



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

COOPERACIÓN Y TIEMPO EN JUEGOS MARKOVIANOS CON INFORMACIÓN
INCOMPLETA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PIERO FRANCISCO ZANOCCO LEMP

PROFESOR GUÍA:
JUAN ESCOBAR CASTRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAHMI ILKILIC
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT PROYECTO 1180723.

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA
POR: PIERO FRANCISCO ZANOCCO LEMP
FECHA: 20/01/2019
PROF. GUÍA: JUAN ESCOBAR CASTRO

COOPERACIÓN Y TIEMPO EN JUEGOS MARKOVIANOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

La presente tesis estudia la factibilidad de cooperación en una situación de *hold up* repetida. Para ello, se propone un modelo de Juego Markoviano con Información Incompleta, compuesto por dos jugadores, y en cuyo juego base no existen incentivos a la inversión. Se buscan condiciones bajo las cuales los jugadores obtienen pagos positivos en el largo plazo.

El análisis se centra en el efecto de dos variables: la capacidad de los agentes de valorar sus retornos futuros, representado por una tasa de descuento intertemporal; y la frecuencia con que los agentes toman decisiones, que está dada por el largo del intervalo entre periodos de interacción. Para ello, se proponen dos tipos de estrategias que faciliten el análisis de incentivos, obteniendo que tanto la reducción de la tasa de interés, como la disminución del tiempo entre interacciones aumentan la posibilidad de cooperación. Específicamente, los dos efectos permiten que ambas estrategias den lugar a *Equilibrios Bayesianos Perfectos Públicos* que reportan pagos positivos en el largo plazo.

La relevancia de este enfoque nace del resultado de D. Abreu, P. Milgrom y D. Pearce (1991), quienes demuestran que en juegos repetidos con *Información Imperfecta* la reducción de la tasa de interés aumenta la posibilidad de cooperación, mientras que disminuir el largo del intervalo de tiempo entre periodos puede provocar el efecto contrario, pues cambia el flujo de información. En esta línea, se analizan ambos efectos cuando la información privada del juego depende de la frecuencia de las interacciones.

A pesar del resultado anterior, se obtiene que en el caso de las dos estrategias propuestas, tanto la reducción de la tasa de interés, como la disminución del tiempo entre un periodo y otro, posibilitan la cooperación. Esto ocurre cuando ambos valores son cercanos a cero. Más aún, en un escenario de tiempo discreto, si los jugadores son infinitamente pacientes, las estrategias resultan ser *EBP públicos* siempre y cuando la frecuencia de interacción sea alta. El mismo resultado es obtenido si las decisiones son tomadas en tiempo continuo, cuando los jugadores son suficientemente pacientes. En este sentido, se presume una condición de *continuidad* del modelo.

Para abordar el análisis general de los Equilibrios, se propone una metodología que caracteriza el problema de eficiencia sobre el conjunto de pagos alcanzados por *EBP Públicos*. En particular, utilizando programación dinámica es posible obtener resultados numéricos que sean insumo para la resolución teórica del modelo. Si bien, los alcances de este trabajo se reducen al estudio de dos estrategia particulares, se revelan dinámicas relevantes sobre los incentivos que posibilitan la cooperación, contribuyendo a la comprensión de esta situación estratégica.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer al profesor Juan Escobar por guiarme en este proceso de tesis, que sin duda aportó significativamente a mi formación en Economía, y por tener siempre la disposición de recibir y discutir largamente las dudas e inquietudes que se me fueron presentando en el proceso. Agradezco también a los profesores Rahmi Ilkic y Alejandro Jofré por sus correcciones y observaciones sobre este trabajo, y por su participación en la comisión evaluadora.

Agradezco, por sobre todo, a mi familia. A mis papás, Antonio y Else, por la incondicionalidad y amor que nos entregan a mis hermanos y a mí. Por ser ejemplos de una vida consecuente y resiliente. Por enseñarme a caminar y dejarme correr. A mis hermanos, Renzo y Bruno, por acompañarme en prácticamente todos mis procesos y decisiones. Por ayudarme a construirme paso a paso, desde lo cotidiano, compartiendo los gustos, como la música y el arte, dando consejo, o simplemente teniendo una buena conversación.

A mis amigos y compañeros de universidad. Especialmente a Ignacio, Guido, Rodrigo, Rosario, Camila F, Camila Correa y Camila Conde, con quienes pasé la mayor parte del tiempo de la carrera, contando historias que nunca terminan, almorzando en el 801, gritando calistenia y, más bien, compartiendo desde lo más genuino que cada uno de nosotros pudo y puede ser. Agradezco también a Andrés y Simón, que me han acompañado en este y muchos otros caminos, y han sido ejemplo de profunda vocación social. Es difícil poner en (pocas) palabras lo que significa mi amistad con todos ustedes. Creo que una de las experiencias más importantes que una persona puede regalarte en la vida es la de crecer junto a ti, y nunca podré agradecerles lo suficiente por ello.

Le doy las gracias también al DIM y quienes lo conforman: profesores, funcionarios y alumnos. Creo que tuve mucha suerte de encontrar un lugar en donde las personas disfrutaban y se maravillan por lo que hacen. Agradezco al DIM por enseñarme el gusto de hacer matemáticas, que es la médula de mi formación. A mis amigos y compañeros de especialidad, particularmente a Martín, Mauro, Alonso, Enrique, y al Leo. Quiero darle las gracias especialmente a Karen, Eterin, Silvia, Natacha, Georgina, Oscar y Luis, por estar siempre dispuestos a ayudarme con cualquier dificultad, y sobre todo por las conversaciones diarias, los consejos, y por las bromas y risas que hicieron del departamento una segunda casa.

Por último, agradezco a FONDECYT PROYECTO 1180723 por financiar este trabajo de tesis.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Modelo	6
1.1. Juego base G	6
1.2. Juego repetido $G^\infty(\delta)$	7
1.2.1. Estructura intertemporal	7
1.2.2. Historias	8
1.2.3. Estrategias	9
1.2.4. Creencias	10
1.2.5. Pagos	10
1.3. Equilibrio	12
1.3.1. Equilibrio y estrategias públicas	13
2. Análisis de Equilibrios	15
2.1. Equilibrio Rígido	16
2.1.1. Pagos de continuación	16
2.1.2. Secuencialidad Racional	17
2.2. Equilibrio Garrote-Zanahoria	19
2.2.1. Pagos de continuación	20
2.2.2. Secuencialidad Racional	23
2.3. Discusión	29
3. Pagos de Equilibrio	31
3.1. Caracterización como Problema de Programación Lineal	31
Conclusión	34
3.2. Trabajo futuro	36
Bibliografía	37
Anexo	38

Introducción

Comprender los incentivos que conducen a los agentes a tomar determinadas decisiones es un tema central en Microeconomía. En muchas situaciones, la falta de incentivos apropiados da lugar a que no se generen acuerdos eficientes e incluso a que los agentes renieguen anticipadamente de participar en ellas. Este, es un aspecto fundamental en materia de contratos incompletos, y específicamente en contratos relacionales, en donde existen acuerdos implícitos que se sostienen en la relación de confianza entre las partes. Contratos de este tipo surgen cuando no es posible prever los distintos estados de la naturaleza que los involucran. Un problema particular emerge cuando uno de los participantes realiza una inversión inicial, previo a que se lleven a cabo futuras transacciones. Las inespecificaciones del pacto pueden aumentar el poder de renegociación de los otros agentes, conduciendo a un escenario desfavorable para el inversor. Esta situación es ampliamente estudiada en la literatura, y es llamada *problema de compromiso* o *'hold up'*.

Un caso muy conocido es el que protagonizó General Motors (GM) y Fisher Body (FB) en 1919. General Motors decidió comenzar a vender automóviles de carenado metálicos y cerrados, para lo cual se aproximó al líder productor de cuerpos de automóviles de la época, Fisher Body. El acuerdo propuesto por GM requería de una fuerte inversión inicial en plantas y equipamiento por parte de FB. Esto, claramente suponía un potencial problema de *hold up*. Para dar incentivos a la inversión, las firmas generaron un contrato a largo plazo de diez años, con el propósito de proteger los intereses de las partes. Sin embargo, el aumento drástico en la demanda de automóviles de este tipo, e inespecificaciones convenientes del contrato, habrían permitido que FB ganara poder de renegociación, invirtiendo la situación inicial de *hold up* [11]. Finalmente, se presume que el conflicto implicó la compra de Fisher Body por parte de General Motors.

Si bien existe discusión sobre la existencia de *hold up* tras el contrato a largo plazo entre General Motors y Fisher Body [2], el caso ilustra el fuerte desincentivo a la inversión que genera el problema de compromiso, requiriendo que se establezcan contratos complejos, los cuales no necesariamente dan lugar a acuerdos eficientes. Esta idea es respaldada en 2002 por Baker, Gibbons y Murphy [7], quienes prueban que existen situaciones en donde el problema de *hold up* no solo puede aumentar la tentación a renegar de contratos relacionales, sino que impide que se lleve a cabo el contrato relacional más eficiente que las partes podrían sostener. Más aún, se llega a la conclusión de que el problema de compromiso no solo tiene un efecto adverso a la inversión y la eficiencia de los acuerdos, si no que también puede generar el efecto contrario, facilitando contratos relacionales

superiores.

Consecuentemente, es pertinente estudiar condiciones propicias que generen incentivos incitando a la inversión y que den lugar a una mayor cantidad de acuerdos en situaciones de esta naturaleza. El presente documento estudia una situación de *hold up* entre dos individuos, Principal y Agente. Ambos conforman una empresa a la que ofertan proyectos, en donde el Agente recibe un sueldo fijo. Cuando reciben un proyecto, el Principal debe decidir si invertir o no en él. En caso de no invertir, ambos individuos reciben pagos nulos. Si la inversión se lleva a cabo, el Agente puede ejecutar o no ejecutar el proyecto. En el primer caso, el Principal recibe una ganancia positiva, mientras que en el segundo, este pierde la inversión. El conflicto de incentivos nace de lo siguiente: la ejecución de proyectos tiene un costo de esfuerzo asociado. Como el Agente recibe un sueldo fijo, este siempre querrá eludir el costo de esfuerzo y no ejecutar. Es decir, esta es una situación de *hold up*, en donde no existen incentivos para la inversión.

Ahora bien, si se considera que este escenario fijo se repite indefinidamente, la lectura de los incentivos puede diferir. Si bien el Agente siempre querrá eludir el costo de esfuerzo, no ejecutar podría desincentivar inversiones en futuros proyectos, privándolo de obtener pagos superiores a largo plazo. Se enriquece el modelo incorporando dos posibles estados de la naturaleza asociados a la calidad del proyecto, y que son información exclusiva del Agente. Un estado corresponde a proyectos cuyo costo de esfuerzo es *alto*, mientras el otro estado involucra un costo *bajo*. Para dar incentivos al Agente de participar, se supone que el sueldo es al menos mayor que el costo bajo de los proyectos. En este esquema, el problema de compromiso es sutil. La dificultad del Principal es la incompletitud de su información, ya que no conoce la calidad de los proyectos, y debe asumir el riesgo de perder la inversión. Luego, solo puede tomar decisiones en función del resultado de las interacciones pasadas, amenazando con no invertir si no se ejecutan suficientes proyectos. El Agente en cambio, debe ejecutar lo suficiente para perpetuar la inversión, sacrificando eventuales costos altos de esfuerzo. En este contexto, en donde la situación estática posee un único equilibrio de pagos nulos, se dice que los agentes cooperan si es posible generar pagos en el largo plazo que sean positivos. ¿Existen condiciones bajo las cuales puede haber cooperación?

Existe una extensa gama de problemas económicos que consisten en la repetición de una situación estratégica fija (*juego base*), llamados *juegos repetidos*. En este marco, el valor del tiempo usualmente está representado por un factor de descuento intertemporal $\delta \in (0, 1)$, el cual pondera los pagos en los periodos futuros, y es común a todos los jugadores. El factor de descuento afecta en gran medida la posibilidad de cooperación, pues cuantifica la disposición a esperar situaciones favorables en el largo plazo. Esto es capturado por un resultado conocido como '*Folk Theorem*'. Sin entrar en detalles, el teorema establece que es posible obtener cualquier pago razonable del juego base a través de un *equilibrio perfecto en subjuegos* del juego repetido, siempre que los jugadores sean suficientemente pacientes ($\delta \approx 1$). Que el pago de un jugador sea razonable, quiere decir que es obtenido si este escoge acciones maximizando su beneficio, teniendo en cuenta las acciones del resto de los jugadores. Cuando los individuos juegan de esta forma, se dice que son *individualmente racionales*. Notar que el *Folk Theorem* es también un resultado

de eficiencia, en el sentido de que es posible obtener pagos *Pareto-optimales*.

Aún cuando el teorema muestra condiciones en donde la cooperación siempre puede ocurrir, este depende de dos supuestos fundamentales: los jugadores no poseen información privada (*Información Completa*) y todas las acciones del juego son observables (*Información Perfecta*). Intuitivamente, la importancia de estos supuestos radica en que la existencia de incentivos está relacionada con la capacidad de los jugadores de aprender de la historia y castigar 'trampas' o desviaciones a los acuerdos (por ejemplo, ver Kandori (1992) [10] para Información Imperfecta y M.O.Jackson, H. Sonnenschein (2007) para Información Incompleta [12]). No obstante, D. Fudenberg y E. Maskin (1986)[6], y posteriormente D. Fudenberg, D. Levine y E. Maskin (1994)[5], han demostrado resultados similares al *Folk Theorem*, tanto para juegos con Información Incompleta como para juegos con Información Imperfecta con *señales públicas*, respectivamente. Resultados que son válidos para modelos de *oligopolio*, *Agente-Principal*, *diseño de mecanismos* y juegos de sociedad. El primero utiliza la noción de *equilibrio secuencial*, mientras que el segundo de *equilibrio público perfecto*. En ambos trabajos se encuentran condiciones tales que cualquier perfil de pagos individualmente racional puede aproximarse por pagos resultantes de Equilibrios en el juego repetido, siempre que los jugadores sean suficientemente pacientes.

