



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL PARA PROBLEMAS
DE MECÁNICA DE SÓLIDOS LINEAL UTILIZANDO LA DESCOMPOSICIÓN DEL
ELEMENTO VIRTUAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA MENCIÓN MECÁNICA

RODRIGO ALFONSO SILVA VALENZUELA

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
ELENA ATROSHCHENKO

SANTIAGO DE CHILE
2018

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL
GRADO DE: Magister en Ciencias de la Ingeniería,
Mención Mecánica.
POR: Rodrigo Alfonso Silva Valenzuela
FECHA: 2018
PROF. GUÍA: Sr. Alejandro Ortiz Bernardin

DESARROLLO DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NODAL PARA PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SÓLIDOS LINEAL UTILIZANDO LA DESCOMPOSICIÓN DEL ELEMENTO VIRTUAL

En la integración numérica de los métodos de Galerkin sin malla, debido a la complejidad de las funciones de forma, es necesario utilizar una gran cantidad de puntos de integración para lograr que el método sea estable, lo que aumenta los tiempos de cómputo. Por otro lado, la integración directa en el nodo puede ser deseable porque se basa en menos evaluaciones de puntos de integración, pero conduce a inestabilidad numérica debido a un mecanismo similar a la subintegración y al desvanecimiento de las derivadas de las funciones de base en los nodos.

En este trabajo se propone un esquema de integración nodal consistente y estable para el método de Galerkin sin malla para problemas de mecánica de sólidos lineal. Para el desarrollo de este esquema se utiliza la descomposición del elemento virtual, la cual fue previamente desarrollada para afrontar problemas de integración numérica en elementos poligonales. El método propuesto en esta tesis se ha denominado NIVED (Nodal Integration using the Virtual Element Decomposition). La integración nodal se evalúa sobre las celdas representativas para cada nodo, basadas en diagramas de Voronoi o en polígonos construidos a partir de mallas de triángulos, donde el centroide de los triángulos representan los vértices de los polígonos. En esta tesis, el esquema se implementa utilizando las funciones de base de la máxima entropía.

Para estudiar y demostrar la precisión y la robustez del método de integración nodal se implementan varios problemas de referencia en elastostática y elastodinámica lineal bidimensional. Adicionalmente los problemas estáticos se comparan con el desempeño de un método de Galerkin sin malla utilizando integración de Gauss y el problema dinámico con el desempeño del método del punto material. Se demuestra que el esquema propuesto satisface el test de la parcela lineal entregando error de máquina. Finalmente NIVED demostró ser un esquema consistente y estable.

Agradecimientos

El primer agradecimiento es mi profesor guía Alejandro Ortiz por su paciencia, tiempo y consejos. Muchas fueron las dudas que aparecieron en el camino del desarrollo de esta tesis, pero gracias a su guía se llegó a buen puerto. Además agradezco a los miembros de la comisión revisora, a la profesoras Viviana y Elena, por sus revisiones y consejos.

Agradezco a mi papá por ser un gran apoyo en estos años de estudios.

Agradezco a mi amigo Miguel, por todo su apoyo, consejos, y su amistad que siempre estuvo presente durante estos años de trabajo.

Agradezco a todos los que conocí en estos años de estudios del magister y compartimos en la sala de estudios del cuarto piso: Diego, Eduardo, Daniel, Edwin, Sebastián y Edgardo. Y las siempre necesarias carreras de Mario Kart junto a Diego y Eduardo.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes generales	1
1.2. Motivación	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivo general	2
1.3.2. Objetivos específicos	2
1.4. Alcances	3
2. Metodología	4
2.1. Fases del trabajo	4
2.2. Normas de convergencia	4
3. Antecedentes	6
3.1. Métodos con malla y sin malla	6
3.2. Método del punto material: un método híbrido	7
3.3. Funciones base de la máxima entropía	8
3.4. Métodos de integración nodal	9
3.5. Convergencia, consistencia y estabilidad	11
3.6. Integración numérica en el tiempo	12
4. Integración nodal utilizando la descomposición del elemento virtual	14
4.1. Elasticidad lineal	14
4.2. Forma débil	14
4.3. Descomposición del elemento virtual para integración nodal	15
4.3.1. Partición del dominio para la representación nodal	15
4.3.2. Operadores de proyección	16
4.3.3. Condiciones de ortogonalidad energética	18
4.3.4. Forma bilineal del MEV	19
4.3.5. Obtención de los operadores de proyección	19
4.3.6. Matrices de proyección	21
4.3.7. Matriz de rigidez elemental NIVED	24
4.3.8. Vector elemental de fuerzas de cuerpo y de tracción NIVED	24
4.3.9. Matriz de masa elemental NIVED	25
4.3.10. Normas de convergencia NIVED	26
5. Ejemplos numéricos y discusión	27
5.1. Test de la parcela	27

5.2. Estabilidad numérica	28
5.3. Viga en voladizo	29
5.4. Placa con orificio	31
5.5. Problema manufacturado	34
5.6. Problema dinámico manufacturado	37
6. Conclusiones	43
Bibliografía	44

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes generales

En los métodos de Galerkin sin malla, se utiliza integración numérica para evaluar las integrales de la forma débil (usualmente cuadratura de Gauss), lo que conlleva a errores de integración numérica debido a la naturaleza de las funciones de base utilizadas en estos métodos. Existen dos fuentes de error asociadas con los esquemas de integración en los métodos de Galerkin sin malla: (a) la función de base es racional (no polinomial) por lo que no es integrable exactamente y (b) su soporte local no está alineado con el dominio de integración. Esta última fuente es la que más aporta al error de cuadratura [1]. Aunque mediante el uso de más puntos de cuadratura los métodos de Galerkin sin malla pueden obtener resultados numéricos estables y razonables, su alto costo computacional es inaceptable.

Debido a la complejidad descrita en la integración de Gauss para los métodos de Galerkin sin malla, se han realizado intentos para desarrollar métodos de integración nodal, produciendo un método de tipo de partícula donde el esfuerzo y el historial del material se encuentran asociado a los nodos. La integración directa en el nodo, por otro lado, conduce a inestabilidades numéricas debido a un mecanismo similar a la subintegración y al desvanecimiento de las derivadas de las funciones de base en los nodos, la cual se manifiesta principalmente por modos espurios y grandes oscilaciones en la solución [2].

Se han realizado numerosos esfuerzos para estabilizar los esquemas de integración nodal. Chen et al. [3] propusieron una estabilización de suavizado de esfuerzos para la integración nodal con el objetivo de eliminar la inestabilidad espacial y para la convergencia introdujeron una restricción de integración. Liu et al. [4] desarrollaron un esquema de integración nodal basado en la expansión de series de Taylor. Duan et al. [5] propusieron una corrección en la integración nodal basada en el principio de Hu-Washizu.

1.2. Motivación

Recientemente, el método del elemento virtual [6] ha sido presentado, el cual fue desarrollado para afrontar los problemas de integración numérica en elementos poligonales. Este método consiste en la construcción de una representación algebraica (exacta) de la matriz de rigidez sin la evaluación explícita de funciones de base (las funciones de base son virtuales). En el MEV, la matriz de rigidez se descompone en dos partes: una matriz que garantiza la reproducción exacta de un campo de desplazamientos lineal (matriz de rigidez de consistencia) y una matriz de corrección que provee estabilidad (matriz de rigidez de estabilidad). Esta descomposición está formulada en el espíritu del teorema de equivalencia de Lax para esquemas de diferencias finitas (consistencia + estabilidad \rightarrow convergencia).

La formulación del método del elemento virtual constituye un marco adecuado para corregir errores de integración en métodos sin malla. Recientemente, la teoría del MEV fue utilizada para corregir errores de integración numérica en métodos de Galerkin sin malla utilizando integración de Gauss y pasando el test de la parcela satisfactoriamente [7]. Dando continuidad a ese trabajo y tomando la idea de polígonos como representación nodal en el dominio [3], el objetivo de esta tesis es utilizar la descomposición del elemento virtual para estabilizar la integración nodal en el método de Galerkin sin malla.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Desarrollar un esquema de integración nodal estable para el método de Galerkin sin malla utilizando la descomposición del elemento virtual para problemas de mecánica de sólidos lineal.

1.3.2. Objetivos específicos

- Implementar un esquema de integración nodal utilizando la descomposición del elemento virtual para problemas de mecánica de sólidos lineal estáticos y dinámicos utilizando las funciones de base de la máxima entropía.
- Implementar el test de la parcela, problema de viga en voladizo, placa con orificio y un ejemplo dinámico de referencia en mecánica de sólidos con el esquema de integración nodal.
- Comparar el método de integración nodal con métodos sin malla utilizados en mecánica de sólidos lineal.
- Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema desarrollado mediante los ejemplos implementados.

1.4. Alcances

El alcance de este trabajo es desarrollar un esquema de integración nodal estable para el método de Galerkin sin malla utilizando la descomposición del elemento virtual para problemas de mecánica de sólidos lineal. Se adoptarán las funciones de base de la máxima entropía (maxent), pero otras funciones base de métodos sin mallas pueden ser utilizadas en el esquema. La aproximación mediante estas funciones de base es lineal.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Fases del trabajo

Las principales fases de este trabajo fueron:

- Revisión bibliográfica de los métodos sin malla e integración nodal, además de los conceptos y requisitos para la convergencia, consistencia y estabilidad.
- Desarrollo del esquema de integración nodal para el método de Galerkin sin malla utilizando el marco teórico de la descomposición del elemento virtual.
- Implementación computacional del esquema numérico utilizando el lenguaje C++. Para la visualización de mallas se utilizó el software Paraview. Además se implementó un método de Galerkin sin malla utilizando integración de Gauss (MEM, Maximum-Entropy Meshfree Method) y el método del punto material (MPM, Material Point Method) para posterior comparación.
- Estudio de la consistencia y estabilidad del esquema implementado.
- Estudio de la convergencia mediante gráficos de convergencia y comparación con los otros métodos implementados.
- Análisis de los resultados y conclusiones finales.

2.2. Normas de convergencia

Para estudiar la exactitud y la convergencia, se utilizan dos medidas globales del error. La norma L^2 relativa del error en los desplazamientos se define como

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{L^2}} = \left(\frac{\sum_E \int_E (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) d\mathbf{x}}{\sum_E \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

y la semi-norma H^1 relativa del error en la energía es

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{H^1}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} = \left(\frac{\sum_E \int_E (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\mathbf{x}}{\sum_E \int_E \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

En las normas, las integrales sobre la celda de integración E se calculan usando cuadratura numérica.

Capítulo 3

Antecedentes

3.1. Métodos con malla y sin malla

El comportamiento de los sólidos puede describirse en términos de ecuaciones diferenciales parciales. En general, resolver estas ecuaciones mediante métodos analíticos clásicos para formas arbitrarias es casi imposible. Debido a esto se recurre a esquemas numéricos los cuales dependiendo de la forma de discretizar el medio pueden ser clasificados en métodos con malla y métodos sin malla.

Un método con malla clásico es el método de los elementos finitos, donde la solución se obtiene utilizando la malla para interpolar e integrar de forma numérica las ecuaciones gobernantes en su forma débil. La malla utilizada esta formada por elementos los cuales están interconectado mediante nodos. Las funciones de interpolación dependen de esta malla. Entonces cuando se trabaja con deformaciones extremas y los elementos sufren una gran distorsión se generan errores en la solución numérica. Estos errores se deben principalmente a que los elementos adquieren, después de la gran deformación, volúmenes o áreas negativas. Para corregir este problema se suele remallar los sectores afectados y los resultados deben ser interpolados en la nueva malla, aumentando la complejidad de la resolución y el tiempo de cómputo.

En los métodos sin malla la aproximación no depende de la interconexión entre los nodos, disminuyendo así la sensibilidad de las distorsiones geométricas, haciéndolos más adecuados para modelar grandes deformaciones. Los métodos sin malla pueden ser clasificados como métodos de Galerkin, métodos de Petrov-Galerkin o métodos de colocación. Algunos ejemplos de métodos de Galerkin son el método sin malla de Galerkin (EFG) [8], el método de reproducción de partículas de kernel (RKPM) [9], el método de elemento natural (NEM) [10] y el método de esferas finitas (MFS) [11]. El representante de los métodos de Petrov-Galerkin es método local sin malla de Petrov-Galerkin (MLPG) [12]. Y para la categoría de métodos de colocación esta el método de las partículas suavizadas (SPH) [13].

En los métodos de Galerkin sin malla se utiliza una malla de fondo para realizar la integración numérica de la forma débil (normalmente cuadratura de Gauss), idéntica a la forma

débil de FEM. Sin embargo, en estos métodos se utilizan funciones de forma (o base) diferentes, las cuales no dependen de la conectividad entre los nodos, solo de sus coordenadas. En la construcción de estas funciones de forma se utilizan los nodos que se encuentran en la vecindad del punto que se desea aproximar, haciéndolas más complejas en forma y construcción. Pero la suavidad de las aproximaciones sin malla es mucho mejor que la interpolación Lagrangiana basada en elementos empleada en FEM. Por ejemplo, la suavidad de la aproximación de MLS con el peso Gaussiano es C^∞ . En contraste, la interpolación FEM solo tiene continuidad C^0 .

Las funciones de base de los métodos sin malla de Galerkin son racionales (no polinomiales), las cuales son difíciles de integrar con exactitud y es uno de los principales inconvenientes de estos métodos. Este inconveniente es extremadamente importante para asegurar la convergencia y estabilidad del método. Aunque una cuadratura de alto orden puede ofrecer estabilidad y convergencia óptima, es prohibitivamente costosa para el uso práctico. Por otro lado, la cuadratura de orden bajo consume menos CPU pero puede generar soluciones no convergentes e inestables.

Finalmente, el método desarrollado en esta tesis pertenece a la categoría de un método sin malla de Galerkin, pero integrando directamente en los nodos.

3.2. Método del punto material: un método híbrido

Desde un enfoque distinto, los métodos de discretización espacial utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales se pueden clasificar en métodos Lagrangianos, métodos Eulerianos y métodos híbridos.

En los métodos Lagrangianos el medio discretizado es deformado junto con el material. La masa de cada elemento del material permanece constante durante la resolución, pero el volumen de los elementos cambia debido a la deformación de estos. La ventaja de estos métodos es su simplicidad en la formulación y resolución. Los límites de los elementos coinciden con las interfaces del material durante el proceso de la solución, de modo que es fácil imponer condiciones de contorno y rastrear las interfaces del material. Pero la distorsión severa de los elementos produce errores significativos en la solución numérica, e incluso conduce a volumen o área de elemento negativo.

Por otra parte, en los métodos Eulerianos, la malla está fija en el espacio y no se mueve con el material, de manera que el material fluye a través de la malla. El volumen de cada elemento se mantiene constante durante la simulación, pero su densidad puede variar. Los métodos de Eulerianos son adecuados para modelar grandes deformaciones de materiales, de modo que la mayoría de los códigos de dinámica de fluidos computacional emplean métodos de Eulerianos. Estos métodos solo calculan las cantidades de material entre los elementos sin determinar de forma explícita y precisa la posición de la interfaz del material y la superficie libre, por lo que son poco prácticos para seguir interfaces de materiales deformados.

