



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ESTRATEGIAS DE CONTROL PREDICTIVO ROBUSTO BASADAS EN
INTERVALOS DIFUSOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

OSCAR ANDRÉS CARTAGENA VILLALOBOS

PROFESORA GUÍA:
DORIS SÁEZ HUEICHAPAN
PROFESOR CO-GUÍA:
DIEGO MUÑOZ CARPINTERO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARCOS ORCHARD CONCHA
DANIEL SBARBARO HOFER

SANTIAGO DE CHILE
2019

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA ING., MENCIÓN ELÉCTRICA Y AL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
POR: OSCAR ANDRÉS CARTAGENA VILLALOBOS
FECHA: 2019
PROF. GUIA: DORIS SÁEZ HUEICHAPAN
PROF. CO-GUIA: DIEGO MUÑOZ CARPINTERO

ESTRATEGIAS DE CONTROL PREDICTIVO ROBUSTO BASADAS EN INTERVALOS DIFUSOS

En el presente trabajo se formulan nuevas estructuras de intervalos difusos enfocados en la modelación de sistemas dinámicos, desarrollando posteriormente un diseño de estrategias de control predictivo robusto basados en dichos modelos de intervalos propuestos. La formulación de estos intervalos, persigue el objetivo de caracterizar toda la incertidumbre que normalmente puede afectar al cálculo de predicciones de un sistema dinámico. El efecto de esta incerteza puede ocasionar que las restricciones del sistema no sean cumplidas en todo momento. Con los nuevos intervalos y controladores propuestos, se busca acotar la cantidad de casos donde las restricciones son violadas.

Los sistemas dinámicos pueden encontrarse afectados por diferentes tipos de incertidumbre. En este trabajo se consideran dos tipos, una relacionada a la señal de perturbación externa y otra asociada a la incerteza propia del modelo de predicción identificado. Para lograr el diseño de los controladores robustos, es necesario obtener una caracterización completa de toda la incertidumbre que afecta a los modelos de los sistemas a controlar. Debido a esto, se propone una nueva estructura de intervalos enfocada en la modelación de sistemas dinámicos, que utilice la incerteza de las señales de perturbación y la incertidumbre propia del modelo.

Considerando que la incerteza presente en los modelos identificados puede presentar variaciones en función del número de pasos a futuro con el que se predice y del instante en que se calcula la predicción, se propone también un nuevo esquema de sintonización para el ancho de los intervalos. Este nuevo esquema consiste en la utilización de varios parámetros de sintonía, que se adecuen a los diferentes modos de operación que se pueden identificar en el comportamiento de la incertidumbre. En esta línea, se propone también utilizar una probabilidad de cobertura decreciente en el proceso de sintonización, de manera de evitar el crecimiento presentado por el ancho de intervalo con respecto al paso de predicción. La importancia de la cobertura decreciente queda en evidencia en los resultados de simulación, donde se aprecia que cumple un rol fundamental para evitar casos de infactibilidad en la optimización que define al controlador predictivo.

En este trabajo, los modelos de intervalos propuestos son probados inicialmente para dos casos, uno correspondiente a un sistema no-lineal en variables de estado y otro a un sistema no-lineal autorregresivo con variable exógena. Usando como base estos modelos, los controladores predictivos son diseñados, considerando para ello un apriete de restricciones del sistema basado en la información proporcionada por los intervalos. Finalmente, estos modelos de intervalos y controladores son probados mediante simulación para un caso de estudio aplicado, correspondiente al control de un sistema de climatización para una oficina.

Dedicado a mi familia y amigos.

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a todas las personas que han aportado directa e indirectamente en el desarrollo de este trabajo, permitiendo que lograra cumplir mi objetivo de completar la carrera de ingeniería civil eléctrica, junto con el programa de magíster asociado.

Ha pasado un poco más de 7 años desde que entre a esta universidad, periodo que estuvo lleno de arduo estudio y trabajo. Esta etapa universitaria sólo fue posible de sobrellevar, gracias al apoyo brindado por mi familia y todos los compañeros que conocí a lo largo de estos años. Si tuviera que nombrarlos a todos en esta sección, claramente una pagina no sería una extensión suficiente para agradecerles a todos. Debido a esto, a continuación destacaré a los grupos de personas, cuyo apoyo fue fundamental durante la etapa final de la carrera.

En particular, en estos agradecimientos destacaré primero el aporte que tuvo mi familia, que me apoyó en las distintas elecciones importantes que tuve que tomar a lo largo de estos años, como por ejemplo, cuando escogí que seguiría la carrera de ingeniería eléctrica o como cuando tomé la decisión de seguir con el postgrado. Esto permitió que tuviera la seguridad necesaria para poder arriesgarme en las decisiones que finalmente tomé.

En segundo lugar, destaco a los amigos y compañeros con los que compartí en la universidad distintos momentos de alegría, estrés, cansancio y relaxo. Entre ellos hago una mención especial al grupo conocido como “los refugiados” con los cuales compartí momentos de ocio y distensión, útiles para sobrevivir al estrés de la universidad. En este punto, también quiero mencionar al grupo del “ex paraíso fiscal” del laboratorio de automática, con los cuales se pasaron buenos momentos jugando Smash durante los horarios de almuerzo. En serio les agradezco por las gratas instancias vividas, y por retrasar la escritura de esta tesis unos cuantos meses.

Hago una mención especial también a “el grupete”, grupo de amigos del colegio con los cuales se ha logrado mantener viva una amistad de años. Si bien estuvimos bien repartidos por un tiempo, hemos logrado mantener el contacto con el pasar del tiempo. Les agradezco enormemente el apoyo que me han brindado durante estos años.

Finalmente quisiera agradecer al proyecto FONDECYT 1170683 “Robust Distributed Predictive Control Strategies for the Coordination of Hybrid AC and DC Microgrids”, al Solar Energy Research Center SERC-Chile (CONICYT/FONDAP/ Project under Grant 15110019), al Instituto de Sistemas Complejos de Ingenieria (CONICYT – PIA – FB0816) y al FONDECYT Postdoctorado - 3170040, por su apoyo financiero al desarrollo de esta tesis.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Hipótesis	3
1.2. Objetivos	3
2. Control Predictivo Robusto	4
2.1. Control predictivo clásico	4
2.1.1. Formulación del problema	5
2.1.2. Formulación dual y nociones de estabilidad	6
2.2. Control predictivo robusto	8
2.2.1. Formulación del sistema	9
2.2.2. Estabilidad del sistema	9
2.2.3. Optimización a lazo abierto	10
2.2.4. Optimización a lazo cerrado	13
2.3. Discusión	18
3. Intervalos Basados en Modelos Lineales y Difusos	20
3.1. Introducción	20
3.2. Intervalos basados en modelos lineales	21
3.2.1. Región de confianza para el vector de parámetros	22
3.2.2. Intervalos de confianza para los parámetros	22
3.2.3. Intervalo de confianza para el valor esperado del modelo	23
3.2.4. Intervalos de predicción para observaciones futuras	24
3.2.5. Métricas de desempeño	24
3.3. Intervalos basados en modelos difusos	26
3.3.1. Modelos difusos Takagi & Sugeno	26
3.3.2. Intervalos difusos por método de la covarianza	29
3.4. Discusión	31
4. Propuestas de Intervalos para Modelación de Sistemas	32
4.1. Características del sistema a modelar	32
4.2. Propuestas de intervalos difusos	33
4.2.1. Intervalos con dependencia de los pasos de predicción	34
4.2.2. Intervalos con dependencia al instante de la predicción	34
4.2.3. Intervalos con probabilidad de cobertura decreciente	36
4.3. Estructura de intervalos para sistemas dinámicos	38
4.3.1. Intervalo para modelo difuso en variables de estado	38

4.3.2.	Entrenamiento y sintonización de la estructura propuesta	43
4.3.3.	Extensión para modelos autorregresivos con variables exógenas	46
4.4.	Discusión	47
5.	Control Predictivo Robusto Basado en Intervalos Difusos	49
5.1.	Planteamiento del problema de control	49
5.2.	Control basado en intervalos para la perturbación	50
5.3.	Control basado en intervalos para el estado	57
5.4.	Control basado en intervalos para modelos autorregresivos con variable exógena	59
5.5.	Discusión	60
6.	Caso de Estudio: Sistemas Dinámicos No-Lineales	62
6.1.	Planteamiento del sistema en variables de estado	62
6.2.	Modelación mediante intervalos de la perturbación externa	64
6.3.	Modelación mediante intervalos de la dinámica del sistema	67
6.4.	Implementación de controladores propuestos	69
6.5.	Extensión a sistemas autorregresivos con variable exógena	75
6.6.	Discusión	82
7.	Caso de Estudio: Sistemas de Climatización	84
7.1.	Introducción	85
7.2.	Modelación y control de sistemas HVAC	87
7.2.1.	Modelo dinámico para la temperatura	88
7.2.2.	Discretización del modelo	90
7.2.3.	Dimensionamiento del modelo	92
7.2.4.	Descripción del problema de climatización	93
7.3.	Modelación de perturbaciones externas	97
7.3.1.	Identificación de modelos para temperatura ambiente	97
7.3.2.	Identificación de modelos para ganancia interna de calor	102
7.4.	Dimensionamiento del tiempo de muestreo	108
7.5.	Control predictivo robusto basado en intervalos para la perturbación	110
7.6.	Modelación de la variable de estado	114
7.7.	Control predictivo robusto basado en intervalos para las variables de estado .	116
7.8.	Discusión	119
8.	Conclusiones	121
	Bibliografía	125

Índice de Tablas

6.1.	Resultados intervalos con cobertura fija para perturbación externa	65
6.2.	Resultados intervalos con cobertura decreciente para perturbación externa	65
6.3.	Resultados intervalos de estado con parámetros de sintonía separados	67
6.4.	Resultados intervalos de estado con parámetros de sintonía globales	67
6.5.	Resultados intervalos de estado con cobertura decreciente	68
6.6.	Comparación entre MPC implementados	74
6.7.	Resultados de intervalos para y_k con cobertura fija	76
6.8.	Resultados de intervalos para y_k con cobertura decreciente	76
6.9.	Comparación entre MPC implementados para modelo autorregresivo	81
7.1.	Parámetros para modelo HVAC compuesto por varias zonas térmicas	90
7.2.	Dimensiones para zona térmica	92
7.3.	Parámetros para modelo HVAC del caso de estudio	92
7.4.	Valores numéricos de los parámetros en la fórmula de potencia	94
7.5.	Valores numéricos para los límites físicos de los actuadores	96
7.6.	Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 10 minutos	99
7.7.	Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 20 minutos	100
7.8.	Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 30 minutos	100
7.9.	Métricas para intervalos de T_a con cobertura decreciente	101
7.10.	Programa de actividades en una oficina durante un día laboral	104
7.11.	Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 10 minutos	105
7.12.	Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 20 minutos	107
7.13.	Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 30 minutos	107
7.14.	Métricas para intervalos de P_d con cobertura decreciente	107
7.15.	Comparación de resultados entre RMPC- ω y MPC clásico	113
7.16.	Métricas para intervalos de x_k con α global y cobertura fija	115
7.17.	Métricas para intervalos de x_k con α global y cobertura decreciente	115
7.18.	Comparación de resultados entre MPC implementados	117

Índice de Ilustraciones

2.1.	Formulación dual del problema de optimización.	7
2.2.	Árbol del problema de optimización robusto.	14
4.1.	Diagrama de los métodos de sintonización propuestos	35
6.1.	Generación de la señal ω_k	63
6.2.	Intervalo de predicción para ω_k con cobertura fija	66
6.3.	Intervalo de predicción para ω_k con cobertura decreciente	66
6.4.	Intervalo de predicción para x_k con cobertura fija	68
6.5.	Intervalo de predicción para x_k con cobertura decreciente	69
6.6.	Implementación de MPC con propagación de la incerteza	70
6.7.	Intervalo de estado dado por propagación de la incerteza externa	71
6.8.	Resultados de implementación para RMPC-FI90	71
6.9.	Intervalo de estado con cobertura fija	72
6.10.	Resultados de implementación para RMPC-FI	72
6.11.	Variable manipulada con RMPC-FI	73
6.12.	Intervalo de estado con cobertura decreciente	73
6.13.	Implementación de MPC determinístico	74
6.14.	Implementación de RMPC-FI90 aplicado al caso autorregresivo	77
6.15.	Intervalo de y_k con cobertura fija	78
6.16.	Implementación de RMPC-FI para el caso autorregresivo	78
6.17.	Variable manipulada obtenida con RMPC-FI para el caso autorregresivo	79
6.18.	Intervalo de y_k con cobertura decreciente	79
6.19.	Implementación del RMPC- ω para el caso autorregresivo	80
6.20.	Intervalo de y_k dado por la propagación de la incerteza externa	80
6.21.	Implementación de MPC determinístico	81
7.1.	Variables relevantes para sistema HVAC simple de una zona térmica.	88
7.2.	Diagrama de bloques para sistema HVAC de una zonas térmica	89
7.3.	Intervalo con cobertura fija para predicción de T_a a 6 pasos	99
7.4.	Intervalo con cobertura fija para predicción de T_a a 18 pasos	100
7.5.	Intervalo con cobertura decreciente para predicción de T_a a 18 pasos	101
7.6.	Intervalo con cobertura fija para predicción de P_d a 6 pasos	106
7.7.	Intervalo con cobertura fija para predicción de P_d a 18 pasos	106
7.8.	Intervalo con cobertura decreciente para predicción de P_d a 18 pasos	108
7.9.	Ejemplo de prueba de dimensionamiento	109
7.10.	Prueba al cambiar la variación de temperatura en el actuador	110

7.11. Variable controlada con RMPC- ω	111
7.12. Variable manipulada obtenida con RMPC- ω	111
7.13. Variable controlada con MPC determinístico	112
7.14. Comparación de variable controlada obtenida con MPC y RMPC- ω	113
7.15. Resultado variable controlada con RMPC-FI	116
7.16. Resultado variable manipulada con RMPC-FI	116
7.17. Comparación de resultados para variable controlada	118

1 Introducción

El control predictivo basado en modelos (MPC) es una técnica de control que usa los modelos identificados de un sistema, para realizar una optimización del comportamiento futuro que tendrá la planta que se busca controlar. Para lograr esto, el controlador resuelve un problema de minimización determinado por una cierta función de costos, y sujeto al valor de las predicciones del sistema obtenidas con el modelo identificado. Considerando que las acciones de control afectan al cálculo de las predicciones, sus valores son decididos a partir de la resolución del problema de optimización [1].

Los sistemas dinámicos normalmente poseen restricciones que deben ser cumplidas. Estas, al ser consideradas en el problema de optimización definido para la estrategia de control MPC, logran ser satisfechas en los casos donde se posee un conocimiento cabal de las distintas variables que ingresan al modelo. La problemática que puede surgir para este tipo de controlador se presenta cuando el sistema dinámico se encuentra afectado por variables externas con comportamiento estocástico, las cuales aportan con errores al cálculo de las predicciones del sistema. La ocurrencia de esta situación puede provocar que no todo el tiempo se cumplan las restricciones impuestas para el sistema, lo cual puede provocar problemas para la correcta operación de la planta a controlar.

Como respuesta a la problemática que significa la incertidumbre aportada por estas señales externas que perturban al sistema con su comportamiento estocástico, surge una variante denominada como MPC robusto. Esta estrategia se encarga de tomar en cuenta el efecto de esta incerteza para reducir los casos de violaciones de las restricciones del sistema, utilizando para ello información conocida previamente sobre el comportamiento de la señal de perturbación externa. En las estrategias de MPC robusto, el controlador recibe las predicciones de las señales de perturbación externa, junto con información adicional acerca de su incerteza asociada. Así, el controlador toma en cuenta información adicional y propone acciones de control que evitan la violación de las restricciones, considerando los peores casos de valores que pueden adquirir las distintas realizaciones de la perturbación externa. Algunos de los algoritmos de MPC robusto usan las estrategias de horizonte deslizante finito y apriete de restricciones para las predicciones nominales, las cuales han sido reportadas para sistemas lineales y no-lineales por ejemplo en [2, 3, 4]. Para dichos controladores, se consideran los denominados parámetros de apriete, los cuales se encuentran asociados a los límites del conjunto que contienen a la incertidumbre presente en las predicciones de las señales de perturbación externa. En el trabajo a desarrollar, el uso de modelos e intervalos difusos es propuesto para proporcionar la información necesaria para los límites de la incerteza y así lograr el cálculo de los respectivos parámetros de apriete mencionados previamente.

Los modelos difusos son herramientas de modelación que surgieron para caracterizar diferentes tipos de señales y procesos dinámicos, esto debido a su característica de aproximador universal. Uno de los principales modelos difusos que se puede encontrar en la literatura son los desarrollados por Takagi y Sugeno en [5], los cuales combinan varios sub-modelos lineales, con el propósito de lograr representar la dinámica de sistemas complejos. El modelo de intervalo difuso presentado en [6, 7] surge como una herramienta de robustez que permite complementar la información que proporciona el modelo difuso Takagi & Sugeno [5], proporcionando límites para la salida del sistema. Dichos límites son obtenidos a partir del uso de una función que considera la incerteza asociada al modelo difuso previamente identificado. Este modelo de intervalo, también puede ser definido con un cierto nivel de confianza, el cual determina el porcentaje esperado de casos donde el intervalo efectivamente contendrá a la medición real de la señal modelada.

Con la finalidad de lograr una adecuada caracterización de la incertidumbre y por consiguiente una correcta implementación del controlador predictivo robusto, en este trabajo se proponen tres esquemas distintos para adecuar los intervalos difusos reportados en la literatura a distintos comportamientos de incerteza. Adicionalmente, se presenta en este trabajo una nueva estructura de intervalos difusos, ideada para manejar toda la incerteza que se presenta cuando se identifica un modelo difuso para un sistema dinámico. En este punto, se identifican dos tipos de incertezas que provocan los errores de predicción para las variables del sistema a controlar. En primer lugar se presenta un valor de incerteza asociado al propio modelo identificado, ya que este no necesariamente coincidirá exactamente con la dinámica real que afecta al sistema a controlar. La segunda fuente de incerteza corresponde al error de predicción de las señales de perturbación externa que ingresan al sistema. El controlador a proponer en esta tesis busca usar esta nueva estructura de intervalos que combine ambas fuentes de incertezas, para lograr una implementación de un control predictivo robusto con mejor manejo del cumplimiento de las restricciones del sistema. El desarrollo de la nueva estructura de intervalo ideada para modelar sistemas dinámicos y el posterior diseño del controlador respectivo, es llevada a cabo usando como base dos tipos de sistemas no-lineales, uno definido en variables de estado y otro representado por una dinámica autorregresiva con variable exógena.

Con el propósito de mostrar los beneficios de las propuestas presentadas en esta tesis, se plantean dos casos de estudio simples. El primero se encuentra basado en el control de un sistema no-lineal definido en variables de estado. El segundo caso de estudio consiste en el control de un sistema no-lineal autorregresivo con variable exógena. Para ambos casos, el sistema no-lineal es afectado por perturbaciones externas, y el controlador debe realizar un seguimiento de una banda de referencia. Finalmente, se plantea un caso de estudio aplicado, compuesto por un sistema de climatización de una oficina. La finalidad de este último caso de estudio es probar el funcionamiento de las estrategias de control predictivo robusto propuestas en esta tesis, llevando a cabo un análisis de simulaciones más cercanas a lo que sería una implementación real de los controladores.

1.1. Hipótesis

En este trabajo se formulan nuevos esquemas de intervalos difusos, con los cuales se diseñan estrategias de control predictivo robusto. Al respecto, se plantean las siguientes hipótesis:

- Es posible caracterizar adecuadamente con intervalos difusos la incertidumbre presente en un sistema afectado por señales de perturbación externa.
- Es posible adecuar el proceso de sintonización de intervalos para poder modelar correctamente señales con incertezas que difieren en su comportamiento a lo largo del tiempo.
- A partir de los intervalos propuestos para modelar sistemas dinámicos, es posible diseñar una estrategia de control predictivo robusto que permita establecer un determinado nivel de confianza para la satisfacción de restricciones del sistema.
- Para evitar las infactibilidades que se pueden presentar en la optimización que resuelve el controlador predictivo debido al aumento del ancho de intervalos con respecto al paso de predicción, es posible fijar una probabilidad de cobertura decreciente durante el proceso de sintonización de intervalos, sin generar efectos negativos en la operación del sistema controlado.

1.2. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es diseñar estrategias de control predictivo robusto para controlar sistemas dinámicos no-lineales sujetos a incertezas. Estos diseños se obtendrán basándose en la caracterización de la incerteza presente en las predicciones de la variable a controlar, llevada a cabo mediante el uso de intervalos difusos. Con el uso de las nuevas estructuras de intervalos propuestas se espera una mejor caracterización del error de predicción del sistema, lo que mejorará el desempeño de los controladores predictivos robustos.

Para lograr esto, se pueden enumerar los siguientes objetivos específicos:

- Diseño de intervalos difusos enfocados en la modelación de sistemas dinámicos afectados por perturbaciones externas. Estos intervalos deberán tener en consideración el efecto de dos fuentes de incerteza independientes, la incerteza propia del modelo y el error de predicción de las perturbaciones futuras.
- A partir de los intervalos nombrados en el punto anterior, diseñar una estrategia de control predictivo robusta que se base en el apriete de restricciones del sistema.
- Realizar pruebas de simulación para validar las diferentes propuestas de intervalos y controladores. Para esto, se usarán como casos de estudio el control a un sistema no-lineal simple y la aplicación sobre un sistema de climatización.

2 Control Predictivo Robusto

Este capítulo tiene como objetivo mostrar las bases del control predictivo basado en modelos, explicando las ideas detrás de su formulación y presentando su implementación para sistemas lineales. Esta revisión de la teoría de control predictivo es realizada con la finalidad de comprender el funcionamiento de este tipo de estrategias, y así lograr proponer variantes que puedan ser aplicadas a plantas del tipo no-lineal. La revisión teórica tratada en este capítulo logra sentar las bases para la propuesta de control robusto con intervalos difusos que se presentan en esta tesis.

El capítulo se organiza como sigue: primero se revisa la formulación del control predictivo clásico aplicado a sistemas lineales, para luego describir las condiciones de estabilidad que se deben considerar al momento de su implementación.

Posteriormente se expone la formulación y condición de estabilidad del controlador predictivo robusto, el cual considera un sistema lineal que debe hacer frente a la presencia de perturbaciones. Finalmente, se revisan las distintas estrategias desarrolladas en la literatura para implementar el problema de optimización que define al controlador robusto.

2.1. Control predictivo clásico

Los beneficios de las leyes de control que utilizan la información del estado para realimentar el sistema han sido estudiados por varios años. Un punto importante de esta teoría fue el denominado control óptimo [8], el cual optimizaba el comportamiento del sistema al ser controlado mediante una ley de realimentación de estado $u = -Kx$, calculando el valor de la ganancia K a partir de la solución de la ecuación de Ricatti para estado estacionario [9]. El problema de esta estrategia es que sus beneficios son difíciles de alcanzar si el sistema se encuentra sujeto a restricciones. Ante esta problemática surge el control predictivo basado en modelos, el cual busca resolver el problema de optimización considerando las distintas restricciones que afectan al sistema.

El control predictivo basado en modelos es en una estrategia que busca optimizar el rendimiento de un sistema, usando para ello la información que aporta el modelo de la planta que se desea controlar[10]. Esto se logra a través de las predicciones de salida de la planta que se obtienen usando la información disponible de los valores pasados del sistema, proyectando el comportamiento futuro a partir del modelo conocido.

En esta sección se expondrán las principales características del caso clásico del control predictivo basado en modelos, conocido también como MPC por sus siglas en ingles (Model Predictive Control), el cual asume un completo conocimiento de las variables que afectarán a la dinámica del sistema, llevando a cabo la estrategia de control desde un enfoque determinístico.

2.1.1. Formulación del problema

Para el problema de optimización se considera un sistema en variables de estado discreto e invariante en el tiempo, regido por un modelo representado por las ecuaciones:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.1)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.2)$$

$$Fx_k + Gu_k \leq 1, \quad (2.3)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector compuesto por las n_x variables de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector formado por las n_u variables manipuladas e $y_k \in \mathbb{R}$ es la variable de salida del modelo, esto para el instante actual k .

En (2.1), $A \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$ y $B \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$ son las matrices que definen a la dinámica de la planta, las cuales contienen a los parámetros que son multiplicados por el estado y las variables manipuladas respectivamente. Por otra parte, $C \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x}$ es la matriz que define a la salida del modelo a partir de los valores que adquieren las diferentes variables de estado. El sistema definido en (2.1) se encuentra sujeto a cumplir las condiciones dadas por (2.3), donde $F \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_x}$ y $G \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_u}$ son las matrices que definen a las n_c restricciones que deben satisfacer las variables del sistema.

El objetivo de control definido para esta estrategia es optimizar el comportamiento de la planta a lo largo del tiempo, utilizando la siguiente función cuadrática como métrica de desempeño:

$$J(x_k, u_k) = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k, \quad (2.4)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$ y $R \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_u}$ son las matrices de costo asociados al estado y las variables manipuladas. Para lograr este objetivo, la estrategia de control predictivo propone definir una secuencia de variables manipuladas futuras, las cuales serán contenidas en el vector $u = [u_k^T, \dots, u_{k+N-1}^T]^T$. Con dicha secuencia se procede a calcular las predicciones del estado dentro de un horizonte de predicción N , siendo estas contenidas en el vector $x = [x_{k+1}^T, \dots, x_{k+N}^T]^T$. Para obtener los respectivos valores de la secuencia que componen al vector u , se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{x, u} & \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_{k+i}^T Q x_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i} \right) + x_{k+N}^T P x_{k+N} \\ \text{s.a.} & \quad x_{k+i} = Ax_{k+i-1} + Bu_{k+i-1}, \\ & \quad Fx_{k+i-1} + Gu_{k+i-1} \leq 1, \\ & \quad V_T x_{k+N} \leq 1, \\ & \quad i = \{1, 2, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde el par de vectores (\mathbf{x}, \mathbf{u}) corresponden a las variables de decisión. En (2.5) la función objetivo utilizada es el resultado de aplicar (2.4) a todas las variables predichas hasta $N - 1$, agregando además un termino adicional asociado al instante $k + N$. Esto último se debe a que el problema de optimización no considera u_{k+N} como variable de optimización y sólo se realiza el cálculo de la predicción x_{k+N} . El nuevo termino $x_{k+N}^T P x_{k+N}$ incluido en la función objetivo se denomina costo terminal y se encuentra definido a partir de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$.

En (2.5) se destaca además que las distintas predicciones dentro del horizonte de predicción deben satisfacer (2.3). Nuevamente, considerando que el instante $k + N$ sólo posee la variable de decisión x_{k+N} , se utiliza la condición adicional de la forma:

$$V_T x_{k+N} \leq 1, \quad (2.6)$$

la cual es denominada restricción terminal y se encuentra definida a partir de la matriz $V_T \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_x}$.

El controlador se encarga de resolver el problema (2.5) en el instante actual k , obteniendo así valores numéricos para la secuencia contenida en el vector \mathbf{u} . Luego, procede a aplicar al sistema los primeros valores de la secuencia asociados al vector de variables manipuladas u_k . Este proceso se va repitiendo a lo largo del tiempo, resolviendo el mismo problema de optimización instante a instante. A continuación, en el Algoritmo 1 se resume el procedimiento seguido por esta estrategia de control.

Algoritmo 1: Estrategia de Control Predictivo

para $k \in \mathbb{N}$ **hacer**

 Se mide x_k ;

 Se obtienen las secuencias $\mathbf{u} = [u_k^T, \dots, u_{k+N-1}^T]^T$ y $\mathbf{x} = [x_{k+1}^T, \dots, x_{k+N}^T]^T$, resolviendo el problema de optimización (2.5);

 Se aplica a la planta real los valores de la secuencia \mathbf{u} asociados a u_k ;

fin

2.1.2. Formulación dual y nociones de estabilidad

En la implementación de la estrategia de control predictivo, idealmente se desearía realizar la optimización (2.5) considerando todas las entradas y salidas del sistema desde el instante actual hasta un tiempo infinito, esto para garantizar que en ningún momento futuro el sistema se desestabilice. Sin embargo, una implementación con horizonte de predicción infinito es impracticable, y utilizar valores de N muy grandes se traducirían en un costo computacional elevado.

Debido a esto, se desea plantear una formulación que sirva para implementar un controlador predictivo con horizonte finito y que logre asegurar la estabilidad del sistema hasta un tiempo infinito. Para esto, se considera la denominada formulación dual para el problema de optimización [11], la cual consiste en la separación de las predicciones de la salida del sistema en dos modos. En la figura 2.1 se muestra un ejemplo gráfico de esta formulación, para la cual se consideran los modos presentados a continuación:

- **Modo 1:**

Consiste en las primeras N predicciones obtenidas para la salida del sistema $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+N}\}$, cuyos valores dependen de las acciones de control proyectadas para cada uno de los N instantes $\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+N-1}\}$. Para este modo, el valor de las N acciones de control corresponden a las variables de optimización a utilizar.

- **Modo 2:**

En este modo están incluidas las predicciones desde el instante $N+1$ hasta infinito, considerando para este caso como acción de control la ley de realimentación de estado $u = -Kx$. En este caso, a diferencia del modo 1, las acciones de control no se consideran variables de optimización.

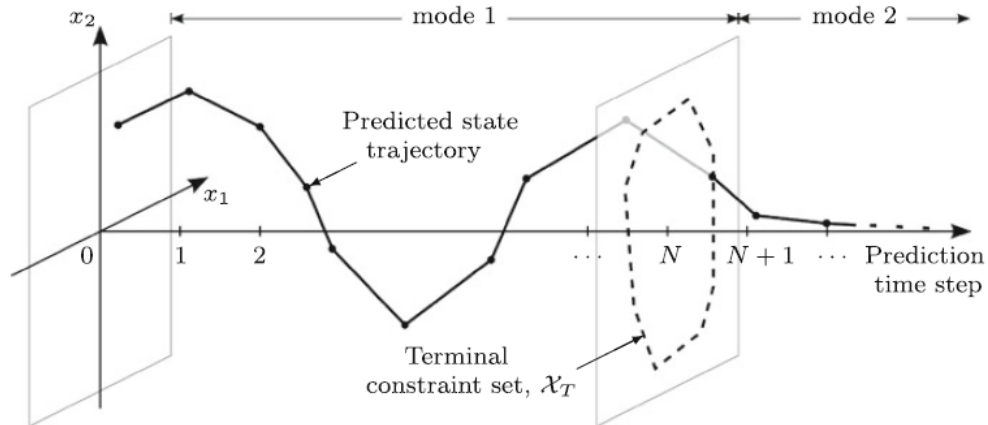


Figura 2.1: Formulación dual del problema de optimización.

Imagen extraída del libro “*Model Predictive Control Classical, Robust and Stochastic*” de Basil Kouvaritakis y Mark Cannon. Springer International Publishing AG, 2016.

Para esta formulación, el problema de optimización planteado debe poder llevar al estado de la planta a un conjunto denominado terminal (\mathcal{X}_T), el cual debe caracterizarse por asegurar el correcto funcionamiento de la ley de control $u = -Kx$. Basándose en la restricción presentada en (2.6), se define el conjunto terminal de la forma:

$$\mathcal{X}_T = \{x : V_T x \leq 1\}, \quad (2.7)$$

donde V_T se debe escoger de forma que cumpla las condiciones para que \mathcal{X}_T sea denominado Conjunto Positivamente Invariante [10].

Un conjunto Ω se denomina positivamente invariante si el valor del estado x_k cumple con las restricciones del problema y si al considerar la acción de control definida como $u_k = \kappa(x_k)$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- $x_k \in \Omega$,
- $Ax_k + B\kappa(x_k) \in \Omega$,
- $\kappa(x_k) \in \mathbb{U}$,

donde \mathbb{U} es el conjunto donde u_k cumple con las restricciones impuestas por el sistema sobre los valores que puede adquirir la variable manipulada.

Considerando esta definición, si en el modo 1 el controlador cumple con la restricción de llevar al estado del sistema a este conjunto invariante Ω , entonces se puede garantizar que el estado permanecerá en dicho conjunto en los instantes futuros correspondientes al modo 2, mientras se cumplan las restricciones impuestas sobre u_k .

Ahora, para realizar un análisis de estabilidad de esta formulación para el problema de optimización, se utiliza la teoría desarrollado por Lyapunov [12]. Para ello, se considera una función $V(x_k)$, la cual debe ser definida positiva dentro de un conjunto S y además para asegurar estabilidad asintótica debe satisfacer para todo $x \in S$ la desigualdad:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\Phi(\|x\|). \quad (2.8)$$

El término $\Phi(\|x\|)$ presente en la desigualdad de Lyapunov corresponde a un funcional que depende de las variables de optimización y que para poder concluir estabilidad asintótica debe ser definida positiva. Para el caso del problema propuesto en (2.5), es posible corroborar que se cumple el criterio de estabilidad si es que la función de costo terminal ($x_N^T P x_N$) satisface la condición de Lyapunov:

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P \leq -(Q + K^T R K). \quad (2.9)$$

Si la función de costo terminal cumple la condición presentada, es posible obtener una expresión simple de la desigualdad de Lyapunov para los valores óptimos de la función objetivo utilizada en (2.5). La simplicidad de esta expresión es debido a que varios términos que componen a $J^*(x_k)$ y $J^*(x_{k+1})$ se repiten, por lo que al momento de realizar la resta se eliminan entre si. La condición de Lyapunov para la función objetivo queda definida de la forma:

$$J^*(x_{k+1}) - J^*(x_k) \leq -(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k). \quad (2.10)$$

Considerando que las matrices pesos Q y R deben ser definidas positivas para cumplir con la condición impuesta para el termino $\Phi(\|x\|)$ de la desigualdad (2.8), se logra corroborar que el problema de optimización completo es asintóticamente estable, pues la función de costo cuadrática sigue un comportamiento decreciente dado por la inecuación anterior.

2.2. Control predictivo robusto

A diferencia de lo visto en el caso clásico, los sistemas reales no poseen un comportamiento rigido por una dinámica completamente conocida. Normalmente existe un cierto grado de incerteza en los valores de los parámetros y perturbaciones externas presentes en las ecuaciones del proceso, debido a la presencia de ruido en las señales medidas y el posible comportamiento estocástico de variables relevantes que afectan al sistema. Al considerar esto, el cumplimiento de las restricciones impuestas al problema de optimización puede verse comprometida al implementar un MPC clásico que no considere el efecto de esta incerteza en las predicciones. En

esta sección se describirán las soluciones planteadas desde un enfoque asociado a la robustez del controlador, para esta nueva problemática de la incertidumbre y perturbaciones presentes en la dinámica del sistema.

2.2.1. Formulación del sistema

El modelo del sistema que se plantea para este caso es similar al utilizado en el control predictivo clásico, pero ahora considerando la presencia de perturbaciones aditivas y multiplicativas en la dinámica del sistema. La ecuación que rige al sistema es definida de la forma:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_k \omega_k, \quad (2.11)$$

$$F x_k + G u_k \leq 1, \quad (2.12)$$

donde $A_k \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$ son matrices variantes en el tiempo y $D \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\omega}$ es la matriz constante que multiplica a las n_ω perturbaciones externas contenidas en el vector $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$.

La complejidad de la implementación del control predictivo clásico para controlar (2.11) se debe a que los valores futuros de A_k , B_k y ω_k son desconocidos. Considerando esto, los valores de las predicciones x_{k+i} calculados en el problema de optimización, no necesariamente coincidirán con las mediciones reales que se tomaran de la planta en el futuro. Esta problemática genera que con la utilización del control predictivo clásico, no se pueda asegurar con certeza que el estado en el instante siguiente cumpla con (2.12). Debido a esto, se plantea la variante robusta del control predictivo, la cual debe ser capaz de considerar el efecto de la incerteza de las perturbaciones.

Para cumplir con el objetivo de optimizar los valores futuros del estado y las variables manipuladas, la estrategia de control predictivo robusto también considera la idea de obtener los valores de la secuencia de variables manipuladas u_{k+i} , mediante la implementación de un problema de optimización similar a (2.5). Dentro de las implementaciones robustas del control predictivo se destacan dos formas de abordar el problema de optimización, la denominada optimización a lazo abierto y la optimización a lazo cerrado. Ambas alternativas serán abordadas más adelante, pero antes se deben repasar las similitudes y cambios que se deben considerar al momento de analizar la estabilidad del problema de optimización que se procederá a implementar.

2.2.2. Estabilidad del sistema

Basado en lo indicado en [10] para estrategias robustas de control predictivo, para este caso se mantiene la idea de implementar la formulación dual planteada para el caso del MPC clásico. En la variante robusta del controlador MPC, se requiere que en el modo 1 el estado pueda llegar al conjunto ahora denominado Positivamente Invariante y Robusto. La definición de este nuevo conjunto es similar al presentado previamente para el MPC clásico, pero ahora incluyendo el efecto de las perturbaciones en la condición para x_{k+1} :

- $x_k \in \Omega$
- $A_k x_k + B_k \kappa(x_k) + E \omega_k \in \Omega$
- $\kappa(x) \in \mathbb{U}$.

Para poder demostrar estabilidad, hay que considerar ahora que el efecto de las perturbaciones inciertas pueden provocar que la condición de Lyapunov planteada en (2.8) pueda adquirir un valor nulo, pero no necesariamente el estado convergerá finalmente a su valor objetivo. Para solventar este caso en particular, se propone la siguiente definición:

- Sea el conjunto $S = \{x : V(x) = 0\}$, tal que para todo $x \notin S$ se cumple la condición:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\Phi(\|x\|). \quad (2.13)$$

La función de Lyapunov es decreciente fuera del conjunto S , por lo tanto se puede afirmar que el valor del funcional deberá converger a dicho conjunto en un cierto instante. Se espera además que se presente una tendencia de reingreso en los casos donde la perturbación saque a la función de Lyapunov de este conjunto S .

Habiendo mencionado las distinciones que se deben considerar para aplicar el mismo análisis de estabilidad realizado para la formulación clásica del MPC, se puede proceder a revisar las distintas propuesta de formulaciones para el problema de optimización. A continuación se repasan algunas de las implementaciones enunciadas en la literatura, separándolas según el enfoque escogido para llevar a cabo la optimización.

2.2.3. Optimización a lazo abierto

En primer lugar, la optimización a lazo abierto consiste en el enfoque donde la secuencia de variables manipuladas es directamente obtenida a partir de las variables de decisión del problema de optimización. Definiendo el vector $\vec{c} = [c_k^T, \dots, c_{k+N-1}^T]^T$, donde $c_{k+i} \in \mathbb{R}^{n_u}$ son las variables de optimización, las acciones de control que ingresan al sistema se pueden calcular como:

$$u_{k+i} = c_{k+i}, \quad (2.14)$$

aplicando esto para $i = \{0, \dots, N-1\}$.

Otra opción para calcular la acción de control, permite considerar una ganancia de realimentación del estado en la ley de control, basándose en la propuesta presentada en [2]. Considerando esto, la acción de control dentro del modo 1 es calculada de la forma:

$$u_{k+i} = K x_{k+i} + c_{k+i}, \quad (2.15)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_x}$ es una ganancia fija, calculada previamente a la implementación del controlador.

Si bien, en la literatura el cálculo de la acción de control dada por (2.15) está considerada dentro de la denominación de optimización a lazo abierto, esta presenta una estructura de un sistema de control de lazo cerrado. Para evitar confusiones con el nombre de la formulación

del problema de optimización, en este trabajo de tesis se denotará como semi-lazo cerrado al problema que considere la ley de control (2.15).

Como (2.15) sólo se define para el modo 1, se asume que el segundo modo mantiene como ley de control una realimentación de estado simple, de la forma $u = -Kx$. Teniendo en cuenta esto, la cantidad de variables de optimización que se considera para el problema queda directamente relacionado con el horizonte de predicción. El problema entonces queda determinado por un total de N variables de decisión, correspondientes a los términos $\{c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+N-1}\}$, los cuales son utilizados en (2.14) o (2.15) para calcular las entradas del sistema y así obtener los valores de las N predicciones del estado $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+N}\}$.

Es importante precisar que el abuso de notación empleado para originalmente categorizar (2.15) como parte de la optimización de lazo abierto, se debe a que al momento de la implementación, las variables de optimización c_{k+i} no inciden directamente en la realimentación del estado [10].

Para el caso semi-lazo cerrado, si se reemplaza (2.15) en (2.11) y se define el valor de la nueva matriz de transición de estado $\Phi_k = (A_k + B_k K)$, la planta discreta que se busca controlar queda regida por la ecuación:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + B_k c_k + D \omega_k. \quad (2.16)$$

Separación del estado y formulación de restricciones

Para poder expresar de manera más clara las restricciones del problema de optimización, se procede a descomponer el vector de estado (x_k) en 2 variables separadas. Por un lado se considera la componente que describe todo el comportamiento nominal que posee la evolución del estado (s_k), la cual debe depender de las predicciones de las matrices Φ_k , B_k y del estado. La segunda componente (e_k) debe describir todo el comportamiento de la incerteza del sistema, por lo que dicha variable debe depender de los errores de predicción de todos los elementos que componen a la dinámica (2.16). Haciendo una separación de los componentes de (2.16), se pueden obtener las siguientes dinámicas para las dos nuevas variables:

$$s_{k+1} = \hat{\Phi}_k s_k + \hat{B}_k c_k + D \hat{\omega}_k, \quad (2.17)$$

$$e_{k+1} = (\hat{\Phi}_k + \Phi_k^e) e_k + \Phi_k^e s_k + B_k^e c_k + D \omega_k^e, \quad (2.18)$$

donde $\hat{\Phi}_k$, \hat{B}_k y $\hat{\omega}_k$ corresponden a las predicciones conocidas de las matrices y perturbaciones que definen a la dinámica del estado en (2.16). Los elementos Φ_k^e , B_k^e y ω_k^e representan los errores de predicción y sus valores son desconocidos al momento de resolver el problema de optimización.

Considerando este nuevo escenario, se pueden expresar las restricciones del problema reescribiéndolas del siguiente modo:

$$F s_{k+i} \leq 1 - h_i, \quad (2.19)$$

$$h_i = \text{máx } F e_{k+i}. \quad (2.20)$$

Al expresar las restricciones de esta manera, la componente del estado que puede provocar eventuales incumplimientos de dichas condiciones queda registrada de manera explícita gracias al término h_i . Este nuevo parámetro presentado en (2.20) es el encargado de ponerse en el peor escenario de la incerteza presente en (2.18) para el cumplimiento de las restricciones. Por esto, el parámetro h_i es implementado como una maximización del término de la restricción del estado asociado a e_{k+i} , la cual se resuelve a partir de algún conocimiento previo del comportamiento de las distintas incertezas que influyen en la dinámica, como por ejemplo el valor de sus cotas.

De manera similar a lo realizado en las restricciones sobre el estado y la variable manipulada, se puede adaptar la restricción para el estado terminal definida en el caso clásico, siguiendo la misma lógica de considerar el peor escenario. La nueva restricción terminal que definida como:

$$V_T x_{k+N} \leq 1 - h_N, \quad (2.21)$$

$$h_N = \max V_T e_{k+N|k}. \quad (2.22)$$

Función objetivo y formulación del problema de optimización

Lo que falta definir para el problema de optimización desde el punto de vista de este enfoque es la función objetivo a utilizar. Para este caso donde la optimización es a lazo abierto, se consideran dos tipos de funciones de costos que funcionan de manera similar para este problema en específico:

- La norma del vector con las variables de optimización [10]

$$J = \|\vec{c}\|_W^2. \quad (2.23)$$

- La distancia de la variable de estado al conjunto terminal positivamente invariante y robusto [13]

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} d_{x_f}(x_{k+i}). \quad (2.24)$$

Denotando como J a la función de costos escogida entre (2.23) y (2.24), el problema de optimización a resolver con el algoritmo denominado como lazo abierto se puede resumir en la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \underset{\vec{c}}{\text{mín}} \quad & J \\ \text{s.a.} \quad & s_{k+i} = \hat{\Phi}_{k+i-1} s_{k+i-1} + \hat{B}_{k+i-1} c_{k+i-1} + D\hat{\omega}_{k+i-1}, \\ & F s_{k+i} \leq 1 - \max F e_{k+i|k} \\ & V_T s_{k+N} \leq 1 - \max V_T e_{k+N|k}, \\ & i = \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para esta implementación, se procede entonces de la siguiente forma. Primero se resuelve el problema de optimización, obteniendo los valores óptimos para $\{c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+N-1}\}$, luego

se construye el vector con las respectivas acciones de control siguiendo la ley mostrada en (2.14) o (2.15), para finalmente aplicar solamente los primeros elementos asociados a u_k en el sistema real.

Pero la optimización a lazo abierto no es la única de las estrategias de control predictivo robusto que se disponen. A continuación se expondrá sobre el segundo enfoque que existe para resolver el caso del MPC robusto, la llamada optimización a lazo cerrado.

2.2.4. Optimización a lazo cerrado

En el enfoque de optimización a lazo cerrado, a diferencia del caso anterior, se considera una incidencia directa de las variables de decisión en la forma en que se aplica la realimentación del estado para obtener la acción de control. Considerando esto, la secuencia de acciones de control puede ser definida de manera general como $u = [u_k(x_k), \dots, u_{k+N-1}(x_{k+N-1})]^T$, donde cada elemento u_{k+i} corresponde a un funcional que depende del estado y cuyos parámetros son definidos a partir de los valores que adquieren las variables de optimización.

En este enfoque se pueden destacar una serie de algoritmos definidos por la forma con la cual se calcula la acción de control. Entre estos algoritmos se encuentran las propuestas donde se resuelve el problema por realimentación general [14, 15] y por realimentación afín a las perturbaciones [16, 17], los cuales se describirán a continuación.

