



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

IDENTIFICACION EXPERIMENTAL DE DAÑO EN ESTRUCTURAS A TRAVÉS DEL  
PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA E INFORMACIÓN MUTUA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN  
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN INGENIERÍA SÍSMICA

PASTOR VILLALPANDO PARY

**PROFESOR GUÍA:**  
RUBÉN BOROSCHEK KRAUSKOPF

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:**  
VIVIANA MERUANE NARANJO  
MARCOS ORCHARD CONCHA

SANTIAGO DE CHILE  
2019

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE:** Magíster en Ciencias de la Ingeniería,  
mención Ingeniería Sísmica  
**POR:** Pastor Villalpando Pary  
**FECHA:** 21/06/2019  
**PROFESOR GUÍA:** Rubén Boroschek Krauskopf

## **IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE DAÑO EN ESTRUCTURAS A TRAVÉS DEL PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA E INFORMACIÓN MUTUA**

En este trabajo se presentan los resultados experimentales de la detección, aislación e identificación de daño controlado aplicado a una estructura de seis niveles, excitada con una mesa vibradora de movimiento horizontal. El daño se materializa a través de la reducción secuencial de la sección transversal de una columna (Daño Leve) y posterior reducción de todas las columnas de un nivel (Daño Severo). Se incorporan dos anomalías al sistema, la primera por aumento de masa y la segunda por un gradiente ascendente de temperatura.

Las propiedades modales de la estructura son determinadas a partir de modelos de espacio estado. Los resultados de esta metodología permiten observar el efecto de daño en la estructura, así como las perturbaciones debido al cambio de masa. Un modelo numérico de la estructura es realizado para comparar los resultados, la variación entre resultados experimentales y numéricos es inferior al 3%, para todos los modos observados.

Para lograr el objetivo de detectar, aislar e identificar daño en la estructura, se emplea el principio de Máxima Entropía que utiliza una base de datos generada del modelo numérico utilizando la combinación de valores de frecuencias y formas modales. La ventaja de este método es que no requiere de un entrenamiento para la obtención de resultados. La segunda metodología considera la utilización y procesamiento de imágenes obtenidas del escalograma de Transformadas Wavelet continuas, que son trabajadas a partir del principio de Información y Entropía, los resultados obtenidos son comparados entre sensores sensibles al daño para observar la formación de clúster y realizar la detección e identificación de daño, a partir de redes neuronales.

Los resultados experimentales muestran que es posible detectar, aislar e identificar daño con el principio de Máxima Entropía; *la detección*, se realiza de forma adecuada para las condiciones normales, las condiciones de Anomalía por Masa sólo son detectables para los casos de Daño Severo; *la localización*, se asigna adecuadamente al nivel donde se realiza la reducción de la sección transversal; *la estimación de la magnitud*, tiene variaciones en su cuantificación, que mejoran cuando el daño se aplica a todas las columnas del nivel. El método de detección e identificación de daño con Información Mutua y Entropía, realiza la detección a partir de una condición Pseudo-Normal (Normal más Daño Leve) y una condición con Daño (Daño Severo), para las evaluaciones realizadas; la cuantificación de la magnitud del daño es adecuada sólo en las condiciones de Daño Severo.

Una metodología para la detección de cambio de estado, en línea, es aplicada a partir de la potencia de la distribución e inferencia bayesiana. Los resultados son probados en una señal artificial y validados en las mediciones de la Torre Central de la Facultad de Ingeniería, antes y después del sismo del 27 de febrero de 2010.



# Dedicatoria

*Dedico este trabajo de tesis a mi mamá quien me apoyo y confió en mi en todo momento. Gracias mami Marfa porque siempre estuviste presente, en los momentos más felices y difíciles, y a pesar de la distancia tu voz y tus oraciones me ayudaba a seguir a delante.*

*Quiero dedicar también este trabajo a mi esposa Maria José y mi hija María Clara; sin su amor, compañía y paciencia nada de esto sería posible, Ustedes son una Bendición para mi.*

# Agradecimientos

Al terminar esta tesis terminé un sueño que empezó hace muchos años, en todo este tiempo además de aprender de un área fascinante de la Ingeniería Civil, tuve la oportunidad de conocer a personas increíbles con las que compartí y pasé grandes momentos.

En primer lugar quiero agradecer la confianza y apoyo del profesor Rubén Boroschek, por toda su entrega de conocimiento para la realización de este trabajo de titulación, dentro y fuera de Universidad. Le agradezco también la oportunidad de haberme ofrecido un puesto de trabajo que me permitió poner en práctica lo que aprendí y formar parte de un equipo de trabajo excelente. Agradezco también a la profesora Viviana Meruane, por todo el apoyo y la amistad brindada desde el primer día que me recibió en su oficina; por su guía teórica y bibliográfica; y por por todos los consejos recibidos durante la realización de los ensayos en laboratorio. Agradezco al profesor Marcos Orchard, por la oportunidad que me permitió ser alumno suyo y observar, desde el aula, que es un gran profesor que transmite a sus alumnos la motivación y el gusto por su especialidad. Le agradezco infinitamente su disponibilidad a recibirme con el mayor agrado, a pesar de su poco tiempo; por sus constantes preguntas técnicas, su interés en mi tema de tesis y su constante guía.

Los ensayos experimentales en laboratorio no pudieron haber sido posibles sin el apoyo y supervisión de Don Pedro Soto, quien tuvo la paciencia de realizar cada uno de los ensayos en la mesa vibradora. También debo mencionar y agradecer la labor realizada por Omar, Mario y Víctor; con quienes coordinaba todos los detalles y por menores previos al ensayo.

Un especial agradecimiento a mi hermana Patricia por todo su apoyo y amor. También quiero agradecer a mi familia adoptiva en Chile; a Roxana, Ernesto y sus hijos Juan Andrés y Joaquín, muchas gracias por tratarme como un hijo y un hermano más; y hacerme sentir como en casa en todo momento.

Esta sección de agradecimientos no estaría completa sin mencionar el apoyo invaluable de los amigos que conocí durante y después del magister. A Claudia F. por su amistad y empatía desde el primer día de clases; a Fernando E. por ser el mejor compañero de estudio y una gran guía en la elección de los ramos más entretenidos y desafiantes que tuve durante el Magister; y Benjamin I. por las conversaciones que mantienen el interés y conocimiento de nuestra disciplina. A Carlos P., Ricardo B. y Felipe M., por ser un ejemplo de conocimiento y, una gran motivación para seguir aprendiendo y poner en práctica la teoría. Finalmente agradezco al Ary, Pamela, Emilio y David; con quienes además de compartir un trabajo fascinante, mantuvimos agradables conversaciones siempre acompañados de un buen café.

# Tabla de Contenido

<b>1. ESTADO DEL ARTE</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.1.1. Desarrollo Histórico . . . . .	2
1.1.2. Monitoreo de Salud Estructural . . . . .	3
1.1.3. Axiomas de SHM . . . . .	5
1.2. Motivación . . . . .	6
1.3. Objetivo General . . . . .	7
1.4. Objetivos Específicos . . . . .	7
1.5. Hipótesis del Trabajo . . . . .	8
1.6. Organización y Alcances . . . . .	8
<b>2. IDENTIFICACION DE PROPIEDADES MODALES CON ESPACIO ESTADO</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. Modelo Espacio Estado . . . . .	11
2.3. Eigenvalue Realization Algorithm - ERA . . . . .	15
2.4. Multivariable Output Error Space (MOESP) . . . . .	18
2.5. Modelo de Espacio Estado Estocástico . . . . .	21
2.5.1. Espacio Espacio Estocástico – Referencia Basada en Manejo de Covarianzas (SSI-COV) . . . . .	24
2.6. Fast Multi-Order (FMO) . . . . .	25
2.6.1. FMO Aplicado en ERA . . . . .	26
2.6.2. FMO Aplicado en MOESP . . . . .	27
2.6.3. FMO Aplicado en SSICOV . . . . .	28
2.7. Diagrama de Estabilización . . . . .	29
2.7.1. Criterio Fuerte de Selección . . . . .	30
2.7.2. División del Diagrama de Estabilización en Histograma . . . . .	30
2.7.3. Polos Estables en Frecuencia, Amortiguamiento y Criterio Modal de Certeza (MAC) . . . . .	31
2.7.4. Colinealidad de Fase Modal (MPC) . . . . .	32
2.7.5. Polos Estables y Valor Representativo . . . . .	33
2.7.6. Promedio Normalizado de la Densidad Espectral de Potencia (ANPSD) . . . . .	33
<b>3. IDENTIFICACIÓN DE DAÑO POR INTERPOLACIÓN LINEAL UTILIZANDO PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35

3.1.1.	Detección y Localización de Daño Basado en Modelos . . . . .	35
3.1.2.	Enseñanza Supervisada . . . . .	37
3.1.3.	Vecinos Próximos . . . . .	38
3.1.4.	Interpolación Lineal . . . . .	39
3.2.	Aproximación Lineal con Máxima Entropía . . . . .	39
<b>4.</b>	<b>IDENTIFICACIÓN DE DAÑO CON INFORMACIÓN MUTUA, BASADO EN IMÁGENES WAVELET</b>	<b>44</b>
4.1.	Introducción . . . . .	44
4.2.	Correspondencia de Imágenes . . . . .	45
4.3.	Transformadas Wavelet . . . . .	46
4.3.1.	Transformadas Wavelet Continua . . . . .	46
4.4.	Entropía, Entropía Relativa e Información e Información Mutua . . . . .	50
4.4.1.	Entropía . . . . .	50
4.4.2.	Entropía Conjunta y Entropía Condicional . . . . .	51
4.4.3.	Entropía Relativa . . . . .	52
4.4.4.	Información Mutua . . . . .	52
4.4.5.	Información Mutua Normalizada y Coeficiente de Correlación de Entropía . . . . .	53
4.5.	Redes Neuronales Artificiales . . . . .	54
4.5.1.	Funciones de Activación . . . . .	58
4.5.2.	Algoritmo de Levenberg-Marquardt . . . . .	59
4.5.3.	Problemas y Deficiencias de Implementación . . . . .	61
4.6.	SOM - Self Organization Map . . . . .	62
4.6.1.	Algoritmo SOM . . . . .	64
4.7.	Metodología de Detección de Daño . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>APLICACIÓN EXPERIMENTAL EN LABORATORIO</b>	<b>67</b>
5.1.	Introducción . . . . .	67
5.2.	Descripción de la Estructura . . . . .	68
5.3.	Determinación Numérica de Parámetros Modales . . . . .	70
5.4.	Determinación Experimental de Propiedades Modales para la Estructura . . . . .	73
5.4.1.	Condición de Anomalía . . . . .	73
5.4.2.	Características de Ensayos Dinámicos . . . . .	74
5.4.3.	Instrumentación de la Estructura . . . . .	75
5.4.4.	Ensayos Experimentales . . . . .	77
5.5.	Aplicación de Daño Controlado en la Estructura y Determinación de Propiedades Modales . . . . .	88
5.6.	Identificación de Daño con Entropía Relativa . . . . .	97
5.6.1.	Construcción de la Base de Datos . . . . .	97
5.6.2.	Magnitud de Daño Asignado al Elemento . . . . .	99
5.6.3.	Análisis de Sensibilidad . . . . .	100
5.6.4.	Resultados Experimentales . . . . .	102
5.7.	Detección y Cuantificación de Daño con Información Mutua . . . . .	115
5.7.1.	Procesamiento de Imágenes con Transformadas Wavelet Continuas . . . . .	115
5.7.2.	Caracterización de Imágenes con Entropía e Información Mutua . . . . .	119
5.7.3.	Entrenamiento de la Red Neuronal SOM, para Detección de Daño . . . . .	131

5.7.4.	Entrenamiento de la Red Neuronal FeedFoward para Cuantificación de Daño	133
<b>6.</b>	<b>DETECCIÓN DE CAMBIO</b>	<b>139</b>
6.1.	Introducción . . . . .	139
6.2.	Test de Hipótesis . . . . .	139
6.2.1.	Nivel de Significancia . . . . .	140
6.2.2.	Tipos de Error y Potencia del Test . . . . .	140
6.2.3.	Teorema de Neyman Pearson . . . . .	142
6.2.4.	Test de Uno y Dos Lados . . . . .	142
6.2.5.	Detección de Cambio . . . . .	144
6.3.	Inferencia Bayesiana . . . . .	146
6.3.1.	Proceso Gaussiano de Generación de Datos . . . . .	147
6.4.	Evaluación de Normalidad . . . . .	148
6.4.1.	Histograma . . . . .	149
6.4.2.	Representación Q-Q . . . . .	151
6.4.3.	Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	152
6.5.	Procedimiento del Algoritmo para Detección de Cambio . . . . .	153
6.6.	Aplicación . . . . .	154
6.6.1.	Señal Senosoidal . . . . .	154
6.6.2.	Mediciones en Torre Central FCFM . . . . .	158
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>174</b>
7.1.	Conclusiones y Recomendaciones . . . . .	174
7.2.	Limitaciones . . . . .	179
7.3.	Líneas Futuras de Investigación . . . . .	180
<b>A.</b>	<b>TERMINOLOGÍA</b>	<b>189</b>
A.1.	Estado y Señales . . . . .	189
A.2.	Funciones . . . . .	189
<b>B.</b>	<b>ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN CON FAST MULTI-ORDER</b>	<b>191</b>
B.1.	FMO para ERA . . . . .	191
B.1.1.	Desarrollo de Formulación . . . . .	191
B.1.2.	Algoritmo FMO-ERA . . . . .	192
B.2.	FMO para MOESP . . . . .	192
B.2.1.	Desarrollo de Formulación . . . . .	192
B.2.2.	Algoritmo FMO-MOESP . . . . .	193
B.3.	FMO para SSICOV . . . . .	194
B.3.1.	Desarrollo de Formulación . . . . .	194
B.3.2.	Algoritmo FMO-SSICOV . . . . .	195
<b>C.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN</b>	<b>196</b>
C.1.	Introducción . . . . .	196
C.1.1.	Descripción de la Estructura . . . . .	196
C.1.2.	Proceso de Identificación de Parámetros Modales . . . . .	200

<b>D. MODELO ANALÍTICO PARA DETECCIÓN DE DAÑO POR MÁXIMA ENTROPÍA</b>	<b>216</b>
D.1. Introducción . . . . .	216
D.1.1. Descripción de la Estructura . . . . .	217
D.1.2. Proceso de Identificación de Parámetros Modales . . . . .	218
D.2. Identificación de Daño . . . . .	222
<b>E. ENTRENAMIENTO REDES NEURONALES SOM</b>	<b>226</b>
E.1. Calibración de Datos con Redes Neuronales Auto-Organizadas . . . . .	226
E.1.1. Resultado de Entrenamiento Red 1 . . . . .	227
E.1.2. Resultado de Entrenamiento Red 2 . . . . .	227
E.1.3. Resultado de Entrenamiento Red 3 . . . . .	227
E.1.4. Resultado de Entrenamiento Red 4 . . . . .	228
E.1.5. Resultado de Entrenamiento Red 5 . . . . .	228
E.1.6. Resultado de Entrenamiento Red 6 . . . . .	229
E.1.7. Resultado de Entrenamiento Red 7 . . . . .	229
E.2. Análisis de sensibilidad 2 . . . . .	230
E.2.1. Resultado de Entrenamiento Red 2 . . . . .	230
<b>F. ENTRENAMIENTO REDES NEURONALES FEEDFORWARD</b>	<b>231</b>
F.1. Calibración de Datos con Redes Neuronales Levenberg-Marquardt . . . . .	231
F.2. Análisis de Sensibilidad 1 . . . . .	232
F.2.1. Resultado de Entrenamiento Red 1 . . . . .	232
F.2.2. Resultado de Entrenamiento Red 2 . . . . .	233
F.2.3. Resultado de Entrenamiento Red 3 . . . . .	233
F.2.4. Resultado de Entrenamiento Red 4 . . . . .	234
F.2.5. Resultado de Entrenamiento Red 5 . . . . .	234
F.2.6. Resultado de Entrenamiento Red 6 . . . . .	235
F.2.7. Resultado de Entrenamiento Red 7 . . . . .	235
F.3. Análisis de Sensibilidad 2 . . . . .	236
F.3.1. Resultado de Entrenamiento Red 2 . . . . .	236
F.4. Análisis de Sensibilidad 3 . . . . .	237
F.4.1. Resultado de Entrenamiento Red 2 . . . . .	237
F.5. Cantidad de Datos para Entrenamiento . . . . .	237
F.5.1. Variación Porcentual 1 . . . . .	238
F.5.2. Variación Porcentual 2 . . . . .	238
<b>G. Análisis ROC</b>	<b>239</b>
G.1. Introducción . . . . .	239
G.2. Clasificador de rendimiento . . . . .	239
G.3. Curvas en espacio ROC . . . . .	241
G.4. Área bajo la curva ROC (AUC) . . . . .	241
G.5. Curva ROC aplicados a detección de cambio en Torre Central FCFM . . . . .	241

# Índice de tablas

4.1. <i>Propiedades de Información Mutua</i> . . . . .	54
5.1. <i>Propiedades Mecánicas de Acero Estructural</i> . . . . .	69
5.2. <i>Peso de los Niveles de la Estructura</i> . . . . .	69
5.3. <i>Modos Numéricos de la Estructura (SAP2000)</i> . . . . .	71
5.4. <i>Comparación de Frecuencias modales de la Estructura</i> . . . . .	72
5.5. <i>Propiedades de Acelerómetros Uniaxiales</i> . . . . .	76
5.6. <i>Registros Ensayados en la Estructura</i> . . . . .	77
5.7. <i>Registros Ensayados con Ruido Coloreado en Estructura</i> . . . . .	77
5.8. <i>Secuencia de Ensayos en Condición Normal de la Estructura</i> . . . . .	78
5.9. <i>Estadísticas de Frecuencias Identificadas</i> . . . . .	79
5.10. <i>Estadísticas de Amortiguamientos Identificados</i> . . . . .	80
5.11. <i>Frecuencias Experimentales de la Estructura para Condición Normal</i> . . . . .	86
5.12. <i>Frecuencias Experimentales y Numéricas de la Estructura, Condición Normal</i> . . . . .	87
5.13. <i>Amortiguamientos Experimentales de la Estructura, Condición Normal</i> . . . . .	87
5.14. <i>Ensayos Realizados</i> . . . . .	90
5.15. <i>Rigidez Flexional en Columna por Reducción de Sección Transversal en los Extremos</i> . . . . .	99
5.16. <i>Rigidez por Nivel Debido a la Asignación de Daño</i> . . . . .	100
5.17. <i>Análisis de Sensibilidad de la Norma Promedio en función del número de Vecinos Próximos</i> . . . . .	100
5.18. <i>Cantidad de Vecinos que Aportan la Solución en Base a la Vecindad Definida</i> . . . . .	101
5.19. <i>Aproximación en la Identificación de Daño en la Estructura</i> . . . . .	101
5.20. <i>Secuencia de Ensayos Considerados en el Análisis</i> . . . . .	119
5.21. <i>Sensibilidad de Sensores a la Condición de Daño</i> . . . . .	131
5.22. <i>Redes Neuronales Entrenadas para la Evaluación de Datos</i> . . . . .	132
5.23. <i>Redes Neuronales SOM Entrenadas para la Evaluación de Datos</i> . . . . .	135
6.1. <i>Casos de Elección Test de Hipotesis</i> . . . . .	141
C.1. <i>Pesos y Alturas del Modelo Numérico</i> . . . . .	197
C.2. <i>Propiedades Mecánicas del Acero para el Modelo Numérico</i> . . . . .	198
C.3. <i>Parámetros Modales Obtenidos de Prodemiendo Numérico</i> . . . . .	199
C.4. <i>Frecuencia de Modelo Teórico e Identificadas</i> . . . . .	212
C.5. <i>Amortiguamiento del Modelo Teórico e Identificadas</i> . . . . .	213
C.6. <i>Valores MAC de Formas Modales</i> . . . . .	213

E.1.	<i>Redes Neuronales entrenadas para la Evaluación de Datos . . . . .</i>	226
F.1.	<i>Redes Neuronales SOM Entrenadas para la Evaluación de Datos . . . . .</i>	231
F.2.	<i>Análisis de Sensibilidad 1, a la Condición de Daño . . . . .</i>	232
F.3.	<i>Análisis de Sensibilidad 2, a la Condición de Daño . . . . .</i>	236
F.4.	<i>Análisis de Sensibilidad 3, a la Condición de Daño . . . . .</i>	237
F.5.	<i>Análisis de Sensibilidad con Variacion de Porcentajes de Datos . . . . .</i>	238



# Índice de figuras

3.1. <i>Esquema de la Distribución de Esfuerzos de una Barra en las Primeras Tres Formas Modales.</i> . . . . .	36
4.1. <i>Análisis Wavelet de una Señal</i> . . . . .	47
4.2. <i>Ejemplos de Algunas Ondículas Madre</i> . . . . .	49
4.3. <i>Relaciones entre Entropía e Información Mutua</i> . . . . .	53
4.4. <i>Red Neuronal de Capa Simple</i> . . . . .	56
4.5. <i>Red Neuronal Multicapa</i> . . . . .	56
4.6. <i>Red Neuronal con Sesgo</i> . . . . .	57
4.7. <i>Funciones de Activación</i> . . . . .	59
4.8. <i>Mapa Auto-Organizado de Kohonen</i> . . . . .	63
4.9. <i>Matriz Bidimensional de Unidades Clústers</i> . . . . .	63
5.1. <i>Estructura Utilizada en Tesis de Luis Rozas [Rozas and Boroschek, 2009]</i> . . . . .	67
5.2. <i>Características de la Estructura de Ensayo</i> . . . . .	68
5.3. <i>Montaje de la Estructura Cambiando Columnas de Perfiles de Aluminio a Perfiles de Acero</i> . . . . .	70
5.4. <i>Formas Modales del Modelo Numérico</i> . . . . .	71
5.5. <i>Matriz MAC de Formas Modales del Numérico y Experimental</i> . . . . .	72
5.6. <i>Aplicación de Anomalías en la Estructura</i> . . . . .	73
5.7. <i>Vista General de la Estructura Ensayada en Laboratorio</i> . . . . .	75
5.8. <i>Instalación de Sensores de Temperatura en Columna Metálica</i> . . . . .	76
5.9. <i>Frecuencias Identificadas para la Condición Normal</i> . . . . .	78
5.10. <i>Razones de Amortiguamiento para la Condición Normal</i> . . . . .	79
5.11. <i>Frecuencias Identificadas por Modos para la Condición Normal</i> . . . . .	82
5.12. <i>Amortiguamientos Identificados por Modos para la Condición Normal</i> . . . . .	83
5.13. <i>Formas Modales Identificadas por Modos para la Condición Normal</i> . . . . .	84
5.14. <i>Variación de Valores MAC para Formas Modales en Condición Normal</i> . . . . .	85
5.15. <i>Comparación de Formas Modales Numérica y Experimental</i> . . . . .	88
5.16. <i>Reducción de la Rigidez en Columna</i> . . . . .	89
5.17. <i>Frecuencias Modales para las Condiciones de Ensayo</i> . . . . .	91
5.18. <i>Razones de Amortiguamiento para las Condiciones de Ensayo</i> . . . . .	91
5.19. <i>Frecuencias Modales para las Condiciones con Daño</i> . . . . .	93
5.20. <i>Razones de Amortiguamiento para las Condiciones con Daño</i> . . . . .	94
5.21. <i>Formas Modales para las Condiciones con Daño</i> . . . . .	95

5.22. Variación de Valores MAC para Formas Modales para las Condiciones con Daño . . .	96
5.23. Modelamiento de Elemento Columna de Estructura con Asignación de Daño . . . . .	99
5.24. Configuración Adicional de Sensores en la Estructura . . . . .	102
5.25. Identificación de Frecuencias. Configuración 2 . . . . .	103
5.26. Identificación de Razones de Amortiguamiento. Configuración 2 . . . . .	104
5.27. Identificación de Formas Modales. Configuración 2 . . . . .	105
5.28. Variación de valores MAC para Formas Modales. Configuración 2 . . . . .	106
5.29. Identificación de Frecuencias. Configuración 3 . . . . .	107
5.30. Identificación de Razones de Amortiguamiento. Configuración 3 . . . . .	108
5.31. Identificación de Formas Modales. Configuración 3 . . . . .	109
5.32. Variación de Valores MAC para Formas Modales. Configuración 3 . . . . .	110
5.33. Evaluación de Daño con Máxima Entropía . . . . .	111
5.34. Configuración 1. (8 Sensores) Identificación de Daño en la Estructura . . . . .	112
5.35. Configuración 2. (3 Sensores Localizados en Nivel 6) Identificación de Daño en la Estructura . . . . .	113
5.36. Configuración 3. (3 Sensores en Niveles 1, 2 y 3 en Dirección de Movimiento) Identificación de Daño en la Estructura . . . . .	114
5.37. Segmentado de Registro en Ventanas . . . . .	116
5.38. Escalograma de la Ventana Seleccionada . . . . .	117
5.39. Escalograma en Escala de Grises de 8 Bits . . . . .	118
5.40. Escalograma con Selección de los Mayores Rangos de Energía . . . . .	118
5.41. Escalograma con Rangos Complementarios de Energía . . . . .	119
5.42. Resultado de Entropía e Información Mutua para Registro Normal, Daño Leve (Reducción 20 % - RE20), Daño Leve (Reducción 35 % - RE35) y Daño Severo (Reducción 50 % - RT50). La Imagen de Referencia y de Prueba son Elegidos de Manera Aleatoria . . . . .	120
5.43. Entropía e Información Mutua. Condición Normal y Reducción Leve 20 % . . . . .	121
5.44. Entropía $H_y$ . . . . .	123
5.45. Entropía Conjunta $H_{xy}$ . . . . .	124
5.46. Entropía Condicional $H_{x y}$ . . . . .	125
5.47. Entropía Condicional $H_{y x}$ . . . . .	126
5.48. Información Mutua $MI_{xy}$ . . . . .	127
5.49. Información Mutua Normalizada $MIN_{xy}$ . . . . .	128
5.50. Evaluación de Sensores en Entropía Condicional $H_{y x}$ . . . . .	130
5.51. Clasificación de Daño en la Estructura . . . . .	132
5.52. Clasificación de Daño a Partir de la Observación de Entropía $H_{y x}$ en Sensores: 3, 7, 8 . . . . .	133
5.53. Asignación de Daño, con Resultados del Entrenamiento de la Red Neuronal 2 . . . . .	137
6.1. Evaluación del Estadístico de Prueba . . . . .	140
6.2. Errores Tipo I y Tipo II en Test de Hipótesis . . . . .	141
6.3. Test de un Sólo Lado . . . . .	142
6.4. Test de Dos Lados . . . . .	143
6.5. Potencia de Prueba de una Distribución . . . . .	144
6.6. Potencia de Prueba de una Distribución para $\hat{\mu}_0 = 1$ , $\hat{\sigma}_0 = 0,1$ , $s_1 = 0,1$ , y $\alpha = 5\%$ . . . . .	145
6.7. Inferencia Bayesiana . . . . .	147

6.8.	<i>Histograma de 500 Muestras de Distribución Normal Evaluando la Regla de Scott y la Regla de Freedman y Diaconis para Determinar el Ancho del Bin . . . . .</i>	150
6.9.	<i>Histograma de 500 muestras de Distribución Lognormal Evaluando la Regla de Scott y la Regla de Freedman y Diaconis para Determinar el Ancho del Bin . . . . .</i>	150
6.10.	<i>Representación Q-Q para 50 Muestras Aleatorias de Distribución a) Normal b) Exponencial c) Uniforme y d) Gaussiana Mixta . . . . .</i>	151
6.11.	<i>Definición del Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .</i>	152
6.12.	<i>Análisis de la Señal en Condición Normal, Previo al Cambio . . . . .</i>	155
6.13.	<i>Señal con Cambio de Estado . . . . .</i>	156
6.14.	<i>Detección de Cambio para Funcion Senosoidal con Aplicación de Ruido <math>s = 0,010</math> . . . . .</i>	157
6.15.	<i>Curva ROC para Detección de Cambio observada considerando <math>N_{Obs} = 20</math> . . . . .</i>	158
6.16.	<i>Cambio de Estado Observado en Torre Central . . . . .</i>	159
6.17.	<i>Evaluación de Normalidad de la Primera Frecuencia Observada . . . . .</i>	160
6.18.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 3 Observaciones . . . . .</i>	162
6.19.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 5 Observaciones . . . . .</i>	162
6.20.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 10 Observaciones . . . . .</i>	163
6.21.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 15 Observaciones . . . . .</i>	163
6.22.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 20 Observaciones . . . . .</i>	163
6.23.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 30 Observaciones . . . . .</i>	164
6.24.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 40 Observaciones . . . . .</i>	164
6.25.	<i>Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 50 Observaciones . . . . .</i>	164
6.26.	<i>Segunda Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 2.58 Hz y 2.71 Hz . . . . .</i>	165
6.27.	<i>Detección de Cambio para la Segunda Frecuencia . . . . .</i>	165
6.28.	<i>Tercera Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 2.93 Hz y 3.08 Hz . . . . .</i>	166
6.29.	<i>Detección de Cambio para la Tercera Frecuencia . . . . .</i>	166
6.30.	<i>Cuarta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 6.19 Hz y 6.52 Hz . . . . .</i>	167
6.31.	<i>Detección de Cambio para la Cuarta Frecuencia . . . . .</i>	167
6.32.	<i>Quinta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.30 Hz y 7.78 Hz . . . . .</i>	168
6.33.	<i>Detección de Cambio para la Quinta Frecuencia . . . . .</i>	168
6.34.	<i>Sexta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.78 Hz y 8.21 Hz . . . . .</i>	169
6.35.	<i>Detección de Cambio para la Sexta Frecuencia . . . . .</i>	169
6.36.	<i>Séptima Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.94 Hz y 8.39 Hz . . . . .</i>	170
6.37.	<i>Detección de Cambio para la Séptima Frecuencia . . . . .</i>	170
6.38.	<i>Octava Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 8.77 Hz y 9.19 Hz . . . . .</i>	171
6.39.	<i>Detección de Cambio para la Octava Frecuencia . . . . .</i>	171
6.40.	<i>Novena Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 9.09 Hz y 9.48 Hz . . . . .</i>	172
6.41.	<i>Detección de Cambio para la Novena Frecuencia . . . . .</i>	172
C.1.	<i>Modelo Numérico de la Estructura . . . . .</i>	197

C.2.	<i>Frecuencias, Amortiguamientos y Formas Modales de la Estructura Modelo</i>	199
C.3.	<i>Registros de Impacto e Identificación de Polos con ERA</i>	201
C.4.	<i>Registros de Acción Sísmica e Identificación de Polos con MOESP</i>	201
C.5.	<i>Registros de Ruido Actuante e Identificación de Polos con SSICOV</i>	202
C.6.	<i>Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación ERA</i>	202
C.7.	<i>Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación MOESP</i>	203
C.8.	<i>Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación SSICOV</i>	203
C.9.	<i>Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación ERA</i>	204
C.10.	<i>Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación MOESP</i>	204
C.11.	<i>Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación SSICOV</i>	205
C.12.	<i>Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación ERA</i>	205
C.13.	<i>Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación MOESP</i>	206
C.14.	<i>Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación SSICOV</i>	206
C.15.	<i>Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación ERA</i>	207
C.16.	<i>Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación MOESP</i>	207
C.17.	<i>Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación SSICOV</i>	208
C.18.	<i>Elección de Polo Estable Representativo, Identificación ERA</i>	208
C.19.	<i>Elección de Polo Estable Representativo, Identificación MOESP</i>	209
C.20.	<i>Elección de Polo Estable Representativo, Identificación SSICOV</i>	209
C.21.	<i>Promedio Normalizado de Densidad Espectral de Potencia</i>	210
C.22.	<i>Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación ERA</i>	211
C.23.	<i>Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación MOESP</i>	211
C.24.	<i>Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación SSICOV</i>	212
C.25.	<i>Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación ERA</i>	214
C.26.	<i>Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación MOESP</i>	214
C.27.	<i>Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación SSICOV</i>	215
D.1.	<i>Modelo de Estructura</i>	216
D.2.	<i>Frecuencias, Amortiguamientos y Formas Modales de la Estructura Modelo</i>	217
D.3.	<i>Registros de Impacto</i>	218
D.4.	<i>Registros de Acción Sísmica</i>	219
D.5.	<i>Registros de Ruido Coloreado</i>	219
D.6.	<i>Identificación de Frecuencias, Aplicando Daño en Elemento 2</i>	220
D.7.	<i>Identificación de Forma Modal, Aplicando Daño en Elemento 2</i>	220
D.8.	<i>Identificación de Frecuencia, Aplicando Daño en Elemento 4</i>	221
D.9.	<i>Identificación de Forma Modal, Aplicando Daño en Elemento 4</i>	221
D.10.	<i>Identificación de Daño para Nivel 2</i>	223
D.11.	<i>Identificación de Daño para Nivel 4</i>	224
D.12.	<i>Detección, Localización e Identificación de Daño para Nivel 2</i>	225
D.13.	<i>Detección, Localización e Identificación de Daño para Nivel 4</i>	225
E.1.	<i>Cuantificación de Daño. Red 1</i>	227
E.2.	<i>Cuantificación de Daño. Red 2</i>	227

E.3. <i>Cuantificación de Daño. Red 3</i>	228
E.4. <i>Cuantificación de Daño. Red 4</i>	228
E.5. <i>Cuantificación de Daño. Red 5</i>	229
E.6. <i>Cuantificación de Daño. Red 6</i>	229
E.7. <i>Cuantificación de Daño. Red 7</i>	230
E.8. <i>Cuantificación de Daño. Red 2</i>	230
F.1. <i>Cuantificación de Daño. Red 1</i>	232
F.2. <i>Cuantificación de Daño. Red 2</i>	233
F.3. <i>Cuantificación de Daño. Red 3</i>	233
F.4. <i>Cuantificación de Daño. Red 4</i>	234
F.5. <i>Cuantificación de Daño. Red 5</i>	234
F.6. <i>Cuantificación de Daño. Red 6</i>	235
F.7. <i>Cuantificación de Daño. Red 7</i>	235
F.8. <i>Cuantificación de Daño. Red 2</i>	236
F.9. <i>Cuantificación de Daño. Red 2</i>	237
F.10. <i>Cuantificación de Daño para Validación Porcentual 1</i>	238
F.11. <i>Cuantificación de Daño para Validación Porcentual 2</i>	238
G.1. <i>Matriz de confusión</i>	239
G.2. <i>Gráfica ROC Básica</i>	240
G.3. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 3</math></i>	242
G.4. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 5</math></i>	242
G.5. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	243
G.6. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 15</math></i>	243
G.7. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 20</math></i>	244
G.8. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 30</math></i>	244
G.9. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 40</math></i>	245
G.10. <i>Curva ROC para la Frecuencia 1, <math>N_{Obs} = 50</math></i>	245
G.11. <i>Curva ROC para la Frecuencia 2, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	246
G.12. <i>Curva ROC para la Frecuencia 3, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	246
G.13. <i>Curva ROC para la Frecuencia 4, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	247
G.14. <i>Curva ROC para la Frecuencia 5, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	247
G.15. <i>Curva ROC para la Frecuencia 6, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	248
G.16. <i>Curva ROC para la Frecuencia 7, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	248
G.17. <i>Curva ROC para la Frecuencia 8, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	249
G.18. <i>Curva ROC para la Frecuencia 9, <math>N_{Obs} = 10</math></i>	249

# Capítulo 1

## ESTADO DEL ARTE

### 1.1. Introducción

El interés en la capacidad de monitorear una estructura y detectar daño en una etapa temprana es generalizada entre las comunidades científicas y diversas áreas de la ingeniería como la: civil, mecánica y aeroespacial [Doebling et al., 1996, Farrar and Doebling, 1999]. Actualmente la mayoría de las evaluaciones en estructuras requieren de una inspección visual o métodos experimentales localizados, para detectar deficiencias como pérdidas de sección, detección de fisuras, deterioro estructural, entre otros [Alampalli et al., 1997]; en todos éstos casos, la calidad de la evaluación depende de la experiencia y conocimiento del personal técnico, y la observación directa en la vecindad del daño, conocida a priori y que sea fácilmente accesible [Doebling et al., 1998].

El movimiento de las estructuras es función de sus propiedades modales como: frecuencias predominantes, razones de amortiguamiento y formas modales; derivados de sus propiedades físicas (masa, rigidez y amortiguamiento), y esta situación, para condiciones normales no cambian o varían lentamente en el tiempo [Alampalli et al., 1997, Doebling et al., 1996, Basseville et al., 1993]. Por lo tanto, la premisa básica de la detección de daño basado en vibraciones es que el daño puede alterar las propiedades físicas de la estructura, lo que modifica la respuesta dinámica medida en el sistema [Farrar and Doebling, 1999], éste concepto ha sido utilizado como una herramienta para el diagnóstico de deterioro o daño, lo que involucra la obtención experimental de parámetros modales antes y después de las condiciones de observación y comparar estos parámetros para obtener un resultado práctico.

Aunque las bases para la detección de daño, utilizando vibraciones, parece intuitivo, su aplicación posee muchas complicaciones, las más importantes son:

- a) El daño es típicamente un fenómeno local y puede no influenciar significativamente la respuesta global de la estructura, los primeros modos tienen frecuencias bajas, y son generalmente medidos durante las vibraciones ambientales y operacionales [Farrar and Doebling, 1999].
- b) La dinámica de la estructura es afectada por la temperatura ambiente y otros efectos ambientales, un gradiente de temperatura afecta la rigidez globalmente, modificando los parámetros modales y, pequeños cambios de temperatura pueden ocultar algunos daños [Balmes et al., 2008].

- c) En muchas aplicaciones reales, las excitaciones sobre la estructura pueden ser muy ligeras, produciendo datos de baja calidad, debido a que algunos modos del sistema pueden no aparecer en la respuesta; éstos modos *débiles*, no han sido suficientemente excitados y por lo tanto cualquier cambio en la propiedad modal no puede ser detectado [Ashari and Mevel, 2013, Ashari and Mevel, 2010].
- d) Definir de manera adecuada los umbrales de cambio en la estructura, como un patrón estadístico, de manera que se generen alertas tempranas que son de interés crucial en orden de evitar catástrofes civiles o económicas [Basseville et al., 1993].

Los efectos de daño sobre una estructura pueden ser clasificados como *lineales y no lineales*, [Bandara et al., 2014, Doebling et al., 1996]: i) Una situación de daño lineal es definida como el caso cuando la estructura lineal elástica, permanece lineal elástica después del daño; el cambio en las propiedades modales son el resultado del cambio en la geometría y/o propiedades de los materiales de la estructura, pero la respuesta de la estructura puede ser modelada utilizando la ecuación de movimiento lineal. ii) Una situación de daño no lineal se define como el caso cuando la estructura lineal elástica se comporta de una manera no lineal después de que el daño ha sido introducido en la estructura, un ejemplo de daño no lineal es la formación de una fisura por fatiga que se abre y se cierra bajo condiciones normales de vibración operacional, o una serie de valores atípicos que ocurren cada vez que la fuerza transferida pasa a través del área defectuosa. Aunque la mayoría de las publicaciones e investigaciones sólo aborda el problema de la detección lineal de daño, un método de daño robusto debe ser aplicable para ambos casos de daño.

### 1.1.1. Desarrollo Histórico

Históricamente muchos de los desarrollos modernos en la detección de daño basado en vibraciones fue desarrollado en la década de 1970 y principios de 1980, en áreas de la ingeniería como la mecánica, aeroespacial y civil.

La industria del petróleo hizo esfuerzos considerables para la detección de daño basado en plataformas marinas (offshore), entre 1970 y 1980, [Farrar and Doebling, 1999, Doebling et al., 1998, Doebling et al., 1996]. Sin embargo, muchas de las técnicas propuestas tuvieron poco éxito, debido a problemas prácticos causados por: i) maquinaria ruidosa en la plataforma, ii) dificultades de instrumentación en ambientes hostiles, iii) cambios de masa debido a la influencia de la marea o la variación en el nivel del almacenamiento de fluidos, iv) incapacidad del movimiento ondulatorio para excitar altas frecuencias; produciendo cambios en las mediciones que no corresponden a daño o deterioro. Estos problemas impidieron la adaptación de esta tecnología y las investigaciones fueron abandonadas a mediados de 1980.

Las estructuras aeroespaciales empezaron a utilizar la detección de daño basado en vibraciones a finales de 1970 y principios de 1980, en conjunto con el desarrollo de transbordadores espaciales [Farrar and Doebling, 1999, Doebling et al., 1996]. El Sistema de Inspección Modal del Transbordador (SMIS por sus siglas en inglés) fue desarrollado para identificar daños por fatiga en componentes como: superficies de control, paneles de fuselaje y superficies de elevación; debido a que fueron cubiertas con un sistema de protección térmica que hacen poco prácticas la utilización de métodos convencionales de examen no destructivo local. Este sistema ha logrado localizar componentes dañados que están cubiertos por el sistema de protección térmica y su éxito ha impulsado el

desarrollo de métodos experimentales/analíticos de detección de daños [Farrar and Doebling, 1999]. Estos enfoques se basan en la correlación de modelos analíticos de la estructura no dañada con las propiedades modales medidas a partir de la estructura no dañada y dañada. Los cambios en los índices de rigidez evaluados a partir de las dos actualizaciones del modelo se utilizan para localizar y cuantificar el daño.

La comunidad de Ingeniería Civil ha estudiado la evaluación de daños basados en vibraciones en puentes, desde principios de la década de 1980 [Farrar and Doebling, 1999], el trabajo ha sido motivado por una gran cantidad de fallas catastróficas (debidas a fatigas, colisiones y terremotos) y como una alternativa a las inspecciones visuales, en las cuales el daño puede pasar desapercibido y llegar a niveles críticos entre intervalos de inspección [Doebling et al., 1996]. Las propiedades modales y cantidades derivadas de estas propiedades, han sido las características utilizadas para identificar el daño [Farrar and Doebling, 1999]. Los cambios de frecuencia han demostrado ser insuficientes en la detección de daño y su combinación con el cambio en la forma, de las formas modales son indicadores más sensibles y pueden ser más útiles para la detección de la ubicación del defecto [Doebling et al., 1996]. La variabilidad de condiciones ambientales y operacionales presenta desafíos significativos para la aplicación de monitoreo de puentes y otras estructuras.

### 1.1.2. Monitoreo de Salud Estructural

El término *Monitoreo de Salud Estructural* (SHM - Structural and Health Monitoring) generalmente se refiere al proceso de implementación de una estrategia de detección de daño para infraestructura de ingeniería aeroespacial, civil o mecánica. Éste proceso implica: i) la observación de una estructura o sistema mecánico a lo largo del tiempo utilizando mediciones de respuesta dinámica periódicamente espaciadas, ii) la extracción de características sensibles al daño de estas mediciones y iii) el análisis estadístico de estas características para determinar el estado actual del sistema [Farrar and Worden, 2012]. La información de este proceso es periódicamente actualizado con la finalidad de que la estructura continúe operativa y se controle su degradación debido al uso o desgaste por la edad o el paso del tiempo. El reconocimiento de patrones estadísticos para un sistema de monitoreo estructural puede ser definido a través de la integración de cuatro procesos que se describen a continuación [Farrar and Worden, 2012, Farrar and Doebling, 1999].

- a) **Evaluación Operacional.** Comienza por establecer las limitaciones del monitoreo y cómo se llevará a cabo, adaptando el proceso de detección de daños a características que son exclusivas del sistema que se está monitoreando y tratando de aprovechar las características del daño que se va a detectar. Este proceso trata de dar respuesta a cuatro preguntas sobre la aplicación del sistema de monitoreo y su utilización en la identificación de daños:
  - i. ¿Cuál es la justificación económica para llevar a cabo el monitoreo estructural?
  - ii. ¿Cómo se define el daño para el sistema investigado y en caso de múltiples daños cuáles son los casos más preocupantes?
  - iii. ¿Cuáles son las condiciones, operacionales y ambientales, en las que funciona el sistema a monitorear?
  - iv. ¿Cuáles son las limitaciones en la adquisición de datos en el entorno operativo?



- b) **Adquisición y Limpieza de Datos.** La *adquisición de datos*, consiste en seleccionar los métodos de excitación, los tipos de sensores, el número de sensores y sus ubicaciones; además del hardware de adquisición, almacenamiento y transmisión de datos. El intervalo de almacenamiento de datos, se considera a partir de los procesos de evaluación de la estructura. Para monitoreo de movimiento fuerte o severo (sismos), la recolección de datos se realiza en intervalos periódicos antes y después de un evento de gran magnitud. Si el crecimiento de la fisura "*por fatiga*" es el principal modo de falla, la recopilación de datos se realiza en intervalos de tiempo cortos una vez que se ha identificado una grieta crítica.

La capacidad de *normalizar los datos*<sup>1</sup> se vuelve muy importante para el proceso de detección de daños; debido a que los cambios en la respuesta medida causados por condiciones operacionales y ambientales pueden ocultar el daño o ser confundidos como un efecto de daño. Para realizar la normalización, generalmente se requieren mediciones adicionales que proporcionan información necesaria y, aunque no es posible eliminar todas las fuentes de variabilidad, es necesario realizar mediciones apropiadas de aquellas fuentes que puedan ser estadísticamente cuantificadas. Cuando la variabilidad ambiental u operacional es un problema, puede surgir la necesidad de normalizar los datos de manera permanente para facilitar la comparación de datos medidos entre dos estados de interés en la estructura.

La *limpieza de datos* es el proceso de elección "*selectiva*" de datos para aceptar o rechazar el proceso de selección de características; se basa generalmente en el conocimiento adquirido por los técnicos involucrados en el proceso adquisición y procesamiento de datos. Las técnicas de procesamiento de señales, tales como filtrado y remuestreo, también pueden considerarse como procedimientos de limpieza de datos.

La *compresión de datos* es el proceso de reducir la dimensión de los datos medidos. La implementación operacional de monitoreo genera grandes cantidades de datos y una condensación de datos es ventajosa y necesaria cuando se consideran comparaciones de muchos conjuntos de características obtenidas a lo largo de periodos prolongados, o la vida útil de la estructura; especialmente si se quiere mantener la sensibilidad a cambios estructurales de interés como la variabilidad operacional y/o ambiental.

La *fusión de datos* es el proceso de combinar información de múltiples fuentes con el objeto de mejorar el proceso de detección de daños; éste proceso combina datos de sensores distribuidos espacialmente (sincronizando marcas de tiempo), o combinando datos heterogéneos que incluyen medidas de respuesta cinemática (acelerómetros), con mediciones ambientales (temperatura, humedad) y parámetros operacionales para determinar más fácilmente si existe daño. La fusión de datos está relacionada con los procesos de normalización de datos, limpieza y compresión.

- c) **Extracción de características.** La parte del proceso de SHM que recibe mayor atención en la literatura técnica es la identificación y extracción de características de datos que permiten distinguir entre estados no dañados y dañados de la estructura de interés [Doebeling et al., 1996]. Una característica ideal que sea sensible al daño, es una cantidad, de baja dimensión, extraída de los datos medidos, de la respuesta del sistema, que indica la presencia (o no) de daño en una estructura. Generalmente, se requiere del procesamiento de la señal para extraer características efectivas, que implica operaciones matemáticas o transformaciones y el uso de un

<sup>1</sup>Se conoce como *Normalización de Datos en SHM*, al proceso de separar los cambios en la respuesta del sistema, causada por una variabilidad operacional o ambiental, de los cambios causados por el daño.

juicio de ingeniería a priori. Otra fuente útil de características de diagnóstico es construir un modelo paramétrico basado en datos del sistema o estructura; estos modelos o sus errores asociados, se convierten en las características sensibles al daño. Los procesos del ítem b) son utilizados, de manera individual o combinada, para separar cambios en la respuesta medida, causada por condiciones operacionales y/o ambientales, de los cambios causados por el daño.

- d) **Modelado estadístico para discriminar características.** Durante más de treinta años, el proceso de SHM que ha recibido poca atención en el desarrollo de modelos estadísticos para discriminar características de estructuras no dañadas y dañadas. La implementación de algoritmos de aprendizaje automático han tomado gran relevancia, se dividen en dos categorías: i) *Algoritmos de aprendizaje supervisados*, cuando los datos de entrenamiento están disponibles tanto en la estructura no dañada como dañada; y ii) *Algoritmos de aprendizaje no supervisados*, cuando sólo los datos de la estructura están disponibles.

El estado de daño de un sistema puede llegar a través de un proceso de cinco pasos organizado en la línea de la jerarquía planteada inicialmente en [Rytter, 1993]. Este proceso intenta responder a las siguientes preguntas:

- i) ¿Hay daño en el sistema? (detección)
- ii) ¿Dónde está el daño en el sistema? (aislación)
- iii) ¿Qué tipo de daño está presente? (tipo)
- iv) ¿Qué tan severo es el daño? (identificación)
- v) ¿Cuánta vida útil (segura) permanece? (estimación)

Las respuestas a estas preguntas en el orden presentado representan un conocimiento creciente del estado del daño en la estructura. Cuando se aplica el aprendizaje no supervisado, sólo utilizando datos experimentales, los modelos estadísticos pueden usarse típicamente para responder preguntas relacionadas con la existencia del daño y bajo ciertas circunstancias con la ubicación éste. Cuando se aplican un aprendizaje supervisado en conjunto con modelos analíticos, los procedimientos estadísticos pueden utilizarse, para determinar la existencia de daño, además de la ubicación y cuantificación de éste en la estructura. Los modelos estadísticos se construyen de tal manera que minimicen las falsas indicaciones o alertas. Éstas se dividen en dos categorías: i) *falso positivo*, cuando se informa de daño y no existe ningún daño en la estructura y ii) *falso negativo*, cuando no se informa de daño y el daño está presente en la estructura. Los falsos negativos son muy perjudiciales en la detección de daños y puede tener serias consecuencias en la seguridad de sus ocupantes y la continuidad de operaciones; mientras que los falsos positivos, erosionan la confianza en el proceso de detección de daños.

### 1.1.3. Axiomas de SHM

Con la finalidad de aumentar la seguridad y considerando implicaciones económicas, el monitoreo de estructuras ha evolucionado hasta el punto de observar el surgimiento de varios axiomas fundamentales indicados en [Farrar and Worden, 2012]. La evidencia de estos axiomas han sido observadas en estudios y resultados experimentales en más de treinta años de desarrollo de monitoreo estructural, los axiomas son:

- *Axioma I.* Todos los materiales tienen defectos o imperfecciones inherentes.

- *Axioma II.* La evaluación de daños requiere una comparación entre dos estados del sistema.
- *Axioma III.* La detección y ubicación de daño se puede lograr utilizando aprendizaje no supervisado, pero la identificación del tamaño y tipo de daño se alcanza aplicando aprendizaje supervisado.
- *Axioma IVa.* Los sensores no miden daño en la estructura, la extracción de características convierte los datos de los sensores en información sobre la presencia de daño en la estructura.
- *Axioma IVb.* Es necesaria una extracción inteligente de características, ya que cuanto más sensible es una medición, es más sensible a condiciones operacionales y ambientales.
- *Axioma V.* Las escalas de longitud (detección local o global) y tiempo (de respuesta) asociadas con el inicio y evolución del daño, determinan las propiedades del sistema de detección SHM.
- *Axioma VI.* Existe una relación entre el umbral de detección de daños y el ruido de la señal de los sensores.
- *Axioma VII.* El tamaño del daño que se puede detectar a partir de cambios en la dinámica del sistema es inversamente proporcional al rango de frecuencia de excitación.
- *Axioma VIII.* El daño aumenta la complejidad en la respuesta estructural, produciendo cambios en su señal debido a faltas de continuidad en la propagación de ondas.

## 1.2. Motivación

El monitoreo estructural en el Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile, comienza con la instalación de una red local de acelerógrafos en dos edificios de cuatro pisos de albañilería confinada<sup>2</sup>, uno apoyado sobre ocho aisladores sísmicos y otro sobre fundación convencional [Boroschek et al., 1993], con el objeto de conocer la respuesta sísmica y comparar resultados experimentales entre ellos [Sarrazin et al., 1993, Moroni et al., 1993]. Otras estructuras con aislación sísmica que se han monitoreado, son el puente Marga-Marga y una estación de la línea 5 del metro de Santiago [Boroschek et al., 1997, Moroni et al., 2000]. Los registros de vibraciones ambientales y sísmicas, de estas tres estructuras, muestran que el sistema de aislación es eficaz para reducir las aceleraciones horizontales en el sistema y se espera que para movimientos mayores, la eficacia del sistema debería aumentar, debido a la no linealidad de la relación fuerza-desplazamiento del sistema de aislación [Moroni et al., 2000].

La implementación de un sistema de monitoreo continuo, comienza con la instrumentación de la Torre Central de la Facultad [Yanez, 2009]; posteriormente le continúan otros estudios sobre las variaciones en las propiedades dinámicas en la estructura después del terremoto del 27 de febrero de 2010 [León, 2013, Bilbao, 2014], y la extracción de efectos ambientales [Basoalto, 2013, Tamayo, 2014]. Otras estructuras monitoreadas temporalmente, fueron la Torre Titanium [Núñez, 2009] y la Cámara Chilena de la Construcción [Castillo and Boroschek, 2005, Carreno, 2009], entre otras; por último, existe sólo una tesis [Caroca, 2012] que aborda la detección de daño a partir del conocimiento de las propiedades dinámicas de la estructura, por medio de test Chi-cuadrado, utilizando

<sup>2</sup>Edificio Comunidad Andalucía en Santiago de Chile

como aplicación la estructura de pruebas IASC-ASCE, de la Universidad de Columbia Británica.

Los avances más importantes en la identificación de daño provienen de disciplinas como la Ingeniería Mecánica y la Ingeniería Eléctrica, donde la teoría de control han dado lugar a la identificación de sistemas y del estudio de cambio en las propiedades del sistema se conoce las actuales teorías de detección de daño.

Estudios recientes en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Chile, referidos a la identificación de daño han mostrado que la enseñanza supervisada aplicando Mínima Entropía Relativa [Shannon, 1948, Gupta, 2003], han dado buenos resultados identificando, localizando y cuantificando daño en estructuras mecánicas de complejidad moderada [Fierro Aguirre, 2014, Orellana, 2014, Meruane and Ortiz-Bernardin, 2015]. Para la aplicación del método, se requiere disponer de un modelo numérico de la estructura y que este posea una buena coherencia con las propiedades modales de la estructura real.

Por otro lado, la Ingeniería Eléctrica es la área con mayor avance en el estudio de detección e identificación de daño, pero esta difiere mucho de los sistemas estructurales civiles por el tamaño y poca repetitividad de ensayos de esta última.

La motivación principal de la tesis es investigar estudios realizados en otras áreas de ingeniería y comprobar la aplicabilidad de los métodos de manera experimental a una estructura de corte de 6 niveles, que será excitada sobre una mesa vibradora de movimiento horizontal. La estructura será ensayada bajo condiciones normales y de daño controlado (por reducción consecutiva de la sección transversal de las columnas) de modo que mantenga las condiciones lineales, antes y después de la aplicación del daño; además de la aplicación de dos perturbaciones: i) por adición de una masa que representa el 0,5% de la masa total del edificio y ii) la generación de un gradiente ascendente de temperatura en laboratorio.

### 1.3. Objetivo General

Validar experimentalmente dos algoritmos que evalúen la presencia de daño en una estructura metálica, bajo comportamiento lineal-elástico, monitoreada durante una secuencia de daño progresivo y controlado, sometido a diferentes tipos de excitación.

### 1.4. Objetivos Específicos

Para lograr el estudio propuesto, será necesario seguir los siguientes pasos:

- a) Revisar la bibliografía de monitoreo estructural y su relación con la identificación de daño en estructuras, los métodos que existen, y su aplicación a estructuras reales.
- b) Estudiar la identificación de sistemas basados en modelos de Sub-Espacio Estado, que permiten conocer las propiedades modales de una estructura bajo distintas condiciones de excitación y observación a las que se encuentra sometida la estructura.

- c) Describir la teoría de aproximación lineal basado en el principio de máxima entropía, y establecer su aplicación a la estructura utilizando propiedades modales analíticas y experimentales.
- d) Analizar la señal de los sensores, con Transformadas Wavelet, con el objeto de extraer características de daño a partir de Información Mutua y redes neuronales.
- e) Determinar el cambio de estado en una estructura, a partir de la utilización de un porcentaje de detección utilizando el principio de Bayes y Test de Hipótesis.

## 1.5. Hipótesis del Trabajo

Las Hipótesis de ésta tesis, son las siguientes:

- a) La estructura ensayada en laboratorio mantiene las condiciones lineales antes, durante y después de cada ensayo; en la teoría revisada y desarrollada en esta tesis, no se considera la incursión en rangos no-lineales.
- b) La asume que la estructura es observable, controlable y estable; esto permite identificar las propiedades modales bajo diferentes condiciones: excitaciones de carácter transiente, aplicación de anomalías (cambio de masa y gradiente de temperatura) y asignación de daño controlado.
- c) Es posible detectar, aislar e identificar daño en una estructura utilizando el principio de Máxima Entropía, para esto se desarrolla un modelo calibrado de la estructura ensayada que permita generar la base de datos, en base a observaciones de frecuencia y amortiguamiento, que se utilizan para el proceso de interpolación lineal.
- d) Utilizando Información Mutua y Entropía a partir de Transformadas Wavelet Continuas, es posible realizar la detección y cuantificación de daño, el desarrollo de este proceso caracteriza las principales observaciones a partir del entrenamiento de redes neuronales multicapa y con mapas auto-organizados.
- e) Por último, es posible realizar la detección de cambio de estado, expresada como un porcentaje de cambio con la potencia de un test, a partir de la utilización del Test de Hipótesis con Inferencia Bayesiana.

## 1.6. Organización y Alcances

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2, se describe el concepto de modelos de espacio estado y su aplicación a la identificación de propiedades modales, en el dominio del tiempo, dependiente del tipo de excitación que se encuentra en observación. El Capítulo es complementado con la implementación del algoritmo de *Rápido Multi-Orden* (FMO - Fast Multi-Order), de manera que su aplicación multi-orden se realiza en un tiempo eficiente. Finalmente, se genera un diagrama de estabilidad con criterio de triple acierto para determinar los modos estables del sistema y obtener los parámetros modales representativos por cada modo.

En el Capítulo 3, se aplica el método de enseñanza supervisada por máxima entropía describiendo la teoría y el desarrollo de las ecuaciones necesarias para su aplicación a la identificación de daño.

En el Capítulo 4, se describen los principales conceptos y propiedades de Transformada Wavelet Continua y la utilización de escalogramas para caracterizar la señal, se indica la manera como se obtienen escalogramas. Son también descritas las ecuaciones de información mutua, su aplicación a la comparación y tratamiento de imágenes. Los resultados son clasificados con la metodología SOM (SOM - Self-Organized Map) y cuantificados con redes neuronales multicapa en backpropagation.

En el Capítulo 5, se desarrolla la aplicación experimental, describiendo los registros ensayados; la manera en que se asigna daño y perturbación en la estructura. La generación del modelo numérico de la estructura, utilizando elementos finitos. Finalmente, se realiza la obtención y procesamiento de resultados para la metodología desarrollada en los Capítulos 2, 3 y 4. Los resultados muestran respuestas coherentes para las condiciones de mayor daño en la estructura.

En el Capítulo 6, se presenta una descripción matemática que permite cuantificar el porcentaje de detección que existe cuando se produce el cambio de estado en una estructura, a partir de la utilización de la teoría de Bayes y Test de Hipótesis.

Finalmente, el Capítulo 7 muestran las Conclusiones obtenidas a partir de la implementación de la metodología aplicada a la estructura experimental y las Recomendaciones para futuras investigaciones.

## Capítulo 2

# IDENTIFICACION DE PROPIEDADES MODALES CON ESPACIO ESTADO

### 2.1. Introducción

En las últimas décadas los métodos de identificación de espacio estado, han sido investigados ampliamente. Estos métodos se basan en conceptos geométricos que incluyen el cálculo de matrices, manipulación geométrica del espacio de filas y cálculo de la proyección de datos sobre ciertos subespacios. El objetivo principal de los métodos de espacio estado es poder determinar las matriz de transición de estado,  $A$ , y la matriz de observación,  $C$ , de un sistema estructural, a partir de las observaciones realizadas al sistema.

Dadas las condiciones de observabilidad y comportamiento de una estructura, existe una variedad de excitaciones que pueden ser medidas y la manera en la que éstas pueden ser observadas. Es así que se desarrollan una serie de métodos de identificación, en el dominio del tiempo, dependiendo de la excitación actuante sobre la estructura. Algunas de las metodologías más conocidas son las siguientes:

- a) Basada en la suposición de estado inicial cero y la excitación de impulso unitario que se produce sobre la estructura, es posible utilizar el Algoritmo de Realización de Eigensistemas (ERA - Eigensystem Realization Algorithm, por sus siglas en inglés) [Juang and Pappa, 1986], cuya extensión denominada NExT – ERA (Natural Excitation Technique) utiliza funciones de auto y corss correlación que se aplica con éxito en excitación ambiental [James et al., 1995].
- b) Para las condiciones en las que se mide la excitación de entrada en una estructura y las observaciones de salida del sistema, se aplica el algoritmo de Error de Multisalidas de Espacio Estado MOESP (Multi-Output-Error State sPace), que se aplican principalmente a la acción de terremotos o sismos sobre la estructura [Verhaegen and Dewilde, 1992, Verhaegen, 1993].
- c) En las condiciones de excitación ambiental, operacional o vibración natural de la estructura, conocida como Análisis de Operación Modal, OMA (Operational Modal Analysis), se aplican

los algoritmos de Identificación de Subespacio Estado, SSI (Subspace State Identificacion) [Benveniste and Mevel, 2007, Peeters and De Roeck, 1999].