Finalmente, los métodos puramente Lagrangianos y puramente Eulerianos poseen dife-

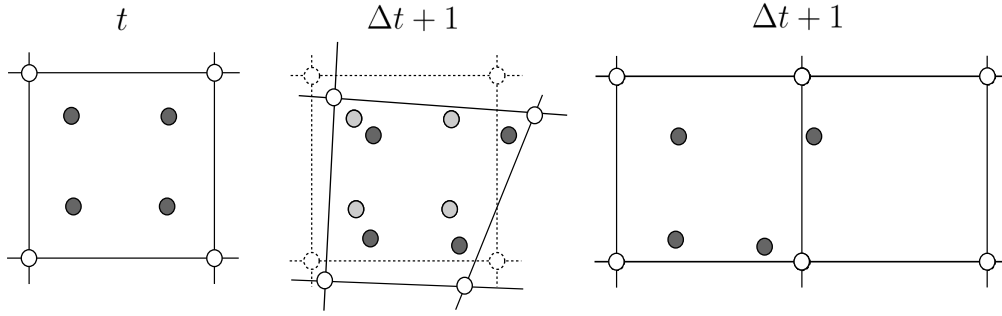


Figura 3.1: Método del punto material: puntos material lagrangiano superpuestos sobre una rejilla Euleriana. Los puntos materiales pueden moverse a otros elementos. Esto contrasta con los puntos de integración en FEM que siempre permanecen en el mismo elemento.

rentes desventajas y ventajas. Un esquema que utiliza las ventajas de ambos métodos es el Método del Punto Material (MPM). Este esquema puede concebirse como una extensión de FEM de naturaleza dinámica, donde las propiedades físicas del continuo residen en las partículas a lo largo de los cálculos (deformaciones), mientras que la malla Euleriana permanece fija. Por lo tanto, MPM combina los mejores aspectos de las formulaciones tanto Lagrangianas como Eulerianas y evita en lo posible las deficiencias de las mismas [14].

La formulación del esquema MPM puede ser visto desde una perspectiva de FEM, en donde los puntos de integración (partículas) son móviles y pueden moverse a través de la malla Euleriana libremente. Después de cada deformación, la malla Euleriana se descarta y se utiliza la malla original para el siguiente cálculo evitando así la distorsión de los elementos (ver Figura 3.1).

Para la integración en el tiempo del esquema MPM, normalmente se utilizan formulaciones explícitas en donde la solución avanza en el tiempo de t a $t + \Delta t$ sin ninguna iteración. Sin embargo, existe una restricción en el paso de tiempo $\Delta t \leq \Delta x/c$, donde Δx es el espaciamiento de la rejilla Euleriana y $c = \sqrt{E_\gamma/\rho}$ es la velocidad del sonido en el material [14].

Este método por ser de naturaleza dinámica y popular entre los métodos de partículas, será utilizado para comparar la robustez del esquema desarrollado en esta tesis.

3.3. Funciones base de la máxima entropía

Las funciones de base que se utilizará en esta tesis son las funciones base de la máxima entropía (maxent). Estas funciones presentan ciertas propiedades atractivas en los métodos sin malla, como por ejemplo son suaves, sus valores son siempre positivos y tienen la propiedad que los nodos interiores no tienen influencia en su valor cuando esta se calcula sobre el contorno del dominio [15], facilitando la imposición de las condiciones de borde.

Estas funciones se basan en el principio de la máxima entropía, el cual se puede entender como una técnica para estimar la probabilidad de un evento en forma generalizada. Como

resultado del procedimiento se obtiene una distribución de probabilidad del evento en cuestión, la cual responde en forma coherente a las restricciones probabilísticas que se conocen del problema, quedando definidas como medias o también en valores futuros esperados. La solución que se obtiene de este modo tiene como característica principal que posee la menor incertidumbre posible para la información disponible.

Para su construcción, se considera un conjunto de nodos dispersos y una función de peso (prior) $w_a(\mathbf{x})$ asociada a cada nodo a . Podemos escribir la aproximación para la función $u(\mathbf{x})$ de la siguiente forma:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_a), \quad (3.1)$$

donde $\phi_a(\mathbf{x})$ es la función de forma asociada al nodo a de la discretización del dominio, y $u(\mathbf{x}_a)$ son los coeficientes nodales. Utilizando el funcional de entropía de Shannon-Jaynes, las funciones de base de la máxima entropía $\{\phi_a(\mathbf{x}) \geq 0\}_{a=1}^m$ son obtenidas al resolver el siguiente problema de optimización convexo [16]:

$$\min_{\phi \in \mathbf{R}_+^N} \sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\phi_a(\mathbf{x})}{w_a(\mathbf{x})} \right) \quad (3.2)$$

sujeto a las condiciones de reproducción lineales:

$$\sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x}) = 1 \quad \sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \phi_a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad (3.3)$$

donde \mathbf{R}_+^m es el ortante no negativo. En esta tesis, se utilizará como prior de función de peso la función de base radial Gaussiana dada por [15]:

$$w_a(\mathbf{x}) = \exp \left(-\frac{\gamma}{h_a^2} \|\mathbf{c}_a\|^2 \right), \quad (3.4)$$

donde γ es un parámetro que controla el tamaño del soporte de la función de base, \mathbf{c}_a son las coordenadas nodales desplazadas, y h_a es el espaciamiento nodal característico asociado al nodo a .

3.4. Métodos de integración nodal

Como se mencionó anteriormente, debido a la complejidad involucrada en la integración de Gauss para los métodos de Galerkin sin malla y a la inestabilidad resultante de integrar de forma directa en los nodos, se han realizado intentos para desarrollar esquemas de integración nodal estables. Se pueden identificar tres esquemas de integración nodal clásicos [17]: método de deformación nodal [2], integración nodal conforme estabilizada (SCNI) [3] y el método del promedio nodal [18]. Las principales diferencias entre estos tres esquemas se basa en cómo calculan el tensor gradiente de deformación. Para los tres esquemas, la versión de la forma bilineal para la integración nodal es la siguiente:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{a=1}^N \left[\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{v}^h) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) V_a \right], \quad (3.5)$$

donde V_a es el área nodal representativa. La deformación nodal $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ es calculada con

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_a) + \nabla^\top \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_a)), \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2V_a} \int_{\partial\Omega_a} (\mathbf{u}^h \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}^h) d\mathbf{s}, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{V_a} \sum_{c \in T_a} V_c \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(\mathbf{u}^h), \quad (3.8)$$

para el método de deformación nodal, integración nodal conforme estabilizada (SCNI) y el método del promedio nodal, respectivamente. Para el esquema SCNI la Ecuación (3.7) es aplicada sobre los bordes de la celda de Voronoi (Figura 3.2), donde \mathbf{n} son las normales a los bordes de la celda. El esquema del promedio nodal requiere que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ sea calculado dentro de cada triángulo c (Figura 3.2). El método de deformación nodal no satisface en general el test de la parcela, el método SCNI satisface el test de la parcela, y el método del promedio nodal satisface el test de la parcela sólo cuando utiliza funciones de forma de triángulos de 3 nodos. Además, Puso et al. [17] encontraron que SCNI puede causar inestabilidad cerca de los límites del dominio.

Puso et al. [17] propusieron una modificación del esquema de integración SCNI y agregaron un término de estabilización basado en la deformación de subceldas. Para SCNI la deformación es calculada sobre la celda de Voronoi utilizando (3.7), pero en SCNI-modificado propuesto por Puso et al. [17] (MSCNI) la deformación es calculada sobre subceldas de integración, de esta forma se utilizan más "puntos de integración" para estabilizar el método y evitar los modos espurios. La forma bilineal para el esquema MSCNI es

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = & \sum_{a=1}^N \left[\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{v}^h) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}^h) V_a \right. \\ & \left. + \sum_{c \in T_a} \alpha (\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{v}^h) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(\mathbf{v}^h)) : \tilde{\mathbf{D}} : (\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{v}^h) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c(\mathbf{v}^h)) V_c \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde V_c es el área de la subcelda (porción de celda de Voronoi), T_a es el conjunto de subceldas asociado con el nodo a , y tanto α como $\tilde{\mathbf{D}}$ son constantes que proveen estabilidad. Para calcular $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ se utiliza (3.7) sobre la subcelda de Voronoi, y para el cálculo de $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ se utiliza (3.8) promediando la deformación de las subceldas de Voronoi asociadas al nodo a .

Adicionalmente, Chen et al. [19] desarrollaron una versión para problemas no lineales del esquema SCNI. Liu et al. [4] propusieron una técnica de integración nodal para el método de interpolación de punto radial sin malla (NI-RPIM) basado en la expansión de series de Taylor para realizar la integración numérica. Duan et al. [5] propusieron un esquema de integración nodal de segundo orden (QCNI) que puede pasar exactamente el test de la parcela cuadrático, el cual se basa en el principio variacional de Hu-Washizu, que además probó en ejemplos dinámicos. Hillman y Chen [20] propusieron una estabilización basada en gradientes implícitos de deformación en los nodos, logrando un método convergente y estable para problemas lineales y no lineales.

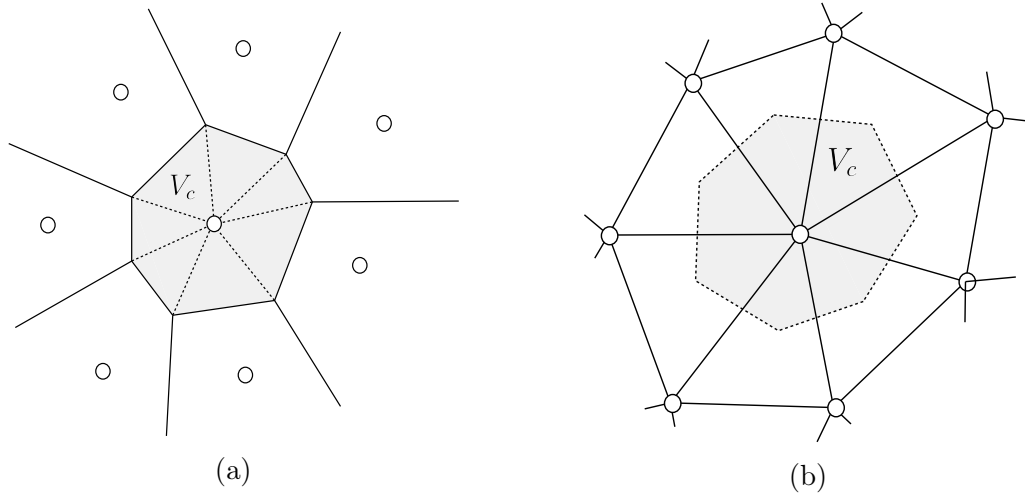


Figura 3.2: Celda de integración Ω_a mostrada en gris utilizando (a) celda de Voronoi, y (b) triángulo de tres nodos. Las celdas además son subdivididas en subceldas $\Omega_{a,c}$ con volumen V_c .

3.5. Convergencia, consistencia y estabilidad

Como se dijo anteriormente, en el marco teórico del método del elemento virtual y en virtud del teorema de equivalencia de Lax, la matriz de rigidez se descompone en dos partes: una matriz que garantiza la reproducción exacta de un campo de desplazamientos lineal (matriz de rigidez de consistencia) y una matriz de corrección que provee estabilidad (matriz de rigidez de estabilidad). El teorema de equivalencia de Lax afirma que para un problema bien planteado, una discretización que sea consistente y estable es convergente (consistencia + estabilidad \rightarrow convergencia). Se definirá entonces estos tres conceptos en el marco teórico del método de los elementos finitos y se darán los requisitos para que se cumplan, los cuales son fácilmente aplicables al esquema desarrollado en esta tesis.

Para un problema de elasticidad lineal consideremos un elemento finito rectangular de cuatro nodos cuya matriz de rigidez será de tamaño 8×8 . Integrando de forma exacta o utilizando una cuadratura de Gauss de 2×2 su matriz de rigidez tendrá rango cinco, lo que significa que el número de filas linealmente independiente es cinco. Ya que este elemento tiene un total de ocho grados de libertad, el número de ecuaciones a resolver son ocho (y no cinco), entonces para resolver el sistema y obtener una solución única debemos deshacernos de los tres modos de cuerpo rígido aplicando las condiciones de contorno (modos de cuerpo rígido para el caso bidimensional: 2 traslaciones y 1 rotación, los cuales son modos de energía cero). Ahora para el mismo elemento, si utilizamos solo un punto de Gauss para la integración numérica el rango se reducirá a tres. Este elemento ahora tendrá dos modos de energía cero adicionales debido al rango deficiente (es necesario rango 5 para la integración correcta del elemento rectangular de cuatro nodos), a menos que se aplique condiciones de contorno de manera que solo se deban resolver tres grados de libertad. Estos modos adicionales de energía cero espurios (no físicos) son conocidos como modos hourglass [21]. Una malla formada por este tipo de elementos (rango deficiente) puede formar una matriz de rigidez global singular o casi-singular. Para el caso singular, el sistema tendrá infinitas soluciones; para el caso casi-

singular la aparición de los modos espurios contaminará el campo de desplazamientos. Una forma de evaluar numéricamente la presencia de modos de energía cero es resolviendo el problema de valores propios para el sistema [22].

De lo anterior se desprende la condición de estabilidad, que se traduce simplemente como el requisito de que la solución del sistema de ecuaciones discretas sea única y evite modos espurios que pueden estropear la solución para cualquier tamaño de elementos [23], es decir, las matrices de las discretizaciones deben ser correctamente integradas y en consecuencia tener el rango apropiado [24].

Para el caso de la consistencia, esta asegura que a medida que el tamaño de los elementos h tiende a cero, la aproximación discreta $L^h(\mathbf{u})$ representa de forma exacta la ecuación diferencial $L(\mathbf{u})$ y las condiciones de contorno. El test de la parcela se ha usado tradicionalmente como un procedimiento para verificar el requisito de consistencia [23].

Y finalmente se dice que un esquema converge, cuando la solución aproximada \mathbf{u}^h tiende a la solución exacta \mathbf{u} cuando el tamaño de los elementos h se acerca a cero. Recordando el teorema de Lax, para asegurar convergencia es necesario entonces que la aproximación satisfaga las condiciones de consistencia y estabilidad [23].

3.6. Integración numérica en el tiempo

Para un problema dinámico general, la ecuación de movimiento esta dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.10)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento, \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{F} es el vector de fuerzas externas, $\ddot{\mathbf{u}}$ es el vector de aceleración, $\dot{\mathbf{u}}$ es el vector de velocidad y \mathbf{u} es el vector de desplazamientos. Matemáticamente, la Ecuación (3.10) representa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual puede abordarse mediante métodos numéricos para la integración en el tiempo. Un esquema popular es el método de Newmark, basado en las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+1} = \dot{\mathbf{u}}_t + ((1 - \gamma_t)\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_t + (\gamma_t\Delta t)\ddot{\mathbf{u}}_{t+1}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}_{t+1} = \mathbf{u}_t + (\Delta t)\dot{\mathbf{u}}_t + ((0.5 - \beta_t)\Delta t^2)\ddot{\mathbf{u}}_t + (\beta_t\Delta t^2)\ddot{\mathbf{u}}_{t+1}, \quad (3.12)$$

donde γ_t y β_t son parámetros que determinan la precisión y estabilidad del método. Para $\gamma_t = 1/2$ y $\beta_t = 1/4$ corresponde al método del promedio constante de la aceleración. Mientras que para $\gamma_t = 1/2$ y $\beta_t = 1/6$ corresponde al método de aceleración lineal. Para el que método de Newmark sea estable, se debe cumplir:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_t - 2\beta_t}}, \quad (3.13)$$

donde T_n es el menor periodo del sistema, entre el inverso de la mayor frecuencia natural y la frecuencia de las fuerzas externas. Para $\gamma_t = 1/2$ y $\beta_t = 1/4$ esta condición queda:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \infty. \quad (3.14)$$

Esto implica que el método del promedio constante de la aceleración es estable para cualquier paso de tiempo Δt . Mientras que para el método de aceleración lineal, $\gamma_t = 1/2$ y $\beta_t = 1/6$ indican que el método es estable cuando:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551. \quad (3.15)$$

Capítulo 4

Integración nodal utilizando la descomposición del elemento virtual

4.1. Elasticidad lineal

Consideremos un cuerpo elástico que ocupa el dominio abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ que está limitado por la superficie unidimensional Γ cuya normal apuntando hacia el exterior es \mathbf{n}_Γ . Se considera que el contorno admite las descomposiciones $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_f$ y $\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_f$, donde Γ_g es el contorno esencial (o de Dirichlet) y Γ_f es el contorno natural (o de Neumann). El cierre del contorno del dominio es $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$. Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ el campo de los desplazamientos en el punto \mathbf{x} del cuerpo elástico cuando este se somete a las tracciones externas $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Gamma_f \rightarrow \mathbf{R}^2$ y las fuerzas de cuerpo $\mathbf{b}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$. Las condiciones de contorno esenciales (o de Dirichlet) impuestas son $\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \Gamma_g \rightarrow \mathbf{R}^2$. El problema de valor de contorno que gobierna la elasticidad bidimensional lineal se lee como sigue: encontrar $\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g, \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_f, \quad (4.3)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos de Cauchy dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}), \quad (4.4)$$

donde \mathbf{D} es un tensor constante de cuarto orden que depende del material constituyente del cuerpo elástico.

