRANO
JAVIER RUIZ PAREDES

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN GEOFÍSICA
POR: **FRANCISCO JAVIER URIBE COLILLANCA**
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: JAIME CAMPOS MUÑOZ

ESTUDIO DE TSUNAMIS PROVOCADOS POR DESLIZAMIENTOS DE TIERRA CON ÉNFASIS EN EL CASO CHILENO

En esta tesis se propone una solución analítica de la ecuación de ondas de agua poco profunda inhomogénea aplicado a problema de deslizamientos de tierra, donde el problema tiene condiciones iniciales nulas.

Se desarrollaron tres modelos matemáticos como representantes del movimiento del fondo marino; el primero consiste en una función de variable separable que depende del espacio físico (x) y del tiempo (t), donde la función del tipo gaussiana depende de x y la función tipo caja depende de t . El segundo modelo consiste en una función del tipo caja, esta función mantiene la forma en el tiempo, y se mueve a una velocidad constante sobre un plano inclinado. Este segundo modelo fue la base teórica para desarrollar el tercer y definitivo modelo matemático propuesto por este trabajo, y consiste en una función forzante del tipo parabólica invertida, la cual se mueve a una velocidad constante sobre un plano inclinado. Este tercer modelo mantiene su forma en el tiempo, independiente si se mueve indefinidamente. La solución analítica proveniente de este tercer modelo corresponde a la altura de *runup* de un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra. Esta solución analítica fue comparada con soluciones obtenidas por el método de diferencias finitas y con otros estudios. Todos estos métodos fueron aplicados a los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra subaéreos en Aguas Calientes y frente a Isla Mentirosa (ambos ocurridos en el Fiordo de Aysén en el año 2007), y también el *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra submarino ocurrido en Papua Nueva Guinea en el año 1998.

Para los eventos del Fiordo de Aysén, se obtuvieron resultados dispares, ya que para el deslizamiento frente a Isla Mentirosa, se sobreestimaron las alturas máximas de *runup*; y para el deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes se subestimó la altura de *runup* medida *insitu*. Sin embargo, debido a la falta de datos y mediciones de campo en el fiordo de Aysén, ambos resultados sirven como valores de referencia para investigaciones futuras.

Para el evento de Papua Nueva Guinea, se modelaron dos casos, el primero correspondiente al modelo de playa inclinada de pendiente constante, cuyo ángulo de la pendiente fue tomado de la literatura, el cual es igual a 12° . El segundo modelo también corresponde a un modelo de playa inclinada, donde los datos batimétricos fueron obtenidos de *General Bathymetric Chart of the Oceans*. La forma de calcular la pendiente fue mediante el método de mínimos cuadrados, cuyo resultado fue de $4,81^\circ$. Para ambos modelos se predijeron las alturas de *runup* medidos *insitu*, no sin ligeras modificaciones de los parámetros, tales como: el espesor, la velocidad y el largo del deslizamiento de tierra.

En este trabajo de tesis se propone que la teoría de los *tsunamis* generados por impactos de meteoritos sea la base de estudio para investigaciones futuras sobre el fenómeno de los deslizamientos de tierra subaéreos.

A mi madre, mi padre, y mis hermanos.

Agradecimientos

Wiele zawdzięczam
tym, których nie kocham.

Ulgę, z jaką się godzę,
że bliżsi są komu innemu.

Radość, że nie ja jestem
wilkiem ich owieczek.

Pokój mi z nimi
i wolność mi z nimi,
a tego miłość ani dać nie może,
ani brać nie potrafi.

Nie czekam na nich
od okna do drzwi.

Cierpliwa
prawie jak słoneczny zegar,
wybaczam,
miłość nie wybaczyłaby nigdy.

Od spotkania do listu
nie wieczność upływa,

ale po prostu kilka dni albo tygodni.

Podróże z nimi zawsze są udane,
koncerty wysłuchane,
katedry zwiedzone,
krajobrazy wyraźne.

A kiedy nas rozdziela
siedem gór i rzek,
są to góry i rzeki
dobrze znane z mapy.

Ich zasługą,
jeżeli żyję w trzech wymiarach,
w przestrzeni nielirycznej i niere-
torycznej
z prawdziwym, bo ruchomym hory-
zontem.

Sami nie wiedzą,
ile niosą w rękach pustych.
“Nic im nie jestem winna” –
powiedziałyby miłość
na ten otwarty temat.

Poema escrito en el idioma nativo de la ganadora del premio Nobel de literatura del año 1996, la escritora polaca Wisława Szymborska, y el poema se titula “Podziękowanie”, cuya traducción al español es “Agradecimiento”.

Le doy mis más sinceros agradecimientos a Mauricio Fuentes, que gracias a su paciencia, disposición, consejos y ayuda, fueron un gran apoyo en la elaboración de este trabajo de tesis.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas	xii
Índice de Ilustraciones	xiii
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	3
1.1.1. Generales	3
1.1.2. Específicos	3
1.2. Antecedentes	4
1.3. Remociones en Masa en Chile	5
1.4. Datos Disponibles	7
1.4.1. Alturas de <i>runup</i> del <i>tsunami</i> de Aysén de 2007 y Papua Nueva Guinea 1998	7
1.4.2. Alturas de <i>Runup</i> del <i>Tsunami</i> en el Fiordo de Aysén, Aysén 2007	8
1.4.3. Alturas de <i>Runup</i> medidos frente a Isla Mentirosa, Aysén 2007	9
1.4.4. Alturas de <i>Runup</i> medidos en el sector de Aguas Calientes, Aysén 2007	11
1.4.5. Alturas de <i>Runup</i> medidos para el <i>tsunami</i> de PNG de 1998	12
1.4.6. Ubicación y Condiciones Geológicas del Fiordo de Aysén	20
2. Conceptos Fundamentales	21
2.1. Terminología y Clasificación	21
2.2. Inestabilidad de Pendientes Rocosas	22
2.3. Mecanismos	23
2.3.1. Ambientes, materiales y características de las avalanchas de rocas de largo <i>runout</i>	24
2.3.2. Generación de largos <i>runout</i> en avalanchas de rocas	24
2.4. Características de las Remociones en Masa y su Ambiente Geológico: Clasificación (Categorías)	25
2.4.1. Caídas	25
2.4.2. Deslizamiento de roca-tierra	26
2.4.3. Avalanchas de rocas	27
2.4.4. Flujo de detritos	27
2.4.5. Deslizamiento de tierra complejos	28

2.5.	<i>Tsunamis</i> Provocados por Deslizamientos de Tierra	29
2.5.1.	<i>Tsunami</i> por deslizamientos de tierra subaéreo	30
2.5.2.	Caso PNG 1998: <i>Slump</i> Submarino como Gatillante de un <i>Tsunami</i>	34
3.	Ecuaciones Gobernantes	37
3.1.	Ecuaciones de Movimiento	37
3.2.	Condiciones de Borde	38
3.2.1.	En el fondo	39
3.2.2.	En la superficie	40
3.3.	Obtención del sistema de <i>ecuaciones de agua poco profunda</i>	40
3.4.	Modelo de Playa Inclinada	42
3.4.1.	Primer caso de estudio (caso 1)	45
3.4.2.	Segundo caso de estudio (caso 2)	50
3.4.3.	Tercer caso de estudio (caso 3)	67
3.5.	Modelo de caída de meteorito como generador de un <i>tsunami</i> por impacto	90
3.5.1.	Energía de un <i>tsunami</i> provocado por el impacto de un meteorito	100
3.6.	Modelo de <i>tsunami</i> provocado por un deslizamiento de tierra desarrollado por Liu et al. (2003)	103
3.7.	Modelo de <i>tsunami</i> provocado por un deslizamiento de tierra desarrollado por Okal & Synolakis (2003)	124
3.7.1.	Resolución de la ecuación de ondas (1+1D) inhomogénea aplicando el Teorema de Convolución	127
3.7.2.	Resolución de la ecuación de ondas (1+1D) inhomogénea aplicando el Principio de Duhamel	132
4.	Modelación Numérica	137
4.1.	Método de Diferencias Finitas	137
4.1.1.	Diferencia Hacia Adelante de Primer Orden	138
4.1.2.	Diferencia Hacia Atrás de Primer Orden	139
4.1.3.	Diferencia Central de Primer Orden	140
4.1.4.	Diferencia Central de Segundo Orden	140
4.2.	Esquemas para la Ecuación de Agua Poco Profunda	141
4.3.	Condiciones de borde	142
4.3.1.	Muro vertical o reflexión total	142
4.3.2.	Transparente	143
4.4.	Criterio de Estabilidad	144
5.	Análisis y Resultados	145
5.1.	Evento de Aysén 2007	146
5.1.1.	Evaluación de la solución analítica (3.265) para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa	146
5.1.2.	Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa	149

5.1.3.	Evaluación del método de diferencias finitas para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa	150
5.1.4.	Resumen de los resultados obtenidos para el evento ocurrido frente a Isla Mentirosa	152
5.1.5.	Evaluación de la solución analítica (3.265) para el deslizamiento de Aguas Calientes	153
5.1.6.	Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el deslizamiento de Aguas Calientes	155
5.1.7.	Evaluación del método de diferencias finitas para el deslizamiento de Aguas Calientes	156
5.1.8.	Resumen de los resultados obtenidos para el evento de Aguas Calientes	157
5.2.	Evento de PNG 1998	158
5.2.1.	Evaluación de la solución analítica (3.265) para el evento de PNG 1998	159
5.2.2.	Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el evento de PNG 1998	161
5.2.3.	Evaluación del método de diferencias finitas para el evento de PNG 1998	162
5.2.4.	Resumen de los resultados obtenidos para el evento de PNG 1998	164
5.3.	Análisis paramétrico de la solución analítica (3.265)	165
	Conclusión	179
	Bibliografía	183
	Anexo A	190
A.1.	Resolución de la integral (3.44)	190
A.2.	Resolución de la integral (3.105)	191
A.3.	Resolución de la integral (3.418)	194
	Anexo B	198
B.1.	Filtro tipo <i>smooth</i>	198

Índice de Tablas

1.1. Alturas de <i>runup</i> obtenidos por las medidas de campo del SERNAGEOMIN. (Fuente: Scheele et al., 2013)	8
2.1. Base de datos de los <i>tsunami</i> gatillados por deslizamientos de tierra según Roberts et al. (2014). (Fuente: Tabla obtenida de Oppikofer et al. 2016)	32
3.1. Tabla resumen de los intervalos donde ξ cumple con la inecuación (3.84).	58
5.1. Valores de entrada para la modelación de los <i>tsunamis</i> provocados por deslizamientos de tierra de Aysén 2007.	146
5.2. Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de Isla Mentirosa.	150
5.3. Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de <i>runup</i> del evento frente a Isla Mentirosa.	152
5.4. Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de Aguas Calientes.	156
5.5. Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de <i>runup</i> del evento de Aguas Calientes.	158
5.6. Valores de entrada para la modelación del <i>tsunami</i> de PNG 1998.	158
5.7. Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de PNG.	162
5.8. Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de <i>runup</i> del evento de PNG 1998.	164
5.9. Tabla resumen de los eventos de Aguas Calientes, frente a Isla Mentirosa y PNG, que predicen las alturas de <i>runup</i> medidos <i>insitu</i>	178

Índice de Ilustraciones

1.1. Representación esquemática de un <i>tsunami</i> costa adentro. (Fuente: Levin et al., 2009)	2
1.2. Área de estudio y red sísmica alrededor del fiordo de Aysén. Mecanismo focal del terremoto principal de Aysén del 21 de Abril del año 2007. (Fuente: Agurto et al., 2012)	6
1.3. Localización de los 27 datos de <i>runup</i> medidos en el sitio de la investigación de campo del año 2011. (Fuente: Scheele et al., 2013)	9
1.4. Fotografías secuenciales tomadas frente a Isla Mentirosa. a. Vista desde el noroeste de Isla Mentirosa. Se visualiza una nube de color grisáceo a café que proviene del colapso de la ladera frente a Isla Mentirosa; b. Se visualiza como la amplitud de la onda se propaga en dirección al sur (hacia Isla Mentirosa) producido por la intrusión del deslizamiento de roca proveniente de la ladera frente a Isla Mentirosa; c. Se observa la llegada de la onda de desplazamiento a Isla Mentirosa; d. Vista aérea oblicua en dirección a la zona frente a Isla Mentirosa. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)	10
1.5. Deslizamiento de roca de Aguas Calientes en la costa sur del Fiordo de Aysén. a. Se puede ver el deslizamiento al centro de la imagen, mientras que inmediatamente al Este (izquierda de la figura) ocurre un flujo de detrito (árboles y suelo). b. Vista de sobrevuelo oblicua al Sur, cabe hacer notar las marcas (izquierda de la foto) que ha dejado el deslizamiento de roca. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)	11
1.6. Mapeo de la zona del fiordo de Aysén realizado por el SERNAGEOMIN después de ocurrido el terremoto del 21 de abril de 2007. (Fuente: Modificado desde Serey, 2011)	12
1.7. Máximas alturas de <i>runup</i> medidas por el ITST. En la parte de arriba gráfica las alturas individuales como una función de longitud a lo largo de la costa de PNG, en la gráfica de abajo muestra la localización de las mediciones individuales del <i>runup</i> . (Fuente: Synolakis et al., 2002)	13

1.8. (Arriba) Formas de onda del <i>tsunami</i> calculadas para el modelo de <i>slump</i> . (Abajo) Distribución de los <i>runup</i> medidos <i>insitu</i> (puntos de color negro) y las alturas de <i>runup</i> calculados con una fuente de <i>tsunami</i> del tipo <i>slump</i> submarino (barras en color rojo). (Fuente: Synolakis et al., 2002)	14
1.9. Mapa de la zona costera de Papua Nueva Guinea afectada por el <i>tsunami</i> del 17 de julio del año 1998. (Fuente: Matsuyama & Yeh, 2003)	16
1.10. Distribución de las alturas de <i>runup</i> medidos a lo largo de Sissano Lagoon. En la parte derecha se muestra la simulación de una fuente por deslizamiento de tierra como generadora de un <i>tsunami</i> junto a los datos medidos <i>insitu</i> . (Fuente: Matsuyama & Yeh, 2003)	17
1.11. Sección transversal del <i>slump</i> de acuerdo a los perfiles de sísmica de reflexión realizados cerca de las costas de Sissano. (a) . Bosquejo correspondiente al trazado de la falla (<i>slump</i>) realizado por Matsuyama & Yeh (2003); (b) . Esquema representativo del modelo de playa inclinada y bloque deslizante como movimiento del fondo oceánico con forma de semiesfera. (Fuente: Modificado desde Matsuyama & Yeh, 2003)	18
1.12. Distribución de las alturas de <i>runup</i> medidos a lo largo de Sissano Lagoon. En la parte de arriba gráfica las alturas de <i>runup</i> obtenidas a través de un modelo de deslizamiento de tierra bajo el criterio de comportamiento como un material que sigue una Ley de fricción tipo Coulomb. En la gráfica de abajo muestra la localización de las mediciones individuales del <i>runup</i> . (Fuente: Heinrich et al., 2001)	19
1.13. Zona del epicentro del terremoto de Aysén del 21 de Abril del año 2007 junto con las fuentes generadoras de <i>tsunamis</i> (ondas de desplazamiento). La ubicación del terremoto principal está señalizada con el símbolo de estrella de color rojo. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)	20
2.1. Representación esquemática de un deslizamiento de tierra con escarpes. (Fuente: Griffiths & Whitworth, 2012)	22
2.2. Representación esquemática de la distancia de <i>runout</i> en un deslizamiento de tierra. (Fuente: Modificado desde Kritikos & Davies, 2015)	23
2.3. Representación esquemática de una caída de roca. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)	26
2.4. Representación esquemática de un deslizamiento rotacional. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)	27
2.5. Representación esquemática de un flujo de detritos. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)	28
2.6. Representación esquemática de un deslizamiento de rocas y una avalancha de escombros. (Fuente: Geertsema et al., 2006)	29
2.7. Representación esquemática donde se muestran las tres fases de las ondas de desplazamiento. (Fuente: Heller et al., 2009)	31

2.8. El deslizamiento complejo frente a Isla Mentirosa se compone de 4 deslizamientos de suelo-roca (designadas como A, B, C y D). Las zonas coloreadas de amarillo y rojo corresponden a los 4 escarpes generados por el terremoto de Aysén del 2007 (Fuente: Froude, 2016).	34
2.9. Esquema interpretativo del <i>slump</i> de PNG, obtenidos desde uno de los perfiles del estudio de sismica de reflexión. El dibujo se encuentra en escala 1:1. (Fuente: Synolakis et al., 2002	36
3.1. Esquema de las coordenadas del sistema y variables a usar en el modelo de <i>tsunami</i> . (Fuente: Elaboración propia)	39
3.2. Esquema de coordenadas y simbología a utilizar. (Fuente: Elaboración propia) . .	42
3.3. Esquema de coordenadas y simbología del modelo con forma de gaussiana como término forzante. (Fuente: Elaboración propia)	46
3.4. Esquema de coordenadas y simbología del modelo propuesto. (Fuente: Elaboración propia)	50
3.5. Esquema representativo de los valores positivos de ξ donde la inecuación (3.84) se cumple. (Fuente: Elaboración propia)	61
3.6. Esquema de coordenadas y simbología del modelo propuesto. (Fuente: Elaboración propia)	67
3.7. Análisis del caso cuando $f_2(\tau) < 0 \wedge f_1(\tau) \geq 0$. (Fuente: Elaboración propia) .	76
3.8. Análisis del caso cuando $\tau \in [\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$. (Fuente: Elaboración propia)	78
3.9. Análisis del caso cuando $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_1^{(1)}] \cup [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}]$. (Fuente: Elaboración propia)	78
3.10. Análisis del caso cuando $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}]^c$. (Fuente: Elaboración propia)	79
3.11. Esquema entre $x_1 + vt$ y las raíces $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$ de la ecuación (3.243). (Fuente: Elaboración propia)	85
3.12. Esquema entre x_1 , $x_1 + vt$, $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$, donde $\xi_1^{(1)}$ es la menor de las raíces provenientes de la ecuación (3.243). (Fuente: Elaboración propia)	86
3.13. Funciones propias para el caso de <i>tsunami</i> en una profundidad del océano de 4 km para los periodos de 1500, 150 y 50 s. (Fuente: Ward, 2010)	91
3.14. Sección transversal de la cavidad que deja el impacto entre el meteorito y la superficie del mar. a) . Cavidad sin borde, donde la masa de agua desplazada por el impacto del bólido no es eyectada hacia el exterior, o sea, se evapora totalmente, b) . Cavidad que presenta un borde, en otras palabras implica que el agua desplazada por el impacto es eyectada a los bordes. (Fuente: Modificado desde Ward & Asphaug (2000))	95
3.15. Esquema de coordenadas y simbología del modelo de Liu et al. (2003). (Fuente: Elaboración propia)	103

3.16. Modelo de <i>tsunami</i> por fuente de dislocación. (a) Levantamiento vertical súbito del fondo marino (montículo) en una cantidad Δz sobre un área A . (b) Descenso vertical del montículo y de la superficie del agua en una cantidad $\Delta z/2$. (c) Propagación de las ondas de tsunami hacia los lados. Nota: la figura no está a escala. (Fuente: Modificado desde Okal & Synolakis, 2003)	125
3.17. Modelo de <i>tsunami</i> por fuente de deslizamiento (<i>Slump</i>). (Fuente: Modificado desde Okal & Synolakis, 2003)	127
4.1. Esquema de la malla de diferencias finitas. (Fuente: Modificado desde Allaire, 2005)	138
5.1. (Arriba). Altura de <i>runup</i> calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Perfil topográfico real e idealizado (pendiente constante correspondiente del modelo de playa inclinada) de la sección transversal analizada.	147
5.2. Altura de <i>runup</i> calculada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa.	149
5.3. Altura de <i>runup</i> modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo frente a Isla Mentirosa.	150
5.4. Resumen de las alturas de <i>runup</i> modeladas para el deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa.	152
5.5. (Arriba) Altura de <i>runup</i> calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes. (Abajo). Perfil topográfico e idealizado (pendiente constante correspondiente al modelo de playa inclinada) de la sección transversal analizada.	154
5.6. Altura de <i>runup</i> modelada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de Aguas Calientes.	155
5.7. Altura de <i>runup</i> modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de Aguas Calientes.	156
5.8. Resumen de las alturas de <i>runup</i> modeladas para el deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes.	157
5.9. (Arriba). Altura de <i>runup</i> calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra submarino de PNG. (Abajo). Perfil batimétrico y los dos modelos idealizados (de pendiente constante correspondiente al modelo de playa inclinada) de la sección transversal frente a las costas de PNG. Los datos de batimetría fueron descargados del sitio <i>web</i> de <i>General Bathymetric Chart of the Oceans</i> (GEBCO), para una muestra cada 30 segundos.	159
5.10. Altura de <i>runup</i> modelada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de PNG 1998.	161
5.11. Altura de <i>runup</i> modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de PNG 1998.	162
5.12. Resumen de las alturas de <i>runup</i> modeladas para el evento de PNG 1998.	164

5.13. (Arriba) Análisis sobre la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.	166
5.14. (Arriba) Análisis sobre la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.	167
5.15. (Arriba) Análisis sobre la influencia del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el largo del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.	168
5.16. (Arriba) Análisis sobre la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.	169
5.17. (Arriba) Análisis sobre la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.	170
5.18. (Arriba) Análisis sobre la influencia del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el largo del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.	171
5.19. (Arriba) Análisis de la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de PNG.	172
5.20. (Arriba) Análisis de sensibilidad de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado mediante la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de PNG.	173
5.21. (Arriba) Análisis de sensibilidad de la longitud o largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y la longitud del deslizamiento de tierra de PNG.	174
5.22. (Arriba) Análisis de la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de PNG.	175

5.23. (Arriba) Análisis de sensibilidad de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de PNG.	176
5.24. (Arriba) Análisis de sensibilidad del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de <i>runup</i> para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el <i>runup</i> máximo calculado por la ecuación (3.265) y la longitud del deslizamiento de tierra de PNG.	177
B.1. Deslizamiento de tierra del evento frente a Isla Mentirosa modelado como la ecuación (B.2), junto con la misma ecuación (ecuación (B.2)) aplicando un filtro tipo <i>smooth</i> de un 1, 10, 20, 30 y 40 % de los datos del vector.	199

Capítulo 1

Introducción

El término *tsunami* que en japonés se traduce como 'onda súbita en un puerto', quiere decir que un *tsunami* corresponde a una onda que no es visible en el mar abierto u océano, pero que aumenta su altura cuando se acerca a la costa.

Los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra corresponden a los *tsunamis* generados por la irrupción violenta de un bloque deslizante en un fluido de una profundidad semejante al tamaño de este bloque. El bloque deslizante se mueve a una velocidad determinada, la cual es inferior a la velocidad de la onda de fase de un *tsunami*, el movimiento de este bloque deslizante está dominado por la aceleración de gravedad. Estos tipos de *tsunamis* pueden ser gatillados por diversos factores, tales como: flujo de detritos (inestabilidad en una ladera), colapso del fondo oceánico o del prisma de acreción, flujos piroclásticos, colapso de la caldera de un volcán, y caída de meteoritos o bólidos (Bardet et al., 2003). Los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra pueden ser subaéreos (cuando la masa en movimiento esta sobre el nivel del mar) o sumergidos (cuando la masa móvil se ubica bajo el nivel del mar) (Liu et al., 2005), los cuales generan diferentes *runup* (corresponde a la altura máxima de inundación) y *rundown* (es la máxima retirada de la ola bajo el nivel del mar) en la costa, dependiendo de cuan alejado se encuentran de la superficie del mar.

A continuación se muestra una figura representativa de un *tsunami*, visualizándose los principales parámetros que involucran este fenómeno.

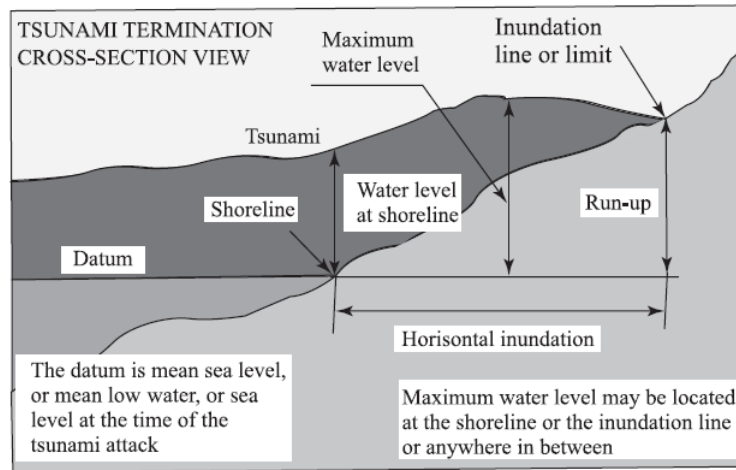


Figura 1.1: Representación esquemática de un *tsunami* costa adentro. (Fuente: Levin et al., 2009)

Hay diversos lugares del mundo donde han ocurrido este tipo de *tsunamis*, algunos de ellos son en Noruega, Papúa Nueva Guinea (PNG), Estados Unidos y Chile (Yamada et al., 2013), debido a sus características geomorfológicas. El *tsunami* gatillado por deslizamiento de roca de Alaska del año 1958 produjo un *tsunami* con el *runup* más elevado en la historia desde que se tienen registros de estos fenómenos (Weiss et al., 2009); el *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra submarino en PNG el año 1998, cuyo *tsunami* produjo la mayor cantidad de muertes para un fenómeno de estas características ocurridas en el siglo XX (Synolakis et al., 2002); el *tsunami* de Storegga (Noruega) acontecido en el Holoceno, el cual produjo un *tsunami* devastador en todas las costas cercanas (Løvholt et al., 2005); y el *tsunami* de Aysén del año 2007 (Sepúlveda et al., 2010), generado por varias inestabilidades en laderas rocosas escarpadas, tales como deslizamientos, caídas y avalanchas de rocas, produciendo varios *tsunamis* locales producto de un violento impacto de estas masas disgregadas de roca con las aguas del fiordo, causando diez víctimas fatales y un importante daño en granjas salmoneras ubicadas a lo largo de las costas del fiordo (Sepúlveda & Serey, 2009).

El objetivo principal de esta tesis es estudiar el comportamiento, características y evolución de los *tsunamis* gatillados por deslizamientos de tierra desde su origen hasta que impactan en la costa, entregando soluciones analíticas y numéricas. La importancia de conocer el comportamiento de los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra radica en que son muy difíciles de predecir, tienen un poder de devastación elevado y los mareógrafos no son capaces de medir sus ondas en campo lejano, en cambio en campo cercano presentan alturas de *runup* excesivamente grandes (Okal & Synolakis, 2003).

Como objetivo secundario, en este trabajo se replicará el *tsunami* provocado por deslizamiento de tierra ocurrido en Aysén en el año 2007, enfocándonos en explicar las alturas de *runup* medidos en la costa.

El trabajo de Liu et al. (2003) es el punto de partida de este trabajo, y a partir de esta investigación se entregará una solución analítica que explique el fenómeno de los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra.

Para modelar un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra subaéreo este trabajo de tesis propone modelar el deslizamiento de tierra como el impacto de un meteorito sobre la superficie del agua, donde este modelo considera un fondo oceánico constante.

1.1. Objetivos

1.1.1. Generales

- Obtener soluciones analíticas provenientes de la ecuación lineal de agua poco profunda con movimiento transiente del fondo oceánico, para un modelo de playa inclinada.
- Modelar numéricamente los *tsunamis* gatillados por deslizamientos de tierra subaéreos de Aysén del año 2007.

1.1.2. Específicos

- Obtener analíticamente soluciones que expliquen el comportamiento de un *tsunami* gatillados por deslizamientos de tierra submarinos y comparar esta solución con otras investigaciones propuestas y discutir en detalle los desajustes (diferencias), semejanzas, con sus ventajas y desventajas de cada uno de los métodos.
- Comparar las soluciones de este trabajo con respecto a investigaciones hechas con datos reales de otros estudios destacando sus semejanzas y diferencias.
- Modelar analíticamente el *runup* del *tsunami* provocado por deslizamiento de tierra subaéreo gatillado por el terremoto de Aysén de 2007.
- Modelar numéricamente las soluciones obtenidas por este estudio utilizando códigos computacionales basados en el lenguaje de programación MATLAB.

1.2. Antecedentes

La complejidad de abordar el tema de los *tsunami* provocados por deslizamientos de tierra es porque son más lentos en producirse respecto a los *tsunamis* generados por terremotos, además que la variable tiempo está fuertemente ligada con la deformación del fondo marino. Como consecuencia de esto, este tipo de fenómenos no pueden ser investigados transfiriendo a la superficie libre una condición inicial de “inicio en caliente”, debido al movimiento del fondo marino (Sammarco & Renzi, 2008). En otras palabras, la condición inicial de “inicio en caliente” transferida a la superficie del agua significa que la respuesta de la superficie del agua se ajusta exactamente al cambio en el perfil del fondo marino (Chaytor et al., 2010).

Los modelos analíticos de *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra son muy escasos en la literatura especializada, debido a lo complejo que es considerar la interacción sistema deslizamiento de tierra-agua.

Uno de los primeros modelos analíticos fue el desarrollado por Tuck & Hwang (1972). En este modelo se aborda el problema de la generación de ondas debido al movimiento del fondo marino sobre una pendiente inclinada (modelo de playa inclinada), este modelo considera la aproximación de agua como poco profunda. A pesar de que este modelo es aplicable más bien a una fuente sísmica como generador de un *tsunami*, esta es la primera investigación donde se resuelve la ecuación de agua poco profunda inhomogénea, que sería el punto de partida para otras investigaciones (por ejemplo: Liu et al., 2003) en la búsqueda de un modelo analítico que describa la generación y propagación de un *tsunami* provocado por el deslizamiento de tierra.

Modelos posteriores como el desarrollado por Sammarco & Renzi (2008) sobre la propagación de un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra sobre un plano inclinado, fue uno de los primeros estudios que desarrolla la interacción entre el deslizamiento de tierra y la generación de las ondas producto del movimiento del deslizamiento de tierra. Según Renzi & Sammarco (2012), el modelo de Sammarco & Renzi (2008) tiene ciertas restricciones que lo limitan para describir los dos tipos de deslizamientos de tierra, tales como el deslizamiento submarino y el subaéreo. Primero, el autor modeló el deslizamiento de tierra como una función del tipo doble Gaussiana, el deslizamiento se modela como un cuerpo rígido, el movimiento se inicia desde una posición fija (deslizamiento semi-sumergido), y el movimiento es a lo largo de un plano inclinado a una velocidad constante de 1 m/s. Según Renzi & Sammarco (2012), el modelo desarrollado por Sammarco & Renzi (2008) provee una buena descripción de la generación del *tsunami* y los mecanismos de propagación. No obstante, no describe la influencia de la posición inicial del deslizamiento de tierra y la velocidad sobre el campo de ondas generados. El estudio de Renzi & Sammarco (2012) también menciona que la forma de doble Gaussiana para modelar el deslizamiento de tierra, con una longitud infinita, no es capaz de representar fielmente a un deslizamiento con forma realista y de longitud finita. Segundo, el modelo de playa inclinada infinita no es representativa de una batimetría real, donde la pendiente se conecta a una plataforma continental plana.

Según los estudios de Liu et al. (2005); Lynett & Liu (2005); Di Risio et al. (2009) mostraron que la generación y propagación del *tsunami* provocado por deslizamiento de tierra sobre una pendiente inclinada está fuertemente condicionada por la forma, la posición y la velocidad del deslizamiento.

1.3. Remociones en Masa en Chile

A lo largo de Chile han ocurrido innumerables casos de remociones en masa y de los más variados tipos, sin considerar a los terremotos como gatillantes de una remoción en masa, se han generado eventos tales como flujo de detritos-deslizamiento de tierra cordillerano de Parraguirre 1987, flujo de lodo Antofagasta 1991, flujo de lodo de Santiago 1993, flujo de lodo de Atacama 2015 (Sepúlveda, 2016). En relación a los deslizamientos provocados por terremotos los más recientes y ampliamente estudiados son los deslizamientos de tierra de Aysén 2007 (Sepúlveda & Serey, 2009; Sepúlveda et al., 2010; Serey, 2011; Scheele et al., 2013) y Maule 2010 (Völker et al., 2012). No obstante, en este trabajo de investigación se enfocará en las remociones en masa generadas por el terremoto de Aysén 2007, debido a que ha sido el único evento que ha provocado un *tsunami* generado por deslizamientos de tierra.

Investigaciones realizadas antes del sismo principal de Aysén el día 21 de abril del año 2007, se pudo determinar que 80 años antes de este evento, o sea, 7 años después de la fundación de la ciudad de Aysén se generó un evento casi de las mismas características que el acontecido en 2007, similares en cuanto a las remociones en masa y a la generación de *tsunamis* producto de la irrupción de grandes cantidades de volúmenes de roca y suelo en el fiordo de Aysén (Naranjo et al., 2009b).

Luego de determinar que el epicentro del sismo del 21 de abril de 2007 fue cercano a la zona de fallas de Liquiñe-Ofqui (LOFZ), junto a los eventos antes y después del sismo principal, confirma que dicho sistema de fallas está activo, lo cual implica la existencia de peligro sísmico y *tsunami* para el futuro en la zona de Aysén. Serey (2011) asevera que la generación de remociones en masa debido a sismos corticales en la zona de estudio estará condicionada, principalmente, por el relieve abrupto de las laderas; la calidad geotécnica del macizo rocoso, la cual es menor en las trazas y/o cercanías de las fallas y lineamientos presentes en el área de estudio; y efectos de sitio de amplificación topográfica de las ondas sísmicas generadoras de las remociones (Serey, 2011).

En la figura 1.2 se observan las réplicas de magnitudes mayores a 5 registrados durante la crisis sísmica de Aysén del año 2007, de las cuales culminaron con el terremoto principal del 21 de abril de 2007, cuya magnitud fue de $M_w = 6,2$. Los datos del mecanismo focal de las réplicas fueron tomadas del catálogo *Global Centroid Moment Tensor* (GCMT), excepto el sismo principal que fue tomado del catálogo del *United States Geological Survey* (USGS) (Agurto et al., 2012). La localización de los eventos más grandes del estudio de Agurto et al. (2012), a excepción de

1.4. Datos Disponibles

1.4.1. Alturas de *runup* del *tsunami* de Aysén de 2007 y Papua Nueva Guinea 1998

El proceso de recolección de datos en esta tesis considera los datos recabados por estudios de *tsunamis* subáereos y submarinos, primero se mencionan las investigaciones de los *tsunamis* subáereos acontecidos en Aysén el año 2007, para luego mencionar los estudios realizados para investigar el *tsunami* generado por un deslizamiento de tierra submarino en Papua Nueva Guinea (PNG) el año 1998.

Para el caso de los *tsunamis* subáereos se consideró el estudio de Scheele et al. (2013), los cuales trabajaron con datos medidos en el fiordo de Aysén (ver tabla 1.1). Estos fueron obtenidos de manera instrumental por el *International Centre for Geohazards* (ICG), los cuales van desde modernas técnicas de mapeo de topografía satelital, hasta calcular la diferencia de altura entre 2 puntos, esto por ejemplo a través de un instrumento llamado *Leica Vector*. También se cuenta con estudios como los de Sepúlveda & Serey (2009) y el estudio de Scheele et al. (2013). El gran inconveniente que presentan los estudios realizados sobre este deslizamiento es la falta de información básica para generar un modelo analítico, ya que falta conocer valores de entrada tales como: largo, espesor máximo, ancho del deslizamiento y el ángulo de la pendiente de la ladera, entre otros. A pesar de este inconveniente, sí hay estudios que midieron las alturas de *runup* en Isla Mentirosa, estos estudios son Scheele et al. (2013) y Sepúlveda & Serey (2009), con resultados bastante disímiles entre sí. No obstante, en la zona frente a Isla Mentirosa no hay mediciones de las alturas de *runup*, pero se asumirá que las alturas de *runup* medidas en Isla Mentirosa fueron medidas en la zona frente a Isla Mentirosa. Con respecto al deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes, se utilizó el *runup* medido por el estudio de campo realizado por el SERNAGEOMIN (ver figura 1.6, correspondiente a un deslizamiento de roca, presentado en color rojo).

Como se mencionó anteriormente, este proceso de recolección de datos considera también los estudios de los principales deslizamientos de tierra submarino que gatillaron un *tsunami* destructor. En este caso, el presente trabajo de tesis seleccionó el *tsunami* ocurrido en 1998 en PNG, y el criterio para su elección es porque generó la mayor cantidad de muertes atribuidas a este tipo de *tsunamis* durante el transcurso del siglo XX. Se requirió a un *tsunami* fuera de Chile, puesto que en Chile no se han registrado este tipo de fenómenos. Como base o referencia, se utilizarán los cálculos y medidas entregados por los estudios de Synolakis et al. (2002), Matsuyama & Yeh (2003) y Watts et al. (2005), los cuales cuentan con diversos datos de *runup*, tales como: cálculos a través de fórmulas empíricas y mediciones de campo.

1.4.2. Alturas de *Runup* del *Tsunami* en el *Fiordo de Aysén*, *Aysén* 2007

Los datos disponibles de los *runup* medidos en terreno un poco después de acontecido el terremoto principal de Aysén del 2007, cuyos puntos base fueron los utilizados por SERNAGEOMIN en una investigación de campo realizada el año 2011. Los datos fueron medidos remotamente (a distancia) mediante un telémetro del tipo binocular para observación (Leica Vector). Este instrumento permite medir diferencia de alturas entre 2 puntos objetivos, su distancia al observador y su ángulo acimutal. Las coordenadas de los 27 puntos obtenidos, fueron localizadas a través de un medidor de sistema de posicionamiento global (GPS).

Código	Este (Coordenadas UTM)	Norte (Coordenadas UTM)	Azimutal (°)	Distancia (m)	Runup (m)
300	648642	4980005	114	107	2
301	648581	4979639	110	62	4-2-2
302	648603	4979374	74	45	3-5-6
303	648856	4979078	71	34	4-4-4
304	648996	4978995	345	33	4-4-3
305	649159	4979114	223	60	3-2-2
307	649353	4979165	265	36	2-3-2
308	649559	4979311	325	37	3-3-2
309	652555	4977042	88	161	9-4-6-4
310	652406	4975743	47	106	7-5-4
311	653017	4975137	117	135	2-2-2
312	652953	4974802	39	51	4-4-4
313	647174	4973782	288	20	3-3-3-2
314	647748	4973091	214	110	4-3-2-4
315	650239	4970964	167	202	10-12-17-8-6-14
316	651804	4970310	140	195	14-17-12-16
317	651246	4970509	40	111	6-9-10-8
318	660773	4969575	292	151	10-16-10-10
319	661810	4969162	83	122	8-14-8-16-6-10
320	662136	4968701	72	76	2-4-4-4
322	662747	4967921	76	162	2-5-5-5
323	662079	4963935	26	123	11-12-3-6-4
324	662529	4963749	181	89	5-4-6-4
325	663270	4963611	131	106	6-2-7-11-11-10
326	664650	4963426	132	116	7-4-10-10-8
332	665606	4963966	70	125	15-7-5-7
334	667485	4966651	343	94	5-10-4-8-5

Tabla 1.1: Alturas de *runup* obtenidos por las medidas de campo del SERNAGEOMIN. (Fuente: Scheele et al., 2013)

La tabla 1.1 resume los datos medidos *insitu* a lo largo del fiordo de Aysén por el SERNAGEOMIN durante la expedición de campo realizada en el año 2011. Cabe mencionar que en la columna denominada como "*Runup* (m)", los casilleros que presentan más de un número, significa

que ese lugar fue medido varias veces, esto con el fin de que así el estudio de campo sobre las alturas de *runup* fueran más exacto.

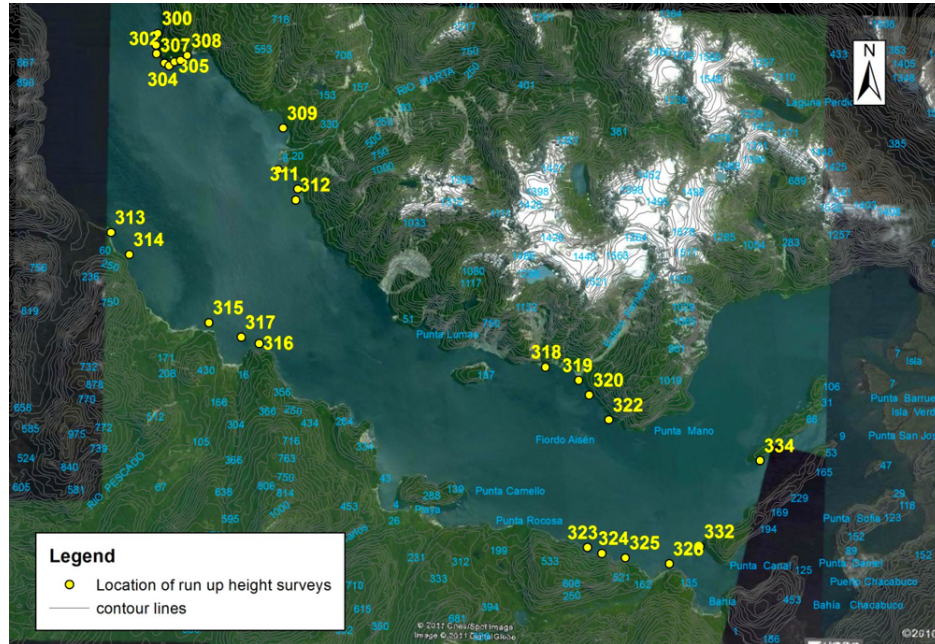


Figura 1.3: Localización de los 27 datos de *runup* medidos en el sitio de la investigación de campo del año 2011. (Fuente: Scheele et al., 2013)

En la figura 1.3 se visualiza la ubicación de los puntos en donde se midieron las alturas del *runup* del *tsunami* de Aysén del año 2007. En esta figura no se muestran las alturas de *runup* medidas *insitu* en las cercanías y frente a Isla Mentirosa, ni tampoco a los costados de la zona de Aguas Calientes, que fueron dos de los deslizamientos de tierra que se seleccionaron en este trabajo de tesis para realizar el modelamiento analítico y numérico. Hasta la fecha hay varios estudios que se han enfocado en explicar y modelar el *tsunami* en el fiordo de Aysén, dentro de los cuales se encuentran: Naranjo et al. (2009b); Naranjo et al. (2009a); Sepúlveda & Serey (2009); Sepúlveda et al. (2010); Serey (2011); Lastras et al. (2013); Lastras et al. (2014); Froude (2016).

1.4.3. Alturas de *Runup* medidos frente a Isla Mentirosa, Aysén 2007

Esta remoción en masa consiste en cuatro deslizamientos de suelo-roca bien identificadas a 5 km al sureste del epicentro (Froude, 2016). El volumen estimado para este deslizamiento es de 8 Millones de m³ (Sepúlveda & Serey, 2009), pero según el estudio de Scheele et al. (2013) estimó que el volumen total involucrado en el deslizamiento de tierra fue de 18,4 Millones de m³ (Mm³).

Para este deslizamiento de suelo-roca hay variadas investigaciones enfocadas en describir la geología y geomorfología de la zona, secuencia de eventos, pero no hay estudios científicos a la fecha que hayan estudiado parámetros físicos propios del deslizamiento, verbigracia: largo, ancho, espesor, y pendiente de la ladera donde se generó el plano de falla, los cuales son parámetros básicos para desarrollar un modelo matemático o numérico de este tipo de eventos que describa la generación, evolución, propagación y alturas de *runup* del *tsunami*.

A pesar de la falta de datos, si ha sido posible medir el *runup* en Isla Mentirosa, Sepúlveda & Serey (2009) estimaron este valor en 65 m, otros autores como Scheele et al. (2013) lo estiman en 50 m. La velocidad a la que se desplazó esta remoción en masa fue de 90 m/s (Scheele et al., 2013). Con respecto al espesor máximo de este deslizamiento, se estimó en 40-50 m (Serey, 2011).

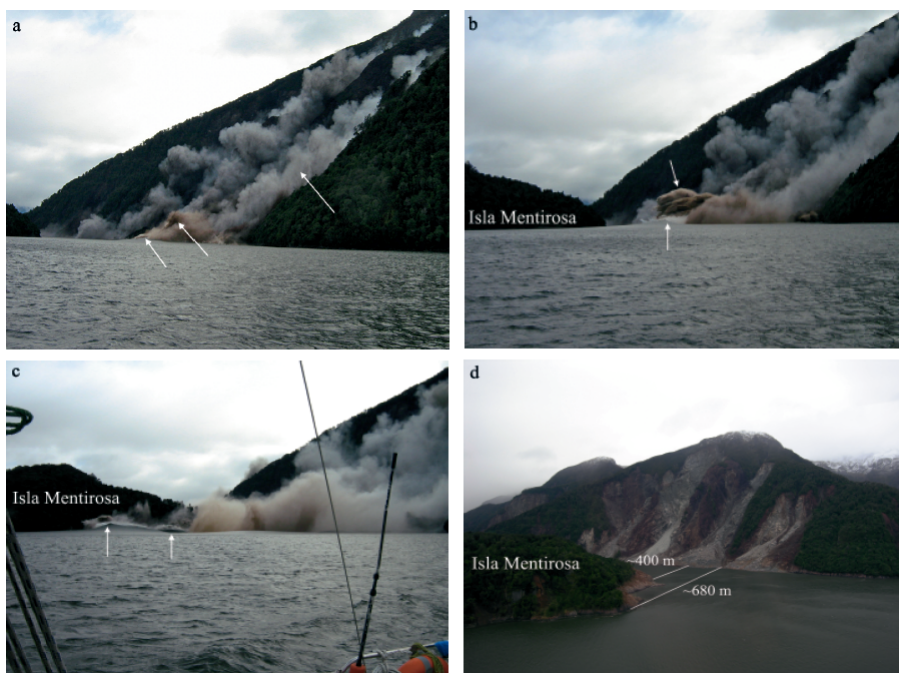


Figura 1.4: Fotografías secuenciales tomadas frente a Isla Mentirosa. **a.** Vista desde el noroeste de Isla Mentirosa. Se visualiza una nube de color grisáceo a café que proviene del colapso de la ladera frente a Isla Mentirosa; **b.** Se visualiza como la amplitud de la onda se propaga en dirección al sur (hacia Isla Mentirosa) producido por la intrusión del deslizamiento de roca proveniente de la ladera frente a Isla Mentirosa; **c.** Se observa la llegada de la onda de desplazamiento a Isla Mentirosa; **d.** Vista aérea oblicua en dirección a la zona frente a Isla Mentirosa. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)

En la figura 1.4 se visualiza la secuencia de evento a partir del deslizamiento de roca frente a Isla Mentirosa, se observa que la onda de desplazamiento viaja una distancia promedio de 500 metros (distancia entre Isla mentirosa y la ladera del frente). La figura 1.4d. se observan

los 4 escarpes que constituyen el deslizamiento de roca frente a Isla Mentirosa. En este mismo recuadro se observa que el deslizamiento de roca comienza cerca de la cima del macizo rocoso, justificando de esta manera la hipótesis que dice que en este terremoto se produjo el fenómeno de la amplificación topográfica de las ondas sísmicas generadoras de las remociones en masa (Serey, 2011).

Cabe mencionar que los deslizamientos de roca-suelo corresponden a deslizamientos donde el material deslizado está asociado a la parte superficial de la ladera, la cual involucra la cubierta de suelo y vegetación además de la capa de macizo rocoso más superficial y meteorizado (Serey, 2011).

1.4.4. Alturas de *Runup* medidos en el sector de Aguas Calientes, Aysén 2007

Esta remoción en masa se ubica a unos 5 km al sur del valle Punta Cola (ver figura 1.13), su volumen se estima en 1,7 Mm³ y la velocidad del deslizamiento se calculó en 17 m/s (Serey, 2011). La información en relación a la distribución del *runup* medido en las cercanías del deslizamiento de la ladera de Aguas Calientes es poco abundante (hasta la fecha casi no se han realizado estudios sobre esta remoción en masa). No obstante, según mediciones realizadas por el SERNAGEOMIN, el *runup* medido a los costados del deslizamiento de roca fue de 12 metros (ver figura 1.6).

Aguas Calientes corresponde a un deslizamiento de roca, cuya masa de roca se moviliza junto a la abundante vegetación perteneciente a la ladera, desplazándose sobre una superficie quasi-plana. Por lo tanto, se clasifica como un deslizamiento del tipo traslacional.

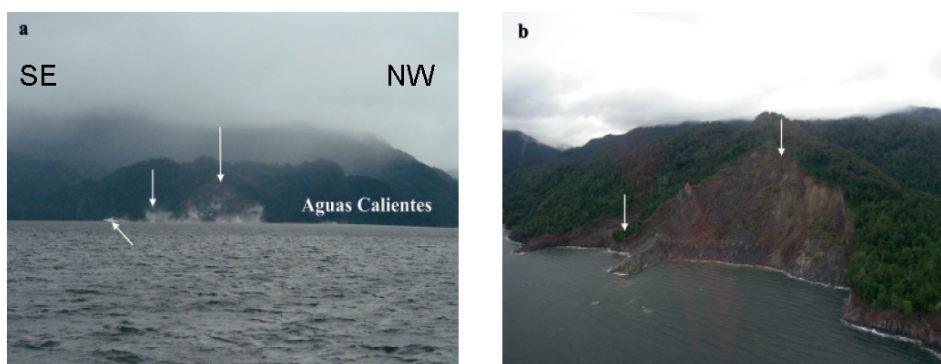


Figura 1.5: Deslizamiento de roca de Aguas Calientes en la costa sur del Fiordo de Aysén. **a.** Se puede ver el deslizamiento al centro de la imagen, mientras que inmediatamente al Este (izquierda de la figura) ocurre un flujo de detrito (árboles y suelo). **b.** Vista de sobrevuelo oblicua al Sur, cabe hacer notar las marcas (izquierda de la foto) que ha dejado el deslizamiento de roca. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)

La figura 1.5 se observa que el mismo fenómeno que en el deslizamiento frente a Isla Mentirosa, ya que las cabeceras de los deslizamientos se ubican generalmente en la parte superior de las laderas, lo cual ha sido propuesto como un indicador de la existencia de amplificación topográfica de las ondas sísmicas generadoras de las remociones en masa (Serey, 2011).

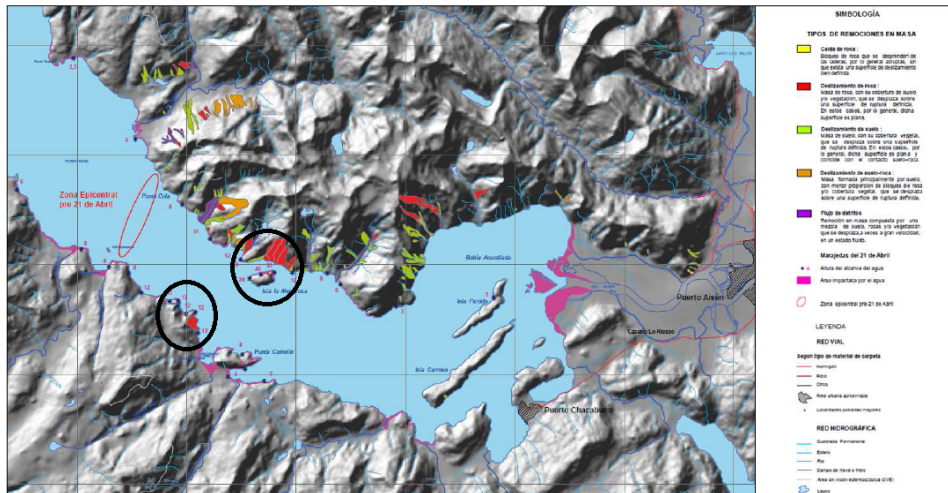


Figura 1.6: Mapeo de la zona del fiordo de Aysén realizado por el SERNAGEOMIN después de ocurrido el terremoto del 21 de abril de 2007. (Fuente: Modificado desde Serey, 2011)

En la figura 1.6 se observa que las dos remociones en masa (circunferencias de color negro que indican la zona frente a Isla Mentirosa y Aguas Calientes) que provocaron ondas de *tsunami* y de las cuales serán estudiadas en este trabajo de tesis fueron clasificadas según el SERNAGEOMIN como deslizamientos de rocas (indicadas en color en la figura 1.6).

En esta figura se observa que las alturas de *runup* medidas a los costados del deslizamiento en Aguas Calientes fue de 12 metros, en cambio, en la zona del deslizamiento frente a Isla Mentirosa no hay mediciones *insitu*.

1.4.5. Alturas de *Runup* medidos para el *tsunami* de PNG de 1998

1.4.5.1. Estudio de Synolakis et al. (2002) - modelo de terremoto vs. modelo de *tsunami* generado por deslizamiento de tierra submarino

Synolakis et al. (2002) demostró que la fuente generadora del *tsunami* de PNG del 17 de julio del año 1998 fue un deslizamiento de tierra submarino (*slump*) más una componente del terremoto principal. Para esto, Synolakis et al. (2002) comparó las alturas de *runup* de la

modelación de fuente de *tsunami* generada por un *slump*, y las mediciones *insitu* realizadas por el Grupo Internacional de Estudios Post-Tsunami (ITST), cuya finalidad principalmente es determinar la altura y la extensión horizontal de inundación. También Synolakis et al. (2002) se valió de los tiempos de llegadas de las ondas T para demostrar que un *slump* es el principal responsable de generar las alturas de *runup* medidas a lo largo de la costa de PNG. Para este evento, el ITST visitó la zona afectada unas 2 semanas después del desastre, mapearon las alturas de *runup* y en el caso en que no se encuentren los mareógrafos producto de la devastación generada por el *tsunami*, los expertos de este organismo internacional entrevistan a los testigos oculares y/o sobrevivientes que pudieron estimar el tiempo de llegada a la costa del tren de olas. Otra investigación más detallada fue elaborada por Davies (1998).

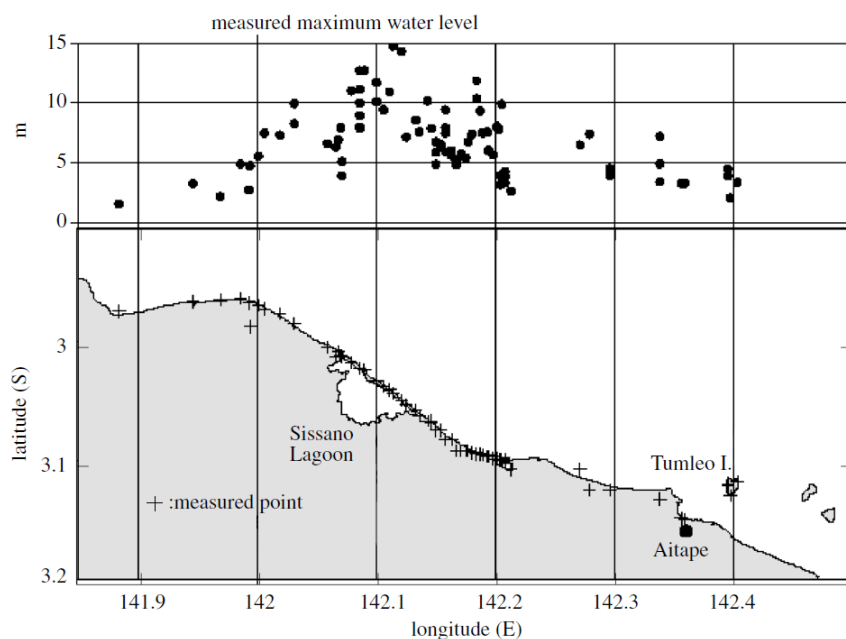


Figura 1.7: Máximas alturas de *runup* medidas por el ITST. En la parte de arriba gráfica las alturas individuales como una función de longitud a lo largo de la costa de PNG, en la gráfica de abajo muestra la localización de las mediciones individuales del *runup*. (Fuente: Synolakis et al., 2002)

En la figura 1.7 se puede ver la distribución del *runup* en las costas de PNG, cuya máxima altura alcanzó los 15 m. Las medidas de las alturas de *tsunami* fueron realizados por la *International Tsunami Survey Team* (ITST).

Las mediciones que muestra la figura 1.7 abarcan las zonas de Arnold River (longitud 142°E) hasta Tumleo Island. La zona que abarca 23 km desde Malol (longitud 142° 12'E) hasta el Estuario de Arnold River (longitud 142°E) se midieron alturas de *runup*. En la zona de Arop (aproximadamente en longitud 142° 6'E) se registraron las alturas máximas de *runup* un poco

superior a 15 m.

El desplazamiento cosísmico es inducido por un mecanismo de falla inversa de manteo superficial (*strike* 146°; *dip* 19°; *rake* 127°) de acuerdo a la solución reportada por el CMT Harvard. El momento sísmico utilizado en este artículo fue de $5,26 \times 10^{26}$ dyn-cm, cuya fuente de información fue 'QUICK CMT' Harvard solution. El deslizamiento uniforme para este modelo es de 1,06 m, la rigidez del material rocoso es de 58 GPa, con velocidad de ruptura de 3 km/s en el acimutal N85°E. La profundidad hipocentral se determinó en 17 km. El modelo de fuente sísmica como generadora de *tsunami*, en el peor escenario produce un *runup* máximo de 1,3 m en la zona de Sissano Lagoon.

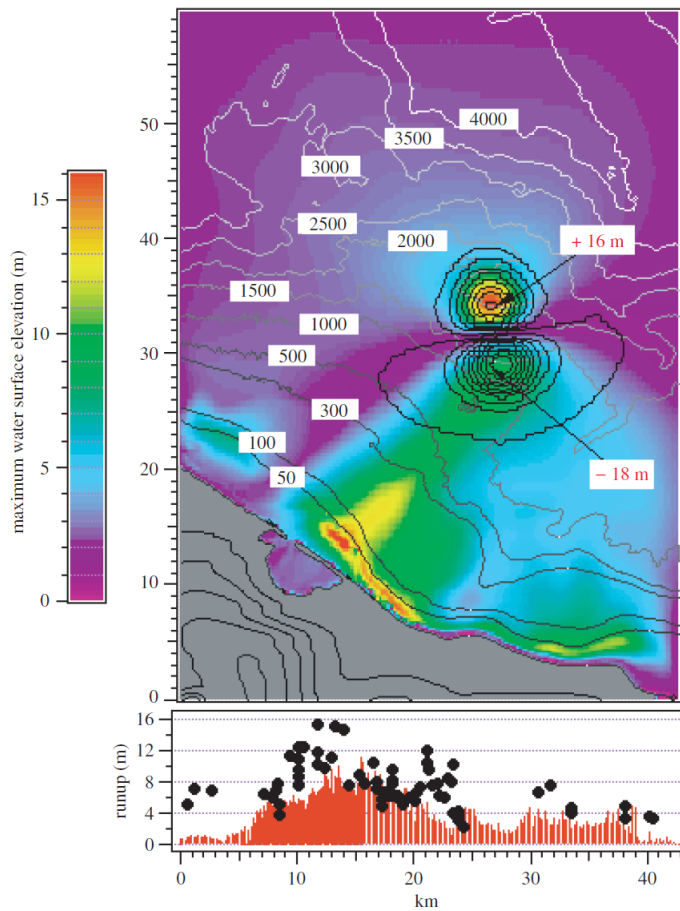


Figura 1.8: (Arriba) Formas de onda del *tsunami* calculadas para el modelo de *slump*. (Abajo) Distribución de los *runup* medidos *insitu* (puntos de color negro) y las alturas de *runup* calculados con una fuente de *tsunami* del tipo *slump* submarino (barras en color rojo). (Fuente: Synolakis et al., 2002)

En la parte de arriba de la figura 1.8, se evidencia la naturaleza dipolar de la fuente *slump* como generadora de un *tsunami*. En la modelación de *tsunami* realizada por Synolakis et al. (2002) se obtuvo un dipolo positivo de 16 m y un dipolo negativo de 18 m. Este mecanismo de *tsunami* es característico en encontrar alturas de *runup* significativas en campo cercano a lo largo de la costa, pero decae muy rápido en campo lejano. Según los autores de este estudio (Synolakis et al., 2002) la simetría del dipolo se explica por la cohesión que mantuvo el *slump* mientras se desplazaba a lo largo de la superficie de falla, la cual no se transformó en una corriente de turbidita.