## 2.2. Modelo Espacio Estado

El comportamiento dinámico de un sistema viscoelástico lineal, conformado por  $n_1$  Grados De Libertad (GDL), conectados por medio de resortes y amortiguadores, describe la siguiente ecuación diferencial matricial de movimiento [Peeters and De Roeck, 1999],

$$M_1\ddot{v}(t) + C_1\dot{v}(t) + K_1v(t) = P(t) = B_1u(t), \quad (2.1)$$

donde,

$v(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ : Es el vector de desplazamientos en tiempo continuo para los  $n_1$  grados de libertad considerados,

$u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ : Es el vector que describe las  $m$  fuerzas nodales en el tiempo,

$\{M_1, C_1, K_1\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ : Son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente,

$P(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ : Es la fuerza de excitación que puede ser factorizada en una matriz,

$B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ : Describe la distribución de las entradas en el espacio, y el vector  $u(t)$ .

La Ecuación (2.1) corresponde a la aproximación del modelo dinámico lineal mediante elementos finitos de un sistema que cuenta con  $n_1$  GDL; aunque la ecuación puede representar un comportamiento muy parecido al de una estructura en vibración, su utilización no es directamente empleada en los métodos de identificación de sistemas, las razones son las siguientes [Peeters and De Roeck, 1999]:

- a) La Ecuación (2.1), está expresada en tiempo continuo, mientras que las mediciones son en general muestras en instantes de tiempo discreto.
- b) No es posible medir todos los  $n_1$  GDL de la estructura.
- c) Es necesario modelar el ruido, debido a que las estructuras se encuentran sometidas a otras fuentes de excitación diferentes de  $P(t)$  y las mediciones de ruido siempre están presentes en la vida real.

Para solucionar los puntos descritos, la Ecuación (2.1), puede ser transformada en una ecuación de Estado Espacio en tiempo continuo, expresada como:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \quad (2.2)$$

con las siguientes definiciones:

$$x(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_1} \\ -M_1^{-1}K_1 & -M_1^{-1}C_1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M_1^{-1}C_1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

donde,

$x(t) \in \mathbb{R}^{2n_1}$ : Es el vector de estado de la estructura,



$A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Es la matriz de transición de estado,  
 $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ : Es la matriz de entradas.

Es importante observar que dada la nueva configuración de la matriz de estado el tamaño de  $n$ , es  $n = 2n_1$ . De (2.3) se puede concluir que la matriz  $A_c$ , caracteriza la dinámica del sistema viscoelástico ya que es una representación de las propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento del sistema; mientras que la matriz  $B_c$  representa la distribución en que las fuerzas participan o actúan sobre la estructura.

Debido a que en la práctica no es posible medir todos los GDL de un sistema monitoreado, es necesario asumir que solo un número finito de GDL,  $l$ , serán medidos y evaluados. Para considerar este punto se establece que existe una relación entre los GDL y la observación que se esta realizando con sensores sobre la estructura. Estos  $l$  sensores, pueden medir aceleración, velocidad o desplazamiento; de acuerdo a lo mencionado, la ecuación de observación se escribe como:

$$y(t) = C_a \ddot{v}(t) + C_v \dot{v}(t) + C_d v(t), \quad (2.4)$$

donde,

$y(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ : Es el vector de observaciones de la estructura,  
 $\{C_a, C_v, C_d\} \in \mathbb{R}^{l \times n_1}$ : Son las matrices de observación para aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente.

La Ecuación (2.4), puede ser transformada en una ecuación de Espacio Estado continuo como:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.5)$$

con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} C &= [ C_d - C_a M_1^{-1} K_1 \quad C_v - C_a M_1^{-1} C_1 ] \\ D &= C_a M_1^{-1} B_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde,

$C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ : Es la matriz de observación,  
 $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ : Es la matriz de transmisión directa.

De (2.6), se concluye que  $C$  caracteriza la observación al ser dependiente de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, así como de las matrices de observación. Mientras que  $D$ , solo depende de las mediciones de aceleración.

Las Ecuaciones de espacio estado (2.2) y (2.5) constituyen un modelo determinístico en tiempo continuo, es decir, con la expresión se puede medir exactamente las expresiones  $u(t)$  e  $y(t)$ , en cualquier instante de tiempo  $t \in \mathbb{R}$ . Pero esta es una representación poco realista, ya que las mediciones se realizan de manera discreta para instantes de tiempo determinado, definidos como  $k\Delta t$ , siendo  $k \in \mathbb{N}$  el indicador de la muestra y  $\Delta t$  es el tiempo de muestreo. Considerando la discretización en el tiempo, el modelo de espacio estado, para un sistema determinísticos, se escribe como:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}, \quad (2.7)$$

con las siguientes definiciones:

$$x_k = x(k\Delta t), \quad A = \exp(A_c\Delta t), \quad B = [A - I]A_c^{-1}B_c, \quad (2.8)$$

donde,

$x_k$ : Es el vector de estado en tiempo discreto,  
 $A$ : Es la matriz de estado en tiempo discreto, y  
 $B$ : Es la matriz de entradas discretas

Si a la Ecuación (2.7) se le adicionan componentes estocásticas correspondientes a ruidos, se obtiene la combinación de modelo determinístico-estocástico en espacio estado para tiempo discreto.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases}, \quad (2.9)$$

donde,

$w_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ : Es el ruido del proceso debido a perturbaciones o un inadecuado modelamiento,  
 $v_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ : Es el ruido de la medición debido a las impresiones mecánicas y eléctricas de un sensor.

Dada la condición estocástica de los ruidos, se asume que no tienen sesgo, es decir, que su media es cero, y su matriz de covarianza está representada por:

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{pq}, \quad (2.10)$$

donde,

$E$ : Es el valor esperado,  
 $\delta_{pq}$ : Es el Delta de Kronecker.

El comportamiento dinámico del sistema, llega a ser caracterizado con la determinación de las matrices  $\{A, B, C\}$ , a partir de las observaciones  $y_k$ . Para ello es necesario definir que para cualquier número infinito de realizaciones es posible predecir una idéntica respuesta dada cualquier excitación. Dicho de otra forma, siendo  $T$  cualquier matriz cuadrada no singular y  $z(k)$  un nuevo vector definido de tal manera que:

$$x = Tz. \quad (2.11)$$

Sustituyendo la expresión (2.11) en el sistema de Ecuaciones (2.7), se tiene:

$$\begin{cases} z_{k+1} = T^{-1}ATz_k + T^{-1}Bu_k \\ y_k = CTz_k + Du_k \end{cases}. \quad (2.12)$$

La respuesta de las matrices  $\{A, B, C, D\}$  son idénticas a las matrices  $\{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\}$ , debido a que existe un número infinito de matrices  $T$  y existe un número infinito de realizaciones. Asumiendo que la matriz  $A$  es de orden  $n$ , tiene un conjunto completo de valores propios,  $\Lambda$ , con sus correspondientes vectores propios,  $\Psi$ , cuya definición sirve para realizar la siguiente transformación expresada como:

$$\Lambda, \Psi^{-1}B, C\Psi, D,$$

donde,

$\Lambda$ : Es una matriz diagonal con información de frecuencias naturales y razones de amortiguamiento,  
 $\Psi^{-1}B$ : Es la matriz de amplitudes modales,  
 $C\Psi$ : Es la matriz de formas modales.

Desarrollando la matriz de transición de estado, tenemos:

$$A = \Psi^{-1}\Lambda\Psi; \tag{2.13}$$

con las siguientes definiciones:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_d) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}, \tag{2.14}$$

donde,

$\Lambda$ : Contiene los valores propios discretos  $\Lambda_d$  para  $d = 1, \dots, n$ , y  $\Lambda$  contiene los vectores propios como vectores columna.

A partir la expresión (2.8), es posible realizar una transformación de tiempo discreto a continuo, expresados con la siguiente relación:

$$\lambda_{c_i} = \frac{\ln \lambda_d}{\Delta t}, \quad \Psi_c = \Psi. \tag{2.15}$$

Los valores propios de  $A_c$  ocurren en pares conjugados, que se escriben como:

$$\begin{aligned} \lambda_{c_i}, \lambda_{c_i}^* &= -\beta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \beta_i^2} \\ \lambda_{c_i}, \lambda_{c_i}^* &= -\beta_i (2\pi f_i) \pm j (2\pi f_i) \sqrt{1 - \beta_i^2}; \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde,

$\beta_i$ : Es la razón de amortiguamiento modal del modo  $i$ ,  
 $\omega_i$ : Es la frecuencia propia del modo  $i$  en [rad/s], y  
 $f_i$ : La frecuencia natural del modo  $i$  en [Hz].

Dado que la expresión (2.16) tiene  $n$  valores propios, sólo existen  $n_1$  modos que están asociados a las frecuencias y las razones de amortiguamiento [Bilbao, 2014]. Las frecuencias naturales,  $f_i$ , y las razones de amortiguamiento,  $\beta_i$ , se determinan con las siguientes expresiones:

$$f_i = \frac{|\lambda_{c_i}|}{2\pi}, \quad (2.17)$$

$$\beta_i = -\frac{\text{real}(\lambda_{c_i})}{|\lambda_{c_i}|}. \quad (2.18)$$

Dado que las formas modales están asociadas a la localización de los sensores, es necesario relacionar la matriz de observación del sistema con los vectores propios,  $\Psi$ ; utilizando la Ecuación (2.5), se obtiene la expresión:

$$\Phi = C\Psi, \quad (2.19)$$

donde,

$\Phi \in \mathbb{C}^{l \times n}$ : Son las formas modales complejas que se encuentran asociadas a las frecuencias naturales y razones de amortiguamiento determinadas en las Ecuaciones (2.17) y (2.18).

Basados en las propiedades de la matriz de Hankel compuesta, conformados a partir de los parámetros de Markov, varios métodos para la identificación de parámetros modales pueden ser discutidos. Los más populares, en función al tipo de excitación actuante sobre la estructura se describen en los siguientes párrafos.

### 2.3. Eigenvalue Realization Algorithm - ERA

El objetivo de la metodología de identificación en base a ERA, es obtener las matrices de menor orden que puedan representar el comportamiento dinámico de la estructura  $\{A, B, C\}$  e identificar los parámetros modales de la estructura  $\{f_i, \beta_i, \Phi\}$  [Boroschek, 2014]. Para la formulación se hace uso de la matriz de Hankel que representa la estructura de datos de las observaciones como una distribución de los parámetros de Markov generados a partir de suposición de estado inicial cero y la excitación de impulso unitario, con una respuesta decauyente [Juang and Pappa, 1985].

De acuerdo a la Ecuación (2.7), la observación discreta, como respuesta a un impulso, se puede escribir como:

$$y_k = CA^{k-1}B. \quad (2.20)$$

De la expresión (2.20), el algoritmo busca construir las matrices  $\{A, B, C\}$ , en términos de  $Y_k$ ; para lograr este objetivo, es necesario considerar una matriz generalizada de Hankel, definida como:

$$\begin{aligned} H_{k-1} &= \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+N} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+i} & y_{k+i+1} & \cdots & y_{k+i+N} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} CA^{k-1}B & CA^k B & \cdots & CA^{k+N-1}B \\ CA^k B & CA^{k+1}B & \cdots & CA^{k+N}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k+i-1}B & CA^{k+i}B & \cdots & CA^{k+N+i-1}B \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde,

$H_{k-1} \in \mathbb{R}^{l \times N}$ : Es la matriz de Hankel para el tiempo discreto  $k$ ,

$y_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ : Es el vector de observación para el tiempo  $k$ ,

$l$ : Es la cantidad de sensores considerados en la observación,

$i \in \mathbb{N}^r$ : Es el arreglo de vectores fila que se encuentra en función al orden máximo del sistema,

$N$ : Es la cantidad de muestras de la observación, y debe considerar todo el decaimiento de la excitación para mejores resultados.

Si se considera el cambio de variable  $H_{k-1}$  por  $H_k$ , la Ecuación (2.21) queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 H_k &= \begin{bmatrix} y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+N+1} \\ y_{k+2} & y_{k+3} & \cdots & y_{k+N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+i+1} & y_{k+i+2} & \cdots & y_{k+i+N+1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} CA^k B & CA^{k+1} B & \cdots & CA^{k+N} B \\ CA^{k+1} B & CA^{k+2} B & \cdots & CA^{k+N+1} B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{k+i} B & CA^{k+i+1} B & \cdots & CA^{k+N+i} B \end{bmatrix}; \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

que puede escribirse de la forma:

$$H_k = \mathcal{O}A^k \mathcal{C}, \tag{2.23}$$

donde,

$\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{il \times n}$ : Es la matriz de observabilidad,

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ : Es la matriz de controlabilidad,

$n = 2l$ : Es el tamaño de la matriz de estado.

Las matrices de observabilidad y controlabilidad se escriben como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \vdots & A^{N-1} B \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Asumiendo que existe una matriz  $H^\#$  que cumple la siguiente relación:

$$\mathcal{C}H^\# \mathcal{O} = I_n, \tag{2.26}$$

donde,

$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Es una matriz identidad de orden  $n$ .

Además, es posible mostrar que la matriz  $H^\#$  juega un rol importante en la determinación del algoritmo ERA; para ello, se considera que de las Ecuaciones (2.23) y (2.26):

$$\begin{aligned} H_0 H^\# H_0 &= \mathcal{O} C H^\# \mathcal{O} C \\ &= \mathcal{O} I_n \mathcal{C} = \mathcal{O} C \\ &= H_0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Por lo tanto, la matriz,  $H^\#$ , es la pseudoinversa de la matriz  $H_0$  en un caso general [Juang and Pappa, 1985]. A partir de esta definición, el procedimiento de ERA, empieza con la descomposición de valores singulares ( $SVD$ ) de la Ecuación (2.27), teniendo:

$$\begin{aligned} H_0 &= U S V^T \\ &= [ U_1 \quad U_2 ] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde,

$H_0 \in \mathbb{R}^{il \times N}$ : Es la matriz de Hankel para la primera observación,  
 $U \in \mathbb{R}^{il \times n}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times N}$ : Son matrices que tienen vectores columna ortonormales,  
 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : Es una matriz diagonal en orden decreciente.

El rango de las matrices  $\{U_1, S_1, V_1^T\}$ , se encuentra a partir de la cantidad de valores singulares,  $S_1$ , que son diferentes de cero, o que tienen variación con números próximos a cero. Por lo tanto, la matriz  $H_0$  y  $H^\#$  su pseudoinversa son [Juang, 1986]:

$$H_0 = U_1 S_1 V_1^T, \tag{2.29}$$

$$H^\# = V_1 S_1^{-1} U_1^T. \tag{2.30}$$

Dadas las matrices  $\{U_1, V_1^T\}$  son ortonormales se cumple la siguiente relación  $U_1^T U_1 = V_1 V_1^T = 1$ . Definiendo a  $0_l$  como una matriz de ceros de orden  $l$ , e  $I_l$  como una matriz identidad de orden  $l$ , podemos escribir  $E_l^T = [ I_l \quad 0_l \quad \cdots \quad 0_l ]$ , y además  $E_N^T = [ I_N \quad 0_N \quad \cdots \quad 0_N ]$ . Utilizando las Ecuaciones (2.20), (2.23), (2.26), además de (2.29) y (2.30); una realización mínima puede ser obtenida como sigue:

$$\begin{aligned}
Y_k &= E_l^T H_0 E_N \\
&= E_l^T (\mathcal{O} A^k \mathcal{C}) E_N \\
&= E_l^T \mathcal{O} (I_n) A^k (I_n) \mathcal{C} E_N \\
&= E_l^T \mathcal{O} (\mathcal{C} H^\# \mathcal{O}) A^k (\mathcal{C} H^\# \mathcal{O}) \mathcal{C} E_N \\
&= E_l^T (\mathcal{O} \mathcal{C}) H^\# \mathcal{O} A^k \mathcal{C} H^\# (\mathcal{O} \mathcal{C}) E_N \\
&= E_l^T (H_0) H^\# \mathcal{O} A^k \mathcal{C} H^\# (H_0) E_N \\
&= E_l^T H_0 (V_1 S_1^{-1} U_1^T) \mathcal{O} A^k \mathcal{C} (V_1 S_1^{-1} U_1^T) H_0 E_N \\
&= E_l^T H_0 V_1 (S_1^{-1/2} S_1^{-1/2}) U_1^T (\mathcal{O} A \mathcal{C})^k V_1 (S_1^{-1/2} S_1^{-1/2}) U_1^T H_0 E_N \\
&= E_l^T (H_0 V_1) S_1^{-1/2} (S_1^{-1/2} U_1^T (\mathcal{O} A \mathcal{C})^k V_1 S_1^{-1/2}) S_1^{1/2} (U_1^T H_0) E_N \\
&= E_l^T (U_1 S_1) S_1^{-1/2} (S_1^{-1/2} U_1^T (\mathcal{O} A \mathcal{C}) V_1 S_1^{-1/2})^k S_1^{-1/2} (S_1 V_1^T) E_N \\
&= \left( E_l^T U_1 S_1^{1/2} \right) \left( S_1^{-1/2} U_1^T H_1 V_1 S_1^{-1/2} \right)^k \left( S_1^{1/2} V_1^T E_N \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Las partes de la Ecuación (2.31) es la formulación básica para la realización de ERA, definida en la Ecuación (2.20) obteniéndose las matrices  $\{A, B, C\}$  expresadas como:

$$C = E_l^T U_1 S_1^{1/2} \tag{2.32}$$

$$A = S_1^{-1/2} U_1^T H_1 V_1 S_1^{-1/2} \tag{2.33}$$

$$B = S_1^{1/2} V_1^T E_N. \tag{2.34}$$

## 2.4. Multivariable Output Error Space (MOESP)

Considerando la Ecuación (2.7), para un espacio estado determinístico discreto, es posible realizar la siguiente representación que es de utilizada para el desarrollo y comprensión de la metodología detrás del algoritmo MOESP. Sea:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases},$$

es posible seguir la siguiente secuencia de desarrollo:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\
y_{k+1} &= Cx_{k+1} + Du_{k+1} \\
&= CAx_k + CBu_k + Du_{k+1}, \\
x_{k+2} &= Ax_{k+1} + Bu_{k+1} \\
&= A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1}, \\
y_{k+2} &= Cx_{k+2} + Du_{k+2} \\
&= CA^2x_k + CABu_k + CBu_{k+1} + Du_{k+2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{k+3} &= Ax_{k+2} + Bu_{k+2} \\
 &= A^3x_k + A^2Bu_k + ABu_{k+1} + Bu_{k+2}, \\
 y_{k+3} &= Cx(k+3) + Du(k+3)y_{k+1} \\
 &= CA^3x_k + CA^2Bu_k + CABu_{k+1} + CBu_{k+2} + Du_{k+3}.
 \end{aligned}$$

Que puede ser escrito de la forma:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CBA & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-1}B & CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \cdots \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Donde, las matrices de observabilidad extendida,  $\mathcal{O}$ , y la matriz de controlabilidad,  $\mathcal{T}$ , expresada como una matriz de Toeplitz, se escriben como:

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_i = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CBA & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-1}B & CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Utilizando la matriz de Hankel a la secuencia de muestras obtenidas de las entradas al sistema y las observaciones, es posible reformular la Ecuación (2.35) utilizando las expresiones de (2.36), teniendo de manera compacta:

$$Y_{k,i,N} = \mathcal{O}_i X_{k,N} + \mathcal{T}_i U_{k,i,N}, \quad (2.37)$$

siendo:

$$Y_{k,i,N} = \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+N-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+i-1} & y_{k+i} & \cdots & y_{k+i+N-2} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$X_{k,i,N} = [x_k \quad x_{k+1} \quad \cdots \quad x_{k+N-1}], \quad (2.39)$$

$$U_{k,i,N} = \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \cdots & u_{k+N-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \cdots & u_{k+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \cdots & u_{k+i+N-2} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

donde,



$U_{k,i,N} \in \mathbb{R}^{mi \times N}$ : Es la matriz de matriz de entradas al sistema con  $m$  sensores,  
 $Y_{k,i,N} \in \mathbb{R}^{li \times N}$ : Es la matriz de observación con  $l$  sensores,  
 $k$ : Es la  $k$ -esima muestra considera,  
 $i$ : Es la cantidad de arreglos fila,  
 $N$ : Son las muestras contabilizadas.

Con las Ecuaciones (2.38) y (2.40), es posible construir la matriz de Hankel, a la que se puede aplicar una factorización  $LQ$  a la expresión formada, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 H &= \begin{bmatrix} U_{0,i,N} \\ Y_{0,i,N} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}, \\
 H &= \begin{bmatrix} U_{0,i,N} = L_{11}Q_1^T \\ Y_{0,i,N} = L_{21}Q_1^T + L_{22}Q_2^T \end{bmatrix}, \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

debiendo cumplirse:

$$Q_i^T Q_j = \begin{cases} [1] & \text{si } i = j \\ [0] & \text{si } i \neq j \end{cases}. \tag{2.42}$$

Considerando la Ecuación (2.37) y (2.41) es posible obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 L_{21}Q_1^T + L_{22}Q_2^T &= \mathcal{O}_i X_{0,N} + T_i L_{11} Q_1^T \quad \times (Q_2) \\
 L_{21}Q_1^T Q_2 + L_{22}Q_2^T Q_2 &= \mathcal{O}_i X_{0,N} Q_2 + T_i L_{11} Q_1^T Q_2 \\
 L_{22} &= \mathcal{O}_i X_{0,N} Q_2. \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

La Ecuación (2.43), muestra dos aspectos importantes. El primero es que se ha eliminado el efecto de la excitación externa,  $U_{k,i,N}$ . Y el segundo está referido al hecho de que la matriz de observabilidad del sistema,  $\mathcal{O}$ , se puede determinar a partir de la matriz  $L_{22}$ . Para lograr descomponer la matriz  $L_{22}$ , en los términos descritos en la Ecuación (2.43), es necesario realizar una descomposición de valores singulares, expresados como:

$$\begin{aligned}
 L_{22} &= USV^T \\
 L_{22} &= [ U_1 \quad U_2 ] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

La Ecuación (2.44), muestra que a partir de la descomposición  $SVD$ , es posible realizar una división de las matrices  $\{U_1, S_1, V_1^T\}$ , a partir de los términos de la diagonal de la matriz  $S$  que son iguales a cero o son muy próximos a cero. De esta forma, con las expresiones (2.43) y (2.44), se puede obtener la matriz de observabilidad que se estaba buscando:

$$\begin{aligned}
 L_{22} &\cong U_1 S_1 V_1^T \\
 \mathcal{O}_i X_{0,N} Q_2 &\cong U_1 S_1^{1/2} S_1^{1/2} V_1^T \\
 \mathcal{O}_i &\cong U_1 S_1^{1/2}. \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Una vez determinada la matriz de observabilidad, la matriz de transición de estado,  $A$  y la matriz de observación  $C$ , se determinan a partir de la expresión (2.36):

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}.$$

Donde se observa que la matriz de observabilidad se determina considerando los primeros  $l$  sensores de observación en la estructura, expresados como:

$$C = \mathcal{O}_i(1:l,:). \quad (2.46)$$

La matriz de transición de estado es obtenida de las propiedades de invariancia en el cambio de la observabilidad,  $\mathcal{O}_i$ , expresado como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_i^\uparrow A &= \mathcal{O}_i^\downarrow, \\ A &= \mathcal{O}_i^{\uparrow\downarrow} \mathcal{O}_i^\downarrow, \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde:

$$\mathcal{O}_i^\uparrow = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_i^\downarrow = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

De esta forma el problema de identificación es resuelto al poderse determinar las expresiones de las matrices  $A, C$ .

## 2.5. Modelo de Espacio Estado Estocástico

Un modelo en espacio estado estocástico discreto, es determinado a partir del sistema de Ecuaciones (2.9), sin los términos que corresponden a las entradas al sistema,  $u_k$ ; expresados de la forma [Peeters and De Roeck, 1999].

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (2.49)$$

Donde,  $w_k$  y  $v_k$ , al asumirse que son ruidos blancos, poseen una media cero, expresada en términos de esperanza matemática como  $E[w_k] = 0$ ,  $E[v_k] = 0$  y con matrices de covarianza dadas por la Ecuación (2.10). Por otro lado, un proceso estocástico se asume que es estacionario con media cero  $E[x_k] = 0$  y donde la matriz de covarianza,  $\Sigma$ , definida como  $E[x_k x_k^T] = \Sigma$ , es independiente de los ruidos de proceso,  $w_k$  y del ruido de medición,  $v_k$ , en el tiempo  $k$ ; por lo tanto las covarianzas entre ellas serán iguales a cero, expresadas como:

$$E[x_k w_k^T] = 0, \quad E[x_k v_k^T] = 0. \quad (2.50)$$

La matriz de covarianzas de las observaciones,  $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , y la matriz de covarianza del estado y la observación,  $G \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , donde  $n$  es el tamaño de la matriz de estado, Ecuación (2.3), y  $l$  el numero de sensores de observación en el sistema, Ecuación (2.4). Se definen como:

$$\Lambda_i \equiv E \begin{bmatrix} y_{k+i} & y_k^T \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$G \equiv E \begin{bmatrix} x_{k+1} & y_k^T \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

De las definiciones descritas y las ecuaciones anteriores, las siguientes propiedades pueden ser descritas:

$$\Sigma = A\Sigma A^T + Q, \quad (2.53)$$

$$\Lambda_0 = C\Sigma C^T + R, \quad (2.54)$$

$$G = A\Sigma C^T + S, \quad (2.55)$$

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G. \quad (2.56)$$

Dada la evolución técnica y económica que han tenido los sensores utilizados para la observación de estructuras en ingeniería, es posible observar dos tendencias importantes:

- a. Una cantidad limitada de sensores, debido a su precio unitario y el costo de instalación y configuración en la estructura, no permite la medición de todos los puntos de interés, por lo que es necesario realizar una serie de arreglos con sensores de referencia que son superpuestos.
- b. Una gran cantidad de sensores, que pueden ser instalados en las estructuras, pero es posible que varios de ellos posean una mayor precisión en la medición, menor ruido eléctrico, o que su posición sea más óptima que la de los otros, en esta condición también es posible realizar un arreglo de sensores de referencia.

Las observaciones de los sensores de referencia, deben estar localizados en lugares óptimos, evitando puntos nodales y obteniendo información de todos los modos de vibración. Considerando que se tiene una cantidad de  $r$  sensores de referencia, la observación de los sensores queda expresada de la forma:

$$y_k = \begin{bmatrix} y_k^{ref} \\ y_k^{\sim ref} \end{bmatrix}, \quad y_k^{ref} = Ly_k, \quad L = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

donde,

$y_k^{ref} \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ : Son las observaciones de referencia,

$y_k^{\sim ref} \in \mathbb{R}^{(l-r) \times 1}$ : Es el complemento de las observaciones,

$L \in \mathbb{R}^{r \times l}$ : Es la matriz de selección de las referencias,

$I_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ : Es una matriz identidad.

Las matrices de covarianza de las Ecuaciones (2.51) y (2.52) para la condición de sensores son:

$$\Lambda_i^{ref} = E \begin{bmatrix} y_{k+i} & y_k^{refT} \end{bmatrix} = \Lambda_i L^T \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad (2.58)$$

$$G^{ref} = E \begin{bmatrix} x_{k+1} & y_k^{refT} \end{bmatrix} = GL^T \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad (2.59)$$

$$\Lambda_i^{ref} = CA^{i-1}G^{ref}. \quad (2.60)$$

Las observaciones medidas se reúnen en una matriz de Hankel que tiene las siguientes características en su organización:

- La matriz tiene un total de  $2i$  bloques filas; el primer bloque  $i$  tiene  $r$  filas de referencia y el segundo bloque  $i$ , tiene  $l$  filas de todas las observaciones.
- Se tienen  $N$  columnas, que por razones estadísticas se asume que  $N \rightarrow \infty$ .

La matriz Hankel, dada su división de bloques, puede ser nominada como parte pasada para el bloque de  $r$  filas de referencia y una parte futura para el bloque  $l$  de filas de todas las observaciones, expresadas como:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} Y_{0|i-1}^{ref} \\ Y_{i|2i-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Con las siguientes definiciones:

$$Y_{0|i-1}^{ref} = Y_p^{ref} = \begin{bmatrix} y_0^{ref} & y_1^{ref} & \dots & y_{N-1}^{ref} \\ y_1^{ref} & y_2^{ref} & \dots & y_N^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1}^{ref} & y_i^{ref} & \dots & y_{i+N-2}^{ref} \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$Y_{i|2i-1} = Y_f = \begin{bmatrix} y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \dots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

donde,

$H \in \mathbb{R}^{(r+l)i \times N}$ : Es la matriz de Hankel,

$Y_{0|i-1}^{ref} = Y_p^{ref} \in \mathbb{R}^{ri \times N}$ : Es el bloque pasado de las  $r$  observaciones de referencias,

$Y_{i|2i-1} = Y_f \in \mathbb{R}^{li \times N}$ : Es el bloque futuro con los  $l$  sensores instalados en la estructura.

Dadas las características de identificación que se realiza al sistema, es necesario asumir que:

- El par de matrices  $\{A, C\}$  es observable, lo que supone que todos los modos del sistema pueden ser observados a partir de las mediciones realizadas.

- b. El par de matrices  $\{A, G^{ref}\}$  es controlable, lo que implica que todos los modos de la estructura son excitados por las entradas estocásticas.

Las matrices de observabilidad y controlabilidad se definen como:

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\mathcal{C}_i^{ref} = [ A^{i-1}G^{ref} \quad A^{i-2}G^{ref} \quad \dots \quad AG^{ref} \quad G^{ref} ], \quad (2.65)$$

donde,

$\mathcal{O}_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$ : Es la matriz de observabilidad extendida,

$\mathcal{C}_i^{ref} \in \mathbb{R}^{n \times ri}$ : Es la matriz de controlabilidad estocástica inversa extendida.

### 2.5.1. Espacio Espacio Estocástico – Referencia Basada en Manejo de Covarianzas (SSI-COV)

El algoritmo para la identificación de propiedades modales a partir del manejo de covarianzas, determina las matrices de covarianza entre todas las observaciones y el conjunto de referencias que han sido definidas en la Ecuación (2.51) y (2.52), las que son agrupadas en la denominada matriz de Toeplitz, que se caracteriza por tener en la diagonal la repetición del mismo elemento y se expresa como:

$$\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = \begin{bmatrix} \Lambda_i^{ref} & \Lambda_{i-1}^{ref} & \dots & \Lambda_1^{ref} \\ \Lambda_{i+1}^{ref} & \Lambda_i^{ref} & \dots & \Lambda_2^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1}^{ref} & \Lambda_{2i-2}^{ref} & \dots & \Lambda_i^{ref} \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

donde,

$\mathcal{T}_{1|i}^{ref} \in \mathbb{R}^{li \times ri}$ : Es la matriz de Toeplitz,

$\Lambda_i^{ref} \in \mathbb{R}^{l \times r}$ : Es la matriz de covarianzas de las observaciones de referencia.

De la Ecuación (2.61) y asumiendo ergodicidad, la Ecuación (2.66) puede ser escrita como:

$$\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = Y_f Y_p^{refT}. \quad (2.67)$$

A partir de la Ecuación (2.60), la matriz Toeplitz se escribe como:

$$\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = \mathcal{O}_i \mathcal{C}_i^{ref}. \quad (2.68)$$

Las matrices de observabilidad extendida y de controlabilidad inversa extendida, pueden ser obtenidas por aplicación de la Descomposición de Valores Singulares (*SVD* por sus siglas en inglés) a la matriz de Toeplitz, de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{1|i}^{ref} &= USV^T \\
 &= [ U_1 \quad U_2 ] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{T}_{1|i}^{ref} &= U_1 S_1 V_1^T, \tag{2.69}
 \end{aligned}$$

donde,

$U \in \mathbb{R}^{li \times li}$  y  $V \in \mathbb{R}^{ri \times ri}$ : Son matrices ortogonales,  
 $S \in \mathbb{R}^{li \times ri}$ : Es una matriz diagonal que contiene los valores singulares de la matriz en orden descendente.

El rango de la matriz  $\mathcal{T}_{1|i}^{ref}$ , se encuentra considerando sólo aquellos valores singulares,  $S_1$ , que son diferentes de cero, o que tienen variación con números próximos a cero, a partir del cual es posible realizar la división de las submatrices  $\{U_1, S_1, V_1^T\}$ , de esta forma y a partir de las Ecuaciones (2.68) y (2.69), teniendo:

$$\mathcal{O}_i = U_1 S_1^{1/2}, \quad \mathcal{C}_i^{ref} = S_1^{1/2} V_1^T. \tag{2.70}$$

Una vez que las matrices de observabilidad y controlabilidad son conocidas, la matriz de observación  $C$  se encuentra a partir del primer bloque de filas de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_i$ , (2.71). La matriz de transición de estado es obtenida de las propiedades de invariancia de cambio de la observabilidad,  $\mathcal{O}_i$ , expresado como [Dohler and Mevel, 2011, Dohler and Mevel, 2013]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_i^\uparrow A &= \mathcal{O}_i^\downarrow, \\
 A &= \mathcal{O}_i^{\uparrow\uparrow} \mathcal{O}_i^\downarrow, \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\mathcal{O}_i^\uparrow = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_i^\downarrow = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}. \tag{2.72}$$

De esta forma el problema de identificación es resuelto aplicando las Ecuaciones (2.13) a (2.19). Es importante mencionar que debido a varias condiciones físicas de la estructura, además de las limitantes físicas y mecánicas de los sensores no es posible determinar las matrices  $\{A, C\}$  de manera exacta, por lo que solo se determinan estimaciones de las matrices  $\hat{A}, \hat{C}$  [Reynders et al., 2008].

## 2.6. Fast Multi-Order (FMO)

Para el conjunto de observaciones de un sistema, en el caso de identificación con ERA y SSICOV; o el conjunto de entradas y observaciones de un sistema para la identificación con MOESP, se realiza la elaboración de una matriz de datos, denominada matriz de subespacio,  $H_k$  cuya formación

depende de la metodología y datos con los que se está trabajando; de manera que se pueda realizar la siguiente factorización [Dohler and Mevel, 2011, Dohler and Mevel, 2013]:

$$H_k = \mathcal{W}\mathcal{O}_k\mathcal{Z}, \quad (2.73)$$

donde,

$\mathcal{O}_k$ : Es la matriz de observabilidad,

$\mathcal{Z}$ : Es una matriz de peso invertible,

$\mathcal{W}$ : Factor de peso que depende del algoritmo de selección del subespacio.

Dado que el orden verdadero de un sistema es desconocido, un hecho práctico en sistemas de identificación es asumir una secuencia creciente de órdenes  $j$  hasta un valor  $t$  que es más grande que el orden asumido, de la forma:  $n = n_j, j = 1, 2, \dots, t$  con:

$$1 < n_1 < n_2 < \dots < n_t < \min(il, ir), \quad (2.74)$$

donde,

$i$ : Es el arreglo de filas repetidas en la matriz Hankel,

$l$ : Es la cantidad de sensores observados,

$r$ : Es la cantidad de sensores de referencia, en caso de que los hubiera.

La elección de la secuencia de órdenes del modelo  $n_j$  depende del usuario, pero dado que la matriz de estado, por su formación, tiene el doble de filas que la matriz del sistema, se recomienda que la secuencia de órdenes se realice con números pares, de esta forma se garantiza que la respuesta en la mayoría de los casos, estará conformada por pares conjugados de valores, de la forma  $n_j = 2j$ .

Debido a que el cálculo de las  $n_j$  órdenes es un proceso iterativo que es costoso computacionalmente hablando y demora mucho tiempo, en el presente algoritmo se utiliza como punto clave la factorización (que puede ser  $SVD$  o  $QR$ ) que corresponde al orden máximo  $n_t$  del modelo deseado. De esta forma, la secuencia de  $n_j$  órdenes será calculada a partir de una única matriz  $n_t$ , reduciéndose el tiempo de cálculo de manera significativa.

El desarrollo del algoritmo es realizado de manera independiente para cada uno de los métodos de identificación descrito en los subtítulos 2.3, 2.4 y 2.5.

### 2.6.1. FMO Aplicado en ERA

En ERA la matriz de subespacio esta expresada de acuerdo a la Ecuación (2.23) de la forma:

$$\begin{aligned} H_k &= \mathcal{O}A^k\mathcal{C} \\ &= USV^T \\ &= [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Cuando el orden del modelo  $n$ , obtenido a partir de  $S_1$  en la Ecuación (2.75), es desconocido el algoritmo de *FMO*, puede ser aplicado a partir de la definición de múltiples órdenes aplicados a la ecuación de la forma:

$$H_k = [ U_j \quad \hat{U}_j ] \begin{bmatrix} S_j & 0 \\ 0 & \hat{S}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_j^T \\ \tilde{V}_j^T \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

donde,

$U_j$  y  $V_j \in \mathbb{R}^{l_i \times n_j}$ : Son matrices que tienen  $n_j$  columnas,  
 $S_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ : Es una matriz diagonal.

La matriz de transición de estado y la matriz de observación, a partir de las Ecuaciones (2.32) y (2.33), se escriben de la forma:

$$A_j = S_j^{-1/2} U_j^T H_{k+1} V_j S_j^{-1/2}, \quad (2.77)$$

$$C_j = E_l^T U_1 S_1^{1/2}. \quad (2.78)$$

Si se considera unas matrices  $\{A_t, C_t\}$  que corresponde al orden máximo en el sistema  $n_t$ , se ha demostrado [Dohler and Mevel, 2013] que las matrices  $\{A_j, C_j\}$  que corresponden a un orden  $n_j$  son submatrices de  $\{A_t, C_t\}$  y cumple con las relaciones  $A_j = A_{t[1:n_j, 1:n_j]}$  y  $C_j = C_{t[l, 1:n_j]}$ .

Por lo tanto, sólo es necesario realizar el cálculo de la matriz  $A_t$  para el máximo orden deseado  $n_t$  y las matrices  $A_j$  son determinadas iterativamente como submatrices de  $A_t$  sin requerir un mayor cálculo computacional.

### 2.6.2. FMO Aplicado en MOESP

En *MOESP* la matriz de subespacio está expresada de acuerdo a la Ecuación (2.43) después de que ha sido eliminado el efecto de la excitación externa,  $U_{k,i,N}$ , y se expresa como la matriz  $L_{22}$ :

$$H_k \equiv L_{22},$$

$$\begin{aligned} L_{22} &= \mathcal{O}_i X_{0,N} Q_2 \\ &= [ U_1 \quad U_2 ] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que a partir de la descomposición de valores singulares de  $L_{22}$  es posible determinar la observabilidad del sistema; es posible definir los  $n_j$  órdenes buscados en el sistema, a partir de la siguiente relación:

$$L_{22} = [ U_j \quad \tilde{U}_j ] \begin{bmatrix} S_j & 0 \\ 0 & \tilde{S}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_j^T \\ \tilde{V}_j^T \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

donde,

$U_j$  y  $V_j \in \mathbb{R}^{l_i \times n_j}$ : Son matrices que tienen  $n_j$  columnas,



$S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$ : Es una matriz diagonal.

Y la matriz de observabilidad queda expresada de la forma siguiente:

$$\mathcal{O}_j \cong U_j S_j^{1/2}. \quad (2.80)$$

Si se considera, al igual que en el caso de *FMO* para *ERA*, que la matriz  $\mathcal{O}_t$  corresponde al orden máximo en el sistema  $n_t$ , queda demostrado que la matriz  $\mathcal{O}_j$  que corresponde al orden  $n_j$  es una submatriz de  $\mathcal{O}_t$  y cumple con la relación  $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}_{t[1:n_j, 1:n_j]}$ . De esta manera, sólo es necesario realizar el cálculo de una descomposición *SVD* a partir de la matriz  $L_{22}$  para determinar el máximo orden deseado  $n_t$  y la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_t$  y las matrices  $\mathcal{O}_j$  son determinadas iterativamente.

### 2.6.3. FMO Aplicado en SSICOV

En el algoritmo *SSICOV* la matriz de subespacio está expresada como la matriz de Toeplitz,  $\mathcal{T}_{1|i}^{ref}$ , Ecuación (2.68), definida como:

$$\begin{aligned} H_k &\equiv \mathcal{T}_{1|i}^{ref}, \\ \mathcal{T}_{1|i}^{ref} &= \mathcal{O}_i \mathcal{C}_i^{ref} \\ &= [ U_1 \quad U_2 ] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir de la descomposición de valores singulares la matriz de Toeplitz,  $\mathcal{T}_{1|i}^{ref}$ , es posible determinar la observabilidad del sistema; por tanto, la subdivisión de las matrices mostradas en la expresión anterior a partir de un  $n_j$  orden buscado en el sistema, se realiza con la siguiente relación:

$$\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = [ U_j \quad \tilde{U}_j ] \begin{bmatrix} S_j & 0 \\ 0 & \tilde{S}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_j^T \\ \tilde{V}_j^T \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

donde,

$U_j$  y  $V_j \in \mathcal{R}^{l_i \times n_j}$  son matrices que tienen  $n_j$  columnas,  
 $S_j \in \mathcal{R}^{n_j \times n_j}$  es una matriz diagonal.

Donde, la matriz de observabilidad queda expresada de la forma siguiente:

$$\mathcal{O}_j = U_j S_j^{1/2}.$$

Para el caso en el que se busca un orden máximo  $n_t$ , se tendrá una correspondiente matriz  $\mathcal{O}_t$ ; por otro lado, los órdenes intermedios  $n_j$  serán obtenidos como submatrices de  $\mathcal{O}_t$ , cumpliendo la relación  $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}_{t[1:n_j, 1:n_j]}$ . La determinación de las matrices de transición de estado,  $A$ , y la de observación,  $C$ , son determinadas con las expresiones (2.71) y (2.72).

Como alternativa al procedimiento anterior, una propuesta más eficiente y numéricamente más estable es presentada, en base a una descomposición *QR* [Dohler and Mevel, 2013]. De la Ecuación (2.71) se sabe que la solución estable de la matriz de transición de estado es:

$$A_j = \mathcal{O}_j^{\uparrow\uparrow} \mathcal{O}_j^{\downarrow}, \quad (2.82)$$

donde,

$[\cdot]^{\uparrow\uparrow}$ : Es la pseudoinversa de Moore-Penrose.

Una solución alternativa a la pseudoinversa que es eficiente y estable se basa en la factorización  $QR$  de la matriz expresada como:

$$\mathcal{O}_j^{\uparrow} = Q_j R_j, \quad (2.83)$$

$$S_j = Q_j^T \mathcal{O}_j^{\downarrow}, \quad (2.84)$$

$$A_j = R_j^{-1} S_j, \quad (2.85)$$

donde,

$Q_j \in \mathbb{R}^{il \times n_j}$ : Es una matriz con columnas ortogonales,

$R_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ : Es una matriz triangular superior,

$S_j \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ : Es una matriz cuadrada.

Finalmente la solución alternativa al problema de mínimos cuadrados se muestra en la Ecuación (2.82).

Si se considera que la Ecuación (2.85) es calculada para un orden máximo  $n_t$  queda demostrado que las matrices  $\{R_j, S_j\}$ , correspondientes a los órdenes  $n_j$ , son submatrices de  $\{R_t, S_t\}$  y por lo tanto de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_t$ . Por lo tanto se cumple con las relaciones  $R_j = R_{t[1:n_j, 1:n_j]}$  y  $S_j = S_{t[1:n_j, 1:n_j]}$ . De esta manera, sólo es necesario realizar el cálculo de la factorización  $QR$  que corresponde a la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_t$ , para el máximo orden deseado  $n_t$  y, las matrices de transición de estado  $A_j$  para los órdenes  $n_j$  son determinadas iterativamente. El cálculo de la matriz de observación  $C_j$  es realizado a partir de la matriz de observabilidad como se definió en la Ecuación (2.72) y queda expresada como:

$$C_j = \mathcal{O}_{t[1:l, 1:n_j]}, \quad (2.86)$$

donde,

$l$ : Es la cantidad de sensores para la observación.

El desarrollo de las demostraciones con las que ha sido posible generalizar los  $n_j$  órdenes a partir de un orden máximo  $n_t$  para los tres algoritmos de la presente sección; al igual que un algoritmo para la realización los tres procesos de identificación, se encuentran descritos en el Anexo B.

## 2.7. Diagrama de Estabilización

Los diagramas de estabilización tienen la finalidad de determinar las propiedades modales representativas de una estructura en análisis, no sólo diferenciando los polos estables del sistema de los polos matemáticos, sino determinando los valores más representativos de los polos del sistema. La

realización del diagrama de estabilización descrito en la presente sección, se hace en función al planteamiento descrito por Bakir [Bakir, 2011] y con modificaciones locales realizadas a fin de obtener mayor consistencia en los resultados. La nueva técnica, automatiza el diagrama de estabilización en función a varios umbrales; para ello, se necesita además modelar el diagrama como un histograma en el que se consideran varias estrategias asociadas a los bins o contenedores del histograma. Los registros experimentales de esta nueva técnica muestran buenos resultados en la selección de polos representativos de la estructura.

### 2.7.1. Criterio Fuerte de Selección

Antes de empezar con la automatización del diagrama de estabilización es necesario realizar un limpieza de los polos que son de poco interés para el cálculo, para lo cual, se utiliza el denominado Criterio Fuerte de selección.

Este criterio considera la eliminación de polos que no son de interés para el estudio de estabilidad de las propiedades modales. Para ello, se considera que la frecuencia,  $f$ , tiene una ventana de observación, desde  $0 [Hz]$  hasta una  $f_{max} [Hz]$ , todos los polos que estén por sobre este límite de frecuencia no serán considerados. Por otro lado, debido a que la razón de amortiguamiento,  $\beta$ , para valores negativos no tiene una representación física y bajo condiciones normales es difícil que llegue a superar el  $20[\%]$ , se realiza un procedimiento similar al de la frecuencia fijando una ventana de observación desde  $0[\%]$  hasta  $\beta_{max}[\%]$ . De esta forma se ha realizado un procedimiento similar a un filtro pasabajo en la frecuencia y amortiguamiento que reduce la cantidad de polos a evaluar. Finalmente sólo se consideran para la evaluación uno de los polos que tienen su respectivo polo conjugado, eliminando los polos que han sido identificados de manera individual.

### 2.7.2. División del Diagrama de Estabilización en Histograma

Luego de haber reducido la cantidad de polos a evaluar, se procede a realizar la división del diagrama de estabilización en un histograma, que consiste en la formación de bins que pueden tener la capacidad de estar superpuestos hasta en un  $50\%$  de su ancho total, para fines de estabilidad. El ancho del bin denominado como,  $w_b$ , es calculado de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$w_b = \frac{0,2f_{max}}{100}, \quad (2.87)$$

donde,

$f_{max}$ : Es la frecuencia máxima de interés que se ha definido en el subtítulo anterior.

De esta forma es posible observar la cantidad de polos que existen en cada bin independiente de su estabilidad en cualquiera de las propiedades modales consideradas. La figura resultante de graficar los polos dentro de los bins, puede ser una representación rápida y a priori, pero no contundente de la manera en cómo se están agrupando los polos para la estabilización.

Dado que los bin del histograma pueden estar superpuestos, varios polos pueden estar a la misma vez en dos bins contiguos; para limitar este hecho, se asume que los polos se encuentran agrupados en un lugar determinado del bin y los polos distantes de este agrupamiento se encuentran en la zona

de superposición o de poco interés y por tanto son eliminados. Para lograr este objetivo se utiliza el concepto estadístico de valores atípicos, que se definen como:

$$\begin{cases} R_I = Q_1 - k(Q_3 - Q_1) \\ R_S = Q_3 + k(Q_3 - Q_1) \end{cases} \quad (2.88)$$

donde,

$R_I$  y  $R_S$ : Es el rango inferior y rango superior, respectivamente,

$Q_1$  y  $Q_3$ : Es el cuartil inferior y cuartil superior, respectivamente,

$k$ : Es una constante no negativa que toma valores de 1,5 para valores atípicos leves y 3,0 para valores atípicos extremos.

En las todas las condiciones evaluadas, se asume que los valores atípicos son leves, de esta forma se eliminan valores extremos y repetidos entre bins.

### 2.7.3. Polos Estables en Frecuencia, Amortiguamiento y Criterio Modal de Certeza (MAC)

La determinación de parámetros modales de una estructura con diagramas de estabilización, requieren fijar umbrales de variación para la frecuencia, amortiguamiento y forma modal; estos umbrales son fijados por el usuario y permiten controlar la estabilidad de diagrama en función del orden del sistema. Las fórmulas utilizadas son:

$$\frac{|f^n - f^{n+1}|}{f^n} < \lim_f \%, \quad (2.89)$$

$$\frac{|\beta^n - \beta^{n+1}|}{\beta^n} < \lim_\beta \%, \quad (2.90)$$

$$(1 - MAC(n, n + 1)) < \lim_{MAC} \%, \quad (2.91)$$

donde,

$n$ : Denota el orden del sistema,

$f$ : Es la frecuencia,

$\beta$ : Es la razón de amortiguamiento,

$MAC$ : es el criterio modal de certeza, que se escribe como [Allemang, 2003]:

$$MAC(n, n + 1) = \frac{|\phi^{(n)H} \phi^{(n+1)}|^2}{\left(\phi^{(n)H} \phi^{(n)}\right) \left(\phi^{(n+1)H} \phi^{(n+1)}\right)}, \quad (2.92)$$

donde,

$\phi^{(n)}$ : Es la  $n$ -ésima forma modal compleja,

$[\cdot]^H$ : Es el operador Hermítico que representa la conjugada transpuesta del vector,

$n$ : Es el orden del sistema que se está analizando.

Por defecto, el diagrama de estabilización debe tener los siguientes límites para los umbrales de frecuencia que son: 1 % para la frecuencia, 5 % para la relación de amortiguamiento y 2 % para el *MAC* [Núñez, 2009]. Dentro del programa, los polos estables son aquellos que se encuentran dentro de los límites fijados para frecuencia, amortiguamiento y *MAC*. Los polos identificados se grafican con el símbolo,  $\circ$ ; los estables con aciertos en frecuencia, amortiguamiento y *MAC*, se grafican con el símbolo,  $+$ ; los polos estables con aciertos para frecuencia y *MAC*, se grafican con el símbolo,  $\nabla$ ; y los polos estables con aciertos para frecuencia y amortiguamientos se grafican con el símbolo,  $\triangle$ .

#### 2.7.4. Colinealidad de Fase Modal (MPC)

La Colinealidad de Fase Modal, MPC (Modal Phase Collinearity) por sus siglas en inglés, cuantifica la consistencia espacial de las magnitudes real y compleja de la forma modal que es analizada. Clásicamente, los modos de una estructura vibran en fase, son reales; o fuera de fase, denominados monofase [Pappa et al., 1992].

El comportamiento monofásico se presenta cuando la matriz de varianza-covarianza,  $S$ , de la parte real y compleja de las formas de la forma modal,  $\phi$ , tiene solo un valor propio,  $\lambda_1$  ó  $\lambda_2$ , diferente de cero, lo que significa que son colineales. Por el contrario, si los valores y vectores propios,  $\lambda_1$  ó  $\lambda_2$ , son iguales o aproximadamente iguales, significa que la fase de los ángulos de las formas modales no están correlacionados.

Considerando que:

$\phi \in \mathbb{C}^{l \times 1}$ : Es la forma modal con  $l$  grados de libertad,

$\phi'$ : Es su parte real,

$\phi''$ : Es parte compleja.

La varianza y covarianza de las partes reales e imaginarias pueden ser calculadas como sigue:

$$S_{xx} = \phi'^T \phi', \quad (2.93)$$

$$S_{yy} = \phi''^T \phi'', \quad (2.94)$$

$$S_{xy} = \phi'^T \phi'', \quad (2.95)$$

siendo:

$$\mu = \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2S_{xy}}, \quad (2.96)$$

$$\beta = \mu + \text{sgn}(S_{xy}) \sqrt{\mu^2 + 1}, \quad (2.97)$$

$$\tau = \tan^{-1} \beta. \quad (2.98)$$

Los valores propios de la varianza covarianza de la matriz son entonces:

$$\lambda_1 = S_{xx} + \frac{S_{xy} (2 (\mu^2 + 1)) \sin^2 \tau - 1}{\tau}, \quad (2.99)$$

$$\lambda_2 = S_{yy} - \frac{S_{xy} (2 (\mu^2 + 1)) \sin^2 \tau - 1}{\tau}. \quad (2.100)$$

Finalmente el MPC para el modo  $i$  es luego definido como la expresión:

$$MPC_i = \left[ 2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 0,5 \right) \right]^2 \quad (\times 100 \%). \quad (2.101)$$

Los valores de MPC varían entre 0 % que representa un modo no correlacionado y 100 %, que representa un resultado monofásico.

### 2.7.5. Polos Estables y Valor Representativo

Los polos estables se seleccionan a partir de un límite superior de polos estables por bin, de esta forma se evitará considerar bins donde la cantidad de polos no sea representativa. En caso de tener varios bins contiguos o cercanos con una cantidad de polos estables que es mayor al límite superior prefijado; se aplica una condición de vecindad, a partir de una distancia en frecuencia que la define el usuario, con la que se busca el bin que tiene mayor cantidad de polos estables y se selecciona como el bin representativo.

El valor representativo de los polos estables de frecuencia y amortiguamiento son elegidos en función al valor más probable, esto quiere decir que de todos los polos estables en frecuencia y amortiguamiento se calcula el valor medio y se elige la frecuencia y el amortiguamiento que estén más cercanos al valor medio; para el caso de formas modales, se considera el valor más alto de MAC entre órdenes contiguas para la elección de la forma modal representativa.

### 2.7.6. Promedio Normalizado de la Densidad Espectral de Potencia (ANPSD)

Adicionalmente es usual adjuntar en el diagrama de estabilización la figura de la Densidad Espectral de Potencia, PSD por sus siglas en inglés, de uno de los canales observados, de modo que las frecuencias resonantes del sistema, coincidan o estén localizadas en las proximidades de las frecuencias donde se encuentran los polos estables.

Pero realizar este procedimiento en forma descuidada o sin un buen criterio, puede resultar en una visión sesgada de la observación, ya que la localización del canal elegido puede coincidir con un punto nodal, ocultando alguna frecuencia representativa del sistema. Para solucionar este hecho, es necesario considerar dos pasos: el promedio de todos los canales y la normalización por la división de la suma de los PSD de cada frecuencia. De esta forma la figura observada corresponde a un conjunto de frecuencias estimadas de la estructura para la condición de ensayo o análisis que recibe el nombre de Promedio Normalizado de la Densidad Espectral de Potencia, ANPSD (Averaged Normalized Power Spectral Density) por sus siglas en inglés. La función se define de acuerdo a Felber [Felber, 1993]:

$$ANPSD(f_k) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \frac{PSD_i(f_k)}{\sum_{k=0}^n PSD_i(f_k)}, \quad (2.102)$$

donde,

$f_k$ : Es la frecuencia discreta,

$n$ : Es el número de frecuencias discretas,

## CAPÍTULO 2. IDENTIFICACION DE PROPIEDADES MODALES CON ESPACIO ESTADO

$l$ : Es el número de canales,

$PSD(f)_i$ : Es la densidad espectral de potencia del canal  $i$ .

La implementación de esta función ha sido utilizada en varias publicaciones y tesis [Bilbao, 2014, Cara et al., 2013, Grimmelsman, 2006]. Por último, la implementación de las rutinas en un modelo numérico esta desarrollada en el Anexo C de esta tesis.

## Capítulo 3

# IDENTIFICACIÓN DE DAÑO POR INTERPOLACIÓN LINEAL UTILIZANDO PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA

### 3.1. Introducción

En este Capítulo se presenta un resumen de conceptos y metodologías propuestas por Gupta [Gupta, 2003], para la implementación de un algoritmo de enseñanza supervisada que emplea interpolación lineal con mínima entropía relativa con ponderación de pesos, que se utiliza en la regresión y clasificación de vectores aplicados a la detección de daño.

Antes de realizar una descripción matemática del algoritmo planteado, se realiza una revisión a los conceptos que se ponen de manifiesto para la solución en la identificación de daño en sistemas estructurales a partir de modelos, los siguientes subtítulos revisan y ponen en claro las definiciones principales complementarias a las mencionadas en este Capítulo.

#### 3.1.1. Detección y Localización de Daño Basado en Modelos

Cuando se grafican las formas modales de una estructura dinámica es posible observar que éstas no son uniformes y su forma es diferente para cada modo. Esto significa que cualquier daño puede afectar cada modo de manera diferente y depende en gran medida, de la localización del daño en la estructura [Cawley, 1978].

El daño en cualquier elemento estructural, se puede modelar como la reducción local de la rigidez; si ese daño se encuentra situado en un sector de deformación (esfuerzo) cero, para un modo dado; entonces el daño no tendrá efecto sobre la frecuencia natural de ese modo; pero, si el daño está situado en un sector de máxima deformación (esfuerzo), se tendrán grandes modificaciones en la frecuencia natural que corresponde al modo en observación.

Como ejemplo se consideran los primeros tres modos de una barra uniforme, apoyada en sus



### CAPÍTULO 3. IDENTIFICACIÓN DE DAÑO POR INTERPOLACIÓN LINEAL UTILIZANDO PRINCIPIO DE MÁXIMA ENTROPÍA

dos extremos, cuyas formas modales se muestran en la Figura 3.1. Un daño en el punto O, en la mitad de la barra, puede inducir a cambios máximos en las frecuencias del primer y tercer modo; por otro lado, tendrá un efecto despreciable en la frecuencia del segundo modo. Si se aplica un daño situado en el punto A, éste tendría pequeñas modificaciones en el primer y tercer modo, mientras que produciría cambios importantes en el segundo modo.

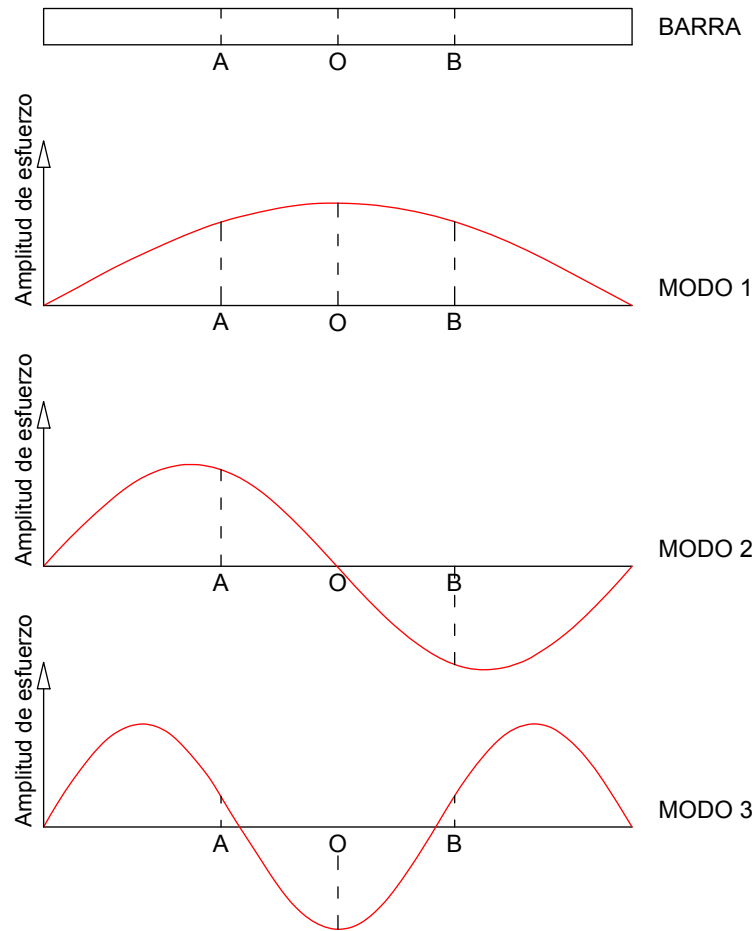


Figura 3.1: Esquema de la Distribución de Esfuerzos de una Barra en las Primeras Tres Formas Modales.

Por simetría, para la barra uniforme, la presencia de daño en el punto B sería similar al del punto A. Pero, si la barra tiene una sección transversal variable o una adición variable de masas, la modificación de la forma modal permite diferenciar la ubicación de daño entre A y B [Cawley, 1978].

De esta forma, en una estructura, es posible:

- Conocer la presencia de daño a partir de la variación de las frecuencias modales que dependen de la distribución de esfuerzos de las formas modales, y
- La localización de la posición del daño será determinada a partir de la comparación de muchos

modos en diferentes lugares de la estructura, comparados con cambios teóricos, calculados para daños en diferentes lugares.

En el presente Capítulo se presenta la aplicación del método de entropía para la identificación de daño en estructuras tridimensionales considerando la respuesta y el comportamiento de un modelo y comparando los resultados con los observados en una estructura monitoreada y sometida a diferentes ensayos de vibración. Se considera que los métodos aplicados en la presente tesis pueden ser aplicables a otras estructuras dinámicas de mayores dimensiones.

Las razones de amortiguamiento no fueron monitoreadas, debido a la alta variabilidad que se tenían en ensayos con características similares. A pesar de ello, se esperaría que el amortiguamiento incrementa con el aumento de daño.