4.2. Forma débil

Cuando se deriva la forma débil de Galerkin para el problema de elasticidad lineal usando el método de residuos ponderados, con \mathbf{v} siendo la función de peso arbitraria, se obtiene la

siguiente expresión para la forma bilineal:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

El gradiente del campo de los desplazamientos puede ser descompuesto en sus partes simétrica ($\nabla_S \mathbf{v}$) y antisimétrica ($\nabla_{AS} \mathbf{v}$), como sigue:

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla_S \mathbf{v} + \nabla_{AS} \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \quad (4.6)$$

donde

$$\nabla_S \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) \quad (4.7)$$

es el tensor de deformaciones y

$$\nabla_{AS} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \quad (4.8)$$

es el tensor gradiente antisimétrico que representa las rotaciones. Debido a que el tensor de esfuerzos es simétrico, su producto con el tensor gradiente antisimétrico es cero, lo que simplifica la forma bilineal a

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

y lleva a la forma estándar de presentar la formulación débil: encontrar $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in V$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell_b(\mathbf{v}) + \ell_f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W, \quad (4.10)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (4.11)$$

$$\ell_b(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \ell_f(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad (4.12)$$

donde V and W son los siguientes espacios de desplazamientos de prueba y de peso, respectivamente:

$$V := \{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{u} \in \mathcal{W}(\Omega) \subseteq [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma_g \},$$

$$W := \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbf{v} \in \mathcal{W}(\Omega) \subseteq [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_g \},$$

donde el espacio $\mathcal{W}(\Omega)$ incluye campos de desplazamientos lineales.

4.3. Descomposición del elemento virtual para integración nodal

4.3.1. Partición del dominio para la representación nodal

Para desarrollar un esquema de integración nodal, es necesaria la partición del dominio completo Ω en dominios representativos nodales o celdas. Es posible obtener esta partición

mediante mallas basadas en diagramas de Voronoi o generar polígonos a partir de mallas de triángulos, donde el centroide de los triángulos representan los vértices de los polígonos. En ambos casos cada nodo es representado por un polígono, que de aquí en adelante llamaremos celda de integración. El caso en que un nodo este ubicado en el contorno del dominio Γ , el nodo de la celda estará ubicado en uno de sus bordes, según lo mostrado en la Figura 4.1. En esta tesis se utilizará indistintivamente particiones nodales basadas en diagramas de Voronoi o particiones basadas en mallas de triángulos.

La integración nodal se evalúa sobre las celdas que son representativas de un nodo, las cuales tendrán un número arbitrario de lados. Se denotará como E a una celda que tiene una área $|E|$ y un contorno ∂E que estará formado por lados e de largo $|e|$. La normal unitaria al borde de una celda de integración, apuntando hacia el exterior, se denota en coordenadas Cartesianas por $\mathbf{n} = [n_1 \quad n_2]^\top$.

En cada celda representativa de un nodo, utilizadas como celdas de integración, se introducirán puntos de Gauss ubicados en el centro de cada uno de sus lados, los cuales se utilizarán para integrar sobre el contorno ∂E . Bajo el contexto de un método sin malla, es necesario realizar una búsqueda de los nodos vecinos a los puntos de Gauss de una celda para definir la contribución nodal, según se detalla en la Figura 4.2. El índice local del primer nodo que contribuye es etiquetado como 1 y el índice del último nodo como N . Las coordenadas del nodo de una celda de integración están denotadas por $\mathbf{x}_E = [x_{1E} \quad x_{2E}]^\top$ y las coordenadas de un nodo representativo a de la contribución nodal por $\mathbf{x}_a = [x_{1a} \quad x_{2a}]^\top$. En el esquema de integración nodal es necesario evaluar las funciones de forma de la contribución nodal sobre los puntos de Gauss de los lados de la celda y sobre su nodo central. La función de forma de un nodo a evaluada sobre el nodo de una celda E esta dada por:

$$\phi_a^E := \phi_a(\mathbf{x}_E). \quad (4.13)$$

Se debe destacar la diferencia existente entre los vértices, con los cuales se construyen las celda, y los nodos, los cuales están ubicados dentro de cada celda y poseen información de desplazamiento, esfuerzo, masa, deformación, etc. Los vértices no contribuyen en la integración, sólo son utilizados como referencia geométrica para particionar el dominio y para los cálculos geométricos necesarios para el esquema de integración nodal.

4.3.2. Operadores de proyección

Similarmente al método del elemento finito, para que la solución numérica converja monótonicamente se requiere que la aproximación de los desplazamientos en el elemento poligonal pueda representar modos de cuerpo rígido y estados de deformación constante. Esto exige que la aproximación de los desplazamientos en el elemento sea por lo menos un polinomio lineal [25]. En MEV se definen operadores de proyección que permitan la extracción de los modos de cuerpo rígido, los modos de deformación constante y la parte polinomial lineal del movimiento. En este contexto, la aproximación de los desplazamientos se supone continua en el elemento y a través de los contornos elementales (i.e., no existen huecos ni aberturas), lo cual también es una condición necesaria para la convergencia [25]. Consideremos los tres siguientes espacios a nivel elemental: el espacio de los movimientos de cuerpo rígido (denotado por $\mathcal{R}(E)$), el espacio de los estados de deformación constante (denotado por $\mathcal{C}(E)$), y

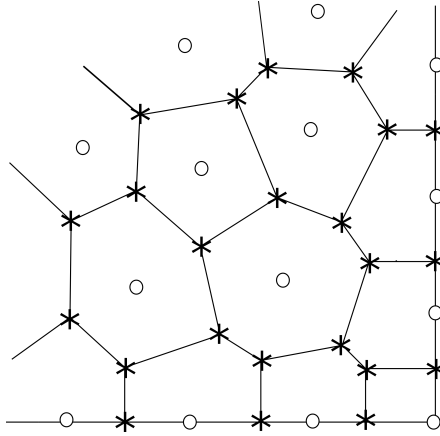


Figura 4.1: Diagrama esquemático de la partición del dominio para formar la representación nodal. Los nodos son representados por \circ y los vértices de las celdas de integración por $*$.

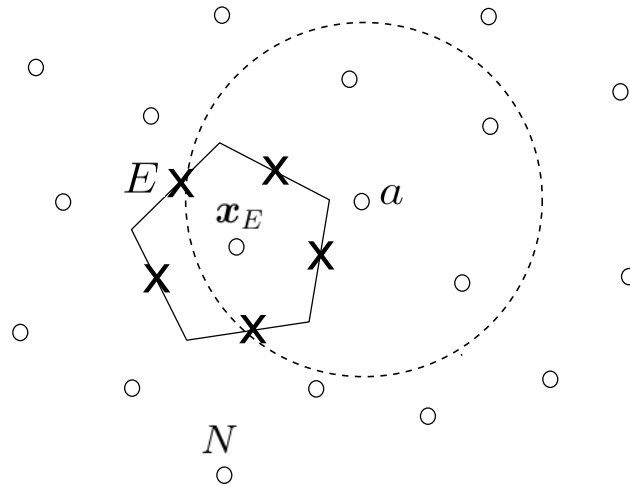


Figura 4.2: Diagrama esquemático de la contribución nodal para una celda de integración. Los puntos de Gauss de los bordes de una celda se muestran como \times y los nodos como \circ . Una celda con su nodo, cuyas coordenadas son denotadas por \mathbf{x}_E , y un nodo representativo a junto con su influencia son esquematizados en el diagrama. Para que un nodo contribuya, basta que un punto de Gauss del borde de la celda este dentro de su influencia. El índice local del primer nodo que contribuye es etiquetado como 1 y el índice del último nodo como N .

el espacio de los desplazamientos lineales (denotado por $\mathcal{P}(E)$) que es capaz de representar movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante. En particular, se requiere que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$. Para extraer las componentes de los desplazamientos en los tres espacios ya mencionados, se definen los siguientes operadores de proyección:

$$\Pi_{\mathcal{R}} : \mathcal{W}(E) \rightarrow \mathcal{R}(E), \quad \Pi_{\mathcal{R}} \mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}(E) \quad (4.14)$$

para extraer los movimientos de cuerpo rígido,

$$\Pi_{\mathcal{C}} : \mathcal{W}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E), \quad \Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{c} = \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}(E) \quad (4.15)$$

para extraer los modos de deformación constante, y

$$\Pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{W}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad \Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}(E) \quad (4.16)$$

para extraer la parte polinomial lineal. Cabe destacar que la condición de que \mathcal{W} incluya campos de desplazamientos lineales es una condición mínima que no impide que pueda incluir desplazamientos que contengan términos de orden superior o no polinomiales. Con el objetivo de garantizar que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$, se requiere que estos operadores satisfagan las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\Pi_{\mathcal{R}} \mathbf{c} = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}(E), \quad (4.17)$$

$$\Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{r} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}(E), \quad (4.18)$$

tal que elementos de \mathcal{C} no tengan movimientos de cuerpo rígido y elementos de \mathcal{R} no tengan modos de deformación constante, lo que significa que $\Pi_{\mathcal{C}} \Pi_{\mathcal{R}} = \Pi_{\mathcal{R}} \Pi_{\mathcal{C}} = 0$, y entonces la proyección sobre \mathcal{P} puede ser escrita como una suma directa de $\Pi_{\mathcal{R}}$ y $\Pi_{\mathcal{C}}$:

$$\Pi_{\mathcal{P}} = \Pi_{\mathcal{R}} + \Pi_{\mathcal{C}}. \quad (4.19)$$

Por lo tanto, cualquier $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}(E)$ puede ser descompuesto en los siguientes tres términos:

$$\mathbf{u} = \Pi_{\mathcal{R}} \mathbf{u} + \Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{u}), \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v} = \Pi_{\mathcal{R}} \mathbf{v} + \Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{v} + (\mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v}), \quad (4.21)$$

es decir, en una parte que representa los movimientos de cuerpo rígido, una parte que representa los estados de deformación constante y la parte restante que representa los términos no polinomiales o de orden superior. A las Ecuaciones (4.20) y (4.21) se les denomina como la descomposición del elemento virtual.

4.3.3. Condiciones de ortogonalidad energética

El punto crucial en el MEV es que una vez que los desplazamientos (4.17) y (4.18) sean reemplazados en la forma bilineal (4.5) se logre de manera efectiva una separación de la matriz de rigidez que permita aislar los términos no polinomiales o de orden superior y así poder tomar control sobre el comportamiento de estos. Las siguientes condiciones de ortogonalidad

energética son esenciales para este fin. Consideremos la forma bilineal (4.5) para una celda. La proyección $\Pi_{\mathcal{C}}$ satisface la siguiente condición:

$$a_E(\mathbf{c}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}(E), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(E), \quad (4.22)$$

lo que significa que $\mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{v}$ es energéticamente ortogonal a \mathbf{c} . Adicionalmente, la siguiente condición de ortogonalidad energética emana de (4.22): la proyección $\Pi_{\mathcal{P}}$ satisface

$$a_E(\mathbf{p}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}(E), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(E). \quad (4.23)$$

Y finalmente, dado que $\mathbf{p} = \mathbf{r} + \mathbf{c}$ y $a_E(\mathbf{r}, \cdot) = 0$, la siguiente condición de ortogonalidad energética nace de (4.23):

$$a_E(\mathbf{c}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C}(E), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W}(E). \quad (4.24)$$

4.3.4. Forma bilineal del MEV

Sustituyendo la descomposición (4.20) y (4.21) en la forma bilineal (4.5) lleva a la siguiente descomposición de la forma bilineal en la celda:

$$\begin{aligned} a_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a_E(\Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{u} + \Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}), \Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{v} + \Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v})) \\ &= a_E(\Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{u}, \Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{v}) + a_E(\mathbf{u} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{u}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde se utilizó la simetría de la forma bilineal, la condición de ortogonalidad energética (4.24) y se consideró que los términos $\Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{u}$ y $\Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{v}$ no contribuyen en la forma bilineal (ambos tienen deformación nula).

El primer término en el lado derecho de (4.25) es la forma bilineal asociada a los modos de deformación constantes que proveen consistencia (llevan a la matriz de rigidez de consistencia) y el segundo término es la forma bilineal asociada a los términos no polinomiales o de orden superior que proveen estabilidad (llevan a la matriz de rigidez de estabilidad).