Podemos decir, entonces, que la magnitud del descuento δ afecta el conjunto de pagos alcanzables a través de Equilibrios, ampliándolo a la vez que δ se aproxima a 1. Se ha dicho que esto se interpreta como que los jugadores se hacen suficientemente pacientes, mas no es su única interpretación. Considere que el juego transcurre en tiempo continuo, y las interacciones entre jugadores suceden en intervalos de tiempo $\Delta > 0$. Es usual escribir el factor de descuento como $\delta = e^{-r\Delta}$, donde $r > 0$ es la *tasa de interés* intertemporal. La interpretación de esto es que si la interacción entre los jugadores se hace muy frecuente, entonces el descuento entre periodos debiese ser pequeño. Luego, $\delta \approx 1$ puede ser visto tanto como $\Delta \approx 0$ o bien $r \approx 0$. En el modelo regular del *Folk Theorem* con Información Perfecta y completa ambas interpretaciones son equivalentes. Sin embargo, en otras condiciones el resultado puede ser engañoso.

En el modelo planteado por D. Fudenberg (1994) [5], las acciones de los demás jugadores no son observables, si no que una señal ruidosa pública es generada a partir de ellas. Esta señal sí es observada por todos los jugadores y se plantean estrategias en función de ellas. Al hacerse pacientes, los individuos tienen incentivos a esperar y aprender de las acciones del resto en función de la historia de señales. Este resultado debe interpretarse como jugadores suficientemente pacientes en cuanto $r \approx 0$. Dilip Abreu, Paul Milgrom y David Pearce (1991) [4] exploran la diferencia entre reducir Δ y r en juegos repetidos con Información Imperfecta, en donde el largo del periodo entre interacciones se presenta en dos sentidos: (1) el tiempo en que las acciones de los jugadores permanecen fijas, (2) el número de periodos de demora en que la señal se reporta. Siguiendo la lógica de los resultados anteriores, la capacidad de responder rápidamente a las acciones del resto de los jugadores aumentaría la posibilidad de cooperación. Esto es cierto en presencia de Información Perfecta [4], y tanto reducir la tasa de interés, como acortar el tiempo de acciones fijas y aumentar la frecuencia en que las señales son recibidas, tienen el mismo efecto. En Información Imperfecta el primer resultado tiene el efecto contrario a los últi-

mos dos. Reducir la tasa de interés a cero permite Equilibrios asintóticamente eficientes (del mismo modo que en Fudenberg (1994), mientras que acortar el periodo en que las acciones permanecen fijas, puede eliminar cualquier posibilidad de cooperación. Por último, demorar los reportes de información puede permitir mejores pagos en equilibrio. La diferencia entre ambos cambios es que, bajo monitoreo imperfecto, existe un segundo efecto: periodos cortos de acciones fijas y reportes frecuentes de información multiplican las formas en que los jugadores pueden desviarse, de forma conveniente, de las estrategias de equilibrio. Luego, resulta imposible proveer incentivos efectivos.

De lo anterior se desprende que en juegos con Información Perfecta, no solo importa la habilidad de los jugadores para ajustar sus acciones, sino también la temporalidad en que la información fluye. Más aún, en ocasiones, la reducción el periodo en que las interacciones ocurren puede afectar también la calidad de las señales emitidas. Si la señal se vuelve ruidosa, conforme Δ disminuye, entonces el efecto descrito anteriormente podría mitigarse. Esto, pues los jugadores no serán capaces de idear formas convenientes de desviarse del equilibrio. Luego, esto facilitaría la generación de incentivos. No obstante, nuevamente esta hipótesis podría ser engañosa. A. Skrzypacz y Y. Sannikov (2007) [1] estudian un duopolio, en donde las firmas compiten en cantidades producción de un bien homogéneo, observando precios como señal ruidosa de la dotación agregada en esta economía. El tiempo transcurre de forma continua y las firmas toman decisiones en intervalos de tiempo $\Delta > 0$. En este modelo, la varianza del ruido del precio observado aumenta conforme $\Delta \approx 0$. Se demuestra que, cuando la frecuencia de interacciones aumenta, se vuelve imposible que las firmas se coludan en orden de obtener pagos mayores al equilibrio de Nash del juego estático.

Según lo expuesto anteriormente, la distinción entre los efectos que ejerce la tasa de interés r y el periodo de interacción Δ importa. Cabe preguntarse cuál es el efecto de esta diferencia en juegos con *Información Incompleta*. Una característica que podría generar esta *discontinuidad* en los resultados se produce cuando la frecuencia de interacciones afecta la persistencia en los estados de la naturaleza del juego. Volviendo a la situación de *hold up* de interés, se sostuvo que la capacidad de cooperación entre las partes está mediada por la capacidad de los jugadores de esperar escenarios favorables en el futuro. En particular, supongamos que el Agente se enfrenta a un proyecto de costo alto en el primer periodo. Supongamos, además, que el costo de esfuerzo supera el valor del sueldo fijo que le es entregado. El Agente podría ejecutar el proyecto, pese a ser inconveniente, en orden de dar incentivos a la inversión, esperando futuros costos bajos. Si el estado de los costos es persistente, es decir, si la probabilidad de que lleguen proyectos de costo bajo es nula o muy baja, entonces el Agente no tendría incentivos a ejecutar, y no sería posible la cooperación. Luego, las transiciones entre estados podrían afectar la existencia de pagos no nulos en el juego repetido.

Una primera aproximación para modelar las transiciones de estado es asumir que estos se dibujan de forma markoviana. Es decir, el costo de un proyecto en el periodo t solo depende del costo asociado al periodo $t - 1$. J. Escobar y J. Toikka (2013) [9] encontraron condiciones tales que, cuando el factor de descuento es cercano a uno, es posible alcanzar cualquier pago 'razonablemente alto' mediante *Equilibrios Bayesianos Perfectos*. Mayor detalle de estas condiciones es explicado a en el Capítulo 1. Se puede presumir, no obstante,

que la interpretación del factor de descuento puede dar cuenta de nuevas tensiones en un juego de esta naturaleza.

El modelo que se propone estudiar es la situación de *hold up* descrita entre Principal y Agente, cuando la realización de los costos es markoviana, y el largo del periodo Δ afecta la persistencia de la cadena de costos. En virtud del resultado de J. Escobar y J. Toikka (2013), emerge la pregunta fundamental que busca responder este trabajo de tesis: ¿Existe una diferenciación entre los efectos que genera la reducción de la tasa de interés r y el largo del periodo de interacciones Δ ?

Para ello se estudian dos tipos de estrategias. La primera, llamada *Rígida*, contempla dos posibles estados del juego. El Principal invertirá siempre y cuando el Agente ejecute todos los proyectos. En caso contrario, no existirá inversión por el resto del juego. La segunda, llamada *Garrote-Zanahoria*, busca una configuración conveniente para el Agente, dando incentivos suficientes para la inversión. Se otorga flexibilidad a la ejecución de proyectos, permitiéndole al Agente evadir el costo asociado cuando este es alto, asumiendo el castigo de una cantidad finita de periodos sin inversión (pagos nulos). Se buscan condiciones sobre los parámetros del juego tales que estas estrategias conformen *Equilibrios Bayesianos Perfectos*. Además, se examinan por separado los efectos de reducir r y Δ . Finalmente, se aborda el problema general. Se propone estudiar el conjunto de pagos de equilibrio del juego, caracterizándolo como un problema de programación lineal (para más detalles ver H.L. Cole, N. Kocherlakota [8] (2001) y D. Abreu, D. Pearce, E. Stacchetti (1986) [3]).

El objetivo de esta tesis es estudiar los efectos que generan la disminución de la tasa de interés ($r \approx 0$) y el aumento de la frecuencia de interacciones ($\Delta \approx 0$) en una situación de *hold up* repetida, en donde no existen incentivos (del juego base) para la inversión. Se busca relacionar estos efectos con condiciones que posibiliten la cooperación entre las partes, aportando a la comprensión de incentivos que generan *Equilibrios*. Esto, a través del estudio de las estrategias *Rígida* y *Garrote-Zanahoria*. Finalmente, se busca proponer una metodología que aborde el problema general del conjunto de pagos de Equilibrios, permitiendo explorar los efectos descritos anteriormente.

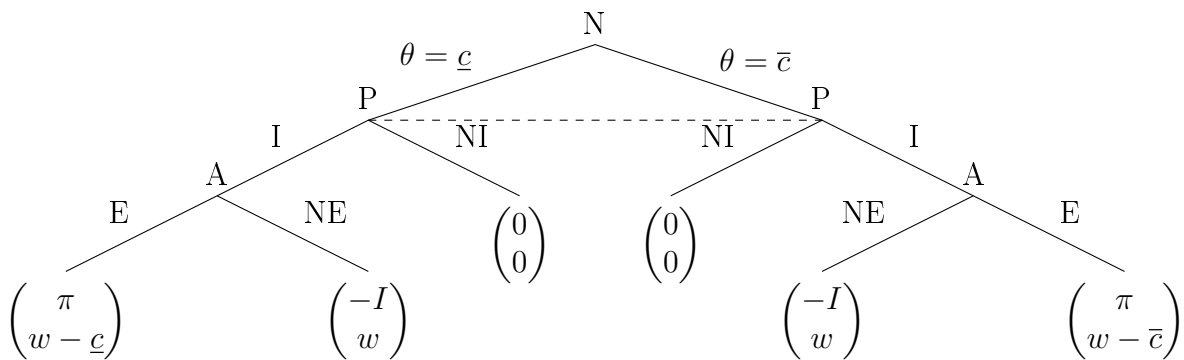
El resto del documento se ordena como sigue. El Capítulo 1, da cuenta del modelo del juego repetido sobre el cual se desarrolla el trabajo. Se describe la estructura de información y el espacio temporal en el que los jugadores interactúan. Además se establecen definiciones y notación necesarias para comprender los resultados. En el Capítulo 2 se analizan los equilibrios *Rígido* y *Garrote-Zanahoria*. El análisis de incentivos y las condiciones de equilibrio se muestra en las secciones 2.1.2 y 2.2.2. En la sección 2.3 se discuten los resultados obtenidos en ambas estrategias. Por último, el caso general se aborda en el Capítulo 3.

Capítulo 1

Modelo

1.1. Juego base G

Consideremos dos jugadores, P (principal) y A (agente), que conforman una empresa que realiza proyectos. El estado de la naturaleza $\theta \in \Theta = \{\underline{c}, \bar{c}\}$, con $\underline{c} < \bar{c}$ representa el costo del proyecto (bajo o alto) y constituye información privada para el agente A . Luego de la realización de la naturaleza, P decide si invertir o no, mientras que, dado que P invierte, A debe decidir si ejecutar o no el proyecto, es decir, se eligen acciones en los conjuntos $S_P = \{I, NI\}$ y $S_A = \{E, NE\}$, respectivamente. Cuando P invierte, recibe pagos $\pi > 0$, si se ejecuta el proyecto, y $-I < 0$, si no, mientras que A obtiene $w - c$, donde w es un sueldo fijo, y $c \in \{\underline{c}, \bar{c}\}$ es el costo de ejecución. Si P no invierte, entonces ambos jugadores reciben pagos cero. No existe comunicación entre los jugadores. Es decir, tenemos el siguiente juego en forma extensiva:



Definimos la función de utilidad $u : S = S_P \times S_A \rightarrow \mathbb{R}_+, \forall s = (s_P, s_A) \in S$:

$$u(s, c) = \begin{cases} (0, 0) & , \quad s_P = NI \\ (\pi, w - c) & , \quad (s_P, s_A) = (I, E) \\ (-I, w) & , \quad (s_P, s_A) = (I, NE) \end{cases}$$

1.2. Juego repetido $G^\infty(\delta)$

Consideremos ahora el juego G repetido infinitamente en periodos $t \in \{1, 2, \dots\}$, con factor de descuento $\delta \in (0, 1)$. Lo denotamos por $G^\infty(\delta)$. Es decir, cada periodo t se divide en las siguientes etapas:

- $t.1)$ La naturaleza juega $c_t \in \Theta$, cuyo valor se revela a A .
- $t.2)$ P juega una acción $s_P^t \in S_P$. Si $s_P^t = NI$, entonces ambos jugadores reciben pagos 0 y se continúa al periodo $t + 1$. Si $s_P^t = I$, se sigue a $(t.3)$.
- $t.3)$ El jugador A juega $s_A^t \in S_A$.
- $t.4)$ Los jugadores reciben pagos $u(I, s_A^t)$ y se continúa a $t + 1$.

Asumimos que el proceso de costos $(c_t)_{t=1}^\infty$ sigue una cadena de Markov (λ, \mathcal{P}) , donde la matriz de transición \mathcal{P} está dada por:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

con $p \in (0, 1)$, la probabilidad de repetir un costo dos turnos seguidos y λ es distribución inicial. Utilizamos la siguiente notación: para $c_1, c_2 \in \Theta$,

$$P(c_1|c_2) = \begin{cases} p & , \quad c_1 = c_2 \\ 1-p & , \quad \sim \end{cases}$$

En el modelo propuesto por J. Escobar y J. Toikka (2013) [9] una condición fundamental es la irreducibilidad de la Cadena de Markov que dibuja los *tipos* de los agentes. Esto implica que existe una única *distribución invariante* de la cadena. El resultado obtenido consiste en que cualquier perfil de pagos que *Pareto-domine* al valor *minmax* estacionario puede ser alcanzado por un *Equilibrio Bayesiano Perfecto* en el juego repetido. El *minmax* estacionario se interpreta como el menor valor esperado que un jugador paciente puede obtener, siendo individualmente racional. Estos resultados se aplican al modelo presentado en esta sección, ya que la cadena de costos P es irreducible.

1.2.1. Estructura intertemporal

El tiempo transcurre en forma continua. Se contemplan dos escenarios: uno en donde los jugadores toman decisiones en periodos discretos, es decir, en intervalos de tiempo $\Delta > 0$, y otro en donde las decisiones se toman de forma continua, esto es, cuando $\Delta \approx 0$. La dinámica de interés para la situación de *hold up* ocurre cuando variaciones en Δ afectan la persistencia de la información. Para ello, se asume que costos son realizaciones de un proceso estocástico continuo, cuya transición entre estados estará dada por un proceso de Poisson de parámetro λ , $\{N(t) : t \geq 1\}$. Es decir,

$$\mathbb{P}(N(\Delta) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Por lo tanto, la tasa esperada de cambios está dada por λ , mientras que $\frac{1}{\lambda}$ corresponde al tiempo esperado que transcurre entre cada cambio de estado. Suponemos que la cantidad esperada de cambios es a lo más uno, es decir, $\Delta\lambda < 1$. En consecuencia, la probabilidad de que el costo persista en un mismo estado, en un intervalo de tiempo Δ es:

$$\mathbb{P}(N(\Delta) = 0) = e^{-\lambda\Delta} \approx 1 - \lambda\Delta.$$

En general, nos interesa el caso en que Δ es pequeño, por lo que se asume que la probabilidad de persistir en un estado de la cadena es $p = 1 - \lambda\Delta$. Luego, cuando Δ se aproxima a cero, la persistencia de la cadena aumenta, es decir, $p \approx 1$.