### 3.1.2. Enseñanza Supervisada

La enseñanza supervisada puede ser definida como un tipo de intuición que en términos generales se describe como: *"El funcionamiento de la mente por el que se infiere que lo que sabemos que es verdad en un caso o casos particulares, puede ser cierto en todos los casos en los que se asemeja a las antiguas condiciones"* [Gupta, 2003], por lo tanto, la intuición puede ser vista como una recomendación para la estimación de lo incierto y juzgar de acuerdo a lo observado.

La formulación matemática de la enseñanza supervisada necesita definir un 'vector de características', descrito por un vector con valores reales  $X \in \mathbb{R}^d$ , siendo  $d$  la dimensión del vector de características; y un 'valor de observación' descrito por una variable  $Y \in \mathbb{R}$ .

Considerando que las variables  $X$  e  $Y$  para una condición de entrenamiento son independientes de cualquier otra condición de entrenamiento es posible obtener una distribución conjunta,  $P_{X,Y}$ , para  $n$  muestras de entrenamiento, definidas por  $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)\}$ .

El problema central de enseñanza supervisada es por tanto estimar el valor de  $Y$  dado un vector  $X$ , la estimación se obtiene con la distribución condicional  $P_{Y|X}$ , definida por la Ecuación 3.1:

$$P_{Y|X} = \frac{P_{X|Y}P_Y}{P_X}, \quad (3.1)$$

donde,

$P_{Y|X}$ : Es la probabilidad condicional de  $Y$  dado  $X$ ,

$P_{X|Y}$ : Es la probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y$ ,

$P_X$ : Es la probabilidad marginal de  $X$ ,

$P_Y$ : Es la probabilidad marginal de  $Y$ .

La aplicación de algoritmos de enseñanza supervisada, requiere una selección adecuada de datos del vector de características,  $X$ , de modo que se aporte con información relevante para la solución del problema; sin embargo, muchas veces los modelos diseñados para alcanzar un bajo riesgo, sobre ajustan al conjunto de datos de manera que no existe una buena generalización para la realización

con datos nuevos.

Los algoritmos de enseñanza supervisada se pueden dividir en dos campos:

- a. **Algoritmos paramétricos.** Que asumen un modelo para la obtención de datos y los parámetros para los que se asume el modelo son estimados de los datos de entrenamiento. Algunos ejemplos de algoritmos son: mínimos cuadrados ajustados al hiperplano, ajuste de curvas, etc.
- b. **Algoritmos no paramétricos.** No asumen una estructura para los datos y utilizan las muestras como fuente de entrenamiento. Algunos ejemplos de algoritmos son: ponderaciones a vecinos próximos, redes neuronales, árboles de decisión, etc.

Dado un conjunto de muestras, es posible considerar un caso ideal en el que un algoritmo podría desempeñarse mejor dadas más características (que aumentan su dimensionalidad aportando mayor información) y dadas más muestras de entrenamiento (que permiten conocer mejor el sistema que se está estudiando). Sin embargo éste no es un hecho simple, ni aplicable a la mayoría de los algoritmos, ya que muchas características pueden dificultar o confundir la estimación y muchas muestras pueden sesgar la clasificación de la observación. Por este motivo los algoritmos de enseñanza supervisada todavía tienen dos dificultades persistentes que no han podido ser completamente superadas: la primera (i), relacionada con la dimensionalidad y la segunda (ii), relacionada con el sesgo en la distribución de las muestras del entrenamiento.

### 3.1.3. Vecinos Próximos

Cuando se considera la selección de observaciones, el método no-paramétrico más conocido es el de vecinos próximos. Para conseguir este propósito se fija un radio  $R$  o el volumen  $V$  de una esfera alrededor del vector de muestra  $X_O$ , de esta forma, sólo se consideran para el entrenamiento aquellos vectores  $X_i$  que se encuentren al interior de la forma definida, asegurando su proximidad al vector  $X_O$ , de modo que sean influyentes en la estimación [Gupta et al., 2006, Fierro Aguirre, 2014].

Como complemento a la descripción del párrafo anterior, [Loftsgaarden et al., 1965], introdujeron un método alternativo en el que se fijan  $k$ -vecinos próximos que serán utilizados en la clasificación y estimación, alternativamente se puede también fijar un radio entre el vector  $X_O$  y el  $k$ -ésimo vecino que está a mayor distancia del vector  $X_O$ .

El enfoque de los  $k$ -vecinos próximos puede ser ponderado por una función de probabilidad de peso,  $\omega_j$ , [Stone, 1977], que permite generalizar la asignación de pesos a todos los vecinos considerados:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_j(X) \\ \omega &= \omega_j(X^1, X^2, \dots, X^n), \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

La función de probabilidad de peso, está restringida por:

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(X) = 1. \tag{3.3}$$

A su vez, la estimación del valor buscado está restringido a:

$$\hat{Y}(X) = \sum_{j=1}^n (X) Y^j. \quad (3.4)$$

De esta manera se puede garantizar que el peso de los vectores de entrenamiento que estén más alejados que el  $k$ -vecino próximo, serán iguales a cero, obteniéndose estimadores consistentes. De manera general, el peso de los  $k$ -vecinos próximos, pueden presentar una reducción monotónica de las ponderaciones a los vecinos que es función de la distancia que tiene con el vector de prueba,  $X_i$ , pero este enfoque no es útil, ya que no permite conocer donde se encuentra un punto respecto a otro, por lo tanto la información respecto a la distribución espacial  $P_X$ , es desconocida.

Este problema puede ser solucionado con adición del kernel de una distribución que es conocida a priori, de esta manera se puede ponderar las muestras en todos los lados del punto de prueba de la vecindad de manera equitativa, reduciendo probabilísticamente el peso de los vectores dispersos en la cola de la distribución. Además de esto, para muestras equidistantes el kernel asimétrico asigna una menor ponderación donde hay más muestras o son más densas y, aumenta la ponderación donde hay pocas muestras o están más dispersas [Gupta et al., 2006].

#### 3.1.4. Interpolación Lineal

La interpolación lineal es una metodología de regresión tradicionalmente aplicada a una vecindad con  $d + 1$  muestras de entrenamiento  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{d+1}, y_{d+1})\}$ , donde  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $d$  es la dimensión del vector de características, tomando en cuenta la relación espacial del vecindario de entrenamientos de las muestras. Con la finalidad de solucionar la ecuación de interpolación lineal de manera exacta, el número de incógnitas  $k$ , debe ser igual al número de restricciones  $d + 1$ .

Frecuentemente, existe una mayor cantidad de muestras que son consideradas relevantes para la estimación del punto evaluado  $X_i$ . Considerando el efecto de incluir más datos  $d + 1$  a la ecuación de interpolación lineal,  $k > d + 1$ , habrían más incógnitas que restricciones, haciendo al sistema indeterminado y con infinitas soluciones. Este problema es resuelto con la adición de un criterio como la maximización de la entropía de los pesos, de esta manera se minimizan los pesos de cualquier muestra de entrenamiento, que es equivalente a considerar una distribución uniforme sobre los pesos de la vecindad, pero, de esta manera un punto podría ser tan elegible como otro porque los pesos serían tan similares como fuese posible.

Un enfoque más general corresponde al empleo de la mínima entropía relativa, con este concepto se puede asignar más pesos a ciertas muestras del entrenamiento. De esta manera, dado un kernel o un distribución de pesos (monotónicamente decrecientes), se puede resolver el problema de la indeterminación del sistema lineal de ecuaciones con la solución que minimiza la entropía relativa del modelo (o kernel).

### 3.2. Aproximación Lineal con Máxima Entropía

El objetivo principal que se busca con la implementación de la presente metodología es determinar la mejor estimación para un estado de observación, correspondiente a daño, para un

vector de características que correspondan a una condición especial de observación o de ensayo. Para ello se considera el vector de observación definido como  $Y^j = \{Y_1^j, Y_2^j, \dots, Y_m^j\} \in \mathbb{R}^m$ , que representa el  $j$ -ésimo estado de daño de la estructura, y; el vector característico definido como  $X^j = \{X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j\} \in \mathbb{R}^n$ , que representa el conjunto de características de vibración de la estructura asociada con un estado de daño  $Y^j$ , obtenido del modelo numérico.

Los vectores  $X^j$  e  $Y^j$ , tienen una distribución de probabilidad conjunta  $P_{X,Y}$ , con muestras que son idénticamente independientes, por lo que, para cada vector de observación existe un vector de características que es independiente de cualquier otra condición en la estructura; considerando que el ensayo cuenta con  $k$  muestras, la representación de la base de datos queda descrita de la forma  $\{(X^1, Y^1), (X^2, Y^2), \dots, (X^k, Y^k)\}$ . Al disponer del modelo numérico de la estructura, es posible obtener un vector de observación  $X^j$  a partir de asignación de daño a un elemento  $Y^j$ . El problema principal en algoritmos de enseñanza supervisada se encuentra en realizar un proceso inverso al enunciado anterior, es decir, en estimar de mejor forma la asignación de daño a un elemento  $Y^j$  a partir de las observaciones que se realizan a la estructura. Dicho de otra forma, determinar la mejor estimación de  $P_{Y|X}$ . Para conseguir esto, se define que el vector de observación de ensayo de la estructura,  $X$ , es igual a la combinación lineal de toda la base de datos  $X^j$  con un vector de ponderación  $\omega_j$ ; esta ponderación a su vez será multiplicada por toda la base de datos de los vectores  $Y^j$  a fin de obtener la mejor estimación del daño  $Y$  asociado a  $X$ , como se ha definido en la Ecuación (3.4).

De acuerdo a lo descrito, el vector de características de ensayo  $X$ , considerando un conjunto de  $N$  vecinos más cercanos y una combinación lineal se escribe como:

$$X = \sum_{j=1}^N \omega_j(X) X^j(X), \quad (3.5)$$

donde:

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ : Son funciones de peso, y

$X^1(X), X^2(X), \dots, X^N(X)$ : Son los  $N$  vecinos más cercanos al vector de ensayo  $X$ .

La Ecuación (3.1), se encuentra restringida por la Ecuación (3.4),  $\sum_{j=1}^N \omega_j(X) = 1$ , y puede ser expresada como el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$Aw = b, \quad w \geq 0, \quad (3.6)$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \dots & X_1^N \\ X_2^1 & X_2^2 & \dots & X_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n^1 & X_n^2 & \dots & X_n^N \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times N}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \\ 1 \end{bmatrix}_{(n+1) \times 1}. \quad (3.7)$$

Una vez que  $\omega$  ha sido determinado es posible obtener el la estimación de  $\hat{Y}$  con la siguiente expresión:

$$\hat{Y} = \sum_{j=1}^N \omega_j(X) Y^j(X), \quad (3.8)$$

donde,

$Y^1(X), Y^2(X), \dots, Y^N(X)$ : Son las correspondientes observaciones hasta los  $N$  vecinos seleccionados.

Cuando el sistema de Ecuaciones (3.8) es indeterminado, su solución es abordada por medio de una técnica de optimización de la familia de mínimos cuadrados, sin embargo, estos métodos pueden asignar pesos negativos a la solución, lo que no tiene representación física. Como alternativa a este procedimiento se plantea la utilización del principio de Máxima Entropía cuya formulación sólo asigna pesos positivos [Meruane and Ortiz-Bernardin, 2015]

El concepto de entropía de información fue introducido por Shannon como una medición de la incertidumbre en la comunicación de informaciones [Shannon, 1948], con la formulación de entropía, Jaynes postuló el principio de máxima entropía [Jaynes, 1957], que es adecuada para encontrar una distribución de probabilidad con menos sesgo para las muestras y permite tener una misma probabilidad de ocurrencia para todas las muestras; evitando de esta forma favorecer a una muestra respecto a cualquier otra.

Considerando un conjunto de  $N$  ensayos discretos  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . La posibilidad de que cada evento ocurra es igual a  $p_j = p(x_j) \in [0, 1]$  con una cantidad de información igual a  $-\ln p_j$ . La entropía de Shannon se define como:

$$H(p) = - \sum_{j=1}^N p_j \ln(p_j). \quad (3.9)$$

$Y$  es el promedio de la incertidumbre de los  $N$  ensayos representados por la distribución  $\{p_1, \dots, p_N\}$ . La distribución menos sesgada, que maximiza los pesos, y por tanto que tiene la mayor probabilidad de ocurrir es obtenida según el siguiente problema de optimización correspondiente al principio de máxima entropía de Jaynes [Meruane and Ortiz-Bernardin, 2015].

$$\max_{p \in \mathbb{R}_+^N} \left[ H(p) = - \sum_{j=1}^N p_j \ln(p_j) \right]; \quad (3.10)$$

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1, \quad \sum_{j=1}^N p_j g_r(x_j) = \langle g_r(x) \rangle, \quad (3.11)$$

donde,

$\mathbb{R}_+^N$ : Es un conjunto de muestras no negativas,

$\langle g_r(x) \rangle$ : Es el valor esperado de la función  $g_r(x_j)$ , para  $(r = 0, 1, \dots, m)$ , que en el fondo llega a

ser el vector esperado de observación  $\hat{Y}$ .

Si se considera la probabilidad  $p_j$ , tiene una distribución  $m_j$  que se supone conocida a priori, la incertidumbre se reduce hasta  $-\ln p_j + \ln m_j = -\ln \left( \frac{p_j}{m_j} \right)$ . Alternativamente, puede ser escrito como:

$$\max_{p \in \mathbb{R}_+^N} \left[ H(p) = - \sum_{j=1}^N p_j \ln \left( \frac{p_j}{m_j} \right) \right]; \quad (3.12)$$

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^N p_j = 1, \quad \sum_{j=1}^N p_j g_r(x_j) = \langle g_r(x) \rangle. \quad (3.13)$$

La expresión  $-\sum_{j=1}^N p_j \ln(p_j/m_j)$ , recibe el nombre de mínima entropía relativa [Kullback and Leibler, 1951] la diferencia entre la máxima entropía y la mínima entropía relativa, radica en que la primera asigna una distribución equivalente a todas las muestras de la base de datos, mientras que el segundo trabaja con la divergencia de Kullback-Leibler que es una medida de similitud entre dos distribuciones de probabilidad, por tanto, con la expresión (3.12), se minimiza la distancia entre la distribución de la muestra y la distribución impuesta a priori, favoreciendo a una muestra  $x_j$  ( $i < N$ ) de individuos de la base de datos.

Debido al carácter general del enunciado y la flexibilidad de su formulación, es posibles adoptar el enfoque de mínima entropía relativa al problema de identificación de pesos correspondiente a la interpolación lineal, la expresión es:

$$\max_{w \in \mathbb{R}_+^N} \left[ H(w) = - \sum_{j=1}^N w_j \ln \left( \frac{w_j(X)}{m_j(X)} \right) \right], \quad (3.14)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\sum_{j=1}^N w_j(X) = 1, \quad \sum_{j=1}^N w_j(X) \tilde{X}^j = 0; \quad (3.15)$$

donde,

$m_j(X)$ : Es una distribución a priori que actúa como un 'primer supuesto' para  $w_j(X)$ ,  
 $\tilde{X}^j = X^j - X$ : Ha sido introducido como un cambio de medida con fines de estabilidad.

Una distribución típica para  $m_j(X)$  que tiene la forma de una anterior es una distribución gaussiana suavizada, es definida por [Arroyo and Ortiz, 2006], expresada como:

$$m_j(X) = \exp \left( -\beta_j \|\tilde{X}^j\|^2 \right), \quad (3.16)$$

donde,

$$\beta_j = \gamma/h_j^2$$

$\gamma$ : Es un parámetro que controla el radio de la distribución gaussiana alrededor del vector  $X^j$ ,  
 $h_j$ : Es una distancia Euclidiana entre vecinos que puede ser distinta para cada  $X^j$ .

En vista al problema de optimización planteado la maximización de la entropía elige la solución de peso que compromete al menos a una de las muestras de bases de datos [Gupta, 2003]. La solución del problema de optimización con máxima entropía es manejado por utilización del procedimiento de multiplicadores de Lagrange que se escriben como:

$$\omega_j(X) = \frac{Z_j(X; \lambda^*)}{Z(X; \lambda^*)}, \quad Z_j(X; \lambda^*) = m_j(X) \exp\left(-\lambda^* \tilde{X}^i\right), \quad (3.17)$$

donde:

$$Z(X; \lambda^*) = \sum_j Z_j(X; \lambda^*), \quad \tilde{X}^i = \left[\tilde{X}_1^i \cdots \tilde{X}_N^i\right]^T, \quad \lambda^* = [\lambda_1^* \cdots \lambda_N^*]^T.$$

En (3.17) el multiplicador de Lagrange,  $\lambda^*$ , es el minimizador del problema de optimización propuesto en (3.14) y (3.15):

$$\lambda^* = \arg \min(\lambda \in \mathcal{R}^N) \ln Z(X; \lambda). \quad (3.18)$$

Lo que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones no-lineales:

$$f(\lambda) = \nabla_\lambda \ln Z(\lambda) = -\sum_{j=1}^N \omega_j(X) \tilde{X}^i = 0, \quad (3.19)$$

donde,

$\nabla_\lambda$ : Representa el gradiente con respecto a  $\lambda$ .

Una vez que la convergencia de  $\lambda^*$  es alcanzada, las funciones de peso son calculadas de (3.17). El procedimiento busca primero el valor del vector  $\lambda$  que anule el gradiente de la función  $Z(\lambda)$  lo que indica que el punto que se busca es estacionario de la función. Este punto no resulta difícil de encontrar al ser su Hessiano una matriz definida positiva y el punto estacionario que se busca ser así mínimo, global y único. La solución se encuentra en este punto mínimo.

La aplicación de esta metodología a un modelo numérico esta desarrollada en el Anexo D de esta tesis, observado que tiene buenos resultados para diferentes condiciones de daño y lugares donde ésta es aplicada.



## Capítulo 4

# IDENTIFICACIÓN DE DAÑO CON INFORMACIÓN MUTUA, BASADO EN IMÁGENES WAVELET

### 4.1. Introducción

La variación del espectro de energía causada por daño estructural depende principalmente de la extensión y localización del daño, cuanto más severo sea el daño estructural, mayor será la variación del espectro energético, por lo tanto, una adecuada elección del procesamiento de la señal mejora la sensibilidad del método para detectar daño. Considerando el caso de estructuras de paneles compuestos, tipo sandwich de fibra de vidrio; el cambio del comportamiento dinámico causado por daño estructural que es menor al 1 % del tamaño total de la estructura es imperceptible [Yam et al., 2003], por lo tanto la utilización de parametros modales como las frecuencias o formas modales son generalmente ineficientes; pero, utilizando las imágenes de la variación del espectro de energía obtenido por análisis de Transformadas Wavelet, se puede detectar entre 0.01-0.10 % de daño estructural mejorando la sensibilidad de detección de daño [Yan and Yam, 2002, Yam et al., 2003].

La entropía, como una medida de información de eventos aleatorios, fue definida originalmente por Hartley [Hartley, 1928] y posteriormente adaptada por Shannon [Shannon, 1948]. La Información mutua, basada en la entropía conjunta, se utiliza como una medida efectiva de similitud de dos variables aleatorias y es ampliamente aplicada a imágenes.

El registro de imágenes mediante la maximización de la información mutua ha sido ampliamente utilizado por la importancia de sus aplicaciones, en áreas como: imágenes médicas, fotogrametría, visión robótica, teledetección, realidad aumentada, entre otras [Viola and Wells, 1995, Collignon, 1998, Gomez, 2008]. Para su aplicación no es necesario tener conocimiento de la forma en que se relacionan los valores de intensidad entre imágenes, sino que se basa en la idea de obtener la máxima dependencia (o información) entre las intensidades de dos imágenes, una *Imagen de Referencia* ( $I_r$ ) y otra *Imagen de prueba* ( $I_p$ ), que corresponden a un mismo objetivo.

Las relaciones matemáticas entre la respuesta dinámica de la estructura y el estado de daño de la estructura son muy complejas, ya que no tiene una solución analítica y es difícil alcanzar una

solución precisa utilizando un análisis matemático. Si se considera una ley inherente entre características de daño estructural y estado de daño práctico, como una caja negra, la relación entre estos dos espacios estado puede ser establecida utilizando redes neuronales o algoritmos de actualización global [Yam et al., 2003, Meruane and Mahu, 2014].

Las redes neuronales tienen la ventaja de establecer relaciones entre característica de daño y parámetros físicos de daño estructural, a partir del entrenamiento de una red neuronal artificial utilizando un conjunto de datos conocidos de la estructural, y puede ser aplicado a cualquier coeficiente de correlación que es sensible a daño, en condiciones de respuesta lineal y no lineal. Resultados publicados muestran que es una herramienta eficaz para identificación de daño estructural [Meruane and Mahu, 2014, Hung and Kao, 2002, Yun and Bahng, 2000].

El propósito de éste Capítulo es realizar un análisis de información mutua como función de correspondencia entre las imágenes de escala de la *Transformada Wavelet Continua* en mediciones realizadas a una estructura en Condición Normal y su relación con las condiciones de daño en la misma estructura; y verificar, si es posible determinar factores que están relacionados con el daño en la estructura. El procedimiento se complementa con redes neuronales:

- a. **Self-Organization Map**, mapa de autoaprendizaje (SOM, por sus siglas en inglés) para la clasificación de resultados, haciendo la *Detección de Daño*.
- b. **BackPropagation**, que cuantifica el nivel de daño en la estructura a partir de los resultados obtenidos, haciendo la *Identificación de Daño*.

La detección e identificación de daño en la estructura, son los dos alcances que se tienen en el desarrollo de esta metodología, no así su localización dada la limitada cobertura de sensores. Las siguientes secciones muestran el resumen del desarrollo teórico para la detección e identificación de daño con el presente método.

### 4.2. Correspondencia de Imágenes

La correspondencia (*matching*) de imágenes es una línea de investigación incipiente y en continua evolución en muchas áreas de la ciencia de la ingeniería y medicina. Los primeros experimentos datan de la década de 1960, comparando niveles de gris de dos imágenes. Existen tres técnicas básicas de correspondencia de imágenes [Gruen, 2012, Jiménez et al., 2010] que se clasifican como:

- a. **Basada en intensidad**, los píxeles de la imagen se utilizan en forma de matriz de valores de grises; luego se compara la distribución del nivel de gris de pequeñas áreas de la imagen, denominadas teselas de imagen, y la semejanza se calcula mediante técnicas de entropía, correlación o ajuste de mínimos cuadrados.
- b. **Basada en características**, requiere como primer paso, la extracción de características básicas de la imagen como esquinas, bordes o elementos derivados de la imagen original. La semejanza en la forma y fuerza de las características se mide mediante una función de costo. La limitante de este método esta en que sus resultados no son siempre estables.

- c. **Simbólica**, se refiere a aquellos métodos que comparan descripciones simbólicas de las imágenes y miden la semejanza que existe entre ellos a partir de una función de costo. Las descripciones simbólicas pueden referirse a niveles de gris, o características derivadas. Esta correspondencia, compara las propiedades topológicas, en lugar de utilizar la forma o la posición como criterio de semejanza.

Dada las características de respuesta aleatoria que tiene la estructura en una condicon de observación ambiental u operacional, en la presente tesis se hace uso de la correspondencia *Basada en intensidad*, para el desarrollo de la metodología propuesta.

### 4.3. Transformadas Wavelet

Las Transformadas Wavelet son herramientas matemáticas que tuvieron un gran impacto después de 1980 como aplicaciones de visión computacional [Mallat, 1989], análisis sísmico de señales [Goupillaud et al., 1984] y, el reconocimiento y visualización de características de la voz y sonidos musicales [Kronland-Martinet et al., 1987].

La Transformada Wavelet es eficiente para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad, mapeando la señal de análisis en una representación de tiempo-escala (escalograma). No existe redundancia de información porque las funciones wavelet son ortogonales. El aspecto temporal de las señales es preservado, y la señal original puede ser reconstruida a partir de una Transformada Wavelet Inversa. Realiza un análisis multiresolución utilizando una ventana modulada que genera una completa familia de funciones elementales mediante sus dilataciones o contracciones y traslaciones en el tiempo.

#### 4.3.1. Transformadas Wavelet Continua

De manera general la Transformada Wavelet Continua (CWT, por sus siglas en inglés) puede ser vista como un microscopio matemático, siendo posible realizar acercamientos y describir el comportamiento local de una función de manera precisa. De manera técnica, la Transformadas Wavelet, es un operador diferencial de múltiples escalas que descomponen la señal en un conjunto de funciones de longitud finitas,  $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , llamadas *Ondeletas Madre* [Kovacevic et al., 2013]. Considerando que las ondículas poseen traslaciones y dilataciones (cambios de escala), éstas pueden ser descritas por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

La expresión (4.1), indica que la Ondícula  $\psi_{a,b}(t)$ , esta centrada alrededor del factor  $b$  (encargado de traslación), y esta escalado por el factor  $a$ . El factor de escala  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  asegura que la norma  $\mathcal{L}^2$  se preserve [Kovacevic et al., 2013]. Si se tiene una función de análisis  $x(t)$ , se puede definir su Transformada Wavelet Continua como:

$$CWT(a, b) = X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) x(t) dt; \quad (4.2)$$

donde,

$CWT(a, b)$ ,  $X(a, b)$ : Es la transformada wavelet continua de la señal  $x(t)$  utilizando la función de la ondícula  $\psi$ ,

$b$ : Es el factor de traslación que mide el tiempo,

$a$ : Es el factor de escala que mide la frecuencia,

$\frac{1}{\sqrt{|s|}}$ : Es una constante (energía) de normalización,

$x(t)$ : Es la señal a ser analizada,

$\psi_{a,b}(t)$ : Es la función de la ondícula madre.

Considerando como ejemplo una funcion no estacionaria representada por:

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 10t) & 0s \leq t < 5s \\ \cos(2\pi 25t) & 5s \leq t < 10s \\ \cos(2\pi 50t) & 10s \leq t < 15s \\ \cos(2\pi 100t) & 15s \leq t < 20s \end{cases} \quad (4.3)$$

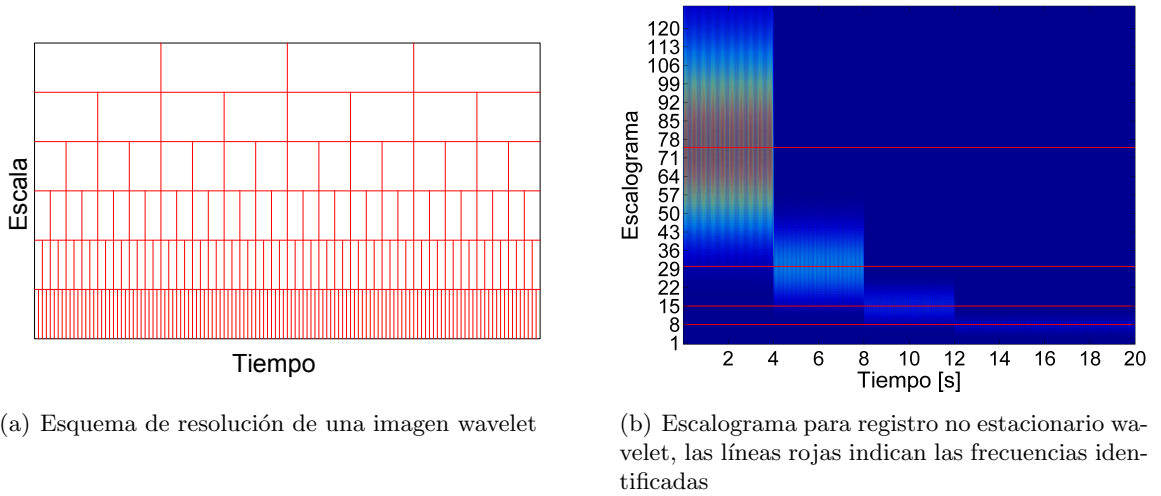


Figura 4.1: *Análisis Wavelet de una Señal*

De acuerdo a la Ecuación (4.2) el análisis wavelet representa una técnica de ventanas con tamaño variable, Figura 4.1(a); un valor de pequeño del factor de escala  $a$ , implica un filtro de mayor resolución (información). Por otro lado si el factor de escala es bastante grande comparado con la unidad, el resultado es una ventana muy ancha y sirve para componentes de baja frecuencia en la señal. Por lo tanto la resolución de las transformadas wavelet es alta en bajas frecuencias y baja en altas frecuencias [Bayissa et al., 2008], lo que se muestra en la Figura 4.1(b).

Los factores  $a$  y  $b$ , definidos en la Ecuación (4.2) cambian de forma continua y la única restricción para la ondícula madre es que ésta debe satisfacer la condición de valor promedio nulo ( $\int \psi(t)dt = 0$ ) [Kovacevic et al., 2013, Martinez and Castro, 2002], esta condición permite que la CWT tenga su inversa que viene dada por:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty X(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dbda}{a^2}; \quad (4.4)$$

donde,

$x(t)$ : Es la función restituida con la transformada wavelet inversa,

$C_\psi$ : Es el valor de la condicion de admisibilidad,

$X(a, b)$ : Es el valor de la Transformada Wavelet,

$\psi_{a,b}$ : Es el valor de la ondícula madre,

$a$ : Es el factor de escala en la ondícula,

$b$ : Es el factor de traslación en la ondícula.

La Ecuación (4.4), debe satisfacer la *Condición de Admisibilidad*, que indica que la Transformada de Fourier de la ondícula madre debe satisfacer:

$$C_\psi = \int_{\omega \in \mathbb{R}_+} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (4.5)$$

donde,

$\Psi(\omega)$ : Es la transformada de Fourier de la ondícula madre,

$\omega$ : Es el rango de frecuencia observado.

Las Transformadas Wavelet Continuas tienen las siguientes propiedades, [Kovacevic et al., 2013]:

- a. *Cambio de tiempo*, con invarianza en la escala, es decir, que un retardo en la señal genera un retardo en la transformada wavelet.
- b. *Escalamiento en tiempo*, considera una versión a escala y normalizada para mantener su energia  $x(t)$
- c. *Igualdad de Parseval*, la energía total se conserva en una expresión análoga al teorema de Parseval, expresado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{a \in \mathbb{R}_+} \int_{b \in \mathbb{R}} |X(a, b)|^2 \frac{dbda}{a^2}. \quad (4.6)$$

- d. *Redundancia*, la transformada Wavelet mapea una función unidimensional  $x(t)$ , en una de dos dimensiones lo que representa una redundancia de información.
- e. *Caracterización de singularidades*, referida a la propiedad de localización, que relaciona el hecho de que cuando  $a \rightarrow 0$ , la ondícula madre  $\psi_{a,b}(t)$ , se convierte en arbitrariamente angosta, realizando un zoom en la venciudad de  $b$ , lo que es fácil de observar cuando se aplica la función  $x(t) = \delta(t - \tau)$ , igual a:

$$X(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left( \frac{t - b}{a} \right) \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{\tau - b}{a} \right). \quad (4.7)$$

Que representa la ondícula escalada por  $a$  y centrada en  $b$ , cuando  $a \rightarrow 0$  la ondícula se estrecha exactamente en la singularidad y crece a razón de  $a^{-1/2}$ .

- f. *Escalograma*, es la manera mas común de mostrar la transformada wavelet para funciones reales; las gráficas de escalograma muestran la densidad de la magnitud expresada como  $|X(a, b)|$ , como se observa en la Figura 4.1(b).

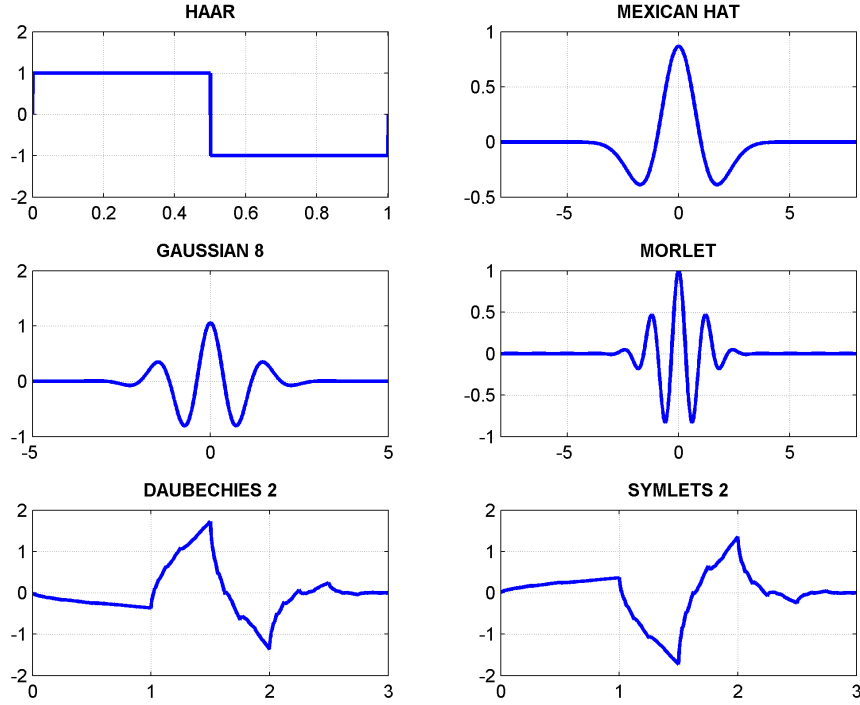


Figura 4.2: *Ejemplos de Algunas Ondículas Madre*

Existe una gran cantidad de Ondículas madre (ortogonales, biortogonales, complejas, etc.), que pueden revisarse en la literatura especializada y cuya complejidad varía en función del objetivo buscado; la Figura 4.2, muestra algunas de las más comunes.

Finalmente, las wavelet poseen características, de filtrado y edición de imágenes, que hacen que unas ondículas madre sean mas atractivas que otras, algunas de las principales propiedades son las siguientes [Gómez-Luna et al., 2013]:

- a. *Momentos de desvanecimiento*, que esta relacionada con la compresión de información y la eliminación de ruido, basado en el momento de desvanecimiento de la ondícula, calculado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.8)$$

De tal forma que la wavelet tiene  $N - 1$  momentos de desvanecimiento

- b. *Tamaño del Soporte*, esta directamente relacionado al tamaño de los momentos de desvanecimiento y a la cantidad de coeficientes del filtro, influyendo en el tiempo de cálculo y la distorsión en los extremos de la señal.

- c. *Regularidad*, es la capacidad de que una wavelet reconstruya una señal a partir de los coeficientes de transformación, expresado como la suavidad de la wavelet.
- d. *Simetría*, que tiene la wavelet, al verla como filtro, se puede decir que tiene una fase lineal, si no tiene simetría introduce distorsión en la fase, lo que tiene especial interés en el procesamiento de señales e imágenes.
- e. *Función de escala*, si la función es ortogonal a la wavelet y ambas son normalizadas, constituyen una base ortonormal del espacio.

## 4.4. Entropía, Entropía Relativa e Información e Información Mutua

En esta sección se describen las definiciones básicas de entropía, entropía relativa e información mutua. El concepto de entropía se extiende para definir la *información mutua*, que mide la cantidad de información que una variable aleatoria contiene de otra variable que es también aleatoria. La información mutua es un caso especial de la *entropía relativa*, que mide la distancia entre dos distribuciones de probabilidad. Estas cantidades están estrechamente relacionadas y comparten propiedades.

### 4.4.1. Entropía

Considerando que el concepto de entropía de la información fue prestado de la termodinámica<sup>1</sup>; el deseo de una medida de la información de un mensaje, deriva de la teoría de la comunicación que fue definida en 1928 [Hartley, 1928] y forma la base de muchas de las medidas actuales de comunicación. Para ello, Hartley considera el mensaje de una cadena de símbolos con  $s$  diferentes posibilidades; si el mensaje contiene  $n$  símbolos, entonces existen  $s^n$  posibles mensajes, asumiendo que todos los mensajes son independientes o que no poseen reglas sintácticas, lo que lleva a definir la siguiente medida de información:

$$H = n \log s = \log s^n. \quad (4.9)$$

La Ecuación (4.9) depende del número de posibles resultados, a mayor cantidad de mensajes, mayor la cantidad de información; si solo existe un mensaje, no se tiene ninguna información. De acuerdo a esta descripción, la información también puede ser vista como una medida de incertidumbre, ya que cuando existen muchos mensajes recibidos existe incertidumbre del futuro mensaje, mientras que si solo hay un solo mensaje no existe incertidumbre.

El inconveniente de la medida de información de Hartley es que asume que todos los símbolos tienen la misma probabilidad de ocurrencia, lo que no sucede a menudo [Pluim et al., 2003]. Para solucionar esta limitación Shannon [Shannon, 1948] introdujo el concepto de *Entropía de la Información* como una medida que pondera (a partir del valor esperado) la información de los resultados por la probabilidad de que este resultado se produzca, definido como:

---

<sup>1</sup>El término entropía fue introducido por R. Clausius en 1865 [Blanco, 2010] para estudiar la *transformación* de sistemas termodinámicos, posteriormente Boltzmann [Borici, 2010] utilizó estas observaciones para derivar un modelo cuantitativo para la entropía.

$$H = \sum_i p_i \log \frac{1}{p_i}. \quad (4.10)$$

El segundo término de la ecuación (4.10),  $\log \frac{1}{p_i}$ , indica que la cantidad de información que se gana de un evento es inversamente proporcional a su probabilidad de ocurrencia,  $p_i$ . La entropía de Shannon, es una *medida de la incertidumbre*; mientras menor es la entropía del sistema, menor será la incertidumbre y mayor la información que se gana; por otro lado, si un sistema tiene un alto grado de aleatoriedad o desorden, se considera que tiene una alta entropía<sup>2</sup>.

Una definición más rígida de la entropía de  $X$ , se define como [Borici, 2010]:

$$H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x); \quad (4.11)$$

donde,

$\log[\cdot]$ : Es el logaritmo natural de un número real  
 $p(x) = P(X)$

La entropía definida en este contexto revela la cantidad de información de una distribución de probabilidad aleatoria  $X$ , por lo que la entropía es una información *autocontenida*, descrita en la sección 4.4.4, que describe el comportamiento del proceso aleatorio como una medida de dispersión [Borici, 2010]; es así que una distribución *leptocúrtica*, posee una baja entropía, mientras que una distribución *platicúrtica* posee un valor alto de entropía.

Siguiendo este principio, las imágenes también son portadoras de información [Pluim et al., 2003, Caro, 2004], aunque en lugar de probabilidades de ocurrencia de un mensaje, se estudia la distribución de valores en escala de grises. La distribución de probabilidad de valores de grises se estima al calcular el número de veces que ocurre un valor gris y se divide ese número entre el total de número de ocurrencias; como ejemplo, una imagen con muchas intensidades de grises posee el valor de la entropía alta; mientras que una imagen con una intensidad simple, tiene una baja entropía.

#### 4.4.2. Entropía Conjunta y Entropía Condicional

En esta sección se extiende la definición de la Entropía a un par de variables aleatorias; ésta situación no representa ninguna complejidad ya que las variables  $(X, Y)$  pueden ser consideradas como una variable aleatoria de valores vectoriales [Cover and Thomas, 2006].

La *Entropía Conjunta*,  $H(X, Y)$  de un par de variables aleatorias discretas  $(X, Y)$  se define como:

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x, y); \quad (4.12)$$

donde,

---

<sup>2</sup>La entropía varía desde un valor mínimo de 0 (para un evento conocido): hasta un valor máximo de  $\log n$ , siendo  $n$  la cantidad de todos los posibles resultados equiprobables.



$p(x, y)$ : Es la probabilidad conjunta de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$

La *Entropía Condicional*,  $H(X|Y)$  de un par variables aleatorias discretas  $(X, Y)$ , se define como:

$$H(X|Y) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log p(x|y); \quad (4.13)$$

donde,

$p(x|y)$ : Es la probabilidad conjunta de las variables  $X$  e  $Y$ .

La definición de la entropía conjunta, Ecuación (4.12), y la entropía condicional, Ecuación (4.13), sirven para describir a otras entropías de la siguiente manera (a través de la regla de la cadena):

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (4.14)$$

Es importante mencionar que la Entropía Condicional no es simétrica  $H(X|Y) \neq H(Y|X)$ ; pero se relacionan a través de la siguiente expresión:

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (4.15)$$

#### 4.4.3. Entropía Relativa

La *entropía relativa*, también conocida como distancia Kullback-Leibler, es una medida de distancia<sup>3</sup> entre dos funciones de probabilidad de masa  $p(x)$  y  $q(x)$  [Cover and Thomas, 2006], que se define como:

$$D(p||q) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (4.16)$$

En otras palabras, la Entropía Relativa  $D(p||q)$  es la medida de la ineficiencia de asumir que la distribución es  $q$  cuando la verdadera distribución es  $p$ . La entropía relativa tiene la ventaja de ser siempre positiva y su valor es cero, sí y solo sí  $p = q$ .

#### 4.4.4. Información Mutua

En terminos sencillos, la *Información Mutua* es una medida de dependencia de dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$  [Collignon, 1998], ya que existe una reducción de la incertidumbre de una variable debido al conocimiento de la otra; en términos matemáticos, su determinación se realiza a partir de la medición de la distancia entre la distribución de probabilidad conjunta  $p_{X,Y}(x, y)$  y la distribución asociada al caso de completa independencia  $p_X(x) \cdot p_Y(y)$ , por medio de la distancia de *Kullback-Leibler* (entropía relativa) [Cover and Thomas, 2006], que se expresa como:

$$I(X; Y) = - \sum_{x,y} p_{XY}(x, y) \log \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x) \cdot p_Y(y)}, \quad (4.17)$$

---

<sup>3</sup>La definición de distancia, no es completamente exacta, ya que la ecuación no es simétrica y no satisface la desigualdad triangular.

La información Mutua está relacionada con la entropía a partir de las siguiente ecuaciones [Cover and Thomas, 2006]:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y), \quad (4.18)$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad (4.19)$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (4.20)$$

$$I(X; Y) = H(X, Y) - (H(X|Y) + H(Y|X)), \quad (4.21)$$

$$I(X; Y) = I(Y; X), \quad (4.22)$$

$$I(X; X) = H(X). \quad (4.23)$$

La Ecuación (4.23), muestra que la información mutua de una variable aleatoria  $X$ , consigo misma, es la entropía de la variable aleatoria  $X$ , por esta razón se define a la entropía como *información autocontenida*. Las relaciones entre  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,  $H(X|Y)$  e  $I(X; Y)$ , se pueden expresar en un Diagrama de Venn, como se observa en la Figura 4.3.

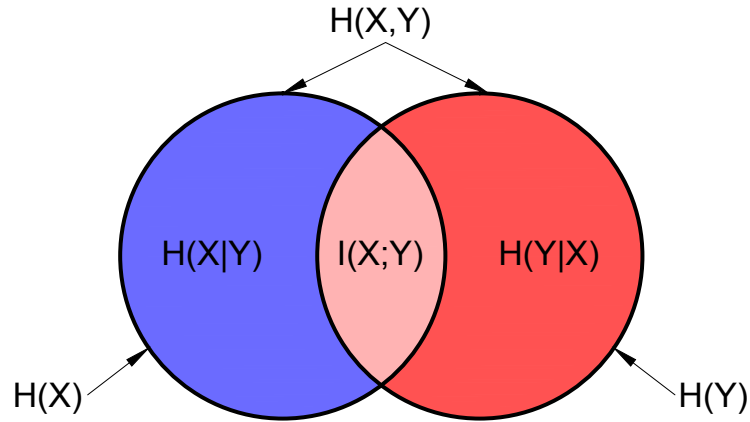


Figura 4.3: Relaciones entre Entropía e Información Mutua

Finalmente, es importante mencionar las propiedades con las que cuenta la información mutua, que se resumen en la Tabla 4.1 [Collignon, 1998].

#### 4.4.5. Información Mutua Normalizada y Coeficiente de Correlación de Entropía

Studholme [Studholme et al., 1999, Gomez, 2008], observó que al registrar imágenes médicas con un campo de visión muy grande (imágenes de fondo muy amplio comparado con la región de interés), la información mutua entre las imágenes puede llegar a incrementarse, en lugar de disminuir, al alejar la imagen de su valor óptimo. A fin de obtener una medida independiente de los cambios de las entropías marginales  $H(X)$  y  $H(Y)$  en su región de superposición, se propone un enfoque de normalización en función de las entropías conjuntas y marginales que definen la *Información Mutua Normalizada* y se describe como:

$$IMN(X; Y) = \frac{H(X) + H(Y)}{H(X, Y)}. \quad (4.24)$$

Tabla 4.1: *Propiedades de Información Mutua*

No	DESCRIPCIÓN	EXPRESIÓN
1	No negativa	$0 \leq I(X; Y)$
2	Independencia	$I(X; Y) = 0 \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$
3	Simetría	$I(X; Y) = I(Y; X)$
4	Información de si misma	$I(X; X) = H(X)$
5	Acotación	$I(A, B) \leq \min(H(X), H(Y))$ $I(A, B) \leq (H(X) + H(Y))/2$ $I(A, B) \leq \max(H(X), H(Y))$ $I(A, B) \leq H(X, Y)$ $I(A, B) \leq H(X) + H(Y)$
6	Funcion de sensores	$H(X), H(Y) \leq H(X, Y)$
7	Procesamiento de Datos	$I(X; Y) \geq I(X, T(Y))$

Por último, una medida de dependencia denominada *Coficiente de Correlacion de la Entropía*, (ECC por sus siglas en inglés), mide el grado de independencia de las dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , relacionado con la Información Mutua Normalizada [Astola and Virtanen, 1981], expresada como:

$$ECC(X; Y) = \left( 2 - 2 \frac{H(X, Y)}{H(X) + H(Y)} \right)^{1/2} = \left( 2 - 2 \frac{1}{IMN(X; Y)} \right)^{1/2}. \quad (4.25)$$

## 4.5. Redes Neuronales Artificiales

La capacidad que tiene el cerebro de recordar y resolver problemas ha inspirado a muchos científicos de diferentes campos de la ingeniería, filosofía, fisiología y psicología a intentar modelar en el computador el funcionamiento del cerebro y encontrar aplicaciones en sus respectivas profesiones, dando lugar a lo que se conoce como Redes Neuronales Artificiales (RNA) [Basogain, 2008]. Las RNA, al estar inspiradas en redes neuronales biológicas del cerebro humano, se comportan de manera similar en sus funciones más comunes adquiriendo características propias del cerebro como son:

- a. **Aprender**, adquieren conocimiento a través del estudio, ejercicio o experiencia; cambiando su comportamiento en función a su entorno. Su conocimiento lo adquieren a partir de la supervisión o la auto-organización.
- b. **Generalizan**, extienden el aprendizaje adquirido; es posible obtener respuestas correctas ante entradas que poseen pequeñas variaciones debidas a efectos de ruido o distorsión.
- c. **Abstraen**, consideran por separado cualidades de un objeto que aparentemente no presentan características particulares o representativas.

Las redes neuronales artificiales han sido desarrolladas como un modelo matemático basado en las siguientes suposiciones: *El proceso de información ocurre en elementos simples llamados neuronas que reciben una serie de entradas (bien del exterior o de otras neuronas) poseen la capacidad limitada de calcular, en general, una suma ponderada de sus entradas y luego se aplica una función de activación para obtener una señal que será transmitida a la próxima neurona. Estas neuronas*

*artificiales se agrupan en capas o niveles y poseen un alto grado de conectividad entre ellas, conectividad que es ponderada por un peso asociado; el peso representa la información que esta siendo utilizada por la red para representar el problema. De esta manera una RNA caracteriza por: (i) su patrón de conexión entre neuronas (su arquitectura), (ii) el método para determinar el peso de las conexiones (su entrenamiento o algoritmo de aprendizaje) y (iii) su función de activación.*

El entrenamiento o aprendizaje es la característica más importante de un red neuronal, debido a que los pesos se van ajustando para obtener una salida deseada o consistente, y la red pueda responder a situaciones diferentes a las aprendidas. Los diferentes métodos de aprendizaje, pueden ser agrupados en dos tipos de categorías [Quesada et al., 1994]:

- a. **Aprendizaje Supervisado**, es un entrenamiento que utiliza un parámetro objetivo y emplea información global. Todos los algoritmos tienen vectores de entrada asociados a una salida deseada. El cálculo se realiza comparando la salida calculada de la red con la salida deseada, modificando los pesos para reducir el error cometido; el procedimiento se repite iterativamente hasta que el error cometido entre las dos salidas sea suficientemente pequeña y los pesos de la red ya no se modifiquen.
- b. **Aprendizaje no Supervisado**, es un entrenamiento sin objetivo, sólo utiliza información local durante el aprendizaje. La modificación de los pesos se realiza de manera que las salidas estén asociadas a las entradas de acuerdo con el proceso de entrenamiento; de esta manera es posible extraer características e ir agrupando por clases de similitudes.

A través de un algoritmo de aprendizaje supervisado o no supervisado, las RNA ajustan su arquitectura y parámetros de manera que puedan minimizar alguna función de error que indique el grado de ajuste a los datos y la capacidad de generalización de las RNA.

Como ejemplo, se considera una neurona  $Y_i$ , que es ilustrada en el Figura 4.4, que recibe entradas de las neuronas  $X_1$ ,  $X_i$  y  $X_n$ . Las activaciones de las señales son  $x_1$ ,  $x_i$  y  $x_n$  respectivamente, y el peso de las neuronas son  $w_1$ ,  $w_i$  y  $w_n$ . La red de entrada  $y_{in}$  para la neurona  $Y_i$  es la suma de las señales de los pesos de las neuronas  $X_1$ ,  $X_i$  y  $X_n$ , escritos de la forma:

$$y_{in} = w_1x_1 + w_ix_i + w_nx_n. \quad (4.26)$$

La activación de una neurona  $Y$  es dada por una función del tipo  $y = f(y_{in})$ . Si se considera que la neurona  $Y$  esta conectada a otras neuronas  $Z_1$  y  $Z_2$  con unos pesos respectivos definidos como  $v_1$  y  $v_2$ . La neurona  $Y$  envía su señal a las neuronas  $Z_1$  y  $Z_2$ , pero las señales enviadas son generalmente diferentes puesto que son afectadas por un peso, y el valor de este peso dependen de las entradas de los factores.

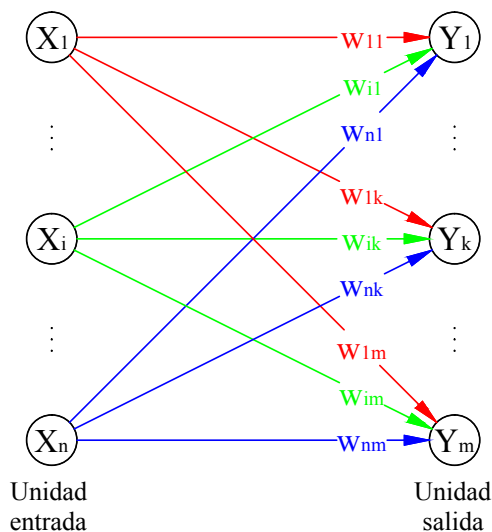


Figura 4.4: Red Neuronal de Capa Simple

Usualmente es conveniente visualizar las neuronas como un arreglo de capas, y el factor clave en la determinación del comportamiento de una neurona es su función de activación y el patrón de peso en las conexiones para la transmisión de las señales. El conjunto de capas de neuronas y la conexión entre capas es conocido como *Arquitectura de Red*, muchas redes neuronales se encuentran configuradas de la siguiente manera: (i) unidad de entrada, (ii) unidad oculta y (iii) unidad de salida, que se muestra en la Figura 4.5.

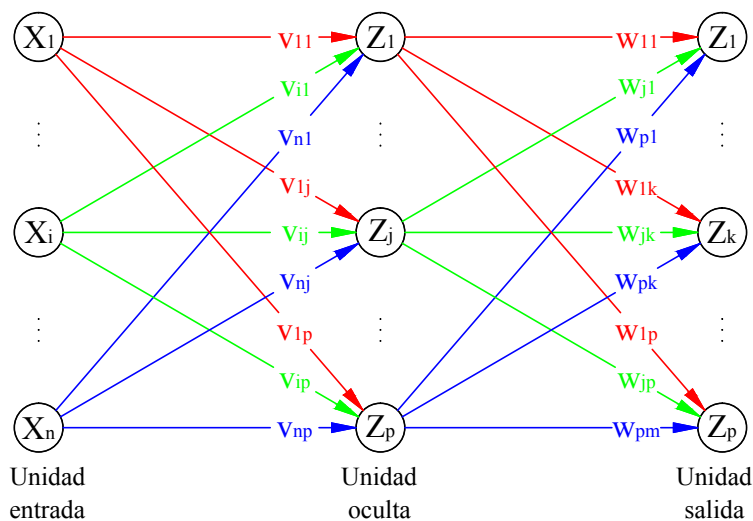


Figura 4.5: Red Neuronal Multicapa

Las redes neuronales son usualmente clasificadas como capa simple o multicapa, por lo general las unidades de entrada no son contabilizadas como capas dado que no realizan cálculo, el número de capas en una red es determinada por el número de capas interconectadas con pesos entre neuronas, debido a que los pesos contienen información importante del proceso. Las Figuras 4.4 y

4.5, muestran ejemplos de redes neuronales conocidas como *feedforward*, cuya señal tiene sólo una dirección entre la unidad de entrada y la unidad de salida.

La red de capa simple es una red que tiene una capa conectada con pesos. Se caracterizan por tener una unidad que recibe la señal del mundo exterior y una unidad de salida que posee la respuesta de red, la red de capa simple mostrada en la Figura 4.4, la unidad de entrada es completamente conectada con la unidad de salida. los pesos de las unidades de salida no influyen en los pesos de las otras unidades de salida.

La red de capa múltiple, es una red con una o más capas de nodos (capas ocultas), entre la unidad de entrada y la unidad de salida; las redes multicapa puede resolver problemas más complejos debido a que una sola capa no puede realizarlo completamente, pero el entrenamiento puede ser más difícil. Típicamente la construcción de una red multicapa tiene una capa de pesos entre dos niveles de unidades adyacentes, como se observa en la Figura 4.5.

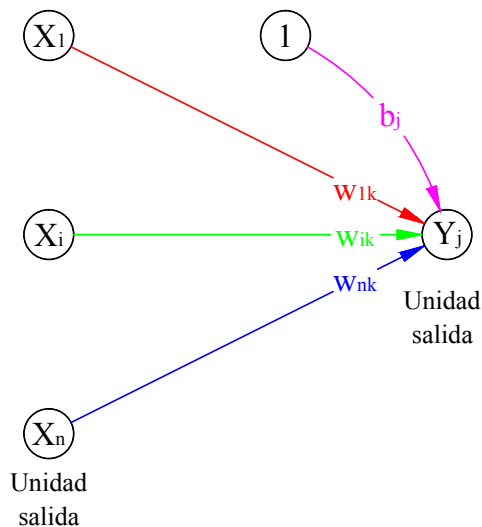


Figura 4.6: Red Neuronal con Sesgo

Complementando el concepto de redes de capa simple o multicapa, es posible incluir el concepto de sesgo por medio de la adición de un componente  $x_0 = 1$  para la unidad de entrada  $x$ , por  $x = (1, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ ; y el sesgo es tratado como un peso  $w_{0j} = b_j$ , Figura 4.6, que se escribe como:

$$\begin{aligned}
 y_{in_j} &= x \times w_j \\
 &= \sum_{i=0}^n x_i + w_{ij} \\
 &= w_{0j} + \sum_{i=1}^n x_i w_{ij} \\
 &= b_j + \sum_{i=1}^n x_i w_{ij}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

#### 4.5.1. Funciones de Activación

Como se menciona en la sección anterior, los operadores básicos de las redes neuronales utilizan la suma de los pesos de la señal de entrada aplicados a una función de activación. Por lo general la misma función de activación es utilizada para todas las neuronas en cualquier capa particular de una red neuronal, aunque éste no es un requisito obligatorio pero si recomendado dada la complejidad de entrenamiento. Para mejorar los resultados de una red multicapa, comparado con una red de capa simple se emplean funciones no lineales de activación. Las funciones más conocidas son las siguientes:

- a. *Función Identidad*, es utilizada en la unidad de entrada y esta representada por la Figura 4.7(a):

$$f(x) = x. \tag{4.28}$$

- b. *Función Binaria*, son usualmente utilizadas por redes de capa simple y se encarga de convertir una unidad de entrada continua en una unidad de salida de señal binaria (1 ó 0) o bipolar (1 ó -1), el paso de la función binaria es también conocida como función Heaviside, Figura 4.7(b).

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}. \tag{4.29}$$

- c. *Función Binaria Sigmoidal*, se caracterizan por tener una curva en forma de S, también denominadas como *logística o logarítmica sigmoidal*. Son funciones de activaciones especialmente útiles en redes de entrenamiento por *backpropagation* porque existe una relación simple entre la función y su derivada, reduciendo el tiempo de cálculo:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\sigma x)}, \tag{4.30}$$

$$f'(x) = \sigma f(x) [1 - f(x)]. \tag{4.31}$$

La función sigmoidal tiene un rango de activación entre 0 y 1, y los valores de la unidad de salida son binarios o están en el intervalo entre 0 y 1. Esta función es ilustrada en la Figura 4.7(c), y la Ecuación 4.31 muestra la dependencia del parámetro  $\sigma$ .

- d. **Función Bipolar Sigmoidal**, es una función que tiene rangos mas comunes que oscilan entre -1 hasta 1 y esta relacionado con la funcion tangente hiperbólico que es usualmente utilizado cuando el rango de las observaciones esta entre -1 y 1. La expresión en función del parámetro  $\sigma$  se escribe como:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2f(x) - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \exp(-\sigma x)} - 1 \\ &= \frac{1 - \exp(-\sigma x)}{1 + \exp(-\sigma x)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$g'(x) = \frac{\sigma}{2} [1 - g(x)][1 + g(x)], \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \\ &= \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$h'(x) = [1 + h(x)][1 - h(x)], \quad (4.35)$$

La Figura 4.7(d), ilustra la sigmoide bipolar para su equivalente en tangente hiperbólico  $\sigma = 2$

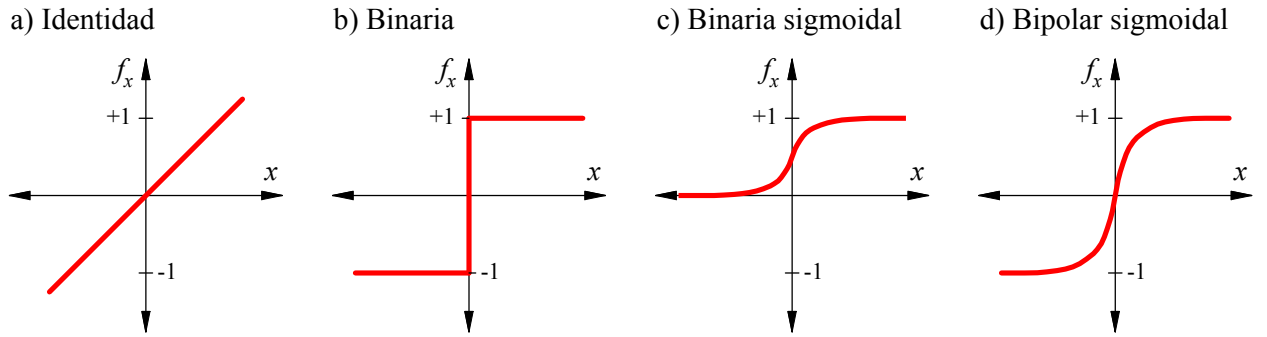


Figura 4.7: *Funciones de Activación*

#### 4.5.2. Algoritmo de Levenberg-Marquardt

Partiendo de un conjunto de pesos iniciales y una función de error, el aprendizaje se convierte en un proceso iterativo que busca refinar los pesos de modo que minimice la función de error mejorando el rendimiento de toda la red.

El algoritmo de Levenberg-Marquardt es una variante del método de Newton diseñado para la minimización de funciones y se ajustan adecuadamente al entrenamiento de redes neuronales donde el índice de rendimiento es el error cuadrático medio. Básicamente el método considera la ecuación del Método de Newton para optimizar el rendimiento de un índice  $F(x)$  [Hagan et al., 2016] es:



$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} g_k, \quad (4.36)$$

donde,

$$A_k \equiv \nabla^2 F(x)|_{x=x_k},$$

$$g_k \equiv \nabla F(x)|_{x=x_k},$$

$\nabla$ : Es el operador gradiente

Si se asume que  $F(x)$  es la suma de funciones cuadradas, se tiene:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N v_i^2(x) = v^T(x)v(x). \quad (4.37)$$

Entonces el  $j$ -ésimo elemento del gradiente será:

$$[\nabla F(x)]_j = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^N v_i(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j}. \quad (4.38)$$

El gradiente puede se escrito en forma de matriz como:

$$\nabla F(x) = 2J^T(x)v(x); \quad (4.39)$$

donde,

$J(x)$ : Es la matriz Jacobiana, expresada como:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_N(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_N(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_N(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Si se desea encontrar la matriz Hessiana, el elemento  $k, j$  de la matriz, se define como:

$$[\nabla^2 F(x)]_{i,j} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^j \left( \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} + v_i(x) \frac{\partial^2 v_i(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right). \quad (4.41)$$

Pero, la matriz Hessiana puede ser expresada en forma de matrices Jacovianas de la siguiente forma:

$$\nabla^2 F(x) = 2J^T(x)J(x) + 2S(x), \quad (4.42)$$

donde,

$$S(x) = \sum_{i=1}^N v_i(x) \nabla^2 v_i(x). \quad (4.43)$$

Si se asume que  $S(x)$  es pequeño, se puede aproximar la Hessiana como:

$$\nabla^2 F(x) \cong 2J^T(x)J(x). \quad (4.44)$$

Si se sustituye las Ecuaciones (4.39) y (4.44) en (4.36), se obtiene la ecuación que corresponde al método de Gauss-Newton [Hagan et al., 2016]:

$$x_{k+1} = x_k - [J^T(x_k)J(x_k)]^{-1}J^T(x_k)v(x_k). \quad (4.45)$$

Cuya ventaja sobre el método de Newton, es que Gauss-Newton no requiere el cálculo de la segunda derivada, pero el problema del método de Gauss-Newton es que la matriz  $H = J^T J$  puede no ser invertible.