4.3.5. Obtención de los operadores de proyección

Unos operadores de proyección que satisfagan las condiciones de ortogonalidad (4.17) y (4.18) pueden ser construidos como sigue: definamos el tensor de deformación promediado en una celda, el cual representa la deformación del nodo interior

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) d\mathbf{s}, \quad (4.26)$$

donde el teorema de la divergencia se ha utilizado para transformar la integral de volumen en una integral de superficie. Similarmente, el tensor gradiente antisimétrico promediado en una celda se define como

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) d\mathbf{s}, \quad (4.27)$$

Notese que $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})$ y $\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v})$ son tensores constantes dentro de la celda. Los operadores de proyección MEV pueden ser obtenidos de la condición de ortogonalidad energética (4.17). Para lograr esto, observemos que $\boldsymbol{\sigma}$ y $\nabla(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v})$ son campos constantes debido a que $\mathbf{p}, \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v} \in \mathcal{P}(E)$. Usamos la observación precedente y la forma bilineal dada en (4.5) para obtener

$$\begin{aligned} a_E(\mathbf{p}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) &= \int_E \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) : \nabla(\mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) : \left[\int_E \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} - \nabla(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) \int_E d\mathbf{x} \right] \\ &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}) : \left[\int_E \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} - \nabla(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v})|E| \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Y dado que (4.28) debe ser exactamente cero por la condición ortogonal (4.23), se llega a

$$\nabla(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (4.29)$$

Usando (4.6), (4.26) y (4.27) en la ecuación (4.29) puede ser escrita como sigue:

$$\nabla(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}). \quad (4.30)$$

Por lo tanto, de (4.30), $\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$ debe tener la siguiente forma:

$$\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} + a_0. \quad (4.31)$$

. Y debido a que a_0 es una constante, la proyección $a_E(\mathbf{p}, \mathbf{v} - \Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = 0$ define $\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}$ solo hasta una constante. Entonces, para encontrar a_0 necesitamos un operador de proyección sobre las constantes, $\Pi_0 : \mathcal{W}(E) \rightarrow \mathbf{R}^2$, tal que

$$\Pi_0(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) = \Pi_0\mathbf{v}. \quad (4.32)$$

En el contexto clásico de los elementos virtuales, el operador de proyección sobre las constantes se define como el valor medio de los desplazamientos sobre los nodos del elemento poligonal [26]. Para el caso de integración nodal, este operador se traduce como los desplazamientos evaluados sobre el nodo de la celda. Esto es,

$$\Pi_0\mathbf{v} = \mathbf{v}_E, \quad (4.33)$$

donde $\mathbf{v}_E = [v_{1E} \ v_{2E}]^\top$ son los desplazamientos del nodo de la celda E . Para obtener los operadores de proyección aplicamos (4.32) a (4.31) resultando en

$$\begin{aligned} \Pi_0(\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v}) &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \Pi_0\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot \Pi_0\mathbf{x} + \Pi_0 a_0 = \Pi_0\mathbf{v} \\ &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_E + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_E + a_0 = \mathbf{v}_E. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Y resolviendo para encontrar a_0 en (4.34) se llega a

$$a_0 = \mathbf{v}_E - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_E - \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}_E. \quad (4.35)$$

Sustituyendo (4.35) en (4.31) se obtiene el operador de proyección

$$\Pi_{\mathcal{P}}\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \mathbf{v}_E. \quad (4.36)$$

Finalmente la proyección de \mathbf{v} sobre el espacio de movimientos de cuerpo rígido se escribe como sigue:

$$\Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \mathbf{v}_E, \quad (4.37)$$

Y la proyección de \mathbf{v} sobre el espacio de los desplazamientos lineales se escribe como:

$$\Pi_{\mathcal{C}}\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E). \quad (4.38)$$

Obtenidos los operadores de proyección, las definiciones formales de los espacios se dan a continuación. El espacio de los desplazamientos lineales se define como

$$\mathcal{P}(E) := \{\mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) : \mathbf{a} \in \mathbf{R}^2, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}\}, \quad (4.39)$$

donde \mathbf{B} es un tensor de segundo orden y por lo tanto se puede expresar como la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. Denotamos el tensor simétrico y el tensor antisimétrico como \mathbf{B}_S y \mathbf{B}_{AS} , respectivamente. Dado que se requiere $\mathcal{P}(E) = \mathcal{R}(E) + \mathcal{C}(E)$, se define los espacios de movimientos de cuerpo rígido y estados de deformación constante, respectivamente, como sigue:

$$\mathcal{R}(E) := \{\mathbf{a} + \mathbf{B}_{AS} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) : \mathbf{a} \in \mathbf{R}^2, \mathbf{B}_{AS} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \mathbf{B}_{AS}^\top = -\mathbf{B}_{AS}\}, \quad (4.40)$$

$$\mathcal{C}(E) := \{\mathbf{B}_S \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) : \mathbf{B}_S \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \mathbf{B}_S^\top = \mathbf{B}_S\}. \quad (4.41)$$

Finalmente, la aproximación de los desplazamientos estará compuesta por una parte polinomial y por una parte adicional no polinomial o de orden superior, lo cual implica que en la celda $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{W}(E) \supseteq \mathcal{P}(E)$.

4.3.6. Matrices de proyección

Las matrices de proyección resultan de discretizar los operadores de proyección. Primero se expresará las proyecciones (4.37) y (4.38) en términos de sus bases espaciales. La proyección (4.37) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} v_{1E} + (x_2 - x_{2E})\hat{\omega}_{12} \\ v_{2E} - (x_1 - x_{1E})\hat{\omega}_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_2 - x_{2E}) \\ 0 & 1 & -(x_1 - x_{1E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1E} \\ v_{2E} \\ \hat{\omega}_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_{1E} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_{2E} + \begin{bmatrix} (x_2 - x_{2E}) \\ -(x_1 - x_{1E}) \\ + \end{bmatrix} \hat{\omega}_{12} \\ &= \mathbf{r}_1 v_{1E} + \mathbf{r}_2 v_{2E} + \mathbf{r}_3 \hat{\omega}_{12}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Así, la base para el espacio de los modos de cuerpo rígido es:

$$\mathbf{r}_1 = [1 \ 0]^\top, \mathbf{r}_2 = [0 \ 1]^\top, \mathbf{r}_3 = [(x_2 - x_{2E}) \ -(x_1 - x_{1E})]^\top. \quad (4.43)$$

Similarmente, la proyección (4.38) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathbf{c}}\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} (x_1 - x_{1E})\hat{\varepsilon}_{11} + (x_2 - x_{2E})\hat{\varepsilon}_{12} \\ (x_1 - x_{1E})\hat{\varepsilon}_{12} + (x_2 - x_{2E})\hat{\varepsilon}_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 - x_{1E}) & 0 & (x_2 - x_{2E}) \\ 0 & (x_2 - x_{2E}) & (x_1 - x_{1E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} \\ \hat{\varepsilon}_{22} \\ \hat{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x_1 - x_{1E}) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} + \begin{bmatrix} 0 \\ (x_2 - x_{2E}) \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{22} + \begin{bmatrix} (x_2 - x_{2E}) \\ (x_1 - x_{1E}) \end{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{12} \\
&= \mathbf{c}_1\hat{\varepsilon}_{11} + \mathbf{c}_2\hat{\varepsilon}_{22} + \mathbf{c}_3\hat{\varepsilon}_{12}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Así, la base para el espacio de los estados de deformación constante es:

$$\mathbf{c}_1 = [(x_1 - x_{1E}) \ 0]^\top, \quad \mathbf{c}_2 = [0 \ (x_2 - x_{2E})]^\top, \quad \mathbf{c}_3 = [(x_2 - x_{2E}) \ (x_1 - x_{1E})]^\top. \tag{4.45}$$

Los desplazamientos de prueba y de peso están dados por la combinación lineal de las funciones de base nodales $\phi_a(\mathbf{x})$ y $\phi_b(\mathbf{x})$ con coordenadas nodales $\mathbf{x}_a = [x_{1a} \ x_{2a}]^\top$, que contribuyen en la celda de integración:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x})\mathbf{u}_a, \quad \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N \phi_b(\mathbf{x})\mathbf{v}_b, \tag{4.46}$$

donde $\mathbf{u}_a = [u_{1a} \ u_{2a}]^\top$ y $\mathbf{v}_b = [v_{1b} \ v_{2b}]^\top$ son los coeficientes nodales. Las funciones de base nodales también se usan para la discretización de las componentes de la base para el espacio de los modos de cuerpo rígido:

$$\mathbf{r}_\alpha^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x})\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{x}_a), \quad \alpha = 1, \dots, 3 \tag{4.47}$$

y de las componentes de la base para el espacio de los modos de deformación constante:

$$\mathbf{c}_\beta^h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N \phi_a(\mathbf{x})\mathbf{c}_\beta(\mathbf{x}_a), \quad \beta = 1, \dots, 3. \tag{4.48}$$

La forma discreta de la proyección para extraer los modos de cuerpo rígido se obtiene mediante la sustitución de (4.46) y (4.47) en (4.42), lo que lleva a

$$\Pi_{\mathcal{R}}\mathbf{v}^h = \mathbf{N}\mathbf{P}_{\mathcal{R}}\mathbf{q}, \tag{4.49}$$

donde

$$\mathbf{N} = [(\mathbf{N})_1 \ \dots \ (\mathbf{N})_a \ \dots \ (\mathbf{N})_N]^\top, \quad (\mathbf{N})_a = \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ 0 & \phi_a \end{bmatrix}, \tag{4.50}$$

$$\mathbf{q} = [\mathbf{v}_1^\top \ \dots \ \mathbf{v}_a^\top \ \dots \ \mathbf{v}_N^\top]^\top, \quad \mathbf{v}_a = [v_{1a} \ v_{2a}]^\top \tag{4.51}$$

y

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = \mathbf{H}_{\mathcal{R}}\mathbf{W}_{\mathcal{R}}^\top \tag{4.52}$$

con

$$\mathbf{H}_{\mathcal{R}} = [(\mathbf{H}_{\mathcal{R}})_1 \ \dots \ (\mathbf{H}_{\mathcal{R}})_a \ \dots \ (\mathbf{H}_{\mathcal{R}})_N]^\top, \quad (4.53)$$

$$(\mathbf{H}_{\mathcal{R}})_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ (x_{2a} - x_{2E}) & -(x_{1a} - x_{1E}) \end{bmatrix}^\top$$

y

$$\mathbf{W}_{\mathcal{R}} = [(\mathbf{W}_{\mathcal{R}})_1 \ \dots \ (\mathbf{W}_{\mathcal{R}})_a \ \dots \ (\mathbf{W}_{\mathcal{R}})_N]^\top, \quad (4.54)$$

$$(\mathbf{W}_{\mathcal{R}})_a = \begin{bmatrix} \phi_a^E & 0 \\ 0 & \phi_a^E \\ q_{2a} & -q_{1a} \end{bmatrix}^\top, \quad q_{ia} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i^E ds.$$

Similarmente, sustituyendo (4.46) y (4.47) en (4.44) se llega a la siguiente forma discreta de la proyección para extraer los modos de deformación constante:

$$\Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{v}^h = \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathcal{C}} \mathbf{q}, \quad (4.55)$$

donde

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C}} = \mathbf{H}_{\mathcal{C}} \mathbf{W}_{\mathcal{C}}^\top \quad (4.56)$$

con

$$\mathbf{H}_{\mathcal{C}} = [(\mathbf{H}_{\mathcal{C}})_1 \ \dots \ (\mathbf{H}_{\mathcal{C}})_a \ \dots \ (\mathbf{H}_{\mathcal{R}})_N]^\top, \quad (4.57)$$

$$(\mathbf{H}_{\mathcal{C}})_a = \begin{bmatrix} (x_{1a} - x_{1E}) & 0 \\ 0 & (x_{2a} - x_{2E}) \\ (x_{2a} - x_{2E}) & -(x_{1a} - x_{1E}) \end{bmatrix}^\top$$

y

$$\mathbf{W}_{\mathcal{C}} = [(\mathbf{W}_{\mathcal{C}})_1 \ \dots \ (\mathbf{W}_{\mathcal{C}})_a \ \dots \ (\mathbf{W}_{\mathcal{C}})_N]^\top, \quad (4.58)$$

$$(\mathbf{W}_{\mathcal{C}})_a = \begin{bmatrix} 2q_{1a} & 0 \\ 0 & 2q_{2a} \\ q_{2a} & q_{1a} \end{bmatrix}^\top, \quad q_{ia} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i^E ds.$$

Entonces, la forma matricial de la proyección para extraer la parte polinomial lineal del campo de los desplazamientos es $\mathbf{P}_{\mathcal{P}} = \mathbf{P}_{\mathcal{R}} + \mathbf{P}_{\mathcal{C}}$, además de (4.49) y (4.55) se obtiene $\Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{u}^h = \Pi_{\mathcal{R}} \mathbf{u}^h + \Pi_{\mathcal{C}} \mathbf{u}^h = \mathbf{N} \mathbf{P}_{\mathcal{P}} \mathbf{q}$.

4.3.7. Matriz de rigidez elemental NIVED

La versión discreta de la forma bilineal aproximada se construye a partir de la descomposición dada en (4.25) para cada celda:

$$\begin{aligned}
a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) &= a_E(\mathbf{c}\mathbf{W}_c^\top \mathbf{d}, \mathbf{c}\mathbf{W}_c^\top \mathbf{q}) + a_E(\mathbf{N}\mathbf{d} - \mathbf{N}\mathbf{P}_\mathcal{P}\mathbf{d}, \mathbf{N}\mathbf{q} - \mathbf{N}\mathbf{P}_\mathcal{P}\mathbf{q}) \\
&= \mathbf{q}^\top \mathbf{W}_c a_E(\mathbf{c}^\top, \mathbf{c}) \mathbf{W}_c^\top \mathbf{d} + \mathbf{q}^\top (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})^\top a_E(\mathbf{N}^\top, \mathbf{N}) (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}) \mathbf{d} \quad (4.59) \\
&= \mathbf{q}^\top |E| \mathbf{W}_c \mathbf{D} \mathbf{W}_c^\top \mathbf{d} + \mathbf{q}^\top (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})^\top \mathbf{K} (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}) \mathbf{d},
\end{aligned}$$

donde \mathbf{I}_{2N} es la matriz de identidad de tamaño $(2N \times 2N)$, N es el número de nodos que contribuyen en la celda de integración nodal, \mathbf{d} es el vector columna de los coeficientes nodales asociados con la función de prueba de desplazamiento, \mathbf{K} es la matriz de rigidez exacta y \mathbf{D} es la matriz constitutiva para un material lineal elástico e isotrópico dada por

$$\mathbf{D} = \frac{E_\gamma}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

para el estado de deformación plana, y

$$\mathbf{D} = \frac{E_\gamma}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

para el estado de esfuerzo plano, donde E_γ es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson. El primer término del lado derecho de (4.59) es la parte que provee *consistencia* a la forma bilineal discreta NIVED y que permite pasar el test de la parcela cuando la solución es un campo de desplazamientos lineal. El segundo término del lado derecho de (4.59) es la parte que provee *estabilidad* a la forma bilineal de NIVED y es dependiente de la matriz de rigidez exacta \mathbf{K} . La matriz \mathbf{K} puede ser reemplazada por una matriz de rigidez aproximada denotada por \mathbf{S} . Entonces, la expresión final de la matriz de rigidez para una celda de integración puede ser escrita como

$$\mathbf{K}_E = |E| \mathbf{W}_c \mathbf{D} \mathbf{W}_c^\top + (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})^\top \mathbf{S} (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}). \quad (4.62)$$

Con respecto a la matriz de estabilidad, \mathbf{S} debe ser definida positiva y también escalar como la forma bilineal exacta a_E [6]. En esta tesis adoptaremos \mathbf{S} dada por [27]

$$\mathbf{S} = \alpha (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{H}_\mathcal{P} (\mathbf{H}_\mathcal{P}^\top \mathbf{H}_\mathcal{P})^{-1} \mathbf{H}_\mathcal{P}^\top), \quad (4.63)$$

donde $\mathbf{H}_\mathcal{P} = \mathbf{H}_\mathcal{R} + \mathbf{H}_c$ y $\alpha = \alpha^* \text{trace}(|E| \mathbf{W}_c \mathbf{D} \mathbf{W}_c^\top)$ es el parámetro escalador. En esta aproximación, α^* es una constante positiva y es usualmente elegida estudiando su influencia en la seminorma H^1 [28, 29].

4.3.8. Vector elemental de fuerzas de cuerpo y de tracción NIVED

Para obtener el vector elemental de fuerzas de cuerpo para una celda de integración nodal en su forma discreta NIVED, primero debemos notar que la fuerza de cuerpo para un nodo

será constante en toda su celda, de (4.12) se tiene:

$$\begin{aligned}
\ell_{b,E}^h(\mathbf{v})^h &= \int_E \mathbf{b}^h \cdot \mathbf{v}^h d\mathbf{x} \\
&= \int_E \mathbf{b}^h \cdot [\Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v}^h + (\mathbf{v}^h - \Pi_{\mathcal{P}} \mathbf{v}^h)] d\mathbf{x} \\
&= \mathbf{q}^\top |E| (\mathbf{NP})^\top \mathbf{b} + \mathbf{q}^\top |E| (\mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_{\mathcal{P}}))^\top \mathbf{b}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Entonces, el vector elemental de fuerzas de cuerpo de NIVED esta dado por

$$\mathbf{f}_{b,E} = |E| (\mathbf{NP})^\top \mathbf{b} + |E| (\mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_{\mathcal{P}}))^\top \mathbf{b}. \tag{4.65}$$

Es posible obtener una forma alternativa del vector elemental de fuerzas de cuerpo sin realizar descomposición. Esto se logra integrando directamente sobre el nodo y considerando nuevamente que la fuerza de cuerpo para un nodo será constante:

$$\mathbf{f}_{b,E} = |E| \mathbf{N}^\top \mathbf{g}. \tag{4.66}$$

Aunque ambas formas del vector de fuerzas de cuerpo son idénticas, la utilidad de la forma (4.65) será vista en la próxima sección. El vector elemental de fuerzas de tracción puede ser obtenido integrando directamente en el borde sobre el nodo de la celda de integración del contorno, la cual es una integral unidimensional:

$$\mathbf{f}_{f,E} = |e| \mathbf{N}_\Gamma^\top \mathbf{f}, \tag{4.67}$$

donde \mathbf{N}_Γ se define según las contribuciones del nodo sobre el contorno.

