UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

Respuesta del realismo aristotélico al problema del acceso epistémico en filosofía de las matemáticas

Tesis para optar al Título de Licenciado en Filosofía

Nibaldo Patricio Lorca Améstica

Profesor Guía:

Dr. Cristian Soto

La presente investigación fue realizada dentro del marco de la investigación FONDECYT 11160324 "The Physico-Mathematical Structure of Scientific Laws", a cargo del Dr.Cristian Soto.

SANTIAGO DE CHILE

2018

Índice

Ilustraciones

Resumen

El debate metafísico en filosofía de las matemáticas se centra principalmente en la pregunta ontológica de si las entidades matemáticas existen o no. La respuesta positiva a la primera pregunta sería el realismo, mientras que la negativa, el anti-realismo. La caracterización tradicional del realismo es el platonismo, el cual sostiene que las entidades matemáticas existen de modo objetivo fuera del espacio-tiempo, siendo abstractas y a-causales.

En contra del platonismo surge el cuestionamiento epistémico de Benacerraf: ¿cómo conocemos a las entidades matemáticas? Es decir, se pregunta por el medio de acceso epistémico a las entidades matemáticas.

Mi objetivo en el presente trabajo es responder al problema del acceso epistémico de Benacerraf desde un tipo de realismo, a saber: el realismo aristotélico estructuralista. El propósito de esto es demostrar que el problema del acceso epistémico es puntualmente un problema para el platonismo y no para el realismo en general. Esto se logrará al responder dicho problema desde un realismo distinto al platonismo.

El capítulo uno comenzará con la exposición del contexto de la discusión en filosofía de las matemáticas, dentro del cual surge el problema del acceso epistémico. Presentándose así la tesis platonista tradicional (1.1), para después exponer el problema del acceso epistémico (1.2) y finalmente ver el impacto de dicho problema para el platonismo (1.3). Después, en el capítulo dos, se expondrá el realismo aristotélico estructuralista, que es la postura desde la cual me dispongo a responder al problema tratado previamente (1.2). El tercer capítulo se centrará en responder en responder al problema del acceso epistémico presentado en el capítulo uno, desde la tesis realista sostenida en capítulo dos, cumpliéndose así la tesis y el objetivo del trabajo. Finalmente, el último capítulo (Capítulo 4) será un conciso pero necesario análisis de objeciones que se pueden presentar contra mi tesis y conclusión, con sus correspondientes respuestas.

Introducción

Si reflexionamos sobre el estudio matemático, notaremos que ésta parece referir acerca de algo. Pareciera ser que hay un dominio acerca del cual tratan las matemáticas. Si alguien preguntase respecto del dominio de las matemáticas, la primera respuesta sería: *números, funciones, integrales, logaritmos,* etc. Sin embargo, de ahí nace el debate ontológico en filosofía de las matemáticas. Dicho debate se centra en el cuestionamiento metafísico de la ontología de las *entidades matemáticas*, a saber, la existencia o inexistencia del dominio de las matemáticas.

La pregunta metafísica tratada en el debate ontológico es el cuestionamiento de si las entidades matemáticas existen o no. De ello se desprenden otros cuestionamientos tales como cuál sería la caracterización ontológica de tales entidades matemáticas. La respuesta positiva a la primera pregunta sería el realismo, mientras que la negativa, el anti-realismo. En el presente trabajo me centraré en el realismo. La caracterización tradicional del realismo es el platonismo, el cual sostiene que las entidades matemáticas existen de modo objetivo fuera del espacio-tiempo, siendo abstractas y a-causales.

Desde esta caracterización platónica de las entidades matemáticas, surge el siguiente cuestionamiento epistémico: ¿cómo conocemos tales entidades? Justamente, Benacerraf (1973[1]) presenta su problema del acceso epistémico en contra de la tesis platonista. Dicho problema cuestiona cómo accedemos al conocimiento respecto de las entidades matemáticas, si estas son abstractas y sin interacción causal con nosotros.

Precisamente, mi objetivo será responder al problema de Benacerraf desde un tipo de realismo, a saber: el realismo aristotélico estructuralista. El realismo aristotélico en filosofía matemática sostiene que las entidades matemáticas existen en la realidad física. Así, las entidades matemáticas interactuarían dentro del espacio-tiempo (en oposición a la tesis tradicional del platonismo). La tesis sostenida aquí será que, si se acepta el realismo aristotélico, entonces se logra responder al problema del acceso epistémico. El propósito de dicho objetivo es demostrar que el problema no es el realismo en general a la hora de responder el cuestionamiento epistémico, sino el platonismo.

[1] Benacerraf 1983b, aunque el texto fue originalmente publicado en 1973 (Colyvan 2012, p. 9)

Primeramente, comenzaré con la exposición del contexto de la discusión en filosofía de las matemáticas, dentro del cual surge el problema del acceso epistémico. El capítulo uno se enfocará en dicho contexto presentando la tesis platonista tradicional (1.1), para después exponer el problema del acceso epistémico (1.2) y finalmente ver el impacto de dicho problema para el platonismo (1.3). Después, en el capítulo dos, se expondrá el realismo aristotélico estructuralista, que es la postura desde la cual me dispongo a responder al problema tratado previamente (1.2). Dicha postura realista tiene dos bases sobre la que se sostiene: una es el estructuralismo, a saber, la tesis que las entidades matemáticas son las estructuras matemáticas (2.1); y la segunda es el realismo aristotélico, la tesis que las entidades matemáticas existen en la realidad física (2.2). Por tanto, a lo largo del capítulo dos se revisarán ambas bases y se dará convergencia a estas para así presentar la tesis a partir de la cual responderé al problema del acceso epistémico. De este modo, el tercer capítulo se centrará en responder en responder al problema del acceso epistémico presentado en el capítulo uno, desde la tesis realista sostenida en capítulo dos, cumpliéndose así la tesis y el objetivo del trabajo. Finalmente, el último capítulo (Capítulo 4) será un conciso pero necesario análisis de objeciones que se pueden presentar contra mi tesis y conclusión, con sus correspondientes respuestas. Y con ello se concluirá satisfactoriamente el presente trabajo.

Capítulo 1: Platonismo y el problema del acceso epistémico

1.1. Platonismo

Cabe plantear la pregunta metafísica en filosofía matemática respecto de la ontología de aquello sobre lo que versa la matemática; a saber, sus *entidades*. Dicha pregunta ha sido planteada con anterioridad y discutida por la comunidad matemática y filosófica durante el último siglo (e inclusive antes). No obstante, aquel cuestionamiento ontológico respecto de las matemáticas no ha sido zanjado del todo.

Un primer punto polémico radica en la práctica matemática, puesto que la matemática no nos brinda información acerca del tipo de compromiso ontológico que tenemos que asumir respecto de las entidades con las que trabaja. Si recurrimos a la práctica matemática, en búsqueda de una respuesta al cuestionamiento ontológico anterior, notaremos que ella no nos da información acerca de si las entidades matemáticas existen o no, si tiene o no *x* composición interna, si se caracterizan ontológicamente de manera tal o cual, o cómo podemos llegar a conocerlas. Todos estos cuestionamientos son irrelevantes para la práctica matemática (Resnik 1997, p. 82). Téngase en cuenta cómo la matemática define los términos con los que trabaja caracterizándolos axiomáticamente. Por ejemplo, un número natural puede ser *cualquier cosa* que satisfaga los axiomas de Peano (Resnik 1997, p. 90), sin la necesidad de que aquello tenga una ontología particular. Por ello, la práctica matemática no necesita tratar ni responder a la problemática ontológica de sus entidades. No necesita establecer una ontología particular con la cual trabajar. Más adelante (2.1) volveré al punto de la caracterización axiomática cuando aborde el tema del estructuralismo, más precisamente, cuando trate el problema de la subdeterminación (2.1.1).

Ahora bien, no es un defecto de las matemáticas el hecho de que ellas no nos brinden información respecto de los compromisos ontológicos que debemos asumir con sus entidades. Pues este asunto es un problema filosófico (Resnik 1997, p. 91), no matemático. Le corresponde a la filosofía de la matemática responder dicho cuestionamiento metafísico.

Revisemos la caracterización ontológica de las entidades matemáticas. Si partimos de la interrogante de si las entidades matemáticas existen o no, las primeras dos respuestas opuestas que surgen son el realismo y anti-realismo. El primero aboga por la existencia de dichas entidades, y el segundo niega la existencia de las entidades matemáticas. En el presente trabajo me enfocaré principalmente en el realismo, y en concreto en el problema del acceso epistémico que se esgrimió en contra del realismo (un tipo de este).

La postura tradicional del realismo en filosofía de las matemáticas es el platonismo, el cual se sustenta en dos proposiciones bases: 1) las entidades matemáticas existen independientes de nosotros y de nuestra teorización matemática, a la par que están fuera del espacio-tiempo, siendo abstractas y a-causales[2]. 2) nuestras teorías matemáticas describen y reflejan *hechos* respecto de dichas entidades (Balaguer 1998, p. 5). Es decir, el platonismo en filosofía de las matemáticas postula que las matemáticas versan acerca de entidades abstractas[3].