Problema por realimentación general

Para plantear el problema de optimización que define al MPC, se propone utilizar una realimentación general, donde las variables manipuladas dependan del valor de la variable de estado. Considerando esto, la secuencia de acciones de control es obtenida resolviendo el problema de optimización, dividiéndolo en varios sub-problemas asociados a cada instante predicho.

Para este algoritmo, considerando el mismo conjunto terminal x_T mencionado para la optimización en lazo abierto, se plantea una alternativa a la función de costos basada en lo propuesto en [18], que tenga la siguiente forma:

$$\mathbb{I}(x_{k+N}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{k+N} \in x_T \\ 1 & \text{si } x_{k+N} \notin x_T \end{cases} \quad (2.26)$$

Con esta función objetivo se penaliza el hecho de no haber llegado al conjunto terminal en el instante final del horizonte de predicción N . Para resolver este problema, se requiere utilizar herramientas como la programación dinámica para encontrar la solución de la serie de sub-problemas de optimización, donde se minimice la salida de la planta al escoger el valor de las variables manipuladas y al mismo tiempo se obtenga el peor escenario de las perturbaciones. Todo esto se va resolviendo para las N predicciones, por lo tanto el problema

de optimización completo queda definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{I}^*(x_k) = \min_{u_0} \max_{\omega_0} \dots \min_{u_{N-1}} \max_{\omega_{N-1}} \mathbb{I}(x_{k+N}), \quad (2.27)$$

donde las variables de decisión son $\{u_k(x_k), u_{k+1}(\hat{x}_{k+1}), \dots, u_{k+N-1}(\hat{x}_{k+N-1})\}$.

Para resolver este problema se necesita asumir que los valores limites que pueden adquirir las perturbaciones externas son previamente conocidos. Se considera para esto definir el conjunto W , el cual se encuentra formado por todos los posibles valores de perturbaciones que pueden llegar a afectar al sistema. Se plantean entonces las secuencias de perturbaciones $\{\omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+N-1}\}$, donde cada elemento debe adquirir el valor de alguno de los vértices del conjunto W . Se resuelve entonces el problema de optimización para cada una de las secuencias de perturbaciones que se pueden llegar a construir a partir de los vértices de W . En la figura 2.2 se muestra un árbol que ejemplifica la complejidad que adquiere el la formulación de este problema.

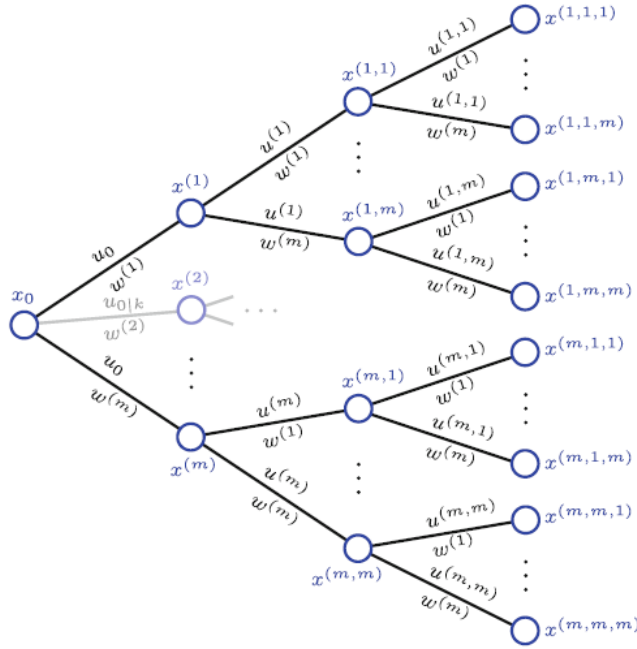


Figura 2.2: Árbol del problema de optimización robusto.

Imagen extraída del libro “*Model Predictive Control Classical, Robust and Stochastic*” de Basil Kouvaritakis y Mark Cannon. Springer International Publishing AG, 2016.

La utilización de este algoritmo resulta ser la implementación con la política de control más general, siendo además la que podría presentar el mejor rendimiento posible en función de la métrica de despeno escogida. El beneficio de esta formulación es que considera todos los peores escenarios posibles que se podrían presentar para el valor de la perturbación, sin embargo conlleva la desventaja de que toma demasiado tiempo para encontrar la solución óptima. El mayor tiempo que tarda en resolver la optimización radica en la complejidad computacional de la implementación, pues el algoritmo tiene que resolver los distintos sub-problemas de optimización, asociados a cada una de las secuencias de perturbaciones. Esto se traduce en que el problema de optimización global adquiera una complejidad de orden exponencial, lo

que ocasiona que esta solución sea impracticable en una planta real al tratar de considerar horizontes de predicción grandes. Debido a esto, es necesario revisar otro algoritmo que pueda formar parte de la optimización a lazo cerrado y que presente una complejidad computacional menor.

MPC robusto afín a perturbaciones

El algoritmo denominado MPC afín a las perturbaciones [16, 17] resulta ser uno de los más utilizados dentro de este enfoque, debido a que el problema de optimización no adquiere la misma magnitud de complejidad que el caso de realimentación general. En este nuevo algoritmo la complejidad del problema resulta ser de orden polinomial, debiendo resolver un sólo problema de minimización dependiente de todas las variables de decisión que se disponen para calcular u_{k+i} dentro del horizonte de predicción. Esta es la principal ventaja con respecto al caso de realimentación general donde la complejidad resultaba de orden exponencial, debido a que se necesitaba resolver distintos sub-problemas de optimización asociados a las distintas secuencias posibles de perturbaciones.

En este algoritmo, se plantea una ley de control similar a (2.15) utilizada previamente para la optimización denominada como semi-lazo cerrado. La diferencia con respecto a (2.15) es que ahora se considera a la ganancia de realimentación K como una de las variables de optimización. La ley de control que se considera para este algoritmo es la siguiente:

$$u_{k+i} = \sum_{j=0}^i K_i^{(j)} x_{k+j} + c_{k+i} \quad (2.28)$$

Se debe notar que para este caso se tienen los mismos valores c_{k+i} del caso llamado lazo abierto, pero además se añaden las ganancias $K_i^{(j)}$ para las N predicciones como parte de las variables de optimización del problema.

El problema de optimización abordado por este algoritmo, puede ser reescrito si se define el vector de predicción de estado $\mathcal{X}_k = [x_k^T, x_{k+1}^T, \dots, x_{k+N}^T]^T$, el vector con las acciones de control para las N predicciones $\mathcal{U}_k = [u_k^T, u_{k+1}^T, \dots, u_{k+N-1}^T]^T$ y el vector de parámetros de prealimentación $\mathcal{C}_k = [c_k^T, c_{k+1}^T, \dots, c_{k+N-1}^T]^T$. Considerando estos nuevos vectores ampliados, se puede obtener una ecuación matricial que represente (2.28).

$$\mathcal{U}_k = \bar{K}_k \mathcal{X}_k + \mathcal{C}_k$$

$$\bar{K}_k = \begin{bmatrix} K_0^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ K_1^{(0)} & K_1^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N-1}^{(0)} & K_{N-1}^{(1)} & \cdots & K_{N-1}^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Usando los vectores ampliados definidos anteriormente y considerando además el vector

de las perturbaciones futuras $\mathcal{W}_k = [\omega_k^T, \omega_{k+1}^T, \dots, \omega_{k+N-1}^T]^T$, se puede obtener la siguiente fórmula para el vector de predicciones:

$$\mathcal{X}_k = C_{xx}x_k + C_{xu}\mathcal{U}_k + C_{xw}\mathcal{W}_k. \quad (2.30)$$

En la ecuación (20), los elementos C_{xx} , C_{xu} y C_{xw} corresponden a las matrices de convolución de x , u y w sobre la variable x , las cuales vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{N-1} \\ A^N \end{bmatrix}, \quad C_{xu} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-2}B & \cdots & B & 0 \\ A^{N-1}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}, \quad C_{xw} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A^{N-2}D & \cdots & D & 0 \\ A^{N-1}D & \cdots & AD & D \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Usando (2.30) en (2.29), y despejando \mathcal{U}_k , se obtiene:

$$\mathcal{U}_k = (I - \bar{K}_k C_{xu})^{-1} \bar{K}_k C_{xw} \mathcal{W}_k + (I - \bar{K}_k C_{xu})^{-1} (\bar{K}_k C_{xx} x_k + \mathcal{C}_k). \quad (2.32)$$

A partir de usar como ley de control (2.32), el problema de optimización llega a una formulación del tipo no convexa, esto debido a la operación que multiplica \bar{K}_k y \bar{K}_k^{-1} . El problema con esta situación, es que con una formulación de ese tipo no es posible garantizar que el problema de optimización converja al valor óptimo global. Para solventar esta problemática, se definen unos nuevos parámetros \bar{L}_k y v_k como:

$$\bar{L}_k = (I - \bar{K}_k C_{xu})^{-1} \bar{K}_k C_{xw}, \quad (2.33)$$

$$v_k = (I - \bar{K}_k C_{xu})^{-1} (\bar{K}_k C_{xx} x_k + \mathcal{C}_k), \quad (2.34)$$

con los cuales se puede obtener la siguiente formula equivalente para (2.32):

$$\mathcal{U}_k = \bar{L}_k \mathcal{W}_k + v_k, \quad (2.35)$$

que será la expresión para la ley de control utilizada para el algoritmo afín a las perturbaciones.

Estableciendo ahora como las variables de optimización a los valores que forman la matriz \bar{L}_k y el vector v_k , se logra una formulación del problema de optimización que si resulta convexa. Gracias a esto, ahora si se puede garantizar que el valor óptimo encontrado al aplicar el algoritmo resulta ser el mínimo global.

Bajo esta nueva formulación, es necesario imponer la satisfacción de las condiciones del sistema presentadas en (2.12). Para ello se usan los valores de las matrices F y G presentes en (2.12), más el termino V_T asociado a la restricción del estado terminal $\{V_T x_{k+N} \leq 1\}$,

para construir las matrices aumentadas

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & & & \\ & \ddots & & \\ & & F & \\ & & & V_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G & & \\ & \ddots & \\ & & G \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

con las cuales es posible obtener una condición que de ser satisfecha pueda garantizar el cumplimiento de (2.12). La restricción que debe imponerse en el problema de optimización bajo esta formulación es

$$\tilde{F}_u v_k + \max_{\mathcal{W}_k \in \mathcal{W}} (\tilde{F}_w + \tilde{F}_u \tilde{L}_k) \mathcal{W}_k \leq 1 - \tilde{F}_x x_k, \quad (2.37)$$

donde las nuevas matrices \tilde{F}_x , \tilde{F}_u y \tilde{F}_w resultan de reemplazar (2.30) en (2.12), quedando definidas de la siguiente manera:

$$\tilde{F}_x = \tilde{F} C_{xx}, \quad \tilde{F}_u = \tilde{F} C_{xu} + \tilde{G}, \quad \tilde{F}_w = \tilde{F} C_{xw}. \quad (2.38)$$

En la formulación de las restricciones presentada en (2.37) queda nuevamente explícito el hecho de que se considera el peor escenario de la perturbación para definir la condición que debe cumplir el sistema. Este peor escenario que puede comprometer la satisfacción de la condición (2.37) es incluido mediante el término que maximiza el efecto de \mathcal{W}_k .

Finalmente, para esta formulación se identifican dos tipos de funciones de costos a utilizar como métrica de desempeño del problema de optimización. Una opción es utilizar la misma función objetivo usada para el caso determinístico en (2.5), escrita para este caso de la forma:

$$J(\mathcal{X}_k, \mathcal{U}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} \|x_{k+i}\|_{\bar{Q}}^2 + \frac{1}{2} \|u_{k+i}\|_{\bar{R}}^2 \right) + \frac{1}{2} \|x_{k+N}\|_P^2, \quad (2.39)$$

basándose en lo mostrado en [16] para la implementación de este algoritmo. La segunda opción corresponde a la utilización de la función de costos cuadrática propuesta en [17]

$$J(\mathcal{X}_k, \mathcal{U}_k) = \max_{\mathcal{W}_k} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \left(\|x_{k+i}\|_{\bar{Q}}^2 + \|u_{k+i}\|_{\bar{R}}^2 - \gamma^2 \|\omega_{k+i}\|^2 \right) + \|x_{k+N}\|_P^2 \right\}, \quad (2.40)$$

donde

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & & & \\ & \ddots & & \\ & & Q & \\ & & & P \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

En (2.40) se define la maximización del efecto de \mathcal{W}_k sobre J como método para considerar el peor escenario de las perturbaciones. En la función de costos (2.40) se incluye el término adicional $\gamma^2 \|\omega_{k+i}\|^2$, mediante el cual se logra que el problema de maximización resulte cóncavo con respecto a \mathcal{W}_k , esto en el caso de que se utilice un γ suficientemente grande.

Al obtener J la propiedad de función cóncava con respecto a \mathcal{W}_k , se hace posible asegurar que el algoritmo convergerá a un máximo global al resolver el sub-problema de maximización definido. Por otro lado, la función de costos (2.40) sigue siendo convexa con respecto a las variables \mathcal{X}_k y \mathcal{U}_k , por lo que el problema de minimización principal seguirá presentando la propiedad de converger al óptimo global. En este punto se puede realizar una evaluación de las expresiones (2.30) y (2.35) en (2.40, resultando esto en una nueva ecuación para el funcional de costos de la forma

$$J(\mathcal{X}_k, \bar{L}_k, v_k) = \max_{\mathcal{W}_k} \left\{ \|C_{xx}x_k + C_{xu}v_k + (C_{xw} + C_{xu}\tilde{L}_k)\|_Q^2 + \|\tilde{L}_k\mathcal{W}_k + v_k\|_R^2 - \gamma^2\|\mathcal{W}_k\|^2 \right\}, \quad (2.42)$$

donde ahora la dependencia queda explícitamente expresada a partir de las variables \mathcal{X}_k , \bar{L}_k y v_k .

Con esto el algoritmo más utilizado para control predictivo robusto queda completamente definido y listo para ser resuelto por algún método optimización a elección. El problema de optimización adquiere la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{L}_k, v_k} \quad & J(\mathcal{X}_k, \bar{L}_k, v_k) \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{X}_k = C_{xx}x_k + C_{xu}\mathcal{U}_k + C_{xw}\mathcal{W}_k \\ & \mathcal{U}_k = \bar{L}_k\mathcal{W}_k + v_k \\ & \tilde{F}_u v_k + \max_{\mathcal{W}_k \in W} (\tilde{F}_w + \tilde{F}_u\tilde{L}_k)\mathcal{W}_k \leq 1 - \tilde{F}_x x_k, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde la matriz \bar{L}_k y los vectores \mathcal{X}_k , v_k son las variables de decisión consideradas para esta formulación.

A partir de resolver (2.43), se obtienen los valores óptimos para los elementos de la matriz \bar{L}_k y el vector v_k . Con estos valores obtenidos, se procede a calcular el vector con las N acciones de control \mathcal{U}_k , rescatando sólo los primeros elementos del vector asociados a u_k , los cuales son los que finalmente son aplicados como entradas en la planta real.

2.3. Discusión

En este capítulo se presentaron las nociones básicas e ideas principales que definen a las estrategias de control predictivo basado en modelos (MPC). Se comenzó el capítulo con la mención de las estrategias de control óptimo y su relación con la posterior aparición del controlador predictivo clásico que surge como alternativa para optimizar el comportamiento de las distintas variables que afectan al sistema, considerando ahora el modelo del sistema para predecir en línea la evolución del sistema a controlar.

Se presentaron a continuación los distintos elementos que conforman al problema de optimización que define a la estrategia de MPC clásico en un caso general, explicando las consideraciones que se deben tener para lograr la estabilidad y convergencia de esta clase de controladores. Posteriormente se presentó la variante robusta del MPC, relacionándola con su contra-parte clásica y explicando las diferencias que existen con respecto a las definiciones que se utilizan para garantizar convergencia y estabilidad.

En este punto se identifica la mayor complejidad que adquieren los algoritmos robustos, debido a la necesidad de considerar en el problema de optimización planteado el efecto de variables que en el instante actual tienen valores desconocidos. Si bien las restricciones que debe satisfacer el sistema y la función de costos empleada siguen una estructura similar con respecto al caso de control predictivo clásico, la necesidad de añadir el efecto del peor caso de las perturbaciones mediante la inclusión de un sub-problema de maximización ocasionan esta mayor complejidad computacional en la implementación de estos algoritmos.

Al final del capítulo, se explicaron algunos de los algoritmos principales que se han desarrollado en la teoría de los controladores predictivos robustos, destacando entre ellas la estrategia de optimización a lazo abierto, la cual será utilizada para definir a los controladores propuestos en esta tesis. Previo a definir a los controladores, se deben clarificar los métodos que se utilizarán para caracterizar la incertidumbre y los errores de predicción, pues se necesita tener un cierto grado de conocimiento de esos elementos para poder aplicar la estrategia de apriete de las restricciones. Por esto, en el siguiente capítulo se realizará una revisión de la teoría que define a la modelación por intervalos, pues se utilizarán estas herramientas para caracterizar incertezas en los controladores propuestos.

3 Intervalos Basados en Modelos Lineales y Difusos

En este capítulo los conceptos relacionados con la modelación de sistemas inciertos y la caracterización de su incerteza mediante el uso de modelos de intervalo. Para ello se realiza una breve revisión de algunos de los modelos de intervalo presentes en la literatura para sistemas lineales y no-lineales, los cuales serán tomados como base para la implementación de las propuestas llevadas a cabo en esta tesis.

El capítulo se organiza como sigue: primero se muestra el uso de modelos de intervalos para manejar valores para la incertidumbre presente debido al efecto del ruido y de los errores en el modelo identificado. Luego se presenta una revisión bibliográfica sobre los modelos de intervalos aplicado a los casos donde el modelo estimado es el resultado de una regresión lineal.

Posteriormente se introducen los intervalos difusos como una alternativa de estas herramientas que pueden ser aplicadas sobre sistemas no-lineales. Para ello, primero se presentan los modelos difusos del tipo Takagi y Sugeno y como se realiza su proceso de identificación mediante el uso de bases de datos que se disponen sobre el sistema. Finalmente se presenta el proceso para construir los intervalos mediante el uso de los elementos que entrega el proceso de identificación difuso realizado previamente.

3.1. Introducción

Al momento de obtener modelos de predicción, ya sean del índole lineal o no-lineal, para algún proceso dinámico o señal medida, se pueden presentar una serie de situaciones que pueden afectar el cálculo preciso de las predicciones futuras. En primer lugar, el sistema a modelar puede estar compuesto de elementos que presenten un comportamiento estocástico (como por ejemplo una señales de perturbación externa), lo que ocasionará que las predicciones posean un error debido al desconocimiento del valor exacto de dichos elementos en el futuro. La segunda situación que podría afectar el cálculo de predicciones, consiste en el caso donde el modelo identificado presenta su propia incerteza, la cual puede deberse al efecto de diferentes fuentes de incertidumbre. Entre estas fuentes de incerteza se pueden destacar la precisión de los sensores colocados en el sistema, la estructura fijada para el modelo a identificar (junto con los parámetros obtenidos condicionados a dicha estructura) y el efecto

de perturbaciones no medidas.

Debido a estos problemas, los modelos identificados presentan los errores antes mencionados, al momento de estimar el valor actual y futuro de la señal modelada. Dado que se necesitan utilizar estos modelos para la implementación de una estrategia de control predictivo, el hecho de manejar cierta información del comportamiento que tendría este error puede mejorar el desempeño del controlador, al implementar una variante robusta que incluya dicha información en el problema de optimización. Para ello se disponen de unas herramientas llamadas intervalos de confianza, los cuales sirven para establecer regiones que contengan a la señal modelada con un cierto grado de confiabilidad, a pesar de la presencia de ruido aditivo y/o de error asociado al modelo identificado.

3.2. Intervalos basados en modelos lineales

Los primeros intervalos de confianza fueron introducidos en [19] para abordar el problema de estimación, desde el punto de vista de la teoría estadística. En particular, en esta sección se revisarán brevemente alguno de los intervalos presentados en [20] para el problema de identificación de sistemas lineales.

Considere un sistema representado por el siguiente modelo lineal afín:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \varepsilon, \quad (3.1)$$

donde x_1, \dots, x_n son las variables de entrada, β_0, \dots, β_n son los parámetros del modelo y ε es el ruido aditivo. Este modelo puede ser expresado en forma matricial, como:

$$y_i = X_i^T \beta, \quad (3.2)$$

donde $\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ y $X_i^T = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]$, esto para una muestra de datos i . El vector de parámetros β puede ser estimada mediante una regresión lineal, de la forma:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (3.3)$$

expresión que esta basada en el algoritmo conocido como mínimos cuadrados. Este método considera una base de datos compuesta por m muestras, donde la información de las distintas variables de entrada esta contenida en la matriz $X = [X_1, \dots, X_m]^T$ y las respectivas mediciones en $Y = [y_1, \dots, y_m]^T$.

Para esta estimación del vector de parámetros, se puede caracterizar la incerteza asociada al vector de parámetros completo β , a sus respectivas componentes individuales β_j , al valor esperado para la salida del modelo $E(y)$ y a las predicciones de las observaciones futuras de la señal (\hat{y}). Asumiendo que la salida del sistema sigue una distribución de probabilidad normal $y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$, se definen las herramientas de confiabilidad que se presentan de forma resumida a continuación.

3.2.1. Región de confianza para el vector de parámetros

Para el vector de parámetros se define una región de confianza en el espacio que contiene al vector del sistema real β con una probabilidad de $(1 - \alpha)$. Dicha región es representada teóricamente por la siguiente declaración relacionada a la distribución de probabilidades que debe cumplir la diferencia entre el vector real β y su valor estimado $\hat{\beta}$:

$$P \left[(\hat{\beta} - \beta)^T X^T X (\hat{\beta} - \beta) / (k + 1) s^2 \leq F_{\alpha, k+1, m-k-1} \right] = 1 - \alpha, \quad (3.4)$$

donde m es la cantidad de datos utilizados al momento de aplicar la regresión lineal, k es el rango de la matriz $X(X^T X)^{-1} X^T$ y $F_{\alpha, k+1, m-k-1}$ es la distribución F de Fisher-Snedecor. En (3.4), s^2 está definido como la suma de los errores cuadrados de la forma

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{m - k - 1}. \quad (3.5)$$

La región de confianza de probabilidad $(1 - \alpha)$ para el vector β queda definida entonces por la expresión

$$(\hat{\beta} - \beta)^T X^T X (\hat{\beta} - \beta) / (k + 1) s^2 \leq F_{\alpha, k+1, m-k-1}, \quad (3.6)$$

la cual representa a una elipse en dos dimensiones cuando $k = 1$ y para valores mayores corresponde a una región elipsoidal.

3.2.2. Intervalos de confianza para los parámetros

Para el caso donde el rango de la matriz $X(X^T X)^{-1} X^T$, representado por el valor k , es mayor que uno, la utilización de regiones de confianza arroja resultados más complejos de interpretar a simple vista. Esto ocurre porque los rangos de confianza obtenidos para un elemento del vector β , pueden presentar dependencia con respecto a los demás valores que componen al vector. Por este motivo, quien realiza el proceso de estimación podría preferir definir las regiones de confianza de manera separada para cada componente de β . Para ese caso, se tiene entonces que la siguiente expresión que contiene a la diferencia entre los valores reales β_j y las estimaciones $\hat{\beta}_j$:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s \sqrt{g_{jj}}}, \quad (3.7)$$

presenta una distribución del tipo t de Student, donde g_{jj} es la j -ésima componente de la diagonal de la matriz $(X^T X)^{-1}$. Luego, para obtener una confiabilidad $(1 - \alpha)$ de contener el valor real β_j con el intervalo a construir, se define la siguiente expresión probabilística:

$$P \left[-t_{\alpha/2, m-k-1} \leq \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s \sqrt{g_{jj}}} \leq t_{\alpha/2, m-k-1} \right] = 1 - \alpha, \quad (3.8)$$

A partir de la condición probabilística definida en (3.8), el intervalo de confianza para cada parámetro β_j , queda definido de la siguiente forma:

$$\beta_j = \hat{\beta}_j \pm t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{g_{jj}}, \quad (3.9)$$

es decir, $\beta_j \in [\hat{\beta}_j - t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{g_{jj}}, \hat{\beta}_j + t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{g_{jj}}]$ con probabilidad de $(1 - \alpha)$, cumpliéndose esto para $j = 1, \dots, n$.

3.2.3. Intervalo de confianza para el valor esperado del modelo

Si se tiene un vector de variables de entrada X_0 cualquiera, el cual puede o no estar contenido en la matriz X , se denota la salida asociada a X_0 como

$$y_0 = X_0^T \beta + \varepsilon, \quad (3.10)$$

a partir del cual se define que el valor esperado (asumiendo que $E(\varepsilon) = 0$) es

$$E(y_0) = X_0^T \beta. \quad (3.11)$$

En este punto se desea obtener un intervalo de confianza para $E(y_0)$, por lo que se plantea un estimador para dicho valor, de la forma:

$$\hat{E}(y_0) = X_0^T \hat{\beta}. \quad (3.12)$$

Usando los valores de $X_0^T \beta$ y $X_0^T \hat{\beta}$, se puede obtener la siguiente distribución probabilística del tipo t de Student

$$t = \frac{X_0^T \hat{\beta} - X_0^T \beta}{s \sqrt{X_0^T (X^T X)^{-1} X_0}}, \quad (3.13)$$

que puede ser utilizada para obtener el intervalo deseado con un nivel de confianza del $(1 - \alpha)$. Finalmente el intervalo queda descrito para el vector X_0 de la siguiente manera:

$$E(y_0) = X_0^T \hat{\beta} \pm t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{X_0 (X^T X)^{-1} X_0}, \quad (3.14)$$

es decir, $y_0 \in \left[X_0^T \hat{\beta} - t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{X_0 (X^T X)^{-1} X_0}, X_0^T \hat{\beta} + t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{X_0 (X^T X)^{-1} X_0} \right]$. Por otro lado, si se plantea el caso de un modelo obtenido a partir de una regresión lineal simple del tipo

$$y_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon, \quad (3.15)$$

donde ahora x_0 es un valor escalar. El intervalo de confianza entonces en este nuevo escenario es definido por la siguiente expresión

$$y_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \pm t_{\alpha/2, n-2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (3.16)$$

que utiliza los m datos x_i que se disponen al momento de aplicar la regresión lineal. En este caso, el ancho del intervalo dependerá directamente de la distancia entre el valor de x_0 y el promedio de los datos utilizados al momento de identificar el modelo \bar{x} .

3.2.4. Intervalos de predicción para observaciones futuras

La idea de intervalos de confianza puede ser también aplicada para caracterizar futuras realizaciones de la salida del sistema y . Para ese caso, con el modelo identificado se debe realizar el cálculo de la predicción, denotada como \hat{y}_i . El intervalo a obtener entorno a \hat{y}_i y que debe contener a la realización futura real y_i , es llamado intervalo de predicción. Esta denominación como intervalo de predicción radica en el hecho de que ahora y_i es una observación futura, por lo que se comporta más como una variable aleatoria, que como un parámetro a estimar. Debido a la mayor incertidumbre al tratar de caracterizar una variable aleatoria, los intervalos de predicción normalmente resultan ser más anchos que los intervalos de confianza aplicados a el parámetro $E(y_0)$.

Retomando el modelo presentado en (3.10), la predicción de y_i viene dada por $\hat{y}_i = X_i^T \hat{\beta}$, término que también funciona como estimador de $E(y_i)$. Entonces la varianza de la expresión $(y_i - \hat{y}_i)$ queda definida como

$$\text{var}(y_i - \hat{y}_i) = \text{var}(y_i - X_i^T \hat{\beta}) = \text{var}(X_i^T \beta + \varepsilon - X_i^T \hat{\beta}). \quad (3.17)$$

Como las variables aleatorias y_i e \hat{y}_i son independientes, porque la primera corresponde a una observación del sistema en el futuro que se obtiene sin utilizar las observaciones pasadas, las cuales en cambio si son usadas para calcular \hat{y}_i . A partir de esta independencia de variables aleatorias y del hecho que $X_i^T \beta$ es constante, entonces (3.17) se puede desarrollar de la forma

$$\text{var}(y_i - \hat{y}_i) = 0 + \text{var}(\varepsilon) + \text{var}(X_i^T \hat{\beta}) = \sigma^2 + \sigma^2 X_i^T (X^T X)^{-1} X_i, \quad (3.18)$$

$$\text{var}(y_i - \hat{y}_i) = \sigma^2 [1 + X_i^T (X^T X)^{-1} X_i], \quad (3.19)$$

donde σ^2 es la varianza del ruido aditivo ε .

Usando un estimador de la varianza de la forma $s [1 + X_i^T (X^T X)^{-1} X_i]$, se puede plantear la distribución estadística t de Student que define al siguiente intervalo de predicción para y_i

$$y_i = X_i^T \hat{\beta} \pm t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{1 + X_i^T (X^T X)^{-1} X_i}, \quad (3.20)$$

es decir,

$$y_i \in \left[X_i^T \hat{\beta} - t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{1 + X_i^T (X^T X)^{-1} X_i}, X_i^T \hat{\beta} + t_{\alpha/2, m-k-1} s \sqrt{1 + X_i^T (X^T X)^{-1} X_i} \right], \quad (3.21)$$

con una probabilidad de $(1 - \alpha)$. Siguiendo la tendencia de diferenciación con respecto a los intervalos vistos anteriormente, el termino usado previamente como Nivel de Confianza cambia su denominación a Probabilidad de Cobertura, nuevamente para enfatizar que ahora se busca contener una variable aleatoria y no la estimación de algún parámetro.

3.2.5. Métricas de desempeño

En la modelación por intervalos de predicción, se identifican dos elementos cuyo rendimiento debe ser evaluado. En primer lugar, se debe evaluar la precisión del modelo al momento

de predecir los valores futuros de la señal modelada. Para ello, se considera la utilización como métrica de desempeño a la raíz del error cuadrático medio (Root Mean Square Error - RMSE) presentado entre el valor de predicción que arroja el modelo y la medición real que se obtendrá en el futuro. El criterio RMSE presentado en [21] sigue la siguiente formula en el caso aplicado en esta tesis:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{y}_i - y_i)^2}, \quad (3.22)$$

donde \hat{y}_i representa el valor entregado por el modelo, y_i corresponde al valor real medido y M es el numero de datos totales que componen a la base de datos utilizada.

Para la comparación de los resultados obtenidos con los intervalos de predicción, se plantea la utilización de dos métricas de desempeño. El primer índice a usar se denomina como probabilidad de cobertura del intervalo (Prediction Interval Coverage Probability - PICP), el cual muestra el porcentaje de mediciones reales que el intervalo logra efectivamente contener. La segunda métrica corresponde al ancho medio normalizado del intervalo (Prediction Interval Normalized Average Width - PINAW). El índice PINAW calcula el promedio del ancho que toma el intervalo y normaliza el resultado con respecto a la diferencia que existe entre los valores extremos de y_i que componen a la base de datos utilizada. Ambas métricas a utilizar son definidas en [22, 23] de la siguiente manera:

$$PICP = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M c_i, \quad (3.23)$$

$$PINAW = \frac{1}{M[y_{max} - y_{min}]} \sum_{i=1}^M [\bar{y}_i - \underline{y}_i], \quad (3.24)$$

donde M nuevamente es el número de muestras totales que componen a la base de datos utilizada, denotada en este punto como \mathcal{Y} y el par $(\underline{y}_i, \bar{y}_i)$ representan los límites que entrega el intervalo. En (3.23) se utiliza el valor denominado como c_i , el cual corresponde a una función que indica si el valor de la muestra i -ésima de \mathcal{Y} se encuentra o no contenida dentro de los límites dados por el intervalo. Entonces, la función c_i adquiere los siguientes valores para cada muestra i :

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \in [\underline{y}_i, \bar{y}_i] \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Por otro lado, en (3.24) se utilizan los valores y_{min} y y_{max} para normalizar el ancho del intervalo obtenido para todas las muestras que componen la base de datos. En particular, y_{min} representa el menor valor presentado para y_i dentro del conjunto \mathcal{Y} , mientras que para y_{max} , su valor corresponde al mayor y_i encontrado dentro de la base de datos. Por lo tanto, la métrica PINAW entrega un valor equivalente a un porcentaje promedio para el ancho del intervalo, donde obtener un valor igual a 100 % significa que se está usando un intervalo con ancho fijo e igual al peor escenario posible para el error de predicción de y_i presentado dentro de la base de datos \mathcal{Y} .

El sentido de usar el PICP y el PINAW como métricas de desempeño para los intervalos radica en el hecho de que ambas representan numéricamente los dos elementos de mayor

interés al momento de analizar el rendimiento de un intervalo. En primer lugar, se traza como objetivo al momento de realizar el entrenamiento, el obtener una determinada probabilidad de cobertura. El cumplimiento de este objetivo se puede verificar directamente con el cálculo del PICP. Considerando que el proceso de sintonización del intervalo consiste en aumentar el valor del ancho hasta que se alcance la probabilidad de cobertura deseada, un mejor desempeño de estos intervalos se logra verificar al momento de cumplir el objetivo de cobertura, mientras se obtiene un menor valor para la métrica PINAW.

Con esto quedan abordadas las principales variantes de la modelación por intervalos aplicado a sistemas lineales que se presentan en la literatura. Una explicación más exhaustiva de todos esas variantes se encuentra en el capítulo 8 del libro *Linear Models in Statistics* [20]. La problemática que surge en el desarrollo de esta tesis con respecto a los intervalos anteriormente presentados, es que las señales a modelar presentan un comportamiento no-lineal que evita que las herramientas vistas sean aplicables. Por ello, a continuación se presenta una variante del estudio de la modelación por intervalos, la cual si puede ser aplicada a señales y sistemas del índole no-lineal.

3.3. Intervalos basados en modelos difusos

En esta sección se tratarán los temas relacionados con la herramienta de modelación difusa planteada para caracterizar sistemas de índole no-lineal y la posterior implementación de intervalos basados en este tipo de modelos.

3.3.1. Modelos difusos Takagi & Sugeno

En el año 1985 Tomohiro Takagi y Michio Sugeno propusieron en [5] un método para la identificación de sistemas utilizando modelos difusos. Con este método se puede aproximar la salida de una vasta variedad de sistemas no-lineales, motivo por el cual adquiere la denominación de aproximador universal. Su implementación es de utilidad para modelar señales y predecir su comportamiento futuro. La formulación del modelo difuso presentado en [5] es representada por los siguientes modelos lineales locales de la forma

$$\hat{y}_r = [1 \ z^T] \theta_r = \psi_r^T \theta_r, \quad (3.26)$$

donde z es el vector de entradas del modelo difuso y \hat{y}_r representa la salida de cada modelo local. El modelo difuso completo está conformado por m reglas, las cuales están denotadas por el sub-índice r y son ponderadas para calcular la salida global del modelo. La salida del modelo completo se obtiene entonces resolviendo

$$\hat{y} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z) \hat{y}_r(z) = f(z), \quad (3.27)$$

donde $\beta_r(z)$ son los grados de activación de cada regla r . En (3.26), θ_r es el vector de parámetros asociado a cada regla y sus valores pueden ser obtenidos usando el algoritmo de

mínimos cuadrados [5]. Otra forma de expresar la salida del modelo difuso completo se puede lograr luego de introducir la definición de vector de regresores

$$\psi_r^T(z) = \beta_r(z)[1 \ z^T], \quad (3.28)$$

y combinarla con (3.26)-(3.27) logrando que la salida quede expresada como

$$\hat{y}(z) = \sum_{r=1}^m \psi_r^T(z)\theta_r. \quad (3.29)$$

La idea de utilizar la ponderación de diferentes modelos locales lineales se encuentra basada en el hecho de que un sistema no-lineal complejo puede ser aproximado entorno a un punto de operación por una ecuación lineal. Por lo tanto, al utilizar distintos modelos locales ponderados permiten obtener una aproximación del comportamiento global de una determinada planta.

Inicialmente, para el proceso de identificación del modelo difuso, se disponen de datos medidos de la entrada y salida del sistema o señal que se busca representar. Estas mediciones se agrupan en los denominados clusters, los cuales consisten en conjuntos de valores similares de datos que representan los distintos modos de operación de la dinámica a modelar. El proceso de obtención de estos clusters se denomina como clustering y en esta tesis es llevado a cabo utilizando el algoritmo Fuzzy C-Means (FCM), presentado en el trabajo de Bezdek *et al.* [24].

Como resultado de este algoritmo se obtienen los valores de la media (μ_r) y desviación estándar (σ_r) resultantes para la composición final de cada cluster. Estos valores son utilizados para calcular los grados de activación de cada una de las reglas, usando la siguiente formula basada en la expresión que caracteriza a la función gaussiana:

$$\beta_r(z) = \exp\left(-\frac{(z - \mu_r)^2}{2\sigma_r^2}\right). \quad (3.30)$$

Basándose en lo expuesto por Takagi y Sugeno en [5], el entrenamiento de los modelos difusos continua con la utilización del método de mínimos cuadrados como algoritmo de regresión lineal. Este método puede ser aplicado de manera global o de manera separada para cada regla, logrando en ambos casos obtener los distintos parámetros que conforman al vector θ_r para cada uno de los modelos locales. Para esta tesis fue considerado el método que aplica el algoritmo de mínimos cuadrados de manera individual a cada regla, siguiendo para ello los siguientes pasos mencionados a continuación. Primero, los distintos modelos lineales son evaluados en un conjunto de M datos. Luego se minimiza el error cuadrático dado por la siguiente expresión:

$$\text{mín } J = \sum_{i=1}^M \beta_r^2(z_i) [y_i - \psi_r^T(z_i)\theta_r]^2, \quad (3.31)$$

donde y_i es la medida real de la salida y z_i es el vector de entrada, todo esto para la muestra i -ésima. En este punto, se denota la matriz de regresores para cada regla r como:

$$\Psi_r = [\psi_r(z_1), \dots, \psi_r(z_M)]^T, \quad (3.32)$$

la cual es utilizada para encontrar los valores que componen a los respectivos vectores de parámetros. Luego, se evalúa para cada una de las reglas la siguiente expresión definida para el algoritmo de mínimos cuadrados:

$$\hat{\theta}_r = (\Psi_r^T B_r^2 \Psi_r)^{-1} \Psi_r^T B_r^2 Y. \quad (3.33)$$

En (3.33), se utiliza

$$B_r = \begin{bmatrix} \beta_{1,r} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \beta_{M,r} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

que corresponde a la matriz diagonal que contiene los distintos grados de activación de la regla r a lo largo del conjunto de entrenamiento, y también

$$Y = [y_1, \dots, y_M]^T, \quad (3.35)$$

que es el vector que contiene las respectivas mediciones de la salida.

Otro aspecto de los modelos difusos que pueden ser modificados son los elementos que definen su estructura, como la cantidad de reglas y el número de regresores a utilizar al momento de crear el vector $\psi_r(z_i)$. Para obtener los mejores resultados posibles para una determinada base de datos, se aplica una optimización de la estructura del modelo siguiendo los métodos presentados en [5] y [25]. Estos métodos de optimización prueban distintas combinaciones de variables de entradas y número de reglas, entrenando a los respectivos modelos y luego comparando los errores obtenidos en una nueva base de datos. La estructura seleccionada corresponde a la combinación de variables de entradas y número de reglas que obtenga el menor valor de error en la nueva base de datos utilizada.

Para todo el proceso de obtención de los modelos difusos, que incluye tanto el cálculo de los vectores de parámetros θ_r , como la optimización de la estructura del modelo, se dispone de una base de datos compuesta por las variables de entrada candidatas y los valores reales de la señal que se busca modelar. Este conjunto de datos es descompuesto en tres bases distintas llamadas de entrenamiento, prueba y validación. La base de entrenamiento corresponde a los datos utilizados para aplicar los algoritmos de clustering y de mínimos cuadrados para obtener los modelos difusos. Por otro lado, la base de prueba es usada para realizar la optimización de la estructura del modelo. Finalmente la base de validación corresponde a los datos usados para validar el modelo obtenido, verificando que no se encuentre sobre-ajustado a los datos de entrenamiento y pueda caracterizar correctamente el sistema con diferentes mediciones de las variables de entrada.

Habiendo culminado con la explicación del proceso de obtención de los modelos difusos, se puede proceder a presentar el desarrollo e implementación de las herramientas de modelación por intervalos que se disponen para este tipo de modelos. A continuación, se presenta el desarrollo de uno de los métodos presentados en la literatura para el desarrollo de los intervalos difusos.

3.3.2. Intervalos difusos por método de la covarianza

Los intervalos difusos son una herramienta que se utiliza para caracterizar el error presente en la salida de los modelos difuso Takagi & Sugeno. En el trabajo de Škrjanc *et al.* [6] se presenta una derivación analítica de la incerteza de la señal modelada a partir de las matrices que definen al modelo difuso utilizado.

En esta tesis se utiliza el denominado método de la covarianza, el cual se basa en la formula de la covarianza esperada de los residuos entre las mediciones de la señal y proyectadas sobre cada regla r (y_r) y las salidas de los respectivos modelos locales (\hat{y}_r). Para una base de entrenamiento compuesta por M mediciones, la formula de la covarianza se define de la siguiente manera:

$$\text{cov}(y_r - \hat{y}_r) = \hat{\sigma}_r^2 I + \hat{\sigma}_r^2 \Psi_r^T (\Psi_r \Psi_r^T)^{-1} \Psi_r, \quad (3.36)$$

$$y_r = [y_{1,r}, \dots, y_{M,r}]^T, \quad (3.37)$$

$$\hat{y}_r = [\hat{y}_r(z_1), \dots, \hat{y}_r(z_M)]^T, \quad (3.38)$$

$$y_{i,r} = \beta_r(z_i) y_i, \quad i = 1, \dots, M, \quad (3.39)$$

donde y_i corresponde al valor medido de la señal modelada, el cual es ponderado por los respectivos grados de activación de las reglas en (3.39). En (3.36), $\hat{\sigma}_r^2$ es varianza de la señal de ruido, la cual se encuentra definida por la formula:

$$E\{e_r e_r^T\} = \hat{\sigma}_r^2 I. \quad (3.40)$$

En este punto, los valores correspondientes a σ_r^2 pueden ser estimados a partir de las siguientes ecuaciones presentadas en [6]:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{\mu - (n + 1)} \sum_{i=1}^M \beta_r^2(z_i) (e_i - \bar{e}_r)^2, \quad \mu = \sum_{i=1}^M \beta_r^2(z_i), \quad (3.41)$$

$$\bar{e}_r = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^M \beta_r(z_i) e_i, \quad \nu = \sum_{i=1}^M \beta_r(z_i), \quad r = 1, \dots, m, \quad (3.42)$$

donde $(n+1)$ representa el numero de parámetros estimados del modelo difuso y $e_i = (y_i - \hat{y}_i)$ es el error entre las mediciones y la salida estimada.

Basándose en esta formulación para la matriz de covarianza, se propone el siguiente método para caracterizar la incertidumbre asociada al modelo. En primer lugar, se dispone de un nuevo vector de entrada z_i general, el cual tiene asociado un vector de regresores $\psi_r^{*T}(z_i)$. Este vector es utilizado para calcular el valor de la incerteza del modelo (llamado aquí como \mathcal{I}_r) usando una fórmula similar a (3.36). La expresión que describe a la incerteza del modelo local cuando el vector de entrada es z_i , tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{I}_r(z_i) = \hat{\sigma}_r \left(I + \psi_r^{*T}(z_i) (\Psi_r \Psi_r^T)^{-1} \psi_r^*(z_i) \right)^{1/2}, \quad (3.43)$$

donde la matriz Ψ_r sigue siendo la misma que es obtenida en la fase de entrenamiento del modelo difuso. La idea detrás de la ecuación (3.43) es que la incerteza del modelo local

puede ser representada por el valor estimado que aportaría z_i a la diagonal de la matriz de covarianza original.

A partir de los valores para la incerteza de los modelos locales \mathcal{I}_r , se puede obtener una expresión que describe la incertidumbre asociada a la salida global del modelo difuso, siguiendo una mecánica similar a la aplicada para obtener la salida de los modelos difusos T&S. Basándose en esto, se realiza una suma ponderada de las incertezas de cada regla con los respectivos grados de activación, quedando entonces la incertidumbre del modelo global cuando la entrada del sistema es z_i , dada por el intervalo difuso de la forma:

$$\mathcal{I}(z_i) = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_i) \mathcal{I}_r(z_i). \quad (3.44)$$

En este punto, usando la expresión (3.44) se pueden definir los límites del intervalo difuso centrado entorno a la salida del modelo \hat{y}_i , de modo:

$$\bar{y}_i = f(z_i) + \alpha \mathcal{I}(z_i), \quad (3.45)$$

$$\underline{y}_i = f(z_i) - \alpha \mathcal{I}(z_i), \quad (3.46)$$

donde α es un parámetro de sintonía obtenido normalmente mediante una búsqueda lineal, y que se utiliza para establecer el nivel de confianza o probabilidad de cobertura, según corresponda, requerido para el intervalo difuso.

Para sistemas dinámicos, las expresiones (3.45) y (3.46) son válidas para las predicciones hechas a un paso en el futuro. Para el caso de predicciones a mayores pasos en el futuro, se sigue un esquema similar al presentado por Sáez *et al.* en [26], donde los intervalos difusos fueron usados para el manejo de micro-redes. En este esquema, primero se denota el instante actual como k y el número de pasos adelante para la predicción con el índice j . Luego los extremos del intervalo (3.45) y (3.46) toman la forma:

$$\bar{y}_{k+j} = f(z_{k+j}) + \alpha_j \mathcal{I}(z_{k+j}), \quad (3.47)$$

$$\underline{y}_{k+j} = f(z_{k+j}) - \alpha_j \mathcal{I}(z_{k+j}). \quad (3.48)$$

Estos nuevos intervalos de predicción difuso reciben como entrada al vector z_{k+j} , el cual es equivalente al vector presentado anteriormente, pero visto desde el punto de vista de que la predicción se realiza a un paso en el instante $k + j$. Al parámetro de sintonización del intervalo también se le agrega un índice, pues el valor de α_j puede variar dependiendo de la cantidad de pasos en el futuro y el instante k en el cual se obtiene dicha predicción.

