UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MODELO DE EQUILIBRIO URBANO GENERAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA, MENCIÓN TRANSPORTE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

TOMÁS ALEJANDRO VALLEJOS MUÑOZ

PROFESOR GUÍA:
FRANCISCO MARTÍNEZ CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JORGE RIVERA CAYUPI
LEONARDO BASSO SOTZ
RICARDO HURTUBIA GONZALEZ

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Proyecto FONDEF D10I-1002
"Tecnología Avanzada para Ciudades del Futuro"

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
TÍTULO DE: Ingeniero Civil
GRADO DE: Magíster en Ciencias de la Ingeniería
Mención Transporte
POR: Tomás Alejandro Vallejos Muñoz
FECHA: 2018
PROFESOR GUÍA: Francisco Martínez Concha

MODELO DE EQUIIBRIO GENERAL URBANO

El presente trabajo de tesis aborda el desafío de formular un modelo integrado, que contenga un equilibrio entre los sistemas de transporte, uso de suelo e intercambio de bienes y servicios.

Para este propósito, se utiliza como base el modelo RELUTRAN (Anas y Liu, 2007), que formula un equilibrio en los sistemas de uso de suelo, transporte y consumo de bienes y servicios; en este caso, se asume que los agentes se localizan maximizando su utilidad, por lo tanto, es un modelo tipo "Choice"; el modelo del sistema de transporte se basa en "Stochastic cost minimization model" (Daganzo y Sheffi, 1997) y no tiene demostración de convergencia ni de unicidad de la solución. Sin embargo, iterativamente se llega a una solución.

Luego, el modelo propuesto en esta tesis recibe el nombre de MEGU (Modelo de equilibrio general urbano), se asume que el mercado del suelo se transa mediante remates, por lo tanto, es un modelo tipo "Bid". Se definen dos tipos de agentes, "Hogares" y "Firmas"; los primeros maximizan una función de utilidad tipo Cobb-Douglas aleatoria, mientras que las Firmas, minimizan una función aditiva de costos; en ambos casos el término de error para las funciones de disposición a pagar resultantes, distribuye Fréchet (Mattsson. et al., 2011). El trade-off consiste en que los hogares demandan suelo, consumen bienes y servicios y ofertan mano de obra; mientras que las firmas demandan suelo, producen bienes y servicios y demandan mano de obra. Para la oferta inmobiliaria, se utiliza como referencia la formulación propuesta en MUSSA (Martínez y Donoso, 2010), pero con una distribución de error tipo Fréchet. El sistema de transporte que se utilizará está basado en el MTE (Baillon y Cominetti, 2008).

Se diseña un algoritmo de iteración y solución secuencial por etapas, que comienza determinando las variables representativas del sistema de transportes dada la localización de los agentes, luego encuentra la solución para el sistema de intercambio de bienes y servicios y finalmente actualiza la localización de los agentes.

Con el fin de verificar el correcto funcionamiento de la formulación propuesta, se diseñan escenarios de simulación que permiten analizar casos tipo y se programa una rutina específicamente desarrollada para M.E.G.U., que se aplica en una ciudad ficticia.

Finalmente, se reportan las principales conclusiones obtenidas y se sugieren posibles líneas de investigación futura.

A mi madre
Por confiar siempre en mi.
Sin ti, nada de esto hubiera sido posible

Agradecimientos

Poooor fiiiin llego el momento, con esta página pretendo cerrar este ciclo, que me costó más tiempo de lo esperado, pero lo importante es disfrutar el viaje ¿verdad?. Terminando esta etapa quiero agradecer a todos quienes de una u otra manera me fueron parte de este camino.

Para partir, y porque fueron mi apoyo más importante, quiero agradecer a mi familia. A mi madre, por siempre velar por nosotros, incluso postergándose a sí misma, por superar todas las pruebas que la vida le puso por delante, por siempre estar dispuesta a dar amor y comprensión. A mi padre, por enseñarme el valor de la paciencia y mis primeras armas en las matemáticas. A mis hermanos; René, por ser mi compañero de juegos y aventuras, por enseñarme el valor del esfuerzo y por ser un ejemplo de superación y constancia; a Pedro por las alegrías y el cariño entregado, por la complicidad que se obtiene en el mismo humor, por los buenos recuerdos.

A Daniela, por ser un apoyo fundamental en esta última etapa, por ser mi compañera, en quién puedo encontrar compresión, felicidad y afecto. Gracias por la confianza entregada y ser el empuje y motivación cuando me hacía falta.

A mis tíos y primos, por todas las etapas que compartimos, especialmente a Tío Jano por ser un constante apoyo, a Tía Pati y Tío Chino por haberme recibido en su hogar. A Mati y Alejandro, con quienes viví, por la confianza entregada. A Andrea, por todos los consejos. A Maribel, por permitirme quedarme en casa de sus padres durante la escuela de verano, este hito fue fundamental en mi desarrollo académico, gracias.

A mis amigos de primer año, a Seba F., Leo Massu, Francisco P., Agustín, Sebastián H., Guga, Miralles, Caco y Chano, gracias por todos los buenos momentos vividos, los mejores recuerdos de la universidad son con ustedes. A mis compañeros de transporte, Néstor G., Diego S., Diego C., Margarita, César N, Cristián H. y César V, por las aventuras, fiestas, congresos y tardes de estudio, gracias por ayudarme a entender la belleza de la ingeniería de transporte.

A mis amigos de la vida, Jorge S., Pablo B., Lalo, Felipe, Pato y Andrea P. Sin ustedes esto hubiera sido más aburrido y quizás más corto jaja. Gracias.

Finalmente, pero no por eso menos importantes, gracias a los profesores de la división de transporte. A Francisco Martínez, por la paciencia y los conocimientos entregados y a Sergio Jara, gracias por el tiempo empleado en nuestra formación, por compartir almuerzos y charlas.

A todos, gracias eternas.

Tabla de Contenido

1. Introducción **1**

2. Revisión Bibliográfica **5**
2.1. Introducción 5
2.2. Nociones sobre uso de suelo 5
2.2.1. Mercado de remates (Enfoque bid) 5
2.2.2. Maximización de la utilidad (Enfoque choice) 6
2.2.3. Equilivalencia Bid-Choice 6
2.3. Modelos de simulación 7
2.3.1. Mussa 7
2.3.2. RELUTRAN 10
2.3.3. MITUS 16

3. Formulación del Modelo **20**
3.1. Introducción 20
3.2. Estructura del modelo de uso de suelo 21
3.2.1. Comportamiento de los hogares 21
3.2.2. Comportamiento de las firmas 26
3.2.3. Oferta inmobiliaria 30
3.3. Ecuaciones de equilibrio entre oferta y demanda 31
3.4. Equilibrio en el uso de suelo 32
3.5. Demostración unicidad y existencia de solución 33
3.5.1. Punto fijo equilibrio localización hogares 33

4. Aplicación del Modelo en un prototipo de Ciudad **36**
4.1. Introducción 36
4.2. Modelo computacional 36
4.2.1. Breve descripción y estructura 36
4.2.2. Algoritmo de solución 39
4.3. Ciudad prototipo a utilizar 41
4.4. Simulación Computacional 42
4.4.1. Supuestos generales 42
4.4.2. Simulación 1: Caso homogéneo 43
4.4.3. Simulación 2: Preferencia consumo bienes 45
4.4.4. Simulación Tres A: Preferencia consumo localización 46
4.4.5. Simulación Tres B: Preferencia consumo localización, diferenciando hogares . 48

5. Resultados de las simulaciones **49**
5.1. Introducción 49
5.2. Simulación 1: Caso homogénea 49
5.3. Simulación 2: Preferencia consumo bienes 53
5.4. Simulación 3: Preferencia por viviendas 55
5.5. Simulación 3b: Preferencia por viviendas 57

6. Conclusiones y líneas de investigación futura **59**
6.1. Introducción 59
6.2. Conclusiones 59
6.3. Líneas de investigación futura 60

Bibliografía **61**

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se presentará la formulación de un modelo integrado, que postula un equilibrio entre los sistemas de transporte, uso de suelo y mercado de intercambio de bienes y servicios. Con este propósito, primero se realizó una revisión de los modelos existentes de uso de suelo, concluyendo, a modo general, que se ha trabajado de buena forma la relación entre el sistema de actividades y el sistema de transportes, sin embargo, no ha sucedido lo mismo con el sistema de intercambio de bienes y servicios. Considerando lo anterior, el presente documento busca hacerse cargo de esta relación, incluyendo producción e intercambio de bienes y servicios dentro del sub-modelo de uso de suelo. Por lo tanto, el principal objetivo de esta tesis es formular un modelo de equilirio general urbano, en el cual los distintos agentes compitan por localización en un mercado tipo remates. Dentro de los resultados a obtener, se encuentran las matrices de rentas por localización de los agentes, las matrices de precios de equilibrio de bienes y servicios, las matrices de localización de los agentes y los tiempos y costos de viaje entre los nodos de la red. El modelo a elaborar será probado en una ciudad prototipo para verificar su correcto funcionamiento.

Dentro de la ingeniería de transporte existen varias áreas dedicadas a estudiar cada una de las etapas de los viajes, en este contexto, el área de uso de suelo en particular, tiene como objetivo investigar como se generan los viajes y por consiguiente, la estrucutra de las matrices Origen-Destino, además de intentar predecir los cambios que va a experimentar la cuidad en el mediano y largo plazo, a través de la creación de modelos matemáticos predictivos.

Los modelos mencionados en el párrafo anterior, se basan principalmente en dos enfoques para simular el comportamiento de los agentes. El primero se conoce como "Bid" (Alonso, 1964), en el cual se asume que el mercado inmobiliario se comporta como un proceso de remates, donde los agentes que se localizan, llamados también hogares, presentan una disposición a pagar por las distintas localizaciones, que son asignadas al mejor postor. Mientras que el segundo enfoque, se conoce como "Choice" (Anas, 1982), donde se supone que los agentes eligen la localización que maximiza su utilidad. Ambos enfoques son equivalentes (Martínez, 1992) ya que si se cumplen las reglas del remate, la localización donde el hogar es el mejor postor coincide con la localización donde su utilidad es máxima, el fenómeno anterior se denomina la "Equivalencia Bid-Choice".

Es importante mencionar algunas características del mercado inmobiliario que lo hacen complejo desde el punto de vista de la modelación. Una de las principales, es la existencia de externalidades de localización (Martínez y Araya, 2000), donde, la ubicación de un agente puede hacer que cambie la valoración del resto por un determinado bien inmueble, influyendo en su desición de localización. Lo anterior, le otorga al bien inmueble la característica de "cuasi-único", ya que si bien, en términos de sus características constructivas dos viviendas pueden ser iguales, su entorno hace que sus atritutos sean diferentes, lo que hace cambiar la valoración que pueden tener los distintos agentes por él. Luego, la estructura del sistema de transporte de la ciudad y la distribución de los empleos también influyen en la elección de localización de los agentes.

Un modelo que incorpora varios de los elementos antes mencionados es MUSSA (Martínez y Donoso, 2010) aunque no incluye los mercados laboral, de bienes y servicios. Es de remates estocásticos y resuelve el problema del equilibrio en localización entre hogares y firmas que ofertan bienes inmuebles, asegurando su existencia y unicidad. Además, considera la existencia de externalidades de localización, sin embargo, no incorpora la relación que existe entre el sistema de uso de suelo y el sistema de transportes, aunque si existen modelos basados en MUSSA que la consideran.

Un modelo que integra uso de suelo y transporte es MITUS (Bravo, et al., 2009), que es del tipo remates, donde las decisiones de localización siguen la estructura de MUSSA y el modelo de transporte privado cumple las condiciones del equilibrio definido como Markovian Traffic Equilibruim, MTE (Baillon y Cominetti, 2008). Existe un solo modo de transporte, por lo tanto, no considera partición modal. Permite la existencia de externalidades en el sistema de uso de suelo y en el sistema de transportes, sin embargo, el equilibrio de MITUS tampoco considera el intercambio de bienes y servicios.

Un modelo que avanza en representar la estabilidad general es RELUTRAN (Anas y Liu, 2007), debido a que presenta un equilibrio en uso de suelo, sistema de transportes y consumo de bienes y servicios. Tiene un marco microéconomico adecuado, no obstante, no considera externalidades de localización y no existe demostración de unicidad ni de convergencia, aunque los autores aseguran que el algoritmo llega al equilibrio.

Complementando lo anterior, un elemento poco enfatizado en la literatura es el supuesto de la distribución de errores que se utiliza en las funciones de utilidades y postura. Todos los modelos mencionados anteriormente, asumen que dichas funciones siguen una distribución tipo Gumbel, por lo que, las probabilidades de localización son Logit, pero esto no se justifica fácilmente en modelos de remate basados en disposición a pagar.

Finalmente, el modelo que se presenta en esta tesis recibe el nombre de MEGU (Modelo de Equilibrio General Urbano) y replica la capacidad de RELUTRAN en cuanto a modelar el equilibrio genera que incorpora los sistemas de transporte, uso de suelo e intercambio y producción de bienes y servicios, pero a diferencia de RELUTRAN, asume que el mercado del suelo se transa mediante remates y que el comportamiento de los consumidores se modela a través de posturas aleatorias tipo Fréchet (Mattsson, et al., 2011). También se plantean diferencias importantes en la modelación de los agentes que demandan localización, tanto hogares como firmas, por ejemplo, en el caso de MEGU las elasticidades de producción de las firmas dependen del tipo de insumo. Con respecto al equilibrio en el sistema de transporte, esta tesis utiliza MTE (Bailon y Cominetti, 2010) a diferencia de RELUTRAN que utiliza un equilibrio basado en "Stochastic cost minimization model" (Daganzo y Sheffi, 1997). Estos aspectos definen condiciones diferentes en el equilibrio general. En esta tesis se estudian las condiciones de unicidad del modelo de equilibrio general propuesto y se probará numéricamente la convergencia del algoritmo de solución.

Objetivo General

El objetivo de esta tesis es formular y analizar un modelo de equilibrio general urbano, en el cual tanto hogares como firmas compitan por localización en un mercado con remates, con un equilibrio tipo Walrasiano en los mercados de mano de obra y consumo de bienes y servicios, y un equilibrio wardropiano en los mercados de transporte; los agentes y los usuarios de transporte tienen comportamiento estocástico.

Objetivos Específicos

- Formular un modelo de localización basado en comportamiento estocástico donde los errores para las posturas de todos los agentes que forman parte del equilibrio de uso de suelo urbano distribuyan Fréchet.
- Formular un modelo de equilibrio parcial en bienes y servicios tipo Walras condicional en las decisiones de localización y transporte.
- Formular el modelo integrado MEGU y estudiar las propiedades de unicidad del equilibrio y convergencia del algoritmo de solución.
- Desarrollar un prototipo computacional que permita probar los resultados y estudiar la solución del problema MEGU mediante simulación.

Metodología

Para cumplir con los objetivos planteados, primero se hará una revisión de la bibliografía existente sobre modelos urbanos, en conjunto con una discusión sobre sus aspectos más relevantes.
Se formulará un modelo de localización de hogares e industrias, se tomarán como referencia las funciones de utilidad para agentes de RELUTRAN, que se modificarán para levantar ciertos supuestos. El equilibrio tendrá otro enfoque, pasando de ser un modelo tipo "Choice" a "Bid".

Para modelar el comportamiento de los hogares, se formulará un problema de maximización de la utilidad sujeto a restricciones de tiempo e ingreso. La función de utilidad a utilizar será del tipo Cobb-Douglas, que dependerá del consumo de bienes, la cantidad de suelo, las externalidades y de un término de error (para el cual se asumirá una distribución tipo Gumbel) y estará sujeta a restricciones lineales de tiempo e ingreso totales. Luego, maximizando la función resultante al incorporar las restricciones, se obtienen las demandas marshalianas de los distintos bienes. Reemplazando estos valores en la función de utilidad original e invirtiendo en la renta se llega a la función de disposición a pagar (necesaria para un modelo de remates). Es relevante mencionar, que se estudiará si por construcción, esta función estocástica tiene una distribución del error tipo Gumbel o Fréchet.

Para el caso de las industrias, se asumirán principios similares y se minimizará la función de costos sujeta a una restricción de producción dada. La función de gastos será similar a la utilizada en RELUTRAN, lineal, aditiva y dependerá del capital, mano de obra, cantidad de suelo y bienes de producción intermedia. La función de producción será del tipo Cobb-Douglas. Dado lo anterior, minimizando la función resultante al incorporar la restricción, se obtienen las demandas optimas de los distintos insumos. Reemplazando estos valores, se genera la función de costos, invirtiendo en la renta se llega a la función de disposición a pagar. A diferencia del caso anterior (hogares), es sobre la función de disposición a pagar en la que se asume un comportamiento estocástico, al ser una función no negativa, se considerará el uso de la distribución de error Frechét.

El equilibrio Walrasiano iguala oferta y demanda en los mercados de mano de obra y producción de bienes y servicios y, además se simula un remate en el mercado del suelo, de donde se obtienen todos los precios simultáneamente. Las ecuaciones resultantes serán puntos fijos en precios de los bienes y servicios, producción, tasa salarial y en utilidades esperadas de los hogares, los que se pueden resolver analíticamente siguiendo la metodología utilizada en el modelo RB&SM(Martínez y Henríquez, 2007).

En la modelación del sistema de transporte se utiliza el modelo MITUS (Bravo et al, 2010), en el sentido que el equilibrio corresponde a la asignación a la ruta y tiempos de viaje según el concepto de equilibrio markoviano estocástico de tráfico (MTE), permitiendo un solo modo de transporte.

El nuevo modelo de equilibrio de uso de suelo y el equilibrio de bienes y servicios se integrará al software MITUS, generando un nuevo software llamado MEGU. Se analizará el equilibrio de este nuevo modelo MEGU mediante simulación computacional con el fin de estudiar sus propiedades de convergencia y los resultados obtenidos.

Contenido Tesis

Capítulo 1: Introducción

En este capítulo se explica de manera general el trabajo realizado, detallando los pasos a seguir y la metodología propuesta.

Capítulo 2: Revisión bibliográfica.

En esta sección se abordan los conceptos sobre uso de suelo conocidos en la literatura y sus aplicaciones para así entender el modelo que se presentará en esta tesis.

Capítulo 3: Formulación del modelo.

En esta sección se presenta la formulación matemática del modelo estocástico de equiibrio general urbano desarrollado.

Capítulo 4: Aplicación en una ciudad prototipo.

En este capítulo se detallan las simulaciones computacionales realizadas para verificar el correcto funionamiento del modelo matemático y hacer pruebas preliminares de convergencia.

Capítulo 5: Resultados y Análisis.

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos, lo que son acompañados con un análisis respectivo.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

2.1. Introducción

En este capítulo se abordan los conceptos acerca de uso de suelo conocidos en la literatura, necesarios para entender el modelo que se presentará en esta tesis.
La revisión consta de dos partes, primero se revisan los contenidos básicos y luego se revisan algunos modelos existentes que propongan un equilibrio en el sistema de uso de suelo y transportes.

2.2. Nociones sobre uso de suelo

El sistema de uso de suelo se puede entender como un mercado, donde existen distintos tipos de agentes. Existían dos formas de modelar este sistema: A través de la teoría de los remates o mediante la regla de maximización de la utilidad. Ambos enfoques resultaron ser equivalentes dando origen a la equivalencia Bid-Choice.

A continuación se presentan estas metodologías.

2.2.1. Mercado de remates (Enfoque bid)

Considerando que la valoración de un bien inmueble se puede definir tanto por sus características físicas (ya sea tipo de construcción, tamaño, número de ventanas, etc.) como por las características del entorno (existencia de parques cercanos, vecinos, comuna, etc.), es posible asegurar que no existen dos propiedades iguales, por lo tanto, los bienes inmuebles son cuasi-únicos. Como la valoración de estos atributos es distinta entre las personas, resulta razonable suponer que el mercado inmobiliario se comporte bajo la lógica de los remates, donde dada una localización, los distintos hogares presentan diferentes disposiciones a pagar.

El primero en reconocer que la localización hace que los bienes inmuebles sean cuasi-únicos fue Alonso (1974), quien propuso un modelo de remates en el cual una determinada vivienda es adjudica al mejor postor. Como resultado del remate el precio del bien inmueble es igual a la máxima postura entre los agentes. En este caso, se analiza un problema determinista.

2.2.2. Maximización de la utilidad (Enfoque choice)

Este enfoque asume que los agentes se comportan de manera racional, por lo tanto, eligen aquella localización que maximice su utilidad, basados en los atributos que esta posea. Debido a que no todos estos son observables por el modelador, se introduce una componente estocástica en el modelo, por lo tanto, la utilidad que proviene de elegir una alternativa es la siguiente:

$$U_{hi} = V_{hi} + \varepsilon_{hi} \tag{2.1}$$

En Anas (1982), el término ε_{hi} sigue una distribución de error del tipo Gumbel y utiliza este marco para formular un modelo aleatorio del mercado inmobiliario, en el cual los agentes realizan una elección discreta al elegir una localización, la que considera los siguientes factores: tipo de vivienda v, modo de transporte m y zona i. Por lo tanto, en este caso se trata de un modelo estocástico. Se supone que los agentes toman esta decisión maximizando su utilidad (o excedente).

Se formula un equilibrio del tipo Walras entre oferta y demanda inmobiliaria, lo que implica que los precios son exógenos para el consumidor y se observan en el equilibrio. Debido a que el término de error utilizado distribuye Gumbel, la probabilidad de elegir una localización viene dada por el logit multinomial descrito en 2.2:

$$P_{vmi} = \frac{exp(V_{vmi})}{\sum_g \sum_n \sum_j exp(V_{gnj})} \tag{2.2}$$

2.2.3. Equilivalencia Bid-Choice

Martinez (1992) demuestra que el enfoque Bid y el enfoque Choice son equivalentes: Para el caso deterministico y el estocástico. Si un hogar determinado cumple la regla del mejor postor en una localización en particular, en esta también alcanza su máxima utilidad. A esta teoría se le conoce como la Equivalencia Bid-Choice.

Considerando que la maximización de la utilidad es equivalente a la maximización del excedente del consumidor, EC (Martínez, 2000), la localización donde se maximiza la utilidad se puede obtener de acuerdo a la expresión 2.3:

$$(h,i) = argmax_i(EC_{hi})\forall(h,i) \tag{2.3}$$

El excedente del consumidor queda determinado por la diferencia entre la disposición a pagar (DP) y la renta (r), según lo expresado en la ecuación 2.4:

$$EC_{hi} = DP_{hi} - r_{hi}\forall(h,i) \tag{2.4}$$

Ahora si consideramos la regla del mejor postor, la renta será igual al máximo de las disposiciones a pagar por esa localización. Luego, reemplazando 2.4 en 2.3 se puede escribir lo siguiente:

$$(h,i) = argmax_i(DP_{hi} - (max_g DP_{gi})) \tag{2.5}$$

De la expresión anterior, se deduce que en el mejor de los casos el excedente del hogar es cero y que esto ocurre en la localización donde el agente es mejor postor. En el resto de las localizaciones el excedente será negativo, debido a que sí no es el mejor postor, la renta será mayor a su disposición a pagar.