El problema de invertir la matriz Hessiana, se resuelve utilizando la siguiente modificación de la matriz, expresada como:

$$G = H + \mu I. \quad (4.46)$$

Para ver como la matriz  $G$  puede ser invertible, se supone que los valores y vectores propios de  $H$  son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  y  $z_1, z_2, \dots, z_n$  respectivamente, entonces:

$$Gz_i = Hz_i + \mu Iz_i = \lambda_i z_i + \mu z_i = (\lambda_i + \mu)z_i. \quad (4.47)$$

Por lo tanto los eigenvectores de  $G$  son iguales a los eigenvectores de  $H$ , y los eigenvalores de  $G$  son  $(\lambda_i + \mu)$ . Entonces,  $G$  puede ser definido positivo mediante el incremento de  $\mu$  hasta  $(\lambda_i + \mu) > 0$  para todos los  $i$ , y por lo tanto la matriz es invertible.

Esto conduce al algoritmo de Levenberg-Marquardt, expresado como:

$$x_{k+1} = x_k - [J^T(x_k)J(x_k) + \mu_k I]^{-1}J^T(x_k)v(x_k). \quad (4.48)$$

Este algoritmo tiene la característica de que a medida que aumenta la aproximación, se disminuyen los pasos del algoritmo disminuyendo las tasas de aprendizaje.

$$x_{k+1} \cong x_k - \frac{1}{\mu_k} J^T(x_k)v(x_k) = x_k - \frac{1}{2\mu_k} \nabla F(x). \quad (4.49)$$

Cuando  $\mu_k$  disminuye hasta cero, el algoritmo se convierte en Gauss-Newton.

### 4.5.3. Problemas y Deficiencias de Implementación

Entre los principales inconvenientes en la implementación de redes neuronales podemos describir las siguientes:

- a. **Velocidad de convergencia**, la mayor parte de los algoritmos desarrollados tienen un aprendizaje lento y se han propuesto muchas modificaciones y variantes para mejorar la velocidad del entrenamiento, especialmente para condiciones no lineales.

- b. **Mínimos Locales**, el algoritmo a veces queda *atrapado* en un mínimo local, del que no puede salir, por tanto, el aprendizaje no se realiza de buena forma. Para obviar esto, se realiza el aprendizaje varias veces, partiendo cada vez con pesos diferentes y seleccionando la ejecución que mejor resuelve el problema.
- c. **Sobreentrenamiento**, es el problema de entrenar muy bien la red neuronal con los datos de entrenamiento, pero cuando se utilizan muestras de validación, no es capaz de dar buenos resultados. Este hecho se puede evitar seleccionando adecuadamente las muestras de entrenamiento y parando el entrenamiento cuando el error es suficientemente pequeño pero no excesivamente pequeño.
- d. **Saturación**, se puede producir cuando las salidas esperadas en cada neurona de salida son 0 ó 1. Al pretender acercar las salidas de la Red a estos valores, nos ponemos en zonas donde la función de activación tiene tangente de pendiente casi cero y entonces no se produce apenas modificación de los pesos y por tanto del error. La forma de resolver es cambiar los valores de salidas esperadas a 0.1 y 0.9. Esto puede requerir adaptación de los datos reales. También se produce si los pesos se hacen muy grandes, por que los resultados de la Red ya no varían.
- e. **Estabilidad y robustez**, referida a la estabilidad del aprendizaje sobre variaciones en los pesos. Existen medidas de estabilidad estadística, que se utilizan para seleccionar la RNA entrenada más estable de entre varias ejecuciones, con la desventaja de que son más lentos.

## 4.6. SOM - Self Organization Map

Las redes neuronales de mapa auto-organizados (SOM, por sus siglas en inglés), fue introducida por primera vez por Kohonen en 1982 [Kohonen, 1982]. Las redes SOM pueden usarse para producir mapas unidimensionales o bidimensionales que describen la topología de los datos de entrada, y agruparlos en unidades de procesamiento que no tienen esta estructura inicialmente [Kohonen, 1982]. A diferencia de las redes neuronales de múltiples capas, las SOM son entrenadas usando reglas de aprendizaje no supervisadas, esto significa que el proceso de formación se basa sólo en las propiedades internas entre las entradas y no requiere muestras de entrada y salida [Avci and Abdeljaber, 2015].

El objetivo de la red SOM es categorizar los datos que se introducen y descubrir rasgos comunes, regulares, correlaciones o categorías e incorporarlos a su estructura interna de conexiones; organizándose en función de los estímulos presentes.

Un modelo SOM, está compuesto por dos capas de neuronas:

- a. **Capa de entrada**, formada por  $N$  neuronas, una por cada variable de entrada y se encarga de recibir y transmitir la información del exterior a la capa de salida.
- b. **Capa de salida**, formada por  $M$  neuronas, que procesa la información y forma el mapa de rasgos.

Generalmente las neuronas de la capa de salida se organizan en forma de mapa bidimensional como se muestra en la Figura 4.8.

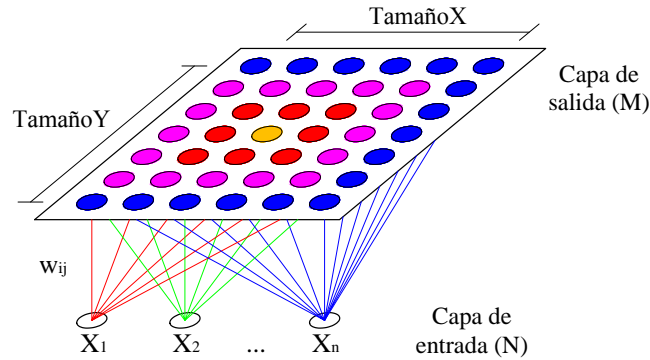


Figura 4.8: *Mapa Auto-Organizado de Kohonen*

Las conexiones entre las dos capas de la red son siempre hacia adelante, la información se propaga desde la capa de entrada hacia la capa de salida. Cada neurona de entrada  $i$  está conectada con cada una de las neuronas de salida  $j$  mediante un peso  $w_{ij}$ . De esta forma, las neuronas de salida tienen asociado un vector de pesos  $W_j$  llamado vector de referencia, debido a que constituye el vector prototipo de la categoría representada por la neurona de salida  $j$ . Así, el SOM define una proyección desde un espacio de datos en alta dimensión a un mapa bidimensional de neuronas.

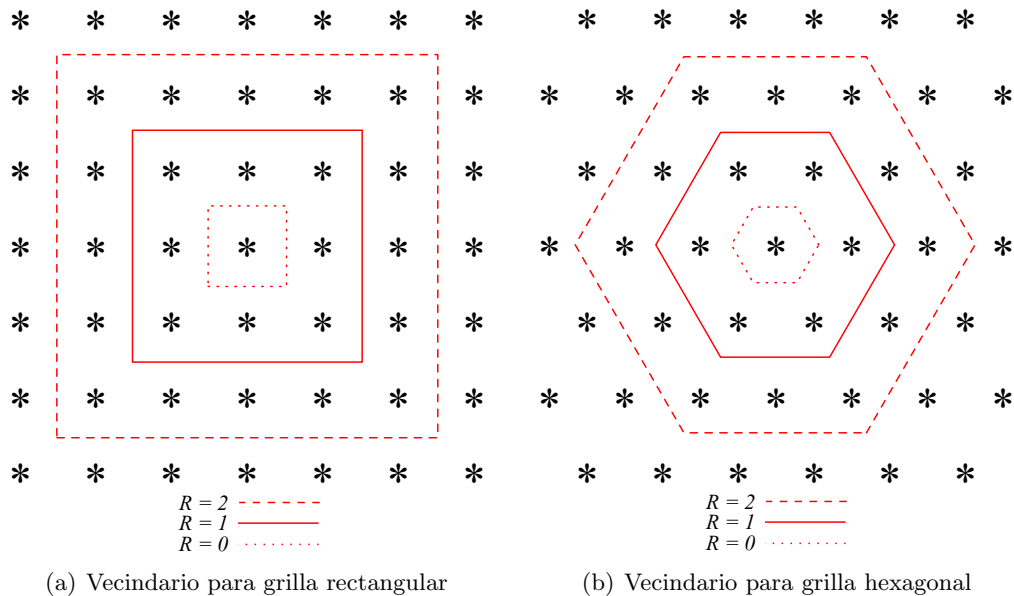


Figura 4.9: *Matriz Bidimensional de Unidades Clústers*

Entre las neuronas de la capa de salida, puede decirse que existen conexiones laterales de excitación e inhibición implícitas, pues aunque no estén conectadas, cada una de estas neuronas va a tener

cierta influencia sobre sus vecinas. Esto se consigue a través de un proceso de competición entre las neuronas y de la aplicación de una función denominada de vecindad, que produce la topología o estructura del mapa. Las topologías más frecuentes son la rectangular y la hexagonal, como se muestra en la Figura 4.9 (a) y Figura 4.9 (b).

Durante la fase de entrenamiento, la red SOM genera una red elástica que se pliega dentro de la nube de datos originales. El algoritmo controla la red de modo que tiende a aproximar la densidad de datos. Los vectores de referencia se acercan a las áreas donde la densidad de datos es alta y eventualmente unos pocos vectores están en áreas donde existe baja densidad de datos.

#### 4.6.1. Algoritmo SOM

El algoritmo para el desarrollo de la red y proceso de aprendizaje, se describe de la siguiente forma [Avci and Abdeljaber, 2015]:

Cada neurona  $n_i$  en la grilla es asignada por un vector de pesos aleatorio  $w_i = [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{ik}]$ , donde  $k$  denota el número de entradas en cada muestra de datos. Los vectores de pesos aleatorios son ajustados utilizando algoritmos de aprendizaje.

Cada muestra de entrada  $x_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}]$  del conjunto de datos de entradas  $x$  está conectado a todas las neuronas en paralelo. Y el vector de entradas  $x_j$  se compara con los vectores de peso inicial asignados a todas las neuronas para determinar la localización de la neurona con la distancia más cercana, medida desde el vector de peso al vector de entrada. En muchas aplicaciones prácticas, las distancias se miden de acuerdo con la distancia euclídeana dada por la Ecuación (4.50):

$$\|x_j - w_i\| = \sqrt{\sum_{m=1}^k (x_{jm} - w_{im})^2}. \quad (4.50)$$

La neurona  $c_j$  de mejor coincidencia se localiza de acuerdo con la Ecuación (4.51):

$$c_j = \arg \min\{\|x_j - w_i\|\}; \quad (4.51)$$

donde,

$\arg \min(\cdot)$ : Determina el índice  $i$  para el cual la función dentro del operador alcanza su valor mínimo.

El vector de entrada  $x(t)$  se asigna al nodo ganador  $c$ . Los pasos se repiten para todas las muestras  $x_j$  en el conjunto de datos  $x$  para determinar la neurona ganadora  $c_j$  para cada muestra de entrada.

Después de esto, los vectores de entrada  $x_j$  son utilizados para corregir los vectores de peso inicial  $w_i(t)$  de acuerdo a la función denominada de vecindad  $h_{c_j,i}(t)$ . La actualización de vectores de peso es dada por la Ecuación (4.52):

$$w_i(t+1) = w_i(t) + h_{c_j,i}(t)[x_j - w_i(t)]; \quad (4.52)$$

donde,

$t$ : Es un entero que representa el tiempo discreto o la iteración de entrenamiento actual.

La función de vecindad, utiliza comúnmente una función Gaussiana, que se expresa de acuerdo a la Ecuación (4.53):

$$h_{c_j,i}(t) = \alpha(t) \exp \left[ \frac{-\|r_{c_j} - r_i\|^2}{2\sigma^2(t)} \right]; \quad (4.53)$$

donde,

$\|r_{c_j} - r_i\|$ : Define la distancia entre las coordenadas de la neurona  $i$  en la grilla bidimensional  $r_i$  a las coordenadas del nodo ganador  $r_{c_j}$ ,

$\alpha(t)$ : Es un valor escalar llamado factor de aprendizaje,

$\sigma(t)$ : Determina el radio de la vecindad  $N_{c_j}$  que incluye las neuronas de la vecindad; este valor disminuye monotónicamente después de cada iteración de entrenamiento, es decir,  $\sigma(t+1) < \sigma(t)$ .

Como se observa en las Ecuaciones (4.52) y (4.53), a medida que la distancia  $\|r_{c_j} - r_i\|$  aumenta, el valor de  $h_{c_j,i}(t)$  disminuye, esto significa que el efecto del vector de entrada  $x_j$  es más significativo sobre los vectores de peso asignados a los nodos mas cercanos del nodo ganador.

Este procedimiento se repite para cada iteración hasta alcanzar la convergencia, en cada iteración el vector de pesos determinado en la iteración previa es actualizado. Las primeras 1000 iteraciones (aproximadamente) del proceso de entrenamiento, se llaman *fase de ordenamiento*, mientras que las iteraciones restantes constituyen la fase de convergencia que es necesario para maximizar la precisión estadística del mapa resultante [Avci and Abdeljaber, 2015].

## 4.7. Metodología de Detección de Daño

El algoritmo para la detección de daño debe seguir los siguientes pasos para análisis y determinación:

- a. Definir la wavelet madre que se utiliza en la detección y el tiempo de la ventana de segmentado del registro; si se desconoce el período de la estructura se pueden considerar ventanas de 5 segundos de duración.
- b. Segmentar el registros para evaluación con Transformadas Wavelet Continuas, para todos los sensores de la estructura de manera individual.
- c. El punto b. se realiza para las condiciones normales, de anomalía y daño; entre los registros de Condición Normal se debe definir un registro de referencia como punto de comparación entre todas las observaciones posteriores.
- d. El escalograma obtenido en la punto b., se convierte a una imagen en escala de grises de 8 bits (256 niveles de gris); de esta primera imagen completa, se obtiene una segunda imagen con información de las bandas con mayor concentración de energía y una tercera imagen con bandas de menor energía y complemento de la imagen previa. Cada una de las tres imágenes son evaluadas para conocer cual es la más sensible al daño.

- e. El análisis de información mutua se realiza con una imagen de referencia (Condición Normal) y una imagen de prueba (condición de observación susceptible a daño) para cada una de las observaciones a ser realizadas.
- f. Se extraen las características de Entropía e Información mutua de las imágenes y se evalúan las condiciones de imagen completa e imagen con recorte.
- g. Se normalizan los resultados obtenidos haciendo uso de la divergencia de Fisher de modo que se observe la variación de la señal a partir de sus 2 primeros momentos estadísticos. En esta parte se determinan que señales son mas sensibles al daño en la estructura.
- h. La clasificación de los resultados Condición Normal y con daño se realiza con redes neuronales Auto-Organizadas, (SOM), para ello se definen los registros en la Condicion Normal y los obtenidos en condiciones de daño, se define una malla en la cual se entrena la red, de modo que se definen los sectores de la Condicion Normal, de todos los que no son normales y estan fuera de este rango.
- i. Para la cuantificación del daño se utilizan redes neuronales multicapa, definiendo los parámetros de la red neuronal (número de neuronas y capas), luego se entrena la red definiendo el método de aprendizaje, verificando la influencia en los resultados obtenidos y el tiempo de entrenamiento.
- j. Para probar la precisión de la redes neduronales de los punto *i* y *g*, se evalúan los resultados haciendo uso de un set de ensayos de comprobación; si los resultados no son adecuados, se considera re-entrenar la red modificando el número de datos de entrada, o la cantidad de capas o neuronas en esta.

## Capítulo 5

# APLICACIÓN EXPERIMENTAL EN LABORATORIO

### 5.1. Introducción

La aplicación experimental de los Capítulos 2, 3, y 4; se realiza a partir de una secuencia de ensayos en laboratorio aplicados a una estructura metálica que representa un edificio de corte de 6 niveles que fue diseñada y construida para la investigación de un disipador de columna líquida [Rozas and Boroschek, 2009], Figura 5.1.



Figura 5.1: *Estructura Utilizada en Tesis de Luis Rozas* [Rozas and Boroschek, 2009]

La estructura fue acondicionada para los fines que se buscan en la presente tesis y se realizaron



ensayos bajo diferentes condiciones de excitación, caracterizadas por condiciones no estacionarias, de servicio y bajo aplicación de daño controlado generado con la reducción secuencial de la sección transversal en la columna. El objetivo de este procedimiento es poder evaluar la Detección, Aislación e Identificación de Daño en la estructura bajo diferentes metodologías, considerando condiciones de observación y anomalía presentes en la estructura.

El daño en la estructura es aplicado en dos secuencias representativas caracterizadas por:

- Daño Leve**, asignado por medio de la reducción gradual de la sección transversal de una de las columnas de la estructura, en el Nivel 2. Elemento 5 de la Figura 5.3(b).
- Daño Severo**, asignado por medio de la reducción gradual de la sección transversal de todas las columnas de la estructura en el Nivel 2. Elementos 5, 6, 7 y 8 de la Figura 5.3(b).

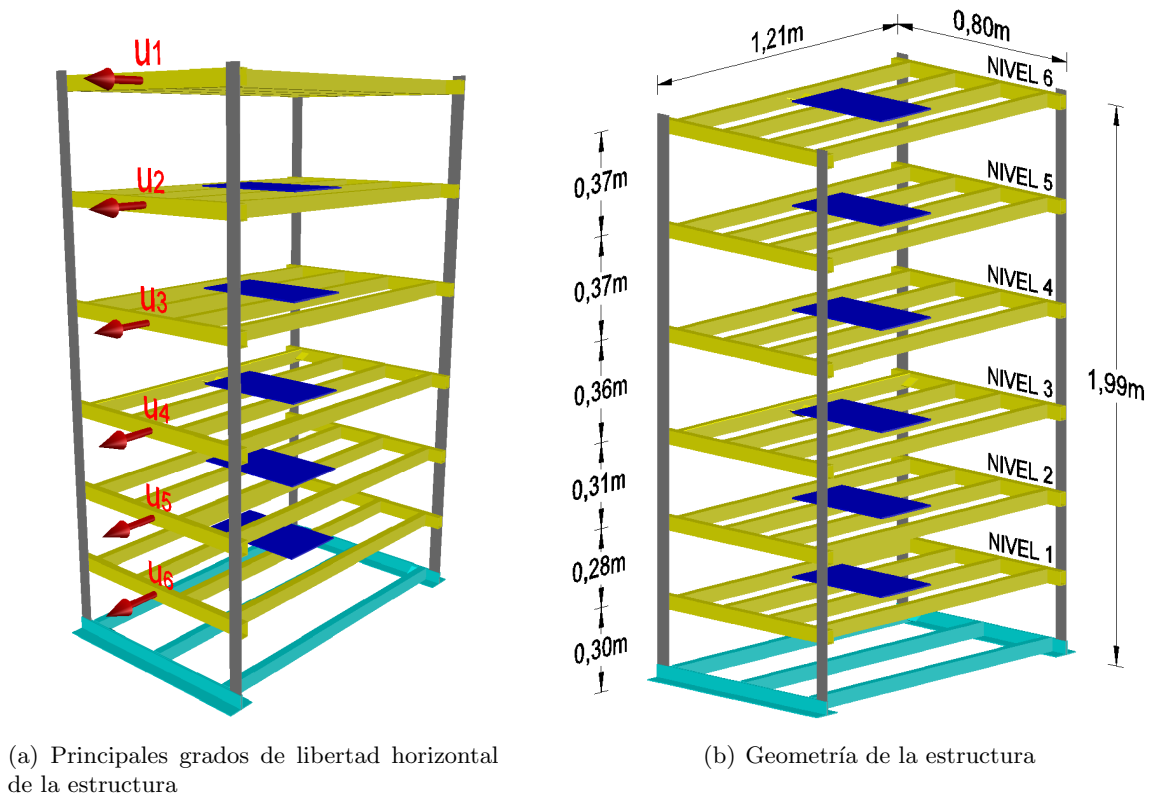


Figura 5.2: Características de la Estructura de Ensayo

## 5.2. Descripción de la Estructura

La estructura en la que se realizan los ensayos fue construida para el estudio y diseño de un disipador de columna líquida [Rozas and Boroschek, 2009]. Es una estructura metálica de corte que tiene predominio de movimiento en una dirección horizontal, dada la configuración y disposición de las columnas, caracterizado por seis grados de libertad principal (traslacional), Figura 5.2(a).

Tiene seis niveles con alturas variables entre niveles y una altura total de  $1,99[m]$ , Figura 5.2(b), el peso total es de  $167[Kgf - s^2/m]$ . Todas las uniones entre elementos columna y emparrillado de entrepiso se realizan por medio de uniones apernadas. La fijación de la estructura a la mesa es también apernada a fin de simular empotramiento.

Cada uno de los entrepisos o niveles tiene un emparrillado de  $1,21 \times 0,80[m]$ , conformado por perfiles de acero tipo cajón con una sección transversal de  $50 \times 30 \times 3[mm]$ , sobre las que se disponen dos planchas de acero con dimensión  $42,5 \times 25 \times 3[mm]$ , que aumentan la masa del nivel, a fin de modificar el período de la estructura. Las cuatro columnas de la estructura, son de acero y se encuentran ubicadas en las esquinas del emparrillado, todas ellas tienen una sección de  $50 \times 3[mm]$ .

Las propiedades mecánicas del acero estructural A36, utilizado en columna y elementos de emparrillado para entrepiso se encuentran descritos en la Tabla 5.1, los valores son referenciales y corresponden a información proporcionada por la Corporación de Desarrollo Tecnológico<sup>1</sup>.

Tabla 5.1: *Propiedades Mecánicas de Acero Estructural*

PROPIEDAD	UNIDAD	VALOR
Densidad acero, $\rho$	$[Kg/m^3]$	7850
Módulo de Elasticidad, $E$	$[GPa]$	200,00
Módulo de Corte, $G$	GPa	77,22
Relación de Poisson, $\mu$	-	0,30
Expansión Termal,	$[mm/mm \text{ } ^\circ C]$	1,17e-05

El peso en cada nivel, junto al peso total de la estructura se describen en la Tabla 5.2. Todos los pesos se emplean como masas concentradas, en cada uno de los nodos para el modelo numérico en elementos finitos.

Tabla 5.2: *Peso de los Niveles de la Estructura*

NIVEL	PESO[Kgf]	ALTURA[m]
Nivel 6	27,548	0,37
Nivel 5	28,128	0,37
Nivel 4	27,902	0,36
Nivel 3	28,669	0,31
Nivel 2	27,584	0,28
Nivel 1	27,568	0,30
<b>TOTAL</b>	<b>167,399</b>	<b>1,99</b>

---

<sup>1</sup>La consulta fue realizada al documento *Introducción al diseño de estructuras de acero* de la página web de Corporación de Desarrollo Tecnológico [en línea] <<http://www.registrocdt.cl/registrocdt/www/admin/uploads/docTec/07918125619162605851.introduccion+a+las+estructuras+de+acero.pdf>> [consulta: 08-ago-2016]

### 5.3. Determinación Numérica de Parámetros Modales

La determinación de los parámetros modales numéricos de la estructura, se realiza a partir del conocimiento de la geometría de la estructura, las secciones transversales de los elementos y las propiedades mecánicas del material. Todo este conocimiento es agrupado en un modelo numérico de elementos finitos, realizado en el programa SAP2000 v.14.0.0. Debido a que es importante conocer la respuesta modal de la estructura con un modelo tridimensional, se analizan: una dirección principal, en el eje débil de la sección de las columnas, que coincide con la dirección de movimiento de la mesa vibradora; una dirección secundaria, ortogonal a la dirección principal; y un movimiento rotacional.

En el modelo de elementos finitos, los nodos principales se definieron de acuerdo a lo indicado en la Figura 5.3(a), para la unión de entrepiso y columnas (en color rojo) y la ubicación de sensores (en color azul). Los elementos columna fueron numerados de la forma mostrada en la Figura 5.3(b).

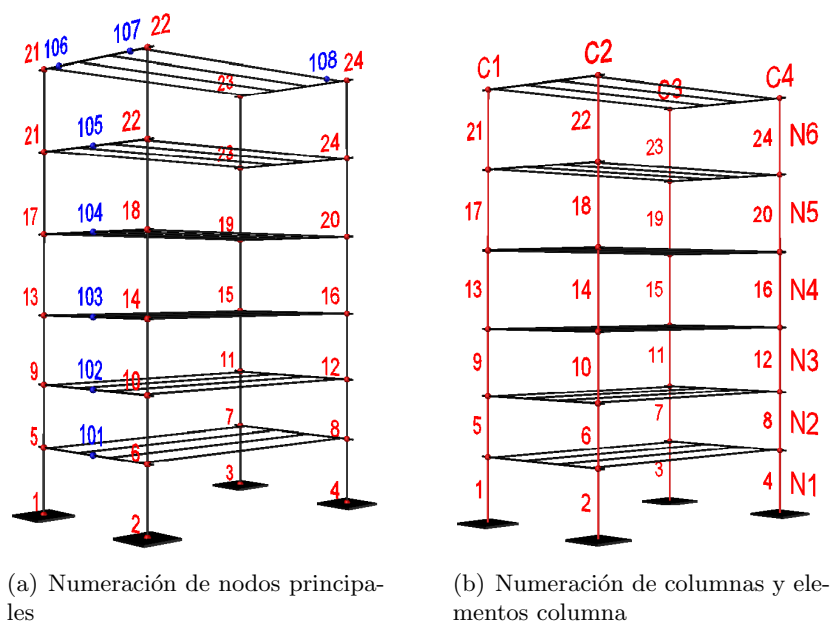


Figura 5.3: Montaje de la Estructura Cambiando Columnas de Perfiles de Aluminio a Perfiles de Acero

Se consideraron los resultados de los 8 primeros modos del modelo de elementos finitos, obteniendo 6 modos en la dirección de movimiento de la mesa (*Longitudinal*), 1 modo ortogonal a la dirección de la mesa (*Transversal*) y 1 modo con movimiento rotacional, los resultados modales para las frecuencias (períodos) y dirección de movimiento se encuentran descritos en la Tabla 5.3.

Las frecuencias y formas modales numéricas se muestran en la Figura 5.4 (la posición de los sensores se muestra en la Figura 5.7(b)). Se observa que los resultados obtenidos en el modelo numérico y las mediciones experimentales tienen resultados similares, mostrando buena coherencia. La Tabla 5.4 muestra la comparación porcentual para las 6 primeras frecuencias en la dirección de

## CAPÍTULO 5. APLICACIÓN EXPERIMENTAL EN LABORATORIO

movimiento de la mesa (longitudinal).

Tabla 5.3: *Modos Numéricos de la Estructura (SAP2000)*

MODO	FRECUENCIA[Hz]	PERIODO[s]	MOVIMIENTO
1	1,474	0,678	Traslación dirección mesa
2	3,918	0,255	Traslación dirección mesa
3	6,191	0,161	Traslación dirección mesa
4	8,191	0,122	Traslación dirección mesa
5	9,491	0,105	Traslación dirección mesa
6	12,569	0,060	Traslación dirección mesa
7	16,767	0,080	Traslación ortogonal mesa
8	20,110	0,050	Torsión

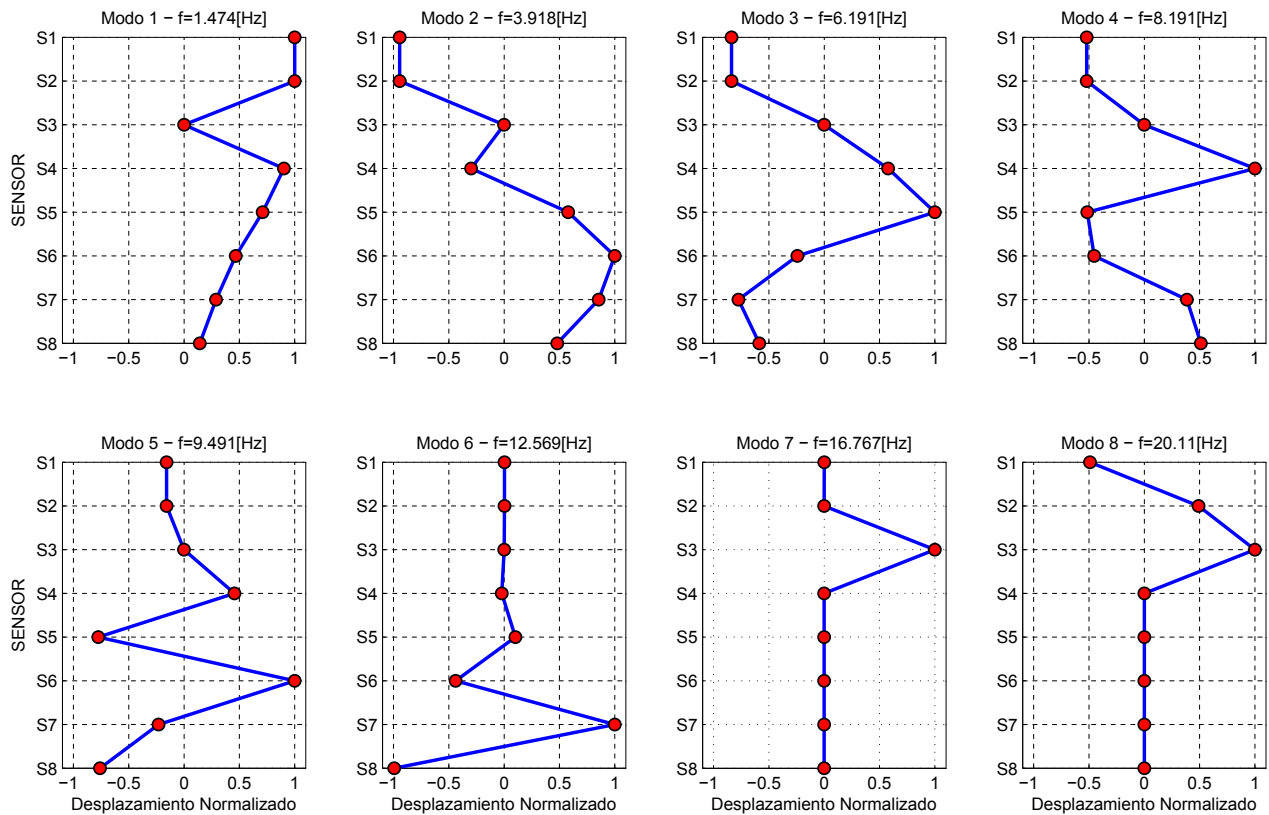


Figura 5.4: *Formas Modales del Modelo Numérico*

Tabla 5.4: Comparación de Frecuencias modales de la Estructura

MODO	FRECUENCIA NUMÉRICA[Hz]	FRECUENCIA EXPERIMENTAL[Hz]	ERROR [%]
1	1,474	1,445	2,01
2	3,918	3,866	1,35
3	6,191	6,065	2,08
4	8,191	7,996	2,44
5	9,491	9,412	0,84
6	12,569	12,782	-1,67

La matriz MAC entre las formas modales numérica y experimental, para el registro de ruido0, se muestra en la Figura 5.5, con alta coherencia en la diagonal, lo que demuestra la alta correlación entre los resultados modelados y los medidos.

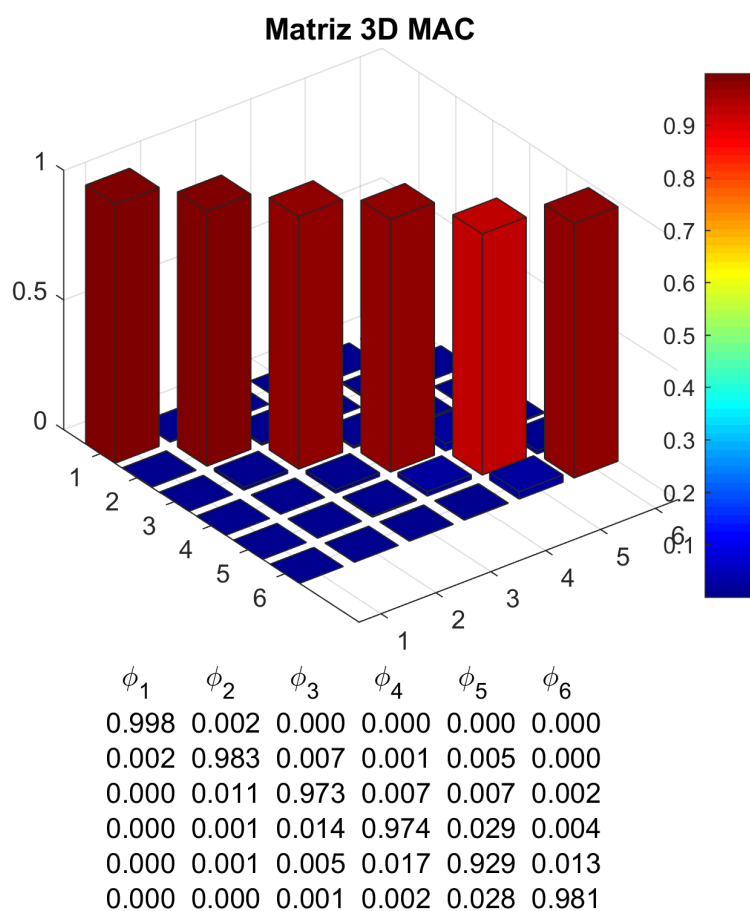
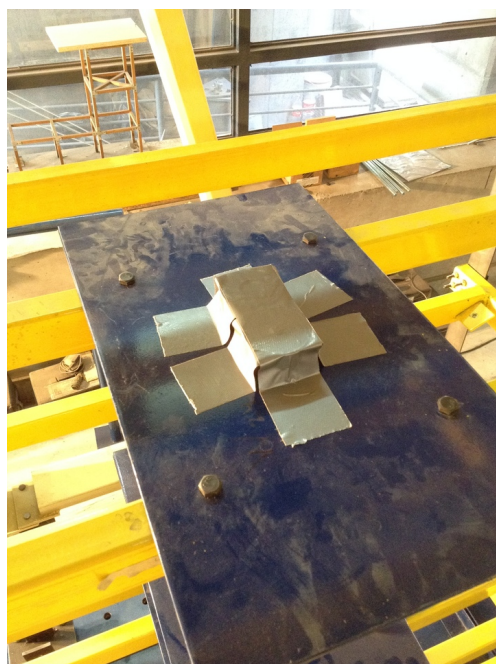


Figura 5.5: Matriz MAC de Formas Modales del Numérico y Experimental

## 5.4. Determinación Experimental de Propiedades Modales para la Estructura

El conocimiento de los resultados numéricos y experimentales para la estructura son un punto de partida para conocer, a priori, cual será la respuesta modal del sistema estructural. Los resultados reales de las propiedades modales de la estructura, sólo se conocen una vez que se han realizado ensayos experimentales sobre la estructura, de esta forma se corroboran las suposición hechas en el modelo numérico sobre: i) uniones entre elementos, ii) propiedades mecánicas de los materiales empleados, iii) condiciones ambientales, iv) condiciones de excitación y iv) condiciones de medición.



(a) Aplicación de Anomalía en la Estructura por Adición de Masa



(b) Aplicación de Anomalía por Aplicación de Gradiente de Temperatura con Reflectores

Figura 5.6: *Aplicación de Anomalías en la Estructura*

### 5.4.1. Condición de Anomalía

Como el objetivo de la tesis es detectar, aislar e identificar daño en la estructura, a partir del monitoreo estructural, es importante tener un conocimiento preciso de la estructura en su *Condición Normal*, definida así al estado en el cual la estructura está en una condición inicial de ensayo, sin alteraciones en sus elementos y montada sobre la mesa vibradora de movimiento horizontal (sobre la que se le aplicaran los diferentes ensayos). Como complemento a las condiciones normales en la estructura, se adicionan dos condiciones de anomalía:

- a. **Modificar la Condición Estacionaria** de la estructura, adicionando una masa equivalente al 0,5 % del peso total de la estructura en el cuarto nivel, Figura 5.6(a), y

- b. **Modificar la Temperatura Ambiental** del entorno, con un gradiente ascendente de temperatura de  $\Delta t = 5^{\circ}C$ . Generado con reflectores que emanan calor al entorno de la estructura, Figura 5.6(b).

Las condiciones de anomalía se realizan para probar que los métodos que se están estudiando tienen la capacidad de diferenciar una condición de daño, de otra condición que representa un estado de servicio o variación ambiental.

#### 5.4.2. Características de Ensayos Dinámicos

Los ensayos realizados en la estructura para determinar las propiedades modales reales, corresponden a los tres principales tipos de excitación que se presentan en las estructuras, que se describen como:

- a. **Carga de Impacto**, generada con un Impacto o Pullback, y permite observar la oscilación libre y decayente de la estructura. Su aplicación sólo realiza observaciones de la respuesta de la estructura y permite conocer en forma adecuada las frecuencias, formas modales y amortiguamiento de la estructura, aunque la cantidad de modos identificados depende fuertemente del lugar y la fuerza donde se aplica la carga. La desventaja de este tipo de excitación radica en el hecho de que la respuesta es altamente dependiente de la carga impuesta y su lugar de aplicación; y la generación de impactos o desplazamientos iniciales es poco práctica y muy costosa en casos reales para estructuras de gran tamaño.
- b. **Excitación Sísmica**, generada a partir de la excitación basal de registros sísmicos históricos sobre una mesa vibradora. La aplicación de este tipo de excitación considera la observación del input de la señal que entra a la estructura y la observación de la respuesta que la estructura tiene a esta excitación. Su implementación en una mesa vibradora debe ser realizada de modo que el registro tenga el correspondiente escalamiento, en caso de que sea necesario, de modo que evite generar daño en la estructura. Su aplicación bajo condiciones lineales permite conocer de manera adecuada las frecuencias, formas modales y razones amortiguamiento de la estructura. Las principales desventajas de esta excitación son: i) los registros sísmicos utilizados deben tener un tiempo prolongado de aplicación para obtener valores representativos, matemáticamente hablando; ii) el contenido de frecuencia que tiene el registro sísmico afecta en mayor o menor medida la respuesta de la estructura y iii) el registro debe ser bien escalado para evitar que la estructura ingrese en un comportamiento no-lineal.
- c. **Excitación Ambiental**, se genera a partir de un ruido coloreado, obtenido a partir de un ruido blanco filtrado entre 0 y 15 [Hz], que es equivalente a una excitación ambiental u operacional que puede ser reproducido por la mesa vibradora. Su implementación permite el monitoreo de la estructura de modo similar al operacional. La ventaja del método radica en el hecho de que la energía en toda la banda de observación de las frecuencias se considera constante (similar al caso con ruido blanco); los registros tienen duraciones de tiempo que son superiores a las dos condiciones anteriores, por tanto la respuesta en frecuencia y forma modal es determinada de mejor modo. La desventaja del método radica en el hecho de que la estructura no logra capturar todo el rango de desplazamiento que puede tener la estructura, por tanto, los valores de amortiguamiento son pobremente estimados y tienen grandes dispersiones.

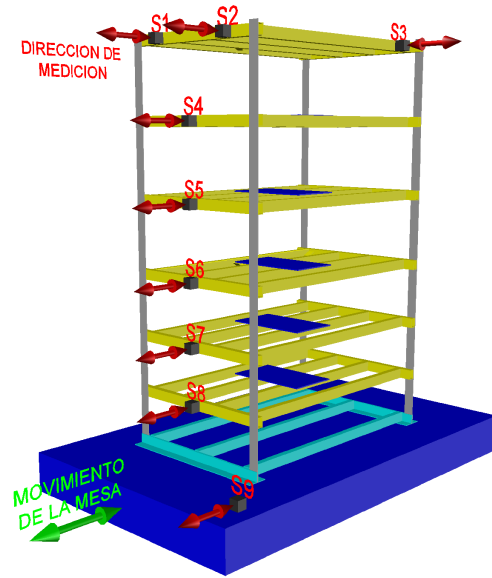


### 5.4.3. Instrumentación de la Estructura

Para realizar los ensayos, la estructura ha sido montada sobre una mesa vibradora del Laboratorio de Dinámica del Departamento de Ingeniería Civil. La mesa vibradora sólo permite desplazamientos horizontales en una dirección (1 grado de libertad) y consiste en una base con rieles de apoyo, los desplazamientos son generados con un gato hidráulico conectado a una servo-válvula que recibe las señales generadas por un computador a través de un sistema de control [Barrientos Oliva, 2008], Figura 5.7.



(a) Imagen de Estructura Monitoreada sobre mesa vibradora



(b) Configuración de los sensores instalados y direcciones de medición

Figura 5.7: Vista General de la Estructura Ensayada en Laboratorio

Los acelerómetros utilizados son uniaxiales, modelo ES-U2 de la marca Kinemetrics, y todas las mediciones realizadas entregan lecturas de voltaje, que posteriormente son convertidas a  $[g]$  y  $[cm/s^2]$ . La Tabla 5.5 muestra un resumen con información de la ubicación del sensor, modelo y constantes de conversión de lecturas a unidades de gravedad. Para todas las condiciones de monitoreo en la estructura, las mediciones se realizan con 9 acelerómetros dispuesto de la siguiente forma:

- i) 1 acelerómetro instalado sobre la mesa vibradora, para medir la excitación basal, Figura 5.7(b),
- ii) 3 acelerómetros en el nivel 6 (arreglo torsional), que permiten conocer la presencia de rotación en la estructura, Figura 5.7(b), y
- iii) 1 acelerómetro en cada uno de los niveles, desde el segundo nivel hasta al quinto nivel, Figura 5.7(b).

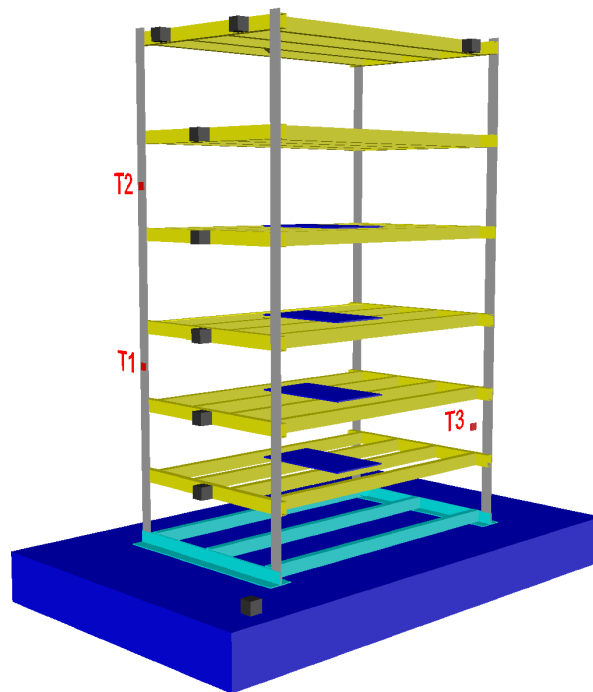
El monitoreo con acelerómetros es complementado con tres sensores de temperatura que miden la temperatura en la columna 1 de acero, 2 sensores se encuentran pegados a los elementos 9 y 17, Figura 5.8(a); además de un sensor para temperatura ambiental. La ubicación de los tres sensores



se observa en la Figura 5.8(b). Éstos sensores han sido calibrados con una termocupla para corregir el sesgo que tienen en sus mediciones.



(a) Montaje de Sensor T1 en columna



(b) Configuración de los sensores instalados en estructura

Figura 5.8: *Instalación de Sensores de Temperatura en Columna Metálica*

Tabla 5.5: *Propiedades de Acelerómetros Uniaxiales*

SENSOR	NIVEL	MODELO Y SERIE	CONSTANTE	OBSERVACIÓN
Sensor 1(S1)	6	EpiSensor ES-U2, 4577	9.981 [V/g]	Aceleración
Sensor 2(S2)	6	EpiSensor ES-U2, 4578	9.982 [V/g]	Aceleración
Sensor 3(S3)	6	EpiSensor ES-U2, 4579	9.995 [V/g]	Aceleración
Sensor 4(S4)	5	EpiSensor ES-U2, 4580	9.993 [V/g]	Aceleración
Sensor 5(S5)	4	EpiSensor ES-U2, 4581	9.977 [V/g]	Aceleración
Sensor 6(S6)	3	EpiSensor ES-U2, 4582	9.997 [V/g]	Aceleración
Sensor 7(S7)	2	EpiSensor ES-U2, 4583	10.008 [V/g]	Aceleración
Sensor 8(S8)	1	EpiSensor ES-U2, 4584	9.994 [V/g]	Aceleración
Sensor 9(S9)	Mesa	EpiSensor ES-U2, 4623	9.957 [V/g]	Aceleración
Sensor 10(T1)	2 y 3	Termosensor, LM35	10.0 [mV/°C]	Temperatura
Sensor 11(T2)	4 y 5	Termosensor, LM35	10.0 [mV/°C]	Temperatura
Sensor 12(T3)	Ambt.	Termosensor, LM35	10.0 [mV/°C]	Temperatura

El sistema de monitoreo en laboratorio, hace un registro de todos los sensores sincronizando tiempo común y almacena la información de manera digital con la ayuda de una central de registro de 12 canales, modelo Dolomite de marca Kinometrics, que ofrece un alto rango dinámico de fun-

cionamiento. En todas las mediciones de aceleración y temperatura se han utilizado frecuencias de muestreo de 200 muestras por segundo, que es el estandar en el monitoreo de estructuras.

Los acelerómetros empleados en el monitoreo, permiten medir las aceleraciones de respuesta de la estructura con un bajo nivel de ruido, lo que es muy importante al momento de buscar identificar cualquier cambio en la estructura.

#### 5.4.4. Ensayos Experimentales

Los registros experimentales realizados para conocer los parametros modales, iniciales de la estructura tienen las siguientes características:

- a. **Registros de impactos y pullback**, se generaron en el tercio central de la estructura a fin de excitar la mayor cantidad de modos de la estructura, son simbolizados por círculos (○).
- b. **Registros sísmicos**, fueron seleccionados considerando varios aspectos como ser: i) ubicación geográfica del terremoto, ii) espectro de potencia del registro, con amplitud relevante en la banda de frecuencia de estudio para la estructura, iii) duración del terremoto y iv) la importancia respecto al daño que provocó. Se selección 5 registros que se indican en la Tabla 5.6, son simbolizados por triángulos hacia arriba para terremotos de Chile ( $\Delta$ ) y triángulos hacia abajo para terremotos de Estados Unidos( $\nabla$ ).
- c. **Registros de ruidos coloreados**, fueron generados a partir de un ruido blanco y luego filtrados entre los 0 y 15 [Hz] de modo que se encontraba dentro del rango de observación que se realiza a la estructura. Se generaron 3 registros de ruido coloreado que se indican en la Tabla 5.7, son simbolizados por cuadrados (□).

Dado que la hipótesis inicial de la tesis considera que la estructura es *Lineal e Invariante en el Tiempo* (LTI, por sus siglas en inglés), es necesario que los registros o excitaciones no dañen la estructura, por tal motivo se realiza un escalamiento a los registros sísmicos de modo que se controle la deformación máxima de la estructura en el techo. La Tabla 5.6, muestra un resumen de los registros empleados y sus respectivos escalamientos.

Tabla 5.6: *Registros Ensayados en la Estructura*

REGISTRO	DESCRIPCIÓN	ESCALA	SÍMBOLO
1	Terremoto Valparaiso 1985, Llole, 100°	0,12	$\Delta$
2	Terremoto Valparaiso 1985, Melipilla, EW	0,16	$\Delta$
3	Terremoto Maule 2010, Constitución, V	0,16	$\Delta$
4	Terremoto Loma Prieta 1989, Gilroy No3, UP	1,00	$\nabla$
5	Terremoto Northridge 1994, Arleta, UP	0,30	$\nabla$

Tabla 5.7: *Registros Ensayados con Ruido Coloreado en Estructura*

REGISTRO	DESCRIPCIÓN	SÍMBOLO
1	Ruido Coloreado 1	□
2	Ruido Coloreado 2	□
3	Ruido Coloreado 3	□

Los ensayos realizados en la estructura para la condición inicial, sin daño, tienen la secuencia mostrada en la Tabla 5.8. Se realizan: i) 10 ensayos para la *Condición Normal*, ii) 5 ensayos para *Anomalía por Temperatura*, con la generación de un gradiente ascendente de temperatura de  $\Delta t = 5^{\circ}C$  y iii) 10 ensayos para *Anomalía por Masa*, con la adición de una masa equivalente al 0.5 % de la masa total en el cuarto nivel de la estructura.

Tabla 5.8: *Secuencia de Ensayos en Condición Normal de la Estructura*

CONDICION	ENSAYOS	CANTIDAD	LEYENDA
Normal	Impacto/Pullback	2	NORM
Normal	Registros Sísmicos	5	NORM
Normal	Registros de Ruido	3	NORM
Anomalía Temperatura	Impacto/Pullback	2	N+T
Anomalía Temperatura	Registros de Ruido	3	N+T
Anomalía Masa	Impacto/Pullback	2	N+M
Anomalía Masa	Registros Sísmicos	5	N+M
Anomalía Masa	Registros de Ruido	3	N+M
<b>TOTAL</b>		<b>25</b>	

Las identificaciones de propiedades modales para frecuencias, amortiguamientos y formas modales, fueron obtenidas con la metodología descrita en el Capítulo 2, aplicando: i) Identificación ERA para registros de impacto, ii) Identificación MOESP para registros sísmicos e iii) Identificación SSI-COV para registros de ruido coloreado, considerando un orden máximo de 100 para cada uno de los registros.

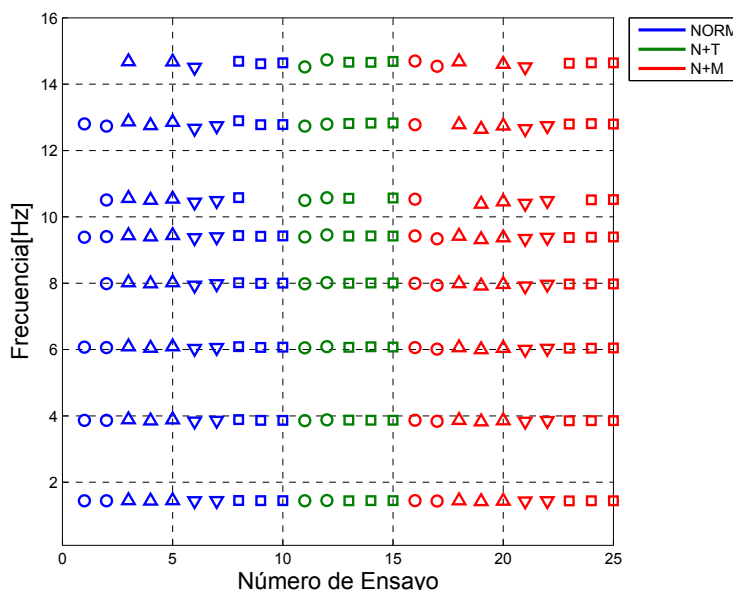


Figura 5.9: *Frecuencias Identificadas para la Condición Normal*

Los resultados de la identificación de *Frecuencias Modales*, Figura 5.9, muestran que existen 8 modos claramente diferenciados entre sí. Las propiedades modales identificadas son similares

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN EXPERIMENTAL EN LABORATORIO

para las metodologías de ERA, MOESP y SSICOV, un análisis estadístico de resultados se detalla en la Tabla 5.9, con valores de la media,  $\bar{x}$ , desviación estandar,  $s$ , y diferencia porcentual entre condiciones evaluadas en frecuencia,  $diff[\%]$ .

Tabla 5.9: Estadísticas de Frecuencias Identificadas

MODO	NORM		N+T		N+M		NORM vs N+T	NORM vs N+M
	$\bar{x}$ [Hz]	$s$ [Hz]	$\bar{x}$ [Hz]	$s$ [Hz]	$\bar{x}$ [Hz]	$s$ [Hz]	$diff[\%]$	$diff[\%]$
Modo 1	1.443	0.004	1.445	0.004	1.437	0.007	0.10	-0.42
Modo 2	3.868	0.016	3.869	0.009	3.852	0.015	0.03	-0.41
Modo 3	6.066	0.020	6.074	0.014	6.033	0.022	0.12	-0.54
Modo 4	7.994	0.026	8.003	0.014	7.962	0.028	0.11	-0.40
Modo 5	9.410	0.024	9.424	0.022	9.375	0.034	0.14	-0.37
Modo 6	10.516	0.048	10.549	0.037	10.470	0.058	0.32	-0.43
Modo 7	12.788	0.071	12.799	0.039	12.750	0.062	0.09	-0.29
Modo 8	14.635	0.069	14.652	0.080	14.619	0.063	0.12	-0.11

En el caso de *Razones de Amortiguamiento*, las identificaciones realizadas tienen una gran dispersión, Figura 5.10, que varían entre 0.10% y 0.85% para todos los modos identificados. La Tabla 5.10, muestra el análisis estadístico, en el cual, el promedio de los amortiguamientos por modos, son similares para las tres condiciones de ensayo (NORM, N+T y N+M); y las variaciones porcentuales son mayores para la comparación entre el caso *Condición Normal* y la *Anomalía por Temperatura* que entre el caso *Condición Normal* y la *Anomalía por Masa*.

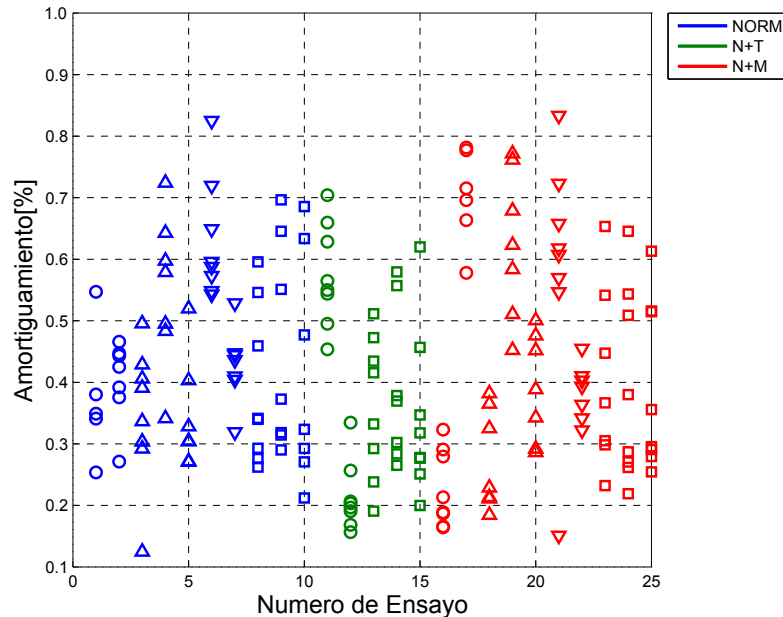


Figura 5.10: Razones de Amortiguamiento para la Condición Normal

Tabla 5.10: *Estadísticas de Amortiguamientos Identificados*

MODO	NORM		N+T		N+M		NORMvsN+T	NORMvsN+M
	$\bar{x}$ [%]	s [%]	$\bar{x}$ [%]	s [%]	$\bar{x}$ [%]	s [%]	diff [%]	diff [%]
Modo 1	0.494	0.12	0.438	0.13	0.485	0.20	-11.21	-0.42
Modo 2	0.407	0.14	0.352	0.14	0.425	0.20	-13.51	-0.41
Modo 3	0.372	0.11	0.330	0.14	0.380	0.17	-11.24	-0.54
Modo 4	0.339	0.08	0.289	0.12	0.341	0.14	-14.84	-0.40
Modo 5	0.478	0.10	0.454	0.17	0.469	0.16	-5.17	-0.37
Modo 6	0.464	0.18	0.297	0.13	0.462	0.24	-36.06	-0.43
Modo 7	0.565	0.13	0.534	0.17	0.551	0.14	-5.47	-0.29
Modo 8	0.266	0.16	0.302	0.14	0.294	0.20	13.46	-0.11

La respuesta separada por modos, para las frecuencias modales identificadas se muestra en la Figura 5.11, la Tabla 5.9 muestra las estadísticas para los resultados obtenidos, con las siguientes características:

- En la Figura 5.11, los 8 modos tienen el mismo rango de observación en el eje de las abscisas, de 0.40[Hz], a fin de analizar visualmente la variabilidad en la identificación por modo.
- La Tabla 5.9, muestra que existe un aumento en la dispersión (desviación estándar) de las frecuencias en los modos superiores identificados, esta condición se observa para las tres condiciones de análisis (*NORM*, *N + T* y *N + M*).
- La *Anomalía por Temperatura* no produce dispersión adicional en forma perceptible, ni modifica la respuesta modal en ninguno de los 8 modos, este hecho se debe a que la gradiente en temperatura sólo alcanzo los  $\Delta t = 5^{\circ}C$  aplicados por menos de 2 horas en un ambiente amplio y sin condiciones de aislamiento de temperatura. La diferencia porcentual entre *Condición Normal* y *Anomalía por Temperatura* tienen una variación entre 0.03 % y 0.32 %, siempre positiva, este hecho puede deberse a uno o la combinación de los siguientes casos: i) los ensayos entre Condición Normal y con variacion de temperatura se realizaron con un día de diferencia, por lo que la condición inicial de temperatura no era la misma para ambos casos, ii) la variación puede estar dentro de la dispersión definida en el punto b), este hecho no puede ser corroborado debido a la cantidad reducida de ensayos (hasta 10 por condición) y iii) puede ser producto del ajuste de alguno de los apoyos de la estructura, antes del inicio de las mediciones.
- La *Anomalía por Masa*, modifica la media de todos los modos observados, reduciendo su valor entre un -0.11 % y -0.54 %, siempre negativo, este hecho es principalmente evidente en registros de ruidos, para todos los modos.
- El modo 6 (ortogonal al movimiento de la mesa) y el modo 8 (movimiento rotacional), tienen mayor dificultad de ser identificados debido a que la mesa tiene movimiento en una dirección que no coincide con los movimientos indicados, lo que produce que estos modos sean excitados ligeramente, tengan poca energía y sea difícil encontrar estabilidad en los modos identificados.
- Se selecciona como valor de frecuencia modal experimental, el **modo que está encerrado en círculo negro**, Figura 5.11, y corresponde al registro que esté más cercano a la media de

todos los ensayos obtenidos en *Condición Normal*, en todos los modos este corresponde a un registro de ruido coloreado.

La respuesta para Razones de Amortiguamiento, se muestran en la Figura 5.12 y la Tabla 5.10, con las siguientes características:

- a. En la Figura 5.12, los 8 modos identificados tienen el mismo rango de observación, entre 0,1 % y 1,0 %, de amortiguamiento de la estructura en el eje de las abscisas.
- b. La variabilidad en los 8 modos no tiene una media bien definida y su dispersión es alta, lo que se observa visualmente y a través de su desviación estándar de la Tabla 5.10.
- c. En todos los modos las razones de amortiguamiento son bajas, entre 0.266 % y 0.565 % que ocasiona que la estructura oscile por un tiempo largo después de concluir cada ensayo.
- d. Los amortiguamientos para la condición de Anomalía por Masa tienen una mayor dispersión que los amortiguamientos observados en la Condición Normal y con Anomalía por Temperatura.
- e. En todas las condiciones evaluadas, el promedio de las razones de amortiguamiento, por modo, son bastante próximas a pesar del valor de la desviación estándar.
- f. No se observa que la Anomalía por Temperatura o por Masa afecten la respuesta modal de la estructura de manera significativa, en ninguno de los modos.

La respuesta para *Forma Modal* y valores *MAC*, por modo, se observan en la Figura 5.13 y Figura 5.14, con el siguiente detalle:

- a. En la Figura 5.13 Cada uno de los modos tiene en el eje de las ordenadas la numeración de los 8 sensores de aceleración instalados en la estructura; la amplitud de desplazamiento máxima ha sido normalizado a la unidad y se ha aplicado el concepto de Factor Modal de Escala (MSF por sus siglas en inglés) para uniformar la polaridad de todas las formas.
- b. Los modos 1, 2, 4 y 7, tienen una buena coherencia en todos los sensores de la forma modal para todos los registros ensayados, existiendo apenas diferencias entre ellos.
- c. En el modo 3 (S1, S2, S4, S5 y S6) y modo 5 (S1, S2, S4 y S7) se observa que los ensayos con masa modifican la respuesta de la forma modal de la estructura, diferenciándose claramente los ensayos de la *Condición Normal* y la *Condición con Anomalía por Masa*.
- d. El modo 6 (ortogonal a la mesa) y modo 8 (torsional), son los que tienen mayor variabilidad en las formas modales ubicados en los sensores S5, S6, S7 y S8, esto se debe a que solo existe un observador que proporcione información en ésta dirección y por que ambos modos tienen mayor desplazamiento en los primeros sensores (en la parte superior de la estructura) y bajos desplazamientos en los sensores mencionados, que están cerca a la base de la estructura.