En esta tesis, los intervalos de predicción difuso presentados en (3.47) y (3.48) serán utilizados para predecir los valores de las perturbaciones externas y el comportamiento de la dinámica del sistema correspondiente al caso de estudio. Para ello en el capítulo que sigue, se abordarán las propuestas pensadas para el uso de estos intervalos en la implementación de estrategias de control predictivo robusto.

3.4. Discusión

En este capítulo se abordaron algunas de las ideas propuestas en la literatura sobre la modelación por intervalos, herramienta que surge como respuesta a la necesidad de caracterizar la incertidumbre presente en el modelo identificado para un sistema. Se destaca en particular la idea de intervalo de predicción, el cual surge como un símil a los intervalos de confianza, pero aplicados al cálculo de predicciones futuras de las señales modeladas. Considerando la posterior implementación de estrategias de control predictivo, estos intervalos de predicción resultan de interés para ser utilizados en las propuestas de controladores a considerar.

Posteriormente se describieron los elementos de la modelación difusa, la cual se utiliza para construir modelos de predicción de sistemas no-lineales. En este punto se destaca la presentación de su propia variante de intervalos de predicción, la cual corresponde a la alternativa que será finalmente utilizada como base en las propuestas de controladores robustos, presentados posteriormente en esta tesis. La idea de esto, es que gracias a estas herramientas de modelación, los controladores predictivos serán capaces de manejar la incertidumbre presente en las predicciones futuras que ve el problema de optimización.

4 Propuestas de Intervalos para Modelación de Sistemas

Este capítulo tiene como objetivo exponer las principales ideas que conforman la propuesta de esta tesis, esto en términos de la problemática de la modelación de señales y sistemas y la caracterización de su incertidumbre asociada. Las propuestas presentadas en este capítulo corresponden a la formulación de intervalos basados en modelos difusos, tomando en cuenta su adaptación a señales con diferente comportamiento de incerteza y a sistemas sometidos a perturbaciones externas.

En este capítulo primero se explica las características generales del sistema dinámico que se busca controlar posteriormente con el control predictivo robusto. Luego, se procede a mostrar las tres propuestas principales sobre el uso de parámetros sintonizables para regular el ancho de los intervalos difusos. Se debe destacar que según lo propuesto, el ancho del intervalo se puede tratar de diferente manera si es que la señal modelada posee o no una incerteza fuertemente relacionada con el valor de alguna variable externa.

Finalmente, se exponen dos propuestas de estructura para los intervalos, las cuales se encuentran diseñadas para el caso donde serán utilizadas para modelar sistemas dinámicos afectados por señales de perturbación externa. La formulación de esta estructura de intervalos es presentada inicialmente para el caso donde se utiliza un modelo difuso en variables de estado de orden uno para caracterizar al sistema, para posteriormente desarrollar su extensión a modelos autorregresivos de mayor orden.

4.1. Características del sistema a modelar

Para el desarrollo e implementación de las nuevas estructuras de intervalos a proponer, se considera un sistema no-lineal en espacio de estados, descrito por

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, \omega_k), \quad (4.1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}$ son las variables de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ son las acciones de control y $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ son las perturbaciones externas. En (4.1), f es una función no-lineal general, la cual rige a la dinámica del sistema que se busca controlar. En este sistema, las variables x_k y u_k deben satisfacer la condición

$$Fx_k + Gu_k \leq h, \quad (4.2)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$, $G \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_u}$ y $h \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ son las matrices que definen a las n_c restricciones del sistema.

Se considera que la perturbación ω_k que afecta a (4.1) tiene un comportamiento estocástico a lo largo del tiempo, por lo tanto se asume que su valor actual y realizaciones futuras son desconocidas en el instante actual k . Debido a que se busca implementar una estrategia de control predictivo robusto, se requiere construir un modelo para estimar los valores de perturbación futuras ω_{k+j} . Si se implementa un modelo difuso como el descrito en (3.29), los valores futuros de la señal de perturbación pueden ser descompuestos como

$$\omega_{k+j} = \hat{\omega}_{k+j} + \omega_{k+j}^e, \quad (4.3)$$

donde $\hat{\omega}_{k+j}$ es la predicción del modelo hecha a j pasos en el futuro (asumida como conocida en el instante actual) y ω_{k+j}^e es su error asociado (desconocido en el instante k). Debido al comportamiento estocástico de la señal de perturbación, el valor de ω_{k+j}^e puede ocasionar problemas para asegurar el cumplimiento de (4.2) durante la implementación del controlador. Debido a que en una implementación robusta se desea evitar la ocurrencia de estos problemas, se necesita utilizar intervalos para caracterizar la incertidumbre de las predicciones. Para esto, se presentan a continuación unas propuestas relativas a los intervalos difusos, las cuales permitirán adecuarse al tipo de perturbación que se busca modelar.

4.2. Propuestas de intervalos difusos

En el capítulo de modelación por intervalos, se mencionó que el rendimiento medido por la cobertura y el ancho del intervalo depende del parámetro α escogido al momento de realizar el proceso de sintonización. Normalmente en la literatura se eligen valores distintos para el parámetro α , variándolo según el número de pasos adelante con los que se realiza la predicción de la señal a partir de los intervalos. El problema de realizar esto es que los intervalos no necesariamente se ajustan de manera óptima a la incerteza de la señal modelada, perdiendo la oportunidad de caracterizar mejor el comportamiento de la incerteza y con ello, mejorar los resultados obtenidos con el controlador predictivo robusto.

La incerteza para alguna de las perturbaciones externas que afectan al sistema controlado podrían presentar un comportamiento homogéneo a lo largo del tiempo. Un ejemplo de esto es la incertidumbre asociada al error de medición de la temperatura ambiente, la cual no presenta mayores variaciones a lo largo del día. Para este caso, la utilización de los parámetros α sintonizados solamente según los pasos de predicción si logran ajustar el ancho del intervalo de manera adecuada. Pero esta clase de señales no es la única que afecta a los sistemas controlados como perturbación externa, existen adicionalmente variables cuya incerteza varía en el tiempo. Un ejemplo de esto es la predicción de la radiación solar, la cual durante las horas de sol posee un cierto nivel de incerteza, pero que durante la noche desaparece, pues se sabe de antemano que la radiación solar tendrá valor cero. Debido a la presencia de los tipos de perturbaciones mencionadas, se plantean dos esquemas a seguir para los parámetros α al momento de implementar los intervalos difusos, los cuales se denominan como dependiente de los pasos de predicción y dependiente del instante de predicción, que se explicarán a continuación.

4.2.1. Intervalos con dependencia de los pasos de predicción

En primer lugar, para las señales con un comportamiento homogéneo de la incerteza a lo largo del tiempo, se mantiene la definición de los parámetros α_j presentada normalmente en la literatura, donde estos son sintonizados según el número de pasos en el futuro para el cual fue obtenida la predicción de la señal modelada.

El intervalo difuso para ω_{k+j} es obtenido utilizando el método de la covarianza, quedando finalmente delimitado por las expresiones

$$\underline{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) - \alpha_j I(\omega_{k+j-1}), \quad (4.4)$$

$$\bar{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) + \alpha_j I(\omega_{k+j-1}), \quad (4.5)$$

donde ω_{k+j-1} es el vector de entrada del modelo e intervalo, el cual se encuentra compuesto por los valores pasados de la señal de perturbación con respecto al instante $k + j$.

Para obtener estos intervalos, el método de la covarianza es aplicado para una cierta base de entrenamiento, obteniendo así los diferentes valores para la función $I(\omega_{k+j-1})$ y la salida del modelo difuso $f(\omega_{k+j-1})$, asociados a cada uno de los componentes de los vectores $\underline{\omega}_{k+j}$ y $\bar{\omega}_{k+j}$. Con estos nuevos valores, se genera una nueva base de datos ampliada, la cual es la que finalmente se utilizará para sintonizar el ancho de los intervalos.

La sintonización del ancho dado por los valores que adquieren los parámetros α es realizada de la siguiente forma: primero la base de datos ampliada es particionada, dividiendo los resultados obtenidos según el número de pasos para la predicción y asignándole a cada nuevo subconjunto su respectivo parámetro de ancho denotado como α_j . Luego se continua con el procedimiento escogiendo un valor inicial de α_j para cada partición definida por el paso de predicción j . Finalmente, el proceso de sintonización consiste en ir aumentando estos parámetros asociados al ancho del intervalo, hasta que el nivel de cobertura de los datos reales para cada subconjunto alcanza un cierto valor objetivo.

4.2.2. Intervalos con dependencia al instante de la predicción

El segundo método presentado para sintonizar el ancho de los intervalos está diseñado para las señales que poseen un nivel de incerteza que varia a lo largo del tiempo. En este caso, los parámetros asociados al ancho están definidos como $\alpha_{k,j}$, donde los subíndices representan el hecho de que estos varían ahora dependiendo tanto del paso de predicción j y también del instante k en que se realiza la predicción.

El intervalo es obtenido del mismo modo que el caso anterior, quedando definido por los limites

$$\underline{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) - \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}), \quad (4.6)$$

$$\bar{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) + \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}). \quad (4.7)$$

La principal diferencia con respecto al proceso de obtención y sintonización del intervalo se presenta al momento de particionar la base de datos de entrenamiento para realizar la

sintonización. La división de la base de datos ahora debe considerar la separación de los resultados obtenidos para el intervalo según la cantidad de pasos de predicción j y el instante correspondiente al índice $k + j$. Luego se realiza la sintonización del ancho de los intervalos siguiendo el mismo procedimiento utilizado para el caso anterior, aumentando los valores de los parámetros $\alpha_{k,j}$ hasta que el nivel de cobertura objetivo es alcanzado para cada subconjunto. Se debe notar que este segundo método resulta ser una definición más general del proceso de sintonización de intervalos, pues el primer caso se recupera al fijar valores iguales para $\alpha_{k,j}$ cuando poseen los mismos índices j . En la Figura 4.1 se incluye un diagrama que resume el procedimiento seguido para los dos métodos de sintonización propuestos.

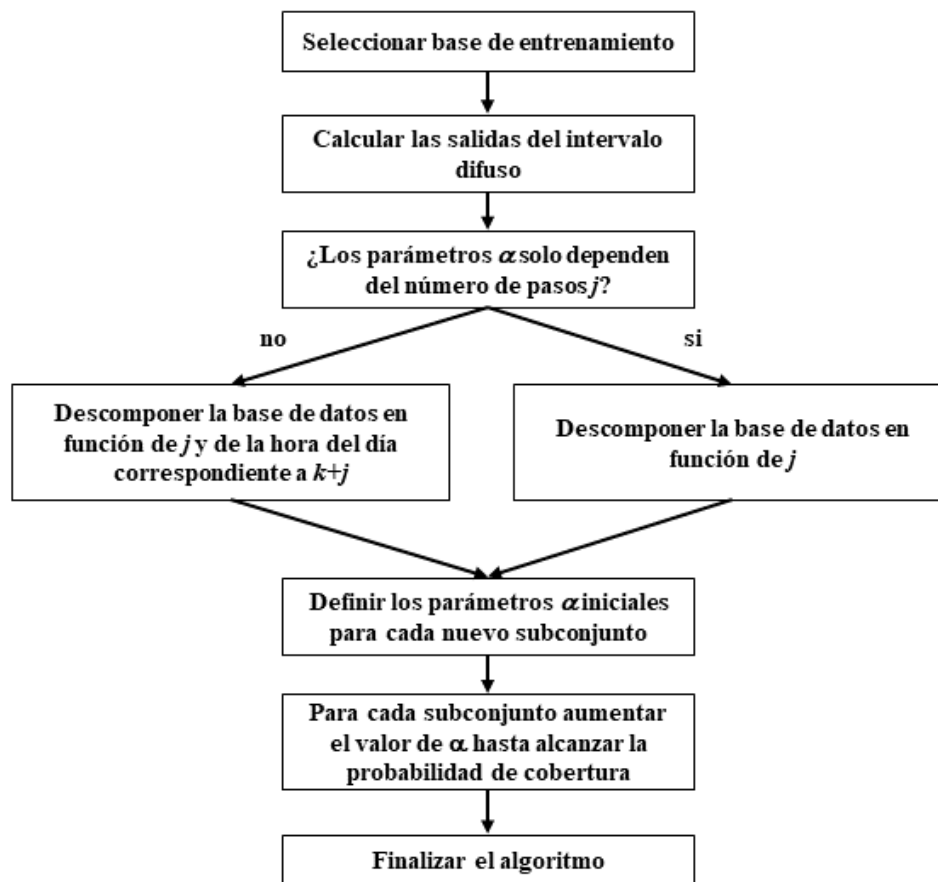


Figura 4.1: Diagrama de los métodos de sintonización propuestos

Como ejemplo para entender la idea detrás de este nuevo enfoque, se puede describir el caso del nivel de ocupación de una cierta oficina. Se espera que la incertidumbre al momento de medir el nivel de ocupación sea mayor durante los horarios en que los oficinistas llegan a trabajar o dejan la oficina al final de la jornada laboral. Por contraparte, la incerteza de esta medición en el horario nocturno es prácticamente nula, pues se sabe de antemano que la oficina se encuentra cerrada y por lo tanto sin ocupantes. Los distintos niveles de incerteza que se pueden identificar a lo largo del día para este caso, ocasionan que los intervalos obtenidos con el primer enfoque de sintonización presentado sean sub-óptimos pues presentan una tendencia a sobredimensionar el error de medición en los momentos donde se sabe que la incerteza de la señal modelada debe ser baja. Pero este no es el único ejemplo que sirve

para motivar este nuevo enfoque, como se mencionó previamente, el caso donde se modela la radiación solar puede atravesar por la misma problemática descrita para el caso de modelación de la ocupación de una oficina.

A partir de los dos métodos presentados para sintonizar intervalos difusos, se pueden obtener las herramientas necesarias para caracterizar la incerteza presente a lo largo del horizonte de predicción, esto para las señales de perturbación externa que afectan al sistema que será controlado por una estrategia MPC. Sin embargo, estas no son las únicas propuestas relativas a los intervalos difusos incluidas en esta tesis. Se presenta a continuación una tercera propuesta para ser aplicada durante el proceso de obtención de los intervalos, esto en respuesta a una de las problemáticas que se pueden presentar durante la implementación de la estrategia de control predictivo robusto, correspondiente a la presencia de casos de infactibilidad en la optimización debido al aumento del ancho de los intervalos para pasos de predicción grandes.

4.2.3. Intervalos con probabilidad de cobertura decreciente

Para implementar la estrategia de MPC robusta se plantea utilizar los intervalos obtenidos para las perturbaciones, en el proceso de estimación de la incerteza presente en las predicciones de la variable que se busca controlar. Pero en este punto, se identifica una problemática que puede dificultar la correcta implementación de la optimización que define al MPC, el nivel de incerteza presente en las predicciones crece si es que se aumenta el paso de predicción. Esta situación puede ocasionar casos donde el problema de optimización se haga infactible si es que el ancho del intervalo utilizado (y por consiguiente el parámetro de apriete) crece demasiado. Para solventar esto, a continuación se explica una propuesta para manejar la probabilidad de cobertura de los intervalos y así reducir el riesgo de ocurrencia de casos de infactibilidad.

Al realizar predicciones de señales con comportamiento estocástico, existe un error entre el valor que arroja el modelo obtenido y el valor real que tendrá la variable de interés modelada. Al ir aumentando el paso de predicción j para estas señales, la incerteza presente comienza a aumentar, esto debido a que existe un error acumulativo debido a las predicciones previas.

Visto desde el punto de vista del paso $k + j$, la predicción de una señal s , denotada aquí para un caso general como \hat{s}_{k+j} , arrastra el efecto de la incerteza de las predicciones previas calculadas en el instante actual ($\hat{s}_k, \hat{s}_{k+1}, \dots, \hat{s}_{k+j-1}$). Considerando esto, a medida que se aumente el valor de j , el ancho del intervalo será cada vez más grande.

La propagación de la incerteza a lo largo de las predicciones es tratada mediante el apriete de las restricciones del estado. Por lo tanto, si se tienen intervalos muy anchos, los parámetros de apriete pueden provocar que no exista solución factible y así el controlador no pueda cumplir su función. Para poder evitar la ocurrencia de intervalos lo suficientemente anchos para la ocurrencia de situaciones de infactibilidad, se propone reducir el ancho de los intervalos obtenidos a pasos de predicción lejanos.

La reducción de los intervalos y parámetros de apriete se ha abordado en formulaciones lineales de controladores predictivos [3, 4, 27], a partir de la utilización de una ley de control

que considere una realimentación del estado, es decir, se resuelve el problema de optimización en semi-lazo cerrado o lazo cerrado, definidos previamente en la sección 2.2. Sin embargo, como el problema de optimización a considerar es de índole no-lineal, se vuelve compleja la implementación de leyes de control que consideren la realimentación del estado. Debido a esto, en este trabajo se propone la siguiente estrategia para lograr el objetivo de reducir los intervalos: utilizar en el proceso de sintonización probabilidades de cobertura decrecientes con respecto a j . Esto provocará que las predicciones cercanas al instante actual sean manejadas con una mayor prioridad, es decir, las restricciones serán impuestas con una mayor probabilidad de cumplimiento, en comparación a los instantes de predicción más lejanos. Esto es consistente con el hecho de que la naturaleza de horizonte deslizante asociada al controlador predictivo, provocará que el mayor error permitido a grandes pasos de predicción, sea corregido en los instantes de operación posteriores, donde el controlador resuelve un nuevo problema de optimización. Notar que esta idea de probabilidad de cobertura decreciente es considerada sólo con la finalidad de disminuir el ancho de los intervalos, junto con los parámetros de apriete del controlador predictivo robusto, y no significa que se este aplicando una estrategia de reducción de incertidumbre para las predicciones de las variables de interés.

En esta propuesta de sintonización, se denomina como probabilidad de cobertura inicial (cp_i) a la utilizada para la predicción a 1 paso y probabilidad de cobertura final (cp_f), a la usada en el último paso dentro del horizonte de predicción N . La probabilidad de cobertura definida para el paso de predicción j viene dada por la expresión:

$$cp(j) = cp_i \left(\frac{cp_f}{cp_i} \right)^{\frac{j-1}{N-1}}, \quad (4.8)$$

la cual puede ser utilizada como valor objetivo de la métrica PICP en el proceso de entrenamiento de los dos intervalos propuestos previamente. Entonces, durante el proceso de entrenamiento se fijan los respectivos valores $cp(j)$ para sintonizar el parámetro α_j para el intervalo (4.5)-(4.4) y $\alpha_{k,j}$ para el caso del intervalo (4.7)-(4.6).

Considerando las propuestas de intervalos presentadas hasta el momento, ya se pueden llevar a cabo algunas implementaciones de MPC robusto. En este punto, la posibilidad de utilizar estrategias de control predictivo se encuentra supeditada al nivel de conocimiento que se tiene de la dinámica del sistema a controlar. Por una parte, si es que se tiene a disposición la ecuación dinámica exacta que rige al sistema, la implementación de un MPC robusto ya puede ser llevada a cabo. Por otro lado, si la dinámica del sistema es desconocida, se vuelve necesario obtener un modelo para la variable a controlar, debiendo obtener además sus propios intervalos. Debido a esta situación, a continuación se presentaran otras propuestas relacionadas a la estructura del intervalo, esto para adecuarse al caso de modelación de sistemas dinámicos que reciban señales de perturbación externa.

4.3. Estructura de intervalos para sistemas dinámicos

Para la implementación de los controladores predictivos robustos, es necesario caracterizar la incerteza presente en las predicciones de la variable a controlar. Con los intervalos presentados anteriormente y utilizando el modelo real del sistema, es posible obtener una caracterización de la incertidumbre, la cual es finalmente utilizada para el cálculo de los parámetros de apriete de las restricciones. Sin embargo, para el caso donde se debe identificar un modelo para un sistema con comportamiento no-lineal, la caracterización de la incertidumbre se vuelve más compleja. Esta situación se debe a que no sólo se debe considerar el error presente en las predicciones de las perturbaciones externas, ahora también debe ser considerado la incertidumbre que aporta el propio modelo identificado para la variable controlada. En base al tipo de modelo utilizado para predecir a la variable controlada, se proponen a continuación estructuras que incluyan toda la incertidumbre que afectará al cálculo de las predicciones.

4.3.1. Intervalo para modelo difuso en variables de estado

Se propone un primer esquema de intervalo, basado en la utilización de un modelo difuso en variable de estado para caracterizar el comportamiento de la variable a controlar. Para esta primera formulación, se considera sólo la utilización de modelos en variables de estado escalares, esto debido a que los intervalos difusos obtenidos mediante el método de la covarianza se encuentran correctamente definidos para variables unidimensionales. Posteriormente a la revisión de este caso, se planea extender esta propuesta a sistemas más complejos, mediante la utilización de modelos autoregresivos de orden mayor a uno.

Se define entonces para este caso, un modelo difuso del sistema a controlar, dado por las siguientes ecuaciones lineales que representaran a cada regla r :

$$x_{k+1}^r = a_r x_k + b_r u_k + d_r \omega_k, \quad (4.9)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}$ es la variable de estado, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la variable manipulada y $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ es la señal de perturbación externa.

La salida del modelo global vendrá dada por la ponderación de los valores de salida de las reglas locales x_{k+1}^r con sus respectivos grados de activación β_r , de la forma:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{r=1}^m \beta_r(x_k, u_k, \omega_k) [a_r x_k + b_r u_k + d_r \omega_k], \quad (4.10)$$

donde si se denomina $z_k = [x_k, u_k^T, \hat{\omega}_k^T]^T$ como el vector de entrada del modelo difuso, la predicción del estado descrita en (4.10) se puede escribir de la siguiente forma simplificada:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) x_{k+1}^r(z_k). \quad (4.11)$$

Notar que en la definición del vector de entrada z_k se utiliza el valor predicho de la perturbación $\hat{\omega}_k$ en vez del valor real ω_k . Esto se debe a que se asume que en el instante k , la realización de la perturbación es aún desconocida.

Como en este caso no sólo se debe considerar el error presente en las predicciones de las perturbaciones externas, sino que también debe ser caracterizada la incertidumbre que aporta el propio modelo identificado para la variable controlada, se planea separar ambos efectos de incerteza, de manera de caracterizar por separado sus valores.

Para obtener una expresión solamente asociada a la incertidumbre propia del modelo, se asume que la perturbación externa no posee incerteza, y se procede a implementar un intervalo difuso siguiendo alguno de los esquemas ya presentada en este capítulo. Aplicar esto resulta en una expresión para la incertidumbre del modelo asociada a un dato puntual i dada por el término $I_{i,r}$ presentado previamente en la fórmula (3.43).

Los valores para los límites de la predicción j -ésima del estado dadas por un intervalo difuso para este caso, son representadas por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{x}_{k+j} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j-1}) x_{k+j}^r(z_{k+j-1}) + \alpha_x \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j-1}) I_r(z_{k+j-1}), \quad (4.12)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j-1}) x_{k+j}^r(z_{k+j-1}) - \alpha_x \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j-1}) I_r(z_{k+j-1}), \quad (4.13)$$

donde el vector de entrada $z_{k+j} = [\hat{x}_{k+j}, u_{k+j}^T, \hat{\omega}_{k+j}^T]^T$ ahora también utiliza los valores predichos del estado, esto porque en el instante k los valores reales de x_{k+j} son desconocidos. En (4.12)-(4.13), los parámetros α_x pueden ser obtenidos siguiendo cualquiera de los esquemas presentados previamente en este capítulo, escogiendo el más adecuado en función del comportamiento esperado de la incerteza del modelo. Para simplificar la escritura de (4.12)-(4.13), se define la siguiente expresión

$$I_x(z_{k+j}) = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j}) I_r(z_{k+j}), \quad (4.14)$$

la cual se encuentra basada en (3.44) y se encarga de calcular la incerteza presente en la salida global del modelo, ponderando la incertidumbre de cada uno de los modelos locales. Usando (4.10) y (4.14), los límites del intervalo (4.12)-(4.13) pueden ser expresados de manera simplificada como

$$\bar{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_x I_x(z_{k+j-1}), \quad (4.15)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_x I_x(z_{k+j-1}). \quad (4.16)$$

Con la utilización de estos intervalos difusos definidos por (4.15)-(4.16), se logra caracterizar la incerteza presente en la predicción debido a la precisión del modelo obtenido en el proceso de identificación, esto asumiendo que las predicciones $\hat{\omega}_{k+j}$ coinciden exactamente con los valores reales ω_{k+j} . Sin embargo, el error al momento de predecir ω_{k+j} actúa como otra fuente independiente de incerteza, la cual no es considerada al utilizar (4.15)-(4.16) y que puede ocasionar que la incertidumbre total presente en \hat{x}_{k+j} no logre ser completamente caracterizada.

En la sección anterior, se propuso la idea de caracterizar la incerteza de las perturbaciones externas usando intervalos difusos. Teniendo esto en consideración, se planea reutilizar esta incertidumbre previamente caracterizada en la nueva propuesta de estructura para el intervalo asociado al estado. Basándose en la descomposición de la señal de perturbación presentada en (4.3), la componente nominal $\hat{\omega}_{k+j}$ se asocia a las predicciones futuras $\hat{\omega}$ y la componente incierta ω_{k+j}^e se asume contenida por el intervalo I_j^ω , el cual se encuentra definido como:

$$I_j^\omega = \{ \omega_{k+j}^e : -\alpha I(\omega_{k+j-1}) \leq \omega_k^e \leq \alpha I(\omega_{k+j-1}) \}. \quad (4.17)$$

Basado en esto, los límites superior e inferior de las perturbaciones predichas están dadas por

$$\bar{\omega}_{k+j} = \hat{\omega}_{k+j} + I_j^\omega, \quad (4.18)$$

$$\underline{\omega}_{k+j} = \hat{\omega}_{k+j} - I_j^\omega. \quad (4.19)$$

Para determinar la expresión que caracterice el efecto de esta nueva fuente de incerteza presente al momento de calcular las predicciones del estado, se procede con el siguiente desarrollo.

Inicialmente se reemplaza el valor de ω_k en el modelo definido en (4.10) por la de su descomposición presentada en (4.3), considerando que ω_{k+j}^e puede tomar como valor $+I_j^\omega$ o $-I_j^\omega$. Para el caso de la predicción a un paso para el estado, al reemplazar (4.3) en (4.10), se obtiene la siguiente expresión para la predicción entregada por el modelo difuso:

$$x_{k+1} = \sum_{r=1}^m \beta_r(x_k, u_k, \hat{\omega}_k + \omega_k^e) [a_r x_k + b_r u_k + d_r \hat{\omega}_k + d_r \omega_k^e]. \quad (4.20)$$

Para fines de simplificación de la estructura del futuro intervalo de estado, se plantea utilizar una aproximación al momento de calcular el grado de activación β_r en (4.20), la cual consiste en no considerar el efecto de la incerteza dada por ω_k^e . Tomando en cuenta esto, se puede escribir la expresión del estado en el instante $k+1$ de la forma:

$$x_{k+1} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) [a_r x_k + b_r u_k + d_r \hat{\omega}_k] + \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) d_r \omega_k^e. \quad (4.21)$$

Si se reemplaza (4.10) y (4.11) en (4.21), la predicción a un paso adquiere la siguiente estructura:

$$x_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(z_k) + \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) d_r \omega_k^e. \quad (4.22)$$

donde los términos multiplicados por ω_k^e se encuentran asociados a la incerteza presente en ω_k .

Para cuantificar el efecto de los peores casos de la perturbación ω_k , dados por (4.18)-(4.19), se debe proceder a reemplazar ω_k^e por $-I_0^\omega$ y $+I_0^\omega$, de manera tal que se obtenga los dos límites que definirán al intervalo. Adicionalmente, se debe reemplazar también la multiplicación con respecto a los parámetros d_r , utilizando ahora sus valores absolutos, esto para manejar apropiadamente el cálculo de los peores escenarios para x_{k+1} independientemente del signo

que tengan los parámetros d_r del modelo difuso. Los limites quedan definidos entonces de la siguiente manera:

$$\bar{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(z_k) + \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) |d_r| I_0^\omega, \quad (4.23)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(z_k) - \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) |d_r| I_0^\omega. \quad (4.24)$$

Para simplificar la sumatoria presente en (4.23)-(4.24), la cual representa el hecho de ingresar la incertidumbre de ω_k en las distintas reglas del modelo difuso, se define la función

$$I_\omega(z_{k+j}) = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+j}) |d_r| I_j^\omega, \quad (4.25)$$

que engloba todo el cálculo de incerteza presente en la predicción del estado, que este asociado a $\hat{\omega}_{k+j}$.

Usando (4.25), los limites para x_{k+1} dados por (4.23)-(4.24) quedan finalmente expresados como

$$\bar{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(z_k) + \alpha_{\omega,1} I_\omega(z_k), \quad (4.26)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}(z_k) - \alpha_{\omega,1} I_\omega(z_k). \quad (4.27)$$

En este punto se agregaron parámetros de sintonización adicionales $\alpha_{\omega,1}$, los cuales son añadidos con el propósito de ajustar el efecto de $I_\omega(z_k)$ al nivel de probabilidad de cobertura deseado para el intervalo final.

Para el siguiente paso de predicción se repite el mismo procedimiento, ingresando ahora x_{k+1} dado por (4.22) y ω_{k+1} definido por (4.3), en el modelo (4.9). La diferencia a destacar con respecto al intervalo obtenido para la predicción a un paso, es la inclusión de la incerteza del paso previo ω_k^e , la cual ingresa a (4.9) siendo multiplicada por el parámetro de sintonía $\alpha_{\omega,1}$ incluido en (4.26)-(4.27). Esto se encuentra basado en la premisa de que la incerteza de la predicción previa presenta un efecto no despreciable sobre la incertidumbre de las predicciones posteriores de la variable a controlar. Entonces, para el caso del estado en el instante $k+2$, el procedimiento resulta en la siguiente expresión

$$x_{k+2} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+1}) \left[a_r \hat{x}_{k+1}(z_k) + \alpha_{\omega,1} a_r \sum_{r_1=1}^m \beta_{r_1}(z_k) d_{r_1} \omega_k^e + b_r u_{k+1} + d_r \hat{\omega}_{k+1} + d_r \omega_{k+1}^e \right], \quad (4.28)$$

donde los términos que dependen de ω_k^e y ω_{k+1}^e representan a la incerteza presente en el cálculo de x_{k+2} debido al error de predicción de la perturbación externa. En este punto, los elementos asociados a la incertidumbre pueden ser separados, de manera similar a lo realizado en (4.21). Considerando esto, además del respectivo remplazo de ω_k^e y ω_{k+1}^e por $\pm I_0^\omega$ y $\pm I_1^\omega$ respectivamente, los limites del intervalo de predicción resultan de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{k+2} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+1}) \left[a_r \hat{x}_{k+1}(z_k) + b_r u_{k+1} + d_r \hat{\omega}_{k+1} + \alpha_{\omega,1} |a_r| \left(\sum_{r_1=1}^m \beta_{r_1}(z_k) |d_{r_1}| I_0^\omega \right) + |d_r| I_1^\omega \right], \quad (4.29)$$

$$\underline{x}_{k+2} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+1}) [a_r \hat{x}_{k+1}(z_k) + b_r u_{k+1} + d_r \hat{\omega}_{k+1} - \alpha_{\omega,1} |a_r| (\sum_{r_1=1}^m \beta_{r_1}(z_k) |d_{r_1}| I_0^\omega) - |d_r| I_1^\omega]. \quad (4.30)$$

En (4.29)-(4.30), el efecto de la propagación de la incerteza presente en x_{k+1} sobre el modelo difuso, representada por $\sum_{r_1=1}^m \beta_{r_1}(z_k) |d_{r_1}| I_0^\omega$, es llevada a cabo mediante su multiplicación con el valor absoluto de los parámetros a_r . En este punto se debe destacar que la utilización de $|a_r|$, es necesaria para que (4.29)-(4.30) representen efectivamente a los peores casos posibles de x_{k+2} , de manera que el cálculo sea independiente del signo que tengan los parámetros a_r (esta corresponde a la misma motivación para utilizar $|d_r|$ en vez de d_r en la definición de los límites del intervalo).

Para simplificar la escritura de la propagación de la incerteza asociada a la predicción de estado previa, se define el siguiente funcional

$$a_{fz}(z_k) = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_k) |a_r|. \quad (4.31)$$

Al usar (4.31) y (4.25), los límites del intervalo dados por (4.29)-(4.30) quedan finalmente expresados como

$$\bar{x}_{k+2} = \hat{x}_{k+2}(z_{k+1}) + \alpha_{\omega,2} I_\omega(z_{k+1}) + \alpha_{\omega,1} a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k), \quad (4.32)$$

$$\underline{x}_{k+2} = \hat{x}_{k+2}(z_{k+1}) - \alpha_{\omega,2} I_\omega(z_{k+1}) - \alpha_{\omega,1} a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k). \quad (4.33)$$

En (4.32)-(4.33), se añade un segundo parámetro de sintonía $\alpha_{\omega,2}$, el cual cumple la misma función que el parámetro previo $\alpha_{\omega,2}$, ajustar el nivel de cobertura del intervalo obtenido a un cierto valor deseado.

Posteriormente, para el cálculo de la predicción x_{k+3} , el procedimiento es análogo al realizado para x_{k+1} y x_{k+2} . Al ingresar x_{k+2} y ω_{k+2} al modelo (4.9), los límites resultantes para el intervalo quedan expresados de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{k+3} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+2}) [a_r \hat{x}_{k+2}(z_{k+1}) + b_r u_{k+2} + d_r \hat{\omega}_{k+2} + \alpha_{\omega,2} |a_r| I_\omega(z_{k+1}) + \alpha_{\omega,1} |a_r| a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k) + |d_r| I_2^\omega], \quad (4.34)$$

$$\underline{x}_{k+3} = \sum_{r=1}^m \beta_r(z_{k+2}) [a_r \hat{x}_{k+2}(z_{k+1}) + b_r u_{k+2} + d_r \hat{\omega}_{k+2} - \alpha_{\omega,2} |a_r| I_\omega(z_{k+1}) - \alpha_{\omega,1} |a_r| a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k) - |d_r| I_2^\omega], \quad (4.35)$$

Usando (4.10), (4.25) y (4.31), el intervalo (4.34)-(4.35), puede ser expresado de manera simplificada como sigue

$$\bar{x}_{k+3} = \hat{x}_{k+3}(z_{k+2}) + \alpha_{\omega,3} I_\omega(z_{k+2}) + \alpha_{\omega,2} a_{fz}(z_{k+2}) I_\omega(z_{k+1}) + \alpha_{\omega,1} a_{fz}(z_{k+2}) a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k). \quad (4.36)$$

$$\underline{x}_{k+3} = \hat{x}_{k+3}(z_{k+2}) - \alpha_{\omega,3} I_\omega(z_{k+2}) - \alpha_{\omega,2} a_{fz}(z_{k+2}) I_\omega(z_{k+1}) - \alpha_{\omega,1} a_{fz}(z_{k+2}) a_{fz}(z_{k+1}) I_\omega(z_k). \quad (4.37)$$

En (4.36)-(4.37), se destaca el nuevo parámetro de sintonía añadido $\alpha_{\omega,3}$, el cual sigue la misma motivación de los parámetros previos $\alpha_{\omega,1}$ y $\alpha_{\omega,2}$.

Como el procedimiento se repite de manera análoga para las predicciones futuras del estado, si se continua con el desarrollo matemático hasta que el horizonte de predicción N es alcanzado, el intervalo para x_{k+j} queda definido de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_{\omega,j} I_{\omega}(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}). \quad (4.38)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_{\omega,j} I_{\omega}(z_{k+j-1}) - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}). \quad (4.39)$$

El intervalo dado por (4.38)-(4.39) logra caracterizar la incerteza debida a ω_k en el cálculo del estado predicho. Pero para una correcta caracterización de toda la incerteza que puede presentarse al momento de calcular las predicciones del estado, se deben incluir los términos presentes en (4.15)-(4.16), los cuales representan la incerteza propia del modelo identificado. Al combinar (4.15)-(4.16) con (4.38)-(4.39), los límites del intervalo completo quedan expresados de la forma:

$$\bar{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1}) + \alpha_{\omega,j} I_{\omega}(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}), \quad (4.40)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1}) - \alpha_{\omega,j} I_{\omega}(z_{k+j-1}) - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}). \quad (4.41)$$

En (4.40)-(4.41), se identifican dos parámetros a sintonizar para cada paso de predicción j , los valores $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$. El proceso correspondiente al entrenamiento de estos intervalos y la respectiva sintonización de los parámetros $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$ se trata en detalle en la siguiente sub-sección.

4.3.2. Entrenamiento y sintonización de la estructura propuesta

Para el entrenamiento del modelo difuso definido en (4.11), se plantea realizar un experimento para recolectar datos de entrada y de salida del sistema a modelar. La prueba a desarrollar consiste en implementar un controlador sencillo para cerrar el lazo de control y tomar mediciones de las variables de interés que actuarán como futuras entradas del modelo a identificar. Para lograr que se dispongan datos para distintos modos de operación del sistema, se añade una señal de excitación persistente solamente a la variable manipulada u , usando por otro lado los valores de la perturbación ω tal cual como fueron medidos. Esto se debe a que u es la única variable que el operador de la planta puede manejar directamente cambiando los valores que adquiere a lo largo del tiempo.

El proceso de sintonización del ancho de los intervalos consiste en encontrar los valores apropiados para $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$, de manera de lograr la probabilidad de cobertura deseada dentro de la base de datos de entrenamiento. Para manejar la complejidad computacional del proceso de sintonización, en este punto se proponen dos esquemas a seguir:

- **Sintonización con parámetros separados** (Sintonización completa de parámetros)
En este esquema los parámetros $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$ son sintonizados por separado.
- **Sintonización con parámetro global** (Sintonización combinada de parámetros)
En este esquema $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$ son combinados en un parámetro global α_j , debiendo realizar una sola sintonización para encontrar este nuevo parámetro.

Para el caso de la sintonización por separado, el proceso consiste en encontrar los valores adecuados de $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$ para cada paso de predicción. Como la incertidumbre asociada al modelo y a la perturbación externa son consideradas como separadas en (4.38)-(4.39), se identifican dos procedimientos diferentes para obtener $\alpha_{x,j}$ y $\alpha_{\omega,j}$ respectivamente.

Para la sintonización de los parámetros $\alpha_{x,j}$, se busca capturar el efecto de la incerteza asociada solamente al modelo construido, por lo tanto, para este procedimiento se asume un completo conocimiento de la señal de perturbación ω_k . Usando M mediciones para x_k , u_k y ω_k , se crea un conjunto de datos Z_{ent} para entrenar los intervalos. Para $k = 1, \dots, M - j$, se calcula $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$ e $I_x(z_{k+j-1})$, usando como vector de entrada $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \omega_{k+j-1}]^T$. Luego, es posible calcular el intervalo (4.15)-(4.16) si se dispone de un valor para $\alpha_{x,j}$. Por lo tanto, en primera instancia se inicializa $\alpha_{x,j}$ con un valor pequeño y luego se procede a aumentar su valor hasta que la proporción de casos donde (4.15)-(4.16) contenga a los valores reales de x_{k+j} medidos, alcance la probabilidad de cobertura deseada. Este proceso de sintonización es resumido en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Sintonización de los parámetros α_x

Se considera un conjunto de entrenamiento Z_{ent} compuesto por M muestras;

Se asigna $\hat{x}_k = x_k$ para todo $k \in [1, \dots, M]$;

para $j = 1$ **a** N **hacer**

para $k = 1, \dots, M - j$, *tal que* $x_{k+j} \in Z_{ent}$ **hacer**

 | Obtener $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$ e $I_x(z_{k+j-1})$ usando $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \omega_{k+j-1}]^T$;

fin

 Aumentar $\alpha_{x,j}$ hasta que el intervalo dado por (4.15)(4.16) alcance la probabilidad de cobertura objetivo;

fin

Por otro lado, la sintonización de los parámetros $\alpha_{\omega,j}$ sigue una estructura similar al proceso descrito para $\alpha_{x,j}$. La principal diferencia con respecto al procedimiento anterior consiste en que ahora no se asume un completo conocimiento de ω_k , por lo tanto ahora se utilizan las predicciones de la perturbación $\hat{\omega}_{k+j}$ en vez de las mediciones reales ω_{k+j} . Para este caso, el cálculo de $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$, $\alpha_{x,j}I_x(z_{k+j-1})$ e $I_\omega(z_{k+j-1})$, es realizado utilizando el vector de entrada $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \hat{\omega}_{k+j-1}]^T$ y reutilizando los parámetros $\alpha_{x,j}$ obtenidos en el procedimiento previo. Habiendo obtenido dichos elementos, es posible calcular el intervalo dado por (4.40)-(4.41) si se dispone de los valores para los parámetros $\alpha_{\omega,j}$. Entonces, para cada paso de predicción j se inicializa el respectivo parámetro $\alpha_{\omega,j}$ con un valor pequeño, incrementando posteriormente su valor hasta que la probabilidad de cobertura deseada es alcanzada por (4.40)-(4.41). Se debe precisar que para $j > 1$, sólo $\alpha_{\omega,j}$ es inicializado, mientras que los parámetros asociados a las predicciones previas ($\alpha_{\omega,1}, \dots, \alpha_{\omega,j-1}$) son reutilizados. Esto se realiza de esta manera para evitar la complejidad de una búsqueda de parámetros que aumenta sus grados de libertad al ir incrementando j . Este proceso de sintonización para $\alpha_{\omega,j}$ es resumida a continuación en el Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Sintonización de los parámetros α_ω

Se considera un conjunto de entrenamiento Z_{ent} compuesto por M muestras;

Se asigna $\hat{x}_k = x_k$ para todo $k \in [1, \dots, M]$;

para $j = 1$ **a** N **hacer**

para $k = 1, \dots, M - j$, *tal que* $x_{k+j} \in Z_{ent}$ **hacer**

 Obtener $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$, $\alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1})$ e $I_\omega(z_{k+j-1})$ usando $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \hat{\omega}_{k+j-1}]^T$;

fin

 Aumento de $\alpha_{\omega,j}$ hasta que el intervalo dado por (4.40)-(4.41) alcance la probabilidad de cobertura objetivo;

fin

Por otro lado, para el caso de sintonización por parámetro de sintonía global (o también denominado parámetros combinados), una simplificación es hecha en la estructura del intervalo dada por (4.38)-(4.39). Para este caso se asume que $\alpha_{x,j} = \alpha_{\omega,j} = \alpha_j$ y que para cada nuevo paso de predicción j , $\alpha_{\omega,1} = \dots = \alpha_{\omega,j}$. Considerando esto, los límites definidos por el intervalo difuso quedan definidos de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_j \left[I_x(z_{k+j-1}) + I_\omega(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fuzz}(z_{k+l}) \right) I_\omega(z_{k+i-1}) \right], \quad (4.42)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_j \left[I_x(z_{k+j-1}) + I_\omega(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fuzz}(z_{k+l}) \right) I_\omega(z_{k+i-1}) \right]. \quad (4.43)$$

El método de sintonización de (4.42) y (4.43) sigue un procedimiento similar al descrito previamente en el Algoritmo 3, utilizando $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \hat{\omega}_{k+j-1}]^T$ para calcular el valor de $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$, $I_x(z_{k+j-1})$ e $I_\omega(z_{k+j-1})$. El intervalo dado por (4.42)-(4.43) puede ser calculado si se dispone de los valores α_j . Por lo tanto, para cada paso de predicción j se inicializa un α_j pequeño, para luego incrementar su valor hasta que la probabilidad de cobertura de (4.42)-(4.43), alcance el valor deseado. Este procedimiento de sintonización para α_j es resumida a continuación en el Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Sintonización de los parámetros α_j

Se considera un conjunto de entrenamiento Z_{ent} compuesto por M muestras;

Se asigna $\hat{x}_k = x_k$ para todo $k \in [1, \dots, M]$;

para $j = 1$ **a** N **hacer**

para $k = 1, \dots, M - j$, *tal que* $x_{k+j} \in Z_{ent}$ **hacer**

 Obtener $\hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1})$, $I_x(z_{k+j-1})$ e $I_\omega(z_{k+j-1})$ usando $z_{k+j-1} = [\hat{x}_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \hat{\omega}_{k+j-1}]^T$;

fin

 Aumento de α_j hasta que el intervalo dado por (4.42)-(4.43) alcance la probabilidad de cobertura objetivo;

fin

4.3.3. Extensión para modelos autorregresivos con variables exógenas

Como los intervalos difusos usados en la propuesta presentada están correctamente definidos para variables unidimensionales, se debe precisar que en los casos donde se busca controlar sistemas compuestos por más de una variable de estado, se debe definir un modelo e intervalo difuso distinto para cada variable por separado, siguiendo la misma estructura presentada en esta propuesta.

Otra situación que se puede presentar y que puede afectar la validez de la estructura de intervalos propuesta, es que el sistema a controlar siga una dinámica autoregresiva con variables exógena y de orden mayor que uno. En este nuevo caso, el desarrollo matemático relacionado con la propagación de la incerteza previa incrementa su complejidad. Debido a esto, se presentará una extensión de los intervalos de estados propuestos, esta vez aplicados a modelos del tipo autorregresivo.