(Synolakis et al., 2002) realizó una modelación usando la relación de escala de Watts (2000), considerando una profundidad del océano de 1 km, dando como resultado una relación de aspecto ancho-profundidad del océano de 4:1.

$$f(w, y, \lambda) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{3y}{w + \lambda}\right) \quad (1.1)$$

$$f(w, y, \lambda) = \frac{w}{\lambda_1 + w} \operatorname{sech}^2\left(\frac{3(y - y_0)}{w + \lambda_1}\right) \quad (1.2)$$

Donde, $\lambda_1 = t_0 \sqrt{gd} \approx 4,4$ km, t_0 corresponde a la duración del desplazamiento del *slump*, d es la profundidad del océano, $y - y_0 = w + \lambda_1$, y se mide en la dirección perpendicular a la sección transversal analizada, w es el ancho del *slump* ($w = 4$ km).

La ecuación (1.1) fue propuesta por Synolakis et al. (2002) para modelar el *slump* como un generador de *tsunami*, en cambio, la ecuación (1.2) fue propuesta por Watts et al. (1999) para modelar el *slump* como fuente del *tsunami* de PNG 1998. Watts et al. (1999) también propuso una función del tipo solitón para modelar un *slump* como un generador de *tsunami*. Por lo tanto, ambas ecuaciones – (1.1) y (1.2) – modelan el perfil transversal del *tsunami* como una función del tipo solitón.

1.4.5.2. Estudio de Matsuyama & Yeh (2003) - modelo de bloque rígido deslizante como generador de un *tsunami*

Este artículo menciona que basado en análisis de estudios de perfiles sísmicos, el centro de este deslizamiento de tierra se estimó en las coordenadas (142°16.11"E, 2°52.06"S), cuya dirección del deslizamiento fue estimada en N22°W.

Parámetros importantes que definen el movimiento del centro de masa a lo largo del plano de falla del deslizamiento son el desplazamiento (980 m), la velocidad de fase del *tsunami* ($\sqrt{gd} \approx 130$ m/s), la profundidad media del deslizamiento ($d \approx 1750$ m) y la duración del deslizamiento (50 s).

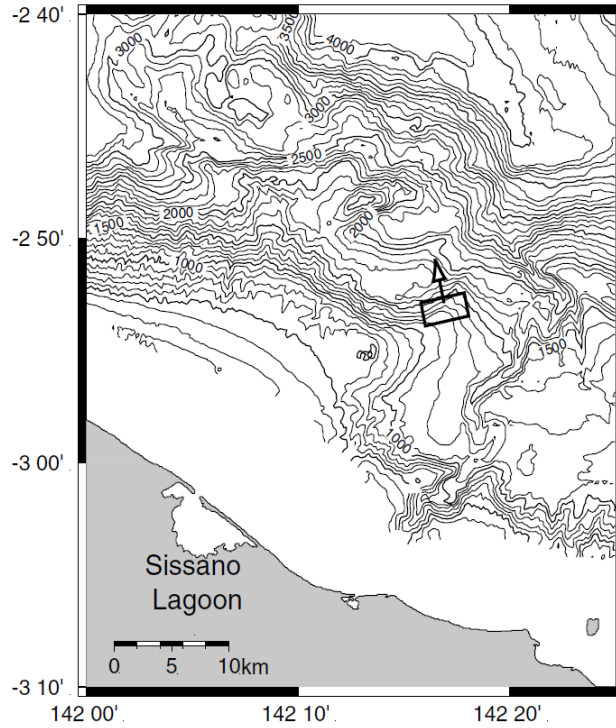


Figura 1.9: Mapa de la zona costera de Papua Nueva Guinea afectada por el *tsunami* del 17 de julio del año 1998. (Fuente: Matsuyama & Yeh, 2003)

La figura 1.9 muestra la localización y orientación del *slump* submarino propuesto por Matsuyama & Yeh (2003). Se observa que la profundidad del centro del deslizamiento de tierra submarino se ubica a una profundidad aproximada de 1750 m, sobre una pendiente de la playa cercana a los 12°. Cabe hacer notar que en la figura 1.9 la longitud está en el Este y la latitud está en la dirección Sur.

1.4.5.3. Simulación

Matsuyama & Yeh (2003) desarrolló un código numérico basado en la teoría completa de las ecuaciones de agua poco profunda no-lineal y sin fricción en el fondo oceánico incluida.

$$\partial_t \eta + \partial_x M + \partial_y N = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial_t M + \partial_x \left[\frac{M^2}{D} \right] + \partial_y \left[\frac{M N}{D} \right] + g D \partial_x \eta = 0 \quad (1.4)$$

$$\partial_t N + \partial_x \left[\frac{M N}{D} \right] + \partial_y \left[\frac{N^2}{D} \right] + g D \partial_y \eta = 0 \quad (1.5)$$

Donde, η es la elevación de la superficie del agua, M y N son los flujos volumétricos promediados en profundidad en las direcciones horizontales del plano ($x - y$), respectivamente, t corresponde al tiempo, D es la profundidad total del agua, y g es la aceleración de la gravedad.

En cuanto a la modelación del deslizamiento, se desarrolló un método numérico para reproducir las alturas de *runup* medidas en Sissano Lagoon. El código numérico está basado en la teoría de la ecuación de agua poco profunda no-lineal completa, además se ha desestimado el uso de la fricción en el fondo marino. Para la simulación se utilizaron los datos de batimetría provenientes de la Agencia japonesa de ciencias y tecnologías marinas y terrestres (*Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology - JAMSTEC*).

La figura 1.10 muestra que el dominio computacional de la modelación es de 109,8 km en dirección Este-Oeste (horizontal) y 82,8 km en la dirección Norte-Sur (vertical).

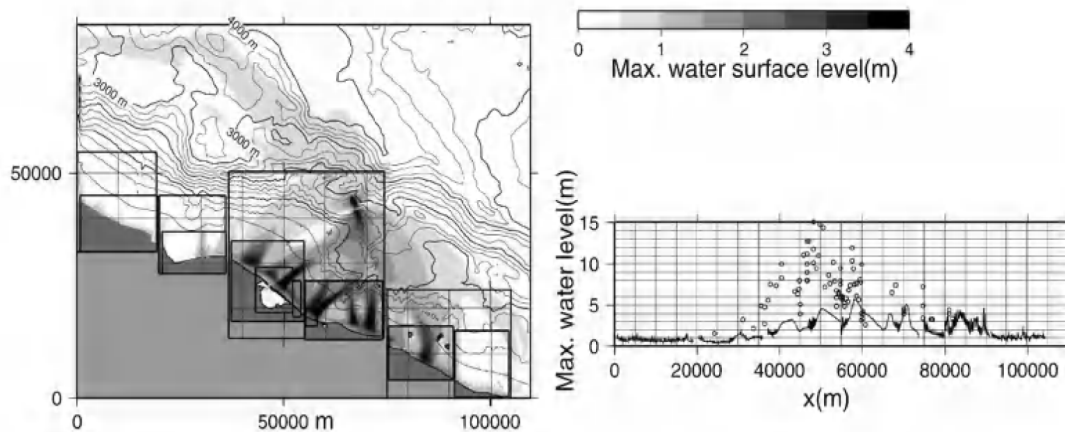


Figura 1.10: Distribución de las alturas de *runup* medidos a lo largo de Sissano Lagoon. En la parte derecha se muestra la simulación de una fuente por deslizamiento de tierra como generadora de un *tsunami* junto a los datos medidos *insitu*. (Fuente: Matsuyama & Yeh, 2003)

En la figura 1.10 las grillas tienen un tamaño que varía entre los 200 m que son las de mayor tamaño dentro de todo el dominio, otros de 66,6 m que corresponden a las grillas de tamaño intermedio y finalmente las grillas más pequeñas que tienen un tamaño de 22,2 m.

A la derecha de la figura 1.10 se observa claramente el poco ajuste que hay entre la modelación y los datos de campo, la simulación entrega valores de las alturas de *runup* son aproximadamente 1/4 de los datos medidos. Este inconveniente los autores lo explican en función de varios factores que pudieran influir en la poca exactitud de la simulación, dentro de los cuales destacan: tamaño de la perturbación inicial, pequeño tamaño de las fuentes y su localización.

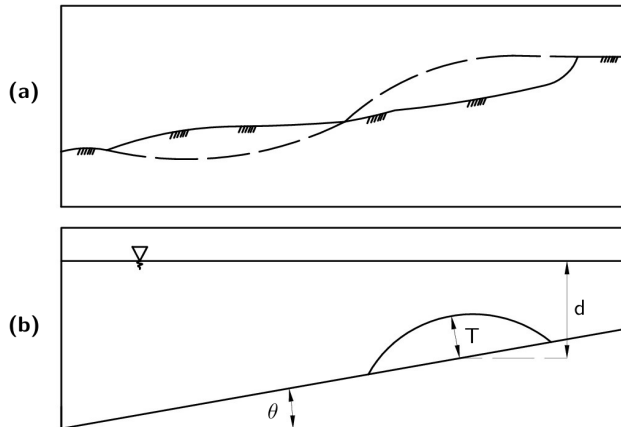


Figura 1.11: Sección transversal del *slump* de acuerdo a los perfiles de sísmica de reflexión realizados cerca de las costas de Sissano. **(a)**. Bosquejo correspondiente al trazado de la falla (*slump*) realizado por Matsuyama & Yeh (2003); **(b)**. Esquema representativo del modelo de playa inclinada y bloque deslizando sobre un movimiento del fondo oceánico con forma de semiesfera. (Fuente: Modificado desde Matsuyama & Yeh, 2003)

En la figura 1.11 se divide en 2 perfiles. En (a) el perfil transversal se visualizan 2 líneas, una de ellas es la línea segmentada que representa al perfil del fondo marino después de ocurrido el *slump*, y la línea continua corresponde al perfil antes de la falla; en (b) se muestra un modelo de cuerpo rígido deslizando sobre una pendiente inclinada constante. Para la simulación del *slump* se estimaron valores equivalentes, tales como la duración del deslizamiento (t_0), el ancho del deslizamiento (b), espesor máximo (T), subsidencia (d) y la pendiente de inclinación (θ). Los autores obtuvieron los siguientes valores que fueron los que se ajustaron mejor a los datos de campo: $t_0 = 50$ s, $b = 2000$ m, $T = 350$ m, $d = 1200$ m, $\theta = 12^\circ$.

De este estudio los autores concluyen que los tamaños de grillas más grandes (figura 1.10) no son aptos para simular la zona de Sissano Lagoon, debido a que la formación de la plataforma convexa al frente de dicha zona no puede reproducir la reflexión del *tsunami*, también minimiza la dispersión y la disipación de las ondas, esto produce alturas de *runup* muy por debajo de los valores medidos, por ejemplo se obtuvo un poco mayor de 5 metros en el caso de la figura 1.10.

1.4.5.4. Estudio de Heinrich et al. (2001) - modelo de deslizamiento viscoso como generador de un *tsunami*

Este estudio en una primera etapa se enfoca en verificar la validez de la ecuación de agua poco profunda aproximada en términos de una simulación (2D+1) en una geometría 3D, y en una segunda etapa desarrolla un modelo numérico de la ecuación de Navier-Stokes.

El fundamento teórico se basa principalmente en el modelo realizado por Jiang & LeBlond (1992) y Fine et al. (1999), asumiendo que el deslizamiento sea modelado como un fluido viscoso. La aplicación de este modelo tiene una buena aproximación para el caso de un deslizamiento submarino, tal como lo fue PNG 1998. Por otra parte, el deslizamiento de tierra modelado está sujeto bajo las fuerzas de gravedad, de fricción y a los gradientes de altura. En relación a la modelación numérica, se recurre a las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas para la dinámica del deslizamiento de tierra y también aplicados para el volumen de agua. El método numérico está basado sobre un método de captura de choque y usa el esquema tipo Godunov, extendida a una aproximación de segundo orden. Los autores trabajaron con los siguientes datos de entrada: forma elipsoidal para modelar el deslizamiento de tierra, espesor máximo de 450 m, pendiente de 15° , el deslizamiento se ubica entre los 550 y 1500 m de profundidad.

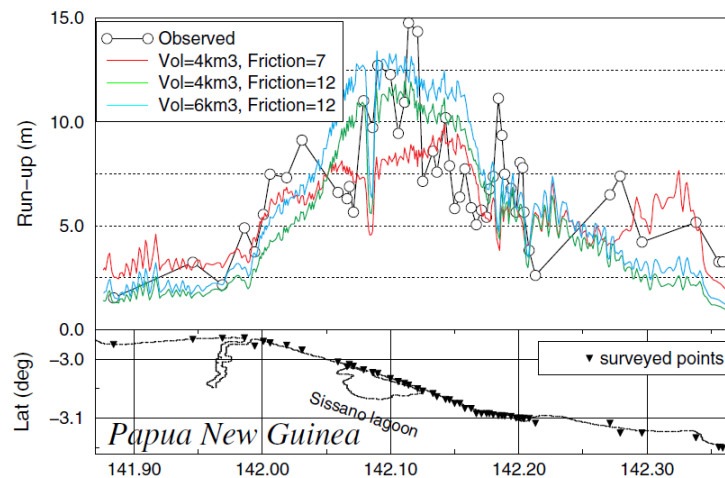


Figura 1.12: Distribución de las alturas de *runup* medidos a lo largo de Sissano Lagoon. En la parte de arriba gráfica las alturas de *runup* obtenidas a través de un modelo de deslizamiento de tierra bajo el criterio de comportamiento como un material que sigue una Ley de fricción tipo Coulomb. En la gráfica de abajo muestra la localización de las mediciones individuales del *runup*. (Fuente: Heinrich et al., 2001)

El modelo mostrado en la figura 1.12, donde se muestra cual es la influencia de la profundidad del agua y el volumen del deslizamiento de tierra en la generación del *tsunami*. El deslizamiento se modeló como una forma elipsoidal, cuya parte alta se ubica a los 800 m y la parte baja a los 550 m.

En este estudio se concluye que las alturas de *runup* medidas en las costas de Papua Nueva Guinea se pueden reproducir a través de un modelo que presente las siguientes características: volumen de 4 km^3 , localizado a 20 km de la costa, coeficiente de fricción basal de 12° , el deslizamiento se ubica entre los 50 y 1500 m de profundidad, se desplazó una distancia aproximada de 5 km, y el deslizamiento se rige bajo la ley de fricción no newtoniano.

1.4.6. Ubicación y Condiciones Geológicas del Fiordo de Aysén

Las características geológicas de la zona del Fiordo de Aysén está compuesto por el Batolito Patagónico, que está orientado sentido Norte-Sur, y data de la era Meso-Cenozoica, donde muy cerca pasa un sistema de fallas activas de rumbo conocido como la Zona de Fallas Liquiñe-Ofqui (LOFZ).

La erosión glacial que sigue la zona de fallas, fue el factor más importante en dar forma al Archipiélago Patagónico, formando así las estructuras características del fiordo de Aysén (laderas empinadas, sobre rocas y estructuras afloradas).

El principal riesgo geológico que afecta a la zona del Archipiélago Patagónico es la inestabilidad de las laderas del fiordo (remociones en masa), donde las lluvias intensas, la actividad volcánica y sísmica son los factores preponderantes (Naranjo, 1991; Naranjo, 1993; Naranjo & Stern, 2004).

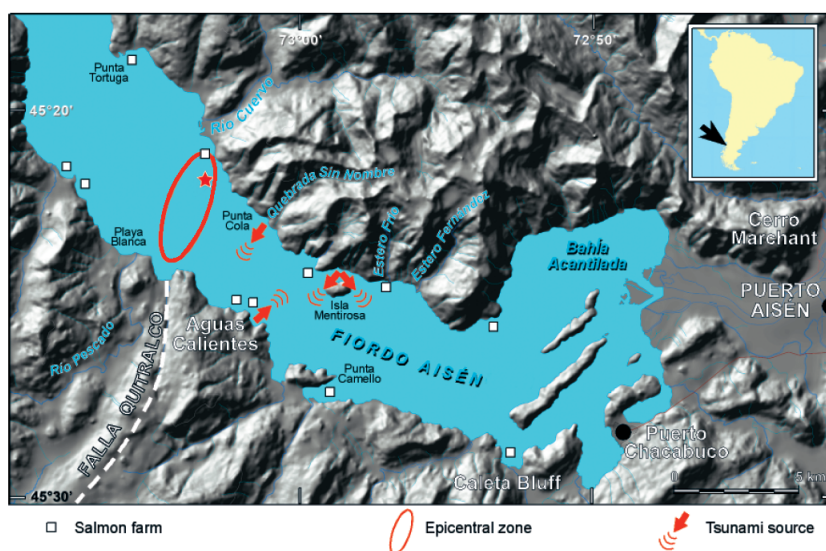


Figura 1.13: Zona del epicentro del terremoto de Aysén del 21 de Abril del año 2007 junto con las fuentes generadoras de *tsunamis* (ondas de desplazamiento). La ubicación del terremoto principal está señalizada con el símbolo de estrella de color rojo. (Fuente: Modificado desde Naranjo et al., 2009b)

En la figura 1.13 se visualizan claramente los tres principales deslizamientos generados por el terremoto de Aysén del 21 de abril de 2007. La zona del deslizamiento de Aguas Calientes las rocas imperantes corresponden a granodioritas, dioritas y tonalitas de edad Mioceno (18-6 Ma) SERNAGEOMIN (2003). La otra zona a destacar es la ladera frente a Isla Mentirosa, la cual también presenta la misma geología que tiene el sector de Aguas Calientes.

Capítulo 2

Conceptos Fundamentales

2.1. Terminología y Clasificación

El sistema de clasificación de los deslizamientos de tierra más utilizado es el elaborado por Varnes (1978) y más tarde desarrollado por Hungr et al. (2014).

La clasificación desarrollada por Varnes (1978) se basa en el tipo de movimiento y material involucrado en la remoción de masa. Sin embargo, un gran inconveniente que presenta esta clasificación es porque no provee una descripción correcta de grandes pendientes rocosas inestables. Existe una gran diversidad de sistemas de clasificaciones y definiciones, y esto refleja la gran complejidad para poder identificar los deslizamientos de tierra de grandes proporciones.

En la figura 2.1 se observa un esquema representativo de un deslizamiento de tierra rotacional con escarpes según Varnes (1978). Este esquema presenta tres partes como constituyentes de un deslizamiento de tierra, las que se describen a continuación: (1) fuente o cabeza del deslizamiento, está definida por el escarpe principal. Esta zona presenta grietas transversales; (2) cuerpo principal del deslizamiento de tierra, en esta zona se presentan fallas longitudinales, suelo o material compuesto; (3) pie del deslizamiento de tierra, este es el lugar donde se acumulan los escombros del material desplazado. Otras características que presenta esta zona son la presencia de crestas transversales, grietas radiales (a los pies del deslizamiento de tierra) y grietas transversales (al final del cuerpo principal del deslizamiento de tierra).

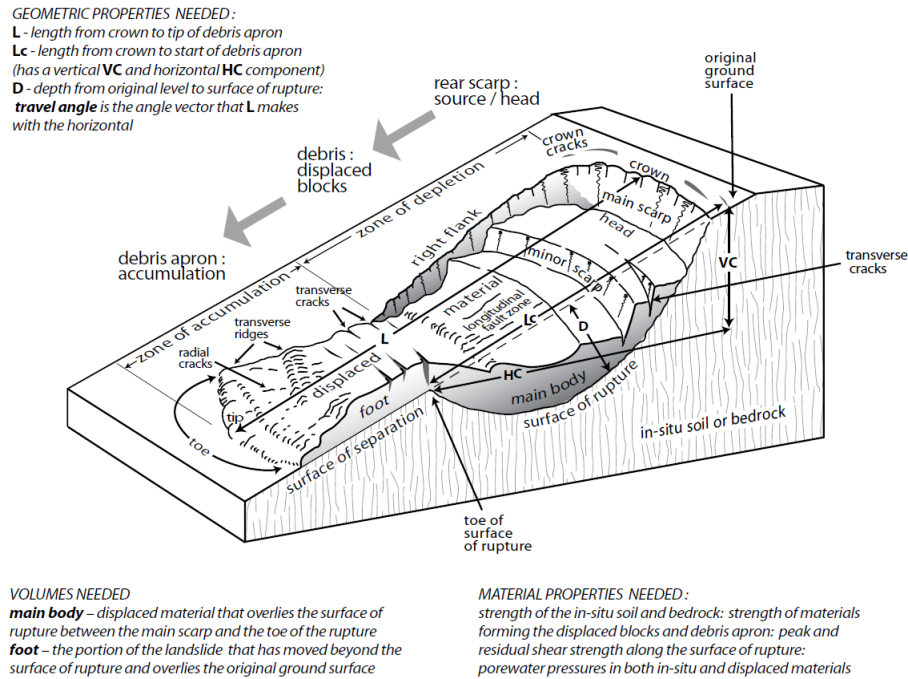


Figura 2.1: Representación esquemática de un deslizamiento de tierra con escarpes. (Fuente: Griffiths & Whitworth, 2012)

2.2. Inestabilidad de Pendientes Rocosas

Los deslizamientos de tierra sin importar su magnitud, pueden ocurrir en una gran variedad de ambientes y contextos tectónicos. Esto se puede explicar por 2 distintas razones, una de ellas son los factores controladores y la otra explicación es debido a los mecanismos gatilladores (Highland et al., 2008). Los grandes deslizamientos de tierra tienen una característica especial, ya que presentan un *runout* (corresponde a la distancia horizontal máxima de alcance del deslizamiento) excesivamente grande (cuando la razón entre la altura del deslizamiento de tierra y su longitud de desprendimiento es mucho menor a 1).

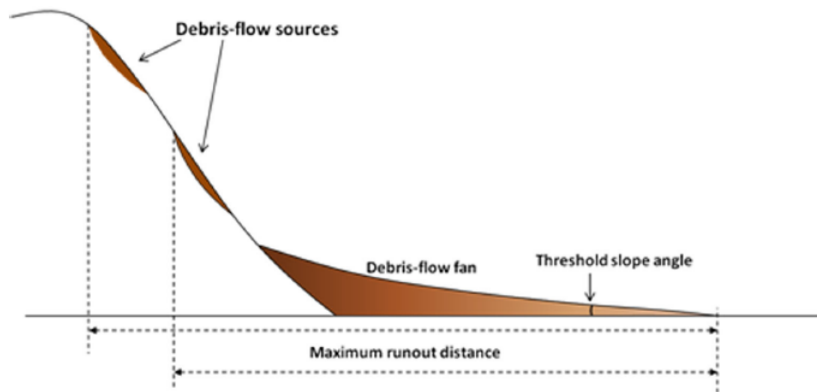


Figura 2.2: Representación esquemática de la distancia de *runout* en un deslizamiento de tierra. (Fuente: Modificado desde Kritikos & Davies, 2015)

La figura 2.2 se visualiza la distancia máxima de runout producto de un deslizamiento de tierra superficial (flujo de detritos). Esta figura muestra que la distancia de *runout* es independiente de la altura de caída de un deslizamiento (superficial o profundo).

La razón por la cual para ciertos tipos de deslizamientos de tierra pueden superar fácilmente los kilómetros de desprendimiento, lo que es todavía abierto a debate. Otro factor importante a destacar que genera inestabilidad en laderas de ambientes rocosos es la amplificación topográfica. Este fenómeno consiste en la reflexión y difracción de las ondas sísmicas en la superficie libre de las laderas. Las ondas sísmicas entran por la base de la montaña, estos se dirigen a la cima producto de las reflexiones y las difracciones antes mencionadas, dando como resultado una amplificación de las aceleraciones en los altos topográficos (Serey, 2011).

2.3. Mecanismos

Un agente desencadenante o gatillante es un factor externo que genera una respuesta traducida en una remoción en masa mediante el rápido incremento de esfuerzos o la reducción de la resistencia del material de una ladera (Wieczorek, 1996).

Entre los principales agentes gatillantes se encuentran las lluvias intensas, los sismos, y otros, tales como: erupciones volcánicas, derretimiento de nieve, cambios en niveles de esfuerzo, etc.

Las lluvias actúan aumentando los niveles de saturación del suelo o las fracturas de una roca, aumentando temporalmente la presión de fluidos y las fuerzas erosivas de los flujos de agua

superficiales (escorrentías) y subsuperficiales. La disminución del esfuerzo efectivo produce una baja en la resistencia de los materiales (suelo o facturas de rocas) y por lo tanto la estabilidad de las laderas.

Los movimientos sísmicos actúan como agente de cambio temporal en el campo de esfuerzo de la ladera, afectando los esfuerzos normales y de corte, disminuyendo la estabilidad de la ladera.

2.3.1. Ambientes, materiales y características de las avalanchas de rocas de largo *runout*

Cuando se habla de avalanchas que generan grandes distancias de *runout*, cabe mencionar que estos se pueden generar en variados ambientes e incluso en planetas distintos a la Tierra. Con respecto al planeta Tierra, las avalanchas de rocas se pueden generar en ambientes carentes y abundantes de agua (subaéreo y submarino, respectivamente), también a bajas temperaturas (ambiente supraglacial, es decir, sobre la superficie de los glaciares). Tal como se mencionó antes, otro tipo de escenario donde se producen las avalanchas de rocas, es en planetas distintos a la Tierra, por ejemplo, en Marte (ambiente subaéreo). Por lo general las avalanchas de rocas se producen bajo condiciones atmosféricas similares a las acontecidas en la Tierra, no obstante, en la Luna también se han registrado este tipo de fenómenos, lo que hace dar cuenta que para que se produzcan, la aceleración de gravedad no es imperativo para producir este tipo de remoción en masa.

2.3.2. Generación de largos *runout* en avalanchas de rocas

En la literatura se han propuesto variados mecanismos generadores de largas distancias de *runout* para avalanchas de rocas, tales como: presión de poros gaseosos, deslizamiento basal sobre roca fundida o disociada, fluidización de energía sísmica, fluidización por extrusión de aire, etc. Sin embargo, según Davies & McSaveney (2012) el mecanismo más significativo es la fragmentación de rocas dinámicas, ya que parece ser la mejor explicación al fenómeno de las grandes distancias de *runout* para las avalanchas de rocas.

2.4. Características de las Remociones en Masa y su Ambiente Geológico: Clasificación (Categorías)

2.4.1. Caídas

Corresponden a desprendimientos de suelo o rocas o también de ambos materiales, desde una pendiente muy empinada ($>40^\circ$) a lo largo de la superficie sin que el desplazamiento se haya producido por esfuerzo de corte (ver figura 2.3). El movimiento es principalmente por caída libre, rodamiento y rebote (Highland et al., 2008).

Este tipo de remoción en masa generalmente son deslizamientos inducidos por terremotos, causando fatalidades y pérdidas económicas.

Aunque ocurren en casi todo tipo de rocas, la mayoría se genera en uniones cercanas o rocas débilmente cementadas. Las rocas débilmente cementadas incluyen variados tipos de rocas, tales como: volcánicas, sedimentarias y metamórficas, tales como: conglomerado, pumita, toba, esquisto, limolita y arenisca. Los cantos se generan en ambientes tales como en morrenas y suelos residuales.

Se generan en ambientes topográficos tales como: espolones estrechos, crestas, salientes y cortes hechos por el hombre. Muchas caídas de rocas presentan acumulación de *talus* y fueron inestables bajo condiciones no-sísmicas (Keefer, 1984).

La velocidad del movimiento va desde rápido (>50 mm/s) hasta excesivamente rápido (>5000 mm/s).

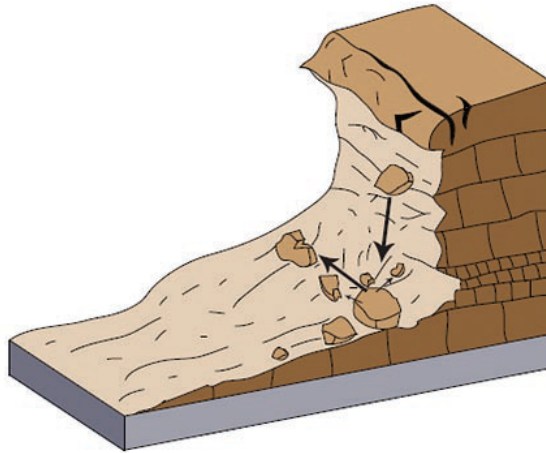


Figura 2.3: Representación esquemática de una caída de roca. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)

2.4.2. Deslizamiento de roca-tierra

Un deslizamiento es un movimiento de pendiente abajo de una masa rocosa o de suelo, generalmente ocurren en superficies de falla o en áreas relativamente delgadas que presentan esfuerzos de corte intensos. El volumen implicado en la falla suele ampliarse a partir del punto de inicio de la ruptura.

Los deslizamientos de tierra rotacionales presentan una zona de falla curvada hacia adelante (con forma de cuchara), y el movimiento del deslizamiento es aproximadamente rotacional con respecto a un eje paralelo al contorno de la pendiente (ver figura 2.4). La cabeza del material desplazado presenta un movimiento casi vertical hacia abajo, y la superficie superior del material desplazado puede inclinarse hacia atrás hacia el escarpe (Highland et al., 2008). Este tipo de deslizamiento también es comúnmente conocido como *Slump*.

El material rocoso o el suelo donde se presentan este tipo de deslizamientos es el mismo que el de una caída de roca, aunque ocasionalmente el material rocoso suele ser más antiguo en un deslizamiento rotacional que en una caída de rocas. Se generan en pendientes empinadas con un rango entre los 20 a 35°. Para el caso de los suelos, la relación entre alto y largo comprende un rango de valores que va desde 0,1 a 0,3.

Las velocidades de movimiento para este tipo de deslizamiento van desde 0,3 m/años (extremadamente lento) a 1,5 m/mes (moderadamente rápido).

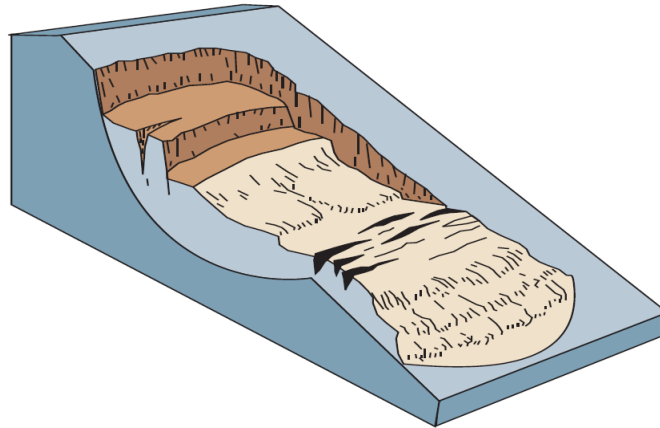


Figura 2.4: Representación esquemática de un deslizamiento rotacional. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)

2.4.3. Avalanchas de rocas

Son excesivamente rápidos, masivos, movimiento parecido a un flujo de roca fragmentada, desde un deslizamiento de grandes rocas hasta una caída de roca (Hungry et al., 2014).

Heim (1932) instauró el término *sturzstrom* para el describir el fenómeno del deslizamiento de grandes rocas desintegrándose rápidamente durante el movimiento pendiente abajo, que viaja como un flujo extremadamente rápido de roca fragmentada. Otra característica de este tipo de remoción en masa, es la proporcionalidad entre el volumen y la movilidad de la masa desplazada, ya que a mayor volumen del evento mayor es su movilidad.

La velocidad de viaje es extremadamente rápido, con un valor superior a 3 m/s. El volumen de la masa desplazada comprende un valor mínimo de 500.000 m³.

2.4.4. Flujo de detritos

Este tipo de remoción en masa considera rocas y/o suelos poco consolidados y en algunas oportunidades incluye material orgánico mezclado, que junto con agua forma lodo y fluye pendiente abajo, comportándose como una masa viscosa (ver figura 2.5). Se desplaza con una velocidad extremadamente rápida (56 km/h).

Los flujos de detritos son comúnmente gatillados por flujo de agua superficial intensa, debido a una precipitación fuerte o un deshielo rápido, que eroda y moviliza el suelo o rocas poco

consolidadas sobre pendientes empinadas. Los flujos de detritos son también movilizados a partir de otros tipos de deslizamientos de tierra que ocurren en pendientes empinadas, están casi saturadas, y consisten de una gran proporción de material tamaño arena y limo (Highland et al., 2008).

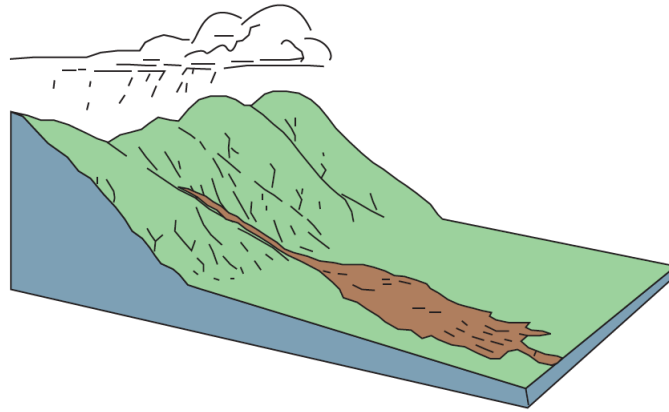


Figura 2.5: Representación esquemática de un flujo de detritos. (Fuente: Modificado desde Cruden & Varnes, 1996)

2.4.5. Deslizamiento de tierra complejos

Este tipo de remoción en masa se compone de a lo menos 2 tipos básicos de deslizamientos, por ejemplo se puede dar el caso de un deslizamiento de rocas y una avalancha de rocas, las cuales se movilizan como una masa que se desplaza a una gran velocidad. En el caso en que los desplazamientos implicados sean dos, pueden ocurrir ambos simultáneamente o bien a diferentes tiempos del inicio de la falla de la pendiente. Un esquema de estos fenómenos se muestra en la figura 2.6.

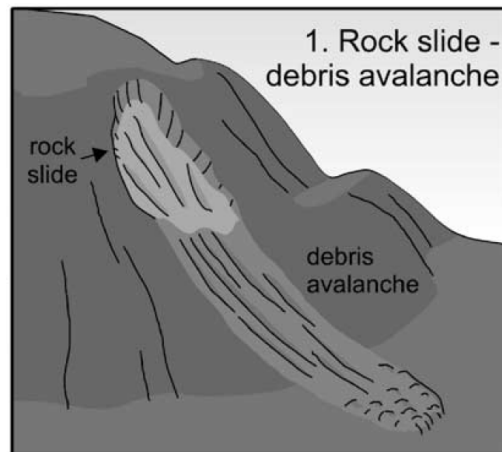


Figura 2.6: Representación esquemática de un deslizamiento de rocas y una avalancha de escombros. (Fuente: Geertsema et al., 2006)

2.5. *Tsunamis* Provocados por Deslizamientos de Tierra

La fuente de *tsunamis* que más se produce después de los sismotectónicos son los provocados por remociones en masa. Si se compara el alcance que tienen las alturas de *runup* generadas por un *tsunami* generado por un terremoto con una fuente tipo deslizamiento de tierra o roca (remoción en masa), es notorio que en el primer caso se habla de campo lejano y campo cercano, en cambio para el segundo caso se habla sólo de un evento que abarca el campo cercano. Que el *tsunami* generado por un deslizamiento de tierra se propague sólo en campo cercano se debe a que es afectada por la frecuencia de dispersión (Heinrich et al., 2001).

El *tsunami* generado por deslizamiento de tierra más grande en relación al tamaño de la fuente, específicamente al volumen, corresponde al deslizamiento de Storegga. Este evento corresponde a un *tsunami* submarino, su data se estimó en el período cuaternario, en una región que presentaba una elevada pendiente continental cerca de la costa de Noruega (Jansen et al., 1987; Harbitz, 1992). Según Løvholt et al. (2005) las dimensiones del deslizamiento son de 85 km de ancho, 225 km de largo y 114 m de espesor, con un volumen estimado de 2400 km³. El estudio de Harbitz (1992) realizó varias modelaciones para este evento, y asumiendo una velocidad del deslizamiento de 50 m/s, las alturas de *runup* generadas en la costa Este de Islandia son de 21 m, 12 m a lo largo de la costa este de Groenlandia y de 13,3 a 6,9 m a lo largo de la costa Norte y Este de Escocia respectivamente.

Según Levin et al. (2009) sugieren que las investigaciones que estudian los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra concluyen que este tipo de fenómenos tienen una cierta tasa de recurrencia en zonas bien específicas, esto principalmente por razones geológicas, geomorfológicas,

geotécnicas, etc. Por ejemplo, estudios de campo realizados en la zona de Lituya Bay (Alaska) señalaron que antes del *megatsunami* [corresponde a un *tsunami* cuyo *runup* es superior a 100 m] de Lituya Bay ocurrido en el año 1958 [*runup* superior a 524 m], el cual generó ondas de desplazamiento que fueron gatilladas por deslizamientos de roca producto de la inestabilidad de la ladera, este mecanismo también se ha repetido en el pasado, tanto como en el año 1853-1854 [*runup* de 120 m], en 1874 [*runup* de 24 m], en 1899 [*runup* de 60 m] y finalmente en el año 1936 [*runup* de 150 m] (Miller, 1960). Otro ejemplo claro de recurrencia en *tsunamis* provocados por remociones en masa es la zona del Fiordo de Aysén, ya que antes del terremoto del 21 de abril de 2007 se gatilló un *tsunami*, 80 años antes (21 de noviembre del año 1927) se produjo un *tsunami* con semejantes características (Serey, 2011).

Si se comparan los órdenes de magnitud de la deformación vertical entre un *tsunami* provocado por un terremoto y uno generado por un deslizamiento de tierra resultan ser mucho mayores para el este último, por ejemplo: la deformación vertical del fondo oceánico para un terremoto habitualmente es de 1-10 metros, en cambio para el caso de un deslizamiento de tierra este depende de cuanto sea la distancia desplazada y la masa involucrada en el deslizamiento, pero por lo general rondan los 100 m. En caso contrario pasa con la extensión lateral, ya que para un *tsunami* generado por un terremoto puede alcanzar hasta los 1000 km (Caso del sismo de Chile 1960), en cambio para un deslizamiento de tierra los valores llegan a ser de unos pocos kilómetros. La gran diferencia entre estas magnitudes implica que los *tsunamis* generados por terremotos tienen un periodo más largo y que las distancias de viaje son mayores a los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra. No obstante, tal como se pudo ver en el párrafo de más arriba, los *runup* de los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra son mucho mayores que los terremotos tsunamigénicos, al igual que los *tsunamis* por deslizamientos de tierra son mucho más focalizados que uno generado por sismo.

El mecanismo de generación de onda de este tipo de *tsunamis* depende de la posición inicial de caída del cuerpo deslizante en relación a la superficie del agua, y se pueden distinguir 3 casos; (1) deslizamiento subaéreo, es cuando la ubicación de la masa en movimiento está sobre el nivel del agua; (2) deslizamiento sub-sumergido, cuando el cuerpo se encuentra parcialmente sumergido en el agua; (3) deslizamiento sumergido, cuando el cuerpo deslizante está totalmente bajo el nivel del agua.

2.5.1. *Tsunami* por deslizamientos de tierra subaéreo

Las remociones en masa submarinas son ineficientes generadores de *tsunamis* en comparación a un deslizamiento subaéreo, ya que éste último es capaz de perturbar fácilmente la superficie del mar y desplazar una gran cantidad de volumen de agua, todo esto a una velocidad relativamente alta (Fine et al., 2003).

Las ondas de desplazamiento corresponden a las ondas que son gatilladas por la caída de un cuerpo sólido o a una avalancha de hielo (este último se considera principalmente al colapso o caída de un glaciar) sobre un cuerpo de agua (fiordos o lagos de montañas), también los desprendimientos de rocas pueden ser un agente importante de ondas de desplazamiento. En otras palabras, las ondas de desplazamiento corresponden a los movimientos de masas subáreas que generan ondas de *tsunami*. Cabe mencionar la diferencia que hay entre las ondas de desplazamiento y las ondas de *tsunami*, en el primer caso, corresponden a los deslizamientos subaéreos como generadores de *tsunamis*; en el segundo caso corresponde al *tsunami* que es generado por deslizamientos de tierra submarinos, donde el deslizamiento puede estar completamente o parcialmente bajo el mar.

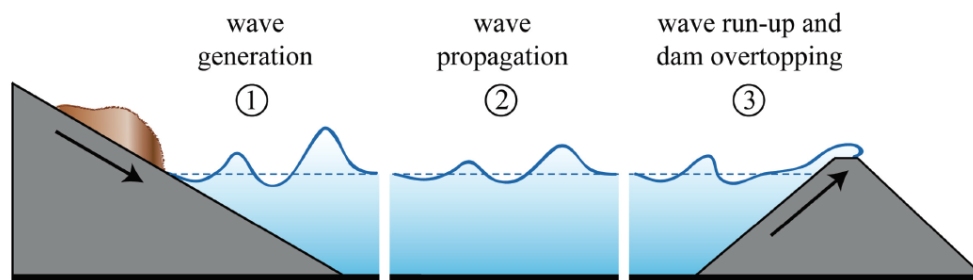


Figura 2.7: Representación esquemática donde se muestran las tres fases de las ondas de desplazamiento. (Fuente: Heller et al., 2009)

La figura (2.7) muestra las 3 fases de las ondas de desplazamientos generadas en un reservorio o embalse. Una característica importante a destacar en relación a la amplitud de la onda inicial de las ondas de desplazamiento gatilladas por un deslizamiento de tierra subaéreo, es que puede superar fácilmente la decena e incluso pueden alcanzar las centenas de metros, en contraste a las ondas generadas por un deslizamiento de tierra submarino que en general alcanza unos pocos metros de altura (Hermanns et al., 2013).

Fine et al. (2003) describe la evolución de la onda generada por un deslizamiento de tierra de la siguiente manera: el bloque deslizante en aguas más profundas forma la cresta de la onda, la cual se propaga adelante del movimiento del bloque deslizante con un valle que sigue a la cresta de la onda. El deslizamiento subaéreo cuando ingresa al agua, aporta un volumen adicional, el cual es desplazado por la superficie del agua. Por lo tanto, la cresta de la onda inicial es suficientemente más grande que el valle que lo antecede.

El mecanismo de generación de ondas de desplazamiento descrito según Liu et al. (2005) es el siguiente: el cuerpo deslizante entra al cuerpo de agua, empujando la onda generada en dirección afuera de la costa (hacia el mar). Esta onda comprende una onda principal positiva que se propaga en dirección radial. Cuando el cuerpo deslizante se sumerge totalmente, la superficie del agua que está arriba de él es inicialmente deprimida debido a la baja presión en la zona débil

y grandes gradientes en la superficie libre son creadas en la dirección a lo largo de la costa. Enseguida se generan fuertes flujos laterales que convergen al centroide del bloque deslizante. Los flujos de la superficie libre convergentes colisionan y rebotan a lo largo del centroide, generando una gran onda positiva radiando lejos de la fuente del deslizamiento. La onda que rebota es la contribuyente clave para el *runup* máximo y para la onda principal más grande que se mueve en dirección costa afuera. En este mismo estudio se menciona que la profundidad máxima para que un deslizamiento de tierra o un bloque deslizante sea un mecanismo eficiente de generación de ondas de *tsunami*, es si la sumergencia del deslizamiento ocurre a una profundidad menor que 3 veces la altura del deslizamiento. Por lo tanto, el deslizamiento de tierra será un mejor generador de *tsunami* si es superficial y más aún si es subaéreo.

A continuación se presenta la tabla 2.1, que resume las ondas de desplazamiento más importantes generadas en los últimos tres siglos.

Nombre del deslizamiento	País o lugar	Año	Volumen [Mm ³]	Runup [m]	Número de lugares	Referencias
Skafjellet I	Møre og Romsdal	1731	6	75	1	Jørstad (1968), Furseth (2006)
Skafjellet II	Møre og Romsdal	1938	0,4	3	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Strandafonna	Møre og Romsdal	1867	> 0,01	2-5	2	Furseth (2006), NVE (2014)
Tafjord	Møre og Romsdal	1934	2,7	1-62,3	26	Jørstad (1968), Furseth (2006)
Finnlifjellet	Nordland	1977	> 0,01	1	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Hildringen	Nordland	1979	0,005	2	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Hildringsflogan	Nordland	1979	> 0,01	2,5	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Kringlut	Oppland	1997	0,035	5,3	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Bjørnhammer	Rogaland	1931	> 0,01	5-20	2	Furseth (2006), NVE (2014)
Hyllestadfjorden	Sogn og Fjordane	1998	0,025	6	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Katlenova	Sogn og Fjordane	1998	0,025	6	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Kjoshammaren	Sogn og Fjordane	1925	> 0,01	1,5	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Lifjellet	Sogn og Fjordane	1992	> 0,01	4	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Loen I	Sogn og Fjordane	1905	0,35	2,9-40,5	9	-
Loen II	Sogn og Fjordane	1905	0,07	15	1	Jørstad (1968)
Loen III	Sogn og Fjordane	1936	1	0-62	53	Grimstad & Nesdal (1991)
Loen IV	Sogn og Fjordane	1936	0,1	40	1	Furseth (2006)
Loen VI	Sogn og Fjordane	1950	1	8-15	2	-
Steigeberget	Sogn og Fjordane	1948	0,06	4-11	2	Furseth (2006), NVE (2014)
Årdalstangen	Sogn og Fjordane	1983	0,2	5-7	2	Furseth (2006), NVE (2014)
Håøya	Telemark	1989	> 0,01	1,5	1	Furseth (2006), NVE (2014)
Chehalis Lake	Canada	2007	1,5	1,6-37,8	111	Roberts et al. (2013)
Isla Mentirosa	Chile	2007	8	3-50	25	Scheele et al. (2013)
Punta Cola	Chile	2007	14	2-15	26	Scheele et al. (2013)
Wu Gorge	China	2008	0,38	1,1-13,1	10	Huang et al. (2012)
Scilla	Italia	1783	5,4	0,7-16	14	Mazzanti & Bozzano (2011)
Aratozawa	Japan	2008	1,5	3,2-8,7	33	Miyagi et al. (2011)
Lituya Bay	USA	1958	30,6	4,6-524,3	36	Miller (1960)

Tabla 2.1: Base de datos de los *tsunami* gatillados por deslizamientos de tierra según Roberts et al. (2014). (Fuente: Tabla obtenida de Oppikofer et al. 2016)

La tabla (2.1) muestra las principales ondas de desplazamientos registrados en la historia reciente, la mayoría de ellos se registraron en los fiordos de Noruega. Sin embargo, los más impresionantes en cuanto a cantidad de volumen implicados en los deslizamientos de tierra son los deslizamientos frente a Isla Mentirosa (Aysén, Chile), Punta Cola (Aysén, Chile) y Lituya Bay

(Alaska, Estados Unidos).

La distribución de estos eventos, es mayoritariamente cercano a los 45°N y 45°S (por ejemplo, Noruega, al Oeste de Canadá y la Patagonia chilena), debido a que ocurren más típicamente los deslizamientos, caídas y avalanchas de rocas. La explicación del porqué en estos lugares se genera la mayor cantidad de deslizamientos como generadores de ondas de desplazamientos, es porque en estas configuraciones son recurrente las glaciaciones del Pleistoceno, las cuales han generado pendientes de rocas glaciales sobreempinadas que no han alcanzado el equilibrio. Principalmente en las latitudes menores a 45° estos eventos están asociados a los colapsos de flancos y grandes avalanchas de escombros en volcanes activos o durmientes o con fallas de acantilados sobre bancos de ríos que consisten de sedimentos no consolidados o de litificación pobre, o de rocas unidas fuertemente. Los pocos eventos no ligados a volcanismo, son debidos probablemente a la carencia de la precondition glacial de pendientes de fallas (Roberts et al., 2014).

El volumen aparente de un deslizamiento de tierra subaéreo es mucho menor que el de un deslizamiento de tierra submarino, y también es inversamente proporcional al ángulo de la pendiente de la ladera, ya que mientras más grande es el ángulo de la ladera, menor es el volumen del deslizamiento (Heller et al., 2009). Para el caso de un deslizamiento de tierra submarino pueden llegar a alcanzar los 5000 Mm³ de volumen desplazado, como lo fue el caso de PNG en 1998; en cambio para el caso de un deslizamiento de tierra subaéreo difícilmente superan los 30 Mm³, verbigracia: Lituya Bay en el año 1958.

2.5.1.1. Caso Aysén 2007: Deslizamiento de Tierra Subaéreo como Gatillante de una Onda de Desplazamiento

2.5.1.1.1. Deslizamiento de roca-suelo frente a Isla Mentirosa El terremoto del 21 de abril del 2007 generó 538 remociones en masa, de los cuales pueden ser desglosados de la siguiente manera: 7 eventos de flujos de detritos, 34 deslizamientos de roca y avalanchas, 80 caídas de roca, 135 deslizamientos de suelo y 282 deslizamientos de roca-suelo (Serey, 2011). Dentro de los más importantes se pueden mencionar los ocurridos en Punta Cola, Isla Mentirosa, Aguas Calientes y Quebrada sin nombre. No obstante, este trabajo de investigación se enfocará en estudiar el *runup* generado en la zona al frente de Isla Mentirosa y Aguas Calientes.

2.5.1.1.2. Descripción del deslizamiento de tierra gatillado frente a Isla Mentirosa Según Froude (2016), el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa consta de 4 escarpes (ver figura 2.8), donde el escarpe denominado como **A** se formó a partir de 2 fallas de cuñas menores, que se depositó a los pies de la montaña como un cono de escombros. El escarpe llamado **B** indica una falla masiva de la roca, que comenzó a partir de una falla en forma de cuña, se movilizó a una gran velocidad, pendiente abajo y desintegrándose antes de llegar al pie de la colina. Este escarpe contiene grandes cantidades de detritos. El escarpe **C** presenta una geometría compleja, las

investigaciones de campo sugieren que fue generado a partir de dos cuñas de rocas. El escarpe **D** fue generado a partir de una serie de falla de bloques, la roca en esta falla es altamente fracturada, la cual presenta venas minerales, que son la evidencia de cómo ha fallado. El movimiento de los escarpes **B** y **C** son similares, debido a la geometría de la ladera.

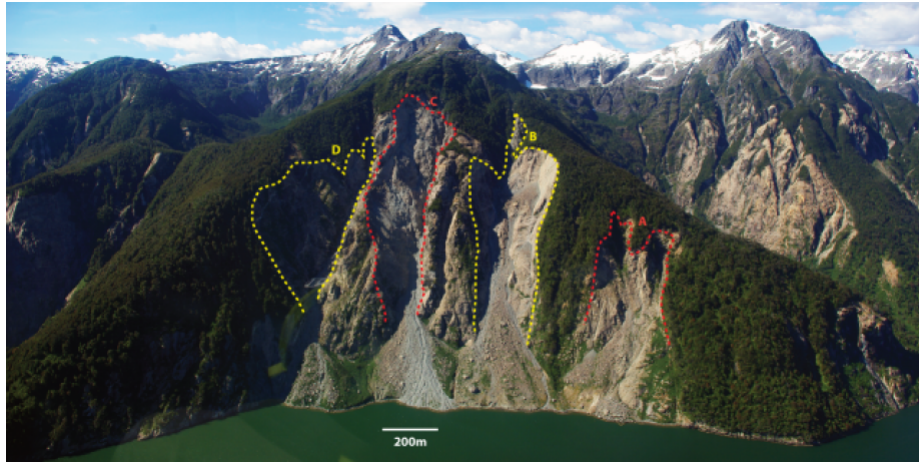


Figura 2.8: El deslizamiento complejo frente a Isla Mentirosa se compone de 4 deslizamientos de suelo-roca (designadas como A, B, C y D). Las zonas coloreadas de amarillo y rojo corresponden a los 4 escarpes generados por el terremoto de Aysén del 2007 (Fuente: Froude, 2016).

2.5.2. Caso PNG 1998: *Slump* Submarino como Gatillante de un *Tsunami*

El día 17 de julio del año 1998 a las 08:49 GMT (18:49 hora local) azotó las costas de Papua Nueva Guinea un terremoto de magnitud M_w 7,1 cuyo epicentro fue determinado en $2,961^\circ S$; $141,926^\circ E$, y el hipocentro fue localizado a 10 km de profundidad según el Centro Nacional de Información Sísmica (*National Earthquake Information Center - NEIC*), a lo largo de la línea de costa, inmediatamente al oeste de la zona de Serai (Synolakis et al., 2002). El mecanismo focal del terremoto principal calculado por *Centroid Moment Tensor Harvard* (CMT Harvard) puede ser interpretado de 2 maneras, bien como una subducción oblicua de bajo ángulo del segmento Carolina de la placa del Pacífico sobre Nueva Guinea con un ángulo de manteo (*dip*) de 19° a lo largo del plano de rumbo $N146^\circ E$, o como una falla reversa de alto ángulo con *dip* de 75° a lo largo del plano de rumbo $N287^\circ E$ (Synolakis et al., 2002).

Con respecto al *tsunami*, este evento corresponde al *tsunami* más devastador y mortífero del siglo XX, en el cual se contabilizaron 2.200 fallecidos. El *tsunami* abarcó una extensión aproximada de 20 km de costa, destruyó 3 villas aledañas (Heinrich et al., 2001).

Este evento es característico por 3 razones:

1. Amplitudes de ondas inesperadamente grandes. El *tsunami* generado por una fuente sísmica no es capaz de explicar las alturas de *runup* encontradas a lo largo de Sissano Lagoon, para esto es necesario incrementar el desplazamiento uniforme de la falla del terremoto en un factor de 10 (Heinrich et al., 2000), lo cual es inconsistente con el momento sísmico ($M_0 = 3,7 \times 10^{26}$ dyn-cm).
2. Desfase de tiempo en el arribo a la costa. Un *tsunami* generado por una fuente sísmica generaría un tren de olas cuyo arribo a las costas más cercanas (Sissano Lagoon) se estimó en 13 minutos después de ocurrido el sismo principal, sin embargo, el arribo del primer tren de ondas fue 20 minutos después del sismo principal, lo cual se explicaría sólo a través de una fuente tipo *slump* (Heinrich et al., 2001).
3. Concentración de alturas de *runup* muy elevados en una zona acotada. En la zona que abarca Sissano Lagoon, las alturas de *runup* son superiores a 5 m con un valor máximo de 15 m, lo cual no se ajusta a un terremoto tsunamigénico, ya que según la modelación realizada por Synolakis et al. (2002) el desplazamiento (*slip*) máximo en el área de ruptura del terremoto principal es de 0,4 m y dicha modelación entregó un valor de 1,3 m para el *tsunami* generado sólo considerando a una fuente sísmica.

En relación a la geología del lugar, la zona costera de Papua Nueva Guinea corresponde a un ambiente sedimentario, cuyo principal tipo de suelo es la arcilla. En los estudios de Tappin et al. (2001, 2002) identificaron la presencia de arcilla rígida desde núcleos tomados a lo largo del plano de falla del *slump* (Watts et al., 2005).

Heinrich et al. (2001) describe el mecanismo de generación de las ondas de *tsunami* para un deslizamiento submarino de la siguiente manera: en la parte delantera del deslizamiento, la cresta (primer dipolo) de la onda generada en la superficie del agua se mueve costa afuera a la velocidad de fase del *tsunami* \sqrt{gd} , donde d corresponde a la profundidad del océano; por otra parte, el valle de la onda generada por el deslizamiento (el segundo dipolo) se mueve a la velocidad del deslizamiento de tierra con dirección hacia la costa.

Otra manera se explicar esto es describiendo el fenómeno con la siguiente descripción: la onda positiva del dipolo se mueve costa afuera en la dirección del movimiento del deslizamiento de tierra submarino, que representa la mayoría de la energía del *tsunami*. Con respecto al deslizamiento, este genera una presión negativa succionando el agua que se ubica sobre éste, provocando la aparición de un valle de gran amplitud, la cual se divide en 2 ondas, las cuales una se moviliza en dirección hacia la costa y la otra se dirige costa afuera.

En la actualidad se discute si el Hidrato de gas (Sólido, similares al hielo, compuestos de jaulas rígidas de moléculas de agua que encierran moléculas de gas, principalmente metano) es un mecanismo que gatilla un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra submarino (Parlaktuna, 2003).

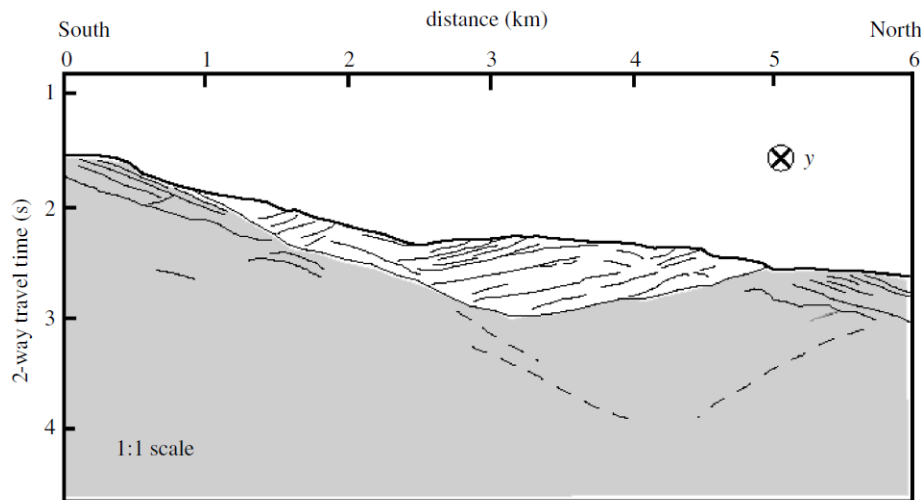


Figura 2.9: Esquema interpretativo del *slump* de PNG, obtenidos desde uno de los perfiles del estudio de sismica de reflexión. El dibujo se encuentra en escala 1:1. (Fuente: Synolakis et al., 2002)

En la figura 2.9 se observa en color blanco el *slump* producido por el terremoto de Papua Nueva Guinea del 17 de julio de 1998, y de color gris se presenta la roca del basamento.

En el estudio realizado por Synolakis et al. (2002) señala que los datos que permiten inferir la ubicación y las dimensiones del *slump*, fueron adquiridos mediante perfiles sísmicos de alta resolución. El estudio de sismica de reflexión se realizó en septiembre de 1999, a través de un barco científico comandado por el ex-investigador del Observatorio de la Tierra de Lamont-Doherty Maurice Ewing. Se sondearon las áreas comprendidas entre el cuerpo del deslizamiento de tierra submarino (*slump*) y el anfiteatro (aproximadamente en las coordenadas, 2,85° latitud Norte y entre 142,25–142,3° longitud Este). Este barco científico estaba equipado con un cable (*streamer*), la longitud total del *streamer* es de 1200 m. Para ver más detalles sobre el estudio de reflexión sísmica que estudió este deslizamiento de tierra, se recomienda leer el artículo de Synolakis et al. (2002).

Variadas investigaciones (Heinrich et al., 2001; Synolakis et al., 2002) sugieren que la fuente de este *tsunami* tiene un volumen desplazado de aproximadamente unos 4–5 km³ de material sedimentario.

Capítulo 3

Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido son variadas, dentro de las principales están la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de agua poco profunda (*Shallow water equations*).

Cuando se estudia un fluido a partir de la ecuación de agua poco profunda, es imperativo realizar un listado de suposiciones, tales como: fluido no viscoso, irrotacional, incompresible, baja profundidad, etc.

En este capítulo se comienza a estudiar el *tsunami* a partir de la ecuación de agua poco profunda, pero considerando un término forzante, es decir, la ecuación de agua poco profunda inhomogénea, y a partir de esta ecuación se proponen tres modelos con funciones forzantes que representan la física y matemática de un deslizamiento de tierra.

3.1. Ecuaciones de Movimiento

Para satisfacer las ecuaciones de Euler, se asume que el agua se comporta como un fluido no viscoso. A partir de este supuesto, la ecuación de Euler queda expresada de la siguiente manera:

$$\rho (\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla \vec{p} + \rho g \hat{k} = 0 \quad (3.1)$$

Donde, ρ es la densidad del fluido, $u = (u, v, w)$ es el campo de velocidades, p la presión, g es la aceleración de gravedad.

En la presente tesis, la derivada parcial se define de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \partial_r f,$$

Para el eje z:

$$\rho (\partial_t w + u \cdot \partial_x w + v \cdot \partial_y w + w \cdot \partial_z w) + \partial_z p + \rho g = 0$$

A escala de *tsunamis* el término $\rho (\partial_t + w \cdot \nabla) w$ es despreciable, porque la relación de aspecto en el caso *tsunami* implica que la aceleración vertical es mucho mayor que la aceleración en la componente horizontal.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} p_z + \rho g &= 0 & / \cdot \int_z^\eta dz \\ p_0 - p|_{-z} + \rho g (\eta - z) &= 0 \\ p &= p_0 + \rho g (\eta - z) \end{aligned}$$

Donde, $\nabla p = \rho g (\partial_x \eta, \partial_y \eta, -1)$

Para el eje x:

$$\begin{aligned} \rho (\partial_t + u \partial_x) u + \rho g \partial_x \eta &= 0 \\ (\partial_t + u \partial_x) u &= -g \partial_x \eta \\ \partial_t u + u \partial_x u &= -g \partial_x \eta \end{aligned}$$

Donde el operador $\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ se conoce como *derivada total*. Cabe mencionar que se recurrirá al supuesto de fluido incompresible, lo que permite trabajar con un campo solenoidal.

$$\text{div}(\vec{u}) = 0, \quad \text{con } \vec{u} = (u, v, w)$$

3.2. Condiciones de Borde

Para abordar el problema, se pondrá el nivel $z = 0$ a nivel del mar, y positivo hacia arriba (Ver Figura 3.1). Se llamará $\eta = \eta(x, z)$ a la función de la elevación del agua que describe su posición en el espacio unidimensional x y en cada instante de tiempo t , siendo la variable más

importante para este problema, y es la que se desea obtener. La función $h = h(x)$ representa la batimetría, la cual en principio, es una función cualquiera.