4.3.9. Matriz de masa elemental NIVED

La matriz de masa para una celda en su forma discreta NIVED puede ser obtenida mediante el principio de D'Alembert. Primero introducimos una fuerza de cuerpo efectiva:

$$\mathbf{f}_{e,E} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}, \tag{4.68}$$

donde el signo menos es debido al hecho que la aceleración que produce la fuerza de cuerpo de D'Alembert tiene dirección opuesta a la aceleración. La fuerza de cuerpo asociada con $\mathbf{f}_{e,E}$ se encuentra usando (4.65), reemplazando se tiene

$$\mathbf{f}_{b,E} = |E| (\mathbf{NP})^\top \mathbf{f}_{e,E} + |E| (\mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_{\mathcal{P}}))^\top \mathbf{f}_{e,E}. \tag{4.69}$$

Sustituyendo $\mathbf{f}_{e,E}$ dada por (4.68) en (4.69), obtenemos

$$\mathbf{f}_{b,E} = -\rho |E| (\mathbf{NP})^\top \ddot{\mathbf{u}} - \rho |E| (\mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_{\mathcal{P}}))^\top \ddot{\mathbf{u}}. \tag{4.70}$$

Recordando $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$, la segunda derivada con respecto al tiempo es

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}}, \tag{4.71}$$

donde $\ddot{\mathbf{d}}$ son los coeficientes nodales de aceleración. Sustituyendo (4.71) en (4.70) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{b,E} &= -\rho|E|(\mathbf{NP})^\top \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}} - \rho|E|(\mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}))^\top \mathbf{N}\ddot{\mathbf{d}} \\
&= -\rho|E|\mathbf{N}^\top \mathbf{NP}\ddot{\mathbf{d}} - \rho|E|\mathbf{N}^\top \mathbf{N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})\ddot{\mathbf{d}} \\
&= -\rho|E|\mathbf{N}^\top \mathbf{NP}\ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{M}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})\ddot{\mathbf{d}} \\
&= -\mathbf{M}_E\ddot{\mathbf{d}},
\end{aligned} \tag{4.72}$$

donde finalmente la matriz de masa elemental NIVED es definida como:

$$\mathbf{M}_E = \rho|E|\mathbf{N}^\top \mathbf{NP} + \mathbf{M}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}). \tag{4.73}$$

El segundo término del lado derecho de (4.73) es la parte que provee *estabilidad* a la matriz de masa NIVED y es dependiente de la matriz de masa exacta \mathbf{M} . La matriz \mathbf{M} puede ser reemplazada por $\beta\mathbf{I}_{2N}$ para controlar la estabilidad. Entonces, la expresión final de la matriz de masa de una celda de integración nodal puede ser escrita como

$$\mathbf{M}_E = \rho|E|\mathbf{N}^\top \mathbf{NP} + \beta\mathbf{I}_{2N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}), \tag{4.74}$$

donde β es una constante positiva y es usualmente elegida estudiando su influencia en la seminorma H^1 . Es posible descomponer (4.71) mediante el marco teórico del elemento virtual y obtener una forma alternativa de la matriz de masa NIVED

$$\mathbf{M}_E = \rho|E|(\mathbf{NP})^\top \mathbf{NP} + (\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P})^\top \beta\mathbf{I}_{2N}(\mathbf{I}_{2N} - \mathbf{P}_\mathcal{P}). \tag{4.75}$$

4.3.10. Normas de convergencia NIVED

La norma L^2 relativa del error en los desplazamientos, en el contexto de integración nodal, se define como

$$\frac{\|\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{P}\mathbf{u}^h\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{L^2}} = \left(\frac{\sum_E (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{P}\mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{P}\mathbf{u}^h)}{\sum_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.76}$$

y la semi-norma H^1 relativa del error en la energía, en el contexto de integración nodal, es

$$\frac{\|\mathbf{u} - \Pi_\mathcal{P}\mathbf{u}^h\|_{H^1}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} = \left(\frac{\sum_E (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h)}{\sum_E \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.77}$$

donde los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos se evalúan directamente sobre los nodos.

Capítulo 5

Ejemplos numéricos y discusión

En esta sección se presenta, compara y discuten varios ejemplos numéricos implementados con el esquema NIVED para demostrar su robustez. Primero se comprueba la consistencia del esquema NIVED con la satisfacción del test de la parcela, luego se comprueba su estabilidad estudiando el problema de valores propios. Una vez confirmada su consistencia y estabilidad se comprueba y compara su convergencia con varios ejemplos numéricos implementados.

5.1. Test de la parcela

Este test se basa en la solución de un problema de elasticidad lineal estático que consiste en un cuadrado 1×1 in con un esfuerzo unitario en el borde superior y condiciones esenciales según la Figura 5.1. Con este test se desea verificar la habilidad de NIVED de reproducir exactamente un campo de desplazamiento lineal en todo el dominio debido a un campo de esfuerzo constante. Se probó la implementación con diferentes distribuciones de nodos para verificar que los desplazamientos estén de acuerdo con la solución exacta. Los desplazamientos exactos, para un estado de esfuerzo plano, son los siguientes:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\nu}{E_\gamma}(1 - x), \\u_y &= \frac{y}{E_\gamma}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

La deformación exacta esta dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E_\gamma}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_\gamma}, \\ \varepsilon_{xy} &= 0.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Los parámetros del material son: $E_\gamma = 3 \times 10^7$ psi y $\nu = 0.3$. Las distribuciones de nodos utilizadas en este estudio son mostradas en la Figura 5.2. El parámetro de soporte de las

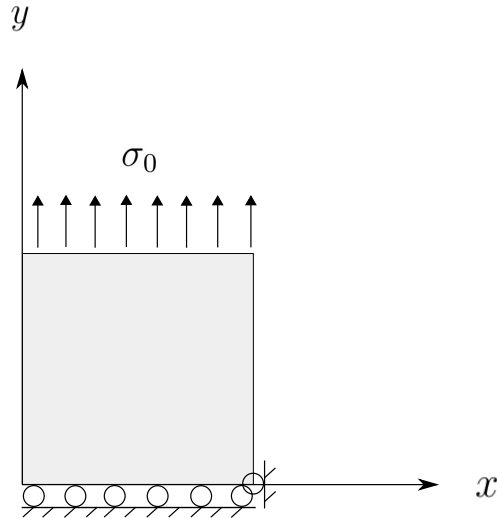


Figura 5.1: Geometría y condiciones de borde para el test de la parcela basado en equilibrio.



Figura 5.2: Distribuciones de nodos utilizadas en el test de la parcela basado en equilibrio: (a) distribución nodal regular, (b) distribución nodal distorsionada, y (c) distribución nodal no estructurada.

funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para efectos de comparación, en el esquema MEM se utilizaron varias cantidades de puntos de Gauss para la integración numérica. Para el esquema MEM se utilizan mallas de triángulos de tres nodos basadas en las mismas distribuciones de nodos utilizadas en NIVED. La norma L^2 relativa y la seminorma H^1 relativa para la solución numérica para ambos esquemas es mostrada en la Tabla 5.1 y 5.2, respectivamente. Los resultados numéricos confirman que el test de la parcela cumple con la precisión de máquina sólo para el esquema NIVED.

5.2. Estabilidad numérica

Para evaluar la estabilidad del esquema NIVED, se resuelve el problema de valores propios en elasticidad lineal bidimensional para un cuadrado de dimensiones 1×1 in. Los parámetros del material son: $E_\gamma = 1 \times 10^5$ psi, $\nu = 0.3$ y $\rho = 800$ lb/in³. El parámetro de soporte de

Tabla 5.1: Norma L^2 relativa del error para el test de la parcela basado en equilibrio.

Método	Puntos de Gauss	Regular	Distorsionada	No estructurada
MEM	1-punto	1.0×10^{-2}	2.0×10^{-2}	1.7×10^{-2}
MEM	3-puntos	2.3×10^{-3}	1.6×10^{-3}	1.6×10^{-3}
MEM	6-puntos	5.0×10^{-5}	8.0×10^{-4}	1.2×10^{-3}
MEM	12-puntos	2.2×10^{-7}	3.0×10^{-4}	5.0×10^{-4}
NIVED	1-punto	3.6×10^{-15}	4.1×10^{-15}	2.5×10^{-15}

Tabla 5.2: Seminorma H^1 relativa del error para el test de la parcela basado en equilibrio.

Método	Puntos de Gauss	Regular	Distorsionada	No estructurada
MEM	1-punto	1.4×10^{-2}	5.4×10^{-2}	2.5×10^{-2}
MEM	3-puntos	2.6×10^{-3}	5.3×10^{-3}	4.8×10^{-3}
MEM	6-puntos	5.4×10^{-5}	1.9×10^{-3}	1.3×10^{-3}
MEM	12-puntos	2.3×10^{-7}	7.7×10^{-4}	4.5×10^{-4}
NIVED	1-punto	3.6×10^{-15}	5.2×10^{-15}	7.8×10^{-15}

las funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para el parámetro escalador de la matriz de rigidez que controla la estabilidad se utiliza $\alpha^* = 1 \times 10^{-4}$ y para la matriz de masa $\beta = 1 \times 10^{-4}$. El problema de valores propios bidimensional entrega 3 modos de cuerpo rígido. Los tres modos que siguen después de los tres modos de cuerpo rígido se muestran en la Figura 5.3. En la figura se aprecia la suavidad de los modos, descartando modos espurios debido a problemas de integración, y de esa forma confirmando la estabilidad numérica del esquema NIVED.

5.3. Viga en voladizo

Una viga en voladizo con espesor unitario y carga parabólica en uno de sus extremos es utilizada para el estudio de convergencia bajo el refinamiento de la distribución nodal en el esquema NIVED. La Figura 5.4 presenta la geometría y condiciones de borde. La misma viga es utilizada en el esquema MEM para comparar con el esquema NIVED. Las condiciones de contorno esenciales en el lado fijo de la viga se aplican según la solución analítica de Timoshenko and Goodier:

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{Py}{6\bar{E}_\gamma I} \left((6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu})y^2 - \frac{3D^2}{2}(1 + \bar{\nu}) \right), \\
 u_y &= -\frac{P}{6\bar{E}_\gamma I} \left(3\bar{\nu}y^2(L - x) + (3L - x)x^2 \right),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde para un estado de deformación plana $\bar{E}_\gamma = E_\gamma/(1-\nu)$ con $E = 1 \times 10^7$ psi y $\bar{\nu} = \nu(1-\nu)$ con $\nu = 0.3$; $L = 8$ in es el largo de la viga, I es el segundo momento de área de la viga de espesor unitario, $D = 4$ in es el ancho, y la carga es $P = -1000$ lbf. Las correspondientes

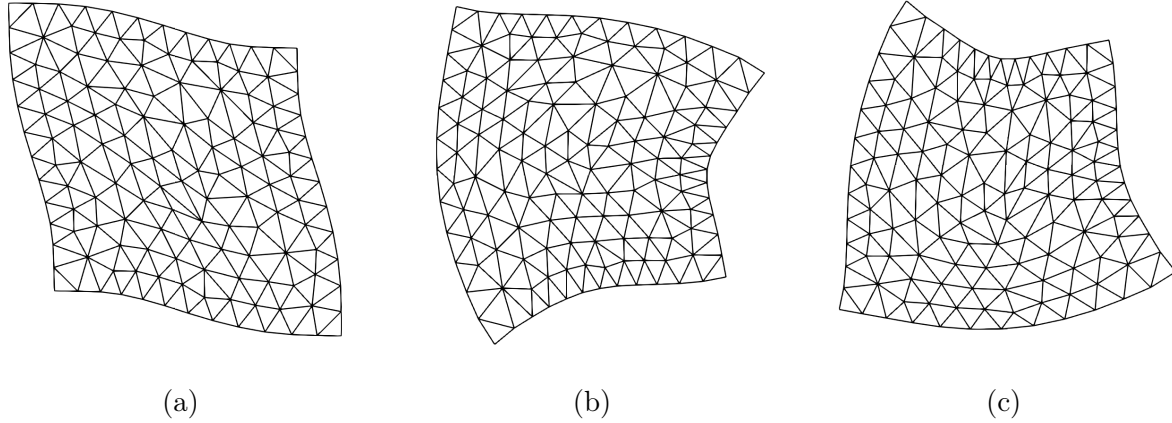


Figura 5.3: Problema de valores propios en elasticidad lineal bidimensional para un cuadrado de dimensiones 1×1 in. Se aprecia la suavidad de los modos, descartando modos espurios debido a problemas de integración

deformaciones exactas son:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= -\frac{P(L-x)y}{\bar{E}_\gamma I}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\bar{\nu}P(L-x)y}{\bar{E}_\gamma I}, \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{P(D^2/4 - y^2)}{4I\mu},
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $\mu = E_\gamma/(2(1 + \nu))$ psi es el módulo de corte. Los esfuerzos exactos son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{P(L-x)y}{I}, \\
 \sigma_y &= 0, \\
 \sigma_{xy} &= \frac{P(D^2/4 - y^2)}{2I}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

La carga parabólica en el lado de la tracción tangencial se impone utilizando σ_{xy} de (5.5). La secuencia de refinamiento de la distribución nodal se presenta en la Figura 5.5. Para el esquema MEM se utilizan mallas de triángulos de tres nodos basadas en las mismas distribuciones de nodos utilizadas en NIVED. El parámetro de soporte de las funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para el parámetro escalador de la matriz de rigidez que controla la estabilidad se utiliza $\alpha^* = 1 \times 10^{-4}$.

Para efectos de comparación, en el esquema MEM se utilizaron varias cantidades de puntos de Gauss para la integración numérica. Las tasas de convergencia de la norma L^2 relativa y la seminorma H^1 relativa para la solución numérica de ambos métodos se muestran en la Figura 5.6. La eficiencia computacional enfrentada con la norma L^2 relativa de ambos esquemas es mostrada en la Figura 5.7.

La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia en la seminorma

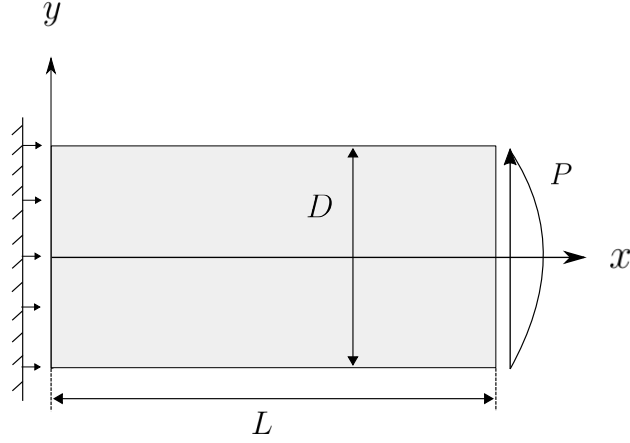


Figura 5.4: Geometría y condiciones de borde para el problema de la viga en voladizo.