Para poder plantear la extensión de la propuesta de intervalos, se plantea controlar el siguiente sistema no-lineal general, descrito por

$$y_{k+1} = f(\mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k), \quad (4.44)$$

$$Fy_k + Gu_k \leq h, \quad (4.45)$$

donde $y_k \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, e $\mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k$ son los vectores de regresores compuestos por los valores pasados de $y_k, u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ y $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ respectivamente. En (4.45), $F \in \mathbb{R}^{n_c \times \mathbb{R}}$, $G \in \mathbb{R}^{n_c \times \mathbb{R}^{n_u}}$ y $h \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ son las matrices que definen a las n_c restricciones que condicionan al sistema. Si el orden de (4.44) es n_a para y_k , n_b para u_k y n_d para ω_k , entonces los vectores de regresores son definidos como

$$\mathbf{y}_k = [y_k, \dots, y_{k-n_a+1}]^T, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{u}_k = [u_k^T, \dots, u_{k-n_b+1}^T]^T, \quad (4.47)$$

$$\boldsymbol{\omega}_k = [\omega_k^T, \dots, \omega_{k-n_d+1}^T]^T. \quad (4.48)$$

Modelos difusos son propuestos para modelar la dinámica de este sistema no-lineal. Basado en (3.26)-(3.29), los modelos locales son definidos como

$$y_{k+j}^r = z_{k+j-1}^T \theta_r, \quad (4.49)$$

donde el vector de entrada es $z_{k+j-1}^T = [\mathbf{y}_{k+j-1}^T, \mathbf{u}_{k+j-1}^T, \boldsymbol{\omega}_{k+j-1}^T]$ y el vector de parámetros θ_r esta definido para regla r como

$$\theta_r = [a_1, \dots, a_{n_y}, b_1, \dots, b_{n_u}, d_1, \dots, d_{n_\omega}]^T. \quad (4.50)$$

Luego, la salida del modelo difuso viene dada por

$$\hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) = \sum_{i=1}^m \beta_r(z_{k+j-1}) y_{k+1}^r(z_{k+j-1}). \quad (4.51)$$

Inicialmente, se busca aplicar directamente una estructura para el intervalo que sea similar a (4.40)-(4.41). Pero existe una dificultad para llevar a cabo dicha tarea, la cual se encuentra asociada principalmente al desarrollo de la propagación de la incerteza mediante la función $a_{fz}(z_k)$. Para el caso donde se utiliza el modelo (4.51), se debe definir una función de propagación distinta para cada regresor, por lo que al ir aumentando el paso de predicción j , la complejidad de la expresión que define al intervalo crece considerablemente. Esta situación ocurre debido al aumento de no-linealidades en la expresión del intervalo, al deber considerar los productos entre las diferentes incertezas propagadas por el modelo (el orden de los productos crece en orden cubico con respecto al paso de predicción). Para evitar esta problemática, se propone la siguiente expresión para los intervalos:

$$\bar{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_{y,j} I_y(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^j \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}), \quad (4.52)$$

$$\underline{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_{y,j} I_y(z_{k+j-1}) - \sum_{i=1}^j \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}), \quad (4.53)$$

donde sólo se incluyen las incertezas caracterizadas siendo ponderadas por los parámetros de sintonía. En (4.52)-(4.53), la labor que desempeñaba originalmente la función a_{fz} es sobrellevada directamente por los parámetros $\alpha_{\omega,j}$, evitando la necesidad de calcular las distintas combinaciones de términos que se derivarían al momento de calcular explícitamente la propagación de incerteza.

El proceso de sintonización de (4.52)-(4.53) es análogo al propuesto para el intervalo de estado en los Algoritmos 2 y 3. El procedimiento se puede llevar a cabo de manera separada, o usando la alternativa del parámetro global, precisando que con la segunda opción, los límites del intervalo quedan definidos por

$$\bar{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_j \left[I_y(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^j I_{\omega}(z_{k+i-1}) \right], \quad (4.54)$$

$$\underline{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_j \left[I_y(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^j I_{\omega}(z_{k+i-1}) \right]. \quad (4.55)$$

4.4. Discusión

Para la posterior implementación de estrategias de control predictivo robusto sobre sistemas dinámicos, es necesario caracterizar de manera apropiada las diferentes fuentes de incertezas que pueden afectar en el cálculo de las predicciones del sistema. Una de las principales fuentes de incertidumbre se presenta cuando el sistema se encuentra afectado por una señal de perturbación externa, debido a que dichas señales usualmente presentan un comportamiento estocástico y estimar el valor exacto que tendrán en el futuro es prácticamente imposible. Debido a esto, el capítulo parte presentando las propuestas de modelación por intervalos que son aplicables a este tipo de señales.

Según el comportamiento de las incertezas de las señales a lo largo del tiempo, en este capítulo se propone inicialmente dos alternativas para el método de sintonización de los intervalos, de manera de lograr una mejor caracterización de los errores en función del instante en que se realiza la predicción de las variables de interés y el comportamiento aleatorio específico que presenta la señal a modelar. Además se considera complementar este proceso de sintonización, estableciendo probabilidades de cobertura decrecientes, de manera de que se pueda evitar problemas de factibilidad en el problema de optimización de la estrategia MPC, asociados al crecimiento del error al predecir el sistema a más pasos en el futuro.

Sin embargo, dichas propuestas presentadas no necesariamente serán suficiente para caracterizar la incertidumbre que presentarán las predicciones del sistema dinámico. Para el caso donde la ecuación dinámica exacta del sistema es desconocida, se propone identificar modelos difusos para el cálculo de las predicciones. Debido a esto, se presenta una nueva fuente de incerteza, la cual estará asociada a la incertidumbre propia del modelo identificado. Para este caso, se propone una nueva estructura de intervalos que busca combinar el efecto de toda la incertidumbre que afectara a las predicciones del sistema dinámico.

El capítulo presenta en primera instancia la estructura propuesta de intervalos para el caso donde se utiliza un modelo difuso en variables de estado de orden uno, esto para ir expresando claramente las ideas que motivaron la formulación de esta nueva estructura. Posteriormente se presentó la extensión de estos intervalos para un caso más general, donde el modelo difuso pasa a ser autorregresivo con variables exógenas y con un orden que puede ser mayor a uno.

Con las distintas propuestas de intervalos presentadas en este capítulo, es posible proseguir con el diseño de las estrategias de control predictivo robusto. Las diferentes herramientas de modelación por intervalo definidas aquí permiten abordar el problema de control para los dos casos posibles que podrían presentarse, que la ecuación dinámica exacta del sistema a controlar sea completamente conocida o que se deba identificar un modelo difuso para caracterizar al sistema. En el siguiente capítulo se expondrán las formulaciones de control predictivo robusto basada en los intervalos propuestos, para las dos situaciones aquí mencionadas.

5 Control Predictivo Robusto Basado en Intervalos Difusos

Este capítulo tiene como objetivo exponer las principales ideas que conforman las propuestas de la formulación del control predictivo robusto, basándose en las herramientas de modelación por intervalos presentadas en el capítulo anterior.

En este capítulo, primero se presenta el planteamiento del problema de control, usando como base una función no-lineal para la dinámica del sistema y mencionando las diferentes condiciones que deben cumplir las variables del sistema. Posteriormente se procede a explicar las dos principales alternativas para la formulación del controlador, las cuales dependen directamente del nivel de conocimiento que se tiene de la ecuación dinámica real que rige al sistema.

El capítulo prosigue, presentando la primera formulación del controlador robusto, la cual se encuentra basada solamente en los intervalos identificados para la señal de perturbación externa y hace uso de la ecuación dinámica exacta de la planta para obtener los parámetros de apriete que se incluyen en las restricciones del problema de optimización.

Posteriormente se muestra la segunda formulación para el controlador predictivo robusto, la cual se encuentra basada en la nueva estructura de intervalos para variables de estado, presentada en el capítulo anterior, la cual tomaba en consideración las diferentes fuentes de incertezas que afectan al cálculo de las predicciones del sistema. Como esta formulación sólo se encuentra correctamente definida para el caso del sistema no-lineal en variables de estado, este capítulo finaliza con la presentación del controlador robusto basado en la extensión de la estructura de intervalo ideada en el capítulo previo para modelos difusos autorregresivos con variable exógena y orden mayor que uno.

5.1. Planteamiento del problema de control

Para la formulación de las estrategias de control predictivo robusto incluidas en esta tesis, se propone controlar las variables de estado x_k del siguiente sistema:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, \omega_k), \quad (5.1)$$

el cual corresponde al mismo planteado en (4.1) sobre el cual se desarrollaron los intervalos propuestos en el capítulo anterior. Las mismas dimensiones definidas previamente para las variable que afectan a (4.1) ($x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ y $\omega_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$) son consideradas nuevamente para (5.1). Adicionalmente, este sistema también debe cumplir la condición

$$Fx_k + Gu_k \leq h, \quad (5.2)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_c \times \mathbb{R}^{n_x}}$, $G \in \mathbb{R}^{n_c \times \mathbb{R}^{n_u}}$ y $h \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ son las matrices que definen a las n_c restricciones del sistema.

La principal fuente de incerteza presente en (5.1) se encuentra asociada al comportamiento estocástico de la perturbación externa ω_k . Esta incertidumbre puede provocar problemas al intentar cumplir (5.2) al momento de resolver el problema de optimización, por lo que se justifica la utilización de una estrategia de control predictivo robusto.

En las propuestas de control incluidas en esta tesis se plantea el diseño de un MPC robusto que resuelva el problema de optimización denominado en lazo abierto, considerando a la acción de control directamente como variables de optimización. Esta elección de controlador es realizada debido a la mayor simplicidad computacional de su implementación, esto considerando las características no-lineales del sistema a controlar. Tomando en cuenta esto, la ley de control a utilizar queda definida de la siguiente forma:

$$u_{k+j} = c_{k+j}, \quad (5.3)$$

donde c_k son variables del problema de optimización implementado. En un problema de optimización donde se considera un horizonte de predicción N , se tiene entonces un vector solución con N acciones de control (desde u_k hasta u_{k+N-1}), del cual sólo se rescata la primera componente (u_k) que corresponde a la que finalmente se aplicará sobre el sistema.

El modo para implementar el MPC robusto puede diferir en función del nivel de conocimiento que se tenga de la dinámica del sistema a controlar. Por una parte, si se dispone del conocimiento de la ecuación dinámica exacta que rige al sistema, la implementación radica en estimar directamente la incerteza de las predicciones de x_k mediante el ingreso al modelo de la incertidumbre de ω_k . La segunda alternativa, correspondiente al caso donde no se tiene a disposición la ecuación que rige a la dinámica del sistema, debe hacer uso de la nueva estructura de intervalos propuesta para sistemas dinámicos, obteniendo directamente un valor para la incerteza del estado predicho. A continuación se presentará la formulación de control para el primer caso mencionado, donde se tiene a disposición la ecuación dinámica exacta del sistema.

5.2. Control basado en intervalos para la perturbación

Para el caso donde el modelo es completamente conocido, se puede considerar reorganizar la dinámica dada por (5.1) siguiendo una estructura de sistema lineal en espacio de estados con presencia de incerteza multiplicativa y aditiva. Entonces una ecuación similar a (2.11) es utilizada como sistema a controlar, la cual presenta la siguiente estructura:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D \omega_k. \quad (5.4)$$

donde las matrices $A_k \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $B_k \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_x}$ son variantes en el tiempo. Las variaciones registradas por A_k y B_k se encargan de representar los efectos de las no-linealidades del sistema (5.1), permitiendo aplicar el controlador predictivo robusto desarrollado para sistemas lineales. En la implementación del MPC robusto para sistemas lineales, los cambios en las matrices A_k y B_k pueden ser tratados como incerteza multiplicativa del modelo (5.4), mientras que la incertidumbre de ω_k es considerada como incerteza aditiva que ingresa a la dinámica del sistema.

Al implementar la estrategia de control predictivo robusto para sistemas lineales, se debe poseer un cierto grado de conocimiento de las incertezas presentes dentro de la dinámica del sistema. En primer lugar, en (5.4) se identifican las incertezas del tipo multiplicativa ya mencionadas, las cuales se encuentran presentes en la definición de las matrices A_k y B_k . Estas matrices son consideradas contenidas dentro de un conjunto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\underline{A}_k \leq A_k \leq \overline{A}_k, \quad (5.5)$$

$$\underline{B}_k \leq B_k \leq \overline{B}_k, \quad (5.6)$$

donde $\underline{A}_k \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $\underline{B}_k \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_x}$ son las cotas inferiores y $\overline{A}_k \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$, $\overline{B}_k \in \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_x}$ son los límites superiores para las matrices A_k y B_k respectivamente. En (5.5) y (5.6) se utiliza el operador \leq para establecer una inecuación entre matrices, la cual es definida por el hecho de aplicar la misma condición de desigualdad componente a componente. Entonces para el caso general, si se tiene la siguiente desigualdad matricial

$$A \leq B, \quad (5.7)$$

el operador \leq utilizado entonces denota que se cumple

$$a_{i,j} \leq b_{i,j} \quad (5.8)$$

para todo par de sub-índices (i, j) . Aquí, los valores $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ corresponden a todas las componentes de las matrices A y B respectivamente, indexados por los mismos índices (i, j) .

Otros elementos de incertezas a considerar son las del tipo aditiva, las cuales ingresan a la dinámica del sistema junto con la señal de perturbación externa ω_k . El conocimiento que se tiene de la perturbación externa es el conjunto de valores donde ω_k se encuentra contenida, definido a partir de una expresión matemática similar a la usada para el caso de la incerteza multiplicativa:

$$\underline{\omega}_k \leq \omega_k \leq \overline{\omega}_k, \quad (5.9)$$

donde $\underline{\omega}_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ es el límite inferior y $\overline{\omega}_k \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ es la cota superior para el valor que puede adquirir ω_k . Considerando que ω_k puede ser un vector, el operador de desigualdad es aplicado ahora a vectores. El concepto detrás del operador \leq presentado previamente para matrices se mantiene para este caso, siguiendo con la idea de aplicar la misma condición de desigualdad para cada una de las respectivas componentes que conforman a los vectores.

Posteriormente, los distintos elementos afectados por la presencia de incertidumbre dentro de la dinámica del sistema (A_k , B_k y ω_k) pueden ser descompuestos en una componente determinística (o también llamada nominal) y una componente incierta. Para esta descomposición, la componente nominal corresponde a los valores asumidos como conocidos en el

instante k o que dependen de información real que se tiene a disposición en dicho momento, como por ejemplo las predicciones de A_{k+j} , B_{k+j} y ω_{k+j} . Por otro lado, la componente incierta está asociada a los valores que no se pueden estimar en el instante k con la información disponible, siendo para este caso la diferencia entre las predicciones de A_{k+j} , B_{k+j} , ω_{k+j} y los respectivos valores reales que se presentaran en el futuro¹. Esta descomposición de los elementos descrita queda entonces dada por las siguientes expresiones:

$$A_k = \hat{A}_k + A_k^e, \quad (5.10)$$

$$B_k = \hat{B}_k + B_k^e, \quad (5.11)$$

$$\omega_k = \hat{\omega}_k + \omega_k^e, \quad (5.12)$$

donde \hat{A}_k , \hat{B}_k , $\hat{\omega}_k$ son las componentes nominales o predichas previamente y A_k^e , B_k^e , ω_k^e son los respectivos errores de predicción. Al momento de implementar el problema de optimización del MPC robusto, las componentes nominales son consideradas como información conocida en el instante k , mientras que los errores de predicción se asumen como desconocidos.

A partir de la descomposición de los elementos con incertezas, una separación análoga puede ser realizada para los valores de las variables de estado x_k . Aquí se denomina como s_k a la componente nominal, la cual depende solamente de valores conocidos en el instante actual (\hat{A}_k , \hat{B}_k , $\hat{\omega}_k$). Por su parte, la componente incierta del estado denominada como e_k depende entonces de todos los errores de predicción presentes en el modelo del sistema (A_k^e , B_k^e y ω_k^e). Entonces la descomposición del estado queda finalmente de la siguiente forma:

$$x_k = s_k + e_k \quad (5.13)$$

La incerteza multiplicativa presentada en esta formulación puede ser también utilizada para ocultar elementos no-lineales presentes en la dinámica del sistema que se planea controlar, de manera que las matrices A_k , B_k puedan considerar dependencias con las perturbaciones externas y el estado actual. Debido a la separación de componentes planteada previamente, los elementos A_k^e , B_k^e pueden englobar toda la incertidumbre multiplicativa presente debido a los valores de e_k y ω_k^e . Por otra parte, el resto de la dinámica del estado asociada a los componentes nominales puede ser manejada como si fuese lineal, obteniendo los valores nominales para \hat{A}_k , \hat{B}_k en cada instante a partir del respectivo punto de operación. Como un ejemplo de esto se puede mencionar el caso de estudio de esta tesis con el sistema HVAC, el cual presenta no-linealidades donde el estado y las variables manipuladas se encuentran multiplicadas y en la formulación esta situación es compensada al considerar la matriz B_k como variante en el tiempo.

Al considerar todas las predicciones del estado que conforman la formulación del problema de optimización del MPC robusto (desde x_k hasta x_{k+N}), se pueden obtener una serie de condiciones de igualdad derivadas de la ecuación que rige a la dinámica del sistema (5.4). En primer lugar, para el valor del estado en el instante actual k se aprecian las siguientes condiciones de igualdad:

$$s_k = x_k, \quad (5.14)$$

$$e_k = 0, \quad (5.15)$$

¹Esta diferencia suele denominarse como error de predicción

donde la componente incierta posee un valor nulo, pues el estado nominal s_k es definido como la medición actual y por lo tanto no hay presencia de error. Al tomar las condiciones para las predicciones futuras del estado x_{k+j} , se derivan las siguientes ecuaciones a partir de la dinámica descrita por el modelo en (5.4) y la descomposición de sus componentes:

$$s_{k+j+1} = \hat{A}_{k+j}s_{k+j} + \hat{B}_{k+j}u_{k+j} + D\hat{\omega}_{k+j}, \quad (5.16)$$

$$e_{k+j+1} = A_{k+j}e_{k+j} + A_{k+j}^e s_{k+j} + B_{k+j}^e u_{k+j} + D\omega_{k+j}^e, \quad (5.17)$$

donde s_{k+j+1} depende solamente de valores conocidos en el instante k .

La dinámica descrita por (5.17) resulta de interés para la implementación del controlador robusto, pues dicha expresión indica como se espera que evolucione el error de las predicciones del estado calculadas en el problema de optimización con la información que se tiene disponible en el instante k . En particular, la restricción del sistema mostrada en (5.2) y que aplicada a los valores futuros de x_k , u_k adquiere la forma

$$Fx_{k+j} + Gu_{k+j} \leq h, \quad (5.18)$$

se ve afectada por los valores de e_{k+j} proyectados para los instantes futuros. Esto se produce porque si en (5.18) se reemplaza el estado por su respectiva descomposición, la condición de desigualdad queda de la forma:

$$Fs_{k+j} + Fe_{k+j} + Gu_{k+j} \leq h. \quad (5.19)$$

Para evitar los casos donde las restricciones relacionadas al estado no se cumplan, se debe obtener una cota superior para los valores de Fe_{k+j} , esto para todos los índices j correspondientes a los instantes dentro del horizonte de predicción. Para la componente incierta asociada a la predicción $k+j$ se define entonces la respectiva cota superior γ_{k+j} , tal que se cumple la siguiente desigualdad:

$$Fe_{k+j} \leq \gamma_{k+j} \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

La condición (5.20) no es impuesta para el caso donde $j = 0$, pues como se muestra en (5.15) la componente incierta es nula en dicho instante. Al tener en consideración los mayores valores posibles para Fe_{k+j} , el problema de optimización definido por la estrategia de MPC podrá tomar las acciones necesarias para evitar la violación de las condiciones definidas previamente por el operador del sistema.

Finalmente, se considera una función objetivo general para el problema de optimización llamada $J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, donde

$$\mathbf{x} = [x_k^T, \dots, x_{k+N}^T], \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u} = [u_k^T, \dots, u_{k+N-1}^T], \quad (5.22)$$

son los vectores con las variables de estado y manipuladas a lo largo del horizonte de predicción. Entonces el problema a resolver para cada instante k a lo largo del tiempo se puede resumir por la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{s}, \mathbf{u}}{\text{mín}} && \underset{\mathbf{e}}{\text{máx}} J(\mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{u}) \\ & \text{s.t.} && Fs_{k+j+1} + Gu_{k+j+1} + \gamma_{k+j+1}(\mathbf{e}) \leq h \\ & && s_{k+j+1} = \hat{A}_{k+j}s_{k+j} + \hat{B}_{k+j}u_{k+j} + D\hat{\omega}_{k+j} \\ & && j = 0, \dots, N-1 \\ & && s_k = x_k, \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde $\mathbf{s} = [s_k^T, \dots, s_{k+N}^T]$ y $\mathbf{e} = [e_k^T, \dots, e_{k+N}^T]$ son los vectores que contienen los valores resultantes de la descomposición realizada para cada componente del vector \mathbf{x} . En (5.23), el cálculo de los parámetros γ_{k+j+1} depende de las variables \mathbf{e} , siendo su proceso de obtención explicado en detalle más adelante.

La complejidad de este problema de optimización radica en el hecho de que en cada instante se deben resolver dos optimizaciones anidadas que se ven mutuamente afectadas, una minimización de la función objetivo y una maximización del efecto de la componente incierta del estado. Sin embargo, existen casos donde la formulación del problema de optimización se puede simplificar al reducir la complejidad asociada a la maximización de la componente con incertezas. Por ejemplo, en el caso de estudio que se explicará en un capítulo posterior relacionado al control de un sistema de climatización, la función objetivo del problema de minimización sólo presenta dependencia del vector \mathbf{u} , pues en dicha situación la meta principal es la de reducir el consumo energético. Considerando esto, para el caso de estudio utilizado en esta tesis, el problema descrito en (5.23) queda reformulado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{s}, \mathbf{u}}{\text{mín}} && J(\mathbf{u}) \\ & \text{s.t.} && F s_{k+j+1} + G u_{k+j+1} + \gamma_{k+j+1} \leq h \\ & && s_{k+j+1} = \hat{A}_{k+j} s_{k+j} + \hat{B}_{k+j} u_{k+j} + D \hat{\omega}_{k+j} \\ & && j = 0, \dots, N-1 \\ & && s_k = x_k, \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde la maximización queda reducida al cálculo de las cotas γ_{k+j} , las cuales serán obtenidas a partir de la información proporcionada por el ancho de los intervalos de predicción para ω_k (correspondiente al valor estimado de ω_k^e). Viendo desde el punto de vista de las predicciones para ω_{k+j} , los límites dados por los intervalos difusos quedan definidos de la siguiente manera:

$$\underline{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) - \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}), \quad (5.25)$$

$$\bar{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}) + \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}), \quad (5.26)$$

donde ω_{k+j-1} es un vector compuesto por los valores pasados de la señal de perturbación con respecto al instante $k+j$, los cuales además actúan como entradas para el modelo difuso y sus respectivos intervalos. Basados en las expresiones (5.25), (5.26) y en la descomposición de la perturbación presentada en (5.12), se puede obtener la siguiente condición de igualdad para la componente nominal de la perturbación $\hat{\omega}_{k+j}$

$$\hat{\omega}_{k+j} = f(\omega_{k+j-1}), \quad (5.27)$$

además de las cotas inferiores y superiores para el rango de valores donde se moverá la componente incierta de la perturbación externa ω_{k+j}^e

$$- \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}) \leq \omega_{k+j}^e \leq + \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}) \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (5.28)$$

Los límites obtenidos para ω_{k+j}^e a partir de los intervalos difusos son luego utilizados para calcular los valores de los parámetros de apriete de las restricciones γ_{k+j} . Pero se debe tomar en cuenta antes que el peor caso para la componente $F e_{k+j}$, el cual define a los distintos valores γ_{k+j} en las restricciones asociadas al estado, no depende únicamente de los valores

de ω_{k+j}^e . Según la expresión (5.17), los parámetros de apriete deben depender además de los límites que contengan a todos los posibles valores de las matrices A_{k+j}^e y B_{k+j}^e . Para manejar esta situación dentro del algoritmo encargado de determinar los valores de γ_{k+j} , se denotan como I_j^ω , I_j^A y I_j^B a los conjuntos definidos por las cotas superiores e inferiores de ω_{k+j}^e , A_{k+j}^e y B_{k+j}^e respectivamente. Entonces, usando la definición de desigualdad matricial presentada previamente en (5.7), estos conjuntos pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$I_j^\omega = \{ \omega_{k+j}^e : -\alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}) \leq \omega_{k+j}^e \leq \alpha_{k,j} I(\omega_{k+j-1}) \}, \quad (5.29)$$

$$I_j^A = \{ A_{k+j}^e : \underline{A}_{k+j}^e \leq A_{k+j}^e \leq \bar{A}_{k+j}^e \}, \quad (5.30)$$

$$I_j^B = \{ B_{k+j}^e : \underline{B}_{k+j}^e \leq B_{k+j}^e \leq \bar{B}_{k+j}^e \}, \quad (5.31)$$

debiéndose cumplir esto para $j = 1, \dots, N$. En este caso, el conjunto I_j^ω viene definido directamente de los valores entregados por los intervalos difusos que modelan a las perturbaciones externas. Por otra parte, I_j^A y I_j^B además podrían presentar también dependencia con respecto a las variables del sistema x_{k+j} y u_{k+j} , esto si es que el caso de estudio corresponde a la situación donde las matrices variables A_k y B_k son utilizadas para ocultar las no-linealidades del sistema.

Se plantea entonces un algoritmo que se encargue de calcular los parámetros de apriete de las restricciones asociadas al estado, de manera de que estas consideren los eventuales efectos negativos al momento de procurar satisfacer las condiciones del sistema, debido a la incerteza presente en las perturbaciones externas. Para la implementación, se definen los conjuntos E_j como las regiones de valores posibles que contienen a las respectivas componentes inciertas del estado e_{k+j} . Estos rangos de valores pueden ser expresados matemáticamente de forma similar a los conjuntos I_j^ω , I_j^A y I_j^B , quedando definidos como sigue:

$$E_j = \{ e_{k+j} : \underline{e}_{k+j} \leq e_{k+j} \leq \bar{e}_{k+j} \}, \quad \text{para } j = 0, \dots, N. \quad (5.32)$$

La forma de obtener los conjuntos E_j se desprende de la dinámica de la componente incierta mostrada en (5.17), es necesario utilizar la información dada por I_j^ω , I_j^A , I_j^B y las variables que afectan a la dinámica del sistema (Las variables de estado descompuestas y las acciones de control). A partir de (5.17) se desprende además que al ir calculando el conjunto E_{j+1} se necesita la información del conjunto previo E_j , pues el error de predicción del estado en $k+j$ (e_{k+j}) se debe ir propagando al predecir a más pasos en el futuro.

Considerando todo esto se plantea utilizar una función de conjuntos $\varphi(\cdot)$ que reciba los rangos de valores dados por E_j , I_j^ω , I_j^A , I_j^B y valores candidatos para las variables principales que componen al problema de optimización de la estrategia MPC (s_{k+j} y u_{k+j}). Entonces a partir de esta información, la función $\varphi(\cdot)$ entrega el conjunto E_{j+1} donde se moverá la componente incierta del estado e_{k+j+1} . Finalmente, dentro del algoritmo se implementa el cálculo de esta función de manera recursiva y se resuelven los respectivos problemas de maximización de la componente $F e_{k+j}$ dentro de las restricciones asociadas al estado, sujeto a la condición de que se cumpla que $e_{k+j} \in E_j$. Para comenzar esta recursión, es usado $E_0 = 0$ como conjunto inicial, pues según la ecuación (5.15) e_k deberá tener valor nulo. El concepto detrás de la implementación de esta función de conjuntos $\varphi(\cdot)$ se encuentra basada en algunas ideas presentadas en el libro de Blanchini y Miani [28]. El algoritmo para obtener los valores

de los parámetros de apriete γ_{k+j} se puede resumir entonces de la siguiente manera:

Algoritmo 5: Cálculo de los parámetros de apriete

Obtener s_{k+j} usando los valores w_{k+l}^0 y la secuencia de u_{k+l} , para $l = 0, \dots, j - 1$;

Se define $e_k = [0; 0]$ y el conjunto $E_0 = \{e_k\}$;

para $j = 0$ **a** $N - 1$ **hacer**

 Se obtiene el conjunto $E_{j+1} = \varphi(E_j, I_j^w, I_j^A, I_j^B, s_{k+j}, u_{k+j})$;

resolver: $\gamma_{k+j+1} = \max_{e_{k+j+1} \in E_{j+1}} \{F e_{k+j+1}\}$;

fin

Para un caso general, la implementación del algoritmo 1 conlleva una alta complejidad computacional, esto debido a que el cálculo de la función $\varphi(\cdot)$ necesita la secuencia de valores para u_{k+j} , los cuales además son también variables de decisión del problema de optimización principal del MPC presentado en (5.24). A su vez, el problema de optimización necesita los valores entregados por el algoritmo 1 para poder resolverse, por lo que la implementación de esta estrategia de control tal como se encuentra formulada hasta ahora se encuentra supeditada a la capacidad de resolver en paralelo los problemas de maximización de $F e_{k+j}$ y minimización del MPC.

Para evadir la dificultad presentada, se propone utilizar la estructura del problema de manera favorable, implementando una función $h_j(\xi)$ que reciba el vector

$$\xi_j = (s_{k+j-1}, e_{k+j-1}, u_{k+j-1}, \underline{\omega}_{k+j-1}, \bar{\omega}_{k+j-1}), \quad (5.33)$$

el cual contiene toda la información de las variables del sistema que se pueden disponer a partir de los datos entregados por los intervalos difusos y las iteraciones que ya se han llevado a cabo para resolver el problema de optimización principal². La idea de esta función $h_j(\xi_j)$ es que realice el cálculo numérico y entregue directamente los valores extremos que puede adquirir la variable e_{k+j} , de manera que los parámetros de apriete sean obtenidos al evaluar la expresión:

$$\gamma_{k+j} = F h_j(\xi_j). \quad (5.34)$$

Para uno de los casos de estudio analizados en esta tesis, correspondiente a la aplicación a sistemas de climatización, aparece como ventaja el hecho de que se puede asumir que la matriz A_{k+j}^e es nula, además de que la matriz B_{k+j}^e depende de los valores ω_{k+j}^e y $h_j(\xi_j)$. También las distintas matrices que afectan a la dinámica del sistema controlado (A_{k+j} , B_{k+j}^e y D) tendrán todos sus elementos conformados por valores positivos, por lo que la función h adquiere una estructura parecida a la ecuación (5.17), tomando la forma

$$h_{j+1} = A_{k+j} h_j + B_{k+j}^e u_{k+j} + D \omega_{k+j}^*, \quad (5.35)$$

donde el elemento ω_{k+j}^* toma los correspondientes valores extremos dados por los intervalos difusos ($-\alpha_{k,j} I$ o $+\alpha_{k,j} I$ según las restricciones definidas para el sistema). Algunas de las restricciones definidas para el estado en (5.19) normalmente representarían un límite superior e inferior para la variable de estado, por lo que los dos valores posibles para ω_{k+j}^* tendrán que ser eventualmente utilizados.

²Se entiende como el problema de optimización que se busca resolver para un instante k

Considerando todo lo anteriormente mencionado en esta sección, el problema de optimización del MPC robusto queda entonces con la siguiente forma

$$\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{u}}{\text{mín}} && J(\mathbf{u}) \\
& \text{s.t.} && F s_{k+j+1} + F h_{j+1}(\xi_{j+1}) + G u_{k+j+1} \leq h \\
& && s_{k+j+1} = A_{k+j}^0 s_{k+j} + B_{k+j}^0 u_{k+j} + D \omega_{k+j}^0 \\
& && j = 0, \dots, N-1 \\
& && s_k = x_k.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Finalmente el MPC robusto propuesto puede ser resuelto utilizando cualquier algoritmo para resolver problemas de optimización no-lineales. Esta selección se encuentra motivada por el hecho de que el sistema a controlar presenta no-linealidades en su dinámica, las cuales si bien son escondidas por las matrices A_{k+j} y B_{k+j} , también se presentan en el cálculo de la función $h_j(\varepsilon_j)$.

A continuación, en el Algoritmo 6 se resume como funciona la operación en tiempo real del controlador predictivo robusto propuesto, usando los valores que se disponen de los intervalos para la caracterización de la incertidumbre presente en las señales de perturbación externa que ingresan al sistema controlado.

Algoritmo 6: MPC Robusto Basado en Intervalos Difusos para la Perturbación Externa

para $k \in \mathbb{N}$ **hacer**

 Estimar $\underline{\omega}_{k+j}^e$ y $\overline{\omega}_{k+j}^e$ a partir de los intervalos difusos;

 Medir x_k ;

resolver: (5.36) ;

 Aplicar la solución óptima para u_k en el sistema;

fin

Pero esta no es la única propuesta para la utilización de intervalos difusos en una estrategia de control predictivo robusto que se incluye en esta tesis. En la siguiente sección se abordará la segunda propuesta de formulación para el problema de optimización del MPC, correspondiente al caso donde se requiere identificar modelos e intervalos difusos para caracterizar la evolución de la dinámica del sistema controlado.

5.3. Control basado en intervalos para el estado

En el caso donde no se tiene a disposición la ecuación dinámica exacta del sistema, es necesario identificar un modelo para poder realizar los cálculos de predicciones de la variable que se quiere controlar. El hecho de identificar un modelo que no necesariamente coincidirá exactamente con la dinámica real del sistema, ocasiona una nueva fuente de incerteza que debe ser considerada al momento de caracterizar al error de predicción. Para lograr esto se puede proceder a implementar la nueva estructura de intervalos presentada en el capítulo anterior, la cual fue formulada para modelar sistemas dinámicos en variables de estado, considerando un estado escalar. Debido a esto, para la formulación del controlador predictivo robusto,

se considera que en el sistema (5.41) y las restricciones (5.42), $n_x = 1$, es decir, $x_k \in \mathbb{R}$ y $F \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$. Basada entonces en la estructura de intervalos presentada en (4.40)-(4.41), los límites para la perdición de la variable a controlar x_{k+j} vienen dados por:

$$\bar{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1}) + \alpha_{\omega,j} I_\omega(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_\omega(z_{k+i-1}), \quad (5.37)$$

$$\underline{x}_{k+j} = \hat{x}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1}) - \alpha_{\omega,j} I_\omega(z_{k+j-1}) - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_\omega(z_{k+i-1}). \quad (5.38)$$

Estos límites obtenidos pueden ser utilizados para el cálculo de los parámetros de apriete γ_{k+j} , presentes en el problema de optimización definido en (5.24). Basado en (5.37)-(5.38), se calculan los parámetros de apriete como sigue:

$$\gamma_{k+j} = |F| \left[\alpha_{x,j} I_x(z_{k+j-1}) + \alpha_{\omega,j} I_\omega(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \left(\prod_{l=i}^{j-1} a_{fz}(z_{k+l}) \right) \alpha_{\omega,i} I_\omega(z_{k+i-1}) \right], \quad (5.39)$$

donde $|F| \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ es una matriz que resulta luego de aplicar la función valor absoluto, a cada uno de los elementos que componen a la matriz F que define a las restricciones (5.2).

Tomando en cuenta las predicciones del estado \hat{x}_{k+j} entregadas por el modelo difuso y los parámetros de apriete γ_{k+j} calculados a partir del ancho que adquiere el intervalo en (5.39), se reescribe el problema de optimización que define a la estrategia MPC y que es mostrado en (5.24). El nuevo problema de optimización a resolver es expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}, \mathbf{u}}{\text{mín}} && J(\mathbf{u}) \\ & \text{s.t.} && \hat{x}_{k+j+1} = f(\hat{x}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) \\ & && F \hat{x}_{k+j+1}(\hat{x}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) + \gamma_{k+j+1}(\hat{x}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) + G u_{k+j+1} \leq h \\ & && j = 0, \dots, N-1 \\ & && \hat{x}_k = x_k, \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde $\mathbf{x} = [\hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{k+N}]^T$ es el vector de predicciones del estado y $\mathbf{u} = [u_k, \dots, u_{k+N-1}]^T$ es el vector que contiene a las variables manipuladas que se planean aplicar sobre el sistema durante el horizonte de predicción.

A continuación, en el Algoritmo 7 se resume la operación en tiempo real del controlador predictivo robusto propuesto. Este nuevo controlador se diferencia con respecto a la propuesta anterior, descrita en el Algoritmo 6, en que debe considerar una mayor cantidad de fuentes de incertezas que afectan al cálculo de las predicciones, pues debe contemplar tanto la incertidumbre debida al error de modelación, como la incerteza presente por el comportamiento estocástico de las perturbaciones externas. Como diferencia adicional, se destaca que esta nueva propuesta de MPC con intervalos para el estado se ajusta a las situaciones donde se desconocen los valores reales de los parámetros del sistema, a diferencia de la primera propuesta con intervalos solo para las perturbaciones externas, la cual asume un completo conocimiento de los los parámetros reales que afectan a la dinámica de la planta a controlar.

Algoritmo 7: MPC Robusto Basado en Intervalos Difusos para el Estado

para $k \in \mathbb{N}$ **hacer**
 Estimar predicciones de ω_{k+j} a partir de los intervalos difusos de las perturbaciones;
 Medir estado actual x_k ;
 resolver: (5.40) ;
 Aplicar el primer elemento del vector \mathbf{u} como entrada del sistema;
fin

Como los intervalos difusos usados en esta propuesta están correctamente definidos para variables unidimensionales, se debe precisar que en los casos donde se busca controlar sistemas compuestos por más de una variable de estado, se debe definir un modelo e intervalo difuso distinto para cada variable por separado, siguiendo la misma estructura presentada en esta propuesta.

Otra situación que se puede presentar y que puede afectar la validez de la estructura de intervalos propuesta, es que el sistema a controlar siga una dinámica autorregresiva con variable exógena y orden mayor que uno. Para este nuevo caso, se presenta la siguiente formulación de MPC robusto, la cual se encuentra basada en la extensión para modelos autorregresivos, de la estructura de intervalos presentada en el capítulo previo.

5.4. Control basado en intervalos para modelos autorregresivos con variable exógena

Tomando en cuenta la extensión a modelos autorregresivos de las herramientas de modelación por intervalos presentadas en el capítulo previo, se considera que el sistema a controlar sigue una ecuación dinámica basada en (4.44), de la forma

$$y_k = f(\mathbf{y}_{\mathbf{k}-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{k}-1}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}-1}), \quad (5.41)$$

donde $y_k \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, e $\mathbf{y}_{\mathbf{k}-1}$, $\mathbf{u}_{\mathbf{k}-1}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}-1}$ son los mismos vectores de regresores presentados en (4.46)-(4.48). Para el problema de optimización a resolver, se considera que los valores futuros de y_k y u_k deben satisfacer

$$Fy_{k+j} + Gu_{k+j} \leq h, \quad (5.42)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$, $G \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_u}$ y $h \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ son las matrices que definen a las n_c restricciones que condicionan al sistema.

Para este caso, donde el sistema sigue una dinámica autorregresiva dada por (5.41), se utiliza la extensión de la estructura de intervalo propuesta. Considerando esto, los límites del

intervalo identificado para la salida futura del sistema y_{k+j} , vienen dados por

$$\bar{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) + \alpha_{y,j} I_y(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^j \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}), \quad (5.43)$$

$$\underline{y}_{k+j} = \hat{y}_{k+j}(z_{k+j-1}) - \alpha_{y,j} I_y(z_{k+j-1}) - \sum_{i=1}^j \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}). \quad (5.44)$$

De manera similar a lo realizado en el caso con modelos en variables de estado, los límites (5.43)-(5.44) son utilizados para el cálculo de los parámetros γ_{k+j} , presentes en el problema de optimización para apretar la restricción (4.45). Basado en esto, se calculan los parámetros de apriete como:

$$\gamma_{k+j} = |F| \left[\alpha_{y,j} I_y(z_{k+j-1}) + \sum_{i=1}^j \alpha_{\omega,i} I_{\omega}(z_{k+i-1}) \right]. \quad (5.45)$$

donde $|F| \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}$ es una matriz que resulta luego de aplicar la función valor absoluto, a cada uno de los elementos que componen a la matriz F que define a las restricciones (5.42). Considerando entonces las predicciones \hat{y}_{k+j} entregados por el modelo difuso y los parámetros de apriete calculados en (5.45), el problema de optimización que define a la estrategia MPC queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{y}, \mathbf{u}}{\text{mín}} && J(\mathbf{u}) \\ & \text{s.t.} && \hat{y}_{k+j+1} = f(\hat{y}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) \\ & && F \hat{y}_{k+j+1}(\hat{y}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) + \gamma_{k+j+1}(\hat{y}_{k+j}, u_{k+j}, \hat{\omega}_{k+j}) + G u_{k+j+1} \leq h \\ & && j = 0, \dots, N-1 \\ & && \hat{y}_k = y_k, \end{aligned} \quad (5.46)$$

donde $\mathbf{y} = [\hat{y}_k, \dots, \hat{y}_{k+N}]^T$ es el vector con las predicciones de la salida del sistema y $\mathbf{u} = [u_k, \dots, u_{k+N-1}]^T$ es el vector que contiene a las variables manipuladas que se planean aplicar durante el horizonte de predicción. Finalmente, esta variante para el control predictivo robusto se resuelve de la misma manera que el caso de intervalos para la variable de estado, siguiendo los mismos pasos expuestos en el Algoritmo 7.

5.5. Discusión

En este capítulo se ha presentado en primer lugar el planteamiento del problema de control para un sistema no-lineal general, afectado por señales de perturbación externa y por condiciones que deben cumplir sus variables de estado y manipuladas. A partir de este planteamiento, se identifican dos estrategias a seguir para formular la implementación del MPC robusto.

La primera formulación mencionada en este capítulo corresponde al caso donde se tiene disponible la ecuación dinámica exacta de la planta a controlar. Haciendo uso de dicho modelo para el cálculo de las predicciones del estado, se identifica como única fuente de incerteza a

la señal de perturbación externa ω_k , la cual se asume con comportamiento estocástico. Para comprender las ideas detrás de la formulación que sólo utiliza la incertidumbre caracterizada para ω_k , se plantean las nociones de separación de componente nominal e incierta de las predicciones. Esta separación es desarrollada bajo una ecuación dinámica que emula a los sistemas lineales en variables de estado, ocultando los comportamientos no-lineales del sistema en las matrices A_k y B_k , las cuales son consideradas para este fin como variantes en el tiempo. De esta separación de componentes se logra obtener una expresión para la función γ , la cual se encarga de calcular los parámetros de apriete de las restricciones impuestas en el problema de optimización, siendo necesaria para llevar a cabo la implementación del controlador.

La segunda formulación mencionada en este capítulo, surge como alternativa para el caso donde no se tiene disponible el modelo exacto del sistema, donde se vuelve necesario identificar un nuevo modelo para la variable que se busca controlar. La inclusión de este nuevo modelo, se traduce en una nueva fuente de incerteza que se debe considerar al momento de calcular las predicciones del estado. Debido a esto, se formuló un controlador predictivo robusto que hiciera uso de las propuestas de estructura de intervalos presentadas en el capítulo anterior, las cuales fueron concebidas para modelar a los sistemas dinámicos, teniendo en cuenta a las diferentes fuentes de incertidumbre que pueden afectar al cálculo de predicciones. Esta formulación para el controlador indica que las nueva estructura de intervalos propuesta en el capítulo anterior, son utilizadas en la ecuación que define a la función γ que calcula a los parámetros de apriete, permitiendo así la implementación del MPC robusto.

La formulación del controlador presentada para el caso con modelos en variables de estado se encuentra bien definida para el caso donde el estado del sistema es unidimensional. En caso de buscar controlar varias variables de estado de un sistema más complejo, la implementación resulta similar a la descrita en este capítulo, debiendo sin embargo definir modelos e intervalos difusos diferentes para cada variable del sistema, lo cual complejiza de manera importante la implementación del controlador. Una problemática que también se puede dar en este último caso es que no necesariamente todas las variables de estado son accesibles (medibles), por lo que la implementación del controlador predictivo robusto se complejiza aun más en dichos escenarios. Otra situación que se puede presentar y que puede afectar la validez de la formulación basada en la estructura de intervalos para la variable de estado, es que el sistema a controlar siga una dinámica autorregresiva de orden mayor que uno. Debido a esto, el capítulo finaliza presentando la extensión de la formulación del MPC robusto, basándose ahora en las herramientas de modelación por intervalos que fueron diseñadas en el capítulo anterior para modelos autorregresivos con variable exógena y orden mayor que uno.

Con las distintas propuestas de formulación para MPC robusto vistas en este capítulo, ya se puede proceder a las pruebas para corroborar su correcto funcionamiento al momento de controlar sistemas no-lineales. Con esta finalidad se plantean diferentes casos de estudio a abordar en esta tesis, los cuales van desde la implementación para un sistema no-lineal en variables de estado (incluyendo también como variante a la extensión basada en modelos autorregresivos) hasta un caso más aplicado, correspondiente al control de un sistema de climatización. En los capítulos que siguen a continuación, se procederá a describir en detalle los distintos casos de estudio planteados en este trabajo de tesis.

6 Caso de Estudio: Sistemas Dinámicos No-Lineales

En este capítulo se presentan las pruebas de las distintas propuestas diseñadas en esta tesis para la modelación y control robusto de sistemas dinámicos. Para ello, se definen unos sistemas no-lineales simples, los cuales servirán como caso de estudio general, permitiendo verificar a partir de resultados de simulación los beneficios que trae la implementación de las diferentes propuestas presentadas en los capítulos previos.