Las condiciones de borde que se utilizarán, son de tipo cinemática debido al hecho que se impondrá cierta condición sobre las partículas del fluido.

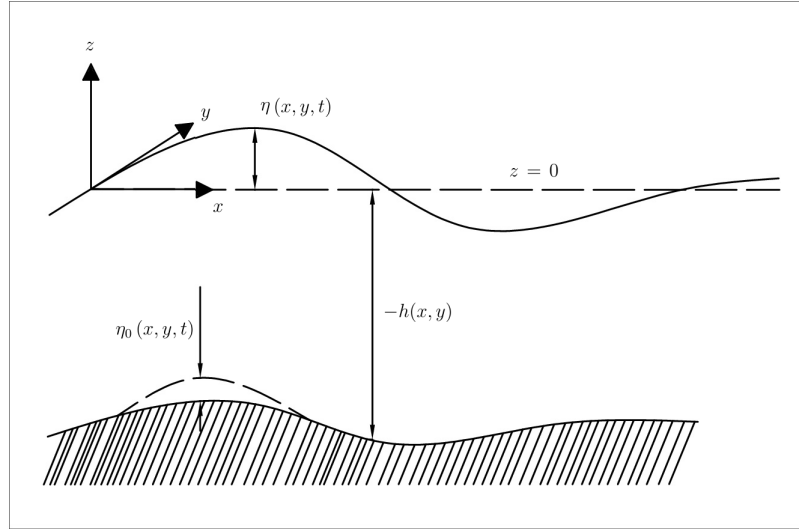


Figura 3.1: Esquema de las coordenadas del sistema y variables a usar en el modelo de *tsunami*. (Fuente: Elaboración propia)

3.2.1. En el fondo

Se asume que el fluido es paralelo a la batimetría, esto implica que $z = -h_0(x) + \eta_0(x)$. Por otra parte, se define la superficie normal al fondo marino \vec{n} , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \nabla(h_0(x) - \eta_0(x) + z) \\ \vec{n} &= (\partial_x(h_0 - \eta_0), 1)\end{aligned}\quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) es indispensable para obtener la condición cinemática en el fondo (\vec{u}). Dicho procedimiento de cálculo es tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{n} &= 0 \\ u \partial_x(h_0 - \eta_0) + w &= 0, \quad \text{en } z = -h_0(x) + \eta_0(x)\end{aligned}\quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3) se despeja w , obteniéndose la siguiente expresión,

$$w = -u \partial_x(h_0 - \eta_0)\quad (3.4)$$

Donde, $w = w(x, z, t)$.

Por lo tanto, si $z = -h_0(x) + \eta_0(x)$, se tiene que w es,

$$w(x, -h_0 + \eta_0, t) = -u \partial_x(-h_0 + \eta_0) \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) corresponde a la condición de borde cinemática en el fondo.

3.2.2. En la superficie

En la superficie se debe cumplir la siguiente condición de borde:

$$z = \eta(x, t)$$

Aplicando la derivada total a la última ecuación, queda lo siguiente.

$$\begin{aligned} (\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla) z &= (\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla) \eta \\ 0 + w &= \partial_t \eta + u \partial_x \eta \\ w &= \partial_t \eta + u \partial_x \eta, \quad \text{en } z = \eta(x, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) corresponde a la condición de borde cinemática en la superficie.

3.3. Obtención del sistema de *ecuaciones de agua poco profunda*

La teoría de ondas de agua poco profunda está basada en tomar el promedio en profundidad de las ecuaciones de masa y conservación del momentum. La derivación de estas ecuaciones implica los supuestos de agua incompresible y fluido no viscoso sin tensión superficial, que la profundidad del agua es pequeña en comparación con la longitud de escala horizontal característica del movimiento; Las consecuencias son que la presión de campo es hidrostática en todas partes, y la velocidad es uniforme a través de la profundidad (Liu et al., 1991).

A continuación el paso a paso de la obtención de la ecuación de agua poco profunda para un sistema (1+1D).

Se comienza con la ecuación de conservación de masa del volumen de control:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &= 0 & / \cdot \int_{-h_0+\eta_0}^{\eta} dz \\ \int_{-h_0+\eta_0}^{\eta} \partial_x u dz + w(x, \eta) - w(x, -h_0 + \eta_0) &= 0 \\ \int_{-h_0+\eta_0}^{\eta} \partial_x u dz + \partial_t \eta + u \partial_x \eta - \partial_t \eta_0 - u \partial_x (-h_0 + \eta_0) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Leibnitz para diferenciación bajo el signo integral, la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo se llega a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{-h_0+\eta_0}^{\eta} \partial_x u dz + u \partial_x \eta + u \partial_x (-h_0 + \eta_0) \right\} - \partial_t \eta_0 &= 0 \\ \partial_t \eta + \partial_x \left\{ \int_{-h_0+\eta_0}^{\eta} u dz \right\} - \partial_t \eta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como aproximación: se consideran velocidades *depth-integrated*, es decir, un promedio en profundidad.

$$u(x, z, t) = u(x, t)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + u \partial_x (\eta + h_0 - \eta_0) - \partial_t \eta_0 &= 0 \\ -\partial_t \eta_0 + \partial_t \eta + u \partial_x \eta + u \partial_x h_0 - u \partial_x \eta_0 &= 0 \\ \partial_t \eta + u \partial_x \eta + u \partial_x h_0 &= u \partial_x \eta_0 + \partial_t \eta_0 \\ \partial_t \eta + u \partial_x (\eta + h_0) &= u \partial_x \eta_0 + \partial_t \eta_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uniendo las ecuaciones (3.2) y (3.8) se tienen las siguientes ecuaciones gobernantes:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = -g \partial_x \eta & / \cdot -h_0 \partial_x \\ \partial_t \eta + u \partial_x (\eta + h_0) = u \partial_x \eta_0 + \partial_t \eta_0 & / \cdot \partial_t \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} -\partial_x (h_0 \partial_t u) - g \partial_x (h_0 \partial_x \eta) - \partial_x (h_0 u \partial_x u) = 0 \\ \partial_{tt}^2 \eta + \partial_t (u \partial_x (\eta + h_0)) = \partial_t (u \partial_x \eta_0) + \partial_{tt}^2 \eta_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

A través de un poco de álgebra, y los siguientes supuestos; primero, la elevación de la superficie del mar y la altura máxima del deslizamiento de tierra es mucho menor que la profundidad del

mar desde $x = 0$ hasta el fin de la pendiente inclinada; segundo, la velocidad a la que se mueve el deslizamiento de tierra es mucho menor que la velocidad del *tsunami*; a través de estos supuestos aplicados en la ecuación (3.10) se puede llegar a la ecuación de agua poco profunda, la que será mostrada a continuación.

Los supuestos son los siguientes:

$$\eta, \eta_0 \lll h_0 \Rightarrow u \partial_x u \approx 0 \quad (3.11)$$

$$u \lll c = \sqrt{g h_0} \Rightarrow u \partial_x \eta, u \partial_x \eta_0 \approx 0 \quad (3.12)$$

$$\partial_{tt}^2 \eta - g \partial_x (h_0 \partial_x \eta) = \partial_{tt}^2 \eta_0 \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) corresponde a la ecuación de ondas (1+1D) o ecuación de agua poco profunda (*Shallow water equation*).

3.4. Modelo de Playa Inclinada

El modelo de playa inclinada (ver figura 3.2) considera una playa de pendiente constante, donde: $h_0 = \alpha x$, α corresponde a la tangente del ángulo formado entre el eje horizontal y el plano donde se desplaza el deslizamiento de tierra o término forzante.

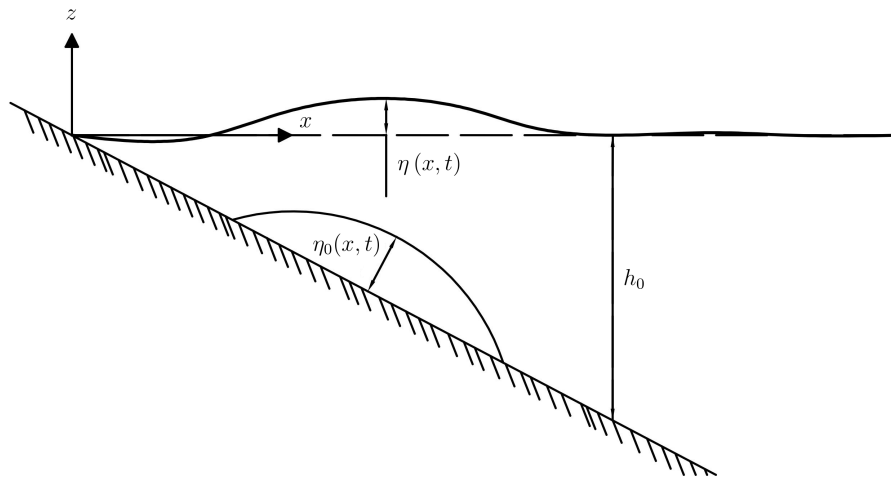


Figura 3.2: Esquema de coordenadas y simbología a utilizar. (Fuente: Elaboración propia)

Donde, $\eta(x, t)$ corresponde a la elevación de la superficie del agua, $\eta_0(x, t)$ es el movimiento del fondo marino (término forzante), h_0 es la altura neta del fondo marino.

De la figura 3.2, el movimiento del fondo marino representado como $\eta_0(x, t)$, sobre una pendiente inclinada a una velocidad constante.

La forma de medir las dimensiones físicas de la función $\eta_0(x, t)$, es suponiendo que $\eta_0(x, t)$ se encuentra en un fondo plano (similar a la figura 3.1), es decir, las dimensiones del deslizamiento de tierra no se descomponen en componentes vectoriales (horizontal y vertical) paralelas al plano inclinado.

Se tiene la ecuación de agua profunda, expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 \eta - g \partial_x (\alpha x \partial_x \eta) &= \partial_{tt}^2 \eta_0 \\ \partial_{tt}^2 \eta - g \alpha \partial_x (x \partial_x \eta) &= \partial_{tt}^2 \eta_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ahora se define la Transformada Hankel y la Transformada Hankel inversa:

$$\mathcal{H}\{f\}(k) = \hat{f}(k) = \int_0^\infty f(\xi) J_0(2k\sqrt{\xi}) d\xi \quad (3.15)$$

$$\mathcal{H}^{-1}\{f\}(k) = f(\xi) = 2 \int_0^\infty \hat{f}(k) J_0(2k\sqrt{\xi}) k dk \quad (3.16)$$

Donde: $J_0(\cdot)$ corresponde a la función de Bessel cilíndrica de primer tipo de orden cero.

Ahora se aplica la Transformada Hankel definida en (3.15) a la ecuación (3.14).

$$\partial_{tt}^2 \hat{\eta} - g \alpha \mathcal{H}\{\partial_x (x \partial_x \eta)\} = \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0 \quad (3.17)$$

De la ecuación (3.17) se desarrollará el término que presenta la transformada Hankel.

$$\mathcal{H}\{\partial_x (x \partial_x \eta)\}(k) = \int_0^\infty \partial_x (x \partial_x \eta) J_0(2k\sqrt{x}) dx \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &= \left[(x \partial_x \eta) J_0(2k\sqrt{x}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty (k \partial_x \eta) J_1(2k\sqrt{x}) \sqrt{x} dx \\ \mathcal{H}\{\partial_x (x \partial_x \eta)\}(k) &= k [\eta J_1(2k\sqrt{x})]_0^\infty - k \int_0^\infty \eta \partial_x (J_1(2k\sqrt{x}) \sqrt{x}) dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

De acuerdo a Fuentes (2017), la solución de la integral (3.19) es la siguiente expresión,

$$\mathcal{H}\{\partial_x (x \partial_x \eta)\}(k) = -k^2 \hat{\eta}(k, t), \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) se reemplaza en la ecuación (3.17), dando como resultado,

$$\partial_{tt}^2 \hat{\eta} + g \alpha k^2 \hat{\eta}(k, t) = \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0 \quad (3.21)$$

Ahora se define la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \bar{f}(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

El límite inferior "0₋" hace énfasis sobre el hecho de que $f(t)$ puede ser también una distribución, por ejemplo: la delta de Dirac. Por lo tanto, aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación (3.21) queda así:

$$\begin{aligned} s^2 \hat{\eta}(k, s) - s \hat{\eta}(k, 0_-) - \partial_t \hat{\eta}(k, 0_-) + g \alpha k^2 \hat{\eta}(k, s) &= \mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0\}(s) \quad (3.22) \\ s^2 \hat{\eta}(k, s) + g \alpha k^2 \hat{\eta}(k, s) &= \mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0\}(s) + s \hat{\eta}(k, 0_-) + \partial_t \hat{\eta}(k, 0_-) \\ (s^2 + (\sqrt{g \alpha} k)^2) \hat{\eta}(k, s) &= \mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0\}(s) + s^2 \left(\frac{1}{s} \hat{\eta}(k, 0_-) + \frac{1}{s^2} \partial_t \hat{\eta}(k, 0_-) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k, s) &= \frac{1}{(s^2 + (\sqrt{g \alpha} k)^2)} \left[\mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 \hat{\eta}_0\}(s) + \mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 [(\hat{\eta}(k, 0_-) + t \partial_t \hat{\eta}(k, 0_-)) H(t)]\}(s) \right] \\ \hat{\eta}(k, s) &= \frac{1}{(s^2 + (\sqrt{g \alpha} k)^2)} \mathcal{L}\{\partial_{tt}^2 (\hat{\eta}_0 + [\hat{\eta}(k, 0_-) + t \partial_t \hat{\eta}(k, 0_-)] H(t))\}(s) \quad (3.23) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\hat{\eta}(k, s) = \frac{1}{(s^2 + (\sqrt{g \alpha} k)^2)} \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1(k, s) \quad (3.24)$$

Ahora se define la función $\eta_1(x, t) = \eta_0(x, t) + [\eta(x, 0_-) + t \partial_t \eta(x, 0_-)] H(t)$

Donde, $\eta_1(x, t)$ es una función que representa el movimiento del fondo marino modificado, ya que toma en cuenta los efectos de la elevación inicial $\eta(x, 0_-)$ y la velocidad $\partial_t \eta(x, 0_-)$ de la superficie libre en el instante antes de que el deslizamiento de tierra se mueva.

Para el problema a resolver, se consideran condiciones iniciales nulas, o sea, desplazamiento y velocidad cero en $t = 0$.

$$\eta(x, 0_-) = \partial_t \eta(x, 0_-) = 0 \quad (3.25)$$

Por lo tanto $\eta_1(x, t)$ queda de la siguiente manera:

$$\eta_1(x, t) = \eta_0(x, t) \quad (3.26)$$

Es posible aplicar a la ecuación (3.24) el teorema de convolución, $\hat{\eta}(k, t)$ queda de la siguiente manera:

$$\hat{\eta}(k, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{g\alpha}k} \sin(\sqrt{g\alpha}kt) * \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1(k, t) \quad (3.27)$$

$$\hat{\eta}(k, t) = \int_0^t \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1(k, \tau) \frac{H(\tau)}{\sqrt{g\alpha}k} \sin(\sqrt{g\alpha}k(t-\tau)) d\tau$$

$$\hat{\eta}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{g\alpha}k} \int_0^t \partial_{tt}^2 \hat{\eta}_1(k, \tau) \sin(\sqrt{g\alpha}k(t-\tau)) d\tau \quad (3.28)$$

Ahora juntando la ecuación (3.28) con la ecuación (3.15) y la ecuación (3.16), $\eta(k, t)$ queda expresado de la siguiente manera:

$$\eta(x, t) = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \int_0^t \partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau) \sin(\sqrt{g\alpha}k(t-\tau)) d\tau d\xi dk \quad (3.29)$$

En la ecuación (3.29), $\eta(x, t)$ representa la elevación de la superficie libre o perturbación de la superficie del agua, producto de la deformación y/o movimiento transiente del fondo marino.

3.4.1. Primer caso de estudio (caso 1)

Se tiene la siguiente función: $\eta_0(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, donde $X(x)$ y $T(t)$ se muestran a continuación:

$$X(x) = A \cdot e^{-\beta(x-b)^2}, \quad (3.30)$$

$$T(t) = H(t) \cdot H\left(\frac{x_0}{v} - t\right) = H(t) \cdot H(t_r - t), \quad (3.31)$$

Donde $H(\cdot)$ corresponde a la función de Heaviside, t_r es el tiempo de parada del deslizamiento de tierra, x_0 el desplazamiento del deslizamiento de tierra (distancia recorrida por el centro de masa medido en un tiempo t), b la mitad de la longitud, y v es la velocidad a la que se desplaza el deslizamiento de tierra.

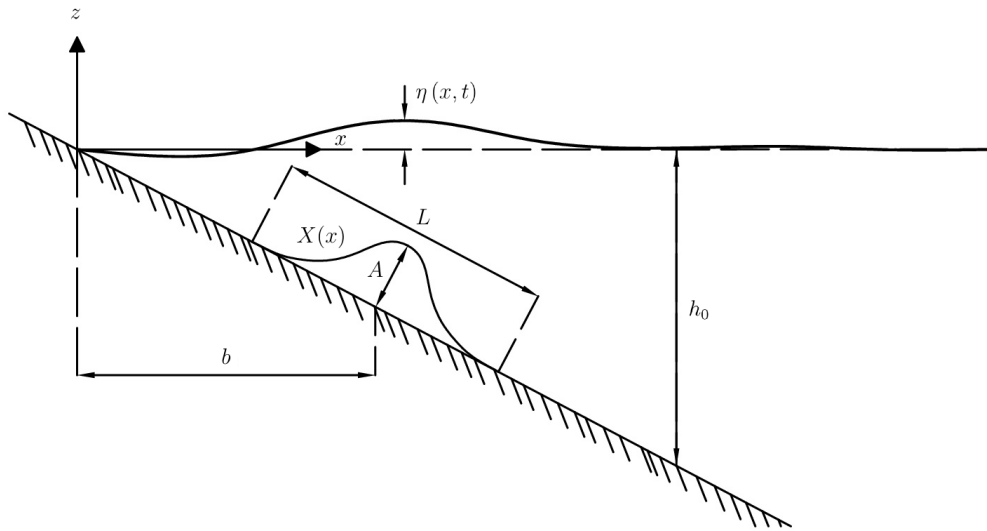


Figura 3.3: Esquema de coordenadas y simbología del modelo con forma de gaussiana como término forzante. (Fuente: Elaboración propia)

De la figura 3.3, el movimiento del fondo marino representado como una función forzante $X(x)$ se moviliza por una pendiente inclinada a una velocidad constante. El tiempo por el cual se desplaza es t_r , se asume que la profundidad del océano tiende a infinito. Otro punto a señalar es que la forma de $X(x)$ se mantiene, independiente de cuanto tiempo se mueva.

La función $X(x)$ sólo da la forma a la deformación del fondo oceánico, caso contrario a como funciona la función $T(t)$, ya que representa el tiempo en que se desplaza la fuente (3.30). Este modelo asume que la fuente móvil se detiene en un tiempo $t = \frac{x_0}{v}$.

Como se está ocupando variable separable para describir η_1 , su segunda derivada parcial con respecto al tiempo quedará como se muestra a continuación:

$$\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t) = \partial_{tt}^2 (X(x) \cdot T(t)) = X(x) \cdot \partial_{tt}^2 (T(t)), \quad (3.32)$$

Sin embargo, para poder determinar la segunda derivada de $\eta_1(x, t)$, es necesario recurrir a la teoría de distribuciones, quedando de la siguiente manera:

$$\langle T''(t), \phi(t) \rangle = (-1)^2 \cdot \langle T(t), \phi''(t) \rangle \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} &= \langle T(t), \phi''(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T(t) \phi''(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot H(t_r - t) \cdot \phi''(t) dt \\ &= \int_0^{t_r} 1 \cdot 1 \cdot \phi''(t) dt \\ &= \phi'(t) \Big|_0^{t_r} \\ &= \phi'(t_r) - \phi'(0) \\ &= \langle \delta'(t_r), \phi(t) \rangle - \langle \delta'(0), \phi(t) \rangle \\ \langle T''(t), \phi(t) \rangle &= \delta'(t) - \delta'(t - t_r) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Por lo tanto, $\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t)$ queda así:

$$\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t) = X(x) [\delta'(t) - \delta'(t - t_r)] \quad (3.35)$$

Ahora se reemplaza la ecuación (3.35) en la ecuación (3.29),

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^{\infty} J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^{\infty} J_0(2k\sqrt{\xi}) \cdot \\ &\quad \int_0^t X(\xi) [\delta'(\tau) - \delta'(\tau - t_r)] \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \\ \eta(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^{\infty} J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^{\infty} X(\xi) J_0(2k\sqrt{\xi}) I(k, t) d\xi dk \end{aligned} \quad (3.36)$$

A continuación se calcula el valor de $I(k, t)$,

$$I(k, t) = \int_0^t [\delta'(\tau) - \delta'(\tau - t_r)] \cdot \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \quad (3.37)$$

$$I(k, t) = - \int_0^t \delta'(\tau - t_r) \cdot \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau + \int_0^t \delta'(\tau) \cdot \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \quad (3.38)$$

Aplicando la propiedad de la delta de Dirac (argumento igual a cero es el único valor donde la delta de Dirac no es igual a cero), y también integrando por partes, quedando el procedimiento

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
I(k, t) &= -[\delta(\tau - t_r) \cdot \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - \tau))] \Big|_0^t - \int_0^t \delta(\tau - t_r) \cos(\sqrt{\alpha g k} (t - \tau)) \cdot \sqrt{\alpha g k} d\tau \\
&+ [\delta(\tau) \cdot \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - \tau))] \Big|_0^t + \int_0^t \delta(\tau) \cos(\sqrt{\alpha g k} (t - \tau)) \cdot \sqrt{\alpha g k} d\tau \\
I(k, t) &= -\sqrt{\alpha g k} \cdot \cos(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r)) - \sqrt{\alpha g k} \cdot \cos(\sqrt{\alpha g k} t) \\
I(k, t) &= \sqrt{\alpha g k} [\cos(\sqrt{\alpha g k} t) - \cos(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Otra manera equivalente de escribir la ecuación (3.39), es la siguiente:

$$I(k, t) = \partial_t [\sin(\sqrt{\alpha g k} t) - \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] \tag{3.40}$$

Por lo tanto, reemplazando la ecuación (3.40) en la ecuación (3.36), queda expresado tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^\infty X(\xi) J_0(2k\sqrt{\xi}) \partial_t [\sin(\sqrt{\alpha g k} t) \\
&- \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] d\xi dk \tag{3.41}
\end{aligned}$$

La ecuación (3.41) se puede escribir de la siguiente manera recurriendo al teorema de Leibnitz,

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^\infty X(\xi) J_0(2k\sqrt{\xi}) [\sin(\sqrt{\alpha g k} t) \right. \\
&- \left. \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] dk d\xi \right\} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

A continuación se analizará el caso de *runup*, o sea, cuando $x = 0$, quedando la ecuación (3.42) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \int_0^\infty 1 \int_0^\infty X(\xi) J_0(2k\sqrt{\xi}) [\sin(\sqrt{\alpha g k} t) - \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] d\xi dk \right\} \\
\eta(0, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \int_0^\infty X(\xi) \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) [\sin(\sqrt{\alpha g k} t) - \sin(\sqrt{\alpha g k} (t - t_r))] dk d\xi \right\} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Se tiene la siguiente integral –su procedimiento de cálculo está definida en el anexo A, sección A.1.– la cual será útil para resolver la ecuación (3.43):

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \frac{H(\beta^2 - \alpha^2)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{sgn}(\beta), \quad \text{si } \beta > \alpha, \quad (3.44)$$

Identificando términos, se tiene que:

$$x = k, \quad \alpha = 2\sqrt{\xi}, \quad \beta = \sqrt{\alpha g}(t - t_r) \quad \text{caso (1)}$$

$$x = k, \quad \alpha = 2\sqrt{\xi}, \quad \beta = \sqrt{\alpha g}t \quad \text{caso (2)}$$

Los valores de los casos (1) y (2) y la ecuación (3.44) se reemplazarán en la ecuación (3.43), donde $\eta(0, t)$ queda así:

$$\eta(0, t) = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \int_0^{\infty} X(\xi) \left[\frac{H(\alpha g t^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} - \frac{H(\alpha g (t - t_r)^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g (t - t_r)^2 - 4\xi}} \right] d\xi \right\} \quad (3.45)$$

Pero se sabe que las siguientes condiciones, se cumplen para cada una de las funciones Heaviside:

$$H(\alpha g t^2 - 4\xi) \neq 0 \quad ; \quad \text{si} \quad 0 < \xi < \frac{\alpha g t^2}{4} \quad (3.46)$$

$$H(\alpha g (t - t_r)^2 - 4\xi) \neq 0 \quad ; \quad \text{si} \quad 0 < \xi < \frac{\alpha g (t - t_r)^2}{4} \quad (3.47)$$

Por lo tanto, el resultado final de la ecuación (3.45).

$$\eta(0, t) = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \int_0^{\frac{\alpha g t^2}{4}} \frac{X(\xi) d\xi}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} - \int_0^{\frac{\alpha g (t - t_r)^2}{4}} \frac{X(\xi) d\xi}{\sqrt{\alpha g (t - t_r)^2 - 4\xi}} \right\} \quad (3.48)$$

La ecuación (3.48) representa el *runup* de un *tsunami* cuyo término forzante corresponde a las ecuaciones (3.30) y (3.31). Sin embargo, una solución equivalente de la ecuación (3.48) es la que se muestra a continuación, esto se realiza mediante un cambio de variable de ξ , la cual se modifica de la siguiente manera:

$$\xi = \frac{\alpha g (t - t_r)^2 y}{4} \Rightarrow y = \frac{4\xi}{\alpha g (t - t_r)^2}; \quad d\xi = \frac{\alpha g (t - t_r)^2 dy}{4} \quad (3.49)$$

$$\xi = \frac{\alpha g t^2 y_1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{4\xi}{\alpha g t^2}; \quad d\xi = \frac{\alpha g t^2 dy_1}{4} \quad (3.50)$$

Por lo tanto, $\eta(0, t)$ es,

$$\eta(0, t) = \frac{1}{2} \partial_t \left\{ \int_0^1 \frac{t X\left(\frac{\alpha g t^2 y_1}{4}\right) dy_1}{\sqrt{1-y_1}} - \int_0^1 \frac{(t-t_r) X\left(\frac{\alpha g (t-t_r)^2 y}{4}\right) dy}{\sqrt{1-y}} \right\} \quad (3.51)$$

Las ecuaciones (3.48) y (3.51) son aplicables para el caso de un *tsunami* provocado por un terremoto y no para el *tsunami* provocado o gatillado por un deslizamiento de tierra submarino o subáereo. Sin embargo a partir de este ejercicio se encontrará la solución de la ecuación de agua poco profunda que describa la elevación de la superficie del agua para cada instante de tiempo y cualquier punto en el espacio para el caso de un *tsunami* provocado por un deslizamiento submarino.

3.4.2. Segundo caso de estudio (caso 2)

Se tiene la siguiente función como término forzante, $\eta_0(x, t) = f(x - vt) = f(\psi) = AH(\psi - x_a)H(x_b - \psi)$.

Donde, $\psi = x - vt$, x_1 y x_2 corresponden al punto inicial y final del deslizamiento, A es la amplitud o espesor máximo del deslizamiento y v es la velocidad del deslizamiento de tierra.

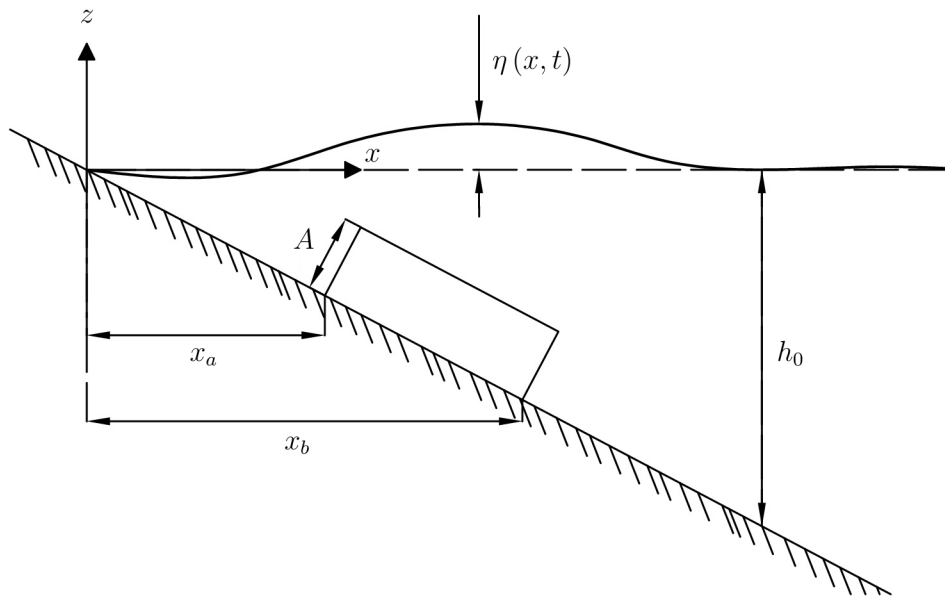


Figura 3.4: Esquema de coordenadas y simbología del modelo propuesto. (Fuente: Elaboración propia)

De la figura 3.4, el movimiento del fondo marino representado como una función caja de espesor A , la cual se mueve sobre una pendiente inclinada a una velocidad constante. El tiempo por el cual se desplaza el deslizamiento de tierra es infinito, por ende, se asume que la profundidad del océano tiende a infinito. Otro punto a señalar es la forma inalterable en el tiempo de $\eta_0(x, t)$ (mantiene la forma de función caja, independiente si se mueve indefinidamente).

La forma de medir las dimensiones físicas de la función $\eta_0(x, t)$, tales como: el espesor A y el largo $x_b - x_a$, es suponiendo que $\eta_0(x, t)$ se encuentra en un fondo plano, es decir, las dimensiones del deslizamiento de tierra no se descomponen en componentes vectoriales (horizontal y vertical) paralelas al plano inclinado.

Para este modelo, se asumen condiciones iniciales nulas.

A continuación se calcula $\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t)$, pero tal como en el caso anterior, para poder determinar la segunda derivada de $\eta_1(x, t)$, es necesario recurrir a la teoría de distribuciones, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= (-1)^2 \cdot \langle f(x, t), \phi''(t) \rangle = \langle f(x, t), \phi''(t) \rangle & (3.52) \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \phi''(t) dt \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} A H((x - vt) - x_a) H(x_b - (x - vt)) \cdot \phi''(t) dt \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \int_{(x-x_b)/v}^{(x-x_a)/v} 1 \cdot 1 \cdot \phi''(t) dt \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \phi'(t) \Big|_{(x-x_b)/v}^{(x-x_a)/v} \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \phi' \left(\frac{x - x_a}{v} \right) - \phi' \left(\frac{x - x_b}{v} \right) \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \left\langle \delta' \left(\frac{x - x_a}{v} \right), \phi(t) \right\rangle - \left\langle \delta' \left(\frac{x - x_b}{v} \right), \phi(t) \right\rangle \\
\langle f''(x, t), \phi(t) \rangle &= \delta' \left(t - \left(\frac{x - x_b}{v} \right) \right) - \delta' \left(t - \left(\frac{x - x_a}{v} \right) \right) & (3.53)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t)$ queda así:

$$\partial_{tt}^2 \eta_1(x, t) = A \left\{ \delta' \left(t - \left(\frac{x - x_b}{v} \right) \right) - \delta' \left(t - \left(\frac{x - x_a}{v} \right) \right) \right\} \quad (3.54)$$

Ahora se reemplaza la ecuación (3.54) en la ecuación (3.29),

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) dk \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) d\xi \cdot \\ &\quad \int_0^t \left[\delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) \right) - \delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_a}{v} \right) \right) \right] \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \\ \eta(x, t) &= \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) dk \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \cdot G(k, t) \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.55)$$

A continuación se calcula la integral $G(k, t)$,

$$G(k, t) = \int_0^t \left[\delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) \right) - \delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_a}{v} \right) \right) \right] \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} G(k, t) &= \int_0^t \delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) \right) \cdot \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \delta' \left(\tau - \left(\frac{\xi - x_a}{v} \right) \right) \cdot \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$G(k, t) = G_b(k, t) - G_a(k, t) \quad (3.58)$$

Para resolver $G_a(k, t)$ y $G_b(k, t)$ de la ecuación (3.58) se muestra el siguiente procedimiento de cálculo, el cual servirá de base para obtener el resultado de dicha ecuación.

$$\int_a^b \delta'(t - t_0) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \delta'(t - t_0) H(t - a) H(b - t) f(t) dt, \quad \text{si } b > a, \quad (3.59)$$

Realizando la siguiente sustitución, la ecuación anterior se modifica tal como se muestra a continuación:

$$g(t) = H(t - a) H(b - t) f(t) \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) se reemplaza en (3.59), donde dicha integral queda expresada de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta'(t - t_0) g(t) dt = -g'(t_0) \quad (3.61)$$

Aplicando la teoría de distribuciones a la ecuación (3.61), resulta.

$$\langle g'(x, t), \phi(t) \rangle = - \int_{\mathbb{R}} g(t) \phi'(t) dt \quad (3.62)$$

$$= - \int_a^b f(t) \phi'(t) dt$$

$$= - [f(t) \phi(t)] \Big|_a^b + \int_a^b f'(t) \phi(t) dt$$

$$= f(a) \phi(a) - f(b) \phi(b) + \int_{\mathbb{R}} H(t-a) H(b-t) f'(t) \phi(t) dt$$

$$\langle g'(x, t), \phi(t) \rangle = f(a) \delta(t-a) - f(b) \delta(t-b) + H(t-a) H(b-t) f'(t) \quad (3.63)$$

Por lo tanto la ecuación (3.63) resulta lo siguiente:

$$\int_a^b \delta'(t-t_0) f(t) dt = f(b) \delta(t_0-b) - f(a) \delta(t_0-a) - H(t_0-a) H(b-t_0) f'(t_0) \quad (3.64)$$

Identificando términos para el caso 2, se tiene que la integral $G_a(k, t)$ es:

$$G_a(k, t) = \int_0^t \delta'(\tau-t_0) f(\tau) d\tau = f(t) \delta\left(\frac{x-x_a}{v} - t\right) - f(0) \delta\left(\frac{x-x_a}{v}\right) - H\left(\frac{x-x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{x-x_a}{v}\right) f'\left(\frac{x-x_a}{v}\right)$$

$$G_a(k, t) = \sin(\sqrt{g\alpha} k (t-t)) \delta\left(\frac{x-x_a}{v} - t\right) - \sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x-x_a}{v}\right) - H\left(\frac{x-x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{x-x_a}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x-x_a}{v}\right)\right) \right] \quad (3.65)$$

$$G_a(k, t) = -\sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x-x_a}{v}\right) - H\left(\frac{x-x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{x-x_a}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x-x_a}{v}\right)\right) \right] \quad (3.66)$$

Para determinar $G_b(k, t)$ se recurre a la misma expresión (3.64):

$$G_b(k, t) = \int_0^t \delta'(\tau-t_0) f(\tau) d\tau = f(t) \delta\left(\frac{x-x_b}{v} - t\right) - f(0) \delta\left(\frac{x-x_b}{v}\right) - H\left(\frac{x-x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{x-x_b}{v}\right) f'\left(\frac{x-x_b}{v}\right)$$

$$\begin{aligned}
G_b(k, t) &= \sin(\sqrt{g\alpha} k (t - t)) \delta\left(\frac{x - x_b}{v} - t\right) - \sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x - x_a}{v}\right) \\
&\quad - H\left(\frac{x - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{x - x_b}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x - x_b}{v}\right)\right) \right] \quad (3.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_b(k, t) &= -\sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x - x_b}{v}\right) - H\left(\frac{x - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{x - x_b}{v}\right) \\
&\quad \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x - x_b}{v}\right)\right) \right] \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene que $G(k, t)$ es:

$$\begin{aligned}
G(k, t) &= G_b(k, t) - G_a(k, t) \\
G(k, t) &= -\sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x - x_b}{v}\right) - H\left(\frac{x - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{x - x_b}{v}\right) \\
&\quad \cdot \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x - x_b}{v}\right)\right) \right] + \sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{x - x_a}{v}\right) \\
&\quad + H\left(\frac{x - x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{x - x_a}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{x - x_a}{v}\right)\right) \right] \quad (3.69)
\end{aligned}$$

El resultado anterior se reemplaza en (3.55) donde $\eta(x, t)$ resulta:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{x}) \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \left\{ -\sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) \right. \\
&\quad - H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right)\right) \right] \\
&\quad + \sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) + H\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_a}{v}\right) \\
&\quad \cdot \left. \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_a}{v}\right)\right) \right] \right\} d\xi dk \quad (3.70)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.70) para el caso *runup* ($x = 0$) queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) &= \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \left\{ -\sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) \right. \\
&\quad - H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right)\right) \right] \\
&\quad + \sin(\sqrt{g\alpha} k t) \delta\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) + H\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_a}{v}\right) \\
&\quad \cdot \left. \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_a}{v}\right)\right) \right] \right\} d\xi dk \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación (3.71) es conveniente separarla en cuatro integrales, resultando:

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) &= \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ - \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) \delta\left(\frac{\xi-x_b}{v}\right) dk d\xi \right. \\
&\quad - \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) H\left(\frac{\xi-x_b}{v}\right) H\left(t-\frac{\xi-x_b}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha}k\left(t-\frac{\xi-x_b}{v}\right)\right) \right] dk d\xi \\
&\quad + \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) \delta\left(\frac{\xi-x_a}{v}\right) dk d\xi \\
&\quad \left. + \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) H\left(\frac{\xi-x_a}{v}\right) H\left(t-\frac{\xi-x_a}{v}\right) \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha}k\left(t-\frac{\xi-x_a}{v}\right)\right) \right] dk d\xi \right\} \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Introduciendo las funciones auxiliares $\eta_1(0, t)$, $\eta_2(0, t)$, $\eta_3(0, t)$ y $\eta_4(0, t)$, se obtiene,

$$\eta(0, t) = \frac{2A}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ -\eta_1(0, t) - \eta_2(0, t) + \eta_3(0, t) + \eta_4(0, t) \right\} \quad (3.73)$$

A continuación se calcula cada integral de la expresión (3.73), resultando,

$$\eta_1(0, t) = \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) \delta\left(\frac{\xi-x_b}{v}\right) dk d\xi \quad (3.74)$$

$$\eta_1(0, t) = \int_0^\infty \delta\left(\frac{\xi-x_b}{v}\right) \left[\int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) dk \right] d\xi$$

$$\eta_1(0, t) = \int_0^\infty \delta\left(\frac{\xi-x_b}{v}\right) \left[\frac{H(\alpha g t^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} \right] d\xi$$

$$\eta_1(0, t) = \int_0^\infty v \delta(\xi-x_b) \frac{H(\alpha g t^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} d\xi$$

$$\eta_1(0, t) = v \frac{H(\alpha g t^2 - 4x_b)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4x_b}}$$

$$\eta_1(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H\left(t^2 - \frac{4x_b}{\alpha g}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{4x_b}{\alpha g}}} \quad (3.75)$$

$$\eta_1(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H\left(t^2 - t_{c,b}^2\right)}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}, \quad t_{c,b}^2 = \frac{4x_b}{\alpha g} \quad (3.76)$$

Donde $t_{c,b}^2$ se define como tiempo crítico para la distancia x_b , y corresponde al tiempo de llegada de la onda de *tsunami* a la línea de costa teniendo como distancia de la fuente como x_b .

El cálculo de la función auxiliar $\eta_2(0, t)$ es el siguiente,

$$\begin{aligned} \eta_2(0, t) &= \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) \\ &\quad \cdot \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right)\right) \right] dk d\xi \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(0, t) &= \int_0^\infty H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) d\xi \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \\ &\quad \cdot \partial_t \left[\sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right)\right) \right] dk \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(0, t) &= \int_0^\infty H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) \partial_t \left[\int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin\left(\sqrt{g\alpha} k \left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right)\right) dk \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\eta_2(0, t) = \int_0^\infty H\left(\frac{\xi - x_b}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_b}{v}\right) \partial_t \left[\frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi}} \right] d\xi \quad (3.80)$$

$$\eta_2(0, t) = \int_{x_b}^{x_b+vt} \partial_t \left[\frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi}} \right] d\xi \quad (3.81)$$

A través de la regla de Leibnitz se puede resolver la ecuación (3.81), quedando de la siguiente manera:

$$\eta_2(0, t) = \partial_t \left[\int_{x_b}^{x_b+vt} \frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi}} d\xi \right] - \frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{x_b - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4x_b\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{x_b - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4x_b}} \quad (3.82)$$

$$\eta_2(0, t) = \partial_t \left[\int_{x_b}^{x_b+vt} \frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v}\right)\right)^2 - 4\xi}} d\xi \right] \quad (3.83)$$

Para obtener los límites de integración de (3.83), se determina el conjunto de valores donde ξ cumple con (3.84). Para cumplir con esta condición hay que restringir el denominador de (3.83), esto implica que el término dentro de la raíz debe ser estrictamente mayor a cero (porque la

solución debe pertenecer al conjunto de los números Reales). Dicho procedimiento de cálculo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) \right)^2 - 4\xi &> 0 \\ \alpha g \left(t^2 - 2 \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) t + \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right)^2 \right) - 4\xi &> 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable.

$$\frac{\xi - x_b}{v} = u \iff \xi = x_b + u v \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \alpha g (t^2 - 2ut + u^2) - 4(x_b + uv) &> 0 \\ \alpha g t^2 - 2\alpha g ut + \alpha g u^2 - 4x_b - 4uv &> 0 \\ \alpha g u^2 - 2(\alpha g t + 2v)u - (\alpha g t^2 - 4x_b) &> 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Por la solución de la ecuación de segundo grado es posible determinar los valores de u_1 y u_2 .

$$\begin{aligned} u &= \frac{2(\alpha g t + 2v) \pm \sqrt{4(\alpha g t + 2v)^2 - 4\alpha g(\alpha g t^2 - 4x_b)}}{2\alpha g} \\ u &= \frac{(\alpha g t + 2v) \pm \sqrt{(\alpha g t + 2v)^2 - \alpha g(\alpha g t^2 - 4x_b)}}{\alpha g} \\ u &= \frac{(\alpha g t + 2v) \pm \sqrt{(\alpha g t)^2 + 4\alpha g vt + 4v^2 - (\alpha g t)^2 + 4\alpha g x_b}}{\alpha g} \\ u &= \frac{(\alpha g t + 2v) \pm 2\sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2}}{\alpha g} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\alpha g t + 2v) + 2\sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2}}{\alpha g} \\ u_1 &= t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{(\alpha g t + 2v) - 2\sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2}}{\alpha g} \\ u_2 &= t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Empero ahora es imperativo volver a la variable ξ , para definir si $\xi_{1,b}$ y $\xi_{2,b}$ están dentro de los límites de integración de la integral (3.83).

$$\xi_{1,b} = x_b + u_1 v = x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right) \quad (3.90)$$

$$\xi_{2,b} = x_b + u_2 v = x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right) \quad (3.91)$$

Para verificar si $\xi_{2,b}$ es una raíz positiva para cualquier valor positivo que tomen x_b , v , t y α , es necesario demostrar que los términos con signo + sean mayores que el factor que tiene signo -. El procedimiento de cálculo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \xi_{2,b} &= x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \cdot \left[\frac{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2}}{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2}} \right] \\ &= \left[\frac{\left(x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 + \frac{2v}{\alpha g} (\alpha g (vt + x_b) + v^2)}{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2}} \right] \\ &= \left[\frac{x_b^2 + (vt)^2 + \frac{4v^4}{(\alpha g)^2} + 2x_b vt + \frac{4x_b v^2}{\alpha g} + \frac{4v^3 t}{\alpha g} - \frac{4x_b v^2}{\alpha g} - \frac{4v^3 t}{\alpha g} - \frac{4v^4}{(\alpha g)^2}}{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2}} \right] \\ &= \left[\frac{x_b^2 + (vt)^2 + 2x_b vt}{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2}} \right] \\ \xi_{2,b} &= \left[\frac{(x_b + vt)^2}{x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_b + vt) + v^2}} \right] > 0 \quad (3.92) \end{aligned}$$

Se demuestra que para cualquier valor positivo que tomen x_b , v , t y α , la raíz $\xi_{2,b}$ siempre es positiva.

El paso siguiente es determinar el rango de valores de ξ donde la inecuación (3.84) se cumple.

Intervalo	Valor representativo	Valor en $R(\xi)$	Estatus
$\xi < \xi_{2,b}$	$x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{4}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right)$	$12 \left[x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right]$	Sí
$\xi = \xi_{2,b}$	$x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right)$	0	No
$\xi_{2,b} < \xi < \xi_{1,b}$	$x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)$	$-4 \left[x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right]$	No
$\xi = \xi_{1,b}$	$x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right)$	0	No
$\xi > \xi_{1,b}$	$x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{4}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (vt + x_b) + v^2} \right)$	$12 \left[x_b + v \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right]$	Sí

Tabla 3.1: Tabla resumen de los intervalos donde ξ cumple con la inecuación (3.84).

Donde,

$$R(\xi) = \alpha g \left(t^2 - 2 \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right) t + \left(\frac{\xi - x_b}{v} \right)^2 \right) - 4\xi$$

Según la tabla 3.1, el rango de valores es el siguiente: $(-\infty, \xi_2) \cup (\xi_1, \infty)$. No obstante, como los valores de ξ son positivos dentro de la integral, entonces los límites de integración quedan definidos de esta manera, $(0, \xi_2) \cup (\xi_1, \infty)$.

El siguiente paso es redefinir las raíces de $R_b(\xi)$ a una expresión equivalente. $\xi_{1,b}$ y $\xi_{2,b}$ resultan:

$$\xi_{1,b} = x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)} \quad (3.93)$$

$$\xi_{2,b} = x_b + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)} \quad (3.94)$$

Ahora es imperativo determinar el orden de los valores $\xi_{2,b}$, $\xi_{1,b}$, x_b y $x_b + vt$. Primero se calcula la diferencia entre $\xi_{2,b}$ y x_b .

$$\xi_{2,b} - x_b = vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} &= vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)} \cdot \left[\frac{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}} \right] \\ &= \left[\frac{\left(vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - \frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}} \right] \\ &= \left[\frac{(vt)^2 + \cancel{\frac{4v^3 t}{\alpha g}} + \frac{4v^4}{(\alpha g)^2} - \frac{4x_b v^2}{\alpha g} - \cancel{\frac{4v^3 t}{\alpha g}} - \frac{4v^4}{(\alpha g)^2}}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}} \right] \\ \xi_{2,b} - x_b &= \left[\frac{v^2 \left(t^2 - \frac{4x_b}{\alpha g} \right)}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g} \right)}} \right] \quad (3.96) \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que $\xi_{2,b} - x_b$ es:

$$\xi_{2,b} - x_b = \left[\frac{v^2 (t^2 - t_{c,b}^2)}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] > 0 \implies t \geq t_{c,b} = \frac{4x_b}{\alpha g} \quad (3.97)$$

A continuación se determina el orden entre $\xi_{2,b}$ y $x_b + vt$.

$$\begin{aligned} \xi_{2,b} - (x_b + vt) &= \frac{2v^2}{\alpha g} - \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)} \quad (3.98) \\ &= \frac{2v^2}{\alpha g} - \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)} \cdot \left[\frac{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}}{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] \\ &= \left[\frac{\frac{4v^4}{(\alpha g)^2} - \frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] \\ &= \left[\frac{\cancel{4v^4} - \frac{4x_b v^2}{\alpha g} - \frac{4v^3 t}{\alpha g} - \cancel{4v^4}}{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] \\ \xi_{2,b} - (x_b + vt) &= \left[-\frac{\frac{4v^2}{\alpha g} (x_b + vt)}{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] \quad (3.99) \end{aligned}$$

Por lo tanto se demuestra que $\xi_{2,b} < (x_b + vt)$. Esto se cumple para todos los valores positivos de v , x_b y t :

$$\xi_{2,b} - (x_b + vt) = \left[-\frac{\frac{4v^2}{\alpha g} (x_b + vt)}{\frac{2v^2}{\alpha g} + \sqrt{\frac{4v^2}{\alpha g} \left(x_b + vt + \frac{v^2}{\alpha g}\right)}} \right] < 0 \implies \xi_{2,b} < (x_b + vt) \quad (3.100)$$

Finalmente se han determinado todos los valores o el intervalo de valores donde ξ cumple con la inecuación (3.84), al igual que el orden de los valores de ξ . El paso siguiente es determinar el rango de valores positivos de ξ donde las funciones de Heaviside presente en la ecuación (3.83) es igual a 1. En la figura 3.5 se muestra el conjunto de valores donde la integral (3.83) está definida.

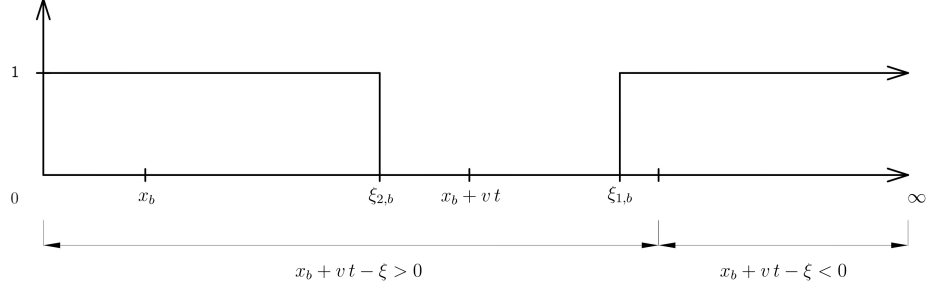


Figura 3.5: Esquema representativo de los valores positivos de ξ donde la inecuación (3.84) se cumple. (Fuente: Elaboración propia)

Como se determinó en los cálculos realizados en la parte superior, el orden final de los valores de ξ es:

$$0 < x_b < \xi_{2,b} < x_b + vt < \xi_{1,b} < \infty \quad (3.101)$$

Cabe hacer mención que a pesar de que la función de Heaviside presente en la expresión (3.83) no es nula en el conjunto $(0, \xi_{2,b}) \cup (\xi_{1,b}, \infty)$, la integral (3.83) está definida sólo en el intervalo $(\xi_b, \xi_{2,b})$. Para el intervalo que comprende la región $(\xi_{1,b}, \infty)$ la integral mencionada anteriormente es igual a 0.

Como se pudo determinar el rango de valores donde la ecuación (3.83) está definida, el siguiente paso es resolver dicha integral, o en otras palabras, hay que encontrar el valor de $\eta_2(0, t)$. Una manera de llegar a su solución es a través de una integral primitiva (el procedimiento de resolución de la integral a resolver se encuentra en el anexo A), de esta manera se reconocen los valores de entrada y se reemplazan en la integral antes mencionada.

De la expresión (3.83) se define el polinomio $R(\xi)$, pero si este polinomio depende de la variable x_b , se define un nuevo polinomio, $R_b(\xi)$, tal como se muestra a continuación:

$$R_b(\xi) = \frac{\alpha g}{v^2} \xi^2 - 2 \left(\frac{\alpha g}{v^2} (x_b + vt) + 2 \right) \xi + \frac{\alpha g}{v^2} (x_b + vt)^2 \quad (3.102)$$

$$R_b(\xi) = a \xi^2 + b_2 \xi + c_2 = a \left(\xi + \frac{b_2}{2a} \right)^2 - \frac{b_2^2 - 4a c_2}{4a} \quad (3.103)$$

$$R_b(\xi) = a \left(\xi + \frac{b_2}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta_2}{4a} \quad (3.104)$$

La integral a resolver en la ecuación (3.83) está resuelta en varios libros de integrales, uno

de ellos es Dwight (1957), cuya primitiva es la siguiente:

$$I_p = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2\sqrt{a R(x)} + 2ax + b \right|, [a > 0] \quad (3.105)$$

Donde:

$$R(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.106)$$

Identificando términos en (3.83), y usando (3.105), $\eta_2(0, t)$ se expresa de la siguiente manera.

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\ln \left(2\sqrt{a R_b(\xi)} + 2a\xi + b_2 \right) \right] \Big|_{x_b}^{\xi_{2,b}} \right\} \quad (3.107)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \left[\ln \left(2\sqrt{a R_b(\xi)} + 2a\xi + b_2 \right) \right] \Big|_{x_b}^{\xi_{2,b}} \right\} \quad (3.108)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \left[\ln \left(2\sqrt{a R_b(\xi)} + 2a\xi + b_2 \right) \right] \Big|_{x_b}^{\xi_{2,b}} \right\} \quad (3.109)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \left[\ln \left(2\sqrt{a R_b(\xi_{2,b})} + 2a\xi_{2,b} + b_2 \right) - \ln \left(2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2ax_b + b_2 \right) \right] \right\} \quad (3.110)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \left[\ln(2a\xi_{2,b} + b_2) - \ln \left(2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2ax_b + b_2 \right) \right] \right\} \quad (3.111)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \partial_t \left\{ \left[\ln |2a\xi_{2,b} + b_2| - \ln |2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2ax_b + b_2| \right] \right\} \quad (3.112)$$

La ecuación (3.112) se puede modificar aplicando la derivada de un logaritmo natural, tal como se muestra a continuación:

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \partial_t \left(\ln |2a\xi_{2,b} + b_2| \right) - \partial_t \left(\ln |2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2ax_b + b_2| \right) \right\} \quad (3.113)$$

Para mayor facilidad de cálculo, se determinan por separado cada componente de los argumentos de las dos funciones logarítmicas pertenecientes a la ecuación (3.113). Por consiguiente, para el argumento de la función logarítmica de la izquierda de dicha ecuación se denominará "Argumento 1" y "Argumento 2" para el logaritmo de la derecha de la ecuación (3.113).

Argumento 1:

$$2 a \xi_{2,b} = 2 \frac{\alpha g}{v^2} \left(x_b + v t + \frac{2v}{\alpha g} \left(v - \sqrt{\alpha g (v t + x_b) + v^2} \right) \right)$$

$$2 a \xi_{2,b} = 2 \frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t) + \frac{4}{v} \left(v - \sqrt{\alpha g (v t + x_b) + v^2} \right) \quad (3.114)$$

$$2 a \xi_{2,b} + b_2 = 2 \frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t) + \frac{4}{v} \left(v - \sqrt{\alpha g (v t + x_b) + v^2} \right) - 2 \left(\frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t) + 2 \right)$$

$$= \cancel{\frac{2 \alpha g}{v^2} (x_b + v t)} + \cancel{4} - \frac{4}{v} \sqrt{\alpha g (v t + x_b) + v^2} - \cancel{2 \frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t)} - \cancel{4}$$

$$2 a \xi_{2,b} + b_2 = -\frac{4}{v} \sqrt{\alpha g (v t + x_b) + v^2} \quad (3.115)$$

Argumento 2:

$$R_b(x_b) = \frac{\alpha g}{v^2} x_b^2 - 2 \left(\frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t) + 2 \right) x_b + \frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t)^2 \quad (3.116)$$

$$R_b(x_b) = \frac{\alpha g}{v^2} x_b^2 - 2 \frac{\alpha g}{v^2} x_b^2 - 2 \frac{\alpha g}{v} x_b t - 4 x_b + \frac{\alpha g}{v^2} (x_b^2 + 2 v x_b t + (v t)^2) \quad (3.117)$$

$$R_b(x_b) = \cancel{\frac{\alpha g}{v^2} x_b^2} - 2 \cancel{\frac{\alpha g}{v^2} x_b^2} - 2 \cancel{\frac{\alpha g}{v} x_b t} - 4 x_b + \cancel{\frac{\alpha g}{v^2} x_b^2} + 2 \cancel{\frac{\alpha g}{v} x_b t} + \alpha g t^2 \quad (3.118)$$

$$R_b(x_b) = \alpha g t^2 - 4 x_b \quad (3.119)$$

$$R_b(x_b) = \alpha g \left(t^2 - \frac{4 x_b}{\alpha g} \right) \quad (3.120)$$

$$R_b(x_b) = \alpha g (t^2 - t_{c,b}^2) \quad (3.121)$$

Por lo tanto el argumento 2 es,

$$2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2 a x_b + b_2 = 2\sqrt{\left(\frac{\alpha g}{v}\right)^2 (t^2 - t_{c,b}^2)} + 2 \frac{\alpha g}{v^2} x_b - 2 \left(\frac{\alpha g}{v^2} (x_b + v t) + 2 \right)$$

$$(3.122)$$

$$= 2 \frac{\alpha g}{v} \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} + 2 \cancel{\frac{\alpha g}{v^2} x_b} - 2 \cancel{\frac{\alpha g}{v^2} x_b} - 2 \frac{\alpha g}{v} t - 4 \quad (3.123)$$

$$= 2 \frac{\alpha g}{v} \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} - 2 \left(\frac{\alpha g}{v} t + 2 \right) \quad (3.124)$$

$$2\sqrt{a R_b(x_b)} + 2 a x_b + b_2 = 2 \frac{\alpha g}{v} \left[\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right] \quad (3.125)$$

El paso siguiente es calcular la derivada con respecto a t de los logaritmos naturales que aparecen en (3.113).

Derivada con respecto a t del argumento 1:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(2a\xi_{2,b} + b_2) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{4}{v}\sqrt{\alpha g(vt + x_b) + v^2}\right) \\ &= -\frac{4}{v} \cdot \frac{1}{2} (\alpha g(vt + x_b) + v^2)^{-1/2} \cdot \alpha g \\ \frac{d}{dt}(2a\xi_{2,b} + b_2) &= -2\alpha g (\alpha g(vt + x_b) + v^2)^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.126)$$

Derivada con respecto a t del argumento 2:

$$\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{aR_b(x_b)} + 2ax_b + b_2\right) = 2\frac{\alpha g}{v} \cdot \frac{1}{2}(t^2 - t_{c,b}^2)^{-1/2} \cdot 2t - 2\frac{\alpha g}{v} \quad (3.127)$$

$$= 2\frac{\alpha g}{v} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} - 1\right) \quad (3.128)$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{aR_b(x_b)} + 2ax_b + b_2\right) = 2\frac{\alpha g}{v} \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}\right) \quad (3.129)$$

Conociendo las derivadas con respecto a t de todos los argumentos de los logaritmos implicados en la ecuación (3.113), es posible reducir esa expresión a otra forma equivalente. Para esto, es necesario aplicar la derivada del logaritmo natural, tal como se puede ver a continuación:

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{\partial_t(2a\xi_{2,b} + b_2)}{2a\xi_{2,b} + b_2} - \frac{\partial_t(2\sqrt{aR_b(x_b)} + 2ax_b + b_2)}{2\sqrt{aR_b(x_b)} + 2ax_b + b_2} \right\} \quad (3.130)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{vH(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{\alpha g v}{\alpha g(x_b + vt) + v^2} - \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}(\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} - (t + \frac{2v}{\alpha g}))} \right) \right\} \quad (3.131)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{vH(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{\alpha g v}{\alpha g(x_b + vt) + v^2} - \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{(t^2 - t_{c,b}^2 - (t + \frac{2v}{\alpha g})\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2})} \right) \right\} \quad (3.132)$$

El cálculo de $\eta_3(0, t)$ es como se muestra a continuación:

$$\eta_3(0, t) = \iint_{\mathbb{R}} J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) \delta\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) dk d\xi \quad (3.133)$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^\infty \delta\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) \left[\int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g\alpha}kt) dk \right] d\xi$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^\infty \delta\left(\frac{\xi - x_a}{v}\right) \left[\frac{H(\alpha g t^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} \right] d\xi$$

$$\eta_3(0, t) = \int_0^\infty v \delta(\xi - x_a) \frac{H(\alpha g t^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4\xi}} d\xi$$

$$\eta_3(0, t) = v \frac{H(\alpha g t^2 - 4x_a)}{\sqrt{\alpha g t^2 - 4x_a}}$$

$$\eta_3(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H\left(t^2 - \frac{4x_a}{\alpha g}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{4x_a}{\alpha g}}} \quad (3.134)$$

$$\eta_3(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H\left(t^2 - t_{c,a}^2\right)}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}, \quad t_{c,a}^2 = \frac{4x_a}{\alpha g} \quad (3.135)$$

Donde $t_{c,a}^2$ se define como tiempo crítico para la distancia x_a , este caso se define similarmente a la distancia x_b , pero considerando ahora a x_a como distancia entre la fuente y la línea de costa.