Se puede retrotraer el platonismo tradicional al matemático Gödel (Horsten, *Spring* 2018). Gödel mantenía un paralelismo entre las teorías matemáticas y las teorías físicas. Por un lado, las teorías físicas describen hechos objetivos, independientes de nosotros, respecto de las entidades y propiedades físicas. Mientras que, por otro lado, las teorías matemáticas describen hechos objetivos respecto de las entidades matemáticas y sus propiedades (Horsten, *Spring* 2018). Sin embargo, las entidades matemáticas (a diferencia de las entidades físicas) no existirían en el espacio-tiempo, sino que serían abstractas y a-causales, estando fuera de la realidad física. La tesis de Gödel sirve para dejar patente una primera caracterización somera del platonismo.

Ahora bien, dado que el platonismo postula la existencia de entidades matemáticas abstractas, surge el cuestionamiento de cómo obtenemos el conocimiento acerca de tales entidades (Bueno, *Spring* 2014). Este problema fue planteado por Benacerraf en la forma del problema del acceso epistémico, el cual se puede resumir primeramente en el cuestionamiento respecto de cómo *llegamos* al conocimiento de las entidades matemáticas (Colyvan 2012, p. 10). Este problema plantea un desafío para el platonismo, a saber: dar cuenta de una epistemología plausible de las matemáticas concordante con su ontología. Resnik, posterior a Benacerraf, sostiene una correlación entre epistemología y ontología,

[2] Esta caracterización de las entidades matemáticas será la mentada a lo largo del texto cada vez que se refiera a las entidades matemáticas desde (o acorde con) la tesis platonista en filosofía de las matemáticas.

[3] Similar a lo explicado en la nota anterior (note 3), cuando a lo largo del texto me refiera al platonismo tradicional, se estará teniendo en mente esta caracterización del platonismo.

según la cual no se puede mantener una tesis ontológica por sí sola, sino que necesita de una epistemología plausible que le acompañe (Resnik 1997, p.85). Dicha correlación es una de las ideas donde se apoya el problema del acceso epistémico de Benacerraf, pues se pide dar cuenta epistémica de una tesis ontológica.

1.2. El problema del acceso epistémico

Separaré el problema del acceso epistémico en dos distintas formulaciones: la primera formulación se basa en la teoría causal del conocimiento y es dada por Benacerraf (Resnik 1997, pp. 83-84[4]); mientras que la formulación posterior es una *reformulación* de la primera y no se enfoca en la teoría causal sino en la naturalización del conocimiento matemático, y la explicación de la fiabilidad de nuestras creencias matemáticas (Field 1989; Colyvan 2012, p.11[5]).

Revisemos la primera formulación. El problema del acceso epistémico formulado por Benacerraf se establece dentro de la teoría causal del conocimiento. Dentro de esta teoría, para poder establecer que "el agente A sabe que P" se deben cumplir los siguientes criterios: 1) A cree que P, 2) P verdadera y 3) P causa la creencia de A, permitiendo así que la creencia de A acerca de P sea justificada (Colyvan 2012, p. 11). El desafío que plantea Benacerraf es dar cuenta de las entidades matemáticas dentro de la teoría causal del conocimiento. Dar cuenta de cómo las entidades matemáticas causan nuestras creencias sobre ellas (Colyvan 2012, p. 11). Y, por tanto, cómo accedemos al conocimiento acerca de dichas entidades (conocimiento entendido en términos causales).

El punto de inflexión que hace insoslayable este problema para el platonismo tradicional, es la caracterización misma que ofrece respecto de las entidades matemáticas (al describirlas como abstractas, estando fuera del espacio-tiempo).

Sin embargo, se puede cuestionar tanto la validez de la teoría causal del conocimiento como la validez de adscribir dicha teoría al conocimiento de las entidades matemáticas.

[4] Resnik reconstruye la argumentación causal de Benacerraf en 7 pasos. Colyvan también refiere y critica esta primera formulación causal (Colyvan 2012, pp. 11-12).
[5] Colyvan cita a W. D. Hart 1977, pp. 125-126.

Colyvan (2012 p.11) debate este punto acusando que la teoría causal fue originalmente planteada para dar cuenta del conocimiento empírico. Por ello, dicha teoría es inadmisible para entidades abstractas tales como las entidades matemáticas. Aquí el error yacería en exigir dar cuenta de las entidades matemáticas dentro de la teoría causal del conocimiento. El problema del acceso epistémico, planteado desde la teoría causal, sería lo errado. No sería una falencia del platonismo no poder responder adecuadamente a dicho problema.

Ahora bien, la segunda formulación del problema del acceso epistémico sostiene que la teoría causal del conocimiento no es lo fundamental ni el foco al que apunta el problema planteado por Benacerraf. Según Hart (Colyvan 2012, p. 11[6]) el punto incisivo del problema del acceso epistémico no es la causalidad en el conocimiento matemático, sino la posibilidad de naturalizar la obtención del conocimiento de las entidades matemáticas. Para el planteamiento de esta formulación, me enfocaré en la reformulación realizada por Field. Él señala que lo medular del problema del acceso epistémico radica en dar cuenta de la fiabilidad en la correspondencia entre las creencias acerca de las entidades matemáticas y los *hechos* de las entidades matemáticas. Así, el desafío de Benacerraf es el de dar cuenta de cómo nuestras creencias matemáticas reflejan los *hechos objetivos* que le atribuimos a las entidades matemáticas. Es dar cuenta del *mecanismo* que explicaría cómo nuestras creencias acerca de las distantes entidades matemáticas pueden reflejar los hechos acerca de ellas (Field, 1989 p. 26).

Un ejemplo análogo es el siguiente (véase Field 1989 pp. 26-27): imagínese a Z, quien afirma que sus creencias acerca de las ocurrencias diarias en una remota villa en Nepal son verdaderas, sin que Z diese cuenta de ningún *mecanismo* que explicase cómo se justifican sus creencias, ni cómo Z sabe que estas creencias se corresponden con las ocurrencias diarias de dicha villa. Por ende, se necesita explicar cómo (por cuál *mecanismo*, en la jerga de Field) obtenemos conocimiento matemático acerca de hecho o propiedad *X'* de las entidades matemáticas. Además, es necesario explicar cuál es el rol que cumplen las entidades matemáticas en la obtención del conocimiento acerca de ellas (Colyvan 2012, p. 12[7]).

[6] Colyvan cita a Hart 1977 pp. 125-126.
[7] Colyvan parafrasea a Field 1989.

El problema del acceso epistémico es el problema de explicar la posibilidad del conocimiento matemático. Al platonismo le resulta difícil responder esto, puesto que, según su caracterización de las entidades matemáticas, estas parecen no jugar un rol en la generación de las creencias matemáticas (Bueno, Spring 2014). Volvamos al platonismo. Más arriba referí a Balaguer (1998, p. 5) para presentar las dos proposiciones sobre las que se sostiene el platonismo: la primera es la caracterización mencionada que da el platonismo respecto de las entidades matemáticas; la segunda es que nuestra teorización matemática refleja hechos y verdades acerca de las entidades matemáticas referidas. De partida, la primera proposición genera dificultades para resolver al problema del acceso epistémico, pues su a-causalidad (junto a sus demás caracterizaciones) complica al platonismo para responder al desafío. No obstante, el problema se complica más aún para el platonismo si tomamos su segunda proposición en consideración. El platonismo no sólo postula la existencia abstracta de las entidades matemáticas, sino que nuestra teorización matemática da cuenta de estas entidades, ofreciéndonos conocimiento sobre ellas (Bueno, *Spring* 2014). Sin embargo, si el platonismo no da cuenta de cómo obtenemos conocimiento acerca de las entidades matemáticas, entonces difícilmente puede afirmar que nuestra teorización refleja verdades acerca de dichas entidades (cayendo así en un problema similar al ocurrido con las creencias *X* acerca de los hechos X’ de aquella remota villa en Nepal que Z tenía).

1.3. Respuesta insuficiente de parte del platonismo

La primera imagen que describimos del platonismo fue la tradicional establecida por Gödel en la década de 1940 (Cassou-Noguès, 2011). El platonismo de Gödel falla ante el desafío del problema del acceso epistémico, pues la respuesta de Gödel radica en la apelación a una *intuición matemática* (Horsten, *Spring* 2018). Se supondría que estaríamos en una relación cuasi-perceptual con las entidades matemáticas, por medio de esta intuición matemática. Esta respuesta no logra explicar cómo mantenemos la fiabilidad de nuestras creencias respecto de las entidades matemáticas. Es decir, no da cuenta del *mecanismo* exigido por Field en su segunda formulación.

Otra forma más reciente del platonismo es el *full blooded platonism* (FBP), sostenida en la segunda mitad de la década de 1990 (Horsten, *Spring* 2018). Esta concepción se diferencia del platonismo tradicional ante el cuestionamiento de *cuántas entidades matemáticas hay*, sosteniendo que existen todas las entidades matemáticas lógicamente posibles presentes en las teorías matemáticas consistentes (Balaguer 1998, p. 5).

Según el FBP, mediante la introducción de una teoría matemática consistente, la comunidad matemática deberá comprometerse ontológicamente con las entidades matemáticas presentes en dicha teoría consistente. Y, aquellas entidades tendrán las propiedades y características que dicha teoría les adjudica, obteniéndose así conocimiento acerca de aquellas entidades matemáticas (Horsten, *Spring* 2018). Por lo que, desde esta visión no hay problema del acceso epistémico a resolver. Pues, mediante la postulación de una teoría matemática consistente se nos ofrece conocimiento acerca de las entidades matemáticas allí presentes. En la versión del FBP descrita por Linsky y Zalta (Horsten, *Spring* 2018), las entidades matemáticas postuladas por una teoría matemática consistente tienen exactamente las mismas propiedades matemáticas que la teoría le atribuye. Así, el conocimiento de dichas propiedades adscritas a las entidades matemáticas en la teoría (que la entidad *x* tenga la propiedad *p*), viene dado ya por las postulación teórica consistente.