El capítulo se organiza como sigue: en primer lugar se presenta un sistema simple no-lineal definido en variables de estado, el cual se encuentra afectado por una señal de perturbación externa. Luego se indica cuales fueron los métodos seleccionados para caracterizar la incertidumbre de la perturbación y la variable de estado, presentando los respectivos resultados. Posteriormente se presenta una comparación de resultados entre las diferentes estrategias de control propuestas en este trabajo.

Finalmente, considerando la extensión de las propuestas a sistemas autorregresivos más complejos presentada en el capítulo previo, se presentan los resultados de modelación y control llevadas a cabo para un segundo sistema no-lineal, el cual posee una dinámica del tipo autorregresiva, con variables exógenas y con orden mayor a uno.

6.1. Planteamiento del sistema en variables de estado

Para estudiar la eficacia de los intervalos propuestos para caracterizar la incertidumbre y corroborar el funcionamiento de las estrategias de control predictivo robusto presentadas en esta tesis, se considera un caso de estudio simple. El sistema que se busca controlar se encuentra descrito por la siguiente dinámica no-lineal

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k + d\omega_k + a_u x_k u_k + d_u u_k \omega_k, \quad (6.1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}$ es la variable de estado, $u_k \in \mathbb{R}$ es la variable manipulada y $\omega_k \in \mathbb{R}$ es la señal de perturbación externa. Los valores numéricos de los parámetros que definen el comportamiento de (6.1) son: $a = 0.85$, $b = 0.35$, $d = 2$, $a_u = -0.15$ y $d_u = 0.01$. El sistema que se busca controlar se considera sujeto a la restricción

$$-1 \leq u_k \leq 1. \quad (6.2)$$

La señal ω_k que ingresa a (6.1), actúa como una fuente de incerteza externa que afecta a la dinámica del sistema. De manera de emular una situación de sistema real, ω_k debe presentar un comportamiento estocástico, y a la vez tiene que seguir una cierta ecuación dinámica (asumida como desconocida), esto para que posteriormente puedan identificarse modelos predictivos que estimen sus valores futuros.

La señal ω_k es generada entonces utilizando un filtro autorregresivo no-lineal, el cual recibe una señal aleatoria η_k como entrada exógena. La dinámica del filtro viene dada por

$$\omega_k = a_1\omega_{k-1} + a_2\omega_{k-2} + a_3\omega_{k-3} + a_{12}\omega_{k-1}\omega_{k-2} + a_{23}\omega_{k-2}\omega_{k-3} + b_1\eta_k, \quad (6.3)$$

donde $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.1$, $a_{12} = 0.01$, $a_{23} = -0.2$ y $b_1 = 0.6$. La señal de entrada aleatoria η_k sigue una distribución de probabilidad normal (denominada también gaussiana), con media $\mu = 0,5$ y varianza $\sigma^2 = 0,003$. Se considera que la señal η tiene un tiempo de muestreo tres veces superior al del sistema (6.1), es decir, η cambia su valor cada tres instantes discretos. En la Figura 6.1 (gráfica superior), se muestra un ejemplo de la señal aleatoria η_k ingresada al filtro no-lineal y en el gráfico inferior es mostrada la respectiva señal ω_k generada.

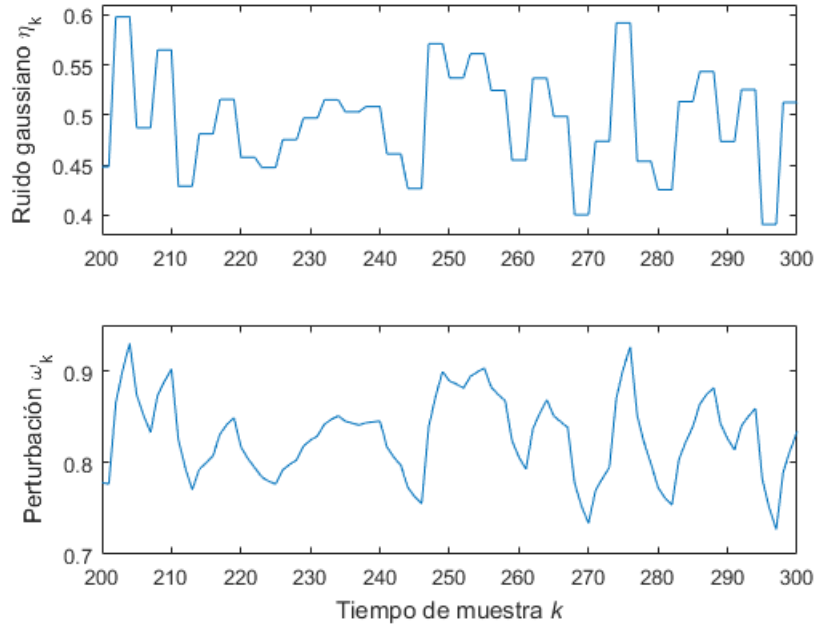


Figura 6.1: Generación de la señal ω_k .

Para el sistema (6.1), se plantea como objetivo de control el realizar un seguimiento de referencia entorno a una señal $r(k)$, permitiendo una cierta banda de tolerancia. Este objetivo es implementado como una condición para x_k en el problema de optimización, de la forma

$$\underline{r}(k) \leq x_k \leq \bar{r}(k), \quad (6.4)$$

donde $\underline{r}(k)$ y $\bar{r}(k)$ son los límites inferior y superior de la banda de tolerancia, los cuales serán visualizados en las simulaciones. Los controladores predictivos propuestos en esta tesis

son implementados, considerando el objetivo de satisfacer (6.4) en la mayoría de los casos. Para lograr esto, se establece un valor objetivo para la fracción de casos en los cuales se desea satisfacer la banda de referencia, el cual será utilizado para elegir la probabilidad de cobertura a utilizar durante el entrenamiento de los diferentes intervalos difusos.

Otro objetivo que se busca cumplir con este tipo de estrategias de control es la minimización del consumo energético del sistema. Para lograr la minimización de la energía consumida, se plantea como función objetivo del problema de optimización la siguiente función cuadrática

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} u_{k+j}^2, \quad (6.5)$$

la cual solo minimiza la energía asociada a la variable manipulada. Los valores del estado x_k no son incluidos en (6.5), por lo tanto, sus valores son manejados por el problema de optimización solamente mediante la inclusión de (6.4) en el problema de optimización.

Para poder realizar las pruebas de modelación y control sobre el sistema definido, antes se debe identificar un modelo de predicción para señal de perturbación externa ω_k . Debido a que ω_k actúa como una fuente externa de incertidumbre para el sistema debido a su comportamiento estocástico, también se deben obtener los respectivos intervalos que caractericen la incerteza asociada a las predicciones calculadas con el modelo obtenido. Por esto, en la siguiente sección se tratará el tema de la modelación mediante intervalos difusos de ω_k .

6.2. Modelación mediante intervalos de la perturbación externa

Para la posterior implementación de los intervalos y controladores propuestos, es necesario disponer de predicciones para las perturbaciones futuras. Debido a esto, en esta sección, se plantea la utilización de un modelo difuso Takagi & Sugeno (3.29) obtenido para predecir ω_k a un paso y el respectivo intervalo de predicción asociado, obtenido mediante el método de la covarianza (3.47)-(3.48).

La estructura del modelo fue optimizada, utilizando como variables de entrada a los mismos regresores $\omega_{k-1}, \omega_{k-2}, \omega_{k-3}$ presentes en (6.3) y seleccionando el número de clusters óptimo que minimiza el error de predicción obtenido en la base de datos de prueba. A partir del modelo difuso obtenido, se calculan las predicciones a j pasos, con $j = 1, \dots, N$, y se implementan los respectivos intervalos basados en el método de la covarianza, utilizando la formulación con parámetros de sintonía α_j que solo varían en función del paso de predicción j . En este punto, dos variantes se propusieron para la implementación de intervalos, por una parte se consideró una probabilidad de cobertura fija $cp = 0,9$, esto para $j = 1, \dots, N$. La segunda variante consiste en la implementación de los intervalos con probabilidad de cobertura decreciente definida en (4.8), con $cp_i = 0,9$, $cp_f = 0,1$ y $N = 15$.

Los resultados de las métricas de desempeño RMSE, PICP y PINAW, para los intervalos encontrados para ambas variantes, son mostradas en las Tablas 6.1 y 6.2.

Tabla 6.1: Resultados intervalos con cobertura fija para perturbación externa

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE [-]	0.024	0.051	0.051	0.051	0.023	0.051	0.051	0.051
PICP [%]	90.01	90.00	90.00	90.00	90.46	90.14	89.71	89.67
PINAW [%]	16.92	38.53	37.85	37.83	17.48	39.76	39.05	39.04

Tabla 6.2: Resultados intervalos con cobertura decreciente para perturbación externa

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE [-]	0.024	0.051	0.051	0.051	0.023	0.051	0.051	0.051
PICP [%]	90.01	48.06	21.93	10.01	90.46	48.33	22.02	9.94
PINAW [%]	16.92	14.73	6.27	2.86	17.48	15.20	6.47	2.95

A partir de las Tablas 6.1 y 6.2, se puede verificar que las probabilidades de cobertura impuestas en el conjunto de entrenamiento son alcanzadas en el de validación, esto con un cierto margen de tolerancia, para ambas variantes implementadas. El valor registrado para el RMSE refleja un incremento importante de la incerteza del modelo en los primeros pasos de predicción, estabilizándose posteriormente para pasos mayores a 5. Esta situación se debe a que las mediciones reales de la señal ω_k se mueven en un rango acotado de valores, por lo que el error de predicción también se debe encontrar limitado, en función de los valores extremos que adquiere la señal modelada. Este incremento del error de predicción es reflejado también por el ancho del intervalo medido por el PINAW para el caso con probabilidad de cobertura fija, alcanzado valores cercanos al 40 %. La obtención de intervalos muy anchos pueden generar dificultades relacionadas a la factibilidad del problema de optimización del control predictivo, por lo que se vuelve importante reducir los valores de PINAW. En las Figuras 6.2 y 6.3 se muestran los gráficos de los intervalos obtenidos a lo largo del horizonte de predicción, utilizando cobertura fija y decreciente respectivamente, esto para un cierto instante simulado k .

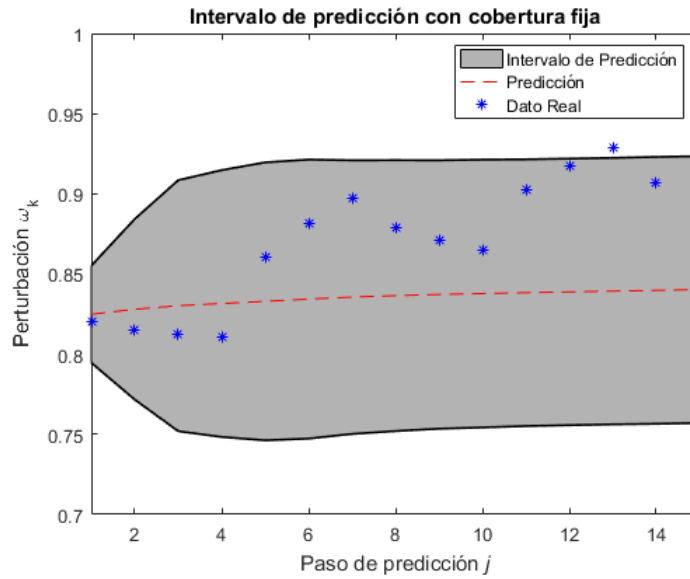


Figura 6.2: Intervalo de predicción para ω_k con cobertura fija

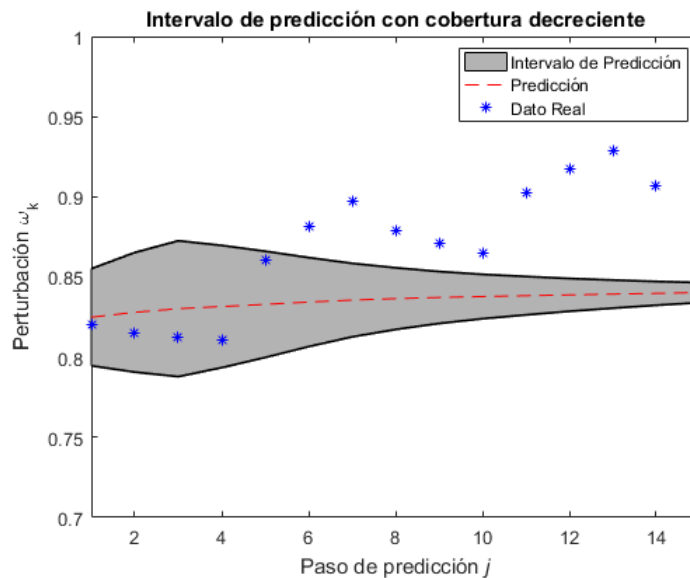


Figura 6.3: Intervalo de predicción para ω_k con cobertura decreciente

De los resultados mostrados en la Tabla 6.2 y la comparación de las Figuras 6.2 y 6.3, se comprueba la efectividad de implementar la probabilidad de cobertura decreciente para reducir los anchos de intervalos para pasos de predicción grandes. El efecto de implementar esta nueva estrategia puede resultar de importancia en situaciones límites donde hay riesgo de infactibilidad en el problema de optimización del MPC. La selección de la variante más adecuada se debe realizar *a posteriori*, luego de dimensionar el real efecto que tiene la utilización de una u otra estrategia en los resultados de implementación de las estrategias de control.

Antes de proceder a implementar las estrategias de control propuestas, se debe primero

identificar un modelo para el sistema en variables de estado, dando uso para ello de las formulaciones de modelación descritas en el capítulo anterior.

6.3. Modelación mediante intervalos de la dinámica del sistema

Para el sistema no-lineal (6.1), se propone identificar un modelo difuso en variables de estado que tenga una estructura similar a la mostrada en (4.11). La implementación de los respectivos intervalos se lleva a cabo utilizando en primera instancia una probabilidad de cobertura fija $cp=0.9$, a lo largo del horizonte de predicción.

Se procede entonces a comparar las dos formulaciones de intervalos presentadas en el capítulo anterior para el caso de modelos difusos basados en variables de estado: los intervalos con parámetros de sintonía $\alpha_{x,j}$, $\alpha_{\omega,j}$ separados y la variante con un parámetro global α_j (donde $\alpha_j = \alpha_{x,j} = \alpha_{\omega,j}$). Las Tablas 6.3 y 6.4 muestran los resultados obtenidos para ambas variantes de intervalos propuestas.

Tabla 6.3: Resultados intervalos de estado con parámetros de sintonía separados

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE [-]	0.049	0.281	0.365	0.382	0.049	0.284	0.372	0.388
PICP [%]	90.01	90.02	90.01	90.02	90.41	89.43	89.60	89.65
PINAW [%]	0.97	5.72	7.41	7.72	1.13	6.62	8.58	8.93

Tabla 6.4: Resultados intervalos de estado con parámetros de sintonía globales

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE [-]	0.049	0.281	0.365	0.382	0.049	0.284	0.372	0.388
PICP [%]	90.01	90.02	90.00	90.00	90.48	89.48	89.65	89.65
PINAW [%]	0.97	5.71	7.39	7.71	1.12	6.61	8.55	8.92

Los resultados obtenidos con ambas formulaciones fueron similares, ambos logrando las probabilidades de coberturas requeridas en el conjunto de validación, mientras se mantuvo el ancho del intervalo acotado en un valor aparentemente pequeño (presentando un PINAW inferior a 10%). La similitud de resultados significa que ninguna de las propuestas es notoriamente mejor que la otra, por lo tanto ambas pueden ser implementadas en la estrategia de control predictivo. Debido a la mayor simplicidad del proceso de entrenamiento y sintonización que significa el utilizar los parámetros de sintonía globales, se escoge dicha formulación para llevar a cabo las posteriores pruebas de simulación.

Antes de proseguir con la implementación del control predictivo diseñado, se verifica la efectividad de la propuesta de sintonización con probabilidad de cobertura decreciente para

el caso de modelación de estado. Esto debe ser realizado, pues a pesar de obtener valores de PINAW bajos, los anchos de intervalos pueden aún provocar casos de infactibilidad en el problema de optimización. Posteriormente en este capítulo, se verá que si se producen problemas de infactibilidad en el controlador MPC, al utilizar intervalos con cobertura fija, lo que justifica la implementación de las variantes de intervalos con cobertura decreciente llevadas a cabo en este punto.

Usando la estructura de intervalos con parámetros globales dados por (4.42)-(4.43), se presentan en la Tabla 6.5 los resultados al utilizar la probabilidad de cobertura decreciente obtenida a partir de (4.8), considerando $cp_i = 0.9$, $cp_f = 0.1$ y $N = 15$. Además se incluye en las Figuras 6.4 y 6.5 los gráficos de los intervalos de predicción obtenidos en un cierto instante k , a lo largo del horizonte de predicción, esto para ilustrar la disminución del ancho resultante.

Tabla 6.5: Resultados intervalos de estado con cobertura decreciente

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE [-]	0.049	0.281	0.365	0.382	0.049	0.284	0.372	0.388
PICP [%]	90.01	48.06	21.94	10.02	90.48	47.74	21.82	9.60
PINAW [%]	0.97	2.18	1.23	0.57	1.12	2.53	1.42	0.66

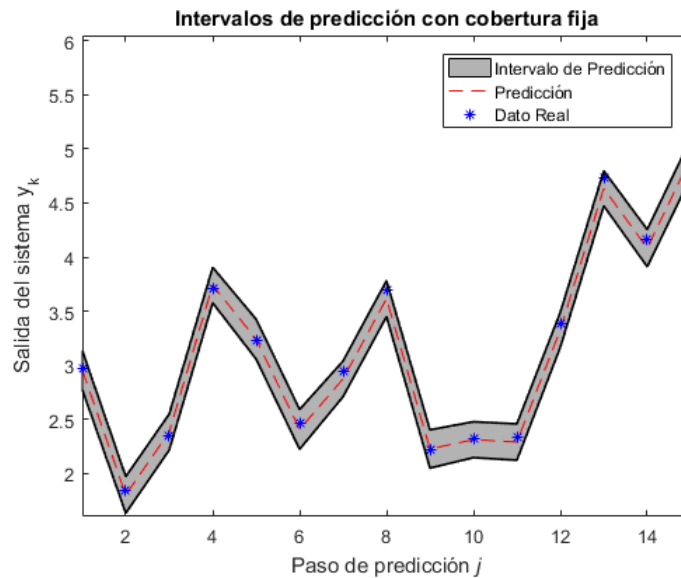


Figura 6.4: Intervalo de predicción para x_k con cobertura fija

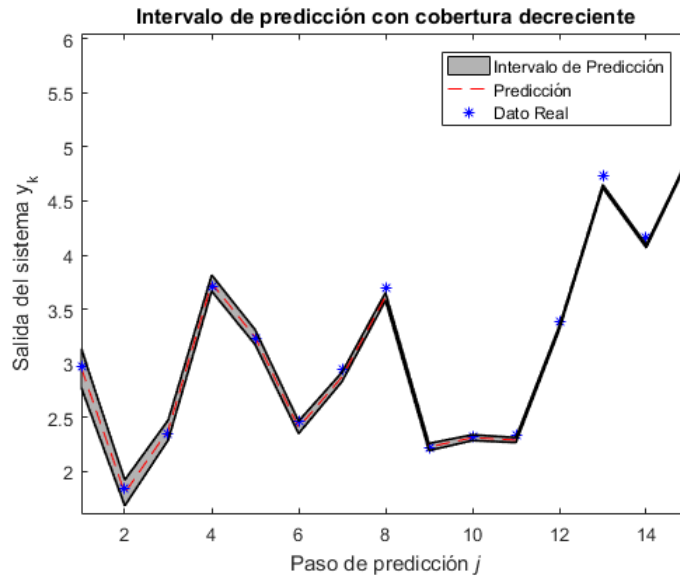


Figura 6.5: Intervalo de predicción para x_k con cobertura decreciente

Se puede observar que, similar a lo ocurrido con la modelación de la perturbación externa, los anchos de intervalos logran ser reducidos al implementar la probabilidad de cobertura decreciente. Esta reducción es más notoria al observar los resultados obtenidos a más pasos en el futuro, en la comparación entre las Tablas 6.4 y 6.5. Evitar anchos grandes para los intervalos obtenidos a mayores pasos de predicción, se traduce en una disminución del riesgo de presentar situaciones infactibilidad en la optimización llevada a cabo en el controlador MPC. Esto se identifica como el principal beneficio potencial de la implementación de los controladores propuestos. Para verificar este beneficio, a continuación se presentarán los resultados de simulación de los distintos controladores propuestos en esta tesis para el caso de control del sistema no-lineal en variables de estado.

6.4. Implementación de controladores propuestos

En esta sección se muestran los resultados de las dos formulaciones de control predictivo robusto, propuestas en el capítulo anterior, aplicándolas sobre el sistema no-lineal descrito en (6.1). Por una parte, la primera formulación propuesta corresponde al MPC robusto basado en intervalos para la perturbación, presentado en el Algoritmo 6. Esta formulación considera el completo conocimiento de la ecuación dinámica que rige al sistema y propaga la incerteza de la señal de perturbación a través del modelo conocido del sistema. La segunda formulación corresponde al MPC robusto basado en intervalos para el estado, presentado en el Algoritmo 7. Este controlador, a diferencia del anterior, considera que la ecuación dinámica que rige al sistema es desconocida, por lo que se deben utilizar los intervalos propuestos que manejan tanto las incertezas propias del modelo identificado, como la incertidumbre presente en las predicciones de la señal de perturbación externa.

Para la implementación de la primera alternativa, denotada a partir de aquí como RMPC-

ω , se considera la utilización de la incerteza obtenida para la perturbación con cobertura decreciente. Para este controlador, se obtiene como resultado la siguiente curva para la variable controlada, mostrada en la Figura 6.6.

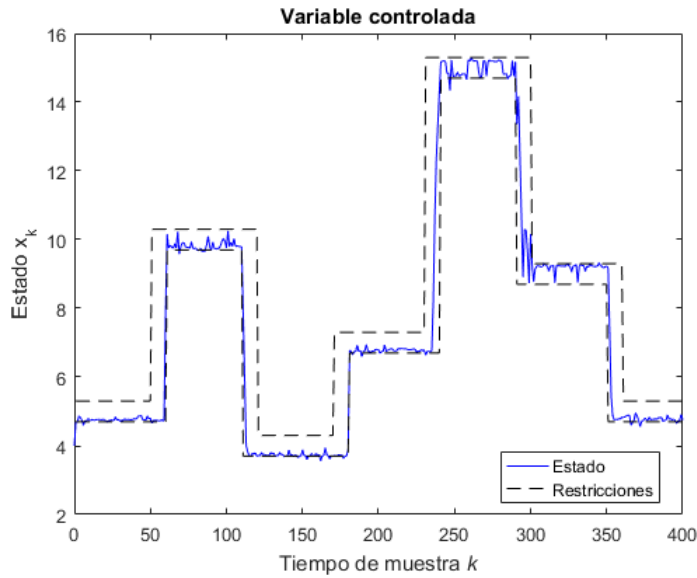


Figura 6.6: Implementación de MPC con propagación de la incerteza

Si bien se aprecia que la variable controlada se mantiene la mayor parte del tiempo dentro de la banda de referencia, se identifican ciertos instantes en la Figura 6.6 donde la variable controlada presentó un comportamiento errático (en particular, cuando $k \in [60, 110]$ y $k \in [240, 350]$). Esta situación se debe a la presencia de casos infactibles en el problema de optimización, los cuales ocurren debido a que el intervalo resulta más ancho que el rango de valores definido como restricción del sistema en (6.4). Para ilustrar esta situación, en la Figura 6.7 se muestra el ancho del intervalo a lo largo del horizonte de predicción, calculada en un cierto instante k , donde se presentó el problema de infactibilidad.

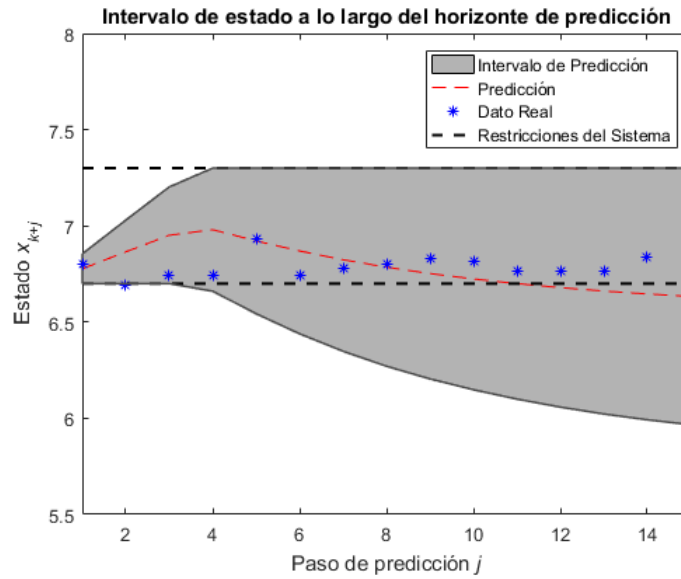


Figura 6.7: Intervalo de estado dado por propagación de la incerteza externa

Para la segunda formulación del controlador mencionada en esta sección, correspondiente al MPC robusto basado en intervalos para el estado, se utilizan dos clases de intervalos, los sintonizados con probabilidad de cobertura fija (para este caso, el controlador se denota como MPC-FI90) y los obtenidos con cobertura decreciente (en este otro caso, el controlador se denota como MPC-FI). En la Figura 6.8 se incluye el gráfico obtenido para la variable controlada al usar el MPC-FI90.

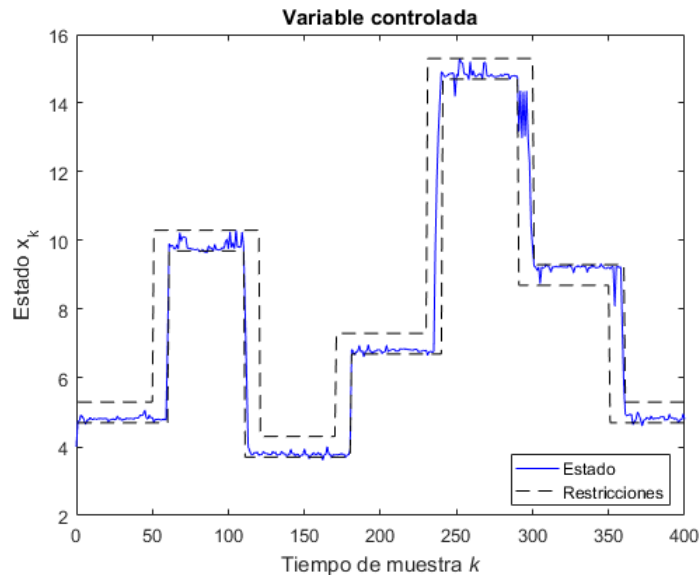


Figura 6.8: Resultados de implementación para RMPC-FI90

En esta implementación se presentaron problemas similares a los obtenidos con el controlador con propagación de la incerteza. Casos infactibles debido al ancho de los intervalos,

ocurrieron en los instantes donde $k \in [60, 110]$ y $k \in [240, 350]$. Para ilustrar esta situación, de manera similar a lo hecho en el caso previo, se incluye en la Figura 6.9 la evolución del intervalo a lo largo del horizonte de predicción, esto para el mismo instante k usado para la Figura 6.7.

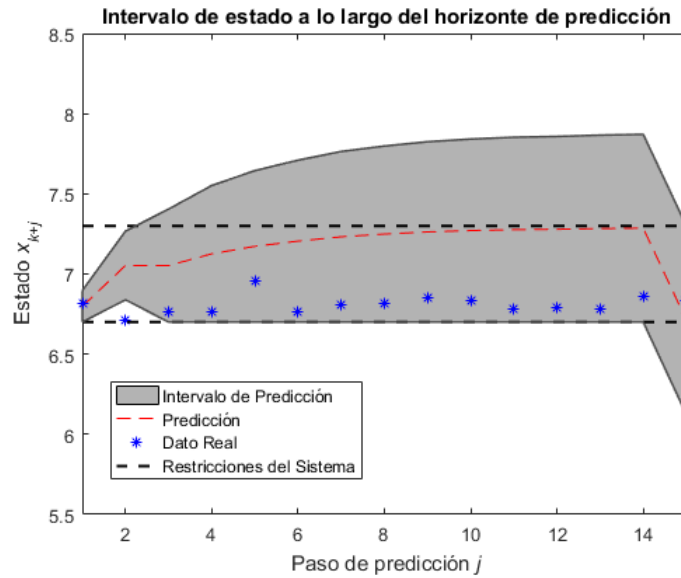


Figura 6.9: Intervalo de estado con cobertura fija

Por otro lado, en las Figuras 6.10 y 6.11 incluyen los resultados de la implementación del controlador MPC-FI, el cual utiliza los intervalos con probabilidad de cobertura decreciente, mostrando a la variables controlada y manipulada respectivamente.

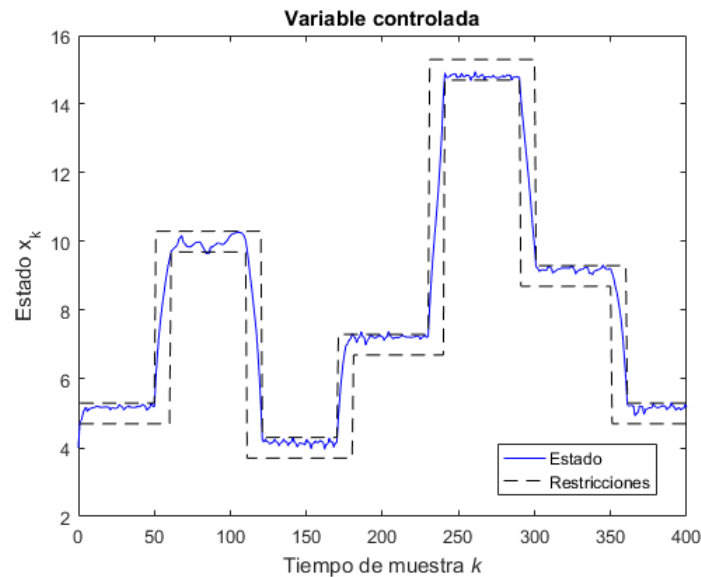


Figura 6.10: Resultados de implementación para RMPC-FI

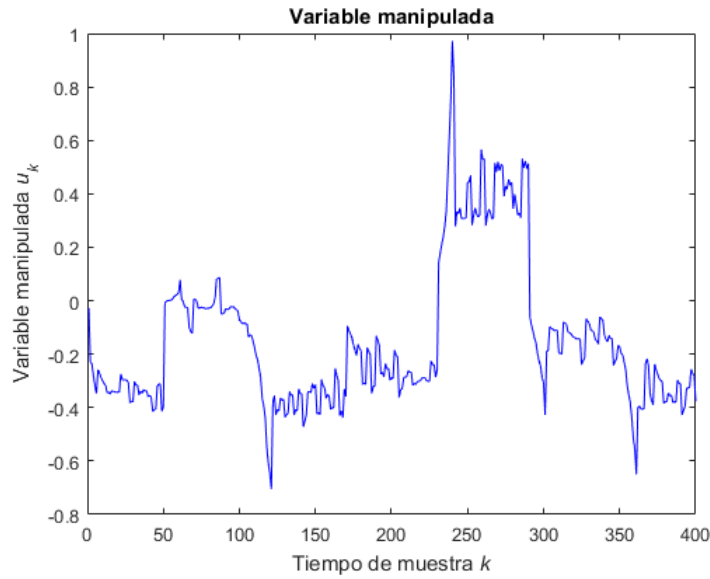


Figura 6.11: Variable manipulada con RMPC-FI

En esta implementación, los problemas de infactibilidad presentados previamente logran ser completamente evitados, verificando la efectividad de la propuesta de cobertura decreciente para mantener a los intervalos de estado lo suficientemente acotados. Para ilustrar esto, se presenta en la Figura 6.12 la evolución del intervalo a lo largo del horizonte de predicción para el mismo instante k utilizado en las Figuras 6.7 y 6.9, esto para poder contrastar adecuadamente con lo obtenido en los casos anteriores.

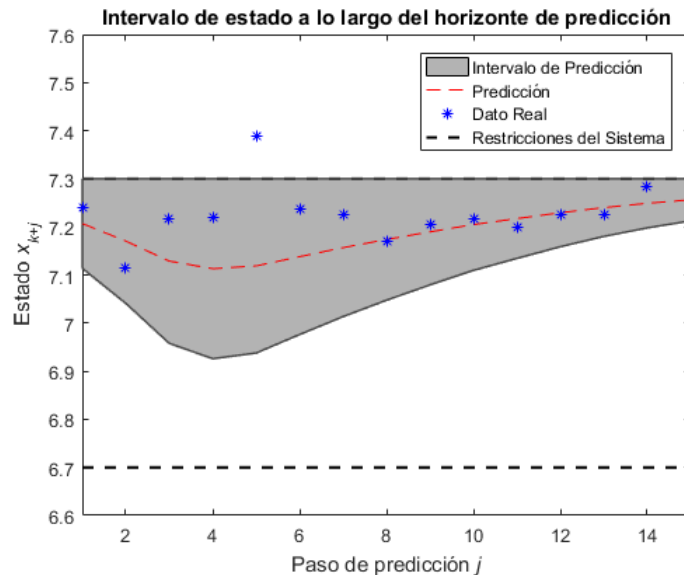


Figura 6.12: Intervalo de estado con cobertura decreciente

Para fines comparativos, una estrategia de control adicional es considerada para ser contrastada con las propuestas presentadas. En la Figura 6.13 se presenta el resultado de la

implementación del control predictivo clásico (denominado también como determinístico, y denotado como MPC), el cual solamente hace uso de las predicciones del modelo y no utiliza intervalo alguno.

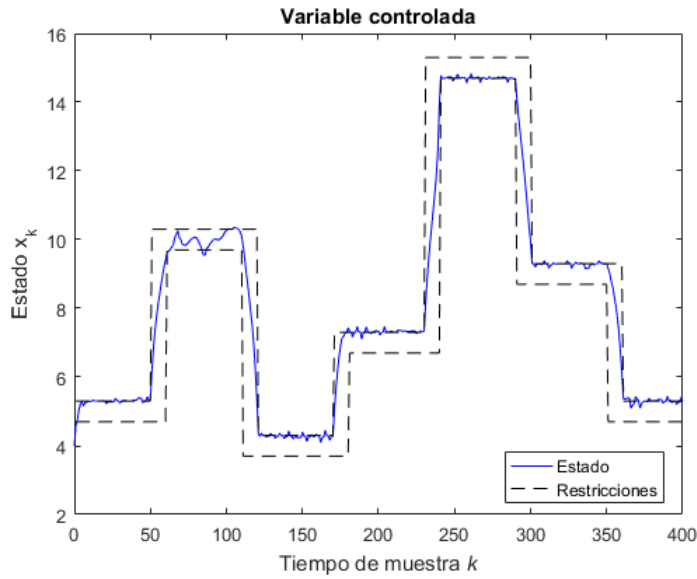


Figura 6.13: Implementación de MPC determinístico

La Figura 6.13 refleja una baja importante en la satisfacción de la restricción para x_k , con respecto a lo obtenido en las implementaciones previas, la cual se evidencia con una mayor claridad en los resultados comparativos a mostrar próximamente en la Tabla 6.6.

El nivel de cumplimiento de las restricciones, el consumo energético medido por la función objetivo, el costo computacional dimensionado a partir del tiempo promedio ocupado por el algoritmo y el porcentaje de casos infactibles presentados en la optimización, son aspectos de interés al momento de realizar una comparación de los distintos controladores implementados. Debido a esto, se incluye en la Tabla 6.6 los resultados de dichos valores para todas las implementaciones mencionadas previamente.

Tabla 6.6: Comparación entre MPC implementados

	Satisfacción de restricciones [%]	Función objetivo [-]	Tiempo de iteración promedio [seg]	Casos de infactibilidad [%]
RMPC-FI	96.75	38.22	4.97	0.00
RMPC-FI90	94.25	56.54	79.00	85.00
RMPC- ω	90.75	58.16	62.45	92.50
MPC	61.25	36.52	5.39	0.00

A partir de los resultados obtenidos, se evidencia una mejora al usar las diferentes estrategias de MPC robusto con respecto al MPC determinístico, en términos de la proporción de casos donde las restricciones impuestas sobre x_k son cumplidas. A pesar del incremento en el valor de la función de costos presentado por el controlador RMPC-FI con respecto al MPC determinístico, se destaca el beneficio que significa cumplir las restricciones en una mayor

cantidad de casos, evitando un aumento de la misma magnitud que la presentada con los controladores RMPC-FI90 y RMPC- ω . Desde el punto de vista del costo computacional, se evidencia un aumento importante en algunas de las implementaciones, debiéndose principalmente a la ocurrencia de situaciones de infactibilidad que el algoritmo demoraba en tratar de resolver.

Para el algoritmo de optimización, el disponer de una región más pequeña de posibles soluciones, puede provocar que para ciertos instantes la optimización sea resuelta más rápido. Este hecho permite explicar la disminución del tiempo de iteración promedio obtenida para el RMPC-FI, donde la zona de factibilidad es reducida por los parámetros de apriete, con respecto al tiempo de iteración obtenido por el MPC determinístico. Se destaca que este efecto es también posible, gracias a que la utilización del controlador propuesto no aumenta el orden de complejidad del problema de optimización a resolver, a pesar de involucrar una optimización compuesta por más variables.

El aumento del nivel de satisfacción de restricciones logrado por el RMPC-FI, en comparación al valor obtenido por el MPC determinístico, refleja la efectividad de las propuestas de modelación por intervalos presentada en esta tesis. El controlador RMPC-FI logra cumplir en más instantes las restricciones del sistema, sin la necesidad de presentar mayores variaciones en la función objetivo y el tiempo de iteración promedio, esto con respecto a los valores obtenidos en el caso determinístico. En este punto, el mal desempeño del RMPC-FI90 debido a los casos de infactibilidad, confirma también la importancia de la utilización de la probabilidad de cobertura decreciente, pues la utilización de esta noción, permitió evitar satisfactoriamente la ocurrencia de casos infactibles en el problema de optimización.

Ahora, se procederá a analizar el funcionamiento de las otras propuestas presentadas en el capítulo previo, las cuales fueron ideadas para sistemas del tipo autorregresivo con variable exógena. Debido a esto, a continuación se planteará un segundo sistema a controlar, el cual funciona como una extensión del caso de estudio actual.

6.5. Extensión a sistemas autorregresivos con variable exógena

Con el propósito de estudiar la extensión de la propuesta de control predictivo robusto para sistemas autorregresivos con variable exógena, se presenta el siguiente sistema no-lineal

$$y_{k+1} = a_1 y_k + a_2 y_{k-1} + b_1 u_k + b_2 u_{k-1} + d_1 \omega_k + d_2 \omega_{k-1} + a_{12} y_k y_{k-1} + a_{u1} y_k u_k + a_{u2} y_{k-1} u_{k-1} + a_\omega y_k \omega_{k-1} + b_\omega u_k \omega_k, \quad (6.6)$$

con $y_k \in \mathbb{R}$ siendo la salida del sistema, $u_k \in \mathbb{R}$ la variable manipulada y $\omega_k \in \mathbb{R}$ la perturbación externa. Los valores numéricos de los parámetros que definen el comportamiento del sistema son: $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.2$, $a_{12} = -0.05$, $a_{u1} = 0.2$, $a_{u2} = 0.1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.05$, $d_1 = 1.5$, $d_2 = 0.07$, $a_\omega = -0.15$ y $b_\omega = -0.03$.

El sistema (6.6) se encuentra sujeto a la misma restricción (6.2) que fue impuesta para la variable manipulada del sistema anterior. El objetivo de control sigue siendo el mismo

definido para el caso anterior, usando una banda de referencia invocada como la condición

$$\underline{r}(k) \leq y_k \leq \bar{r}(k), \quad (6.7)$$

mientras se minimiza la energía de control dada por (6.5). Adicionalmente, la misma señal ω_k modelada previamente es utilizada como perturbación externa de (6.6), por lo tanto, no es necesario repetir el proceso de obtención de modelos de predicción para $\hat{\omega}_{k+j}$.

Para modelar (6.6), se plantea la identificación de un modelo difuso Takagi & Sugeno, siguiendo la formulación presentada en (4.51), la cual se encuentra focalizada para la modelación de sistemas del tipo autorregresivo con variable exógena. La estructura del modelo es optimizada, considerando los mismos autorregresores que componen a la dinámica descrita en (6.6) y seleccionando el número de clusters óptimo que minimiza el error de predicción obtenido en la base de datos de prueba.

Basándose en el análisis llevado a cabo para el caso donde se modeló el sistema en variables de estado no-lineal, directamente se procede a implementar los intervalos difusos que siguen el esquema de sintonización que considera la utilización de un parámetro global, los cuales están descritos por los límites (4.54)-(4.55). Las Tablas 6.7 y 6.8 muestran los resultados obtenidos al utilizar los intervalos (4.54)-(4.55) con probabilidad de cobertura fija y decreciente respectivamente.

Tabla 6.7: Resultados de intervalos para y_k con cobertura fija

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE	0.079	0.116	0.108	0.108	0.080	0.118	0.111	0.111
PICP (%)	90.01	90.03	90.00	90.06	89.89	89.81	89.83	89.72
PINAW (%)	3.38	5.05	4.70	4.68	3.31	4.93	4.59	4.56

Tabla 6.8: Resultados de intervalos para y_k con cobertura decreciente

Pasos	Conjunto de entrenamiento				Conjunto de validación			
	1	5	10	15	1	5	10	15
RMSE	0.079	0.116	0.108	0.108	0.080	0.118	0.111	0.111
PICP (%)	90.01	48.11	22.11	10.26	89.89	47.40	21.03	10.27
PINAW (%)	3.38	1.88	0.75	0.34	3.31	1.84	0.74	0.33

En los resultados mostrados en las Tablas 6.7 y 6.8 se identifica un error de predicción que crece en los primeros pasos de predicción, para luego disminuir levemente y finalmente terminar estabilizándose. La ocurrencia de esta situación se encuentra influenciada por el efecto similar presentado durante la modelación de la perturbación externa, donde el error obtenido se estabilizó en un valor fijo, esto luego de haber aumentado el paso de predicción. Debido a esta situación, el ancho del intervalo medido por el PINAW se mantiene con valores aparentemente pequeños cuando se usan los intervalos con cobertura fija. Sin embargo, la necesidad de implementar la cobertura decreciente sigue estando presente, esto debido al

hecho de que para este caso de estudio, el presentar un PINAW cercano a 5% significa una mayor probabilidad de presentar infactibilidad en el problema de optimización. Esto último se debe a que la restricción (6.7) define un rango de valores con un ancho cercano al equivalente de un intervalo que presenta un 5% de PINAW. Los resultados mostrados en la Tabla 6.8, verifican la efectividad de la implementación de la probabilidad de cobertura decreciente para reducir los anchos de intervalos cuando el paso de predicción y_a es grande.

Para ambas implementaciones (con cobertura fija y decreciente), se puede destacar que el intervalo fue capaz de alcanzar los valores de cobertura impuestos durante el entrenamiento en la base de validación, esto con un pequeño margen de error. Usando estos intervalos, se procede a implementar la extensión del controlador propuesto en el Algoritmo 7, la cual esta enfocada en la aplicación a modelos del tipo autorregresivo. Se identifican en este punto, dos implementaciones diferentes del controlador, basadas en si utilizaban los intervalos obtenidos con cobertura fija (RMPC-FI90) o los sintonizados con cobertura decreciente (RMPC-FI). La Figura 6.14 muestra la salida del sistema al ser controlada con la estrategia RMPC-FI90.

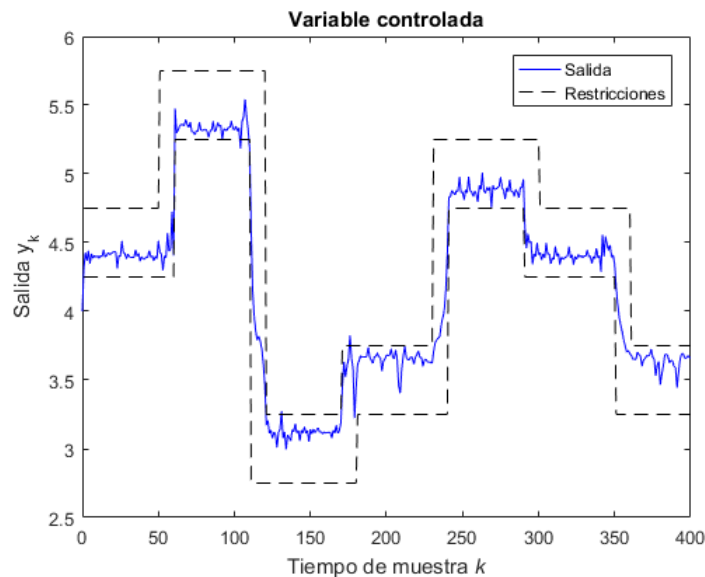


Figura 6.14: Implementación de RMPC-FI90 aplicado al caso autorregresivo

En esta implementación, del total de 400 instantes simulados, un total de 26 problemas de optimización resultaron infactibles. Esto provocó que la variable controlada mostrada en la Figura 6.14, presentará un comportamiento errático similar al obtenido en el caos de control del sistema en variables de estado (ver por ejemplo el comportamiento de y_k en la Figura 6.14 cuando $k \in [170 - 200]$). Los casos de infactibilidad ocurrieron debido al mismo motivo que se presentó en el caso de control del sistema en variables de estado, el ancho de los intervalos resultó más grande que la banda de referencia impuesta. Para ilustrar esta situación, se incluye en la Figura 6.15 la evolución del intervalo a lo largo del horizonte de predicción, esto para un instante k donde la optimización resultó infactible.