Luego, se puede concluir que la localización donde el hogar maximiza su excedente es la misma donde es mejor postor. Esta equivalencia se verifica a utilidades dadas para todos los consumidores, que representan la "utilidad de reserva" con la que los agentes participan en el remate.

La principal ventaja de trabajar con modelos donde se utiliza el enfoque bid basado en la disposición a pagar, es su facilidad de calibración por sobre los modelos donde los hogares eligen localización de acuerdo a una función de utilidad. Esto se debe a qué la renta, y por lo tanto la disposición a pagar, de los bienes inmuebles es observable, a diferencia de la utilidad obtenida. Luego, al existir información observable y medible, es posible realizar la calibración de los modelos.

2.3. Modelos de simulación

2.3.1. Mussa

Mussa es un modelo diseñado para predecir la localización esperada de agentes en el área urbana. Fue desarollado por Martínez y Donoso (2010) y corresponde a un modelo de remates al mejor postor del tipo Bid-Choice, por lo que, reconoce la característica de unicidad de los bienes inmuebles. Del equilibrio se obtiene la renta del bien inmueble y el nivel de utilidad que alcanzan los consumidores. La gran ventaja que presenta respecto de otros modelos similares es la capacidad de resolver externalidades en el proceso de localización, que se incorporan al problema de equilibrio y se resuelven por el método RB&SM (Martínez y Henríquez, 2007) del modelo. La oferta total por bienes inmuebles es igual a la demanda, por lo tanto, todos los agentes se localizan.

Se asume que los agentes son racionales en su comportamiento, por lo tanto, maximizan su utilidad, las diferencias no observables se modelan por una variable de error aleatoria del tipo Gumbel. A continuación, se detallan los sub-modelos:

Modelo de consumidores

Los consumidores del modelo corresponden a hogares y firmas los que son clasificados en categorías de acuerdo a su ingreso ($h \epsilon H$). Los oferentes de bienes inmuebles, que corresponden a las constructoras, se dividen en categorías ($j \epsilon J$) de acuerdo a sus costos de producción. Los bienes inmuebles en MUSSA, se diferencian por tipo (v), localización (i) y un vector de atributos(z).

Los consumidores compiten en el remate haciendo posturas de acuerdo a su disposición a pagar, función que analíticamente se obtiene invirtiendo la renta en la función de utilidad indirecta, condicional a la elección de localización.

Denotamos por V_{hvi} a la función de utilidad indirecta condicional en vi. Al asumir que cada agente consume una localización i y que tiene un ingreso y_h, esta función se puede expresar de la siguiente manera: $V_{hvi} = V_h(y - h - r_h, p, z_{vi})$. Luego, la disposición a pagar condicional a un nivel de utilidad U_h es:

$$B_{hvi} = y_h - f_h(p, z_{vi}, U_h) \tag{2.6}$$

Modelo de posturas

Para facilitar el cálculo del equilibrio se asume que la función de utilidad es cuasi-lineal, o sea, que es lineal en al menos uno de los bienes que la componen. La función de postura utilizada en el modelo se compone de la siguiente manera:

$$B_{hvi} = b_h^1 + b_{hvi}^2(N,S) + b^3 \tag{2.7}$$

donde:
b_h^1: Ajusta el nivel de utilidad U_h igual para toda localización.

b_{hvi}^2:Describe la valoración de los atributos de la propiedad. Algunos atributos son exógenos al equilibrio de localización, como: ríos, parques, cerros, etc., y quedan bien definidos por el parámetro correspondiente. Mientras que los más complejos son los endógenos, que describen las externalidades de localización y que son definidos con dos tipos de variables. La primera es la distribución de los agentes en la zona, N, que describe atributos como la calidad del vecindario, combinando las características de los agentes en la zona con el número de agentes. La segunda, es la cantidad de oferta existente, S, que describe el ambiente construido en la zona.

b^3: Corresponde a un término independiente que solo es relevante para el cálculo del valor absoluto de las rentas, es decir, es independiente del equilibrio que se resuelve en rentas y disposiciones a pagar relativas.

Con el fin de considerar la variabilidad existente dentro de los grupos de consumidores, se asume que las posturas tienen una componente aleatoria, por lo tanto, se puede escribir como:

$$B_{hvi} = B_{hvi} + \varepsilon_{hvi} \tag{2.8}$$

Donde ε_{hi} distribuye I.I.D. Gumbel. Luego, la probabilidad de que uno de los agentes N_h del tipo h sea el mejor postor en (v,i) viene dada por 2.9:

$$P_{h/vi} = \frac{N_h exp(\mu B_{hvi})}{\sum_{g \epsilon H}(N_g exp(\mu B_{gvi}))} \tag{2.9}$$

En la ecuación 2.9 el parámetro μ es inversamente proporcional a la varianza de las posturas. Esta es la versión agregada del logit multinomial que incluye la corrección por distinto tamaño de las categorías propuesto por McFadden (1978). Entonces, el número esperado de agentes h localizado en (v,i) viene dado por:

$$N_{hvi} = S_{vi} P_{h/vi} \tag{2.10}$$

Luego, reemplazando 2.9 y 2.20 en 2.12 se obtiene la expresión final:

$$N_{hvi} = S_{vi} \frac{N_h exp(\mu(b_h^1 + b_{hvi}^2(N_{..i},S_{.i})))}{\sum_g N_g exp(\mu(b_g^1 + b_{gvi}^2(N_{..i},S_{.i})))} \tag{2.11}$$

La ecuación 2.11 se puede resumir de la siguiente manera:

$$N_{hvi} = N(b_.^1,N_{..i},S_{.i}) \forall h,v,i \tag{2.12}$$

Esta expresión denota claramente que se trata de un problema de punto fijo, debido a las externalidades de localización.

Como resultado del remate, la renta de un bien inmueble es determinada por el valor esperado de la máxima postura, cuya expresión en este caso es la siguiente logsuma:

$$r_{vi} = \frac{1}{\mu} \ln(\sum_{g \epsilon H}(N_g exp(\mu B_{gvi}))) + \frac{\gamma}{\mu} \tag{2.13}$$

donde γ es la constante de Euler. Notar que las rentas dependen de las posturas.

Modelo de oferta inmobiliaria

Se asume que los ofertantes de bienes inmuebles maximizan su excedente, el que teóricamente varía a través de las posibles localizaciones, lo que es causado principalmente por diferencias entre la información, condiciones y movilidad de recursos entre las condiciones de los mercados. Además, para cada par (v,i) existen diferencias en la regulación, lo que podría hacer que el excedente cambie.

A su vez existen diferencias entre los productores, como por ejemplo, el tamaño de la firma, lo que podría hacer que sus costos no fuesen iguales, por lo que, también tiene sentido que varié entre tipo de bien inmueble v. Luego, el excedente o profit de la firma viene dado por la siguiente expresión:

$$\Pi_{vif} = r_{vi} - c_{vif} \tag{2.14}$$

Otro aspecto teórico importante que se incorpora es la potencial existencia de economías de escala, dentro de la misma firma o de una zona, o de diversidad a través de las firmas y zona por lo que la función de costos depende del vector de oferta S, o sea, $c_{vif} = c_f(S..)$

Luego, el número esperado de oferta residencial del tipo (v,i), viene dado por: $S_{vi} = \sum_j S_j P_{vi/j}$, donde S_j es la participación del productor j en la producción total y $P_{vi/j}$ es la probabilidad de que la combinación (v,i) le entregue la máxima utilidad al productor j. Si consideramos un error aleatorio tipo Gumbel, la probabilidad $P_{vi/j}$ sería un logit multinomial y si $S_j = \sum_j N^* P_j$, con N^* la oferta total (igual a la demanda en el equilibrio), entonces la oferta específica S_{vi} viene dada por:

$$S_{vi} = N \sum_j P_j \frac{\exp(\lambda(r_{vi} - c_{vij}))}{\sum_{v'i'j'} \exp(\lambda(r_{v'i'} - c_{v'i'j'}))} \tag{2.15}$$

donde λ es inversamente proporcional a la varianza del excedente. Debido a las economías de escala y diversidad, la función de costos depende de N y S, por lo tanto la ecuación 3.40 se puede escribir de manera simplificada de la siguiente manera:

$$S_{vi} = S(b^1_{\cdot}, N_{...}, S_{..}) \tag{2.16}$$

La ecuación 2.16 representa un problema de punto fijo.

Modelación de las restricciones en el comportamiento

Esta versión utiliza una novedosa técnica para modelar las restricciones o regulaciones, que se basa en el enfoque del Logit Multinomial Restringido (CML) propuesto por Martínez, et. al. (2005). Este enfoque consiste en utilizar un factor de corte que se denomina "cut-off" en las funciones de comportamiento. De esta forma, se pueden modelar restricciones específicas, como por ejemplo, que la disposición a pagar no sea superior al ingreso de los hogares y las distintas regulaciones existentes en las zonas.

Equilibrio

La ecuación de equilibrio estocástico entre oferta y demanda es la siguiente:

$$\sum_{v \epsilon V, i \epsilon I} S_{vi} P_{h/vi} = N_h \forall h \tag{2.17}$$

Esta condición se cumple si y solo si:

$$\sum_{vi} S_{vi} = N = S \tag{2.18}$$

y

$$b_h^1 = -\frac{1}{\mu} ln(\frac{1}{N_h} \sum_{vi} (S_{vi} exp(\mu(b_{hvi}^2 - r_{vi})))) \tag{2.19}$$

Lo que de forma abreviada se puede escribir de la siguiente forma:

$$b_h^1 = b_h(b_.^1, P_{./..}, S_{..}) \tag{2.20}$$

Lo que representa otra ecuación de punto fijo.

Es importante mencionar un par de aspectos relevantes del modelo. Se observa que una mayor disposición a pagar significa una menor utilidad. De la misma forma, considerando lo demás constante y obviando los efectos de segundo orden, se tiene que la utilidad decrece con un aumento de la población porque la oferta es más demandada.

Luego, el equilibrio se representa por la solución simultánea de las ecuaciones 2.12, 2.16 y 2.20. La solución existe si los parámetros de escala del logit μ y λ pertenecen al rango definido por Martínez y Henríquez (2007). Ellos muestran que la unicidad de la solución se garantiza si los parámetros de escala son lo suficientemente bajos, esto es, si las disposiciones a pagar y los excedentes tienen una varianza mínima.

2.3.2. RELUTRAN

Es un modelo formulado para predecir la localización esperada de los agentes en el área urbana, la oferta inmobiliaria, la producción de firmas y los precios de equilibrio de bienes y servicios. Fue desarollado por Anas y Liu (2007) y corresponde a un modelo de maximización de la utilidad. Recoge atributos para las localizaciones, pero son tratados de manera exógena, es decir, no incorpora las externalidades generadas por la ubicación de otros agentes. Permite la existencia de exceso de oferta en el mercado inmobiliario, las constructoras poseen información perfecta en términos de estimación de la demanda, pero tienen incerteza en los costos, que son estocásticos. Se asume que los términos de error distribuyen i.d.d. Gumbel, por lo tanto, las funciones de probabilidad de elección de localización y de oferta inmobiliaria corresponden a funciones logit.

Se compone de dos grandes submodelos: RELU y TRAN. EL primero corresponde al modelo de uso de suelo e incertercambio y producción de bienes y servicios, mientras que el segundo, TRAN, entrega el equilibrio en el sistema de transportes.

La formulación para hogares y firmas, se analizará en detalle ya que sirven de base para MEGU. A continuación, se presenta un breve resumen de la estructura del modelo, con sus principales subtareas.

RELU

Existen cuatro tipos de agentes en el modelo: Consumidores, productores, dueños de terrenos y constructoras.

Consumidores

Los consumidores se definen como potenciales trabajadores y se dividen de acuerdo a su calificación en F categorías distintas (el número de agentes por categoría es exógeno). Se asume que realizan un conjunto de elecciones discretas: Lugar de trabajo j, lugar de residencia i y tipo de hogar v, y que, condicional a estas elecciones toman siguientes decisiones continuas: Cantidad de espacio que se arrienda q, horas de trabajo anuales Tw y cantidad de consumo agregado en bienes z_z. Esto se formula en la utilidad 2.21, que corresponde a una función tipo C.E.S.:

$$U_{f\backslash ijv} = \alpha_f \ln(\sum_z \mu_{z\backslash ijf}(z_z)^{n_f})^{1/n_f} + \beta_f \ln(b) + E_{ijv} + \varepsilon_{ijv} \tag{2.21}$$

donde z_z es el consumo de bienes en la zona z, b es la cantidad de suelo en metros cuadrados, E_{ivh} son los atractores exógenos de la zona y ε_{ijv} es el error aleatorio que distribuye Gumbel. Con el fin de evitar la solución trivial, esta función se encuentra sujeta a las siguientes restricciones de ingreso y tiempo, respectivamente:

$$\sum_z (p_z+g_{ijf}c_{iz})z_z+bR_{iv}+\Delta_j dc_{ij} = \Delta_j(1-\vartheta_f)w_{jf}(H-dt_{ij}-\sum_z g_{ijf}Z_z t_{iz})+[1-\Delta_j\vartheta_f-(1-\Delta_j)\vartheta_f^{\mu}]M_f \tag{2.22}$$

$$H - \Delta_j dt_{ij} - \sum_z g_{ijf} z_z t_{iz} > 0 \tag{2.23}$$

donde p_z corresponde al precio del bien en la zona z, g_{ijf} son los viajes requeridos por un consumidor con calificación f que vive en i y trabaja en j para comprar una unidad de un bien de consumo, c_{iz} costo monetario de ir desde i hasta z, R_{iv} es el valor que renta por un bien inmueble del tipo v localizado en i, Δ_j es una variable tipo dummy que vale 1 si el consumidor esta trabajando y 0 si no, d es una variable exógena que indica la cantidad de días que se trabaja en un año, ϑ_f es una variable exógena que indica la tasa de impuestos sobre el ingreso salarial, w_{jf} tasa salarial de un consumidor tipo f que trabaja en j, t_{ij} tiempo de viaje por persona desde i hasta j, ϑ_f^{μ} variable exógena que indica la tasa de impuestos sobre el ingreso no salarial y M_f es el ingreso no salarial para un consumidor de habilidad f.

Acomodando los términos correspondientes se pueden definir dos expresiones. La primera es $\phi_{z\backslash ijf} = p_z + g_{ijf}(g_{iz} + \Delta_j(1-\vartheta_f)w_{jf}t_{iz})$ que corresponde al costo total de un bien z, lo que se puede entender también como el costo generalizado. Mientras que la segunda corresponde a $I_{ijf} = \Delta_j(1-\vartheta_f)w_{jf}(H-dt_{ij}) + [1-\Delta_j\vartheta_f-(1-\Delta)\vartheta_f^{\mu}]M_f - \Delta_j dc_{ij}$ y se puede entender como el ingreso disponible luego del pago de impuestos y de los costos de transporte.

Por lo tanto, para cada par (i,j,v) las demandas Marshalianas que son solución del problema de maximización de la utilidad 2.21 bajo las restricciones 2.22 y 2.23, son las siguientes:

$$b_{ijv\backslash f} = \frac{\beta_f I_{ijf}}{R_{iv}} \tag{2.24}$$

$$z_{z\backslash ijf} = \frac{\mu_{z\backslash ijf}^{1/(1-n_f)} \phi_{z\backslash ijf}^{1/(n_f-1)}}{\sum_s \mu_{s\backslash ijf}^{1/(1-n_f)} \phi_{s\backslash ijf}^{n_f/(n_f-1)}} \alpha_f I_{ijf} \tag{2.25}$$

luego, reemplazando las expresiones 2.24 y 2.25 en 2.21 se obtiene la utilidad indirecta condicional a las elecciones discretas de vivienda, lugar de residencia y trabajo. La variabilidad existente en cada grupo f se modela con una variable de error que sigue una distribución i.i.d. Gumbel con parámetro de dispersión λ_f, por lo tanto, la probabilidad de que la elección (i,j,k) maximice la utilidad del consumidor tipo f viene dada por un logit multinomial:

$$P_{ijv\backslash f} = \frac{exp(\lambda_f U_{ijv\backslash f})}{\sum_{\forall(s,t,n)} exp(\lambda_f U_{stn\backslash f})} \tag{2.26}$$

Productores

Los productores son agentes que captan mano de obra y bienes intermedios, su función es producir bienes y servicios. Existen en total I industrias básicas del modelo, las que pueden producir en cualquier zona, y dos especializadas por cada tipo de bien inmueble, las que se encargan de construir y demoler. Por lo tanto, existen $2N+I$ industrias en total. Se asume que las industrias básicas tienen una función de producción tipo Cobb-Douglas con retornos constantes a escala y que reciben como insumo: capital K, mano de obra L_f, suelo B_k y bienes intermedios $y_{sj'}$. La función de producción para una industria básica r es la siguiente:

$$X_{rj} = A_{rj} K^{\nu_r} (\sum_f \kappa_{f\backslash rj} L_f^{\sigma_r})^{\delta_r/\sigma_r} \sum_k (\chi_{k\backslash rj} B_k^{\zeta_r})^{\mu_r/\zeta_r} \Pi_s (\sum_{j'} \varphi_{sj'\backslash rj} y_{sj'}^{\varepsilon_{sr}})^{\gamma_{sr}/\varepsilon_{sr}} \tag{2.27}$$

Los exponentes σ_r, ζ_r,ε_{sr} corresponden a la tasa de sustitución entre los insumos para la industria r, mientras que los exponentes ν_r,δ_r,μ_r,γ_{sr} representan la elasticidad con respecto a la producción de cada insumo en particular, debido a que la función de producción presenta retornos constantes a escala, se cumple que $\nu_r + \delta_r + \mu_r + \gamma_{sr} = 1$. Las constantes $\kappa_{f\backslash rj}$, $\chi_{k\backslash rj}$,$\varphi_{sj'\backslash rj} > 0$ permiten incluir ciertas modificaciones particulares para cada caso en la función de producción, por ejemplo, que un determinado insumo no sea necesario para la producción de una industria.

Sujeto a este nivel de producción, como restricción, cada firma resuelve el siguiente problema de minimización de gastos:

$$Min(\varrho K + \sum_f w_{jf} L_f + \sum_k R_{jk} B_k + \sum_s \sum_{j'} p_{sj'} y_{sj'}) \tag{2.28}$$

Todos los insumos se multiplican por sus precios respectivos ($p_{sj'}$ incluye los costos de transporte). Las soluciones al problema de minimización condicionales al nivel de demanda, son las siguientes:

$$K_{rj} = \frac{1}{\varrho} \nu_r p_{rj} X_{rj} \tag{2.29}$$

$$L_{f\backslash rj} = \frac{\kappa_{f\backslash rj}^{1/(1-\sigma_r)} w_{jf}^{1/(\sigma_r-1)}}{\sum_z \kappa_{z\backslash rj}^{1/(1-\sigma_r)} w_{jz}^{1/(\sigma_r-1)}} \delta_r p_{rj} X_{rj} \tag{2.30}$$

$$B_{k\backslash rj} = \frac{\chi_{k\backslash rj}^{1/(1-\zeta_r)} R_{jk}^{1/(\zeta_r-1)}}{\sum_z \chi_{z\backslash rj}^{1/(1-\zeta_r)} R_{jz}^{1/(\zeta_r-1)}} \mu_r p_{rj} X_{rj} \tag{2.31}$$

$$y_{sn\backslash rj} = \frac{\varphi_{sj'\backslash rj}^{1/(1-\varepsilon_{sr})} p_{sj'j}^{1/(\varepsilon_{sr}-1)}}{\sum_y \varphi_{sy\backslash rj}^{1/(1-\varepsilon_{sr})} p_{syj}^{1/(\varepsilon_{sr}-1)}} \gamma_{sr} p_{rj} X_{rj} \tag{2.32}$$

Sustituyendo, 3.32, 3.33, 3.34 y 3.35 en la expresión 3.22 se obtiene la función de costos para cualquier nivel de producción. Al no existir excedente, porque hay retornos constantes a escala, el precio de los bienes es igual al costo marginal, independiente del nivel de producción.

Dueños de terrenos

Los dueños de terrenos maximizan su profit bajo el supuesto de competencia perfecta, la decisión que toman es si arrendar una unidad o dejarla disponible para el siguiente periodo. Si R_{ik} es la renta del bien inmueble del tipo k en i y si $D_{ik0} - d_{ik0}$ y $D_{ik} - d_{ik}$ corresponden a los costos de mantenimiento de la propiedad vacante o arrendada respectivamente con (d_{ik0}, d_{ik}) variables aleatorias que distribuyen i.i.d. Gumbel, la probabilidad de que un terreno sea arrendado es la siguiente:

$$q_{ik}(R_{ik}) = \frac{exp(\phi_{ik}(R_{ik} - D_{ik0}))}{exp(\phi_{ik}(R_{ik} - D_{ik0})) + exp(\phi_{ik} - D_{ikv})} \tag{2.33}$$

Por lo tanto, la renta esperada de los dueños de los terrenos es la siguiente:

$$w_{ik}(R_{ik}) = \frac{1}{\phi_{ik}} ln(exp(\phi_{ik}(R_{ik} - D_{ik0})) + exp(\phi_{ik}(-D_{ikv}))) \tag{2.34}$$

Constructoras

Las constructoras maximizan su profit, bajo el supuesto de competencia perfecta. Tienen certeza con respecto a los precios, pero incertidumbre sobre los costos (son estocásticos). En el modelo, demora un período construir o demoler. Toman la decisión de construir en un sitio, mantenerlo vacante o demoler la propiedad existente, por lo tanto, existen varios estados posibles: mantener el sitio sin construcción, construir un bien inmueble de tipo k, mantener la construcción actual y demoler la construcción existente, con una tasa de interés ρ. Los excedentes de cada alternativa, vienen dados por las expresiones 2.35 - 2.38

$$\Pi_{i00} = \frac{1}{1+\rho} V_{i0} + \varsigma_{i00} - V_{i0} \tag{2.35}$$

$$\Pi_{i0k} = \frac{1}{1+\rho} (V_{ik} - p_{k,i}) m_k - C_{i0k} + \varsigma_{i00} - V_{i0} \tag{2.36}$$

$$\Pi_{ikk} = \frac{1}{1+\rho} V_{ik} + \varsigma_{ikk} - V_{ik} \tag{2.37}$$

$$\Pi_{ik0} = \frac{1}{1+\rho} (\frac{V_{i0}}{m_k} - p_{N+k,i}) - C_{ik0} + + \varsigma_{ik0} - V_{ik} \tag{2.38}$$

en las ecuaciones anteriores, m_k es un parámetro exógeno que representa la densidad estructural (es decir, la cantidad de pies cuadrados construídos por manzana), V_{ik} representa el precio de la posesión de capital en bienes inmuebles del tipo k en la zona i. (C_{ik0},C_{i0k},C_{i00},C_{ikk}) son los costos de demoler, construir, mantener vacante y de mantener la construcción respectivamente, mientras que las que asume que las variables aleatorias (ς_{i00},ς_{i0k},ς_{ik0}) siguen una distribución i.i.d. Gumbel.