Para el cálculo de $\eta_4(0, t)$, el desarrollo es el mismo que el realizado para determinar la integral $\eta_2(0, t)$. Por lo tanto, sólo hay que reemplazar la variable x_b por x_a , obteniéndose:

$$\eta_4(0, t) = \frac{v H\left(t^2 - t_{c,a}^2\right)}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{\alpha g v}{\alpha g (x_a + vt) + v^2} - \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2} \left(\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2} - \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \right)} \right) \right\} \quad (3.136)$$

$$\eta_4(0, t) = \frac{v H\left(t^2 - t_{c,a}^2\right)}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{\alpha g v}{\alpha g (x_a + vt) + v^2} - \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}{\left(t^2 - t_{c,a}^2 - \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}\right)} \right) \right\} \quad (3.137)$$

Reemplazando (3.76), (3.132), (3.135) y (3.137) en (3.73), se obtiene una expresión final para el *runup* generado por un deslizamiento de tierra (movimiento del fondo marino) modelado como una función caja.

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) = & \frac{-2A}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} + \frac{v H(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_b + vt) + v^2} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} \left(\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2} - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right)} \right] - \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H(t^2 - t_{c,a}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}} \right. \\
& \left. \left. - \frac{v H(t^2 - t_{c,a}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_a + vt) + v^2} - \frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2} \left(\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2} - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right)} \right] \right\} \quad (3.138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) = & \frac{-2A}{\sqrt{g\alpha}} \left\{ \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} + \frac{v H(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_b + vt) + v^2} \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{t^2 - t_{c,b}^2 - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} \right) \right] - \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \frac{H(t^2 - t_{c,a}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}} \right. \\
& \left. \left. - \frac{v H(t^2 - t_{c,a}^2)}{\sqrt{g\alpha}} \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_a + vt) + v^2} - \left(\frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}{\left(t^2 - t_{c,a}^2 - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2} \right)} \right) \right] \right\} \quad (3.139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) = & \frac{2Av}{g\alpha} \left\{ H(t^2 - t_{c,a}^2) \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_a + vt) + v^2} - \frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}}{t^2 - t_{c,a}^2 - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}} \right] \right. \\
& - H(t^2 - t_{c,b}^2) \left[\frac{\alpha g v}{\alpha g (x_b + vt) + v^2} - \frac{t - \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}}{t^2 - t_{c,b}^2 - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} \right] \\
& \left. + \frac{H(t^2 - t_{c,a}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,a}^2}} - \frac{H(t^2 - t_{c,b}^2)}{\sqrt{t^2 - t_{c,b}^2}} \right\} \quad (3.140)
\end{aligned}$$

Finalmente se ha llegado a la solución de la ecuación de agua poco profunda inhomogénea para el caso de un deslizamiento de tierra submarino, cuya función forzante corresponde a una función del tipo caja. No obstante, la ecuación (3.140) no resuelve el problema para el caso de un deslizamiento subáereo, porque $\eta(0, t)$ presenta singularidades en los valores $t = t_{c,a}$ y $t = t_{c,b}$, haciendo que no se obtengan valores confiables para la evolución del *runup* con respecto al tiempo. Una de las principales razones del porque la ecuación (3.140) no resuelve el problema del *runup* para un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra, es por el hecho de que la función caja no es una función continua, no es una curva suavizada, además de no ser una función diferenciable (para poder derivar este tipo de funciones hay que recurrir a la teoría de distribuciones). Para subsanar este inconveniente, se propone un tercer modelo, este nuevo modelo corresponde a una

función forzante del tipo parábola invertida. El detalle de dicho modelo se muestra a continuación.

3.4.3. Tercer caso de estudio (caso 3)

Se tiene la siguiente función como término forzante $\eta_0(x, t)$,

$$\eta_1(x, t) = \eta_0(x, t)$$

$$f(x - vt) = f(\psi) = \frac{4A}{(x_2 - x_1)^2} (\psi - x_1)(x_2 - \psi) H((\psi - x_1)(x_2 - \psi)) \quad (3.141)$$

$$\eta_1(x, t) = \frac{4A}{(x_2 - x_1)^2} (x - vt - x_1)(x_2 - x + vt) H((x - vt - x_1)(x_2 - x + vt)) \quad (3.142)$$

Donde, $\psi = x - vt$, x_1 y x_2 corresponden al punto inicial y final del deslizamiento, A es la amplitud o espesor máximo del deslizamiento, y v es la velocidad del deslizamiento de tierra.

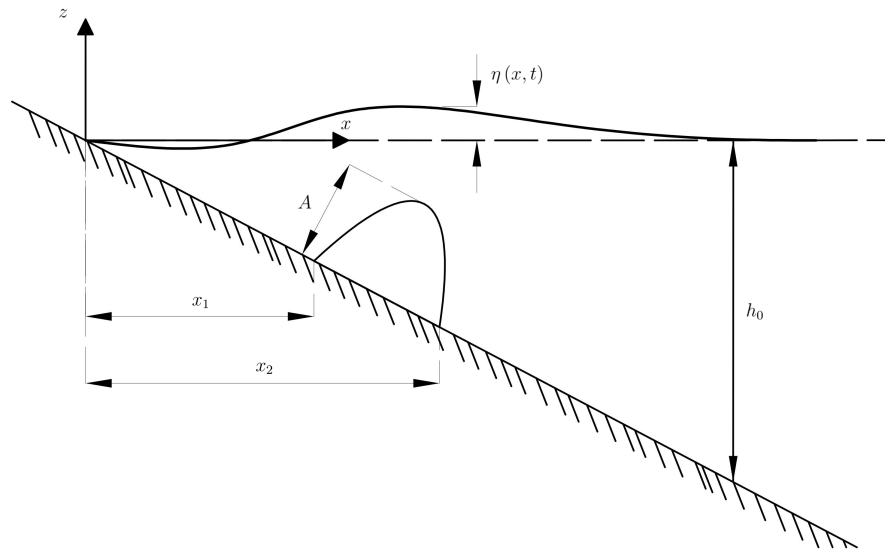


Figura 3.6: Esquema de coordenadas y simbología del modelo propuesto. (Fuente: Elaboración propia)

De la figura 3.6, el movimiento del fondo marino representado como una función parabólica invertida de espesor máximo A , es sobre una pendiente inclinada a una velocidad constante v . El tiempo por el cual se desplaza el deslizamiento de tierra es infinito, es decir, se asume que la profundidad del océano tiende a infinito. Otro punto a señalar es la forma inalterable en el tiempo

de $\eta_0(x, t)$ (mantiene la forma de función parabólica invertida, independiente de que se mueva indefinidamente).

La forma de medir las dimensiones físicas de la función $\eta_0(x, t)$, tales como: el espesor A y el largo $x_2 - x_1$, es suponiendo que $\eta_0(x, t)$ se encuentra en un fondo plano, es decir, las dimensiones del deslizamiento de tierra no se descomponen en componentes vectoriales (horizontal y vertical) paralelas al plano inclinado.

Para obtener la evolución del *runup* en el tiempo es necesario primero calcular la segunda derivada de $\eta_1(x, t)$, y a continuación se reemplaza este resultado en la ecuación (3.29) para así finalmente obtener el *runup* de la solución de la ecuación de agua poco profunda para el caso de una función parabólica como movimiento del fondo marino.

Para este modelo, se asumen condiciones iniciales nulas.

A la ecuación (3.142) se aplica la teoría de distribuciones para obtener una expresión final de la segunda derivada de $\eta_1(x, t)$.

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = (-1)^2 \langle f(x, t), \phi''(t) \rangle \quad (3.143)$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \phi''(t) dt$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4A}{(x_2 - x_1)^2} (x - vt - x_1)(x_2 - x + vt) \cdot H((x - vt - x_1)(x_2 - x + vt)) \phi''(t) dt$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \frac{4A}{(x_2 - x_1)^2} \int_{\frac{x-x_2}{v}}^{\frac{x-x_1}{v}} \left(\frac{x-x_1}{v} - t \right) v \left(t - \frac{x_2-x}{v} \right) v \phi''(t) dt$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \frac{4Av^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{t_2}^{t_1} (t_1 - t)(t - t_2) \phi''(t) dt$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \frac{4Av^2}{(x_2 - x_1)^2} \int_{t_2}^{t_1} [(t_1 + t_2)t - t_1 t_2 - t^2] \phi''(t) dt$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \frac{4Av^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[(t_1 + t_2) \int_{t_2}^{t_1} t \phi''(t) dt - t_1 t_2 \int_{t_2}^{t_1} \phi''(t) dt - \int_{t_2}^{t_1} t^2 \phi''(t) dt \right]$$

$$\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle = \frac{4Av^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[(t_1 + t_2) g_1 - t_1 t_2 g_2 - g_3 \right] \quad (3.144)$$

Donde, $t_1 = \frac{x-x_1}{v}$ y $t_2 = \frac{x-x_2}{v}$.

A continuación se calcula g_1 , g_2 y g_3 :

$$g_1 = \int_{t_2}^{t_1} t \phi''(t) dt \quad (3.145)$$

$$g_1 = t \phi' \Big|_{t_2}^{t_1} - \int_{t_2}^{t_1} \phi'(t) dt$$

$$g_1 = t_1 \phi'(t_1) - t_2 \phi'(t_2) - [\phi(t_1) - \phi(t_2)] \quad (3.146)$$

$$g_2 = \int_{t_2}^{t_1} \phi''(t) dt \quad (3.147)$$

$$g_2 = \phi'(t_1) - \phi'(t_2) \quad (3.148)$$

$$g_3 = \int_{t_2}^{t_1} t^2 \phi''(t) dt \quad (3.149)$$

$$g_3 = t^2 \phi'(t) \Big|_{t_2}^{t_1} - 2 \int_{t_2}^{t_1} t \phi'(t) dt$$

$$g_3 = t_1^2 \phi'(t_1) - t_2^2 \phi'(t_2) - 2 \left[t \phi(t) \Big|_{t_2}^{t_1} - \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \right]$$

$$g_3 = t_1^2 \phi'(t_1) - t_2^2 \phi'(t_2) - 2(t_1 \phi(t_1) - t_2 \phi(t_2)) + 2 \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \quad (3.150)$$

Teniendo ya expresiones para g_1 , g_2 y g_3 , se reemplazan en la ecuación (3.144), resultando:

$$\begin{aligned} \langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[(t_1 + t_2) \left(\phi'(t_1) - t_2 \phi'(t_2) - [\phi(t_1) - \phi(t_2)] \right) \right. \\ &\quad - t_1 t_2 \left(\phi'(t_1) - \phi'(t_2) \right) - \left(t_1^2 \phi'(t_1) - t_2^2 \phi'(t_2) \right) \\ &\quad \left. - 2(t_1 \phi(t_1) - t_2 \phi(t_2)) + 2 \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \right] \quad (3.151) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ \phi(t_1) (2 t_1 - (t_1 + t_2)) + \phi(t_2) ((t_1 + t_2) - 2 t_2) \right. \\ &\quad + \phi'(t_1) [-t_1^2 + t_1 (t_1 + t_2) - t_1 t_2] + \phi'(t_2) [t_2^2 + t_2 (t_1 + t_2) + t_1 t_2] \\ &\quad \left. - 2 \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ (t_1 - t_2) \phi(t_1) + (t_1 - t_2) \phi(t_2) - 2 \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \phi'(t_1) [t_1^2 - t_1 (t_1 + t_2) + t_1 t_2] + \phi'(t_2) [t_2^2 - t_2 (t_1 + t_2) + t_1 t_2] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ (t_1 - t_2) (\phi(t_1) + \phi(t_2)) - 2 \int_{t_2}^{t_1} \phi(t) dt \right\} \\
\langle \eta_1''(x, t), \phi(t) \rangle &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{v} \left[\delta \left(t - \frac{x - x_1}{v} \right) + \delta \left(t - \frac{x - x_2}{v} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 H \left(\left(t - \frac{x - x_2}{v} \right) \left(\frac{x - x_1}{v} - t \right) \right) \right\} \tag{3.152}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau)$ es:

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau) &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{v} \left[\delta \left(\tau - \frac{\xi - x_1}{v} \right) + \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) \right\} \tag{3.153}
\end{aligned}$$

La ecuación (3.153) se reemplaza en la ecuación (3.29), pero el interés de este trabajo de investigación es determinar el caso *runup*, es decir, cuando $x = 0$. Por lo tanto $\eta(0, t)$ resulta:

$$\eta(0, t) = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \int_0^t \left\{ \partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau) \right\} \sin(\sqrt{g\alpha} k(t - \tau)) d\tau d\xi dk \tag{3.154}$$

$$\eta(0, t) = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \int_{-\infty}^\infty \left\{ \partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau) \right\} H(\tau) H(t - \tau) \sin(\sqrt{g\alpha} k(t - \tau)) d\tau d\xi dk \tag{3.155}$$

Reemplazando la ecuación (3.153), $\partial_{tt}^2 \eta_1(\xi, \tau)$, en la ecuación (3.155), obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) &= \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \iint_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \int_{-\infty}^\infty \left\{ \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left[\frac{x_2 - x_1}{v} \left(\delta \left(\tau - \frac{\xi - x_1}{v} \right) + \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) \right\} H(\tau) H(t - \tau) \sin(\sqrt{g\alpha} k(t - \tau)) d\tau d\xi dk \tag{3.156}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(0, t) &= \frac{8 A v^2}{\sqrt{g \alpha} (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{v} \iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_1}{v} \right) H(\tau) H(t - \tau) \right. \\
&\quad \cdot \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \\
&+ \frac{x_2 - x_1}{v} \iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) H(t - \tau) H(\tau) \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \\
&- 2 \iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) H(t - \tau) H(\tau) \\
&\quad \cdot \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \left. \right\} \\
\eta(0, t) &= \frac{8 A v^2}{\sqrt{g \alpha} (x_2 - x_1)^2} \left\{ \frac{x_2 - x_1}{v} \left[\iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_1}{v} \right) H(\tau) H(t - \tau) \right. \right. \\
&\quad \cdot \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \\
&+ \left. \left. \iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) \delta \left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) H(t - \tau) H(\tau) \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \right] \right. \\
&- 2 \iint_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) H(t - \tau) H(\tau) \\
&\quad \cdot \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.157}$$

Introduciendo las funciones auxiliares $\eta_1(0, t)$, $\eta_2(0, t)$ y $\eta_3(0, t)$, se obtiene,

$$\eta(0, t) = \frac{8 A v^2}{\sqrt{g \alpha} (x_2 - x_1)^2} \left\{ -2 \eta_1(0, t) + \frac{x_2 - x_1}{v} [\eta_2(0, t) + \eta_3(0, t)] \right\} \tag{3.158}$$

Primero se comienza a desarrollar la integral $\eta_1(0, t)$ y luego $\eta_2(0, t)$ y $\eta_3(0, t)$.

$$\begin{aligned}
\eta_1(0, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) H(t - \tau) \\
&\quad \cdot H(\tau) \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) d\tau d\xi dk \\
\eta_1(0, t) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty J_0(2 k \sqrt{\xi}) \sin(\sqrt{g \alpha} k (t - \tau)) dk \right) d\xi \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^\infty H \left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v} \right) \left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau \right) \right) H(t - \tau) H(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{3.159}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1(0, t) &= \int_0^\infty \left(\frac{H(\alpha g(t-\tau)^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g(t-\tau)^2 - 4\xi}} \right) d\xi \\
&\cdot \int_{-\infty}^\infty H\left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v}\right)\left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau\right)\right) H(t-\tau) H(\tau) d\tau \\
\eta_1(0, t) &= \int_{-\infty}^\infty H(t-\tau) H(\tau) \left(\int_0^\infty H\left(\left(\tau - \frac{\xi - x_2}{v}\right)\left(\frac{\xi - x_1}{v} - \tau\right)\right) \right. \\
&\cdot \left. \frac{H(\alpha g(t-\tau)^2 - 4\xi)}{\sqrt{\alpha g(t-\tau)^2 - 4\xi}} d\xi \right) d\tau \tag{3.160}
\end{aligned}$$

$$\eta_1(0, t) = \int_{-\infty}^\infty H(t-\tau) H(\tau) \int_{A_\tau} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha g(t-\tau)^2 - 4\xi}} d\tau \tag{3.161}$$

$$\eta_1(0, t) = \int_{-\infty}^\infty H(t-\tau) H(\tau) \eta_1^0(0, t) d\tau \tag{3.162}$$

Donde A_τ se define como:

$$A_\tau = [x_1 + v\tau, x_2 + v\tau] \cap \left[0, \frac{1}{4}\alpha g(t-\tau)^2\right] \tag{3.163}$$

A partir de la reciente definición, se desglosan 3 casos, los cuales se enumeran a continuación:

$$\begin{aligned}
\text{Si } \frac{1}{4}\alpha g(t-\tau)^2 < x_1 + v\tau &\iff f_1(\tau) < 0, \\
A_\tau &= \emptyset \tag{3.164}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } x_1 + v\tau < \frac{1}{4}\alpha g(t-\tau)^2 < x_2 + v\tau &\iff f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0, \\
A_\tau &= \left[x_1 + v\tau, \frac{1}{4}\alpha g(t-\tau)^2\right] \tag{3.165}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } \frac{1}{4}\alpha g(t-\tau)^2 > x_2 + v\tau &\iff f_2(\tau) \geq 0, \\
A_\tau &= [x_1 + v\tau, x_2 + v\tau] \tag{3.166}
\end{aligned}$$

Donde $f_1(\tau)$ y $f_2(\tau)$ se definen como,

$$\begin{aligned}
f_1(\tau) &: \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4}(t^2 - 2t\tau + \tau^2) - x_1 - v\tau \tag{3.167} \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4}t^2 - \frac{\alpha g}{2}t\tau + \frac{\alpha g}{4}\tau^2 - x_1 - v\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} t^2 - \frac{\alpha g}{2} t \tau - v \tau + \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - x_1 \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} t^2 - \left(\frac{\alpha g}{2} t + v\right) \tau + \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - x_1 \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - \frac{\alpha g}{2} \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau + \frac{\alpha g}{4} t^2 - x_1 \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \left(\tau^2 - 2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau + t^2 - \frac{4x_1}{\alpha g}\right) \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \left(\tau^2 - 2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau - (t_{c,1}^2 - t^2)\right) \\
f_1(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} (\tau - \tau_1^{(1)}) (\tau - \tau_2^{(1)}) \tag{3.168}
\end{aligned}$$

$f_2(\tau) :$

$$\begin{aligned}
f_2(\tau) &= -(x_2 + v \tau) + \frac{1}{4} \alpha g (t - \tau)^2 \tag{3.169} \\
f_2(\tau) &= -(x_2 + v \tau) + \frac{\alpha g}{4} (t^2 - 2t\tau + \tau^2) \\
f_2(\tau) &= -(x_2 + v \tau) + \frac{\alpha g}{4} t^2 - \frac{\alpha g}{2} t \tau + \frac{\alpha g}{4} \tau^2 \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} t^2 - \frac{\alpha g}{2} t \tau - v \tau + \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - x_2 \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} t^2 - \left(\frac{\alpha g}{2} t + v\right) \tau + \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - x_2 \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \tau^2 - \frac{\alpha g}{2} \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau + \frac{\alpha g}{4} t^2 - x_2 \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \left(\tau^2 - 2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau + t^2 - \frac{4x_2}{\alpha g}\right) \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} \left(\tau^2 - 2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right) \tau - (t_{c,2}^2 - t^2)\right) \\
f_2(\tau) &= \frac{\alpha g}{4} (\tau - \tau_1^{(2)}) (\tau - \tau_2^{(2)}) \tag{3.170}
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.168) se determinan las raíces mediante la siguiente ecuación:

$$\tau_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -(t_{c,1}^2 - t^2)} \right] \tag{3.171}$$

$$\tau_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + 4(t_{c,1}^2 - t^2)} \right] \tag{3.172}$$

$$\tau_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t^2 + \frac{4v}{\alpha g} t + \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} \right) + 4 \left(\frac{4x_1}{\alpha g} - t^2 \right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
\tau_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm 2 \sqrt{\left(t^2 + \frac{4v}{\alpha g} t + \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} \right) + \left(\frac{4x_1}{\alpha g} - t^2 \right)} \right] \\
\tau_{1,2}^{(1)} &= t + \frac{2v}{\alpha g} \pm \sqrt{\frac{4}{(\alpha g)^2} (\alpha g (x_1 + vt) + v^2)} \\
\tau_{1,2}^{(1)} &= t + \frac{2v}{\alpha g} \pm \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_1 + vt) + v^2} \tag{3.173}
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.173) se obtienen las raíces de la ecuación cuadrática (3.168).

$$\tau_2^{(1)} = t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_1 + vt) + v^2} \tag{3.174}$$

$$\tau_1^{(1)} = t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_1 + vt) + v^2} \tag{3.175}$$

Donde $\tau_2^{(1)}$ es la menor de las soluciones. Por otra parte se define la función $f_2(\tau)$ de una manera similar a como se definió $f_1(\tau)$, cuyo procedimiento se muestra a continuación.

De la ecuación (3.170) se determinan las raíces $\tau_1^{(2)}$ y $\tau_2^{(2)}$ a través de la fórmula general para obtener raíces de una ecuación cuadrática, resultando:

$$\tau_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2 \cdot 1} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -(t_{c,2}^2 - t^2)} \right] \tag{3.176}$$

$$\tau_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + 4(t_{c,2}^2 - t^2)} \right]$$

$$\tau_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm \sqrt{4 \left(t^2 + \frac{4v}{\alpha g} t + \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} \right) + 4 \left(\frac{4x_2}{\alpha g} - t^2 \right)} \right]$$

$$\tau_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[2 \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \pm 2 \sqrt{\left(t^2 + \frac{4v}{\alpha g} t + \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} \right) + \left(\frac{4x_2}{\alpha g} - t^2 \right)} \right]$$

$$\tau_{1,2}^{(2)} = t + \frac{2v}{\alpha g} \pm \sqrt{\frac{4}{(\alpha g)^2} (\alpha g (x_2 + vt) + v^2)}$$

$$\tau_{1,2}^{(2)} = t + \frac{2v}{\alpha g} \pm \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_2 + vt) + v^2} \tag{3.177}$$

Teniendo ya las raíces de las ecuaciones $f_1(\tau)$ y $f_2(\tau)$, el paso siguiente es determinar el

valor de la integral (3.162).

$$\eta_1^0(0, t) = \int_{A_\tau} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4\xi}} d\tau \quad (3.178)$$

$$\eta_1^0(0, t) = -\frac{1}{2} \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4\xi} \Big|_{A_\tau} \quad (3.179)$$

Para el caso de $f_1(\tau) < 0$,

$$\eta_1^0(0, t) = 0 \quad (3.180)$$

Para el caso $f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0$,

$$\eta_1^0(0, t) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} - 0 \right] \quad (3.181)$$

Para el caso $f_2(\tau) \geq 0$,

$$\eta_1^0(0, t) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} - \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_2 + v\tau)} \right] \quad (3.182)$$

Análisis:

$$\begin{aligned} f_1(\tau) < 0 &\iff (\tau - \tau_1^{(1)})(\tau - \tau_1^{(2)}) < 0, \\ \tau &\in [\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}] \end{aligned} \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0 &\iff f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0, \\ \tau &\in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}] \cup [\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]^c \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} f_2(\tau) \geq 0 &\iff f_2(\tau) \geq 0, \\ \tau &\in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}]^c \end{aligned} \quad (3.185)$$

Antes de determinar los límites de integración, hay que verificar las siguientes desigualdades:
 $\tau_1^{(1)} > \tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)} > \tau_2^{(1)}$ y $\tau_1^{(2)} > \tau_2^{(1)}$.

$$\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)} = \frac{2}{\alpha g} \left[\sqrt{\alpha g (x_2 + vt) + v^2} - \sqrt{\alpha g (x_1 + vt) + v^2} \right] > 0 \quad (3.186)$$

$$\tau_2^{(2)} - \tau_2^{(1)} = \tau_1^{(1)} - \tau_2^{(2)} > 0 \quad (3.187)$$

$$\tau_1^{(2)} - \tau_2^{(1)} = \frac{2}{\alpha g} \left[\sqrt{\alpha g (x_1 + vt) + v^2} - \sqrt{\alpha g (x_2 + vt) + v^2} \right] < 0 \quad (3.188)$$

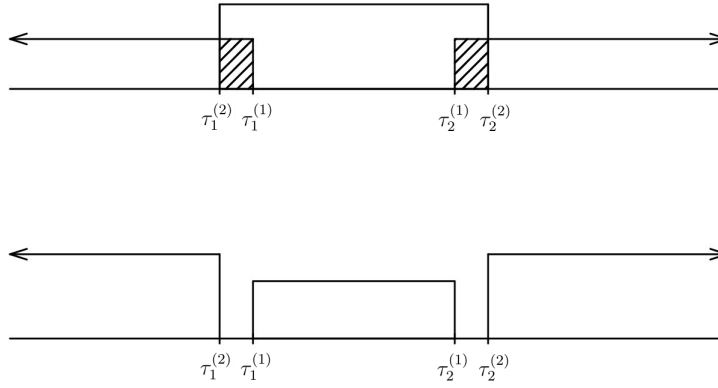


Figura 3.7: Análisis del caso cuando $f_2(\tau) < 0 \wedge f_1(\tau) \geq 0$. (Fuente: Elaboración propia)

Finalmente el dominio de τ que define los límites de integración en la ecuación (3.162) es:

$$f_1(\tau) < 0 \iff (\tau - \tau_1^{(1)})(\tau - \tau_1^{(2)}) < 0, \\ \tau \in [\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}] \quad (3.189)$$

$$f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0 \iff f_1(\tau) \geq 0, f_2(\tau) < 0, \\ \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_1^{(1)}] \cup [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}] \quad (3.190)$$

$$f_2(\tau) \geq 0 \iff f_2(\tau) \geq 0, \\ \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}]^c \quad (3.191)$$

Ya determinados el conjunto de valores de τ donde $\eta_1^0(0, t)$ está definida, la ecuación (3.162) queda expresada de la siguiente manera:

$$\eta_1(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(-f_1(\tau)) H(t - \tau) H(\tau) \left[\left(H((\tau - \tau_1^{(2)})(\tau_1^{(1)} - \tau)) \right. \right. \\ + H((\tau - \tau_2^{(1)})(\tau_2^{(2)} - \tau)) \left. \right) \frac{1}{2} \sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} \\ + H((\tau_1^{(2)} - \tau)(\tau - \tau_2^{(2)})) \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_2 + v\tau)} \right) \right] d\tau \quad (3.192)$$

Antes de calcular la integral (3.192) hay que determinar si $\tau_2^{(1,2)} > 0$ y $\tau_2^{(1,2)} - t > 0$, ambos cálculos se muestran a continuación.

Si $\tau_2^{(1,2)} > 0$:

$$\tau_2^{(1,2)} = t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2} \quad (3.193)$$

$$\tau_2^{(1,2)} = t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2} \left[\frac{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}} \right]$$

$$\tau_2^{(1,2)} = \frac{\left(t + \frac{2v}{\alpha g}\right)^2 - \frac{4}{\alpha g} (\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2)}{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}$$

$$\tau_2^{(1,2)} = \frac{t^2 + \cancel{\frac{4v}{\alpha g}t} + \cancel{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2}} - \frac{4x_{1,2}}{\alpha g} - \cancel{\frac{4v}{\alpha g}t} - \cancel{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2}}}{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}$$

$$\tau_2^{(1,2)} = \frac{t^2 - \frac{4x_{1,2}}{\alpha g}}{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}$$

$$\tau_2^{(1,2)} = \frac{t^2 - t_{c,(1,2)}^2}{t + \frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}} \geq 0 \implies t^2 \geq t_{c,(1,2)}^2 = \frac{4x_{1,2}}{\alpha g} \quad (3.194)$$

Si $\tau_2^{(1,2)} - t > 0$:

$$\tau_2^{(1,2)} - t = t + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2} - t \quad (3.195)$$

$$\tau_2^{(1,2)} - t = \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2} \left[\frac{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}} \right]$$

$$\tau_2^{(1,2)} - t = \frac{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2} - \frac{4}{(\alpha g)^2} (\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2)}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}$$

$$\tau_2^{(1,2)} - t = \frac{\cancel{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2}} - \frac{4x_{1,2}}{\alpha g} - \cancel{\frac{4v}{\alpha g}t} - \cancel{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2}}}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}}$$

$$\tau_2^{(1,2)} - t = \frac{-\frac{4}{\alpha g} (x_{1,2} + vt)}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\alpha g (x_{1,2} + vt) + v^2}} < 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.196)$$

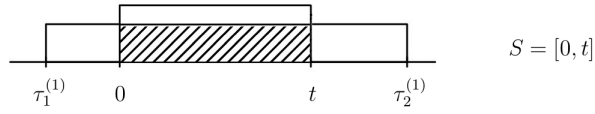
Por lo tanto, se concluye que:

$$\tau_2^{(1,2)} < t, \quad \forall t > 0 \quad (3.197)$$

Análisis gráfico de los 3 casos que permiten determinar los límites de integración con respecto a τ .

Si $\tau \in [\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$:

Si $t < t_{c,1}$



Si $t \geq t_{c,1}$

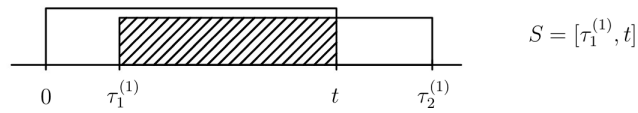
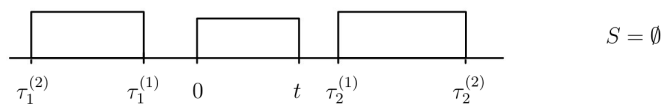


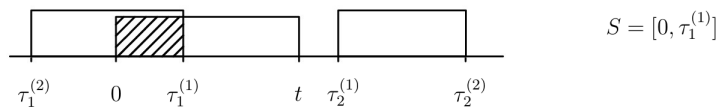
Figura 3.8: Análisis del caso cuando $\tau \in [\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}]$. (Fuente: Elaboración propia)

Si $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_1^{(1)}] \cup [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}]$:

Si $0 < t < t_{c,1} < t_{c,2}$



Si $t_{c,1} < t < t_{c,2}$



Si $t \geq t_{c,2}$

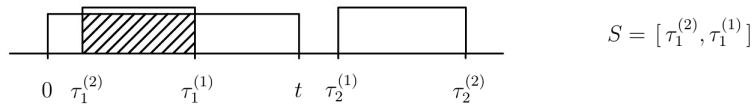
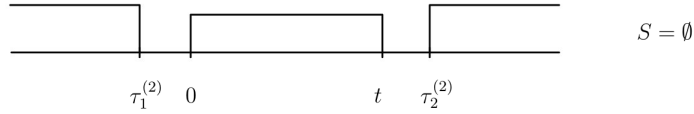


Figura 3.9: Análisis del caso cuando $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_1^{(1)}] \cup [\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}]$. (Fuente: Elaboración propia)

Si $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}]^c$:

Si $t < t_{c,2}$



Si $t \geq t_{c,2}$

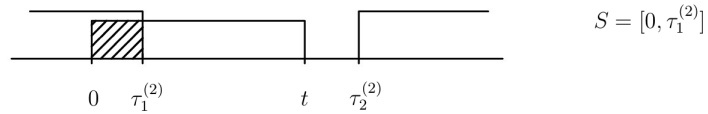


Figura 3.10: Análisis del caso cuando $\tau \in [0, t] \wedge \tau \in [\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}]^c$. (Fuente: Elaboración propia)

Cálculo de $\eta_1(0, t)$:

Si $0 \leq t < t_{c,1}$:

$$\eta_1^1(0, t) = \int_0^t 0 dt + \int_{\emptyset} 0 dt + \int_{\emptyset} 0 dt \quad (3.198)$$

$$\eta_1^1(0, t) = 0 \quad (3.199)$$

Si $t_{c,1} \leq t \leq t_{c,2}$:

$$\begin{aligned} \eta_1^2(0, t) &= \int_{\tau_1^{(1)}}^t 0 dt + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(1)}} \sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\emptyset} \sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.200)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(1)}} \sqrt{\alpha g(t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} d\tau \quad (3.201)$$

Si $t \geq t_{c,2}$:

$$\begin{aligned} \eta_1^3(0, t) &= \int_{\tau_1^{(1)}}^t 0 dt + \frac{1}{2} \int_{\tau_1^{(2)}}^{\tau_1^{(1)}} \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v \tau)} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(2)}} \left[\sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v \tau)} - \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_2 + v \tau)} \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.202)$$

$$\begin{aligned} \eta_1^3(0, t) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(2)}} \left[\sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v \tau)} - \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_2 + v \tau)} \right] d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_1^{(2)}}^{\tau_1^{(1)}} \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v \tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.203)$$

La primitiva de la integral a resolver se puede escribir de la siguiente manera:

$$J_i = \int \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_i + v \tau)} d\tau \quad (3.204)$$

$$J_i = \int \sqrt{\alpha g \tau^2 - (2\alpha g t + 4v)\tau + \alpha g t^2 - 4x_i} d\tau \quad (3.205)$$

Donde,

$$P(\tau) = a\tau^2 + b\tau + c \quad (3.206)$$

$$P(\tau) = a \left(\tau + \frac{b}{2a} \right)^2 - \Delta \quad (3.207)$$

Δ se define como,

$$\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (3.208)$$

$$\Delta = \frac{1}{\alpha g} \left[(\alpha g t + 2v)^2 - \alpha g (\alpha g t^2 - 4x_i) \right] \quad (3.209)$$

$$\Delta = \left[\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 - (t_{c,i}^2 - t^2) \right] > 0 \quad (3.210)$$

La sustitución $\cosh(u) = \sqrt{\frac{a}{\Delta}} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right)$ permite resolver la primitiva J_i .

$$J_i = \frac{1}{2} \left[\left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{P(\tau)} - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{a} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{P(\tau)} \right) \right] + C \quad (3.211)$$

Donde,

$$a = \alpha g \quad (3.212)$$

$$b = -2(\alpha g t + 2v) \quad (3.213)$$

$$c = \alpha g t^2 - 4x_i \quad (3.214)$$

Volviendo a la expresión (3.211), se tiene que J_i tiene la siguiente ecuación equivalente:

$$J_i = \frac{1}{2} \left[\left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{P(\tau)} - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\tau + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{P(\tau)}{a}} \right) \right] + C \quad (3.215)$$

Como $\Delta > 0$, $P(\tau)$ se puede reescribir de la siguiente manera, $P(\tau) = a(\tau_1)(\tau - \tau_2)$.

El término $\sqrt{P(\tau)}$ sólo tiene sentido en el dominio $\tau \in [\tau_1, \tau_2]^c$. No obstante, la sustitución anterior es válida si y sólo si, $\cosh(u) \geq 1$, por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{a}{\Delta}} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \geq 1 \iff \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \geq \sqrt{\frac{\Delta}{a}} \quad (3.216)$$

$$\iff \tau \geq \sqrt{\frac{\Delta}{a}} - \frac{b}{2a} \quad (3.217)$$

$$\iff \tau \geq \tau_2 \quad (3.218)$$

En otro caso, se debe usar la sustitución $\cosh(u) = -\sqrt{\frac{a}{\Delta}} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right)$, y realizando el mismo análisis anterior, se determina el dominio de τ para este caso en particular.

$$-\sqrt{\frac{a}{\Delta}} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \geq 1 \iff \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \leq -\sqrt{\frac{\Delta}{a}} \quad (3.219)$$

$$\iff \tau \leq - \left(\sqrt{\frac{\Delta}{a}} + \frac{b}{2a} \right) \quad (3.220)$$

$$\iff \tau \leq \tau_1 \quad (3.221)$$

En este caso, la primitiva J_i que se obtiene es:

$$J_i = \frac{1}{2} \left[\left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{P(\tau)} + \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{P(\tau)} - \sqrt{a} \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \right) \right] + C \quad (3.222)$$

$$J_i = \frac{1}{2} \left[\left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \sqrt{P(\tau)} + \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{\frac{P(\tau)}{a}} - \left(\tau + \frac{b}{2a} \right) \right) \right] + C \quad (3.223)$$

A continuación se evalúa la integral $\eta_1(0, t)$:

$$\eta_1^1(0, t) = 0 \quad (3.224)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{1}{4} \left[-\sqrt{\frac{\Delta}{a}} \sqrt{0} + \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{0} + \sqrt{\Delta} \right) - \frac{b}{2a} \sqrt{P_1(0)} - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{\frac{P_1(0)}{a}} - \frac{b}{2a} \right) \right] \quad (3.225)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln(\sqrt{\Delta}) - \frac{b}{2a} \sqrt{c} - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{2a} \right) \right] \quad (3.226)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{\alpha g} \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2 \right) \frac{1}{2} \left[\ln \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2 \right) - \ln \left(\sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \right] + \sqrt{\alpha g} \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} \right\} \quad (3.227)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{\sqrt{\alpha g}}{4} \left\{ \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g}} \right) + \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} \right\} \quad (3.228)$$

$$\eta_1^2(0, t) = \frac{\sqrt{\alpha g}}{4} F_1(t) \quad (3.229)$$

Cabe hacer notar que $\eta_1^2(0, t_{c,1}) = 0$, es decir, que $\eta_1^2(0, t)$ es continua en $t = t_{c,1}$.

$$\eta_1^3(0, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(1)}} \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_1 + v\tau)} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1^{(2)}} \sqrt{\alpha g (t - \tau)^2 - 4(x_2 + v\tau)} d\tau$$

$$\eta_1^3(0, t) = \frac{\sqrt{\alpha g}}{4} \left\{ \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,1}^2 - t^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g}} \right) + \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,1}^2} - \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,2}^2 - t^2 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,2}^2 - t^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,2}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g}} \right) - \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,2}^2} \right\} \quad (3.230)$$

$$\eta_1^3(0, t) = \frac{\sqrt{\alpha g}}{4} \left\{ F_1(t) - F_2(t) \right\} \quad (3.231)$$

Claramente $\eta_1^3(0, t_{c,2}) = \eta_1^2(0, t_{c,2})$, es decir, que $\eta_1(0, t)$ es continua en $t = t_{c,2}$. Por lo tanto, se concluye que $\eta_1(0, t)$ es continua en $t \in [0, \infty)$.

Finalmente se tiene que, $\eta_1(0, t)$ es:

$$\eta_1(0, t) = \frac{\sqrt{\alpha g}}{4} \left\{ F_1(t) H(t - t_{c,1}) H(t_{c,2} - t) + (F_1(t) - F_2(t)) H(t - t_{c,2}) \right\} \quad (3.232)$$

Donde:

$$F_i(t) = \left(\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,i}^2 - t^2 \right) \ln \left(\frac{\sqrt{\left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right)^2 + t_{c,i}^2 - t^2}}{\sqrt{t^2 - t_{c,i}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g}} \right) + \left(t + \frac{2v}{\alpha g} \right) \sqrt{t^2 - t_{c,i}^2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.233)$$

A continuación se calculará la integral $\eta_2(0, t)$, resultando:

$$\eta_2(0, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2k\sqrt{\xi}) \int_{-\infty}^\infty H(\tau) H(t - \tau) \delta\left(\tau - \frac{\xi - x_1}{v}\right) \sin(\sqrt{g\alpha} k(t - \tau)) d\tau dk d\xi \quad (3.234)$$

$$\eta_2(0, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty H\left(\frac{\xi - x_1}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_1}{v}\right) J_0(2k\sqrt{\xi}) \sin\left(\sqrt{g\alpha} k\left(t - \frac{\xi - x_1}{v}\right)\right) dk d\xi \quad (3.235)$$

El paso siguiente es definir con respecto a qué variable se va a integrar. Por comodidad se elige primero integrar con respecto a k y luego ξ .

$$\eta_2(0, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty H\left(\frac{\xi - x_1}{v}\right) H\left(t - \frac{\xi - x_1}{v}\right) \frac{H\left(\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_1}{v}\right)\right)^2 - 4\xi\right)}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_1}{v}\right)\right)^2 - 4\xi}} d\xi \quad (3.236)$$

Los límites de integración se definen en base a las tres funciones de Heaviside. El caso de análisis es el siguiente:

$$\xi - x_1 \geq 0, \quad \implies \xi \geq x_1 \quad (3.237)$$

$$vt - (\xi - x_1) \geq 0, \quad \implies x_1 + vt \geq \xi \quad (3.238)$$

$$x_1 \leq \xi \leq x_1 + vt \quad (3.239)$$

El segundo caso de análisis es:

$$\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_1}{v} \right) \right)^2 - 4\xi \geq 0 \quad (3.240)$$

$$\alpha g \left(t - (\xi - x_1) \right)^2 - 4\xi v^2 \geq 0 \quad (3.241)$$

$$(\xi - (x_1 + vt))^2 - \frac{4v^2}{\alpha g} \xi \geq 0 \quad (3.242)$$

$$\xi^2 - 2 \left[(x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right] \xi + (x_1 + vt)^2 \geq 0 \quad (3.243)$$

Donde $\xi_{1,2}$ corresponde a la solución de la ecuación cuadrática (3.243), es decir,

$$\xi_{1,2}^{(1)} = x_1 + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \pm \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} \quad (3.244)$$

En esta ocasión ξ_1 y ξ_2 corresponden a la solución mayor y menor de la ecuación (3.243) respectivamente.

$$\xi_2^{(1)} = x_1 + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} \quad (3.245)$$

$$\xi_1^{(1)} = x_1 + vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} \quad (3.246)$$

Se visualiza claramente que $\xi_2^{(1)} > x_1 + vt$ para todo valor positivo de t . Solamente falta

determinar si $\xi_2^{(1)} - x_1 < 0$.

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = \cancel{x_1} + vt - \frac{2v^2}{\alpha g} - \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} - \cancel{x_1} \quad (3.247)$$

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = vt + \frac{2v^2}{\alpha g} - \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}$$

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = \frac{\left[vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} \right]}{\left[vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} \right]}$$

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = \frac{\left(vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} \left(\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2 \right)}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}}$$

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = \frac{\left(vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - \left(vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - 2 \left(vt + \frac{2v^2}{\alpha g} \right) x_1 - x_1^2 + (x_1 + vt)^2}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}}$$

$$\xi_1^{(1)} - x_1 = \frac{v^2 \left(t^2 - \frac{4x_1}{\alpha g} \right)}{vt + \frac{2v^2}{\alpha g} + \frac{2v}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}} \quad (3.248)$$

Si $t \geq t_{c,1}$, $\xi_1^{(1)} \geq x_1$. Si $t < t_{c,1}$, $\xi_1^{(1)} < x_1$.



Figura 3.11: Esquema entre $x_1 + vt$ y las raíces $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$ de la ecuación (3.243). (Fuente: Elaboración propia)

La figura 3.11 muestra el conjunto de valores donde la función $x_1 + vt$ y las raíces de la ecuación cuadrática (3.243) se acoplan. Claramente se visualiza que, si $0 < t \leq t_{c,1}$, $S = \emptyset$ (S corresponde al conjunto de valores que intersectan las curvas $x_1 + vt$ y las raíces $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$).

A continuación se verifica si se cumple la condición $\xi_1^{(1)} > (x_1 + vt)$:

$$\xi_1^{(1)} - (x_1 + vt) = \cancel{x_1 + vt} + \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2} - \cancel{(x_1 + vt)} \quad (3.249)$$

$$\xi_1^{(1)} - (x_1 + vt) = \frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}$$

$$\cdot \left[\frac{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}}{\frac{2v}{\alpha g} - \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}} \right]$$

$$\xi_1^{(1)} - (x_1 + vt) = \frac{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2} - \frac{4}{(\alpha g)^2} \left(\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2 \right)}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}}$$

$$\xi_1^{(1)} - (x_1 + vt) = \frac{\frac{4v^2}{(\alpha g)^2} - \cancel{(x_1 + vt)^2} - \frac{4v^2}{\alpha g} (x_1 + vt) - \frac{4v^2}{(\alpha g)^2} + \cancel{(x_1 + vt)^2}}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}}$$

$$\xi_1^{(1)} - (x_1 + vt) = \frac{-\frac{4v^2}{\alpha g} (x_1 + vt)}{\frac{2v}{\alpha g} + \frac{2}{\alpha g} \sqrt{\left((x_1 + vt) + \frac{2v^2}{\alpha g} \right)^2 - (x_1 + vt)^2}} < 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.250)$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\xi_1^{(1)} < (x_1 + vt), \quad \forall t > 0 \quad (3.251)$$

A continuación se determina el paso final para obtener los límites de integración de la ecuación (3.236).

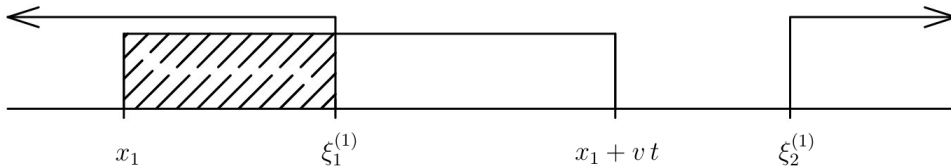


Figura 3.12: Esquema entre x_1 , $x_1 + vt$, $\xi_1^{(1)}$ y $\xi_2^{(1)}$, donde $\xi_1^{(1)}$ es la menor de las raíces provenientes de la ecuación (3.243). (Fuente: Elaboración propia)

La figura 3.12 muestra el conjunto de valores entre $[x_1, x_1 + v t]$ y $[\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}]^c$ se superponen. Claramente se visualiza que, si $t > t_{c,1}$, $S = [x_1, \xi_1^{(1)}]$.

Finalmente se tiene que $\eta_2(0, t)$ es:

$$\eta_2(0, t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq t_{c,1}. \\ \int_{x_1}^{\xi_1^{(1)}(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha g \left(t - \left(\frac{\xi - x_1}{v} \right)^2 \right) - 4\xi}} & , t > t_{c,1}. \end{cases} \quad (3.252)$$

Para $t > t_{c,1}$, se tiene que:

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \int_{x_1}^{\xi_1^{(1)}(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\alpha g (\xi - x_1 - v t)^2 - \frac{4v^2}{\alpha g} \xi}} \quad (3.253)$$

$$\eta_2(0, t) = \frac{v}{\sqrt{\alpha g}} \eta_2^0(0, t) \quad (3.254)$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \xi_2^{(1)} - (\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}) y^2$ y $d\xi = -2(\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}) y dy$ en la integral de la ecuación (3.254), ésta se modifica de la siguiente manera:

$$\eta_2^0(0, t) = \int_{x_1}^{\xi_1^{(1)}(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2^{(1)} - \xi)(\xi_1^{(1)} - \xi)}} \quad (3.255)$$

$$\eta_2^0(0, t) = - \int_{\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - \xi}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}}}^1 \frac{2(\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}) y dy}{\sqrt{(\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}) y^2 \cdot (\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}) (y^2 - 1)}}$$

$$\eta_2^0(0, t) = -2 \int_{y_0}^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad , y_0 = \sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}} \quad (3.256)$$

Sustituyendo $y = \cosh(u)$ y $dy = \sinh(u) du$ en (3.256), da como resultado:

$$\eta_2^0(0, t) = -2 \int_{u_0}^0 \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad , \quad u_0 = \ln \left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1} \right) \quad (3.257)$$

$$\eta_2^0(0, t) = 2 \ln \left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1} \right) \quad (3.258)$$

$$\eta_2^0(0, t) = 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} + \sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} - 1} \right) \quad (3.258)$$

$$\eta_2^0(0, t) = 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}} \right) \quad (3.259)$$

$$\eta_2^0(0, t) = 2 \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}} \right) H(t - t_{c,1}) \quad (3.260)$$

Finalmente se ha llegado al resultado de la integral (3.255), por lo que (3.254) resulta:

$$\eta_2(0, t) = \frac{2v}{\sqrt{\alpha g}} \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}} \right) H(t - t_{c,1}) \quad (3.261)$$

Realizando el mismo análisis se concluye que $\eta_3(0, t)$ es:

$$\eta_3(0, t) = \frac{2v}{\sqrt{\alpha g}} \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(2)} - x_1}{\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(2)} - x_1}{\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}}} \right) H(t - t_{c,2}) \quad (3.262)$$

La expresión definitiva de $\eta(0, t)$ se determina a través del reemplazo de las ecuaciones

(3.232), (3.261) y (3.262), resultando:

$$\eta(0, t) = \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ -2 \eta_1(0, t) + \frac{x_2 - x_1}{v} [\eta_2(0, t) + \eta_3(0, t)] \right\} \quad (3.263)$$

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha g}}{2} \left\{ F_1(t) H(t - t_{c,1}) H(t_{c,2} - t) + (F_1(t) - F_2(t)) H(t - t_{c,2}) \right\} \right. \\ &+ \frac{(x_2 - x_1)}{v} \left[\frac{2v}{\sqrt{\alpha g}} \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(1)} - x_1}{\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}}} \right) H(t - t_{c,1}) \right. \\ &\left. \left. + \frac{2v}{\sqrt{\alpha g}} \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(2)} - x_1}{\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(2)} - x_1}{\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}}} \right) H(t - t_{c,2}) \right] \right\} \frac{2}{\sqrt{\alpha g}} \quad (3.264) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(0, t) &= \frac{4 A v^2}{(x_2 - x_1)^2} \left\{ - \left[F_1(t) H(t - t_{c,1}) H(t_{c,2} - t) + (F_1(t) - F_2(t)) H(t - t_{c,2}) \right] \right. \\ &\left. + \frac{4(x_2 - x_1)}{\alpha g} \left[G_1(t) H(t - t_{c,1}) + G_2(t) H(t - t_{c,2}) \right] \right\} \quad (3.265) \end{aligned}$$

Donde, $\xi_{1,2}^{(i)} = x_i + v \tau_{1,2}^{(i)}$.

$$G_i(t) = \ln \left(\sqrt{\frac{\xi_2^{(i)} - x_i}{\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)}} + \sqrt{\frac{\xi_1^{(i)} - x_i}{\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)}}} \right) \quad (3.266)$$

$$G_i(t) = \ln \left(\sqrt{\frac{\tau_2^{(i)}}{\tau_2^{(i)} - \tau_1^{(i)}} + \sqrt{\frac{\tau_1^{(i)}}{\tau_2^{(i)} - \tau_1^{(i)}}} \right) \quad (3.267)$$

$$G_i(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_2^{(i)} + \tau_1^{(i)} + 2\sqrt{\tau_1^{(i)} \tau_2^{(i)}}}{\tau_2^{(i)} - \tau_1^{(i)}} \right) \quad (3.268)$$

$$G_i(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-(b/a) + 2\sqrt{c/a}}{2\sqrt{\Delta/a}} \right) \quad (3.269)$$

$$G_i(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{t^2 - t_{c,i}^2} + t + \frac{2v}{\alpha g}}{\sqrt{(t + \frac{2v}{\alpha g})^2 + t_{c,i}^2 - t^2}} \right) \quad (3.270)$$

La ecuación (3.265) representa la solución de la ecuación lineal de agua poco profunda inhomogénea evaluada en $x = 0$, cuyo término forzante corresponde a una función parabólica invertida. Esta solución es continua, diferenciable (salvo en $x = x_1$ y $x = x_2$), pero este modelo no presenta singularidades –caso contrario a la solución (3.140)–. Por lo tanto, este caso de estudio será el modelo analítico definitivo propuesto en este trabajo de tesis para modelar un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra.

3.5. Modelo de caída de meteorito como generador de un *tsunami* por impacto

Las funciones propias se definen como la forma funcional de las componentes horizontales y verticales del movimiento de la onda versus la profundidad en el océano para una frecuencia de onda específica. Las funciones propias para el caso *tsunami* describen el movimiento de la onda en un modo *tsunami* de una frecuencia particular, es decir, que presentan grandes periodos y longitudes de onda larga (Ward, 2010).

Se considera un sistema (x, y, z) donde \hat{x} tiene dirección hacia el Norte, \hat{y} cuya dirección es hacia el Este y \hat{z} tiene dirección positiva hacia abajo. Las componentes de las funciones propias horizontal $\eta_x(\omega, z)$ y vertical $\eta_z(\omega, z)$ para el caso *tsunami*.

$$\eta_x(\omega, z) = A_z \frac{-i k(\omega) g \sinh[k(\omega)(H - z)]}{\omega^2 \cosh(k(\omega) H)} e^{i(k(\omega)x - \omega t)} \quad (3.271)$$

$$\eta_z(\omega, z) = A_z \frac{k(\omega) g \cosh[k(\omega)(H - z)]}{\omega^2 \cosh(k(\omega) H)} e^{i(k(\omega)x - \omega t)} \quad (3.272)$$

Donde, H corresponde a la profundidad del océano; ω es la frecuencia angular; k es el número de onda; A_z es la amplitud vertical del *tsunami*.

Las condiciones de borde son las mismas que se encuentran en la sección (3.2), específicamente las subsecciones (3.2.1) y (3.2.2), que corresponden a las condiciones cinemáticas del fondo y de la superficie libre, respectivamente.

Tomando la parte Real de (3.271) y (3.272) se puede ver que el movimiento de un *tsunami* es una elipse progradada.

$$\eta_x(\omega, z) \sim \sin(k(\omega)x - \omega t) \quad (3.273)$$

$$\eta_z(\omega, z) \sim \cos(k(\omega)x - \omega t) \quad (3.274)$$

A continuación se muestra una figura representativa de las ondas de *tsunami* generadas por terremotos, impactos de meteoritos y por gravedad.

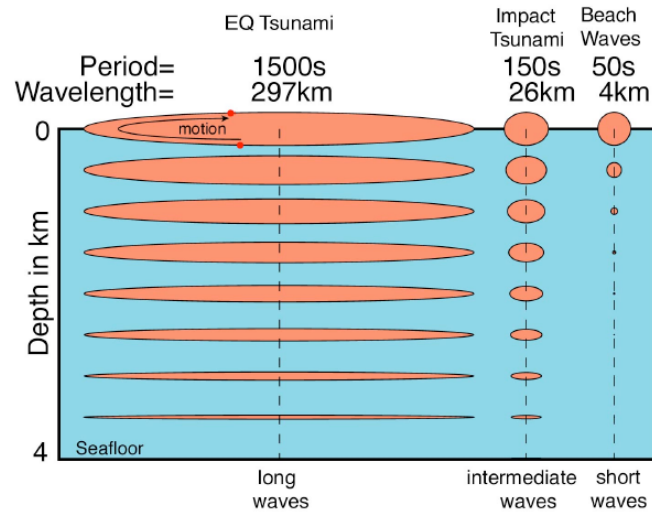


Figura 3.13: Funciones propias para el caso de *tsunami* en una profundidad del océano de 4 km para los periodos de 1500, 150 y 50 s. (Fuente: Ward, 2010)

La figura 3.13 muestra la diferencia que existe entre las ondas de *tsunami* provocados por terremotos, generados por impactos de meteoritos y por ondas de playa. La teoría que rige estas tres ondas según la longitud de onda son: onda larga, onda intermedia y onda corta, respectivamente. Para todos los casos la partícula se mueve en sentido horario. Para el caso de un *tsunami* provocado por terremoto la elipse es progradada cuya longitud de onda aproximada es de unos 297 km; para el segundo caso (*tsunami* por impacto de meteorito) la distancia entre cresta y cresta es aproximadamente de unos 26 km, una onda de playa tiene una longitud de onda cercana a la profundidad de un océano (4 km). En todos los casos, la amplitud de la onda decae exponencialmente con la profundidad (Ward, 2010). Con respecto al periodo del *tsunami*, las ondas cortas son superiores a los 10 segundos (Ward, 2010), las ondas intermedias tienen periodos aproximados a los que presentan las ondas cortas (Levin et al., 2009), finalmente el rango para las ondas de *tsunami* es de 100 - 10000 s (Levin et al., 2009).

A continuación se desarrollará el caso 1+1D, donde se considera el problema de valor inicial en la superficie del mar. Para un *tsunami* por impacto (meteoritos o bólidos), hay que seleccionar un desplazamiento inicial en la superficie del océano, esto es para reproducir la forma de la cavidad transiente inicial dada por una parábola que va creciendo hasta llegar a una profundidad máxima que dependerá principalmente por la energía que tenga la caída del bólido. Si se especifica una condición de desplazamiento, $\xi_0(x)$, en la superficie inicial tal como se muestra a continuación:

$$\eta_z(x, z = 0, t = 0) = \xi_0(x) \quad (3.275)$$

La expresión anterior se puede transformar de la siguiente manera:

$$\xi_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0(x) e^{-ikx} dx \quad (3.276)$$

En este caso, los modos normales (3.271) y (3.272) entrega de inmediato la evolución del *tsunami*, asumiendo desde aquí en adelante un fluido incompresible.

Se sabe que:

$$\frac{gk}{\omega^2} = \coth(kH) = \frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)} \quad (3.277)$$

Juntando la expresión anterior con las funciones propias, queda lo siguiente:

$$\vec{\eta}(x, z, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_0(k)}{2\pi} \left[\frac{\sinh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \hat{z} - i \frac{\cosh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \hat{x} \right] e^{-i(kx-\omega t)} dk \quad (3.278)$$

Una forma equivalente de representar (3.278) es pasando de la variable que depende del número de onda k a la variable ω (espacio dual).

$$\vec{\eta}(x, z, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} k(\omega) \frac{\xi_0(k(\omega))}{2\pi} \left[\frac{\sinh[k(\omega)(H-z)]}{\sinh(k(\omega)H)} \hat{z} - i \frac{\cosh[k(\omega)(H-z)]}{\sinh(k(\omega)H)} \hat{x} \right] e^{-i(k(\omega)x-\omega t)} d\omega \quad (3.279)$$

Donde:

$$dk = \left(\frac{dk}{d\omega} \right) d\omega = k(\omega) d\omega \quad (3.280)$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (3.278) se tiene que el desplazamiento de la superficie del agua ($z = 0$) es de la siguiente forma:

$$\eta(x, 0, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_0(k)}{2\pi} e^{-i(kx-\omega(k)t)} dk \quad (3.281)$$

Para pasar al problema 2+1D (2 dimensiones en espacio y 1 en tiempo), o sea, que considere una dirección radial y otra temporal, hay que hacer la siguiente modificación:

$$\eta(r, z, t) = \text{Re} \int_k \frac{e^{i(k \cdot r - \omega(\hat{k})t)}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\sinh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \hat{z} - i \frac{\cosh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \hat{k} \right] \int_{r_0} \xi_0(r_0) e^{-ik \cdot r_0} dr_0 dk \quad (3.282)$$

Donde,

$$\begin{aligned}
 dk &= dk_x dk_y \quad ; \quad dr_0 = dx_0 dy_0 \\
 k &= |\vec{k}| \quad ; \quad \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} \quad ; \quad \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} \\
 k \cdot x &\rightarrow k \cdot r = k r \cos(\theta) \quad ; \quad \hat{x} \rightarrow \hat{k} \\
 k \cdot r_0 &= k r_0 \cos(\theta) \quad ;
 \end{aligned}$$

Pero para el caso de un impacto de un b6lido sobre una superficie de agua, hay que evaluar la elevaci3n del agua en la superficie ($z = 0$), por lo tanto la expresi3n (3.282) queda de la siguiente manera:

$$\eta(r, 0, t) = \frac{\text{Re}}{(2\pi)^2} \int_k e^{i(k \cdot r - \omega(\hat{k})t)} dk \int_{r_0} \xi_0(r_0) e^{-ik \cdot r_0} dr_0 \quad (3.283)$$

Donde:

$$k = |\vec{k}| \quad ; \quad r = |\vec{r}| \quad ; \quad \omega(k) = kc \sqrt{\frac{\tanh(kh)}{kh}} \quad ; \quad c = \sqrt{gh} \quad (3.284)$$

De lo anterior se define que k corresponde al n6mero de onda radial, c viene a ser la velocidad de fase del *tsunami*, $\omega(k)$ es la frecuencia asociada al n6mero de onda k . Las integrales en (3.283) cubren todo el espacio en el n6mero de onda y las posiciones \vec{r}_0 donde $\xi_0(\vec{r}_0) \neq 0$.