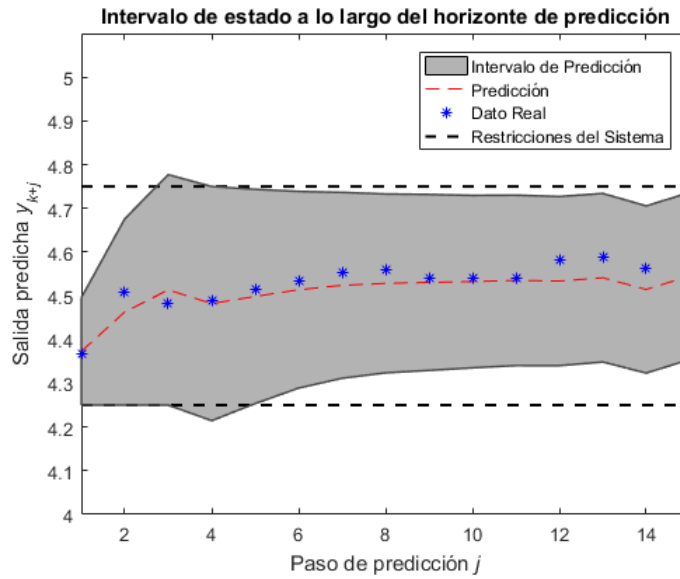


Figura 6.15: Intervalo de y_k con cobertura fija

En lo mostrado en la Figura 6.15, se aprecia que en las predicciones a 3 y 4 pasos, el ancho del intervalo resultó mayor que el ancho de las restricciones del sistema, ocasionando que no existiera solución factible para el problema de optimización del MPC. A pesar de las situaciones de infactibilidad presentadas durante la simulación, el controlador RMPC-FI90 logro satisfacer las restricciones del sistema en un 98 % de los instantes simulados.

Por otro lado, en las Figuras 6.16 y 6.17 se incluyen los resultados de la implementación del controlador RMPC-FI, el cual utiliza los intervalos con probabilidad de cobertura decreciente, mostrando esta vez la evolución de la variables controlada y manipulada respectivamente.

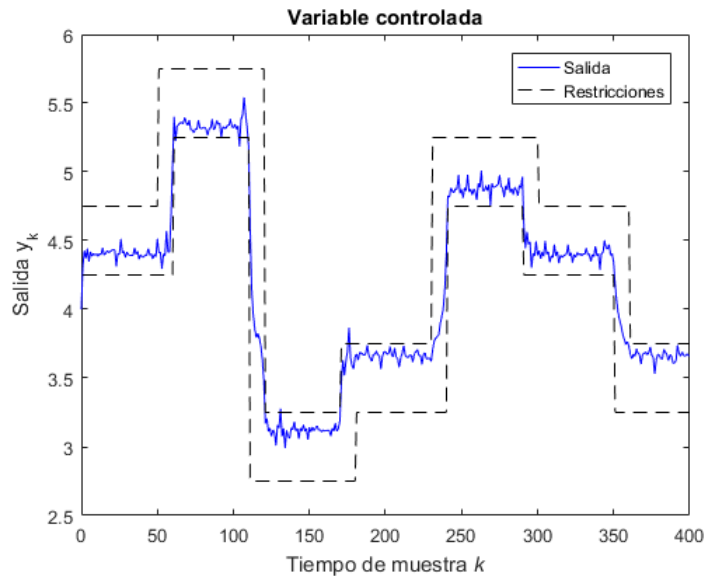


Figura 6.16: Implementación de RMPC-FI para el caso autorregresivo

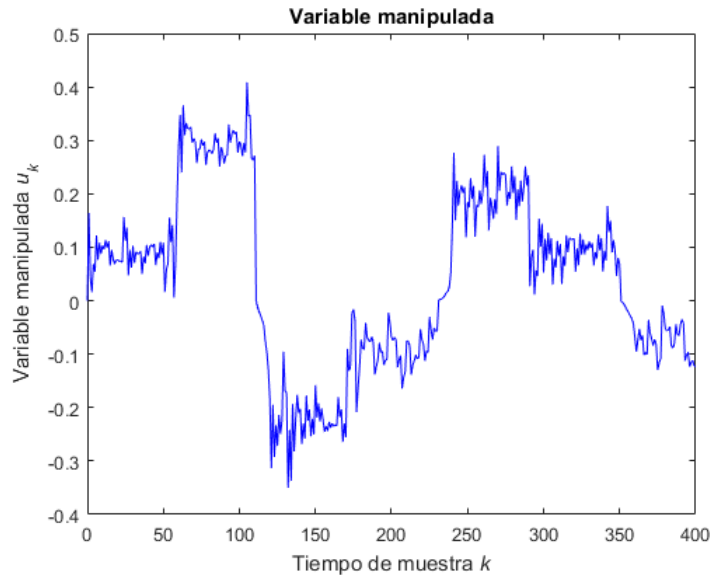


Figura 6.17: Variable manipulada obtenida con RMPC-FI para el caso autorregresivo

En esta implementación, de manera análoga a lo ocurrido en el caso con intervalos para la variable de estado, los problemas de infactibilidad logran ser completamente evitados, manteniendo un nivel de satisfacción de restricciones superior al 97 %. Esto verifica la efectividad de la implementación de la cobertura decreciente en la extensión de intervalos propuesta para modelos autorregresivos. Para ilustrar el efecto de la probabilidad decreciente en este caso, se presenta en la Figura 6.18 la evolución del intervalo a lo largo del horizonte de predicción, esto para el mismo instante k usado en la Figura 6.15.

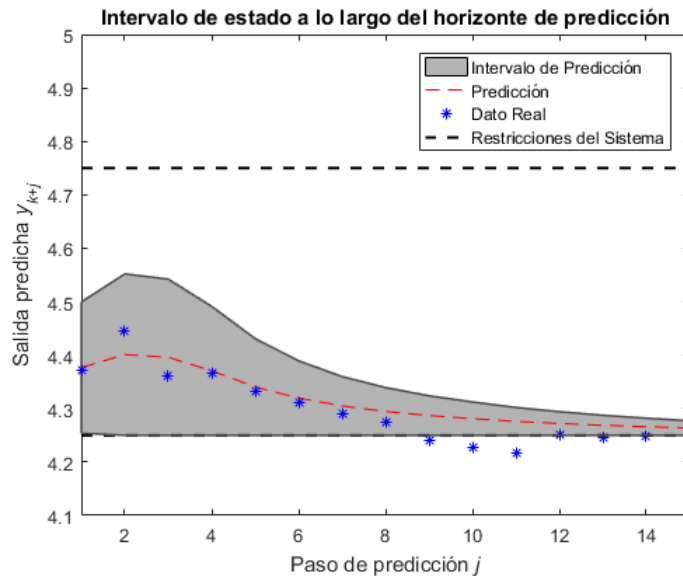


Figura 6.18: Intervalo de y_k con cobertura decreciente

En este punto, también se lleva a cabo la implementación del control predictivo robusto basado en la propagación de la incerteza (RMPC- ω), considerando la utilización de los inter-

valos para ω obtenidos con cobertura decreciente. En la Figura 6.19 se presenta el resultado de la variable de salida del sistema, obtenido durante la implementación del RMPC- ω .

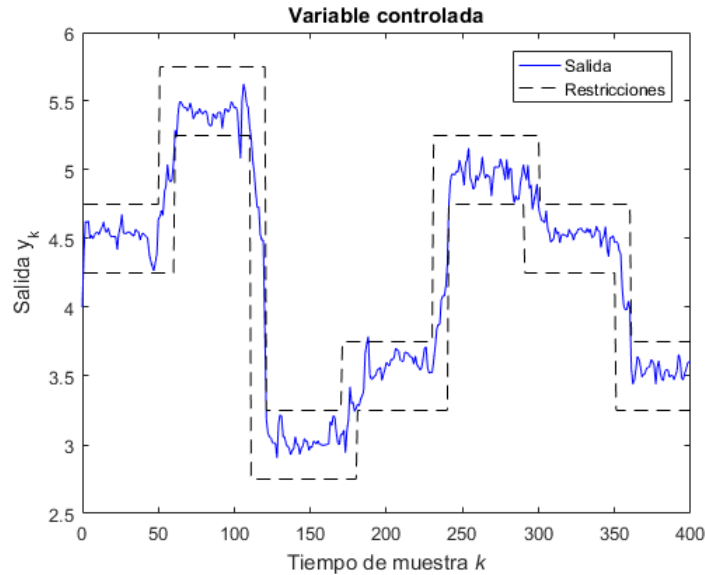


Figura 6.19: Implementación del RMPC- ω para el caso autorregresivo

Se aprecia en la Figura 6.19 un comportamiento errático más marcado que el obtenido con el RMPC-FI90, presentándose estas anomalías en la mayoría de los casos simulados. Esto ocurre debido a que un 96 % de los instantes simulados presentaron casos de infactibilidad en el problema de optimización, afectando el correcto desempeño del controlador. Con la finalidad de comparar con respecto a los controladores implementados anteriormente, se incluye en la Figura 6.20 la evolución del intervalo a lo largo del horizonte de predicción, esto para el mismo instante k utilizado en las Figuras 6.15 y 6.18.

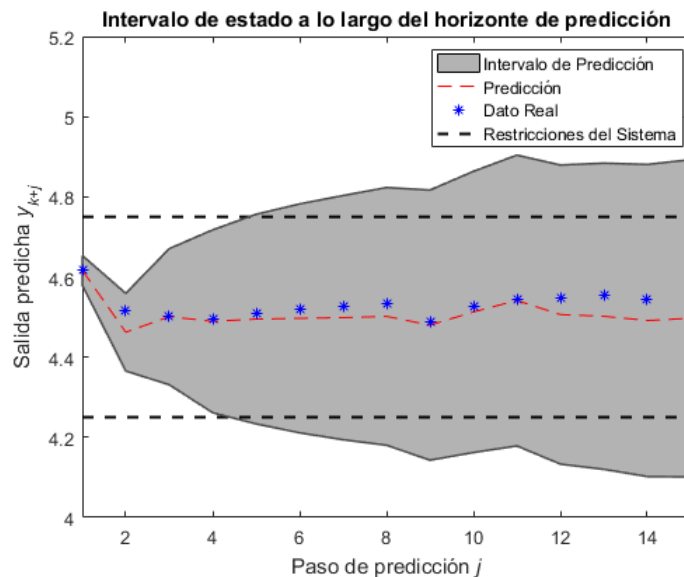


Figura 6.20: Intervalo de y_k dado por la propagación de la incerteza externa

Lo mostrado en la Figura 6.20, evidencia una situación similar a la presentada con el controlador RMPC-FI90, presentando infactibilidad en el problema de optimización debido a los anchos de intervalos mayores a la banda de referencia definida como restricción para y_{k+j} .

Con la finalidad de comparar con el rendimiento de las propuestas utilizadas, finalmente se implementa el control predictivo determinístico (MPC-D), el cual no realiza tratamiento alguno sobre la incerteza. En la Figura 6.13 se presenta el resultado obtenido con la implementación del control predictivo determinístico.

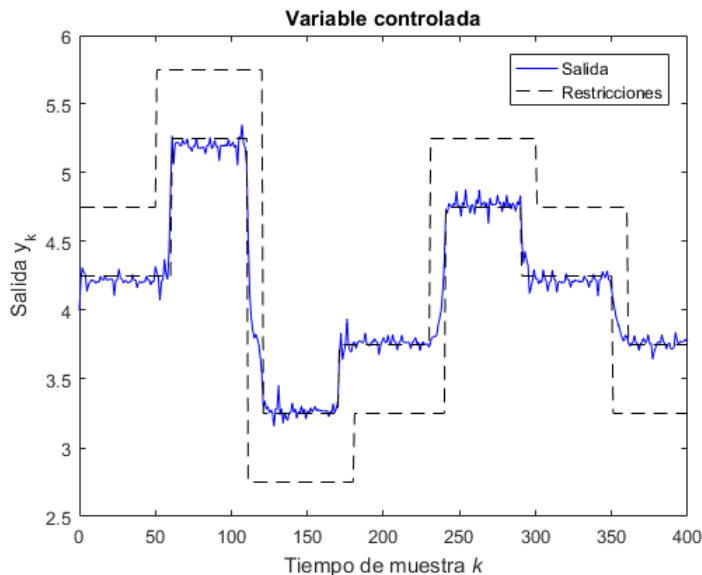


Figura 6.21: Implementación de MPC determinístico

Se aprecia en la Figura 6.21 un empeoramiento claro en el cumplimiento de las restricciones, presentando este controlador un nivel de satisfacción de restricciones igual a un 32.75 % de los instantes simulados. Considerando la comparación que se busca realizar entre las propuestas implementadas, se incluye en la Tabla 6.9 el valor del nivel de cumplimiento de las restricciones, el consumo energético medido por la función objetivo, el tiempo de iteración promedio y el porcentaje de casos de infactibilidad presentados por las distintas implementaciones mencionadas.

Tabla 6.9: Comparación entre MPC implementados para modelo autorregresivo

	Satisfacción de restricciones [%]	Función objetivo [-]	Tiempo de iteración promedio [seg]	Casos de infactibilidad [%]
RMPC-FI	97.75	11.43	3.70	0.00
RMPC-FI90	98.00	11.85	4.25	6.50
RMPC- ω	97.5	15.26	32.36	96.00
MPC-D	32.75	8.16	3.51	0.00

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 6.9, se verifica el cumplimiento del

objetivo de las estrategias robustas propuestas, logrando incrementar el nivel de satisfacción de restricciones. Para los 400 instantes simulados, la tasa de cumplimiento de las restricciones sobre y_k alcanza a sobrepasar el nivel de cobertura esperado. En este punto se destaca que, si se consideran los intervalos entrenados con 90 % de cobertura para la predicción a 1 paso, se espera que el controlador cumpla con las restricciones del sistema en al menos un 95 % de los casos simulados, debiéndose esto a que en cada instante los intervalos activan solamente uno de los límites definidos por (6.7), y se asume que el error de predicción distribuye de manera equitativa entre valores positivos y negativos. En la Figura 6.18 se evidencia la ocurrencia de esta situación, donde el intervalo sólo activa el límite inferior de la banda de referencia, por lo que los casos donde el valor se encuentre levemente por sobre el intervalo no causará problemas de violación de (6.7).

Con respecto a la función de costos, las estrategias robustas presentan un aumento en el valor obtenido. Esto es un resultado esperado, debido a que al tener en consideración la incerteza de las predicciones de y_k , se aplica una acción de control más fuerte para lograr cumplir con (6.7). Entre las estrategias propuestas, la versión implementada con intervalos que posean una cobertura decreciente (RMPC-FI) se destaca por lograr el menor valor de la función objetivo, junto con el tiempo de iteración promedio más cercano a la implementación determinística, esto sin sacrificar de manera significativa el nivel de satisfacción de restricciones y conseguir evitar completamente la ocurrencia de casos infactibles.

6.6. Discusión

En este capítulo se presentaron los casos de estudio generales planteados para probar las formulaciones propuestas en esta tesis, tomando como base tanto un sistema no-lineal en variables de estado, como un modelo no-lineal autorregresivo con variable exógena. Se comenzó el capítulo explicando los aspectos básicos que componen al primer sistema que se propuso controlar, tomando en consideración las características necesarias para componer un caso de estudio general, poseer una dinámica basada en variables de estado, la cual tenga además una estructura no-lineal. Posteriormente se presentaron los resultados de simulación correspondiente a la modelación mediante intervalos de la señal de perturbación y de la variable de estado, junto con las respectivas implementaciones de las estrategias de control propuestas en esta tesis.

Los resultados mostrados evidencian la efectividad de las diferentes propuestas para lograr una correcta implementación de la estrategia de control predictivo robusto. Se destaca en particular la implementación de la probabilidad de cobertura decreciente, la cual logra evitar satisfactoriamente la ocurrencia de casos infactibles en el problema de optimización. Con respecto al funcionamiento de la estructura de intervalo propuesta para modelar la variable de estado del sistema, el controlador implementado alcanza un cumplimiento de restricciones superior al nivel de cobertura impuesto para el intervalo. La ocurrencia de esto, se debió principalmente a que normalmente el intervalo forzó solamente una de las restricciones definidas para x_k , por lo tanto, alguno de los casos donde el intervalo no contuvo el valor real del estado no se tradujo en una violación de las restricciones del sistema. Asumiendo que el error de predicción se distribuye equitativamente entre valores positivos y negativos, se esperaría

que la satisfacción de las restricciones tomará valores cercanos al 95 %, sin embargo, los controladores simulados presentaron un pequeño margen de error (de entre un 0.75 % hasta un 1.75 %), debido en parte a la cantidad limitada de instantes simulados y el comportamiento estocástico que tiene la señal de perturbación utilizada.

Luego de los resultados obtenidos para el primer sistema, se presenta el segundo caso de estudio, ideado para probar la extensión de la propuesta a modelos del tipo autorregresivo con variable exógena. Los resultados obtenidos para este segundo sistema siguen la misma tendencia presentada para el primer caso de estudio, sirviendo para confirmar los beneficios identificados para la implementación del MPC robusto.

Habiendo verificado el funcionamiento de las diferentes propuestas presentadas en esta tesis, se puede proceder a la respectiva implementación sobre el caso de estudio aplicado, el cual corresponde al sistema de climatización de oficinas. Por ello en el siguiente capítulo se presentarán las distintas nociones que se deben tener en cuenta al buscar controlar la climatización de una oficina

7 Caso de Estudio: Sistemas de Climatización

En este capítulo se presenta a los sistemas de climatización que consideran calefacción, ventilación y uso de aire acondicionado, los cuales son denominados en la literatura como sistemas HVAC (*Heating, Ventilation and Air Conditioning*). Se plantea la utilización de este tipo de sistemas como caso de estudio aplicado, de manera de probar las distintas propuestas de modelos de intervalos y controladores presentados en esta tesis. Resultados de simulación son reportados posteriormente, de manera de ejemplificar la funcionalidad de los controladores diseñados en este trabajo.

El capítulo se organiza como sigue: primero se presenta una introducción a la problemática relacionada al control de los sistemas de climatización, referenciando trabajos relacionados con la modelación de este tipo de sistemas y el uso de diferentes estrategias de control. Posteriormente se explican los distintos elementos que afectan a la dinámica de los sistemas del tipo HVAC, y se realiza una revisión bibliográfica de otras estrategias de control empleadas sobre sistemas HVAC. El capítulo prosigue, describiendo el proceso para obtener modelos para las perturbaciones externas que afectan a la dinámica de la temperatura, destacando la elección de las propuestas de sintonización de intervalos más adecuadas, en función del tipo de comportamiento de la incertidumbre presentada por la señal que se busca modelar.

Posteriormente, se muestran los primeros análisis por simulación, correspondientes a las pruebas de dimensionamiento para encontrar el tiempo de muestreo y la posterior implementación del control predictivo robusto. En este punto, se implementa el controlador diseñado que sólo considera la utilización de los intervalos para las señales de perturbación en el cálculo de los parámetros de apriete de las restricciones. Es decir, se simula el caso donde la ecuación dinámica exacta que rige al sistema es completamente conocida.

Como el caso de simulación mencionado asume una situación ideal de completo conocimiento de la dinámica del sistema, el capítulo continua con la descripción de un caso más cercano a una implementación real, donde ahora se disponen de modelos difusos para predecir el comportamiento del sistema. Para este caso, se llevan a cabo las pruebas de simulación de los intervalos propuestos en este trabajo para modelar sistemas dinámicos. El capítulo finaliza con el análisis por simulación de los controladores predictivos robustos diseñados en base a los intervalos propuestos para sistemas dinámicos. Para realizar este análisis, se comparan los resultados al usar el controlador diseñado en esta tesis y los obtenidos con otras estrategias de control (como por ejemplo con el MPC determinístico y el RMPC- ω).

7.1. Introducción

El sector de la construcción en la actualidad es responsable por el uso de cerca del 40 % del total de energía consumida en los países industrializados [29]. La necesidad de disminuir este consumo para alcanzar la sustentabilidad en la operación de los edificios motiva el desarrollo de estrategias que logren la meta de minimizar el consumo de energía. En particular el proceso de climatización de edificios conlleva un gran consumo energía, por lo que encontrar una óptima gestión y manejo de este proceso resulta desafiante si se considera como restricción el no comprometer la comodidad de las personas.

En la literatura se lleva a cabo la modelación de estos procesos de climatización como un sistema de calefacción, ventilación y aire acondicionado combinados (HVAC) usando principalmente como analogía los modelos dinámicos de los circuitos resistivos-capacitivos (ver por ejemplo [30, 31, 32]). Para esta clase de problemas se ha desarrollado y probado estrategias de control predictivo, pues su formulación contempla el planteamiento de un problema de optimización que considera el comportamiento del sistema dado por su modelo fenomenológico y permite además contemplar las restricciones que afectan de manera física al proceso de climatización.

En la literatura existen una serie de trabajos que plantearon alternativas de estrategia de control para los sistemas de climatización HVAC [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37], con la finalidad de mejorar los rendimientos obtenidos con respecto a la implementación de controladores clásicos en el área como el control ON/OFF y el control basado en reglas. El desarrollo de este tipo de trabajos ha proliferado durante la última década, siguiendo como base lo presentado en el reporte técnico del proyecto OptiControl [38], publicado en el *Terrestrial Systems Ecology ETH Zurich* el año 2010. A continuación, se enlistan algunas de las principales ideas presentadas en ese reporte técnico y que sentaron las bases de los trabajos de investigación sobre sistemas HVAC en los años posteriores.

En primer lugar se identifican distintos tipos de modelos que pueden representar con cierto grado de fidelidad a la dinámica de la temperatura, ya sea para una o todas las zonas térmicas (oficinas, salas de conferencia, habitaciones, etc) que puedan componer a un sistema HVAC. La clasificación de estos modelos se separa por los siguientes niveles reportados en [38]:

- **Nivel 1:** Representación de la dinámica mediante un modelo verbal. Especialmente útil para trabajar con gente que no es especialista en los sistemas de climatización.
- **Nivel 2:** Uso de un modelo de correlación lineal, basado en la relación entre el consumo promedio de energía y la temperatura externa a la zona térmica.
- **Nivel 3:** Modelo dinámico lineal, el cual es planteado de manera similar a las ecuación que rigen al comportamiento de un circuito resistivo-capacitivo (Modelo RC).
- **Nivel 4:** Modelo dinámico bilineal, el cual también se encuentra basado en la dinámica de un circuito RC, pero se puede ajustar mejor al comportamiento de un sistema HVAC debido a su mayor complejidad.
- **Nivel 5:** Modelo detallado basado en la utilización de un software dedicado. Este corresponde al mayor nivel de complejidad de los modelos que buscan representar la dinámica del sistema de climatización.

La mayoría de los trabajos referenciados, realizan la implementación de sus estrategias de control usando modelos RC para representar la dinámica de la temperatura que se desea controlar (nivel 2 y 3 de complejidad para el modelo).

Otro de los puntos importantes a rescatar del reporte técnico OptiControl es la comparación que realiza entre estrategias de control basadas en reglas (RBC) y control predictivo basado en modelos (MPC), la cual arroja como conclusión principal la ventaja del MPC en términos de la optimización del uso de la energía, la violación de las restricciones de confort higrotérmico¹ y la consideración de la dinámica de la temperatura de la sala a climatizar al momento de decidir la acción de control a aplicar.

Una de las consideraciones principales que se derivaron de este trabajo y que rigió a todas las estrategias de control predictivo que se llevaron a cabo posteriormente en la literatura, tiene relación con el tiempo de muestreo que se debe utilizar al momento de discretizar los modelos. En OptiControl se implementaron controladores predictivos para el caso de climatización de una oficina, la cual tiene la particularidad de que sus restricciones de confort sólo se consideran durante el horario laboral. Para este caso, se observó que los controladores implementados comenzaban a climatizar a partir de una hora antes de que los ocupantes de la oficina llegaran a trabajar y que las restricciones impuestas para la temperatura se activaran. Debido a la ocurrencia de esta situación, en el reporte técnico se sugirió utilizar un tiempo de muestreo que no superase una hora, para que el MPC pueda estar preparado para reaccionar a tiempo y así lograr una operación óptima del sistema.

Entre los trabajos que emplean el uso de control predictivo sobre sistemas de climatización, se destaca a los controladores desarrollados por Ma *et al.* en [30, 31], los cuales utilizan un modelo RC para representar el sistema HVAC. Los parámetros para este modelo fueron obtenidos mediante una regresión no-lineal aplicada sobre datos de temperatura medidos en una sala de conferencias en la biblioteca Bancroft, localizada al interior de la Universidad de California, Berkeley. El tiempo de muestreo escogido para estos modelos fue de una hora inicialmente, siguiendo las propuestas del estudio OptiControl y considerando la velocidad de la dinámica de los intercambiadores de calor que usan agua para aplicar la acción de refrigeración sobre el sistema. Ahora bien, si se considera una dinámica para la temperatura que sólo tenga en cuenta la transferencia de calor por medio del aire, esto mediante las unidades de manejo de aire (conocidas en la literatura como Air Handling Unit - AHU), se debe considerar un tiempo de muestreo menor, y por ello en [30, 31] utilizaron un valor de 15 minutos. Esta reducción del tiempo de muestreo se justifica en el hecho de que la transferencia de calor dada a través del aire, ocurre a un velocidad considerablemente mayor al del proceso que se lleva a cabo en los intercambiadores de calor que utilizan agua.

En los trabajos de Ma *et al.* [30, 31, 32], Oldewurtel *et al.* [33, 34], A. Parisio *et al.* [35] y Sturzenegger *et al.* [36, 37], se realizó primero una implementación de un control basado en reglas para fines comparativos, para luego proseguir con la utilización de estrategias de control predictivo clásico y estocástico. El uso de dichas estrategias MPC persigue el objetivo

¹También conocida como rango de comodidad higrotérmica, consiste en la ausencia de malestar térmico. El cumplimiento de esta condición se traduce en que para un determinado individuo, los mecanismos termoreguladores de su cuerpo no se ven activados ante el uso de indumentaria ligera y la realización de una actividad sedentaria.

de minimizar el consumo energético mediante la resolución de un problema de optimización. En este punto se destaca que la variante estocástica del control predictivo (denotada por las siglas SMPC) busca reducir las violaciones de las restricciones de confort que originalmente se obtienen al momento de implementar un MPC clásico, haciendo uso del conocimiento de la distribución de probabilidad de las perturbaciones externas. Como principales conclusiones de estos trabajos se destaca las ventajas que trae consigo la implementación de estrategias de control predictivo, los cuales muestran la capacidad de generar ahorro en el consumo de energía, y más aun con su variante estocástica, que si bien no presenta el mismo ahorro que un MPC determinístico, si logra reducir las variaciones de temperatura que pueden afectar la comodidad de los ocupantes de la sala climatizada.

En base a las ventajas observadas al utilizar estrategias de control predictivo sobre sistemas HVAC, se justifica la utilización del problema de control de sistemas de climatización como caso de estudio aplicado para este trabajo. Pero antes de proceder a describir el procedimiento de implementación de las distintas propuestas presentadas en esta tesis, antes se deben explicar apropiadamente las distintas características que definen al sistema HVAC. Por ello, a continuación se describen los detalles del modelo para sistemas del tipo HVAC, el cual es utilizado en el desarrollo de esta tesis como la dinámica exacta de la planta que se busca controlar.

7.2. Modelación y control de sistemas HVAC

El modelo que se busca controlar en el caso de estudio de esta tesis consiste en una representación de nivel 3 según el reporte de OptiControl [38], de la dinámica de un sistema de climatización del tipo HVAC, el cual considera la climatización para una zona térmica². El objetivo de control para este tipo de sistemas consiste en mantener la variable de temperatura de la zona térmica dentro de un rango que asegure un ambiente confortable para los distintos usuarios del edificio, procurando minimizar los costos de operación asociados al gasto energético de la unidad de climatización.

La complejidad de este desafío de minimización propuesto, radica en el hecho de que estos sistemas de climatización se ven normalmente afectados por distintas variables que afectan a la evolución de la dinámica de la temperatura de una zona térmica. Para impulsar la comprensión de las señales que afectan al proceso de climatización, se presentan en la Figura 7.1 las variables relevantes que afectan a los sistemas HVAC, donde el objetivo es controlar la temperatura de solamente una zona térmica.

²Por zona térmica se entiende como un espacio delimitado normalmente por murallas, el cual contiene al aire cuya temperatura es medida. Habitaciones, oficinas y salas son algunos ejemplos de zonas térmicas.

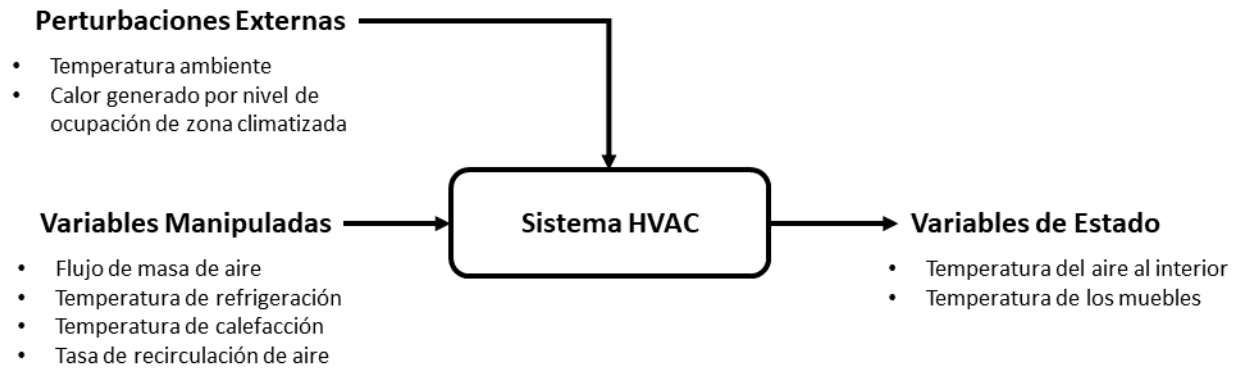


Figura 7.1: Variables relevantes para sistema HVAC simple de una zona térmica.

Tal como se muestra en la Figura 7.1, como el sistema HVAC se encuentra afectado por perturbaciones con comportamiento estocástico importante, como lo son la temperatura ambiente y el calor generado por el grado de ocupación de las habitaciones, el uso de un controlador predictivo robusto surge como una opción a considerar para tratar el problema de optimización, dado que puede tomar en cuenta la incertidumbre presente en los valores de estas entradas externas al modelo.

La complejidad para resolver el problema de climatización en sistemas HVAC aumenta si es que además se considera el efecto de otras zonas térmicas vecinas, las cuales actúan como perturbaciones en la dinámica de la temperatura del aire. Sin embargo, en el caso de estudio a describir en este capítulo, solamente se considera el control de una zona térmica.

A continuación se explicará en detalle el modelo en variables de estado de un sistema HVAC compuesto por una zona térmica, el cual puede representar la climatización de una oficina dispuesta al interior de un edificio.

7.2.1. Modelo dinámico para la temperatura

La obtención del modelo dinámico de la temperatura se logra al desarrollar la ecuación de balance de calor que incluye todas las transferencias que pueden ocurrir entre el interior y el exterior del edificio climatizado, siguiendo el procedimiento seguido en [31]. Se considera para el caso estudiado que la dinámica para una zona térmica sea separada en dos variables diferentes, siendo T_1 la temperatura del aire dentro de la oficina y T_2 la temperatura de los muebles y el piso en la misma habitación. La separación de estas dos variables se realiza debido a que T_2 presenta una dinámica más lenta en comparación a T_1 , afectando a la temperatura del aire como una perturbación que atenúa las grandes variaciones en el tiempo. Al utilizar las variables T_1 y T_2 como variables de estado, se definen las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$C_1 \dot{T}_1 = \dot{m}_s c_p (T_s - T_1) + \frac{T_2 - T_1}{R} + \frac{T_a - T_1}{R_a} + P_d, \quad (7.1)$$

$$C_2 \dot{T}_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{R}, \quad (7.2)$$

$$T_s = \delta T_1 + (1 - \delta) T_a - \Delta T_c + \Delta T_h. \quad (7.3)$$

La variable T_s representa el valor de temperatura asociado al aire que es enviado a la zona térmica. Entre las variables manipuladas que se pueden identificar en el modelo dinámico presentado se encuentran el flujo de masa de aire (\dot{m}_s), la fracción de recirculación de aire (δ), la diferencia de temperatura en la unidad de refrigeración (ΔT_c) y la variación de temperatura en cada una de las bobinas de calefacción (ΔT_h). Por otra parte, las constantes c_p , R_i y C_i representan los valores del calor específico del aire, la resistividad y la capacitancia térmica respectivamente. Finalmente como perturbaciones se identifican los valores de la temperatura ambiente fuera del edificio (T_a), la ganancia interna de calor al interior de la zona térmica (P_d) asociada al nivel de ocupación de la oficina³. En la Figura 7.2 se muestra un diagrama de bloques que muestra la operación de un sistema compuesto por una zona térmica.

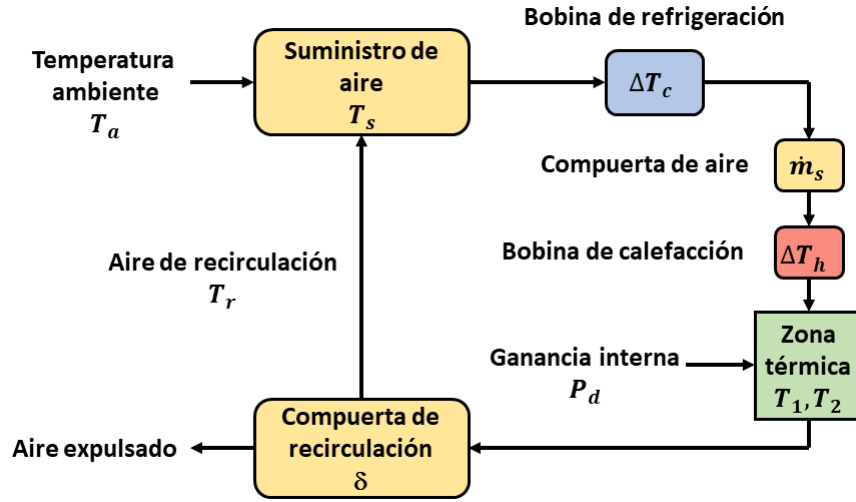


Figura 7.2: Diagrama de bloques para sistema HVAC de una zonas térmica

En la literatura, los distintos parámetros del modelo utilizado son obtenidos de manera experimental, realizando mediciones de temperatura en una sala y aplicando a los datos obtenidos una regresión no-lineal. En los trabajos de Ma *et al.* [30] y Kelman junto con Borrelli [39] se presenta una lista con los valores de los parámetros obtenidos para su caso de estudio, el cual corresponde a una sala de conferencias de la biblioteca Bancroft. En la Tabla 7.1 se incluye como referencia dicha lista de parámetros, los cuales fueron las implementaciones descritas en [30, 31, 32, 39].

³Como ejemplos de fuentes de generación interna de calor se pueden mencionar la presencia de personas y de dispositivos funcionando en el interior de la oficina

Parámetro	Valor	Unidades
C_1	$9,163 \times 10^6$	J/K
C_2	$1,694 \times 10^6$	J/K
R	$1,7 \times 10^{-3}$	K/W
R_a	$5,7 \times 10^{-3}$	K/W
c_p	1012	J/(Kg K)

Tabla 7.1: Parámetros para modelo HVAC compuesto por varias zonas térmicas

Sin embargo, en este trabajo se propone obtener un modelo general para el sistema HVAC, cuyos parámetros varíen al utilizar distintos valores para el tamaño de la zona térmica. Para ello se utilizarán una serie de formulas descritas en el trabajo de Maasoumy [40] relacionados con la capacitancia y resistencia térmica.

En primer lugar, la capacitancia térmica para una zona térmica es descrita por la siguiente fórmula basada en la idea de los circuitos RC:

$$C = mc_p, \quad (7.4)$$

donde m es la masa de aire que se encuentra al interior de la sala y c_p es el calor específico del aire. En (7.4), el valor de la masa de aire que se encuentra dentro de la zona térmica puede ser calculada a partir de las dimensiones de la sala a climatizar, usando la formula:

$$m = \rho_a V, \quad (7.5)$$

donde ρ_a es la densidad del aire y V es el volumen de la zona térmica.

Por su parte, la resistencia térmica también es definida a partir de una formula basada en el cálculo de la resistencia presente en circuitos eléctricos. El efecto similar a una resistencia ocurre en un sistema HVAC al transferirse calor a través de las murallas que limitan a una zona térmica. Entonces la resistencia térmica de una muralla se define como:

$$R_w = \frac{L}{\kappa A}, \quad (7.6)$$

donde L corresponde al espesor de la muralla, κ a la conductividad térmica del material que la compone y A es el área total del muro. A partir de (7.6) se puede calcular la resistividad de la sala con respecto al ambiente exterior (R_a).

Con el modelo general ya construido y apropiadamente dimensionado para una determinada zona térmica, es necesario proseguir con la derivación del modelo discreto que será utilizado por el controlador predictivo. Por ello, a continuación se presenta el procedimiento seguido para discretizar el modelo dado por (7.1)-(7.3).

7.2.2. Discretización del modelo

Para diseñar una estrategia MPC para el control de las distintas variables de interés en un sistema HVAC, es necesario obtener un modelo discreto para generar las predicciones

futuras del estado de la planta. Se procede entonces a obtener las aproximaciones discretas del modelo dado por (7.1)-(7.3), usando la aproximación de Euler:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (7.7)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(x, u). \quad (7.8)$$

Utilizando el método de Euler, se obtiene el siguiente modelo discreto para el sistema HVAC:

$$\begin{aligned} T_1(k+1) &= T_1(k) + \Delta t \frac{c_p \dot{m}_s (T_s(k) - T_1(k))}{C_1} + \Delta t \frac{T_s(k) - T_1(k)}{C_1 R} + \Delta t \frac{T_a(k) - T_1(k)}{C_1 R_a} + \Delta t \frac{P_d(k)}{C_1}, \\ T_2(k+1) &= T_2(k) + \Delta t \frac{T_1(k) - T_2(k)}{C_2 R}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Para la posterior implementación de las estrategias MPC propuestas en esta tesis, se considera un tiempo de muestreo Δt definido luego de realizar un análisis del tiempo de establecimiento del modelo construido, aplicándole variaciones a sus diferentes señales de entrada.

Adicionalmente, para simplificar la implementación de las estrategias de control basada en MPC que son propuestas en este trabajo, se considera ocultar el elemento no lineal $\dot{m}_s (T_s(k) - T_1(k))$ presente en la dinámica del sistema y fijar la tasa de recirculación de aire (δ), de manera de disminuir la complejidad del problema de optimización a resolver. El valor numérico escogido para la fracción de circulación de aire en las simulaciones fue $\delta = 0,8$ y el procedimiento para ocultar las no-linealidades mencionadas es descrito a continuación.

Basándose en la estrategia de linealización usada en el trabajo de A. Parisio *et al.* [35], el sistema HVAC puede ser reescrito en función de nuevas variables manipuladas. El nuevo vector u se obtiene a partir de una combinación de las variables manipuladas originales (\dot{m}_s , ΔT_h y ΔT_c), siguiendo la siguiente estructura:

$$u = [\dot{m}_s, \dot{m}_s \Delta T_h, \dot{m}_s \Delta T_c]^T. \quad (7.10)$$

Usando entonces el método de Euler y reescribiendo el sistema en términos del nuevo vector u , se logra obtener el siguiente modelo en tiempo discreto para la temperatura de una habitación:

$$T_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t}{C_1} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_a} \right) & \frac{\Delta t}{RC_1} \\ \frac{\Delta t}{RC_2} & 1 - \frac{\Delta t}{RC_2} \end{bmatrix} T_k + \frac{\Delta t c_p}{C_1} \begin{bmatrix} (1-\delta)(T_{a,k} - T_{1,k}) & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{R_a C_1} & \frac{\Delta t}{C_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \omega_k, \quad (7.11)$$

donde ω_k es el vector que contiene a las dos perturbaciones externas que afectan a la temperatura de una habitación:

$$\omega = [T_a, P_d]^T. \quad (7.12)$$

Recordando la ecuación del sistema en variables de estado usado al momento de presentar la formulación del MPC robusto (2.11), se puede apreciar que para este caso de estudio,

la dinámica del modelo sigue una estructura similar, quedando definida por la siguiente expresión:

$$T_{k+1} = AT_k + B_k u_k + D\omega_k. \quad (7.13)$$

donde A es la matriz de estado y D es la matriz que multiplica a las señales de perturbación, Por su parte, B_k es la matriz de entrada del modelo, la cual se puede considerar como variante en el tiempo, esto con la finalidad de contener las no-linealidades del modelo.

Para continuar con la implementación de las propuestas previamente presentadas, se debe obtener un modelo de dimensiones adecuadas para poder ser utilizadas en las pruebas de simulación, de modo de representar una situación realista de un problema de climatización. Por ello, a continuación se presenta las dimensiones consideradas para el sistema y el posterior cálculo de los parámetros que definen al modelo presentado en (7.11).

7.2.3. Dimensionamiento del modelo

Como caso de estudio de esta tesis, se definió el objetivo de climatizar un modelo de oficina dado por los valores presentados en la Tabla 7.2 para las características que definen al sistema.

Característica	Valor	Dimensiones
Largo de la oficina	20	m
Ancho de la oficina	30	m
Altura de la oficina	3.5	m
Volumen de la oficina	2100	m^3
Capacidad máxima	40	n° de personas

Tabla 7.2: Dimensiones para zona térmica

Considerando el supuesto de que esta zona térmica corresponde a una oficina única en el edificio, el intercambio de calor por medio de las murallas sólo se realiza con el ambiente exterior, por lo que la formula (7.6) es utilizada para calcular el valor de la resistencia con el ambiente exterior (R_a). El valor de la capacitancia térmica del aire en la oficina C_1 es calculado usando el volumen de la zona térmica en (7.4), mientras que el resto de los parámetros son obtenidos usando una relación de proporcionalidad que relaciona el anterior valor de C_1 presentado en la Tabla 7.1 y el valor calculado para las dimensiones definidas en la Tabla 7.2. Los nuevos parámetros del modelo HVAC, los cuales serán utilizados para la implementación de las estrategias de control propuestas, se presentan en la Tabla 7.3.

Parámetro	Valor	Unidades
C_1	$2,508 \times 10^6$	J/K
C_2	$4,636 \times 10^7$	J/K
R	$1,7 \times 10^{-3}$	K/W
R_a	$1,3 \times 10^{-3}$	K/W

Tabla 7.3: Parámetros para modelo HVAC del caso de estudio

Previo a la implementación de los controladores propuestos sobre el sistema HVAC, es necesario describir tanto el objetivo de control como las condiciones que debe cumplir el sistema al momento de su operación, las cuales ingresarán al problema de optimización que define al MPC como restricciones. A continuación se explica en detalle las características que definen al problema de climatización.

7.2.4. Descripción del problema de climatización

Para el caso de una o más zonas térmicas, el problema planteado para los sistemas HVAC consiste en la minimización del consumo de energético, de manera de procurar mantener los valores de temperatura de cada habitación dentro de un rango que asegure la comodidad de las personas que se encuentren en el interior. Debido a las características de esta problemática es que existen distintos trabajos que implementan estrategias de control predictivo, dado que se resuelve en cada instante problemas de optimización que pueden minimizar el consumo energético.

El consumo energético asociado al funcionamiento de un sistema HVAC puede ser desglosado en función de la potencia utilizada por cada uno de los actuadores que lo conforman, siguiendo como ejemplo las fórmulas que utilizan los trabajos de Kelman con Borrelli en [39] y Maasoumy con Sangiovanni-Vincentelli en [41]. En primer lugar, para el ventilador de suministro asociado al flujo de masa de aire entrante a la zona térmica (\dot{m}_s), se considera que la potencia eléctrica es descrita por la siguiente fórmula:

$$P_f = \kappa_f \dot{m}_s^3, \quad (7.14)$$

donde el parámetro κ_f corresponde a una constante que captura la eficiencia de los ventiladores y las pérdidas de presión en los ductos de aire.

Para el caso de los actuadores encargados de la calefacción y refrigeración, el consumo energético sigue una relación directamente proporcional con respecto al flujo de masa que circula por la bobina (\dot{m}_s) y la diferencia de temperatura entre su entrada y salida (ΔT_h y ΔT_c respectivamente). La formula que representa el uso de potencia en la bobina de calefacción es la siguiente:

$$P_h = \frac{c_p}{\eta_h} \dot{m}_s \Delta T_h, \quad (7.15)$$

donde η_h es un coeficiente relacionado a la eficiencia de las bobinas al momento de hacer el intercambio de calor. Por otro lado, la formula que caracteriza a la potencia de la bobina de refrigeración es:

$$P_c = \frac{c_p}{\eta_c} \dot{m}_s \Delta T_c. \quad (7.16)$$

De manera análoga al caso de la calefacción, se utiliza un parámetro η_c que representa la eficiencia de la única bobina de refrigeración presente en el sistema HVAC. Al sumar los distintos términos presentados, es posible obtener la expresión que describe la potencia instantánea total utilizada por el sistema de climatización:

$$P_{hvac} = P_f + P_h + P_c. \quad (7.17)$$

Reemplazando (7.14),(7.15) y (7.16) en (7.17), la potencia total usada queda descrita por la siguiente expresión:

$$P_{hvac} = \kappa_f \dot{m}_s^3 + \frac{c_p}{\eta_h} \dot{m}_s \Delta T_h + \frac{c_p}{\eta_c} \dot{m}_s \Delta T_c. \quad (7.18)$$

Se puede notar que la ecuación (7.18) quedo descrita por las mismas variables que conforman el vector u planteado en (7.10) para contener a las no-linealidades presentes en la dinámica de una zona térmica. Aprovechando esto, es posible plantear la siguiente función de costos por etapa, la cual puede ser implementada en las estrategias propuestas, siguiendo la siguiente estructura:

$$P_{hvac}(u_{k+j}) = \kappa_f \left(u_{k+j}^{(1)} \right)^3 + \frac{c_p}{\eta_h} u_{k+j}^{(2)} + \frac{c_p}{\eta_c} u_{k+j}^{(3)}. \quad (7.19)$$

donde $u_{k+j} = \left[u_{k+j}^{(1)}, u_{k+j}^{(2)}, u_{k+j}^{(3)} \right]^T$ corresponde al valor del vector u predicho a j pasos en el futuro con respecto al instante actual k .