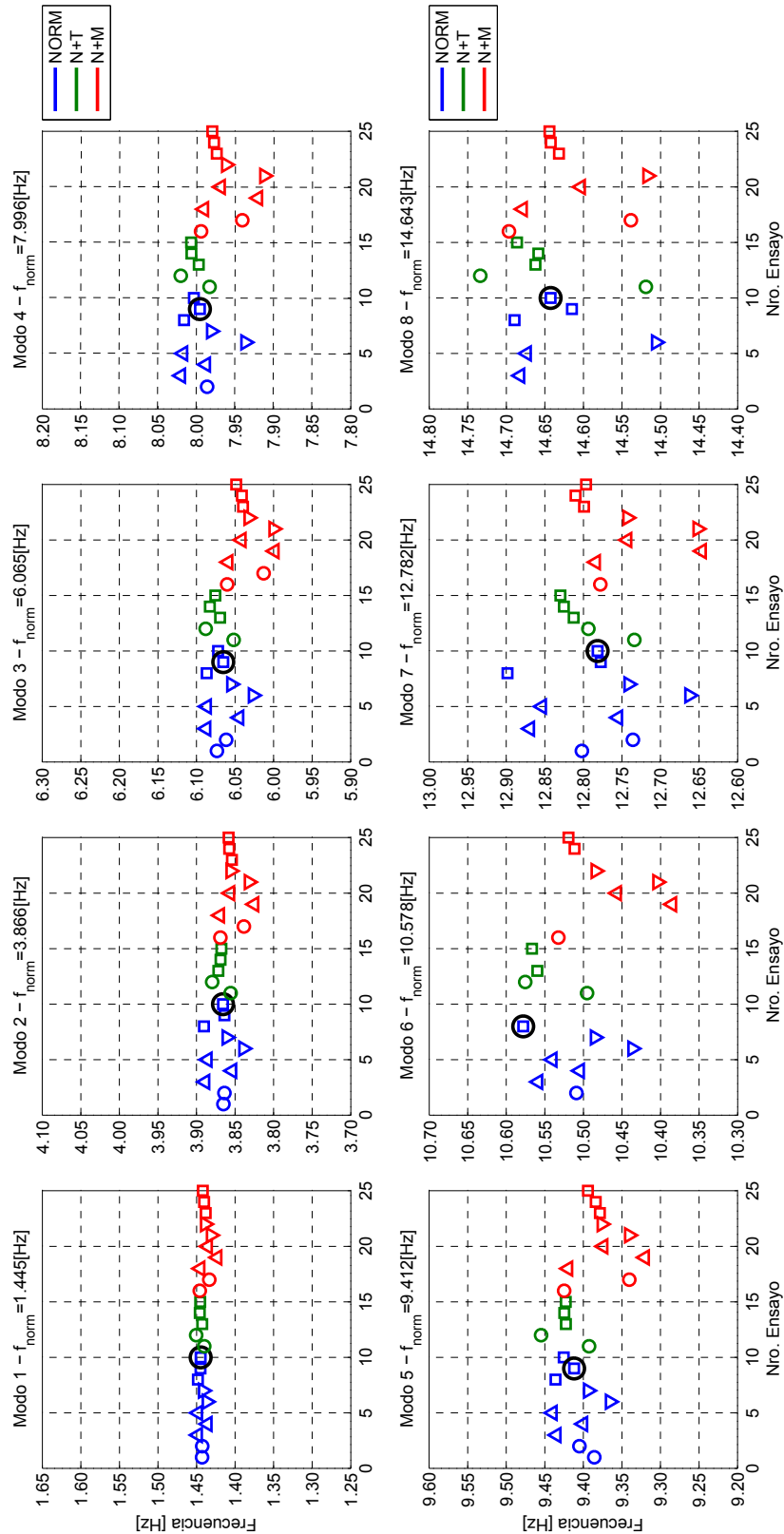


Figura 5.11: Frecuencias Identificadas por Modos para la Condición Normal

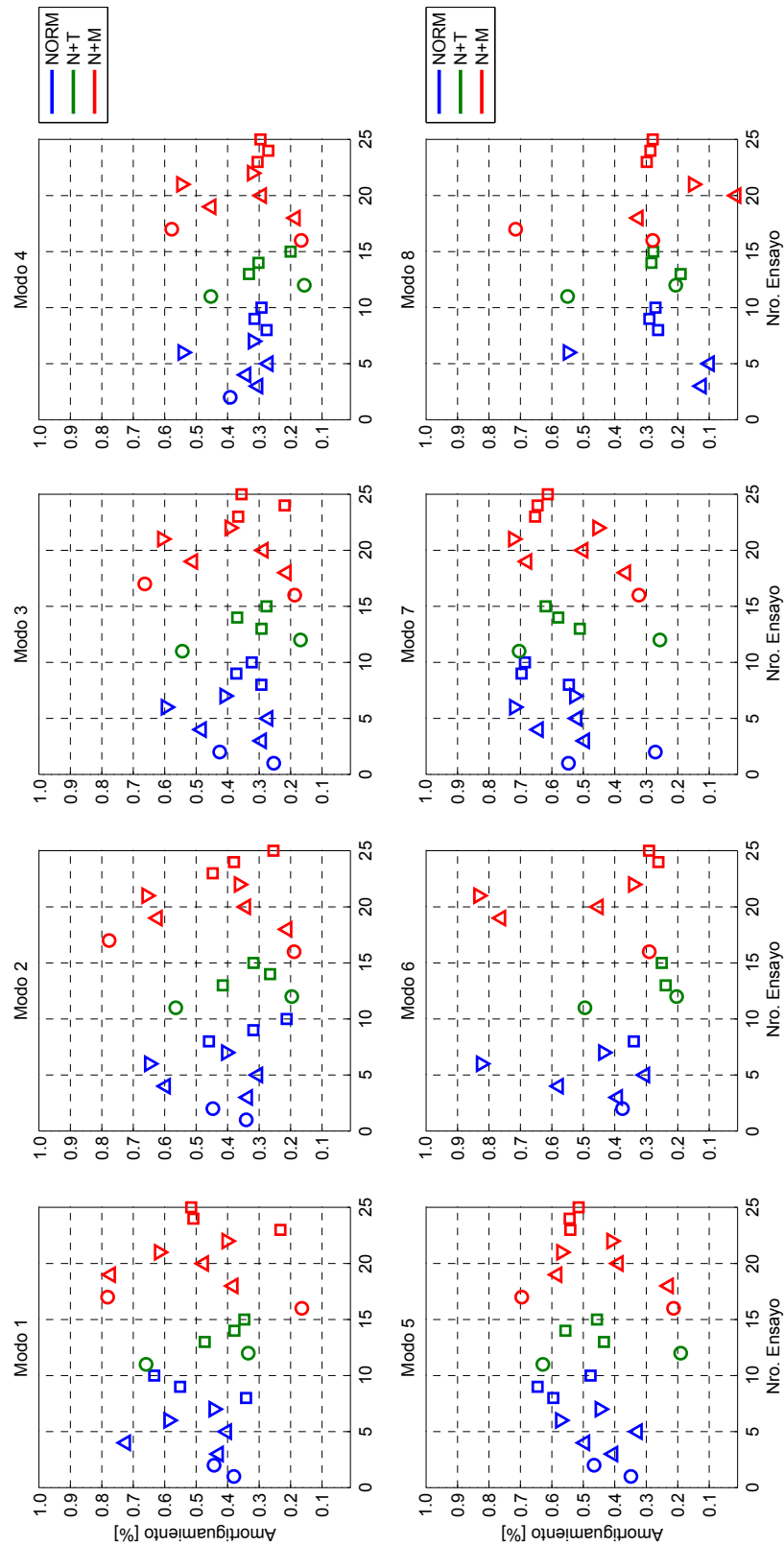


Figura 5.12: Amortiguamientos Identificados por Modos para la Condición Normal



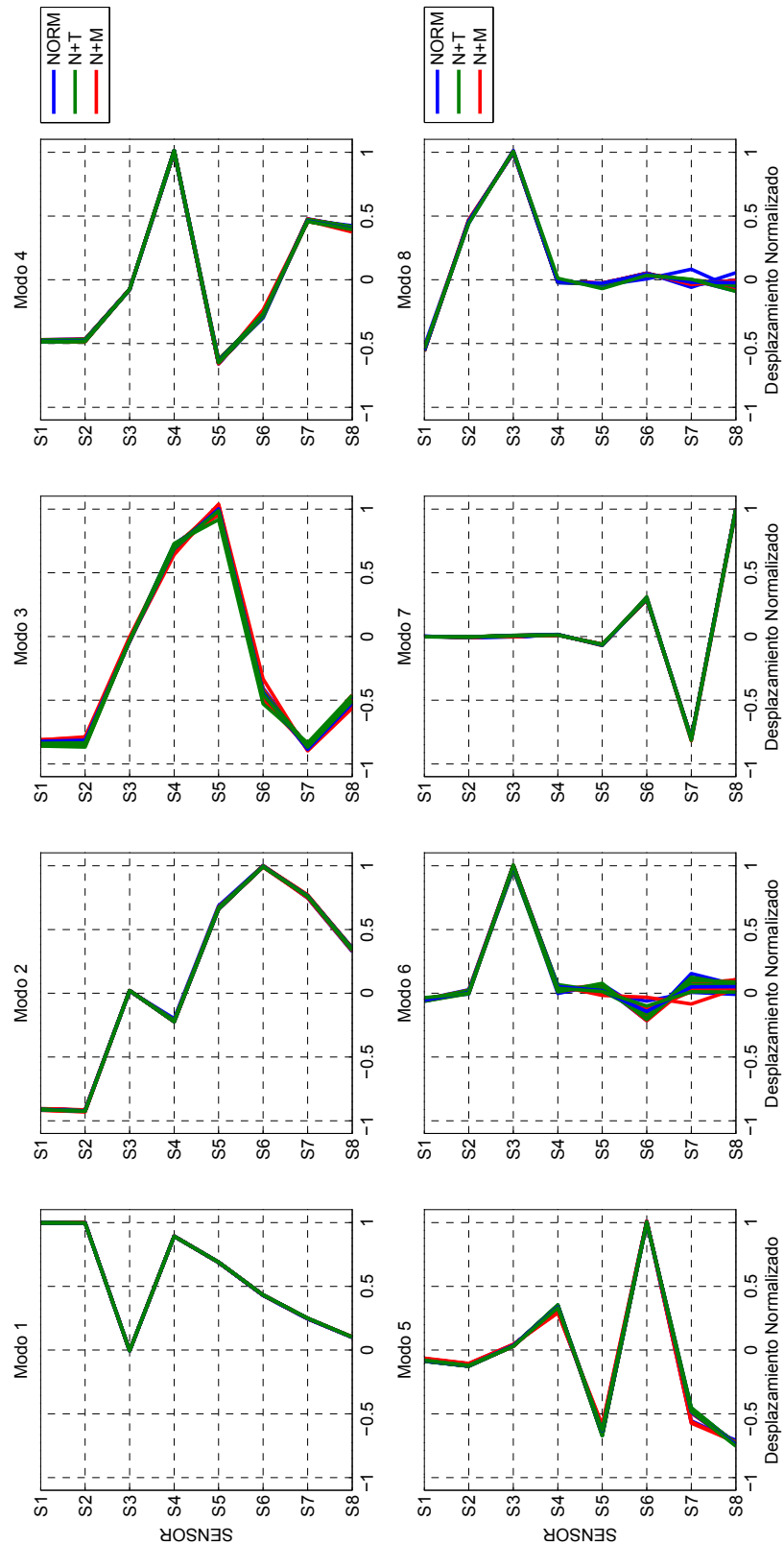


Figura 5.13: Formas Modales Identificadas por Modos para la Condición Normal

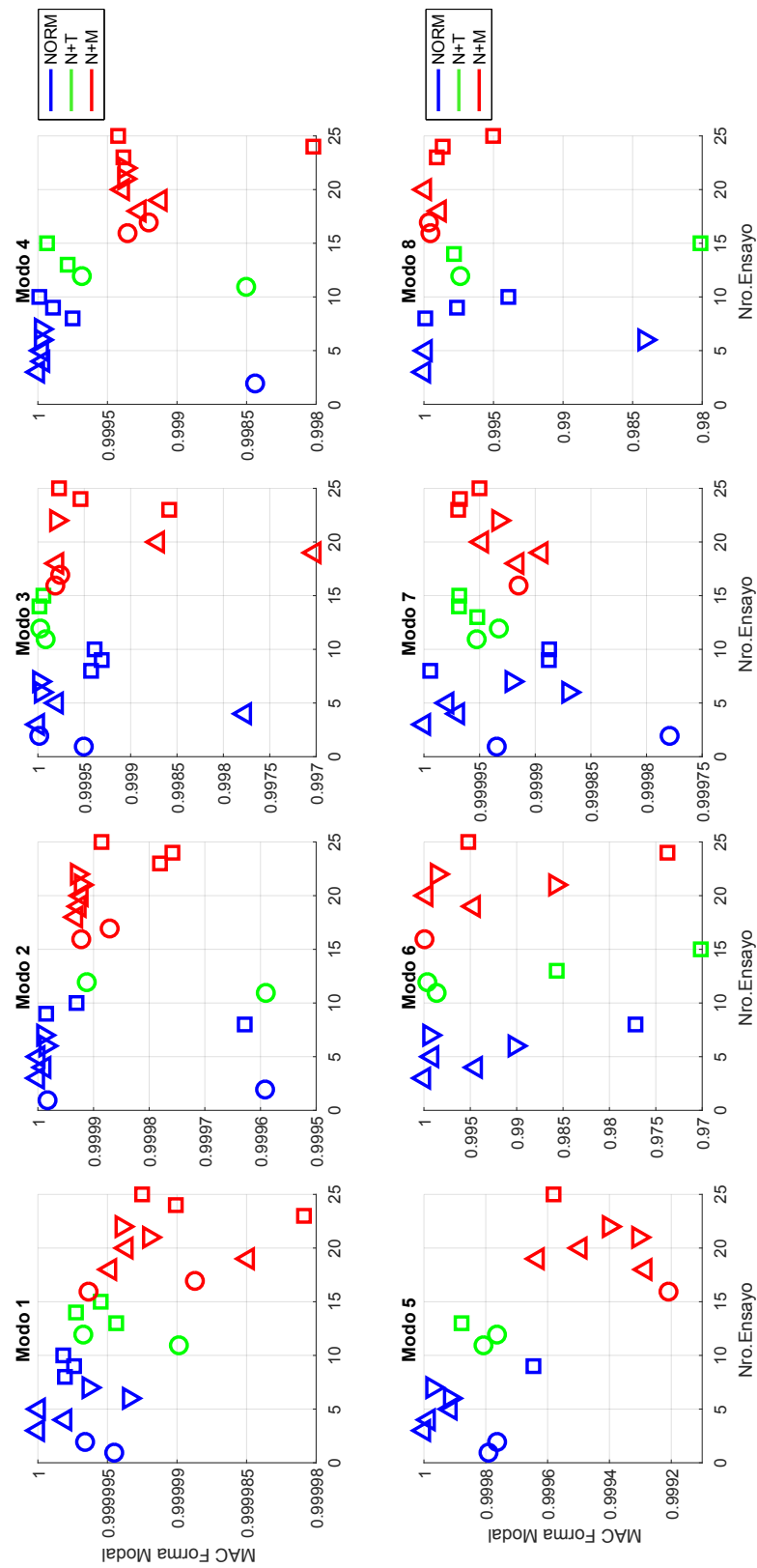


Figura 5.14: Variación de Valores MAC para Formas Modales en Condición Normal

Con los resultados obtenidos de las Figuras 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14, se pueden obtener las siguientes conclusiones de respuesta de la estructura:

- a) Se identifican 8 modos en la estructura, 6 modos traslacionales en la dirección de movimiento de la mesa (modos 1, 2, 3, 4, 5 y 7), 1 modo ortogonal al movimiento de la mesa (modo 6) y 1 modo con movimiento rotacional (modo 8).
- b. La *Anomalía por Temperatura* no modifica la respuesta modal de la estructura en frecuencia, razón de amortiguamiento o forma modal.
- c. La *Anomalía por Masa*, altera las respuestas modales en frecuencia y formas modales de la estructura; esta situación no es evidente en las razones de amortiguamiento, ya que las respuestas a las condiciones evaluadas tienen comportamiento similar.
- d. Las cargas de impacto, no alcanzan identificar todos los modos de la estructura y presentan una alta variabilidad en la respuesta de frecuencia y amortiguamiento. Por tanto, se observa la alta dependencia, o correlación, entre los resultados y, la carga y ubicación en la que fue generada la excitación.
- e. El modo 6 (ortogonal al movimiento de la mesa) y el modo 8 (torsional), son los modos que presentan mayor dificultad en la identificación y variación en las formas modales entre la Condición Normal y la condición de Anomalía por Masa.
- f. Experimentalmente, el sexto modo en dirección de movimiento de la mesa (Modo 7) es más rígido que el primer modo ortogonal al movimiento de ésta (Modo 6); diferenciando la respuesta experimental de los resultados numéricos.
- g. La variación observada en el punto f., no afecta el valor el valor numérico en frecuencia del sexto modo traslacional, como se observa en la Figura 5.11 y Tablas 5.4 y 5.11.

La Tabla 5.11 muestra un resumen de los resultados obtenidos experimentalmente, éstos valores fueron seleccionados considerando: i) el modo más cercano a la media de los resultados, (ii) sólo se consideran los registros de ruido coloreado por tener los resultados más uniformes y próximos a la media, ver Figura 5.10.

Tabla 5.11: *Frecuencias Experimentales de la Estructura para Condición Normal*

MODO	FRECUENCIA [Hz]	PERÍODO [s]	MOVIMIENTO
1	1,445	0,692	Traslación dirección mesa
2	3,866	0,259	Traslación dirección mesa
3	6,065	0,165	Traslación dirección mesa
4	7,996	0,125	Traslación dirección mesa
5	9,412	0,106	Traslación dirección mesa
6	10,578	0,095	Traslación ortogonal mesa
7	12,782	0,078	Traslación dirección mesa
8	14,643	0,068	Torsión

La Tabla 5.12, muestra un resumen de las diferencias porcentuales que existen entre las frecuencias identificadas experimentalmente y las frecuencias numéricas, sólo para los modos que están en la dirección de movimiento de la mesa vibradora.

Tabla 5.12: *Frecuencias Experimentales y Numéricas de la Estructura, Condición Normal*

RESULTADOS NUMÉRICOS		RESULTADOS EXPERIMENTALES		DIFERENCIA
MODO	FRECUENCIA[Hz]	MODO	FRECUENCIA[Hz]	%
1	1,474	1	1,445	2,01
2	3,918	2	3,866	1,35
3	6,191	3	6,065	2,08
4	8,191	4	7,996	2,44
5	9,491	5	9,412	0,84
6	12,569	7	12,782	-1,67

Los resultados para razones de amortiguamiento modales de la estructura se realizaron considerando los mismos pasos que para frecuencias modales, es decir, tomando la media de los resultados obtenidos para la *Condición Normal*. El resumen se observa en la Tabla 5.13.

Tabla 5.13: *Amortiguamientos Experimentales de la Estructura, Condición Normal*

MODO	AMORTIGUAMIENTO[%]	MOVIMIENTO
1	0,64	Traslación dirección mesa
2	0,22	Traslación dirección mesa
3	0,32	Traslación dirección mesa
4	0,30	Traslación dirección mesa
5	0,49	Traslación dirección mesa
6	0,78	Traslación ortogonal mesa
7	0,68	Traslación dirección mesa
8	0,32	Torsión

El Criterio Modal de Certeza (MAC), entre las formas modales numérica y experimental, se muestra en la Figura 5.15, en ella se observa que existe una buena coherencia para los modos traslacionales en dirección de movimiento de la mesa Figura 5.15(a) y existen similitudes entre el modo 6 y modo 8, cuando se considera los 8 modos identificados.

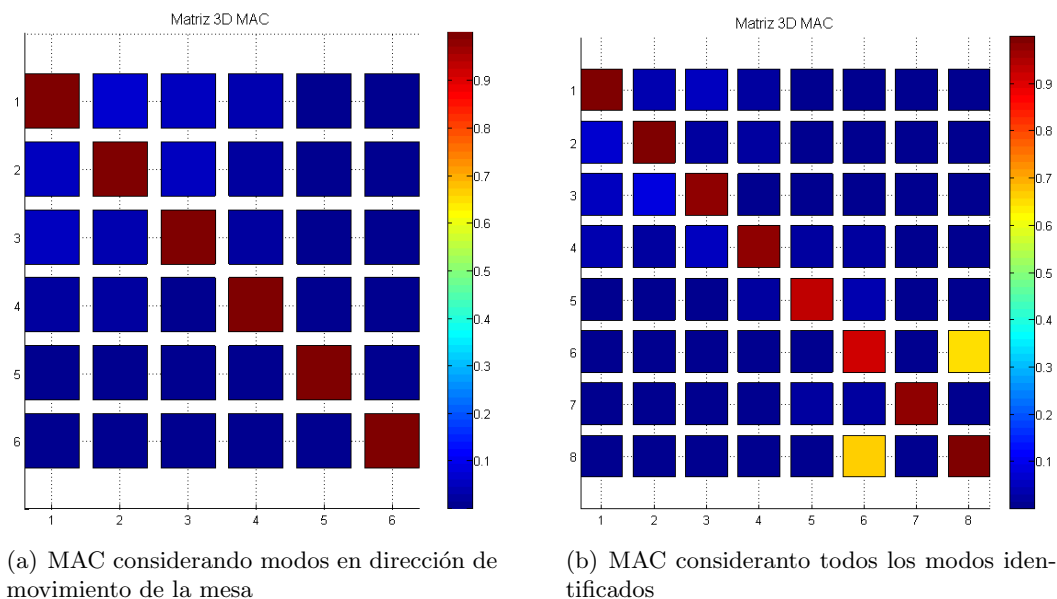


Figura 5.15: Comparación de Formas Modales Numérica y Experimental

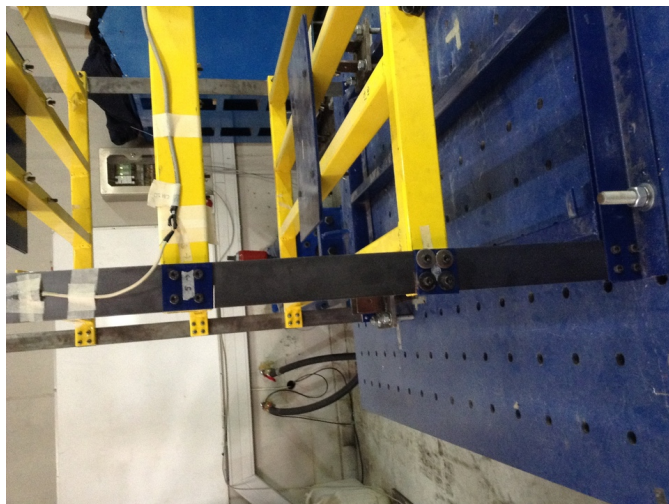
## 5.5. Aplicación de Daño Controlado en la Estructura y Determinación de Propiedades Modales

La aplicación de daño en el estructura se realiza por medio de una reducción controlada de la sección transversal de una columna, en el segundo nivel, de esta forma la rigidez local del elemento y global de la estructura, se reducen; esta reducción debe ser observada en las identificaciones de las propiedades modales, traducidas en una reducción sistemática de las frecuencias modales.

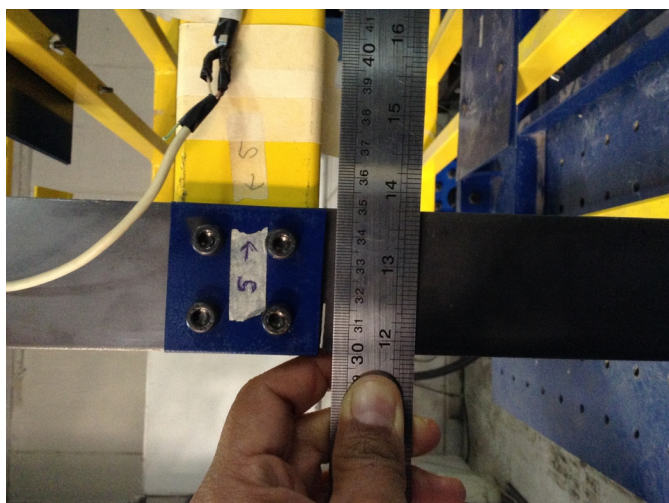
Debido a que no se observan diferencias apreciables en la respuesta modal en frecuencia, amortiguamiento y forma modal debido a la *Anomalía por Temperatura*, descrito en el subtitulo 5.4, esta condición no será considerada en los resultados de éstas identificaciones. La aplicación de Daño en la estructura se ha planteado considerando dos condiciones de reducción de la sección transversal:

- a) **Daño Leve**, denominado así porque sólo se interviene una columna; constituye la reducción progresiva de la sección transversal de los extremos del elemento 5 de la estructura, ubicada en el segundo nivel, ver Figura 5.3, las reducciones sucesivas son de: i) 10[mm] (20 % de la sección transversal), ii) 17,5[mm] (35 %) y iii) 35[mm] (50 %).
- b) **Daño Severo**, denominado así porque se interviene todas las columnas de un nivel; se reduce la sección transversal de las restantes tres columnas del segundo nivel (elementos 6, 7 y 8 de la Figura 5.3(b)), con cortes en lugares similares a los indicados en el inciso a), las reducciones sucesivas son de: i) 17.5[mm] (35 % de la sección transversal) y ii) 35[mm] (50 %).

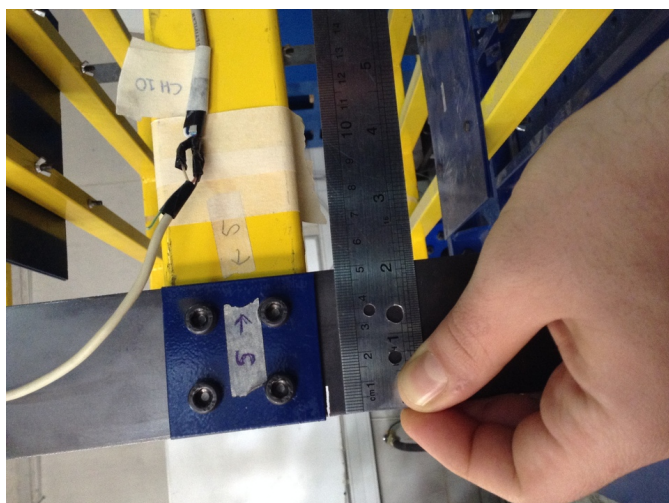
La secuencia de reducción, aplicada a la estructura, indicada en el inciso a), se muestra en la Figura 5.16(a) para reducción del 20 %, Figura 5.16(b) para reducción de 35 % y Figura 5.16(c) para reducción de 50 %.



(c) Corte del 50 % de la Sección Transversal



(b) Corte del 35 % de la Sección Transversal



(a) Corte del 20 % de la Sección Transversal

Figura 5.16: Reducción de la Rigidez en Columna

Los ensayos en la estructura, para las condiciones del párrafo anterior, *Daño Leve* y *Daño Severo*, incluida la Anomalía por Masa en la estructura, se detalla en la Tabla 5.14. Para cada una de estas condiciones, 10 registros son evaluados, dos impactos, cinco sismos indicados en las Tabla 5.6 y tres ruidos coloreados indicados en la Tabla 5.7.

La identificación de propiedades modales para todos los ensayos realizados ha permitido identificar 8 modos para la mayoría de los registros. La Figura 5.17 y Figura 5.18, muestran la respuesta en frecuencia y amortiguamiento, respectivamente, para los 100 registros realizados, en ella se observa la reducción de la frecuencia con el incremento del daño para cada uno de los diferentes ensayos; como era de esperar, esta diferencia en las frecuencias se hace visualmente más notorio en los modos con las frecuencias más altas.

Tabla 5.14: *Ensayos Realizados*

<b>ENSAYO</b>	<b>CONDICIÓN</b>	<b>LEYENDA</b>
Normal	Normal	NORM
Normal	Normal + Adición de 0.50 % de Masa	NR+M
Daño Leve	Reducción 20 % en elemento 5	RE20
Daño Leve	Reducción 20 % en elemento 5 + Adición de 0.50 % de Masa	R20M
Daño Leve	Reducción 35 % en elemento 5	RE35
Daño Leve	Reducción 35 % en elemento 5 + Adición de 0.50 % de Masa	R35M
Daño Leve	Reducción 50 % en elemento 5	RE50
Daño Leve	Reducción 50 % en elemento 5 + Adición de 0.50 % de Masa	R50M
Daño Severo	Reducción 35 %, Toda las columnas Nivel 2	RT35
Daño Severo	Reducción 50 %, Toda las columnas Nivel 2	RT50

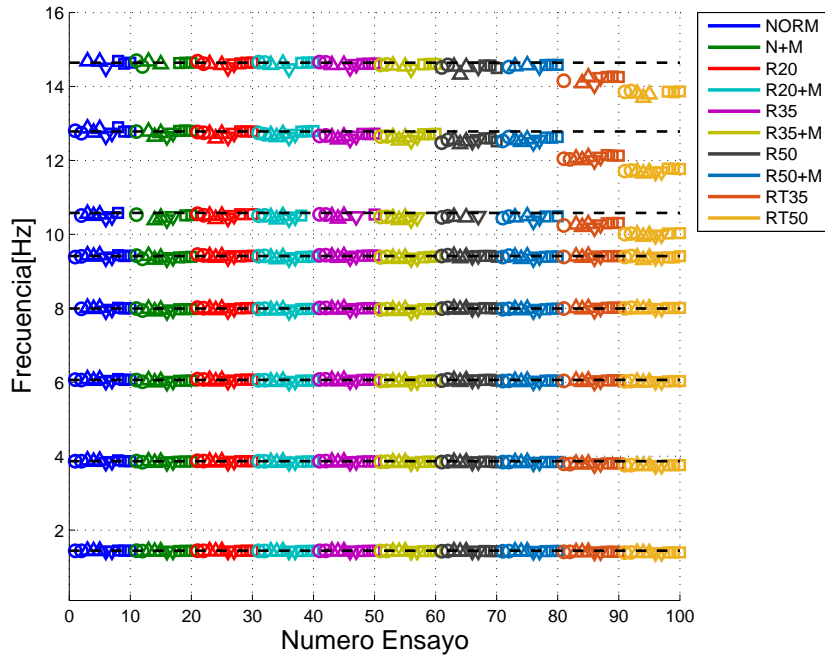


Figura 5.17: Frecuencias Modales para las Condiciones de Ensayo

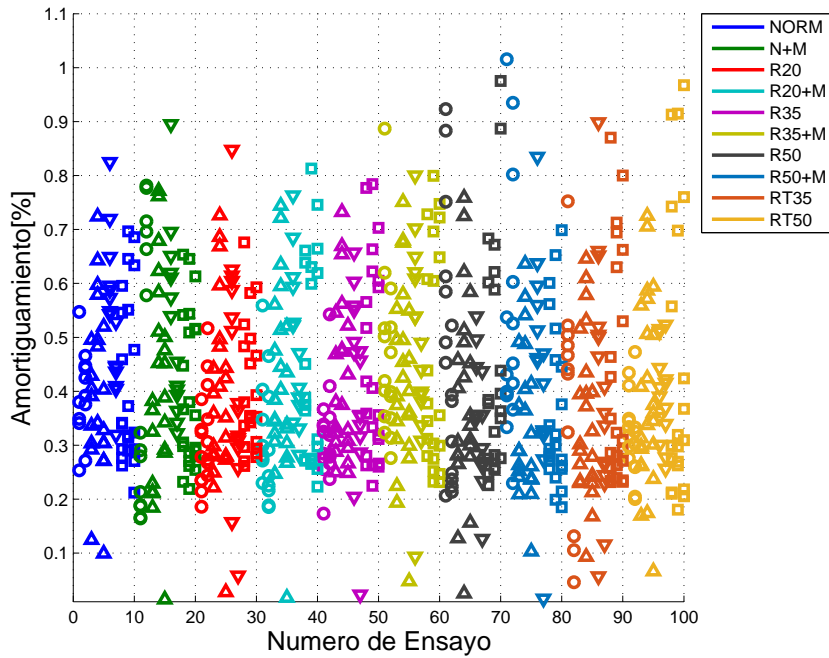


Figura 5.18: Razones de Amortiguamiento para las Condiciones de Ensayo



Un resumen para las frecuencias modales, se observan en la Figura 5.19; para las razones de amortiguamiento en la Figura 5.20; y para las formas modales, en la Figura 5.21 y Figura 5.22.

Los resultados muestran que:

- a. En la Figura 5.19, se observa que existe una reducción en el valor de las frecuencias modales con la aplicación de *Daño Leve* y *Daño Severo*, esta tendencia no es aplicable al modo 4 que se mantiene estable para todos los registros.
- b. La aplicación de *Daño Severo*, tiene variaciones importantes en frecuencia, que son visualmente observables, en los modos 1, 2, 6, 7 y 8 y es apenas percibido en el modo 3 y 5. Esto muestra que el daño presente en una estructura no siempre es visible en todos los modos observados.
- c. Se observa que existe una tendencia en la reducción del amortiguamiento con la aplicación de daño en los modos 1, 2, 3, 4 y 8; este hecho no es evidente en los modos 5, 6 y 7.
- d. Las formas modales identificadas tienen buena coherencia, sin excesivas dispersiones, para los modos 1, 2, 4, 5 y 8. Los modos con mayor dispersión son el modo 3, 6 y 7; estas dispersiones cuando son: i) regulares, son consecuencia de las condiciones de anomalía aplicadas y reducción de la rigidez en la estructura; y cuando son ii) irregulares son consecuencia de una mala identificación del sistema, o una mala selección de la forma modal representativa para la identificación automática realizada.
- g. La matriz MAC para el modo 4, en la Figura 5.22, muestra que esta Forma Modal es sensible a la aplicación de la perturbación por masa para todos los ensayos realizados.
- e. De acuerdo a los resultados obtenidos se concluye que la metodología para la identificación de propiedades modales en la estructura es robusta y es posible observar las variaciones modales que existen en frecuencia, razón de amortiguamiento y forma modal, debido a las condiciones de Anomalía por Masa y por efecto de aplicación de Daño en condición Leve y Severa.
- f. Estos resultados, al ser sensibles a los cambios de las propiedades modales, pueden ser utilizados en la Detección, Aislación e Identificación de Daño de una estructura.

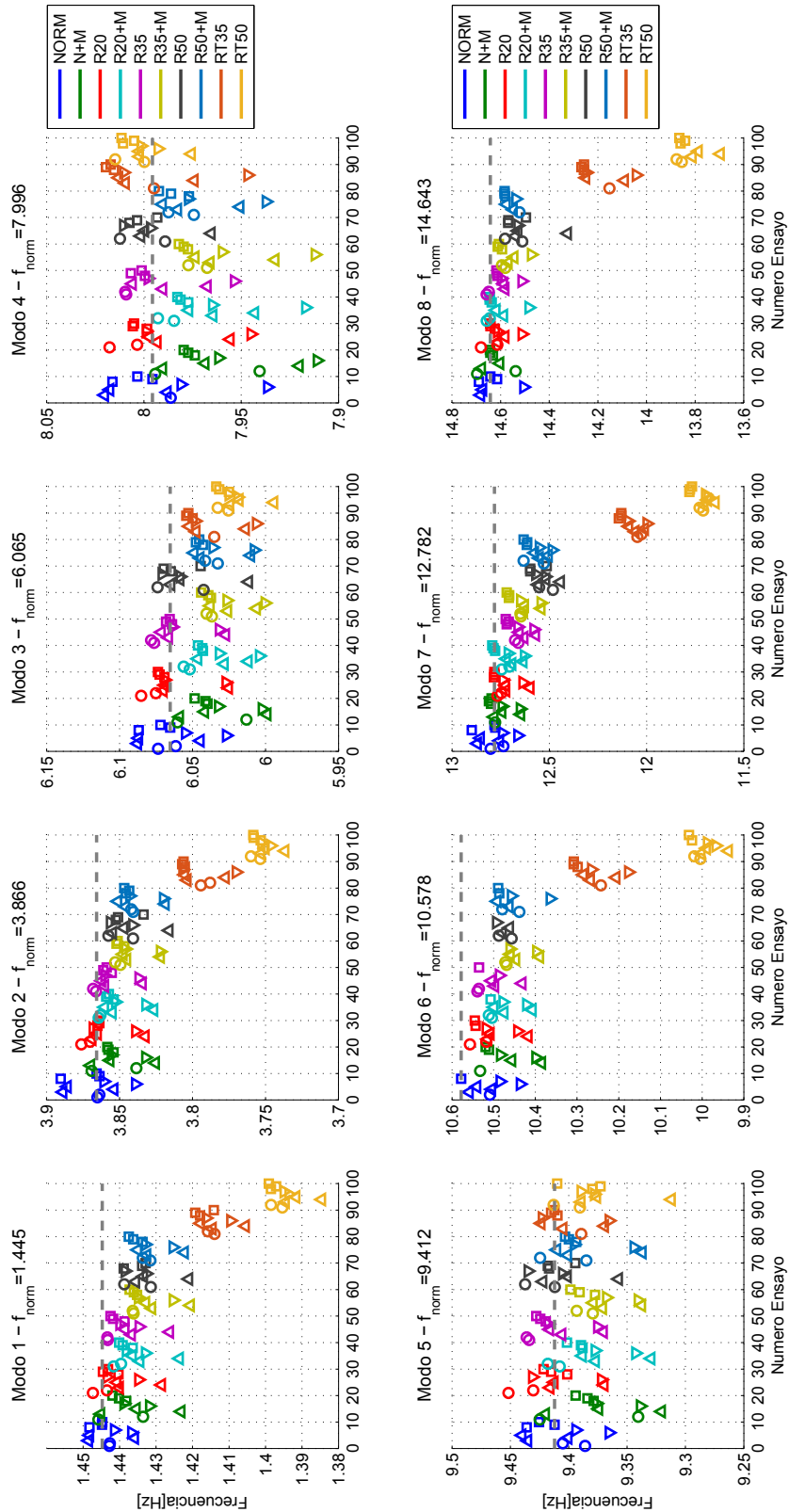


Figura 5.19: Frecuencias Modales para las Condiciones con Daño

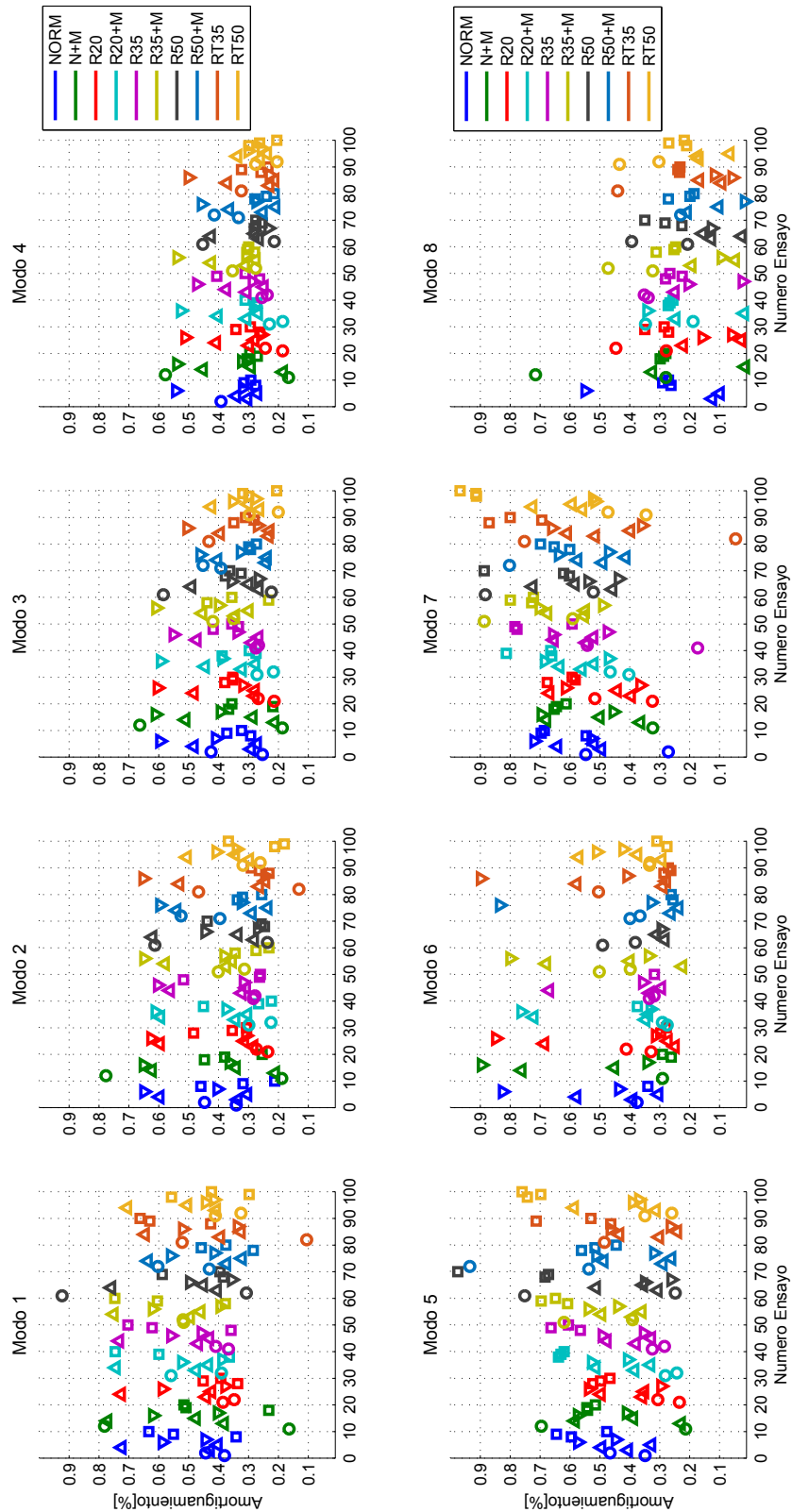


Figura 5.20: Razones de Amortiguamiento para las Condiciones con Daño

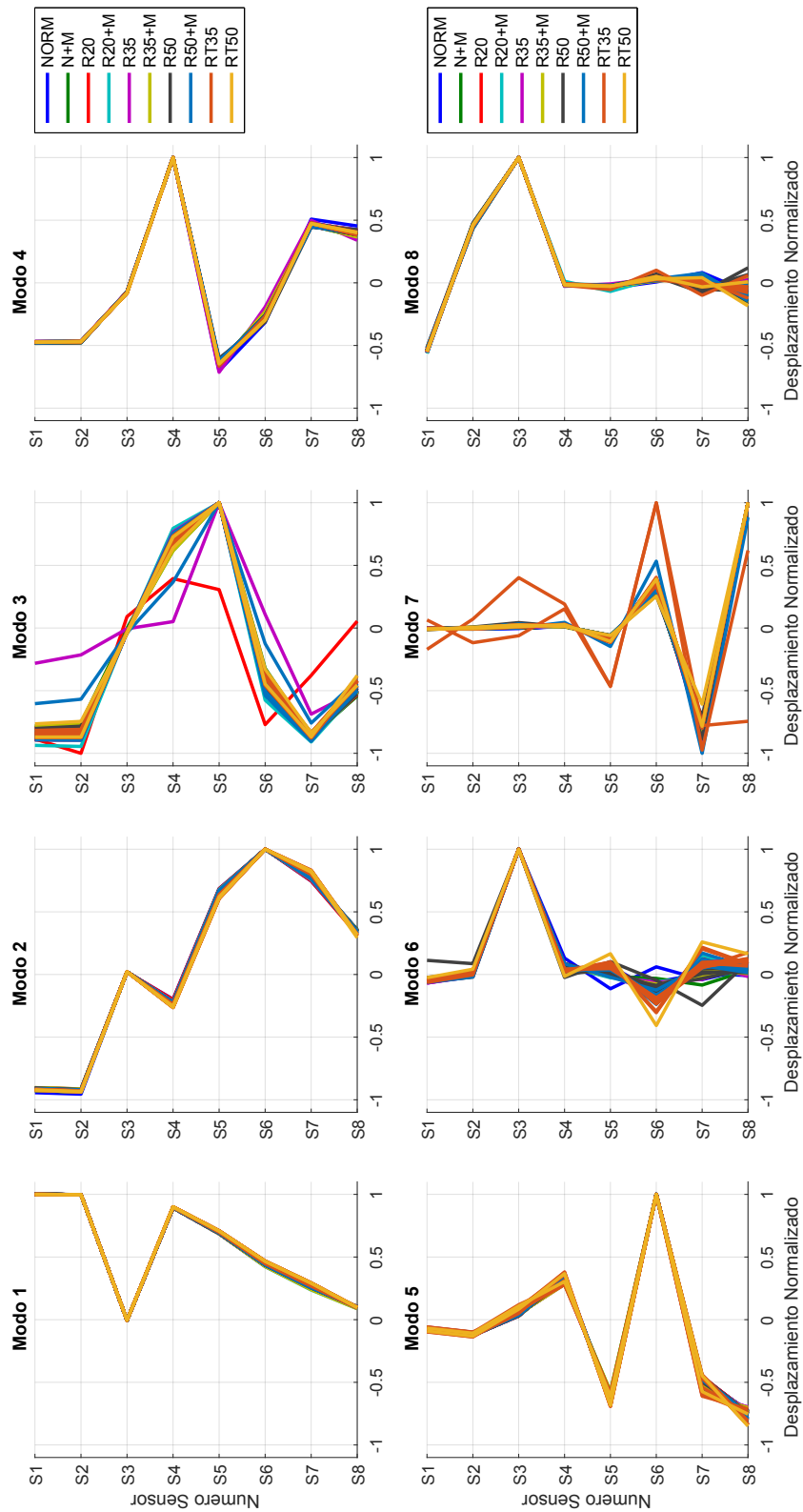


Figura 5.21: Formas Modales para las Condiciones con Daño

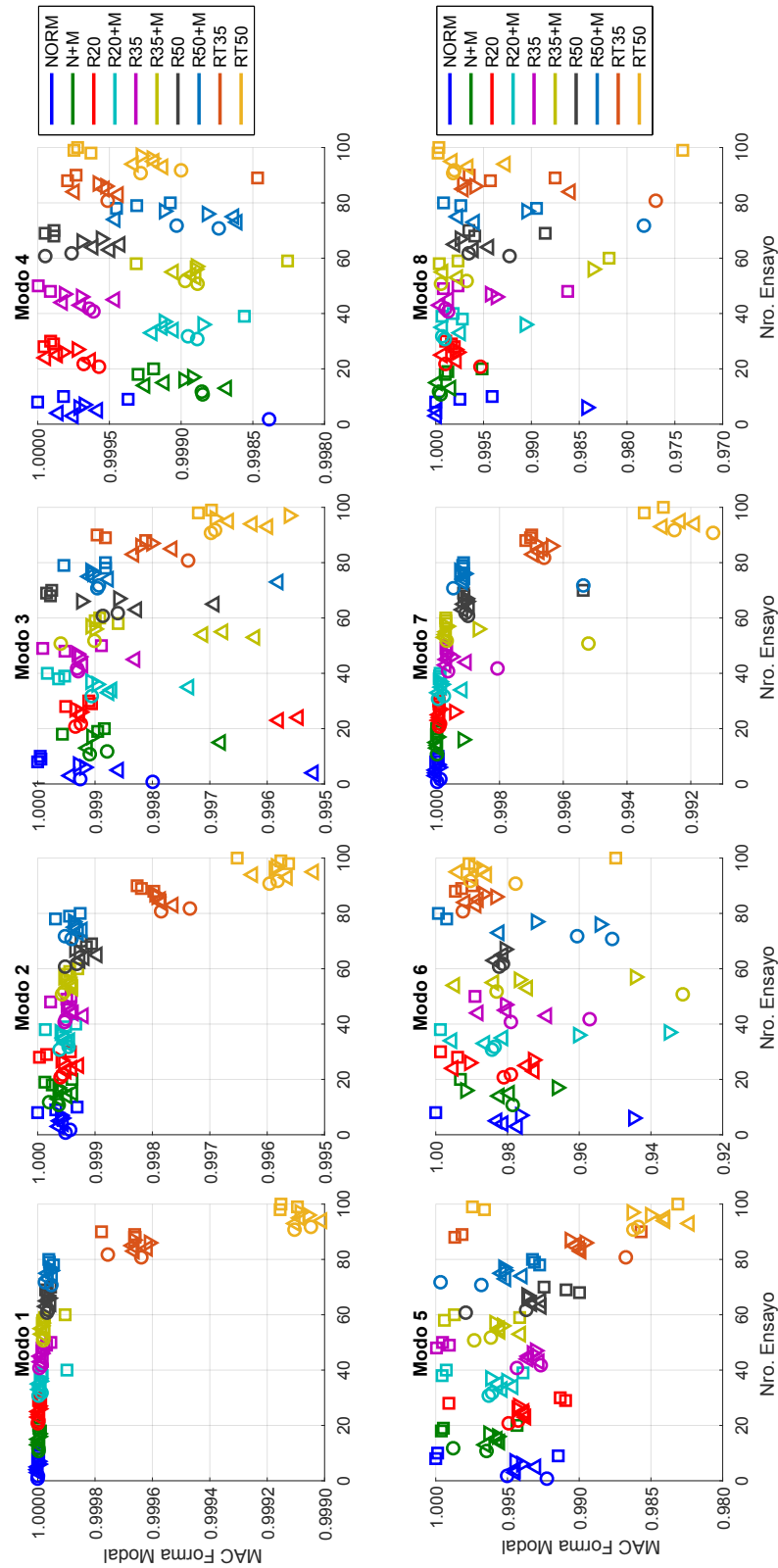


Figura 5.22: Variación de Valores MAC para Formas Modales para las Condiciones con Daño

## 5.6. Identificación de Daño con Entropía Relativa

La aplicación de Máxima Entropía para la Detección, Localización e Identificación del Daño en un sistema estructural, necesita de la construcción de una base de datos a partir del modelo numérico calibrado de la estructura.

### 5.6.1. Construcción de la Base de Datos

La construcción de la base de datos se realiza a partir de la calibración del modelo numérico en elementos finitos, creando para ello 24 elementos con daño que corresponden a los 24 elementos columnas de la estructura, numerados en la Figura 5.3(b), a la que se le asignan 10 magnitudes de daño<sup>2</sup>, que forma un total de 240 muestras.

La base de datos se encuentra alimentada con información de los 8 primeros modos del modelo numérico, correspondientes a frecuencia y forma modal<sup>3,4</sup>. La muestra inicial corresponde a la estructura en su Condición Normal (sin daño), y los siguientes a las condiciones con daño definidos en el párrafo anterior. El almacenamiento en la base de datos para las formas modales se encuentra definido en la Ecuación (5.1) [Fierro Aguirre, 2014]:

$$diff\{\phi_{j,k}\} = \sum_{i=1}^n (\phi_{i,1}^U - \phi_{i,k}^{D*})^2; \quad (5.1)$$

donde,

$diff\{\phi_{j,k}\}$ : Es la base de datos que tiene información de las formas modales en la estructura,

$j = 8$ : Es la cantidad de puntos de observación (sensores),

$k = 241$ : Es la  $k$ -ésima condición de daño en la estructura,

$\phi_{i,1}^U$ : Es la forma modal de la estructura sin daño normalizada,

$\phi_{i,k}^{D*}$ : Es la forma modal escalada de la estructura en la  $k$  condición de daño normalizada,

$i$ : Es el índice de la forma modal de la estructura,

$n$ : Es el número de modos considerados.

El escalamiento de la forma modal con daño  $\phi_j^{D*}$ , se determina con la Ecuación (5.2):

$$\begin{aligned} \phi_i^{D*} &= \phi_i^D \cdot MSF_i, \\ MSF_i &= \frac{\phi_i^{U^T} \cdot \phi_i^D}{\phi_i^{D^T} \cdot \phi_i^D}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde,

---

<sup>2</sup>Las condiciones de daño equivalen a una reducción de la rigidez del elemento columna en un: 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 %, 90 %, 99 %

<sup>3</sup>En caso de que no se identifiquen experimentalmente los 8 primeros modos, es posible modificar esta cantidad a los modos identificados.

<sup>4</sup>No se consideran las razones de amortiguamiento debido a su alta varibilidad en las identificaciones.

$MSF_i$ : Es el factor modal de escala,

$[\cdot]^T$ : Es la transpuesta de la forma modal, se omite el indicial  $k$  dado que es aplicable a todas las condiciones.

De la Ecuación (5.1) se concluye que los vectores columna de  $diff\{\phi_{j,k}\}$  es el resultado de la contribución de información, por sumatoria de diferencias, de todas las formas modales consideradas en la estructura; siendo sensible a la variación de cualquier de sus términos. Todos los términos del vector obtenido, son positivos dada la potencia utilizada, mejorando la estimación de los resultados. De esta forma, la matriz de la base de datos de las formas modales queda de la forma:

$$diff\{\phi_{j,k}\} = [ \ ]_{8 \times 241} \cdot \quad (5.3)$$

La base de datos de las frecuencias, se construye de forma similar al de las formas modales; la diferencia radica en que la cantidad de filas de la base de datos corresponde a la cantidad de frecuencias identificadas, como se muestra en la Ecuación (5.4).

$$diff\{\omega_{j,k}\} = abs \left( \frac{\omega_{j,1}^U - \omega_{j,k}^D}{\omega_{j,1}^U} \right); \quad (5.4)$$

donde,

$diff\{\omega_{j,k}\}$ : Es la base de datos que tiene información de frecuencias, con:

$j$ : Que indica la cantidad de modos identificados,

$k = 241$ : Que corresponde a la cantidad de escenarios de daño considerados,

$\omega_{j,1}^U$ : Es un vector columna con las frecuencias angulares de la estructura sin daño y

$\omega_{j,k}^D$ : Es un vector columna con frecuencias angulares de la estructura en la  $k$  condición de daño.

La matriz de base de datos de la frecuencia se escribe de la forma:

$$diff\{\omega_{j,k}\} = [ \ ]_{8 \times 241} \cdot \quad (5.5)$$

Finalmente, la matriz de la base de datos de las características  $X^j$  de la estructura se escribe de la siguiente manera:

$$X^j = \left[ \begin{array}{c} diff\{\phi_{j,k}\} \\ diff\{\omega_{j,k}\} \end{array} \right]_{(8+8) \times 241} \cdot \quad (5.6)$$

La matriz de observación,  $Y^j$ , asociada a la base de datos de las características,  $X^j$ , se construye a partir de las condiciones de daño asignada a cada elemento columna de la estructura. Dado que se fijaron 10 condiciones de daño, correspondientes a 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 %, 90 % y 99 %, la matriz de observación queda de la forma:

$$Y^j = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0,10 & \dots & 0,99 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0,99 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0,99 \end{array} \right]_{24 \times 241} \cdot \quad (5.7)$$

La Ecuación (5.7), se llena de manera que la primera columna corresponda a la Condición Normal de la estructura (sin daño), las 10 columnas siguientes corresponden a las 10 condiciones de daño, en las magnitudes descritas, para el elemento 1; y así sucesivamente para los 24 elementos de la estructura, complementando una matriz de  $24 \times 241$  columnas.

### 5.6.2. Magnitud de Daño Asignado al Elemento

La magnitud de daño asignado al elemento columna se realiza considerando la reducción de la sección transversal en los dos extremos de fijación del elemento, se asume que éste hecho, sólo reduce y modifica la rigidez flexional de la estructura; despreciando la modificación de la rigidez axial del elemento y cualquier efecto no-lineal en la estructura.

La cuantificación de la reducción de la rigidez flexional, se realiza considerando un análisis con elementos finitos hecha con el programa SAP2000v14.0.0. En el programa se asignan las propiedades mecánicas del material y se modela el elemento columna con las dimensiones de la sección transversal del elemento  $50 \times 3mm$  y la altura del elemento en nivel en que se asigna el daño  $230mm$  (para una mejor precisión en los resultados); y las reducciones sucesivas que se realizan en el elemento. Las condiciones de borde del elemento se caracterizan por estar empotrada en uno de los extremos de la columna y el otro extremo sólo permite el desplazamiento en una dirección del elemento, pero el giro se encuentra restringido, de la forma mostrada en la Figura 5.23.

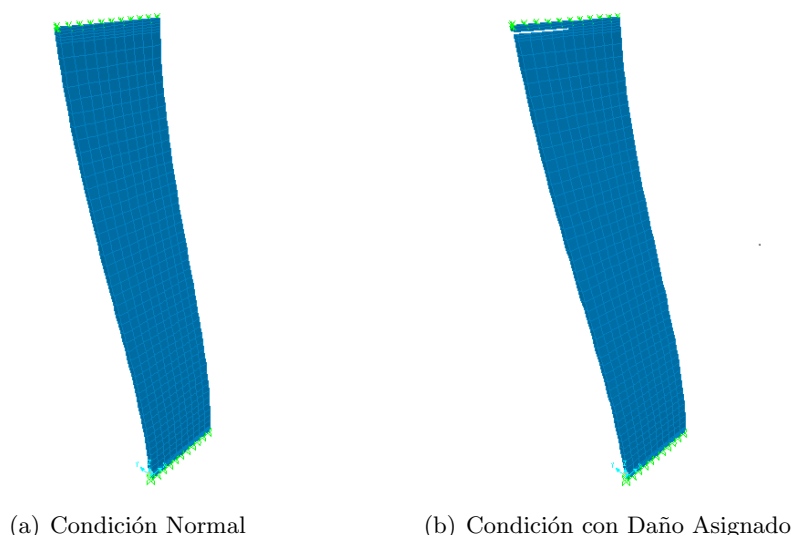


Figura 5.23: Modelamiento de Elemento Columna de Estructura con Asignacion de Daño

Los resultados obtenidos para la modificación de la rigidez por elemento, se encuentran resumidos en la Tabla 5.15, en ella se describen las condiciones de reducción del elemento y los valores de reducción de la rigidez; la reducción de la rigidez por nivel, en valor porcentual, se muestra en la Tabla 5.16.

Tabla 5.15: Rigidez Flexional en Columna por Reducción de Sección Transversal en los Extremos

CONDICIÓN	RIGIDEZ [Kg/m <sup>2</sup> ]
Normal	3525,70
Reducción Sección 20 %	3349,60
Reducción Sección 35 %	3024,70
Reducción Sección 50 %	2638,70



Tabla 5.16: *Rigidez por Nivel Debido a la Asignación de Daño*

CONDICIÓN	RIGIDEZ [Kg/m <sup>2</sup> ]	PORCENTAJE [%]
NORMAL	14102,80	0.00 %
RE20 %	13926,70	1.25 %
RE35 %	13601,80	3.55 %
RE50 %	13215,80	6.29 %
RT35 %	11712,80	16.95 %
RT50 %	10554,80	25.16 %

### 5.6.3. Análisis de Sensibilidad

Dado que el algoritmo de Máxima Entropía pondera el peso de participación de los elementos a partir de una *Distribución Típica*  $m_j(X)$ , que es un valor supuesto; es necesario definir los parámetros de esta distribución de modo que los resultados sean lo más reales y representativos. Esto se logra a partir de la variación de uno de estos dos parámetros:  $\gamma$  que controla el radio de la distribución gaussiana y  $h_j$  que es la distancia Euclidiana entre vecinos próximos y depende de la cantidad de vecinos considerados. La determinación de los parámetros  $\gamma$  y  $h_j$ , se realiza a partir de análisis de sensibilidad en la vecindad en estudio.

En esta tesis se opta por variar la cantidad de vecinos próximos que participan en la determinación de los pesos para el vector de características,  $Y^e$ . Para lograr este objetivo, se han fijado 8 números de vecinos a considerar  $\{2, 5, 10, 20, 50, 100, 150\}$ ; de éste modo es posible seleccionar el número de vecinos óptimos que son necesarios para una buena identificación de daño en la estructura. Este análisis se considera para las condiciones de ensayo correspondientes a  $\{RE20, RE35, RE50, RT35, RT50\}$ , y el registro correspondiente a *Ruido Coloreado 1*. De esta manera se considera un mismo registro para todas las condiciones evaluadas. Los resultados numéricos del análisis de sensibilidad realizado, se detalla en la Tabla 5.17, donde se describe la distancia Euclidiana a partir de la *Norma* de la matriz de diferencias,  $Y^e$ , según el número de vecinos considerados para las diferentes condiciones de daño en la estructura.

Tabla 5.17: *Análisis de Sensibilidad de la Norma Promedio en función del número de Vecinos Próximos*

NÚMERO VECINOS	RE20	RE35	RE50	RT35	RT50	NORMA PROMEDIO
2	20.155	17.561	15.194	35.613	45.313	28.420
5	10.307	<b>2.895</b>	<b>2.421</b>	<b>6.605</b>	5.317	4.309
10	10.311	<b>2.896</b>	<b>2.661</b>	<b>6.718</b>	<b>3.682</b>	<b>3.989</b>
20	13.317	<b>2.895</b>	3.273	7.068	3.897	4.283
50	6.266	4.727	3.619	7.335	4.449	5.033
100	6.494	6.618	4.349	7.334	4.587	5.722
120	5.472	5.495	5.284	7.330	4.616	5.681
150	<b>4.371</b>	3.230	<b>2.509</b>	7.099	3.937	4.194

Los valores mínimos de la norma para cada condición de ensayo se encuentran representados con

negrita, se observa que los mejores resultados se encuentran en el rango de 5 a 20 vecinos, que participan en la solución para las condiciones de ensayo correspondientes a *RE35*, *RE50*, *RT35*, *RT50*. La condición de ensayo *RE20* representa un caso especial de análisis, debido a que el daño asignado al elemento es tan ligero que no puede ser identificado con un bajo número de vecinos, siendo necesario aumentar la cantidad de información de modo que su identificación sea satisfactoria; este hecho no es realista debido a que al considerar demasiados vecinos se adquiere información de daños mucho mayores que el asignado y la interpolación que se realiza puede verse sesgada de manera significativa.