La probabilidad de construir un bien inmueble del tipo k viene dado por $\Pi_{i0k} > \Pi_{i00}$, mientras que, la probabilidad de demoler viene dada por $\Pi_{ik0} > \Pi_{ikk}$ ambas son Logit.

Equilibrio

A continuación se presentan las ecuaciones que se deben cumplir para llegar al equilibrio en RELU, la componente de suelo de RELUTRAN.

1. Ingreso no salarial

$$M_f = \xi_f \frac{\Lambda + \Theta}{N_f} \tag{2.39}$$

   Se define M_f como el ingreso no salarial, ξ_f es un coeficiente que expresa la cantidad de agentes en el grupo f ($\sum_f \xi_f$), Θ es una constante exógena que representa otras fuentes posibles de ingreso exógeno y Λ es el ingreso no salarial anual por los activos presentes en la región.

2. Mercado de los bienes inmuebles

   Para cada tipo de bien inmueble residencial se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum_f N_f \sum_j P_{ijk\backslash f}(p_r,R,w,M_f,G,g) b_{ijk\backslash f}(R_{ik},w_{jf},M_f,G_{ij},g_{ij}) = S_{ik} q_{ik}(R_{ik}) \tag{2.40}$$

   Se debe recordar que q_{ik} es la probabilidad de que el dueño del terreno decida que este esta disponible para construcción, mientras que $q_{ijk\backslash f}$ es la cantidad de terreno que el consumidor del tipo f adquiere.

   Para cada tipo de bien inmueble comercial se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum_r B_{k\backslash ri}(p_{ri},X_{ri},R_i) = S_{ik} q_{ik}(R_{ik}) \tag{2.41}$$

3. Mercado del trabajo

   Para cada zona del modelo j y para cada categoría de consumidores f, se debe cumplir:

$$\sum_r L_{f\backslash rj}(p_{rj},X_{rj},w_j) = N_f \sum_{i,k} [H - dt_{ij} - g_{ijf} \sum_z t_{iz} z_{z\backslash ijf}] P_{ijk\backslash f}(R_{ik},w_{jf},M_f,G_{ij},g_{ij}) \tag{2.42}$$

4. Mercado de producción

   La producción de cada industria básica debe cumplir:

$$\sum_n \sum_s Y_{ri\backslash ns}(X_{ns}, p_{ns}, p_r, g) + \Xi_{ri} = X_{ri} \tag{2.43}$$

$$\sum_f N_f \sum_{nsk} P_{nsk\backslash f}(p_R, R, w, M_f, G, g) Z_{\backslash nsf}(p_r, w_{sf}, M_f, G_{ij}, g_{ij}, G_n, g_n) + \Xi_{Ri} = X_{Ri} \tag{2.44}$$

   donde Ξ_{Ri} presenta la demanda exógena de bienes.

5. Conversión del Stock de construcciones

   Debido a que es un equilibrio estacionario, para cada tipo de construcción, el flujo de suelo demolido debe ser igual al construido de manera que el stock disponible se mantenga constante en cada año, se debe cumplir que:

$$S_{ik}Q_{ik0} = m_k S_{i0} Q_{i0k} \tag{2.45}$$

   Con S_{ik} la oferta de bienes inmuebles del tipo k en i, Q_{ik0} es la probabilidad de construcción y Q_{i0k} es la probabilidad de demolición. Mientras, que en cada zona, el total de suelo es dado J_i, por lo tanto para cada zona se debe cumplir lo siguiente:

$$\sum_k \frac{1}{m_k} S_{ik} = J_i \tag{2.46}$$

TRAN

Con el equilibrio parcial de la componente de uso de suelo (RELU), es posible obtener una matriz de viajes origen-destino, a través de la ecuación 2.47

$$RELUTRIPS_{ij} = (\sum_f N_f \sum_k P_{ijk} + (\frac{1}{d})(\sum_f N_f \sum_s \sum_k P_{isk} c_{isf} Z_{isf}) \tag{2.47}$$

Los viajes son divididos entre los tres modos posibles: automóvil, buses de transporte público y otros modos. Los viajes serán asignados al modo automóvil a través de un equilibrio estocástico determinado por los tiempos de viajes en los arcos, afectados por la congestión. Para los modos distintos al automóvil no existe congestión.

La elección modal es un logit, el cual depende de los costos generalizados que son distintos para cada modo. Para los modos que no presentan congestión, el tiempo y costo monetario del viaje es tratado como constante.

Volviendo al modo automóvil, conociendo la constante de ocupación de manera exógena es posible determinar la cantidad de viajes totales.

El modelo de elección de ruta, también es un Logit multinomial y asume que los viajeros eligen la ruta que minimiza el costo generalizado del viaje.

Una vez que se determina la elección de rutas, es posible calcular el flujo en los arcos de manera directa, con estos datos es posible obtener el equilibrio parcial en TRAN que consiste en calcular la matriz de costos generalizado del viaje (C) y la matriz de tiempos de viaje (T).

Algoritmo Unificado: RELUTRAN

El equilibrio general se logra cuando ambos algoritmos convergen por separado, para resolver el modelo RELU, se debe partir con tiempos de viaje y costos de viaje dados.

El algoritmo RELU, parte con un set inicial de valores para Renta (R), tasa salarial (w), precios de bienes (p), precios de los bienes inmuebles (V) , stock de viviendas (S), tiempos de viaje (T) y costo (C), luego con las ecuaciones de el sistema de uso de suelo se obtiene en el siguiente orden el valor de las variables.

1. Precio de los bienes (p)
2. Producción de las industrias (x)
3. Valor de renta comercial (R)
4. Valor de renta residencial (B)
5. Tasas salariales (w)
6. Precio de los bienes inmuebles (V)
7. Stock (S)

Una vez obtenido este set de variables se analiza su convergencia, si cumple se pasa a TRAN si no se vuelven a calcular.

2.3.3. MITUS

MITUS (Modelo integrado de uso de suelo y transporte con congestión y externalidades) es un modelo elaborado con el fin de predecir la localización esperada de agentes en el área urbana. Fue desarrollado por Martínez, et. al., el año (2009) y obtiene el equilibrio a través de remates al mejor postor, por lo que, reconocer la característica de unicidad de los bienes inmuebles, además, integra el sistema de transportes, considerando congestión y externalidades de localización (de la misma forma que MUSSA, se revuelven en el equilibrio mediante el método RB&SM). A diferencia de RELUTRAN que itera cada sistema por separado, el problema se plantea como un problema de minimización donde se entregan las condiciones suficientes para asegurar convergencia y solución. El modelo permite múltiples propósitos de viajes, sin embargo no existe partición modal.

De forma general, el problema se resuelve a través de un sistema de puntos fijos. Primero se comienza con una matriz de localización H determinada por el total de agentes de cada tipo, la oferta total de bienes inmuebles y restricciones no negativas. Con H, se obtiene la matriz de generación de viajes O evaluando en una función lineal afín sencilla, después, con la asignación de viajes a la red se obtienen los flujos w_a y los tiempos t por arco los que son utilizados para evaluar las accesibilidades α en las disposiciones a pagar por localización b^e_{hi}, donde, la utilidad b_h se ajusta de manera que todos los agentes se localicen, lo que entrega una nueva matriz de localización H^*. El equilibrio se obtiene cuando el patrón obtenido en la última iteración H^* es similar al inicial H.

La función de disposición a pagar del agente tipo h por una localización i está compuesta por las externalidades b^e y un término de utilidad b^u.

$$b_{hi} = b^e_{hi}(H,O,\alpha,t) - b^u_h \tag{2.48}$$

La disposición a pagar es separable porque se asume que la función de utilidad de la cual proviene es quasi-lineal.

Se asume que los agentes son racionales en su comportamiento, por lo tanto, maximizan su utilidad, las diferencias no observables se modelan por una variable de error aleatoria del tipo Gumbel.

A continuación, se detallan las componentes del modelo: generación, distribución, asignación a la red y localización mediante un proceso de remates.

Generación de viajes

Los viajes generados por el agente h en la zona i vienen dados por la siguiente expresión:

$$O_{hi} = N_{hi}H_{hi} + \delta_{hi} \tag{2.49}$$

N_{hi} es una tasa de viajes fija, a la cual se le suma una constante $\delta_{hi} > 0$, para asegurar que se cumpla que $O_{hi} > 0 \forall h,i$

Distribución de viajes y asignación a la red

La distribución de viajes se describe por un modelo entrópico con una sola restricción. Sin embargo, se trabaja con la formulación dual de este problema, por lo tanto los viajes desde i con destino d realizados por el hogar h, g_i^{dh}, vienen dados por la solución del problema 2.50:

$$min\phi(\alpha,t) = \sum_{a\epsilon A}\int_{t_a^0}^{t_a} s_a^{-1}(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{h\epsilon C}\sum_{i\epsilon I} O_{hi}\alpha_{hi} + \sum_{h\epsilon C}\frac{1}{\mu_h}\sum_{i\epsilon I}\sum_{d\epsilon D} exp[-\mu_h(c_i^{dh}(t,H)+\alpha_{hi})] \tag{2.50}$$

El costo $c_i^{dh}(t,H) = \tau_i^{dh}(t) - \gamma_d(H)$ incluye el tiempo esperado de viaje $\tau_i^{dh}(t)$ y los beneficios derivados de los atributos de la localización γ_d. La condición de optimalidad $\dfrac{\partial\phi}{t_a}$ reproduce las condiciones del MTE con:

$$g_i^{dh} = O_{hi}P_{d/ih} \tag{2.51}$$

donde

$$P_{d/ih} = \frac{exp[-\mu_h(\tau_i^{dh}(t) - \gamma_d(H))]}{\sum_{k\epsilon D} exp[-\mu_h(\tau_i^{kh}(t) - \gamma_k(H))]} \tag{2.52}$$

es la probabilidad de elegir el destino d, condicional al origen del viaje i y al tipo de agente h. La condición $\dfrac{\partial\phi}{\alpha_{hi}}$ entrega el valor de α_{hi}:

$$\alpha_{hi} = \frac{1}{\mu_h} ln(\frac{1}{O_{hi}} \sum_{d \varepsilon D} exp[-\mu_h(\tau_i^{dh}(t) - \gamma_d(H))]) \tag{2.53}$$

que mide el costo esperado de los viajes O_{hi} a los posibles destinos datos por 2.52

Proceso de remate y mecanismo de localización

Se asume que el mercado inmobiliario se comporta de acuerdo a un proceso de remates, donde el mejor postor para un determinado bien inmueble se lo adjudica. Las apuestas por las localizaciones i son modeladas de manera estocástica con una variable de error que distribuye Gumbel, por lo que la probabilidad de que el agente h sea el mejor postor en i viene dada por la siguiente expresión:

$$P_{h/i} = \frac{exp[\theta_i(b_{hi}^e - b_h^u)]}{\sum_{g \varepsilon C} exp[\theta_i(b_{gi}^e - b_g^u)]} \tag{2.54}$$

Formulación de punto fijo para el problema integrado

Se plantea una formulación integrada que conecte las tres partes previas. Se parte desde una localización dada H que define la matriz de generación de viajes $O = \psi_1(H)$ por evaluación directa en la ecuación 2.49. Este par (H,O) produce un vector de variables de accesibilidad (α,t) a través del mapa ψ_2 con 2.53 y actualizando el equilibrio de transporte. Finalmente, se obtiene la tupla (H,O,α,t) que determina un único b y su correspondiente matriz de localización H^* a través del mapa ψ_3 que resuelve el equilibrio con externalidades en uso del suelo. Estos vectores juntos nos entregan H^* como una función de la localización inicial H, con $\Theta : K \to K$ dado por $\Theta(H) = \psi_3(H,\psi_1(H),\psi_2(H)(H,\psi_1(H)))$. El equilibrio queda definido con el punto fijo del último mapa, o sea, la solución de la ecuación:

$$H = \Theta(H) \tag{2.55}$$

Cuando se encuentra la solución H, las variables restantes tales como: generación de viajes, distribución, flujo en las redes y tiempos de viaje quedan fácilmente calculadas resolviendo los problemas de optimización 2.50 y 2.55. El equilibrio integrado viene definido por las siguientes ecuaciones:

$$O_{hi} = N_{hi}H_{hi} + \delta_{hi} \quad \forall i \varepsilon I, h \varepsilon C \tag{2.56}$$

$$t_a = s_a(w_a)) \tag{2.57}$$

$$w_a = \sum_{d \varepsilon D, h \varepsilon C} \nu_a^{dh} \quad \forall a \varepsilon A \tag{2.58}$$

$$\nu_a^{dh} = \sum_{i \varepsilon I} g_i^{dh} \frac{\partial \tau_i^{dh}}{\partial t_a} \quad \forall a \varepsilon A, d \varepsilon D, h \varepsilon C \tag{2.59}$$

$$g_i^{dh} = exp(-\mu(\tau_i^{dh}(t) - \gamma_d(H) - \alpha_{hi})) \quad \forall i \varepsilon I, d \varepsilon D, h \varepsilon C \tag{2.60}$$

$$\sum_{d \varepsilon D} g_i^{dh} = O_{hi} \quad \forall i \varepsilon I, h \varepsilon C \tag{2.61}$$

$$b_{hi} = b_{hi}^e(H,O,\alpha,t) - b_h^u \quad \forall i \varepsilon I, h \varepsilon C \tag{2.62}$$

$$H_{hi} = S_i \frac{exp[\theta_i b_{hi}]}{\sum_{g\varepsilon C} exp[\theta_i b_{gi}]} \quad \forall i\varepsilon I,\, h\varepsilon C \tag{2.63}$$

$$\sum_{i\varepsilon I} H_{hi} = H_h \quad \forall h\varepsilon C \tag{2.64}$$

Capítulo 3

Formulación del Modelo

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la formulación de un modelo estocástico de equilibrio general urbano que integra el sistema de uso de suelo, sistema de intercambio de bienes y sistema de transportes, siendo la principal motivación para su desarrollo, estudiar la relación que existe entre ellos. La localización de los distintos agentes (Hogares y firmas) influye directamente en la estructura de viajes y en el intercambio de bienes y servicios, mientras que los costos asociados a transporte, son relevantes a la hora de elegir localización y cantidades de consumo.

El sistema de uso de suelo considera localización residencial y de firmas e intercambios de bienes y servicios y su sub-modelo de demanda esta inspirado en RELUTRAN (Anas y Liu, 2007), modificando ciertos elemenos, algunos de los cuales se presentan en el siguiente listado:

1. Variaciones en la forma funcional de la utilidad de los hogares. La función de utilidad que se presenta en esta tesis corresponde a una función tipo Cobb-Douglas, mientras que en RELUTRAN, corresponde a una función tipo C.E.S.

2. Variación en los atributos de las elecciones continuas, por ejemplo, en la formulación de hogares presentada en esta tesis, las localizaciones pueden tener distintos tipos v, a diferencia de RELUTRAN, en que esta variable solo depende de la cantidad de metros cuadrados.

3. El consumo de bienes y servicios dependen del lugar de producción j', a diferencia de RELUTRAN donde se diferencian por el tipo de firma.

4. La distribución de errores que se asume es distinta en ambos casos (Gumbel en RELUTRAN y Fréchet en el presente documento), lo anterior, a raíz de las diferencias modeladas en las formas funcionales. La actual formulación presenta demostración de unicidad y existencia.

5. El modelo para el sistema de transportes que se presenta en esta tesis corresponde al MTE (Baillon y Cominetti, 2008), mientras que en RELUTRAN la elección de ruta se realiza a través de un Logit Multinomial.

6. El proceso de localización en esta formulación se realiza a través de un proceso de remates, mientras que en RELUTRAN es a través de la maximización de la utilidad.

3.2. Estructura del modelo de uso de suelo

Se asume que el suelo metropolitano disponible en el modelo, se divide en I zonas, donde se pueden realizar todas las actividades posibles permitidas en la simulación, que son: consumo, localización y trabajo. En cada zona, pueden existir potencialmente alguno de los $v = 1,...,V$ tipos de bienes inmuebles disponibles, donde se pueden localizar los agentes del modelo, que son de dos tipos: hogares y firmas.

Los hogares son potenciales trabajadores y consumidores de bienes y servicios, se agrupan en $h = 1,...,H$ categorías de acuerdo al tipo de trabajo que pueden realizar, la cantidad de hogares por categoría H_h es un dato exógeno. Cada uno de estos hogares h oferta un tipo de trabajo $k = 1,...,K$, de modo que se cumple $\sum_{h \varepsilon K} H_h = H_k$. Se localizan en la zona $i = 1,...,I$, en un bien inmueble del tipo $v = 1,...,V$, trabajan en una zona $j = 1,...,I$ y realizan viajes con propósito consumo a múltiples zonas $j' = 1,...,I$.

Las firmas son productoras y consumidoras de bienes y servicios y demandan mano de obra, se clasifican de acuerdo a su tipo de producción en categorías $r = 1,...,R$, demandan mano de obra de varios tipos indexadas por k, se localizan en una zona del tipo j y eligen un bien inmueble del tipo v. Las firmas producen en el mismo lugar en el que se localizan y se asume que en esa zona se venden sus productos.

3.2.1. Comportamiento de los hogares

Función de Utilidad

Se asume que los hogares se comportan de manera racional, maximizando su utilidad sujeta a restricciones de tiempo e ingreso. Realizan un conjunto de elecciones discretas: localización i, tipo de bien inmueble v y lugar de trabajo j, condicional a estas, toman la decisión continua de cuánto gasto destinar a consumo y localización.

Se utiliza una función tradicional de utilidad tipo Cobb-Douglas, que depende del consumo agregado de bienes, servicios y suelo, como se muestra a continuación en la ecuación 3.1, condicional a las elecciones discretas de localización (i), tipo de vivienda (v), lugar de trabajo (j) para el hogar (h). Luego, la función de utilidad se presenta en la ecuación 3.1

$$U_{h\backslash iv} = (\Pi_r z_r^{\alpha_{rh}}) q_{iv}^{\beta_h} \tag{3.1}$$

Aplicando logaritmo:

$$ln(U_{h\backslash iv}) = (\sum_r \alpha_{rh} ln(z_r)) + \beta_h ln(q_{iv})$$

Considerando que z_r corresponde a una agregación espacial de los bienes tipo r consumidos en todas las zonas, se puede escribir como: $z_r = \Pi_{j'} z_{rj'}^{\mu_{j'h}}$, por lo tanto, reemplazando en la expresión anterior se obtiene:

$$ln(U_{h\backslash iv}) = (\sum_{r} \alpha_{rh} \sum_{j'} \mu_{j'h} ln(z_{rj'})) + \beta_h ln(q_{iv})$$

Si realizamos la siguiente agrupación de variables $\alpha_{rh}\mu_{j'h} = \alpha_{rhj'}$, se puede escribir la función de utilidad como se muestra en la expresión 3.2

$$U_{h\backslash iv} = \sum_{rj'} \alpha_{rhj'} \ln(z_{rj'}) + \beta_h \ln(q_{iv}) + \varepsilon_{ivh} \tag{3.2}$$

Finalmente, en la expresión 3.2 se agrega un término de error que distribuye i.d.d.Gumbel, ya que pueden haber elecciones que no se expliquen a través de los parámetros considerados inicialmente, junto con incluir diferencias en la información que perciben los usuarios. Cada termino en 3.2, representa lo siguiente:

$\alpha_{rhj'}$: Elasticidad de la utilidad respecto del consumo agregado de un bien tipo r, en la zona j' para el hogar tipo h.

$z_{rj'}$: Consumo agregado del bien tipo r en la zona j'. Variable continua.

β_h: Elasticidad de la utilidad respecto del tamaño del bien inmueble.

q_{iv}: Cantidad de metros cuadrados del bien inmueble tipo v, localizado en la zona i. Variable continua.

ε_{ivh}: Error aleatorio que se asume que distribuye i.i.d. Gumbel.

En la función de utilidad anterior, se aprecia que los bienes y servicios z_{rj} se diferencian por tipo y localización. La justificación de la primera categoría es trivial, mientras que la segunda se justifica en el valor agregado que puede tener cierto bien o servicio en un lugar determinado respecto de otro, ya que los agentes pueden valorar de distinta forma atributos como calidad de atención, tipo de local o la ubicación del mismo.

De la misma forma, la cantidad de metros cuadrados q_{iv} se diferencia en localización y tipo del bien inmueble. Un agente discrimina entre una zona u otra tanto por sus características físicas (presencia de áreas verdes, supermercados, cerros, etc.), como por características socio económicas (tipos de vecinos, prestigio del sector, etc.). Complementando lo anterior, es intuitivo que un agente perciba distinta utilidad dependiendo del tipo de bien inmueble, esto se debe principalmente, a que, hogares con diferente estructura interna deberían valorar distintos atributos. Así por ejemplo, la existencia de un patio trasero o disponibilidad de estacionamiento pueden ser relevantes a la hora de elegir, dependiendo que tipo de agente que busque localización.

Al ser una función tipo Cobb-Douglas, los parámetros deben cumplir con las siguientes condiciones: $\sum_r \alpha_r$, $\beta_h > 0$, además, se asume que existen retornos constantes a escala, por lo tanto, las elasticidades deben cumplir con: $\sum_r \alpha_r + \beta_h = 1$. El tratamiento que se le da a los bienes y servicios, tiene una sub-estructura similar a una función tipo C.E.S. pero se realizan algunos cambios, con el fin de representar mejor la agregación de consumo espacial, mientras que el consumo de metros cuadrados sigue un tratamiento tradicional.

Finalmente, la atractividad se asume como variable exógena (el modelo no considera externalidades de localización).