H^1 con comportamiento errático cuando se utilizan 1 y 3 puntos de Gauss debido a errores de integración. Para obtener tasas de convergencia próxima a la óptima para la aproximación MEM en la seminorma H^1 es necesario utilizar 6 puntos de Gauss. Mientras que para la norma L^2 , el esquema MEM necesita 3 puntos de Gauss para acercarse a la tasa de convergencia óptima. Respecto a la exactitud, para las tasas óptimas en este ejemplo, el esquema MEM tiene mayor exactitud comparado con el esquema NIVED.

Respecto a la eficiencia computacional, para este ejemplo, MEM entrega ambas tasas de convergencia cercanas a la óptimas en menor tiempo que el esquema NIVED.

5.4. Placa con orificio

Este ejemplo es una placa con un orificio de radio r_0 centrado en el origen cargado al infinito por $\sigma_x = T$, $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$ según se esquematiza en la Figura 5.8. La solución exacta esta dada por

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{T}{4\mu} \left(\frac{\kappa + 1}{2} r \cos(\theta) + \frac{r_0^2}{r} \left((\kappa + 1) \cos(\theta) + \cos(3\theta) \right) - \frac{r_0^4}{r^3} \cos(3\theta) \right), \\ u_y &= \frac{T}{4\mu} \left(\frac{\kappa - 3}{2} r \sin(\theta) + \frac{r_0^2}{r} \left((\kappa - 1) \sin(\theta) + \sin(3\theta) \right) - \frac{r_0^4}{r^3} \sin(3\theta) \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde $\mu = E_\gamma / (2(1 + \nu))$ y $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ para el caso de esfuerzo plano. Los esfuerzos exactos estan dados por

$$\begin{aligned} \sigma_x &= T \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right), \\ \sigma_y &= -T \left(\frac{r_0^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + \frac{3r_0^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right), \\ \sigma_{xy} &= -T \left(\frac{r_0^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3r_0^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

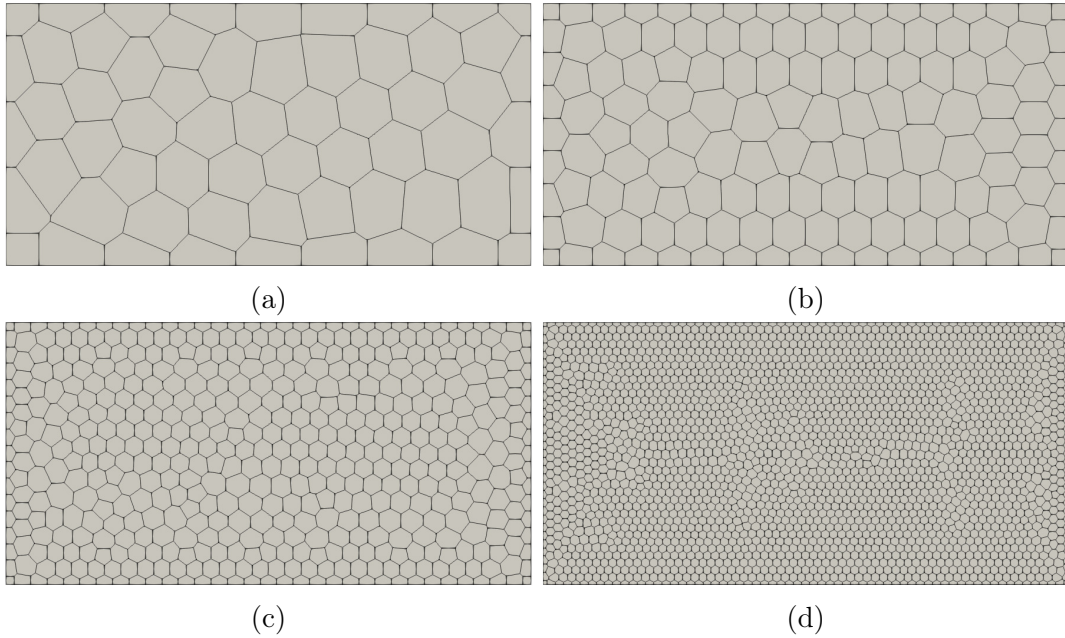


Figura 5.5: Secuencia de refinamiento de la distribución nodal utilizada en el estudio de convergencia del problema de la viga en voladizo: (a) 61 nodos, (b) 136 nodos, (c) 499 nodos, y (d) 2231 nodos.

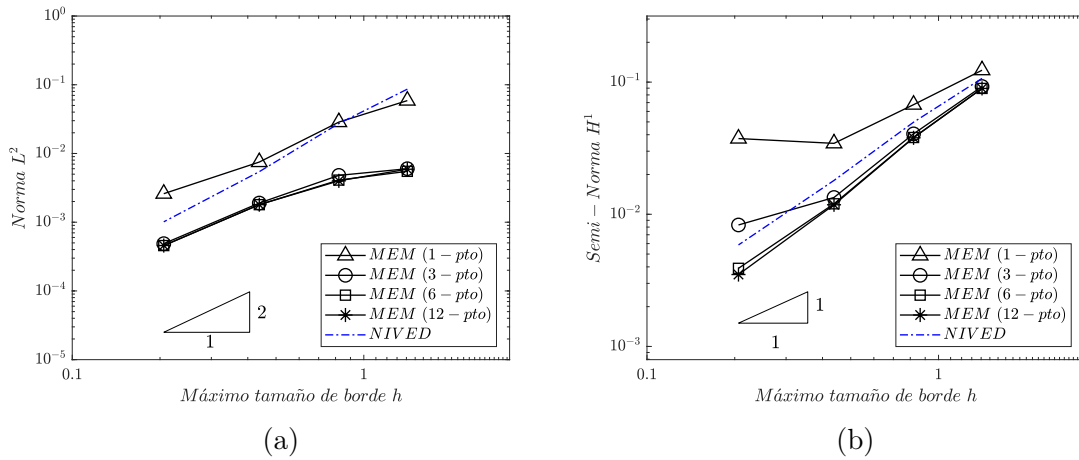


Figura 5.6: Tasas de convergencia para el problema de la viga en voladizo: (a) norma L^2 y (b) seminorma H^1 . La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia en la seminorma H^1 con comportamiento errático cuando se utilizan 1 y 3 puntos de Gauss debido a errores de integración. Para obtener tasas de convergencia próxima a la óptima para la aproximación MEM en la seminorma H^1 es necesario utilizar 6 puntos de Gauss.

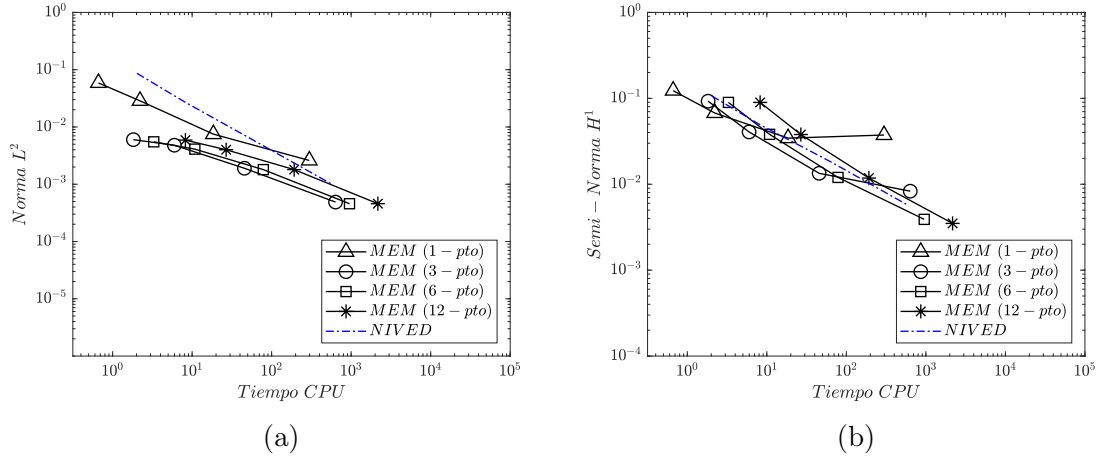


Figura 5.7: Eficiencia computacional del problema de la viga en voladizo.

Como muestra la Figura 5.8, debido a sus dos ejes de simetría, sólo el primer cuadrante es modelado. Se impone el desplazamiento $u_x = 0$ a lo largo de $x = 0$ y $u_y = 0$ a lo largo de $y = 0$. Las tracciones son impuestas en los otros dos bordes según la solución exacta con $r_0 = 1$ in y $T = 100$ psi. Los parámetros del material son: $E_\gamma = 1 \times 10^3$ psi y $\nu = 0.3$. La secuencia de refinamiento de la distribución nodal se presenta en la Figura 5.9. Para el esquema MEM se utilizan mallas de triángulos de tres nodos basadas en las mismas distribuciones de nodos utilizadas en NIVED. El parámetro de soporte de las funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para el parámetro escalador de la matriz de rigidez que controla la estabilidad se utiliza $\alpha^* = 1 \times 10^{-6}$.

Para efectos de comparación, en el esquema MEM se utilizaron varias cantidades de puntos de Gauss para la integración numérica. Las tasas de convergencia de la norma L^2 relativa y la seminorma H^1 relativa para la solución numérica de ambos métodos se muestran en la Figura 5.10. La eficiencia computacional enfrentada con la norma L^2 relativa de ambos esquemas es mostrada en la Figura 5.11.

La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático en la norma L^2 cuando se utilizan 1 puntos de Gauss, logrando obtener tasas de convergencia próxima a la óptima utilizando 3 puntos de Gauss. Para la seminorma H^1 , el esquema MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático cuando se utiliza 1 y 3 puntos de Gauss, alcanzado tasas de convergencia próximas a la óptima para 6 y 12 puntos de Gauss.

Respecto a la exactitud de la norma L^2 , el esquema NIVED es superior, mientras que para la seminorma H^1 el esquema MEM es superior para más de 3 puntos de Gauss, pero perdiendo la convergencia para discretizaciones finas.

Respecto a la eficiencia computacional, para este el ejemplo, NIVED logra tasas de convergencia óptimas en menor tiempo, tomando en cuenta el requisito de convergencia para ambas normas.

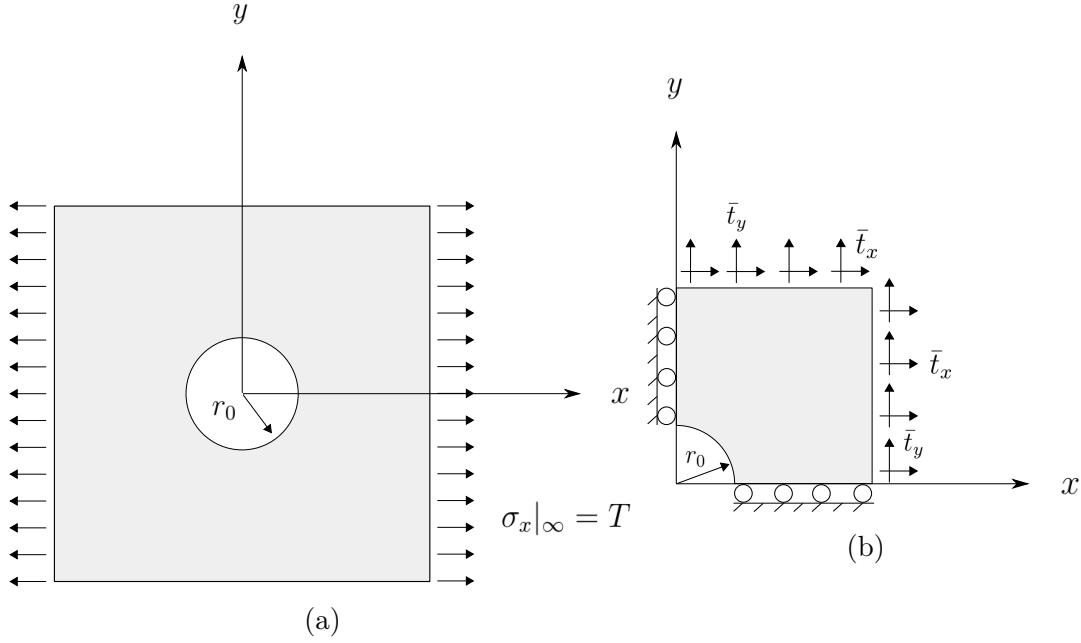


Figura 5.8: Problema de la placa con orificio: (a) diagrama del problema y (b) dominio de la solución con las condiciones de borde.

5.5. Problema manufacturado

En este problema se considera un dominio cuadrado de 2×2 in, donde los desplazamientos en todos sus bordes son impuestos de acuerdo con la solución exacta:

$$\begin{aligned} u_x &= \sin(x) \cos(y), \\ u_y &= e^x e^y. \end{aligned} \quad (5.8)$$

La siguiente fuerza de cuerpo es aplicada:

$$\begin{aligned} b_x &= \left(\sin(x) \cos(y) \right) \mathbf{D}(1, 1) - \left(e^x e^y \right) \mathbf{D}(1, 2) - \left(e^x e^y - \sin(x) \cos(y) \right) \mathbf{D}(3, 3), \\ b_y &= \left(\cos(x) \sin(y) \right) \mathbf{D}(2, 1) - \left(e^x e^y \right) \mathbf{D}(2, 2) - \left(e^x e^y - \cos(x) \sin(y) \right) \mathbf{D}(3, 3). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Los esfuerzos exactos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mathbf{D}(1, 1) \cos(x) \cos(y) + \mathbf{D}(1, 2) e^x e^y, \\ \sigma_y &= \mathbf{D}(2, 1) \cos(x) \cos(y) + \mathbf{D}(2, 2) e^x e^y, \\ \sigma_{xy} &= \mathbf{D}(3, 3) \left(e^x e^y - \sin(x) \sin(y) \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Los parámetros del material son: $E_\gamma = 1 \times 10^5$ psi y $\nu = 0.3$. La secuencia de refinamiento de la distribución nodal se presenta en la Figura 5.12. Para el estudio de MEM se utilizan mallas de triángulos de tres nodos basadas en las mismas distribuciones de nodos.