Dada la temporalidad recién descrita, escribimos el factor de descuento $\delta = e^{-r\Delta}$ en función de una tasa de interés $r > 0$ y Δ . En las secciones siguientes se analizan por separado los efectos de la reducción de la tasa de interés y el aumento en la frecuencia de interacciones del juego.

1.2.2. Historias

Distinguimos dos tipos de historias, pública y privada.

- **Historia pública:** Para cada periodo t del juego, definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} H^1 &= \emptyset \\ H^t &= (\{NI\} \cup (\{I\} \times S_A))^{t-1}, \quad t \geq 2. \end{aligned}$$

Es decir, una historia pública $h_t \in H^t$ es una secuencia de $t - 1$ perfiles de acciones del juego.

- **Historia privada:** Definimos la historia privada del jugador A , en el periodo t , como las secuencias de realizaciones de costos hasta el periodo t : Θ^t .

La historia individual de los P y A , respectivamente, en el periodo t está dada por:

$$\begin{aligned} H_P^t &= H^t, \\ H_A^t &= H^t \times \Theta^t, \end{aligned}$$

Por último, definimos el conjunto de historias del juego $G^\infty(\delta)$ como

$$H^\infty = ((\{NI\} \cup (\{I\} \times S_A)) \times \Theta)^\mathbb{N}$$

1.2.3. Estrategias

Una **estrategia de comportamiento** para P y A , respectivamente, es una secuencia de funciones $\sigma_P = (\sigma_P^t)_{t \geq 1}$, $\sigma_A = (\sigma_A^t)_{t \geq 1}$,

$$\begin{aligned}\sigma_P^t &: H^t \rightarrow \Delta(S_P), \\ \sigma_A^t &: H^t \times \Theta^t \rightarrow \Delta(S_A).\end{aligned}$$

Es decir, una estrategia para $i \in \{P, A\}$ asigna a cada historia individual una distribución de probabilidad sobre su conjunto de acciones S_i . Decimos que la estrategia σ_i , con $i \in \{P, A\}$, es **pura** si $\forall t \geq 1, \forall h^t \in H_i, \text{sop}(\sigma_i^t(h^t)) \in S$.

Dada una historia pública $h^s \in H^s$ y una historia privada $c^{s-1} \in \Theta^{s-1}$, denotamos las estrategias σ_P y σ_A condicionales a h^s y a (h^s, c^{s-1}) , respectivamente, por $\sigma_P|_{h^s}$ y $\sigma_A|_{(h^s, c^{s-1})}$. Es decir, $\sigma_P|_{h^s} = (\sigma_P^t|_{h^s})_{t \geq s}$, $\sigma_A|_{(h^s, c^{s-1})} = (\sigma_A^t|_{(h^s, c^{s-1})})_{t \geq s}$, con

$$\begin{aligned}\sigma_P^t|_{h^s} &: H^{t-s+1} \rightarrow \Delta(S_P) \\ \sigma_A^t|_{(h^s, c^{s-1})} &: H^{t-s+1} \times \Theta^{t-s+1} \rightarrow \Delta(S_A)\end{aligned}$$

tales que, $\forall h^{t-s+1} \in H^{t-s+1}, c^{t-s+1} \in \Theta^{t-s+1}$,

$$\begin{aligned}\sigma_P^t|_{h^s}(h^{t-s+1}) &= \sigma_P^t(h^s, h^{t-s+1}), \\ \sigma_A^t|_{(h^s, c^{s-1})}(h^{t-s+1}, c^{t-s+1}) &= \sigma_A^t((h^s, h^{t-s+1}), (c^{s-1}, c^{t-s+1}))\end{aligned}$$

Se tiene que la definición es consistente, pues $(h^s, h^{t-s+1}) \in H^t$, $(c^{s-1}, c^{t-s+1}) \in \Theta^t$.

Decimos que $\sigma = (\sigma_P, \sigma_A)$ es **perfil de estrategias de comportamiento** y denotamos, $\forall h^t \in H^t, c^t \in \Theta^t$, $\sigma^t(h^t, c^t) = (\sigma_P^t(h^t), \sigma_A^t(h^t, c^t))$ al perfil de acciones que asigna el perfil σ en el tiempo t , dada la historia (h^t, c^t) . Tenemos que todo perfil induce una distribución de probabilidad sobre los caminos del juego repetido $G^\infty(\delta)$, es decir, sobre el conjunto H^∞ . Más aún, si el perfil es puro, para cada secuencia de costos $c^s = \{c_i\}_{i=1}^s \in \Theta^s$, este induce un camino único de largo s , $h(\sigma; c^s) \in H^{s+1}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}h^2(\sigma; c_1) &= \sigma^1(\emptyset, c_1) \\ h^{t+1}(\sigma; c^t) &= (h^t(\sigma; c^{t-1}), \sigma^t(h^t(\sigma; c^{t-1}); c^t)),\end{aligned}$$

con $c^t = (c_i)_{i=1}^t$, $t \in \{2, \dots, s\}$. Por último, denotamos $\sigma^t(c^t) = \sigma^t(h^t(\sigma; c^{t-1}), c^t)$ al perfil de acciones en el tiempo t que asigna σ , dada la secuencia de costos c^t .

1.2.4. Creencias

Una **creencia** (pública) de P sobre A es una secuencia de funciones $\mu = (\mu^t)_{t \geq 1}$ tales que $\mu^t : H^t \rightarrow \Delta(\Theta^t)$. Esto es, para cada periodo t , $\mu^t(\cdot|h^t) := \mu^t(h^t)(\cdot)$ asigna una distribución de probabilidad sobre el conjunto de historias de información privada de A hasta t (incluyéndolo), dado que ocurrió la historia $h^t \in H^t$. Una creencia representa la forma en que P aprende de la información privada de A a través de la historia pública del juego.

Dado un perfil de estrategias de comportamiento σ , el par (σ, μ) es llamado **evaluación**. Decimos que μ se actualiza de forma bayesiana, conforme a σ , si en cada periodo t , $\forall h^t \in H^t$, $c^{t+1} = (c_i)_{i=1}^{t+1} \in \Theta^{t+1}$, entonces:

- Para todo perfil de acciones $a = a_A \in S$ tal que existe $\tilde{c}^t \in \Theta^t$ para el cual $\sigma_A^t(h^t, \tilde{c}^t)(I, a_A) > 0$,

$$\mu^{t+1}(c_{t+1}, c^t|h^t, (I, a_A)) = \frac{\sigma_A^t(h^t, c^t)(a_A)\mu^t(c^t|h^t)P(c_{t+1}|c_t)}{\sum_{\tilde{c}^t \in \Theta^t} \sigma_A^t(h^t, \tilde{c}^t)(a_A)\mu^t(\tilde{c}^t|h^t)}.$$

- Si $a = NI$ o bien $a = (I, a_A)$ es tal que $\sigma_A^t(h^t, \tilde{c}^t) = 0$, $\forall \tilde{c}^t \in \Theta^t$,

$$\mu^t(c^{t+1}|h^t, a) = \mu(c^t|h^t)P(c_{t+1}|c_t).$$

1.2.5. Pagos

Consideremos un perfil de estrategias $\sigma = (\sigma^t)_{t \geq 1}$. Denotemos por $\bar{u}_i(\sigma^t; c^t)$ al pago esperado que recibe el jugador i en el periodo t cuando el juego se desarrolla conforme a σ y la realización de costos $c^t \in \Theta^t$. Esto es:

$$\bar{u}_i(\sigma^t; c^t) = \mathbb{E} [u_i(\sigma^t(c^t))],$$

donde la esperanza se toma con respecto a la distribución que induce σ sobre H^t , cuando la realización de costos es c^t .

Dada una evaluación, los pagos del juego $G^\infty(\delta)$ corresponden la suma descontada esperada de los pagos de cada periodo, cuando la creencia de P evoluciona de acuerdo a μ , y el proceso de costos evoluciona según la matriz de transición \mathcal{P} : En general, los pagos de continuación del juego, condicional a una historia pública h^s y una historia privada $c^s = (c^{s-1}, c_s) \in \Theta^s$, está dado por:

$$U_P(\sigma; \mu|h^s) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \bar{u}_P(\sigma^t; c^t) \right],$$

donde la esperanza está tomada con respecto a la cadena $(\mu(h^s), P)$, y

$$U_A(\sigma; \mu|h^s, c^s) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \bar{u}_P(\sigma^t; c^t) \middle| c^s \right].$$

En particular, si σ es perfil de estrategia pura, entonces:

$$\begin{aligned} U_P(\sigma; \mu|h^s) &= \sum_{(c_k)_{k=1}^{\infty} \in \Theta_{k=1}^{\infty}} \sum_{t=s}^{\infty} \delta^{t-1} u_P \left(\sigma^t \middle|_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \mu((c_k)_{k=1}^s | h^s) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k), \\ U_A(\sigma; \mu|h^s, c^s) &= \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \sum_{t=s}^{\infty} \delta^{t-1} u_A \left(\sigma^t \middle|_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k), \end{aligned}$$

Por último, denotamos los pagos de continuación del jugador i , dada la historia del juego repetido $(h^s, c^s) \in H^s \times \Theta^s$, por

$$v_i(\sigma; \mu|h^s, c^s) = \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \sum_{t=s}^{\infty} \delta^{t-1} u_i \left(\sigma^t \middle|_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k),$$

Siempre que no haya confusión, se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} v_i(h^s, c^s) &:= v_i(\sigma; \mu|h^s, c^s), \\ v_i(c_1) &:= v_i(\sigma; \mu|\emptyset, c_1). \end{aligned}$$

Observación Sea (σ, μ) una evaluación. En primer lugar, notar que:

$$U_P(\sigma; \mu|h^s) = \sum_{c^s \in \Theta} \mu(c^s | h^s) v_P(\sigma; \mu|h^s, c^s)$$

Además, para cualquier jugador i ,

$$v_i(\sigma; \mu | h^s, c^s) = \delta^{s-1} u_i \left(\sigma^s |_{(h^s, c^{s-1})} (c_s) \right) + \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^t \in \Theta_{k=s+1}^t} \delta^{t-1} u_i \left(\sigma^t |_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{t-1} P(c_{k+1} | c_k).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} v_i(\sigma; \mu | h^s, c^s) &= \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \sum_{t=s}^{\infty} \delta^{t-1} u_i \left(\sigma^t |_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) \\ &= \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \delta^{s-1} u_i \left(\sigma^s |_{(h^s, c^{s-1})} (c_s) \right) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) \\ &\quad + \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \delta^{t-1} u_i \left(\sigma^t |_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) \\ &= \delta^{s-1} u_i \left(\sigma^s |_{(h^s, c^{s-1})} (c_s) \right) \left(\sum_{(c_k)_{k=s+1}^{\infty} \in \Theta_{k=s+1}^{\infty}} \prod_{k=s}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) \right) \\ &\quad + \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^t \in \Theta_{k=s+1}^t} \delta^{t-1} u_i \left(\sigma^t |_{(h^s, c^{s-1})} ((c_k)_{k=s}^t) \right) \prod_{k=s}^{t-1} P(c_{k+1} | c_k) \cdots \\ &\quad \cdots \left(\sum_{(c_k)_{k=t+1}^{\infty} \in \Theta_{k=t+1}^{\infty}} \prod_{k=t}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) \right) \end{aligned}$$

Y como $\forall t \geq 1$, $\sum_{(c_k)_{k=t+1}^{\infty} \in \Theta_{k=t+1}^{\infty}} \prod_{k=t}^{\infty} P(c_{k+1} | c_k) = 1$, se concluye.

1.3. Equilibrio

Decimos que una evaluación (σ, μ) es **secuencialmente racional** si para todo perfil de estrategia $\tilde{\sigma}$, $\forall h^s \in H^s$, $c^s \in \Theta^s$,

$$\begin{aligned} U_P(\sigma; \mu | h^s) &\geq U_P((\tilde{\sigma}_P, \sigma_A); \mu | h^s), \\ U_A(\sigma; \mu | h^s, c^s) &\geq U_A((\sigma_P, \tilde{\sigma}_A); \mu | h^s, c^s). \end{aligned}$$

En el presente trabajo se utilizará la noción de equilibrio definida a continuación:

Definición (Equilibrio Bayesiano Perfecto). Una evaluación (σ, μ) es un EBP si y sólo si es secuencialmente racional y el sistema de creencias μ se actualiza de forma Bayesiana con respecto a σ .

1.3.1. Equilibrio y estrategias públicas

Un perfil de estrategias de comportamiento $\sigma = (\sigma_P, \sigma_A)$ se dice **semipúblico**, si σ_A depende de la historia pública y únicamente de la realización del costo en el turno actual. Es decir, que $\forall t \geq 1, h_t \in H^t, c^{t-1}, \hat{c}^{t-1} \in \Theta^{t-1}, c_t \in \Theta$:

$$\sigma_A^t(h_t, (c^{t-1}, c_t)) = \sigma_A^t(h_t, (\hat{c}^{t-1}, c_t))$$

Dada una estrategia semipública σ , se utilizará el siguiente abuso de notación: $\forall h^t \in H^t, (c^{t-1}, c_t) \in \Theta^t$,

$$\begin{aligned} \sigma_A^t(h^t, c_t) &:= \sigma_A^t(h^t, (c^{t-1}, c_t), \\ \sigma_A|_{h^t} &:= \sigma_A|_{(h^t, c^{t-1})}, \\ \sigma|_{h^t} &:= \sigma|_{(h^t, c^{t-1})}, \\ v_i(\sigma; \mu|h^t, c_t) &:= v_i(\sigma; \mu|h^t, c^t), \forall i. \end{aligned}$$

Se dirá que una evaluación (σ, μ) es un **EBP semipúblico**, si (σ, μ) es EBP, y si σ es una estrategia semipública.