Restricciones

La restricción de ingreso, considera que el dinero disponible se debe repartir entre costos de transporte, vivienda y consumo de bienes y servicios, por lo tanto, cuánto asignar a cada actividad debe ser una decisión racional. La jornada laboral se asume variable, es decir, los agentes pueden tener tanto ingreso como quieran destinando más tiempo a este propósito, mientras que, la tasa salarial depende del tipo de especialización del agente. Todo lo mencionado anteriormente, se expresa en la formulación de la restricción 3.3

$$\sum_{rj'}(p_{rj'} + g_h^r c_{ij'})z_{rj'} + q_{iv}R_{iv} + c_{ij}g_h^w = t_{hj}^w w_{hj} \tag{3.3}$$

donde cada variable representa lo siguiente:

$p_{rj'}$: Corresponde al precio del bien del tipo r en la zona j'.

g_h^r: Es la cantidad de viajes que realiza el hogar tipo h para consumir una unidad del bien tipo r.

$c_{ij'}$: Es el costo para ir desde una zona i hasta una zona j'

$z_{rj'}$: Consumo agregado del bien tipo r en la zona j'.

q_{iv}: Cantidad de metros cuadrados del bien inmueble tipo v, localizado en la zona i.

R_{iv}: Valor por metro cuadrado de bien inmueble del tipo v localizado en i.

g_h^w: Es la cantidad de viajes que realiza el hogar tipo h por propósito trabajo.

t_{hj}^w: Es el tiempo en horas, dedicado al trabajo por el hogar tipo h en la zona j.

w_{hj}: Es la tasa salarial por hora, para un hogar que ofrece un tipo de trabajo h en la zona j.

Análogamente, la restricción de tiempo reconoce a este recurso como escaso, en consecuencia, el agente debe tomar decisiones racionales en su consumo. Cada agente puede destinar tiempo a cualquiera de las actividades existentes en el modelo, que en este caso en particular, corresponden a trabajo, consumo y tiempo de viaje, no superando el total disponible en el intervalo de simulación. Lo anterior se formula en la restricción 3.4

$$t_{hj}^w + \sum_{rj'} t_{ij'r} g_h^r z_{rj'} + t_{ij}g_h^w = T \tag{3.4}$$

donde cada variable representa lo siguiente:

$t_{ij'r} = t_{ij'} + t_r$: Tiempo de viaje desde el lugar de localización del hogar i hasta el lugar de consumo j'. Considera además el tiempo de consumo en caso de que se trate de un bien t_r

$z_{rj'}$: Consumo agregado del bien tipo r en la zona j'.

T: Tiempo total de un cierto intervalo temporal, se mide en horas y representa el intervalo de modelación

Se asume que el hogar solo asigna tiempo a trabajo, consumo y a viajes por esos propósitos, por lo tanto, al consummir existe un costo de oportunidad equivalente a la tasa salarial para cada tipo de hogar.

Ya que en ambas restricciones se encuentra el término t^w_{hj} y como no es parte de la función de utilidad, se puede reemplazar, luego, 3.4 en 3.3:

$$\sum_{rj'}(p_{rj'} + g^r_h c_{ij'})z_{rj'} + q_{iv}R_{iv} + c_{ij}g^w_h = (T - \sum_{rj'} t_{ij'r}g^r_h z_{rj'} - t_{ij}g^w_h)w_{hj} \tag{3.5}$$

Agrupando términos similares, se puede escribir:

$$\sum_{rj'}(p_{rj'} + g^r_h(c_{ij'} + w_{hj}t_{ij'r}))z_{rj'} + q_{iv}R_{iv} = (T - t_{ij}g^w_h)w_{hj} - c_{ij}g^w_h \tag{3.6}$$

En 3.6 se puede definir el precio generalizado de un bien $z_{rj'}$ para un hogar que se localiza en i y que trabaja en j como se muestra en la ecuación 3.7.

$$\phi_{ijj'rh} = p_{rj'} + g^r_h(c_{ij'} + w_{hj}t_{ij'r}) \tag{3.7}$$

Se observa que el precio generalizado por un determinado bien considera la tarifa del bien p_{rj}, costo de transporte c_{ij} y además un factor $w_{hj}t_{ij'r}$ que se puede interpretar como el costo de oportunidad del tiempo dedicado al viaje.

Mientras que el lado derecho de 3.6 se puede definir como el ingreso disponible para consumo y vivienda como se muestra en la ecuación 3.8

$$I_{ijh} = (T - t_{ij}g^w_h)w_{hj} - c_{ij}g^w_h \tag{3.8}$$

La expresión $(T - t_{ij}g^w_h)w_{hj}$ corresponde al tiempo total disponible del agente multiplicado por la tasa salarial, por lo que, se puede entender como el ingreso bruto, mientras, $c_{ij}g^w_h$ representa el costo de los viajes realizados por motivo trabajo.

Finalmente, la restricción 3.6 se puede escribir como se muestra en la ecuación 3.9

$$\sum_{rj'}\phi_{ijj'rh}z_{rj'} + q_{iv}R_{iv} = I_{ijh} \tag{3.9}$$

De manera que el lagrangeano del problema de maximización de la utilidad 3.2 sujeto a la restricción 3.9 se puede escribir de la siguiente manera:

$$L = \sum_{rj'}\alpha_{rhj'}\ln(z_{rj'}) + \beta_h\ln(q_{iv}) + E_{ivh} + \varepsilon_{ivh} - \lambda(I_{ijh} - \sum_{rj'}\phi_{ijj'rh}z_{rj'} - q_{iv}R_{iv}) \tag{3.10}$$

Condiciones de primer orden

Con el fin de obtener los consumos óptimos de las variables continuas (tamaño de bien inmueble y bienes y servicios) se aplican las condiciones de primer orden sobre 3.10.

Luego, resolviendo $\dfrac{\partial L}{\partial q_{iv}} = 0$, se obtiene:

$$\beta_h / q_{iv} - \lambda R_{iv} = 0$$

$$\lambda = \frac{\beta_h}{q_{iv} R_{iv}} \tag{3.11}$$

Mientras que en el segundo caso $\dfrac{\partial L}{\partial z_{rj'}} = 0$, tenemos lo siguiente:

$$\frac{\alpha_{rj'h}}{z_{rj'}} - \lambda \phi_{ij'rhj} = 0$$

$$\frac{\alpha_{rj'h}}{z_{rj'} \phi_{ij'rhj}} = \lambda \tag{3.12}$$

Ahora, igualando la ecuación 3.11 con 3.12, y despejando $z_{rj'}$:

$$z_{ijj'rhv} = \frac{\alpha_{rj'h} q_{iv} R_{iv}}{\beta_h \phi_{ijj'rh}} \tag{3.13}$$

Reemplazando 3.13 en 3.9, se tiene:

$$\sum_r \sum_{j'} \phi_{ijj'rh} * (\frac{\alpha_{rj'h} q_{iv} R_{iv}}{\beta_h \phi_{ijj'rh}}) + q_{iv} R_{iv} = I_{ijh} \tag{3.14}$$

Factorizando la expresión anterior:

$$q_{iv} R_{iv} (\frac{\sum_{rj'} \alpha_{rj'h}}{\beta_h} + 1) = I_{ijh}$$

Imponiendo la condición $\sum_{rj'} \alpha_{rj'h} + \beta_h = 1$ se encuentra la cantidad óptima de terreno:

$$q_{ijhv} = \frac{\beta_h I_{ijh}}{R_{iv}} \tag{3.15}$$

Con este resultado, se puede obtener el valor de λ, que corresponde a la utilidad marginal del ingreso, reemplazando 3.15 en 3.11:

$$\lambda = 1/I_{ijh} \tag{3.16}$$

Luego, reemplazando 3.16 en 3.12, se obtiene la cantidad óptima de consumo de bienes y servicios

$$\frac{\alpha_{rj'h}}{z_{rj'} \phi_{ijj'rh}} = \frac{1}{I_{ijh}} \tag{3.17}$$

Finalmente, despejando se obtiene $z_{rj'}$,

$$z_{ijj'rh} = \frac{I_{ijh} \alpha_{rjh}}{\phi_{ijj'rh}} \tag{3.18}$$

Se hace notar que ambas expresiones (3.15 y 3.18), cumplen con la forma tipo de demandas óptimas de la función Cobb-Douglas.

Función de Utilidad indirecta condicional

Las ecuaciones 3.15 y 3.18 corresponden a las demandas marshalianas para tamaño del bien inmueble y consumo de bienes y servicios óptimos, que son soluciones del problema de optimización 3.2, condicionales al conjunto de elecciones discretas (i,j,v).

Luego, reemplazando 3.15 y 3.18 en 3.2 se obtiene la función de utilidad indirecta, condicional a las elecciones discretas, como se muestra en la ecuación 3.19.

$$V_{h\backslash ijv} = \sum_{rj'} \alpha_{rj'h}(ln(\frac{I_{ijh}\alpha_{rjh}}{\phi_{ijj'rh}})) + \beta_h(\ln(\frac{\beta_h I_{ijh}}{R_{iv}})) + \varepsilon_{ivh} \tag{3.19}$$

Disposición a pagar hogares

Para obtener la disposición a pagar, se debe invertir la expresión 3.19 en la renta del bien inmueble R_{iv}, obteniendo la siguiente expresión 3.20

$$DP_{ijvh} = exp\left(\frac{1}{\beta_h}(ln(I_{ijh}) + \sum_{rj'}\alpha_{rj'h}ln(\alpha_{rj'h}) - \sum_{rj'}\alpha_{rj'}ln(\phi_{ijj'r}) + \beta_h ln(\beta_h) - V_h)\right) exp\left(\frac{\varepsilon_{ivh}}{\beta_h}\right) \tag{3.20}$$

Se observa que la expresión anterior depende del lugar de trabajo j, pues, este puede ser variable dependiendo de los valores de la tasa salarial w_{hj}.

Probabilidad de localización hogares

Debido a que inicialmente se asume que el error para cada categoría de hogar ε_{ijvh} distribuye i.i.d. Gumbel, es correcto asegurar que $exp(\varepsilon_{ijvh}/\beta_h)$ sigue una distribución tipo Frechét (Mattson et al), por lo tanto, la probabilidad de que un hogar h sea el mejor postor en (i,j,v) viene dada la expresión 3.21

$$P_{h\backslash ijv} = \frac{DP_{ijvh}(w_{hj},V_{iv},p_{ri})^{\mu}}{\sum_g DP_{ijvg}(w_{gj},V_{iv},p_{ri})^{\mu}} \tag{3.21}$$

que representa el mercado de remates, donde el ofertante del bien inmueble de características (v,i) es quién elige al mejor postor h.

Finalmente, μ corresponde al parámetro de escala, que corresponde al inverso de la varianza de las posturas. Mientras menor sea, mayor variabilidad existe, haciendo más aleatoria la elección.

3.2.2. Comportamiento de las firmas

Función de gastos

Se asume que una industria se compone de una o varias firmas, que se pueden localizar en las distintas zonas disponibles y se comportan de manera racional, lo que en este caso corresponde a minimizar sus costos. Se modelan a través de una función de gastos lineal sujeta a un nivel de producción dado. Al igual que en la formulación del comportamiento de hogares, se imponen retornos constantes a escala.

Las firmas realizan elecciones discretas de localización $j = 1,...,I$ y de tipo de bien inmueble $v = 1,...,V$, condicional a estas, se obtiene el consumo óptimo de los demas insumos necesarios para la producción (variables continuas), que en este caso particular serán: capital K, mano de obra por tipo L_h, tamaño del bien inmueble q_{jv} y bienes intermedios necesarios $y_{sj'}$.

La función de gastos a utilizar se muestra en la expresión 3.22:

$$g_{jv} = \varrho K_r + \sum_h w_{hj} L_h + q_{jv} R_{jv} + \sum_s \sum_{j'} p_{sj'j} y_{sj'} \tag{3.22}$$

donde cada variable representa lo siguiente:

ϱ: Costo de oportunidad del capital. Si bien se puede calibrar, en este caso se utiliza como variable exógena.

K_r:Capital de la firma r.

w_{hj}: Es la tasa salarial por hora, para un hogar que ofrece un tipo de trabajo h en la zona j. Es parte del equilibrio.

L_h: Mano de obra, en horas por tipo de trabajo h. Variable continua.

q_{jv}: Cantidad de metros cuadrados del tipo de bien inmueble v, localizado en j. Variable continua.

R_{jv}: Valor por metro cuadrado de bien inmueble del tipo v localizado en j.

$p_{sj'j} = p^*_{sj'} + \iota_s c_{j'j}$: Valor total del bien intermedio del tipo s que se compra desde j'. Considera el precio del bien $p^*_{sj'}$ y el costo de transporte desde el lugar de compra j' al lugar de producción j . ι_s es un factor que permite transformar el costo por pasajero a costo por unidad de bien intermedio.

$y_{sj'}$: Bienes intermedios del tipo s, localizado en j'. Variable continua.

Todos los precios de los insumos se definen estrictamente positivos $(\varrho, w_{hj}, R_{jv}, p_{sj'}) > 0$. Cada firma requiere varios tipos de mano de obra h y se localiza en un solo lugar j. Recordando que una industria se define como un conjunto de firmas es posible formular el problema de esta manera sin generar concentración espacial en la producción. La tasa salarial depende del tipo de trabajo h y de su localización, recogiendo el fenónemo de variación de salarios dependiendo de la zona.

Finalmente, con respecto al consumo de bienes por parte de las firmas, estos se definen como insumos necesarios para su funcionamiento.

Función de producción

Para evitar la solución trivial (costo cero), la función de producción se encuentra restringida por un nivel de producción X_{rj} mínimo dado, la que es una función tipo Cobb-Douglas como se muestra en la ecuación 3.23

$$X_{rj} = A_{rj} K_r^{\nu_r} \Pi_h L_h^{\delta_{rh}} q_{jv}^{\mu_r} \Pi_{sj'} (y_{sj'})^{\gamma_{rsj'}} \tag{3.23}$$

donde cada variable representa lo siguiente (se mencionan solo las no explicadas hasta el momento):

A_{rj}: Parámetro de escala de la producción de la firma r, localizada en j.

v_r: Elasticidad de la producción de la firma r con respecto al capital.

δ_{rh}: Elasticidad de la producción de la firma r con respecto a la mano de obra h.

μ_r: Elasticidad de la producción de la firma r con respecto a la cantidad de suelo.

$\gamma_{rsj'}$: Elasticidad de la producción de la firma r con respecto a la producción intermedia del tipo s, que viene desde la zona j utilizada.

El parámetro de escala A_{rj} permite aumentar o disminuir la producción sin variar la proporción de los insumos. En el marco de esta tesis, permite ajustar la producción y por consiguiente, las posturas.

Luego, para determinar la función de mínimo gasto se debe minimizar el lagrangeano siguiente:

$$L = -(\varrho K_r + \sum_h w_{hj} L_h + q_{jv} R_{jv} + \sum_s \sum_{j'} p_{sj'j} y_{sj'}) + \lambda(\ln(X_{rj} - A_{rj} K^{v_r} \Pi_h L_h^{\delta_{rh}} q_{jv}^{\mu_r} \Pi_s (\sum_{j'} \varphi_{j'r} y_{sj'})^{\gamma_{sr}}) \tag{3.24}$$

En la ecuación se aplicó $In()$ para que fuese más fácil el álgebra.

Condiciones de primer orden

En total son cuatro las condiciones de primer orden para el caso de las firma: $(\frac{\partial L}{\partial K_r}) = 0)$, $(\frac{\partial L}{\partial L_h} = 0)$, $(\frac{\partial L}{\partial q_{vi}} = 0)$ y $((\frac{\partial L}{\partial y_{sj}} = 0)$, si se despeja el multiplicador de lagrange asociado en cada caso, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\lambda = -\frac{\varrho K_r}{v_r} \tag{3.25}$$

$$\lambda = -\frac{w_{hj} L_h}{\delta_{rh}} \tag{3.26}$$

$$\lambda = -\frac{R_{jv} q_{jv}}{\mu_r} \tag{3.27}$$

$$\lambda = -\frac{p_{sj'j} y_{sj'}}{\varphi_{j'r}} \tag{3.28}$$

Igualando las ecuaciones 3.26, 3.27 y 3.28 a 3.25 se obtienen 3.29, 3.30 y 3.31

$$L_{hj/r} = \frac{\varrho K_r \delta_{rh}}{v_r w_{hj}} \tag{3.29}$$

$$q_{iv/r} = \frac{\mu_r K_r \varrho}{v_r R_{iv}} \tag{3.30}$$

$$y_{sj'/r} = \frac{\varrho K_r \gamma_{rsj'}}{v_r p_{sj'j}} \tag{3.31}$$

Luego, reemplazando 3.29, 3.30 y 3.31 en 3.23 e imponiendo retornos constantes a escala: $v_r + \sum_h \delta_{rh} + \mu_r + \sum_s \gamma_{sr} = 1$ se encuentra el valor óptimo para el capital:

$$K_{rj/v} = \frac{v_r}{\varrho} \frac{X_{rj} R_{jv}^{\mu_r} \varrho^{v_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}} \tag{3.32}$$

Se observa, que al reemplazar en la restricción de producción mínima, la renta R_{jv}, queda elevada a μ_r, lo anterior, será relevante al momento de determinar las disposiciones a pagar para las firmas, ya que condiciona su forma funcional.

Luego, reemplazando 3.32 en 3.29, se obtiene el valor óptimo de la mano de obra, el cual se indica a continuación:

$$L_{hj/r} = \frac{\delta_{rh}}{w_{hj}} \frac{X_{rj} R_{jv}^{\mu_r} \varrho^{v_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}} \tag{3.33}$$

De la misma forma, para la cantidad de terreno óptimo se tiene (3.32 en 3.30):

$$q_{iv/r} = \frac{\mu_r}{R_{jv}} \frac{X_{rj} R_{jv}^{\mu_r} \varrho^{v_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}} \tag{3.34}$$

Finalmente, la cantidad de bienes intermedios óptima, se obtiene reemplazando 3.32 en 3.31:

$$y_{rj'/v} = \frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}} \frac{X_{rj} R_{jv}^{\mu_r} \varrho^{v_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}} \tag{3.35}$$

Función de costos

Se observa que mientras en Anas y Liu, las demandas por insummos quedan en función de la producción y precios (x_{rj},p_{rj}) en este caso dependen de la producción y la renta esperada (x_{rj},R_{jv}),ya que esta forma se puede obtener directamente la disposición a pagar; permitiendo generar el proceso de remate.

Reemplazando 3.32, 3.33 y 3.35 en la función de gasto definida inicialmente 3.22 se obtiene la función de costos para la firma r condicional al lugar de localización j, como se muestra en la ecuación 3.36

$$C_{rj} = \frac{X_{rj} R_{jv}^{\mu_r} \varrho^{v_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}} \tag{3.36}$$

Disposición a pagar firmas

Invitiendo la ecuación 3.36 con respecto a la renta, se obtiene la función de disposicón a pagar de la firma r en j, como se señala en el ecuación 3.37:

$$DP_{rj} = \sqrt[\mu_r]{\frac{A_{rj}\Pi_h(\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'}(\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}} C_{rj}}{\varrho^{v_r} X_{rj}}} \tag{3.37}$$

Como se explico anteriormente, al estar la renta R_{jv}, elevada a μ_r, la forma funcional de la disposición a pagar es una raíz. Lo anterior, marca una clara diferencia con RELUTRAN, que utiliza funciones de utilidades exponenciales.

Se asume que el error aleatorio asociado a la función de disposición a pagar pertenece al intervalo $(0,\infty^+)$, por lo tanto, corresponde utilizar la distribución de error Fréchet.

Probabilidad de localización firmas

Luego, la probabilidad de localización de las firmas viene dada por la ecuación 3.38

$$P_{r\backslash j'} = \frac{DP_{rj}(w_{hj},X_{rj},C_{rj},p_{rj})^{\mu}}{\sum_g DP_{gj}(w_{gj},X_{gj},C_{rj},p_{gi})^{\mu}} \tag{3.38}$$

Finalmente, al igual que en el caso de los hogares, μ corresponde al parámetro de escala, que representa el inverso de la varianza en las posturas. Mientras menor sea, mayor variabilidad existe, haciendo más aleatoria la elección.

3.2.3. Oferta inmobiliaria

El modelo de oferta inmobiliaria es similar al utilizado en MUSSA, en el sentido que se mantienen los supuestos teóricos de este, pero donde la función de probabilidad cambia, ya que en este caso se trabaja con un error tipo Frechét, por lo tanto, la probabilidad de ofertar una cierta cantidad de viviendas del tipo (v,i) ya no es un Logit Multinomial.

El excedente por bien inmueble v localizado en i, es la diferencia entre la renta r_{vi} y el costo c_{ivf} y viene dado por la siguiente expresión:

$$\Pi_{vif} = r_{vi} - c_{vif} \tag{3.39}$$

Ciertas propiedades de las localizaciones de firmas desarrolladoras inmobiliarias justifican que el excedente varíe a través del par (v,i), como lo podrían ser: la movilidad de recursos, las diferencias entre las condiciones de los mercados y diferencias en la información. Una de las principales diferencias, es la posibilidad de existencia de regulación en las distintas zonas, lo que puede hacer que el excedente cambie entre ellas y hace que más realista el problema. Además, se considera la posible presencia de economías de escala, dentro de una firma y de una zona, o economías de densidad a través de las firmas y zonas, por lo que, la función de costos depende de la oferta $c_{vif} = c_f(S_{..})$, por lo tanto, el problema de oferta inmobiliaria es un problema de punto fijo.

Si P_{vif} es la probabilidad de que la constructora f oferte bienes inmuebles de características (v,i) y S_f es la oferta total de la constructora f, en todas las zonas, entonces la oferta S_{vi} viene dada por :

$$S_{vi} = \sum_f S_f P_{vif} \tag{3.40}$$

Ahora bien, si consideramos un error aleatorio tipo Frechét para el excedente de las constructoras y que $S_f = \sum_f N^* P_f$, con N^* la oferta total en el área urbana, la ecuación 3.40 se puede escribir de la siguiente manera:

$$S_{vi} = N \sum_f P_f \frac{(r_{vi} - c_{vif})^{\lambda}}{\sum_{v'i'j'}(r_{v'i'} - c_{v'i'f'})^{\lambda}} \tag{3.41}$$

La demostración de convergencia del problema se encuentra en RB& SM (Martínez, 2007)

3.3. Ecuaciones de equilibrio entre oferta y demanda

El modelo propuesto presenta un equilibrio tipo Walras entre oferta y demanda en tres mercados: bienes y servicios, mano de obra y localización de hogares y firmas, cada una de las cuales es un problema de punto fijo.

Precio de los bienes y servicios

En el equilibrio se impone que el precio sea igual al costo marginal, luego, se cumple la condición $(p_{rj} = \frac{\partial C^*_{rj}}{\partial X_{rj}})\forall(r,j)$, donde por evaluación directa se obtiene el precio de los bienes indicado en la ecuación 3.42

$$p_{rj} = \frac{\varrho^{v_r} R_{jv}^{\mu_r}}{A_{rj}\Pi_h(\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \gamma_{sr}^{\sum_s \gamma_{sr}} \Pi_{sj'}(\frac{\gamma_{sr}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{sr}} \varphi_{j'r}^{\sum_s \gamma_{sr}}} \tag{3.42}$$

En 3.42 se observa que el precio de un bien o servicio depende de la tasa salarial w_{hj}, el precio de otros bienes y servicios $p_{sjj'}$ y la renta de la firma R_{jv}, luego, corresponde a una ecuación de punto fijo, $p = f(p)$, condicional en la renta R_{jv}.