La conclusión del párrafo anterior se resume en el hecho de que considerar un número de vecinos en el rango 5, 10, 20 otorga los mejores resultados para las condiciones experimentales de la estructura. Para el promedio de resultados la última columna de la Tabla 5.17, considerar 10 vecinos es la mejor condición de análisis y ésta cantidad es utilizada para la obtención de resultados en toda la tesis. La Tabla 5.18 describe los resultados que dependen de la cantidad de vecinos elegidos como es el parámetro  $\gamma$  y la cantidad de vecinos que aporta la solución de manera directa,  $Y^e$ .

Tabla 5.18: *Cantidad de Vecinos que Aportan la Solución en Base a la Vecindad Definida*

CONDICIÓN	VECINDAD	$\gamma$	APORTE	VECINOS
RE20	150	6481600	6	
RE35	5,10,20	3672000	4	
RE50	5,10	1898600	4	
RT35	5,10	922380	4	
RT50	10	266260	4	

Los resultados encontrados para la localización e identificación de daño se encuentran descritos preliminarmente en la Tabla 5.19, en ésta se observa una buena cuantificación de daño que mejora con el aumento de la magnitud del daño. Debido a que una magnitud pequeña de daño no es fácilmente observada con propiedades modales que observan globalmente la estructura, las mejores cuantificaciones de daño se realizan cuando el daño tiene una mayor magnitud.

Tabla 5.19: *Aproximación en la Identificación de Daño en la Estructura*

CONDICIÓN	DAÑO	DAÑO	ERROR
ELEMENTO	REAL	IDENTIFICADO	[%]
RE20	1,25	5,00	300,00
RE35	3,55	5,00	40,85
RE50	6,29	7,62	21,14
RT35	16,95	17,58	3,71
RT50	25,16	23,82	5,33

Una característica importante de los resultados obtenidos esta referida a la cuantificación de daño descrita en el párrafo anterior, debido a que la estructura presenta una forma simétrica y, la cantidad y localización de los sensores; los resultados en la localización e identificación de daño en la estructura presentaron dos particularidades importantes descritas a continuación:

- a. **Localización del Daño**, no alcanza a particularizarse en el elemento en el que ha sido asignado, sino que localiza cuatro o, al menos, dos de las columnas que se encuentran en el

nivel donde se encuentra el daño, cuantificando adecuadamente la reducción de la rigidez en el nivel. Esto se debe a que la cantidad de sensores no permite capturar el efecto local que tiene el daño en la estructura (con su forma modal) y por tanto la mejor solución se encuentra en el venciario que aportan un resultado global con el movimiento de las cuatro columnas de un solo nivel con daño.

- b. **Identificación de Daño**, no logra cuantificar el daño asignado en el elemento, sino que cuantifica el daño que corresponde al aporte de cada una de las columnas, de esta forma el daño total identificado cuantifica el daño de todo el nivel.

#### 5.6.4. Resultados Experimentales

Los resultados experimentales han sido determinados considerando una condición en la que estan presentes los 8 sensores (Configuración 1) mostrados en la Figura 5.7(b). Adicionalmente y para evaluar el desempeño del algoritmo, se han considerado dos configuraciones de observación adicionales que son definidas a partir de una reducción de sensores, la ubicación de estos sensores en la estructura, se observa en la Figura 5.24; y son determinantes para la identificación de propiedades modales de la estructura y la detección de daño.

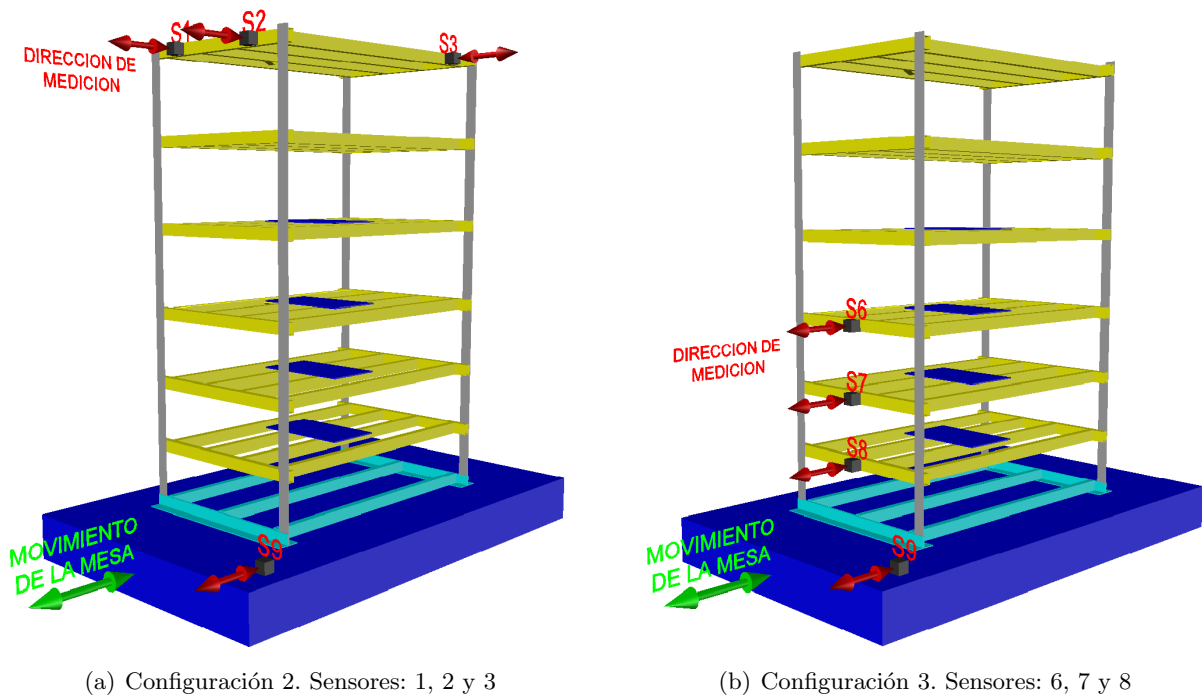


Figura 5.24: Configuración Adicional de Sensores en la Estructura

La identificación de frecuencias, razones de amortiguamiento y formas modales para las configuraciones 2 y 3 se observan en las Figuras 5.25 a 5.31. En ellas se observa como la ubicación de los sensores es sensible a la cantidad de modos observables en la estructura.

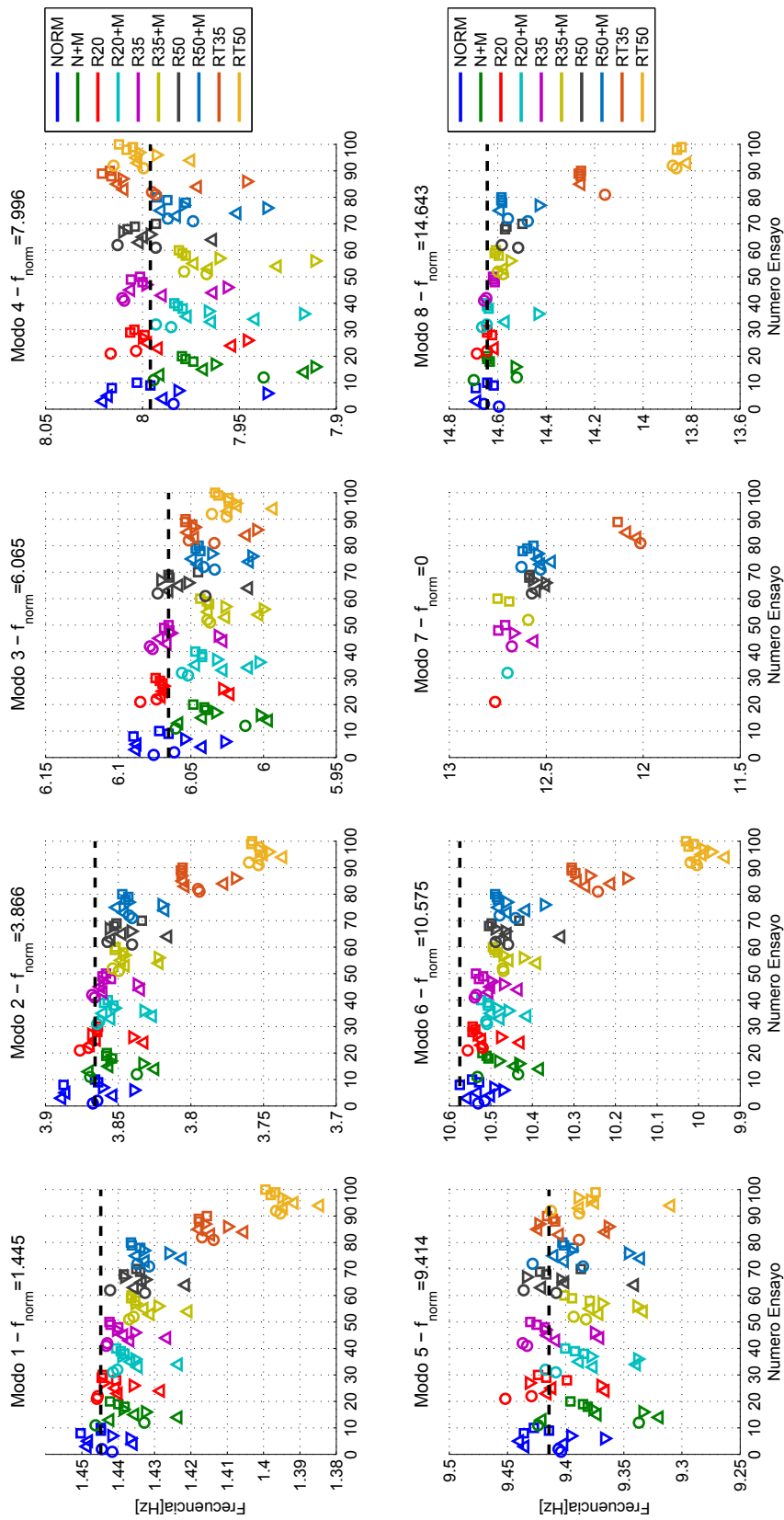


Figura 5.25: Identificación de Frecuencias. Configuración 2

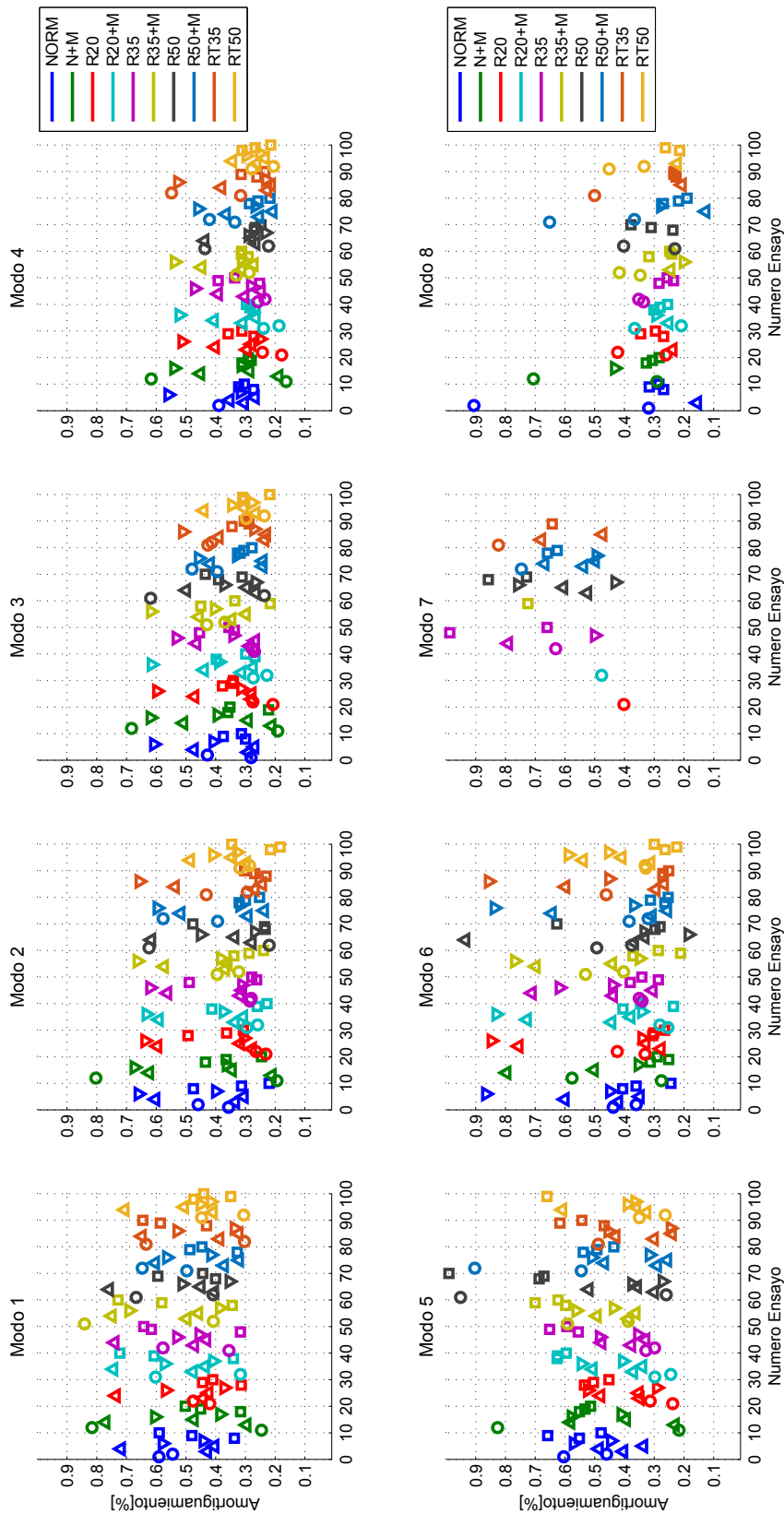


Figura 5.26: Identificación de Razones de Amortiguamiento. Configuración 2

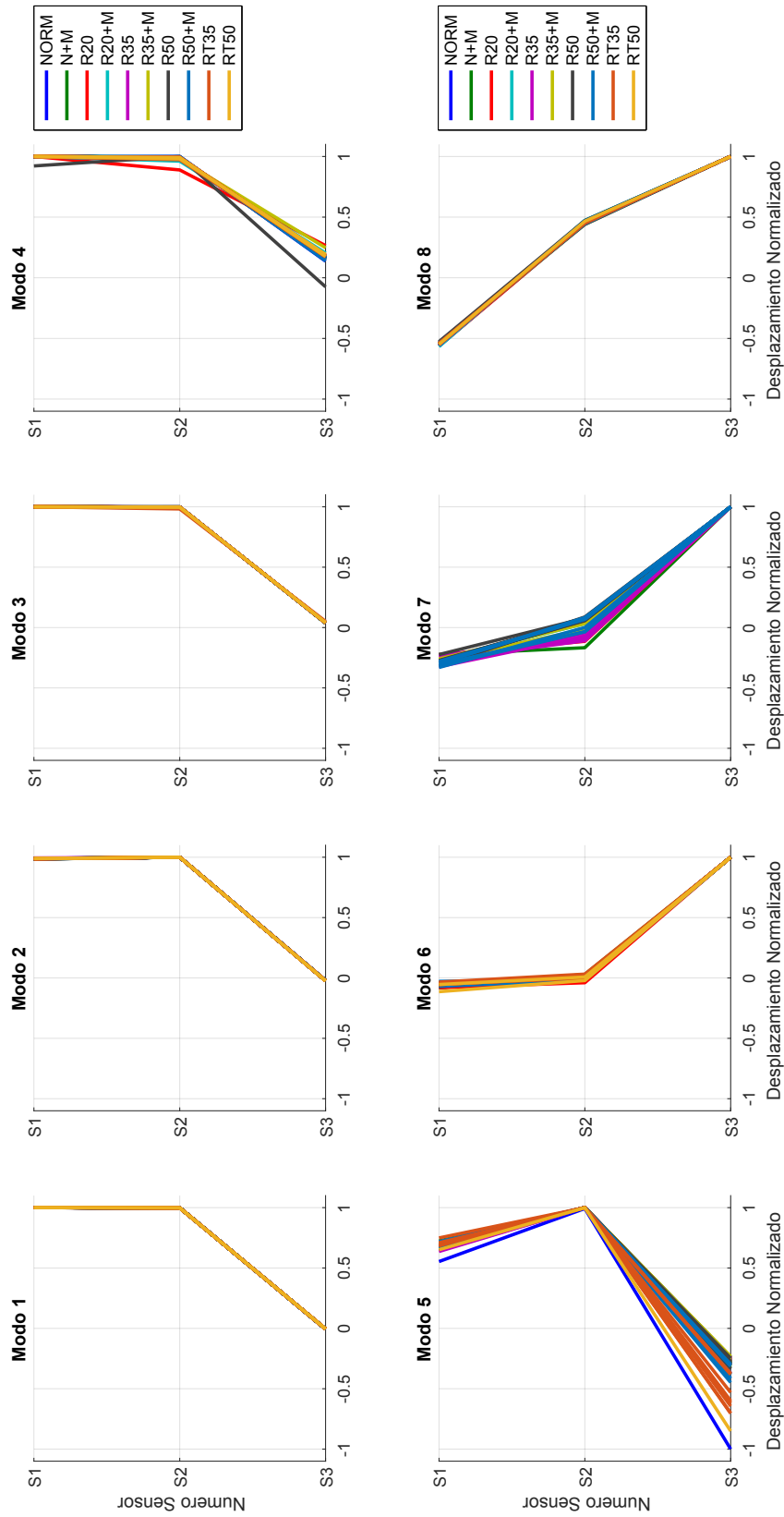


Figura 5.27: Identificación de Formas Modales. Configuración 2

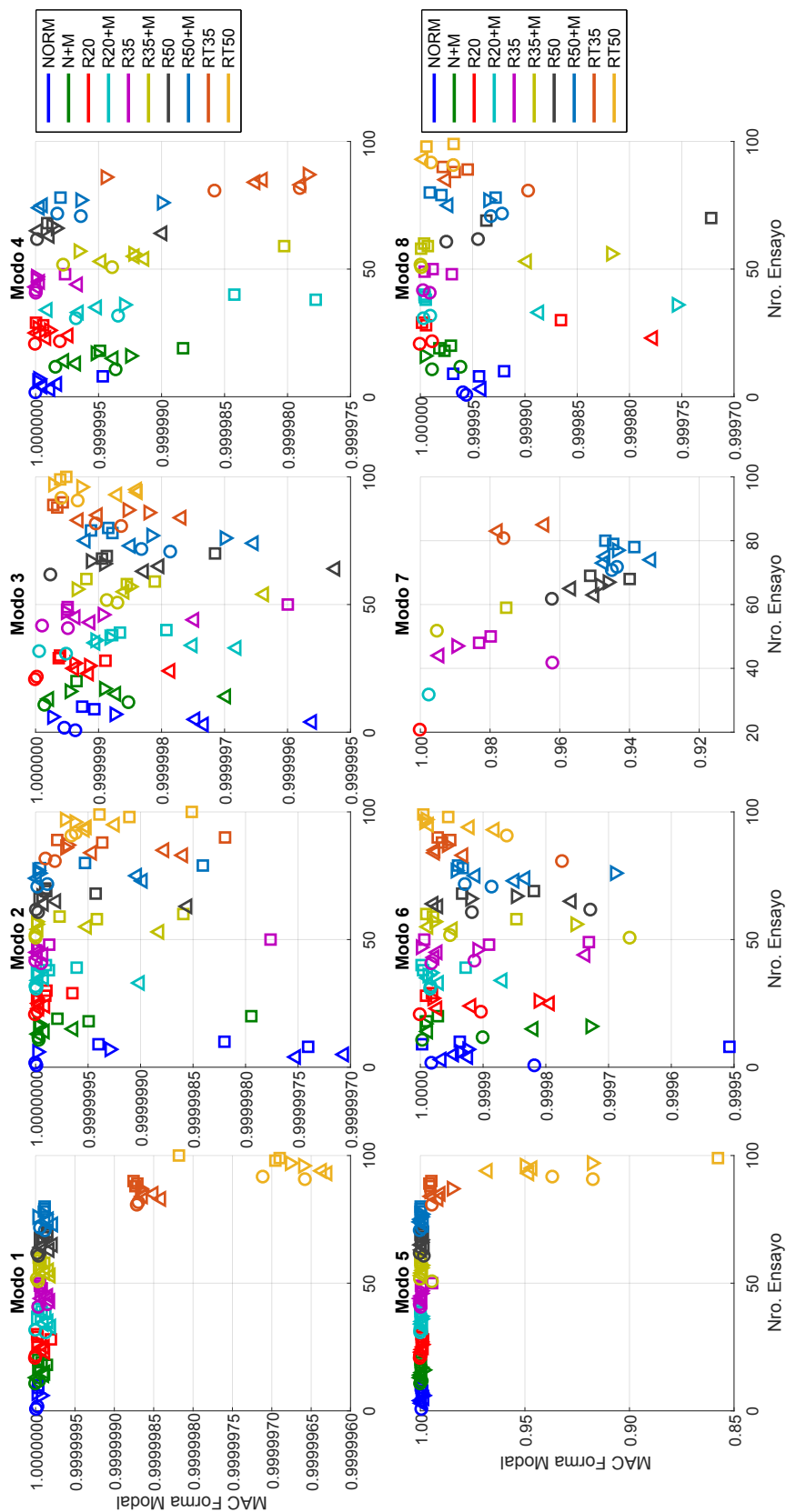


Figura 5.28: Variación de valores MAC para Formas Modales. Configuración 2

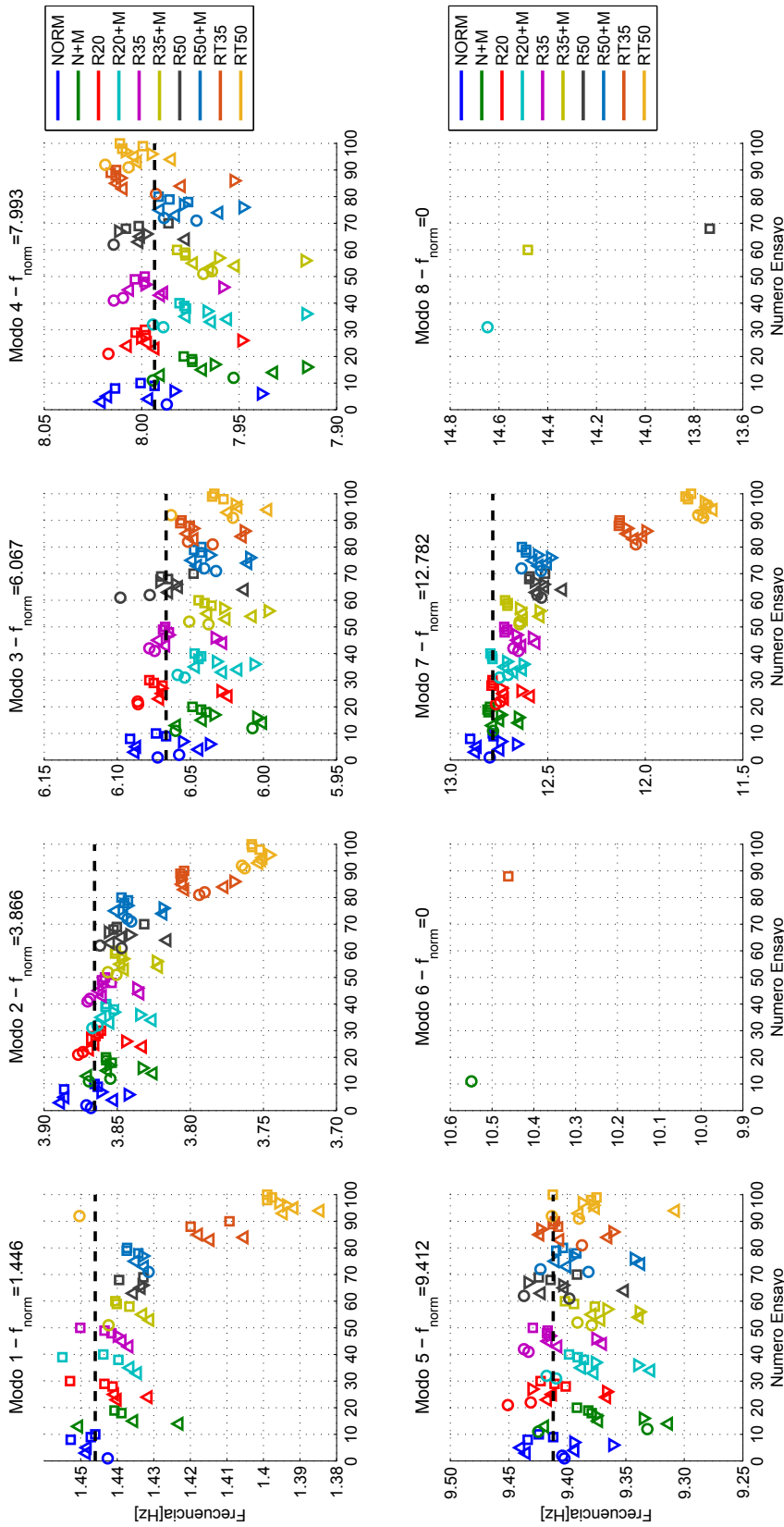


Figura 5.29: Identificación de Frecuencias. Configuración 3



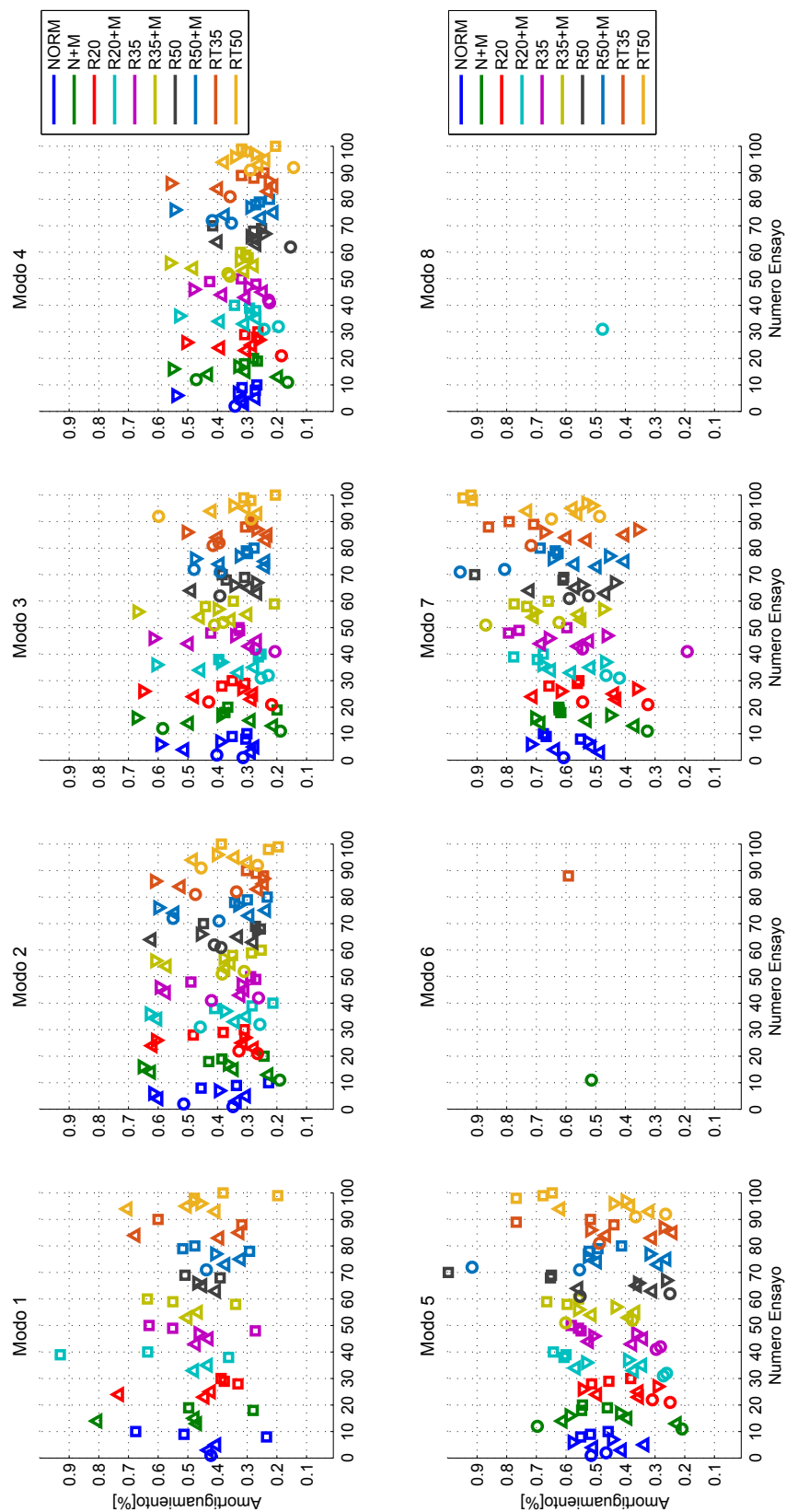


Figura 5.30: Identificación de Razones de Amortiguamiento. Configuración 3

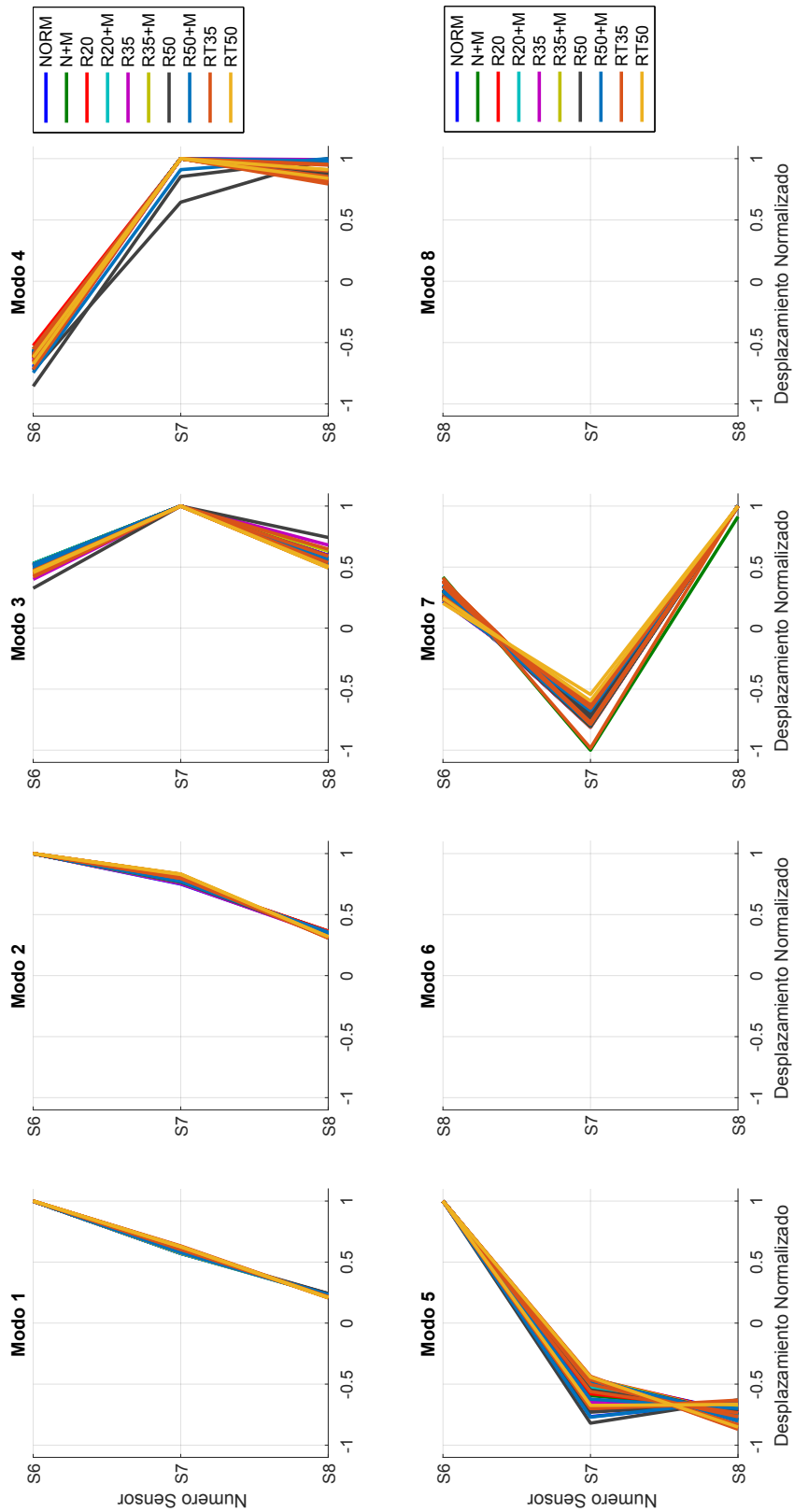


Figura 5.31: Identificación de Formas Modales. Configuración 3

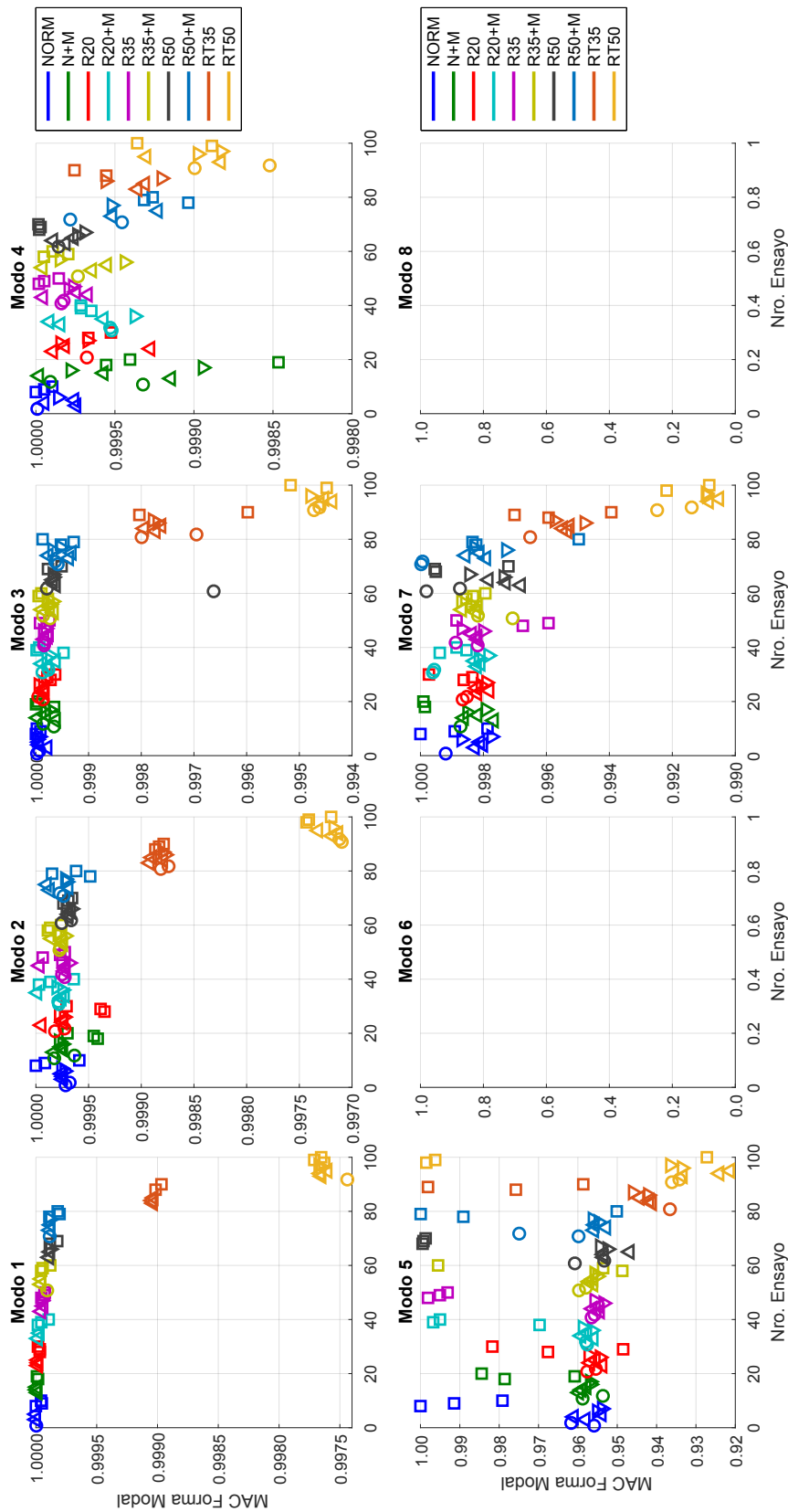
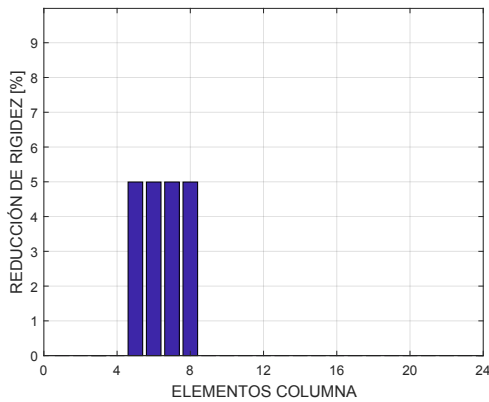
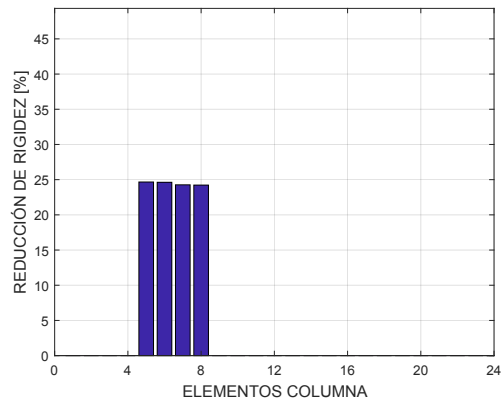


Figura 5.32: Variación de Valores MAC para Formas Modales. Configuración 3

En todos los registros y para las tres configuraciones de sensores, la solución obtenida es determinada a partir de los 10 vecinos más próximos para el algoritmo de aproximación lineal. Dos resultados de la evaluación de daño para la Configuración 1, se muestran en la Figura 5.33, en ella se observa que dadas las condiciones de la estructura y la disposición de sensores, el daño asignado tiene una magnitud similar para todos los elementos columna que componen un mismo nivel. Similares resultados son obtenidos en las otras dos configuraciones, por este motivo el resumen de los resultados mostrados en las Figuras 5.34 a 5.36, muestran el nivel, y no la columna, en la que se localiza el daño; diferenciada por tipo de registro, condición de ensayo y cuantificación de daño. La determinación de daño se realiza considerando dos formas, la primera considera la formación del vector de características con todos los modos identificados y la segunda sólo considera 6 modos traslacionales.



(a) Corte de la sección transversal 20% en una columna

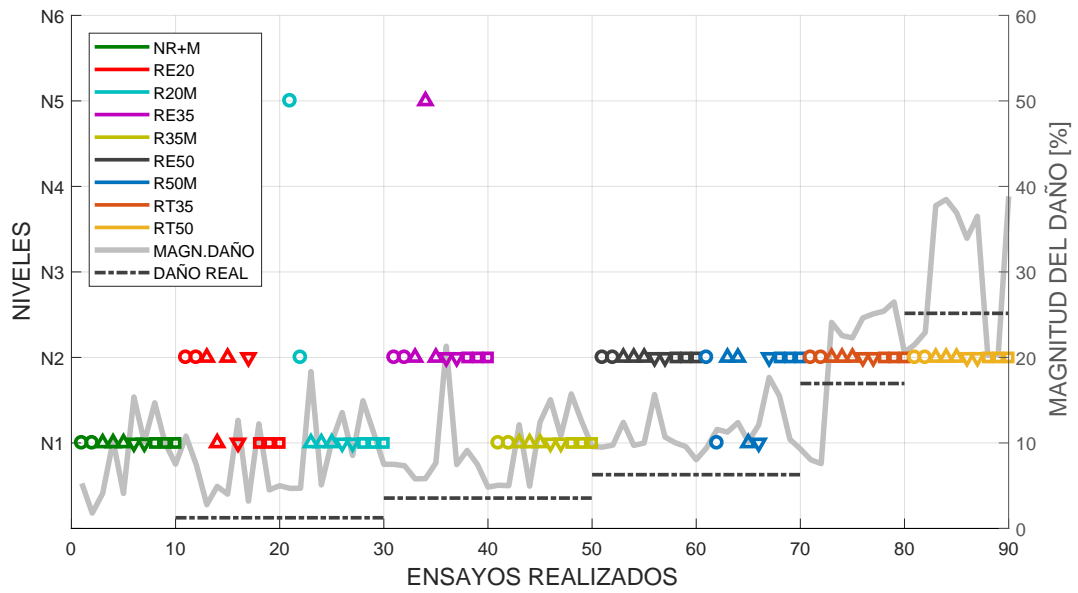


(b) Corte de la sección transversal 35% en todas las columnas

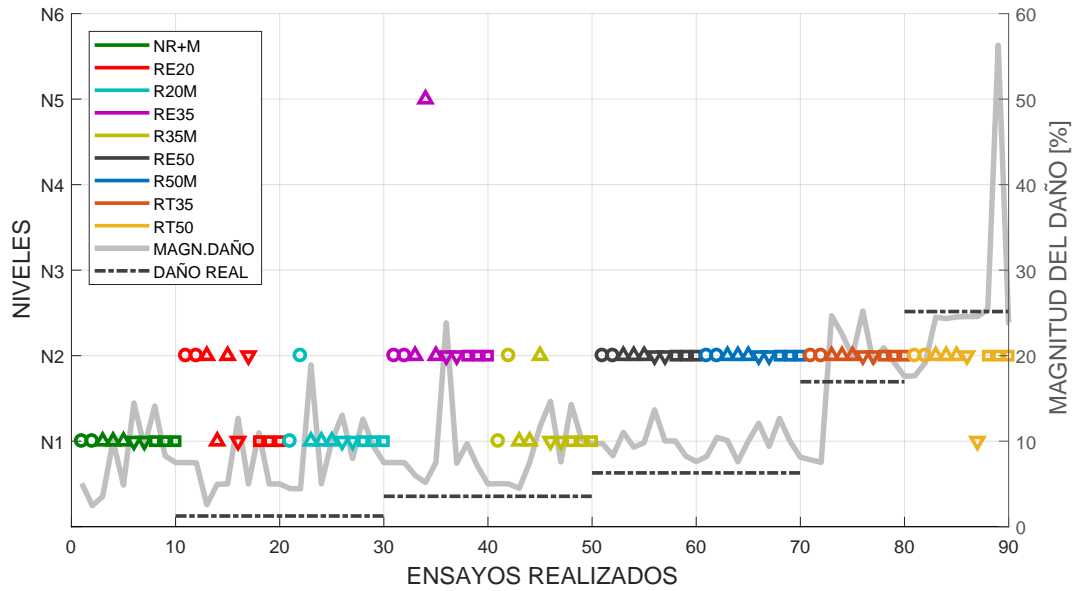
Figura 5.33: *Evaluación de Daño con Máxima Entropía*

En las Figuras 5.34 a 5.36, el eje coordenado izquierdo muestra el nivel de localización de daño en la estructura; el eje coordenado derecho indica la magnitud del daño en porcentaje para un nivel; la línea continua de color gris muestra la magnitud cuantificada por el algoritmo para cada uno de los ensayos realizados y la línea gris segmentada indica la magnitud porcentual de daño real. Los símbolos utilizados corresponden a: terremotos en Chile ( $\Delta$ ), terremotos en Estados Unidos ( $\nabla$ ), registros de impacto ( $\circ$ ) y registros de ruido coloreado ( $\square$ ). Los diferentes colores utilizados indican la condición de ensayo aplicada detallada en la Tabla 5.12.

En las Figuras 5.35 a 5.36 se observa que existe una tendencia a localizar el daño en el nivel 1, para las condiciones de *Daño Leve*. Esta localización cambia al nivel 2 con el aumento de la magnitud del daño asignado; en las condiciones de *Daño Severo*, la localización es precisa en todos los registros ensayados. La localización del daño con perturbación debido a la masa, sólo es apreciable en la reducción del 50% de la sección, en la condición de *Daño Severo* y la configuración con todos los sensores.

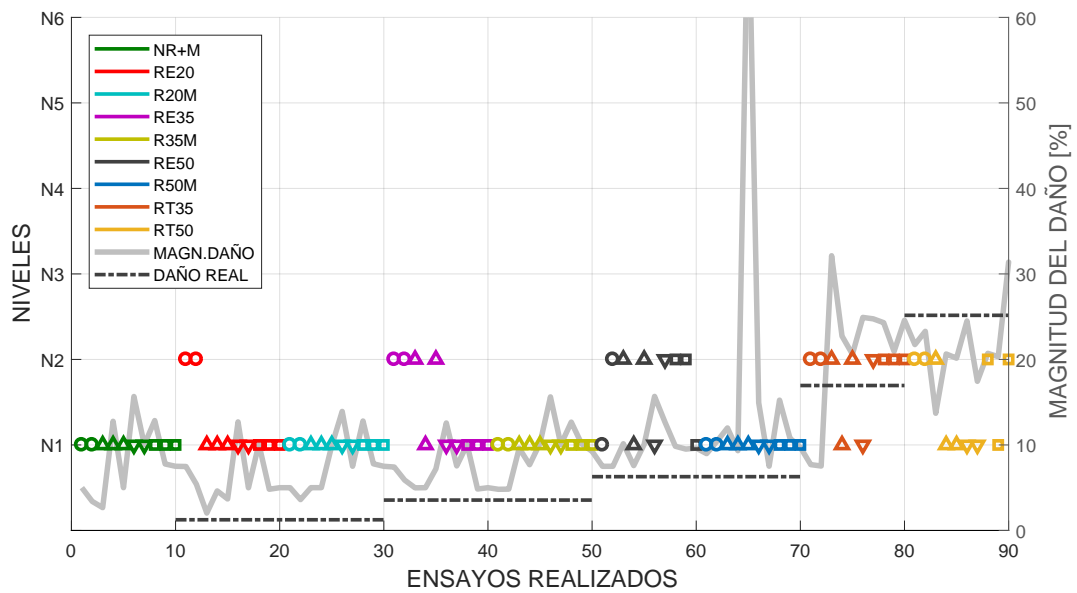


(a) Todos los modos identificados

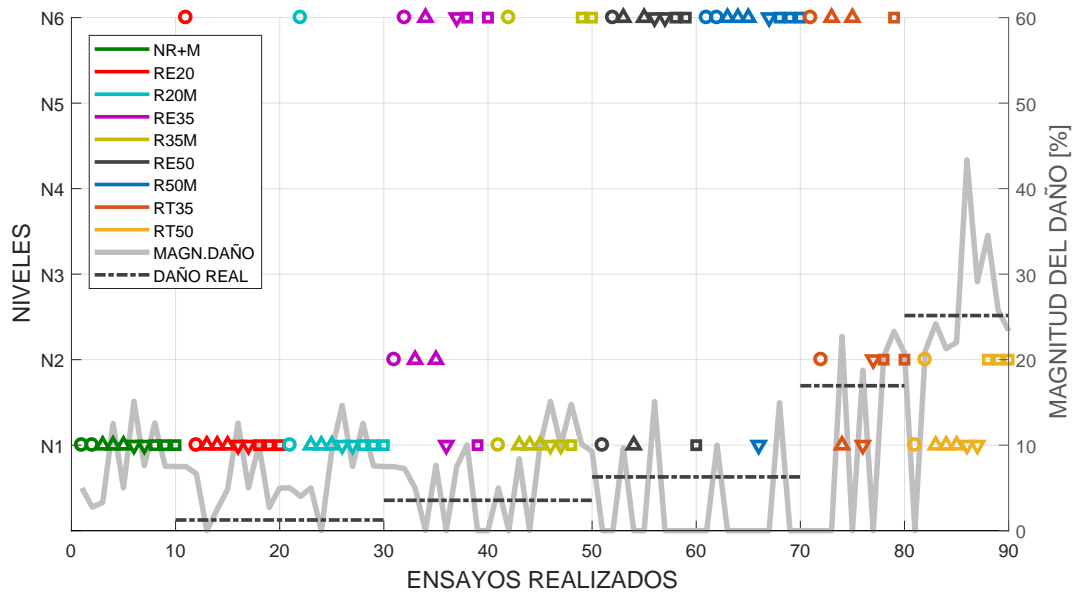


(b) Sólo los modos en la dirección de vibración de la mesa

Figura 5.34: Configuración 1. (8 Sensores) Identificación de Daño en la Estructura

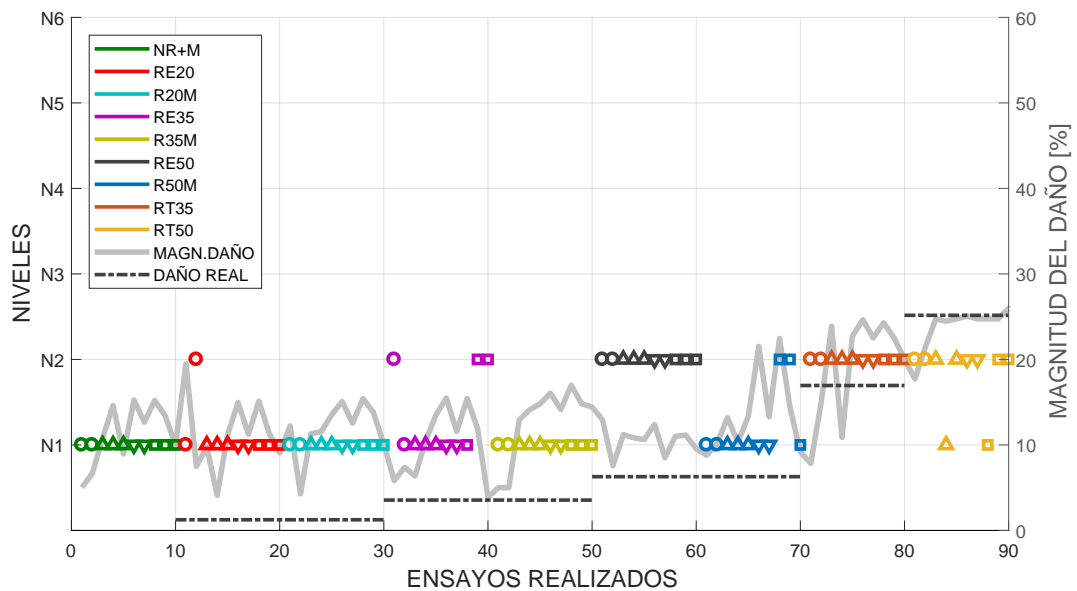


(a) Todos los modos identificados

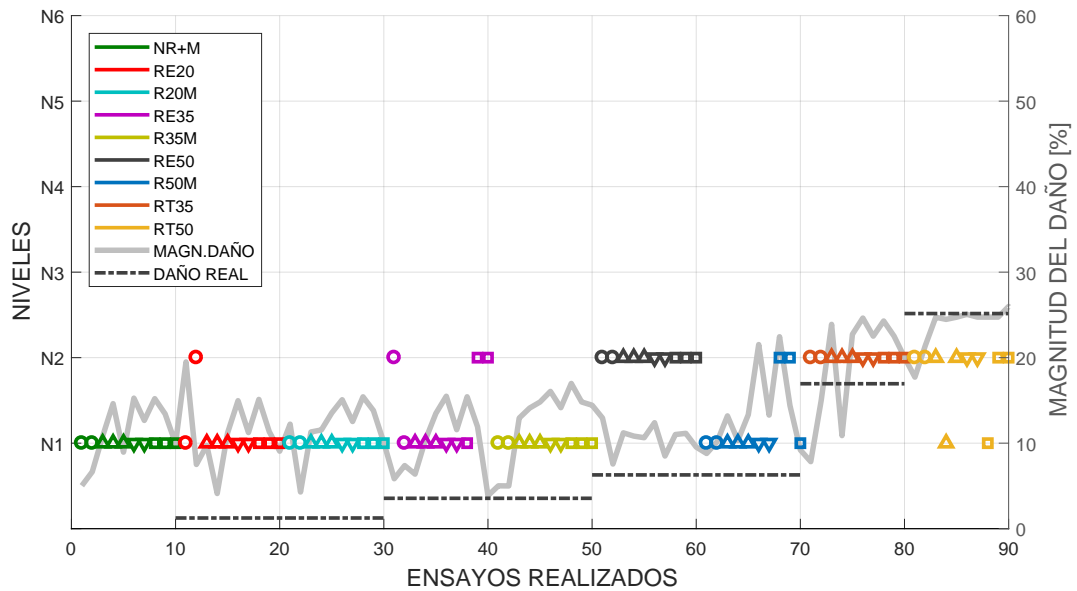


(b) Sólo los modos en la dirección de vibración de la mesa

Figura 5.35: Configuración 2. (3 Sensores Localizados en Nivel 6) Identificación de Daño en la Estructura



(a) Todos los modos identificados



(b) Sólo los modos en la dirección de vibración de la mesa

Figura 5.36: Configuración 3. (3 Sensores en Niveles 1, 2 y 3 en Dirección de Movimiento) Identificación de Daño en la Estructura

La magnitud del daño es difícil de ser determinada con precisión principalmente en condiciones de *Daño Leve* donde están presentes una alta variabilidad de resultados. La cuantificación de la magnitud mejora, en las condiciones de *Daño Severo*. En las Figuras 5.34(b) y 5.35(b) la variación de la magnitud es más gradual y consistente que las Figuras 5.34(a) y 5.35(a), esto se puede deber,

a que la forma modal del modo 6 y 8, aporta ruido a la identificación debido al bajo valor de MAC.

Las Figuras 5.36(a) y 5.36(b), tienen la misma localización y cuantificación de daño asignado, porque la configuración 3, sólo identifica los modos en la dirección de vibración de la mesa, como se observa en las Figuras 5.29, 5.30 y 5.31.

Los mejores resultados en la localización y cuantificación del daño se observan en los registros de ruido coloreado, para todas las condiciones de ensayo y configuraciones, considerando todos los modos identificados; esto es logrado porque el ruido excita la estructura en un amplio rango de frecuencias y la energía aplicada es constante a lo largo de todo el registro.

### 5.7. Detección y Cuantificación de Daño con Información Mutua

La Detección y Cuantificación de Daño basado en la caracterización de la respuesta de una estructura con Información Mutua requiere de una serie de pasos que permiten la extracción de características, que sean dependientes y sensibles a la condición de Daño.

Para la evaluación de la estructura con esta metodología, sólo se utilizan los registros ambientales u operacionales correspondientes a ruidos coloreados, entre 0 y 15 [Hz], ensayados en laboratorio. Su implementación experimental se describe en las siguientes secciones.

#### 5.7.1. Procesamiento de Imágenes con Transformadas Wavelet Continuas

El procesamiento del registro a partir de Transformadas Wavelet Continuas, requiere segmentar el registro en ventanas, de esta forma se caracteriza la estructura en observaciones que tienen comportamientos similares. Un segmentado esquemático es mostrado en la Figura 5.37 para el registro con ruido coloreado.

La realización del segmentado por ventanas, tiene las siguientes suposiciones:

- a. La ventana de observación tiene una duración suficiente para extraer características básicas de la estructura, que se asume que son estacionarias en el tiempo.
- b. De acuerdo al inciso *a*, todas las ventanas aportan información que es similar e independiente de la ubicación que tiene en el registro.
- c. Se asume que las características obtenidas de la estructura son sensibles a la aplicación de daño en la estructura, de modo que existen variaciones entre una observación sin daño y una observación con daño.
- d. Se tiene una Condición Normal representativa, considerando diferentes tipos de anomalías ambientales (cambio de temperatura, humedad, etc.) o anomalías estacionarias (cambio de masa, servicio, etc); de modo que éstas sean consideradas en el análisis para evitar falsos positivos.



- e. La segmentación por ventanas, se realiza en todos los sensores con la finalidad de encontrar un parámetro que determine cual de ellos es el más sensible para una condición de daño.<sup>5</sup>.

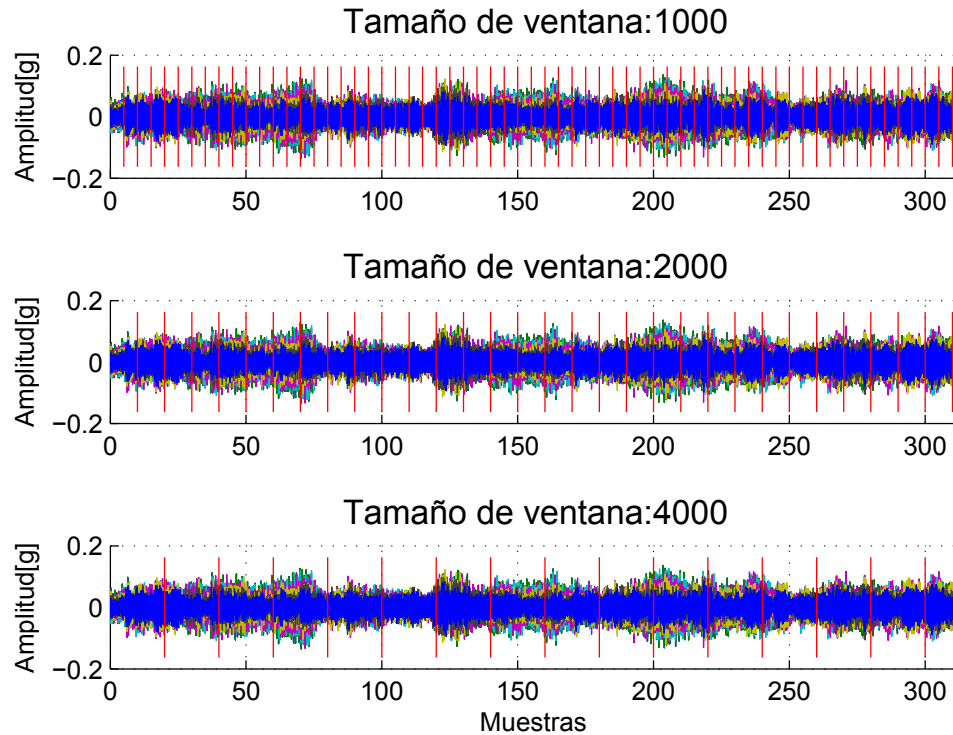


Figura 5.37: *Segmentado de Registro en Ventanas*

Para la realización de las Transformadas Wavelet Continuas en cada una de las ventanas, se han considerado los siguientes parámetros: i) La Wavelet madre que se utiliza es Morlet, debido a que es adecuada para el análisis continuo y tiene una buena conversión de Escala a Frecuencias; ii) El rango de observación del escalograma está entre 10 y 140 con un paso de 0,2; iii) Se utiliza ventanas de tamaño igual a 1000 muestras, equivalentes a 5 segundos de observación en el registro. La Figura 5.38, muestra el escalograma realizado para una ventana de 1000 muestras, en la parte superior está la señal del registro y en la parte inferior la imagen del escalograma caracterizado por varias zonas de alta de energía.

<sup>5</sup>Cuando más de un sensor es sensible al daño en la estructura, se puede realizar una aislación del daño con el objeto de localizar su ubicación, este desarrollo no ha sido implementado en esta tesis.

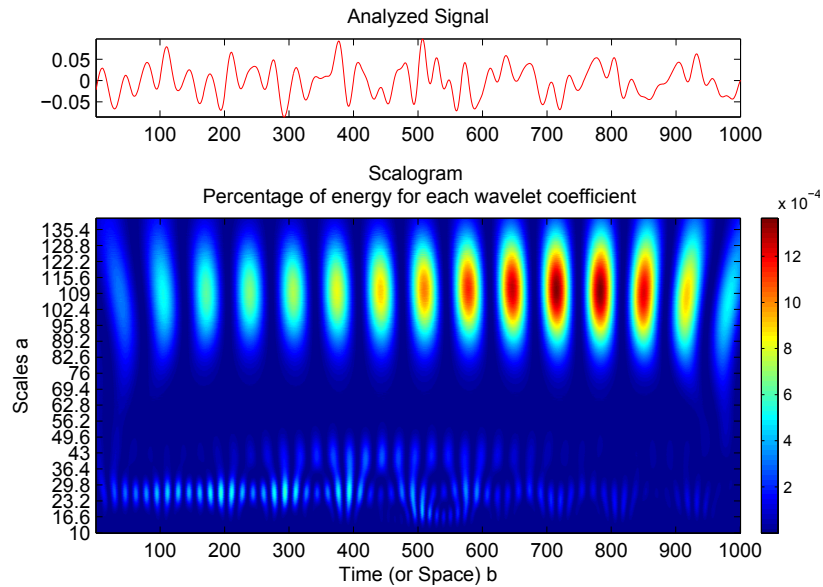


Figura 5.38: *Escalograma de la Ventana Seleccionada*

El escalograma describe tres parámetros que son de interés para el análisis: i) el Tiempo o *Espacio*  $b$ , relacionado con la cantidad de muestras observadas, ii) la *Escala*  $a$ , que es inversamente proporcional a la frecuencia que tiene la estructura y iii) la *Intensidad de energía* que utiliza colores cálidos para alta energía y colores fríos para baja energía, la intensidad está descrita en la barra de colores de la parte derecha.

El procesamiento de la imagen obtenida con las Transformadas Wavelet, es necesario convertirla a una imagen en escala de grises, para poder determinar la información que posee en base a Entropía e Información Mutua; para ello se utiliza una conversión a 8 bits, que representan una escala de 256 niveles de grises, como se observa en la Figura 5.39.