La ecuaci3n (3.283) describe la evoluci3n de un *tsunami* por impacto de meteorito o b6lido. Empero en la expresi3n (3.283) por la geometr3a del problema a analizar y el sistema de coordenadas, se puede hacer la siguiente modificaci3n.

$$\int_k e^{i(k \cdot r - \omega(\hat{k})t)} d\vec{k} = \int_0^\infty e^{-i\omega(k)t} \left(\int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\theta)} d\theta \right) k dk \quad (3.285)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty e^{-i\omega(k)t} (2\pi J_0(kr)) k dk \\
 &= 2\pi \int_0^\infty k J_0(kr) e^{-i\omega(k)t} dk \\
 \int_k e^{i(k \cdot r - \omega(\hat{k})t)} d\vec{k} &= 2\pi \int_0^\infty k J_0(kr) e^{-i\omega(k)t} dk \quad (3.286)
 \end{aligned}$$

Para la variable r_0 se realiza el mismo procedimiento.

$$\int_{r_0} \xi_0(r_0) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}_0} dr_0 = \int_0^\infty \xi_0(r_0) \left(\int_0^{2\pi} e^{-i k r_0 \cos(\theta)} d\theta \right) r_0 dr_0 \quad (3.287)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \xi_0(r_0) (2\pi J_0(kr_0)) r_0 dr_0 \\ &= 2\pi \int_0^\infty r_0 \xi_0(r_0) J_0(kr_0) dr_0 \\ \int_{r_0} \xi_0(\vec{r}_0) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}_0} d\vec{r}_0 &= 2\pi \int_0^\infty r_0 \xi_0(r_0) J_0(kr_0) dr_0 \end{aligned} \quad (3.288)$$

Por lo tanto reemplazando (3.286) y (3.288) en (3.283), queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta(r, 0, t) &= \frac{\text{Re}}{(2\pi)^2} 2\pi \int_0^\infty k J_0(kr) e^{-i\omega(k)t} \cdot 2\pi \int_0^\infty r_0 \xi_0(r_0) J_0(kr_0) dr_0 dk \\ \eta(r, 0, t) &= \text{Re} \int_0^\infty k J_0(kr) e^{-i\omega(k)t} \int_0^\infty r_0 \xi_0(r_0) J_0(kr_0) dr_0 dk \end{aligned} \quad (3.289)$$

Donde, $J_0(\cdot)$ corresponde a la función de Bessel cilíndrica del primer tipo de orden 0.

La expresión (3.289) describe la evolución del *tsunami* provocado por un impacto de meteorito o bólido, a partir de esta ecuación, se resolverá para diferentes funciones que representen la forma de la cavidad que deja el bólido en la superficie del mar cuando impacta sobre éste.

Primeramente se propone que la forma de la cavidad es una parábola, la cual es simétrica radialmente, de profundidad ζ y de radio interno R_1 y radio externo R_2 , cuya expresión matemática se muestra a continuación.

$$\xi_0(r) = \begin{cases} \zeta \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right] & , r \leq R_2. \\ 0 & , r > R_2. \end{cases} \quad (3.290)$$

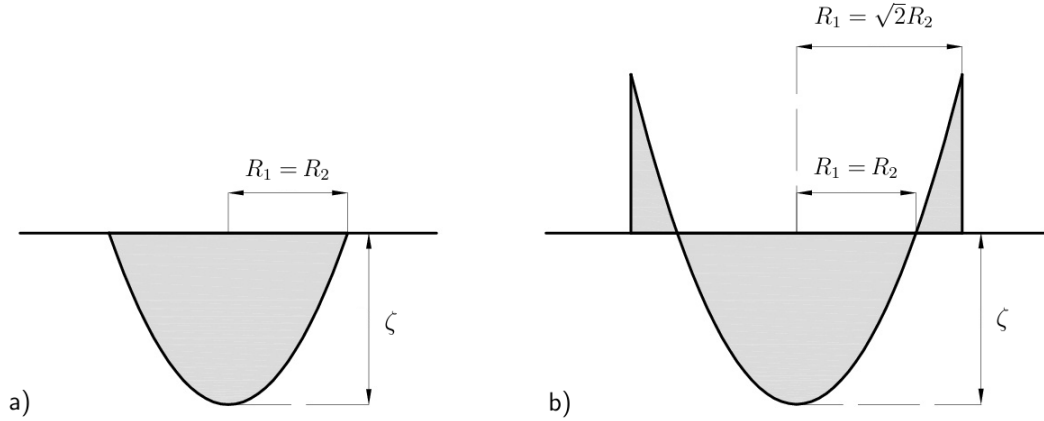


Figura 3.14: Sección transversal de la cavidad que deja el impacto entre el meteorito y la superficie del mar. **a)** Cavidad sin borde, donde la masa de agua desplazada por el impacto del bólido no es eyectada hacia el exterior, o sea, se evapora totalmente, **b)** Cavidad que presenta un borde, en otras palabras implica que el agua desplazada por el impacto es eyectada a los bordes. (Fuente: Modificado desde Ward & Asphaug (2000))

La figura 3.14 ilustra un hecho de gran importancia, ya que es de suma relevancia para saber la evolución que tendrá este tipo de *tsunami* tener bien definida la forma de la cavidad, y esto dependerá principalmente si R_1 y R_2 son iguales o no, en el caso en que sean iguales, pues significa que el agua es eyectada totalmente fuera del agua y por lo tanto no contribuye a la generación de un *tsunami*. En cambio, si $R_1 \leq R_2$ quiere decir que toda el agua que es eyectada producto del impacto entre el meteorito y la superficie del agua es llevada a los bordes, este supuesto tiene una gran implicancia, puesto que el borde si contribuye a la generación de un *tsunami* (Ward & Asphaug, 2000).

A continuación, si suponemos que $R_1 = \sqrt{2}R_2$, es posible saber la elevación de la superficie del mar en cada instante de tiempo. Ahora considerando la ecuación (3.289) y recurriendo al supuesto mencionado anteriormente junto con la condición (3.290), se dispone a encontrar la solución analítica de este problema.

$$\eta(r, 0, t) = \int_0^{\infty} k J_0(kr) \cos(\omega(k)t) M(k) dk \quad (3.291)$$

A continuación se calcula la integral $M(k)$, obteniéndose,

$$M(k) = \int_{r_0} r_0 \xi_0(r_0) J_0(kr_0) dr_0 \quad (3.292)$$

$$M(k) = \int_{r_0} \zeta r_0 \left[1 - \left(\frac{r_0}{R_1} \right)^2 \right] H(R_2 - r_0) J_0(kr_0) dr_0 \quad (3.293)$$

$$M(k) = \zeta \left[\int_0^{R_2} r_0 J_0(kr_0) dr_0 - \frac{1}{R_1^2} \int_0^{R_2} r_0^3 J_0(kr_0) dr_0 \right] \quad (3.294)$$

$$M(k) = \zeta \left[I_1 - \frac{1}{R_1^2} I_2 \right] \quad (3.295)$$

Ambas integrales (I_1 e I_2) en la ecuación (3.295) se pueden resolver mediante integración por partes y relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel clíndricas de primer tipo. El procedimiento para resolver las integrales I_1 e I_2 se muestra a continuación.

$$I_1 = \int_0^{R_2} r_0 J_0(kr_0) dr_0 = \int_0^{R_2} \frac{1}{k} \frac{d}{dr_0} (r_0 J_1(kr_0)) dr_0 \quad (3.296)$$

$$I_1 = \frac{1}{k} [r_0 J_1(kr_0)] \Big|_0^{R_2} = \frac{1}{k} [R_2 J_1(kR_2)] \quad (3.297)$$

$$I_1 = \frac{R_2}{k} J_1(kR_2) \quad (3.298)$$

$$I_2 = \int_0^{R_2} r_0^3 J_0(kr_0) dr_0 = \int_0^{kR_2} \frac{1}{k^4} \psi^3 J_0(\psi) d\psi \quad (3.299)$$

$$I_2 = \frac{1}{k^4} [\psi^3 J_1(\psi)] \Big|_0^{kR_2} - \frac{2}{k^4} \int_0^{kR_2} \psi^2 J_1(\psi) d\psi \quad (3.300)$$

$$I_2 = \frac{1}{k^4} \left[(kR_2)^3 J_1(kR_2) - 2 \int_0^{kR_2} \psi^2 J_1(\psi) d\psi \right] \quad (3.301)$$

$$I_2 = \frac{1}{k^4} \left[(kR_2)^3 J_1(kR_2) - 2 \int_0^{kR_2} \frac{d}{d\psi} (\psi^2 J_2(\psi)) d\psi \right] \quad (3.302)$$

$$I_2 = \frac{1}{k^4} \left[(kR_2)^3 J_1(kR_2) - 2 (\psi^2 J_2(\psi)) \Big|_0^{kR_2} \right] \quad (3.303)$$

$$I_2 = \frac{1}{k^4} \left[(kR_2)^3 J_1(kR_2) - 2 (kR_2)^2 J_2(kR_2) \right] \quad (3.304)$$

Por lo tanto, juntando las expresiones (3.298) y (3.304), (3.295) queda de la siguiente manera:

$$M(k) = \zeta \left[\left(\frac{R_2}{k} J_1(kR_2) \right) - \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{1}{k^4} \left((kR_2)^3 J_1(kR_2) - 2 (kR_2)^2 J_2(kR_2) \right) \right) \right] \quad (3.305)$$

$$M(k) = \zeta \left[\frac{R_2}{k} J_1(kR_2) - \frac{R_2^3}{kR_1^2} J_1(kR_2) + 2 \frac{R_2^2}{k^2 R_1^2} J_2(kR_2) \right] \quad (3.306)$$

$$M(k) = \frac{\zeta R_2^2}{k^2 R_1^2} \left[\frac{k}{R_2} \left(R_1^2 J_1(kR_2) - R_2^2 J_1(kR_2) \right) + 2 J_2(kR_2) \right] \quad (3.307)$$

$$M(k) = \zeta \left(\frac{R_2}{k R_1} \right)^2 \left[\frac{k}{R_2} \left(R_1^2 - R_2^2 \right) J_1(kR_2) + 2 J_2(kR_2) \right] \quad (3.308)$$

$$M(k) = 2 \zeta \left(\frac{R_2}{k R_1} \right)^2 \left[J_2(kR_2) - \frac{k}{2R_2} \left(R_2^2 - R_1^2 \right) J_1(kR_2) \right] \quad (3.309)$$

Por lo tanto, reemplazando $M(k)$ en $\xi(r, t)$ resulta:

$$\begin{aligned}\eta(r, 0, t) &= \int_0^\infty k J_0(kr) \cos(\omega(k) t) 2\zeta \left(\frac{R_2}{k R_1} \right)^2 \left[J_2(kR_2) - k(R_2^2 - R_1^2) \frac{J_1(kR_2)}{2R_2} \right] dk \\ \eta(r, 0, t) &= 2\zeta \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \int_0^\infty k^{-1} J_0(kr) \cos(\omega(k) t) \left[J_2(kR_2) - k(R_2^2 - R_1^2) \frac{J_1(kR_2)}{2R_2} \right] dk\end{aligned}\quad (3.310)$$

Como la dispersión del *tsunami* normalmente con ondas largas es más rápido que ondas más cortas (Ward & Asphaug, 2000). Se sabe por expansión asintótica de las funciones de Bessel cilíndricas para números grandes (cuando $x \rightarrow \infty$) que la expresión (3.310) es modificable, cuyo procedimiento es el siguiente:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.311)$$

Identificando términos, se tiene que:

$$J_0(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.312)$$

Y si (3.312) se multiplica por $\cos(\omega t)$, resulta:

$$J_0(kr) \cos(\omega t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.313)$$

Para el campo lejano y aduciendo el supuesto de onda larga, la ecuación (3.310) queda modificada tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\eta(r, 0, t) &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} \cos\left(kr - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) M(k) dk \\ \eta(r, 0, t) &= 2\zeta \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \int_0^\infty k^{-3/2} \cos\left(kr - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \left[J_2(kR_2) - k(R_2^2 - R_1^2) \frac{J_1(kR_2)}{2R_2} \right] dk\end{aligned}\quad (3.314)$$

$$(3.315)$$

Volviendo a la expresión (3.310), $\xi(r, t)$ resulta:

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \int_0^\infty k^{-1} J_0(kr) \cos(\omega(k)t) \left[J_2(kR_2) - k(R_2^2 - R_1^2) \frac{J_1(kR_2)}{2R_2} \right] dk$$

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left\{ \int_0^\infty k^{-1} \cos(\omega(k)t) J_0(kr) J_2(kR_2) dk - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2} \int_0^\infty \cos(\omega(k)t) J_0(kr) J_1(kR_2) dk \right\} \quad (3.316)$$

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left\{ I_3 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2} I_4 \right\} \quad (3.317)$$

En el libro de Gradshteyn & Ryzhik (2007) aparecen ambas integrales (I_3 e I_4), empero en primer lugar se calculará I_3 para luego proseguir con I_4 . Dicho procedimiento de cálculo se detalla a continuación:

$$\int_0^\infty x^{\nu-\mu-3} \cos(sx) J_\mu(ax) J_\nu(\rho x) dx = \frac{\Gamma(\nu) a^\mu \rho^{-\nu}}{2^{\nu-\mu+3} \Gamma(\mu+1)} \left[\frac{\rho^2}{\nu-1} - \frac{a^2}{\mu+1} - 2s^2 \right] \quad (3.318)$$

Identificando términos:

$$s = c_0 t, \mu = 0, \nu = 2, a = r, \rho = R_2, x = k \quad (3.319)$$

Se asume que $c_0 = \sqrt{gH}$, donde c_0 corresponde a la velocidad de fase del *tsunami* en m/s y H que viene a ser la profundidad del océano en m .

Finalmente de (3.318) se obtiene I_3 .

$$\int_0^\infty k^{2-0-3} \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_2(R_2 k) dk = \frac{\Gamma(2) r^0 R_2^{-2}}{2^{2-0+3} \Gamma(0+1)} \left[\frac{R_2^2}{2-1} - \frac{r^2}{0+1} - 2(c_0 t)^2 \right] \quad (3.320)$$

$$\int_0^\infty k^{-1} \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_2(R_2 k) dk = \frac{1}{2R_2^2} \left[R_2^2 - r^2 - 2(c_0 t)^2 \right] \quad (3.321)$$

$$\int_0^\infty k^{-1} \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_2(R_2 k) dk = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{c_0 t}{R_2} \right)^2 \right] \quad (3.322)$$

Por lo tanto:

$$I_3 = \int_0^\infty k^{-1} \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_2(R_2 k) dk = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{c_0 t}{R_2} \right)^2 \right] \quad (3.323)$$

Para obtener I_4 se recurre a la siguiente integral:

$$\int_0^\infty x^{\nu-\mu-1} \cos(sx) J_\mu(ax) J_\nu(bx) dx = 2^{\nu-\mu-1} b^{-\nu} a^\mu \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+1)} \\ [b > 0, a > 0, 0 < s < b-a, 0 < \text{Re } \nu < \text{Re } \mu + 2] \quad (3.324)$$

Donde:

$$s = c_0 t, \mu = 0, \nu = 1, a = r, b = R_2, x = k \quad (3.325)$$

$$\int_0^\infty k^{1-0-1} \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_1(R_2 k) dk = 2^{1-0-1} R_2^{-1} r^0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0+1)} \\ [R_2 > 0, r > 0, 0 < c_0 t < R_2 - r, 0 < \text{Re } 1 < \text{Re } 0 + 2] \quad (3.326)$$

$$\int_0^\infty \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_1(R_2 k) dk = \frac{1}{R_2} \\ [R_2 > 0, r > 0, 0 < c_0 t < R_2 - r, 0 < 1 < 2] \quad (3.327)$$

Finalmente I_4 es igual a:

$$I_4 = \int_0^\infty \cos(c_0 t k) J_0(rk) J_1(R_2 k) dk = \frac{1}{R_2} \quad (3.328)$$

Reemplazando (3.323) y (3.328) en (3.317) se obtiene una expresión analítica para $\xi(r, t)$, la cual se muestra a continuación:

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{c_0 t}{R_2} \right)^2 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{2R_2} \cdot \frac{1}{R_2} \right\} \quad (3.329)$$

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{c_0 t}{R_2} \right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right\} \quad (3.330)$$

$$\eta(r, 0, t) = 2\zeta \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 - \left(\frac{c_0 t}{R_2} \right)^2 \right\} \quad (3.331)$$

$$\eta(r, 0, t) = \zeta \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{c_0 t}{R_1} \right)^2 \right] \quad (3.332)$$

$$\eta(r, 0, t) = \zeta \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 - 2g H \left(\frac{t}{R_1} \right)^2 \right] \quad (3.333)$$

La ecuación (3.333) dice que la onda inicial se propaga radialmente, con un decaimiento cuadrático en el tiempo. Ward & Asphaug (2000) afirma que los fuertes efectos de la dispersión de frecuencia en separar la cavidad producida por el impacto inicial (meteorito) y la correspondencia de la amplitud máxima del *tsunami* con las ondas de longitud igual al diámetro de la cavidad. Las ondas más largas que el diámetro de la cavidad llegan antes del valor máximo; las ondas más cortas llegan después.

3.5.1. Energía de un *tsunami* provocado por el impacto de un meteorito

De acuerdo a Ward & Asphaug (2000), la energía de un *tsunami* se determina mediante el cálculo de la energía total uniendo las expresiones (3.290) y (3.310), obteniéndose,

$$E_T = \pi \rho_w g \int_r r [\eta(r, 0, t)]^2 dr \quad (3.334)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \int_0^{R_2} r \left[\zeta - \zeta \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]^2 dr \quad (3.335)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \int_0^{R_2} r \left[\frac{\zeta}{R_1^2} (R_1^2 - r^2) \right]^2 dr \quad (3.336)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \int_0^{R_2} r \left[\left(\frac{\zeta}{R_1^2} \right)^2 (R_1^4 - 2 R_1^2 r^2 + r^4) \right] dr \quad (3.337)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \left(\frac{\zeta}{R_1^2} \right)^2 \int_0^{R_2} (R_1^4 r - 2 R_1^2 r^3 + r^5) dr \quad (3.338)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \left(\frac{\zeta}{R_1^2} \right)^2 \left(R_1^4 \frac{r^2}{2} - 2 R_1^2 \frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^{R_2} \quad (3.339)$$

$$E_T = \pi \rho_w g \left(\frac{\zeta}{R_1^2} \right)^2 \left(R_1^4 \frac{R_2^2}{2} - R_1^2 \frac{R_2^4}{2} + \frac{R_2^6}{6} \right) \quad (3.340)$$

$$E_T = \frac{\pi \rho_w g (\zeta R_2)^2}{2} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right] \quad (3.341)$$

Si se asume que el agua no es eyectada en los bordes ($R_2 = R_1$), el cálculo de la energía queda para este caso así,

$$E_T = \frac{\pi \rho_w g (\zeta R_2)^2}{6} \quad (3.342)$$

Para el caso en que el agua si es eyectada en los bordes ($R_2 = \sqrt{2}R_1$), la energía es:

$$E_T = \frac{\pi \rho_w g (\zeta R_2)^2}{3} \quad (3.343)$$

Se puede ver que la energía del *tsunami* cuando el agua es eyectada en los bordes es el doble que en caso en que el agua no es eyectada completamente. La energía cinética del meteorito es la siguiente:

$$E_c = \frac{1}{2} m_b v_b^2 = \frac{1}{2} \rho_b V_b v_b^2 = \frac{2\pi}{3} \rho_b R_b^3 v_b^2 \quad (3.344)$$

Donde m_b corresponde a la masa del b6lido, y v_b es la velocidad de ca6da del b6lido, V_b es el volumen del b6lido.

Empero hay que asumir que una fracci6n ε de la energ6a cin6tica participa en la generaci6n del *tsunami*.

$$E_T = \varepsilon E_c = \varepsilon \frac{2\pi}{3} \rho_b R_b^3 v_b^2 \quad (3.345)$$

$$\frac{\pi \rho_w g (\zeta R_1)^2}{2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{R_2^4}{3 R_1^4} \right) = \varepsilon \frac{2\pi}{3} \rho_b R_b^3 v_b^2 \quad (3.346)$$

Despejando ζ de (3.346), resulta:

$$\zeta = \left[\frac{4}{3} \frac{\varepsilon \rho_b R_b^3 v_b^2}{\rho_w g R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{R_2^4}{3 R_1^4} \right)^{-1} \right]^{1/2} \quad (3.347)$$

Si tomamos el caso de $R_2 = \sqrt{2}R_1$.

$$\zeta = \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b^3 v_b^2}{\rho_w g R_1^2} \right]^{1/2} \quad (3.348)$$

Ward & Asphaug (2000) proponen la siguiente relaci6n:

$$\zeta = q R_1^\alpha \quad (3.349)$$

Por cierto que se sabe que $d_1 = 2R_1$.

La expresi6n (3.349) se reemplaza en (3.348), donde se busca despejar d_1 , resultando.

$$q R_1^\alpha = \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b^3 v_b^2}{\rho_w g R_1^2} \right]^{1/2} \implies q R_1^{\alpha+1} = \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b^3 v_b^2}{\rho_w g} \right]^{1/2} \quad (3.350)$$

$$R_1^{\alpha+1} = \frac{1}{q} \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b^3 v_b^2}{\rho_w g R_1^2} \right]^{1/2} \implies R_1 = \frac{R_b^{\alpha+1}}{q^{\alpha+1}} \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b v_b^2}{\rho_w g} \right]^{1/2(\alpha+1)} \quad (3.351)$$

Realizando la siguiente modificaci6n, se tiene que:

$$\delta = \frac{1}{2(\alpha+1)} \implies 2\delta = \frac{1}{(\alpha+1)} = 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1 - 2\alpha\delta \quad (3.352)$$

Volviendo a (3.351),

$$R_1 = \frac{R_b^{2\delta}}{q^{2\delta}} \left[\frac{2\varepsilon \rho_b R_b v_b^2}{\rho_w g} \right]^\delta \implies d_1 = 2 \left(\frac{2\varepsilon}{g} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^\delta \left(\frac{R_b}{q} \right)^{2\delta} v_b^{2\delta} R_b^\delta \quad (3.353)$$

$$d_1 = 2 \left(\frac{2\varepsilon v_b^2}{g} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^\delta \left(\frac{R_b}{q} \right)^{2\delta} \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{-1/3} R_b^\delta \cdot \frac{R_b^\delta}{R_b^\delta}$$

$$d_1 = 2 \left(\frac{2\varepsilon v_b^2}{g R_b} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{1/3} \left(\frac{R_b}{q} \right)^{2\delta} \left(\frac{\rho_w}{\rho_b} \right)^{1/3-\delta} R_b^{1-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

$$d_1 = 2 \left(\frac{2\varepsilon v_b^2}{g R_b} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{1/3} \left(\frac{R_b}{q} \right)^{2\delta} \left(\frac{\rho_w}{\rho_b} \right)^{1/3-\delta} R_b^{1-2\alpha\delta}$$

$$d_1 = 2R_b \left(\frac{2\varepsilon v_b^2}{g R_b} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_b} \right)^{1/3-\delta} \left(\frac{R_b^{2\delta}}{q^{2\delta} R_b^{2\alpha\delta}} \right) \right]$$

$$d_1 = 2R_b \left(\frac{2\varepsilon v_b^2}{g R_b} \right)^\delta \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{\rho_w}{\rho_b} \right)^{1/3-\delta} \left(\frac{1}{q R_b^{\alpha-1}} \right)^{2\delta} \right] \quad (3.354)$$

Los valores de α y q varían con las propiedades del impacto o los materiales que están presentes en la colisión (Ward & Asphaug, 2000). Este modelo de *tsunamis* cosmogénico puede ser un buen modelo para representar el fenómeno de los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra subáereos, debido a que ambos tipos de eventos presentan un carácter impulsivo en las ondas producidas por una perturbación inicial.

Se propone que para investigaciones futuras se desarrolle modificaciones a este modelo propuesto por Ward & Asphaug (2000), por ejemplo, incorporando una batimetría real o más sencillo, un modelo de playa inclinada de pendiente constante en vez de considerar un océano de profundidad constante. Otra recomendación para futuras líneas de investigación es considerar otros tipos de funciones en vez de utilizar una función parabólica.

3.6. Modelo de *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra desarrollado por Liu et al. (2003)

Este modelo derivó un modelo analítico unidimensional de ondas generadas por el movimiento de un cuerpo rígido sobre una pendiente inclinada (constante), incluyendo la evolución en el tiempo del movimiento de un bloque deslizando como un término forzante directamente a la ecuación de agua poco profunda lineal (Renzi & Sammarco, 2016).

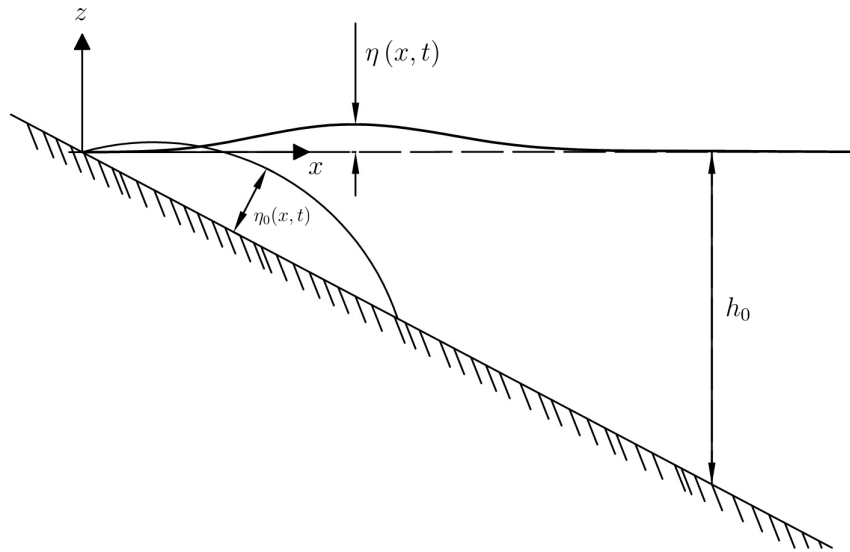


Figura 3.15: Esquema de coordenadas y simbología del modelo de Liu et al. (2003). (Fuente: Elaboración propia)

En la figura 3.15 se puede observar las condiciones impuestas en el modelo de Liu et al. (2003), la más importante que cabe mencionar se refiere al punto inicial del deslizamiento de tierra cuando comienza a moverse, y lo hace desde el origen del sistema de coordenadas, y no desde un $x > 0$ tal como se pudo apreciar en los modelos anteriormente propuestos.

Liu et al. (2003) trabajó con la ecuación de agua poco profunda adimensional, utilizando variables adimensionales, y aplicando la Transformada de Hankel a la ecuación de agua poco profunda, en esta investigación se obtuvo una solución particular y homogénea adimensional, las cuales serán mostradas a continuación:

$$\partial_{\bar{t}\bar{t}}^2 \eta - g \alpha \partial_x (x \partial_x \eta) = \partial_{\bar{t}\bar{t}}^2 \eta_0, \quad (3.355)$$

Cabe mencionar que t es el tiempo dimensional, \bar{t} corresponde al tiempo adimensional, x es

la dimensión espacial dimensional del eje x , y \bar{x} corresponde al eje x adimensional.

Llamemos ϕ a $x \partial_x \eta$, donde se tiene que:

$$\phi = x \partial_x \eta \quad (3.356)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{1}{L}$$

$$\phi = x \partial_x \eta = L \cdot \bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$$

$$\phi = L \cdot \bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{1}{L} \cdot \eta_c = \bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \cdot \eta_c$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) \cdot \eta_c \quad (3.357)$$

Ahora se dispone a calcular la primera y segunda derivada de x y t .

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\eta_c}{t_c}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\eta_c}{t_c} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\eta_c}{t_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} \quad (3.358)$$

Y finalmente, se calcula la segunda derivada de η_0 con respecto a t :

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} = \frac{\eta_{0c}}{t_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}^2} \quad (3.359)$$

Se reemplaza las ecuaciones (3.357), (3.358) y (3.359) en la ecuación (3.355), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_c}{t_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} - g \alpha \frac{\eta_c}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) &= \frac{\eta_{0c}}{t_c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}^2}, & / \cdot \frac{t_c^2}{\eta_c} \\ \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} - g \alpha \frac{t_c^2}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) &= \frac{\eta_{0c}}{\eta_c} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}^2} \end{aligned} \quad (3.360)$$

Donde: t_c , corresponde al tiempo característico; η_c es la perturbación de la superficie del agua característico; y η_{0c} es la elevación característica del deslizamiento de tierra o deformación del fondo marino.

A partir de (3.360) se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{0c}}{\eta_c} = 1 &\Rightarrow \eta_{0c} = \eta_c \\ g \cdot \alpha \cdot \frac{t_c^2}{L} = g \cdot \alpha \cdot \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{\delta g}} \right)^2 &= g \cdot \alpha \cdot \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{L \cdot L}{\delta g} \right) \\ g \cdot \alpha \cdot \frac{t_c^2}{L} = \alpha \cdot \frac{1}{\delta/L} &= \frac{\alpha}{\mu} \end{aligned} \quad (3.361)$$

El resultado anterior (3.361) se reemplaza en la ecuación (3.360), quedando así:

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\alpha}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}^2} \quad (3.362)$$

La ecuación (3.362) corresponde a la ecuación de agua poco profunda adimensional.

Para saber cuál es la solución dimensional de la perturbación de la superficie del agua $\eta(x, t)$, se tiene la siguiente expresión que relaciona la solución dimensional con la solución adimensional. En este caso especial, la solución de la ecuación gobernante adimensional corresponde a la suma entre la solución particular y la solución homogénea aplicando las condiciones iniciales impuestas por Liu et al. (2003) para este problema en particular.

$$\eta(x, t) = \delta \cdot \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) = \delta \cdot \left[\bar{\eta}_p \left(\frac{x}{L}; \frac{\sqrt{g\delta}}{L} t \right) + \bar{\eta}_h \left(\frac{x}{L}; \frac{\sqrt{g\delta}}{L} t \right) \right] \quad (3.363)$$

Se tiene que:

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{\mu \bar{x}}{\alpha}} = 2 \sqrt{\frac{\delta/L \cdot x/L}{\alpha}} = \frac{2}{L} \cdot \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}} \quad (3.364)$$

$$\bar{t} = \frac{\sqrt{\delta g}}{L} \cdot t \quad (3.365)$$

Para resolver analíticamente (3.362) es útil realizar el siguiente cambio de variable:

$$\xi = 2\sqrt{\frac{\mu\bar{x}}{\alpha}} \iff \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \sqrt{\bar{x}} \iff \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{2}{\xi} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}, \quad (3.366)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}}, \quad (3.367)$$

$$\bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = \bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{\mu\bar{x}}{\alpha}} = \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} = \beta, \quad (3.368)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot 2 \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{2} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{2\mu}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{\mu}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right), \quad (3.369)$$

$$\frac{\alpha}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{x} \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\alpha}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\alpha} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right), \quad (3.370)$$

Por lo tanto, se ha demostrado que el cambio de variable (3.364) es aplicable a la ecuación (3.362), modificandola de una manera tal, que es más fácil aplicar la Transformada Hankel en el espacio ξ , ya que no presenta ningún factor que multiplique al segundo término de la ecuación gobernante adimensional (3.362).

Debido a la equivalencia (3.370), es posible modificar la ecuación gobernante adimensional de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 \bar{\eta}_0}{\partial \bar{t}^2} \quad (3.371)$$

A continuación se muestra la siguiente definición de la Transformada Hankel de orden n de $\left((1/r) \partial_r (r \partial_r f) - (n/r)^2 f \right)$, la cual será de gran ayuda para resolver la ecuación (3.371) aplicando la Transformada Hankel de orden 0.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= \int_0^\infty r' \cdot \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) J_n(kr) dr - \int_0^\infty r \cdot \frac{n^2}{r^2} f(r) J_n(kr) dr \\ \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) J_n(kr) dr - \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} f(r) [r J_n(kr)] dr \end{aligned} \quad (3.372)$$

Ahora se recurre a la integración por partes para resolver la integral anterior, donde primeramente se realiza un cambio de variables, quedando así:

$$u = J_n(kr) \implies du = k J'_n(kr) dr, \quad (3.373)$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \implies v = r \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (3.374)$$

Volviendo a la ecuación (3.372), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= \left[\left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) J_n(kr) \right] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) k J_n'(kr) dr \\ &- \int_0^{\infty} \frac{n^2}{r^2} f(r) [r J_n(kr)] dr \end{aligned} \quad (3.375)$$

Nuevamente se recurre a la integración por partes, pero en esta oportunidad es para resolver la integral (3.375), tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} u = kr J_n'(kr) &\implies du = \frac{d}{dr} (kr J_n'(kr)), \\ dv = \frac{\partial f}{\partial r} &\implies v = f(r), \end{aligned}$$

Aplicando la integración por partes, (3.375) queda así:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= - \left[\left(kr \cdot J_n'(kr) \right) \cdot f(r) \right] \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{n^2}{r^2} f(r) [r J_n(kr)] dr \\ &+ \int_0^{\infty} f(r) \frac{d}{dr} (kr \cdot J_n'(kr)) dr \end{aligned} \quad (3.376)$$

Para resolver (3.376) es necesario recordar la ecuación diferencial de Bessel.

$$\frac{d}{dr} (kr \cdot J_n'(kr)) + r \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(kr) = 0 \quad (3.377)$$

$$\frac{d}{dr} (kr \cdot J_n'(kr)) = -r \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(kr) \quad (3.378)$$

La expresión (3.378) se reemplaza en (3.376), convirtiéndose en:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} &= - \int_0^\infty f(r) r \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(kr) dr \\ &- \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} f(r) [r J_n(kr)] dr \end{aligned} \quad (3.379)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\infty k^2 r f(r) J_n(kr) dr + \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} f(r) r J_n(kr) dr \\ &- \int_0^\infty \frac{n^2}{r^2} f(r) [r J_n(kr)] dr \end{aligned} \quad (3.380)$$

$$= -k^2 \int_0^\infty r f(r) J_n(kr) dr \quad (3.381)$$

$$\mathcal{H}_n \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right\} = -k^2 \mathcal{H}_n \{ f(r) \} \quad (3.382)$$

Nota: El procedimiento desde la ecuación (3.372) hasta la expresión (3.382) fue tomado del libro Debnath & Bhatta (2014).

Si se reemplaza $n = 0$ en la ecuación (3.382), se obtiene,

$$\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right\} = -k^2 \mathcal{H}_0 \{ f(r) \} \quad (3.383)$$

Identificando términos, se tiene que:

$$f(r) = \bar{\eta}(\xi) \quad ; k = \rho \quad ; \mathcal{H}_0 \{ f(r) \} = \mathcal{H}(\rho, \bar{t}) \quad ; r = \xi,$$

Por lo que para este caso en particular, resulta lo siguiente:

$$\mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \xi} \right) \right\} = -\rho^2 \mathcal{H}(\rho, \bar{t}) \quad (3.384)$$

Para aplicar la Transformada Hankel de orden 0 a (3.362), se define la Transformada Hankel incorporando ξ y ρ , tal como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}(\rho, \bar{t}) = \int_0^\infty \xi J_0(\rho \xi) \eta(\xi, \bar{t}) d\xi \quad (3.385)$$

La definición de la Transformada Hankel es aplicable para la ecuación (3.371), multiplicando cada término de esa ecuación, resultando lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \bar{t}^2} + \rho^2 \mathcal{H}(\rho, \bar{t}) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{00}}{\partial \bar{t}^2} \quad (3.386)$$

Donde: \mathcal{H}_{00} corresponde a la Transformada Hankel de orden 0 de $\eta_0(\xi, \bar{t})$.

A continuación se considera que el término forzante (deformación del fondo oceánico), es un movimiento periódico armónico, o sea, es de la forma $\eta_0(\xi, \bar{t})$.

$$\eta_0(\xi, \bar{t}) = e^{i\omega(\xi - \bar{t})}, \quad (3.387)$$

En la ecuación (3.387) se puede identificar un término adicional, este corresponde a la frecuencia ω . Aquí el modelo presenta un valor de uno para la velocidad del deslizamiento de tierra.

A continuación se calcula la Transformada Hankel de orden 0 de $\eta_0(\xi, \bar{t})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{00}(\rho, \bar{t}) &= \int_0^\infty \xi J_0(\rho\xi) \eta_0(\xi, \bar{t}) d\xi = \int_0^\infty \xi J_0(\rho\xi) e^{i\omega(\xi - \bar{t})} d\xi \\ \mathcal{H}_{00}(\rho, \bar{t}) &= e^{-i\omega\bar{t}} \int_0^\infty \xi J_0(\rho\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \end{aligned} \quad (3.388)$$

Para resolver la integral (3.388), es útil recurrir a la siguiente integral por tabla (Gradshteyn & Ryzhik, 2007):

$$\int_0^\infty x^{m+1} J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x} dx = (-1)^{m+1} \beta^\nu \frac{d^{m+1}}{d\alpha^{m+1}} \left[\frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^\nu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right], \quad (3.389)$$

$$\{\beta > 0, \text{Re}(\nu) > -m - 2\}$$

Si se asume que $m = 0$ y $\nu = 0$ en la ecuación (3.389), resulta:

$$\int_0^\infty x J_0(\beta x) e^{-\alpha x} dx = (-1)^1 \beta^0 \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha)^0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right], \quad (3.390)$$

$$\{\beta > 0, \text{Re}(0) > -2\}$$

Por lo que la integral (3.390) queda expresada tal como se muestra a continuación:

$$\int_0^\infty x J_0(\beta x) e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}, \quad (3.391)$$

$$\{\beta > 0, 0 > -2\}$$

Identificando términos,

$$\alpha = -i\omega, x = \xi, \beta = \rho, \quad (3.392)$$

$$\int_0^\infty \xi J_0(\rho\xi) e^{i\omega\xi} d\xi = \frac{-i\omega}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}}, \quad (3.393)$$

$$\{\rho > 0, 0 > -2\}$$

Como se cumple la condición para que la integral (3.389) sea aplicable, entonces el resultado de la integral (3.393) es correcta. Por lo tanto, a continuación hay que volver a la ecuación (3.388), reemplazando (3.393) en dicha expresión, por lo que esta integral (3.393) da como resultado:

$$\mathcal{H}_{0_0}(\rho, \bar{t}) = e^{-i\omega\bar{t}} \cdot \frac{-i\omega}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}}, \quad (3.394)$$

A continuación se calcula la segunda derivada con respecto a \bar{t} de la Transformada Hankel de orden 0 de $\eta_0(\xi, \bar{t})$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_{0_0}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \left\{ \frac{-i\omega e^{-i\omega\bar{t}}}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\} = \frac{i\omega^3 e^{-i\omega\bar{t}}}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}}, \quad (3.395)$$

Para determinar la Transformada Hankel de orden 0 de $\eta(\xi, \bar{t})$, o sea, para determinar $\mathcal{H}(\rho, \bar{t})$ se necesita reemplazar la expresión anterior en la ecuación (3.386), quedando de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \bar{t}^2} + \rho^2 \mathcal{H}(\rho, \bar{t}) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{0_0}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{i\omega^3 e^{-i\omega\bar{t}}}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \quad (3.396)$$

Pero haciendo la sustitución que se muestra a continuación, es posible saber $\mathcal{H}(\rho, \bar{t})$:

$$\mathcal{H}(\rho, \bar{t}) = f \cdot e^{-i\omega\bar{t}} \quad (3.397)$$

Donde, f corresponde a una función cualquiera que depende de ρ y \bar{t} .

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \bar{t}^2} = -f \cdot \omega^2 e^{-i\omega\bar{t}} \quad (3.398)$$

Reemplazando (3.397) y (3.398) en (3.396), resulta:

$$-f \cdot \omega^2 e^{-i\omega t} + \rho^2 f \cdot e^{-i\omega t} = \frac{i\omega^3 e^{-i\omega t}}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \quad (3.399)$$

$$f(-\omega^2 + \rho^2) = \frac{i\omega^3}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}}$$

$$f = \frac{i\omega^3}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} \quad (3.400)$$

Sustituyendo (3.400) en (3.397), se tiene finalmente la Transformada Hankel de orden 0 de $\eta(\xi, \bar{t})$:

$$\mathcal{H}(\rho, \bar{t}) = \frac{i\omega^3 e^{-i\omega \bar{t}}}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}}, \quad (3.401)$$

Ahora se recurre a la Transformada Hankel inversa de orden 0 de $\mathcal{H}(\rho, \bar{t})$ para determinar el valor de la solución particular $\eta(\xi, \bar{t})$ debido al movimiento del fondo marino, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \eta_p(\xi, \bar{t}) &= \int_0^\infty \rho J_0(\rho \xi) \mathcal{H}(\rho, \bar{t}) d\rho = \int_0^\infty \rho J_0(\rho \xi) \frac{i\omega^3 e^{-i\omega \bar{t}}}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= i\omega e^{-i\omega \bar{t}} \int_0^\infty \rho J_0(\xi \rho) \frac{\omega^2}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= i\omega e^{-i\omega \bar{t}} \int_0^\infty \rho J_0(\xi \rho) \frac{\rho^2 + \omega^2 - \rho^2}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= i\omega e^{-i\omega \bar{t}} \int_0^\infty \rho J_0(\xi \rho) \left\{ \frac{\rho^2}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} - \frac{\rho^2 - \omega^2}{(\rho^2 - \omega^2)^{5/2}} \right\} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= i\omega e^{-i\omega \bar{t}} \int_0^\infty \rho J_0(\xi \rho) \left\{ \rho^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right] \cdot \frac{-1}{3\rho} - \frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \int_0^\infty \rho J_0(\xi \rho) \left\{ \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right] + \frac{3}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\} d\rho \\ \eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ \int_0^\infty \rho^2 J_0(\xi \rho) \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right] d\rho \right. \\ &\quad \left. + 3 \int_0^\infty J_0(\xi \rho) \frac{\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho \right\} \quad (3.402) \end{aligned}$$

La primera integral se puede resolver mediante el método de integración por partes donde u

y v son los siguientes

$$u = \rho^2 J_0(\xi \rho) \implies du = (2\rho J_0(\xi \rho) + \rho^2 \xi J_0'(\xi \rho)) d\rho,$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right] d\rho \implies v = \frac{1}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}},$$

Ahora se reemplaza en (3.402), resultando:

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ \left[\frac{\rho^2 J_0(\xi \rho)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2\rho J_0(\xi \rho) + \rho^2 \xi J_0'(\xi \rho)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho \right.$$

$$\left. + 3 \int_0^\infty \frac{J_0(\xi \rho) \rho d\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ - \int_0^\infty \frac{2\rho J_0(\xi \rho) d\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} - \int_0^\infty \frac{\rho^2 \xi J_0'(\xi \rho)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho + 3 \int_0^\infty \frac{J_0(\xi \rho) \rho d\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\} \quad (3.403)$$

Para la segunda integral de (3.403) es necesario recurrir a una relación de recurrencia de las funciones de Bessel cilíndricas, la cual se presenta a continuación:

$$\frac{d}{dx} [x J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x), \quad (3.404)$$

Identificando términos se tiene lo siguiente:

$$-\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \{J_0(\rho\xi)\} = -\xi \cdot -J_1(\rho\xi) \rho = \xi \rho J_1(\rho\xi) \quad (3.405)$$

Esta última equivalencia, se sustituye en la ecuación (3.403):

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ -2 \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\xi \rho) d\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} + \int_0^\infty \frac{\xi \rho^2 J_1(\rho\xi)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho + 3 \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\xi \rho) d\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \right\}$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\xi \rho)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho + \int_0^\infty \frac{\xi \rho^2 J_1(\rho\xi)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho \right\}$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{-i\omega}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\xi \rho)}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} d\rho - \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \cdot \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \{J_0(\rho\xi)\} d\rho \right\}$$

$$\begin{aligned}
\eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{1}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left\{ \int_0^\infty \frac{-i\omega \rho}{(\rho^2 - \omega^2)^{3/2}} \cdot \left(J_0(\xi\rho) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \{ J_0(\rho\xi) \} \right) d\rho \right\} \\
\eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{1}{3} e^{-i\omega \bar{t}} \left(e^{i\omega \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [e^{i\omega \xi}] \right) \\
\eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{1}{3} \left(e^{i\omega(\xi - \bar{t})} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [e^{i\omega(\xi - \bar{t})}] \right) \\
\eta_p(\xi, \bar{t}) &= \frac{1}{3} \left(\eta_0(\xi, \bar{t}) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta_0(\xi, \bar{t})] \right) \tag{3.406}
\end{aligned}$$

Liu et al. (2003) postulan que (3.406) es la solución particular de una función $\eta_0(\xi, \bar{t})$ que sigue la forma $\eta_0(\xi - \bar{t})$.

La solución homogénea de la ecuación (3.386) es la siguiente:

$$\eta_h(\xi, \bar{t}) = \int_0^\infty k a(k) J_0(k \xi) \cos(k \bar{t}) dk + \int_0^\infty k b(k) J_0(k \xi) \sin(k \bar{t}) dk \tag{3.407}$$

Con la ayuda de las condiciones iniciales es posible obtener los valores de $a(k)$ y $k b(k)$, donde dichas condiciones iniciales propuestas por Liu et al. (2003) son las siguientes:

1. $\eta(\xi, 0) = \eta_h(\xi, 0) + \eta_p(\xi, 0) = 0$
2. $\partial_t \eta(\xi, 0) = \partial_t \eta_0(\xi, 0)$

A continuación se dispone a calcular $a(k)$, resultando:

$$\begin{aligned}
\eta(\xi, 0) &= \eta_h(\xi, 0) + \eta_p(\xi, 0) = 0 \implies \eta_h(\xi, 0) = -\eta_p(\xi, 0), \tag{3.408} \\
\eta_h(\xi, 0) &= \int_0^\infty k a(k) J_0(k \xi) \cos(k \cdot 0) dk + \int_0^\infty k b(k) J_0(k \xi) \sin(k \cdot 0) dk = -\eta_p(\xi, 0) \\
&= \int_0^\infty k a(k) J_0(k \xi) dk = -\eta_p(\xi, 0) \\
&= \int_0^\infty k a(k) J_0(k \xi) dk = -\frac{1}{3} \left(\eta_0(\xi, 0) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] \right) \\
a(k) &= -\frac{1}{3} \int_0^\infty \xi J_0(k \xi) \left(\eta_0(\xi, 0) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] \right) d\xi \tag{3.409}
\end{aligned}$$

La forma de calcular $k b(k)$ es a través de la condición inicial (2).

$$\partial_{\bar{t}} \eta(\xi, 0) = \partial_{\bar{t}} \eta_0(\xi, 0) \implies \partial_{\bar{t}} \eta_h(\xi, 0) + \partial_{\bar{t}} \eta_p(\xi, 0) = \partial_{\bar{t}} \eta_0(\xi, 0), \quad (3.410)$$

$$\partial_{\bar{t}} \eta_h(\xi, 0) = \partial_{\bar{t}} \eta_0(\xi, 0) - \partial_{\bar{t}} \eta_p(\xi, 0) = \partial_{\bar{t}} \eta_0(\xi, 0) - \frac{1}{3} \partial_{\bar{t}} \left(\eta_0(\xi, 0) - \xi \partial_{\xi} [\eta_0(\xi, 0)] \right),$$

$$\partial_{\bar{t}} \eta_h(\xi, 0) = \frac{2}{3} \partial_{\bar{t}} \eta_0(\xi, 0) + \frac{\xi}{3} \partial_{\xi \bar{t}}^2 [\eta_0(\xi, 0)] = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \frac{\xi}{3} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)], \quad (3.411)$$

$$\int_0^{\infty} k a(k) J_0(k \xi) \cdot -k \cdot \sin(k \cdot 0) dk + \int_0^{\infty} k b(k) J_0(k \xi) \cdot k \cdot \cos(k \cdot 0) dk = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \frac{\xi}{3} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)],$$

$$\int_0^{\infty} k (k b(k)) J_0(k \xi) dk = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] \right)$$

$$k b(k) = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \xi J_0(k \xi) \left(2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] \right) d\xi \quad (3.412)$$

Si se tiene como término forzante a la siguiente función, $\eta_0(\xi, \bar{t}) = e^{-(\xi-\bar{t})^2}$, la solución particular es la siguiente:

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{1}{3} \left(\eta_0(\xi, \bar{t}) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta_0(\xi, \bar{t})] \right)$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{1}{3} \left(e^{-(\xi-\bar{t})^2} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [e^{-(\xi-\bar{t})^2}] \right)$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{1}{3} \left(e^{-(\xi-\bar{t})^2} + 2\xi (\xi - \bar{t}) e^{-(\xi-\bar{t})^2} \right)$$

$$\eta_p(\xi, \bar{t}) = \frac{1}{3} [1 + 2\xi (\xi - \bar{t})] e^{-(\xi-\bar{t})^2} \quad (3.413)$$

Haciendo $\bar{t} = 0$ en (3.413) se tiene el siguiente resultado:

$$\eta_p(\xi, 0) = \frac{1}{3} (1 + 2\xi^2) e^{-\xi^2} \quad (3.414)$$

Volviendo a la ecuación (3.409), se sustituye (3.414) en dicha ecuación obteniéndose $a(k)$ para este caso especial.

$$a(k) = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \xi J_0(k \xi) (1 + 2\xi^2) e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.415)$$

$$a(k) = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \xi J_0(k \xi) e^{-\xi^2} d\xi - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \xi^3 J_0(k \xi) e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.416)$$

$$a(k) = -\left[\frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3} I_2 \right] \quad (3.417)$$

I_1 e I_2 es una integral de la siguiente forma:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} J_{\nu}(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx \quad (3.418)$$

Las integrales I_1 e I_2 , o sea, la integral (3.418) es posible de calcular a través de las integrales encontradas en Gradshteyn & Ryzhik (2007), resultando lo siguiente:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} J_{\nu}(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(\beta)^{\nu} \Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}} (\nu+\mu+1) \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{-\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (3.419)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\beta \alpha^{\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu+1)} \exp\left(\frac{-\beta^2}{8\alpha}\right) M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (3.420)$$

$$\{\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\mu + \nu) > -1\}$$

Se tienen las siguientes definiciones de las expresiones que aparecen en (3.419) y (3.420):

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (3.421)$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-z/2} \Phi\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right) \quad (3.422)$$

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\alpha+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) \quad (3.423)$$

Donde, $M_{\lambda, \mu}(z)$ corresponde a la función de Whittaker de primer tipo, y $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ se define como función hipergeométrica confluyente.

$$(\alpha_p)_k = \frac{\Gamma(\alpha_p + k)}{\Gamma(\alpha_p)} = \alpha_p (\alpha_p + 1) \dots (\alpha_p + k - 1) \quad (3.424)$$

Donde, $(\alpha_p)_k$ se define como el símbolo de Pochhammer, ${}_pF_q$ se define como la serie hipergeométrica generalizada.

Para el caso del presente estudio, se elegirá el desarrollo de la integral (3.419), o sea, en base a la serie hipergeométrica generalizada. Por lo tanto, identificando términos, se tiene que:

$$\mu = 1, \alpha = 1, \nu = 0, \beta = k, x = \xi.$$

Por lo tanto, recurriendo a (3.419) el valor de la integral I_1 es:

$$I_1 = \int_0^\infty \xi J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.425)$$

$$I_1 = \frac{(k)^0 \Gamma(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2})}{2^{0+1} 1^{\frac{1}{2}(0+1+1)} \Gamma(0+1)} {}_1F_1\left(\frac{0+1+1}{2}; 0+1; \frac{-k^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$I_1 = \frac{1 \cdot \Gamma(1)}{2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)} {}_1F_1\left(1; 1; \frac{-k^2}{4}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{(1)}_k \left(\frac{-k^2}{4}\right)^k}{\cancel{(1)}_k k!}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{-k^2/4} \quad (3.426)$$

A continuación se calcula la integral I_2 , también mediante el uso de (3.419), resultando:

$$I_2 = \int_0^\infty \xi^3 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.427)$$

$$I_2 = \frac{(k)^0 \Gamma(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2})}{2^{0+1} 1^{\frac{1}{2}(0+3+1)} \Gamma(0+1)} {}_1F_1\left(\frac{0+3+1}{2}; 0+1; \frac{-k^2}{4 \cdot 1}\right)$$

$$I_2 = \frac{1 \cdot \Gamma(2)}{2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{-k^2}{4}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n \left(\frac{-k^2}{4}\right)^n}{(1)_n n!}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+n)} \frac{\left(\frac{-k^2}{4}\right)^n}{n!}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cancel{\Gamma(n+1)}}{\cancel{\Gamma(n+1)}} \frac{\left(\frac{-k^2}{4}\right)^n}{n!}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(-1)^n k^{2n}}{4^n n!}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-k^2}{4} + 1\right) e^{-k^2/4}$$

$$I_2 = \frac{-k^2}{8} e^{-k^2/4} + \frac{1}{2} e^{-k^2/4} \quad (3.428)$$

Ahora se sustituyen las expresiones (3.426) y (3.428) en (3.417), donde resulta:

$$\begin{aligned}
 a(k) &= -\left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} e^{-k^2/4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{-k^2}{8} e^{-k^2/4} + \frac{1}{2} e^{-k^2/4} \right) \right] \\
 a(k) &= -\left[\frac{1}{6} e^{-k^2/4} - \frac{k^2}{12} e^{-k^2/4} + \frac{1}{3} e^{-k^2/4} \right] \\
 a(k) &= -\left[\frac{1}{2} e^{-k^2/4} - \frac{k^2}{12} e^{-k^2/4} \right] \\
 a(k) &= -\frac{1}{12} (6 - k^2) e^{-k^2/4} \tag{3.429}
 \end{aligned}$$

Otra manera de calcular la integral (3.427) es a través de la siguiente ecuación que relaciona a la Transformada Hankel con su primera y segunda derivada.

$$\mathcal{H}\{-\xi^2 g(\xi)\}(k) = \frac{d^2}{dk^2}[\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] + \frac{1}{k} \frac{d}{dk}[\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] \tag{3.430}$$

Por lo que se reemplaza el valor obtenido por (3.426) en la ecuación (3.430), dando como resultado.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}\{-\xi^2 e^{-\xi^2/4}\}(k) &= \frac{d^2}{dk^2} \left[\frac{1}{2} e^{-k^2/4} \right] + \frac{1}{k} \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{2} e^{-k^2/4} \right] \\
 \mathcal{H}\{-\xi^2 e^{-\xi^2/4}\}(k) &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) e^{-k^2/4} + \left(-\frac{1}{4} e^{-k^2/4} \right) \\
 \mathcal{H}\{-\xi^2 e^{-\xi^2/4}\}(k) &= I_2 = -\frac{1}{8} \left(4 - \frac{k^2}{2} \right) e^{-k^2/4} \tag{3.431}
 \end{aligned}$$

El resultado anterior se sustituye en (3.417), obteniendo $a(k)$.

$$\begin{aligned}
 a(k) &= -\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-k^2/4} + \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{8} \left(4 - \frac{k^2}{2} \right) e^{-k^2/4} \right] \\
 a(k) &= -\frac{1}{6} e^{-k^2/4} + \frac{k^2}{12} e^{-k^2/4} - \frac{1}{3} e^{-k^2/4} \\
 a(k) &= -\frac{1}{12} (6 - k^2) e^{-k^2/4} \tag{3.432}
 \end{aligned}$$

Antes de calcular $kb(k)$, primero se desarrolla el siguiente factor:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, \bar{t})] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, \bar{t})] &= \left(2 \cdot 2 (\xi - \bar{t}) e^{-(\xi - \bar{t})^2} \right) \\
 &+ \xi \left(2 (1 - 2\xi (\xi - \bar{t})^2) e^{-(\xi - \bar{t})^2} \right) \\
 2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, \bar{t})] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, \bar{t})] &= \left(4 (\xi - \bar{t}) e^{-(\xi - \bar{t})^2} \right) \\
 &+ \left(2\xi (1 - 2(\xi - \bar{t})^2) e^{-(\xi - \bar{t})^2} \right)
 \end{aligned}$$

Evaluando $\bar{t} = 0$ en (3.433).

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] &= 4\xi e^{-\xi^2} + 2\xi (1 - 2\xi^2) e^{-\xi^2} \\
 2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} [\eta_0(\xi, 0)] + \xi \frac{\partial^2}{\partial \bar{t} \partial \xi} [\eta_0(\xi, 0)] &= (6\xi - 4\xi^3) e^{-\xi^2} = 2\xi (3 - 2\xi^2) e^{-\xi^2} \quad (3.433)
 \end{aligned}$$

Reemplazando (3.433) en (3.412).

$$\begin{aligned}
 kb(k) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \xi J_0(k\xi) \left(2\xi (3 - 2\xi^2) e^{-\xi^2} \right) d\xi \\
 kb(k) &= 2 \int_0^\infty \xi^2 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi - \frac{4}{3} \int_0^\infty \xi^4 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \\
 kb(k) &= 2I_3 - \frac{4}{3}I_4 \quad (3.434)
 \end{aligned}$$

La integral I_3 se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= f(k) = \int_0^\infty \xi^2 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \\
 2f(k) &= \int_{-\infty}^\infty \xi^2 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \quad \Leftarrow \text{Función par} \quad (3.435)
 \end{aligned}$$

Recurriendo a una de las representaciones integrales de la Función de Bessel cilíndrica que se muestran a continuación es posible resolver (3.435).