Producción de las firmas

La producción de una firma r en se localiza en j debe ser igual a los bienes que consumen los hogares en j más los que son utilizados por las otras firmas para su producción:

$$X_{rj} = \sum_{j'\varepsilon I}\sum_{i\varepsilon I}\sum_{h\varepsilon H} H_h z_{ijj'rh} + \sum_{j'\varepsilon I}\sum_{s\varepsilon R} y_{j's\backslash rj} \quad \forall r,j \tag{3.43}$$

donde z_{ijrh} y $y_{j's\backslash rj}$ representan los valores óptimos de consumo de bienes y de producción intermedia obtenidos a través de las condiciones de primer orden en el modelo de uso de suelo.

De la ecuación 3.43, se obtiene la producción X_{rj} en el equilibrio, reemplazando directamente por los valores óptimos encontrados, se llega a la expresión 3.44

$$X_{rj} = \sum_i \sum_{j'} \sum_h H_h \left(\frac{\alpha_r l_{ijh}}{\phi_{ijj'rh}} \right) + \sum_{j'} \sum_s \left(\frac{\gamma_{sr}}{p_{sj'j}} \frac{\varrho^{v_r} X_{rj} R_{jv}^{\mu_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \gamma_{sr}^{\sum_s \gamma_{sr}} \Pi_s (\frac{\gamma_{sr}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{sr}} \varphi_{j'r}^{\sum_s \gamma_{sr}}} \right) \tag{3.44}$$

La producción depende de los precios de equilibrio óptimos, de la renta del terreno R_{jv} y de la producción de bienes y servicios X_{rj}, por lo tanto, es un problema de punto fijo de la forma $x = f(x,R)$, condicional en R_{jv}.

Mano de obra

La cantidad total de horas de trabajo, $L_{hj/r}$, del tipo h requerida por cada industria existente en una zona j, deber ser igual a la ofertada por los hogares, de acuerdo a como se describe en la ecuación 3.45.

$$\sum_r L_{hj/r} = t_{hj}^w H_h \quad \forall (h,j) \tag{3.45}$$

donde t_{hj}^w representa la cantidad de horas dedicadas a trabajo del tipo h en j y H_h es el total de agentes del tipo h. Tomando en cuenta la ecuación 3.29, se tiene que $L_{hj\backslash r} = \dfrac{\varrho K \delta_{rk}}{v_r w_{hj}}$ (con K el valor óptimo del capital, dado por la expresión 3.32), por lo tanto, es posible despejar el valor de la tasa salarial w_{kj} en la ecuación 3.45, como sigue a continuación:

$$w_{hj} = \frac{1}{t_{hj}^{w*} H_h} \sum_r \left(\frac{\varrho K^* \delta_{rh}}{v_r} \right) \tag{3.46}$$

donde $t_{hj}^{w*} = \sum_i (T - \sum_{rj'} t_{ij'} g_h^r z_{rj'} - \sum_j t_{ij})$, de acuerdo a la restricción de tiempo de la formulación los hogares (ecuación 3.4). Dado que tanto K^* como t_{hj}^w dependen de w_{hj}, la expresión 3.46 también corresponde a un punto fijo de la forma $w = f(w)$.

3.4. Equilibrio en el uso de suelo

El equilibrio en el uso de suelo asume que ambos agentes, firmas y hogares, comparten la oferta disponible. Para equilibrar la demanda a la oferta inmobiliaria, las disposición a pagar de las firmas se ajustarán a través de la produción de bienes y servicios, mientras que las disposiciones a pagar de los hogares lo harán mediante su nivel de utilidad. Es así como primero se debe definir la demanda o consumo de suelo que tendrán las firmas, para luego realizar el equilibrio en hogares con la oferta disponible.

Para el caso de las firmas, se obtiene el consumo de suelo a través de la expresión 3.47

$$\sum_r S_{vi} P_{r/i}(X_{rj}) = N_{vi} \quad \forall i \tag{3.47}$$

donde S_{vi}, es la oferta inmobiliaria disponible de tipo v en i, $P_{r/i}((X_{rj})$ es la probabilidad de localización de r en i, se indica que depende de X_{rj}, pues se ajustará a través de la producción de bienes y servicios; finalmente, N_{vi} es el consumo de suelo de las todas las industrias en i.

Mientras que los hogares, verifican la condición de equilibrio 4.7, que se presenta a continuación:

$$\sum_{vij}(S_{vi}-N_{vi})P_{h/ijv}(V_h)=H_h \quad \forall h \tag{3.48}$$

en este caso $(S_{vi}-N_{vi})$ representa las localizaciones disponibles para hogares, $P_{h/ijv}(V_{ijvh})$ es la probabilidad de localización de h en iv dado que trabaja en j, se indica que depende de V_{ijvh}, pues se ajustará a través de la utilidad de los hogares y H_h es la cantidad exógena de hogares de tipo h.

Para ajustar las posturas a la oferta inmobiliaria disponible, se considerá que la función de disposición a pagar se puede separar de la siguiente forma: $DP_{ijvh}=b_hB_{ijvh}$, luego recordando la expresión 3.20

$$DP_{ijvh}=exp\left(\frac{1}{\beta_h}(ln(I_{ijh})+\sum_{rj'}\alpha_{rj'h}ln(\alpha_{rj'h})-\sum_{rj'}\alpha_{rj'}ln(\phi_{ijj'r})+\beta_h ln(\beta_h)-V_h)\right)exp\left(\frac{\varepsilon_{ivh}}{\beta_h}\right)$$

en este caso particular, las expresiones b_h y B_{ijvh} corresponden a:

$$b_h=exp(-V_h)$$

$$B_{ijvh}=exp\left(\frac{1}{\beta_h}(ln(I_{ijh})+\sum_{rj'}\alpha_{rj'h}ln(\alpha_{rj'h})-\sum_{rj'}\alpha_{rj'}ln(\phi_{ijj'r})+\beta_h ln(\beta_h))\right)exp\left(\frac{\varepsilon_{ivh}}{\beta_h}\right)exp(1/\frac{1}{\beta_h})$$

Finalmente, considerando la ecuación 4.7, el factor de ajuste viene dado por la expresión 3.49:

$$b_h=\frac{-1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{H_h}\sum_{vij}S_{vij}exp\mu(B_{hvij}-r_{iv(b_h)})\right) \tag{3.49}$$

Que para en este caso en particular, se expresa de la siguiente forma:

$$V_h=\frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{H_h}\sum_{vij}S_{vij}exp\mu(B_{hvij}-r_{iv(b_h)})\right) \tag{3.50}$$

el detalle de cómo obtener la expresión anterior se presenta en la siguiente sección.

3.5. Demostración unicidad y existencia de solución

En esta sección se demuestra la existencia y unicidad para el problema de punto fijo en localización del sistema de uso de suelo, para ambos agentes, donde el error aleatorio sigue una distribución tipo Fréchet.

3.5.1. Punto fijo equilibrio localización hogares

Recordemos, una de la ecuaciones de equilibrio para hogares:

$$\sum_{vij}S_{vi}P_{h\backslash ivj}=H_h \tag{3.51}$$

Donde el término $P_{h\backslash ivj} = \dfrac{DP^{\mu}_{ijvh}}{\sum_{gj} DP^{\mu}_{ijvg}}$ es la probabilidad de que el hogar h sea el mejor postor en el bien inmueble de características (vi). Si consideramos que la renta del bien inmueble es igual al valor esperado de la máxima postura, podemos escribir esta probabilidad de la siguiente manera:

$$P_{h\backslash ivj} = \frac{DP^{\mu}_{ijvh}}{(r_{iv})^{\mu}} \tag{3.52}$$

Luego, reemplazando 3.52 en 3.51 queda lo siguiente:

$$\sum_{vij} S_{vi}(\frac{DP^{\mu}_{ijvh}}{(r_{iv})^{\mu}}) = H_h \tag{3.53}$$

Considerando que la función de postura se puede separar en dos partes, se puede escribir lo siguiente: $DP_{ijvh} = b_h B_{ijvh}$, reemplazado en 3.53 se tiene:

$$b^{\mu}_h[\sum_{vij} \frac{S_{vi} B^{\mu}_{ijvh}}{r^{\mu}_{iv}}] = H_h \tag{3.54}$$

Despejando b_h queda lo siguiente:

$$b_h = H_h[\sum_{vij} S_{vi}(\frac{B_{ijvh}}{r^{\mu}_{iv}})]^{-1/\mu} \tag{3.55}$$

Debido a que r_{iv} depende de b_h, la ecuación 3.55 corresponde a un problema de punto fijo, aplicando logaritmo natural:

$$\ln(b_h) = \frac{-1}{\mu} \ln(\frac{1}{H_h} \sum_{vij} S_{vi}(\frac{B_{ijvh}}{r_{iv}})^{\mu}]) \tag{3.56}$$

Luego, se aplicando las siguientes transformaciones: $b_h = exp(b^{'}_h) \wedge B_{hi} = exp(B^{'}_{hi})$, la ecuación 3.56 se reescribe de la siguiente manera como se muestra en la expresión 3.57

$$b^{'}_h = \frac{-1}{\mu} \ln(\frac{1}{H_h} \sum_{vij} S_{vi} exp\mu(B^{'}_{ijvh} - r_{iv(b^{'}_h)})) \tag{3.57}$$

Considerando un punto fijo estándar de la forma $f(x) = x$ del cual se puede crear la siguiente función continua $g(x) = f(x) - x$, la que debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$g\prime(x) < 0,\ \forall x \epsilon R;\ \ g(x = 0) > 0;\ \ \exists x/g(x) < 0$$

La convergencia esta asegurada si $-2 < g\prime(x)$.

En este caso la función $g(x)$ queda definida de la siguiente manera:

$$g(b_h) = -\frac{1}{\mu} ln(\frac{1}{H_h} \sum_{vij} S_{vi} exp(\mu(B_{ijvh} - r_{iv}(b_h))) - b_h \tag{3.58}$$

El uso del signo $'$ en las componentes de la postura ya no es necesario, luego se comienza probando que $-2 < g\prime(x) < 0$, por lo que se tiene que:

$$-1 < g\prime(x) = \frac{\sum_{vi'j} S_{vi'j} exp(\mu(DP_{i'jvh} - r_{iv}))\frac{\partial r_{iv'}}{\partial b_h}}{\sum_{vi'j} S_{vi'} exp(\mu(DP_{i'hvj} - r_{iv'}))} < 1 \tag{3.59}$$

Si $\frac{\partial r_{i'}}{\partial b_h} = P_{h\backslash ivj}$, separando la desigualdad 3.59, se puede escribir que:

$$\sum_{vij'} S_{vi'} exp(\mu(DP_{i'jvh} - r_{i'h}))\frac{\partial r_{i'}}{\partial b_h} < \sum_{vi'j} S_{vi'} exp(\mu(DP_{i'jvh} - r_{i'h})) \tag{3.60}$$

$$\sum_{vi'j} S_{vi'} exp(\mu(DP_{i'jvh} - r_{i'h}))\frac{\partial r_{i'}}{\partial b_h} > -\sum_{vi'j} S_{vi'} exp(\mu(DP_{i'jvh} - r_{i'h})) \tag{3.61}$$

Ambas se cumplen siempre debido a que $P_{h/ivj}\epsilon$ [0,1] y porque las funciones exponenciales son siempre positivas.

Luego, nos queda demostrar que cambia de negativo a positivo. Puedo escribir $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(b_h) = -\frac{1}{\mu} ln[\sum_{vij} \frac{S_{vi}}{H_h} P_{h/ivj}(b_h)] \tag{3.62}$$

Entonces:

1. $g(b_h) > 0 \rightarrow \sum_{vij} S_{vi} P_{h/ivj} < H_h$, vale para $b_h \rightarrow -\infty$ porque $P(b_h = -\infty) = 0$
2. $g(b_h) < 0 \rightarrow \sum_{vij} S_{vi} P_{h/ivj} > H_h$, vale para $b_h \rightarrow \infty$ porque $P(b_h = \infty) = 1$ Exceptuando el caso cuando existe una sola categoría.

Por tanto, se concluye que la solución puede existe, sin embargo, este método no garantiza el resultado, ya que se cumple la condición necesaria pero no suficiente para el caso multivariado.

Capítulo 4

Aplicación del Modelo en un prototipo de Ciudad

4.1. Introducción

En este capítulo se reportará la implementación computacional programada y los parámetros a utilizar en las distintas simulaciones. Lo anterior, con el fin de verificar el correcto funcionamiento de la formulación propuesta.

En la primera sección se describirá de forma general el modelo computacional y su algoritmo de solución, luego, se presenta la ciudad propotipo que se utilizará en el marco de esta tesis y finalmente se reportan los parámetros de las simulaciones realizadas.

4.2. Modelo computacional

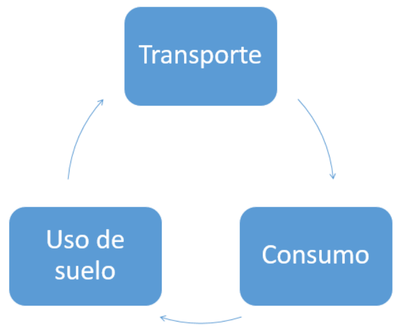
4.2.1. Breve descripción y estructura

El modelo computacional que se presentará en esta tesis permite simular el proceso de elección de localización en una cuidad, considerando consumo de bienes y servicios. Para lo anterior, se resuelven iterativamente las ecuaciones de punto fijo presentadas en el capítulo "Formulación del Modelo" y se cumplen con las condiciones del Markovian traffic equilibrium o MTE (Bailon y Cominetti, 2008) en el sistema de transporte privado, por lo tanto, se trata de un equilibrio entre tres sistemas: Suelo, transporte e intercambio de bienes y servicios. Como se puede apreciar en la figura 4.1

El programa se implementó sobre la base del modelo MITUS, programado en C ++. Inicialmente, en el "Main", se declaran las herramientas existentes que se utilizarán en la operatoria de matrices y se definen los espacios de trabajo.

A continuación, se define y se le asigna valor a las constantes globales propias del modelo, como el número de arcos, nodos, zonas, categorías de firmas y hogares y los parámetros de escala de las funciones Logit y Frechét utilizadas para asignación de las matrices a la red y localización de agentes respectivamente; estas guardan relación con la estructura de la simulación que se busca realizar, por lo tanto, su valor es exógeno.

Figura 4.1: Relación entre transporte, consumo y uso de suelo



Fuente: Elaboración propia

Luego, se procede a iniciar las variales a utilizar, las cuales no requieren un valor a priori, pues su valor es resultado del equilibrio, las cuales: Disposiciones a pagar, tasa salarial, producción y precios de bienes y servicios, tiempo y costo de viaje, variables auxiliares, etc; vectores de: elasticidades de las funciones de utilidad, variables auciliares, etc; y escalares, tales como: error tolerable entre iteraciones, número máximo de iteraciones, etc.

Una vez que se ha definido la estructura de la simulación y declarado las variables, se procede a implementar las rutinas con los ciclos que resuelven el problema propuesto. Las cuales se detallan a continuación:

1. Rutina de salida: Se programa la rutina de salida con los resultados de la simulación realizada, se reporta el tiempo total de ejecución, la cantidad de hogares y firmas de cada categoría por zona (H_{hi}) y (N_{ri}), flujo por arco (w_a), tiempo esperado de viaje (t_{ij}), el costo generalizado de viaje (c_{ij}), el nivel de congestión en los arcos(w_a/cap_a), la renta de hogares y firmas(R_{iv}), el precio de bienes y servicios (p_{rj}), la tasa salarial (w_{hj}) y la producción de bienes y servicios (X_{rj}).

2. Rutina de ejecución: En esta rutina se desarrolla la simulación como tal, se compone de tres ciclos: Equilibrio en el sistema de transporte, equilibrio en el mercado de bienes continuos y equilibrio en el uso del suelo.

   Equilibrio en el sistema de transporte (M.T.E.): En este caso, mediante un método iterativo se actuliza el valor de las variables propias del sistema de transporte, que son el tiempo (t_{ij}) y el costo de viaje c_{ij}. Consta de dos sub-etapas: Generación y distribución-asignación.

   Generación de viajes: A partir de las matrices de localización de los agentes (hogares y firmas) se actualiza la matriz de la generación de viajes, donde el valor de cada celda se obtiene a partir de la expresión lineal 4.1.

$$O_{hi} = \alpha_{hi} H_{hi} + \beta_{ri} N_{ri} + \delta_{hi} \tag{4.1}$$

donde α_{hi} y β_{ri} son tasas de generación de viajes exógenas, definidas dentro de las constantes globales, H_{hi} y N_{ri} son las matrices de localización de hogares y firmas respectivamente y finalmente, δ_{hi} es una variable de error aleatorio.

Distribución y asignación de viajes: Con la matriz de generación de viajes por agente obtenida en la etapa anterior, se realiza la distribución y asignación de viajes a la red a través del M.T.E. Los viajes desde i hasta d realizados por el agente h, vienen dados por la expresión 4.2

$$g_i^{dh} = O_{hi} P_{d/ih} \tag{4.2}$$

donde

$$P_{d/ih} = \frac{exp[-\mu_h(\tau_i^{dh}(t) - \gamma_d(H))]}{\sum_{k\epsilon D} exp[-\mu_h(\tau_i^{kh}(t) - \gamma_k(H))]} \tag{4.3}$$

es la probabilidad de elegir el destino d condicional al origen del viaje i y al agente de tipo h

Equilibrio en el mercado de bienes continuos: A través de un proceso iterativo se obtienen las matrices de las variables propias del modelo del mercado de bienes y servicios, que corresponden al precio de los bienes y servicios p_{rj}, la tasa salarial w_{hj} y la producción de las firmas X_{rj}, las cuales vienen dadas por los problemas de punto fijo presentados en las expresiones 4.4, 4.5 y 4.6 respectivamente.

$$p_{rj} = \frac{\varrho^{v_r} R_{jv}^{\mu_r}}{A_{rj} \Pi_h (\frac{\delta_{rh}}{w_{hj}})^{\delta_{rh}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \gamma_{sr}^{\sum_s \gamma_{sr}} \Pi_{sj'} (\frac{\gamma_{sr}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{sr}} \varphi_{j'r}^{\sum_s \gamma_{sr}}} \tag{4.4}$$

$$\sum_{rv} L_{hj\backslash rv} = t_{hj}^{w} H_h \quad \forall (h,j) \tag{4.5}$$

$$X_{rj} = \sum_{j'\epsilon I} \sum_{i\epsilon I} \sum_{k\epsilon K} H_k z_{ijj'rk} + \sum_{j'\epsilon I} \sum_{s\epsilon R} y_{j's\backslash rj} \quad \forall r,j \tag{4.6}$$

Equilibrio en el uso del suelo: En esta etapa se obtienen las matrices de localización de los agentes (hogares y firmas), como resultado del proceso de remates (equilibrio en el uso de suelo). Los valores del resto de las variables del modelo ya se encuentran actualizados a la iteración actual.

El proceso de localización se realiza de forma secuencial, primero se determina el consumo de suelo de las firmas, respecto del nivel de producción X_{rj} dado por 4.6. Lo anterior se determina a través de la siguiente ecuación:

$$\sum_r S_{vi} P_{r/i}(X_{rj}) = N_{vi} \quad \forall iv$$

Luego, recordando que comparten la misma oferta inmobiliaria, el suelo disponible para que se localicen los hogares viene dado por: $S^*_{vi} = S_{vi} - N_{vi}$. En el equilibrio, los hogares deben cumplir con la siguiente condición:

$$\sum_{vij} S^*_{vi} P_{h/ijv}(V_{ijvh}) = H_h \quad \forall h \tag{4.7}$$

En caso que no se cumpla el equilibrio, se procede a ajustar el nivel de utilidad de los hogares V_{hi}, mediante la expresión:

$$V_h = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{H_h} \sum_{vij} S_{vij} exp\mu(B_{hvij} - r_{iv(b_h)}) \right)$$

Por último, con el nuevo valor de las rentas R_{iv} se actualiza el valor de X_{rj} a través de la ecuación 4.6.

Convergencia: Existen 3 ciclos iterativos en el modelo, 1 general y 2 locales. El criterio de convergencia del ciclo general viene dada por la norma de Frobenius (o matricial) entre los valores de la localización de hogares y firmas de iteraciones consecutivas. Mientras que los ciclos locales corresponden al equilibrio de transporte (MTE) y al mercado de intercambio de bienes y consumos.

3. Rutina de lectura: Finalmente, se programa la lectura de los parámetros iniciales que se ingresarán al modelo. Dentro de los cuales, exiten tres tipos:

   Globales: Estos son generales e invariantes para cualquiera de las simulaciones realizadas y tienen que ver con la estructura de los sistemas, como por ejemplo, distancia entre arcos d_a, el número de hogares y firmas H_h, el parámetro de escala del modelo MTE $/mu$, el parámetro de eslaca de la distribución Frechét $/theta$, etc.

   Locales: Estos varían entre las distintas simulaciones y tienen relación con el comportamiento y elecciones de los agentes, dentro de los cuales podemos mencionar a las elasticidades de las firmas (δ_{rk}, μ_r, $\gamma_{rsj'}$ y v_r o las elasticidades de los hogares (α_{rhj} y β_h).

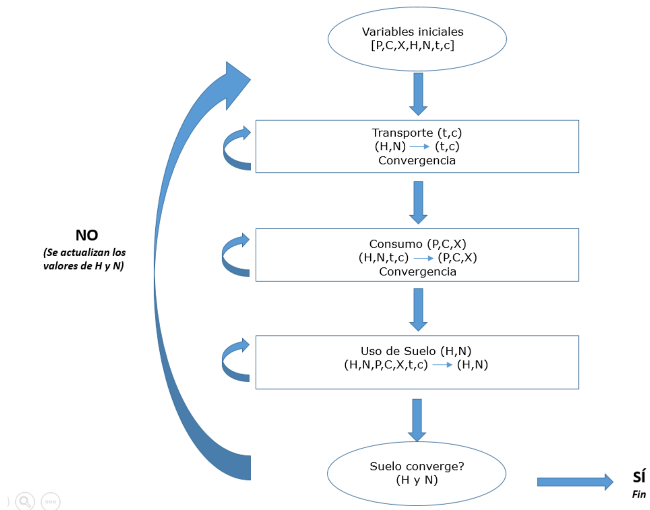
   Funcionales: Estos son homogéneos entre las simulaciones, permiten determinar un punto de partida para los problemas de punto fijo que se resuelven de forma iterativa, dentro de los cuales se encuentran las matrices de precios de bienes y servicios p_{rj}, tasa salarial w_{hj}, producción de firmas X_{rj}, etc.