Sin embargo, nuevamente no se da cuenta de cómo sabemos que en efecto las entidades matemáticas tienen dichas propiedades descritas por la teorización. La consistencia de la teoría matemática no da ni justificación ontológica para con las entidades descritas ni explica la fiabilidad de la correlación entre nuestras teorías y las entidades matemáticas descritas. Ahí, el FBP cae en una petición de principio al partir de la idea que la consistencia teórica da justificación para el compromiso ontológico. Deriva una conclusión metafísica desde la consistencia teórico – epistémica, un paso que no justifica sino que sólo asume. Por tanto, falla al responder al problema del acceso epistémico.

La razón por la cual el problema del acceso epistémico afecta draconianamente al platonismo, es por la descripción y caracterización de las entidades matemáticas (Field, 1989, p. 27) que dicha tesis postula. La tradicional caracterización del platonismo de las entidades matemáticas es lo que hace que sea considerablemente difícil, para esta tesis, responder al problema del acceso epistémico.

En el capítulo uno me centré en presentar el contexto donde se sitúa la problemática, la formulación del problema del acceso epistémico, y en cómo afecta éste al platonismo. Se revisó cómo afronta el platonismo este desafío y se concluyó negativamente, ultimando que esta postura no responde satisfactoriamente al problema. Por lo tanto, ahora corresponde presentar la postura realista que afirmo que puede responder al problema del acceso epistémico y cómo lo hace. En el siguiente capítulo me centraré principalmente en la caracterización de este tipo de realismo. Y en el capítulo tres, el foco será cómo la postura realista, caracterizada en el capítulo dos, puede responder al problema del acceso epistémico presentado a lo largo de este primer capítulo.

Capítulo 2: Realismo aristotélico estructuralista

2.1. Estructuralismo

Considero que, antes de ahondar más en el debate ontológico en filosofía de las matemáticas, corresponde ver otra arista del tema: el cuestionamiento respecto de *cómo* son caracterizadas las entidades matemáticas. Previamente, sólo me referí a las entidades matemáticas sin reparar mayormente en la caracterización de estas. Ahora toca ver aquel debate.

El *slogan* del estructuralismo afirma que *la matemática es la ciencia de estructuras* (Shapiro 2000, p. 257). El estructuralismo en filosofía de las matemáticas sostiene que las entidades matemáticas no son objetos, sino estructuras. Dichas estructuras, estarían formadas por una colección de objetos matemáticos que están en una cierta configuración; y la estructura matemática tendría prioridad por sobre los objetos matemáticos (Colyvan 2012, p. 45). A modo de definición, un objeto matemático es un número, función o integral, mientras que una estructura matemática es una concatenación de varios objetos que se interrelacionan entre ellos en un cuerpo sistemático. Así, lo relevante en matemática, acorde con la tesis del estructuralismo, son las interrelaciones entre los objetos de la estructura, por sobre las propiedades o la composición interna que pueda tener un objeto de manera independiente a los demás con los que se relaciona (Shapiro 2000, p. 258).

Si uno revisa las matemáticas, se dará cuenta que aquello que se estudia en matemáticas son las estructuras matemáticas y no los objetos matemáticos de manera independiente. Acorde con esta interpretación filosófica, las estructuras matemáticas son el foco de estudio, en ellas se remarcan las interrelaciones entre los objetos (Resnik 1997, p. 201). Aquello tiene mayor relevancia para la labor matemática que las propiedades individuales de los objetos. De hecho, algunos afirmar que en matemáticas solo hay estructuras matemáticas y no objetos matemáticos con alguna composición interna, pues los objetos sólo serían posiciones en la estructura, carentes de toda caracterización fuera de ésta. Resnik es uno de quienes sostiene esta tesis (Shapiro 2000, p. 259)[8]. Entonces, siguiendo estas ideas, el estudio matemático no puede versar sobre la *composición interna* de los objetos

[8] Shapiro cita a Resnik, 1981.

matemáticos, sino exclusivamente sobre las estructuras matemáticas y las propiedades estructurales de las entidades matemáticas.

Tomemos como ejemplo el teorema de Pitágoras (imagen 1). Dicho teorema reza que la suma de los cuadrados de los catetos A y B de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa C. De este modo, si se tiene la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo, podría fácilmente calcularse la longitud del tercero incognito. Lo importante de este ejemplo es que dicho teorema es aplicable a *todo caso* que tenga la estructura de un triángulo rectángulo. El teorema será aplicable a toda instanciación de un triángulo rectángulo indiferente de las medidas de sus lados o de sus ángulos (siempre y cuando, siga conservando la estructura de un triángulo rectángulo).

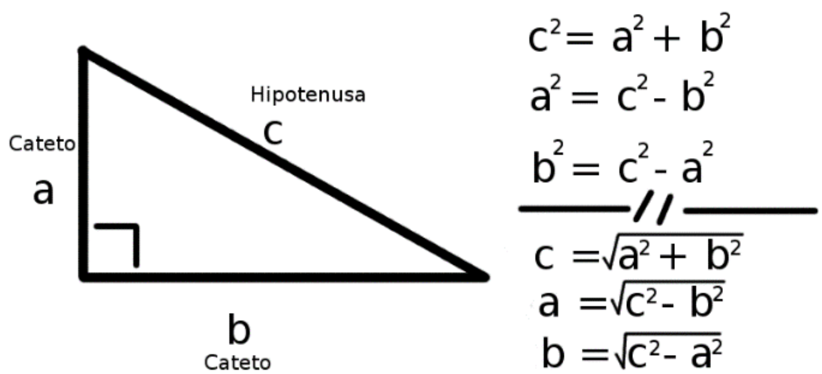

Imagen 1

El punto del ejemplo es señalar que los teoremas y las teorías matemáticas no son acerca de un único caso particular, sino acerca de todas las instanciaciones particulares que cumplan el *requisito* estructural de ser isomórficos con la estructura matemática sobre la cual se está enunciando. En el teorema de Pitágoras, el *requisito estructural* es que dicha instanciación tenga la estructura del triángulo rectángulo. Esto se debe a que los teoremas matemáticos se generan basándose en la estructura subyacente a una serie de casos particulares isomórficos entre sí. Se postula la teorización acerca de la estructura matemática la cual es instanciada por los casos particulares recién mentados. Precisamente, la estructura matemática, *común* de dichos casos particulares, es aquello en lo que se centra en estudiar la matemática (Colyvann 2012, p. 45). Por tanto, se puede explicar el modo en que opera el estudio matemático apelando a una comprensión tacita de las entidades matemáticas como estructuras matemáticas.

Un argumento a favor de una comprensión y caracterización estructuralista de las entidades matemáticas surge de otro problema propuesto por Benacerraf, a saber: el problema de la subdeterminación. Este problema fue planteado como un argumento en contra del compromiso ontológico respecto de las entidades matemáticas (Shapiro 2000, p.265). Sin embargo, no necesariamente se desemboca en dicha conclusión. Una comprensión estructuralista de las entidades matemáticas puede conllevar a una solución del problema de la subdeterminación (Colyvan 2012, pp. 12-14). Esto sin la necesidad de ser anti-realista respecto de las entidades matemáticas, sino manteniendo el realismo acerca de estas. Por ello aquí se empleará dicho problema como un argumento más a favor del estructuralismo en filosofía de las matemáticas.

Algunos miembros de la comunidad matemática (al igual que quienes se dedican a la filosofía de las matemáticas), se inclinan a defender una comprensión de los fundamentos de la matemática acorde con la teoría de conjuntos (Colyvan 2012, p.12). Con la teoría de conjuntos se puede reducir a conjuntos virtualmente casi todos los campos de estudio matemático. Se puede construir una teoría de conjuntos para caracterizar y representar a los números naturales, o también se puede reducir la aritmética a conjuntos. Gracias al hecho de que casi toda la matemática podría ser modelada acorce a alguna teoría de conjuntos, se llegó a considerar a los conjuntos como la caracterización ontológica de las entidades matemáticas (Shapiro 2000, p. 265). De este modo, una postura realista respecto de la ontología de las entidades matemáticas tendría ahora una respuesta para dar cuenta y explicar cuál es la caracterización ontológica de dichas entidades. No obstante, antes de poder caracterizar a las entidades matemáticas como conjuntos, se debe dar una solución al problema de la subdeterminación.

2.1.1. Problema de la subdeterminación

El problema de la subdeterminación es elaborado por Benacerraf en 1965 (Shapiro 2000, p. 265), y parte del contexto recién expuesto. El proyecto de reducir los fundamentos de la matemática a la teoría de conjuntos cae en el problema de que no hay *una* correspondiente teoría de conjuntos para cada campo matemático. Hay distintas teorías de conjuntos a las cuales puede reducirse un mismo campo matemático. Entonces ¿cómo se puede decidir entre las distintas reducciones a distintas teorías de conjunto de un mismo camp matemático? ¿Cuál es la reducción correcta que caracterice ontológicamente de mejor manera a las entidades matemáticas? Si las entidades matemáticas son conjuntos, entonces uno debe poder responder cuál reducción a conjuntos es la que representa correctamente la ontología de dichas entidades (Shapiro 2000, p. 265). Ante esto, la respuesta de Benacerraf es negativa.