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i kr \cos(\theta)} d\theta \quad (3.436)$$

Sustituyendo (3.436) en (3.435).

$$\begin{aligned}
4\pi f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \xi^2 e^{-\xi^2 + ikr \cos(\theta)} d\theta d\xi \\
4\pi f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \xi^2 e^{-\xi^2 + ikr \cos(\theta) + \frac{k^2}{4} \cos^2(\theta) - \frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} d\theta d\xi \\
4\pi f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \xi^2 e^{-(\xi - \frac{ik}{2} \cos(\theta))^2} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} d\xi d\theta
\end{aligned} \tag{3.437}$$

Cambio de variable: $\xi \longrightarrow \xi - \frac{ik}{2} \cos(\theta)$

$$4\pi f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\xi - \frac{ik}{2} \cos(\theta) \right)^2 e^{-\xi^2} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} d\xi d\theta \tag{3.438}$$

$$4\pi f(k) = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi - \frac{ik}{2} \cos(\theta) \right)^2 e^{-\xi^2} d\xi d\theta \tag{3.439}$$

$$\begin{aligned}
4\pi f(k) &= \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi - ik \cos(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2}{4} \cos^2(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$4\pi f(k) = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 0 - \frac{k^2}{4} \cos^2(\theta) \sqrt{\pi} \right) d\theta$$

$$4\pi f(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4} \cos^2(\theta)} (2 - k^2 \cos^2(\theta)) d\theta$$

$$4\pi f(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{4} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right)} \left(2 - k^2 \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) \right) d\theta$$

$$4\pi f(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-k^2/8} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{k^2}{8} \cos(2\theta)} \left(2 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2} \cos(2\theta) \right) d\theta$$

Cambio de variable: $2\theta \longrightarrow \theta$

$$4\pi f(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-k^2/8} \int_0^{\pi} e^{-\frac{k^2}{8} \cos(\theta)} \left(2 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2} \cos(\theta) \right) d\theta \tag{3.440}$$

Pero se sabe que una de las representaciones integrales de las funciones de Bessel modificadas del primer tipo de orden 0 y 1 ($I_0(\cdot)$ e $I_1(\cdot)$ respectivamente), son las siguientes:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-z \cos(\theta)} d\theta \tag{3.441}$$

$$I_0'(z) = I_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta) e^{-z \cos(\theta)} d\theta \tag{3.442}$$

Sustituyendo (3.441) y (3.442) en (3.440), resultando lo siguiente:

$$\begin{aligned}
4\pi f(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[e^{-k^2/8} \int_0^\pi e^{-\frac{k^2}{8} \cos(\theta)} \left(2 - \frac{k^2}{2} \right) d\theta - \int_0^\pi e^{-\frac{k^2}{8} \cos(\theta)} \frac{k^2}{2} \cos(\theta) d\theta \right] \\
4\pi f(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-k^2/8} \left[\left(2 - \frac{k^2}{2} \right) \int_0^\pi e^{-\frac{k^2}{8} \cos(\theta)} d\theta - \frac{k^2}{2} \int_0^\pi e^{-\frac{k^2}{8} \cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \right] \\
4\pi f(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-k^2/8} \left[\left(2 - \frac{k^2}{2} \right) \pi I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} \pi I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
I_3 = f(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(2 - \frac{k^2}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \tag{3.443}
\end{aligned}$$

Ahora se necesita calcular I_4 para poder obtener $kb(k)$, cuyo procedimiento se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
I_4 &= g(k) = \int_0^\infty \xi^4 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi \\
I_4 &= - \int_0^\infty -\xi^4 J_0(k\xi) e^{-\xi^2} d\xi = -\mathcal{H}\{-\xi^2 g(\xi)\}(k) \tag{3.444}
\end{aligned}$$

Pero se sabe que:

$$\mathcal{H}\{-\xi^2 g(\xi)\}(k) = \frac{d^2}{dk^2} [\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] + \frac{1}{k} \frac{d}{dk} [\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] \tag{3.445}$$

Se tiene la expresión (3.443) que es necesaria para calcular I_4 :

$$\begin{aligned}
g(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(2 - \frac{k^2}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
g(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} [g_1(k) + g_2(k)] \\
g'(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[-\frac{k}{4} (g_1(k) + g_2(k)) + (g'_1(k) + g'_2(k)) \right] \tag{3.446}
\end{aligned}$$

$$g'_1(k) = -k I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k}{2} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{k^3}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \tag{3.447}$$

$$g'_2(k) = \frac{k^3}{8} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) \tag{3.448}$$

A continuación se sustituye (3.447) y (3.448) en (3.446), resultando lo siguiente:

$$g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left\{ \left[-\frac{k}{4} \left(2 - \frac{k^2}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] + \left[-k I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k}{2} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{k^3}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^3}{8} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \right\} \quad (3.449)$$

$$g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left\{ -\frac{k}{2} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^3}{8} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{k^3}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) - k I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k}{2} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{k^3}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^3}{8} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right\}$$

$$g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left\{ -\frac{3k}{2} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^3}{4} I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k}{2} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{k^3}{4} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right\}$$

$$g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{k^3}{4} - \frac{3k}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k}{2} - \frac{k^3}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right]$$

$$g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} [g_3(k) + g_4(k)] \quad (3.450)$$

Ahora es necesario calcular la segunda derivada con respecto a k de $f(k)$.

$$g''(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[-\frac{k}{4} (g_3(k) + g_4(k)) + (g'_3(k) + g'_4(k)) \right] \quad (3.451)$$

$$g'_3(k) = \left[\left(\frac{3k^2}{4} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^3}{4} - \frac{3k}{2} \right) \frac{k}{4} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right]$$

$$g'_3(k) = \left[\left(\frac{3k^2}{4} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{16} - \frac{3k^2}{8} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \quad (3.452)$$

$$g'_4(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k}{2} - \frac{k^3}{4} \right) \left[I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \frac{8}{k^2} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \frac{k}{4}$$

$$g'_4(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{16} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right)$$

$$g'_4(k) = \left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{16} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \quad (3.453)$$

Se reemplaza (3.452) y (3.453) en (3.451), por lo que el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
g''(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left\{ -\frac{k}{4} \left(\left(\frac{k^3}{4} - \frac{3}{2}k \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k}{2} - \frac{k^3}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right) + \left(\left(\frac{3}{4}k^2 - \frac{3}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{16} - \frac{3}{8}k^2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{16} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right) \right\} \\
g''(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left\{ \left(\frac{3k^2}{8} - \frac{k^4}{16} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k}{2} - \frac{k^3}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{3}{4}k^2 - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{k^4}{16} - \frac{3}{8}k^2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{16} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right\} \\
g''(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{5k^2}{4} - \frac{k^4}{8} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{8} - \frac{3k^2}{4} - \frac{1}{2} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \quad (3.454)
\end{aligned}$$

Como ya se tiene $g'(k)$ y $g''(k)$, entonces es posible calcular I_4 de la siguiente manera.

$$\frac{1}{k} g'(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{k^2}{4} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \quad (3.455)$$

$$I_4 = -\mathcal{H}\{-\xi^2 g(\xi)\}(k)$$

$$I_4 = -\left[\frac{d^2}{dk^2} [\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] + \frac{1}{k} \frac{d}{dk} [\mathcal{H}\{g(\xi)\}(k)] \right]$$

$$I_4 = -\left[g''(k) + \frac{1}{k} g'(k) \right]$$

$$I_4 = -g''(k) - \frac{1}{k} g'(k) \quad (3.456)$$

$$I_4 = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{5k^2}{4} - \frac{k^4}{8} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{8} - \frac{3k^2}{4} - \frac{1}{2} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right]$$

$$- \frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{k^2}{4} - \frac{3}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right]$$

$$I_4 = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{3k^2}{4} - \frac{k^4}{8} - 3 \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{8} - k^2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \quad (3.457)$$

Por lo tanto, $kb(k)$ es:

$$\begin{aligned}
kb(k) &= 2f(k) - \frac{4}{3} \left(g''(k) + \frac{1}{k} g'(k) \right) \\
kb(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-k^2/8} \left[\left(2 - \frac{k^2}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
&+ \frac{\sqrt{\pi}}{6} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{3k^2}{4} - \frac{k^4}{8} - 3 \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{8} - k^2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
kb(k) &= \sqrt{\pi} e^{-k^2/8} \left[\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{8} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \frac{k^2}{8} I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] + \right. \\
&\left. \left[\left(\frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{48} - \frac{1}{2} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{48} - \frac{k^2}{6} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \right] \\
kb(k) &= \sqrt{\pi} e^{-k^2/8} \left[\left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{48} \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(\frac{k^4}{48} - \frac{k^2}{24} \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
kb(k) &= \frac{\sqrt{\pi}}{48} e^{-k^2/8} \left[\left(6k^2 - k^4 \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) + \left(k^4 - 2k^2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \\
kb(k) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{48} k^2 e^{-k^2/8} \left[\left(k^2 - 6 \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(k^2 - 2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] \tag{3.458}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sustituyendo $a(k)$ y $kb(k)$ en la solución homogénea propuesta por Liu et al. (2003), $\eta_h(\xi, \bar{t})$ queda como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\eta_h(\xi, \bar{t}) &= -\frac{1}{12} \int_0^\infty k(6 - k^2) J_0(k\xi) e^{-\frac{k^2}{4}} \cos(k\bar{t}) dk \\
&- \frac{\sqrt{\pi}}{48} \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{8}} J_0(k\xi) \sin(k\bar{t}) \left[\left(k^2 - 6 \right) I_0 \left(\frac{k^2}{8} \right) - \left(k^2 - 2 \right) I_1 \left(\frac{k^2}{8} \right) \right] dk \tag{3.459}
\end{aligned}$$

Volviendo a la solución particular, se reemplazan los valores de ξ y \bar{t} en (3.413) para volver al espacio x y t , en otras palabras, pasar de una solución adimensional a una solución dimensional.

$$\begin{aligned}
\eta_p(x, t) &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{4}{L} \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}} \left(\frac{2}{L} \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}} - \frac{\sqrt{\delta g}}{L} t \right) \right] \exp \left[- \left(\frac{2}{L} \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}} - \frac{\sqrt{\delta g}}{L} t \right)^2 \right] \\
\eta_p(x, t) &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{4}{L^2} \left(\frac{2\delta x}{\alpha} - \delta \frac{\sqrt{g x}}{\alpha} t \right) \right] \exp \left[- \frac{2\sqrt{\delta}}{L} \left(\sqrt{\frac{x}{\alpha}} - \frac{\sqrt{g}}{2} t \right)^2 \right] \tag{3.460}
\end{aligned}$$

El caso *runup* considera $x = 0$, donde η_p queda así:

$$\eta_p(0, t) = \frac{1}{3} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{\delta g}}{L} \cdot t \right)^2 \right] \tag{3.461}$$

Reemplazando ξ y \bar{t} en la solución homogénea (3.459), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \eta_h(x, t) = & -\frac{1}{12} \int_0^\infty k(6 - k^2) J_0\left(\frac{2k}{L} \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k^2}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{\delta g}}{L} k t\right) dk \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{48} \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{8}} J_0\left(\frac{2k}{L} \sqrt{\frac{\delta x}{\alpha}}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\delta g}}{L} k t\right) \\ & \cdot \left[(k^2 - 6) I_0\left(\frac{k^2}{8}\right) - (k^2 - 2) I_1\left(\frac{k^2}{8}\right) \right] dk \end{aligned} \quad (3.462)$$

Considerando $x = 0$ en la solución homogénea, se tiene que:

$$\begin{aligned} \eta_h(0, t) = & -\frac{1}{12} \int_0^\infty k(6 - k^2) e^{-\frac{k^2}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{\delta g}}{L} k t\right) dk \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{48} \int_0^\infty k^2 e^{-\frac{k^2}{8}} \sin\left(\frac{\sqrt{\delta g}}{L} k t\right) \left[(k^2 - 6) I_0\left(\frac{k^2}{8}\right) - (k^2 - 2) I_1\left(\frac{k^2}{8}\right) \right] dk \end{aligned} \quad (3.463)$$

El *runup* total es la suma de la solución particular y homogénea evaluada en $x = 0$, donde se tiene que:

$$\eta(0, t) = \delta \cdot \bar{\eta}(0, \bar{t}) = \delta \cdot \left[\bar{\eta}_p\left(0; \frac{\sqrt{g\delta}}{L} t\right) + \bar{\eta}_h\left(0; \frac{\sqrt{g\delta}}{L} t\right) \right] \quad (3.464)$$

3.7. Modelo de *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra desarrollado por Okal & Synolakis (2003)

Esta investigación realiza una comparación de la energía disipada que involucra el *tsunami* generado por una fuente sísmica (dislocación) y una fuente por deslizamiento de tierra submarino (específicamente un *slump*).

La fuente sísmica (por dislocación) fue modelada como la deformación del fondo oceánico, es decir, corresponde a un levantamiento vertical del fondo marino en una cantidad Δz , sobre una región de área A . Como la velocidad de ruptura de la dislocación es mucho mayor que la velocidad del *tsunami*, se asume que el levantamiento del fondo oceánico es idéntico e instantáneo a la deformación que ocurre en la superficie.

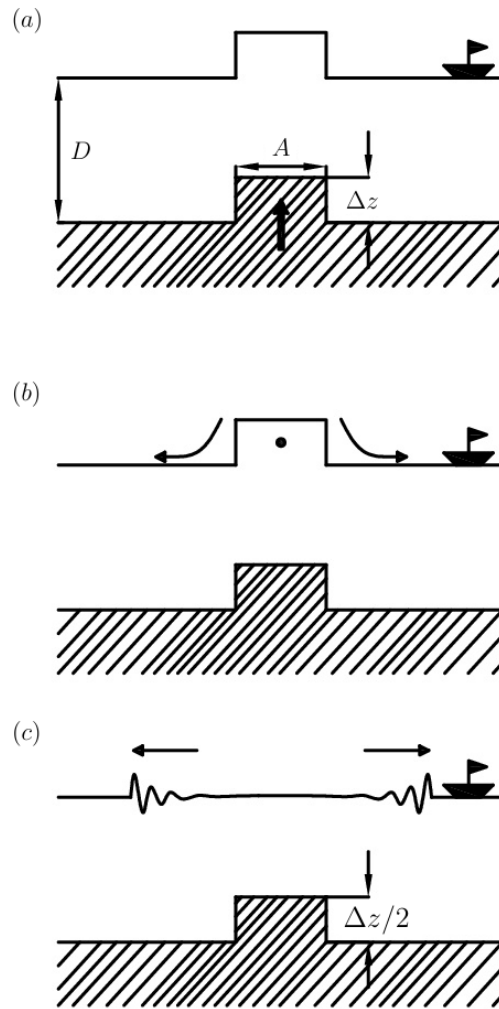


Figura 3.16: Modelo de *tsunami* por fuente de dislocación. (a) Levantamiento vertical súbito del fondo marino (montículo) en una cantidad Δz sobre un área A . (b) Descenso vertical del montículo y de la superficie del agua en una cantidad $\Delta z/2$. (c) Propagación de las ondas de tsunami hacia los lados. Nota: la figura no está a escala. (Fuente: Modificado desde Okal & Synolakis, 2003)

En la figura 3.16(a) se muestra el modelo simplificado de terremoto por dislocación como generador de un *tsunami*. En este modelo asume un pequeño montículo como deformación del fondo oceánico, cuyo levantamiento vertical produce una deformación en la superficie del mar idéntica e instantánea. En la figura 3.16(b) el montículo desciende verticalmente en una cantidad $\Delta z/2$, que es donde se ubica el centro de masa del montículo, este descenso es inestable y genera ondas hacia los lados, provocando una onda de *tsunami* característica (ver figura 3.16(c)).

La energía potencial se calcula como la diferencia entre la energía potencial entre el fondo

oceánico y la superficie del agua, la energía potencial desde el centroide del levantamiento vertical y la superficie del mar. La forma de calcular la energía potencial es la siguiente:

$$E_p = E_{p1} - E_{p2} \quad (3.465)$$

$$E_p = \rho_w g A D \Delta z - \rho_w g A \Delta z \left(D - \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (3.466)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho_w g A (\Delta z)^2 \quad (3.467)$$

Donde: E_{p1} corresponde a la energía potencial del fondo marino analizada en Δz , E_{p2} es la energía potencial con respecto al centro de masa del levantamiento en una cantidad Δz del fondo oceánico, D corresponde a la profundidad del fondo oceánico, ρ_w es la densidad del agua, y g a la aceleración de gravedad.

Cuando la deformación toma lugar rápidamente ($v \gg c$) el equilibrio hidráulico no es alcanzado en todo instante de tiempo durante el movimiento hacia arriba del fondo oceánico, por lo tanto, la deformación no es reversible y necesita más trabajo (energía) para hacer ese eventual incremento de energía potencial en el nuevo estado estacionario, y la diferencia es canalizada en la onda de *tsunami*. Cuando el levantamiento toma lugar lentamente ($v \ll c$), el equilibrio puede ser alcanzado en todo instante de tiempo durante la deformación, eso significa que el montículo (perturbación) en la superficie puede desaparecer más rápido que la perturbación que esta siendo creada, como resultado, las fuerzas de presión en el fondo pueden ajustar continuamente la nueva altura de la columna de agua, el proceso puede ser termodinamicamente reversible, y el trabajo hecho para realizar la deformación del fondo oceánico puede ser la diferencia exacta entre en las energías potenciales; no habría energía disponible para la onda de *tsunami* (Okal & Synolakis, 2003).

La fuente por deslizamiento (*slump*) se modela como el movimiento de una masa a lo largo del fondo oceánico, y por lo tanto es un dipolo que presenta un aporte negativo y uno positivo, donde el polo negativo se encuentra en el talón (parte de atrás) del deslizamiento y en la parte delantera del deslizamiento esta el polo positivo. Por lo tanto, la contribución o suma de ambos será la energía del *tsunami*.

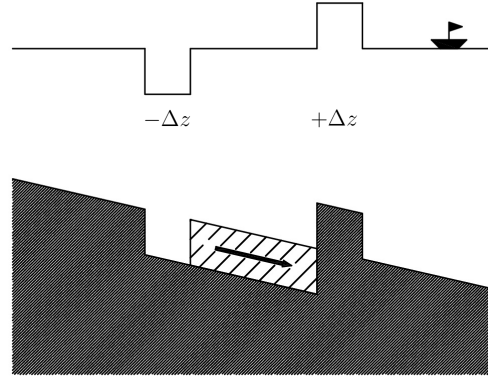


Figura 3.17: Modelo de *tsunami* por fuente de deslizamiento (*Slump*). (Fuente: Modificado desde Okal & Synolakis, 2003)

Este modelo asume los siguientes supuestos: la profundidad del agua es constante; la velocidad máxima de desplazamiento del slump es de $\sqrt{2gz}$ (z corresponde a la máxima extensión vertical viajada por el *slump*), por lo tanto, la velocidad a la que se mueve el deslizamiento de tierra no es mucho menor que la velocidad de fase del *tsunami*, ya que el deslizamiento por ejemplo, usualmente los valores de z y D (profundidad del fondo oceánico) son de 500 m y 1500 m respectivamente, dando como resultado $\frac{v}{c} = \sqrt{2 \frac{z}{D}} = \sqrt{2 \frac{500}{1500}} = 0,82$, esto implica que para estos valores de z y de D , o puede ser completamente reversible (caso de un *slump* que se mueve tan lento como para no generar ondas de *tsunami*) o puede ser completamente irreversible (caso de fuente por *slump*).

3.7.1. Resolución de la ecuación de ondas (1+1D) inhomogénea aplicando el Teorema de Convulación

Se tiene la ecuación de ondas en (1+1D) con un término forzante, que representará el movimiento del fondo marino. La función que describe el movimiento del fondo marino es $\varepsilon(x, t)$ y es del tipo onda viajera, esto quiere decir que es de la forma $\varepsilon(x, t) = h(x - vt)$.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \quad (3.468)$$

La ecuación (3.468) se resolverá a través de la función de Green, o sea, un pulso aplicado en x y t como perturbación del fondo oceánico.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x) \delta(t) \quad (3.469)$$

A la ecuación (3.469) se aplicará a continuación la Transformada de Fourier en x y t , tal como se muestra a continuación:

$$-\omega^2 \hat{G} + k^2 c^2 \hat{G} = 1 \quad (3.470)$$

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + k^2 c^2) \hat{G} &= 1 \\ \hat{G} &= \frac{1}{(kc)^2 - \omega^2} = - \left[\frac{1}{\omega^2 - (kc)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.471)$$

Se ha llegado a la solución en el espacio dual y en número de ondas de la ecuación de ondas con término forzante a través de la Función de Green. Sin embargo, para obtener la solución en el espacio x y t es necesario aplicar la Transformada de Fourier inversa, resultando lo siguiente:

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\omega^2 - (kc)^2} e^{i\omega t - ikx} dk d\omega \quad (3.472)$$

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2} d\omega \right] dk \quad (3.473)$$

Para resolver la integral que está dentro del paréntesis en corchete es útil recurrir a una descomposición por fracciones parciales.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\omega^2 - (kc)^2} &= \frac{-1}{2kc} \cdot \left[\frac{1}{\omega - kc} - \frac{1}{\omega + kc} \right] \\ \frac{-1}{\omega^2 - (kc)^2} &= \frac{1}{2kc} \cdot \left[\frac{1}{\omega + kc} - \frac{1}{\omega - kc} \right] \end{aligned} \quad (3.474)$$

A continuación se reemplaza la ecuación (3.474) en la integral que depende de ω de la ecuación (3.473), obteniéndose,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2kc} \left[\frac{1}{\omega + kc} - \frac{1}{\omega - kc} \right] d\omega \quad (3.475)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2} d\omega = \frac{1}{2kc} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + kc} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - kc} d\omega \right] \quad (3.476)$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la ecuación (3.476), porque $e^{i\omega t}$ es analítica y el integrando en la integral que depende de ω de la ecuación (3.476) tiene un polo simple en

$\omega = kc$, resultando lo siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2kc} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + kc} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - kc} d\omega \right] &= \frac{1}{2kc} \left[2\pi i \cdot e^{-ikct} - 2\pi i \cdot e^{ikct} \right] \\ &= \frac{\pi i}{kc} \left[e^{-ikct} - e^{ikct} \right] \\ &= \frac{\pi i}{kc} \left[-2i \sin(kct) \right] \\ \frac{1}{2kc} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + kc} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - kc} d\omega \right] &= \frac{2\pi}{kc} \sin(kct) \end{aligned} \quad (3.477)$$

Teniendo (3.477) es reemplazado en la integral (3.473), donde finalmente se obtiene el valor de la función de Green para la ecuación de ondas (1+1D).

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[\frac{2\pi}{kc} \sin(kct) \right] dk \quad (3.478)$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kct)}{k} e^{-ikx} dk \quad (3.479)$$

Mediante el uso de tabla de integrales encontradas en Debnath & Bhatta (2014), la solución de la expresión (3.479) es la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kct)}{k} e^{-ikx} dk = \pi \cdot H(ct - |x|) = \pi \cdot H\left(t - \left|\frac{x}{c}\right|\right) \quad (3.480)$$

Donde, $H(\cdot)$ corresponde a la función de Heaviside. Finalmente se reemplaza (3.480) en (3.479), dando como resultado la función de Green en el dominio espacial y temporal.

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \cdot \pi \cdot H\left(t - \left|\frac{x}{c}\right|\right) = \frac{1}{2c} \cdot H\left(t - \left|\frac{x}{c}\right|\right) \quad (3.481)$$

La función de Green (3.481) no es la solución de la ecuación de ondas (1+1D). Sin embargo, para poder obtener la solución de la ecuación (3.468) es necesario aplicar el teorema de Convolución.

$$\eta(x, t) = G * f = G * \partial_{tt}^2 \varepsilon \quad (3.482)$$

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', t - t') \cdot \partial_{tt}^2 \varepsilon(x', t') dx' dt' \quad (3.483)$$

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2c} \cdot H\left(t - t' - \left|\frac{x - x'}{c}\right|\right) \cdot \partial_{tt}^2 \varepsilon(x', t') dx' dt' \quad (3.484)$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(t - t' - \left|\frac{x - x'}{c}\right|\right) \cdot \partial_{tt}^2 \varepsilon(x', t') dx' dt' \quad (3.485)$$

Por definición de la función de Heaviside, se sabe que $H(\phi) = 1$, donde $\phi > 0$. Para determinar los límites de integración con respecto a x' , el procedimiento es el que se muestra a continuación:

$$t - t' - \left| \frac{x - x'}{c} \right| > 0 \iff t - t' > \left| \frac{x - x'}{c} \right| \quad (3.486)$$

$$x' > x - c(t - t') \quad (3.487)$$

$$x' < x + c(t - t') \quad (3.488)$$

De la parte izquierda de la condición (3.486), se tienen las expresiones $t - t'$ y $\left| \frac{x - x'}{c} \right|$, de las cuales se desprende lo siguiente:

$$t - t' \geq 0 \quad \wedge \quad \left| \frac{x - x'}{c} \right| \geq 0 \quad (3.489)$$

Por lo tanto, según la condición (3.489), los límites de integración con respecto a t' en la integral (3.485) se determinan de la siguiente manera:

$$t - t' > 0 \implies t > t' \implies 0 \leq t' \leq t \quad (3.490)$$

Se tiene una función $\varepsilon(x, t)$ de la siguiente forma, con sus correspondientes primera y segunda derivada con respecto al tiempo.

$$\varepsilon(x, t) = h(x - vt) \quad (3.491)$$

$$\partial_t \varepsilon(x, t) = -v h'(x - vt) \quad (3.492)$$

$$\partial_{tt}^2 \varepsilon(x, t) = v^2 h''(x - vt) \quad (3.493)$$

Teniendo las condiciones (3.487), (3.488), (3.490) junto con la función (3.493), todas se sustituyen en la integral (3.485), dando como resultado la siguiente expresión,

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} \partial_{tt}^2 \varepsilon(x', t') dx' dt' \quad (3.494)$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} h''(x' - vt') dx' dt' \quad (3.494)$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-t')-vt'}^{x+c(t-t')-vt'} h''(\xi) d\xi dt' \quad , \quad \xi = x' - vt' \quad , \quad d\xi = dx' \quad (3.495)$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \int_0^t [h'(x + c(t - t') - vt') - h'(x - c(t - t') - vt')] dt' \quad (3.496)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\psi = x + ct - (c + v)t' \implies d\psi = -(c + v) dt' \iff dt' = \frac{-d\psi}{c + v} \quad (3.497)$$

$$\gamma = x - ct - (v - c)t' \implies d\gamma = -(v - c) dt' \iff dt' = \frac{-d\gamma}{v - c} \quad (3.498)$$

Reemplazando (3.497) y (3.498) en (3.496) se tiene lo siguiente:

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \left[\int_{x+ct}^{x-vt} \frac{h'(\psi)}{-(c+v)} d\psi - \int_{x-ct}^{x-vt} \frac{h'(\gamma)}{-(v-c)} d\gamma \right] \quad (3.499)$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \left[\frac{-h(x-vt)}{(c+v)} + \frac{h(x+ct)}{(c+v)} + \frac{h(x-vt)}{(v-c)} - \frac{h(x-ct)}{(v-c)} \right]$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \left[h(x-vt) \left(\frac{-1}{c+v} - \frac{1}{c-v} \right) + \frac{h(x+ct)}{(c+v)} + \frac{h(x-ct)}{(c-v)} \right]$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{2c} \left[h(x-vt) \left(\frac{-2c}{c^2 - v^2} \right) + \frac{h(x+ct)}{(c+v)} + \frac{h(x-ct)}{(c-v)} \right]$$

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} h(x-vt) + \frac{v^2}{2c(c+v)} h(x+ct) + \frac{v^2}{2c(c-v)} h(x-ct) \quad (3.500)$$

Si se tiene la siguiente función ε como representativo de un movimiento del fondo oceánico, $\eta(x, t)$ resulta.

$$\varepsilon(x, t) = A e^{-k(x-vt)^2} \quad (3.501)$$

Donde, A es la amplitud de la onda medida en (m), $\varepsilon(x, t)$ corresponde a una función del tipo gaussiana que se desplaza a una velocidad v por el fondo marino, manteniendo su forma de gaussiana; k es una constante de normalización de la función gaussiana.

Para el caso de un *tsunami* provocado por un deslizamiento de tierra, $\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \eta_2(x, t)$, esto es debido a que el *tsunami* provocado por deslizamiento de tierra es de naturaleza dipolar. En otras palabras, esto quiere decir que $\eta_1(x, t)$ es opuesto en amplitud a $\eta_2(x, t)$ y ocurre en un tiempo $t = T$ con $x = L = vT$, donde $H(\cdot)$ corresponde a la función de Heaviside.

$$\eta_1(x, t) = A \cdot H(t) \left[\frac{v^2}{v^2 - c^2} e^{-k(x-vt)^2} + \frac{v^2}{2c(c+v)} e^{-k(x+ct)^2} + \frac{v^2}{2c(c-v)} e^{-k(x-ct)^2} \right] \quad (3.502)$$

$$\eta_2(x, t) = -A \cdot H(\tau) \left[\frac{v^2}{v^2 - c^2} e^{-k(\xi-v\tau)^2} + \frac{v^2}{2c(c+v)} e^{-k(\xi+c\tau)^2} + \frac{v^2}{2c(c-v)} e^{-k(\xi-c\tau)^2} \right] \quad (3.503)$$

Pero se tiene que : $\xi = x - L$ y $\tau = t - T$.

Esto implica lo siguiente: $\xi - v\tau = (x-L) - v(t-T) = x-L-vt+vT = x-vt - (L-vT) = x-vt$

Por lo tanto,

$$\frac{v^2}{v^2 - c^2} e^{-k(x-vt)^2} - \frac{v^2}{v^2 - c^2} e^{-k(\xi-v\tau)^2} = 0 \quad (3.504)$$

Finalmente sumando $\eta_1(x, t)$ y $\eta_2(x, t)$ se obtiene $\eta(x, t)$ que es la elevación de la superficie del mar en cualquier instante de tiempo y en cualquier posición medida desde la línea de costa hasta el infinito.

$$\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \eta_2(x, t) \quad (3.505)$$

$$\eta(x, t) = A \cdot \frac{v^2}{2c} \left[\frac{e^{-k(x+ct)^2} - e^{-k(x+c\tau)^2}}{c+v} + \frac{e^{-k(x-ct)^2} - e^{-k(x-c\tau)^2}}{c-v} \right] \quad (3.506)$$

Otra manera de resolver la ecuación de ondas (1+1D) con término forzante (inhomogénea) es aplicando el Principio de Duhamel junto con las respectivas condiciones iniciales del problema. En este caso, las condiciones iniciales según Okal & Synolakis (2003) son las de desplazamiento y velocidad inicial nula.

3.7.2. Resolución de la ecuación de ondas (1+1D) inhomogénea aplicando el Principio de Duhamel

Se tiene la ecuación de ondas (1+1D) expresado de la siguiente manera.

$$\partial_{tt}^2 \eta - c^2 \partial_{xx}^2 \eta = \partial_{tt}^2 h_0 \quad (3.507)$$

El desarrollo de la ecuación de ondas (3.507) a través del principio de Duhamel está basado en el estudio de Tinti & Bortolucci (2000). Primeramente se comenzará con la solución general de la ecuación de ondas, aplicando las respectivas condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2} [\eta_0(x+ct) + \eta_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \partial_t h_0(\xi, 0) d\xi \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-q)}^{x+c(t-q)} \partial_{qq}^2 h_0(\xi, q) d\xi dq \end{aligned} \quad (3.508)$$

En el caso en que una de las condiciones iniciales sea de desplazamiento nulo, la ecuación (3.508) queda expresada de la siguiente manera.

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \partial_t h_0(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-q)}^{x+c(t-q)} \partial_{qq}^2 h_0(\xi, q) d\xi dq \quad (3.509)$$

Realizando el siguiente cambio de variable.

$$h_0(x, t) = h_0(f(x, t)) \quad (3.510)$$

$$f(x, t) = x - c \cdot g(t) \quad (3.511)$$

$$g(t) = \int_0^t Fr(\tau) d\tau \implies \text{Donde: } Fr = \frac{v}{c} \quad (3.512)$$

$$v(t) = \frac{dg(t)}{dt} = d_t g(t) \quad (3.513)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = d_t v(t) \quad (3.514)$$

Donde: $g(t)$ es una función de desplazamiento; Fr corresponde al número de Froude, que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas de gravedad, que para este caso sería la razón entre velocidad media del flujo y velocidad de fase a la que se moviliza el *tsunami*; $v(t)$ es la velocidad media; $a(t)$ viene a ser la aceleración a la que se desplaza el *tsunami*.

Se tiene la siguiente derivada que es parte del integrando de la primera integral de (3.509), y aplicando regla de la cadena es posible modificar esa expresión por una nueva que es más simple de resolver.

$$\begin{aligned} \partial_t h_0(x, t) &= \frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{\partial h_0}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{dh_0}{df} (x - g(t))' \\ \partial_t h_0(x, t) &= -v(t) d_f h_0(f(x, t)) \end{aligned} \quad (3.515)$$

Finalmente (3.509) queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \partial_t h_0(\xi, 0) d\xi \\ &= \frac{-1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(0) d_f h_0(\xi - c \cdot g(0)) d\xi \\ &= \frac{-1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(0) d_f h_0(\xi) df \end{aligned} \quad (3.516)$$

$$I_0 = \frac{-v(0)}{2c} [h_0(x + ct) - h_0(x - ct)] \quad (3.517)$$

La ecuación (3.517) es igual a cero cuando la condición inicial ligada a la velocidad es nula. Como el modelo de Okal & Synolakis (2003) considera las condiciones iniciales nulas, entonces (3.517) es igual a cero.

A continuación mediante regla de la cadena, se realiza el mismo procedimiento que para la primera integral, pero en este caso es para la segunda integral, tal como se muestra a continuación:

$$\partial_{tt}^2 h_0(x, t) = \frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} = - a(t) d_f h_0(f(x, t)) + v^2(t) d_{ff}^2 h_0(f(x, t)) \quad (3.518)$$

Reemplazando (3.518) en (3.509), dando como resultado:

$$I_1 = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-q)}^{x+c(t-q)} \partial_{qq}^2 h_0(\xi, q) d\xi dq \quad (3.519)$$

$$I_1 = -\frac{1}{2c} \int_0^t a(q) dq \int_{x-c(t-q)}^{x+c(t-q)} \partial_f h_0(f(\xi, q)) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) dq \int_{x-c(t-q)}^{x+c(t-q)} \partial_{ff}^2 h_0(f(\xi, q)) d\xi \quad (3.520)$$

Donde, $\eta(x, t) = I_1$.

A continuación se realiza el siguiente cambio de variable.

$$\alpha(x, t, q) = x - c(t - q) - g(t) \quad (3.521)$$

$$\beta(x, t, q) = x + c(t - q) - g(t) \quad (3.522)$$

Esto implica que la ecuación (3.520), se modifica de la siguiente manera:

$$I_1 = -\frac{1}{2c} \int_0^t a(q) dq \int_{\alpha(x,t,q)}^{\beta(x,t,q)} \partial_f h_0(f(\xi, q)) df + \frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) dq \int_{\alpha(x,t,q)}^{\beta(x,t,q)} \partial_{ff}^2 h_0(f(\xi, q)) df \quad (3.523)$$

$$I_1 = -\frac{1}{2c} \int_0^t a(q) h_0(\beta(x, t, q)) dq + \frac{1}{2c} \int_0^t a(q) h_0(\alpha(x, t, q)) dq \\ + \frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) d_\beta h_0(\beta(x, t, q)) dq + \frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) d_\alpha h_0(\alpha(x, t, q)) dq \quad (3.524)$$

$$\eta(x, t) = I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad (3.525)$$

Por regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_0}{\partial q} &= \frac{\partial h_0}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial q} = \frac{\partial h_0}{\partial \beta} \cdot -(c + v(q)) \\ &= -(c + v(q)) \frac{\partial h_0}{\partial \beta} \\ \frac{\partial h_0}{\partial q} &= -(c + v(q)) \partial_\beta h_0 \end{aligned} \quad (3.526)$$

El resultado anterior se reemplaza en la integral I_4 .

$$I_4 = \frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) d_\beta h_0(\beta(x, t, q)) dq$$

$$I_4 = -\frac{1}{2c} \int_0^t \frac{v^2(q)}{(c+v(q))} \partial_q h_0(\beta(x, t, q)) dq \quad (3.527)$$

Mediante integración por partes se puede determinar los valores de las integrales I_2 y I_4 :

$$u = \frac{v^2(q)}{c+v(q)} dq \implies du = \frac{a(q)(v^2(q) + 2cv(q))}{(c+v(q))^2} dq \quad (3.528)$$

$$dv = \partial_q h_0(\beta(x, t, q)) \implies v = h_0(\beta(x, t, q)) \quad (3.529)$$

Por lo tanto,

$$I_2 + I_4 = \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{a(q)(v^2(q) + 2cv(q))}{(c+v(q))^2} h_0(\beta(x, t, q)) dq - \frac{1}{2c} \frac{v^2(t)}{(c+v(t))} h_0(x - cg(t))$$

$$+ \frac{1}{2c} \frac{v^2(0)}{(c+v(0))} h_0(x + ct) \quad (3.530)$$

Por la regla de la cadena se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial h_0}{\partial q} = \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{\partial h_0}{\partial \alpha} \cdot (c - v(q))$$

$$= (c - v(q)) \frac{\partial h_0}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial q} = (c - v(q)) \partial_\alpha h_0 \quad (3.531)$$

El resultado anterior se reemplaza en la integral I_5 .

$$I_5 = -\frac{1}{2c} \int_0^t v^2(q) d_\alpha h_0(\alpha(x, t, q)) dq$$

$$I_5 = -\frac{1}{2c} \int_0^t \frac{v^2(q)}{(c-v(q))} \partial_q h_0(\alpha(x, t, q)) dq \quad (3.532)$$

En esta oportunidad es posible determinar a través de la integración por partes $I_3 + I_5$:

$$u = \frac{v^2(q)}{c-v(q)} dq \implies du = \frac{a(q)(2cv(q) - v^2(q))}{(c-v(q))^2} dq \quad (3.533)$$

$$dv = \partial_q h_0(\alpha(x, t, q)) \implies v = h_0(\alpha(x, t, q)) \quad (3.534)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 I_3 + I_5 &= \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{a(q) (2cv(q) - v^2(q))}{(c - v(q))^2} h_0(\alpha(x, t, q)) dq - \frac{1}{2c} \frac{v^2(t)}{(c - v(t))} h_0(x - cg(t)) \\
 &+ \frac{1}{2c} \frac{v^2(0)}{(c - v(0))} h_0(x - ct) \tag{3.535}
 \end{aligned}$$

Con el resultado anterior, se tiene la expresión final de la integral (3.525), que es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{a(q) (v^2(q) + 2cv(q))}{(c + v(q))^2} h_0(\beta(x, t, q)) dq + \frac{1}{2c} \frac{v^2(0)}{(c + v(0))} h_0(x + ct) \\
 &+ \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{a(q) (2cv(q) - v^2(q))}{(c - v(q))^2} h_0(\alpha(x, t, q)) dq + \frac{1}{2c} \frac{v^2(0)}{(c - v(0))} h_0(x - ct) \\
 &+ \frac{v^2(t)}{v^2(t) - c^2} h_0(x - cg(t)) \tag{3.536}
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.536) corresponde a la elevación de la superficie del agua en cualquier instante de tiempo y ubicación positiva en el espacio x , para un cuerpo rígido deslizando sobre un plano inclinado.

Para el caso de un bloque que se desliza a una velocidad constante, o sea, con una aceleración igual a 0, $\eta(x, t)$ resultante es el siguiente.

$$\eta(x, t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} h_0(x - vt) + \frac{v^2}{2c(c + v)} h_0(x + ct) + \frac{v^2}{2c(c - v)} h_0(x - ct) \tag{3.537}$$

Finalmente se ha llegado a la misma solución de la ecuación de ondas (1+1D) inhomogénea aplicando el Principio de Duhamel tanto como el teorema de convolución (3.500).

Este modelo corresponde a un modelo teórico bastante simplificado, ya que tiene como ecuación gobernante a la ecuación de ondas (1+1D) con término forzante en vez de tener a la ecuación de agua poco profunda que es la ecuación más utilizada para modelar la mayoría de los tipos de *tsunamis*.

Sobre la ecuaciones (3.500) y (3.537) se puede decir que bajo la condición de $v < \sqrt{gh}$ donde h corresponde a la profundidad del fondo oceánico, las perturbaciones en la superficie y en el fondo exhiben polaridades, esto es debido a que se dice que los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra son de naturaleza dipolar. Sin embargo, si $v > \sqrt{gh}$, entonces las polaridades coinciden. Otra interpretación igual de importante sobre ambas ecuaciones es que representa la superposición de tres ondas, una de ellas está limitada y las otras dos se mueven libres. La primera onda se mantiene en la zona de la fuente, en otras palabras, se mueve junto con el deslizamiento de tierra, y las otras dos se alejan de la fuente.

Capítulo 4

Modelación Numérica

4.1. Método de Diferencias Finitas

Por lo general, es muy difícil calcular explícitamente las soluciones de los diferentes modelos físicos. Por lo que cuando se presenta este caso, es imperativo recurrir al cálculo numérico por ordenador para estimar cualitativamente y cuantitativamente las soluciones ante problemas físicos específicos. El principio de todos los métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales es obtener valores aproximados discretos que estén lo más cerca posible de la solución exacta, siempre y cuando cumpla ciertas condiciones y/o restricciones propias de cada método. Para llevar a cabo esto, uno de los primeros pasos es discretizar el problema representando funciones por un número finito de valores, pasando de un problema continuo a un problema discreto.

A continuación se desarrollará uno de los métodos más antiguos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales, llamado el método de diferencias finitas (MDF). En el presente trabajo se limita a resolver la ecuación de agua poco profunda a través de la diferencia finita en una dirección, es decir, una dimensión temporal y una dimensión espacial. Por el momento, sólo se abordará en detalle los principios prácticos de este método, en otras palabras, la construcción de lo que se denomina esquemas numéricos. La justificación teórica de estos esquemas será presentada a continuación, junto con la restricción del nivel de mallado y el espacio de tiempo siguiendo una condición para que se cumpla la convergencia del método, cuyo parámetro se denomina la Condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Para discretizar el continuo espacio-temporal, se introduce un paso de espacio en la dirección x , donde $\Delta x > 0$ y un paso de tiempo $\Delta t > 0$ que corresponden a las unidades más pequeñas en la dirección x y tiempo t . En la figura 4.1 se define y visualiza la malla de diferencias finitas,

tanto como las coordenadas discretas del espacio y del tiempo.

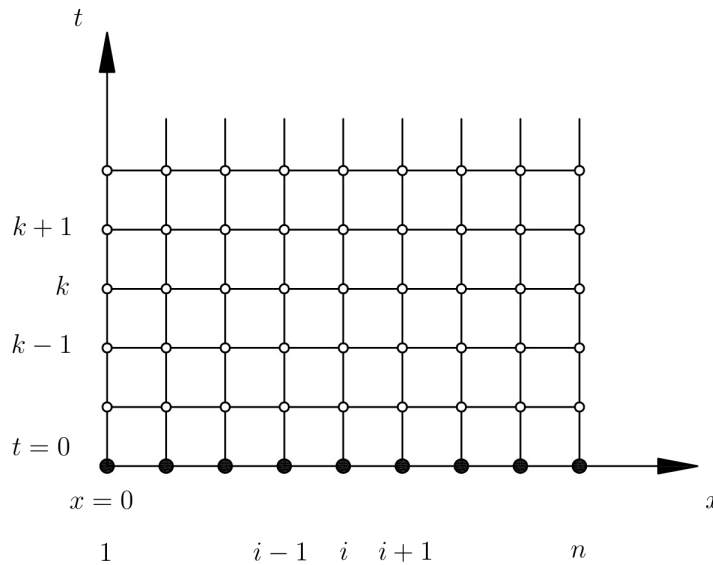


Figura 4.1: Esquema de la malla de diferencias finitas. (Fuente: Modificado desde Allaire, 2005)

Se denota por η_i^k al valor de una solución discreta aproximada en el punto (x_i, t_k) , y por la solución exacta $\eta(x, t)$. La formulación del método que se expone en este capítulo está basado según Allaire (2005), cuyo procedimiento se muestra a continuación.

4.1.1. Diferencia Hacia Adelante de Primer Orden

Considerar la expansión de la serie de Taylor de η sobre x_i :

$$\eta(x_i + \Delta x) = \eta(x_i) + \Delta x \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.1)$$

Resolver para $(\partial \eta / \partial x)_{x_i}$:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\eta(x_i + \Delta x) - \eta(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} - \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.2)$$

Haciendo las siguientes substituciones $\eta_{i+1} \approx \eta(x_i + \Delta x)$ y $\eta_i \approx \eta(x_i)$:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} - \frac{\Delta x^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.3)$$

Con el teorema del valor medio ($x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \Big|_{x_i} + \dots = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{\xi} \quad (4.4)$$

Finalmente se tiene que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} \approx \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{\xi} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.5)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (4.6)$$

4.1.2. Diferencia Hacia Atrás de Primer Orden

Considerar la expansión de la serie de Taylor de η sobre x_i :

$$\eta(x_i - \Delta x) = \eta(x_i) - \Delta x \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \Big|_{x_i} + \dots \quad (4.7)$$

Resolver para $(\partial \eta / \partial x)_{x_i}$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{\eta(x_i) - \eta(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{x_i} - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \Big|_{x_i} + \dots \quad (4.8)$$

Finalmente se tiene que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} \approx \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Big|_{\xi} = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.9)$$

La expresión (4.9) se puede escribir de una manera equivalente, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{x_i} = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (4.10)$$

4.1.3. Diferencia Central de Primer Orden

Calcular la expansión de la serie de Taylor de η_{i+1} :

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \Delta x \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.11)$$

Ahora se calcula la expansión de la serie de Taylor de η_{i-1} :

$$\eta_{i-1} = \eta_i - \Delta x \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.12)$$

Restando las ecuaciones (4.11) y (4.12), resulta lo siguiente:

$$\eta_{i+1} - \eta_{i-1} = 2 \Delta x \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} + \frac{2 \Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right|_{x_i} \quad (4.13)$$

Finalmente se tiene que:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2 \Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.14)$$

Para tener una buena aproximación a los problemas continuos, es necesario elegir un Δx pequeño. Si se elige un $\Delta x \ll 1$, el error de truncamiento para esta aproximación es mucho más cercano a cero que el error de truncamiento de las ecuaciones (4.6) y (4.10). Sin embargo, una complicación natural de la ecuación (4.14) es que es muy difícil poder hacer una buena aproximación de la ecuación diferencial objetivo, ya que es imperativo conocer el valor de η_i , lo que por definición de esta aproximación, no es posible de conocer.

4.1.4. Diferencia Central de Segundo Orden

Sumando las ecuaciones (4.11) y (4.12), se obtiene lo siguiente:

$$\eta_{i+1} + \eta_{i-1} = 2 \eta_i + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} + \frac{2 (\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.15)$$

Mediante un poco de algebra, se despeja el término $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_{x_i}$, lo que nos da lo siguiente:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{\eta_{i+1} - 2 \eta_i + \eta_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} \left. \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right|_{x_i} + \dots \quad (4.16)$$

La ecuación (4.16) es equivalente a la siguiente expresión:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.17)$$

Todas las aproximaciones de primer y segundo orden expuestas anteriormente fueron desarrolladas en base a la dirección x . Sin embargo, para la dimensión temporal el procedimiento es el mismo.

Cabe mencionar que la notación y la exposición de los esquemas presentados anteriormente están basados en el artículo de Recktenwald (2004).

4.2. Esquemas para la Ecuación de Agua Poco Profunda

A la ecuación (3.8) se desarrolla la derivada del producto, quedando de la siguiente manera:

$$\partial_{tt}^2 \eta - g \alpha (x \cdot \partial_{xx}^2 \eta + \partial_x \eta) = \partial_{tt}^2 \eta_0 \quad (4.18)$$

A continuación, se elabora la aproximación por diferencias finitas de la primera y segunda derivada de η con respecto al tiempo t y al eje x .

$$\partial_t \eta = \frac{\eta_i^{k+1} - \eta_i^k}{\Delta t} \quad (4.19)$$

$$\partial_{tt}^2 \eta = \frac{\eta_i^{k+1} - 2\eta_i^k + \eta_i^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (4.20)$$

$$\partial_x \eta = \frac{\eta_{i+1}^k - \eta_i^k}{\Delta x} \quad (4.21)$$

$$\partial_{xx}^2 \eta = \frac{\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k}{\Delta x^2} \quad (4.22)$$

Reemplazamos las ecuaciones (4.19), (4.20), (4.21) y (4.22) en la ecuación (4.18), quedando de la siguiente manera:

$$\left[\frac{\eta_i^{k+1} - 2\eta_i^k + \eta_i^{k-1}}{\Delta t^2} \right] - g \alpha \left[i \Delta x \cdot \left(\frac{\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) + \frac{\eta_{i+1}^k - \eta_i^k}{\Delta x} \right] = \left[\frac{\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}}{\Delta t^2} \right] \quad (4.23)$$

El término que importa conocer en el tiempo, es η_i^{k+1} , por lo que a través de un poco de algebra la ecuación (4.23) se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\eta_i^{k+1} &= 2\eta_i^k - \eta_i^{k-1} + (\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}) \\ &+ \frac{\alpha g (\Delta t)^2}{\Delta x} \left[i(\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) + \eta_{i+1}^k - \eta_i^k \right]\end{aligned}\quad (4.24)$$

A continuación se realiza un cambio de variable, quedando la ecuación (4.24) de la siguiente manera:

$$\gamma = \frac{\alpha g (\Delta t)^2}{\Delta x}, \quad (4.25)$$

$$\eta_i^{k+1} = 2\eta_i^k - \eta_i^{k-1} + (\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}) + \gamma \left[i(\eta_{i+1}^k - 2\eta_i^k + \eta_{i-1}^k) + \eta_{i+1}^k - \eta_i^k \right] \quad (4.26)$$

Mediante un poco de algebra, se reacomodan los términos semejantes, quedando la ecuación (4.26) como se muestra en seguida:

$$\begin{aligned}\eta_i^{k+1} &= [2 - \gamma(2i + 1)]\eta_i^k - \eta_i^{k-1} + (\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}) \\ &+ (i + 1)\gamma\eta_{i+1}^k + i\gamma\eta_{i-1}^k\end{aligned}\quad (4.27)$$

4.3. Condiciones de borde

4.3.1. Muro vertical o reflexión total

La condición de muro vertical se cumple cuando la derivada es igual a cero, pero en este caso ocupamos la derivada central y no la diferencia hacia adelante o hacia atrás, esto se debe a que se debe estimar el valor de η_0^k , quedando de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta_2^k - \eta_0^k}{2\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_2^k = \eta_0^k \quad (4.28)$$

Ahora se debe reemplazar el valor de η_0^k en la ecuación (4.27), imponiendo el valor del primer término del vector de η , que es $i = 1$, el cual queda así:

$$\begin{aligned}\eta_1^{k+1} &= [2 - \gamma(2 \cdot 1 + 1)]\eta_1^k - \eta_1^{k-1} + (\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}) \\ &+ (1 + 1)\gamma\eta_2^k + 1 \cdot \gamma\eta_0^k\end{aligned}\quad (4.29)$$

Pero teniendo como condición de borde de muro vertical, la ecuación (4.28) se reemplaza en la ecuación (4.29), quedando la siguiente expresión final para el primer término del vector de desplazamiento (η):

$$\eta_1^{k+1} = (2 - 3\gamma)\eta_1^k - \eta_1^{k-1} + (\eta_0^{k+1} - 2\eta_0^k + \eta_0^{k-1}) + 3\gamma\eta_2^k \quad (4.30)$$

Esta condición de borde es aplicable en aquellos casos en que el objetivo principal es investigar la propagación de la onda en un océano abierto.

4.3.2. Transparente

En aquellos casos cuando la modelación de la dinámica del *tsunami* se realiza bajo una región restringida (área delimitada), entonces se requiere aplicar la condición de borde de ondas incidentes que se transmiten libremente, esto quiere decir que la onda que es reflejada desde ese borde, debe ser reducida al mínimo (que tienda a cero). Esto se explica porque en cada momento de tiempo un punto del borde se le asigna ese valor, debe ser conducida a él por la onda incidente sobre el borde. Cabe mencionar que esta técnica es aplicable sólo para casos unidimensionales.

Por lo tanto, para esta condición de borde se asume que la onda del *tsunami* en el extremo final se comportará como onda viajera, la cual se representa de la siguiente manera:

$$\partial_t \eta \pm c \partial_x \eta = 0 \quad (4.31)$$

El signo de la ecuación (4.31) depende de la dirección de propagación de la onda de *tsunami*, en este caso se definió como el eje x positivo hacia la derecha, por lo tanto el signo a considerar en la ecuación (4.31) será positivo.

$$\frac{\eta_i^{k+1} - \eta_i^k}{\Delta t} + c \frac{\eta_{i+1}^k - \eta_i^k}{\Delta x} = 0 \quad (4.32)$$

El término que interesa conocer es η_i^{k+1} , por lo que es necesario despejar η_i^{k+1} de la ecuación (4.32), quedando así:

$$\eta_i^{k+1} = \eta_i^k - \frac{c \Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1}^k - \eta_i^k) \quad (4.33)$$

Reduciendo un poco más la ecuación (4.33) juntando los términos semejantes, queda lo siguiente:

$$\eta_i^{k+1} = (1 + \beta)\eta_i^k - \beta\eta_{i+1}^k, \quad \text{donde: } \beta = \frac{c \Delta t}{\Delta x}, \quad (4.34)$$

La expresión (4.34) corresponde al último elemento del vector de desplazamiento, que junto a la expresión (4.30) pasan a formar parte de las condiciones de borde del problema solucionar.

Otra manera de reescribir la ecuación (4.31) es a través del uso de la diferencia hacia atrás en la derivada con respecto a x , esto se debe a que la diferencia hacia atrás busca la información remontando la corriente es más estable que el uso de la diferencia hacia adelante bajo la condición de Courant-Friedrichs-Lewy. Quedando finalmente lo siguiente:

$$\frac{\eta_i^{k+1} - \eta_i^k}{\Delta t} + c \frac{\eta_i^k - \eta_{i-1}^k}{\Delta x} = 0 \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) se puede reescribir bajo la siguiente forma:

$$\eta_i^{k+1} = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \eta_{i-1}^k + \left(1 - \frac{c \Delta t}{\Delta x}\right) \eta_i^k \quad (4.36)$$

$$\eta_N^{k+1} = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \eta_{N-1}^k + \left(1 - \frac{c \Delta t}{\Delta x}\right) \eta_N^k, \quad i = N \quad (4.37)$$

Donde, N corresponde al último elemento de la matriz o vector de desplazamiento η .

4.4. Criterio de Estabilidad

El criterio de estabilidad para la ecuación de agua poco profunda es el siguiente:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{g h_{max}}}, \quad (4.38)$$

Donde h_{max} corresponde a la profundidad del agua total máxima del modelo analizado. La ecuación (4.37) se denomina Condición Courant-Friedrichs-Lewy o condición CFL para ondas de gravedad superficiales Kämpf (2010).

Capítulo 5

Análisis y Resultados

En el siguiente capítulo se evaluará el desempeño de la expresión (3.265), que en el capítulo 3 fue denominada como la solución analítica de la ecuación de agua poco profunda considerando el término forzante (movimiento del fondo oceánico o marino) a partir del caso 3, donde la función que representa la forma del deslizamiento de tierra corresponde a una función parabólica invertida.

Como primera parte se analizarán los gráficos de la curva tiempo historia de la altura de *runup* del *tsunami* ocurrido en la ladera al frente de Isla Mentirosa, donde se expone primeramente la sensibilidad de la solución analítica (3.265), cuyos resultados son de principal interés en este capítulo. A continuación se analiza el comportamiento de la solución desarrollada por Liu et al. (2003), y finalmente el método de diferencias finitas aplicado a la ecuación de agua poco profunda lineal. Este mismo procedimiento de análisis se realizará para el evento de Aguas Calientes (Aysén 2007) y el *tsunami* provocado por un *slump* en PNG 1998.

Para poder modelar los eventos subaéreos se realizan ligeras modificaciones, con el fin de verificar la validez de la solución analítica (3.265). Para este tipo de eventos el dominio del modelo matemático es intrínsecamente negativo. En este trabajo de investigación se propone mitigar este inconveniente asumiendo que como si este tipo de eventos correspondiera a un tsunami generado por un deslizamiento de tierra submarino, haciendo que el dominio matemático pase de negativo a positivo, manteniendo las magnitudes $[(-)x_{1,2} \rightarrow (+)x_{1,2}]$. Se propone este tipo de mitigación ya que se busca replicar las alturas de las ondas de *runup* provocadas por el *tsunami* del fiordo de Aysén en el año 2007, los cuales corresponden a los únicos eventos de *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra en Chile, dentro de las cuales se pueden estudiar sólo dos remociones en masa, por su mecanismo de falla simple y no compleja (como por ejemplo el deslizamiento del valle de Punta Cola). Para el caso del deslizamiento submarino del *tsunami* de PNG, el dominio del modelo matemático es intrínsecamente positivo, por lo tanto no se deben realizar modificaciones a los valores de entrada.

En la parte final de este capítulo se expone un análisis paramétrico, donde se evalúa como la solución analítica (3.265) es capaz de representar las alturas de *runup* medidos *insitu* en los tres eventos estudiados en esta tesis. Para llevar a cabo este análisis se compara el comportamiento en dicha ecuación mediante un análisis *ceteris paribus* sobre uno de los parámetros de entrada que define el comportamiento del deslizamiento de tierra, tales como: el espesor, la velocidad y la longitud. Todo este análisis se realiza para los eventos frente a Isla Mentirosa, Aguas Calientes y Papua Nueva Guinea.

5.1. Evento de Aysén 2007

Los valores de entrada para la modelación fueron la combinación de los estudios realizados por Naranjo et al. (2009b), Sepúlveda & Serey (2009), Serey (2011), Oppikofer et al. (2012), Scheele et al. (2013) y Hermanns et al. (2014) (ver tabla 5.1). A continuación se muestra una tabla resumen de los valores de entrada necesarios para modelar el *tsunami* generado por un deslizamiento de tierra en la zona frente a Isla Mentirosa y en Aguas Calientes.

Parámetro	Frente a Isla Mentirosa	Fuente	Aguas Calientes	Fuente
Volumen (Mm ³)	7 ± 1	Naranjo et al. (2009b)	1,7 ± 0,3	Naranjo et al. (2009b)
Masa que entró en el agua (m)	1000 ± 100	Naranjo et al. (2009b)	600 ± 50	Naranjo et al. (2009b)
Velocidad máxima (m/s)	100 ± 10	Naranjo et al. (2009b)	3 ± 5	Naranjo et al. (2009b)
Velocidad de entrada al agua (m/s)	50 ± 5	Naranjo et al. (2009b)	17 ± 3	Naranjo et al. (2009b)
α	0,7215	Serey (2011)	0,4379	Serey (2011)
A (m)	50	Serey (2011)	5	Serey (2011)
x_1 (m)	0	Serey (2011)	0	Serey (2011)
x_2 (m)	1362	Serey (2011)	260	Serey (2011)

Tabla 5.1: Valores de entrada para la modelación de los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra de Aysén 2007.

5.1.1. Evaluación de la solución analítica (3.265) para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa

Se eligieron los siguientes parámetros para modelar este deslizamiento: $b = 681$ m; $t_r = 450$ s; $A = 50$ m; $x_2 - x_1 = 1362$ m.

La ecuación para determinar el tiempo de llegada del primer tren de ondas a la línea de costa más cercana es la siguiente:

$$t_v = \sqrt{\frac{4b}{\alpha g}} \quad (5.1)$$

Donde, b corresponde a la distancia entre la línea de costa ($x = 0$) y el punto medio de la fuente del *tsunami*, t_v es el tiempo de llegada del *tsunami* a la línea de costa.

Reemplazando los valores para este caso, se obtiene lo siguiente:

$$t_v = \sqrt{\frac{4 \cdot 681}{0,7215 \cdot 9,8}} = 19,63 \text{ s} \quad (5.2)$$

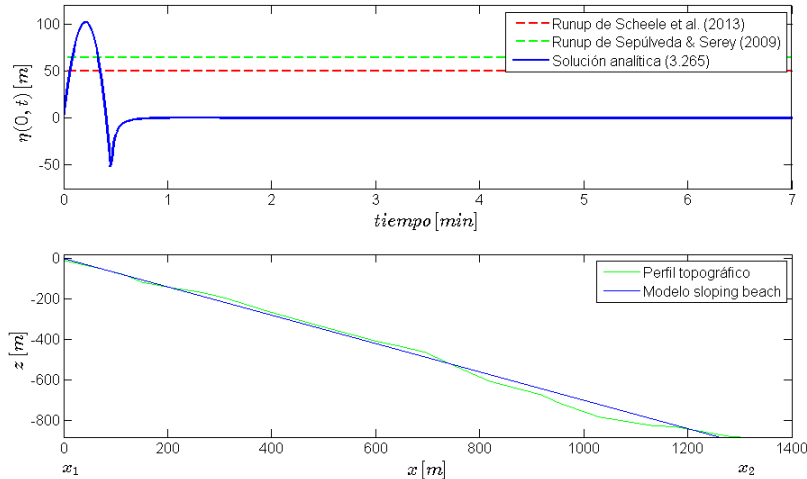


Figura 5.1: (Arriba). Altura de *runup* calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Perfil topográfico real e idealizado (pendiente constante correspondiente del modelo de playa inclinada) de la sección transversal analizada.

En la figura 5.1 (Arriba) se visualiza que la solución analítica (3.265) entrega un *runup* máximo de 102 m, con un *rundown* máximo de 52 m. Como base para realizar el análisis comparativo, cabe hacer mención que ningún estudio realizado hasta la fecha hizo mediciones en la ladera frente a Isla Mentirosa, sino que sólo se efectuaron las mediciones de campo en Isla Mentirosa. Por lo tanto, no es del todo correcto que se compare el desempeño de la ecuación (3.265) con investigaciones como la de Sepúlveda & Serey (2009) o Scheele et al. (2013), pero de todos modos se realizará este análisis con dichos estudios, con el fin de mostrar un valor de referencia para la altura de *runup* para este evento, puesto que hasta la fecha no hay investigaciones de este tipo (que desarrollen soluciones analíticas para explicar la generación, propagación y evolución de los *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra) que expliquen este particular fenómeno de la naturaleza.

En relación a las mediciones de campo, la investigación realizada por Sepúlveda & Serey (2009) muestra que el *runup* máximo medido en Isla Mentirosa fue de 65 m, por otra parte, en la

investigación desarrollada por Scheele et al. (2013) estimaron que el *runup* máximo en la misma zona fue de 50 m. En el peor de los casos el *runup* máximo calculado con la ecuación (3.265) se sobreestima el *runup* máximo en un 104 % con respecto al valor entregado por el estudio de Sepúlveda & Serey (2009), por otra parte, con la solución analítica (3.265) se sobreestima el *runup* máximo en un 57 % comparado con la investigación realizada por Scheele et al. (2013).

La curva de la figura 5.1 tiene la forma típica que uno podría esperar para el fenómeno de los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra, ya que presenta un *runup* y un *rundown* máximo, que se traduce en una gráfica con un punto máximo y también un punto mínimo, asemejándose a la naturaleza dipolar que tiene este tipo de eventos.

La polaridad de la curva es positiva, esto se debe a que la amplitud de la forma del deslizamiento de tierra subaéreo es positiva. Por otra parte, en el caso en que la parábola invertida se asumiera con una amplitud negativa, este generaría un *tsunami* con una polaridad negativa, por lo que para representar bien este tipo de eventos, habría sólo que ingresar un valor negativo para la magnitud del espesor del deslizamiento de tierra.

Para este evento (y en particular para los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra subaéreos) no es correcto hablar de tiempo de llegada de la onda de *tsunami* a la línea de costa, puesto que la fuente del *tsunami* se encuentra fuera del agua. No obstante, sí correspondería hablar de tiempo de viaje de la onda de *tsunami* si existiera una línea de costa frente al deslizamiento de tierra (por ejemplo, como ocurre en los fiordos).