Luego, sobre esta estructura se implementa el algoritmo de solución.

4.2.2. Algoritmo de solución

Como se menciono en la introducción del presente capítulo, el algoritmo de solución permite resolver iterativamente las ecuaciones de punto fijo formuladas en el capítulo 2 "Formulación del Modelo" entre el sistema de uso de suelo y el sistema de transportes. Cabe mencionar, que para la formulación del sistema de transporte, se mantuvo el modelo utilizado en la formulación original de MITUS, que corresponde al MTE, por la gran cantidad de ventajas que tiene, principalmente por su menor costo computacional de ejecución. En la figura 4.2 se presenta de forma esquemática el método de solución, el cual consta de tres ciclos, uno principal y dos anidados.

Figura 4.2: Esquema del algoritmo de solución



Fuente: Elaboración propia

Los pasos descritos de forma secuencial son los siguientes:

1. Iniciación de variables: Para poder comenzar a iterar, se inicia el valor para cada celda de las matrices propias del modelo, las cuales son: Localización de hogares H, localización de las firmas N, matriz de tiempos de viaje t, matriz de costos monetarios del viaje c, matriz de precios de los bienes y servicios p_{rj}, producción de las firmas X_{rj} y matriz de tasas salariales w_{kj}.

2. Actualización de variables del sistema de transportes: Con la localización de los agentes, se procede a actualizar el valor de los tiempos y costo de viaje. Se itera hasta que las diferencias sean menores que la tolerancia definida o hasta completar el máximo de iteraciones permitido.

3. Actualización de variables del sistema de intercambio de bienes: Dada las localizaciones y las variables del sistema de transportes, se resuelve el punto fijo de los precios del mercado de consumo. Se itera hasta que las diferencias sean menores que la tolerancia definida o hasta completar el máximo de iteraciones permitido.

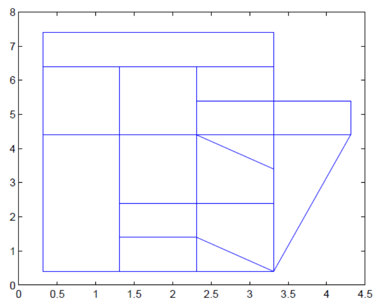
4. Actualización de variables del sistema de uso de suelo: Luego, una vez que se obtienen los valores anteriores, se determina, a través de la solución de un problema de punto fijo, la nueva localización de los agentes. En caso que la norma matricial entre las localizaciones de los agentes no cumpla con el umbral permitido o sobrepase las iteraciones máximas se vuelven a calcular los

costos y tiempos de viaje, entrando nuevamente en el ciclo iterativo.

4.3. Ciudad prototipo a utilizar

La ciudad que se utilizó en las simulaciones computacionales fue tomada de la red Siouxfalls que consta de 24 zonas y 76 arcos, la que originalmente es como se muestra en la figura 4.3

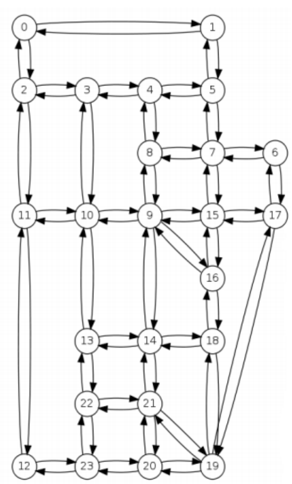
Figura 4.3: Red Siouxfalls



Fuente: Modelo integrado de los sistemas de transporte y uso de suelo con externalidades

Sin embargo, para en este caso, se utilizará la númeración que se muestra en la figura 4.4, donde los nodos representan zonas, esto con el fin de estudiar el proceso de localización. En la imagen se aprecia claramente un centro de actividades, correspondientes a las zonas $7, 8, 9, 15 y 16$ y zonas más perisfericas, que serían $0, 1 y 12$

Figura 4.4: Estructura de la cuidad a utilizar en base a la Red Siouxfalls



Fuente: Elaboración propia

Se mantuvieron las funciones de tiempo en el arco $s_a(w_a) = t_a$, originales del modelo MITUS, la que depende del flujo total en el arco w_a

$$w_a = \sum_{d\varepsilon D, h\varepsilon C} \nu_a^{dh} \qquad \forall a\varepsilon A \tag{4.8}$$

4.4. Simulación Computacional

4.4.1. Supuestos generales

Para el caso de los hogares, se considerarán dos categorías que viajan a través de la red, que se definen por el tipo de trabajo que ofertan, se denominan: calificado y no calificado. Esto se modela a través de diferencias en las elecciones de consumo, expresado en el parámetro $\alpha_{rhj'}$, la elasticidad de las firmas respecto a la producción para cada tipo de trabajo δ_{rk} y en la tasa de generación de viajes, ya que se supone que los hogares calificados generan más viajes que los hogares no calificados, pues tienen una espectativa de ingreso superior.

Con respecto a las firmas se distinguirán dos tipos: servicios y bienes. De acuerdo a esto, valorarán de distinta forma los atributos, por lo tanto, demandarán distinto tipo de mano de obra, cantidades de bienes intermedios y suelo. Las diferencias se modelan a través de diferencias en las elasticidades de los insumos necesarios para la producción, a saber: v_r, δ_{rk}, μ_r y $\gamma_{rsj'}$.

En ambos casos se asume que no existen externalidades de localización y que la oferta inmobiliaria inicial y la demanda por localización se encuentran distribuidas homogéneamente en la población. Se aclara que el modelo de transportes no considera partición modal. Es posible definir más categorías para cada agente.

En el caso particular de esta simulación y considerando que el objetivo es verificar el correcto funcionamiento del modelo de equilibrio entre transporte, bienes y servicios y localización, se asume que la oferta inmobiliria es exógena (S_{vi}) y que es independiente para cada tipo de agente. Además, se considera un tipo de vivienda ($v = 1$), para el caso de hogares.

Con el fin de obtener equilibrar las disposiciones a pagar, se ajustaron los niveles de utilidad V_{hi} de los hogares a través de la expresión:

$$V_h = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{H_h} \sum_{vij} S_{vij} exp\mu(B_{hvij} - r_{iv(b_h)}) \right) \tag{4.9}$$

Mientras que los precios del modelo de consumo, es decir, de bienes y servicios, fueron normalizados con referencia al primero, por lo tanto, los precios de la primera columna del vector siempre serán 1.

Considerando los supuestos anteriormente mencionados, se desarrollaron tres tipos de simulaciones computacionales, con el fin de verificar el funcionamiento del modelo en distintos tipos de escenarios. Dado que las elasticidades no fueron calibradas, por lo tanto, lo anterior es solo un ejercicio metodológico. Una breve descripción de cada una se presenta a continuación:

1. Simulación 1: El objetivo de esta simulación es comprobar la correcta operación del modelo y analizar los resultados que entrega bajo estas condiciones. En este caso, los parámetros entre los agentes (tanto firmas como hogares), tienen el mismo valor, junto con el resto de las variables

del modelo. Por lo tanto, se espera que los resultados sean homogéneos.

2. Simulación 2: En este caso, se modelan diferencias entre los tipos de hogares y se privilegia el consumo de bienes por sobre el de suelo. La formulación de las firmas se mantiene constante, salvo la valoración entre los tipos de calificación de los hogares. La idea en este caso, es estudiar la variación respecto del equilibrio homogéneo al valorar más el consumo. Se espera que baje el precio de las localizaciones.

3. Simulación 3: Contrario al caso anterior, en esta simulación se privilegia el consumo de suelo por sobre los bienes de parte de los hogares. Mientras que la formulación de firmas también presenta diferencias, se asume que el segundo agente depende fuertemente de los bienes intermedios (la que podríamos definir como firma de servicios). Se mantienen las diferencias entre la valoración de los agentes, pero solo para la firma de bienes.

A continuación, se presenta el valor utilizado para las variables globales del modelo, que serán iguales en todas las simulaciones anteriormente presentadas:

- Perturbación de la generación: $\delta_{hi} = 0$ (ver ecuación 4.1). No se considera error aleatorio en la generación de viajes.

- Parámetro logit para transporte: $\beta = 0{,}5$. Se utiliza un valor medio entre aleatorio y determinista.

- Parámetro fréchet para la localizacion: $\theta = 1{,}6$. Valor medio, es el equilavente al utilizado para el logit de transporte.

- Oferta por inmobiliaria por zona: $S_{vi} = 2000$. Se asume que inicialmente existen 2000 localizaciones por zona.

- Número máximo de iteraciones: $n = 50$. Se fija el número máximo de iteraciones, tanto para el ciclo general de localización, como para los ciclos locales de precios de bienes y servicios.

- Número de hogares: $H_h = 24000$.

- Número de firmas: $N_r = 24000$

4.4.2. Simulación 1: Caso homogéneo

En este caso, los valores de las elasticidades tienen el mismo valor entre los agentes del mismo tipo, manteniendo las restricciones impuestas sobre la suma de los parámetros presentadas en la formulación del modelo, esto es, que las funciones tipo Cobb-Douglas tienen retornos constantes a escala, tanto en la utilidad de hogares como en el nivel de producción de las firmas.

Las elasticidades globales utlizadas para los hogares son las presentadas en la tabla 4.1. La desagregación de la elasticidad para el consumo se presenta en la tabla 4.2

Tabla 4.1: Valores de las elasticidades de la función de utilidad para hogares

	h = 1	h =2
$\sum_{rj} \alpha_{rjh}$	0.5	0.5
β_h	0.5	0.5
$\sum_{rj} \alpha_{rjh} + \beta_h$	1	1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.2: Desagregación elasticidad respecto del consumo de bienes y servicios

$\sum_j \alpha_{rjh}$	h = 1	h =2
r = 1	0.25	0.25
r = 2	0.25	0.25

Fuente: Elaboración propia

Las elasticidades utlizadas para las firmas son las presentadas en la tabla 4.3

Tabla 4.3: Elasticidades de la función de producción de las firmas

Datos firmas	r = 1	r =2
μ_r	0.25	0.25
v_r	0.25	0.25
$\sum_k \delta_{rk}$	0.25	0.25
$\gamma_{rsj'}$	0.25	0.25

Fuente: Elaboración propia

En las tablas 4.4 y 4.5 se presenta la desagregación de las elasticidades de la producción con respecto a la mano de obra y a otros bienes respectivamente.

Tabla 4.4: Desagregación de la elasticidad con respecto a la mano de obra

δ_{rk}	r = 1	r =2
k = 1	0.125	0.125
k = 2	0.125	0.125

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.5: Desagregación de la elasticidad con respecto a otros bienes o servicios

$\sum_{j'} \gamma_{rsj'}$	r = 1	r =2
s = 1	0.125	0.125
s = 2	0.125	0.125

Fuente: Elaboración propia

La elasticidad por el producto intermedio, es constante entre las zonas. Por lo tanto, solo depende del tipo de bien y del lugar de producción.

4.4.3. Simulación 2: Preferencia consumo bienes

Como se detalla en la introducción, en esta simulación los hogares favoreceran el consumo de bienes y servicios por sobre las localizaciones. Se distinguen dos tipos de hogares: no calificado ($h = 1$) y calificado ($h = 2$), cuyas diferencias se modelan a través de la elasticidad en la producción de las firmas (siendo mayor la importancia del segundo grupo). Los valores utilizados en ese caso se presentan en la tabla 4.6.

Tabla 4.6: Valores de las elasticidades de la función de utilidad para hogares

	h = 1	h =2
$\sum_{rj} \alpha_{rjh}$	0.55	0.55
β_h	0.45	0.45
$\sum_{rj} \alpha_{rjh} + \beta_h$	1	1

Fuente: Elaboración propia

Se espera que el valor de las disposiciones a pagar por suelo disminuya respecto del escenario homogéneo para el caso de los hogares y que aumente el valor de las tasa salarial para el segundo tipo de agente. En la tabla 4.7 se presenta la desagregación de la elasticidad del consumo de bienes y servicios. Se observa que no se hace diferencia respecto del tipo de bien. Se asume una que la elasticidad es constante entre las zonas.

Tabla 4.7: Desagregación elasticidad respecto del consumo de bienes y servicios

α_{rjh}	h = 1	h =2
r = 1	0.275	0.275
r = 2	0.275	0.275

Fuente: Elaboración propia

Las elasticidades utilizadas para firmas son las presentadas en la tabla 4.8. Como se indica en la descripción, en este caso los parámetros generales se mantuvieron constantes respecto de la simulación homógenea.

Tabla 4.8: Elasticidades de la función de producción de las firmas

Datos firmas	r = 1	r =2
μ_r	0.25	0.25
v_r	0.25	0.25
$\sum_k \delta_{rk}$	0.25	0.25
$\gamma_{rsj'}$	0.25	0.25

Fuente: Elaboración propia

En las tablas 4.9 y 4.10 se presenta la desagregación de las elasticidades de la producción con respecto a la mano de obra y a otros bienes respectivamente. Se nota que la ponderación favorable al segundo tipo de hogar no distingue entre tipo de firma.

Tabla 4.9: Desagregación elasticidad con respecto a la mano de obra

δ_{rk}	r = 1	r =2
k = 1	0.08	0.08
k = 2	0.17	0.17

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.10: Desagregación elasticidad respecto a otros bienes o servicios

$\sum_{j'} \gamma_{rsj'}$	r = 1	r =2
s = 1	0.125	0.125
s = 2	0.125	0.125

Fuente: Elaboración propia

4.4.4. Simulación Tres A: Preferencia consumo localización

Como se especifica en la introducción de esta sección, en la tercera simulación se asume que los hogares prefieren consumir suelo en lugar de bienes. Mientras, para el caso de las firmas, se definen dos tipos: bienes ($r = 1$) y servicios ($r = 2$), cuya diferencia principal es la valoración de los bienes intermedios en la función de producción, siendo mayor su importancia en el segundo caso. Las elasticidades utlizadas para los hogares son las presentadas en la tabla 4.11

Tabla 4.11: Valor de las elasticidades de la función de utilidad para hogares

	h = 1	h =2
$\sum_{rj} \alpha_{rjh}$	0.45	0.45
β_h	0.55	0.55
$\sum_{rj} \alpha_{rjh} + \beta_h$	1	1

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 4.12 se presenta la desagregación de la elasticidad del consumo de bienes y servicios. Se le da más importancia a los servicios, independiente del tipo de hogar.

Tabla 4.12: Desagregación elasticidad respecto del consumo

α_{rjh}	h = 1	h =2
r = 1	0.25	0.225
r = 2	0.2	0.225

Fuente: Elaboración propia

Al igual que en la simulación anterior, se asume que la elasticidad es constante entre las zonas. En la tabla 4.13 se presenta las elasticidades para la producción utilizadas en la formulación de las firmas.

Tabla 4.13: Elasticidad en la función de producción de las firmas

Datos firmas	r = 1	r =2
μ_r	0.25	0.2
v_r	0.25	0.2
$\sum_k \delta_{rk}$	0.25	0.2
$\gamma_{rsj'}$	0.25	0.4

Fuente: Elaboración propia

Los servicios ($r = 2$) son más sensibles a los bienes intermedios. En las tablas 4.14 y 4.15 se presenta la desagregación de las elasticidades de la producción con respecto a la mano de obra y a otros bienes, respectivamete.

Tabla 4.14: Desagregación elasticidad respecto de la mano de obra

δ_{rk}	r = 1	r =2
k = 1	0.08	0.1
k = 2	0.17	0.1

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.15: Desagregación elasticidad respecto de otros bienes o servicios

$\sum_{j'} \gamma_{rsj'}$	r = 1	r =2
s = 1	0.08	0.16
s = 2	0.17	0.24

Fuente: Elaboración propia

Al igual que en los casos anteriores, se asume que la elasticidad es constante entre las zonas.

4.4.5. Simulación Tres B: Preferencia consumo localización, diferenciando hogares

Finalmente, se realiza una pequeña sensibilidad sobre la simulación 3 diferenciando entre los dos tipos de hogares. Se mantiene la preferencia por el consumo en la localización, sin embargo, para el hogar tipo 1 se usan valores más extremos, como se define en la siguiente tabla.

Tabla 4.16: Valor de las elasticidades de la función de utilidad para hogares, sensibilidad

	h = 1	h =2
$\sum_{rj} \alpha_{rjh}$	0.3	0.45
β_h	0.7	0.55
$\sum_{rj} \alpha_{rjh} + \beta_h$	1	1

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 5

Resultados de las simulaciones

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan los principales resultados de las simulaciones realizadas en la cuidad prototipo, detalladas en el capítulo cuatro.

Se mostraran los valores promedio y la variación porcentual respecto a la media de las variables más significativas del modelo de uso de suelo e intercambio propuesto, ya que considerando la naturaleza de los datos (no fueron calibrados), los escenarios de simulación están desarrollados con el fin de analizar el comportamiento de las variables. Sin perjuicio de lo anterior, se presentá una comparación entre las rentas de los agentes obtenidas en las distintas simulaciones, lo que permitirá comprobar la influencia de las modificaciones propuestas en el capítulo "Modelo computacional".

Considerando que las variaciones entre las simulaciones corresponden a modificaciones en las elasticidades, las gráficas respectivas de las variables significativas se incluirán solo para el caso homogéneo.

5.2. Simulación 1: Caso homogénea

En este caso se lograron los resultados esperados, por lo tanto, se concluye que el modelo está formulado y programado correctamente. Esto se comprueba en que los resultados obtenidos para localización, precios de bienes y servicios, tasa salarial y producción son igual entre los agentes de cada tipo (hogares y firmas), solo variando a través de las posibles localizaciones. Además, se observa que los valores máximos se obtienen en aquellas zonas que presentan mejor conectividad y por ende, menores costes de transporte.

El número localizado de agentes por zona se presenta en el cuadro 5.1.

Tabla 5.1: Número de agentes en cada zona del modelo

Hogares	Firmas
1.000	1.000

Fuente: Elaboración propia

Dado el escenario, la cantidad de agentes por tipo es la misma en cada zona de la ciudad prototipo. Al no existir atractores en los nodos la composición de las zonas es uniforme. Por lo tanto, la renta de los bienes inmuebles solo varía debido a los costos experimentados desde el sistema de transportes.

Tabla 5.2: Promedio renta esperada por tipo de agente. Simulación 1

Hogares	Firmas
$9.48e^4$	$1{,}509e^{11}$

Fuente: Elaboración propia

Respecto a las rentas esperadas promedio a través de las zonas, se observa que las firmas se encuentran por sobre los hogares. Lo anterior, se explica en parte por la forma funcional, ya que si bien la expresión de la disposición a pagar de las firmas corresponde a una raíz (ver 5.1), se tiene que $v_r < 1$, luego, en la práctica funciona como una exponencial.

$$DP_{rj} = \sqrt[\mu_r]{\frac{A_{rj}\Pi_k(\frac{\delta_{rk}}{w_{hj}})^{\delta_{rk}} v_r^{v_r} \mu_r^{\mu_r} \Pi_{sj'}(\frac{\gamma_{rsj'}}{p_{sj'j}})^{\gamma_{rsj'}}}{\varrho^{v_r} X_{rj}}} \tag{5.1}$$

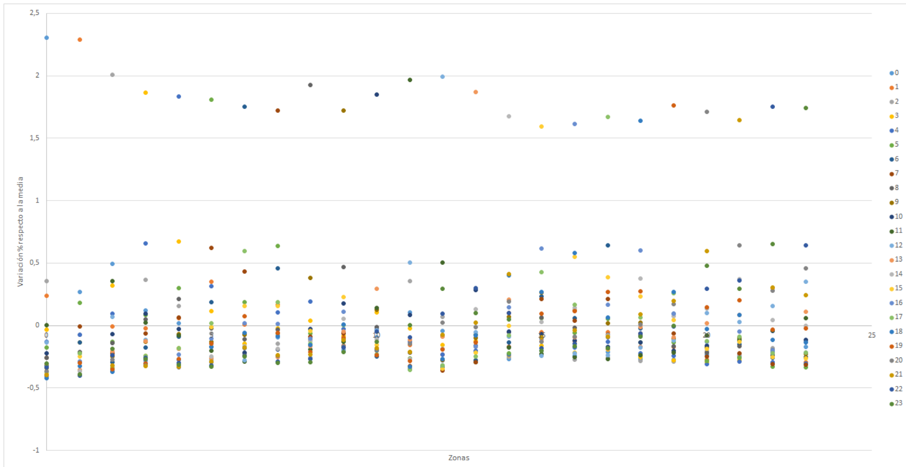
En la figura 5.1, se presenta la variación porcentual respecto a la media de la renta de los hogares, a través de las zonas.

Como era de esperar, se observa que los máximos valores para las posturas se encuentran cuando el lugar de trabajo j del hogar h coincide con la zona de localización i. Lo anterior, se explica porque bajo esta configuración se reduce el costo generalizado del transporte (tiempo y tarifa). Se observa que la mayor dispersión respecto a la media se encuentra en las zonas 0 y 1,porque son aquellas que presentan menores valores a través de las distintas posibles ubicaciones para el lugar de trabajo, ya que en estos casos los costos de transporte serían mayores; por lo que, la diferencia entre trabajar en el mismo lugar de localización torna mayor relevancia. Como se ve en la figura 5.2.

Se observa que las ubicaciones de localización 14 y 18 presentan altas disposiciones a pagar en varias posibles zonas de trabajo, lo que se explica por la ubicación que estas tienen en la ciudad ficticia. Es importante señalar también, que la distribución obtenida es similar a la matriz de costos de transporte.

Por otra parte, en la figura 5.4 se presenta la variación porcentual respecto a la media de la renta de las firmas, a través de las zonas.

Figura 5.1: Variación % de las rentas respecto de la media. Hogares. Simulación 1



Fuente: Elaboración propia

Figura 5.2: Distribución disposiciones a pagar.