El ejemplo clásico usado en la literatura para mostrar el problema de la subdeterminación, es la reducción de los números naturales a la teoría de conjuntos de Zermelo y de von Neumann (Colyvan 2012, p. 13; Shapiro 2000, p. 265). Primero veamos cómo ambas teorías caracterizan a los conjuntos. Partiendo con la teoría de Zermelo: 0 es un conjunto vacío[9] (0) y para cada número *n*, el sucesor de *n* es el conjunto unitario (*singleton*[10]) de *n*; por lo tanto 1 es {0}, 2 es {{0}}, 3 es {{{0}}} y así sucesivamente. Por consiguiente, todo número *n* en la teoría de Zermelo es un *singleton*. Ahora sigamos con la teoría de von Neumann: 0 también es un conjunto vacío (0), y cada número *n* es el conjunto de los antecesores de *n*; por lo que 1 es {0}, 2 es {0,{0}} (conjunto formado por 0 y 1), 3 es {0,{0},{0,{0}}} (conjunto formado por 0, 1 y 2) y así sucesivamente. Por consiguiente, y en oposición a la teoría de Zermelo, cada número *n* tiene *n* elementos que le constituyen. Así, el problema de la subdeterminación de Benacerraf radica en que, si se es realista respecto de los *objetos* matemáticos, se debe decidir cuál reducción a teoría de conjuntos de los números naturales es la que caracteriza correctamente la ontología de estos. E.g., si tomamos el número 2 ¿sería su caracterización ontológica {{0}} o {0,{0}}? Benacerraf concluye de manera negativa a este cuestionamiento pues no se tendría un criterio válido para discernir entre ambas reducciones a conjuntos, rechazando así el compromiso ontológico con los *objetos* matemáticos.

Sin embargo, el problema de Benacerraf se soluciona desde una perspectiva estructuralista (Colyvan 2012, p. 14). El estructuralismo defiende la primacía de las

[9] Conjunto sin elementos.

[10] Conjunto compuesto por un único elemento.

estructuras en el estudio matemático. Entonces, si aquello que importa para la matemática son las estructuras matemáticas, lo único que debe importar de los objetos matemáticos son las relaciones que estos mantengan con los demás objetos de la estructura que forman. Cualquier otra característica nos es indiferente. Por consiguiente, la caracterización ontológica de los objetos matemáticos no afectará a la matemática. Visto aritméticamente, la composición interna que se le adjudique a los números (por medio de la teoría de conjuntos con que se caractericen) no afecta a la labor matemática ni al uso de los números en el estudio matemático (Colyvan 2012, p. 13). Esto se explica mediante el hecho de que tácitamente se mantiene una compresión estructuralista de las entidades matemáticas en su estudio. Por ejemplo: tanto en el caso de que el número 2 sea {{0}} como si fuese {0,{0}}, este seguirá estando en la segunda posición de la estructura sucesiva lineal que es la estructura de los números naturales. Cómo se caracterice ontológicamente la composición interna de 2 no afectará a su *uso* en el estudio matemático, siempre y cuando el número 2 mantenga su posición en la estructura de los números naturales. Ciertamente, en el estudio matemático lo relevante para este es el posicionamiento de los objetos en la estructura que estudia. Por lo que, mientras *X* se mantenga *ocupando* la 2da posición en la estructura lineal de los números naturales, no importa si *X* se caracteriza como {{0}}, o como {0,{0}} o inclusive como Julio Cesar (Shapiro 2000, pp. 264-265), pues las posibles caracterizaciones para 2 no afectarán al empleo de este en el estudio matemático.

Benacerraf postula el problema de la subdeterminación con el objetivo de rechazar el realismo (compromiso ontológico) respecto de las entidades matemáticas (Shapiro 2000, p. 257 y p. 265). Sin embargo, no es necesario rechazar el realismo para solucionar el problema de la subdeterminación. Pues, la postura del realismo estructuralista también logra responder positivamente a dicho problema. Por ello, sólo se tendría que rechazar el compromiso ontológico con los objetos matemáticos, mas no necesariamente con las estructuras matemáticas.

2.1.2. *Ante rem, in rebus*

Con lo anterior se observó una diferencia entre una comprensión de las entidades matemáticas o como objetos matemáticos o como estructuras matemáticas, y se abogó por la postura estructuralista. En esta primera parte del capítulo 2 me he centrado exclusivamente en la comprensión estructuralista de las matemáticas. He evitado ahondar en el debate ontológico puesto que la defensa del estructuralismo no depende de una postura ontológica particular (se puede ser nominalista y estructuralista). No obstante, el objetivo que me concierne ahora es responder al problema del acceso epistémico desde una postura realista, por lo que ahora toca volver al debate ontológico para conjugar una comprensión estructuralista de las entidades matemáticas con un realismo.

Una diferenciación que corresponde destacar dentro del realismo estructuralista es entre el realismo *ante rem* y el *in rebus*. El realismo *ante rem* propone que las entidades matemáticas tienen prioridad e independencia ontológica respecto de sus posibles instanciaciones particulares (Shapiro 2000, p. 262). Un estructuralismo *ante rem* sostendría un compromiso ontológico con la estructura de forma independiente y prioritaria a las instanciaciones de ésta. Retomando el ejemplo del triángulo rectángulo, la estructura triangular-rectangular tendría independencia y primacía ontológica respecto de todos los otros triángulos rectángulos instanciados que haya.

Mientras que, en oposición, tenemos un realismo *in rebus*. Este realismo propone que las entidades matemáticas no tienen ni prioridad ni independencia ontológica respecto de sus instanciaciones particulares, sino que las entidades matemáticas dependerían ontológicamente de sus instanciaciones (Shapiro 2000, p. 262 y p. 66). De acuerdo con el estructuralismo *in rebus*, no existiría una estructura abstracta de trasfondo a las instanciaciones que ésta tuviese (a diferencia de como ocurriría de acuerdo con el estructuralismo *ante rem*), sino que la estructura existiría sólo *en* las instanciaciones de ésta (Horsten, Spring 2018). Volviendo al triángulo rectángulo, la estructura triangular-rectangular no existiría independiente de todos los triángulos rectángulos que la instancien, sino que sólo existiría *en* los triángulos rectangulares que la instancien.

Se puede notar, en la diferenciación entre *ante rem* e *in rebus*, un paralelismo con el debate de antaño de Platón y Aristóteles respecto de la existencia de las ideas, donde el primero sostendría un realismo *ante rem* de las ideas y el segundo un realismo *in rebus*. En filosofía de las matemáticas, el realismo *ante rem* ciertamente se aproxima mucho más al platonismo, mientras que el realismo *in rebus* se acerca más al aristotelismo matemático, que es el tipo de realismo que defenderé en este trabajo.

2.2. Realismo aristotélico

La postura realista aristotélica postula que las entidades matemáticas existen en las entidades físicas y no son separables de ellas (Shapiro 2000, p. 64). El realismo aristotélico rechaza la idea de dos reinos separados (sostenida por el platonismo), uno abstracto o matemático y uno concreto o físico, sino que sostendrá que la realidad física contendría a las entidades matemáticas; y que estas estarían instanciadas en las entidades físicas (Franklin 2014, p. 3). Por lo que, la convergencia entre estructuralismo y aristotelismo sostiene que las entidades matemáticas son estructuras que existen instanciadas en la realidad física. Así, las ideas matemáticas serían derivadas de la experiencia de percibir la estructura matemática que estaría en la realidad física. Nuestra idea del número seis o nuestra idea del triángulo vendrían de la experiencia de percibir conjuntos de seis objetos u objetos con forma triangular, respectivamente (Shapiro 2000, p. 75)

Para el aristotelismo matemático, las relaciones entre objetos físicos serían propiedades tan reales como cualquier otra propiedad física, y estas serían propiedades estructurales matemáticas (Franklin 2014, p. 15). Ejemplo: *ser-más-alto-que* expresa la relación entre dos objetos físicos. Aquella es una propiedad estructural matemática que es accesible por medio de la observación. Así, la relación que se daría entre objetos físicos sería una propiedad estructural presenta en la realidad física (Franklin 2014, p. 2).

Para poder comprender de mejor manera la *instanciación* de las estructuras matemáticas, tenemos que diferenciar metodológicamente[11] las estructuras matemáticas y las estructuras *no-matemáticas*.

Primero estarían los sistemas, que son definidos como una colección de objetos que están en una cierta configuración e instancian ciertas relaciones entre ellos. Es decir, una serie de objetos que en su configuración y concatenación instancian una estructura. El sistema

[11] Nótese que la diferenciación es metodológica (con el objetivo de una mejor comprensión del tema), ya que, en último, no es clara la diferenciación ontológica.

no es la estructura *per se*, sino que el conjunto de objetos instancian la estructura en su organización e interrelación. La estructura del sistema está constituida por las relaciones internas entre los objetos constituyentes del sistema (Franklin 2014, p. 16). Así, la estructura matemática se definirá como la forma o configuración de la estructura del sistema, donde se remarcan las interrelaciones entre los objetos del sistema; y a su vez, se ignoran las características de los objetos que no afectan a su interrelación con los demás (Shapiro, 2000. p-259). Por tanto, el sistema será la colección de objetos interrelacionados, mientras la estructura será la configuración en la que se encuentran interrelacionados dichos objetos. Cabe señalar que la estructura puede ser instanciada por varios sistemas, pero en cada caso será la misma estructura (Shapiro 2000, p. 263). A su vez, un mismo sistema puede instanciar más de una estructura dependiendo de cómo estén configurados e interrelacionados sus objetos[12]. Las entidades matemáticas existen en la realidad física, siendo ellas mismas físicas, por medio de existir instanciadas en los sistemas físicos. Es decir, la estructura matemática existe en la realidad física al estar instanciada en la configuración del sistema constituido por objetos físicos.