Los parámetros que definen a la fórmula de la potencia y la función de costos por etapa fueron extraídos de [39] y [41]. Sus valores numéricos son presentados a continuación en la Tabla 7.4.

Parámetro	Valor	Unidades
κ_f	500	W s ³ /kg ³
η_h	0,9	-
η_c	4	-

Tabla 7.4: Valores numéricos de los parámetros en la fórmula de potencia

Otro de los aspectos a considerar son las restricciones que rigen al sistema y que definen los margen de acción que se disponen para implementar distintas estrategias de control. Estas condiciones pueden ser clasificadas en dos tipos diferentes:

- Límites físicos de los actuadores.
- Condiciones de comodidad para las habitaciones.

En primer lugar, los distintos actuadores que conforman el sistema disponen de ciertos rangos para los cuales su operación se encuentra acotada. Para el caso del ventilador que suministra aire a su respectiva habitación, se distingue un límite inferior para el flujo de masa que circula por el actuador ($\underline{\dot{m}}_s$), de manera de garantizar un mínimo nivel de ventilación y un límite superior dado por el tamaño del ventilador ($\overline{\dot{m}}_s$). Por otro lado, las bobinas de calefacción y refrigeración poseen un límite superior sobre el cambio de temperatura que pueden ejercer sobre el flujo de aire circulante ($\overline{\Delta T}_h$ y $\overline{\Delta T}_c$ respectivamente). Todas estas limitaciones físicas quedan entonces expresadas de la siguiente forma:

$$\dot{m}_s \leq \dot{m}_s \leq \overline{\dot{m}}_s, \quad (7.20)$$

$$0 \leq \Delta T_h \leq \overline{\Delta T}_h, \quad (7.21)$$

$$0 \leq \Delta T_c \leq \overline{\Delta T}_c. \quad (7.22)$$

Considerando la utilización del nuevo vector u presentado en (7.10), las restricciones (7.20)-(7.22) pueden ser expresadas como

$$\dot{m}_s \leq u^{(1)} \leq \overline{\dot{m}}_s, \quad (7.23)$$

$$0 \leq u^{(2)} \leq \overline{\Delta T}_h u^{(1)}, \quad (7.24)$$

$$0 \leq u^{(3)} \leq \overline{\Delta T}_c u^{(1)}. \quad (7.25)$$

Para las posteriores simulaciones de los sistemas HVAC incluidas en esta tesis se necesita considerar un dimensionamiento de las características de los actuadores a utilizar. Para ello, se toma como referencia las indicaciones expuestas en una guía para sistemas HVAC publicada por el gobierno de Estados Unidos en [42]. Esta guía expone los siguientes valores de potencia necesaria para enfriar y calentar oficinas, en base al tamaño de la zona a climatizar y el tipo de uso:

Para pequeñas oficinas

- Potencia de refrigeración: 126.2 [W/m²]
- Potencia de calefacción: 119.89 [W/m²]

Para salas con computadores

- Potencia de refrigeración: 441.7 [W/m²]
- Potencia de calefacción: 63.1 [W/m²]

Considerando las indicaciones para el caso de pequeñas oficinas, en conjunto con un valor para el área a climatizar de 600 [m²] dado por las dimensiones mostradas en la Tabla 7.2, arrojan como resultado que el equipamiento utilizado como actuador en el sistema HVAC deba tener una potencia nominal entorno a los 75 [kW].

Para definir los valores numéricos para los límites de los actuadores, se decidió utilizar un equipamiento real como referencia, haciendo el cálculo de las restricciones físicas a partir de las especificaciones técnicas indicadas por el fabricante. El modelo *EKWP75B* comercializado por la empresa *EuroKlimat* es usado como equipo de referencia, obteniendo los respectivos valores para los límites del actuador, los cuales son presentados en la Tabla 7.5.

Parámetro	Valor	Unidades
\dot{m}_s	0,005	kg/s
\bar{m}_s	5	kg/s
$\overline{\Delta T}_h$	13	$^{\circ}\text{C}$
$\overline{\Delta T}_c$	13	$^{\circ}\text{C}$

Tabla 7.5: Valores numéricos para los límites físicos de los actuadores

El segundo tipo de restricciones impuestas para el sistema HVAC tienen relación a las condiciones de comodidad para las personas que se encuentran en el interior de todas las habitaciones. La condición relevante a considerar en esta clase de sistemas es el rango de comodidad higrotérmica, la cual consiste en un intervalo de temperatura para la cual el ser humano es capaz de tener una sensación de comodidad en el ambiente. Existen distintas definiciones en la literatura para este rango de temperatura, pero en el desarrollo de esta tesis es considerado el conjunto $[21^{\circ}\text{C}, 24^{\circ}\text{C}]$ como intervalo de comodidad higrotérmica.

La dificultad adicional de implementar esta condición en un controlador radica en que no es necesario tener activa esta restricción en todo momento. Por ejemplo, poniéndose en el caso de climatización de oficinas, la imposición de la condición de comodidad higrotérmica sólo tiene sentido durante las horas laborales, pues el resto del tiempo la sala se encuentra vacía y mantener funcionando el sistema HVAC en esos instantes significaría un gran consumo energético evitable. Por ello, al momento de implementar una estrategia de control, las condiciones de comodidad pueden ser invocadas de la siguiente manera:

$$f_{tmin}(k+j) \leq T_1(k+j) \leq f_{tmax}(k+j) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (7.26)$$

donde $f_{tmin}(k+j)$ y $f_{tmax}(k+j)$ son los límites definidos para la temperatura de las distintas habitaciones, los cuales varían en función del momento del día correspondiente al instante $k+j$.

Para las simulaciones, se asume que las oficinas son ocupadas desde las 7am hasta las 9pm. Con ello, los límites para la temperatura de las habitaciones (u oficinas para nuestro caso de estudio) siguen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} f_{tmin}(k+j) &= 21^{\circ}\text{C} \\ f_{tmax}(k+j) &= 24^{\circ}\text{C} \end{aligned} \right\} \text{ de 7 am a 9 pm,} \quad (7.27)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{tmin}(k+j) &= -\infty \\ f_{tmax}(k+j) &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ en otro caso.}$$

Con todas las condiciones del problema de climatización ya definidas, es posible pasar a la siguiente etapa necesaria de realizar previo a la implementación de las distintas estrategias de control propuestas. A continuación se presentará el caso de estudio relacionado a la obtención de modelos de predicción para las perturbaciones externas del sistema.

7.3. Modelación de perturbaciones externas

Los sistemas HVAC dependen de manera importante de señales externas que actúan como perturbaciones sobre la dinámica de la temperatura de cada zona térmica. El problema de la presencia de estas señales radica en su comportamiento estocástico, lo cual evita que se pueda predecir sus valores con mayor precisión. Esto afecta de manera importante a la implementación de estrategias de control predictivo, pues en dichas estrategias se utilizan estas secuencias de predicciones para la perturbación en el cálculo de los estados futuros del sistema que proyecta el controlador. Como cada valor de la secuencia de perturbaciones predichas posee un error con respecto a la señal real que ingresará al sistema en el futuro, el error de las predicciones de la variable controlada hechas por el MPC se acumulará a medida de que se aumente el paso de predicción, y afectará el cumplimiento de las restricciones impuestas al sistema en el problema de optimización.

Debido a esta problemática, se propone la utilización de las estrategias de MPC robusta para resolver el problema de climatización, de manera que se pueda cumplir con las condiciones del problema con un cierto grado de confiabilidad. Para lograr esto, se debe disponer de algún modelo que sirva para entregar las predicciones de las perturbaciones que percibirá el sistema en el futuro y tener caracterizada a su vez, el error que eventualmente se presentará con respecto a los valores reales de estas señales externas.

Como la temperatura ambiente y la ganancia interna de calor (que corresponden a las dos señales que actúan como perturbaciones del sistema HVAC) siguen un comportamiento estocástico distinto, su proceso de modelación es explicada de manera separada. A continuación, se procede a explicar el proceso de identificación del modelo para la primera de ellas, la temperatura ambiente.

7.3.1. Identificación de modelos para temperatura ambiente

Para obtener el modelo que caracterice a la temperatura ambiente, se utiliza una serie de datos extraídos desde una estación meteorológica ubicada en la comunidad mapuche José Paineicura, Región de La Araucanía, Chile [43]. Estos datos corresponden a la medición de temperatura hecha cada 10 minutos dentro de un intervalo de tiempo que comprende desde la tarde del 17 de agosto de 2016 hasta el 7 de noviembre de 2016, totalizando más de 11.700 muestras de datos.

La primera consideración que se debe tener al momento de intentar utilizar estos datos es el tiempo de muestreo a utilizar en el modelo a identificar a partir de la serie de tiempo medida. Al implementar una estrategia de control predictivo, es necesario que tanto el modelo del sistema a controlar (7.3), como la señal compuesta por las perturbaciones predichas, compartan el mismo tiempo de muestreo. Si se cumple esta condición, entonces el cálculo de las predicciones se realizan directamente a partir de las señales que ingresan al controlador, sin requerir de un procesamiento adicional de los datos (como sub-muestrear, filtrar o interpolar los datos de entrada).

La segunda consideración presente con esta perturbación corresponde a la no disponibilidad de los valores reales asociados a los instantes actual y futuro. Los valores futuros de la temperatura ambiente (llamada en adelante ω_{ta}) son desconocidos porque corresponden a realizaciones de la perturbación que aun no han ocurrido y no pueden ser predichos con exactitud debido al comportamiento estocástico que presenta la temperatura ambiente. Sobre la no disponibilidad del valor de ω_{ta} en el instante actual k , esto se debe a que al momento de calcular las predicciones, se considera que la señal de perturbación corresponde al promedio de los valores presentados a lo largo de un intervalo temporal dado por el tiempo de muestreo. Teniendo en cuenta esto, entonces para el caso del instante actual k , el valor de ω_{ta} representa el promedio de los valores presentados para la temperatura ambiente durante el tiempo comprendido entre los instantes k y $k + 1$.

Para poder caracterizar de manera adecuada la evolución del sistema al momento de resolver el problema de optimización del MPC, es necesario obtener modelos que sean capaces de predecir los valores de ω_{ta} con un cierto nivel de precisión. Con la finalidad de reducir el error obtenido a mayores pasos de predicción, se identifican varios modelos difusos de entrada salida, basados en la formulación presentada por Takagi y Sugeno en [5]. Como entradas originales, se utilizan un máximo de regresores tal que se consideren datos de hasta 2 días antes del instante k . La estructura del modelo se optimiza siguiendo el procedimiento derivado del trabajo de Sugeno y Yasukawa desarrollado en [25]. Esta optimización de la estructura del modelo difuso incluye variar el número de reglas y hacer un análisis de sensibilidad para determinar las entradas relevantes.

Del proceso de entrenamiento, se obtiene entonces un modelo difuso distinto para cada paso de predicción j , siendo esta una diferencia con respecto a los casos estudiados previamente, lo que ocasiona un leve cambio en la implementación de los intervalos presentados en esta tesis. Para este caso, ya no se usa el mismo modelo obtenido a un paso para construir la única función de incerteza, que luego termina siendo multiplicada por los parámetros de sintonía de los intervalos. Ahora, para cada paso de predicción se dispone de una función de incerteza distinta, asociada cada una al respectivo modelo de predicción. En esta situación, el proceso de sintonización del ancho de los intervalos sigue siendo el mismo al ya descrito en los capítulos previos de esta tesis, debiendo obtener los respectivos parámetros de sintonía asociados a cada función de incerteza.

La señal de temperatura externa extraída desde la estación meteorológica presenta una variabilidad similar a lo largo del día. Debido a esto, se espera que al momento de aplicar los métodos de modelación para esta señal, el error que presente el modelo predictivo siga un comportamiento estocástico similar a lo largo de las 24 horas que componen un día. Considerando esto, se decide aplicar el método de sintonización de intervalos que considera la utilización de parámetros α_j variantes solamente con respecto al paso de predicción j .

Para el proceso de identificación de los modelos e intervalos asociados a esta señal de perturbación, se consideró un horizonte de predicción de 3 horas. Adicionalmente, como aun no se ha definido el tiempo de muestreo a utilizar en el controlador a implementar, se entrenan modelos e intervalos distintos para tres valores de muestreo: 10, 20 y 30 minutos.

La Tabla 7.6 presenta los valores obtenidos para las métricas durante la modelación de la temperatura ambiente, usando una probabilidad de cobertura fija $cp = 0.9$ y un tiempo de

muestreo igual a 10 minutos.

Tabla 7.6: Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 10 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [°C]	0.260	0.765	1.131	1.396	0.289	0.831	1.193	1.471
PICP [%]	90.01	90.01	90.03	90.01	92.09	92.12	92.83	93.48
PINAW [%]	3.81	12.62	19.10	23.53	5.60	17.82	27.54	35.02

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 7.6, se verifica que en el conjunto de datos de validación se alcanza el nivel de cobertura impuesto durante el entrenamiento. En particular, la cobertura medida por el PICP resultó con un nivel mayor al deseado, debiéndose esto principalmente a que los intervalos adquirieron un ancho mayor durante el proceso de validación. Las Figuras 7.3 y 7.4 presentan al intervalo obtenido para una serie de datos, de manera de poder apreciar gráficamente el aumento del ancho presentado entre los intervalos a 6 pasos (predicción a una hora en el futuro) y los obtenidos a 18 pasos (predicción a tres horas en el futuro).

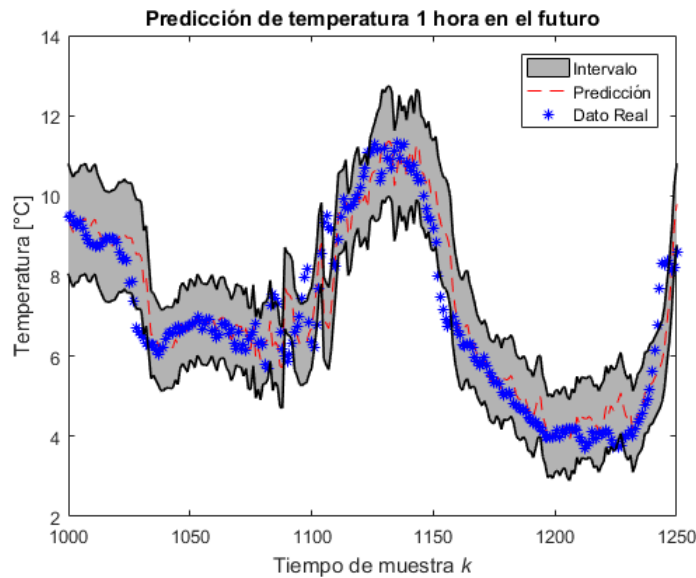


Figura 7.3: Intervalo con cobertura fija para predicción de T_a a 6 pasos

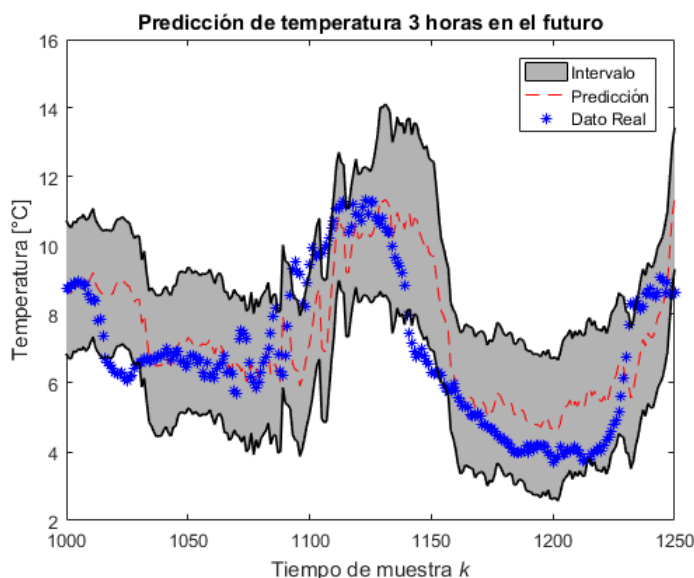


Figura 7.4: Intervalo con cobertura fija para predicción de T_a a 18 pasos

Las Tablas 7.7 y 7.8 presentan los mismos resultados para las métricas mostradas previamente en la Tabla 7.6, pero ahora utilizando tiempos de muestreo de 20 y 30 minutos respectivamente.

Tabla 7.7: Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 20 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	3	6	9	1	3	6	9
RMSE [°C]	0.404	0.760	1.131	1.393	0.428	0.806	1.173	1.434
PICP [%]	90.00	90.02	90.01	90.02	91.27	90.44	93.66	93.73
PINAW [%]	6.52	12.72	19.46	23.71	9.09	17.40	29.18	34.62

Tabla 7.8: Métricas para intervalos de T_a con cobertura fija y tiempo de muestreo 30 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	2	4	6	1	2	4	6
RMSE [°C]	0.523	0.786	1.150	1.415	0.545	0.801	1.183	1.435
PICP [%]	90.02	90.02	90.01	90.03	91.65	92.16	92.67	93.90
PINAW [%]	8.76	13.27	20.18	24.77	12.13	18.77	28.66	36.01

A partir de los resultados mostrados en estas dos nuevas tablas, se evidencia la ocurrencia de las mismas situaciones identificadas para la implementación con tiempo de muestreo 10 minutos. El error del modelo y el ancho de los intervalos aumentan al utilizar mayores tiempos de muestreo, reflejando con esto la disminución de la precisión de los modelos. Además, la probabilidad de cobertura también presenta un incremento con respecto al tiempo de muestreo utilizado, esto como consecuencia de la tendencia al aumento del ancho del intervalo previamente mencionada.

El aumento del ancho de los intervalos pueden significar un serio riesgo de que los parámetros de apriete resulten muy grandes en la implementación del controlador predictivo robusto. Esto se traduce en un aumento de la probabilidad de obtener casos infactibles para el problema de optimización del MPC, por lo que la implementación de los intervalos con probabilidad de cobertura decreciente surge como la alternativa a considerar para reducir este riesgo. En la Tabla 7.9 se presentan los resultados obtenidos para los intervalos con tiempo de muestreo 10 minutos y cobertura decreciente dada por (4.8), considerando para esto $cp_i = 0.9$ y $cp_f = 0.4$.

Tabla 7.9: Métricas para intervalos de T_a con cobertura decreciente

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [°C]	0.260	0.765	1.131	1.396	0.289	0.831	1.193	1.471
PICP [%]	90.01	71.26	53.89	40.73	92.09	73.92	57.63	44.41
PINAW [%]	3.81	6.73	7.12	6.59	5.60	9.50	10.27	9.80

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 7.9, se verifica el logro en la reducción del ancho del intervalo para pasos de predicción grandes. El aumento del ancho registrado por el PINAW en la conjunto de validación, junto con los mayores valores de PICP obtenidos, reflejan la presencia de la misma tendencia identificada durante la implementación de los intervalos con cobertura fija. De manera de representar gráficamente la disminución del ancho del intervalo con respecto a la implementación con cobertura fija, se presenta en la Figura 7.5 el intervalo obtenido para la predicción a 3 horas en el futuro.

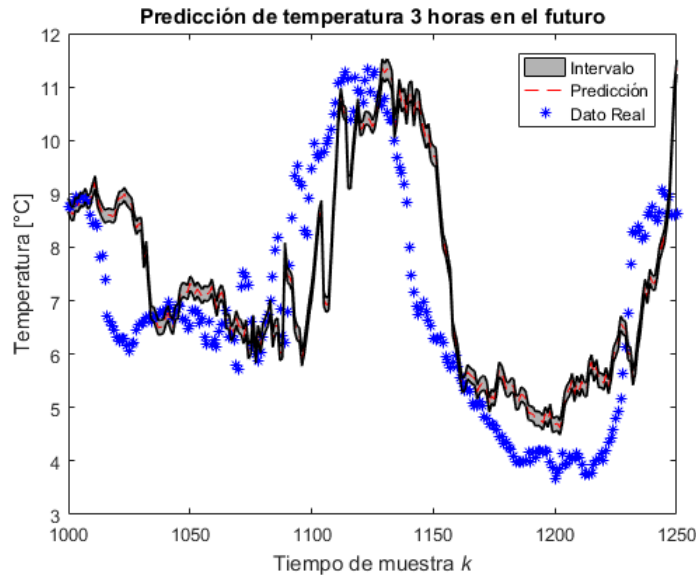


Figura 7.5: Intervalo con cobertura decreciente para predicción de T_a a 18 pasos

A pesar de que el nuevo intervalo mostrado en las Figura 7.5 contiene a pocas realizaciones de la señal modelada, esto no se traduce en un problema para la implementación de

la estrategia de control. Esto ocurre debido a que el controlador resuelve el problema de optimización utilizando un horizonte deslizante, por lo tanto los errores producidos en las acciones de control proyectadas para el futuro, serán posteriormente corregidas a medida que el sistema se acerque a dichos instantes predichos.

Con la obtención de los valores para las predicciones de ω_{ta} , y su incerteza caracterizada por el intervalo, se puede proseguir con su empleo en el controlador, enviando dichos valores como señales de entrada al controlador predictivo. Pero esto solamente logra cubrir el efecto de una de las perturbaciones externas que afectan al sistema HVAC, por lo que es necesario también caracterizar la segunda señal que presenta incerteza en el caso de estudio. La obtención de los datos y el proceso de identificación de los modelos para la segunda señal de perturbación es explicada a continuación.

7.3.2. Identificación de modelos para ganancia interna de calor

El segundo tipo de señal que actúa como perturbación externa en el sistema HVAC, corresponde a la ganancia interna de calor presente en la zona térmica. En esta sección se procederá a explicar el procedimiento seguido para obtener la datos y los modelos para la ganancia de una oficina.

La ganancia interna de calor de una oficina se encuentra directamente asociada al nivel de ocupación de la sala climatizada. Sin embargo, obtener mediciones de la ocupación y el calor generado no resulta una tarea sencilla. Como no se tenían a disposición mediciones de esta señal de perturbación, se propuso la utilización de datos de ocupación, obtenidos mediante la simulación de un algoritmo basado en cadenas de Markov, siguiendo lo propuesto por el trabajo de Wang *et al.* en [44].

Para el caso de estudio presentado en este capítulo, se considera que la oficina a climatizar tienen una capacidad máxima de 40 personas, las cuales poseen su propio comportamiento independiente. La cadena de Markov en este caso se encarga de entregar una señal binaria que indica si una persona determinada se encuentra o no dentro de la habitación. Por lo tanto el nivel de ocupación de una sala en particular viene dada por la suma de 40 señales distintas generadas por este algoritmo.

El método basado en cadenas de Markov consiste en actualizar instante a instante una variable x con dos estados posibles (0 y 1). En el instante actual se obtiene el estado siguiente a partir del valor de x en el momento y la comparación de una señal estocástica con los números que componen a la llamada matriz de transición P .

Para este caso donde el estado es binario, la matriz de transición P adquiere la forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

donde sus componentes representan lo siguiente:

- p_{00} : es la probabilidad de que el estado siguiente sea 0 si en el instante actual es 0.

- p_{01} : es la probabilidad de que el estado siguiente sea 1 si en el instante actual es 0.
- p_{10} : es la probabilidad de que el estado siguiente sea 0 si en el instante actual es 1.
- p_{11} : es la probabilidad de que el estado siguiente sea 1 si en el instante actual es 1.

El algoritmo procede con su iteración, primero obteniendo de manera aleatoria un cierto número entre 0 y 1, para luego compararlo con el valor dentro de la primera columna de la matriz P correspondiente al estado actual. En base a esto, el algoritmo escoge como estado siguiente el valor 0 si el número aleatorio obtenido resulta ser menor al valor dentro de la matriz P elegido para comparar, y en caso contrario, se define el valor 1 como estado siguiente. En el Algoritmo 8 se muestra como ejemplo el procedimiento a seguir para generar un total de N_d datos para un estado binario.

Algoritmo 8: Algoritmo basado en cadenas de Markov para estado binario

```

para  $k = 1$  a  $N_d$  hacer
  Se mide el estado actual  $x_k$  y se selecciona la matriz de transición  $P$ ;
  si  $x_k = 0$  entonces
    | Se asigna el valor de la posición (1,1) de la matriz  $P$  a la variable  $P_k$ 
  en otro caso
    | Se asigna el valor de la posición (2,1) de la matriz  $P$  a la variable  $P_k$ 
  fin
  Se obtiene un número aleatorio  $N_r \in [0, 1]$ ;
  si  $N_r > P_k$  entonces
    |  $x_{k+1} = 1$ 
  en otro caso
    |  $x_{k+1} = 0$ 
  fin
fin

```

Presentado ya el algoritmo, aun queda por abarcar una de las principales situaciones que se dan en el contexto de una oficina de trabajo, el comportamiento de las personas tiende a variar según la hora del día. Para poder manejar esto, se definen una serie de actividades típicas para una oficina programadas durante el día, las cuales definen cambios sobre la matriz de transición P utilizada en el algoritmo.

Para el caso de estudio abordado en este capítulo se considera un tiempo de muestreo de 5 minutos definido para que el algoritmo actualice el valor del estado, utilizando una programación de actividades similar a la presentada en [44] e incluida en la Tabla 7.10.

Cada uno de los eventos programados tiene asociada su propia matriz de transición que representa el posible comportamiento que tendrá el oficinista durante la realización de dicha actividad. A continuación se incluyen los valores numéricos de las matrices considerados en esta tesis para las horas hábiles:

Evento Programado	Periodo
Llegada a la oficina	7:00 – 8:30
Trabajo de la mañana	8:30 – 12:00
Salida para almorzar	12:00 – 12:30
Regreso de almorzar	12:30 – 13:30
Trabajo de la tarde	13:30 – 17:00
Salida del trabajo	17:00 – 21:00

Tabla 7.10: Programa de actividades en una oficina durante un día laboral

$$\begin{aligned}
P_g &= \begin{bmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & P_o &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix} \\
&\text{Llegada a la oficina} & & \text{Salida del trabajo} \\
P_{lo} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,50 & 0,50 \end{bmatrix} & P_{tb} &= \begin{bmatrix} 0,90 & 0,10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\text{Salida para almorzar} & & \text{Regreso de almorzar} \\
P_w &= \begin{bmatrix} 0,20 & 0,80 \\ 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \\
&\text{Trabajo}
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Se puede notar que hay horas sin actividades programadas en el algoritmo, las cuales corresponden a la noche. Durante ese intervalo de tiempo, el estado es actualizado directamente a 0, pues durante esas horas la oficina se encuentra cerrada. Adicionalmente, se debe mencionar que durante las horas programadas para la actividad denominada Trabajo, no se considera una probabilidad de seguir en la oficina igual a 1, pues se contemplan las posibles salidas de los trabajadores a reuniones en otras salas, idas al baño, etc.

Habiendo ya caracterizado el comportamiento de cada uno de los trabajadores de una oficina, se procede a calcular la ganancia interna de calor de la sala. Para ello, basado en el trabajo de Schiavon *et al.* [45], se considera que una persona genera normalmente 125[W] de calor en cada instante. Adicionalmente en [45], se menciona que para una oficina se debe considerar que el sistema de iluminación aporta con una cantidad de calor igual a $10[w/m^2]$. Asumiendo que el uso del sistema de iluminación varía según el número de ocupantes actual de la oficina, se establece una relación proporcional, la cual define que el calor aportado cumpla con el valor mencionado en [45] sólo cuando la ocupación alcance la capacidad máxima de la oficina. Dadas las dimensiones de la oficina mencionadas previamente en la Tabla 7.2, se estima que por conceptos de uso del sistema de iluminación, cada individuo que ocupa la oficina aporta 150[W] de calor. Luego, la señal de ganancia interna de calor se obtiene al ponderar el total de calor que se genera debido a la presencia de un individuo, con el total de personas que se encuentra dentro de la oficina.

A partir de los pasos mencionados en el Algoritmo 8, se puede destacar que la señal generada para el nivel de ocupación de la zona térmica presentará un comportamiento estocástico que variara a lo largo del día. Debido a esto, se decide aplicar en este caso el método de sintonización de intervalos que utiliza los parámetros $\alpha_{k,j}$ variantes con respecto al instante

k y el paso de predicción j .

Para la modelación de esta señal, se definió realizar un entrenamiento de distintos modelos difusos para cada paso j , de manera similar a lo realizado en el caso de la modelación de la temperatura ambiente. Repitiendo el procedimiento seguido para modelar la temperatura ambiente, se entrenan modelos e intervalos distintos para tres valores de muestreo: 10, 20 y 30 minutos, utilizando un horizonte de predicción máximo igual a 3 horas.

A continuación, la Tabla 7.11 presenta los valores obtenidos para las métricas durante la modelación del nivel de ocupación de la oficina, usando una probabilidad de cobertura fija $cp = 0.9$ y un tiempo de muestreo igual a 10 minutos.

Tabla 7.11: Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 10 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [n°p.]	1.428	1.527	1.615	1.621	1.464	1.579	1.647	1.660
PICP [%]	90.07	90.03	90.04	90.06	89.35	90.09	89.92	89.52
PINAW [%]	8.02	9.62	9.63	9.54	8.37	9.77	9.99	9.89

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 7.11, se verifica que en el conjunto de validación se alcanzan valores cercanos de probabilidad de cobertura a los impuestos durante el proceso de entrenamiento. En el caso particular de esta señal de perturbación, los valores registrados por el PICP resultaron levemente inferiores a los esperados en la conjunto de validación, lo cual es opuesto a la tendencia presentada durante la modelación de la temperatura ambiente. Sin embargo, esta disminución presentada en el nivel de cobertura no resulta significativa, pues la diferencia con respecto al valor deseado equivale a una cantidad menor al 1% del total de instantes modelados. Adicionalmente, el ancho promedio del intervalo se mantuvo en valores cercanos para distintos pasos de predicción. En las Figuras 7.6 y 7.7 se presenta el intervalo obtenido para una serie de datos, de manera de poder apreciar las variaciones del ancho del intervalo con respecto al instante k y el paso de predicción j .

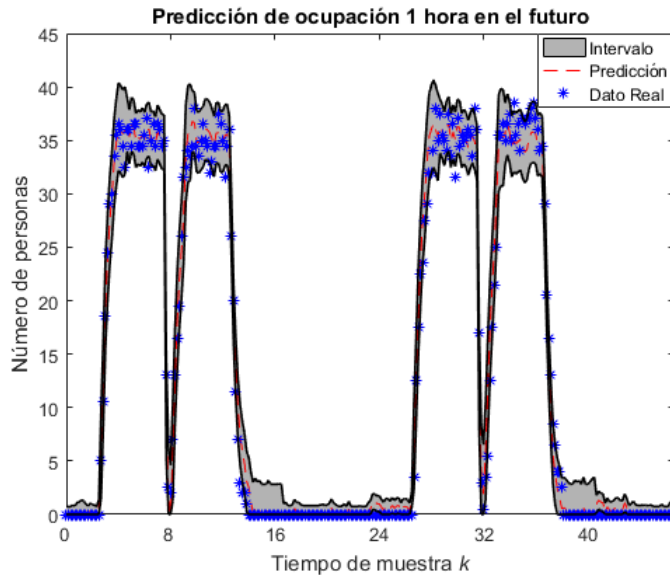


Figura 7.6: Intervalo con cobertura fija para predicción de P_d a 6 pasos

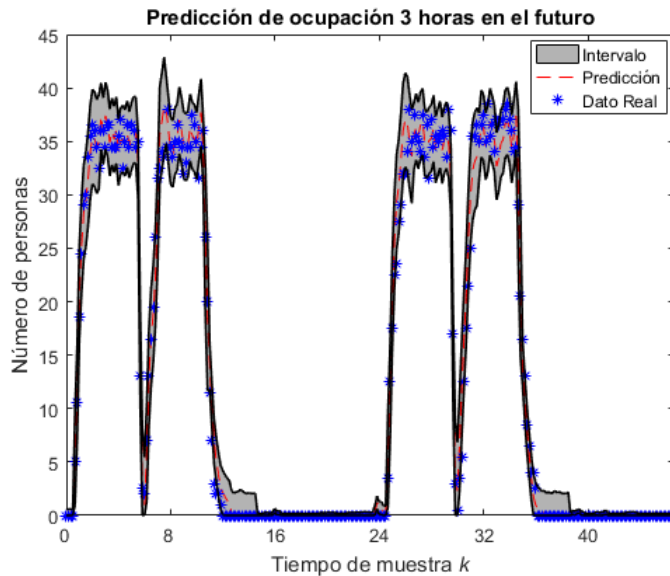


Figura 7.7: Intervalo con cobertura fija para predicción de P_d a 18 pasos

A partir de lo mostrado en las Figuras 7.6 y 7.7, se evidencia que la dependencia del ancho del intervalo con respecto al paso de predicción j no destaca en comparación a la variación de ancho obtenida para distintos momentos a lo largo del día. Con esto se puede concluir que el comportamiento de la incerteza de esta señal se encuentra fuertemente influenciada por el momento del día asociado a la predicción $k + j$, explicando las leves variaciones de PINAW presentadas en la Tabla 7.11.

Las Tablas 7.12 y 7.13 presentan los resultados para las métricas, pero ahora utilizando tiempos de muestreo de 20 y 30 minutos respectivamente. A partir de los resultados mostrados, se evidencian las mismas tendencias identificadas para la implementación con tiempo

de muestreo 10 minutos. El leve aumento del error del modelo y del ancho de los intervalos al utilizar mayores tiempos de muestreo, reflejan nuevamente la disminución de la precisión del modelo e intervalo difuso identificados, siguiendo la misma situación presentada con la modelación de la temperatura ambiente.

Tabla 7.12: Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 20 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	3	6	9	1	3	6	9
RMSE [n°p.]	1.469	1.578	1.639	1.589	1.498	1.657	1.645	1.631
PICP [%]	90.09	90.06	90.10	90.05	88.48	88.54	89.63	88.51
PINAW [%]	9.11	9.90	9.67	9.85	9.49	10.37	10.49	10.25

Tabla 7.13: Métricas para intervalos de P_d con cobertura fija y tiempo de muestreo 30 minutos

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	2	4	6	1	2	4	6
RMSE [n°p.]	1.569	1.633	1.579	1.604	1.583	1.626	1.604	1.600
PICP [%]	90.16	90.09	90.18	90.13	88.64	89.51	90.77	89.79
PINAW [%]	9.33	10.10	10.22	9.88	9.78	10.69	10.34	10.34

Si bien en promedio, el ancho de los intervalos (medidos por el PINAW) no crece con respecto al paso de predicción j de manera similar a lo acontecido con la modelación de la temperatura ambiente, de las Figuras 7.6 y 7.7 se pueden identificar instantes puntuales donde el ancho del intervalo crece de manera más notoria con respecto a j . Un ejemplo de esto ocurre durante el horario de entrada y de salida de la oficina, donde el nivel de ocupación de la oficina presenta los cambios más drásticos en su comportamiento. El evitar el riesgo de infactibilidad durante esos casos puntuales, motiva la implementación de la probabilidad de cobertura decreciente. En la Tabla 7.14 se presentan los resultados obtenidos para los intervalos con tiempo de muestreo 10 minutos y cobertura decreciente dada por (4.8), considerando para esto $cp_i = 0.9$ y $cp_f = 0.4$.

Tabla 7.14: Métricas para intervalos de P_d con cobertura decreciente

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [n°p.]	1.428	1.527	1.615	1.621	1.464	1.579	1.647	1.660
PICP [%]	90.07	71.28	53.91	44.30	89.35	68.22	52.85	43.52
PINAW [%]	8.02	5.56	3.71	2.57	8.37	5.64	3.83	2.65

Si bien los resultados muestran que se logra la disminución del ancho de los intervalos, en la Tabla 7.14 se destaca que el PICP a 18 pasos queda sobre el valor fijado originalmente como probabilidad de cobertura objetivo (40%). Esto se debe a que los resultados de la Tabla 7.14 toman en consideración las horas nocturnas, donde la incerteza es muy baja y los intervalos contienen a la totalidad de los datos reales al utilizar el mínimo valor de α fijado

para el algoritmo de sintonización. En la Figura 7.8 se muestra el intervalo obtenido a tres horas en el futuro, utilizando la cobertura decreciente, esto para evidenciar la reducción del ancho de intervalo con respecto a la Figura 7.7.

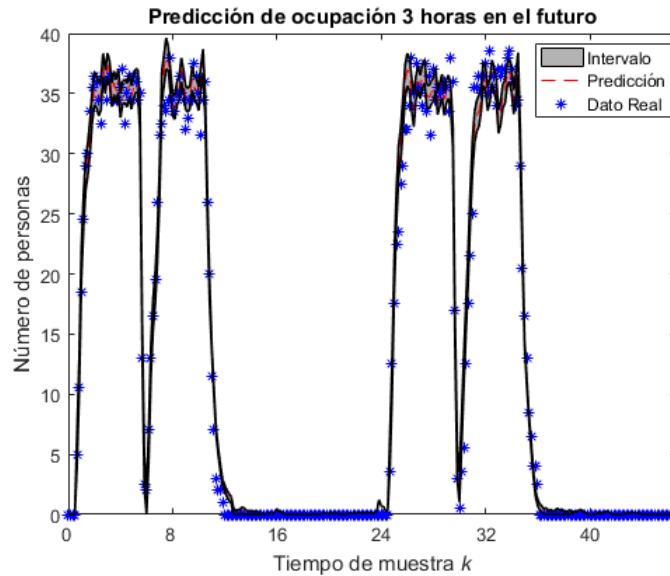


Figura 7.8: Intervalo con cobertura decreciente para predicción de P_d a 18 pasos

Dado los resultados obtenidos, se destaca la ventaja de utilizar la probabilidad de cobertura decreciente para reducir el ancho de los intervalos en los instantes donde la incerteza puede ser muy grande. Un ejemplo de esto se da al comienzo del horario de salida de los trabajadores a las 17:00, momento en el que se obtienen alguno de los intervalos más anchos, los cuales pueden ocasionar la presencia de casos infactibles en el problema de optimización que resuelve el MPC. Considerando los resultados mostrados para los intervalos con cobertura decreciente, se justifica su utilización con el propósito de evitar cualquier riesgo de infactibilidad durante la operación del controlador que se implementará.

Habiendo implementado los diferentes intervalos para las señales de perturbaciones externas, ya se disponen de los modelos necesarios para proceder con la implementación de los controladores propuestos. Pero antes de esto, aún falta por definir el tiempo de muestreo a utilizar. Por esto, a continuación se presentaran los resultados de una serie de pruebas para justificar el uso de los mismos tiempos de muestreo utilizados en esta sección de modelación de las perturbaciones.

7.4. Dimensionamiento del tiempo de muestreo

Para corroborar que los tiempos de muestreo utilizados para la modelación de las perturbaciones sean adecuados para la implementación de los controladores, se plantean una serie de pruebas de dimensionamiento. Estas pruebas consistieron en variar cada una de las entradas del sistema, dejando el resto de las variables que ingresaban al modelo con valores

fijos. La idea de estas pruebas es observar la evolución de la planta, estimando las constantes de tiempo que rigen al sistema a partir del tiempo en que se logró la estabilización. En cada prueba se obtuvieron valores diferentes para la constante de tiempo, debido a que la planta es no lineal y su comportamiento presenta algunas variaciones en función de su punto actual de operación. Una de las principales influencias presentes en la dinámica corresponde a la diferencia entre la temperatura del aire dentro de la sala (T_1) y la temperatura de los muebles (T_2).

Para la realización de estas pruebas, se simuló la dinámica de la habitación usando señales con secuencias de valores aleatorios para cada una de las variables de entrada del sistema HVAC. Cada señal presenta un cambio en su valor cada 3 horas para dejar que el sistema logre la estabilización para cada nuevo valor de entrada.

Al momento de realizar las pruebas, se notó que el sistema no se lograba estabilizar en un valor fijo. Esto se debe al efecto de la temperatura de dinámica lenta T_2 presente en el modelo utilizado, la cual al cambiar su valor, ocasionaba variaciones en el punto donde se debería estabilizar la variable T_1 . Tomando en cuenta esta situación, se estableció que se consideraría que el sistema consigue la estabilización cuando la tasa de variación de T_1 iguala a la de T_2 .

Debido a la complejidad para establecer el punto donde la temperatura puede ser considerada como estable, se definió una aproximación para el cálculo del tiempo de estabilización, estableciéndola como el tiempo que le tomo a la variable T_1 en llegar a la banda del 2% de su valor final medido antes del cambio de la variable de entrada. En la Figura 7.9 se muestra un ejemplo de la identificación de los puntos relevantes para estimar la constante de tiempo del sistema.

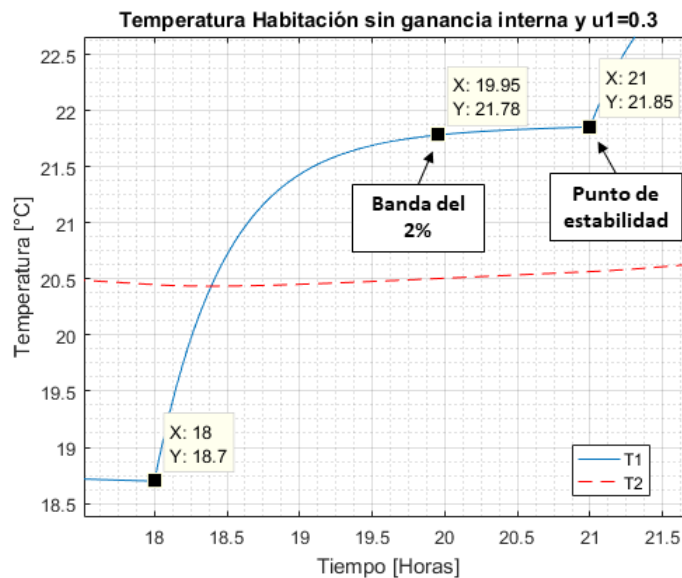


Figura 7.9: Ejemplo de prueba de dimensionamiento

Según el tamaño del escalón que define al cambio de la variable de entrada y el punto de operación actual del sistema, el tiempo de estabilización obtenido en las diferentes pruebas realizadas, presentaba valores diferentes contenidos en un rango de entre 1.2 y 2.7 horas.

Como un ejemplo de las pruebas realizadas, se incluye en la Figura 7.10 el comportamiento del sistema al sólo cambiar la variación de temperatura del actuador, dejando fijo el valor del flujo de masa de aire y asumiendo que la zona térmica no presenta ocupación alguna.

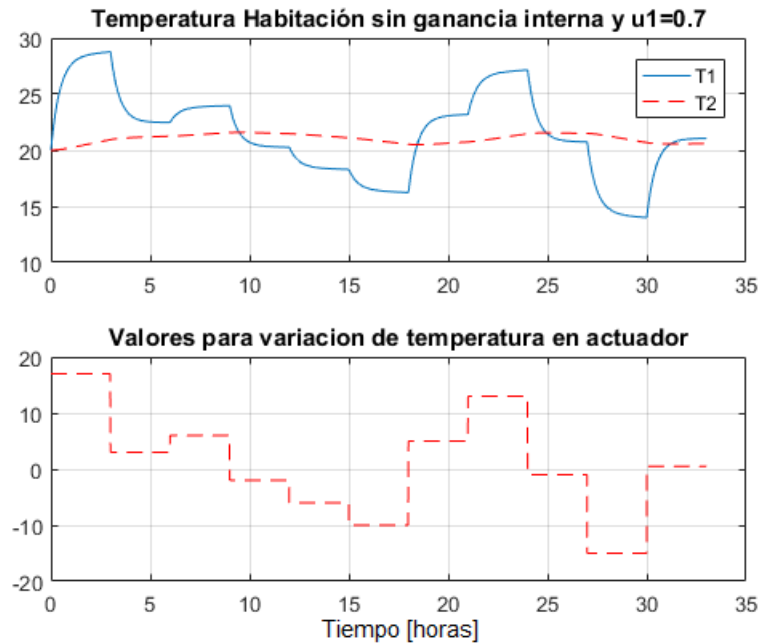


Figura 7.10: Prueba al cambiar la variación de temperatura en el actuador

A partir de las pruebas realizadas, se estima un tiempo aproximado de estabilización para el sistema entorno a las 2 horas, esto con respecto a cada una de las variables de entrada del modelo. Considerando esto, se justifica la utilización de los tiempos de muestreo propuestos al modelar la incerteza de las perturbaciones externas, pues con dichos valores se alcanza a apreciar el comportamiento transiente del sistema definido en el caso de estudio. En este punto se define utilizar un tiempo de muestreo de 10 minutos para la implementación de los controladores propuestos, elección motivada por el mejor rendimiento obtenido en la modelación de las perturbaciones al utilizar dicho valor.

Habiendo definido los últimos aspectos necesarios para la implementación de los controladores, se procede a mostrar a continuación los resultados obtenidos para las distintas estrategias de control propuestas en este trabajo de tesis.

7.5. Control predictivo robusto basado en intervalos para la perturbación

La primera de las estrategias de control implementada corresponde al MPC robusto basado en intervalos para la perturbación (RMPC- ω), descrito en la sección 5.2. En este controlador, siguiendo con los pasos mostrados por el Algoritmo 6, la incerteza de las perturbaciones

caracterizada por los intervalos es utilizada para calcular los parámetros de apriete de las restricciones incluidas en el problema de optimización.