Dado que, en un estrategia semipública, las acciones a realizar por el jugador A dependen únicamente de su información privada en el periodo presente, entonces es natural pensar en que para P es suficiente desarrollar un sistema de creencias sobre el costo en el periodo actual, sin considerar la historia completa de costos. Esto es, en efecto, una consecuencia de la definición anterior. Se tiene que todo sistema de creencias μ induce una secuencia de distribuciones sobre Θ de la siguiente manera: $\forall t \geq 1, h^s \in H^s, c_t \in \Theta$,

$$\mu^t(c_t|h^s) := \sum_{c^{t-1} \in \Theta^{t-1}} \mu^t(c^{t-1}, c_t|h^s).$$

Con esto, para (σ, μ) evaluación semipública, es fácil ver que la utilidad de P se reescribe como sigue:

$$U_P(\sigma; \mu|h^s) = \sum_{c_s \in \Theta} \mu(c_s|h^s) v_P(\sigma; \mu|h^s, c_s)$$

Es decir, al principal le basta conjeturar creencias sobre el costo en el periodo actual, en lugar de la historia de costos pasados. En virtud de la naturaleza markoviana de la información, la noción de equilibrio que se utiliza en las siguientes secciones es la de *Equilibrio Bayesiano Perfecto Semipúblico*.

Capítulo 2

Análisis de Equilibrios

A continuación, se estudian dos tipos de estrategias, para las cuales se buscan condiciones sobre los parámetros del juego de modo que estas resulten ser EBP públicos. La primera, que llamamos *Rígida*, consiste en que ambos individuos colaboran siempre y cuando ninguno traicione al otro. En términos precisos, el jugador P invertirá siempre y cuando A haya ejecutado en cada periodo de la historia del juego. Recíprocamente, A ejecutará siempre que P haya invertido en cada periodo de la historia del juego. En caso contrario, si alguno de los jugadores no colabora, entonces se jugará el equilibrio de Nash el resto de los turnos. La estrategia también puede interpretarse de la siguiente forma: el Principal confiará en el Agente siempre y cuando este ejecute, si este último no ejecuta, entonces P impone un castigo de pagos nulos de forma indefinida. Notar que esta estrategia favorece al Principal, pues en equilibrio, este obtendrá utilidad en todos los periodos. Para el Agente en cambio, representa un mal equilibrio, pues tiene que asumir el costo de inversión en cada periodo, independientemente si este es alto o bajo.

La segunda estrategia es del tipo *Garrote-Zanahoria*. Al igual que en la estrategia *Rígida*, el Principal invierte en cada periodo hasta que el Agente no ejecute. Sin embargo, P no impondrá un castigo de forma indefinida, sino que por una cantidad finita de periodos, de modo de reanudar la inversión luego de K turnos. Este equilibrio es más conveniente para el Agente, pues puede optar por no ejecutar y asumir el castigo, si el beneficio de ahorrarse el costo de ejecución es más grande que recibir pagos nulos durante K periodos. A la vez, es un peor equilibrio para el Principal, pues da la oportunidad al Agente de no ejecutar, y además tampoco recibe pagos positivos al imponer el castigo. Por otro lado, la interpretación del comportamiento del Principal es que cada vez que no se ejecute un proyecto, este supone que el costo del proyecto en tiempo presente es alto, y teniendo en cuenta que $p > \frac{1}{2}$, la magnitud del castigo debe ser lo suficientemente grande, de modo de que la probabilidad de transición a un estado bajo sea la adecuada.

Es importante notar que K está determinado por la paciencia del jugador P y por la persistencia de la cadena de Markov. Para facilitar el análisis de incentivos, supondremos que el Principal es impaciente, es decir, le interesa únicamente el periodo presente. Esto se traduce en que, dada una evaluación (σ, μ) , la utilidad de P está dada por:

$$U_P(\sigma; \mu|h^s) = \mu(\underline{c}|h^s)u_P(\sigma^s(h^s, \underline{c})) + \mu(\bar{c}|h^s)u_P(\sigma^s(h^s, \bar{c}))$$

Esto supone restricciones estrictas sobre los incentivos de P , pues el castigo debe ser lo suficientemente largo de modo que permita variabilidad, pero lo suficientemente corto para no tener incentivos al desvío antes de que finalice. La *Proposición 2.1* establece condiciones tales que la estrategia *Rígida* es un EBP público, en los dos escenarios de interés que se introducen anteriormente. De forma análoga, las *Proposiciones 2.5* y *2.6* muestran cuándo la estrategia *Garrote-Zanahoria* es equilibrio, cuando $r \rightarrow 0$ y $\Delta \rightarrow 0$, respectivamente.

Adicionalmente, se buscan diferencias en los efectos que generan la disminución de la tasa de interés r y el tiempo del intervalo entre periodos Δ . Es de interés estudiar el resultado límite cuando ambas variables son pequeñas. En este sentido, se habla de tiempo continuo, cuando se toman valores pequeños de $\Delta < \Delta(r)$ relativos a tasas de interés r . Recíprocamente, hablamos de resultados en tiempo discreto cuando se toman valores pequeños de $r < r(\Delta)$ relativos a intervalos de tiempo Δ . En otras palabras, se hace la diferencia de tomar los límites iterados $\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0}$ (tiempo continuo) y $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0}$ (tiempo discreto).

2.1. Equilibrio Rígido

Definición

Consideremos la siguiente evaluación $(\sigma, \mu): \forall t \geq 1, h^t \in H, c_t \in \Theta$,

$$\begin{aligned} \sigma^1(c_1) &= (I, E), \\ \sigma_P^t(h^t, c_t) &= \begin{cases} NI & , \quad \exists l < t, (h^t)_s \neq (I, NE) \\ I & , \quad \sim \end{cases} \\ \sigma_P^t(h^t, c_t) &= \begin{cases} NE & , \quad \exists l < t, (h^t)_s \neq (I, NE) \\ E & , \quad \sim \end{cases}, \end{aligned}$$

con sistema de creencias $\mu^1 = \mu, \mu^{t+1}(c_{t+1}|h^{t+1}) = \sum_{c \in \Theta} \mu^t(c|h^t)P(c_{t+1}|c)$, con $(h^{t+1})_{k=1}^{t+1} = h^t$.

2.1.1. Pagos de continuación

Se desea encontrar condiciones sobre los parámetros del juego, de modo que (σ, μ) sea EBP. En primer lugar, calculemos los pagos de continuación. Notar que para cualquier historia que reporta un perfil de acciones no copertativo, i.e distinto de (I, E) , generará pagos nulos para todo tiempo posterior. Ahora bien, si $h^s \in H^s$ es tal que $(h^s)_t = (I, E)$, $\forall t < s$, es fácil ver que:

$$\sigma^t(h^s, (c_k)_{k=s}^t) = (I, E), \quad (2.1)$$

$\forall t > s, (c_k)_{k=s}^t \in \Theta_{k=s}^t$. Por lo tanto, los pagos de continuación, dada cualquier historia en el camino del equilibrio, son siempre los mismos, pues la estrategia es constante. Esto quiere decir que:

$$v_A(\underline{c}) = (w - \underline{c}) + \delta(pv_A(\underline{c}) + (1-p)v_A(\bar{c})), \quad (2.2)$$

$$v_A(\bar{c}) = (w - \bar{c}) + \delta((1-p)v_A(\underline{c}) + pv_A(\bar{c})). \quad (2.3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$v_A(\underline{c}) = \frac{(1-\delta p)(w - \underline{c}) + \delta(1-p)(w - \bar{c})}{(1-\delta p)^2 - \delta^2(1-p)^2} \quad (2.4)$$

$$v_A(\bar{c}) = \frac{(1-\delta p)(w - \bar{c}) + \delta(1-p)(w - \underline{c})}{(1-\delta p)^2 - \delta^2(1-p)^2} \quad (2.5)$$

2.1.2. Secuencialidad Racional

Condición de Optimalidad

Se procede, entonces, a establecer la condición de optimalidad que define la secuencialidad racional en función de $v_A(\underline{c})$ y $v_A(\bar{c})$. Dado un perfil $\tilde{\sigma}$ puro, denotamos por $\tilde{\sigma}_{i,s}$ a la estrategia que para cualquier historia asigna las mismas acciones que σ_i , con una única desviación en s (como $|S_i| = 2$, se subentende se omite la acción a la cual se desvía). Luego, el **principio de desviación única** establece que (σ, μ) es secuencialmente racional si $\forall h^s \in H^s, c_s \in \Theta$:

$$\begin{aligned} U_P(\sigma; \mu | h^s) &\geq U_P((\sigma_{P,s}, \sigma_A; \mu | h^s), \\ U_A(\sigma; \mu | h^s) &\geq U_A((\sigma_P, \sigma_{A,s}; \mu | h^s). \end{aligned}$$

Es importante notar que para cualquier historia fuera del camino inducido por el perfil de estrategias, es decir, tal que exista un periodo pasado cuyo perfil de acciones asociado no sea (I, E) , en cada etapa posterior del juego se jugará el equilibrio de Nash. Luego, por definición de E.N, se cumple el principio de desviación única. En consecuencia, basta estudiar la historia que contiene únicamente perfiles (I, E) .

Sea $h^s \in H^s$ tal que $(h^s)_t = (I, E), \forall t \geq 1$. Luego, $\forall c_s \in \Theta$,

$$\begin{aligned}\sigma_{P(s)}^s(h^s) &= NI, \\ \sigma_{A(s)}^s(h^s, c_s) &= NE.\end{aligned}$$

Luego, para ambas desviaciones, todos los pagos posteriores a s son nulos, de modo que la utilidad de las desviaciones se reduce a los pagos presentes, es decir,

$$\begin{aligned}U_P((\sigma_{P(s)}, \sigma); \mu | h^s) &= 0, \\ U_A((\sigma_P, \sigma_{A(s)}); \mu | h^s, c_s) &= w.\end{aligned}$$

Recordar que, para efectos de este análisis, la utilidad del Principal depende únicamente del tiempo presente, y dado que $U_P(\sigma; \mu | h^s) = \pi > 0$, en virtud del principio de desviación única, P es secuencialmente racional bajo (σ, μ) .

Para el Agente, en cambio, la utilidad es variable en función de su información privada, pues depende del costo de ejecución, y por lo tanto del proceso estocástico de la información. Tenemos las siguientes condiciones de optimalidad para A :

$$w \leq \frac{(1 - \delta p)(w - \underline{c}) + \delta(1 - p)(w - \bar{c})}{(1 - \delta p)^2 - \delta^2(1 - p)^2}, \quad (2.6)$$

$$w \leq \frac{(1 - \delta p)(w - \bar{c}) + \delta(1 - p)(w - \underline{c})}{(1 - \delta p)^2 - \delta^2(1 - p)^2}, \quad (2.7)$$

las cuales se analizan en detalle a continuación.

Incentivos al desvío

A modo de contexto, de la sección anterior se desprende que cuando el juego se encuentra en el camino inducido por la evaluación, el incentivo al desvío para el Agente, en un tiempo s , consiste en ahorrar el costo de ejecución c_s , condicional a que P invertirá en el periodo presente. Sin embargo, para que esto sea conveniente para A , este beneficio debe compensar que todos los pagos futuros sean nulos. Luego, entre más paciente sea, es decir, a medida que $\delta \rightarrow 1$, este tendrá menos incentivos a desviarse del camino de equilibrio, pues la ponderación del castigo será mayor. Sería natural esperar, entonces, que existan condiciones para que la evaluación sea equilibrio. Sin embargo, existen consideraciones adicionales. En primer lugar, al ser A infinitamente paciente, entonces no tendrá incentivos al desvío solo si la utilidad en el largo plazo es positiva. En segundo lugar, cuando el costo inicial es alto, la utilidad esperada a horizonte infinito se ve afectada por la persistencia de la cadena, lo que implica que un costo alto relativamente grande generaría incentivos al desvío.

El resultado Principal de esta sección se resume en la *Proposición 2.1*, en donde se muestran condiciones de equilibrio para ambos casos de interés: $r \rightarrow 0$, que corresponde a la parte (i) de la proposición, y $\Delta \rightarrow 0$, correspondiente a la parte (ii).

Proposición 2.1 *Dados $\delta = e^{-r\Delta}$, $p = 1 - \lambda\Delta$, con $r \in (0, 1)$ y $\lambda, \Delta > 0$ tales que $\lambda\Delta \leq 1$, entonces:*

(i) *Siempre que $w - \frac{(\bar{c} + \underline{c})}{2} > 0$, entonces $\forall \Delta \in (0, \frac{1}{\lambda})$, $\exists \bar{r}(\Delta) \in (0, 1)$ tal que $\forall r < \bar{r}(\Delta)$ se satisfacen las condiciones (2.6) y (2.7).*

(ii) *Siempre que*

$$(w - \underline{c})\frac{r}{\lambda} \geq - \left[w - \frac{(\bar{c} + \underline{c})}{2} \right], \quad (2.8)$$

$$(w - \bar{c})\frac{r}{\lambda} \geq - \left[w - \frac{(\bar{c} + \underline{c})}{2} \right], \quad (2.9)$$

entonces $\forall r \in (0, 1)$, $\exists \bar{\Delta}(r) > 0$ tal que $\forall \Delta < \bar{\Delta}(r)$ se satisfacen las condiciones (2.6) y (2.7), respectivamente. En particular, si $w - \frac{(\bar{c} + \underline{c})}{2} > 0$, entonces se satisface el resultado.

Se desprende del resultado, que siempre y cuando el pago esperado por un jugador paciente sea positivo, la disminución de la tasa de interés implica que la estrategia *Rígida* es equilibrio. Es decir, el Agente es capaz de sacrificar pagos presentes, ya que en el largo plazo obtendrá pagos positivos. Lo mismo ocurre cuando la frecuencia de interacción aumenta. Si $r \approx 0$, siempre que el pago esperado por el Agente en el largo plazo sea positivo, la estrategia *Rígida* será equilibrio si Δ es suficientemente pequeño. Por lo tanto, las dos interpretaciones de δ , a partir de r y Δ , son equivalentes para esta estrategia.