La abstracción formal de la estructura matemática es meramente para poder remarcar las relaciones estructurales y la configuración del sistema. Ontológicamente, el realismo aristotélico estructuralista, sostiene que las entidades matemáticas son estructuras existentes en la realidad. Su existencia se daría en la *instanciación* de las estructuras matemáticas en los sistemas físicos, a saber, en la configuración del conjunto de objetos que constituyen el sistema. De este modo, se da la caracterización el tipo de realismo que trataré en este trabajo. Ahora por tanto, corresponde explicar cómo el realismo aristotélico estructuralista responde ante el problema del acceso epistémico. Aquello se verá a continuación en el capítulo tres

[12] Véase 4.3.

Capítulo 3: Respuesta al problema

3.1. Regreso al problema del acceso epistémico

En la sección 1.2 se abordó el problema del acceso epistémico. Dicho problema se resumió en dos formulaciones. En la primera formulación, el problema se centra en la teoría causal del conocimiento, asumiendo que había que dar cabida a las entidades matemáticas en dicha teoría causal. Para el platonismo esto significaba una imposibilidad inmediata (o al menos una dificultad enorme), esto debido a la caracterización que hace de las entidades matemáticas[13]. Por la a-causalidad de las entidades matemáticas, estas no pueden jugar ningún rol directo en el acceso causal al conocimiento de estas. En esta primera formulación, la tesis aristotélica parte de mejor manera a la hora de responder. Pues, esta postura caracteriza a las entidades matemáticas existente en la realidad física, por lo que, en teoría, sí serían causales. Ahora bien, aún falta explicar cómo juegan un rol causal las entidades matemáticas en su acceso epistémico.

Asimismo, en la formulación posterior de Field (1989), el foco del problema del acceso epistémico era el de dar cuenta del *mecanismo* por el cual accedemos epistémicamente a las entidades matemáticas. Aquel *mecanismo* explicaría la fiabilidad que tenemos respecto de la correlación entre nuestras creencias acerca de las entidades matemáticas y los hechos respecto de ellas. Por tanto, toca explicar cómo pasamos de las entidades existentes en la realidad física (postura aristotélica) a tener conocimiento respecto de ellas. Explicando paso a paso el medio (el *mecanismo*) por el cual obtenemos las ideas respecto de las entidades matemáticas, se podrá responder al desafío de Benacerraf.

Primeramente, el realismo aristotélico caracteriza las entidades matemáticas como existentes en la realidad física mediante su instanciación en la configuración de los sistemas. Así, las entidades matemáticas son estructuras que existen en la realidad física. Al estar localizadas espacio-temporalmente en la realidad física, el acceso más básico y primero se tendrá que dar mediante la percepción. Mediante la percepción de los objetos constituyentes

[13] Véase 1.1 (nota 2, siendo más específico).

del sistema que instancia a la estructura matemática en su configuración, se podría dar el primer paso en el acceso epistémico de las entidades matemáticas.

Nótese lo siguiente: a pesar de que me refiera a la configuración del sistema como una *instanciación* de la estructura matemática, esto no es exactamente así. Pues, téngase en cuenta que si el sistema fuera una *instanciación* de la estructura matemática, entonces dicha estructura tendría prioridad ontológica sobre el sistema. Antes estaría la estructura matemática, y luego se daría el sistema que instanciaría dicha estructura. Así sería la situación si en estricto rigor el sistema *instanciase* a la estructura matemática. Lo anterior implicaría una perspectiva estructuralista pitagórica (véase 4.2): el trasfondo último de la realidad física sería matemático, por lo que la realidad sería la instanciación física de dicho trasfondo ontológico. Sin embargo, lo que se busca defender es un estructuralismo aristotélico, por lo que tanto lo matemático como lo físico vienen dados ontológicamente en conjunción. A saber, en el sistema se da simultáneamente la estructura. Ahora bien, la formalización matemática de la estructura se obtiene (por abstracción) desde el sistema que la instancia.

De momento tenemos sistemas (conjunto de objetos físicos), cuya configuración es la estructura matemática. El compromiso ontológico con las entidades matemáticas se daría en tanto estas son *instanciadas* en los sistemas físicos por medio de su configuración (siguiendo con el aristotelismo). Por tanto, el acceso epistémico a las entidades matemáticas se da mediante la abstracción de la estructura matemática desde la percepción de los objetos físicos constituyentes del sistema y la comprensión de la configuración estructural de dicho sistema.

Por *abstracción* referimos a un proceso mediante el cual obtenemos un modelo de la realidad en el cual se representan sólo ciertos aspectos y factores relevantes que se encuentran en la situación original de la realidad desde donde generamos dicho modelo. En este proceso, se excluyen una serie de factores y aspectos que no se consideraron relevantes a la hora de efectuar el proceso de abstracción (Chakravartty 2007, p. 190). En este caso, tenemos al sistema *X* en cuestión desde donde abstraemos la estructura matemática *X’* que está presente en la configuración de los objetos constituyentes del sistema *X*. Es decir, se percibe la configuración estructural del sistema *X*, y desde ella se pasa a la estructura matemática presente en el sistema *X* al ignorar los demás factores que no afecten (ni sean relevantes) para el estudio de la estructura ni de sus propiedades estructurales. De este modo, se dibuja un boceto del paso de acceso a la estructura matemática presente en el sistema físico en cuestión.

3.2. Percepción

Si partimos desde el realismo aristotélico: las entidades matemáticas están instanciadas en la realidad física. De este modo, podemos acceder a ellas mediante la percepción como primer paso (Franklin 2014, p. 18). Así, primero se percibiría sensorialmente los objetos constituyentes del sistema, luego se comprendería la relación entre los objetos del sistema (su configuración), para entonces acceder a la estructura matemática mediante el proceso de abstracción explicado en el párrafo anterior.

Una premisa base de la respuesta aristotélica al problema del acceso epistémico, es la afirmación de que nuestras capacidades sensoriales para percibir las entidades matemáticas operan y se desarrollan de modo similar a nuestra habilidad para percibir otras entidades físicas (Maddy 1992, p. 58). Es decir, las entidades matemáticas existen en la realidad física y nosotros tenemos la capacidad para percibirlas (para acceder) a ellas. En un aspecto más técnico, el sistema visual tiene la capacidad para percibir estructuras y propiedades estructurales, como la simetría por ejemplo (Franklin 2014, p. 182). Nuestra capacidad sensorial nos permitiría observar la configuración estructural de los objetos en un sistema; a saber, la instanciación de la estructura matemática; por ejemplo: cuando se reconoce el patrón hexagonal de un panal de abejas mediante la visión (aquel patrón es una configuración estructural geométrica instanciada en un sistema físico que podemos observar).

Tanto humanos como animales no humanos tienen la capacidad sensorial de obtener información en niveles básicos de las características estructurales y de las estructuras presentes en el mundo físico mediante la percepción (Franklin 2014, p. 178). Son capaces de reconocer configuraciones estructurales similares y categorizarlas como la misma estructura. Aquello se da porque se reconoce la misma estructura matemática (a saber, la misma configuración estructural) presente en distintos sistemas físicos que se han percibido.

Hasta el momento me he referido generalmente a la percepción directa de la estructura, pero esto no es necesariamente así. Siendo más exacto, lo que percibimos son los objetos constituyentes del sistema, y de ahí aprehendemos la estructura.

Imaginemos que se tiene un sistema X el cual está constituido por una cantidad n de objetos físicos (dígase, objeto Xn). Ahora supongamos a un sujeto Y, que es cognoscente y con capacidades de percepción sensorial (como un humano cualquiera). Entonces, Y se encuentra físicamente con los objetos Xn del sistema X. Mediante sus capacidades perceptiva, Y percibe a los objetos Xn y logra comprender la relación entre los distintos objetos Xn que los hace formar el sistema X. En este punto se logra una primera apreciación de la estructura (configuración) del sistema, puesto que el sujeto es capaz de percibir la relación estructural entre los distintos objetos Xn.

Anteriormente se mencionó que el humano es capaz de percibir la simetría. Supondré que no es muy ajeno a la realidad la afirmación de que podemos percibir la simetría (apelando al sentido común). Según lo anterior, cuando se percibe la simetría, primero se están percibiendo los objetos del sistema y se comprende la configuración de dichos objetos. A su vez, se perciben los objetos *del otro lado* y se comprende la configuración de estos, llegando a la conclusión de que ambos sistemas son espejos. De ahí se consideran simétricos[14]. Es el mismo proceso que se da en el movimiento de reflexión del plato cartesiano: donde una figura (estructura) se mueve reflexivamente (a modo de espejo) acorde con un eje cartesiano. Véase imagen 2 para mejor comprensión del movimiento cartesiano de reflexión.