DP	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	93976,232	36110,66119	42451,8807	31809,3624	28963,1068	28034,598	23424,1923	25768,6741	24044,8663	22820,6638	25688,0377	31470,2506
1	35717,3906	94983,04949	28722,0201	28179,5208	30582,1299	39061,8221	29104,0705	33742,8508	25363,0938	24295,9536	23050,7711	24343,7042
2	42642,5266	29035,31941	94539,3689	42964,0195	36309,2921	29451,659	24281,6146	26911,741	27952,9122	26085,7745	30881,1733	42568,8354
3	32151,3205	28647,75331	43823,6833	95093,2415	55558,1214	37102,174	28320,501	32500,0349	34553,7178	30475,6414	36750,9975	32511,7485
4	29175,394	31194,19195	36787,9607	55635,5897	95185,8551	44263,8123	31253,1379	37082,9891	40086,4871	32648,0626	32494,5989	29223,0691
5	28118,375	40173,32397	29549,7315	37000,1575	44155,561	95599,8485	40387,2507	55694,946	31954,3337	30176,0439	27335,9851	25079,1137
6	23555,413	29791,63151	24451,2207	28481,5734	31428,5295	40928,7282	95010,4655	50267,2878	29205,9648	32404,7548	25912,4797	22388,9007
7	25968,3309	34772,64196	27141,5266	32683,9184	37324,4696	56783,9304	50205,8328	95212,5159	31808,0345	32758,8139	26790,0002	23648,4269
8	24019,8034	25575,4073	27881,6313	34094,9373	39327,3176	31762,3532	28952,8143	31347,482	95000,9784	47597,3067	32070,0877	25370,9451
9	22932,2663	24763,32273	26203,0797	30382,3245	32488,9094	30359,345	32258,9792	32583,4408	48112,0896	94741,6101	39203,6276	27488,637
10	25742,6288	23385,41267	30911,3111	36254,3112	32223,3557	27411,3205	25930,2665	26729,3744	32184,2047	38945,5248	94352,5752	35882,9074
11	31741,0694	24751,63146	42933,3269	32437,9805	29250,5234	25283,6086	22548,5196	23800,0269	25596,9736	27585,5742	36180,8466	94062,7184
12	27362,6435	22480,3698	33783,8822	27890,5155	25757,8459	22987,8336	22717,8592	22300,2244	23399,4241	25147,7615	30407,2136	47494,2215
13	22661,9109	21152,76898	26061,3131	28808,5799	26696,0371	24238,5011	24930,9213	24608,4437	27377,0732	31350,0645	42587,1569	29204,4047
14	21033,0474	22521,65748	23573,7385	25403,9022	25748,4046	26752,6608	29679,6188	28842,6265	30992,9146	37410,3492	31663,2466	26025,8679
15	22729,627	27855,99227	24244,8627	27918,5933	30227,7404	36509,3177	42737,8289	42649,2152	35311,3997	45423,9339	31152,2885	24319,4887
16	21667,6153	25940,38308	23183,8176	26255,7037	27925,3145	32640,6096	37126,647	36869,2298	32700,8668	40375,7834	29629,4874	23746,0411
17	22532,5132	27805,48616	23557,8493	27001,8375	29255,9692	36347,0686	56973,5142	42468,4084	30465,386	35884,475	27491,4504	22999,0172
18	20827,7703	24279,78938	22573,3945	24955,0537	26160,6239	29739,0799	33846,4832	32852,7768	30300,4092	36201,9451	28906,9117	24137,124
19	20689,8432	24049,30418	22374,2953	23909,2826	25184,9403	29258,5999	36935,6056	32224,253	27023,1576	30892,4329	26184,2532	24569,5572
20	22096,6461	21240,4919	25250,8627	23696,5402	23125,6331	24604,6602	28532,4236	26295,7934	25608,5451	28968,3142	28075,6182	29646,6938
21	21574,153	21738,74924	24460,6527	24156,3647	23994,0824	25481,8106	29502,835	27352,1612	27453,2981	31674,9615	29383,2581	28279,2254
22	22679,1729	20556,09188	26118,6536	25329,6001	23905,3366	23204,1307	25864,5011	24311,7778	25089,8299	28170,0104	32457,5621	30921,4591
23	23904,5569	20871,5413	27965,8565	25075,3116	23626,5976	23038,8914	25897,8815	24148,7385	24321,3547	27097,6645	29961,8439	34417,9101

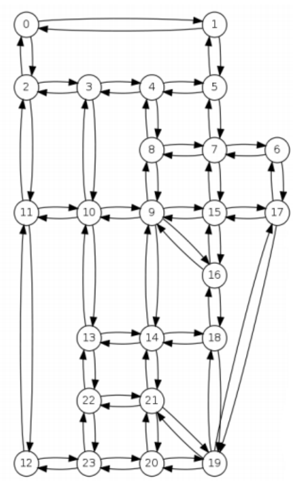
DP	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	27265,531	22615,3915	20876,3749	22709,7024	21468,4239	22444,0556	20741,9556	20658,8341	21826,3956	21361,3848	22365,0895	23512,8673
1	22224,7672	20879,6589	22168,0361	27363,3424	25311,7383	27273,347	23947,7931	23880,5093	20952,8158	21387,3255	20110,5466	20418,1952
2	33651,0078	26005,4255	23431,6287	24137,334	22909,1283	23386,6689	22487,1601	22343,5578	24848,7265	24154,772	25666,6327	27377,1179
3	27979,5019	28966,1881	25355,4355	27837,2735	25949,2214	26872,2836	24803,5806	23931,4302	23492,6745	23962,7793	25019,3391	24756,8144
4	25803,684	26786,7273	25803,3387	30142,2909	27747,1196	29263,3912	26204,2157	25433,3943	23162,8536	23935,9252	23679,5982	23406,9855
5	22948,8823	24097,0407	26526,931	36084,4936	31971,0502	35937,4062	29407,9402	29346,2033	24369,5397	25234,689	22824,8126	22691,6141
6	22872,221	24954,7291	29786,3189	42623,2827	36605,5398	56697,9769	33760,324	37795,0197	28392,6553	29389,3159	25674,0678	25713,8698
7	22448,7424	24664,9917	28968,8838	42475,2102	36310,04	42370,8228	32824,7545	32744,7442	26295,3553	27311,134	24195,8084	24054,8376
8	23363,808	27272,499	30731,0767	34607,8915	31836,8688	30131,0708	29845,9174	27128,2751	25356,1663	27058,4447	24749,9632	24072,0108
9	25297,4732	31463,5916	37284,864	44117,6856	39018,6914	35526,3325	35671,0326	31250,8953	28805,1048	31295,0482	27935,6516	26983,6437
10	30342,8682	42485,2235	31491,0775	30846,2569	29142,188	27413,5856	28633,8318	26400,747	27759,7632	28975,537	31733,8348	29377,2495
11	47656,698	29365,3169	26127,7948	24456,8865	23774,9559	23158,3966	24229,1219	24779,2728	29285,8811	28045,795	30498,728	33658,8334
12	94431,194	29921,3222	28702,6534	23976,7985	24518,4976	24130,0013	26072,8276	27750,0656	34710,3097	32521,2887	36506,6459	42699,238
13	29917,526	94456,0477	39656,4235	28717,987	29817,9869	26703,2431	32528,227	29796,8306	33562,2325	35689,9843	42684,4374	36548,8293
14	28810,7363	40132,7524	94973,5585	36479,6031	40413,9956	32660,117	48789,24	38136,6945	40358,2485	48738,2162	36999,0262	35337,8874
15	24118,6166	28832,6885	36850,8318	95802,5263	57277,9375	51197,7207	45458,9561	38494,4041	30090,6169	32179,9441	27672,7517	27240,6883
16	24749,1442	30387,0875	41811,9846	58937,2838	95259,3039	42560,3974	58388,8914	39889,1703	31772,2456	34601,9558	29230,24	28606,8395
17	24304,5772	26796,8823	32879,2788	50969,9132	41755,6646	95440,803	38070,0476	45054,8189	31238,0563	32485,491	27856,8283	27904,6271
18	26334,9324	33168,4894	50421,0533	45635,9557	56780,7547	38198,6715	94876,6551	45544,4751	34968,3958	38926,7521	31896,2111	31130,8885
19	27707,9321	29708,8308	37717,4287	37578,5772	38246,8152	43506,4022	43660,5592	94778,9062	39334,4651	41245,7915	33173,7562	33450,7998
20	35614,759	34366,0577	41354,5613	30251,312	31630,3156	31439,5255	35066,8904	40801,9746	94258,8236	57045,1243	44428,5861	50622,2001
21	33238,3596	36701,6168	50578,333	32416,4185	34414,424	32687,364	39050,7745	42957,2899	57306,0635	94770,1222	46787,0882	44488,17
22	37462,1815	44387,1788	37687,8931	27925,8786	29239,7365	28055,3461	32010,075	33981,9484	44232,0449	46461,788	94092,5161	56161,3435
23	44513,7521	37756,7347	36046,0962	27514,1727	28654,7385	28125,2658	31321,2876	34381,9733	50759,69	44531,6	56835,6724	94227,1274

Fuente: Elaboración propia

Se observa que en este caso el máximo valor se encuentra en la zona 16. Se podría definir la zona céntrica de la cuidad de simulación, aquella compuesta por las zonas 14, 16 y 18. De la misma forma, se hace notar que el mínimo se obtiene en la zona 12. Si se mira la figura 5.3, se puede concluir que en esta localización se incurre en altos costos de transporte, por lo que, no resultaría atractiva.

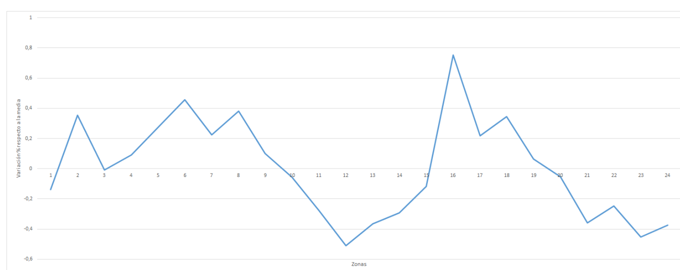
Con respecto a las variables propias del sub-modelo de consumo, en la tabla 5.3 se presenta el valor promedio a través de las zonas, para los precios de bienes y servicios p_{rj}, tasa salarial w_{kj} y producción de bienes y servicios x_{rj}.

Figura 5.3: Estructura de la cuidad a utilizar en base a la Red Siouxfalls



Fuente: Elaboración propia

Figura 5.4: Variación de las rentas respecto de la media. Firmas. Simulación 1



Fuente: Elaboración propia

Tabla 5.3: Valor promedio de precios y producción. Simulación 1

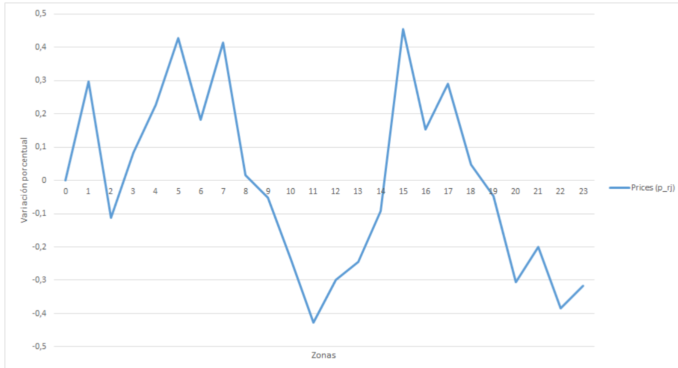
p_{rj}	w_{kj}	x_{rj}
1,0023	1,0061	1,0034

Fuente: Elaboración propia

Se observa que todos los valores son cercanos a 1 y similares entre sí, lo que se explica por la normalización respecto del primer elemento de la matriz para cada columna. Lo anterior, fue necesario dada la forma funcional de las variables, pues al ser problemas de punto fijo no convergentes, su valor crecía con el número de iteraciones. A continuación, se presenta la variación respecto a la media de los precios de bienes y servicios.

Como se esperaba, al ser directamente proporcionales, su variación a través de las zonas es similar al caso del máximo valor esperado para la renta de hogares (cuando la zona de localización coincide

Figura 5.5: Variación de los precios respecto a la media. Simulación 1



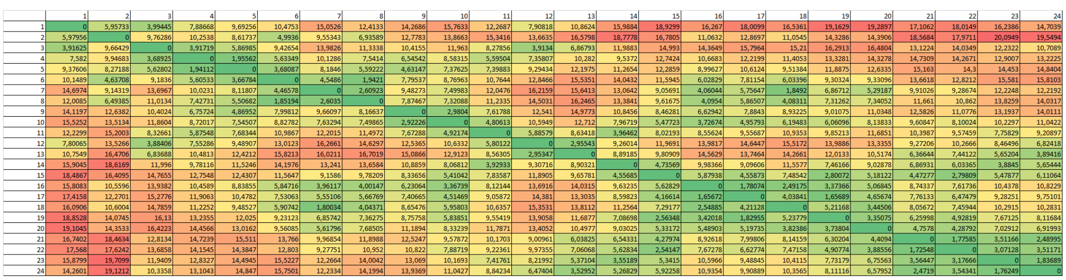
Fuente: Elaboración propia

con la zona de trabajo).

Con respecto a los flujos en la red, se observa que el promedio en los 76 arcos es de 0,007404.

En relación al sistema de transporte, en la imagen 5.6 se presenta un mapa de calor del tiempo esperado de viaje. Se observa que la diagonal tiene valores nulos y que los máximos se encuentran en los extremos.

Figura 5.6: Mapa de calor de los costos de transporte. Simulación 1



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	5,95733	3,99445	7,88668	9,69256	10,4753	15,0526	12,4133	14,2686	15,7633	12,2687	7,90818
2	5,97956	0	9,76286	10,2538	8,61737	4,9936	9,55343	6,93589	12,7783	13,8663	15,3416	13,6635
3	3,91625	9,66429	0	3,91719	5,86985	9,42654	13,9826	11,3338	10,4155	11,963	8,27856	3,9134
4	7,582	9,94683	3,68925	0	1,95562	5,63349	10,1286	7,5414	6,54542	8,58315	5,59504	7,35807
5	9,37606	8,27188	5,62802	1,94112	0	3,68087	8,1846	5,59222	4,63147	7,37625	7,39883	9,29434
6	10,1489	4,63708	9,1836	5,60533	3,66784	0	4,5486	1,9421	7,79537	8,76963	10,7644	12,8466
7	14,6974	9,14319	13,6967	10,0231	8,11807	4,46578	0	2,60923	9,48273	7,49983	12,0476	16,2159
8	12,0085	6,49385	11,0134	7,42731	5,50682	1,85194	2,6035	0	7,87467	7,32088	11,2335	14,5031
9	14,1197	12,6382	10,4024	6,75724	4,86952	7,99812	9,66097	8,16637	0	2,9804	7,61788	12,541
10	15,5252	13,5134	11,8604	8,72017	7,54507	8,82782	7,63294	7,49865	2,92226	0	4,80613	10,5949
11	12,2299	15,2003	8,32661	5,87548	7,68344	10,9867	12,2015	11,4972	7,67288	4,92174	0	5,88579
12	7,80065	13,5266	3,88406	7,55286	9,48907	13,0123	16,2661	14,6297	12,5365	10,6332	5,80122	0
13	10,7549	16,4706	6,83688	10,4813	12,4212	15,8213	16,0211	16,7019	15,0866	12,9123	8,56305	2,95347
14	15,9045	18,6169	11,996	9,78116	11,5246	14,1976	13,241	13,6584	10,8859	8,06812	3,92933	9,30716
15	18,4867	16,4095	14,7655	12,7548	12,4307	11,5647	9,1586	9,78209	8,33656	5,41042	7,83587	11,8905
16	15,8083	10,5596	13,9382	10,4589	8,83855	5,84716	3,96117	4,00147	6,23064	3,36739	8,12144	13,6916
17	17,4158	12,2701	15,2776	11,9063	10,4782	7,53063	5,55106	5,66769	7,40665	4,51469	9,05872	14,381
18	16,0906	10,6004	14,7859	11,2252	9,48527	5,90742	1,80034	4,04371	8,65476	5,95803	10,6357	15,3531
19	18,8528	14,0745	16,13	13,2355	12,025	9,23123	6,85742	7,36275	8,75758	5,83851	9,55419	13,9058
20	19,1045	14,3533	16,4223	14,4566	13,0162	9,56085	5,61796	7,68505	11,1894	8,33239	11,7871	13,4052
21	16,7402	18,4634	12,8134	14,7239	15,511	13,766	9,96854	11,8988	12,5247	9,57872	10,1703	9,00961
22	17,568	17,6242	13,6858	14,1545	14,3847	12,803	9,27751	10,952	10,822	7,88719	9,22361	9,97355
23	15,8799	19,7099	11,9409	12,8327	14,4945	15,5227	12,2664	14,0042	13,069	10,1693	7,41761	8,21992
24	14,2601	19,1212	10,3358	13,1043	14,847	15,7501	12,2334	14,1994	13,9369	11,0427	8,84234	6,47404

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	10,8624	15,9884	18,9299	16,267	18,0099	16,5361	19,1629	19,2897	17,1062	18,0149	16,2386	14,7039
2	16,5798	18,7778	16,7805	11,0632	12,8697	11,0545	14,3286	14,3906	18,5684	17,9711	20,0949	19,5494
3	6,86793	11,9883	14,993	14,3649	15,7964	15,21	16,2913	16,4804	13,1224	14,0349	12,2322	10,7089
4	10,282	9,5372	12,7424	10,6683	12,2199	11,4053	13,3281	14,3278	14,7309	14,2671	12,9007	13,2225
5	12,1975	11,2654	12,2859	8,99627	10,6124	9,51384	11,8875	12,6335	15,163	14,3	14,453	14,8404
6	15,5351	14,0432	11,5945	6,02829	7,81154	6,03396	9,30324	9,33096	13,6618	12,8212	15,581	15,8103
7	15,6413	13,0642	9,05691	4,06044	5,75647	1,8492	6,86712	5,29187	9,91026	9,28674	12,2248	12,2192
8	16,2465	13,3841	9,61675	4,0954	5,86507	4,08311	7,31262	7,34052	11,661	10,862	13,8259	14,0317
9	14,9773	10,8456	8,46281	6,62942	7,8843	8,93225	9,01075	11,0348	12,5826	11,0776	13,1937	14,0111
10	12,712	7,96719	5,47723	3,72674	4,95793	6,19483	6,06096	8,13833	9,60847	8,10024	10,2297	11,0422
11	8,63418	3,96462	8,02193	8,55624	9,55687	10,9353	9,85213	11,6851	10,3987	9,57459	7,75829	9,20897
12	2,95543	9,26014	11,9691	13,9817	14,6447	15,5172	13,9886	13,3355	9,27206	10,2666	8,46496	6,82418
13	0	8,89185	9,80909	14,5629	13,7464	14,2661	12,0133	10,5174	6,36644	7,44122	5,65204	3,89416
14	8,90321	0	4,73569	9,98366	9,09606	11,5577	7,46166	9,02878	6,86931	6,03365	3,8845	5,65444
15	9,65781	4,55685	0	5,87938	4,55873	7,48542	2,80072	5,18122	4,47277	2,79809	5,47877	6,11064
16	14,0315	9,63235	5,62829	0	1,78074	2,49175	3,37366	5,06845	8,74337	7,61736	10,4378	10,8229
17	13,3035	8,59823	4,16614	1,65672	0	4,03841	1,65689	4,65674	7,76133	6,47479	9,28251	9,75101
18	13,8112	11,2564	7,29177	2,54885	4,21128	0	5,21168	3,44506	8,05672	7,45944	10,2915	10,2831
19	11,6877	7,08698	2,56348	3,42018	1,82955	5,23779	0	3,35075	6,25998	4,92819	7,67125	8,11684
20	10,4977	9,03025	5,33172	5,48903	5,19735	3,82386	3,73804	0	4,7578	4,28792	7,02912	6,91993
21	6,03825	6,54331	4,27974	8,92618	7,99806	8,14159	6,30204	4,4094	0	1,77585	3,51166	2,48995
22	7,06068	5,62834	2,54147	7,67278	6,62774	7,47158	4,90774	3,88556	1,72548	0	3,07128	3,51171
23	5,37104	3,55189	5,3415	10,5966	9,48845	10,4115	7,73179	6,75563	3,56447	3,17666	0	1,83689
24	3,52952	5,26829	5,92258	10,9354	9,90889	10,3565	8,11116	6,57952	2,4719	3,54341	1,76249	0

Fuente: Elaboración propia

5.3. Simulación 2: Preferencia consumo bienes

Como se indico en el capítulo 4, en este escenario de simulación, para el caso de los hogares se privilegia el consumo de bienes y servicios por sobre el consumo de suelo. No se contemplan diferencias en la simulación de las firmas respecto del escenario homogéneo, ni tampoco diferencias en los agentes del mismo tipo. Utilizando la misma expresión descrita para la simulación anterior, se obtiene el valor de las rentas esperadas en las distintas zonas del modelo, las que se presentan en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Promedio renta de bienes inmuebles por tipo de agente. Simulación 2

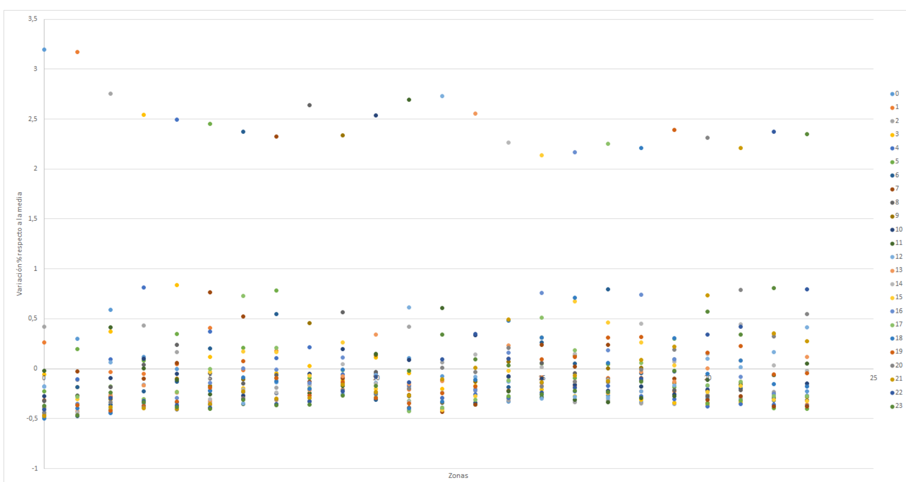
Hogares	Firmas
$3.17e^5$	$1{,}509e^{11}$

Fuente: Elaboración propia

A diferencia de la hipótesis propuesta inicialmente, la renta esperada para los hogares aumenta en cerca de un 70 %. Lo anterior, se explicaría dado que la elasticidad con respecto al consumo de bienes y servicios aumento en un 10 % y la elasticidades respecto del consumo de suelo disminuyó en un 10 %, mientras que los valores de equilibrio de las variables propias de M.E.G.U. de la simulación se mantuvieron casi constantes respecto del escenario homogéneo, luego, los términos de la función a disposición a pagar de los hogares $\frac{1}{\beta_h}$ y $\sum_{rj'} \alpha_{rj'h} ln(\alpha_{rj'h})$ resultan ser más significativos que $ln(I_{ijh}$ y $\sum_{rj'} \alpha_{rj'} ln(\phi_{ijj'rh})$, por lo tanto, las diferencias de valores en el mercado de bienes y servicios no inducen variaciones relevantes en las rentas esperadas, bajo la actual formulación. No se observan diferencias importanes para la renta esperada promedio de las firmas.