En la figura 5.1 (Abajo) se observa la topografía real de la ladera frente a Isla Mentirosa junto con la pendiente inclinada (modelo *sloping beach*), cuya tangente del ángulo entre el eje horizontal y el plano inclinado es de 0,7215. Este valor se obtuvo mediante el método de mínimos cuadrados. La forma de calcular dicha pendiente fue a través de la digitalización de imágenes del perfil topográfico real de la ladera frente a Isla Mentirosa, esta digitalización se realizó en el software MATLAB. La forma de calcular la pendiente proveniente de datos reales, se realizó para todos los eventos analizados, es decir, también para el deslizamiento de Aguas Calientes y Papua Nueva Guinea.

La expresión utilizada para determinar α mediante el uso del método de mínimos cuadrados es la siguiente:

$$\Omega = \sum_{i=1}^N (z_i - \alpha x_i)^2 \quad (5.3)$$

Donde, Ω es la suma de los cuadrados de la resta entre z_i y αx_i , z_i es la coordenada vertical del perfil topográfico, x_i es la coordenada x del perfil topográfico, N corresponde al número total de datos.

Finalmente se tiene que α es la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N z_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (5.4)$$

Donde, α corresponde a la pendiente de la recta $h(x) = -\alpha x$.

5.1.2. Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa

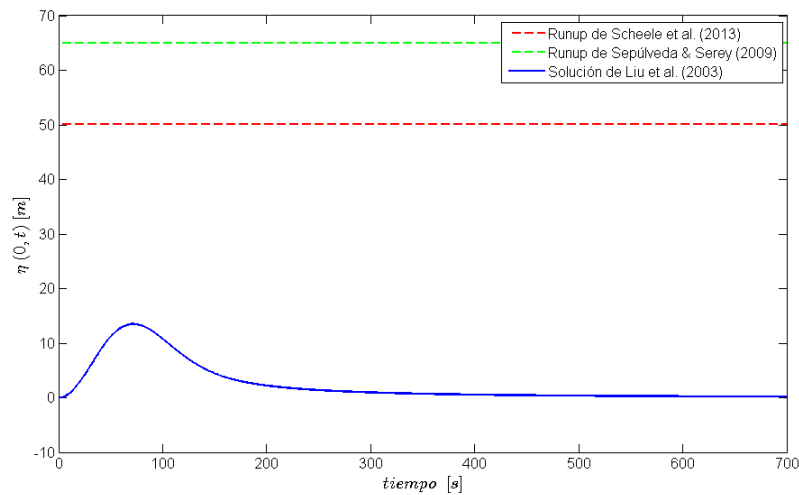


Figura 5.2: Altura de *runup* calculada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa.

En la figura 5.2 se observa que el *runup* máximo es de 13,5 m para un tiempo de viaje de 71 segundos. Si se comparan ambos parámetros con los datos medidos por investigaciones de campo (Sepúlveda & Serey, 2009; Scheele et al., 2013) estos resultan ser muy distintos. Por ejemplo, las alturas de *runup* máximas se subestimaron entre el 73 y el 79,23 % de los datos medidos por ambos estudios, lo cual es una cantidad muy baja considerando que corresponde a un *tsunami* provocado por un deslizamiento subaéreo, los cuales tienden a generar alturas de *runup* excesivamente grandes (mucho mayores que las generados por terremotos). El otro parámetro que arroja variaciones elevadas, es el tiempo de viaje, ya que se sobreestimó en un 261,7 %. Una manera de explicar esta sobreestimación, es porque en el modelo de Liu et al. (2003) no es posible modificar valores de entrada, tales como: la tangente de la pendiente del ángulo que forma el eje horizontal x con respecto al plano inclinado, la posición y la velocidad del deslizamiento de tierra.

Remitiéndose sólo al parámetro de la velocidad del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa, esta fue excesivamente alta (entre 100 ± 10 m/s), lo cual no es nada comparable a la velocidad impuesta por este modelo, que corresponde al valor de 1 m/s.

Otro punto a destacar en la figura 5.2, es la forma de la curva de *runup* (ver figura 5.2), ya que no representa a la curva tradicional de este tipo de fenómenos, puesto que suelen presentar un valor máximo y un valor mínimo (*runup* y *rundown*, respectivamente), difiriendo mucho de la curva obtenida por el modelo de Liu et al. (2003).

5.1.3. Evaluación del método de diferencias finitas para el deslizamiento ocurrido frente a Isla Mentirosa

Este método se realizó a través de las ecuaciones (3.142) y (4.30), pero suavizada en un 40 % con un filtro del tipo *smooth* (Ver Anexo B, para más detalles).

	Δt (s)	t (s)	Δx (m)	$n \Delta x$ (m)
Discretización	0,0135	300	10	49612

Tabla 5.2: Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de Isla Mentirosa.

La tabla 5.2 resume la información del mallado del modelo de diferencias finitas. Para la dirección x el largo total es aproximadamente de 50 kilómetros, y de 300 segundos para el tiempo de modelación.

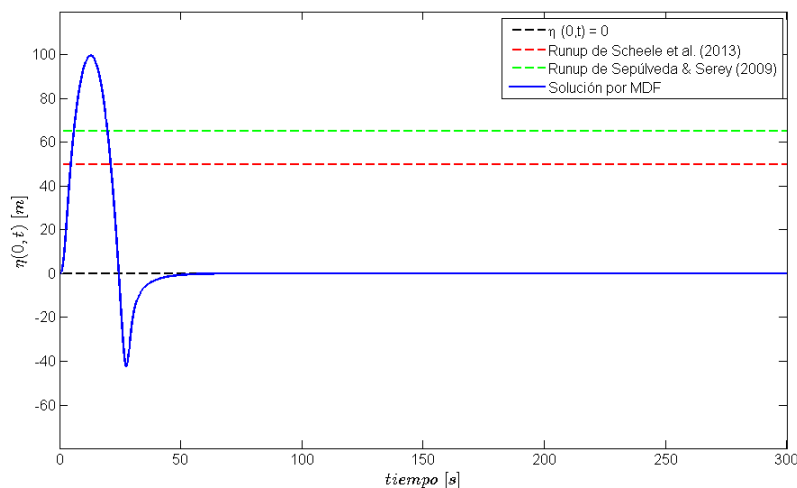


Figura 5.3: Altura de *runup* modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo frente a Isla Mentirosa.

La figura 5.3 muestra claramente que el *runup* máximo calculado mediante la ecuación (3.265) es superior a las alturas de *runup* de 50 y 65 metros, que son las alturas de *runup* medidos en expediciones de campo. En particular, el *runup* máximo modelado es de 99,67 m y el *rundown* máximo es de 42,51 m. Por lo tanto, este modelo sobreestimó la altura de *runup* propuesta por Sepúlveda & Serey (2009) en un 99,34 %. Si se calcula la variación con respecto al otro *runup* propuesto por Scheele et al. (2013), el cual fue de 65 m, se obtiene una sobreestimación del 53,34 %. Una manera de explicar por qué la altura de *runup* máxima es sobreestimada, es porque se debe a que se decidió resolver la ecuación de agua poco profunda lineal, y esta ecuación al ser lineal, la solución obtenida (el *runup*) siempre será mayor en el caso lineal que en el caso no-lineal (Liu et al., 2003). Pero otra explicación más sencilla y a la vez verificable, tiene que ver con los valores de entrada del modelo, pues los valores que influyen más en la altura de *runup* calculada para este tipo de *tsunamis*, resultan ser la velocidad, la longitud y el espesor máximo del deslizamiento de tierra. No obstante, este supuesto se verifica en la sección titulada “Análisis paramétrico”.

Al igual como se realizó el ingreso de datos para el cálculo de la solución analítica (3.265), se efectuó una modificación a los valores de entrada correspondientes a la posición inicial y final del deslizamiento de tierra (x_1 y x_2) para este evento, ya que el deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa presenta el dominio matemático en el eje x negativo, por lo que no pertenece al dominio impuesto en este modelo. Para corregir este inconveniente se propone modificar el signo de los valores de entrada que tienen que ver con la posición del deslizamiento de tierra. Por lo tanto, para poder realizar esta modelación, se optó por ingresar el valor $x_2 = +1362$ m y no un valor de entrada de $x_2 = -1362$ m (como correspondería al caso real).

Con respecto a la polaridad de la onda de *tsunami*, este sólo depende del signo del término forzante, específicamente de la magnitud del espesor, ya que si el deslizamiento de tierra se modela positivo, la polaridad de la onda será positiva, y viceversa. Por lo tanto, este análisis no resulta ser importante a la hora de hacer un análisis exhaustivo de este tipo de eventos.

5.1.4. Resumen de los resultados obtenidos para el evento ocurrido frente a Isla Mentirosa

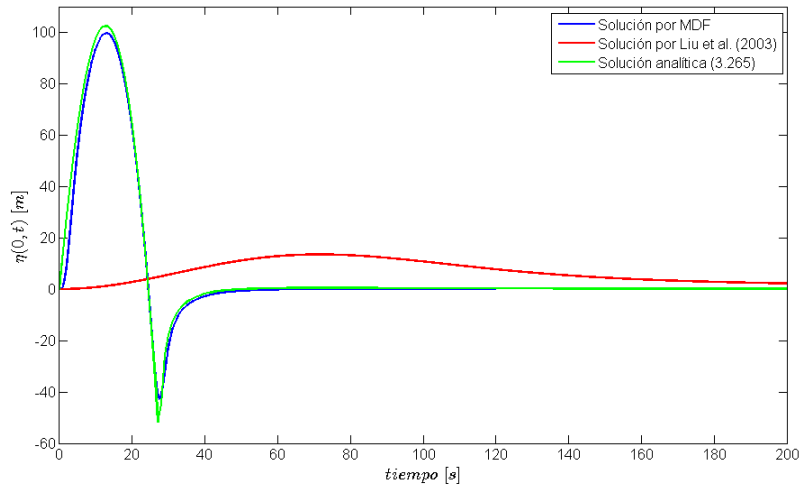


Figura 5.4: Resumen de las alturas de *runup* modeladas para el deslizamiento de tierra subaéreo ocurrido frente a Isla Mentirosa.

La figura 5.4 muestra el excelente ajuste que existe entre la solución analítica (3.265) y la solución calculada mediante el método de diferencias finitas para el evento frente a Isla Mentirosa, no así para la solución modelada por Liu et al. (2003). Se observa también que la solución de Liu et al. (2003) subestima el valor de referencia para las alturas de *runup* encontradas en la literatura (Sepúlveda & Serey (2009) y Scheele et al. (2013), 65 y 50 metros, respectivamente), por otra parte, la solución analítica (3.265) y la solución calculada a través del método de diferencias finitas sobreestiman la altura de *runup* medido *insitu*.

Método	<i>runup</i> máximo (m)	estimación relativa (%)	tiempo de ejecución (s)
Medición <i>insitu</i>	50-65	–	–
Ecuación (3.265)	102	+ (104 – 56,92)	0,1304
Liu et al. (2003)	13,5	– (73 – 79,23)	44,4755
Diferencia finita	99,67	+ (99,34 – 53,34)	52457,0437

Tabla 5.3: Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de *runup* del evento frente a Isla Mentirosa.

Donde,

$$\text{estimación relativa} = \frac{\text{runup calculado} - \text{runup medido insitu}}{\text{runup medido insitu}} \quad (5.5)$$

Nota: para los eventos de Aguas Calientes y frente a Isla Mentirosa el cálculo de la estimación relativa corresponde a la ecuación (5.5), pero para el evento de PNG, el nombre del parámetro de la ecuación (5.5) cambia a “error relativo”.

La tabla 5.3 resume los valores calculados por la solución analítica (3.265), Liu et al. (2003) y el método de diferencias finitas para el evento frente a Isla Mentirosa, junto con la sobreestimación y/o subestimación de los valores de *runup* máximos calculados por cada método comparados con los valores de referencia (*runup* máximo medido *insitu*) de Sepúlveda & Serey (2009) y Scheele et al. (2013). Adicionalmente se incorpora la información sobre el tiempo de cálculo del computador para cada método, los cuales van desde 0,13 segundos para la solución analítica (3.265), y 14,57 horas para el método de diferencias finitas.

Es necesario aclarar que el cálculo de la estimación relativa mostrada en la tabla 5.3, el primer número corresponde a la estimación relativa de la altura de *runup* máxima teniendo como parámetro de comparación los 50 metros, y el segundo es con respecto a los 65 metros, es decir, que la sobreestimación del 104 % es con respecto a los 50 metros y la sobreestimación del 56,92 % es con respecto a los 65 metros.

5.1.5. Evaluación de la solución analítica (3.265) para el deslizamiento de Aguas Calientes

Se eligieron los siguientes parámetros para modelar este deslizamiento: $b = 130$ m; $t_r = 450$ s; $A = 5$ m; $x_2 - x_1 = 260$ m.

Para este evento, la ecuación para determinar el tiempo de llegada del *tsunami* a la costa es la siguiente:

$$t_v = \sqrt{\frac{4 \cdot 130}{0,4379 \cdot 9,8}} = 11 \text{ s} \quad (5.6)$$

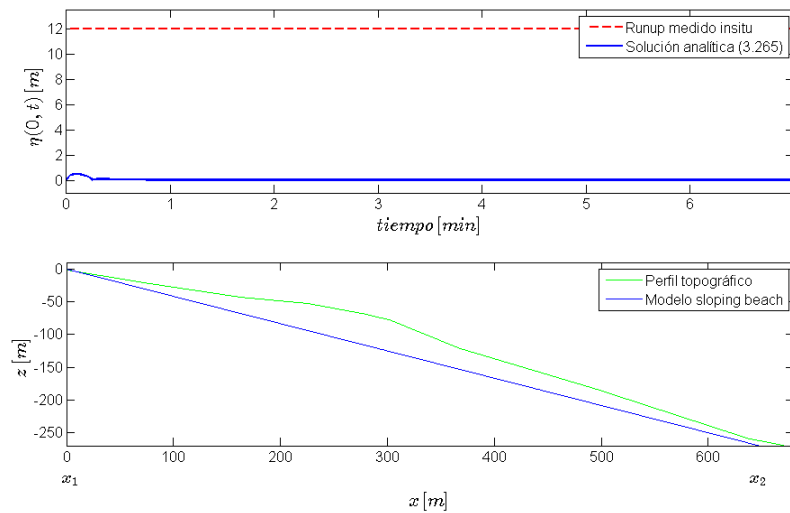


Figura 5.5: (Arriba) Altura de *runup* calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes. (Abajo). Perfil topográfico e idealizado (pendiente constante correspondiente al modelo de playa inclinada) de la sección transversal analizada.

De la figura 5.5 (Arriba), se observa claramente que el valor máximo del *runup* no se ajusta a las mediciones de campo realizados por el SERNAGEOMIN, puesto que con la ecuación (3.265) se predice sólo 0,5 m, en cambio el SERNAGEOMIN determinó que la altura máxima del *runup* a los costados del deslizamiento es de 12 metros. Por lo tanto, el *runup* calculado por la ecuación (3.265) es subestimada en un 95,83 %.

La curva mostrada en la figura 5.5 (Arriba) tiene una particularidad, no presenta un valor de *runup* a lo largo del tiempo. Esto se puede explicar porque la velocidad a la que se desplaza el deslizamiento es muy baja en comparación con otros casos de deslizamientos de tierra como generadores de *tsunamis* (En la sección de “Análisis paramétrico” se muestra la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en la forma de la curva de la altura de *runup* esperada).

Tal como se pudo ver en el análisis del evento frente a Isla Mentirosa, la polaridad de la curva $\eta(0, t)$ depende netamente del valor que adquiera el espesor del deslizamiento (A), ya que si es positivo, entonces $\eta(0, t)$ también resulta ser positivo, y viceversa.

Para este evento, al igual que en el análisis realizado en la zona frente a Isla Mentirosa, no es correcto hablar de tiempo de llegada o tiempo de viaje de la onda de *tsunami*, puesto que el deslizamiento de Aguas Calientes también corresponde a un *tsunami* generado por un deslizamiento de tierra subaéreo. Por lo tanto, la fuente de *tsunami* se ubica fuera y no dentro del agua (tiempo de viaje de la onda de *tsunami* se emplea cuando la fuente de *tsunami* está dentro de la masa de fluido analizada).

La figura 5.5 (Abajo), muestra el modelo de pendiente inclinada (*sloping beach*) calculado mediante el método de mínimos cuadrados (de la misma manera que se realizó para el evento frente a Isla Mentirosa). Además se observa el perfil topográfico real de la ladera del sector de Aguas Calientes (Serey, 2011).

5.1.6. Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el deslizamiento de Aguas Calientes

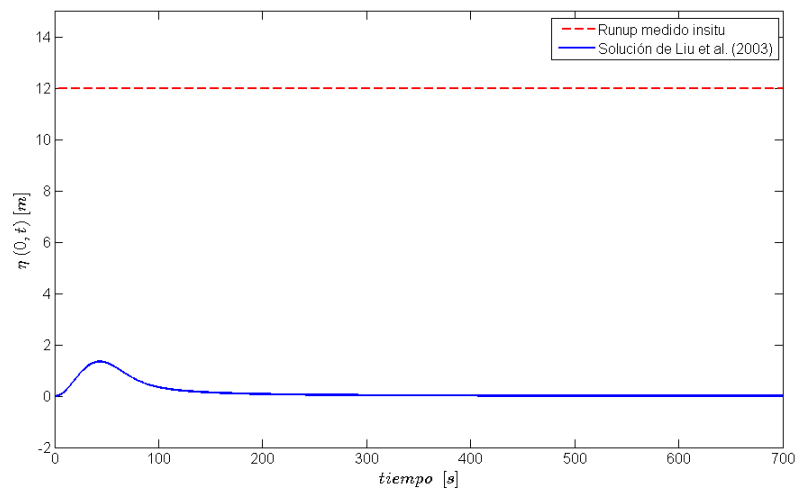


Figura 5.6: Altura de *runup* modelada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de Aguas Calientes.

Tal como se evidenció en el evento anterior (*tsunami* ocurrido frente a Isla Mentirosa), la figura 5.6 muestra que este modelo no describe fielmente como es la evolución de las ondas de *tsunami* en la línea de costa, esto es porque el deslizamiento de tierra se desplaza desde una altura cercana a $z = 0$ (aproximado a la superficie del agua, al origen del sistema de coordenadas) y también porque el deslizamiento se mueve a una velocidad igual a 1 m/s.

También se destaca la altura máxima del *runup*, la cual equivale aproximadamente a 1,3 m, y se produce en un tiempo de 171 segundos aproximadamente. Como es notorio, el *runup* máximo obtenido por este modelo resulta ser muy bajo en comparación al valor medido *insitu* (12 metros), subestimando el *runup* máximo en un 89,17 %. El mismo análisis se realiza para el tiempo de viaje de la onda de *tsunami*, que también resulta estar bastante alejada del valor de referencia (ecuación (5.6)), ya que lo sobreestima en un 1454,54 %. Las razones de este gran desajuste, es debido a la incapacidad del modelo para determinar el *runup* en incorporar parámetros como: la tangente de

la pendiente del ángulo de la ladera, la posición inicial y final del deslizamiento, la velocidad y el tiempo de desplazamiento del deslizamiento de tierra.

5.1.7. Evaluación del método de diferencias finitas para el deslizamiento de Aguas Calientes

Este método se realizó a través de las ecuaciones (3.142) y (4.30), pero suavizada en un 40% con un filtro del tipo *smooth*.

	Δt (s)	t (s)	Δx (m)	$n \Delta x$ (m)
Discretización	0,0175	120	2,5	3060

Tabla 5.4: Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de Aguas Calientes.

La tabla 5.4 resume la información del mallado del modelo de diferencias finitas. Para la dirección x el largo total es aproximadamente de 3 kilometros, y de 120 segundos para el tiempo de modelación.

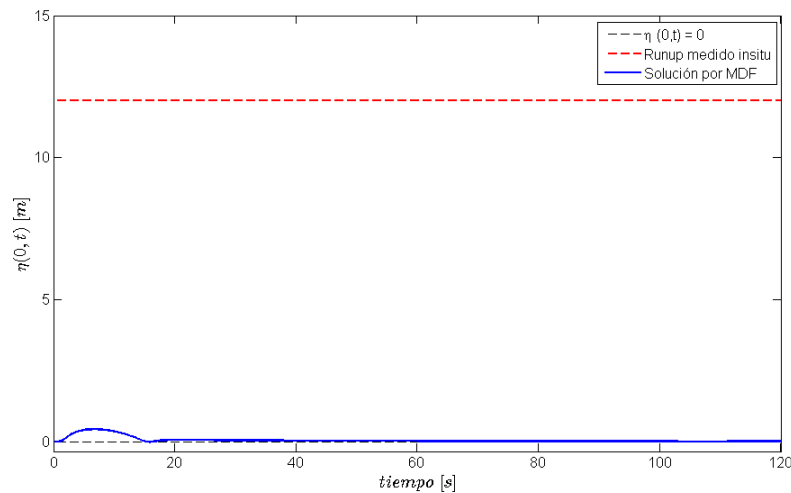


Figura 5.7: Altura de *runup* modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de Aguas Calientes.

La figura 5.7 muestra la altura de *runup* calculado a través del método de diferencias finitas para el deslizamiento de Aguas Calientes. Se distinguen 2 valores máximos, uno corresponde a un *runup* de 0,43 m y el otro a un *rundown* de 0,014 m, estos se producen a los 6,76 y a los 15,83

segundos, respectivamente. El cálculo del *runup* máximo obtenido por este modelo es subestimado en un 96,41 %. Una posible explicación la subestimación del valor de *runup* calculado por la ecuación (4.30), es probablemente porque la velocidad del deslizamiento de tierra es demasiado bajo, o también puede ser porque el espesor máximo es muy bajo como para generar una altura máxima de la onda en la línea de costa. Estas hipótesis son analizadas en profundidad en la sección titulada como “Análisis paramétrico”.

Otro punto a mencionar es la polaridad de la curva de *runup*, ya que tanto como la solución analítica (3.265) y la ecuación (4.30), hacen posible manejar esta característica de las ondas, mediante el signo del espesor del deslizamiento de tierra, es decir, que si uno quiere obtener una polaridad negativa en la curva de *runup* es necesario solamente aplicar una amplitud o espesor del deslizamiento menor a cero ($A < 0$).

5.1.8. Resumen de los resultados obtenidos para el evento de Aguas Calientes

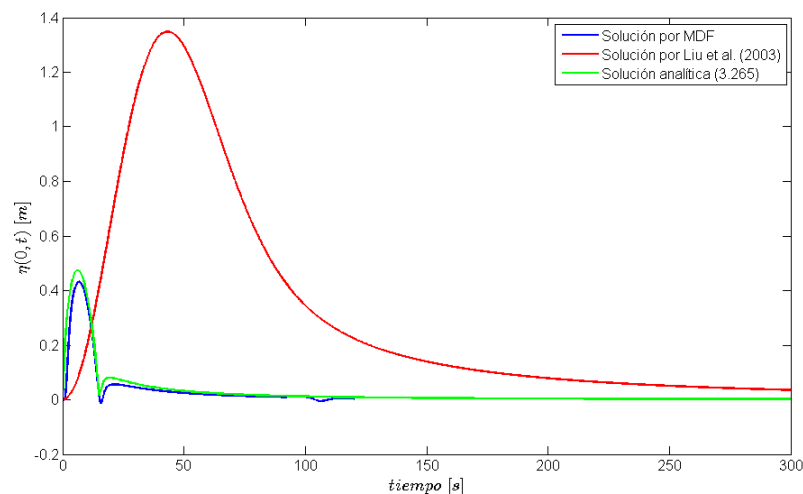


Figura 5.8: Resumen de las alturas de *runup* modeladas para el deslizamiento de tierra subaéreo de Aguas Calientes.

La figura 5.8 muestra el buen ajuste que existe entre la solución analítica (3.265) y la solución calculada mediante el método de diferencias finitas para el evento de Aguas Calientes, no así para la solución modelada por Liu et al. (2003). Se observa también que ninguna de las alturas de *runup* calculadas predicen la altura de *runup* medido *insitu* (12 metros).

Método	<i>runup</i> máximo (m)	estimación relativa (%)	tiempo de ejecución (s)
Medición <i>insitu</i>	12	–	–
Ecuación (3.265)	0,47	– 96,08	0,1009
Liu et al. (2003)	1,3	– 89,17	57,9448
Diferencia finita	0,43	– 96,42	4000,9767

Tabla 5.5: Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de *runup* del evento de Aguas Calientes.

La tabla 5.5 resume los valores calculados por la solución analítica (3.265), Liu et al. (2003) y el método de diferencias finitas para el evento de Aguas Calientes, junto con la sobreestimación y subestimación de cada uno de los métodos aplicados a este evento, con respecto al *runup* máximo medido *insitu* por el SERNAGEOMIN. También se entrega la información sobre el tiempo de cálculo del computador para cada método, los cuales van desde 0,1 segundos para la solución analítica (3.265), y 1,11 horas para el método de diferencias finitas.

5.2. Evento de PNG 1998

El tercer evento a analizar es el *tsunami* de PNG 1998. Los valores de entrada para la modelación fueron obtenidos de los estudios desarrollados por Heinrich et al. (2001), Synolakis et al. (2002), Matsuyama & Yeh (2003) y Watts et al. (2005) (ver tabla 5.6).

Para este evento el tiempo de viaje de la onda de *tsunami* en llegar a la costa, se determina de la siguiente manera:

$$t_{v1} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20000}{0,2126 \cdot 9,8}} = 195,95 \text{ s} \approx 3,26 \text{ min} \quad (5.7)$$

$$t_{v2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20000}{0,0842 \cdot 9,8}} = 311,37 \text{ s} \approx 5,19 \text{ min} \quad (5.8)$$

Parámetro	PNG 1998 (<i>slump</i>)	Fuente
Volumen (Mm ³)	4000	Synolakis et al. (2002)
<i>runout</i> (m)	5000	Heinrich et al. (2001)
Velocidad máxima (m/s)	11,4	Watts et al. (2005)
α	0,2126	Synolakis et al. (2002), Matsuyama & Yeh (2003), Watts et al. (2005)
$L = x_2 - x_1$ (m)	4500	Synolakis et al. (2002), Watts et al. (2005)
A (m)	600	Synolakis et al. (2002)
x_1 (m)	17750	Heinrich et al. (2001), Synolakis et al. (2002)
x_2 (m)	22250	Heinrich et al. (2001), Synolakis et al. (2002)

Tabla 5.6: Valores de entrada para la modelación del *tsunami* de PNG 1998.

5.2.1. Evaluación de la solución analítica (3.265) para el evento de PNG 1998

Se eligieron los siguientes parámetros para modelar este deslizamiento: $b = 20000$ m; $t_r = 400$ s; $A = 600$ m; $x_2 - x_1 = 4500$ m.

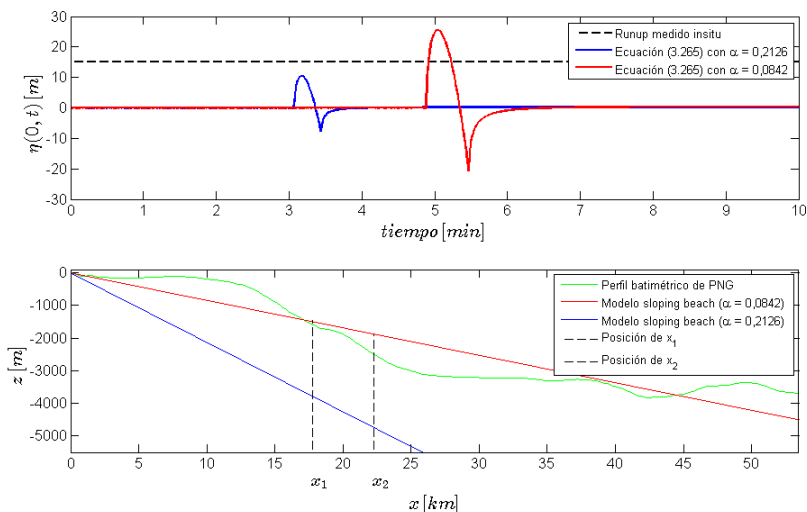


Figura 5.9: (Arriba). Altura de *runup* calculado con la solución analítica (3.265) aplicado al deslizamiento de tierra submarino de PNG. (Abajo). Perfil batimétrico y los dos modelos idealizados (de pendiente constante correspondiente al modelo de playa inclinada) de la sección transversal frente a las costas de PNG. Los datos de batimetría fueron descargados del sitio *web* de *General Bathymetric Chart of the Oceans* (GEBCO), para una muestra cada 30 segundos.

La curva de la figura 5.9 (Arriba) representa bien la forma esperada para el *runup* para el fenómeno de los *tsunamis* generados por deslizamientos de tierra. Esta curva tiene una altura de *runup* y *rundown* máxima, y también no presenta singularidades (como sí ocurría con la solución analítica (3.140)).

En la figura 5.9 (Arriba), la magnitud de la altura máxima de *runup* obtenida por la solución analítica (3.265) considerando un $\alpha = 0,2126$ es 10,45 m. Si este valor se compara con las mediciones de campo expuestos por los estudios de Synolakis et al. (2002) o Heinrich et al. (2001), cuyo valor límite es de 15 m, dando un error relativo del $-30,33\%$. A pesar que el $-30,33\%$ pareciera ser un valor excesivo, cabe mencionar que si se modifican los valores de entrada (por ejemplo, la velocidad o el espesor del deslizamiento de tierra) se puede obtener un mejor valor máximo para $\eta(0, t)$ (en la sección titulada como “Análisis paramétrico” se expone en detalle esta hipótesis).

La curva roja de la figura 5.9 (Arriba) corresponde a la solución analítica (3.265) considerando un $\alpha = 0,0842$, obteniéndose un *runup* máximo de 25,55 m, dando como resultado un error relativo del + 70,33 % (en la sección titulada como “Análisis paramétrico” se expone en detalle un análisis sobre la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en el *runup* máximo calculado mediante la solución analítica (3.265)).

El tiempo de viaje de este *tsunami* calculado por la teoría clásica de *tsunamis*, considerando un $\alpha = 0,2126$, da como resultado 3,27 minutos aproximadamente. Por otra parte, si se considera un $\alpha = 0,0842$, se obtiene un tiempo de viaje del *tsunami* de 5,19 minutos. Es notorio que no se logra replicar el valor mencionados por estudios como el de Synolakis et al. (2002) o Heinrich et al. (2001), los cuales dicen que el *tsunami* llegó a las costas de PNG con un desfase de 10-13 minutos después de ocurrido el terremoto principal. En la sección titulada como “Análisis paramétrico” se explica porqué ocurre esta discordancia entre los valores de tiempo de viaje teórico, el real y el estimado por testigos oculares.

En la figura 5.9 (Abajo) se observan los perfiles idealizados, los cuales corresponden a los modelos de pendientes constantes considerando un $\alpha = 0,2126$ (curva de color azul) y un $\alpha = 0,0842$ (línea de color rojo). El perfil batimétrico analizado comprende el área entre la Latitud 2,5–2,7°S y Longitud 142,1–142,2°W, el ángulo de la pendiente entre el plano inclinado y el eje horizontal es aproximadamente unos 4,81° (Se realizó una transecta de la batimetría, la cual fue tratada como una aproximación del perfil de la forma con una función lineal obtenida con un algoritmo del método de los mínimos cuadrados). Con respecto al modelo *sloping beach*, la tangente del ángulo utilizado corresponde al valor mayoritariamente empleado en las investigaciones sobre este *tsunami* (Heinrich et al., 2001; Synolakis et al., 2002; Matsuyama & Yeh, 2003), la cual es de 12°.

5.2.2. Evaluación de la solución propuesta por Liu et al. (2003) para el evento de PNG 1998

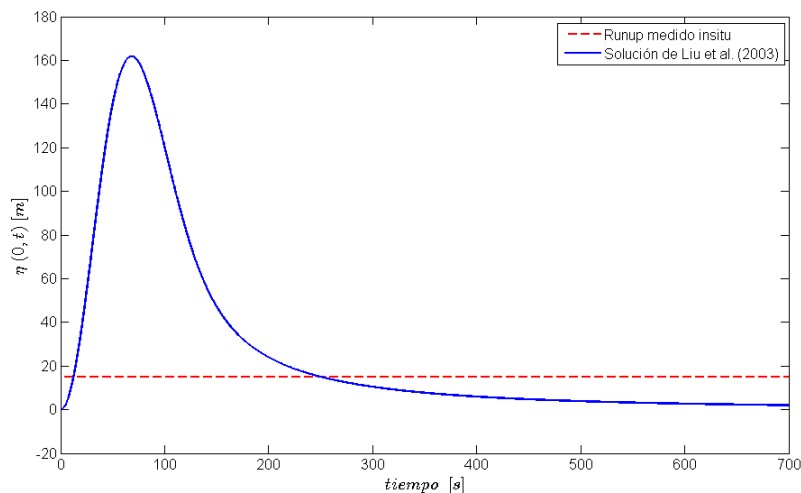


Figura 5.10: Altura de *runup* modelada mediante la solución propuesta por Liu et al. (2003) aplicado al deslizamiento de PNG 1998.

En la figura 5.10 se observa claramente la presencia de un valor máximo de *runup*, el cual alcanza los 161,8 m. El tiempo de llegada del tren de ondas hacia la línea de costa es a los 68,7 segundos. Ambos parámetros están lejos de ser cercanos a los datos mostrados por los estudios de Synolakis et al. (2002) y Heinrich et al. (2001), los cuales corresponden a 15 m para el *runup* máximo y entre 10–13 minutos para el tiempo de llegada de la onda de *tsunami* a la línea de costa. El error relativo para el cálculo del *runup* máximo de este evento es de + 978,67 %. Una de las posibles explicaciones de este desajuste, es porque este modelo está basado en la posición inicial del deslizamiento de tierra como cercano al origen del sistema de coordenadas, por ende, no es posible mover o desplazar el centroide de dicho deslizamiento, dando como resultado valores mucho mayores en magnitud para la altura de *runup* máximo del *tsunami* medido en la costa, pero mucho menor en el tiempo de viaje para la misma onda analizada. Asumir que el deslizamiento comienza a desplazarse cercano al origen implica que no se genere un *rundown*, mostrando una gráfica sesgada hacia la izquierda, haciendo que nunca cruce el eje vertical negativo.

Las dos hipótesis anteriores pueden generar errores en los cálculos, pero la variable más sensible para que la altura de *runup* máxima obtenida por este modelo de Liu et al. (2003) haya sido casi 11 veces mayor en comparación a la medición de campo, se debe a que el espesor máximo del deslizamiento de tierra resulta ser extremadamente grande, pues 600 metros es un valor que no es común encontrar para los deslizamientos de tierra subaéreos, pero sí para los deslizamientos submarinos, que por lo general rondan los 1000–10000 metros en largo y ancho, con espesores

que superan fácilmente la centena de metros.

5.2.3. Evaluación del método de diferencias finitas para el evento de PNG 1998

Este método se realizó a través de las ecuaciones (3.142) y (4.30), pero suavizada en un 40% con un filtro del tipo *smooth*. Con respecto al mallado en la dirección x y el tiempo t , la tabla 5.7 muestra como es la discretización de este modelo cuando $\alpha = 0,0842$ y $\alpha = 0,2126$, por lo tanto,

	Δt (s)	t (s)	Δx (m)	$n \Delta x$ (m)
$\alpha = 0,0842$	0,1056	600	20	27810
$\alpha = 0,2126$	0,0665			

Tabla 5.7: Tabla resumen con datos de entrada de la malla del modelo de diferencias finitas para el evento de PNG.

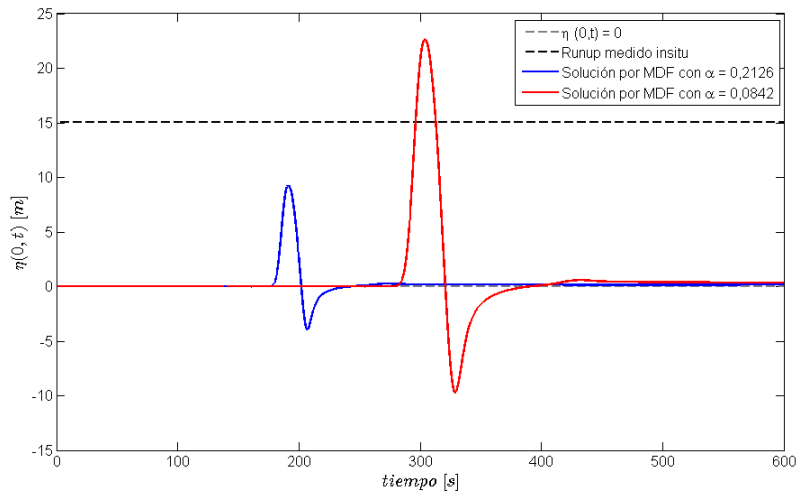


Figura 5.11: Altura de *runup* modelada mediante el método de diferencias finitas aplicado al deslizamiento de PNG 1998.

En la figura 5.11 se observa una altura máxima de *runup* y *rundown* para ambas curvas (de color azul y rojo), cuyos valores máximos para la curva de color azul son de 9,3 m y 4 m, respectivamente. En cambio, para la curva de color rojo los valores máximos de *runup* y *rundown* son de 22,63 m y 9,72 m. En relación al cálculo de los errores relativos, el *runup* máximo

considerando un $\alpha = 0,2126$ genera un -38% de error relativo, y para un $\alpha = 0,0842$ se obtiene un error relativo de $+50,87\%$. El primer *runup* corresponde al valor máximo de la curva $\eta(0, t)$, ya que una de las 3 ondas generadas durante el transcurso del desplazamiento del deslizamiento de tierra es un valle de la onda que se propaga hacia la línea de costa, el resto de las ondas generadas en la fuente corresponden a ondas de mayor amplitud (una cresta y un valle), donde ambas se producen en la parte delantera del deslizamiento de tierra. Estas dos últimas viajan costa afuera (mar adentro), la cresta de la onda principal se desplaza a una velocidad $c = \sqrt{gh}$ (donde h corresponde a la profundidad del mar), y la otra onda (el valle) se moviliza a la misma velocidad del deslizamiento. El estudio de Heinrich et al. (2001) expone que la primera onda en llegar a la costa es la de mayor amplitud, y corresponde a una cresta. Más tarde llega a la costa un segundo tren de ondas que es menor en amplitud en comparación al primer tren de ondas, y corresponde a un valle. Según este mismo estudio (Heinrich et al., 2001) el único tren de ondas que llega a la superficie es la segunda onda positiva, precedida por el valle.

Los tiempos de llegada del *tsunami* correspondiente para dicho *runup* máximo considerando un $\alpha = 0,2126$ son de 3,19 minutos, y para un $\alpha = 0,0842$ el tiempo de viaje del *tsunami* es de 5,07 minutos. En relación al cálculo de los errores relativos de este parámetro, el tiempo de llegada de la onda principal se ajusta bastante bien al valor entregado por la ecuación (5.7), considerando un $\alpha = 0,2126$ el error relativo es de $-2,15\%$, y para un $\alpha = 0,0842$ el error relativo es de un $-2,31\%$.

Un punto interesante a destacar, es la casi exactitud que hay entre los valores de los tiempos de viaje de la solución analítica (3.265) y este método, ya que ambas ocurren aproximadamente a los 3,17 minutos, las formas de ambas ondas se asemejan bastante, pero varían porque la curva de $\eta(0, t)$ para el método de diferencias finitas fue suavizada por un filtro tipo *smooth*, la cual se tuvo que suavizar por motivos de cálculo, para evitar que se produzca un artefacto numérico.

5.2.4. Resumen de los resultados obtenidos para el evento de PNG 1998

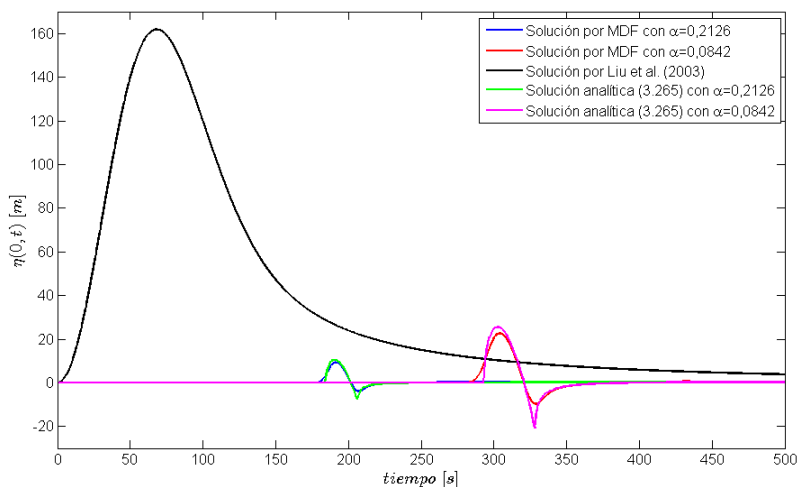


Figura 5.12: Resumen de las alturas de *runup* modeladas para el evento de PNG 1998.

La figura 5.12 muestra el buen ajuste que existe entre la solución analítica (3.265) y la solución calculada mediante el método de diferencias finitas, en ambos casos ($\alpha = 0,2126$ y $\alpha = 0,0842$). No obstante, la solución modelada por Liu et al. (2003) no se ajusta a la solución analítica (3.265), y también a la solución obtenida por el método de diferencias finitas (considerando $\alpha = 0,2126$ y $\alpha = 0,0842$). Se observa también que a excepción de la solución de Liu et al. (2003), el resto de las curvas de alturas de *runup* están en el rango de valores cercanos a la altura de *runup* máximo medido *insitu* (15 metros).

Método	<i>runup</i> máximo (m)	error relativo (%)	tiempo de ejecución (s)
Medición <i>insitu</i>	15	–	–
Ecuación (3.265) con $\alpha = 0,0842$	25,55	+ 70,33	0,090473
Ecuación (3.265) con $\alpha = 0,2126$	10,45	– 30,33	
Liu et al. (2003)	161,8	+ 978,67	41,9446
Diferencia finita con $\alpha = 0,0842$	22,63	+ 50,87	5996,1764
Diferencia finita con $\alpha = 0,2126$	9,3	– 38	3719,8372

Tabla 5.8: Tabla resumen con los valores obtenidos para las alturas de *runup* del evento de PNG 1998.

La tabla 5.8 resume los valores calculados por la solución analítica (3.265), Liu et al. (2003) y el método de diferencias finitas, junto con la sobreestimación y subestimación con respecto

al *runup* máximo citado por Synolakis et al. (2002) y Heinrich et al. (2001). Por otra parte, se muestra la información que tiene relación con el tiempo de cálculo del computador para cada método aplicado a este evento, los cuales van desde 0,09 segundos para la solución analítica (3.265), y 1,67 horas para la solución calculada por el método de diferencias finitas considerando un $\alpha = 0,0842$.

Otro punto a mencionar, es que el modelo de diferencias finita para los valores de $\alpha = 0,2126$ y $\alpha = 0,0842$ fueron calculados por separado, en cambio, el modelo que calcula la solución analítica (3.265) fue calculado conjuntamente para estos dos valores de α .

5.3. Análisis paramétrico de la solución analítica (3.265)

En la presente sección se realizará un análisis paramétrico del caso 3, que corresponde a la solución analítica (3.265) de la ecuación de ondas de agua poco profunda inhomogénea, cuyo término forzante corresponde a una función parabólica invertida. En este análisis se analiza el nivel de sensibilidad que tienen los parámetros como la velocidad (v), el largo ($L = x_2 - x_1$) y el espesor (A) del deslizamiento de tierra en la altura máxima del *runup*.

La metodología a realizar es un *ceteris paribus*, es decir, se modifica el valor de una variable y el resto se consideran constantes. Para esta sección, primero se analizará la influencia del espesor, luego la velocidad y por último la longitud del deslizamiento de tierra, todo este análisis se efectuará para los 3 eventos antes mencionados (frente a Isla Mentirosa, Aguas Calientes y PNG).

5.3.0.1. Evento ocurrido frente a Isla Mentirosa 2007

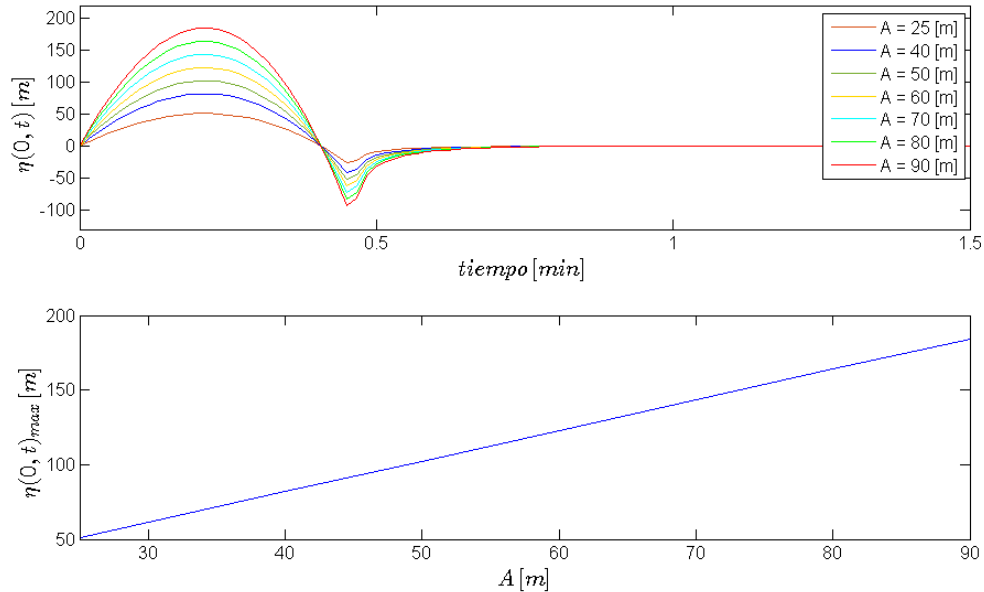


Figura 5.13: (Arriba) Análisis sobre la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.

En la figura 5.13 (Arriba) muestra como se modifica la solución analítica (3.265), haciendo variar el espesor del deslizamiento de tierra. También se observa claramente que A es un valor sensible para determinar la altura del *tsunami* en la línea de costa $\eta(0, t)$, puesto que para explicar el *runup* de 50 m, $A = 25$ m. En la figura 5.13 (Abajo), se observa una relación lineal creciente entre la variación de la altura de *runup* máxima calculada por la solución analítica (3.265) y el aumento del espesor del deslizamiento de tierra. Cuando $A = 32$ m predice el *runup* presentado por Sepúlveda & Serey (2009), y el *runup* máximo citado por Scheele et al. (2013), es replicado cuando $A = 25$ m.

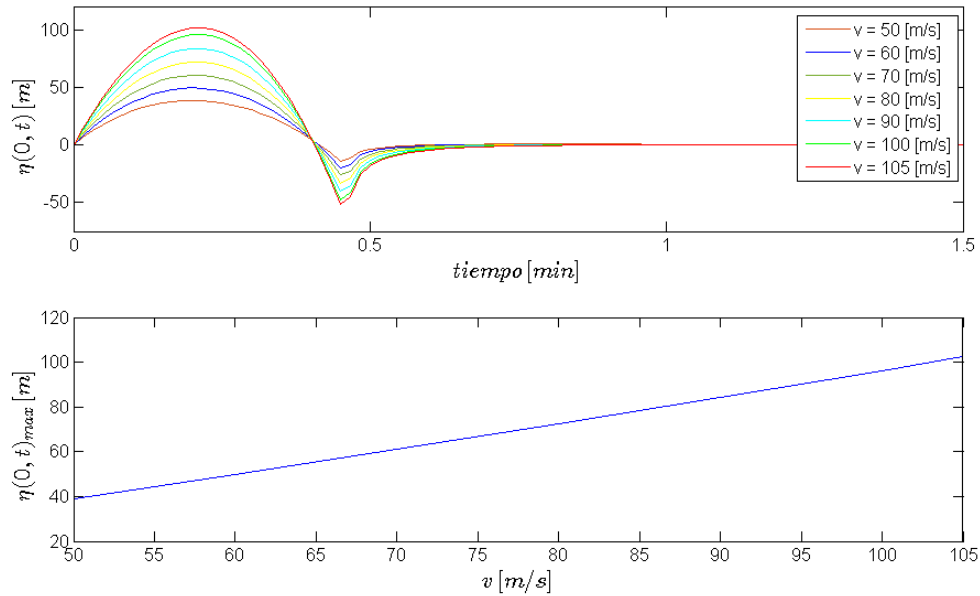


Figura 5.14: (Arriba) Análisis sobre la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.

En la figura 5.14 (Arriba) muestra como va cambiando la altura de *runup* y consigo el *runup* máximo, cuando varia la velocidad del deslizamiento de tierra. También queda en evidencia que mientras más se aumente la velocidad v del deslizamiento, más aumentan el *runup* y el *rundown*. La figura 5.14 (Abajo) muestra una leve tendencia cuadrática creciente entre la altura de *runup* máxima calculada mediante la solución analítica (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra. La velocidad del deslizamiento de tierra que réplica el *runup* citado por Sepúlveda & Serey (2009) es $v = 73,5$ m/s, y el *runup* máximo presentado por Scheele et al. (2013), es replicado cuando $v = 60$ m/s.

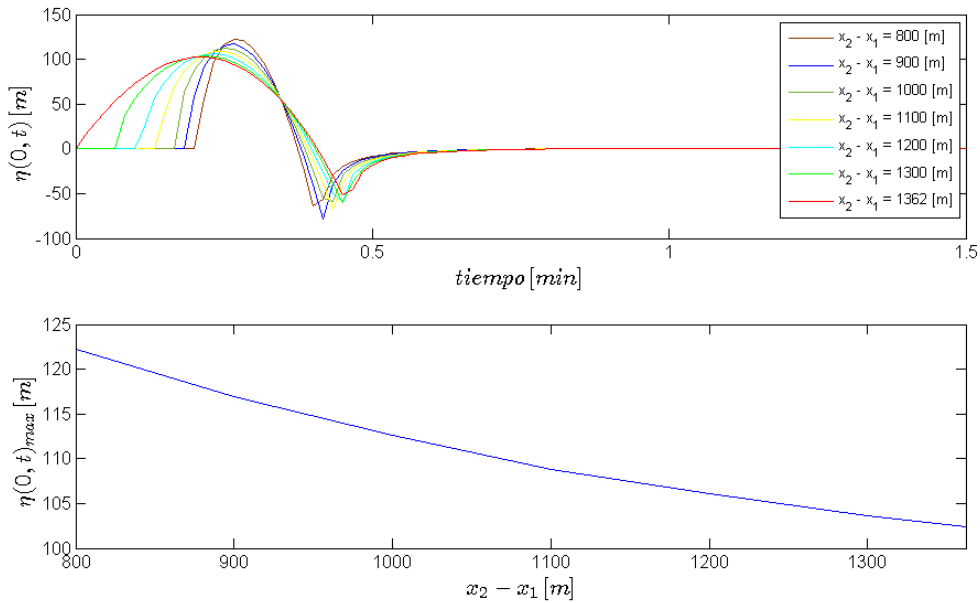


Figura 5.15: (Arriba) Análisis sobre la influencia del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento frente a Isla Mentirosa. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el largo del deslizamiento de tierra frente a Isla Mentirosa.

En la figura 5.15 (Arriba) muestra como cambia la solución analítica (3.265) cuando se hace variar el largo del deslizamiento de tierra. Otro punto a destacar de la figura 5.15 (Arriba), es que el tiempo crítico del *tsunami* (también denominado como tiempo de viaje) tiende a cero cuando x_1 también tiende a cero. En la figura 5.15 (Abajo) se muestra una relación decreciente entre la variación de la altura máxima de *runup* calculada por la ecuación (3.265) y el aumento de la longitud del deslizamiento de tierra. La longitud del deslizamiento que explica el *runup* citado por Sepúlveda & Serey (2009) es $x_2 - x_1 = 2785$ m, y el *runup* máximo citado por Scheele et al. (2013), es replicado cuando $x_2 - x_1 = 4086$ m. Cabe hacer notar que es físicamente imposible tener un deslizamiento completamente subaéreo para este evento, ya que la ladera frente a Isla Mentirosa mide poco más de un kilómetro.

De las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 se visualiza que el parámetro más sensible en el cálculo de $\eta(0, t)$ resulta ser la velocidad del deslizamiento de tierra, puesto que con un valor de $v = 60$ m/s es posible de predecir el *runup* máximo que propone el estudio de Sepúlveda & Serey (2009), el cual equivale a 50 m, en otras palabras, es necesario reducir a un 75 % la velocidad propuesta por Sepúlveda & Serey (2009) para obtener los 50 metros de *runup* mediante el uso de la ecuación (3.265), en cambio para llegar al mismo valor de *runup*, es necesario reducir en un 100 % el espesor del deslizamiento de tierra.

Las curvas presentadas en las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 se observa que representan el fenómeno

de los *tsunami* provocados por deslizamientos de tierra, ya que tienen una altura de *runup* y *rundown* máxima.

5.3.0.2. Evento de Aguas Calientes

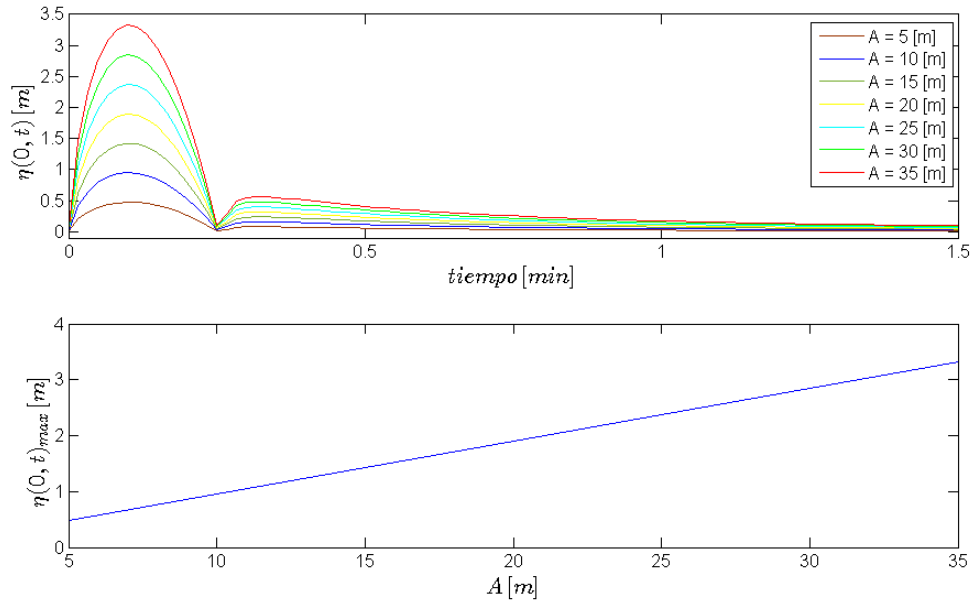


Figura 5.16: (Arriba) Análisis sobre la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.

En la figura 5.16 (Arriba) muestra como cambia la solución analítica (3.265) variando el espesor del deslizamiento de tierra. También se observa que la altura de *runup* del *tsunami* no es replicado por la ecuación (3.265), sólo asumiendo un valor de $A = 130$ m. En la figura 5.16 (Abajo) se visualiza una tendencia lineal creciente para la altura de *runup* máxima modelada o calculada.

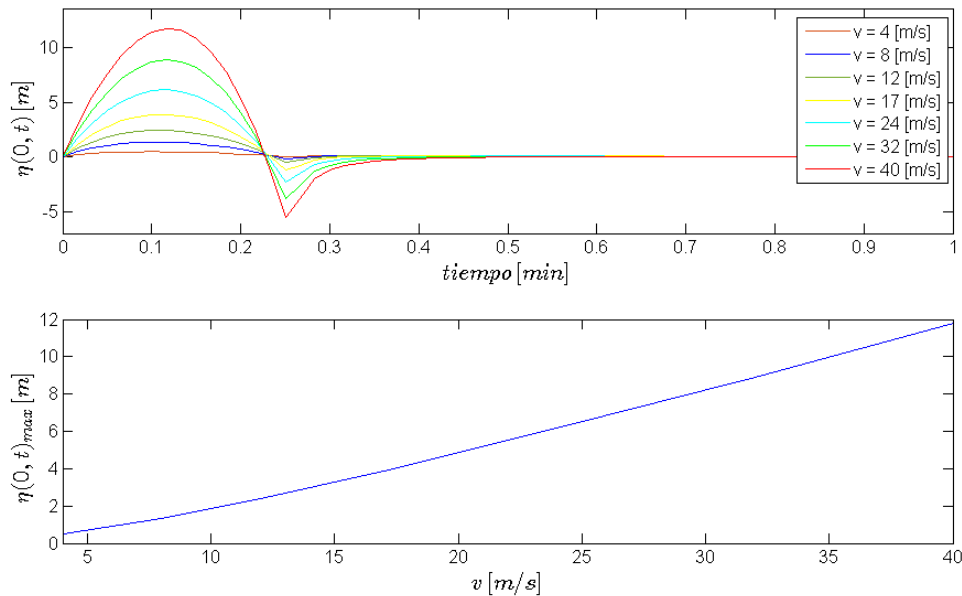


Figura 5.17: (Arriba) Análisis sobre la influencia de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.

En la figura 5.17 (Arriba) muestra como cambia la altura máxima de *runup* haciendo variar la velocidad del deslizamiento de tierra. Además, se observa que la curva de *runup* de la figura 5.17 (Arriba) representa la curva típica del *runup* para el caso de un *tsunami* generado por un deslizamiento de tierra, puesto que presenta un *runup* y *rundown* máximo. La figura 5.17 (Abajo) muestra una leve tendencia cuadrática creciente para la altura máxima de *runup* calculada por la solución analítica (3.265) con respecto al aumento de la velocidad del deslizamiento de tierra. Para predecir la altura de *runup* de 12 metros, el valor de que debe adquirir v tiene que ser superior a 40,8 m/s.

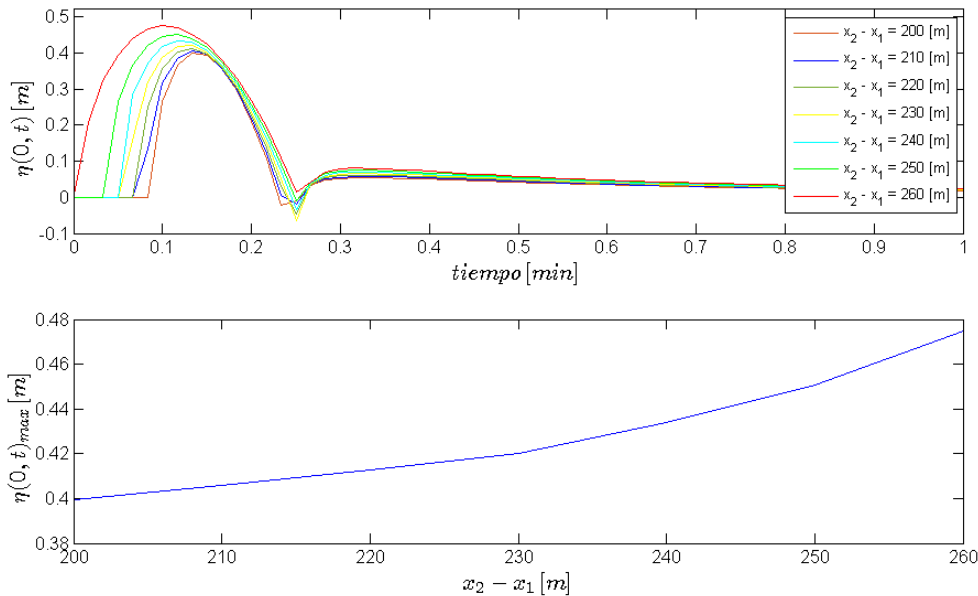


Figura 5.18: (Arriba) Análisis sobre la influencia del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de Aguas Calientes. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el largo del deslizamiento de tierra de Aguas Calientes.

En la figura 5.18 (Arriba) muestra como la altura de *runup* no varía mucho en magnitud ni en forma cuando se modifica el largo del deslizamiento de tierra, puesto que $\eta(0, t)$ sólo varía entre 0,4 hasta 0,47 metros. También se visualiza que el tiempo crítico del *tsunami* tiende a cero cuando x_1 tiende a cero. La figura 5.18 (Abajo) muestra una tendencia cuadrática creciente para la altura máxima de *runup* calculada mediante la solución analítica (3.265). No obstante, no se predice la altura de *runup* medido por expediciones de campo del SERNAGEOMIN, la cual fue de 12 metros.

Analizando las figuras 5.16, 5.17 y 5.18, es notorio que el mejor ajuste con respecto a la altura de *runup* máximo medido *insitu* corresponde a la velocidad del deslizamiento de tierra. Empero, para predecir la altura de *runup* de 12 metros, el valor de v tiene que ser superior a 48 m/s. No obstante, esta velocidad no explica físicamente el fenómeno acontecido el 21 de abril del año 2007, puesto que la velocidad a la que se desplazó el deslizamiento de tierra no superó los 4 m/s, según (Serey, 2011).