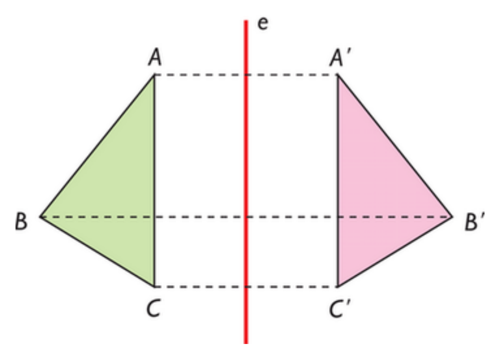

Imagen 2

Recapitulando: tenemos a un sujeto Y quien percibe los objetos Xn de un sistema X, para así comprender las relaciones estructurales de los objetos Xn, aprehendiendo de este

[14] Ocurre lo mismo cuando se concluye que un cuerpo es simétrico. Uno separa por un eje el cuerpo en dos mitades, para luego ver la relación estructural entre los componentes de ambas mitades y concluir que son espejos acorde con el eje. Por ejemplo, imagínese la máscara de un sarcófago: uno separa la máscara en dos mitades por el eje Y (plano cartesiano), luego se consideran los *rasgos faciales* y decoraciones de la máscara como objetos del sistema, así se comprende la relación estructural de estos (su configuración). Finalmente, se contrapone con la segunda mitad concluyendo que ambos lados son simétricos al ser espejos.

modo la estructura (configuración) presente en el sistema X. Tras esto, el sujeto Y abstrae un modelo de la configuración del sistema donde sólo se mantiene los aspectos estructurales. Es decir, Y abstrae la estructura matemática (expresada de este modo en lenguaje formal) que está instanciada en el sistema que percibió previamente. De este modo, Y accede a la estructura matemática, instanciada en el sistema físico, por medio de la abstracción de ésta, tras la comprensión de las interrelaciones de los objetos Xn que percibe.

Para poder percibir la estructura instanciada de un sistema, se necesita 1) percibir a los objetos Xn del sistema X como objetos discretos; y 2) reconocer las interrelaciones entre los objetos Xn, a saber, su configuración. Habiéndose cumplido ambos puntos, entonces se puede *percibir* (comprender) la estructura del sistema. El ser humano tiene la capacidad de realizar ambas acciones: percibir los objetos Xn como discretos y a su vez reconocer sus interrelaciones.

Franklin (2014, p. 171) presenta el ejemplo del gato para mostrar la capacidad de segmentar experiencias particulares en objetos discretos (percibir dichos objetos como unidades distintas y discretas del resto de estímulos sensoriales que percibimos), y la capacidad para enlazar y relacionar distintas experiencias y objetos. El ejemplo dicta que para que un infante pueda aprender que un gato se llama *gato*, antes de cualquier enseñanza ostensiva, el niño debe primero ser capaz de reconocer (y, por tanto, percibir) al gato como un objeto discreto distinto del *background* de otros objetos que percibe con la visión. Igualmente, debe ser capaz de distinguir mediante la audición el segmento particular de sonido *gato* cuando se pronuncia la palabra, del *background* continuo de distintos sonidos que percibe del entorno. Recién una vez que el niño es capaz de distinguir de manera discreta ambas experiencias aisladas de sus correspondientes *backgrounds*, el niño podrá enlazar y relacionar dichas experiencias.

Es decir, el ejemplo del gato presenta la capacidad de aislar experiencias concretas en objetos discretos y la habilidad para asociar objetos distintos, a saber, ser capaz de percibir la relación entre objetos discretos. Siendo el infante capaz de realizar esto en niveles simples, también podrá (con práctica y experiencia), hacer lo mismo con la percepción de sistemas más complejos que involucren interrelaciones mayores. Podrá percibir sistemas más complejos, es decir: podrá percibir conjuntos mayores de objetos e interrelacionarlos para así reconocer la estructura. Aquella es la afirmación principal del realismo aristotélico para responder al problema del acceso epistémico: que podemos *percibir* a las entidades matemáticas (a saber, las estructuras matemáticas), esto mediante los objetos Xn.

Sin embargo, la capacidad para percibir estructuras y propiedades estructurales depende en cierta medida de la experiencia y la práctica (Maddy 1992, p. 64), para que así el organismo se vuelva más sensible a percibir las estructuras y propiedades estructurales. Por ejemplo, algo similar ocurriría en el caso de una persona más experimentada con el manejo de tonalidades (un pintor o un diseñador gráfico): dicha persona será más sensible para identificar distintos matices y colores que una no experimenta en el manejo de tonalidades. El desarrollo de dicha sensibilidad mayor nacería de las constantes experiencias que involucraba la percepción de dichos objetos y propiedades. Ahora, otro ejemplo directamente estructural es el ajedrez: un jugador experimentado podrá reconocer con mayor facilidad las jugadas realizadas, las que se están realizando y las posibles a realizar, con solo mirar con atención el tablero de una partida en curso. Esto refleja: 1) la capacidad sensorial percibir la configuración dada en un sistema (la instanciación de la estructura y propiedades estructurales); 2) el hecho de que esta habilidad requiere práctica y entrenamiento, pues una persona ajena al ajedrez, viendo literal y objetivamente lo mismo, no observará lo mismo.

Siguiendo con el ajedrez, aquí se da el caso de la percepción de Xn para reconocer la estructura instanciada. Por lado, hay 6 tipos distintos de objetos: peones (8), torres (2), caballos (2), alfiles (2), un rey y una reina. Cada una de estas figuras (objetos del sistema) tiene su propia forma de moverse. Por tanto, distintas formas en las cuales pueden interrelacionarse, es decir: distintas configuraciones posibles[15]. Si miramos el tablero en mitad de una partida, veremos las figuras "desordenadas" sobre el tablero. Estarán "desordenadas" en el caso de que no conozcamos los movimientos de las figuras, y por tantos sus interrelaciones. En caso de sí conocerlas, seremos capaces de reconocer la configuración en la que se encuentran las figuras y por tanto la estructura instanciada. Véase imágenes 3 y 4:

[15] Respecto del tema de la posibilidad, véase 4.3.

Imagen 3

imagen 4

Ambos tableros instancian la misma estructura de jaque mate, y nosotros somos capaces de percibir dicha estructura. Como mencioné anteriormente, en estricto rigor percibimos las figuras, y como conocemos sus movimientos (y por tanto sus interrelaciones), comprendemos y reconocemos la estructura. Con el ejemplo del ajedrez se deja patente la capacidad para reconocer, mediante la percepción, la estructura matemática existente en el sistema físico. Es decir, el modo mediante el cual accederíamos a la estructura matemática (siguiendo la tesis aristotélica).

Con lo anterior, nótese que la percepción no es exclusivamente *ver* (literal y objetivamente) aquello esta frente a nosotros, sino que es percibir aquello que se *ve* de una forma particular o de otra (Franklin 2014, pp. 174-175). Similar a la distinción entre *ver* y *ver como*. En el ejemplo del gato, un caso será el percibir a un objeto discreto como *un gato*, mientras que otro será percibir una masa indiferenciable de objetos continuos. La experiencia es la misma pero lo observado es distinto. El estímulo sensorial que recibirá el sujeto en su retina será el mismo en ambos casos, pero aquello que procesará y por ende observará será distinto. Enlazando con el tema de la experiencia: si tomamos a una persona de ciudad (sin experiencia en la nieve) y a una persona que ha crecido en la tundra (acostumbrada al paraje ártico, como un cazador de la nieve e.g.) frente al mismo escenario, ellos observarían escenarios distintos. Supongamos que en el escenario nival que está frente a ellos hay una liebre ártica camuflada en la nieve. Ambos objetivamente mirarán el mismo escenario, pero lo más probable es que la persona con experiencia en la tundra vea a la liebre mientras que la persona sin experiencia no logre hacerlo. El input retinal de ambos es el mismo (Franklin 2014, p. 175), pero lo que perciben es distinto. Igualmente, ocurre lo mismo en casos de sistemas más complejos, como el ajedrez. Pues la experiencia jugando es aquella que permite reconocer la estructura instanciada en el sistema durante una jugada. *In sum*, somos capaces de percibir estructuras, y la experiencia favorece a algunos a la hora de reconocer y percibir la configuración de ciertos sistemas de mejor modo (o con mayor claridad).

Capítulo 4: objeciones y respuestas

En el capítulo 1 me centré en presentar el contexto en el cual surge el problema filosófico que me propongo a tratar, a saber: el problema del acceso epistémico y el contexto del debate ontológico respecto de las entidades matemáticas. Al finalizar dicho capítulo concluyo que el platonismo (1.1) es insuficiente para poder responder al desafío planteado (1.3). Por consiguiente a lo largo del capítulo 2 me dediqué a exponer y defender la postura del realismo aristotélico estructuralista. Y finalmente en el recién acabado capítulo 3, me dediqué a explicar cómo responde dicha postura al mentado desafío (y a argumentar a favor de su respuesta).

Ahora debería continuar la conclusión favorable por haberse cumplido lo propuesto. Sin embargo, antes de aquello, es pertinente resolver un par de posibles objeciones. Ese es el objetivo de este capítulo final, tomar resumidamente posibles objeciones que se podrían presentar a mi tesis defendida a lo largo de este trabajo. Para, posteriormente, dar las correspondientes respuestas, defendiendo así lo tratado hasta ahora.