2.2. Equilibrio Garrote-Zanahoria

Definición

Formalmente, consideremos las funciones $\tau : H \rightarrow \mathbb{N}$, $\Delta\tau : H \rightarrow \mathbb{N}$, tales que $\forall t \geq 1, h^t \in H^t$,

$$\begin{aligned} \tau(h^t) &= \text{máx}\{s < t : (h^t)_s = (I, NE)\}, \\ \kappa(h^t) &= t - \tau(h^t), \end{aligned}$$

es decir, $\tau(h^t)$ corresponde al último periodo en que se realizó el perfil de acciones (I, NE) , dada la historia h^t , mientras que $\kappa(h^t)$ representa la cantidad de periodos siguientes, consecutivos, a partir de $\tau(h^t)$. A continuación, se presenta la evaluación in-

introducida anteriormente. Sea $K \in \mathbb{N}$ una cantidad de periodos fija, no nula. Luego, $\forall t \geq 1, h^t \in H^t, c_t \in \Theta$, definimos la estrategia:

$$\sigma_P^1(\emptyset) = I, \quad \sigma_P^t(h^t) = \begin{cases} NI & , \quad \kappa(h^t) < K \\ I & , \quad \sim \end{cases} \quad \text{si } t > 1,$$

$$\sigma_A^t(h^t, c_t) = \begin{cases} E & , \quad c_t = \underline{c} \\ NE & , \quad c_t = \bar{c} \end{cases}$$

y el sistema de creencias μ , tal que $\forall t > 1, h^t \in H^t$,

$$\mu^1(\emptyset) = \lambda, \quad \mu^t(\underline{c}|h^t) = \begin{cases} p & , \quad (h^t)_{t-1} = (I, E) \\ P^{\kappa(h^t)}(\underline{c}|\bar{c}) & , \quad \sim \end{cases} \quad \text{si } t > 1,$$

donde $P^t(c_f|c_i)$ es la probabilidad de transición de c_i a c_f , en t pasos. Es de utilidad recordar el siguiente resultado conocido de teoría espectral (cuya demostración se anexa): $\forall t \geq 1, c \in \Theta$,

$$P^t(c|c) = \frac{1}{2}(1 + (2p - 1)^t).$$

2.2.1. Pagos de continuación

Se procede a calcular los pagos de continuación de A , $v_A(h^s, c_s)$, para toda historia (h^s, c_s) del juego. Para realizar esto, es necesario entender los ciclos del juego. Como la estrategia del Agente es invariante en el tiempo, estos están determinados por la creencia de P sobre la información privada de A . Se tienen dos situaciones en el camino del equilibrio, la situación de colaboración (P invierte) y la de castigo (P no invierte). En colaboración, las estrategias futuras únicamente dependerán de la realización de costos en el tiempo presente y posteriores. En otras palabras, solo depende de que se ejecuten o no los proyectos que siguen. Esto implica que el comportamiento de P es idéntico bajo cualquier historia tal que P decide invertir. En una situación de castigo, las acciones posteriores solo dependen de cuántos periodos faltan para reanudar el castigo, pues a P solo le interesan las acciones de K periodos hacia el pasado. Esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.2 Sean $h^s \in H^s, h^l \in H^l$ tales que alguna de las siguientes condiciones se satisfacen:

$$(i) \quad (h^s)_{\max\{0, s-1-T\}}^{s-1} = (h^l)_{\max\{0, l-1-T\}}^{l-1},$$

$$(ii) \quad \sigma_P^s(h^s) = \sigma_P^l(h^l) = I.$$

entonces:

$$\sigma^{s+t}|_{h^s} = \sigma^{l+t}|_{h^l}, \quad \forall t \geq 1$$

De lo anterior, como los pagos de continuación solo dependen del nodo del juego en que se encuentran los individuos,

Proposición 2.3 *Sea $h^s \in H^s$ tal que $\sigma_P^s(h^s) = I$. Entonces $v_A(h^s, c) = \delta^{s-1}v_i(c)$, $\forall c \in \Theta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h^s \in H^s$ tal que $\sigma_P^s(h^s) = I$. Luego, como σ es semipública,

$$\begin{aligned} v_A(h^s, c_s) &= \delta^{s-1} \left\{ u_A(\sigma^s|_{h^s}(c_s)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^t \in \Theta_{k=s+1}^t} \delta^{t-s} u_A(\sigma^t|_{h^s}((c_k)_{k=s}^t)) \prod_{k=s}^{t-1} P(c_{k+1}|c_k) \right\} \\ &= \delta^{s-1} \left\{ u_A(\sigma^s|_{h^s}(c_s)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^t \in \Theta_{k=s+1}^t} \delta^{t-s} u_A(\sigma^{t-s+1}((c_k)_{k=s}^t)) \prod_{k=s}^{t-1} P(c_{k+1}|c_k) \right\} \\ &= \delta^{s-1} \left\{ u_A(\sigma^t|_{h^s}(c_s)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=s+1}^{t+s-1} \in \Theta_{k=s+1}^{t+s-1}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=s}^{t+s-1})) \prod_{k=s}^{t+s-2} P(c_{k+1}|c_k) \right\} \\ &= \delta^{s-1} v_i(c_s) \end{aligned}$$

□

A continuación, se obtiene un sistema de ecuaciones para $v_A(\bar{c})$ y $v_A(\underline{c})$. Notar que $\sigma_P^2|_{h(\underline{c})}(\emptyset) = \sigma_P^2(\underline{c}, c_2) = I$, $\forall c_2 \in \Theta$, pues $\sigma^1(\underline{c}) = (I, E)$. Luego:

$$\begin{aligned}
v_A(\underline{c}) &= u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^t \in \Theta_{k=2}^t \\ c_1 = \underline{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=1}^t)) \prod_{k=1}^{t-1} P(c_{k+1}|c_k) \\
&= u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^t \in \Theta_{k=2}^t \\ c_1 = \underline{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^{t-1}((c_k)_{k=2}^t)) \prod_{k=1}^{t-1} P(c_{k+1}|c_k) \\
&= u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \delta \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{t+1} \in \Theta_{k=2}^{t+1} \\ c_1 = \underline{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=2}^{t+1})) \prod_{k=1}^t P(c_{k+1}|c_k) \\
&= u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \delta \left\{ \sum_{c_2 \in \Theta} P(c_2|\underline{c}) \left(u_A(\sigma^1(c_2)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{t+1} \in \Theta_{k=2}^{t+1} \\ c_1 = \underline{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=2}^{t+1})) \prod_{k=2}^t P(c_{k+1}|c_k) \right) \right\} \\
&= u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \delta \sum_{c_2 \in \Theta} P(c_2|\underline{c}) v_i(c_2).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$v_A(\underline{c}) = u_A(\sigma^1(\underline{c})) + \delta(pv_A(\underline{c}) + (1-p)v_A(\bar{c})).$$

Por otro lado, como $\sigma^1(\bar{c}) = (I, NE)$, entonces P jugará NI por K periodos e invertirá en $K+1$. Siguiendo un procedimiento análogo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
v_A(\bar{c}) &= u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta^K \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{t+K} \in \Theta_{k=2}^{t+K} \\ c_1 = \bar{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=K+1}^{t+K})) \prod_{k=1}^{t+K-1} P(c_{k+1}|c_k) \\
&= u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta^K \left\{ \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{K+1} \in \Theta_{k=2}^{K+1} \\ c_1 = \bar{c}}} u_A(\sigma^t(c_{K+1})) \prod_{k=1}^K P(c_{k+1}|c_k) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{t+K} \in \Theta_{k=2}^{t+K} \\ c_1 = \bar{c}}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=K+1}^{t+K})) \prod_{k=K+1}^{t+K-1} P(c_{k+1}|c_k) \prod_{k=1}^K P(c_{k+1}|c_k) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_A(\bar{c}) &= u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta^K \left\{ \sum_{c_{K+1} \in \Theta} u_A(\sigma^t(c_{K+1})) \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{K+1} \in \Theta_{k=2}^{K+1} \\ c_1 = \bar{c}}} \prod_{k=1}^K P(c_{k+1}|c_k) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=K+1}^{t+K} \in \Theta_{k=2}^{t+K}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=K+1}^{t+K})) \prod_{k=K+1}^{t+K-1} P(c_{k+1}|c_k) \sum_{\substack{(c_k)_{k=2}^{K+1} \in \Theta_{k=2}^{K+1} \\ c_1 = \bar{c}}} \prod_{k=1}^K P(c_{k+1}|c_k) \right\} \\
&= u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta^K \left\{ \sum_{c_{K+1} \in \Theta} u_A(\sigma^t(c_{K+1})) P^K(c_{K+1}|\bar{c}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{(c_k)_{k=K+1}^{t+K} \in \Theta_{k=2}^{t+K}} \delta^{t-1} u_A(\sigma^t((c_k)_{k=K+1}^{t+K})) \prod_{k=K+1}^{t+K-1} P(c_{k+1}|c_k) P^K(c_{K+1}|\bar{c}) \right\} \\
&= u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta \sum_{c_{K+1} \in \Theta} P^K(c_{K+1}|\bar{c}) v_A(c_{K+1}),
\end{aligned}$$

Es decir:

$$v_A(\bar{c}) = u_A(\sigma^1(\bar{c})) + \delta(P^K(\underline{c}|\bar{c})v_A(\underline{c}) + P^K(\bar{c}|\bar{c})v_A(\bar{c})).$$

En resumen, se obtuvo el sistema de dos incógnitas:

$$\begin{aligned}
v_A(\underline{c}) &= (w - \underline{c}) + \delta(pv_i(\underline{c}) + (1-p)v_i(\bar{c})), \\
v_A(\bar{c}) &= w + \delta(P^K(\underline{c}|\bar{c})v_i(\underline{c}) + P^K(\bar{c}|\bar{c})v_i(\bar{c})),
\end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$v_A(\underline{c}) = \frac{(w - \underline{c})(1 - \delta^K P^K(\bar{c}|\bar{c})) + w\delta(1 - p)}{(1 - \delta^K P^K(\bar{c}|\bar{c}))(1 - \delta p) - \delta^{K+1} P^K(\underline{c}|\bar{c})(1 - p)}, \quad (2.10)$$

$$v_A(\bar{c}) = \frac{w(1 - \delta p) + (w - \underline{c})\delta^K P^K(\underline{c}|\bar{c})}{(1 - \delta^K P^K(\bar{c}|\bar{c}))(1 - \delta p) - \delta^{K+1} P^K(\underline{c}|\bar{c})(1 - p)}. \quad (2.11)$$

2.2.2. Secuencialidad Racional

Condición de optimalidad

Para obtener las condiciones de optimalidad que implica la secuencialidad racional, para cada historia h^s se calculan los pagos de continuación de los individuos cuando desvían su estrategia únicamente en s . Notar que, bajo el supuesto de que el Principal

tiene paciencia nula, su utilidad contempla tan solo las acciones del periodo s , por lo que sus condiciones de optimalidad son triviales. Esto se ve en detalle en la siguiente sección.

Con respecto al Agente, cabe notar que este solo puede desviar en un estado cooperativo del juego, es decir, para historias h^s tales que P invierte en s . El incentivo al desvío del Agente consiste en no ejecutar cuando el costo es bajo y ejecutar cuando el costo es alto. Luego, siguiendo argumentos análogos a los utilizados en el cálculo de pagos de continuación, obtenemos que:

$$U_A(\sigma_P, \sigma_{A(s)}; \mu|h^s, \underline{c}) = w + \delta^K (P^K(\underline{c}|\underline{c})v_A(\underline{c}) + P^K(\bar{c}|\underline{c})v_A(\bar{c})) \quad (2.12)$$

$$U_A(\sigma_P, \sigma_{A(s)}; \mu|h^s, \bar{c}) = (w - \bar{c}) + \delta((1-p)v_A(\underline{c}) + pv_A(\bar{c})). \quad (2.13)$$

Incentivos al desvío del Principal

Recordar que la racionalidad secuencial de P implica que se deben satisfacer lo siguiente:

1. Si $h^s \in H^s$ es tal que $\sigma_P^s(h^s) = I$,

$$\pi\mu^s(\underline{c}|h^s) - I(1 - \mu(\underline{c}|h^s)) \geq 0 \quad (2.14)$$

2. Si $h^s \in H^s$ es tal que $\sigma_P^s(h^s) = NI$,

$$\pi\mu^s(\underline{c}|h^s) - I(1 - \mu(\underline{c}|h^s)) \leq 0 \quad (2.15)$$

Es preciso tomar en consideración que la creencia de P difiere según la historia pública, por lo que en orden de establecer condiciones sobre los parámetros, de modo que se cumplan las desigualdades anteriores, debemos ponernos en casos. Si $\sigma_P^s(h^s) = I$, entonces se debe cumplir

1. La inecuación (2.3) equivale a:

$$\mu(\underline{c}|h^s) \geq \frac{I}{\pi + I}. \quad (2.16)$$

Esto es, la impaciencia de P obliga que, para que este invierta, la probabilidad de obtener pago π sea suficientemente grande. Además,

$$\mu(\underline{c}|h^s) = \begin{cases} p & , \quad (h^s)_{s-1} = (I, E) \\ \lambda & , \quad s = 1 \\ P^K(\underline{c}|\bar{c}) & , \quad \kappa(h^s) = K \end{cases}$$

Por lo tanto, la secuencialidad racional de P implica que:

$$\lambda \geq \frac{I}{\pi + I} \quad (2.17)$$

$$p \geq \frac{I}{\pi + I} \quad (2.18)$$

$$P^K(\underline{c}|\bar{c}) \geq \frac{I}{\pi + I} \quad (2.19)$$

Teniendo en cuenta que $p > \frac{1}{2}$, la cadena no puede cambiar de estado frecuentemente, por lo que K debe ser lo suficientemente grande para permitir variabilidad. Formalmente,

$$\begin{aligned} P^K(\underline{c}|\bar{c}) &\geq \frac{I}{\pi + I} \\ \Leftrightarrow P^K(\bar{c}|\bar{c}) &\leq \frac{\pi}{\pi + I} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2p - 1)^K &\leq \frac{\pi}{\pi + I} \\ \Leftrightarrow (2p - 1)^K &\leq \frac{\pi - I}{\pi + I}. \end{aligned}$$

De aquí, observamos que es necesario que $\pi > I$. Continuando el desarrollo,

$$K \geq \frac{\ln\left(\frac{\pi - I}{\pi + I}\right)}{\ln(2p - 1)} \quad (2.20)$$

2. Por definición, si $\sigma_P^s(h^s) = NI$, entonces $\kappa(h^s) < K$, y entonces:

$$\mu(\underline{c}|h^s) = P^{\kappa(h^s)}(\underline{c}, \bar{c})$$

Luego:

$$P^{\kappa}(\underline{c}|\bar{c}) \leq \frac{I}{\pi + I}.$$

Esto quiere decir que, dada la persistencia de la cadena, la cantidad de periodos transcurridos deben ser suficientemente pocos, de modo de que la probabilidad de transición a \underline{c} sea baja. Formalmente,

$$\begin{aligned} P^{\kappa(h^s)}(\underline{c}|\bar{c}) &\leq \frac{I}{\pi + I} \\ \Leftrightarrow P^{\kappa(h^s)}(\bar{c}|\bar{c}) &\geq \frac{\pi}{\pi + I} \\ \Leftrightarrow \kappa(h^s) &\leq \frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(2p-1)}. \end{aligned}$$

Como $\kappa(h^s) \in \{1, \dots, K-1\}$,

$$K \leq \frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(2p-1)} + 1 \quad (2.21)$$

Juntando ambas condiciones, se tiene que:

$$\frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(2p-1)} \geq K \leq \frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(2p-1)} + 1, \quad (2.22)$$

y recordando que K es natural, obtenemos un único valor factible para K :

$$K = K(p) := \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(2p-1)} \right\rceil \quad (2.23)$$

Esto se resume en la siguiente proposición:

Proposición 2.4 *La evaluación (σ, μ) es secuencialmente racional para P si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\lambda \geq \frac{I}{\pi + I}, \quad (2.24)$$

$$p = 1 - \lambda\Delta \geq \frac{I}{\pi + I}, \quad (2.25)$$

$$K(\Delta) = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(1-2\lambda\Delta)} \right\rceil \quad (2.26)$$

En general, se explicita la dependencia de K sobre sus parámetros siempre que es necesario. Se destacan las siguientes dinámicas:

- K es decreciente con $(\pi - I)$. Es más, $K \xrightarrow{I \rightarrow \pi} +\infty$.
- K es creciente con p y $K \xrightarrow{p \rightarrow 1} +\infty$

Esto quiere decir que, en caso de que A no ejecute, la severidad del castigo depende del tamaño de la pérdida de la inversión. Además, entre más largo sea el castigo, es menos probable que la cadena persista en el estado de costo alto al retomar la inversión. Esto también explica la relación entre K y p , pues entre mayor sea la persistencia, el Principal tendrá menos oportunidades de generar utilidad en el corto plazo.