Otro aspecto a destacar, es que el único parámetro que define la traslación en el eje x de la curva $\eta(0, t)$ es el largo del deslizamiento de tierra, ya que esta variable es capaz de modificar el tiempo crítico del *tsunami*, haciendo que el comienzo de la curva $\eta(0, t)$ esté más cercano al origen cuando $x_1 \rightarrow 0$, para este evento.

5.3.0.3. Evento de PNG 1998

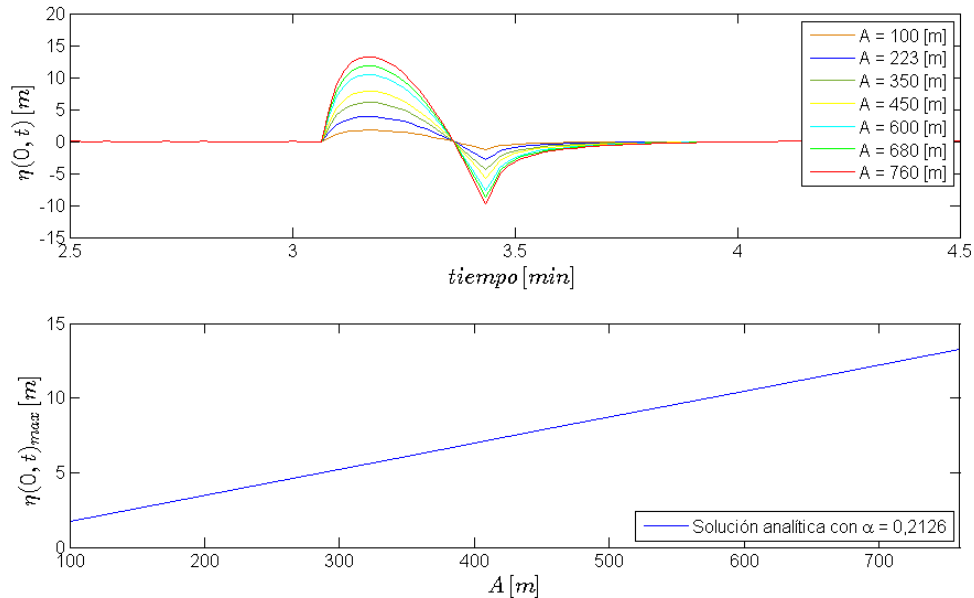


Figura 5.19: (Arriba) Análisis de la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.19 (Arriba) muestra como cambia la altura de *runup* variando el espesor del deslizamiento de tierra, si se considera un $\alpha = 0,2126$ ($\tan 12^\circ$). En la figura 5.19 (Abajo) se visualiza una relación lineal creciente entre la variación de la altura de *runup* máxima calculada mediante la ecuación (3.265) y el aumento del espesor del deslizamiento de tierra. Realizando un análisis sobre cuál es el espesor del deslizamiento de tierra de PNG que predice la altura máxima de *runup* medido *insitu* (Heinrich et al., 2001; Synolakis et al., 2002), y considerando un $\alpha = 0,2126$ aplicado a la solución analítica (3.265), se llega a la conclusión que $A = 900$ m predice un $\eta(0, t) = 15$ m.

Un punto a destacar sobre la figura 5.19 (Abajo) es que si se elige como *input* el valor propuesto por Watts et al. (2005), $A = 760$ m, se puede explicar bastante bien el máximo *runup* observado en Sissano Lagoon, ya que el error relativo que se obtiene para el *runup* máximo escogiendo este espesor es $-11,73\%$, por otra parte, cuando $A = 600$ m, se obtiene un error relativo de $-30,33\%$. Por lo tanto, si uno se basa en la ecuación (3.265) y considerando un $\alpha = 0,2126$, el espesor que se ajusta mejor a las mediciones de campo es $A = 760$ m.

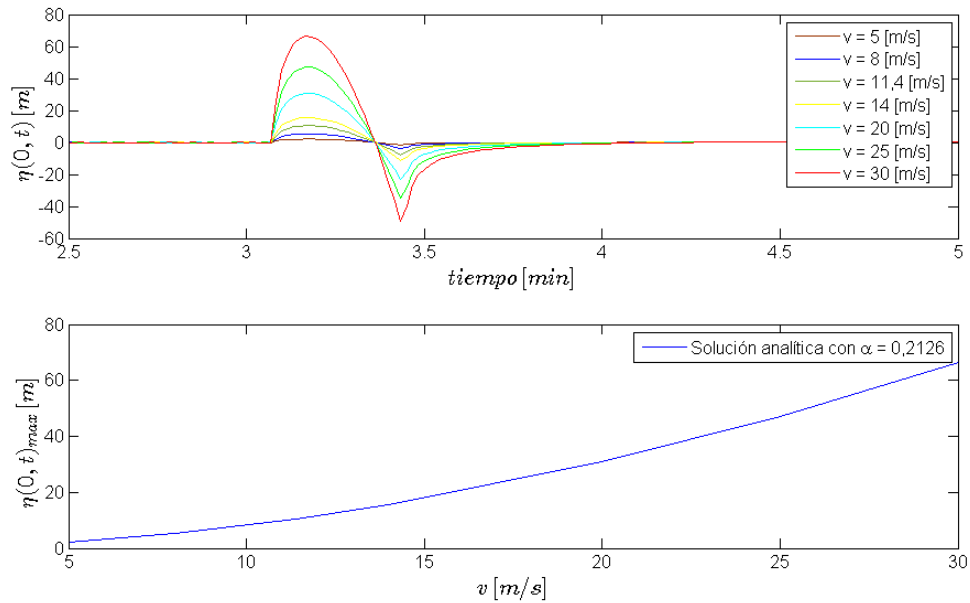


Figura 5.20: (Arriba) Análisis de sensibilidad de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado mediante la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.20 (Arriba) muestra como cambia la altura de *runup* modificando la velocidad del deslizamiento de tierra, considerando un $\alpha = 0,2126$ ($\tan 12^\circ$). En la figura 5.20 (Abajo) se visualiza una relación cuadrática creciente entre la variación de la altura máxima de *runup* calculada mediante la ecuación (3.265) y el aumento de la velocidad del deslizamiento de tierra. Si se considera un $\alpha = 0,2126$ aplicado en la solución analítica (3.265), la velocidad del deslizamiento de tierra que predice el máximo *runup* citado por Heinrich et al. (2001) y Synolakis et al. (2002), es cuando $v = 14$ m/s.

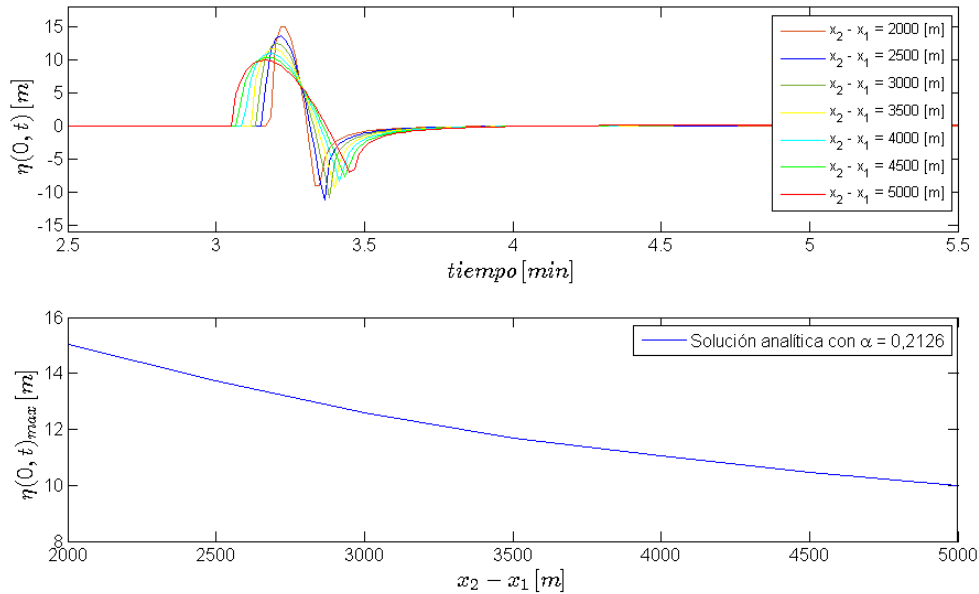


Figura 5.21: (Arriba) Análisis de sensibilidad de la longitud o largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,2126$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y la longitud del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.21 (Arriba) muestra como cambia la altura de *runup* calculada mediante la solución analítica (3.265) haciendo variar el largo del deslizamiento de tierra, considerando un $\alpha = 0,2126$ ($\tan 12^\circ$). Se visualiza en la figura 5.21 (Abajo) una relación decreciente entre la variación de la altura de *runup* máxima calculada por la ecuación (3.265) y el aumento de la longitud del deslizamiento de tierra. Si se considera un $\alpha = 0,2126$, la longitud del deslizamiento de tierra que predice el máximo *runup* presentado por Heinrich et al. (2001) y Synolakis et al. (2002), es cuando $x_2 - x_1 = 2000$ m. Sin embargo, este valor se ajusta sólo a la modelación realizada por Matsuyama & Yeh (2003), no así a los datos obtenidos mediante sismica de reflexión (véase Synolakis et al., 2002), donde mencionan que el deslizamiento de tierra tiene un largo de 4500 m. Cabe mencionar que a pesar de reducir el largo del deslizamiento en más de la mitad (de 4500 a 2000 m), el *runup* sólo se reduce desde los 15 metros cuando $x_2 - x_1 = 2000$ m, hasta los 10 metros cuando $x_2 - x_1 = 4500$ m. Por lo tanto, para el evento de PNG y considerando un $\alpha = 0,2126$, se observa que el largo del deslizamiento de tierra no es el parámetro más sensible en la ecuación (3.265), con el objeto de predecir las alturas de *runup* medidas en terreno.

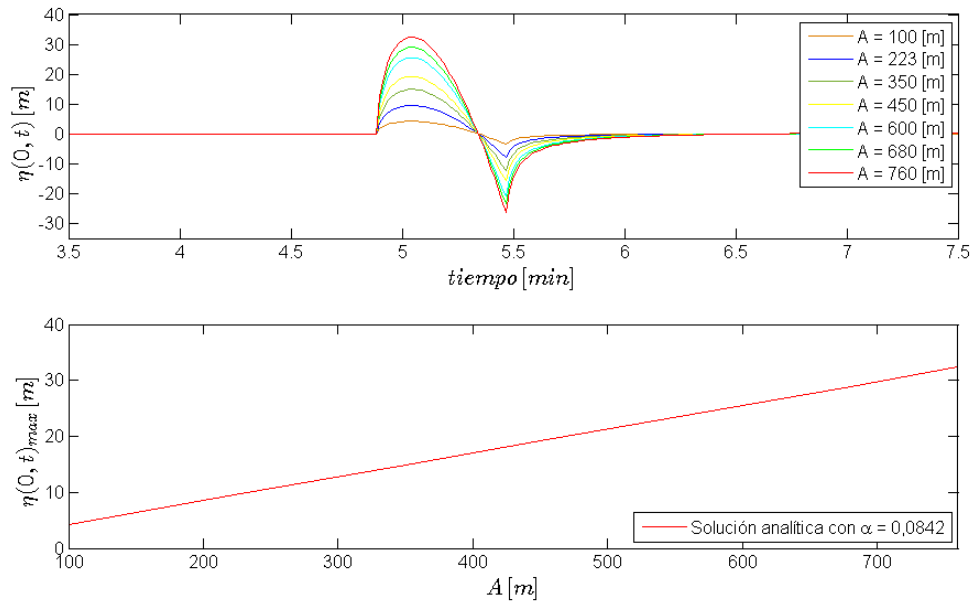


Figura 5.22: (Arriba) Análisis de la influencia del espesor del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y el espesor del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.22 (Arriba) muestra como cambia la altura de *runup* variando el espesor del deslizamiento de tierra considerando un $\alpha = 0,0842$ (\tan de $4,81^\circ$). En la figura 5.22 (Abajo) muestra una relación lineal creciente entre la variación de la altura de *runup* máxima calculada por la ecuación (3.265) y el aumento del espesor del deslizamiento de tierra. Cuando el espesor del deslizamiento de tierra es $A = 360$ m, se predice el máximo *runup* citado por Heinrich et al. (2001) y Synolakis et al. (2002), considerando un $\alpha = 0,0842$.

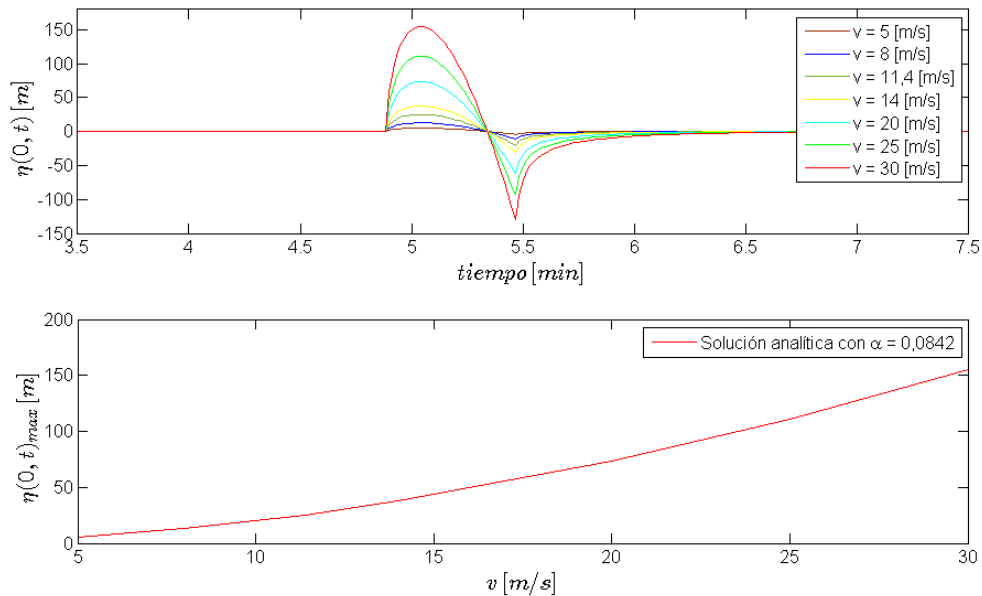


Figura 5.23: (Arriba) Análisis de sensibilidad de la velocidad del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y la velocidad del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.23 (Arriba) muestra como se modifica la altura de *runup* variando la velocidad del deslizamiento de tierra, considerando un $\alpha = 0,0842$ ($\tan 4,81^\circ$). En la figura 5.23 (Abajo) se visualiza una relación cuadrática creciente entre la variación de la altura de *runup* máxima calculada por la ecuación (3.265) y el aumento de la velocidad del deslizamiento de tierra. La modelación de la ecuación (3.265) asumiendo un valor de $\alpha = 0,0842$, predice el *runup* medido *insitu* (15 metros), cuando $v = 8,7$ m/s. Este resultado resulta ser muy cercano al valor propuesto por Watts et al. (2005) ($v = 11,4$ m/s).

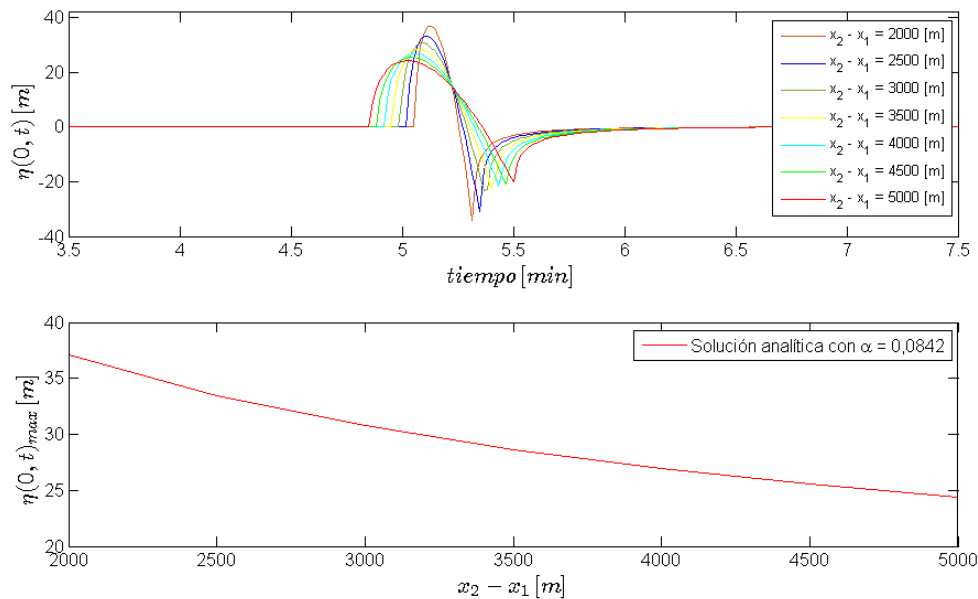


Figura 5.24: (Arriba) Análisis de sensibilidad del largo del deslizamiento de tierra en el máximo nivel de *runup* para el evento de PNG considerando un valor de $\alpha = 0,0842$. (Abajo). Curva entre el *runup* máximo calculado por la ecuación (3.265) y la longitud del deslizamiento de tierra de PNG.

La figura 5.24 (Arriba) muestra como cambia la altura de *runup* modificando el largo del deslizamiento de tierra considerando un $\alpha = 0,0842$ ($\tan 4,81^\circ$). En la figura 5.24 (Abajo), se observa una relación decreciente entre la variación de la altura máxima de *runup* calculada mediante la ecuación (3.265) y el aumento de la longitud del deslizamiento de tierra. Si se considera un $\alpha = 0,0842$, la longitud del deslizamiento de tierra que predice el máximo *runup* citado por Heinrich et al. (2001) y Synolakis et al. (2002), es cuando $x_2 - x_1 = 17000$ m.

El parámetro que explica de mejor manera este *tsunami* considerando un $\alpha = 0,0842$ es la velocidad del deslizamiento de tierra, puesto que modificando este parámetro de 11,4 a 8,7 m/s, se predice la altura de *runup* medido *insitu*. Este es un gran resultado, puesto que la solución analítica (3.265) se ajusta a los *tsunamis* generados por deslizamientos submarinos, debido a que el dominio en el eje x está definido para valores positivos. En relación a la velocidad, esta ecuación se ajusta mejor a los datos expuestos por el estudio de Watts et al. (2005) y no así a los de Heinrich et al. (2001), los cuales propusieron un rango de valores entre los 20 – 60 m/s, seleccionando $v = 30$ m/s como el *input* adecuado para sus modelaciones.

5.3.0.4. Resumen del análisis paramétrico

Evento	A (m)	v (m/s)	$x_2 - x_1$ (m)	$runup$ medido <i>insitu</i> (m)
Frente a Isla Mentirosa	25	60	4086	50
	32	73,5	2785	65
Aguas Calientes	130	40,8	–	12
PNG ($\alpha = 0,0842$)	360	8,7	17000	15
PNG ($\alpha = 0,2126$)	900	14	2000	

Tabla 5.9: Tabla resumen de los eventos de Aguas Calientes, frente a Isla Mentirosa y PNG, que predicen las alturas de $runup$ medidos *insitu*.

La tabla 5.9 resume los valores del espesor (A), la velocidad (v) y el largo ($x_2 - x_1$) del deslizamiento de tierra que predicen las alturas de $runup$ medidas *insitu*. En esta tabla se observa que para el evento de Aguas Calientes no existe ninguna longitud del deslizamiento que prediga la altura de $runup$ medido *insitu* (12 metros). Cabe hacer notar que para el evento de PNG, la longitud del *slump* necesario para predecir el $runup$ máximo de 15 m, tiene que producirse un deslizamiento mayor a 17 kilómetros de longitud. Esto se explica, porque la pendiente de la playa es de $4,81^\circ$, y mientras más baja sea la pendiente inclinada de la ladera, mayor será la longitud del deslizamiento (para que una ladera sea inestable, se necesita que una gran masa genere la zona de falla de la ladera).

5.3.0.5. Tiempo de viaje de la onda de *tsunami* para el evento de PNG 1998

En relación al cálculo del tiempo de viaje de la onda de *tsunami*, la solución analítica (3.265) predice que la onda de *tsunami* arribará aproximadamente a los 3,27 minutos cuando el modelo de playa inclinada considera un $\alpha = 0,2126$. Cuando el valor de $\alpha = 0,0842$, el tiempo de viaje correspondiente es de 5,19 minutos.

A continuación se muestra el cálculo del tiempo de viaje basado en los datos batimétricos de PNG, donde el área de estudio considera la zona entre la Latitud $2,5-2,7^\circ\text{S}$ y Longitud $142,1 - 142,2^\circ\text{W}$, obteniéndose como resultado,

$$t_{v,r} = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{9,8 h(x)}} = 387,36 \text{ s} \approx 6,46 \text{ min} \quad (5.9)$$

Donde: $t_{v,r}$ se define como el tiempo de viaje real de la onda de *tsunami*, calculada en

base a datos batimétricos (obtenidos del sitio web de *GEBCO*); $h(x)$ corresponde al vector de la batimetría de la zona cercana a la costa de PNG medida en metros.

De acuerdo al resultado de la ecuación (5.9), hay una discrepancia entre los 6,46 minutos obtenidos con dicha ecuación, el tiempo estimado por los testigos oculares de PNG, y el tiempo de llegada de las ondas T a la costa de PNG. Las razones del porqué de esta discrepancia en los resultados, pueden ser explicados por los siguientes motivos: el deslizamiento de tierra submarino (*slump*) ocurrió bastante cerca de la costa de PNG (aproximadamente a 20 km) y debido a eso, la batimetría no es lo suficientemente fina para tener una estimación certera de $t_{v,r}$, así como también las incertezas de los parámetros (por ejemplo: x_1 y x_2). Ante las razones expuestas previamente, la discrepancia también se puede explicar porque los testigos oculares no han estimado el tiempo de llegada del primer tren de olas de una manera confiable (10 – 13 minutos). Por lo tanto, Todas estas razones combinadas hacen que estimar el tiempo de llegada de la onda de *tsunami* no pueda ser conocido con exactitud.

Conclusión

En este trabajo de tesis se obtuvieron soluciones analíticas resolviendo el problema de condiciones iniciales nulas aplicando la transformada Hankel-Laplace a la ecuación lineal de agua poco profunda inhomogénea, proponiendo tres funciones forzantes como representativas de un deslizamiento de tierra como movimiento del fondo marino. Estas soluciones analíticas se desarrollaron en tres casos; el primero consistió en modelar el movimiento del fondo oceánico como una función de variable separable, cuya función que depende del espacio (dirección x) corresponde a una función de tipo gaussiana. Este modelo se ajusta para los tipos de *tsunamis* generados por terremotos; el segundo modelo que se propuso en esta tesis, está basado en una función forzante del tipo onda viajera, cuya forma corresponde a una función caja (multiplicación de funciones Heaviside). Este modelo tiene limitaciones en la modelación, ya que el dominio se define positivo desde la intersección entre la superficie del agua y la pendiente de la playa (que corresponde al origen del sistema de coordenadas) hacia costa afuera. Matemáticamente este modelo tiene problemas internos, porque presenta singularidades en la solución analítica (3.140), lo que hace imposible poder predecir alturas de *runup* de los *tsunamis* generados por el deslizamiento de tierra. A pesar de este inconveniente, este modelo propuesto sirve de base para un tercer modelo que resulta ser el definitivo en este trabajo de tesis. Este tercer modelo se basa en una función del tipo parabólica invertida que se mueve a una velocidad constante v sobre una pendiente inclinada también constante, manteniendo su forma, independiente si se mueve indefinidamente. Esta modelación se comparó con el método de diferencias finitas, y el método desarrollado por Liu et al. (2003). La solución analítica (3.265) fue aplicada a los eventos ocurridos en el fiordo de Aysén en el año 2007, los deslizamientos de tierra subaéreos de Aguas Calientes y frente a Isla Mentirosa; la solución analítica (3.265) también fue aplicada al evento de Papua Nueva Guinea ocurrido en el año 1998.

Para los casos de los eventos frente a Isla Mentirosa y Aguas Calientes, se obtuvieron resultados opuestos, ya que para el evento frente a Isla Mentirosa se sobreestimaron las alturas de *runup* medidas en las cercanías de este deslizamiento, por otra parte, para el evento de Aguas Calientes se subestimaron las alturas de *runup* medidos a los costados de esta remoción en masa. A pesar de no predecir las alturas de *runup* medidos *insitu*, estos modelos sirven de referencia para pronosticar el riesgo que generan este tipo de fenómenos, debido a la falta de información que hay en los fiordos, como por ejemplo: el fiordo de Aysén.

Para el evento de PNG, se realizaron dos modelaciones, la primera corresponde a un modelo de playa inclinada, cuyo ángulo de la pendiente fue tomado de los valores propuestos por autores como Heinrich et al. (2001), Synolakis et al. (2002) y Watts et al. (2005), correspondiente a 12° . Este modelo obtuvo excelentes resultados, ya que predijo la altura de *runup* medido *insitu* modificando la velocidad desde $v = 11,4$ m/s (propuesto por Watts et al. (2005)) a $v = 14$ m/s. Con este modelo se obtuvo un error relativo de $+ 30,33\%$. El segundo modelo del evento de PNG corresponde a un modelo de playa inclinada, cuya pendiente fue calculada mediante el método de mínimos cuadrados, cuyos datos fueron obtenidos desde el sitio de internet de GEBCO, donde la pendiente corresponde a $4,81^\circ$. Este segundo modelo obtuvo un error relativo del $+ 70,33\%$. No obstante, modificando la velocidad del deslizamiento propuesto por Watts et al. (2005) a $8,7$ m/s se logra predecir el *runup* medido *insitu* (15 metros).

Cuando se comparan la solución analítica (3.265) y la modelación numérica mediante el método de diferencias finitas de la ecuación (4.30), los ajustes que se obtuvieron fueron bastante buenos, ya que la forma de onda entre ambas curvas resultan ser muy similares, considerando que el filtro aplicado fue un tipo *smooth* del 40% . Una consecuencia de este ajuste, es que las alturas máximas de *runup* son casi iguales.

Con respecto a los tiempos de viaje de la onda de *tsunami*, resultan ser muy cercanos entre ambas soluciones (analítica (3.265) y numérica (4.30)), aunque ambas soluciones no son capaces de explicar el arribo de la onda en llegar a la línea de costa registrada por testigos oculares, para el evento de PNG en el año 1998. Finalmente el último parámetro relevante que expresa la característica de un *tsunami* es la polaridad de la onda, resultando expresar fielmente el signo de la llegada de la onda a la línea de costa, siendo positiva para los eventos submarinos y negativos en los eventos subaéreos.

Una conclusión a destacar sobre la eficiencia de la solución analítica (3.265) tiene que ver con los parámetros de entrada. De la sección titulada como “Análisis paramétrico” se concluye que los *inputs* más sensibles en replicar las alturas de *runup* de la onda de *tsunami* es la velocidad y el espesor del deslizamiento de tierra, con orden descendente de exactitud. No obstante, para investigaciones futuras se recomienda verificar la veracidad de esta conclusión con más ejemplos de deslizamientos de tierra submarinos ocurridos en el mundo, por ejemplo: Storegga (aproximadamente 8150 años antes del presente), Grand Banks 1929, Unimak 1946, Skagway 1994, Izmit Bay 1999.

Si se comparan los eventos subaéreos y el evento de PNG (submarino) en relación a las alturas de *runup*, se demuestra que los *tsunamis* generados por deslizamientos submarinos son mecanismos ineficientes para generar ondas de *tsunami* en comparación a los deslizamientos subaéreos que producen ondas impulsivas denominadas en la literatura como “ondas de desplazamiento”. La explicación de este fenómeno es porque el deslizamiento subaéreo desplaza volumen adicional de la superficie del agua, esto implica que la cresta de la onda inicial es suficientemente más grande que los valles de las ondas subsiguientes (Fine et al., 2003).

Tal como lo mencionan estudios como el de Liu et al. (2003), una manera de saber a priori si la solución analítica tendrá una buena aproximación a los valores de *runup* medidos en terreno, es calculando la razón entre el espesor máximo y la longitud de dicho deslizamiento, donde dicho cociente tiene que ser mucho menor a 1, en otras palabras, el deslizamiento de tierra tiene que tener una forma alargada.

Sobre el tiempo de viaje de la onda de *tsunami*, este valor no se pudo estimar con exactitud, probablemente porque la batimetría no era lo demasiado fina (debido a la cercanía del deslizamiento con la línea de costa de PNG), o porque hay incertezas en los parámetros como la posición final e inicial del deslizamiento de tierra (x_1 y x_2 , respectivamente), o tal vez porque la medición del tiempo de llegada del tren de olas realizado por los testigos oculares no fue lo suficientemente exacta.

Para modelar los eventos subaéreos se propone que en investigaciones futuras desarrollar más en detalle el modelo de caída de meteorito como generador de los eventos tipo *tsunami* generados por deslizamientos de tierra, el cual fue propuesto Ward & Asphaug (2000) y replicado en este trabajo de tesis (sección 3.5).

Se recomienda que para mejorar las simulaciones de *tsunamis* provocados por deslizamientos de tierra subaéreos es imperativo seguir desarrollando la teoría de *tsunamis* cosmogénicos (provocados por impacto de meteoritos) propuesta por Ward & Asphaug (2000) y desarrollado en este trabajo de tesis. Se propone que en investigaciones futuras se realicen modelaciones que ajusten el modelo de Ward & Asphaug (2000) a los eventos del tipo *tsunami* generados por deslizamientos subaéreos deslizándose sobre un plano inclinado de ángulo constante. Por ejemplo, un primer paso sería proponer otro tipo de funciones matemáticas como deformaciones iniciales de la superficie del agua impactada por el meteorito, o modificar el modelo inicial de caída de meteorito sobre una superficie oceánica de profundidad constante a un modelo de profundidad variable y/o modelo de playa inclinada de pendiente constante. No obstante, para hacer más exacto el modelo de *tsunamis* subaéreos se recomienda que en investigaciones futuras se cambie el enfoque de mecanismo de generación de ondas, que en su mayoría se enfoca en la perturbación de la superficie del agua mediante el movimiento vertical del fondo marino a otro modelo que incorpore el desplazamiento de masa longitudinal desplazada y considerar el intercambio de momentum bidireccional (Heinrich et al., 2001).

Bibliografía

- Agurto, H., Rietbrock, A., Barrientos, S., Bataille, K., & Legrand, D. (2012). Seismo-tectonic structure of the aysén region, southern chile, inferred from the 2007 mw= 6.2 aysén earthquake sequence. *Geophysical Journal International*, 190(1), 116–130.
- Allaire, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation*, éditions de l'école polytechnique.
- Bardet, J.-P., Synolakis, C. E., Davies, H. L., Imamura, F., & Okal, E. A. (2003). Landslide tsunamis: recent findings and research directions. In *Landslide Tsunamis: Recent Findings and Research Directions* (pp. 1793–1809). Springer.
- Chaytor, J. D., Twichell, D. C., Lynett, P., & Geist, E. L. (2010). Distribution and tsunamigenic potential of submarine landslides in the gulf of mexico. In *Submarine Mass Movements and Their Consequences* (pp. 745–754). Springer.
- Cruden, D. & Varnes, D. (1996). Landslide types and processes, special report 247: Landslides: Investigation and mitigation: Washington dc. *Transportation Research Board*.
- Davies, H. (1998). *The Sissano tsunami, 1998: extracts from Earth Talk*. Tsunami Awareness Program.
- Davies, T. & McSaveney, M. (2012). Mobility of long-runout rock avalanches. *Landslides—types, mechanisms and modeling*. Edited by JJ Clague and D. Stead. Cambridge University Press, (pp. 50–58).
- Debnath, L. & Bhatta, D. (2014). *Integral transforms and their applications*. CRC press.
- Di Riso, M., De Girolamo, P., Bellotti, G., Panizzo, A., Aristodemo, F., Molfetta, M., & Petrillo, A. (2009). Landslide-generated tsunamis runup at the coast of a conical island: New physical model experiments. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 114(C1).
- Dwight, H. B. (1957). Tables of integrals and other mathematical data the macmillan company. In *Library of Congress catalog card number* (pp. 61–6419).

- Fine, I., Rabinovich, A., Kulikov, E., Thomson, R., & Bornhold, B. (1999). Numerical modelling of landslide-generated tsunamis with application to the skagway harbor tsunami of november 3, 1994. In *Proc. Int. Conf. on Tsunamis, Paris* (pp. 211–223).
- Fine, I. V., Rabinovich, A. B., Thomson, R. E., & Kulikov, E. A. (2003). Numerical modeling of tsunami generation by submarine and subaerial landslides. In *Submarine landslides and tsunamis* (pp. 69–88). Springer.
- Froude, M. (2016). Landslides in chile part 5: Water waves triggered by landslides and the mentirosa island landslide complex. Disponible en <http://blogs.agu.org/landslideblog/2016/02/02/mentirosaislandlandslide/> (02/02/2016).
- Fuentes, M. (2017). Simple estimation of linear 1+1d long wave run-up. *Geophysical Journal International*, 209(2), 597–605.
- Furseth, A. (2006). Skredulykker i norge. *Tun Forlag, Oslo*, 207.
- Geertsema, M., Clague, J. J., Schwab, J. W., & Evans, S. G. (2006). An overview of recent large catastrophic landslides in northern british columbia, canada. *Engineering Geology*, 83(1-3), 120–143.
- Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. (2007). *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).
- Griffiths, J. S. & Whitworth, M. (2012). Engineering geomorphology of landslides. In *Landslides: types, mechanisms and modeling*. Cambridge University Press.
- Grimstad, E. & Nesdal, S. (1991). The loen rockslides—a historical review. *Publikasjon-Norges Geotekniske Institutt*, 182, 1–6.
- Harbitz, C. (1992). Model simulations of tsunamis generated by the storegga slides. *Marine Geology*, 105(1-4), 1–21.
- Heim, A. (1932). *Bergsturz und menschenleben*. Fretz and Wasmuth.
- Heinrich, P., Piatanesi, A., & Hebert, H. (2001). Numerical modelling of tsunami generation and propagation from submarine slumps: the 1998 papua new guinea event. *Geophysical Journal International*, 145(1), 97–111.
- Heinrich, P., Piatanesi, A., Okal, E., & Hébert, H. (2000). Near-field modeling of the july 17, 1998 tsunami in papua new guinea. *Geophysical Research Letters*, 27(19), 3037–3040.
- Heller, V., Hager, W. H., & Minor, H.-E. (2009). Landslide generated impulse waves in reservoirs.

VAW-Mitteilungen, 211.

- Hermanns, R. L., L'Heureux, J.-S., & Blikra, L. H. (2013). Landslide triggered tsunami, displacement wave. In *Encyclopedia of Natural Hazards* (pp. 611–615). Springer.
- Hermanns, R. L., Sepúlveda, S. A., Lastras, G., Amblas, D., Canals, M., Azpiroz, M., Bascuñán, I., Calafat, A. M., Duhart, P., Frigola, J., et al. (2014). Earthquake-triggered subaerial landslides that caused large scale fjord sediment deformation: Combined subaerial and submarine studies of the 2007 aysén fjord event, chile. In *Engineering Geology for Society and Territory-Volume 4* (pp. 67–70). Springer.
- Highland, L., Bobrowsky, P. T., et al. (2008). *The landslide handbook: a guide to understanding landslides*. US Geological Survey Reston.
- Huang, B., Yin, Y., Liu, G., Wang, S., Chen, X., & Huo, Z. (2012). Analysis of waves generated by gongjiafang landslide in wu gorge, three gorges reservoir, on november 23, 2008. *Landslides*, 9(3), 395–405.
- Hungr, O., Leroueil, S., & Picarelli, L. (2014). The varnes classification of landslide types, an update. *Landslides*, 11(2), 167–194.
- Jansen, E., Befring, S., Bugge, T., Eidvin, T., Holtedahl, H., & Sejrup, H. P. (1987). Large submarine slides on the norwegian continental margin: sediments, transport and timing. *Marine Geology*, 78(1-2), 77–107.
- Jiang, L. & LeBlond, P. H. (1992). The coupling of a submarine slide and the surface waves which it generates. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 97(C8), 12731–12744.
- Jørstad, F. (1968). Waves generated by landslides in norwegian fjords and lakes. *Norwegian Geotechnical Institute Publ.*
- Kämpf, J. (2010). *Advanced ocean modelling: using open-source software*. Springer Science & Business Media.
- Keefer, D. K. (1984). Landslides caused by earthquakes. *Geological Society of America Bulletin*, 95(4), 406–421.
- Kritikos, T. & Davies, T. (2015). Assessment of rainfall-generated shallow landslide/debris-flow susceptibility and runout using a gis-based approach: application to western southern alps of new zealand. *Landslides*, 12(6), 1051–1075.
- Lastras, G., Amblas, D., Calafat, A. M., Canals, M., Frigola, J., Hermanns, R. L., Lafuerza, S., Longva, O., Micallef, A., Sepúlveda, S. A., et al. (2013). Landslides cause tsunami waves: insights from aysén fjord, chile. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 94(34), 297–298.

- Lastras, G., Amblas, D., Calafat-Frau, A., Canals, M., Frigola, J., Hermanns, R., Lafuerza, S., Longva, O., Micallef, A., Sepulveda, S., et al. (2014). Earthquakes, subaerial and submarine landslides, tsunamis and volcanoes in Aysén fjord, Chile. In *AGU Fall Meeting Abstracts*.
- Levin, B. W., Nosov, M., et al. (2009). *Physics of tsunamis*, volume 327. Springer.
- Liu, P.-F., Wu, T.-R., Raichlen, F., Synolakis, C., & Borrero, J. (2005). Runup and rundown generated by three-dimensional sliding masses. *Journal of Fluid Mechanics*, 536, 107–144.
- Liu, P. L.-F., Lynett, P., & Synolakis, C. E. (2003). Analytical solutions for forced long waves on a sloping beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 478, 101–109.
- Liu, P. L.-F., Synolakis, C. E., & Yeh, H. H. (1991). Report on the international workshop on long-wave run-up. *Journal of Fluid Mechanics*, 229, 675–688.
- Løvholt, F., Harbitz, C. B., & Haugen, K. B. (2005). A parametric study of tsunamis generated by submarine slides in the Ormen Lange/Storegga area off western Norway. In *Ormen Lange—An Integrated Study for Safe Field Development in the Storegga Submarine Area* (pp. 219–231). Elsevier.
- Lynett, P. & Liu, P. L.-F. (2005). A numerical study of the run-up generated by three-dimensional landslides. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 110(C3).
- Matsuyama, M. & Yeh, H. (2003). Effects of tsunami at Sissano lagoon, Papua New Guinea: Submarine-landslide, and tectonics origins. In *Submarine Landslides and Tsunamis* (pp. 151–162). Springer.
- Mazzanti, P. & Bozzano, F. (2011). Revisiting the February 6th 1783 Scilla (Calabria, Italy) landslide and tsunami by numerical simulation. *Marine Geophysical Research*, 32(1-2), 273–286.
- Miller, D. J. (1960). The Alaska earthquake of July 10, 1958: giant wave in Lituya Bay. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 50(2), 253–266.
- Miyagi, T., Yamashina, S., Esaka, F., & Abe, S. (2011). Massive landslide triggered by 2008 Iwate–Miyagi inland earthquake in the Aratozawa dam area, Tohoku, Japan. *Landslides*, 8(1), 99–108.
- Naranjo, J. A. (1991). Nueva erupción del volcán Hudson. *Revista geológica de Chile: An international journal on Andean geology*, 18(2), 183–184.
- Naranjo, J. A. (1993). La erupción del volcán Hudson en 1991 (46º S), Región XI, Aisen, Chile. *Servicio Nacional de Geología y Minería Boletín*, 44, 1–50.
- Naranjo, J. A., Arenas, M., & Clavero, J. (2009a). Lecciones de la crisis sísmica de Aysén 2007. *Santiago*, 22, S2_011.

- Naranjo, J. A., Arenas, M., Clavero, J., & Muñoz, O. (2009b). Mass movement-induced tsunamis: main effects during the patagonian fjordland seismic crisis in aysén (45° 25's), Chile. *Andean Geology*, 36(1).
- Naranjo, J. A. & SERNAGEOMIN (2007). Resumen sobre el seguimiento crisis sísmica en aysén 15 al 20 de abril de 2007 [informe inédito]. *Servicio Nacional de Geología y Minería*.
- Naranjo, J. A. & Stern, C. R. (2004). Holocene tephrochronology of the southernmost part (42° 30'-45° s) of the andean southern volcanic zone. *Revista geológica de Chile*, 31(2), 224–240.
- NVE (2014). Skrednett. nettside til Norges vassdrags- og energidirektorat. <http://www.skrednett.no/>.
- Okal, E. A. & Synolakis, C. E. (2003). A theoretical comparison of tsunamis from dislocations and landslides. *Pure and Applied Geophysics*, 160(10-11), 2177–2188.
- Oppikofer, T., Böhme, M., Nicolet, P., Penna, I., & Hermanns, R. (2016). Metodikk for konsekvensanalyse av fjellskred. *NGU Report 2016.047*.
- Oppikofer, T., Hermanns, R. L., Redfield, T. F., Sepúlveda, S. A., Duhart, P., & Bascuñán, I. (2012). Morphologic description of the punta cola rock avalanche and associated minor rockslides caused by the 21 april 2007 aysén earthquake (patagonia, southern Chile). *Revista de la Asociación Geológica Argentina*, 69(3), 339–353.
- Parlaktuna, M. (2003). Natural gas hydrates as a cause of underwater landslides: a review. In *Submarine Landslides and Tsunamis* (pp. 163–169). Springer.
- Recktenwald, G. W. (2004). Finite-difference approximations to the heat equation. *Mechanical Engineering*, 10, 1–27.
- Redfield, T., Hermanns, R., Oppikofer, T., Duhart, P., Mella, M., Derch, P., Bascuñán, I., Arenas, M., Fernández, J., Sepúlveda, S., et al. (2011). Analysis of the 2007 earthquake-induced punta cola rockslide and tsunami, aysén fjord, patagonia, Chile (45.3 ° s, 73.0 w). In *5th international conference on earthquake geotechnical engineering, Santiago, paper*, volume 12.
- Rem, Ø. B. (2016). The rock slope instability at tytefjell in vindafjord, Rogaland-hazard assessment for different failure scenarios. Master's thesis, NTNU.
- Renzi, E. & Sammarco, P. (2012). The influence of landslide shape and continental shelf on landslide generated tsunamis along a plane beach. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(5), 1503.
- Renzi, E. & Sammarco, P. (2016). The hydrodynamics of landslide tsunamis: current analytical models and future research directions. *Landslides*, 13(6), 1369–1377.

- Roberts, N. J., McKillop, R., Hermanns, R. L., Clague, J. J., & Oppikofer, T. (2014). Preliminary global catalogue of displacement waves from subaerial landslides. In *Landslide science for a safer geoenvironment* (pp. 687–692). Springer.
- Roberts, N. J., McKillop, R. J., Lawrence, M. S., Psutka, J. F., Clague, J. J., Brideau, M.-A., & Ward, B. C. (2013). Impacts of the 2007 landslide-generated tsunami in Chehalis Lake, Canada. In *Landslide science and practice* (pp. 133–140). Springer.
- Sammarco, P. & Renzi, E. (2008). Landslide tsunamis propagating along a plane beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 598, 107–119.
- Scheele, L., Yugsi Molina, F., Oppikofer, T., Hermanns, R., Kveldevik, V., & Glimsdal, S. (2013). *ICG P10 2006, tsunami modeling and prediction: modeling of the Aysén fjord rock slide tsunami*. Technical report, ICG report 3013-10-1, NGI report 20061073-02-R, p 19.
- Sepúlveda, S. (2016). Landslides and mudflows in the Chilean Andes. In *Chile-China Workshop Research on Natural Disasters, 26 August 2016*: Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica & National Natural Science Foundation of China.
- Sepúlveda, S. A. & Serey, A. (2009). Tsunamigenic, earthquake-triggered rock slope failures during the April 21, 2007 Aysén earthquake, southern Chile (45.5° S). *Andean Geology*, 36(1), 131–136.
- Sepúlveda, S. A., Serey, A., Lara, M., Pavez, A., & Rebolledo, S. (2010). Landslides induced by the April 2007 Aysén fjord earthquake, Chilean Patagonia. *Landslides*, 7(4), 483–492.
- Serey, A. (2011). Análisis de las remociones en masa generadas por el terremoto del fiordo de Aysén de 2007 (45,5 ° S). Master's thesis, Universidad de Chile.
- SERNAGEOMIN (2003). Mapa geológico de Chile: versión digital, (no. 4). 1:1.000.000. *Santiago: Servicio Nacional de Geología y Minería, Carta Geológica de Chile*. <http://www.ipgp.fr/~dechabal/Geol-millon.pdf/>.
- Synolakis, C. E., Bardet, J.-P., Borrero, J. C., Davies, H. L., Okal, E. A., Silver, E. A., Sweet, S., & Tappin, D. R. (2002). The slump origin of the 1998 Papua New Guinea tsunami. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 458 (pp. 763–789).: The Royal Society.
- Szymborska, W. (1976). *Wielka liczba*. Czytelnik.
- Tappin, D., Watts, P., McMurtry, G., Lafoy, Y., & Matsumoto, T. (2001). The Sissano, Papua New Guinea tsunami of July 1998—offshore evidence on the source mechanism. *Marine Geology*, 175(1-4), 1–23.
- Tappin, D. R., Watts, P., McMurtry, G. M., Lafoy, Y., & Matsumoto, T. (2002). Prediction of

- slump generated tsunamis: the July 17th 1998 Papua New Guinea event. *Sci. Tsunami Hazards*, 20(4), 222–238.
- Tinti, S. & Bortolucci, E. (2000). Analytical investigation on tsunamis generated by submarine slides. *Annali di Geofisica*, 43(3), 519–536.
- Tuck, E. & Hwang, L.-S. (1972). Long wave generation on a sloping beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(3), 449–461.
- Varnes, D. (1978). Landslides: analysis and control (special report-transportation research board, national research council; 176). *National Academy of Sciences, Washington, DC*, (pp. 1–234).
- Völker, D., Geersen, J., Behrmann, J. H., & Weinrebe, W. R. (2012). Submarine mass wasting off southern central Chile: distribution and possible mechanisms of slope failure at an active continental margin. In *Submarine Mass Movements and Their Consequences* (pp. 379–389). Springer.
- Ward, S. (2010). Tsunami. *encyclopedia of solid earth geophysics*.
- Ward, S. N. & Asphaug, E. (2000). Asteroid impact tsunamis: a probabilistic hazard assessment. *Icarus*, 145(1), 64–78.
- Watts, P. (2000). Tsunami features of solid block underwater landslides. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 126(3), 144–152.
- Watts, P., Borrero, J., Tappin, D., Bardet, J., Grilli, S., & Synolakis, C. (1999). Novel simulation technique employed on the 1998 Papua New Guinea tsunami. *Proceedings of 22nd General Assembly IUGG, Birmingham, UK JSS42, Abstract*.
- Watts, P., Grilli, S. T., Tappin, D. R., & Fryer, G. J. (2005). Tsunami generation by submarine mass failure. ii: Predictive equations and case studies. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 131(6), 298–310.
- Weiss, R., Fritz, H. M., & Wünnemann, K. (2009). Hybrid modeling of the mega-tsunami runup in Lituya Bay after half a century. *Geophysical Research Letters*, 36(9).
- Wieczorek, G. F. (1996). Landslide triggering mechanisms. *Landslides: Investigation and mitigation*, 247, 76–90.
- Yamada, M., Wang, G., & Mukai, K. (2013). The classification and features of earthquake-induced landslides in the world. In *Earthquake-Induced Landslides* (pp. 117–124). Springer.

Anexo A

A.1. Resolución de la integral (3.44)

La presente resolución de la integral (3.44) es mediante el uso de la expansión en serie de la función de Bessel de primer tipo de orden cero. A continuación se muestra la integral a resolver, donde cuyo requisito imperativo a cumplirse es $\beta > \alpha$.

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha x) \sin(\beta x) dx \quad (\text{A.1})$$

Se sabe que la expansión en serie de la función de Bessel de primer tipo de orden cero es de la siguiente manera:

$$J_0(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2k} \quad (\text{A.2})$$

La expresión (A.2) se reemplaza en (A.1), quedando.

$$\int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2k} \right] \sin(\beta x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \int_0^{\infty} x^{2k} \sin(\beta x) dx \quad (\text{A.3})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \frac{\Gamma(2k+1)}{\beta^{2k+1}} \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k} \frac{\Gamma(2k+1)}{\beta^{2k+1}} \cos(k\pi) \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha x}{2} \right)^{2k} \right] \sin(\beta x) dx = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2k} \cos(k\pi) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2k)!! (2k)!!} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} \right)^k (-1)^k \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{-\alpha^2}{\beta^2} \right)^k \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{\beta} \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{A.10})$$

$$\int_0^\infty \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\alpha x}{2} \right)^{2k} \right] \sin(\beta x) dx = \left(\beta^2 - \alpha^2 \right)^{-1/2} \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^\infty J_0(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad (\text{A.12})$$

Sin embargo, (A.12) bajo la condición $\beta^2 > \alpha^2$ queda expresada tal como se muestra a continuación:

$$\int_0^\infty J_0(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \frac{H(\beta^2 - \alpha^2)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \operatorname{sgn}(\beta), \quad (\text{A.13})$$

Finalmente se ha encontrado la expresión conocida de la integral (3.44).

A.2. Resolución de la integral (3.105)

Se tiene la siguiente integral primitiva a resolver:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad [a > 0] \quad (\text{A.14})$$

El polinomio $R(x)$ es conveniente factorizarlo de la siguiente manera para que sea más fácil

calcular la integral (3.105).

$$R(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \quad (\text{A.15})$$

$$= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c$$

$$= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (\text{A.16})$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (\text{A.17})$$

$$R(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - u^2 \quad (\text{A.18})$$

Donde:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad [\Delta > 0] \quad (\text{A.19})$$

$$u = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}} \quad (\text{A.20})$$

Teniendo ya una expresión como (A.18), a continuación se efectúa un cambio de variable con el fin de resolver analíticamente la integral (A.14), quedando.

$$y = x + \frac{b}{2a} \quad (\text{A.21})$$

Esto implica que la integral (A.14) se modifica, quedando la siguiente expresión.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 - u^2}} \quad (\text{A.22})$$

Se realiza el siguiente cambio de variable.

$$ay^2 = t^2 \implies t = \sqrt{a}y, \quad dt = \sqrt{a}dy \quad (\text{A.23})$$

Por lo tanto, la integral (A.22) queda así:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 - u^2}} = \int \frac{dt/\sqrt{a}}{\sqrt{t^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - u^2}} \quad (\text{A.24})$$

Finalmente se hace un último cambio de variable.

$$t = S |u| = S \sqrt{u^2} \iff t^2 = S^2 u^2, \quad dt = |u| dS \quad (\text{A.25})$$

La integral (A.24) queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - u^2}} = \frac{|u|}{\sqrt{a}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 u^2 - u^2}} \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{|u|}{\sqrt{a}} \frac{1}{|u|} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 - 1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 - 1}} \quad (\text{A.27})$$

Se puede identificar que el denominador de la integral (A.27) tiene la forma de una función hiperbólica. Asignando un cambio de variables apropiado, recurriendo al uso de la función coseno hiperbólico, dando el siguiente resultado.

$$S = \cosh(\theta), \quad dS = \sinh(\theta) d\theta \quad (\text{A.28})$$

A continuación se procede a reemplazar las variables antes mencionadas en la expresión (A.27).

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sinh(\theta) d\theta}{\sqrt{\cosh^2(\theta) - 1}} \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sinh(\theta) d\theta}{\sqrt{\sinh^2(\theta)}} \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sinh(\theta) d\theta}{\sinh(\theta)} \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int d\theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \theta + C \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arccosh}(S) + C \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dS}{\sqrt{S^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{a}}{|u|} \left(x + \frac{b}{2a}\right)\right) + C \quad (\text{A.34})$$

Donde: C corresponde a la constante de integración.

Sin embargo, se tiene la siguiente definición de la función inversa del coseno hiperbólico, donde la función arco coseno hiperbólico se relaciona con la función logaritmo natural de la

siguiente manera.

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \quad (\text{A.35})$$

Identificando términos, se tiene que la integral (A.34) es.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a}}{|u|} \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \sqrt{\frac{a}{u^2} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - 1} \right) + C \quad (\text{A.36})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a}}{|u|} \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{1}{|u|} \sqrt{R(x)} \right) + C \quad (\text{A.37})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{\sqrt{a}}{|u| 2a} (2ax + b) + \frac{1}{|u|} \sqrt{R(x)} \right) + C \quad (\text{A.38})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} (2ax + b) + \sqrt{R(x)} \right) + C \quad (\text{A.39})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{(2ax + b) + 2\sqrt{aR(x)}}{2\sqrt{a}} \right) + C \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(2\sqrt{aR(x)} + 2ax + b \right) + C \quad (\text{A.41})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2\sqrt{aR(x)} + 2ax + b \right| + C \quad (\text{A.42})$$

Finalmente se ha obtenido la integral primitiva cuya expresión es la ecuación (3.105), la cual cumple las siguientes condiciones, $a > 0$ y $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

A.3. Resolución de la integral (3.418)

Se tiene la siguiente integral a resolver:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} J_{\nu}(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx \quad (\text{A.43})$$

Una forma de resolver la integral (A.43) es mediante la expansión en serie de la función de Bessel cilíndrica de primer tipo, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\mu} J_{\nu}(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx &= \int_0^{\infty} x^{\mu} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \right] e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \int_0^{\infty} x^{\mu+\nu+2k} e^{-\alpha x^2} dx \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Para resolver (A.44) es útil hacer un cambio de variable, este cambio de variables hace que la integral a resolver sea más sencilla de resolver, resultando lo siguiente:

$$\alpha x^2 = t \iff x = \alpha^{-1/2} \sqrt{t} \quad (\text{A.45})$$

$$dx = \frac{1}{2} \alpha^{-1/2} t^{-1/2} dt \quad (\text{A.46})$$

Reemplazando (A.45) y (A.46) en (A.44), se tiene que:

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \frac{1}{2 \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)+k}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(\nu+\mu-1)+k} e^{-t} dt \quad (\text{A.47})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \frac{1}{2 \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)+k}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)+k-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.48})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2} + k\right)}{2 \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)+k}} \quad (\text{A.49})$$

$$= \frac{\beta^\nu}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^k \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2} + k\right)}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \quad (\text{A.50})$$

$$= \frac{\beta^\nu}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2} + k\right)}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \quad (\text{A.51})$$

$$= \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^k \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2} + k\right)}{k! \Gamma(\nu+1+k)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)} \quad (\text{A.52})$$

$$= \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)_k}{(\nu+1)_k} \quad (\text{A.53})$$

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{-\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (\text{A.54})$$

Finalmente se tiene que (A.54) corresponde a la primera solución de la integral encontrada en Gradshteyn & Ryzhik (2007). A continuación se encontrará la segunda solución de la misma

integral, en otras palabras, una solución equivalente, pero antes de eso hay que recurrir a una propiedad de la función hipergeométrica confluyente y a una propiedad de la función de Whittaker de primer tipo, las cuales se muestran a continuación:

$$\Phi(\delta, \gamma; z) = {}_1F_1(\delta; \gamma; z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \delta; \gamma; -z) \quad (\text{A.55})$$

$${}_1F_1(\gamma - \delta; \gamma; -z) = e^{-z} {}_1F_1(\delta; \gamma; z) \quad (\text{A.56})$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-z/2} \Phi\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right) \quad (\text{A.57})$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{z/2} \Phi\left(\mu + \lambda + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; -z\right) \quad (\text{A.58})$$

$$M_{\lambda, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{z/2} {}_1F_1\left(\mu + \lambda + \frac{1}{2}; 2\mu + 1; -z\right) \quad (\text{A.59})$$

Ya teniendo definidas propiedades importantes de las funciones hipergeométrica confluyente y de la función de Whittaker de primer tipo, se procede a encontrar la solución alternativa (ecuación (3.420)).

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(\beta)^\nu \Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{-\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (\text{A.60})$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \frac{(\beta)^\nu \beta}{2^{\nu+1} \beta \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+\mu+1)}} \exp\left(\frac{-\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\beta \alpha^{\frac{\mu}{2}} \Gamma(\nu+1)} \frac{(\beta)^{\nu+1}}{2^{\nu+1} \alpha^{\frac{1}{2}(\nu+1)}} \exp\left(\frac{-\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\beta \alpha^{\frac{\mu}{2}} \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\beta}{2\alpha^{\frac{1}{2}}}\right)^{\nu+1} \exp\left(\frac{-\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\beta \alpha^{\frac{\mu}{2}} \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(\nu+1)} \exp\left(\frac{-2\beta^2}{8\alpha}\right)$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\frac{\nu - \mu + 1}{2}; \nu + 1; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$$

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(\beta x) e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2})}{\beta \alpha^{\frac{1}{2}\mu} \Gamma(\nu+1)} \exp\left(\frac{-\beta^2}{8\alpha}\right) M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (\text{A.61})$$

Finalmente se ha encontrado la otra solución expuesta en Gradshteyn & Ryzhik (2007), que es equivalente a la expresión (A.54).

Anexo B

B.1. Filtro tipo *smooth*

El filtro tipo *smooth* de manera predeterminada es un filtro del tipo media móvil. No obstante, se puede recurrir a otros métodos, tales como: regresión local usando mínimos cuadrados lineal ponderados y un modelo polinomial de primer grado, gaussiana, filtro Savitzky-Golay.

La expresión matemática del filtro *smooth* es la siguiente:

$$w_m(i) = \frac{1}{2N+1} (w(i+N) + w(i+N-1) + \dots + w(i-N)) \quad (\text{B.1})$$

Donde, $w_m(i)$ es el vector columna que ha sido filtrada, $w(i)$ es el vector columna sin filtrar, i i-ésimo dato, N número de datos vecinos al punto i-ésimo, $2N+1$ es el espacio entre los datos filtrados.

A modo de ejemplo, se muestra a continuación al deslizamiento de tierra del evento frente a Isla Mentirosa modelado como una función parabólica, resultando lo siguiente:

$$\eta_1(x, t) = \frac{4A}{(x_2 - x_1)^2} (x - vt - x_1)(x_2 - x + vt) H((x - vt - x_1)(x_2 - x + vt)) \quad (\text{B.2})$$

Donde, $\eta_1(x, t)$ corresponde a la elevación de la superficie del agua, x_1 y x_2 es el punto inicial y final del deslizamiento, y A es la amplitud o espesor máximo del deslizamiento, v es la velocidad del deslizamiento de tierra.

Para el caso del evento frente a Isla Mentirosa, los datos son: $A = 50$ m; $x_1 = 0$ m; $x_2 = 1362$ m; $v = 105$ m/s.

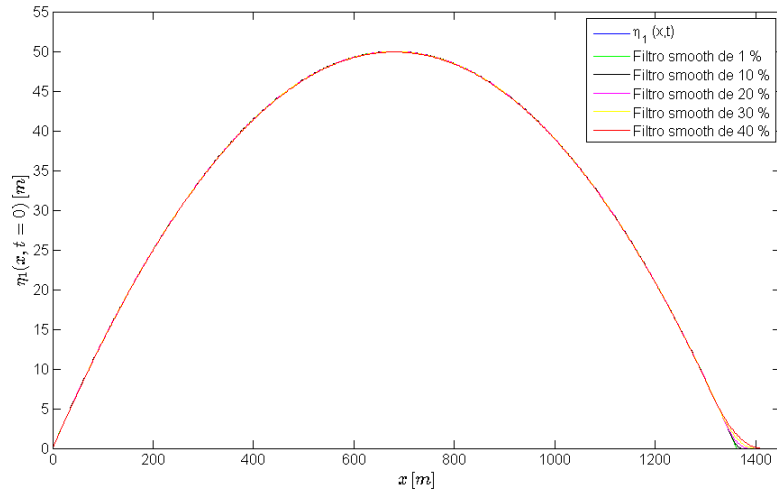


Figura B.1: Deslizamiento de tierra del evento frente a Isla Mentirosa modelado como la ecuación (B.2), junto con la misma ecuación (ecuación (B.2)) aplicando un filtro tipo *smooth* de un 1, 10, 20, 30 y 40 % de los datos del vector.

En la figura B.1 se muestra la ecuación (B.2), la cual describe el movimiento del fondo marino para el evento frente a Isla Mentirosa, junto con cinco curvas de $\eta_1(x, t)$ que fueron filtradas con una media móvil del 1, 10, 20, 30 y 40 % de los datos.