4.1: "Se puede ser anti-realista"

En la sección 3.2 me centré especialmente en explicar el *mecanismo* mediante el cual pasamos de los conjuntos de objetos físicos, a reconocer sistema y a abstraer la estructura matemática. Sin embargo, este proceso puede ser secundado siendo anti-realista. Se podría rechazar el compromiso ontológico con las entidades matemáticas y sólo mantenerlo con las entidades físicas. Entonces, empleando el *mecanismo* que describí en el capítulo 3, explicar cómo desde la realidad física generamos la idea de las entidades matemáticas. Cuando se reconoce la configuración de los objetos físicos, se genera la idea de la estructura matemática. Por lo que no se necesita el compromiso ontológico con las entidades matemáticas, puesto que sólo podríamos tener la idea de la entidad matemática, que termina siendo un constructo que generamos desde la experiencia. Pero dicha idea es sólo eso. Aunque no necesariamente habría que rechazar la existencia de la entidad matemática, con esta objeción basta con simplemente no comprometerse y obviar el tema metafísico al respecto.

Esto opción podría ser argumentada y desarrollada de mucha mejor manera. Podría, a mi parecer, darse un interesante tesis epistémica respecto a cómo obtenemos la idea de las entidades matemáticas, sin comprometerse ontológicamente con ella. No obstante, aquí se obvió esta opción. La razón es metodológica. El objetivo de este trabajo fue responder al desafío de Benacerraf desde una postura realista, puesto que el problema del acceso epistémico fue esgrimido originalmente en contra del realismo (platonismo) y a favor de anti-realismo. Por lo mismo, el propósito del trabajo era responder al problema para mostrar que es el platonismo la postura que tiene dificultades epistémicas ante este desafío, y no el realismo en general.

Por tanto, responder desde el anti-realismo y abogar esta ruta anti-realista me hubiera desviado del foco y propósito del trabajo. Por mucho que filosóficamente acepta la viabilidad de debatir esta idea, debo despacharla por ahora por la mentada razón metodológica.

4.2: "La postura pitagórica también puede responder adecuadamente"

Nuevamente (como en 4.1) ésta es una objeción válida y correcta. El realismo aristotélico estructuralista no es la única postura en el debate ontológico que puede abogar por una epistemología plausible y responder al problema del acceso epistémico. De hecho, hay otra postura que puede hacerlo usando el mismo *mecanismo* que describí previamente (3.2). A saber, una postura pitagórica estructuralista.

Volviendo a la distinción *ante rem* e *in rebus* (2.1.2): un pitagoreanismo sería fuertemente *ante rem*, pues sostendría que el trasfondo último de la realidad es matemático. Acorde con dicha postura, las entidades matemáticas existen como el telón de fondo sobre el que se da la realidad. La realidad física se encuentra enmarcada en el trasfondo ontológico de entidades matemáticas. Por lo que la realidad física sí es *sensu stricto* una instanciación de lo matemático. Por tanto, los sistemas instanciarían en la configuración de sus objetos a la estructura matemática ya que serían productos de la estructura matemática en cuestión. La entidad matemática le daría ontología a los sistemas físicos. La relación entre el sistema físico y la entidad matemática se resumiría en que la primera es producto de la segunda.

Si con este nuevo postulado metafísico respecto de las entidades matemáticas revisamos el *mecanismo* expuesto para responder al problema del acceso, notaremos que es totalmente aplicable. De modo similar, percibimos los objetos físicos del sistema y comprendemos su configuración. Luego, desde ella llegamos a las estructuras matemáticas instanciada mediante la abstracción. Pero en este caso, la entidad matemática estaría en un *backgorund* ontológico de la realidad física y la configuración del sistema físico (la estructura matemática instanciada) será la punta del iceberg. Pues, aquel sería el modo en el cual, desde la realidad física, podemos apreciar un ápice del trasfondo ontológico: la realidad matemática.

De este modo, se responde al problema del acceso epistémico del mismo modo expuesto previamente (3.2.). Lo diametralmente opuesto es la afirmación metafísica que ambos realismos sostienen. Para el aristotelismo estructuralista que defiendo: en la realidad física se dan las estructuras matemáticas que percibimos en la configuración de los sistemas físicos (por medio de los objetos Xn del sistema). Para el pitagórico es lo contrario: primero está la realidad matemática la cual da lugar a la realidad física, y accedemos a lo matemático por medio de su instanciación en lo físico.

La razón por la cual quiebro a favor del aristotelismo estructuralista en lugar del pitagoreanismo es por su ontología más moderada, comparativamente hablando. La tesis pitagórica se basa en una afirmación metafísica muy fuerte y su panteón ontológico es mucho mayor. Por lo que, para evitar dicha afirmación metafísica y mantener una ontología más moderada, apoyo a la tesis aristotélica. Desde la segunda, las entidades matemáticas existen en la realidad física, y no se aboga por una metafísica matemática como la pitagórica. Se evita de este modo la afirmación metafísica del trasfondo matemático de la realidad. Con realismo aristotélico se mantiene una metafísica más acotada a lo actual físico. Usando una suerte de navaja de Ockham, favorezco al aristotelismo por ofrecer una mayor moderación metafísica y ontológica.

4.3: “¿Cuántas estructuras hay en un sistema?”

El punto de esta sección es un poco más complicado. La pregunta del título refleja un cuestionamiento respecto de la instanciación de la estructura en el sistema. El sistema es un conjunto de objetos que están en una cierta configuración (la instanciación de la estructura), por tanto, cabe cuestionar si un sistema sólo tiene una configuración.

Considero que un sistema puede, en acto, tener tanto una sola estructura como varias más. Es decir, no necesariamente debe haber una sola estructura por sistema, pero tampoco se encuentran instanciadas todas las estructuras posibles. En un sistema complejo con muchos objetos Xn que se encuentran interrelacionados de varias maneras y en distintos órdenes, probablemente haya varias estructuras instanciadas. Por lo que, en esta primera parte, sostengo que el sistema no se encuentra limitado a sólo una estructura, pero tampoco instancia una infinitud de estas. Depende de la complejidad del sistemas (la cantidad de objetos Xn y las interrelaciones que se den) la cantidad de estructuras que estarán instanciadas en acto.

Nótese que digo *en acto*, pues no estoy refiriéndome a las estructuras *posibles* de instanciar en un sistema. Precisamente, no me comprometo ontológicamente con la *posibilidad* (al final volveré a este punto). Por tanto, sólo estoy considerando las estructuras instanciadas en acto en el sistema.

Sin embargo, ahora uno puede preguntarse si uno percibe todas las estructuras instanciadas en el sistema. A esto respondo que no. Ontológicamente afirmo que en el sistema existen todas las estructuras que instancia en acto el sistema, no obstante no percibimos todas estas estructuras. Al final del capítulo anterior (3.2) hice referencia a que la experiencia juega un rol para reconocer de mejor modo las estructuras. Justamente, uno percibe los objetos físicos constituyentes del sistema y reconoce las interrelaciones entre estos objetos, de ahí deriva el reconocimiento y aprehensión de la estructura. Por tanto, la percepción de la estructura está determinada por la capacidad y disposición del sujeto cognoscente a percibirla. En el caso del ajedrez, una persona reconoce la estructura de un jaque-mate porque conoce los movimientos de las figuras y por tanto reconoce la estructura instanciada. En cambio, una persona que no sabe de ajedrez no percibirá la estructura ahí instanciada, pero aquello no significa que la estructura no exista. El compromiso ontológico es con las estructuras en acto; que no seamos capaces de reconocer dicha estructura no implica que ésta no exista. Por tanto un sistema puede tener una o varias estructuras instanciadas en acto, pero el sujeto al no conocer las interrelaciones de los objetos (o inclusive no ser capaz de percibir o reconocer los objetos), no podrá percibir la estructura. Otro ejemplo más esclarecedor será el de una partida de *shogi* (imagen 5).

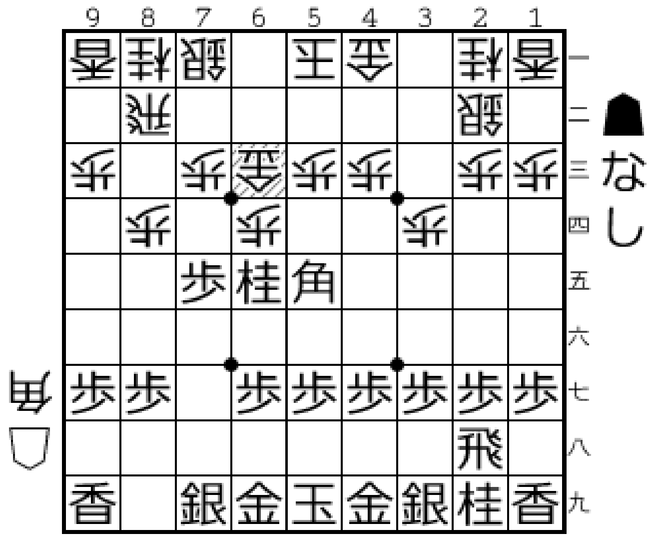

Imagen 5

El *shogi* es un deporte de mesa japonés, un pariente muy cercado del ajedrez (de ahí la razón de usarlo como segundo ejemplo). El *shogi* se juega con 20 piezas por lado (a diferencia de las 16 del ajedrez) y cada una de estas tiene escrito el ideograma japonés con su nombre, señalando así qué pieza es (el mismo rol que cumple la forma de las figuras en el ajedrez). Estas piezas son: un rey, generales de oro (2), generales de plata (2), caballos (2), lanceros (2), un alfil, una torre y peones (9). Al igual que el ajedrez, gana quien arrincona al rey enemigo, llevándolo a una posición en la cual le es imposible evitar ser capturado. Hasta aquí la caracterización básica del *shogi*.