Para este caso se asume a la dinámica del sistema de climatización como completamente conocida, por lo tanto la ecuación que rige al sistema (7.11) es utilizada directamente para el cálculo de las predicciones nominales del estado y los parámetros de apriete γ . En las Figuras 7.11 y 7.12 se muestra el comportamiento del sistema y la principal variable manipulada respectivamente, obtenidos cuando el sistema se encuentra bajo esta estrategia de control.

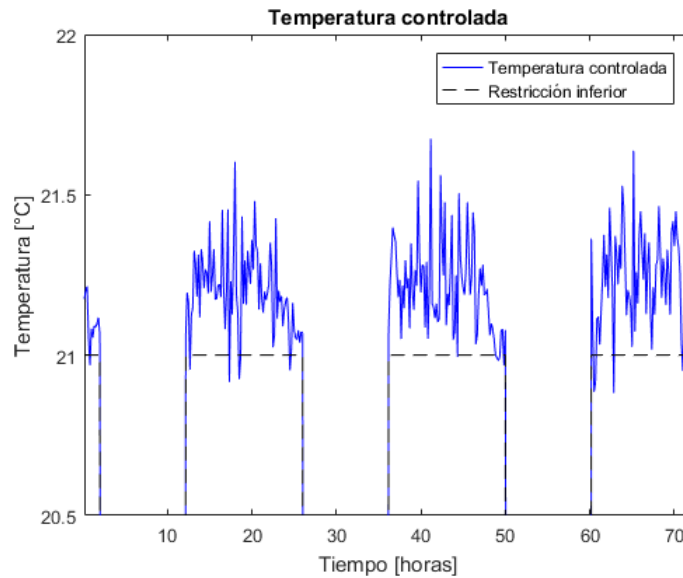


Figura 7.11: Variable controlada con RMPC- ω

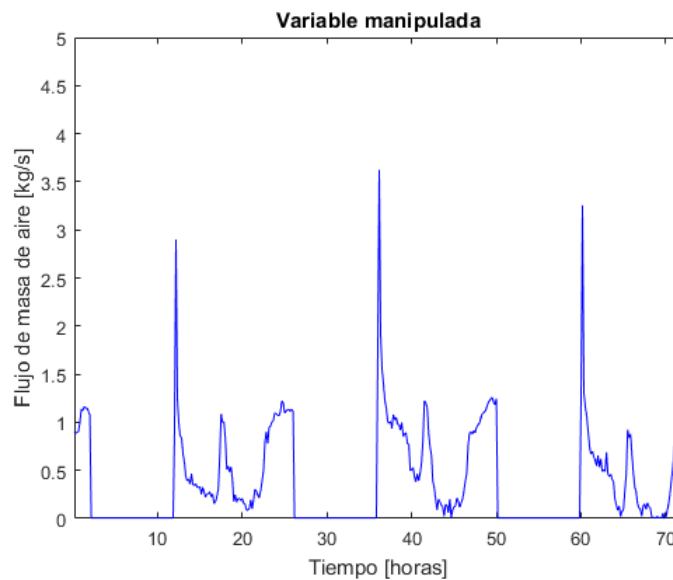


Figura 7.12: Variable manipulada obtenida con RMPC- ω

La Figura 7.11 refleja como el controlador es capaz de evitar la mayor parte del tiempo

la ocurrencia de casos de violación de restricciones. La Figura 7.12 muestra por su parte que la variable manipulada se mantiene dentro de los valores límites definidos para el actuador considerado (entre 0 y 5 [kg/s]). A continuación, a modo de comparar con lo mostrado en la Figura 7.11, se incluye en la Figura 7.13 el comportamiento de la temperatura de la oficina al utilizar un control predictivo determinístico (denotado en los resultados reportados en este capítulo como MPC), el cual no considera información alguna de la incertidumbre presente en las predicciones del sistema.

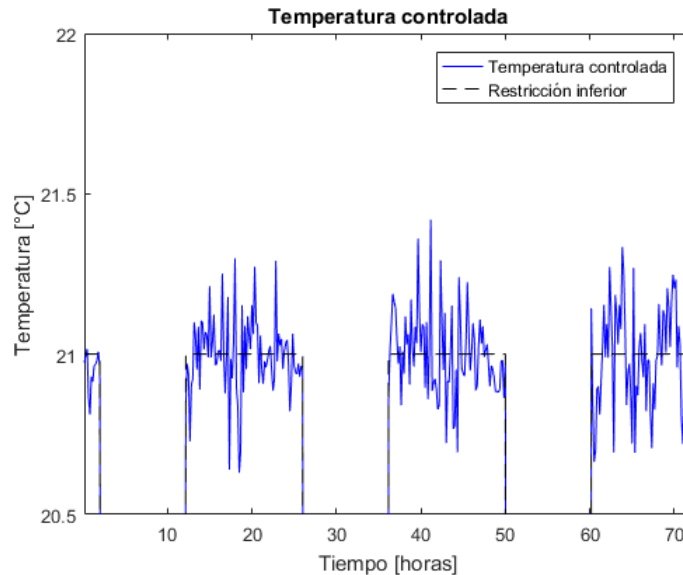


Figura 7.13: Variable controlada con MPC determinístico

Al comparar las Figuras 7.11 y 7.13 se puede notar gráficamente el aumento en la satisfacción de las restricciones al utilizar el controlador $\text{RMPC-}\omega$, pues para el caso determinístico se presentan varios casos durante las horas laborales, en los cuales la temperatura bajó del valor mínimo de 21°C impuesto en el problema de optimización. Para apreciar de manera más clara las diferencias entre los resultados obtenidos, se incluye en la Figura 7.14 los resultados de simulación para las dos implementaciones mencionadas, esto para una ventana de tiempo correspondiente a una jornada de operación de la oficina (14 horas, entre 7:00 y 21:00).

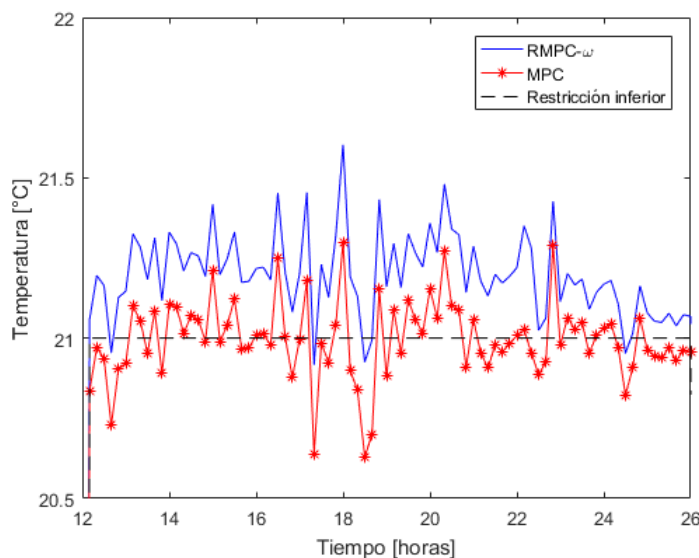


Figura 7.14: Comparación de variable controlada obtenida con MPC y RMPC- ω

En la Figura 7.14 se evidencia que para ambas implementaciones la temperatura sigue un comportamiento similar a lo largo de la jornada, esto pues el mismo modelo es utilizado en ambas estrategias para calcular las predicciones del estado. Tal como se puede observar en el gráfico, la principal diferencia entre ambas curvas se debe al apriete de las restricciones, lo que ocasiona el desplazamiento de la curva correspondiente al RMPC- ω con respecto a la implementación determinista. En la Tabla 7.15 se incluyen los indicadores más relevantes al momento de comparar el rendimiento de las dos estrategias de control implementadas.

Tabla 7.15: Comparación de resultados entre RMPC- ω y MPC clásico

	Satisfacción de Restricciones [%]	Consumo Energético [KWh]	Costo Computacional Promedio [seg]
RMPC- ω	98.02	356.48	3.58
MPC	48.02	339.31	2.20

En la Tabla 7.15 se confirma el aumento del nivel de satisfacción de restricciones que trae consigo la implementación de la formulación robusta del controlador, lo cual también fue apreciado gráficamente en las Figuras mostradas previamente. El nivel de satisfacción de restricciones esperado para el controlador es de un 95 %, considerando los intervalos sintonizados con una cobertura del 90 %. Esto se debe a que se asume que el 10 % de los casos donde la señal real no es contenida en el intervalo se distribuye de manera equitativa por sobre y bajo los límites obtenidos. Además, las restricciones definidas en la optimización del controlador normalmente son activadas a partir de solamente uno de los límites del intervalo. Para este caso en particular, como los intervalos no se encuentran sintonizados tomando en cuenta el efecto de la incertidumbre de la perturbación sobre el sistema, se obtiene un parámetro de apriete mayor al necesario, lo que ocasiona la obtención del nivel de satisfacción de restricciones mayor al deseado.

En términos del consumo energético, la estrategia robusta propuesta obtiene un mayor valor, esto debido a que el apriete de restricción fuerza al sistema a gastar más energía, de modo de reducir los valores de temperatura bajo los 21°C. Con respecto a la complejidad computacional, la implementación robusta presenta un mayor costo computacional promedio comparado con el MPC determinístico. Esto se debe básicamente al esfuerzo extra que se debe utilizar para calcular los parámetros de apriete, los cuales por una parte dependen de las variables de optimización y por otro lado afectan en la reducción del conjunto de soluciones factibles.

La implementación de este controlador cumple con el objetivo principal de reducir los casos de violación de restricciones, optimizando el consumo energético ante el apriete de las restricciones del sistema. Sin embargo, su implementación se basa en un supuesto que no necesariamente se cumple en un caso de aplicación real, la ecuación exacta que rige a la dinámica del sistema es completamente conocida y es utilizada directamente como modelo de predicción dentro del problema de optimización.

Como caso más cercano a una implementación real, se propone la utilización de la segunda estrategia de control presentada en esta tesis. Dicha estrategia, denominada como control predictivo robusto basado en intervalos para la variable de estado, asume que la dinámica real del sistema es desconocida y emplea intervalos difusos para estimar las predicciones de la temperatura de la oficina. Pero antes de proceder a la implementación de esta nueva formulación, se deben obtener los respectivos modelos de intervalos difusos, que servirán como base para el diseño de este controlador.

7.6. Modelación de la variable de estado

Para poder calcular las predicciones de la variable de estado, se identifica un modelo difuso a un paso, que siga una estructura similar a (4.11), utilizando como entradas a todas las variables que afectan a la dinámica del sistema de climatización dada por (7.1). Se considera para el proceso de identificación de los modelos de intervalos, el mismo horizonte de predicción utilizado durante el proceso de modelación de perturbaciones, y el tiempo de muestreo de 10 minutos escogido en la sección 7.4. Notar que, si bien T_1 es caracterizada mediante un modelo difuso debido a su dinámica no-lineal, la variable de estado T_2 sigue por su parte una ecuación lineal. Por lo tanto, para T_2 es utilizado un modelo de predicción lineal, cuya salida es posteriormente ingresada al modelo difuso de T_1 .

Basado en los resultados obtenidos en los casos de estudio previos, donde se controlaba unos sistemas no-lineales simples, se decide implementar la propuesta de intervalos difusos dado por parámetros de sintonización globales, el cual es representado por los límites (4.42)-(4.43). Como las señales de perturbación externa ya se encuentran completamente caracterizadas por los intervalos implementados en las secciones anteriores, esos mismos intervalos serán utilizados para la caracterización de la incerteza completa presente en las predicciones del estado.

Entonces, en la Tabla 7.16 se muestran las métricas asociadas a la implementación de los

intervalos para la variable de estado, usando una probabilidad de cobertura fija $cp = 0.9$.

Tabla 7.16: Métricas para intervalos de x_k con α global y cobertura fija

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [°C]	0.129	0.438	0.692	0.878	0.133	0.463	0.729	0.941
PICP [%]	90.05	90.01	90.02	90.02	92.44	90.00	91.75	91.49
PINAW [%]	2.32	7.83	12.91	16.07	2.99	9.84	16.62	21.01

De los resultados mostrados en la Tabla 7.16, se aprecia que los intervalos obtienen un nivel de cobertura superior al impuesto durante la fase de entrenamiento, esto debido al aumento del ancho de los intervalos registrados por el PINAW. El aumento notorio del ancho del intervalo con respecto al paso de predicción, corresponde a una de las situaciones a las cuales se le debe prestar especial atención. Tal como ha sido mencionado previamente, la obtención de intervalos de predicción muy anchos puede resultar perjudicial para la implementación de los controladores propuestos, por lo que se considera como alternativa la utilización de los intervalos entrenados con una probabilidad de cobertura decreciente con respecto al paso de predicción. En la Tabla 7.17 se reportan los resultados obtenidos con los intervalos con probabilidad de cobertura dada por (4.8), con $cp_i = 0.9$ y $cp_f = 0.1$.

Tabla 7.17: Métricas para intervalos de x_k con α global y cobertura decreciente

Pasos	Conjunto de Entrenamiento				Conjunto de Validación			
	1	6	12	18	1	6	12	18
RMSE [°C]	0.129	0.438	0.692	0.878	0.133	0.463	0.729	0.941
PICP [%]	90.05	47.22	21.77	10.00	92.44	51.16	23.09	9.96
PINAW [%]	2.32	2.54	1.69	0.97	2.99	3.21	2.19	1.29

A partir de los resultados mostrados, se verifica el correcto funcionamiento de los intervalos con cobertura decreciente, logrando en el conjunto de validación alcanzar valores cercanos de cobertura a los impuestos durante la fase de entrenamiento. El beneficio más importante que tiene el uso de esta alternativa corresponde a la efectividad para reducir el ancho de intervalo para pasos de predicción grandes. Esto favorece a la implementación de los controladores propuestos, pues se reduce considerablemente el riesgo de presentar casos de infactibilidad en el problema de optimización.

Eligiendo el uso de los últimos intervalos presentados en la Tabla 7.17, los cuales fueron formulados especialmente para modelar a la variable de estado considerando una probabilidad de cobertura decreciente, se procede a implementar el respectivo controlador predictivo robusto asociado.

7.7. Control predictivo robusto basado en intervalos para las variables de estado

La estrategia de control predictivo robusta formulada tomando como base a los intervalos difusos para el estado (RMPC-FI), descrita previamente en la sección 5.3 y resumida en el Algoritmo 7, es implementada para controlar el sistema de climatización definido para este caso de estudio. El comportamiento de la temperatura de la oficina obtenido bajo el uso de este controlador es mostrado a continuación en la Figura 7.15, junto con la respectiva variable manipulada asociada en la Figura 7.16.

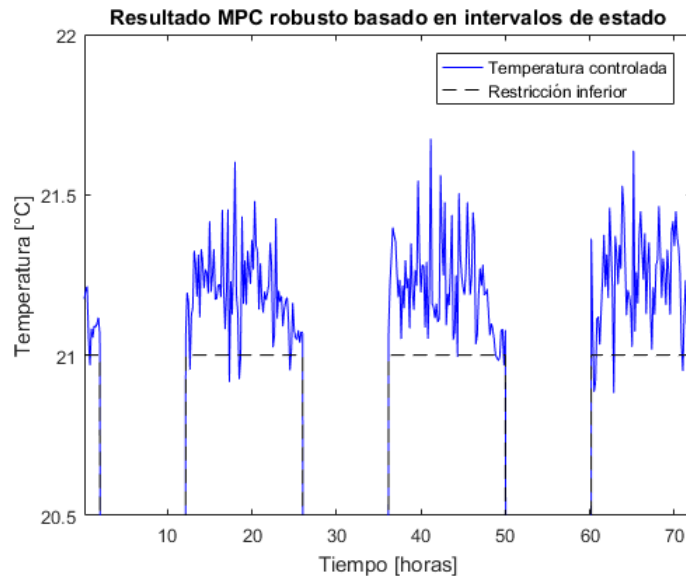


Figura 7.15: Resultado variable controlada con RMPC-FI

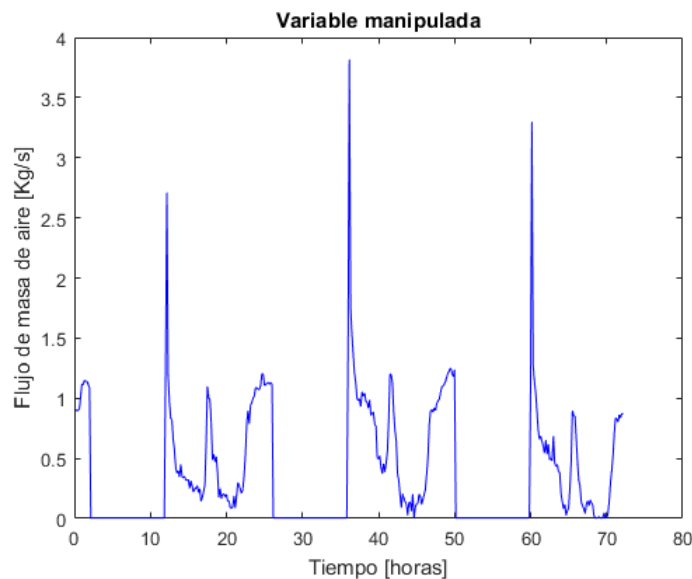


Figura 7.16: Resultado variable manipulada con RMPC-FI

En este punto se debe mencionar que para este experimento de simulación, se utiliza el mismo perfil de perturbación aplicado previamente durante la implementación del control predictivo basado solamente en los intervalos para la perturbación. A partir de lo mostrado en las Figuras 7.15 y 7.16, se verifica el correcto funcionamiento de la estrategia de control implementada, logrando un alto porcentaje de satisfacción de las restricciones, mientras la variable manipulada se mantuvo dentro de los límites fijados por el actuador físico.

A modo de comparar los resultados obtenidos, se plantea la implementación de otras formulaciones de control predictivo para que actúen sobre el sistema de climatización. Uno de los controladores considerados para comparar los resultados corresponde a la formulación clásica del control predictivo (MPC), la cual resuelve el problema de optimización sin realizar el apriete de restricciones. Adicionalmente, se considera la implementación de un controlador predictivo robusto que solamente haga uso de los intervalos difusos que caracterizan la incerteza asociada al modelo identificado (obtenido usando solamente los valores reales de ω , es decir, sin considerar el error de predicción de las perturbaciones). Este intervalo está dado por los límites (4.15)-(4.16), y no llega a utilizar información adicional alguna sobre la incertidumbre de las perturbaciones externas (el controlador basado en estos intervalos es denotado en este capítulo como RMPC- x).

El último controlador considerado con fines comparativos, consiste en la propagación de la incerteza de las perturbaciones ω sobre el modelo del sistema, siguiendo los mismos pasos realizados durante la implementación anterior del RMPC- ω en la sección 7.5. La principal diferencia con respecto al RMPC- ω implementado previamente, es que ahora la propagación de la incerteza de ω se lleva a cabo a través del modelo difuso identificado.

La temperatura obtenida con el RMPC-FI para una jornada de operación de la oficina (14 horas, entre 7:00 y 21:00), es comparada en la Figura 7.17 con los resultados de las tres alternativas mencionadas anteriormente. Adicionalmente, en la Tabla 7.18 se incluyen las métricas de desempeño más relevantes para los distintos controladores implementados, el nivel de satisfacción de restricciones, el consumo energético y el tiempo de iteración computacional.

Tabla 7.18: Comparación de resultados entre MPC implementados

	Satisfacción de Restricciones [%]	Consumo Energético [KWh]	Costo Computacional Promedio [seg]
RMPC-FI	94.07	354.73	83.40
MPC	45.85	340.62	76.11
RMPC- x	65.61	343.59	76.30
RMPC- ω	97.63	359.68	89.16

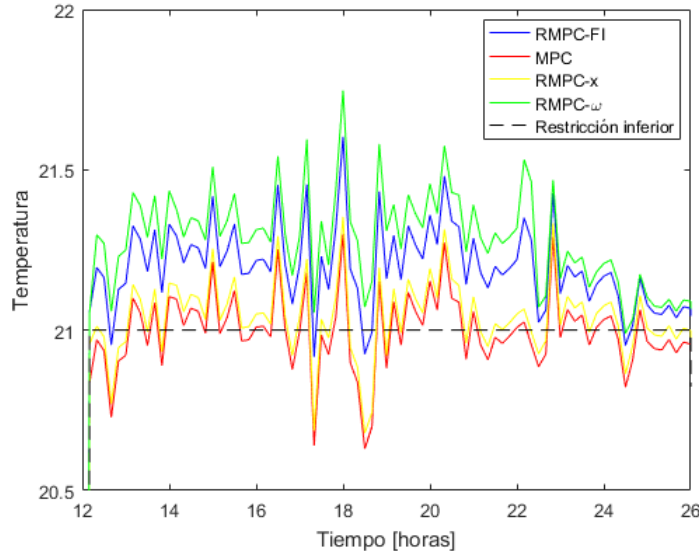


Figura 7.17: Comparación de resultados para variable controlada

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 7.18 se puede apreciar que el RMPC-FI logra un nivel de satisfacción de restricciones cercano al valor esperado (según lo mencionado en la sección 7.5, para los intervalos propuestos que son entrenados con un PICP de 90 %, se espera una violación de restricciones del 5 %). En términos de la satisfacción de restricciones, el rival directo del RMPC-FI resulta ser la implementación del RMPC- ω , la cual logra resultados similares a los obtenidos en la sección 7.5, donde el controlador utilizaba el modelo real del sistema para calcular las predicciones. La reducción del nivel de satisfacción de restricciones a un valor más cercano al esperado, trae consigo un beneficio asociado a la reducción del consumo energético. Esto posiciona al RMPC-FI por sobre las alternativas que consideran utilizar solamente una parte de la información proporcionada por los intervalos difusos identificados para ω y x_k (como el RMPC- x y el RMPC- ω).

Al comparar el RMPC-FI con la implementación determinista, se presentan situaciones similares a las descritas en los resultados de simulación vistos previamente en esta tesis, destacando la menor cantidad de casos donde se satisfacían las restricciones, a cambio de obtener el consumo energético mínimo. En este punto, la implementación de los intervalos clásicos (los cuales no consideran la información de la incertidumbre de las perturbaciones externas), genera una mejoría en el nivel de satisfacción de restricciones del RMPC- x con respecto al MPC determinístico. El problema que se puede identificar en el RMPC- x es que el incremento del nivel de satisfacción de restricciones no alcanza para lograr valores de satisfacción cercanos a los esperados (95 %). Estos resultados son de utilidad para resaltar el beneficio de usar las estructuras de intervalos propuestas en esta tesis para implementar los controladores robustos, en desmedro de los intervalos clásicos reportados en la literatura que no consideran el efecto de la incerteza de la señal de perturbación externa.

En términos del costo computacional, se evidencia un aumento considerable del tiempo de iteración promedio de los controladores, esto en comparación a lo registrado con la implementación reportada en la sección 7.5, donde se asumía completo conocimiento de la dinámica de

la planta y se utilizaba directamente el modelo real en el problema de optimización. Este aumento es un efecto de la utilización de los modelos difusos, pues las variables de optimización del problema afectan tanto a los modelos locales lineales como a los grados de activación, aumentando con esto la complejidad computacional del problema que resuelve el MPC. Entre las implementaciones llevadas a cabo en esta sección, se destaca que la propuesta de MPC robusto basado en los intervalos de estado y el controlador que realizaba la propagación de la incerteza de ω aumentan en torno a un 10% adicional el tiempo promedio que toma resolver la optimización. Si bien el aumento del tiempo promedio para resolver la optimización no es despreciable, para este caso de estudio en particular, el tiempo de resolución se encuentra aún lejos del tiempo de muestreo del sistema (600 segundos).

7.8. Discusión

En este capítulo se estudió la implementación de las distintas propuestas de modelación por intervalos y controladores diseñados en este trabajo, aplicados al caso de un sistema de climatización HVAC. Para lograr esto, en primer lugar se caracterizó completamente el modelo de un sistema de climatización, explicando el significado de sus parámetros y la posterior obtención de sus valores. También se describió el sentido físico del problema de optimización que debía resolver el MPC, abordando su descripción desde el punto de vista de la problemática del consumo energético y la satisfacción de restricciones de comodidad para los ocupantes de la zona térmica.

Posteriormente se describieron las señales de perturbación externas que actúan como fuentes de incerteza en el cálculo de predicciones, explicando los diferentes experimentos para obtener las mediciones de las respectivas señales y asociar la estructura de sintonización de intervalos difusos adecuada, basándose en el comportamiento que presenta la incerteza de cada perturbación a lo largo del tiempo.

El capítulo continuó con la implementación de los intervalos para las dos perturbaciones que afectan al sistema, mostrando los respectivos resultados obtenidos al utilizar la variante de sintonización más adecuada para la señal que se buscaba modelar.

Por una parte, para la temperatura ambiente se presenta una componente incierta que se mantiene a lo largo del día, presentando mayores variaciones con respecto al paso de predicción. Para ese caso, la propuesta de sintonización de intervalos que dependa solamente del paso de predicción j se identifica como la alternativa más adecuada a implementar, logrando en los resultado de simulación cumplir el objetivo de caracterizar la incertidumbre de la señal adecuadamente.

Por otro lado, el nivel de ocupación mostró un comportamiento de incerteza diferente, variando principalmente con respecto a la hora del día asociada a la predicción. Debido a esto, se identifica a la estrategia de sintonización con parámetros que dependan tanto del instante actual k y del paso de predicción j como la alternativa más adecuada para modelar la ocupación de la oficina. A partir de los resultados se verifica la correcta caracterización de la incerteza asociada a la ocupación de la oficina, logrando aplicar satisfactoriamente

esta herramienta para regímenes de operación claramente distintos. Como ejemplo de estos regímenes de operación se puede mencionar los horarios de llegada y salida (los cuales poseen una incerteza considerablemente mayor a la presentada el resto del día), el horario de trabajo normal y el horario nocturno donde la oficina se encuentra cerrada (durante este modo de operación la incerteza de la señal de perturbación es mínima).

Con la caracterización de la incerteza de las perturbaciones ya lograda, el paso siguiente fue la implementación del controlador robusto que asumía un completo conocimiento de la dinámica del sistema en su diseño. Este controlador realizaba una propagación de la incerteza caracterizada por los intervalos difusos para ω , ingresándola al modelo real para calcular el parámetro de apriete. Se destaca que esta implementación logra un porcentaje de cumplimiento de restricciones del sistema superior en 3% al valor esperado, el cual se encuentra determinado por la probabilidad de cobertura escogida para los intervalos difusos. A pesar del beneficio evidenciado en esta implementación, el caso simulado dista de lo que sería una implementación real, esto pues la dinámica del sistema en pocas ocasiones es completamente conocida. Debido a esto, se propuso llevar a cabo la implementación del control predictivo robusto basado en los intervalos de estado (RMPC-FI).

Para lograr la implementación del RMPC-FI, fue necesario modelar primero la variable de estado que se busca controlar. Para ello, se utilizó la estructura de intervalo propuesta en esta tesis para modelar sistemas dinámicos, la cual considera la combinación de la incerteza interna del modelo y el error presente en las predicciones de las perturbaciones externas. Los resultados mostrados reflejan la efectividad de este nuevo intervalo formulado en este trabajo, pues logró obtener los niveles de cobertura deseados a pesar de la presencia de incertidumbre proveniente tanto de fuentes internas, como externas.

Finalmente el controlador robusto que utiliza los intervalos propuestos (RMPC-FI) fue implementado, logrando en los resultados mostrar que esta estrategia satisface los requerimientos que motivaron la formulación de la propuesta basada en la nueva estructura de intervalos presentada en esta tesis. En la comparación de los resultados obtenidos, realizada con respecto al comportamiento del sistema obtenido con el MPC clásico, se destaca el aumento del nivel de satisfacción de restricciones a un valor cercano al esperado. La implementación de las otras alternativas de controladores, las cuales sólo utilizan la incerteza interna del modelo (RMPC- x) o la incerteza externa (RMPC- ω) para el cálculo de los parámetros de apriete, permiten vislumbrar que la propuesta definitiva presentada en esta tesis (la cual combina toda la información de incertidumbre interna y externa al modelo) obtiene los mejores resultados al evaluar al mismo tiempo el nivel de satisfacción de restricciones y el consumo energético.

Con esto queda confirmada la utilidad de los intervalos propuestos para llevar a cabo implementación robustas de control predictivo, mejorando los resultados con respecto a la utilización de los intervalos reportados en la literatura, los cuales no consideran el efecto combinado de todas las fuentes de incerteza que actúan normalmente durante la operación de un sistema con dinámica desconocida y afecta a perturbaciones externas.

8 Conclusiones

El trabajo desarrollado en esta tesis presentó una serie de propuestas relacionadas con la modelación de señales inciertas y sistemas dinámicos, proporcionando nuevas estructuras de modelos de intervalos para la caracterización de la incertidumbre presente en el cálculo de las predicciones de un sistema. Adicionalmente, y tomando como base a las propuestas de modelación por intervalos presentados en este trabajo, se diseñaron las respectivas estrategias de control predictivo robusto basadas en el uso de estos nuevos intervalos formulados.

Cuando se busca implementar un controlador predictivo robusto sobre un sistema dinámico afectado por perturbaciones externas, se necesita caracterizar a las distintas fuentes de incertidumbre que pueden provocar la presencia de error en el cálculo de las predicciones. En este trabajo, se destacan dos fuentes de incertidumbre que necesitan ser modeladas mediante el uso de intervalos difusos, la incerteza asociada al comportamiento incierto de la perturbación externa y la incertidumbre asociada al modelo identificado para el sistema.

Para el caso de la perturbación externa, se debe mencionar que este tipo de señales puede presentar distintos comportamientos de incerteza. Esto ocasiona que los intervalos regularmente reportados en la literatura no necesariamente funcionen adecuadamente para todas las situaciones que se pueden presentar durante la modelación de las señales. En esta tesis se identifican dos tipos de incertidumbre que pueden presentar los modelos de predicción de las señales de perturbación. Por una parte, se menciona la incerteza que no depende del instante en que esta ocurriría (y por ende, de cuando se realiza la predicción), presentando solamente variaciones del nivel de incertidumbre con respecto a la cantidad de pasos en el futuro en que la señal es predicha (como ejemplo, se puede mencionar la modelación de la temperatura ambiente en el caso de estudio aplicado a sistemas de climatización). Por otro lado, se identifica la incertidumbre que si presenta variaciones con respecto al instante en que se calcula la predicción (como ejemplo, se puede mencionar el caso de la radiación solar, cuya incertidumbre es nula en el horario nocturno).

En esta tesis, se proponen dos esquemas de sintonización para los intervalos de las perturbaciones externas, definiendo parámetros de sintonía que se adecuen a los dos tipos de incerteza que pueden presentar las señales a modelar (los parámetros de sintonía α_j que sólo dependen del paso de predicción j y los parámetros $\alpha_{k,j}$ que además dependen del instante k en que se calcula la predicción). Ambos esquemas de sintonización son puestos a prueba en el caso de estudio de sistemas de climatización, el cual se encuentra compuesto por señales de perturbación con ambos tipos de comportamiento de incerteza. Las simulaciones muestran que los nuevos parámetros de sintonía $\alpha_{k,j}$ que consideran el efecto del instante actual k se

adecuan correctamente a la incertidumbre presentada por la señal de perturbación asociada al nivel de ocupación de oficina, logrando el intervalo resultante contener a una señal que presenta un nivel de incertidumbre alto en ciertos horarios del día (como durante el horario de llegada y salida de los trabajadores) y una incerteza baja durante la noche.

El diseño de los controladores predictivos robustos presentados en esta tesis, consideró la utilización del conocimiento de la incertidumbre proporcionado por los intervalos para apretar las restricciones que debe satisfacer el sistema a controlar. Debido al seguimiento de este tipo de estrategia, la obtención de intervalos de predicción muy anchos puede ocasionar problemas de infactibilidad en el problema de optimización que debe resolver el controlador. Al aumentar el paso de predicción j utilizado al momento de la modelación, se espera que se presente un crecimiento del ancho de los intervalos, esto debido a la acumulación del error obtenido para los pasos de predicción previos $\{1, \dots, j-1\}$. Para evitar el riesgo de presentar casos de infactibilidad debido al crecimiento del ancho de los intervalos, en este trabajo se presentó una nueva propuesta de sintonización, la cual considera utilizar una probabilidad de cobertura decreciente con respecto al paso de predicción. Los resultados de simulación reportados en este trabajo, verifican la efectividad de considerar esta propuesta, mostrando el logro de evitar completamente la ocurrencia de casos infactibles en los diferentes casos de estudio presentados en esta tesis.

Si se considera a la ecuación dinámica exacta que rige al sistema a controlar como completamente conocida, en este punto ya se puede realizar el diseño de una estrategia de control predictivo robusto, basado en el apriete de restricciones. Para ello, se tiene que considerar que el controlador debe calcular los parámetros de apriete, mediante el ingreso de los límites de los intervalos para la perturbación, en el modelo del sistema. Los resultados de simulación de este controlador, para el caso de estudio basado en el control de un sistema no-lineal simple y el caso aplicado a sistemas de climatización, muestran el cumplimiento del objetivo de reducir las violaciones de restricciones originalmente obtenidas con el MPC determinístico.

El controlador predictivo robusto basado solo en intervalos para la perturbación, logra mejorar el nivel de satisfacción de restricciones, comparado con los resultados del MPC determinístico. Sin embargo, su implementación se encuentra sujeta a la disposición del modelo exacto del sistema como información conocida. Para el caso donde dicha condición no es cumplida, se debe realizar la identificación de un modelo aproximado para caracterizar el sistema. La realización de esto, provoca que se deba considerar a la segunda fuente de incertidumbre mencionada previamente en esta tesis en el diseño del controlador, la incerteza propia del modelo identificado. Para lograr esto, en esta tesis se propuso una nueva estructura de modelo de intervalo difuso enfocada en la modelación de sistemas dinámicos, que utilice las dos fuentes de incertidumbre presentes para el cálculo del ancho de los intervalos.

La formulación de esta nueva estructura de intervalos es llevada a cabo tomando como base la utilización de dos tipos de modelos, uno que se encuentre definido en variables de estado y otro que sea del tipo autorregresivo con variable exógena. Para ambos casos, los intervalos son planteados como la suma de las diferentes incertezas que afectan al cálculo de predicciones del sistema. En este trabajo, se propusieron dos esquemas de sintonización para el ancho final del intervalo. Por una parte, se considera el cálculo por separado de los diferentes parámetros de sintonía que componen al nuevo intervalo, y por otro lado, se propone

una sintonización combinada mediante la definición de un parámetro global. Las simulaciones realizadas muestran que ambos esquemas de sintonización propuestos logran resultados similares en términos del ancho y nivel de cobertura, por lo tanto, se concluye que cualquiera de los dos esquemas puede ser utilizado para la implementación de los controladores diseñados. Para las pruebas de simulación de los controladores, se define utilizar los intervalos obtenidos con la sintonización combinada, debido a que con este esquema se deben determinar una menor cantidad de parámetros.

Los resultados obtenidos por los controladores implementados en los diferentes casos de estudio, muestran los beneficios de utilizar los nuevos intervalos formulados en este trabajo. En particular, se puede destacar la mejora del nivel de satisfacción de restricciones con respecto a la implementación del MPC determinístico. Además, estos controladores logran evitar satisfactoriamente todas las situaciones de infactibilidad que se presentaron previamente durante la implementación del MPC robusto basado solamente en intervalos para la perturbación. Este beneficio se aprecia como consecuencia directa de la implementación de los intervalos formulados específicamente para modelar sistemas dinámicos, junto con la utilización de la probabilidad de cobertura decreciente durante el proceso de sintonización.

En conclusión, a partir de todos los resultados reportados en este trabajo para los distintos casos de estudio presentados, se verifica el cumplimiento de los diferentes objetivos que motivaron a cada una de las propuesta presentadas en esta tesis. Se destaca que en este trabajo de tesis se ha logrado desarrollar de manera satisfactoria una nueva formulación de intervalos enfocada en la modelación de sistemas dinámicos. Esta nueva formulación, al ser combinada con las diferentes propuestas relacionadas con los métodos de sintonización de los intervalos, permiten aprovechar en plenitud los distintos beneficios de este tipo de herramientas de modelación en la implementación de una estrategia de control predictivo robusto.

Trabajo Futuro

Los intervalos difusos propuestos en esta tesis, junto con las respectivas formulaciones de controladores predictivos robustos, asumen que el error de predicción de los modelos distribuye equitativamente entre valores positivos y negativos. A partir de las pruebas de simulación del caso de estudio correspondiente al control del sistema no-lineal autorregresivo con variable exógena, se identificó como un problema para los controladores desarrollados en esta tesis la posible ocurrencia de situaciones donde la distribución equitativa del error de predicción no se cumple, pues esto complejiza el manejo del nivel de cumplimiento de las restricciones del sistema controlado. En los diferentes casos de estudio, quedo en evidencia que para cada instante k , el controlador activaba solamente uno de los límites definidos por la restricción del sistema. Esto permitió que con intervalos entrenados con una cobertura del 90 % lograran una satisfacción de restricciones cercanas al 95 %. Cuando los casos de violación del intervalo no distribuyen equitativamente por sobre y debajo el rango dado por el intervalo, el nivel de satisfacción de restricciones no coincidirá con valores cercanos a los esperados, tal como ocurrió en las pruebas de simulación con el controlador implementado sobre el sistema no-lineal autorregresivo con variable exógena. Debido a esto queda propuesto como trabajo futuro la implementación de una variante que no considere un intervalo simétrico entorno a la predicción entregada por el modelo difuso.

Otra línea a seguir como trabajo futuro es el diseño de nuevos modelos por intervalos, los cuales estén pensados para modelar sistemas multivariables (con múltiples entradas y salidas). Para dicho caso, la incerteza caracterizada para el sistema no se encontrará contenida en un rango de valores, si no que deberá estar contenida en un poliedro con forma arbitraria.

Publicaciones Generadas

- O. Cartagena, D. Muñoz-Carpintero, D. Sáez “Fuzzy prediction intervals for robust predictive control design”, Enviado para revisión a la revista *Applied Soft Computing*.
- O. Cartagena, D. Muñoz-Carpintero, D. Sáez “A robust predictive control strategy for building hvac systems based on interval fuzzy models”, 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), Jul. 2018, pp. 1-8.
- O. Cartagena, D. Muñoz-Carpintero, D. Sáez “A robust predictive control strategy for building hvac systems using interval fuzzy models”, XIII IEEE Escuela de Verano de Inteligencia Computacional (EVIC), 2017. *Premiado con el 2° lugar en concurso de posters.*

Bibliografía

- [1] Carlos E. García, David M. Prett, and Manfred Morari. Model predictive control: Theory and practice—a survey. *Automatica*, 25(3):335 – 348, 1989.
- [2] Young Il Lee and Basil Kouvaritakis. Robust receding horizon predictive control for systems with uncertain dynamics and input saturation. *Automatica*, 36(10):1497 – 1504, 2000.
- [3] G. Grimm, M. J. Messina, S. E. Tuna, and A. R. Teel. Nominally robust model predictive control with state constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10):1856–1870, Oct 2007.
- [4] G. Pin, D. M. Raimondo, L. Magni, and T. Parisini. Robust model predictive control of nonlinear systems with bounded and state-dependent uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7):1681–1687, July 2009.
- [5] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1):116–132, Jan 1985.
- [6] Igor Škrjanc, Sašo Blažič, and Osvaldo Agamennoni. Identification of dynamical systems with a robust interval fuzzy model. *Automatica*, 41(2):327 – 332, 2005.
- [7] Igor Škrjanc. Fuzzy confidence interval for ph titration curve. *Applied Mathematical Modelling*, 35(8):4083 – 4090, 2011.
- [8] Huibert Kwakernaak and Raphael Sivan. *Linear optimal control systems*, volume 1. Wiley-Interscience New York, 1972.
- [9] Rudolf Emil Kalman et al. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 5(2):102–119, 1960.
- [10] Basil Kouvaritakis and Mark Cannon. *Model predictive control: classical, robust and stochastic*. Springer, 2016.
- [11] David Q Mayne, James B Rawlings, Christopher V Rao, and Pierre OM Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.

- [12] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55(3):531–534, 1992.
- [13] S. V. Rakovic, B. Kouvaritakis, M. Cannon, C. Panos, and R. Findeisen. Parameterized tube model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(11):2746–2761, Nov 2012.
- [14] Dimitri P Bertsekas. *Dynamic programming and optimal control*, volume 1. Athena scientific Belmont, MA, 2005.
- [15] H. Witsenhausen. A minimax control problem for sampled linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(1):5–21, February 1968.
- [16] Paul J Goulart, Eric C Kerrigan, and Jan M Maciejowski. Optimization over state feedback policies for robust control with constraints. *Automatica*, 42(4):523–533, 2006.
- [17] J. Lofberg. Approximations of closed-loop minimax mpc. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475)*, volume 2, pages 1438–1442 Vol.2, Dec 2003.
- [18] Dimitri P Bertsekas and Ian B Rhodes. On the minimax reachability of target sets and target tubes. *Automatica*, 7(2):233–247, 1971.
- [19] J. Neyman and Harold Jeffreys. X—outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 236(767):333–380, 1937.
- [20] Alvin C Rencher and G Bruce Schaalje. *Linear models in statistics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [21] Norman Levinson. The wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction. *Journal of Mathematics and Physics*, 25(1-4):261–278, 1946.
- [22] A. Khosravi, S. Nahavandi, D. Creighton, and A. F. Atiya. Lower upper bound estimation method for construction of neural network-based prediction intervals. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(3):337–346, March 2011.
- [23] A. Khosravi, S. Nahavandi, D. Creighton, and A. F. Atiya. Comprehensive review of neural network-based prediction intervals and new advances. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 22(9):1341–1356, Sept 2011.
- [24] James C. Bezdek, Robert Ehrlich, and William Full. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, 10(2):191 – 203, 1984.
- [25] M. Sugeno and T. Yasukawa. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(1):7–, Feb 1993.
- [26] D. Sáez, F. Ávila, D. Olivares, C. Cañizares, and L. Marín. Fuzzy prediction interval

- models for forecasting renewable resources and loads in microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 6(2):548–556, March 2015.
- [27] D.Q. Mayne, M.M. Seron, and S.V. Raković. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 41(2):219 – 224, 2005.
- [28] Franco Blanchini and Stefano Miani. *Set-theoretic methods in control*. Springer, 2008.
- [29] J McQuade. A system approach to high performance buildings. *United Technologies Corporation, Tech. Rep*, 2009.
- [30] Y. Ma, G. Anderson, and F. Borrelli. A distributed predictive control approach to building temperature regulation. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 2089–2094, June 2011.
- [31] Y. Ma, A. Kelman, A. Daly, and F. Borrelli. Predictive control for energy efficient buildings with thermal storage: Modeling, stimulation, and experiments. *IEEE Control Systems*, 32(1):44–64, Feb 2012.
- [32] Y. Ma, J. Matuško, and F. Borrelli. Stochastic model predictive control for building hvac systems: Complexity and conservatism. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1):101–116, Jan 2015.
- [33] F. Oldewurtel, A. Parisio, C. N. Jones, D. Gyalistras, M. Gwerder, V. Stauch, B. Lehmann, and M. Morari. Use of model predictive control and weather forecasts for energy efficient building climate control. *Energy and Buildings*, 45:15 – 27, 2012.
- [34] F. Oldewurtel, C. N. Jones, A. Parisio, and M. Morari. Stochastic model predictive control for building climate control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(3):1198–1205, May 2014.
- [35] A. Parisio, M. Molinari, D. Varagnolo, and K. H. Johansson. A scenario-based predictive control approach to building hvac management systems. In *2013 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pages 428–435, Aug 2013.
- [36] David Sturzenegger, Dimitrios Gyalistras, Markus Gwerder, Carina Sagerschnig, Manfred Morari, and Roy S Smith. Model predictive control of a swiss office building. In *Clima-rheva world congress*, pages 3227–3236, 2013.
- [37] D. Sturzenegger, D. Gyalistras, M. Morari, and R. S. Smith. Model predictive climate control of a swiss office building: Implementation, results, and cost–benefit analysis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(1):1–12, Jan 2016.
- [38] D Gyalistras and M Gwerder. Use of weather and occupancy forecasts for optimal building climate control. *Terrestrial Systems Ecology ETH Zurich R&D HVAC Products, Building Technologies Division, Siemens Switzerland Ltd, Zug, Switzerland*, 2010.
- [39] Anthony Kelman and Francesco Borrelli. Bilinear model predictive control of a hvac

system using sequential quadratic programming. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):9869–9874, 2011.

- [40] Mehdi Maasoumy Haghghi. Modeling and optimal control algorithm design for hvac systems in energy efficient buildings. Master’s thesis, EECS Department, University of California, Berkeley, Feb 2011.
- [41] Mehdi Maasoumy and Alberto Sangiovanni-Vincentelli. Optimal control of building hvac systems in the presence of imperfect predictions. In *ASME 2012 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference joint with the JSME 2012 11th Motion and Vibration Conference*, pages 257–266. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [42] Reclamation Managing Water in the West. *Design Guide for Heating, Ventilating, and Air Conditioning Systems*. U.S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation, Denver, Colorado, September 2006.
- [43] Raúl Adolfo Morales Caro. Planificación de micro-redes para comunidades rurales con caracterización de incertidumbre de los recursos renovables y demanda eléctrica. Tesis de magister, Universidad de Chile, 2017.
- [44] Chuang Wang, Da Yan, and Yi Jiang. A novel approach for building occupancy simulation. *Building Simulation*, 4(2):149–167, Jun 2011.
- [45] Stefano Schiavon and Arsen K. Melikov. Energy-saving strategies with personalized ventilation in cold climates. *Energy and Buildings*, 41(5):543 – 550, 2009.