Ahora bien, el tiempo real que transcurre entre cada interacción está dado por Δ . Un escenario de particular interés es cuando las decisiones se toman de forma frecuente, es decir $\Delta \approx 0$. En tal caso, como $p = 1 - \lambda\Delta$, la cadena se vuelve completamente persistente, y en consecuencia el número de periodos de castigo diverge. Sin embargo, como las desiciones se toman en intervalos de tiempo infinitesimal, el tiempo real de castigo, $\Delta K(\Delta)$, no necesariamente crece indefinidamente. En efecto, como:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\ln(1 - 2\lambda\Delta)} \stackrel{L'H}{=} -\frac{1}{2\lambda},$$

sigue que el tiempo real de castigo, T , cuando $\Delta \rightarrow 0$, está dado por:

$$T := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta K(\Delta) = \frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{\pi + I}{\pi - I} \right).$$

Por lo tanto, si bien el número de periodos de castigo diverge, este es constante en tiempo real. Sin embargo, notar que la relación entre T y $(\pi - I)$ es consistente con el caso discreto. Luego, es natural preguntarse sobre la probabilidad de transición entre estados, antes y después del castigo. Nuevamente, en virtud de la definición de $K(\Delta)$, se tiene que:

$$\ln \left(\frac{\pi + I}{\pi - I} \right) \leq K(\Delta) \ln(1 - 2\lambda\Delta) \leq \ln \left(\frac{\pi + I}{\pi - I} \right) + \ln(1 - 2\lambda\Delta),$$

lo que implica que

$$(1 - 2\lambda\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\pi + I}{\pi - I} \right), \tag{2.27}$$

de donde

$$P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) > \frac{1}{2}. \quad (2.28)$$

Observamos que, al igual que en caso discreto, la probabilidad de persistir en un mismo estado, al terminar el tiempo real de castigo, decrece con respecto al costo de la inversión. Es decir, cualquier escenario, la estrategia de P busca maximizar la probabilidad de que en el turno más próximo se ejecute el proyecto.

Incentivos al desvío para el Agente

A continuación, se estudian configuraciones de modo de satisfacer la racionalidad secuencial de A . Según se muestra en la sección anterior, si h^s es una historia tal que P no invierte, entonces A no juega en s , por lo que es indiferente al desvío y se satisface el principio de desviación única. Luego, basta examinar las condición de optimalidad para $h^s \in H^s$ tal que $\sigma_P^s(h^s) = I$, es decir, se deben cumplir las siguientes desigualdes:

$$v_A(\underline{c}) \geq w + \delta^K (P^K(\underline{c}|\underline{c})v_A(\underline{c}) + P^K(\bar{c}|\underline{c})v_A(\bar{c})) \quad (2.29)$$

$$v_A(\bar{c}) \geq (w - \bar{c}) + \delta((1 - p)v_A(\underline{c}) + pv_A(\bar{c})). \quad (2.30)$$

Para esta estrategia, satisfacer los incentivos de A es sutil. Cuando el costo es bajo, el castigo debe ser lo suficientemente grande para desalentar al Agente a no ejecutar. Por otro lado, cuando el costo es alto, el castigo no puede ser excesivamente grande, en orden de generar incentivos a no ejecutar. Por otro lado, la magnitud del costo alto debe ser lo suficientemente grande para desalentar la realización del proyecto. La *Proposición 2.5* muestra condiciones necesarias para que la estrategia *Garrote-Zanahoria* sea equilibrio cuando $r \rightarrow 0$, mientras que la *Proposición 2.6* es el resultado análogo para $\Delta \rightarrow 0$.

Proposición 2.5 *Si K está definido por (2.24) y $\pi > I > 0$. Entonces:*

(i) *Siempre que*

$$K \geq \frac{w}{w - \underline{c}},$$

$\forall \Delta > 0$, $\exists \bar{r} \in (0, 1)$, tal que $\forall r \in (0, \bar{r})$ se satisface (2.30). En particular, las siguientes son, respectivamente, condición necesaria y suficiente:

$$p \geq \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[\left(\frac{w - \underline{c}}{\underline{c}} \right) \ln \left(\frac{\pi - I}{\pi + I} \right) \right] \right),$$

$$p > \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[\left(\frac{w - \underline{c}}{w} \right) \ln \left(\frac{\pi - I}{\pi + I} \right) \right] \right).$$

(ii) Si

$$\bar{c} > w + (w - \underline{c}) \frac{\lambda T - \frac{I}{\pi+I}}{\lambda T + \frac{I}{\pi+I}}$$

entonces $\exists \bar{\Delta} > 0$ tal que $\forall \Delta < \bar{\Delta}$, $\exists r(\Delta) \in (0, 1)$, tal que $\forall r < r(\Delta)$, se satisface (2.31).

Proposición 2.6 Su pongamos que $\pi > I > 0$ y que

$$K(\Delta) = \left[\frac{\ln\left(\frac{\pi-I}{\pi+I}\right)}{\ln(1-2\lambda\Delta)} \right],$$

entonces:

(i) Si $(w - \underline{c}) > 0$, entonces $\exists \bar{\Delta}$ tal que $\forall \Delta < \bar{\Delta}$, $\exists r(\Delta) > 0$ tal que $\forall r \leq r(\Delta)$ se satisface (2.30).

(ii) Si

$$\bar{c} > w + (w - \underline{c}) \frac{\lambda T - \frac{I}{\pi+I}}{\lambda T + \frac{I}{\pi+I}},$$

entonces $\exists \bar{r} > 0$ tal que $\forall r < \bar{r}$, $\exists \Delta(r) > 0$, tal que $\forall \Delta < \Delta(r)$, se satisface (2.31).

La demostración de ambas proposiciones se detalla en Anexos. Se observa que, como $K(\Delta)$ diverge cuando $\Delta \rightarrow 0$, siempre existen incentivos para el Agente de mantenerse en el camino del equilibrio, cuando se enfrenta a un costo bajo. Además, la condición de secuencialidad racional para el costo bajo, no depende del largo del castigo medido en periodos, sino del tiempo real T . Como T es constante, este tiene que ser relativamente pequeño con respecto al costo del proyecto. Es decir, el costo de esfuerzo debe desalentar la ejecución del esfuerzo en mayor grado que el incentivo generado por el castigo en tiempo real. Se observa además, que existe continuidad en los resultados obtenidos en ambas proposiciones.

2.3. Discusión

El *Folk Theorem* establece que si el descuento entre periodos es cercano a uno, entonces la posibilidad de cooperación en un juego repetido aumenta, en el sentido de que se expande el conjunto de pagos posibles a través de *EPS*. Resultados similares respaldan dicho efecto tanto para juegos de Información Imperfecta, como para juegos de Información Incompleta. La interpretación del resultado, sin embargo, puede ser engañosa en estos dos últimos. Que el factor de descuento δ sea cercano a uno puede interpretarse como que los jugadores se hacen pacientes, o bien la frecuencia en que ellos interactúan aumenta. En términos específicos, cuando $\delta = e^{-r\Delta}$, donde r es la tasa de interés intertemporal, y Δ es el tiempo que transcurre entre periodo de interacción, las interpretaciones corresponden

a $r \approx 0$ y $\Delta \approx 0$, respectivamente. Dilip Abreu, Paul Milgrom y David Pearce (1991) probaron que esta distinción es importante en juegos de Información Imperfecta, obteniendo que, bajo cierta estructura temporal, se producen efectos opuestos al reducir la tasa de interés r y disminuir Δ . En particular, se muestra que el aumento en la frecuencia de interacciones del juego puede destruir cualquier posibilidad de cooperación.

Los resultados de la sección anterior no se inclinan a que tal diferenciación ocurra en la situación de *hold up* que se estudia. Hacer $\Delta \approx 0$, cuando los jugadores son infinitamente pacientes, y $r \approx 0$, en tiempo continuo, conducen a las mismas condiciones que permiten que las estrategias *Rígida* y *Garrote-Zanahoria* sean EBP públicos.

En el caso del *Equilibrio Rígido*, la condición de equilibrio se reduce a que el pago esperado de ejecutar todos los proyectos sea positivo. Es decir, siempre que el Agente sea suficientemente paciente, este puede sacrificar pagos presentes en orden de obtener pagos positivos en el largo plazo. Esto ocurre tanto como para decisiones en tiempo continuo como discreto.

Por otro lado, la estrategia *Garrote-Zanahoria* expone dos tensiones en los incentivos del Agente. Cuando se toman decisiones en periodos, el Agente asume el costo bajo de esfuerzo si el castigo es suficientemente grande. Luego, cuando $\Delta \approx 0$, la cantidad de periodos de castigo diverge, y el Agente siempre tendrá incentivos para ejecutar. Si las decisiones se toman de forma continua, se obtiene que el Agente siempre tendrá incentivos para ejecutar proyectos de costo bajo. En cuanto al costo alto, tanto la reducción de la tasa de interés, en tiempo continuo, como aumentar la frecuencia con que los jugadores toman decisiones, conducen a la misma condición de Equilibrio. El Agente no ejecuta sólo si el costo del esfuerzo asociado es suficientemente grande como para mitigar el incentivo a ejecutar que causa el *tiempo real de castigo*. Una explicación para ambos problemas de incentivos (para el costo bajo y el alto) es que el costo que implica asumir el tiempo real de castigo es relevante. En particular, no puede ser arbitrariamente grande, pues incitaría a ejecutar proyectos de costos altos.

En el resultado de D. Abreu (1991) la forma en que Δ afecta la dinámica del juego, particularmente el flujo de información (señales), es de gran importancia. Por lo tanto, se debe entender cómo cambia la persistencia de la cadena de costos en función de Δ . Luego, una interpretación sobre la continuidad de los resultados es que, independientemente de la persistencia de la cadena, la tasa esperada de cambios de estado, λ , permanece inalterada. Si los jugadores son lo suficientemente pacientes, la cantidad de realizaciones de costo bajo y altos son aproximadamente iguales. Por lo que, cuando se ejecutan todos los proyectos, basta dar incentivos sobre los pagos al largo plazo para que se satisfaga la secuencialidad racional. Mientras que al permitirle al Agente evadir el esfuerzo, basta dar incentivos con respecto al *tiempo real de castigo*.

Capítulo 3

Pagos de Equilibrio

3.1. Caracterización como Problema de Programación Lineal

Dado $c \in \Theta$, sean los conjuntos $\mathcal{V}_i(c)$, el conjunto de pagos de continuación para el jugador i cuando la realización del costo en el primero periodo es c , con $i \in \{P, A\}$, $\mathcal{V}(c) = \mathcal{V}_P(c) \times \mathcal{V}_A(c)$, y $E = \mathcal{V}(c) \times \Delta(\Theta)$. Además, definimos $E^*(c)$ tal que $(v(c), \mu) \in E^*(c)$ si y sólo si existe (σ, μ) E.B.P. tal que $v(c) = (v_P(c), v_A(c))$ sean los pagos alcanzados por (σ, μ) .

Consideremos el operador $B : \mathcal{P}(E(c)) \rightarrow E(c)$ de modo que $\forall F \subseteq E(c)$, $(v(c), \mu) \in B(F)$ si y sólo si $\exists a_P^* \in S_P$, $a_A^* \in S_A^\Theta$, y $\forall a \in S$, $\exists (w, \mu')(a) \in F$, tales que:

1) $\mu'(a)$ es actualización bayesiana de μ , dada la realización del perfil de acciones a , $\forall a \in S$.

2) $v_A(c) = u_A(a_P^*, a_A^*(c); c) + \delta \sum_{c' \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A^*(c))(c')P(c'|c)$.

3) $v_P(c) = \sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P^*, a_A^*(c))\mu(\tilde{c})$.

4) $\forall a_A \in S_A^\Theta$, $c' \neq c$,

$$u_A(a_P^*, a_A; c) + \delta \sum_{c' \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A)(c')P(c'|c) \leq v_A(c),$$

$$u_A(a_P^*, a_A; c') + \delta \sum_{\tilde{c} \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A)(\tilde{c})P(\tilde{c}|c') \leq u_A(a_P^*, a_A^*(c'); c') + \delta \sum_{\tilde{c} \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A^*(c'))(\tilde{c})P(\tilde{c}|c'),$$

5) $a_P \in S_P$, $v_P(c) \geq \sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P, a_A^*(c))\mu(\tilde{c})$.