La jugada de la imagen superior se llama *Onigoroshi*. El *Onigoroshi* es una estrategia donde se crea una apertura *Kishuu* (sorpresiva) con la torre dinámica y se realiza un ataque rápido con el general dorado contra el rey enemigo. En cierto sentido, es similar a la estrategia del mate pastor en el ajedrez. De hecho, para ilustrar mejor el punto, comparemos la jugada *Onigoroshi* del *shogi* con mate pastor del ajedrez.

El mate pastor es una jugada clásica del ajedrez. Es un jaque mate rápido que se realiza abriendo con el peón de E2 para luego atacar junto con el alfil y la reina, de ese modo se entra en la formación enemiga con la reina y ésta, a su vez, es protegida por el alfil, pudiendo conseguirse un jaque mate. Véase imagen 6.

Imagen 6

En la imagen 6 se puede apreciar la jugada que recién describí. Si comparamos ambas jugadas, asumo que el lector podrá reconocer la estructura de la jugada en la imagen del tablero de ajedrez pero no en la de *shogi*. Estoy asumiendo que el lector es una persona occidental que sí sabe cómo jugar ajedrez pero no sabe de *shogi*. Es más, asumo que no sabe japonés y no es capaz de reconocer los *kanjis* de las piezas, por lo que no puede diferenciar cada pieza.

Describí ambas jugadas de modo muy similar, explicando de modo vago cómo se desarrolla ésta. Sin embargo, si miro el tablero de ajedrez, soy capaz de percibir de modo distinto cada figura y reconocer las interrelaciones entre ellas, reconociendo así la estructura del mate pastor. Sin embargo, creo que la mayoría (al ser occidentales) si miramos la imagen del tablero de *shogi* no seremos capaces ni de distinguir las figuras (al no reconocer los ideogramas) ni de comprender las interrelaciones entre las piezas, esto por lo anterior más el hecho de desconocer los movimientos de estas. Por lo que, al mirar el tablero del *shogi*, no se podrá reconocer la estructura instanciada en acto del *Onigoroshi* como sí se reconoce la estructura del mate pastor en su respectiva imagen.

El punto de ambos ejemplos anteriores es lo que referí párrafos atrás: el que no podamos percibir la estructura instanciada en acto en el sistema, no implica que dicha estructura no exista. La sección 4.3 parte con el cuestionamiento de cuántas estructuras existe en un sistema, sostengo que hay todas las que el sistema (acorde a su complejidad) permita instanciar en acto. Luego pase al cuestionamiento de si percibimos todas las estructuras de un sistema. Respondo que no. El sujeto que reconoce la estructura, en tanto sujeto cognoscente, tiene limitaciones epistémicas. En 3.2 se explicó cómo se reconoce la estructura instanciada en un sistema. Sin embargo, que el sujeto no reconozca la estructura no implica que ésta no exista. Ahí entra el ejemplo del *shogi*. Una persona que sabe de *shogi* podrá reconocer la jugada del *Onigoroshi* en la imagen anterior, pero nosotros no[16]. Nosotros reconocemos la estructura del mate pastor en el ajedrez[17], no obstante eso no significa que la estructura del mate pastor sí exista y la del *Onigoroshi* no. Ambas estructuras existen en acto en la jugada, el que podamos reconocerlas o no, no implica su existencia.

Ahora bien, corresponde volver a un punto más problemático que dejé atrás: la existencia de las estructuras posibles. Siendo conciso, no hay una respuesta clara. Pero este debate, no acaece sólo a este tópico.

Personalmente, no me comprometo ontológicamente con las entidades matemáticas posibles, sino sólo con las que se dan en acto. Respecto del cuestionamiento de cuántas estructuras hay en un sistema, hay que separar las estructuras en acto y las posibles. Alguien podría argumentar y comprometerse ontológicamente con todas las estructuras posibles de un sistema. En el caso del ajedrez, sería comprometerse con todas las estructuras de todas las posibles jugadas que se podrían realizar (básicamente, todos los posibles movimientos de las piezas. Pero en este caso, yo me inclino a rechazar esta tesis, por lo que sólo me refiero a las estructuras que están en acto en el sistema. Aunque, ésta es mi postura y mi caracterización del realismo aristotélico. Supongo que puede haber alguien quién defienda el realismo aristotélico y se comprometa con las entidades matemáticas posibles. Por mi parte, evito el compromiso con las estructuras no actuales. Las estructuras que podamos concebir pueden ser constructos derivados de la percepción de las estructuras actuales físicas.

El debate respecto de la metafísica y los compromisos ontológicos respecto de la posibilidad no puede ser zanjado en este ensayo. El debate es más amplio. No argumento que sólo existan las estructuras instanciadas en acto, sino que aquello es lo que yo personalmente considero. No tengo los argumentos para defender dicha postura ahora. Sin embargo, este debate no es relativo exclusivamente a este tópico sino que va mucho más allá: al debate

[16] Atrás mencioné que asumo que el lector es una persona occidental y por tanto no sabe de *shogi*.
[17] Nuevamente, párrafos atrás asumí que el lector sí sabe de ajedrez (a diferencia del *shogi*).

metafísico respecto de la modalidad. Por tanto, sólo puedo mencionar la amplitud de este conflicto y cómo afecta a las tesis ontológicas en filosofía matemática; y en el escenario de este desafío principalmente. Dar una respuesta completa y mejor argumentada exige un estudio más a fondo sobre la ontología de la modalidad matemática, tema que no es el propósito de este ensayo y requeriría su propio estudio. Por lo que, llegado a este punto de la objeción, debo admitir que la comparto y no tengo una respuesta que pueda argumentar, sólo una consideración personal.

Conclusión:

Al finalizar el capítulo 3, se respondió al problema del acceso epistémico propuesto por Benacerraf. Pues se explica el rol que las entidades matemáticas cumplen en la generación de las creencias respecto de ellas y el mecanismo mediante el cual obtenemos tales ideas. En resumen: tenemos sistemas compuestos de objetos físicos, dichos objetos se encuentran interrelacionados en cierta configuración. La estructura matemática estaría presenta en la configuración del sistema. Nosotros (como sujetos cognoscentes) somos capaces de percibir dicha configuración. Se percibe la estructura tras percibirse los objetos y comprender sus interrelaciones, así se aprehende la estructura. Luego, mediante la abstracción (proceso explicado en 3.1), accedemos epistémicamente a la estructura matemática formalizada, que es la configuración del sistema que previamente percibimos.

Este proceso responde a la petición de causalidad de Benacerraf y al *mecanismo* solicitado por Field (1.3). Este proceso de aprehensión de la estructura da cuenta del rol que cumplen las entidades matemáticas en la generación de nuestras creencias respecto de ellas. De este modo, a lo largo del capítulo 3 se logró responder al problema establecido en 1.2. A su vez, en el capítulo 4 se dio cuenta de posibles objeciones que podría tener mi tesis defendida en el tercer capítulo. Así, se da un cierre más redondo a lo que se trabajó a lo largo de la tesis.

Ahora, al final, se respondió al problema del acceso epistémico desde el realismo aristotélico estructuralista. Este era el objetivo de la tesis inicial al comienzo del trabajo. A cumplirse el objetivo, se logra demostrar lo esperado en el propósito: el problema del acceso epistémico no es una dificultad para el realismo en general, sino para el platonismo; puesto que otras posturas realistas pueden resolver este problema, como fue con el realismo aristotélico. La hipótesis inicial del trabajo, por mor del propósito y objetivo, fue que el realismo aristotélico logra resolver el problema del acceso epistémico, y aquella empresa *llegó a buen puerto*. Concluyéndose así como resuelto lo pedido inicialmente en la formulación de la tesis.

Bibliografía:

Balaguer, M. 1998. “Introduction”. *Platonism and anti-Platonism in mathematics*. New York, Oxford University Press

Bueno, O. "Nominalism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/nominalism-mathematics/>.

Cassou-Noguès, P. « On Gödel’s “Platonism” », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 15-2 | 2011, mis en ligne le 01 septembre 2014, consulté le 10 octobre 2018. URL : < http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/661 >

Chakravartty, A. (2007). *A metaphysics for scientific realism*. New York: Cambridge university press.

Colyvan, M. 2012. *An introduction to the philosophy of mathematics*. Sidney, Cambridge University Press.

Field, H. 1989. “Introduction: Fictionalism, Epistemology and Modality”, *Realism, Mathematics and Modality*, pp 1-30. New York, Blackwell.

Franklin, J. 2014. *An Aristotelian realist philosophy of mathematics: mathematics as the science of quantity and structures*. London, Palgrave Macmillan.

Horsten, L. "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/philosophy-mathematics/>.

Linnebo, Ø. "Platonism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>.

Maddy, P. 1992. *Realism in mathematics*. New York, Oxford University Press Resnik, M. 1997. *Mathematics as a science of pattern*. New York, Oxford University Press.

Shapiro, S. 2000. *Thinking about Mathematics*. New York, Oxford University Press.