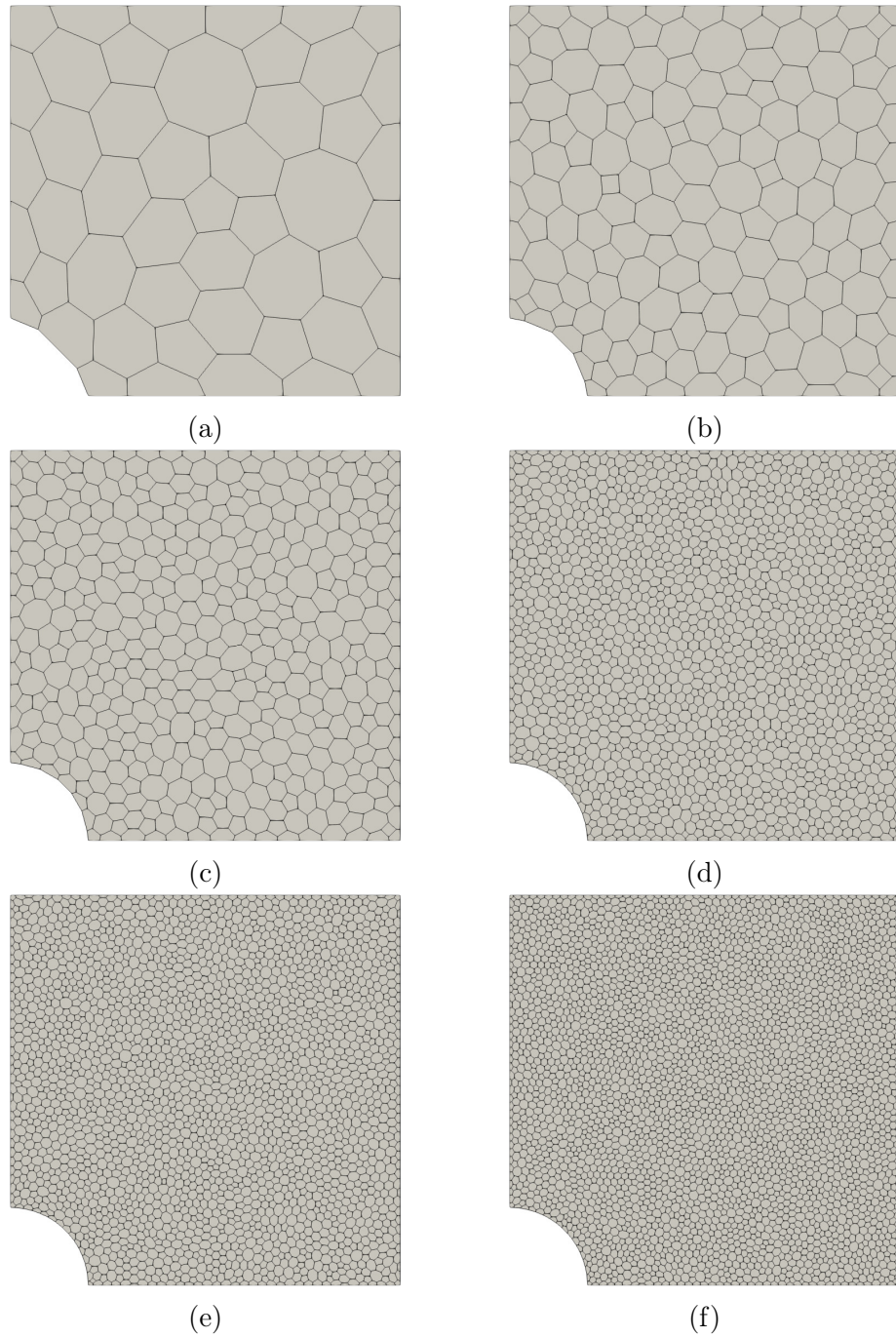
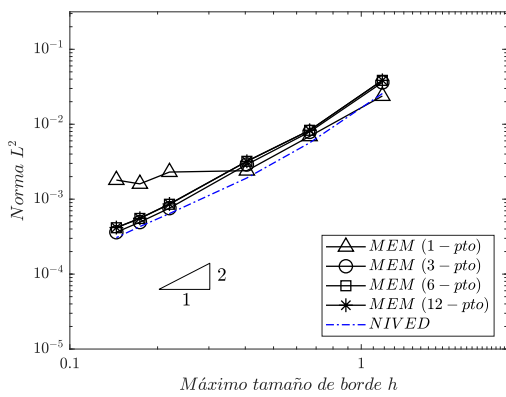
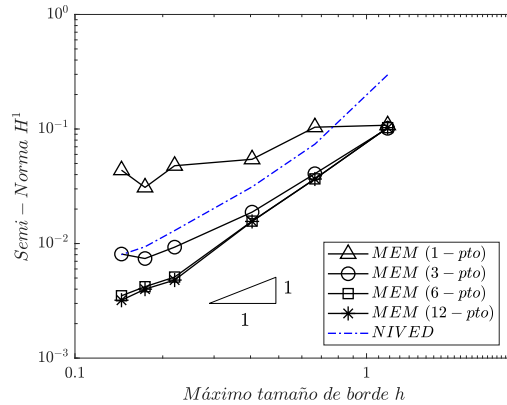


Figura 5.9: Secuencia de refinamiento de la distribución nodal utilizada en el estudio de convergencia del problema de la placa con orificio: (a) 48 nodos, (b) 156 nodos, (c) 432 nodos, (d) 1529 nodos, (e) 2372 nodos, y (f) 3335 nodos.

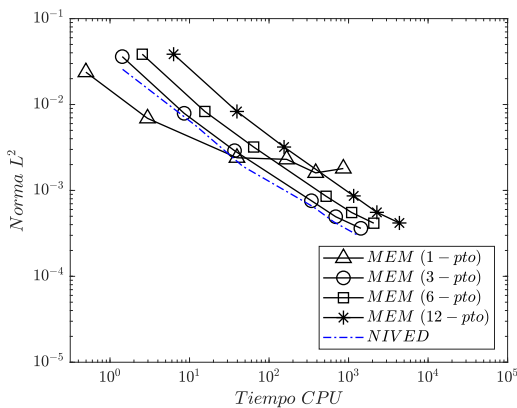


(a)

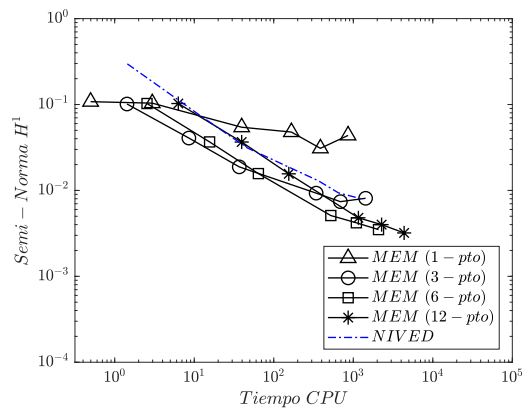


(b)

Figura 5.10: Tasas de convergencia para el problema de la placa con orificio. La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático en la norma L^2 cuando se utilizan 1 puntos de Gauss, logrando obtener tasas de convergencia próxima a la óptima utilizando 3 puntos de Gauss.



(a)



(b)

Figura 5.11: Eficiencia computacional del problema de la placa con orificio.

El parámetro de soporte de las funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para el parámetro escalador de la matriz de rigidez que controla la estabilidad se utiliza $\alpha^* = 1 \times 10^{-3}$.

Para efectos de comparación, en el esquema MEM se utilizaron varias cantidades de puntos de Gauss para la integración numérica. Las tasas de convergencia de la norma L^2 relativa y la seminorma H^1 relativa para la solución numérica de ambos métodos se muestran en la Figura 5.13. La eficiencia computacional enfrentada con la norma L^2 relativa de ambos esquemas es mostrada en la Figura 5.14.

La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático en la norma L^2 cuando se utilizan 1 punto de Gauss, logrando obtener tasas de convergencia próxima a la óptima utilizando 3 puntos de Gauss. Para la seminorma H^1 , el esquema MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático cuando se utilizan 1 y 3 puntos de Gauss, alcanzado tasas de convergencia próximas a la óptima para 6 y 12 puntos de Gauss pero perdiéndola para discretizaciones finas.

Respecto a la exactitud de la norma L^2 , para ambos esquemas es similar, mientras que para la seminorma H^1 el esquema MEM es superior para más de 3 puntos de gauss, pero perdiendo la convergencia para discretizaciones finas.

Respecto a la eficiencia computacional, para este ejemplo, NIVED logra ambas tasas de convergencia óptimas en menor tiempo.

5.6. Problema dinámico manufacturado

Un problema dinámico manufacturado es estudiado para comparar el comportamiento dinámica de MPM y NIVED. Se considera un cuadrado de 2×2 *in* sin desplazamiento y velocidad inicial. Los desplazamientos sobre los cuatro bordes son impuestos con la solución exacta:

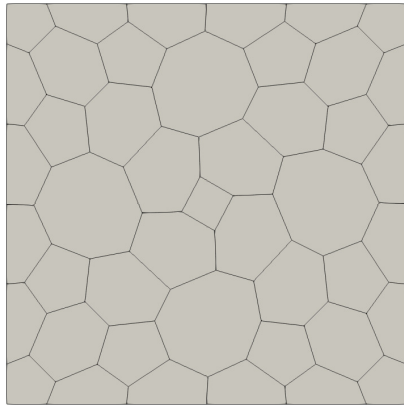
$$\begin{aligned} u_x &= xg(t) \left(-(1 + \nu)L^2 + \nu y^2 + \frac{1}{3}x^2 \right), \\ u_y &= yg(t) \left((1 + \nu)L^2 - \nu x^2 - \frac{1}{3}y^2 \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde L es el largo de los lados del cuadrado y

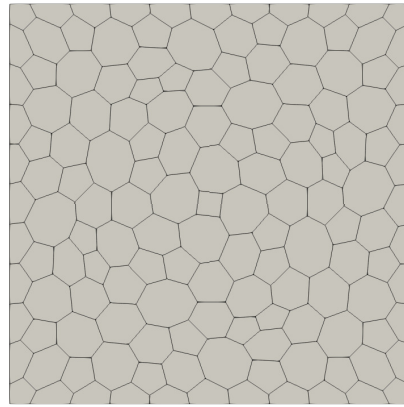
$$g(t) = \alpha_g \left(1 - e^{-\frac{\beta_g t^2}{2}} \right). \quad (5.12)$$

La siguiente fuerza de cuerpo

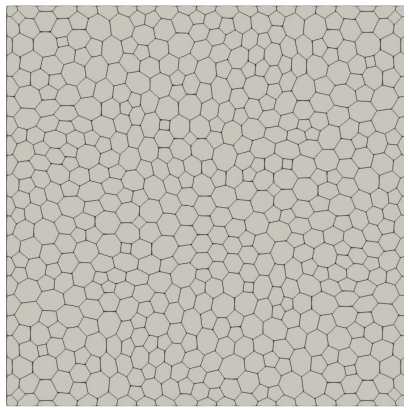
$$\begin{aligned} b_x &= x \left(-2E_\gamma g(t) + \rho \ddot{g}(t) \left(-(1 + \nu)L^2 + \nu y^2 + \frac{1}{3}x^2 \right) \right), \\ b_y &= y \left(2E_\gamma g(t) + \rho \ddot{g}(t) \left((1 + \nu)L^2 - \nu x^2 - \frac{1}{3}y^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$



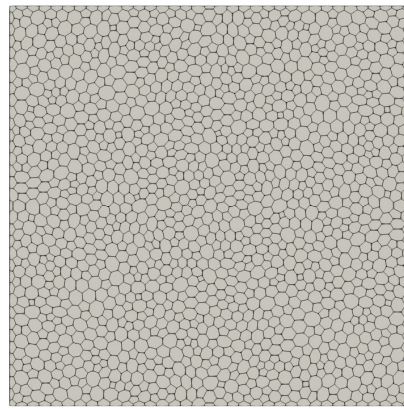
(a)



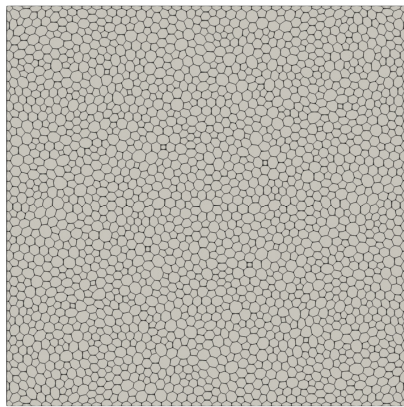
(b)



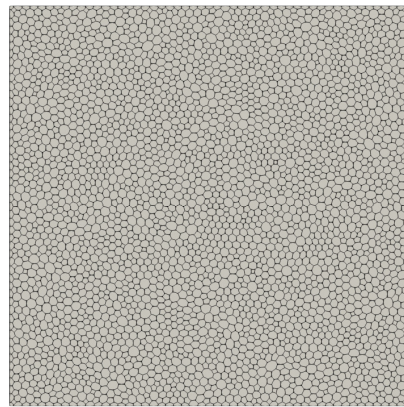
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.12: Secuencia de refinamiento de la distribución nodal utilizada en el estudio de convergencia del problema manufacturado: (a) 45 nodos, (b) 145 nodos, (c) 564 nodos, (d) 1566 nodos, (e) 2233 nodos, y (f) 3437 nodos.

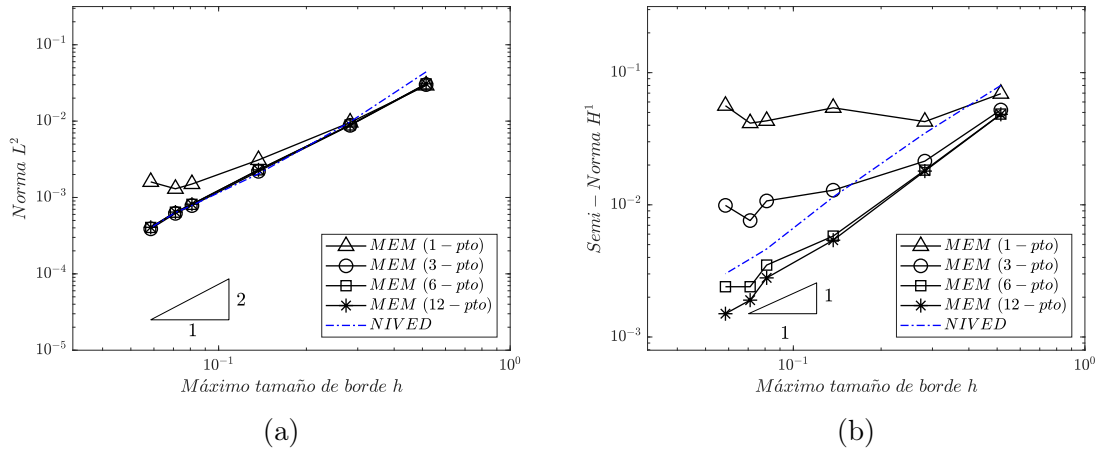


Figura 5.13: Tasas de convergencia para el problema manufacturado. La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . La aproximación MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático en la norma L^2 cuando se utilizan 1 puntos de Gauss, logrando obtener tasas de convergencia próxima a la óptima utilizando 3 puntos de Gauss. Para la seminorma H^1 , el esquema MEM entrega tasas de convergencia con comportamiento errático cuando se utiliza 1 y 3 puntos de Gauss, alcanzado tasas de convergencia próximas a la óptima para 6 y 12 puntos de Gauss pero perdiéndola para discretizaciones finas.

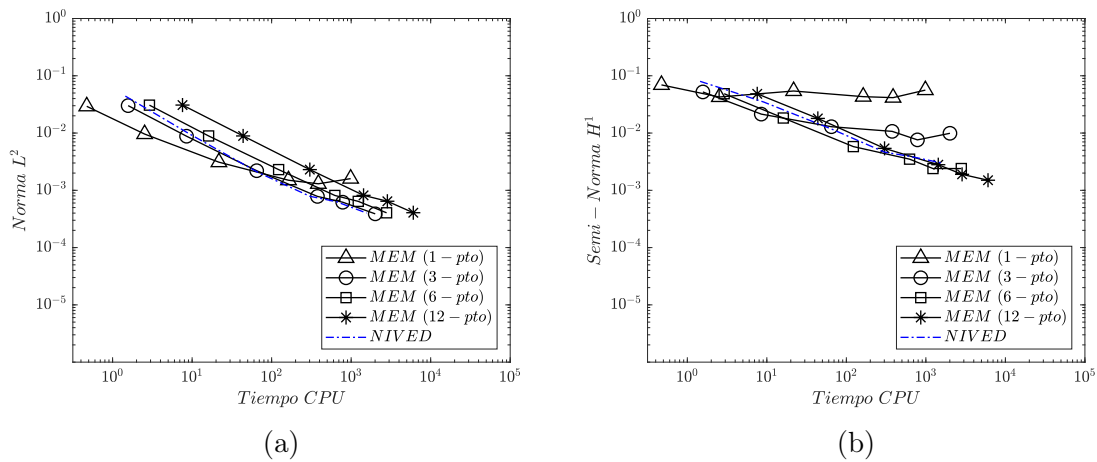


Figura 5.14: Eficiencia computacional del problema manufacturado.