Por otra parte, en la figura 5.7 se presenta la variación porcentual respecto a la media de la renta de los hogares, a través de las zonas.

Figura 5.7: Variación % de las rentas respecto de la media. Hogares. Simulación 2



Fuente: Elaboración propia

Se observa un comportamiento similar que para el caso homogéneo, sin embargo, las variaciones registradas son de mayor magnitud. Mientras que las firmas se mantienen constantes respecto de la simulación 1

En la tabla 5.5 se presenta el promedio a través de las zonas de los valores obtenidos para las variables propias de M.E.G.U.

Tabla 5.5: Valor promedio de precios y producción. Simulación 2

	p_{rj}	w_{hj}	x_{rj}
r/h = 1	1,003041	1,003402	1,0082216
r/h = 2	1,003035	1,002702	1,0072234

Fuente: Elaboración propia

Los precios de bienes y servicios p_{rj} aumentaron un 0,07 %, la tasa salarial w_{hj} disminuyó en 0.268 % y finalmente la producción creció en un 0,478 %. respecto del escenario homogéneo. La preferencia de los hogares por consumir bienes y servicios se ve reflejada en un aumento de los precios.

5.4. Simulación 3: Preferencia por viviendas

En esta modelación consideró diferencias en los dos tipos de agentes, para los hogares se inducen diferencias en la elasticidad a favor del consumo de suelo por sobre los bienes y servicios, mientras que, para el caso de las firmas, se plantean dos tipos: bienes y servicios, que fueron definidos a través de diferencias en las elasticidades. En la tabla 5.6, se presentan los resultados de las rentas esperadas de los agentes para este caso. Mientras que en la tabla 5.7 se presenta el promedio a través de las zonas de los valores obtenidos para las variables propias de M.E.G.U.

Tabla 5.6: Promedio renta de bienes inmuebles por tipo de agente. Simulación 3

	Hogares	Firmas
r/k = 1	$3{,}18e^{4}$	$1{,}51e^{11}$
r/k = 2	$3{,}18e^{4}$	$6{,}72e^{(}11)$

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5.7: Valor promedio de precios y producción. Simulación 3

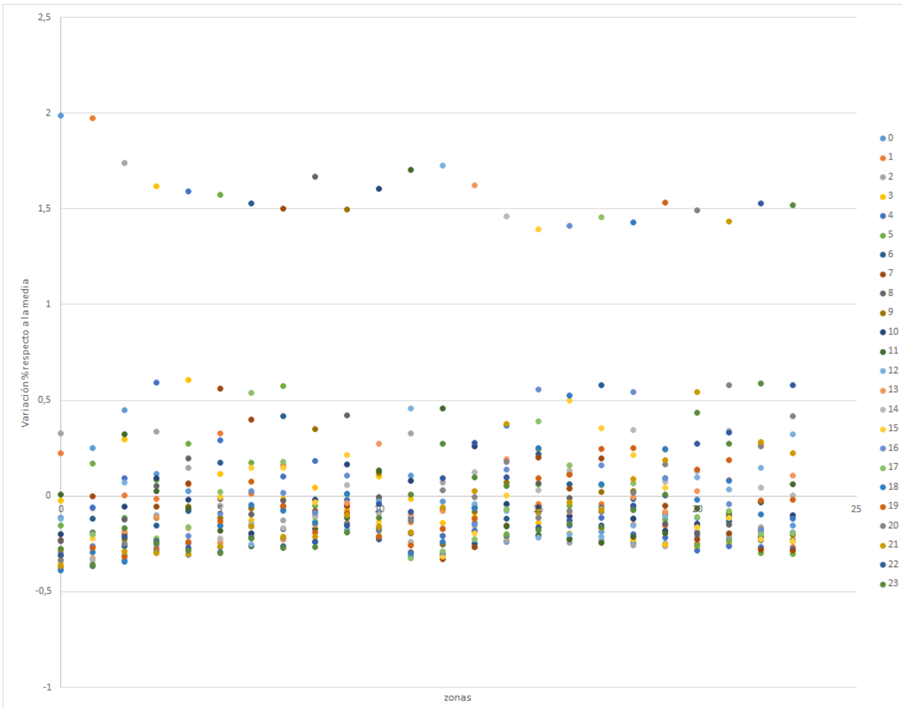
	p_{rj}	w_{hj}	x_{rj}
r/k = 1	1,00368	1,0039	1,00575
r/k = 2	1,00371	1,0033	1,00576

Fuente: Elaboración propia

En este caso, se observan dos efectos. Primero, la renta esperada de los hogares disminuyó un 197 % respecto del escenario homogéneo. Al igual que en el escenario de simulación 2, esto se explica porque las diferencias en los valores de las elasticidades son más significativas que los variaciones en las precios propios de M.E.G.U. Segundo, para el caso de las firmas, la renta esperada aumento aproximadamente un 100 % para el segundo tipo de agente (para el primero se mantiene constante). Se observa que los servicios tendrían más disposición a pagar por suelo que las firmas. Lo que tiene sentindo de acuerdo a como se definió el escenario.

En la figura 5.8 se presenta la variación porcentual respecto a la media de la renta de los hogares, a través de las zonas.

Figura 5.8: Variación % de las rentas respecto de la media. Hogares. Simulación 2



Fuente: Elaboración propia

Se observa una variación de menor magnitud respecto del escenario homogéneo, sin embargo, la estrucutura se mantiene. Por otra parte, en la figura 5.9 se presenta la variación porcentual respecto a la media de la renta de las firmas, a través de las zonas.

En la tabla 5.8 se presenta el valor promedio a través de las zonas, para los precios de bienes y servicios p_{rj}, tasa salarial w_{hj} y producción de bienes y servicios x_{rj}.

Tabla 5.8: Valor promedio de precios y producción

	p_{rj}	w_{hj}	x_{rj}
r/k = 1	1,00368	1,0039	1,00575
r/k = 2	1,00371	1,0033	1,00576

Fuente: Elaboración propia

El aumento en la elasticidad del consumo de bienes intermedios de los servicios, produjo que dis-

Figura 5.9: Variación de las rentas respecto de la media. Firmas. Simulación 3

Fuente: Elaboración propia

minuyera su precio p_{rj} en un 0,0095 % respecto bien tipo 1, sin embargo, la producción registro un leve alza. La tasa salarial w_{hj}, disminuye respecto del escenario homogéneo, lo que guarda relación con la preferencia por consumo de suelo de la simulación.

5.5. Simulación 3b: Preferencia por viviendas

En este caso, se diferenciaron los hogares en dos tipos, mediante diferencias en las elasticidades. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.9

Tabla 5.9: Promedio renta de bienes inmuebles por tipo de agente. Simulación 3

	Hogares	Firmas
r/k = 1	$4{,}29e^4$	$1{,}351e^{11}$
r/k = 2	$3{,}28e^4$	$6{,}92e^(11)$

Fuente: Elaboración propia

Se observa un aumento en la disposición a pagar respecto del tipo de hogar 2.

Finalmente, se observa una leve variación en los tiempos esperados de viaje, esto motivado principalmente por las diferencias en la localización de los agentes, los cuales al tener distintas tasas de generación de viajes, originan nuevas matrices y por consiguiente, nuevos flujos por arco. Sin embargo, no se la matriz mantiene su estructura.

Figura 5.10: Mapa de calor de los costos de transporte. Simulación 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	5,94080057	3,96643602	7,89951517	9,67998433	10,4767748	15,044892	12,3551124
2	6,04563022	0	9,80875564	10,2151327	8,655343	4,99005758	9,60096281	6,95484115
3	3,86250208	9,68992638	0	3,92749325	5,8530686	9,4378532	14,0741809	11,2877987
4	7,60920506	9,96563817	3,72263447	0	1,88873903	5,6272876	10,1229542	7,52593287
5	9,35746301	8,26122929	5,6289252	1,98026206	0	3,73244163	8,17496739	5,61609446
6	10,2253484	4,62347827	9,09868081	5,62482886	3,68105374	0	4,56364248	1,89811458
7	14,7329733	9,15275203	13,6846063	10,1041201	8,07923513	4,49832353	0	2,6203485
8	12,005832	6,47862628	11,0009385	7,42118264	5,50546246	1,85843649	2,6494478	0
9	14,1006992	12,6114697	10,3684209	6,71290859	4,84371028	7,92814576	9,65865172	8,12409565
10	15,5556074	13,5323709	11,8884698	8,69539984	7,62593857	8,77022206	7,61827062	7,52385257
11	12,2063542	15,196065	8,31276341	5,94254741	7,73233265	10,9425416	12,2668886	11,5370725
12	7,84959538	13,5532538	3,92962649	7,57056109	9,53462508	12,9512034	16,2625544	14,5961532
13	10,7679121	16,5261212	6,81761532	10,4837821	12,4419756	15,8327253	16,057995	16,7652797
14	15,9161429	18,6501806	11,9483906	9,86244425	11,5001417	14,2331398	13,2000483	13,6637079
15	18,4259352	16,417292	14,6954892	12,7400637	12,4178527	11,5911484	9,13617046	9,7172376
16	15,8010339	10,6212607	13,956834	10,4227367	8,86162326	5,90168518	4,0087945	3,99095585
17	17,4787084	12,2880211	15,301238	11,9859539	10,4149076	7,55675107	5,58402548	5,66552449
18	16,0499215	10,5672342	14,732112	11,2338246	9,51296601	5,89156502	1,77296338	4,00092308
19	18,8598149	14,0576862	16,0531431	13,245014	12,0394415	9,22401849	6,84128412	7,29912108
20	19,0259729	14,2671296	16,382481	14,4678553	13,0607845	9,56240219	5,59206162	7,61896866
21	16,7352597	18,5295792	12,7379841	14,7294143	15,4687564	13,7105345	9,95738801	11,8995134
22	17,5269321	17,6287182	13,6425305	14,1594011	14,3976305	12,8314355	9,21549892	10,94885
23	15,844042	19,6984402	12,017475	12,7936161	14,4783255	15,6103598	12,2867337	14,0097464
24	14,2194967	19,1196835	10,3308168	13,0437758	14,826842	15,7002407	12,255928	14,115547

	9	10	11	12	13	14	15	16
1	14,2627041	15,811542	12,2530077	7,91482888	10,8476319	15,9981776	18,9169701	16,3044799
2	12,8317504	13,950868	15,4247268	13,6839864	16,5649633	18,7989831	16,7572867	11,1307759
3	10,465923	11,9803938	8,28548326	3,88405756	6,85966591	12,0393311	14,9593137	14,3692251
4	6,57303279	8,60204587	5,57382962	7,32497872	10,2999231	9,56030956	12,7914631	10,747172
5	4,59415424	7,3716476	7,44239713	9,28856512	12,1533801	11,2562241	12,3384242	8,98636768
6	7,84075433	8,81221054	10,7532316	12,8340019	15,5488875	14,0530002	11,6065315	6,03133277
7	9,52185652	7,45531007	12,1332608	16,186867	15,6074617	13,0351739	9,0654628	4,01090347
8	7,85302912	7,31194859	11,2875972	14,5506634	16,2293482	13,3263633	9,58728706	4,05402677
9	0	2,92665	7,6338891	12,5531657	14,9353062	10,8459544	8,47201757	6,54254596
10	2,85331054	0	4,75882164	10,6600457	12,6967684	7,95609357	5,51645415	3,67927011
11	7,65423992	4,99468369	0	5,89264735	8,64016844	3,93662372	8,10101189	8,53175211
12	12,5776537	10,5674194	5,8238814	0	2,97856904	9,30160653	12,037598	13,9003351
13	15,1383	12,8478792	8,56818351	2,95639836	0	8,89669899	9,79437251	14,5531967
14	10,8315393	8,02581353	3,99395679	9,26911879	8,88266177	0	4,7207298	10,059055
15	8,41363554	5,40524462	7,79198228	11,8836141	9,66570906	4,59709105	0	5,85489219
16	6,20548906	3,35999659	8,11392933	13,7516873	14,0316886	9,70464616	5,61227795	0
17	7,39348792	4,53769678	9,01198642	14,4311697	13,2616127	8,61306779	4,13960882	1,70710122
18	8,67288795	5,94619805	10,6104576	15,3368067	13,8839336	11,2668419	7,3339185	2,50203114
19	8,82175961	5,90275827	9,5305949	13,8781486	11,6810486	7,12551421	2,51745535	3,40093366
20	11,2447542	8,3643089	11,730748	13,4731019	10,4338817	9,05808346	5,31487066	5,47454884
21	12,6111079	9,61182228	10,1990917	8,94755184	6,09776449	6,51025742	4,3411647	8,99424484
22	10,8231882	7,90629274	9,19389858	9,9143128	7,04426571	5,63600159	2,46559457	7,71362142
23	12,9990462	10,1711228	7,45422955	8,22899376	5,43503821	3,56760331	5,38619504	10,624673
24	14,0218774	11,0488257	8,82996962	6,52255902	3,4405694	5,33717185	5,97564778	10,8576963

	17	18	19	20	21	22	23	24
1	17,9899768	16,5701293	19,1583071	19,2385054	17,0726946	17,9998046	16,2263873	14,6580983
2	12,9202447	11,1254803	14,3344623	14,379846	18,5666459	18,0235913	20,0591733	19,5527817
3	15,7377619	15,1872994	16,3630713	16,4063132	13,1261419	13,9873692	12,2640889	10,7046616
4	12,2048647	11,4673402	13,2976607	14,3708696	14,7717583	14,2493887	12,8316131	13,2209677
5	10,5957111	9,59808014	11,8170005	12,6527598	15,1338146	14,3169822	14,4763009	14,7965951
6	7,75999304	5,97107345	9,28831925	9,33249414	13,6887171	12,8084084	15,5083902	15,755265
7	5,72297766	1,79840805	6,83311078	5,25987665	9,89868624	9,27343124	12,1924852	12,2170434
8	5,87927686	4,07054771	7,3175637	7,3349808	11,6525118	10,8169414	13,8557034	13,9709513
9	7,96124147	8,9404381	9,0565184	11,0770341	12,6051256	11,1466799	13,1211236	14,0656846
10	4,90611119	6,17286794	6,09542467	8,13223409	9,60222119	8,10805407	10,272586	10,9825049
11	9,57494285	10,8821402	9,78050382	11,7505133	10,362761	9,52892877	7,69220661	9,15878217
12	14,6628208	15,5533125	13,9619901	13,2678506	9,28497067	10,2753252	8,50028694	6,77058197
13	13,7470488	14,2496955	12,1128528	10,5207693	6,38535931	7,4692964	5,62417661	3,90950098
14	9,17593852	11,5852348	7,45051326	9,03631788	6,85666832	6,05352765	3,87183847	5,66637392
15	4,47298456	7,53842926	2,7690058	5,12747164	4,46469	2,79626604	5,45951393	6,06581874
16	1,77301926	2,42126337	3,33800642	4,99527909	8,7267107	7,62497618	10,4272062	10,7773032
17	0	4,0975029	1,56958354	4,62027641	7,73443139	6,41975319	9,27270913	9,73030964
18	4,1569296	0	5,14337465	3,45799082	8,03902403	7,52579625	10,344916	10,2839754
19	1,84470349	5,25809335	0	3,37410166	6,22608206	4,89877113	7,72320563	8,17832728
20	5,21072915	3,76655191	3,77157565	0	4,79022119	4,29840471	7,00115225	6,91530355
21	7,98272723	8,15125197	6,28094885	4,40208014	0	1,74851034	3,5230962	2,47151335
22	6,61064249	7,55219011	4,93044647	3,83043271	1,71278091	0	3,08091342	3,51210849
23	9,53781812	10,4237247	7,78324438	6,75106569	3,51324309	3,15250144	0	1,83999256
24	9,90585306	10,4151118	8,16360929	6,54518113	2,4531885	3,58232163	1,7682927	0

Fuente: Elaboración propia

Capítulo 6

Conclusiones y líneas de investigación futura

6.1. Introducción

En este capítulo se exponen las principales conclusiones obtenidas sobre la tesis realizada y las posibles líneas de investigación futura.

6.2. Conclusiones

En esta tesis se ha generado una formulación que permite sentar las bases para un equilibrio general urbano, que incorpore los sistemas de uso de suelo, intercambio de bienes y servicios y transporte. Se desarrollo un modelo de remates al mejor postor, en el cual se definen dos agentes: Hogares y firmas, se asume que se comportan de manera racional, por lo tanto, los primeros maximizan una función de utilidad, de tipo Cobb-Douglas con retornos constantes a escala sujeta a restricciones de tiempo e ingreso, mientras que las firmas, minimizan una función de gasto lineal sujeta a un nivel de producción dado; la función de producción también es de tipo Cobb-Douglas con retornos constantes a escala, por lo tanto, las firmas no tienen excedente. Para la utilidad de los hogares y para la disposición a pagar de las firmas, se asume una distribución de error aleatorio del tipo Fréchet. Se demuestra que este problema es convergente.

Posteriormente, se ha desarrollado un programa computacional que permite simular el modelo en una ciudad prototipo, junto a esto, se desarrollo un algoritmo de solución. Se simulación tres escanarios, para estudiar la relación que existe entre las variables y verificar su correcto funcionamiento.

Finalmente se han presentado los resultados obtenidos. De los cuales, y considerando la formulación propuesta, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Se observa que la máxima disposición a pagar para cada hogar tipo h ubicado en la zona i, se obtiene cuando el lugar de trabajo j coincide con i. Se concluye que lo anterior es a raíz de los costos generalizados de transporte, tanto tiempo como tarifa, lo que hacen atrayente trabajar en la misma zona cuando no existen diferencias importantes respecto de la tasa salarial w_{hj}.

- Las formas funcionales propuestas no permiten representar de manera adecuada fenomenos existentes, como economías de aglomeración y escalara, sin embargo, si proporcionar un marco teorico que siente las bases para modelos que incorpoten intercambios de bienes y servicios.

- Se concluye que las rentas esperadas son sensibles a variaciones en las elasticidades, mientras que las diferencias en los precios del mercado de bienes y servicios no resultan significativas al estar normalizados.

- Se concluye que la distribución de errores tipo Frechét es adecuada para modelar procesos de elecciones discretas donde las funciones objetivo sean estrictamente positivas.

- Se concluye que sin la presencia formal de externalidades de localización, la diferencia en los costos y tiempos de transporte es suficiente para que se generen economías de aglomeración.

- Se concluye que es posible incorporar a la relación que existe entre transporte y uso de suelo el mercado de intercambio de bienes y servicios.

6.3. Líneas de investigación futura

Dentro de los temas a profundizar en futuros trabajos, se identifican supuestos que se pueden levantar tanto al formular el modelo, como al simular. De la misma manera, es posible complementar la formulación con modificaciones metodológicas. El posible trabajo a realizar se detalla a continuación:

- Calibración: Con el fin de generar un modelo con capacidad predictiva, es necesario calibrar las elasticidades del modelo. Se puede utilizar información observada de precios de bienes y servicios p_{rj}, tasas salariales w_{hj}, producción X_{rj} y rentas de bienes inmuebles R. Lo anterior, sin embargo, requiere levantar grandes cantidades de información. Se puede explorar la utilización de herramientas de big data.

- Beneficios en el caso de las firmas: Se invita a levantar el supuesto, modelando el comportamiento de las firmas a través de una función de producción sin retornos constantes a escala. Lo anterior, requiere de un marco teorico que sustente el destino de los excedentes económicos. En este caso, se puede formular la existencia de diferencias significativas en la tasa salarial w_{hj}, de modo que los hogares tengan incentivos para trabajar en una zona distinta a la de residencia.

- Externalidades de localización: Se pueden incorporar en la formulación de la función de utilidad de los hogares. Permitiría analizar el efecto de las economías de aglomeración y escala en el consumo de bienes y servicios.

- Desfase entre oferta y demanda: Es posible formular este marco teorico dentro de un modelo dínamico, que permita desfases entre la oferta y la demanda, tanto para localización como para bienes y servicios.

Bibliografía

Alonso, W., (1965). *Location and Land Use: Towards a General Theory of Land Rent*. Harvard University Press, Cambridge.

Anas, A., (1981). *Discrete Choice Theory, Information Theory and the Multinomial Logit and Gravity Models*. Transportation Research, 17B, 13-23.

Anas, A., (1982). *Residential Location Markets and Urban Transportation*. Academic Press, London.

Anas A. y Liu Y., (2007). *A regional economy, land use, and transportation model (RELUTRAN): Formulation, Algorithm Desing and Testing*. Journal of regional science, 47 (3), 415-455.

Bravo M., Briceño L., Cominetti R., Cortes C. y Martínez F. (2009) . *Un Modelo Integrado de los Sistemas de Transporte y Uso de suelo con externalidades*. Tesis de Magíster. Universidad de Chile.

Baillon J-B y R. Cominetti (2004) *Markovian Traffic Equilibrium*. Springer-Verlag 2016, 33-56.

Hunt, J. y Abraham, J. (2007) *PECAS for special economic modeling, theoretical formulation*. Working Draft, Calgary, Alberta.

Hurtubia R. y Martínez F. (2006) *Un Modelo Dinámico para la Simulación de Estados de Equilibrio en el Mercado Inmobiliario*. Tesis de Magíster. Universidad de Chile.

Martínez F.J, (1992). *The Bid-Choice land use model: an integrated economic framework*. Environment and Planning A 24,871-885.

Martínez, F. y Araya C. (2000). *A Note on Trip Benefits in Spatial Interaction Models.*, Journal of Regional Science, 40, 789-796.

Martínez, F. y Araya C. (2000). *Transport and land-use benefits under location externalities*, Enviroment and Planning, A, 32: pp 1611-1624.

Martínez F. y Donoso P., (2010). *MUSSA: a land use equilibrium model with location externalities, planning regulations and pricing policies*. In: 7th Int. Conference on Computers in Urban Planning and Urban Management (CUPUM 2001), Hawaii, July 18-21, 2001.

Martínez F. y Henríquez R. (2007) *The RBSM: A Random Bidding and Supply Land Use Equilibrium Model.* Transportation Research Part B: Methodological, Volume 41, July 2007, 632-651.

Mattsson L-G., Weibull J.W. y Lindberg P.O., (2014). *Extreme Values, invariance and choice probabilities.* Transportation Research Part B: Methodological, Volume 59, January 2014, 81-95.

Waddell, P., 2002. *UrbanSim: Modeling urban development for land use, transportation and environmental planning.* Journal of the American Planning Association 68, 297-314.