Según se muestra en H.L. Cole y N. Kocherlakota (1998), se tiene que $B(E^*) = E^*$, por lo que podemos caracterizar el conjunto de pagos de equilibrio a través de las restricciones

(1) – (5). Definimos $E_A^*(c, \mu)$ el conjunto de pagos de continuación del jugador A que son alcanzados por EBP dada la creencia inicial $\mu \in [0, 1]$, que denota la probabilidad de que $c = \underline{c}$, y el estado inicial $c \in \Theta$. El objetivo de la presente sección es caracterizar el valor

$$e^*(c, \mu) = \text{máx } E_A^*(c, \mu).$$

En general, se utilizará la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \underline{a}_A &:= a_A(\underline{c}) \quad , \quad \bar{a}_A := a_A(\bar{c}) \\ \underline{e}^*(\mu) &:= e^*(\underline{c}, \mu) \quad , \quad \bar{e}^*(\mu) := e^*(\bar{c}, \mu). \end{aligned}$$

Luego, se desea resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(c, \mu) \quad & \text{máx} \\ & a_P \in S_P, a_A \in S_A^\Theta \\ & \underline{w}, \bar{w} \in R_+^S \\ & \text{s.a} \\ & \text{(i) (Restricción de incentivos para } A\text{): } \forall a_A \in S_A^\Theta, c' \neq c \\ & \text{(i.1) } u_A(a_P^*, a_A^*(c); c) + \delta \sum_{c' \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A^*(c))(c')P(c'|c) \\ & \qquad \qquad \qquad \geq u_A(a_P^*, a_A(c); c) + \delta \sum_{c' \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A(c))(c')P(c'|c) \\ & \text{(i.2) } u_A(a_P^*, a_A^*(c'); c') + \delta \sum_{\tilde{c} \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A^*(c'))(\tilde{c})P(\tilde{c}|c') \\ & \qquad \qquad \qquad \geq u_A(a_P^*, a_A(c'); c') + \delta \sum_{\tilde{c} \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A(c'))(\tilde{c})P(\tilde{c}|c') \\ & \text{(ii) (Restricción de incentivos para } P\text{): } \forall a_P \in S_P, \\ & \qquad \sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P^*, a_A^*(c))\mu(\tilde{c}) \geq \sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P, a_A^*(c))\mu(\tilde{c}) \\ & \text{(iii) (Actualización Bayesiana):} \\ & \qquad \mu' \text{ es actualización bayesiana, según } (a_P, a_A(c)), \text{ de } \mu \\ & \text{(iv) (Autogeneración):} \\ & \qquad \underline{w}(a) \in E^*(c, \mu'), \bar{w}(a) \in E^*(\bar{c}, \mu'), \forall a \in S. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{Q}(c, \mu)$ el problema que se obtiene al relajar la condición (iv) por:

$$\text{(iv')} \quad \underline{w}(a) \in [0, \underline{e}(\mu)], \bar{w}(a) \in [0, \bar{e}(\mu)],$$

donde $\underline{e}(\mu)$ y $\bar{e}(\mu)$ son los valores óptimos de los problemas $\mathcal{Q}(\underline{c}, \mu)$ y $\mathcal{Q}(\bar{c}, \mu)$, respectivamente. Notemos que las restricciones (ii) y (iii) en $\mathcal{Q}(\mu, c)$ sólo dependen de las acciones en el periodo actual. Además,

$$\mu' = \begin{cases} p\mu + (1-p)(1-\mu) & , \quad \underline{a}_A = \bar{a}_A \\ P(\underline{c}|c) & , \quad \underline{a}_A \neq \bar{a}_A \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que $(I, (E, E))$, $(NI, (NE, NE))$ siempre satisfacen (ii), mientras que:

- $(I, (E, NE))$ satisface (ii) si y sólo si $\mu \geq \frac{I}{\pi+I}$,
- $(I, (NE, E))$ satisface (ii) si y sólo si $\mu \leq \frac{\pi}{\pi+I}$,
- $(NI, (E, NE))$ satisface (ii) si y sólo si $\mu \leq \frac{I}{\pi+I}$,
- $(NI, (NE, E))$ satisface (ii) si y sólo si $\mu \geq \frac{\pi}{\pi+I}$.

Por lo que para resolver los problemas anteriores, resolvemos para cada acción factible $(a_P, (\underline{a}_A, \bar{a}_A))$,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(I, (E, E))\} \\ A_2 &= \{(I, (E, NE))\} \\ A_3 &= \{(I, (NE, E))\} \\ A_4 &= \{(NI, (NE, NE))\} \\ A_5 &= \{(NI, (E, NE))\} \\ A_6 &= \{(NI, (NE, E))\} \end{aligned}$$

Definimos los siguientes problemas:

$$Q_i(c, \mu) : \begin{array}{l} \text{máx} \\ (a_P^*, (\underline{a}_A^*, \bar{a}_A^*)) \in A_i \\ \underline{w}, \bar{w} \in R_+^{S_A} \end{array} \quad u_A(a_P^*, a_A^*(c); c) + \delta \sum_{c' \in \Theta} w_A(a_P^*, a_A^*(c))(c') P(c'|c)$$

s.a

(i) **(Restricción de incentivos para A):** $\forall a_A \in S_A^\Theta, c' \neq c$
(i.1) $u_A(a_P^*, a_A^*(c); c) + \delta(\underline{w}(a_A^*(c))P(\underline{c}|c) + \bar{w}(a_A^*(c))P(\bar{c}|c))$
 $\geq u_A(a_P^*, a_A(c); c) + \delta(\underline{w}(a_A(c))P(\underline{c}|c) + \bar{w}(a_A(c))P(\bar{c}|c))$
(i.2) $u_A(a_P^*, a_A^*(c'); c') + \delta(\underline{w}(a_A^*(c'))P(\underline{c}|c') + \bar{w}(a_A^*(c'))P(\bar{c}|c'))$
 $\geq u_A(a_P^*, a_A(c'); c') + \delta(\underline{w}(a_A(c'))P(\underline{c}|c') + \bar{w}(a_A(c'))P(\bar{c}|c'))$

(ii) **(Restricción de incentivos para P):** $\forall a_P \in S_P,$
 $\sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P^*, a_A^*(c))\mu(\tilde{c}) \geq \sum_{\tilde{c} \in \Theta} u_P(a_P, a_A^*(c))\mu(\tilde{c})$

(iii) **(Actualización Bayesiana):**
 μ' es actualización bayesiana, según $(a_P, a_A(c))$, de μ

(iv') **(Autogeneración):**
 $\underline{w}(a) \in [0, \underline{e}(\mu)], \bar{w}(a) \in [0, \bar{e}(\mu)],$

Sean $e_i(c, \mu)$ el valor óptimo de $Q_i(c, \mu)$. Luego, tenemos que $e(c, \mu) = \text{máx}_i e_i(c, \mu)$. Se tiene entonces, que el problema de optimización sobre el conjunto de pagos de equilibrio, queda caracterizado por una serie de programas lineales anidados. De aquí, es posible una aproximación teórica y numérica a la solución, utilizando programación dinámica.

Conclusión

En el presente trabajo se estudian dos tipos de estrategias públicas, de las cuales se busca desprender aspectos relevantes de los incentivos del juego. Son de especial interés dos escenarios. El primero, cuando las decisiones se toman en intervalos de tiempo y los jugadores son infinitamente pacientes. En este contexto se buscan condiciones de Equilibrio cuando la frecuencia de los periodos es alta. El segundo, cuando las decisiones se toman de forma continua, donde nos interesa el límite cuando la tasa de interés es pequeña.

La primera estrategia, *Rígida*, es una estrategia favorable para el Principal, pues obliga al Agente a asumir el costo de ejecución en todos los turnos en el camino inducido por ella. Resulta ser que en el límite de ambos escenarios, tiempo discreto y continuo, la condición de Equilibrio consiste en que el pago esperado del Agente en el largo plazo sea positivo. Es decir, dado el Agente no valora el presente, este está dispuesto a sacrificar pagos en el corto plazo con el fin de obtener pagos superiores en el futuro.

La segunda estrategia, *Garrote-Zanahoria*, es una relajación de la primera, pues en caso de que el Agente no ejecute, el Principal lo castiga dejando de invertir solo por una cantidad finita de tiempo. Esto permite al Agente ahorrarse el costo de esfuerzos si es capaz de dar incentivos a la inversión. Para poder aislar el efecto del cambio de la frecuencia de las interacciones del juego, se considera el caso en que el Principal es impaciente, es decir, sólo valora el tiempo presente. Esto implica que existe un único castigo que da incentivos suficientes al Principal a invertir. Adicionalmente, el *tiempo real de castigo* es finito incluso cuando las decisiones se toman de forma continua. Con respecto al Agente, se deben dar incentivos para que sólo se ejecuten proyectos de costo bajo. Se obtiene que si la tasa de interés y el tiempo de espera entre periodos son suficientemente pequeños, entonces existen condiciones de Equilibrio. En tal caso, el Agente tiene incentivos a ejecutar un proyecto si el costo de este no es mayor que su sueldo. Por lo tanto, siempre tiene incentivos para ejecutar proyectos de costo bajo. En las mismas condiciones, si el costo del proyecto es alto, el sacrificio del esfuerzo que requiere el proyecto debe ser mayor que el incentivo a ejecutar que genera el *tiempo real de castigo*. Se puede inferir que el *tiempo real de castigo* es relevante cuando los jugadores son pacientes y las decisiones se toman frecuentemente. Esto, pues el Agente nunca está dispuesto a asumir el castigo con tal de ahorrar el costo de bajo de esfuerzo. Del mismo modo, no basta con que el Agente obtenga pagos negativos al ejecutar proyectos de costo alto, sino que el esfuerzo asociado tiene que ser alto en orden de dar incentivos a ser castigado.

En resumen, para el problema de *hold up*, tanto la tasa de interés, como el tiempo entre

interacciones del juego, afectan la posibilidad de cooperación. La reducción de ambos factores facilita que las estrategias estudiadas conformen Equilibrios de pagos positivos. Finalmente, se concluye que el efecto de reducir la tasa de interés, cuando las decisiones se toman de forma continua, y de disminuir del tiempo entre periodos, cuando los jugadores son infinitamente pacientes, es el mismo. Esto indica que el modelo es *continuo*, en el sentido de que los casos límites de ambas aproximaciones son equivalentes.

3.2. Trabajo futuro

Si bien los resultados obtenidos en torno a las dos estrategias propuestas no implican una divergencia en la interpretación del factor de descuento δ , no quiere decir que el resto de los equilibrios se comporten de la misma forma. Es necesario un análisis del problema general para cersiorarse sobre la diferencia planteada en Abreu (1991). Se propone realizar simulaciones del problema general del conjunto de pagos, utilizando la metodología explicada en el Capítulo 3. Más aún, una aproximación teórica al problema es posible a través de la misma caracterización.

Bibliografía

- [1] Yuliy Sannikov Andrzej Skrzypacz. Impossibility of collusion under imperfect monitoring with flexible production. *American Economic Review*, 95(5):1794–1823, 2007.
- [2] R. H. Coase. The acquisition of fisher body by general motors. *The Journal of Law and Economics*, 43(1):15–32, 2000.
- [3] Ennio Stacchetti Dilip Abreu, David Pearce. Optimal cartel equilibria with imperfect monitoring. *Journal of Economic Theory*, 39(1):251–269, 1986.
- [4] Paul Milgrom y David Pearce Dilip Abreu. Information and timing in repeated partnerships. *Econometrica*, 59(6):1713–1733, 1991.
- [5] David Levine y Eric Maskin Drew Fudenberg. The folk theorem with imperfect public information. *Econometrica*, 62(5):997–1039, 1994.
- [6] Eric Maskin Drew Fudenberg. The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. *Econometrica*, 54(3):533–554, 1986.
- [7] Kevin J. Murphy George Baker, Robert Gibbons. Relational contracts and the theory of the firm. *The Quarterly Journal of Economics*, 117:39–84, 2002.
- [8] N. Kocherlakota H. L. Cole. Dynamic games with hidden actions and hidden states. *Journal of Economic Theory*, 98(1):114–126, 2001.
- [9] J. Toikka J. Escobar. Efficiency in games with markovian private information. *Econometrica*, 81(5):1887–1934, 2013.
- [10] Michihiro Kandori. The use of information in repeated games with imperfect monitoring. *The Review of Economic Studies*, 59(3):581–593, 1992.
- [11] Benjamin Klein. Vertical integration as organizational ownership: The fisher body-general motors relationship revisited. *Journal of Law, Economics, & Organization*, 4(1):199–213, 1988.
- [12] Matthew O. Jackson y Hugo F. Sonnenschein. Overcoming incentive constraints by linking decisions. *Econometrica*, 75(1):241–257, 2007.