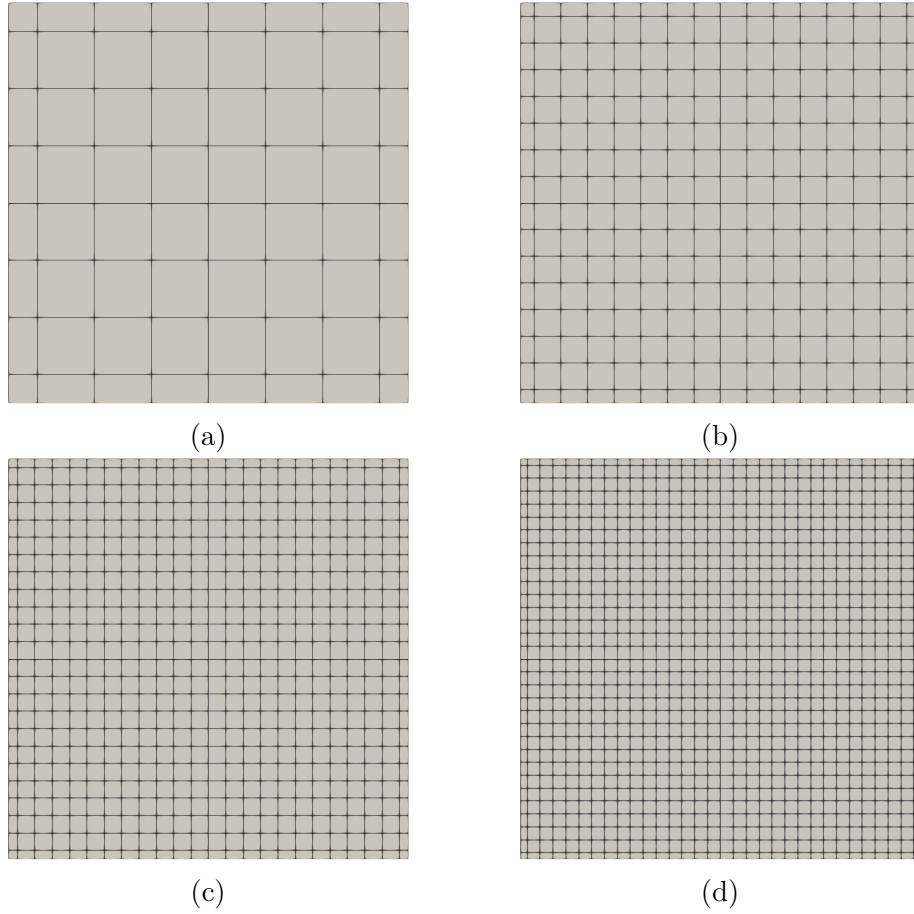


Figura 5.15: Secuencia de refinamiento de la distribución nodal utilizada en el estudio de convergencia del problema dinámico manufacturado: (a) 64 nodos, (b) 256 nodos, (c) 576 nodos, y (d) 1024 nodos.

es aplicada. Los esfuerzos exactos son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= E_\gamma g(t) (x^2 - L^2), \\
 \sigma_y &= E_\gamma g(t) (L^2 - y^2), \\
 \sigma_{xy} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Las soluciones son para el caso de esfuerzo plano. Los parámetros del material son: $E_\gamma = 1 \times 10^5 \text{ psi}$, $\nu = 0.3$ y $\rho = 800 \text{ lb/in}^3$. Para este problema se utilizó: $L = 2 \text{ in}$, $\alpha_g = 0.001$, $\beta_g = 0.001$, y pasos de tiempos de $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$. La secuencia de refinamiento de la distribución nodal para el esquema NIVED se presenta en la Figura 5.15. Para el caso de MPM, se utilizó 4 partículas por elemento en cada secuencia de refinamiento de la rejilla Euleriana, entregando la misma cantidad de nodos utilizados en la secuencia de refinamiento de NIVED.

El parámetro de soporte de las funciones de base utilizado es $\gamma = 2.0$ con prior Gaussiano como función de peso. Para el parámetro escalador de la matriz de rigidez que controla la estabilidad se utiliza $\alpha^* = 1 \times 10^{-4}$ y para la matriz de masa $\beta = 1 \times 10^{-4}$. Para la integración

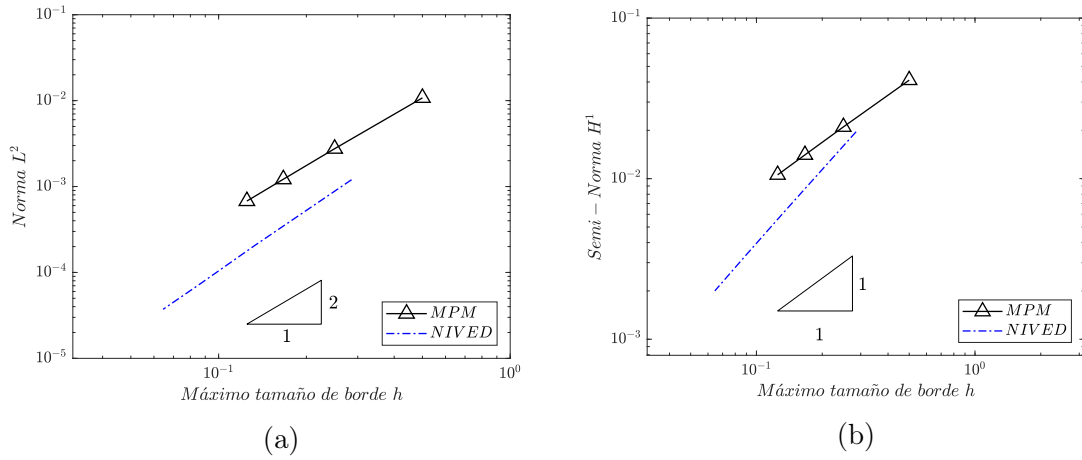


Figura 5.16: Tasas de convergencia para el problema dinámico manufacturado: (a) norma L^2 y (b) seminorma H^1 . La aproximación NIVED entrega tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 .

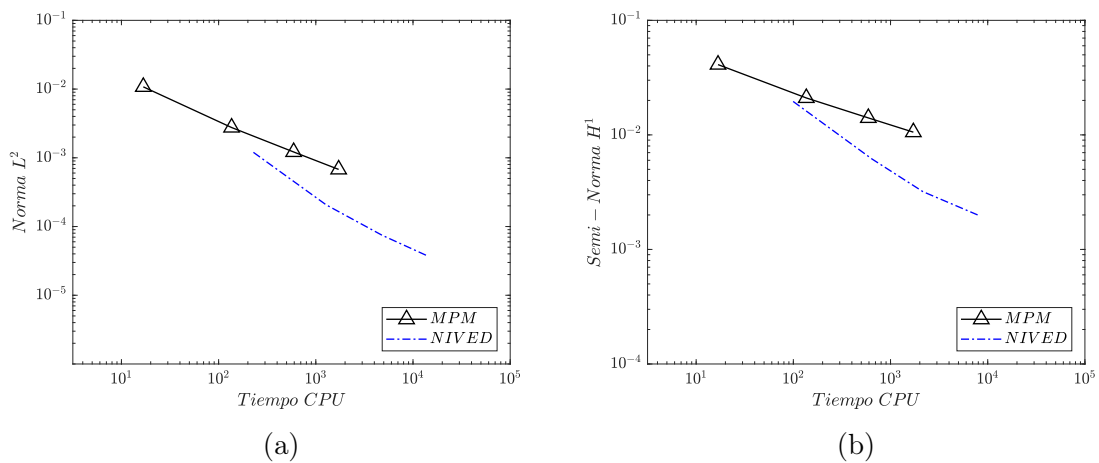


Figura 5.17: Eficiencia computacional para el problema dinámico manufacturado.

en el tiempo se utilizó el método de Newmark del promedio constante de la aceleración.

Las tasas de convergencia de la norma L^2 relativa y la seminorma H^1 relativa para la solución numérica de ambos métodos, después de 600 pasos de tiempo, se muestran en la Figura 5.16. La eficiencia computacional, para 200 pasos de tiempo, enfrentada con la norma L^2 relativa de ambos métodos es mostrada en la Figura 5.17.

La aproximación NIVED y MPM entregan tasas de convergencia óptima de 2 para la norma L^2 y 1 para la seminorma H^1 . Observando los gráficos es evidente la superioridad de la aproximación NIVED en eficiencia y exactitud sobre la aproximación MPM en el problema dinámico manufacturado.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis, un nuevo esquema de integración nodal consistente y estable para el método de Galerkin sin malla fue desarrollado. Se adoptaron las funciones bases de la máxima entropía, y la estabilidad y consistencia de las soluciones numéricas son heredades del marco teórico del elemento virtual. Este nuevo esquema es llamado NIVED (por sus siglas en inglés Nodal Integration using the Virtual Element Decomposition). En este método la matriz de rigidiz es la suma de una matriz de rigidez que entrega consistencia y una matriz de rigidez que entrega estabilidad. Varios ejemplos numéricos de elasticidad lineal estáticos y un ejemplo de elasticidad dinámico se estudiaron para demostrar la robustez de NIVED, evaluando la convergencia, consistencia y estabilidad. Los ejemplos numéricos estáticos fueron comparados con el desempeño de un método de Galerkin sin malla (MEM) y el problema dinámico con el desempeño del método del punto material (MPM).

Los hallazgos más descotados realizados en el estudio de los esquemas son los siguientes:

- Los resultados numéricos confirman que el test de la parcela cumple con la precisión de máquina solo para el esquema NIVED, siendo capaz de reproducir exactamente desplazamientos lineales para un campo de esfuerzos constante.
- Se encontraron tasas de convergencia óptimas para el esquema NIVED en los ejemplos estudiados.
- Para el problema de la viga en voladizo, MEM entrega tasas de convergencia cercanas a la óptima en menor tiempo de cómputo. Mientras que para los otros problemas estáticos, NIVED entrega tasas de convergencia óptimas en menor tiempo de cómputo.
- Para MEM sus tasas de convergencia se reducen en discretizaciones finas y pueden perderse en algunos casos.
- Los resultados muestran que el esquema NIVED es una alternativa que supera al MPM en exactitud, convergencia y eficiencia computacional.

Como trabajos futuros se sugiere desarrollar el esquema para funciones de base distintas a las maxent y desarrollar el método NIVED para aproximaciones de orden superior. Se sugiere además desarrollar el esquema para mecánica de sólidos no lineal y estudiar su robustez en problemas de elastoplasticidad. Finalmente, extender el método a tres dimensiones implementando el esquema con programación paralela en GPU.

Bibliografía

- [1] J. Dolbow and T. Belytschko, “Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods,” *Computational Mechanics*, vol. 23, no. 3, pp. 219–230, 1999.
- [2] S. Beissel and T. Belytschko, “Nodal integration of the element-free Galerkin method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, no. 1-4, pp. 49–74, 1996.
- [3] J.-S. Chen, C.-T. Wu, S. Yoon, and Y. You, “A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. February 2000, pp. 435–466, 2001.
- [4] G. R. Liu, G. Y. Zhang, Y. Y. Wang, Z. H. Zhong, G. Y. Li, and X. Han, “A nodal integration technique for meshfree radial point interpolation method (NI-RPIM),” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 11-12, pp. 3840–3860, 2007.
- [5] Q. Duan, B. Wang, X. Gao, and X. Li, “Quadratically consistent nodal integration for second order meshfree Galerkin methods,” *Computational Mechanics*, vol. 54, no. 2, pp. 353–368, 2014.
- [6] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. D. Marini, and A. Russo, “Basic Principles of Virtual Element Methods,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 23, no. 01, pp. 199–214, 2013.
- [7] A. Ortiz-Bernardin, A. Russo, and N. Sukumar, “Consistent and stable meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 112, no. 7, pp. 655–684, 2017.
- [8] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, “Element-free Galerkin methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229–256, 1994.
- [9] W. K. Liu, S. Jun, and Y. F. Zhang, “Reproducing Kernel Particle Methods,” *International Journal for Numerical methods in fluids*, vol. 20, pp. 1081–1106, 1995.
- [10] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko, “The natural element method in solid mechanics,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, no. 5, pp. 839–887, 1998.
- [11] S. De and K. J. Bathe, “The method of finite spheres,” *Computational Mechanics*, vol. 25,

- no. 4, pp. 329–345, 2000.
- [12] S. Atluri and T. Zhu, “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics,” *Computational Mechanics*, vol. 22, pp. 117–127, 1998.
- [13] J. J. Monaghan, “An introduction to SPH,” *Computer Physics Communications*, vol. 48, no. 1, pp. 89–96, 1988.
- [14] Y. L. X. Zhang, Z. Chen, *The Material Point Method A Continuum-Based Particle Method for Extreme Loading Cases*. Academic Press, first ed., 2017.
- [15] M. Arroyo and M. Ortiz, “Local maximum-entropy approximation schemes: A seamless bridge between finite elements and meshfree methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 65, no. 13, pp. 2167–2202, 2006.
- [16] N. Sukumar and R. W. Wright, “Overview and construction of meshfree basis functions: From moving least squares to entropy approximants,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 70, pp. 181–205, 2006.
- [17] M. A. Puso, J. S. Chen, E. Zywickz, and W. Elmer, “Meshfree and finite element nodal integration methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. September 2007, pp. 416–446, 2008.
- [18] C. R. Dohrmann, M. W. Heinstein, J. Jung, S. W. Key, and W. R. Witkowski, “Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1549–1568, 2000.
- [19] J. S. Chen, S. Yoon, and C. T. Wu, “Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, no. 12, pp. 2587–2615, 2002.
- [20] M. Hillman and J.-S. Chen, “An accelerated, convergent, and stable nodal integration in Galerkin meshfree methods for linear and nonlinear mechanics,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 107, no. 7, pp. 603–630, 2015.
- [21] T. Belytschko, J. Shau-Jen, W. K. Liu, and J. M. Kennedy, “Hourglass control in linear and nonlinear problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 43, pp. 251–276, 1984.
- [22] T. J. Hughes, *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Elements Analysis*. Dover Publications, Inc, first ed., 2003.
- [23] Z. T. O. Zienkiewicz and J. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6th ed., 2005.
- [24] W. K. L. T. Belytschko and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for continua and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, second ed., 2005.

- [25] G. Strang and G. Fix, *An analysis of the finite element method*. Wellesley-Cambridge Press, MA, second ed., 2008.
- [26] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo, “The Hitchhiker’s Guide to the Virtual Element Method,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 24, no. 08, pp. 1541–1573, 2014.
- [27] L. B. Beirão da Veiga and G. Manzini, “A virtual element method with arbitrary regularity,” *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 34, no. 2, pp. 759–781, 2014.
- [28] L. B. Beirão da Veiga, F. Brezzi, and L. D. Marini, “Virtual Elements for Linear Elasticity Problems,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 51, no. 2, pp. 794–812, 2013.
- [29] A. L. Gain, C. Talischi, and G. H. Paulino, “On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 282, pp. 132–160, 2014.