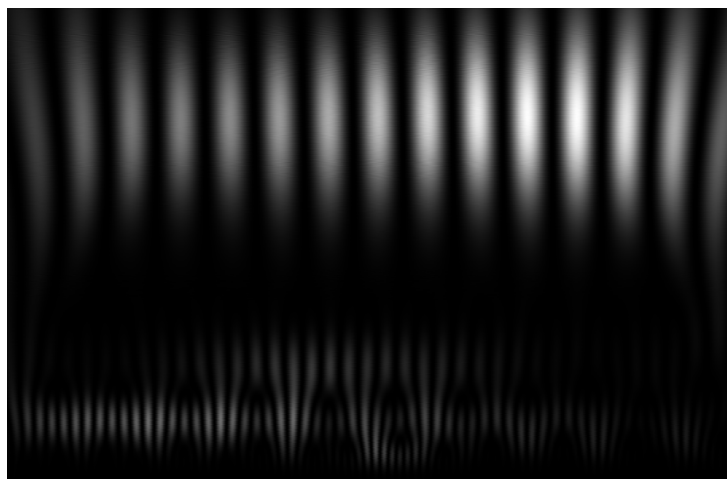


Figura 5.39: *Escalograma en Escala de Grises de 8 Bits*

En el escalograma de la Figura 5.38 y Figura 5.39, se observa que existen varias zonas caracterizadas por una alta concentración de energía, estos sectores están acotados en los rangos 21-32, 35-47 y 90-132; que están asociados al tercer, segundo y primer modo de la estructura, respectivamente. Para realizar un estudio del comportamiento de la energía con los diferentes ensayos, se realiza una selección de rangos de imágenes de modo que se evalúe el comportamiento de estas bandas, es así que se tiene:

- a. Una imagen con información completa de todo el escalograma, Figura 5.39.
- b. Una imagen con información de las 3 bandas con mayor concentración de energía, Figura 5.40.
- c. Una imagen con información de las bandas con menor concentración de energía y que son el complemento del índice b. para obtener el índice a, Figura 5.41.

La Figura 5.40 muestra la imagen recortada de la Figura 5.39 en la que se destacan sólo las bandas de los rangos de mayor energía. La Figura 5.41, muestra el complemento de la Figura 5.40, para formar el espectrograma completo. En éste Capítulo se evalúa sólo la imagen con información de las 3 bandas con mayor concentración de energía.

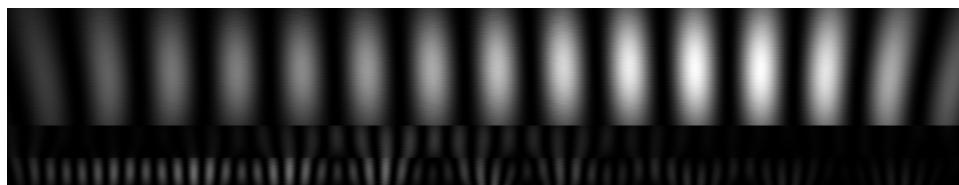


Figura 5.40: *Escalograma con Selección de los Mayores Rangos de Energía*

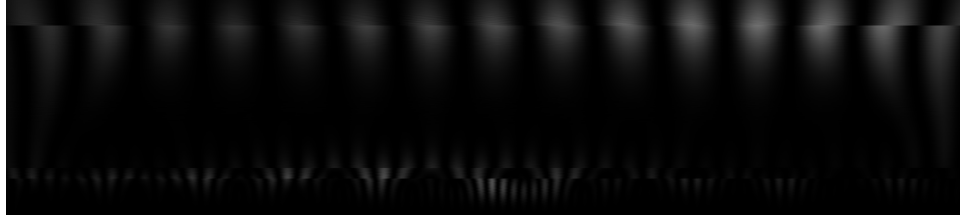


Figura 5.41: *Escalograma con Rangos Complementarios de Energía*

Este procedimiento es realizado a cada una de las ventanas del registro y para todas las condiciones de ensayo de la estructura bajo condiciones de anomalía o aplicación de daño controlado.

### 5.7.2. Caracterización de Imágenes con Entropía e Información Mutua

Para iniciar el estudio de imágenes con entropía e información mutua es necesario caracterizar las figuras considerando una imagen de referencia definida como  $X$ , que corresponde a registro wavelet en Condición Normal; y la imagen de prueba definida como  $Y$ , que corresponde a la condición de evaluación de la estructura.

Tabla 5.20: *Secuencia de Ensayos Considerados en el Análisis*

CONDICION	ENSAYOS	CANTIDAD	LEYENDA
Normal	Ruido Coloreado	3	NORM
Normal + Adición de 0.50 % de Masa	Ruido Coloreado	3	NR+M
Reducción 20 % en Elemento 5	Ruido Coloreado	3	RE20
Reducción 20 % + Adición de 0.50 % de Masa	Ruido Coloreado	3	R20M
Reducción 20 % + Temperatura	Ruido Coloreado	3	R20T
Reducción 35 % en Elemento 5	Ruido Coloreado	3	RE35
Reducción 35 % + Adición de 0.50 % de Masa	Ruido Coloreado	3	R35M
Reducción 35 % + Temperatura	Ruido Coloreado	3	R35T
Reducción 50 % en Elemento 5	Ruido Coloreado	3	RE50
Reducción 50 % + Adición de 0.50 % de Masa	Ruido Coloreado	3	R50M
Reducción 50 % + Temperatura	Ruido Coloreado	3	R50T
Reducción 35 % Todas las Columnas Nivel 2	Ruido Coloreado	3	RT35
Reducción 50 % Todas las Columnas Nivel 2	Ruido Coloreado	3	RT50
<b>TOTAL</b>		<b>39</b>	

La Tabla 5.20 muestra el detalle de los ensayos considerados para la evaluación de esta metodología, describiendo la condición del ensayo, la cantidad de registros y la leyenda utilizada.

Considerando como observador el *Sensor 3* y la imagen de referencia una ventana en Condición Normal, la Figura 5.42 muestra las imágenes completas de información mutua correspondientes a la comparación entre dos registros; i) En la Figura 5.42(a) la evaluación se realiza con un registro con reducción Leve de 20 %, *RE20*, ii) En la Figura 5.42(b) la evaluación se realiza con un registro de reducción Leve de 50 %, *RE50*, y iii) En la Figura 5.42(c) la evaluación se realiza con un registro

de reducción severa de 50 %, *RT50*.

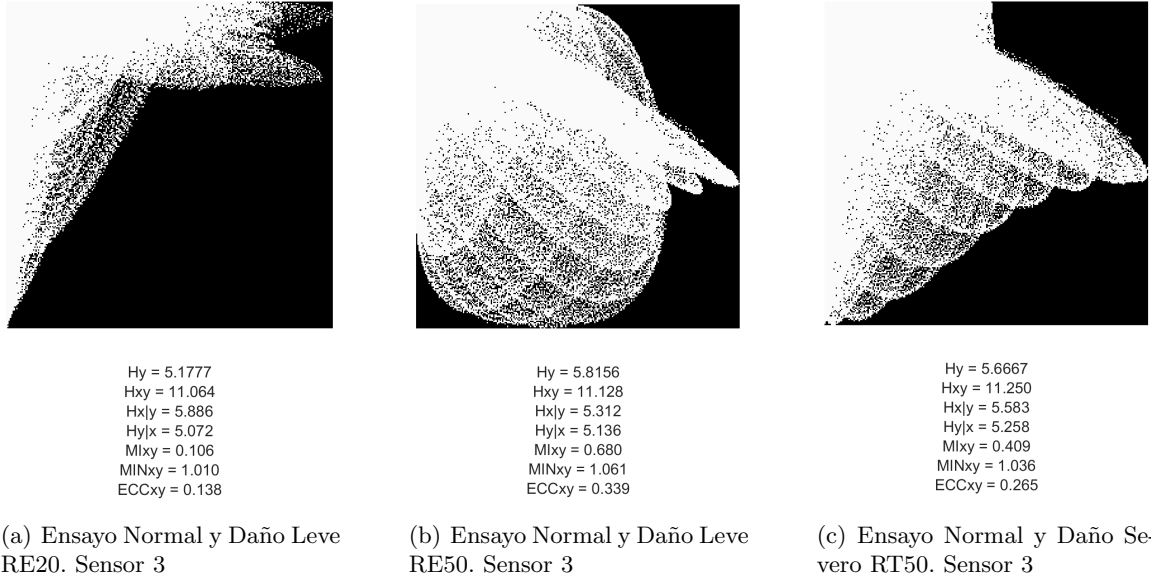


Figura 5.42: *Resultado de Entropía e Información Mutua para Registro Normal, Daño Leve (Reducción 20 % - RE20), Daño Leve (Reducción 35 % - RE35) y Daño Severo (Reducción 50 % - RT50). La Imagen de Referencia y de Prueba son Elegidos de Manera Aleatoria*

La Figura 5.42 (a), (b) y (c), muestra que existe una diferencia para las tres condiciones de observación elegidas.

Los resultados correspondientes a las ventanas de un registros completo, se muestran en la Figura 5.43; esta figura considera los resultados de considerar una ventana elegida de manera aleatoria de la Condición Normal y compararla con todas las ventanas de la condición de evaluación de la estructura (Reducción Leve 20 %). La alta variabilidad de los resultados, observados en la Figura 5.43, corresponde a la sensibilidad del método a los cambios que se presentan en la representación wavelet de la energía de la señal.

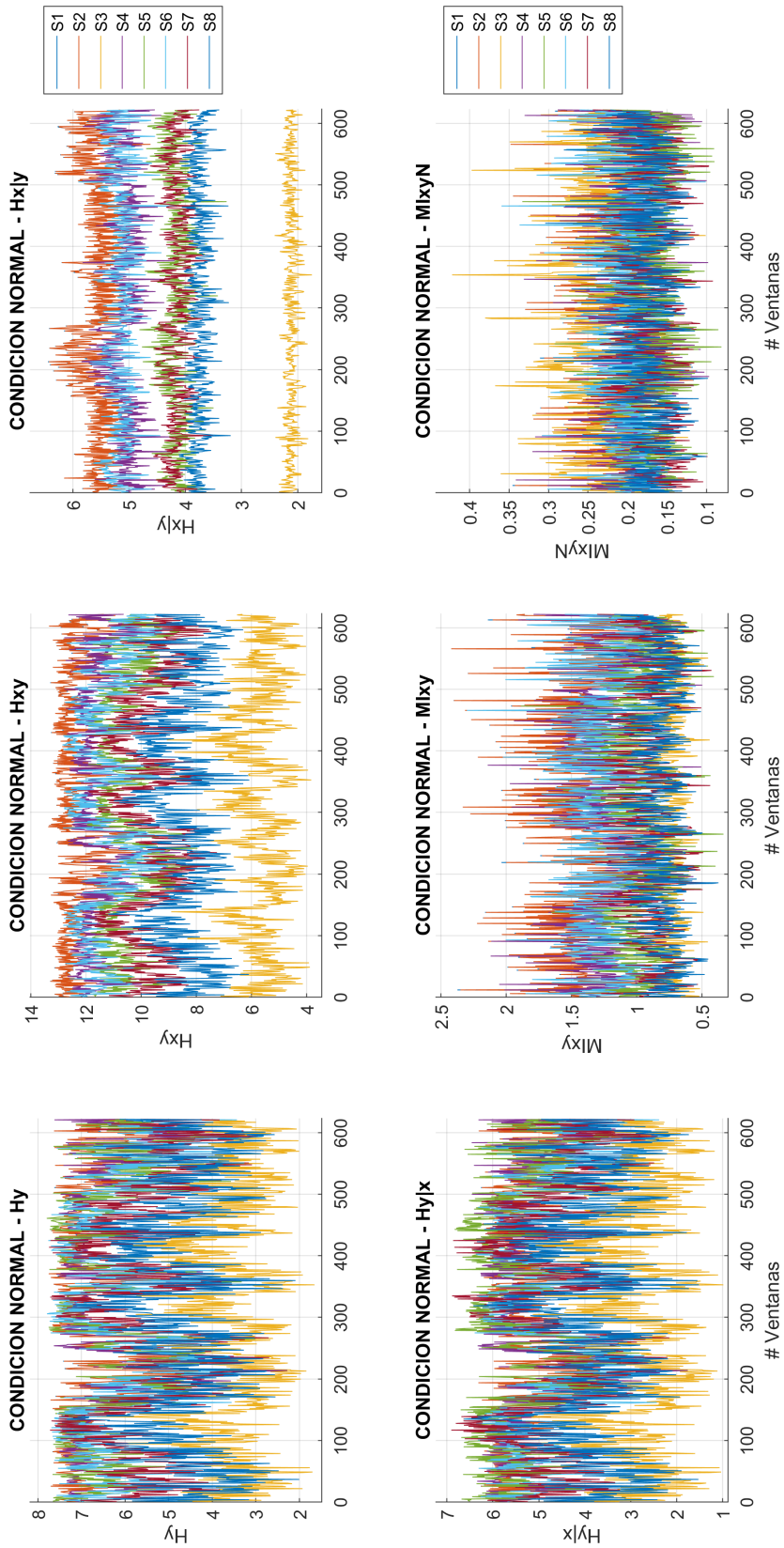


Figura 5.43: Entropía e Información Mutua. Condición Normal y Reducción Leve 20 %

Como los resultados obtenidos con Entropía e Información Mutua mostrados en la Figura 5.43, corresponden a una ventana en elegida de manera arbitraria (aleatoria), en Condición Normal, es necesario que sus resultados sean evaluados a partir de una medida que evalúe el cambio de la distribución de cada uno de los estados, para esto se utilizan el primer y segundo momento estadístico, aplicando la divergencia de Fisher expresada en la Ecuación (5.8):

$$t_F = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}, \quad (5.8)$$

donde,

$t_F$  : Divergencia de Fisher entre dos distribuciones,

$X_1$  : Media de la condición de referencia,

$s_1$  : Desviación estándar poblacional de la condición de referencia,

$X_2$  : Media de la condición de observación,

$s_2$  : Desviación estándar poblacional de la condición de observación.

Las Figuras 5.44 a 5.49 muestran un resumen con los resultados obtenidos para la Entropía  $H_y$ , Entropía Conjunta  $H_{xy}$ , Entropía Condicional  $H_{x|y}$  y  $H_{y|x}$ , Información Mutua  $MI_{xy}$  e Información Mutua Normalizada  $MIN_{xy}$ , separados por sensores.

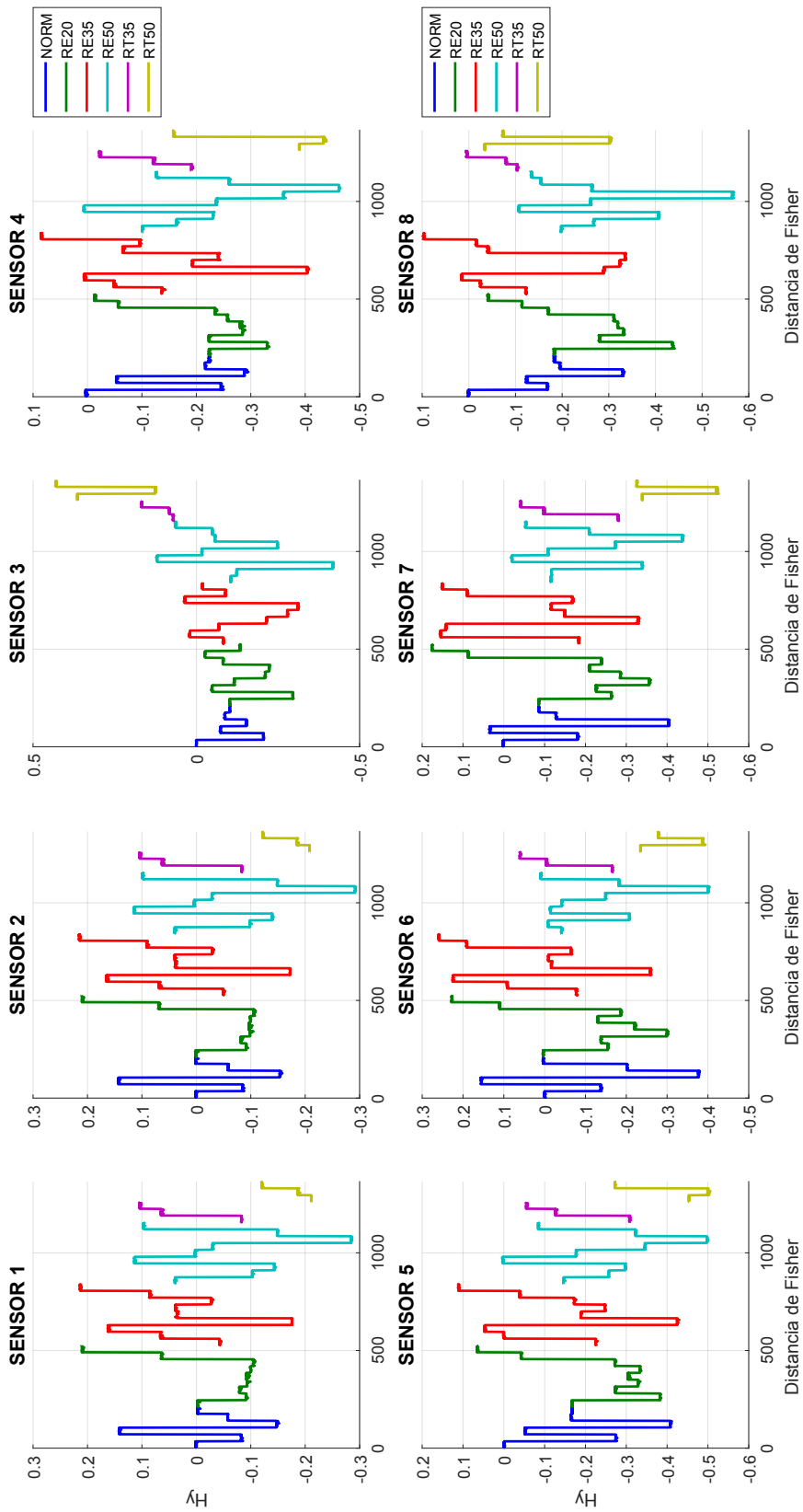


Figura 5.44: Entropía  $H_y$



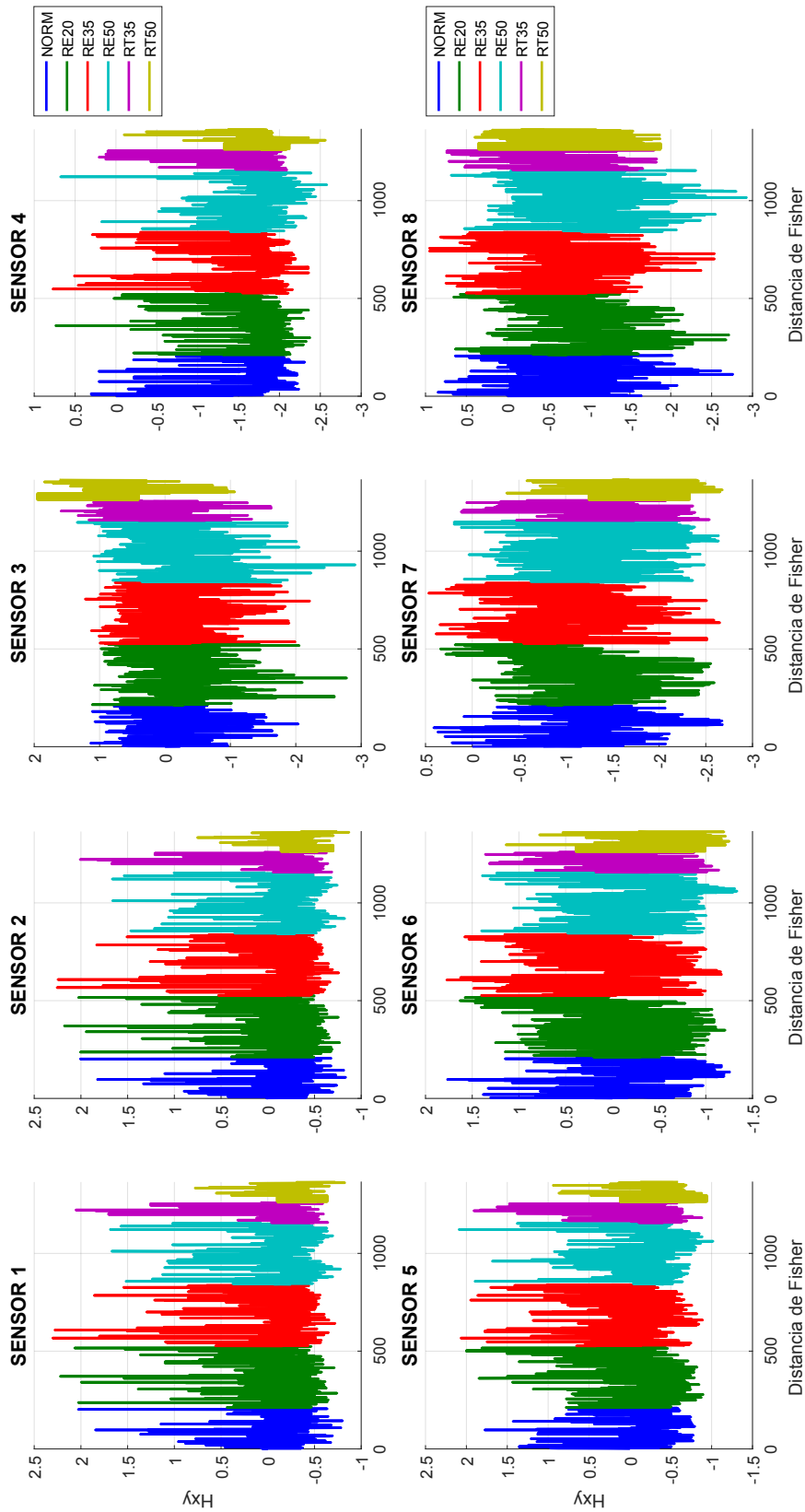


Figura 5.45: Entropía Conjunta  $H_{xy}$

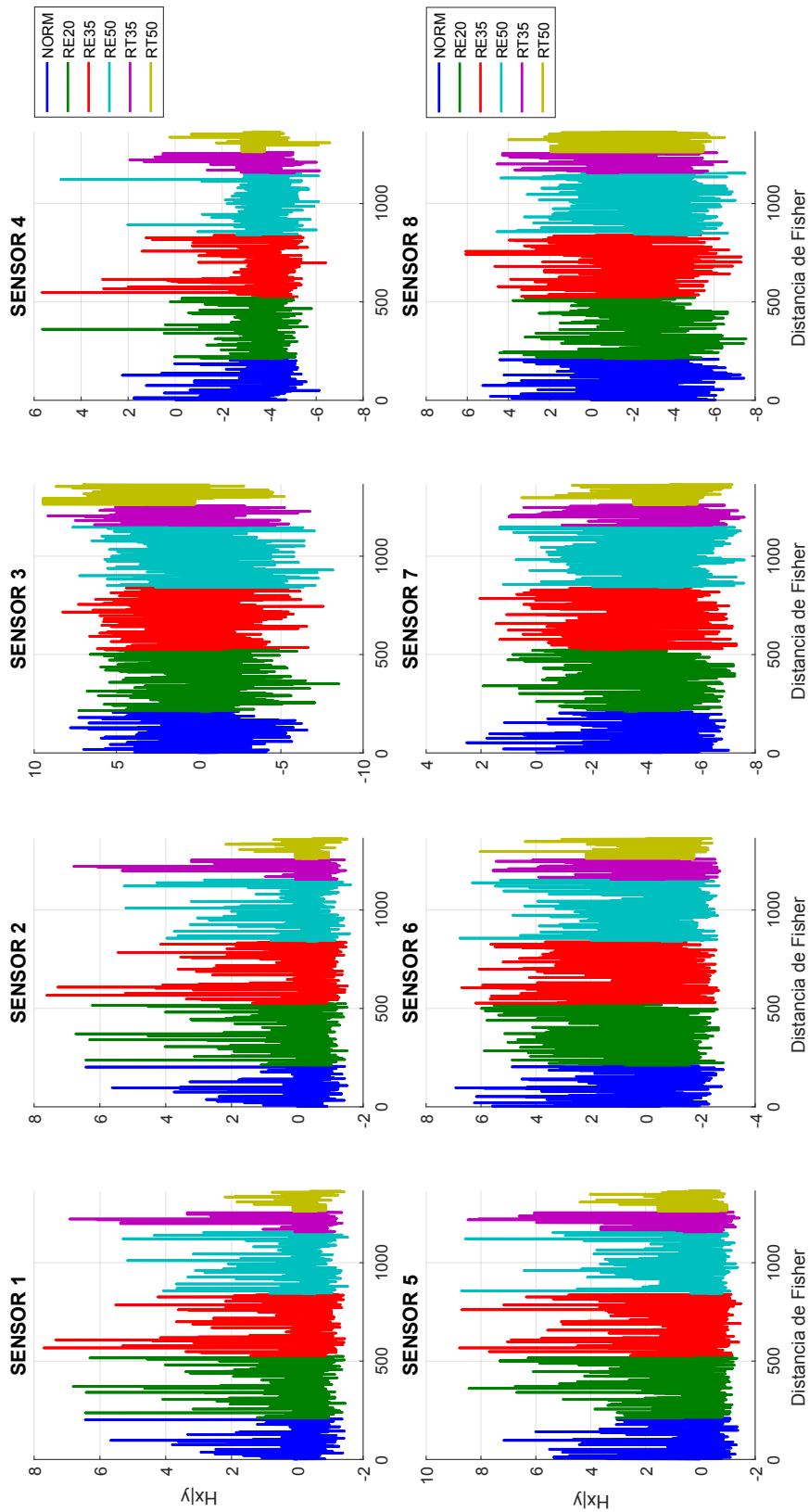


Figura 5.46: Entropía Condicional  $H_{x|y}$

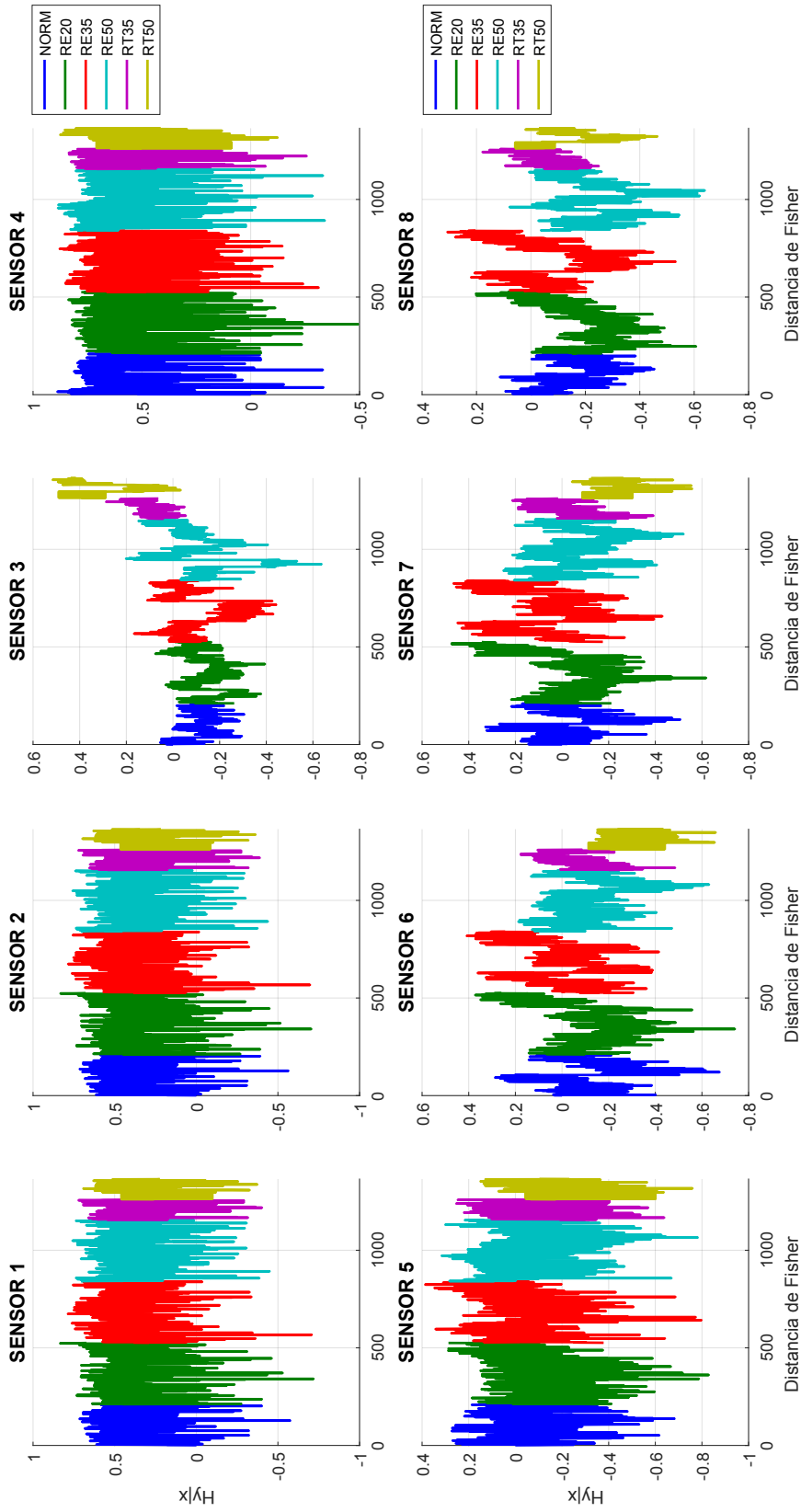


Figura 5.47: Entropía Condicional  $H_{y|x}$

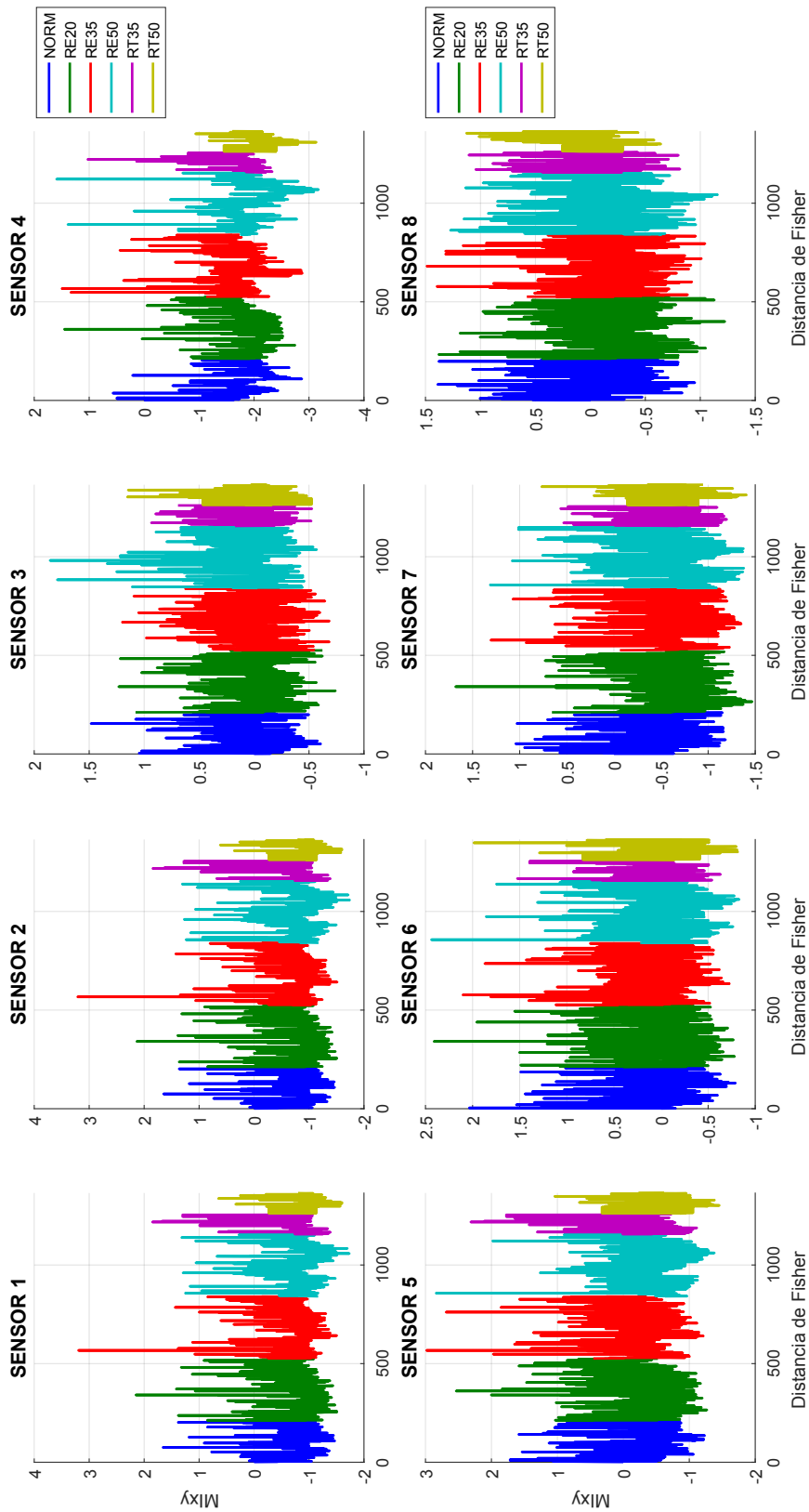


Figura 5.48: Información Mutua  $MI_{xy}$

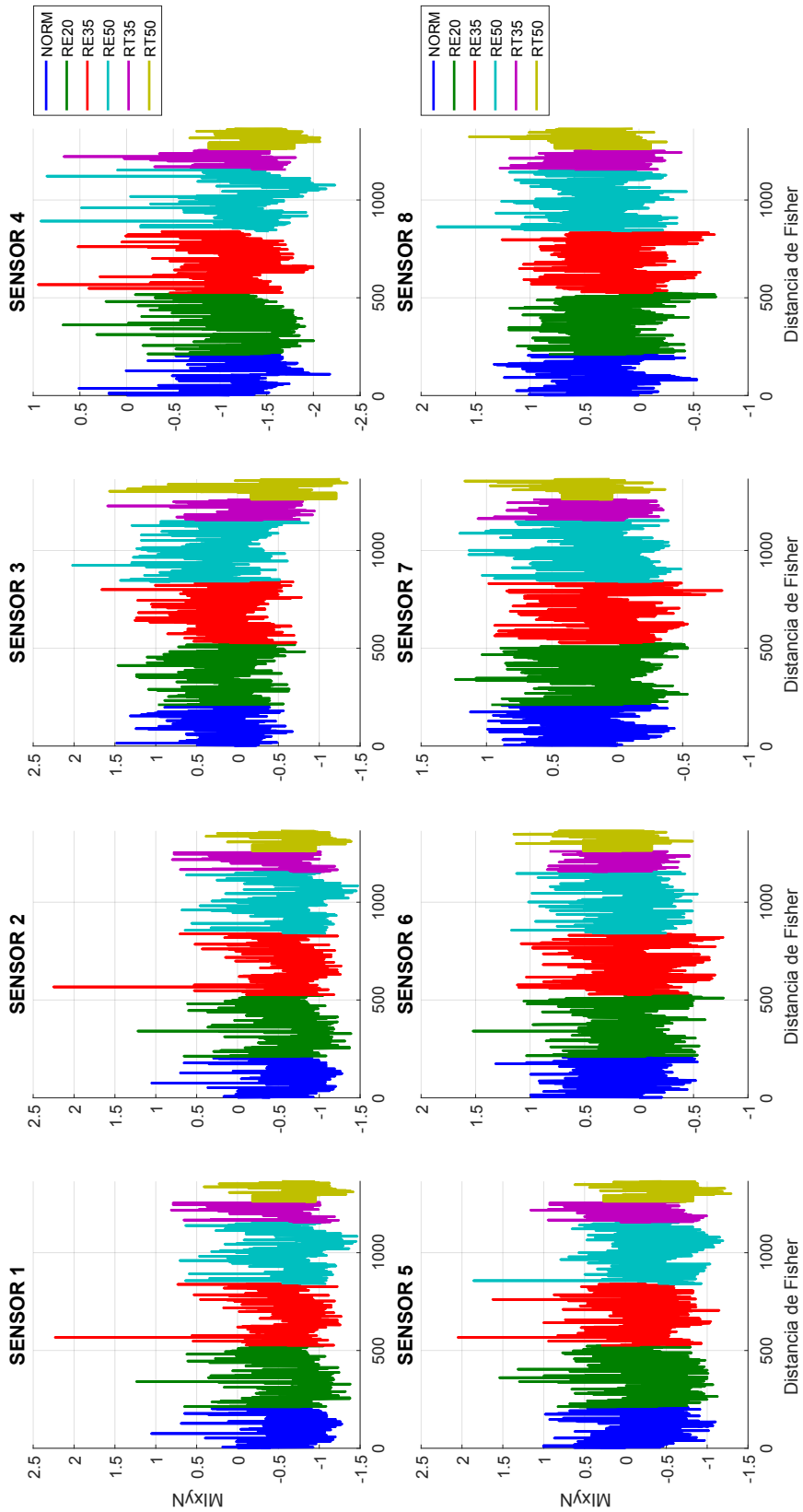


Figura 5.49: Información Mutua Normalizada  $MIN_{xy}$

En las Figuras 5.44 a 5.49, se observa que existen sensores que son mas sensibles al daño, esto se hace mas notorio al comparar sensores en la condición de Entropía Condicional  $H_y|x$ , Figura 5.50, para la combinación de los sensores 3 y 6, sensores 3 y 7, y sensores 3 y 8. Analizando las figuras, se observa que:

- a. No existe diferencia entre el clúster de la Condición Normal y la condición con Daño Leve, ya que ambos se encuentran superpuestos, por lo que de aqui en adelante la llamará región *Pseudo-Normal*.
- b. La condición con Daño Severo a 35 % esta ligeramente separada del sector correspondiente a la región Pseudo-Normal.
- c. Sólo la condición de Daño Severo a 50 %, posee un clúster de datos que se separa de otras condiciones; esta condición es principalmente observable entre los sensores 3 y 7, y los sensores 3 y 8.
- d. La observación descrita en el índice c, se debe a que la estructura con la condición de Daño Severo tiende a tener una mayor torsión, esto es medido por la posición del sensor 3; mientras que la comparación con los sensores 7 y 8, que son colindantes a la aplicación física del daño, mejoran la agrupación del clúster; por lo que la observación del daño observado es fuertemente dependiente de la ubicación de los observadores.
- e. La evaluación de los sensores 3, 7 y 8 bajo la condición de Entropía Condicional  $H_y|x$  permite realizar una detección de cambio de estado en la estructura, principalmente aplicable a la condición con Daño Severo a 50 %.

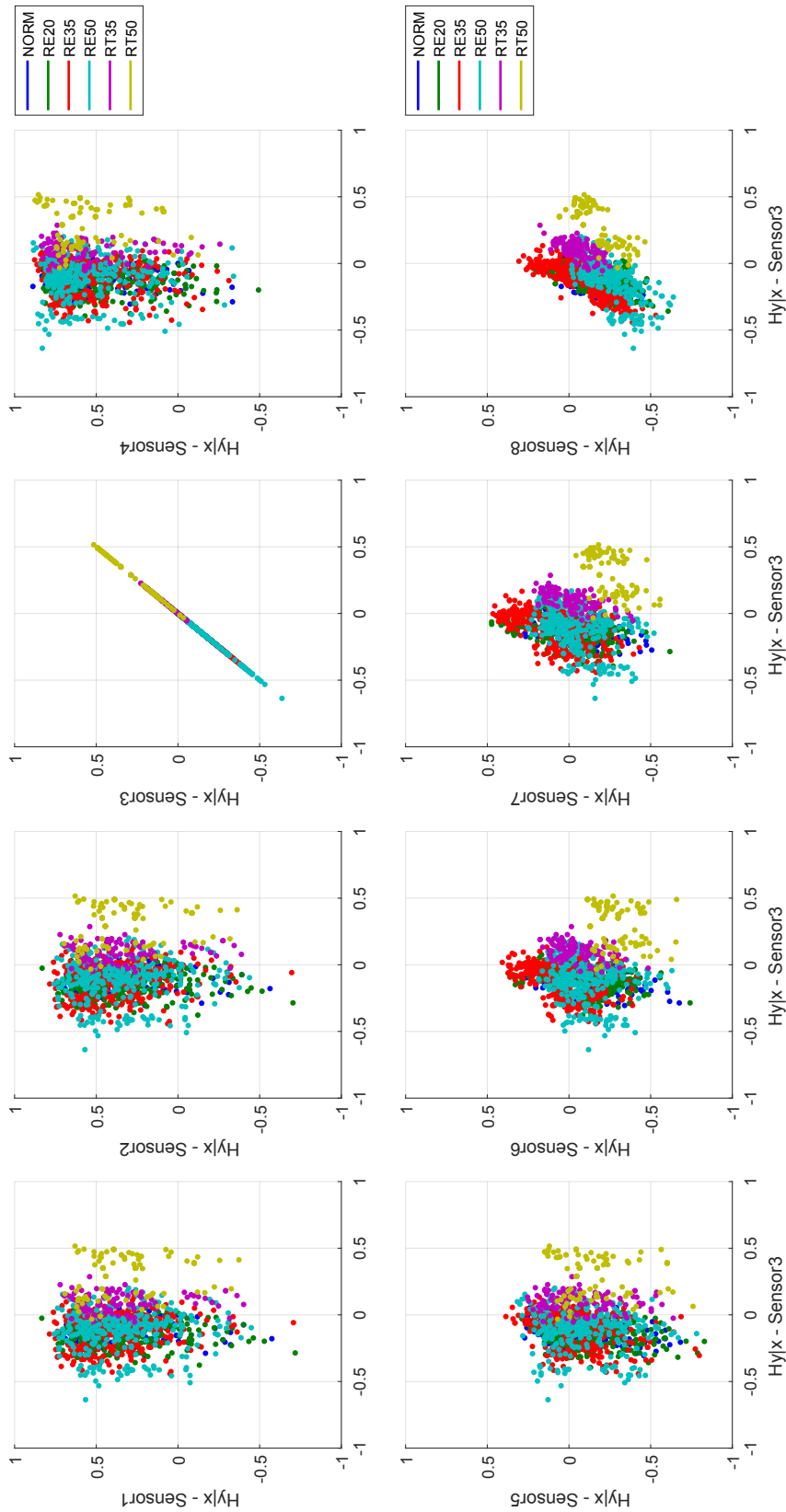


Figura 5.50: Evaluación de Sensores en Entropía Condicional  $H_{y|x}$

Por último, la Tabla 5.21 muestra un resumen con la información de los sensores sensibles a daño de acuerdo a la condición de observación; esta información será utilizada en el siguiente paso, cuando se determine la detección de cambio en la estructura y cuantificación de daño presente en la estructura aplicando redes neuronales.

Tabla 5.21: *Sensibilidad de Sensores a la Condición de Daño*

OBSERVACIÓN	SENSOR	CANTIDAD
$H_y$	3,6,7	3
$H_{xy}$	3,6,7	3
$H_{x y}$	3,6,7	3
$H_{y x}$	3,4,6,7	4
$MI_{xy}$	4,6,7	3
$MIN_{xy}$	3,4,6,7,8	5
<b>TOTAL</b>		<b>21</b>

### 5.7.3. Entrenamiento de la Red Neuronal SOM, para Detección de Daño

Como se observa en la Figura 5.50, existe una separación entre el clúster de la condición denominada *Pseudo-Normal* y el clúster con una condición con Daño Severo con 50%; para realizar la detección de cambio se utilizan redes neuronales con Mapa Auto-Organizado (SOM por sus siglas en inglés), tales redes puede aprender a detectar regularidades y correlaciones entre los datos de entrada y adaptar sus respuestas futuras a esa información. Los mapas auto-organizados no tienen un vector objetivo, ya que su propósito es dividir los vectores de entrada en grupos de vectores similares, por lo tanto no existe una salida deseada para este tipo de redes. Para el entrenamiento se utiliza el toolbox de Matlab R2017a, con las siguientes consideraciones:

- Las neuronas en SOM están organizadas en posiciones físicas de acuerdo con una función topológica, que puede ser una grilla rectangular, grilla hexagonal o grilla aleatoria; en esta sección se utiliza la grilla hexagonal, dado que se acomoda de mejor forma a los datos.
- Para el entrenamiento se considera un mapa bidimensional de  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$  y  $20 \times 20$  neuronas, de modo que se seleccione la que mejor se acomode a la forma definida.
- Se consideran 100, 200, 500 y 1000 iteraciones para completar el entrenamiento de la red.
- El vector de entrada se define con la información relevante observada en la Figura 5.50, para ello se considera que la información de entrada corresponde a los sensores 3, 7 y 8.
- Para las indicaciones realizadas en los índices *a*, *b*, *c* y *d*, se consideran 5 entrenamientos de modo que se seleccione el promedio de los resultados, a modo de evaluar la red con mejor desempeño.

De acuerdo a lo mencionado, la Tabla 5.22 muestra un resumen de los entrenamientos a realizar.

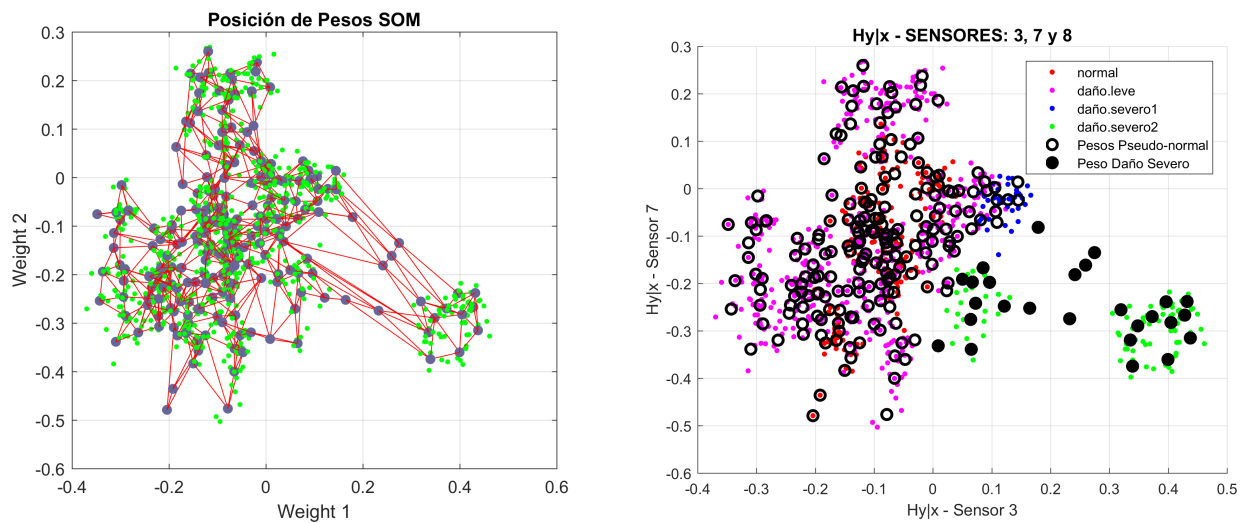


Tabla 5.22: *Redes Neuronales Entrenadas para la Evaluación de Datos*

No RED	DESCRIPCIÓN	VALORES
Red1	Topología	$5 \times 5$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red2	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red3	Topología	$15 \times 15$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red4	Topología	$20 \times 20$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red5	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	100
Red6	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	500
Red7	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	1000

El Anexo E, muestra los resultados que evalúan el desempeño del entrenamiento de cada una de las redes de la Tabla 5.22. Para el entrenamiento, validación y evaluación de la red neuronal, se utilizaron 2/3 de los registros (26 registros) medidos en laboratorio. Los resultados del Anexo E, muestran que el mejor desempeño corresponde a una topología de  $15 \times 15$  y 200 iteraciones (Red 3), para los sensores: 3, 7 y 8.

La Figura 5.51 muestra las imágenes de la Red3, Tabla 5.22, y la selección de los pesos para la condición Pseudo-Normal y la condición con Daño (severo).



(a) Posición de la Red después del entrenamiento

(b) Selección de pesos para Condición Normal y condición con Daño

Figura 5.51: *Clasificación de Daño en la Estructura*

Para probar los resultados del entrenamiento, los datos son validados utilizando 13 registros diferentes a los utilizados en el entrenamiento, para ello se considera similares condiciones de medición en la estructura, para la condición: i) Normal, ii) Reducción 20 %, iii) Reducción 35 %, iv) Reducción 50 %, v) Reducción Total 35 % y vi) Reducción Total 50 %.

La Figura 5.51a, muestra la manera como el entrenamiento de la red organiza las neuronas de modo que se cubran todas las áreas sobre las que se encuentran los puntos de evaluación para la Entropía Condicional  $H_{y-x}$ ; en la Figura 5.51b, se muestra que existe una buena clasificación entre la condición con Daño Severo en 50 % y la condición Pseudo-Normal. Los círculos negros cubren todo el clúster correspondiente a Daño Severo 50 % y la colindancia al Daño Severo a 35 %.

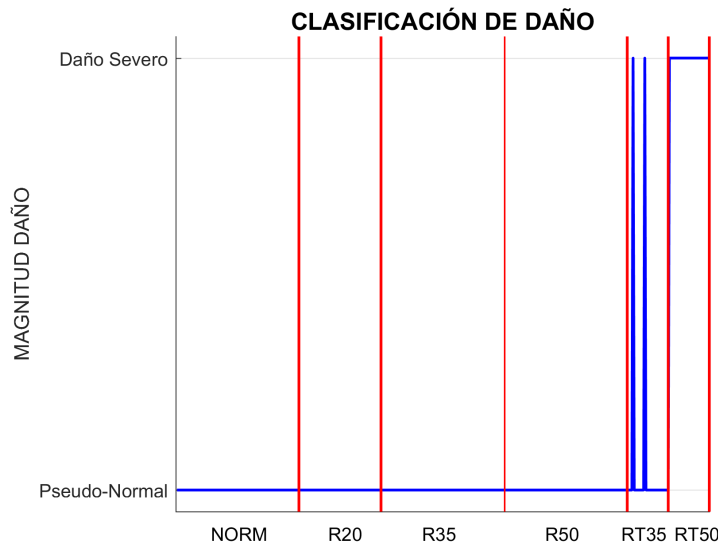


Figura 5.52: Clasificación de Daño a Partir de la Observación de Entropía  $H_{y-x}$  en Sensores: 3, 7, 8

Al reemplazar los resultados correspondientes a la evaluación de la red, se observa que el entrenamiento de la red realiza una buena clasificación para el Daño Severo a 50 %, ver Figura 5.52, mientras que solo un par de mediciones identificó como Daño Severo, en la condición de reducción total de 35 %; esto se debe a que en la red entrenada, Figura 5.51b, las neuronas del clúster de daño se encuentran en la colindancia con la condición con daño RT35 y la proximidad de una observación en este sector hace interpretar a la red neuronal como la presencia de una condición de Daño Severo en la estructura.

#### 5.7.4. Entrenamiento de la Red Neuronal FeedForward para Cuantificación de Daño

Para el entrenamiento y selección de la red Neuronal óptima se utiliza el toolbox de Matlab R2017a, tomando en cuenta las siguientes recomendaciones [Beale et al., 2017]:

- a. Las redes multicapa usualmente poseen una o más capas ocultas de neuronas con funciones de transferencia sigmoideas seguidas de una capa de salida con función de transferencia lineal

o sigmoïdal. Múltiples capas de neuronas con funciones de transferencia no lineales permiten aprender relaciones no lineales entre vectores de entrada y salida, mientras que la capa de salida con función de transferencia lineal es comúnmente utilizada para problemas de ajuste o regresión no-lineal.

- b. Para el entrenamiento de redes multicapa, cualquier algoritmo de optimización, adicional al descrito en el Capítulo 4, puede ser utilizado, el método de Levenger-Marquardt tiene convergencia rápida y con menores errores cuadráticos medios que cualquier otro algoritmo existente.
- c. Una capa oculta produce buenos resultados, pero se pueden probar dos capas ocultas si los resultados obtenidos no son satisfactorios.
- c. El incremento de la cantidad de neuronas en la capa oculta genera una red mas completa y potente, pero su entrenamiento requiere de más recurso y tiempo computacional, además de que es susceptible a producir sobre-entrenamiento.
- d. Las redes neuronales inician de manera aleatoria, y los resultados finales varían entre uno y otro entrenamiento; para superar este hecho, todas las redes neuronales serán entrenadas 5 veces y se considera la red que muestre el menor error medio cuadrático de validación.
- e. Los patrones de entrenamiento están conformados por tres conjuntos de datos: entrenamiento, validación y testeo; el entrenamiento optimiza la red, la validación evita el sobreentrenamiento y el testeo se utiliza para probar el desempeño de la red. En esta tesis se consideran los siguientes conjuntos de datos: 70 % entrenamiento, 15 % validación y 15 % testeo.

De acuerdo a lo mencionado y considerando el problema a resolver, se prueba el entrenamiento con varias redes, en las cuales se varía lo siguiente:

- i. Cantidad de neuronas en capa oculta: 5, 10, 20 y 50.
- ii. Función de transferencia en capas ocultas utilizando: "tangente sigmoïdal", o "logaritmo sigmoïdal".
- iii. Función de transferencia en capa de salida: "lineal", o "tangente sigmoïdal".
- iv. Función de entrenamiento: "Levenberg-Marquardt".

Los resultados obtenidos son utilizados en la detección de daño, para esto es importante dividir los resultados en registros de entrenamiento<sup>6</sup> y registros de validación de la red neuronal; con esta premisa se define que el entrenamiento en Matlab considera 2/3 de los registros (26 ensayos) y la evaluación de resultados, el restante 1/3 de los registros (13 ensayos).

La cuantificación de daño en base a redes neuronales puede no ser precisa para muchos de los resultados obtenidos, por tal motivo su evaluación debe ser realizada con criterio y acompañada de otro método de identificación que refuerze o refute los resultados, como el evaluado en la sección 5.7.3.

---

<sup>6</sup>Definidos en el ítem e.

### Calibración con Datos de Entropía e Información Mutua

Las redes neuronales entrenadas en esta sección tienen como parámetros de entrada los nombrados en la Tabla 5.21, que consideran las observaciones de Entropía e Información Mutua.

Se entrenan 7 tipos de redes neuronales, en las que varía la cantidad de neuronas en la capa oculta y la función de transferencia; la eficiencia de cada red es evaluada eligiendo la red con el menor coeficiente de Pearson y menor error cuadrático medio estandar.

La Tabla 5.23 muestra los diferentes entrenamientos realizados, en los que:

- a. Las redes 1 y 2, evalúan la eficiencia de utilizar una o dos capas ocultas en la red; considerando que la capa oculta utiliza una función tangente-sigmoidal y la capa de salida una función lineal.
- b. Las redes 3 a 5, varían la cantidad de neuronas ocultas para cada una de las dos capas; consideran que la capa oculta utiliza una función tangente-sigmoidal y la capa de salida una función lineal.
- c. La red 6, evalúa la función de transferencia en capas ocultas utilizando logaritmo sigmoidal.
- d. La red 7, evalúa la utilización de función de transferencia en capa de salida, utilizando una función tangente sigmoidal.

Tabla 5.23: *Redes Neuronales SOM Entrenadas para la Evaluación de Datos*

No RED	DESCRIPCIÓN	VALORES
Red1	Nro. de Neuronas	10 (una capa)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Lineal
Red2	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Lineal
Red3	Nro. de Neuronas	5 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Lineal
Red4	Nro. de Neuronas	20 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Lineal
Red5	Nro. de Neuronas	50 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Lineal
Red6	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Logaritmo Sigmoidal Lineal
Red7	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal Tangente Sigmoidal

El vector de entrada esta compuesto por los 21 parámetros de observación definidos en la Tabla 5.21, para las seis condiciones de la estructura: Normal, Reducción 20 %, Reducción 35 %, Reducción 50 %, Reducción Total 35 %, Reducción Total 50 %. La matriz objetivo, esta asociada a las seis condiciones de la estructura, asignando marcador 1 cuando la condición esta presente y 0 para las otras condiciones, por lo que la matriz queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{6 \times N} \quad (5.9)$$

El resultado del entrenamiento es un vector de  $6 \times 1$ , es decir, que cuando se entrega un vector de observación de 21 parámetros, el resultado de la red es un vector de 6 valores, cada valor esta relacionado con la condición de la estructura, de acuerdo a lo definido en la expresión (5.9); el algoritmo complementario a la red neuronal, selecciona como cuantificación de daño el término del vector con mayor valor positivo.

El desarrollo de cada una de las redes entrenadas, definidas en la Tabla 5.23, se encuentra en el Anexo F, su desarrollo considera que la *Red 6* y la *Red 7* utilizan dos capas ocultas de 10 neuronas cada una<sup>7</sup>; la información de éste anexo es complementada con información de la salida del toolbox de Matlab y las estadísticas para la selección del entrenamiento mas óptimo.

La red neuronal con el mejor desempeño para las condiciones indicadas corresponden a la *Red2*, que considera:

- a. Los menores errores cuadraticos medios de las redes evaluadas.
- b. El tiempo de entrenamiento es el más eficiente, para la obtención de resultados similares.
- c. Las utilización de función de transferencia para la capa oculta *Logaritmo Sigmoidal* no produce una mejora en los resultados de entrenamiento.
- d. Tampoco se observa una mejora en los resultados con una función de transferencia *Tangente Sigmoidal* en la capa oculta.

Como cada una de las redes propuesta en la Tabla 5.23 fue entrenada 5 veces a modo de evaluar la estadísticamente el entrenamiento por configuración. Al reemplazar la información correspondiente a la evaluación de la red neuronal con los registros medidos en la estructura en condiciones similares a la evaluada se obtiene la Figura 5.53, que muestra una relación entre la condición de la estructura y la cuantificación de daño asignado por la red neuronal.

<sup>7</sup>Información obtenida de la evaluación y entrenamiento de las 5 primeras redes de evaluación

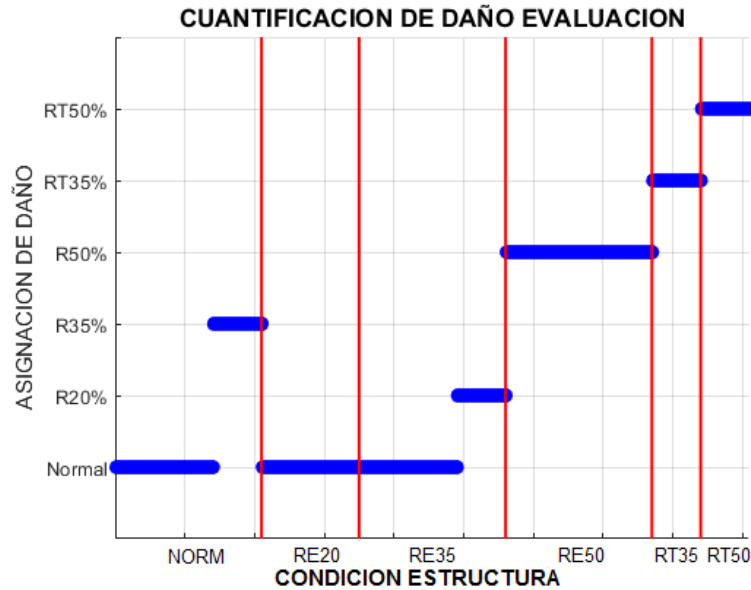


Figura 5.53: Asignación de Daño, con Resultados del Entrenamiento de la Red Neuronal 2

Los resultados muestran lo siguiente:

- La aplicación de la red neuronal muestra una *asignación variable* para una condición determinada de daño, es decir, que para la Condición Normal se asignen mas de dos condiciones de daño; esto se debe a que cuando se realiza la comparación de imágenes y obtención de características por Entropía e Información Mutua, la imagen de referencia particulariza la señal en una sola configuración para la observación realizada.
- En la Condición Normal y condición con Daño Leve (hasta Reducción de 35 %) se observa que existe una principal tendencia a considerar la estructura en Condición Normal, esto es concordante con lo observado en la Figura 5.52 y desarrollado en el índice 5.7.3; en el cual se observa que existe un clúster con información correspondiente a una condición denominada *Pseudo-Normal*.
- La determinación de daño es eficiente para condiciones de Daño Severo (Reducción Total 35 % y Reducción Total 50 %), se observa que tiene un mejor desempeño que la red SOM, ya que considera una mayor cantidad de información que permite no solo la detección de daño, sino poder cuantificar los resultados a partir de la condiciones de daño asignadas a la estructura.
- Esta metodología requiere del completo conocimiento de la Condición Normal y todas sus anomalías, debidas a cambio estacionario y ambiental, de modo que el entrenamiento de la red evalúe todo el clúster de esta condición.
- La implementación de esta metodología requiere que se conozca la mayor cantidad de condiciones operacionales de la estructura de modo que se permita seleccionar o delimitar de mejor modo el clúster de Condición Normal y/o limitarlo hasta una condición de daño observable.
- La aplicación práctica requiere de parámetros adicionales ya que éste análisis y desarrollo ha sido realizado a partir de la asignación de daño controlado en la estructura, por lo que

su implementación presentaría muchos falsos negativos (errores tipo II), al indicar que la estructura esta en Condición Normal, cuando en ella esta presenta un Daño Leve.