Anexo

Para las demostraciones de las *Proposiciones 2.1, 2.5 y 2.6*, es util realizar cálculos previos. Para facilitar el análisis, se utilizan las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} n(r, \Delta) &= (w - \underline{c})(1 - e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) + w\lambda\Delta e^{-r\Delta}, \\ N(r, \Delta) &= w(1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta}) + (w - \underline{c})e^{-r\Delta K(\Delta)}(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})), \\ D(r, \Delta) &= (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})(1 - e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) - e^{-r\Delta(K(\Delta)+1)}\lambda\Delta(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})), \end{aligned}$$

cuyas derivadas parciales en r están dadas por:

$$\begin{aligned} \partial_r n(r, \Delta) &= (w - \underline{c})\Delta K(\Delta)e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) - w\lambda\Delta^2 e^{-r\Delta}, \\ \partial_r N(r, \Delta) &= w(1 - \lambda\Delta)\Delta e^{-r\Delta} - (w - \underline{c})\Delta K(\Delta)e^{-r\Delta K(\Delta)}(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})), \\ \partial_r D(r, \Delta) &= \Delta K(\Delta)P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})(1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta}) \\ &\quad + (1 - e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}))(1 - \lambda\Delta)\Delta e^{-r\Delta} \\ &\quad + \Delta(K(\Delta) + 1)e^{-r\Delta(K(\Delta)+1)}\lambda\Delta(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) \end{aligned}$$

De aquí, reemplazando,

$$\begin{aligned} n(0, \Delta) &= (w - \underline{c})(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) + w\lambda\Delta, \\ N(0, \Delta) &= (w - \underline{c})(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) + w\lambda\Delta, \\ D(0, \Delta) &= 0, \\ \partial_r n(0, \Delta) &= (w - \underline{c})\Delta K(\Delta)P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) - w\lambda\Delta^2, \\ \partial_r N(0, \Delta) &= w(1 - \lambda\Delta)\Delta - (w - \underline{c})\Delta K(\Delta)(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})), \\ \partial_r D(0, \Delta) &= \Delta - \Delta P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) + \lambda\Delta^2 K(\Delta). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. (Proposición 2.1)

- (i) En primer lugar, notar que las ecuaciones (2.6) y (2.7) son simétricas para \bar{c} y \underline{c} . Esto resulta de que A no utiliza su información privada para decidir acciones, por

lo que los incentivos para ambos costos son el mismo. Luego, si $c_1, c_2 \in \Theta$ son costos distintos, basta analizar la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} w &\leq \frac{(1 - \delta p)(w - c_1) + \delta(1 - p)(w - c_2)}{(1 - \delta p)^2 - \delta^2(1 - p)^2} \\ &= \frac{(1 - \delta p)(w - c_1) + \delta(1 - p)(w - c_2)}{1 - 2\delta p + 2\delta^2 p - \delta^2}. \end{aligned}$$

A continuación se deja implícita la dependencia de $p = 1 - \lambda\Delta$ y $\delta = e^{-r\Delta}$

$$f(r, \Delta) = (1 - \delta p)(w - c_1) + \delta(1 - p)(w - c_2) - (1 - 2\delta p + 2\delta^2 p - \delta^2)w.$$

Luego, $\forall r \in (0, 1)$, $\Delta \in (0, \frac{1}{\lambda})$, las ecuaciones (2.6) y (2.7) son equivalentes a que $f(r, \Delta) \geq 0$, con sus costos respectivos. Luego,

$$f(1, \Delta) = (1 - p)(2w - (\bar{c} + \underline{c}))$$

Luego, si $w - \frac{(\bar{c} + \underline{c})}{2} > 0$, entonces $\exists \bar{r} \in (0, 1)$ tal que $\forall \Delta \in (0, \frac{1}{\lambda})$ $f(r, \Delta) \geq 0$, y por lo tanto, se satisface (2.6) y (2.7).

(ii) Se define la función

$$D(r, \Delta) = (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})^2 - (\lambda\Delta e^{-r\Delta})^2,$$

que corresponde al denominador de los pagos de continuación de A . Además,

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} D(\Delta) = 2(1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})[1 - \lambda r + r]e^{-r\Delta} - 2(1 - r)\lambda^2 \Delta e^{-2r\Delta},$$

y notemos que $D(0) = \frac{\partial}{\partial \Delta} D(0) = 0$. Ahora bien, la inecuación queda:

$$f(r, \Delta) = (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})(w - c_1) + (\lambda\Delta e^{-r\Delta})(w - c_2) - D(r, \Delta)w.$$

Notar que $f(r, 0) = 0$, por lo que se debe estudiar la derivada de f con respecto a Δ . Si $\frac{\partial}{\partial \Delta} f(r, 0) > 0$ entonces se concluye la demostración. Esta está dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \Delta} f(r, \Delta) &= (re^{-r\Delta} + \lambda(1 - r\Delta)e^{-r\Delta})(w - c_1) + \lambda(1 - \Delta r)e^{-r\Delta}(w - c_2) \\
&\quad - w \frac{\partial}{\partial \Delta} D(\Delta) \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \Delta} f(r, 0) &= [r + \lambda](w - c_1) + \lambda(w - c_2).
\end{aligned}$$

Y por último,

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} f(r, 0) > 0 \Leftrightarrow (w - c_1) \frac{r}{\lambda} > -[2w - (\bar{c} + \underline{c})].$$

□

DEMOSTRACIÓN. (Proposición 2.5)

(i) Notar que $D > 0$. Se escriben los pagos de continuación en función de n , N y D :

$$v_A(\underline{c}) = \frac{n(r, \delta)}{D(r, \delta)}, \quad v_A(\bar{c}) = \frac{N(r, \delta)}{D(r, \delta)}$$

Y sea

$$\varphi(r, \Delta) = w + e^{-r\Delta K(\Delta)}(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} - (1 - e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) \frac{n(r, \Delta)}{D(r, \Delta)}.$$

Tenemos que $\forall \Delta, r$, (2.29) se satisface si $\varphi(r, \Delta) \leq 0$. Luego, por L'H:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, \Delta) &= w + \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ [(1 - P^{K(\Delta)})(\partial_r N(0, \Delta) - \Delta K(\Delta)N(0, \Delta) - \partial_r n(0, \Delta)) \right. \\
&\quad \left. - \Delta K(\Delta)P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})n(0, \Delta)] (\partial_r D(0, \Delta))^{-1} \right\} \\
&= w + [(1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}))(\Delta w - (w - \underline{c})\Delta K(\Delta)) - w\lambda\Delta^2 K(\Delta)] \partial_r D(0, \Delta)^{-1}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\partial_r D(0, \Delta)$ y resolviendo, se obtiene que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, \Delta) \leq 0 \Leftrightarrow (1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}))(2w - 2(w - \underline{c})K(\Delta)) \leq 0.$$

Como $P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) \in (0, 1)$, obtenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, \Delta) \leq 0 \Leftrightarrow K(\Delta) \geq \frac{w}{w - \underline{c}},$$

de donde se concluye la parte (i). Específicamente, por definición de $K(\Delta)$, una condición necesaria es:

$$p \geq \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[\left(\frac{w - \underline{c}}{\underline{c}} \right) \ln \left(\frac{\pi - I}{\pi + I} \right) \right] \right),$$

mientras que una condición suficiente es:

$$p > \frac{1}{2} \left(1 + \exp \left[\left(\frac{w - \underline{c}}{w} \right) \ln \left(\frac{\pi - I}{\pi + I} \right) \right] \right)$$

(ii) Siguiendo un procedimiento similar, $\forall \delta \in (0, 1)$, Consideremos la función:

$$\psi(r, \Delta) = (w - \bar{c}) + \lambda \Delta e^{-r\Delta} \frac{(n(r, \Delta) - N(r, \Delta))}{D(r, \Delta)} - (1 - e^{-r\Delta}) \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)}$$

Se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(r, \Delta) = (w - \bar{c}) + \lambda \Delta \frac{\partial_r n(0, \Delta) - \partial_r N(0, \Delta)}{\partial_r D(0, \Delta)} - N(0, \Delta) \frac{\Delta}{\partial_r D(0, \Delta)}.$$

Luego,

$$\frac{\partial_r D(0, \Delta)}{\Delta} = 1 - P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) + \lambda \Delta K(\Delta) \quad (3.1)$$

$$\xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 1 - \frac{\pi}{\pi + I} + \lambda T \quad (3.2)$$

$$= \frac{I}{\pi + I} + \lambda T. \quad (3.3)$$

y tomando límite sobre Δ ,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \psi(r, \Delta) = (w - \bar{c}) + \frac{\lambda T - \frac{I}{\pi + I}}{\lambda T + \frac{I}{\pi + I}} (w - \underline{c}),$$

de donde se concluye el resultado. □

DEMOSTRACIÓN. (Proposición 2.6)

Sea

$$k(\Delta) = \frac{\log\left(\frac{\pi - I}{\pi + I}\right)}{\log(1 - 2\lambda\Delta)}.$$

Se definen las funciones

$$\begin{aligned} \underline{D}(r, \Delta) &= (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})(1 - e^{-r\Delta k(\Delta)} P^{k(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) - e^{-r\Delta(k(\Delta)+1)} \lambda\Delta(1 - P^{k(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})), \\ \underline{D}(r, \Delta) &= (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})(1 - e^{-r\Delta(k(\Delta)+1)} P^{(k(\Delta)+1)}(\bar{c}|\bar{c})) \\ &\quad - e^{-r\Delta(k(\Delta)+2)} \lambda\Delta(1 - P^{(k(\Delta)+1)}(\bar{c}|\bar{c})). \end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \partial_{\Delta} \underline{D}(r, \Delta) &= (re^{-r\Delta} + \lambda(e^{-r\Delta} - r\Delta e^{-r\Delta}))(1 - e^{-r\Delta k(\Delta)} P^{k(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) \\ &\quad + (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta})r(k(\Delta) + \Delta k'(\Delta))e^{-r\Delta k(\Delta)} P^{k(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c}) \\ &\quad - \lambda(e^{-r\Delta(k(\Delta)+1)} - \Delta r(k(\Delta) + 1 + \Delta k'(\Delta))e^{-r\Delta(k(\Delta)+1)})(1 - P^{k(\Delta)}(\bar{c}|\bar{c})) \\ &\xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} (r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I}\right)\right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I}\right) > 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial_{\Delta} \bar{D}(r, \Delta) = (r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I}\right)\right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I}\right)$$

Por lo tanto, utilizando L'Hopital, se pueden obtener los límites

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{D(r, \Delta)} &= \left[(r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I}\right)\right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I}\right) \right]^{-1} \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-r\Delta}}{D(r, \Delta)} &= r \left[(r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I}\right)\right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I}\right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

- (i) Se definen las funciones $n(r, \Delta)$, $N(r, \Delta)$ y $D(r, \Delta)$ como en la demostración anterior. Luego,

$$v_A(\underline{c}) = \frac{n(r, \Delta)}{D(r, \Delta)}, \quad v_A(\bar{c}) = \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)}. \quad (3.4)$$

En primer lugar, notar que:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} n(r, \Delta) = (w - \underline{c}) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right), \quad (3.5)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} N(r, \Delta) = (w - \underline{c}) e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right), \quad (3.6)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} D(r, \Delta) = 0. \quad (3.7)$$

Se tiene que (2.16), $\forall D > 0$, equivale a:

$$\begin{aligned} w + e^{-r\Delta K(\Delta)} \left(P^{K(\Delta)}(\underline{c}|\underline{c}) \frac{n(\Delta)}{D(\Delta)} + P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\underline{c}) \frac{N(\Delta)}{D(\Delta)} \right) &\leq \frac{n(\Delta)}{D(\Delta)} \\ \Leftrightarrow w + e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\underline{c}) \frac{N(\Delta)}{D(\Delta)} - (1 - e^{-r\Delta K(\Delta)}) P^{K(\Delta)}(\underline{c}|\underline{c}) \frac{n(\Delta)}{D(\Delta)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Se define la función,

$$\begin{aligned} \varphi(r, \Delta) &= (1 - e^{-r\Delta})w + (1 - e^{-r\Delta})e^{-r\Delta K(\Delta)} P^{K(\Delta)}(\bar{c}|\underline{c}) \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} \\ &\quad - (1 - e^{-r\Delta}) (1 - e^{-r\Delta K(\Delta)}) P^{K(\Delta)}(\underline{c}|\underline{c}) \frac{n(r, \Delta)}{D(r, \Delta)}. \end{aligned}$$

Luego, verificar (2.16) es equivalente a probar que $\varphi(\Delta, r) \leq 0$. El límite de φ , cuando $\Delta \rightarrow 0$, se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta \rightarrow 0} \varphi(r, \Delta) \\
&= \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-r\Delta})}{D(r, \Delta)} \right) (w - \underline{c}) \left[e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \right]^2 \\
&\quad - \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-r\Delta})}{D(r, \Delta)} \right) (w - \underline{c}) \left[1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right]^2 \\
&= \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-r\Delta})}{D(r, \Delta)} \right) (w - \underline{c}) \left(\left[e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \right]^2 - \left[1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right]^2 \right) \\
&= \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-r\Delta})}{D(r, \Delta)} \right) (w - \underline{c}) \left(\left[e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \right]^2 - \left[1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right]^2 \right),
\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}
& \left[e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \right]^2 \leq \left[1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right]^2 \\
&\Leftrightarrow e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \leq 1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \\
&\Leftrightarrow e^{-rT} \leq 1,
\end{aligned}$$

se tiene que, si $(w - \underline{c}) > 0$, entonces $\lim_{D \rightarrow 0} \varphi > 0$, de donde se concluye (i).

(ii) Se resuelve ahora (2.30), que está dada por:

$$\begin{aligned}
& (w - \bar{c}) + e^{-r\Delta} \left(\lambda\Delta \frac{n(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} + (1 - \lambda\Delta) \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} \right) \leq \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} \\
&\Leftrightarrow (w - \bar{c}) + \lambda\Delta e^{-r\Delta} \frac{n(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} - (1 - e^{-r\Delta} + \lambda\Delta e^{-r\Delta}) \frac{N(r, \Delta)}{D(r, \Delta)} \leq 0,
\end{aligned}$$

y definimos la función:

$$\psi(\Delta, r) = (w - \bar{c}) + \lambda\Delta e^{-r\Delta} \left(\frac{n(\Delta)}{D(\Delta)} - \frac{N(\Delta)}{D(\Delta)} \right) - (1 - e^{-r\Delta}) \frac{N(\Delta)}{D(\Delta)}.$$

La desigualdad (2.30) se satisface, $\forall \Delta > 0$, si y sólo si $\psi(r, \Delta) \leq 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta \rightarrow 0} \psi(\Delta) \\
&= (w - \bar{c}) + \lambda \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{D(\Delta)} \right) (w - \underline{c})(1 - e^{-rT}) \\
&\quad - \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-r\Delta}}{D(\Delta)} \right) (w - \underline{c})e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \\
&= (w - \bar{c}) + \lambda \left(\frac{1 - e^{-rT}}{(r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right)} \right) (w - \underline{c}) \\
&\quad - \left(\frac{r}{(r + \lambda) \left(1 - e^{-rT} \left(\frac{\pi}{\pi + I} \right) \right) - \lambda e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right)} \right) (w - \underline{c})e^{-rT} \left(\frac{I}{\pi + I} \right)
\end{aligned}$$

Por último, tomando límite en $r \rightarrow 0$, y utilizando nuevamente la regla de L'Hopital, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \psi(\Delta) \\
&= (w - \bar{c}) + \lambda \left(\frac{T}{\frac{I}{\pi + I} + \lambda T} \right) (w - \underline{c}) \\
&\quad - \left(\frac{1}{\frac{I}{\pi + I} + \lambda T} \right) (w - \underline{c}) \left(\frac{I}{\pi + I} \right) \\
&= (w - \bar{c}) + (w - \underline{c}) \left(\frac{\lambda T - \frac{I}{\pi + I}}{\lambda T + \frac{I}{\pi + I}} \right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. □