- g. La selección de una ventana de referencia representativa requiere de una metodología de selección que sea más adecuada para la investigación en futuros trabajos.
- h. Esta metodología consume muchos recursos computacionales y los tiempo de procesamiento no permitirían su evaluación en tiempo real, el procesamiento de imágenes con información mutua requiere de la operación de matrices de grandes tamaños que procesadores de los computadores actuales realizan en bastante tiempo.
- k. La aplicación de esta metodología es principalmente eficiente para condiciones de daño severa, ya que las condiciones de reducción total de 35 % y reducción total de 50 % fueron determinadas con éxito.
- l. La detección de Daño Leve no es precisa y es poco eficiente, sólo la condición de reducción de 50 % ha sido determinada con éxito. Esto muestra que las primeras etapas de daño en la estructura no son visibles, presentandose falsos negativos para condiciones en las que la estructura ya requiere de observación.

## Capítulo 6

# DETECCIÓN DE CAMBIO

### 6.1. Introducción

En éste Capítulo se revisan los conceptos de test de hipótesis, inferencia Bayesiana y su aplicación a la detección de cambio de una señal. Se desarrolla un algoritmo que tiene por finalidad detectar el porcentaje de cambio en base a la potencia de distribución de probabilidad muestral, para ello se considera que los datos poseen una distribución normal cuyo parámetro de cambio es el valor de la media. Se asume que el valor de la desviación estándar es conocido y no varía. El algoritmo es probado numéricamente en una señal senoidal con perturbación de ruido gaussiano y validado con información del monitoreo en Torre la Central de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, antes y después del terremoto del Maule del 27 de febrero de 2010.

### 6.2. Test de Hipótesis

En problemas de detección, el *Test de Hipótesis* se utiliza para realizar la toma de decisiones, de un parámetro  $\theta$  a partir de un número finito de resultados de distribución aleatoria, expresado como:  $x = x_1, \dots, x_n$ ; de acuerdo a una función de distribución definida como  $f(x|\theta)$  [Moon and Stirling, 2000].

El Test de Hipótesis generalmente considera un problema de decisión binario, para ello define,  $H_0$ , como *Hipótesis Nula*, que constituye el marco de referencia lógico contra el cual se juzga y,  $H_1$ , como *Hipótesis Alternativa*, que es el rechazo o una alternativa más compleja a la hipótesis nula [Wilks, 2011], expresada en forma general en la Ecuación (6.1):

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}, \quad (6.1)$$

donde,

$\Theta_0$ : Es el conjunto de datos correspondientes a la hipótesis nula,

$\Theta_1$ : Es el conjunto de datos correspondientes a la hipótesis alternativa.



Sólo una de estas hipótesis es verdadera, para ello se considera que si el estadístico de prueba<sup>1</sup>,  $\theta$ , cae en una región “suficientemente improbable” de la distribución nula,  $H_0$ , es rechazada como verdadera dada la evidencia observada, punto  $x_1$  de la Figura 6.1. Si el estadístico de prueba cae dentro de un intervalo de valores “comunes” descritos por la distribución nula, el estadístico de prueba se considera consistente con  $H_0$ , punto  $x_2$  de la Figura 6.1. El aceptar  $H_0$ , no significa que la hipótesis nula es verdadera, sólo que existe evidencia insuficiente para rechazar esta hipótesis. Cuando  $H_0$  no es rechazado, sólo se puede afirmar que no es “inconsistente” con los datos observados.

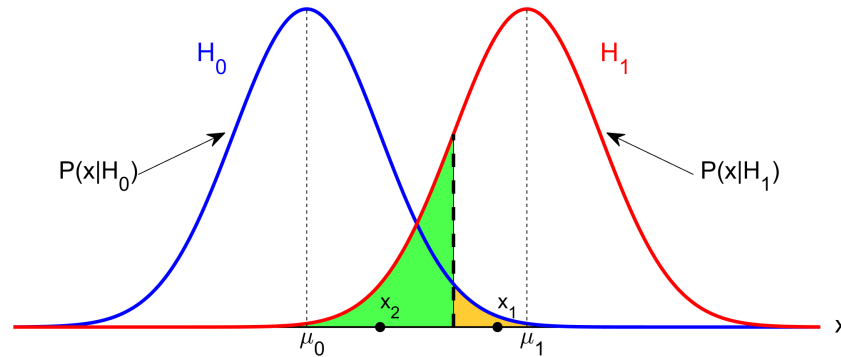


Figura 6.1: Evaluación del Estadístico de Prueba

### 6.2.1. Nivel de Significancia

El nivel de significancia,  $\alpha$ , es una región “suficientemente improbable” de la distribución nula  $H_0$ , se caracteriza por ser una zona de rechazo del test. La hipótesis nula se rechaza si la probabilidad del estadístico de prueba observado, es menor o igual al nivel de significancia. El nivel de significancia es definido antes de realizar los cálculos, pero depende del estudio o la investigación que se está realizando. Comúnmente se elige el nivel de  $\alpha = 5\%$ , aunque no son raras pruebas hechas con nivel de  $\alpha = 10\%$  ó  $\alpha = 1\%$ .

### 6.2.2. Tipos de Error y Potencia del Test

Otra forma de considerar el nivel de un test, es como la probabilidad de rechazar equivocadamente cualquiera de las hipótesis y tener dos tipos de errores que son:

- a. **Error Tipo I, Falso Positivo o Falsa Alarma ( $P_{FA}$ )**, ocurre cuando se acepta la Hipotesis Alternativa  $H_1$  y se rechaza la Hipotesis Nula  $H_0$ . La notación  $P(H_1|H_0)$ , indica la probabilidad de elegir  $H_1$  cuando  $H_0$  es verdadera, y esta probabilidad esta relacionada con el nivel de significancia,  $\alpha$ , a través de:

$$P(H_1|H_0) = \alpha. \tag{6.2}$$

<sup>1</sup>El *Estadístico de Prueba*, es el valor que resume la cantidad de datos que se someten a prueba, en casos paramétricos a menudo es un parámetro de una distribución teórica relevante como la media  $\mu$ , o la desviación estándar  $\sigma$ .

- b. **Error Tipo II o Falso Negativo**, es opuesto al Error Tipo I y ocurre cuando se acepta la Hipótesis Nula  $H_0$  y se rechaza la Hipótesis alternativa  $H_1$ , expresado también como  $P(H_0|H_1)$ . La probabilidad de un Error Tipo II se denota con el símbolo  $\beta$ , expresado como:

$$P(H_0|H_1) = \beta. \tag{6.3}$$

Cuando se realiza el Test de Hipótesis, la decisión tomada puede coincidir o no con la realidad; por lo que se presentan cuatro casos que se muestran en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: *Casos de Elección Test de Hipotesis*

	$H_0$ ES CIERTA	$H_1$ ES CIERTA
SE ACEPTA $H_0$	no hay error	ERROR TIPO II
SE ACEPTA $H_1$	ERROR TIPO I	no hay error

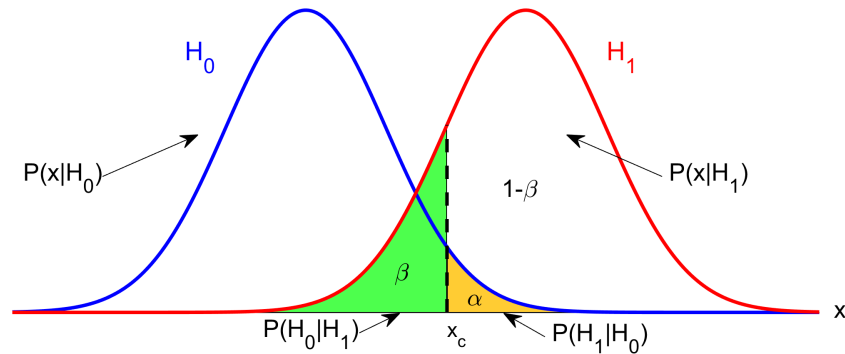


Figura 6.2: *Errores Tipo I y Tipo II en Test de Hipotesis*

Estos errores se ilustran en la Figura 6.2, si el estadístico de prueba está a la derecha de  $x_c$  se rechaza la Hipótesis nula. El área color naranja bajo la distribución nula es la probabilidad de un Error de Tipo I, resultados en este intervalo no son imposibles bajo  $H_0$ , pero tiene una probabilidad pequeña  $\alpha$  de ocurrir. El área en color verde corresponde al Error Tipo II,  $\beta$ . Para diseñar un detector óptimo el tamaño de los errores tipo I y tipo II, debe ser tan pequeño como sea posible; y con una muestra de tamaño prefijado, disminuir la probabilidad del error tipo I,  $\alpha$ , conduce a incrementar el error tipo II,  $\beta$ .

La probabilidad del Error Tipo II,  $\beta$ , normalmente no está definida, esto se debe a que la hipótesis alternativa,  $H_1$ , se define de manera más general que la hipótesis nula,  $H_0$ , y usualmente consiste de la unión de muchas hipótesis alternativas [Wilks, 2011]; por lo tanto se busca minimizar la probabilidad de Error Tipo II,  $P(H_0|H_1)$ , o equivalentemente maximizar  $1 - P(H_0|H_1)$ , que se conoce como *Probabilidad de detección* ( $P_D$ ) o *Potencia del Test*, que geoméricamente se muestra en la Figura 6.2, como el área bajo la distribución de la Hipótesis nula  $H_1$ .

En términos de probabilidad condicional la potencia del test se escribe como:

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1) = 1 - \beta. \tag{6.4}$$

### 6.2.3. Teorema de Neyman Pearson

El teorema de Neyman Pearson (NP), se utiliza principalmente para problemas de detección binaria. Se basa en maximizar la probabilidad de detección,  $P_D$ , para una probabilidad de falsa alarma,  $\alpha$ , definida; decidiendo la hipótesis alternativa  $H_1$ , si se cumple con la relación [Kay, 1998]:

$$L(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} > \gamma, \quad (6.5)$$

donde,  $\gamma$  se encuentra a partir de la ecuación:

$$\alpha = \int_{x:L(x)>\gamma} p(x|H_0)dx. \quad (6.6)$$

La función  $L(x)$  se denomina *relación de verosimilitud* ya que indica para cada valor de  $x$ , la verosimilitud de  $H_1$ , versus la verosimilitud de  $H_0$ .

### 6.2.4. Test de Uno y Dos Lados

El test de hipótesis puede ser de uno o dos lados o extremos, puesto que la probabilidad de los extremos de la distribución nula es la que controla el nivel de significancia del test,  $\alpha$ . Que el test sea de uno o dos extremos depende de la naturaleza de la hipótesis que se está evaluando en el estudio.

El test de un extremo se utiliza cuando existe una razón física que modifica la hipótesis nula en un extremo particular de ésta, como se muestra en la Figura 6.3. En ella la hipótesis alternativa se expresa en términos de un valor mayor que el de la hipótesis nula,  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

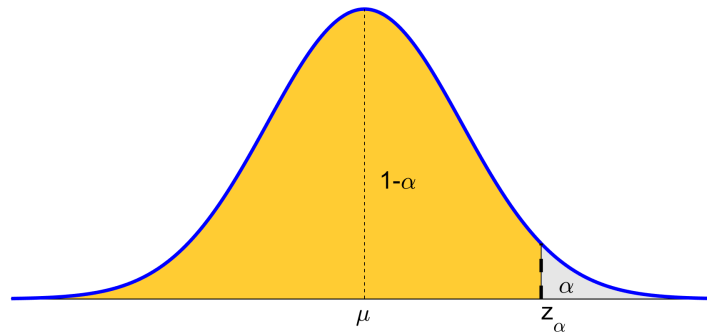


Figura 6.3: Test de un Sólo Lado

Para este caso, considerando una distribución normal, el valor de  $z_\alpha$ , que separa la región de aceptación y la región crítica queda definida por la Ecuación (6.7):

$$z_\alpha = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{s} \sqrt{n}, \quad (6.7)$$

donde,

$z_\alpha$ : Variable normalizada, para distribución normal,  
 $\hat{x}$ : Estimación de la media,  
 $\bar{x}$ : Media muestral de los datos,  
 $s$ : Desviación estandar muestral de los datos,  
 $n$ : Cantidad de datos observados.

Cuando la distribución muestral cuente con menos de 35 datos, se debe considerar una distribución *t-student*, que es el equivalente de  $z_\alpha \equiv t_\alpha$  y está definido por la Ecuación (6.8):

$$t_\alpha = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{s} \sqrt{n}, \quad (6.8)$$

donde,

$t_\alpha$ : Variable normalizada, para distribución t-Student.

Los test de dos extremos son recomendados cuando valores muy grandes o muy pequeños del estadístico de prueba son desfavorables a la hipótesis nula; tales pruebas pertenecen a la hipótesis alternativa que es de la forma  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , que requeriría considerar los dos extremos. En estas pruebas la región de rechazo se comparte igualmente entre ambos extremos de la distribución nula; si el estadístico de prueba es mayor que  $100(1 - \alpha/2) \%$  en la cola derecha de la distribución nula, o si es menor que  $100(\alpha/2) \%$  en la cola izquierda, como se observa en la Figura 6.4.

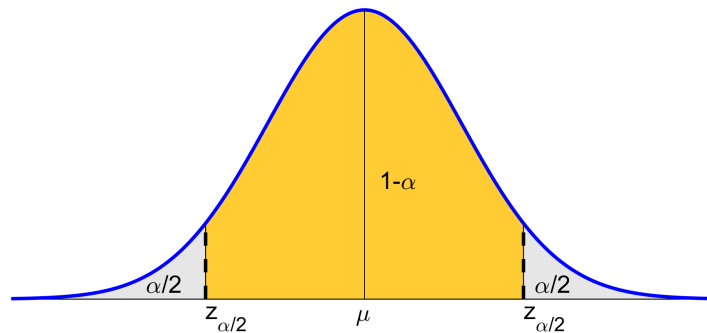


Figura 6.4: *Test de Dos Lados*

Para este caso, la región de aceptación y crítica para una distribución muestral, de tipo normal, queda definido por la Ecuación (6.9):

$$z_{\alpha/2} = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{s} \sqrt{n}. \quad (6.9)$$

Considerando una región de aceptación y crítica para una distribución t-student, la expresión se define con la Ecuación (6.10):

$$t_{\alpha/2} = \frac{\hat{x} - \bar{x}}{s} \sqrt{n}. \quad (6.10)$$

### 6.2.5. Detección de Cambio

Cuando los datos correspondientes a una población muestral cambian de una condición Normal a una condición Alterada, la distribución cambia haciendo que el estadístico de prueba modifique su valor normal, Figura 6.5. Asumiendo que el estadístico de prueba es la media de la distribución, la condición normal,  $\mu_0$ , migra a una condición nueva  $\mu_1$ , debido a un cambio de estado en el sistema; la distancia del cambio se define como,  $d_0$ , a partir de la Ecuación (6.11):

$$d_0 = \mu_1 - \mu_0. \tag{6.11}$$

A través de la distancia  $d_0$  es posible determinar la Detección de Cambio de estado, a partir de la potencia de la distribución de la nueva señal, para esto se utilizan las Ecuaciones (6.7) y (6.11). El valor de  $z_1$ , para una distribución normal, esta expresado de acuerdo a la Ecuación (6.12); cuando la muestra es menor a 35 datos, se utiliza la distribución t-student y se reemplaza  $z_1$  por  $t_1$ , resultando la Ecuación (6.13).

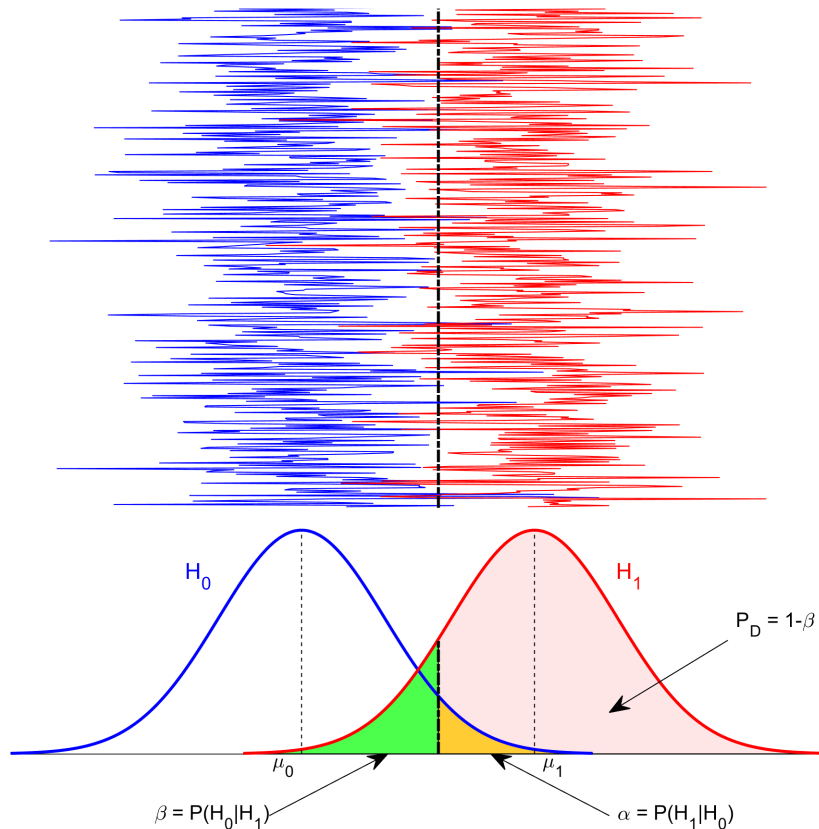


Figura 6.5: *Potencia de Prueba de una Distribución*

$$z_1 = \frac{z_0 \cdot s_0 - d_0 \cdot \sqrt{n}}{s_1}, \tag{6.12}$$

$$t_1 = \frac{t_0 \cdot s_0 - d_0 \cdot \sqrt{n}}{s_1}, \tag{6.13}$$

donde,

- $z_1, t_1$  : es la probabilidad de error tipo II,  $\beta$ .
- $z_0, t_0$  : es la probabilidad de error tipo I,  $\alpha$ .
- $s_0$  : es la desviación estándar de la condición normal,
- $s_1$  : es la desviación estándar de la observación,
- $n$  : es la cantidad de datos de la observación.

A partir de las Ecuaciones (6.12) y (6.13), se determinan las Ecuaciones (6.14), para distribución normal y (6.15), para distribución t-Student; permiten determinar el *tamaño de la muestra* necesaria para alcanzar un nivel de detección específico. La Figura 6.6, muestra que si se define una variación de la condición normal de 5%, para el estadístico de prueba, se necesitan al menos 30 datos para obtener una Potencia de 90%, es decir, que 30 muestras poseen evidencia suficiente para indicar que existe un cambio con un 90% de potencia, estas condiciones asumen que las muestras poseen una distribución t-student:

$$n = \left( \frac{z_0 \cdot s_0 - z_1 \cdot s_1}{d_0} \right)^2, \tag{6.14}$$

$$n = \left( \frac{z_0 \cdot s_0 - z_1 \cdot t_1}{d_0} \right)^2. \tag{6.15}$$

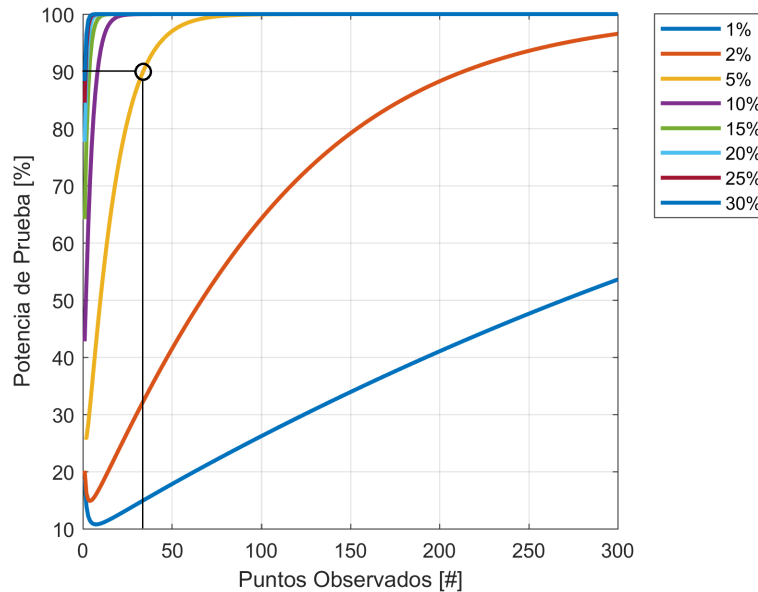


Figura 6.6: Potencia de Prueba de una Distribución para  $\hat{\mu}_0 = 1$ ,  $\hat{s}_0 = 0,1$ ,  $s_1 = 0,1$ , y  $\alpha = 5\%$

Cuando las distribuciones para la condición normal  $H_0$  y/o condición alterna  $H_1$ , no son normales, la metodología para la detección de cambio puede ser aplicada con cautela dado que las distribuciones pueden tener un comportamiento que requiere atención adicional en las colas de la distribución.

### 6.3. Inferencia Bayesiana

El Teorema de Bayes es una combinación de la Ley de Multiplicación<sup>2</sup> y la Ley de Probabilidad Total<sup>3</sup>, de modo que si se conoce la probabilidad  $P(A|B)$ , se puede calcular  $P(B|A)$ . El teorema de Bayes, en forma paramétrica, se expresa como:

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{P(x)} = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{\sum_i f(x|\theta_i)f(\theta_i)}, \quad (6.16)$$

donde:

$\theta$ : es el parámetro sobre el que se realiza la inferencia,

$x$ : es la información disponible,

$P(\theta|x)$ : es la distribución a posteriori,

$P(x|\theta)$ : es la verosimilitud,

$P(\theta)$ : es la información a priori,

$P(x)$ : es el valor de la evidencia.

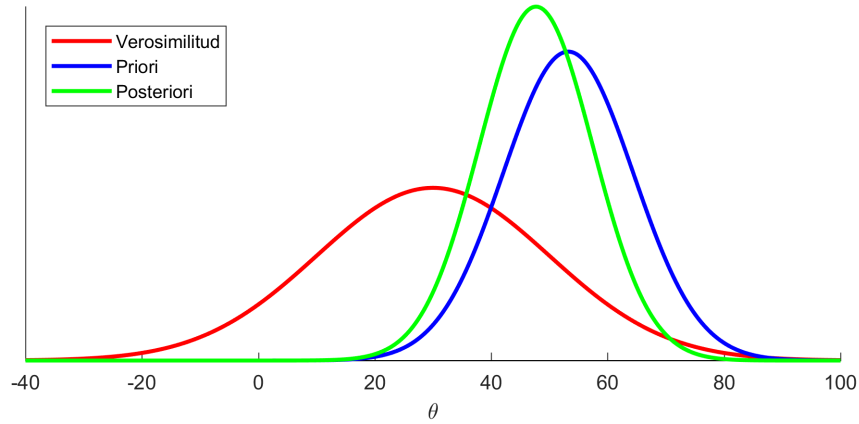
La ecuación (6.16), expresa la combinación óptima de información a-priori  $P(\theta)$  y la información proporcionada por los datos en el contexto de generación de éstos, definido como verosimilitud  $P(x|\theta)$ . La distribución a-posteriori,  $P(\theta|x)$ , es el resultado del proceso de actualización de la distribución a-priori con la verosimilitud, para que la distribución a-posteriori posea las propiedades de una distribución de probabilidad (por ejemplo  $P(\theta|x) = 1$ ), el producto de la verosimilitud y la distribución a-priori es escalado por el valor de la evidencia,  $P(x)$ . Debido a esto y con el objeto de simplificar la Ecuación (6.16), es común expresar la distribución a posteriori como una proporcionalidad de la verosimilitud y la información a priori, expresada como:

$$P(\theta|x) \propto P(x|\theta)P(\theta). \quad (6.17)$$

Las funciones pdf descritas en la Ecuación (6.17) son comparadas en la Figura 6.7; se observa que la incertidumbre de la distribución a-posteriori disminuye con respecto a la condición a-priori debido a que el conocimiento del proceso permite limitar la ubicación y extensión de esta distribución.

<sup>2</sup>La Ley de Multiplicación de Probabilidades establece que la probabilidad de ocurrencia (o intersección) de dos eventos es igual a la multiplicación de la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos. En caso de eventos dependientes se expresa como  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$  (siendo  $A$  dependiente de  $B$ ), mientras que en casos independientes se expresa como  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

<sup>3</sup>La probabilidad de que ocurra un evento  $A$ , sobre un espacio muestral  $\Omega$ , es igual a la suma de todos los eventos  $B$  en los que  $A$  tiene probabilidad de ocurrir; esta probabilidad se calcula sumando las probabilidades conjuntas,  $P(A) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A \cap B_i)$ , aplicando la ley de multiplicación de probabilidades  $P(A) = \sum_{i=1, \dots, n} P(A|B_i)P(B_i)$ .


 Figura 6.7: *Inferencia Bayesiana*

### 6.3.1. Proceso Gaussiano de Generación de Datos

La inferencia Bayesiana definida en el subtítulo anterior, es utilizada para estimar el valor medio de una distribución,  $\hat{\mu}$ , de modo que cualquier modificación de ésta pueda ser evaluado a partir de los datos. Para lograr este fin se asume que los datos poseen una distribución gaussiana<sup>4</sup>. La manera más sencilla de inferir el valor de la media,  $\mu$ , es asumir que la varianza de los datos es conocida<sup>5</sup> [Wilks, 2011]; ya que el caso más general donde el valor medio  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$  del proceso son desconocidos, es más complicado porque la distribución conjunta de ambos parámetros debe ser considerada, incluso cuando éstos son independientes [Wilks, 2011].

Un aspecto a destacar de inferencia Bayesiana para un proceso gaussiano es que todas las distribuciones son gaussianas, esta situación facilita el cálculo, pero dificulta la notación de variables que deben estar bien referenciadas. Considerando esto, la ecuación (6.17), para la determinación del valor medio  $\mu$ , se escribe de la siguiente forma:

$$f(\mu|x) \propto f(x|\mu)f(\mu). \quad (6.18)$$

Considerando que la distribución a priori, distribuye como una gaussiana, se define como:

$$f(\mu) = f(\mu|\mu_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} \right\}, \quad (6.19)$$

donde,

$\mu_0$  y  $\sigma_0^2$ : son la media y desviación estandar de la distribución a priori.

La verosimilitud dada una muestra  $n$  de datos de valores independientes  $x_i$  del proceso es igual a:

<sup>4</sup>La distribución gaussiana debe ser verificada en cada uno de los casos donde se aplique la metodología. Su aplicación en casos en los que la distribución no es gaussiana debe ser considerada con cautela.

<sup>5</sup>Esta suposición puede realizarse considerando que el análisis de datos se realiza con la misma metodología y los equipos utilizados en las mediciones no sufren deterioro o alteraciones durante el proceso de medición.



$$f(\bar{x}|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_*^2/n}} \exp \left\{ \frac{-n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma_*^2} \right\}, \quad (6.20)$$

donde,

$\sigma_*^2$ : es la varianza conocida de los datos generados del proceso,

$n$ : cantidad de datos obtenidos de manera independiente  $x_i$ .

Reemplazando las Ecuaciones (6.19) y (6.20) en (6.18) y realizando operación se obtiene la expresión de la distribución a posteriori:

$$f(\mu|\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left\{ \frac{-(\mu - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (6.21)$$

donde los parámetros de la distribución a posteriori son:

$$\mu_1 = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma_*^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma_*^2}} = \sigma_1^2 \left( \frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma_*^2} \right), \quad (6.22)$$

y la varianza esta definida por la ecuación:

$$\sigma_1^2 = \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma_*^2} \right)^{-1} = \frac{\sigma_0^2 \sigma_*^2}{\sigma_0^2 + n\sigma_*^2}. \quad (6.23)$$

La Ecuación (6.22) muestra que la media a posteriori  $\mu_1$  es un promedio ponderado de la información a priori y la información muestral, con variación en la media muestral a medida que  $n$  aumenta en cantidad. En la expresión (6.23) el valor de la varianza llega a ser generalmente menor que la varianza a priori y la muestral; su valor disminuye conforme la cantidad de datos,  $n$ , aumenta.

## 6.4. Evaluación de Normalidad

Las suposiciones que se realizan para utilizar el test de Hipótesis descrito en el subtítulo 6.2, están hechas en base al supuesto de que la distribución es independiente e idénticamente distribuidas, y cuentan con una distribución normal gaussiana. A pesar de existir muchos métodos que evalúan la distribución de los datos a partir de evaluaciones gráficas y estadísticas en esta sección sólo se evaluarán las siguientes técnicas:

- i. Histograma (gráfico)
- ii. Probabilidad cuantil-cuantil Q-Q plot (gráfico)
- iii. Test Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors (estadístico)

### 6.4.1. Histograma

El histograma es una representación gráfica de la distribución de un conjunto de observaciones y se utiliza para la estimación de la función de densidad de probabilidad ya que muestra la tendencia central, la extensión y la forma general de la distribución de los datos. Las observaciones se dividen en rangos denominados *bins* que son contenedores, donde: i) todos los bins deben ser adyacentes e incluir todos los datos incluso valores atípicos, ii) la altura de cada bin representa el número de observaciones y iii) usualmente tienen el mismo ancho [Eriksson, 2013].

El histograma es una herramienta para muestras grandes. Cuando el tamaño de muestra es pequeño, la forma del histograma puede ser sensible al número de bins, el ancho del bin y, el valor inicial del primer bin y el valor final del último bin; por este motivo los histogramas no deberían usarse con menos de 75 observaciones [Montgomery, 2014].

No existe un número *óptimo* de bins y diferentes tamaños pueden revelar diferentes características de los datos. El uso de bins anchos reduce la dispersión en tramos con densidad baja, y bins estrechos dan mayor precisión en densidades altas. Existen formulaciones teóricas para determinar el número de bins, pero estos métodos suelen hacer fuertes suposiciones sobre la forma de la distribución.

La *Regla de Scott*, considera la elección del ancho óptimo del bin  $h_n$  utilizando una densidad Gaussiana como referencia [Scott, 1979] y requiere sólo el número de muestras y la desviación estándar estimada de la muestra, Ecuación (6.24):

$$h_n = 3,49 \cdot \hat{\sigma} \cdot N^{-1/3}, \quad (6.24)$$

donde,

$h_n$ : Ancho del bin,  
 $\hat{\sigma}$ : Estimación de la desviación,  
 $N$ : Número de observaciones.

La suposición de utilizar densidad Gaussiana en la formulación, conduce a que los valores del ancho del bin  $h_n$  sean generalmente demasiado grandes para modelos de datos no gaussianos [Scott, 1979] y un factor de corrección en base al sesgo o kurtosis puede ser aplicado.

Alternativamente, la *Regla de Freedman y Diaconis*, [Freedman and Diaconis, 1981], es una opción para conocer el ancho de los bins, funciona bien en observaciones donde existe un amplio rango entre los valores máximo y mínimo, y donde los rangos están sesgados hacia uno de los lados, Ecuación (6.25):

$$h = 2 \cdot IQR \cdot N^{-1/3}, \quad (6.25)$$

donde,

$h$ : Ancho del bin.  
 $N$ : Número de observaciones.

*IQR*: Rango intercuartil de la distribución

La Figura 6.8 y Figura 6.9, muestran los histogramas obtenidos para distribuciones normal y log-normal, respectivamente, utilizando la *Regla de Scott* y *Regla de Freedman Diaconis*.

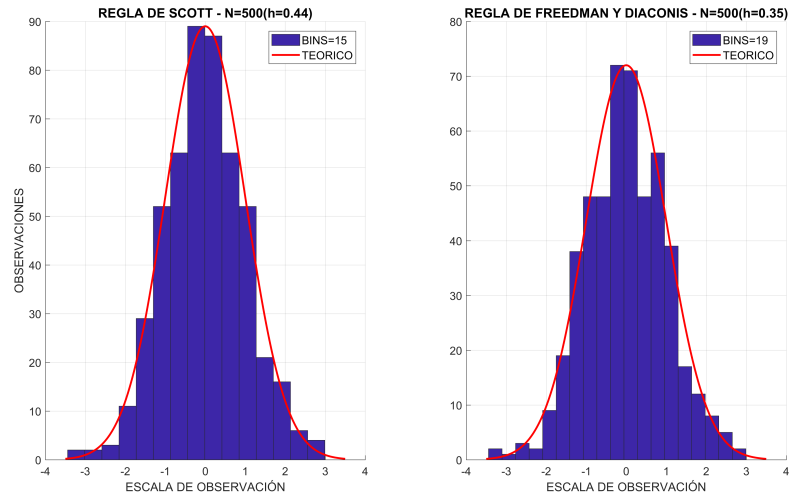


Figura 6.8: *Histograma de 500 Muestras de Distribución Normal Evaluando la Regla de Scott y la Regla de Freedman y Diaconis para Determinar el Ancho del Bin*

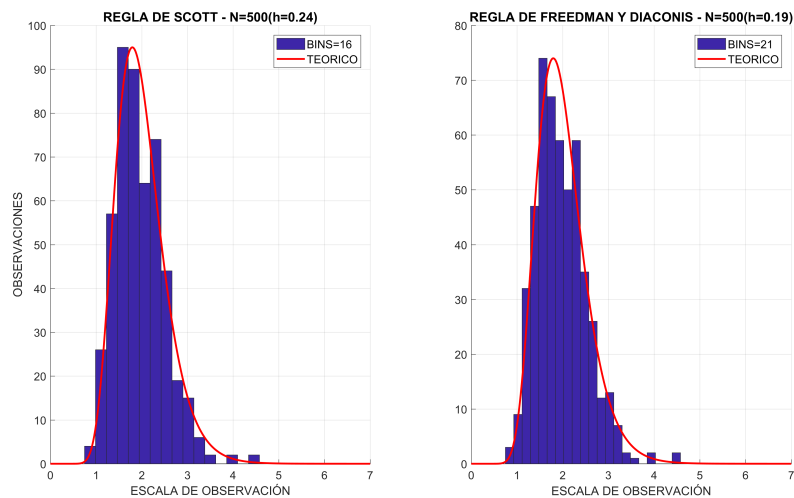


Figura 6.9: *Histograma de 500 muestras de Distribución Lognormal Evaluando la Regla de Scott y la Regla de Freedman y Diaconis para Determinar el Ancho del Bin*

6.4.2. Representación Q-Q

Las representaciones de cuantil-cuantil (Q-Q por sus siglas en inglés) son gráficos estadísticos que muestran los cuantiles esperados de una distribución normal, esperando que sean lineales, cualquier desviación de la linealidad en el gráfico indica que los datos no son normales [Thode, 2002].

Para realizar una gráfica Q-Q se ordenan las observaciones para obtener el estadístico de orden, de la siguiente forma,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ , estos son los cuantiles empíricos utilizados como las ordenadas en la gráfica. La elección de la abscisa de los cuantiles empíricos, es una estimación de la función de distribución acumulada estimada de la distribución (ECDF, por sus siglas en inglés), expresado como:

$$p_i = (i - 0,5)/n, \tag{6.26}$$

donde,

$p_i$ : Función de distribución acumulada empírica,  
 $n$ : Cantidad de datos.

Con estos valores, los pares  $(\Phi^{-1}(p_i), x_i)$ <sup>6</sup> son trazados, cualquier desviación sistemática de la linealidad en una gráfica Q-Q se manifiesta de acuerdo con el tipo de alternativa de la que provienen los datos. La Figura 6.10, muestra cuatro gráficas de 50 variables generadas aleatoriamente utilizando diferentes distribuciones, la ecuación 6.26 fue utilizada como posición de trazado  $p_i$ .

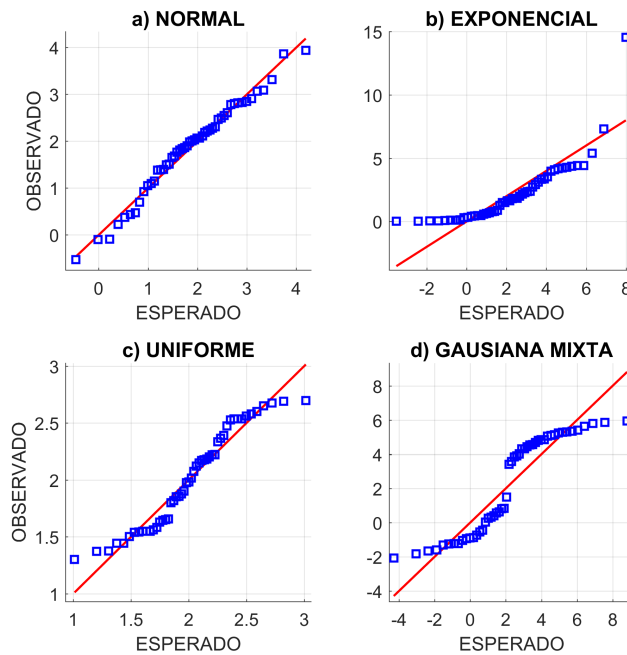


Figura 6.10: Representación Q-Q para 50 Muestras Aleatorias de Distribución a) Normal b) Exponencial c) Uniforme y d) Gaussiana Mixta

<sup>6</sup> $\Phi^{-1}$  es la Función de Distribución Acumulada Inversa, para una distribución normal

- i. Distribución Normal, los datos muestran una tendencia aceptablemente lineal que es continua en toda la figura.
- ii. Distribución Exponencial, los datos muestran un patrón en forma de U, con un claro sesgo hacia la derecha o cóncava hacia abajo.
- iii. Distribución Uniforme, el patrón dominante muestra una forma S, que llega a ser típicamente simétrica en los extremos de la cola y lineal en el centro de los datos.
- iv. Distribución Gaussiana Mixta, muestra que existe un espacio entre dos componentes que tienen cierta linealidad.

### 6.4.3. Test de Kolmogorov-Smirnov

El Test de Kolmogorov-Smirnov es una prueba no paramétrica para determinar si un conjunto de observaciones proviene de una distribución normal. Se basa en la diferencia máxima,  $D$ , entre la función de distribución acumulada estimada,  $F(X)$  (ECDF, por sus siglas en inglés) y la función de distribución acumulada observada de la muestra,  $F_n(X)$  (OCDF, por sus siglas en inglés), Figura 6.11.

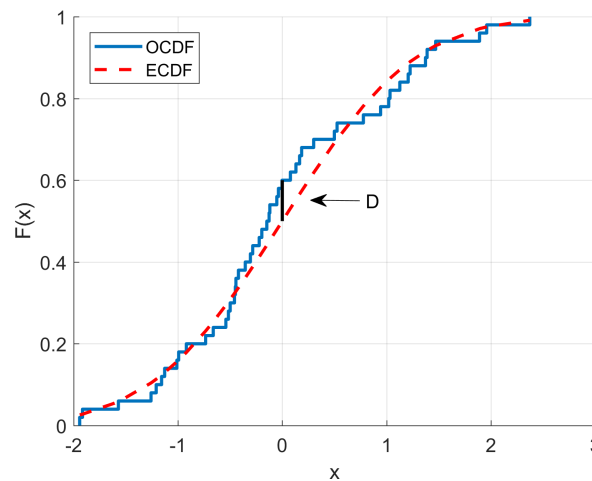


Figura 6.11: Definición del Test de Kolmogorov-Smirnov

Esta definido por las expresiones:

$$D = \max |F(X) - F_n(X)|. \quad (6.27)$$

Con la intención de mejorar el test de Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors [Lilliefors, 1967], propuso una modificación de la prueba aplicable a los casos donde la media y la varianza no son especificados. Para ello se utiliza una tabla para el estadístico de prueba con una distribución normal con media y varianza estimada, definido con la expresión:

$$D = \max |F^*(X) - F_n(X)|, \quad (6.28)$$

donde,

$F^*(X)$ : Es la función de distribución acumulada normal, con media muestral  $\mu = \bar{X}$  y varianza muestral  $\sigma^2 = s^2$ ,

$F_n^*(X)$ : Es la función de distribución acumulada de la muestra.

Si  $D$  excede el valor crítico en la tabla de Lilliefors, la hipótesis nula que las observaciones vienen de una distribución normal es rechazada.

## 6.5. Procedimiento del Algoritmo para Detección de Cambio

Los siguientes pasos permiten realizar el algoritmo para la detección de cambio, considerando variación de la media de una distribución:

- a) Analizar la población de referencia histórica y determinar si posee una distribución gaussiana. Para cumplir con esta condición se utilizan las expresiones descritas en el subtítulo 6.4; evaluando la data con histograma, distribución Q-Q y los Test de Kolmogorov-Smirnov y Lilliefors. En caso que no se cumpla una distribución normal, puede utilizarse esta metodología pero la información obtenida presentará periódicas detecciones de cambio, que no son precisamente reales y corresponden a observaciones no estacionarias. En este punto se determina la condición normal del sistema estableciendo los parámetros de la media  $\mu_0$  y la desviación estándar  $\sigma_0$  de la población observada.
- b) Determinar los parámetros de la condición normal, media,  $\mu_0$  y desviación estándar,  $\sigma_0$ . Al mismo tiempo que debe de asignarse un nivel de significancia de la muestra. En caso de no existir requerimientos explícitos un nivel de significancia de  $\alpha = 0,05$ , equivalente al 5% de falsas alarmas es un buen estimador. Por último debe definirse un umbral porcentual de la Potencia de Prueba, por sobre el cual se considera que el sistema presenta cambio. Preliminarmente puede definirse un valor de 99%.
- c) Con la información de b), es posible obtener la región de aceptación de la distribución en condición normal, para dos extremos, definidos como Límite de Control Superior (UCL), y Límite de Control Inferior (LCL); expresado como  $z_{\alpha/2}$  y  $-z_{\alpha/2}$ , respectivamente, en la Figura 6.4, para el caso de distribuciones de dos extremos.
- d) Determinar la cantidad de puntos de observación,  $N_{obs}$ ; esta cantidad se puede determinar preliminarmente con ayuda de la Figura 6.6. Considerando que el sistema puede estar expuesto a varios factores de anomalías como: cambio de rigidez, cambio de masa, variaciones en temperatura, humedad, viento, radiación, etc. puede ser posible definir una cantidad de datos  $N_{obs}$  mayor. Conforme mayor sea el valor de  $N_{obs}$ , la detección de cambio tiene un retraso en su emisión, pero existe una mayor certeza de cambio en el sistema.
- e) Establecer la cantidad de puntos de cambio necesarios para establecer un cambio de estado,  $N_{change}$ ; es decir, cuando la Potencia de Prueba se mantiene por sobre un umbral por  $N_{change}$  veces, se asume que existe un cambio en el sistema y se deben estimar los nuevos valores de  $\hat{x}_1$  y  $\hat{s}_1$ , correspondientes al nuevo estado. Estos valores son preliminares y requieren de un estudio detallado para su definición final.

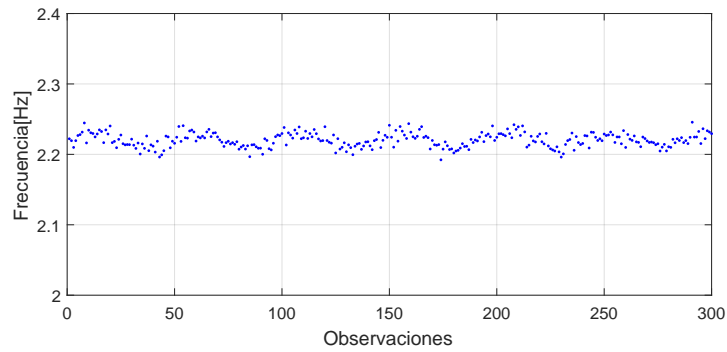
- f) Con los datos de a), b), c), d), y e), se inicia el proceso iterativo, la información muestral que debe ser evaluada, considera que los datos llegan de manera secuencial; con esta información se determinan los parámetros muestrales  $\bar{x}_1$  y  $s_1$ .
- g) Con la información de la condición normal,  $\mu_0$  y  $\sigma_0$ , y la observación  $\bar{x}_1$  y  $s_1$ , se determina el valor de la condición media y desviación estándar a posteriori haciendo uso de las Ecuaciones (6.22) y (6.23).
- h) Con los parámetros de la distribución a posteriori,  $\mu_1$  y  $\sigma_1$  se determina el porcentaje de cambio (Potencia de Prueba), utilizando la función de una distribución acumulada t-student cuando se tiene menos de 35 datos y distribución normal cuando se tienen más de 36 datos.
- i) Si el valor del porcentaje de cambio supera el umbral fijado, un contador empieza a registrar esta información; cuando el contador supera el valor de  $N_{change}$  observaciones de manera continua, el algoritmo considera que existe un cambio, genera una alerta y determina preliminarmente los valores de la condición nueva en el sistema a partir de la media  $\mu_1$  y la desviación estándar  $\sigma_1$ , que se determinan con los últimos  $N_{change}$  registros, luego se hace el cambio de variable  $\mu_0 = \mu_1$  y  $\sigma_0 = \sigma_1$  y el contador vuelve a cero. Los efectos ambientales en las propiedades modales de la estructura son evaluados al considerar la ventana móvil de observación, de modo que cualquier variación de la media móvil sea considerado en cada evaluación de cambio de estado.
- j) El proceso se repite de manera iterativa desde el índice f).

## 6.6. Aplicación

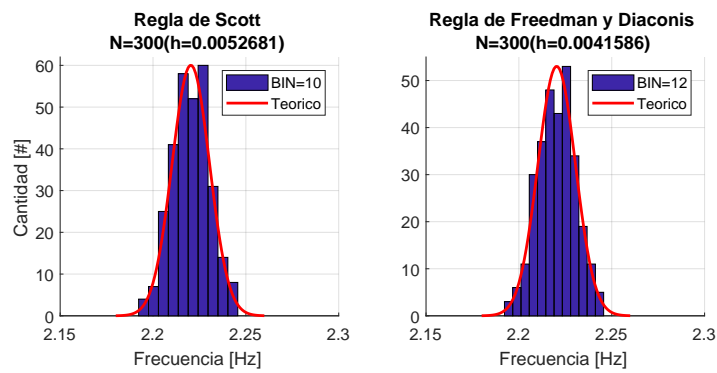
La aplicación del algoritmo considera dos señales: i) una señal senosoidal perturbada con ruido gaussiano y ii) las señales correspondientes a frecuencias operacionales observadas en la Torre Central de la FCFM antes y después del sismo del Maule del 27 de febrero de 2010. Ambas señales muestran un cambio de estado caracterizado por un salto o escalonamiento de la señal en un punto determinado. Para todas las condiciones observadas, se asume un coeficiente de significancia de  $\alpha = 5\%$ .

### 6.6.1. Señal Senosoidal

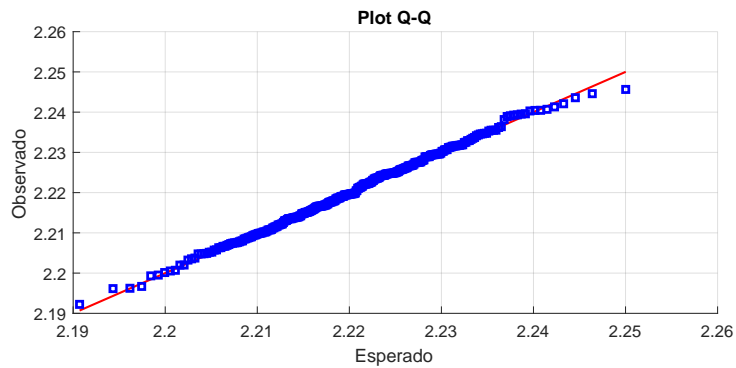
Se genera una señal senoidal con un valor medio inicial de  $\mu_0 = 2,22Hz$ , a esta señal se aplica una perturbación con ruido normal (con desviación estándar de  $\sigma = 0,010$ ), Figura 6.12(a). A la señal generada se aplica el análisis de histograma, Figura 6.12(b); representación Q-Q, Figura 6.12(c) y, el test de Kolmogorov-Smirnov y test Lilliefors, Figura 6.12(d). La evaluación de la señal, muestra que tiene una *distribución normal*, esto se debe a que la convolución de la señal senoidal y el ruido normal presentan una distribución normal leptocúrtica, que se observa en la Figura 6.12(b), dada esta situación, la detección puede realizarse sin inconvenientes.



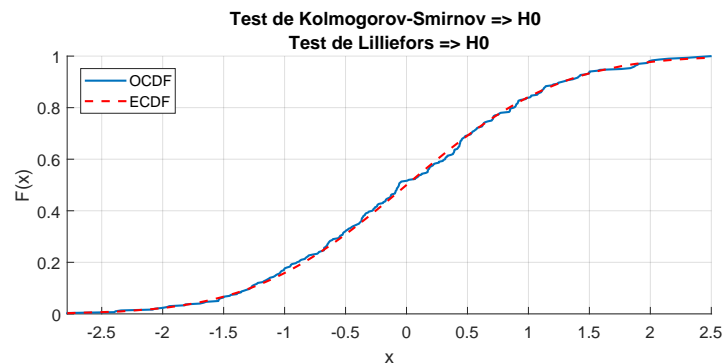
(a) Señal senoidal generada



(b) Análisis con histograma de la señal



(c) Análisis de representación Q-Q



(d) Análisis de sensibilidad Kolmogorov-Smirnov y Lilliefors

Figura 6.12: Análisis de la Señal en <sup>155</sup>Condición Normal, Previo al Cambio



La señal construida con cambio de estado, en puntos azules de la Figura 6.13, muestra que después de la observación 300 existe un cambio en la señal, equivalente a una reducción del 1,30 % de  $\mu_0$ , y continua estable hasta la observación 710. Para la detección de cambio, se considera que:

- La desviación estándar muestral se determina tomando al menos siete períodos completos de la condición normal, para éste ejemplo se considera un valor de  $s = 0,01$ .
- El valor de la media muestral se determina de la misma forma que la desviación estándar, para este caso se considera un valor de  $\bar{x} = 2,22$ .
- La cantidad de puntos de observación es igual a  $N_{obs} = 20$ .
- La cantidad de puntos de para cambio de estado es igual a  $N_{change} = 20$ .
- El umbral de alerta, y nivel de significancia, es igual a  $\alpha = 5 \%$ , que esta entre  $1,5\sigma\alpha = 6,68 \%$  y  $2\sigma\alpha = 2,28 \%$ .
- El umbral de alarma, es igual a  $3\sigma$  de la distribución a posteriori, equivalente a  $\alpha = 0,13 \%$ .
- El Umbral de Potencia de Prueba igual a 99 %.

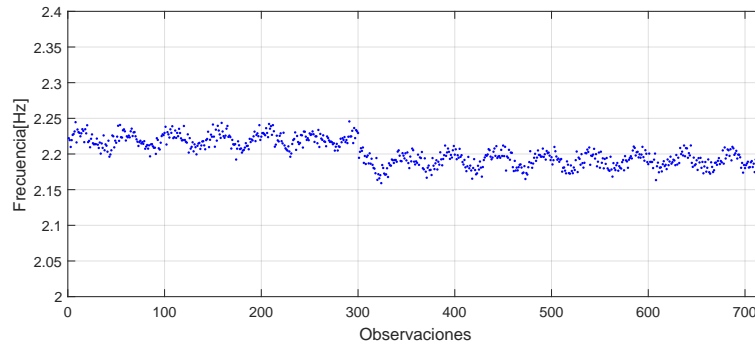


Figura 6.13: Señal con Cambio de Estado

La Figura 6.14 (a), muestra la aplicación del algoritmo con la siguiente descripción: los puntos negros corresponden a las observaciones de la señal construida en la Figura 6.13, la línea continua color azul es el promedio de la ventana móvil de los  $N_{obs}$  puntos de observación; la línea continua amarilla corresponde al límite de alerta, la línea continua roja es el límite de alarma, la línea vertical color negro es el punto donde se define como cambio de estado para el sistema; a continuación de la línea de cambio de estado, todas las siguientes muestras presentan un relleno color rosa para el resto de las observación para una fácil visualización de cambio.

La Figura 6.14 (b), muestra la detección de cambio como un porcentaje de detección (potencial de prueba) en puntos color azul, cuando se produce el cambio despues de la observación 300, se aprecia un crecimiento progresivo de la detección de cambio hasta estabilizarse en un valor superior al 99 %, cuyos puntos tiene un color rojo; luego de mantenerse la señal constante por  $N_{change}$  observaciones, el algoritmo reconoce un cambio en el valor medio de las nuevas observaciones y

define un cambio de estado en el sistema, que corresponde al primer punto donde se observa el valor superior al potencial de prueba de 99 %. posterior a la detección de cambio el porcentaje de detección baja nuevamente hasta valores que son inferiores al 1 % para el resto de la señal.

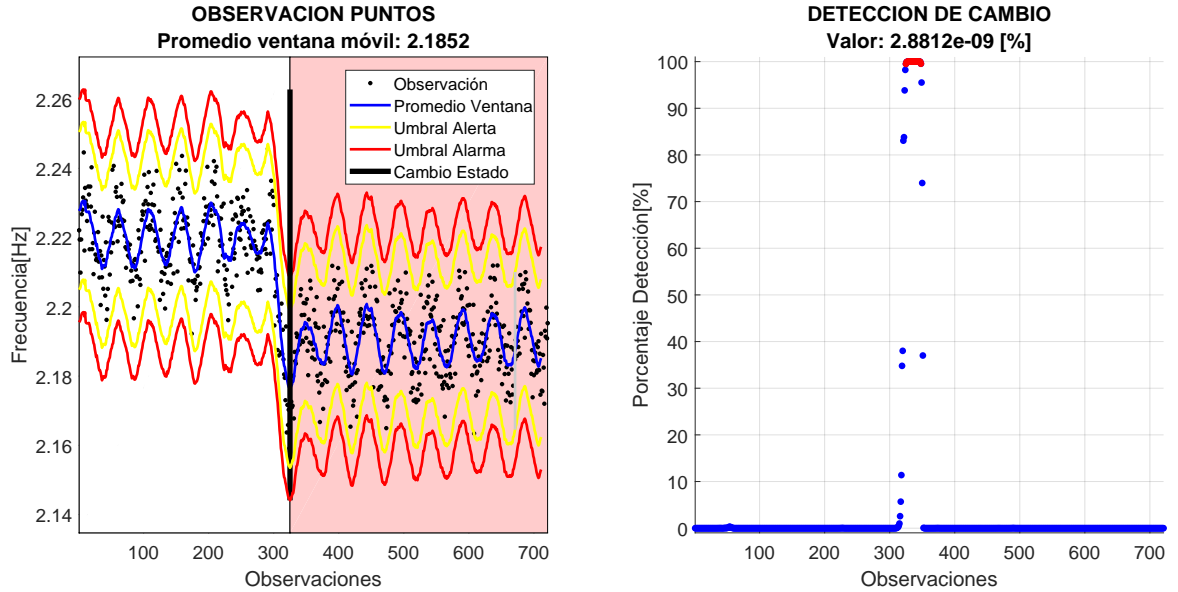


Figura 6.14: *Detección de Cambio para Funcion Senosoidal con Aplicación de Ruido  $s = 0,010$*

Para considerar la variación de las estadísticas de detección al cambiar el umbral previamente fijado (nivel de significancia de  $\alpha = 5\%$ ) se utiliza la Curva de Características Operativas del Receptor (ROC, por sus siglas en inglés), así como el área bajo la curva del ROC (AUC, por sus siglas en inglés). El análisis ROC está descrito en forma breve en el Anexo G de esta tesis.

Cuando existe una variación en el umbral de detección, definido como el nivel de significancia, las estadísticas de detección cambian, es decir, que existe una mayor o menor probabilidad de detectar valores que corresponden a Verdaderos Aciertos. Para comparar esta variación se utiliza el valor del área bajo la curva AUC, ya que el AUC de un clasificador es equivalente a la probabilidad de clasificar una prueba o evaluación como positiva elegida al azar, más alta que una prueba negativa elegida al azar.

Considerando el párrafo anterior, la Figura 6.15 muestra los puntos construidos con  $N_{Obs} = 20$ , para niveles de significancia de:  $1\sigma$ ,  $1,5\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $2,5\sigma$  y  $3\sigma$ ; equivalentes a los siguientes niveles de significancia:  $\alpha_{1\sigma} = 15,87\%$ ,  $\alpha_{1,5\sigma} = 6,68\%$ ,  $\alpha_{2\sigma} = 2,28\%$ ,  $\alpha_{2,5\sigma} = 0,62\%$  y  $\alpha_{3\sigma} = 0,13\%$ . En el lado derecho de la Figura 6.15 se observa que los umbrales comprendidos entre  $1,5\sigma$  ( $\alpha = 6,68\%$ ) y  $2\sigma$  ( $\alpha = 2,28\%$ ), tienen las mayores áreas bajo la curva  $AUC = 0,91$ , por lo que, la detección de cambio en el umbral definido en un nivel de significancia de  $\alpha = 5\%$  es adecuado para el análisis realizado, al poseer la mayor probabilidad de clasificación positiva.

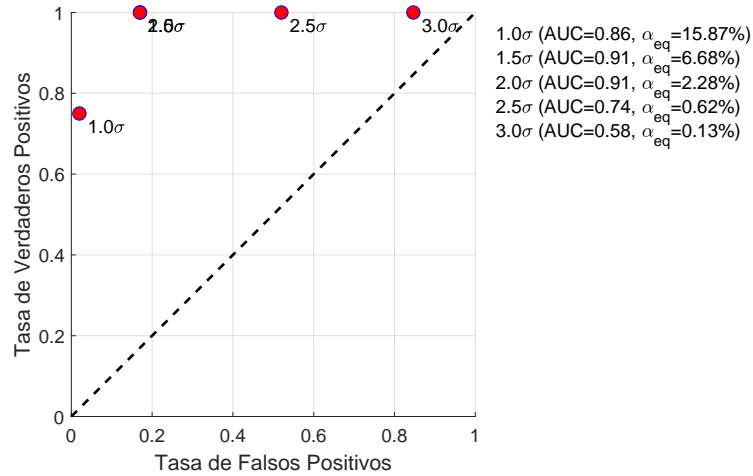


Figura 6.15: Curva ROC para Detección de Cambio observada considerando  $N_{Obs} = 20$

### 6.6.2. Mediciones en Torre Central FCFM

El edificio de la Torre Central de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas está estructurado con muros y losas de hormigón armado, tiene 9 niveles y 2 subterráneos. Después del terremoto del Maule del 27 de febrero de 2010, la estructura sufrió un cambio de estado presente en todas las frecuencias globales de la estructura; la Figura 6.16, muestra el cambio en las primeras nueve frecuencias observadas entre 1 Hz y 10 Hz. La separación de modos identificados en la estructura se obtiene a partir de la metodología propuesta en la tesis de Wladimir Gonzalez.

En este subtítulo se aplica el análisis de detección de cambio a las nueve frecuencias observadas de manera separada. Se considera toda la data disponible y procesada de la estructura, entre el 07 de abril de 2009 y el 27 de diciembre de 2016. En este periodo se registraron dos terremotos importantes: el 27 de febrero de 2010 (Terremoto del Maule, 8.8 Mw) y el 16 de septiembre de 2016 (Terremoto de Illapel, 8.3 Mw).

La detección de cambio se realiza considerando los siguientes parámetros:

- i) La cantidad de puntos de observación  $N_{obs}$ , es igual a la cantidad de puntos de cambio  $N_{change}$ ,
  - ii) Se evalúa el efecto de considerar ventanas de puntos de observación,  $N_{obs}$ , de diferente tamaño: 3, 5, 10, 15, 20, 30, 40 y 50 observaciones,
  - iii) El umbral de Potencia de Prueba es igual a 99%,
  - iv) La media y la desviación estándar muestral se determinan considerando la variación diaria del sistema por al menos 7 días, en los días de mayor gradiente térmico, de esta forma se considera la mayor variabilidad en la distribución del sistema,
  - v) El umbral de alerta (nivel de significancia), es igual a  $\alpha = 5\%$  de la distribución a posteriori,
- y

- vi) El umbral de alarma, es igual a  $3\sigma$  de la distribución a posteriori, equivalente a 0,13 % de nivel de significancia.

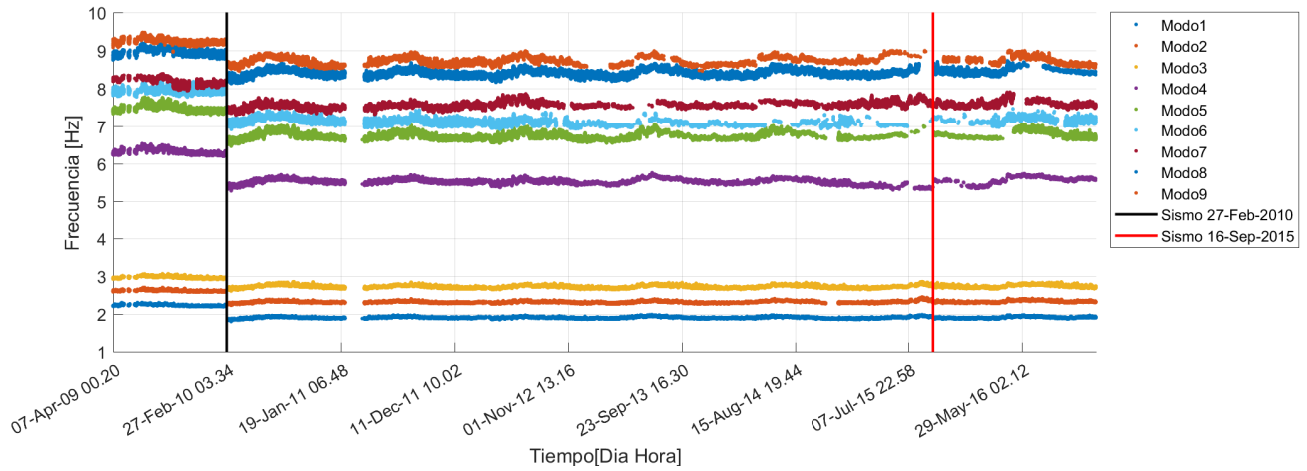
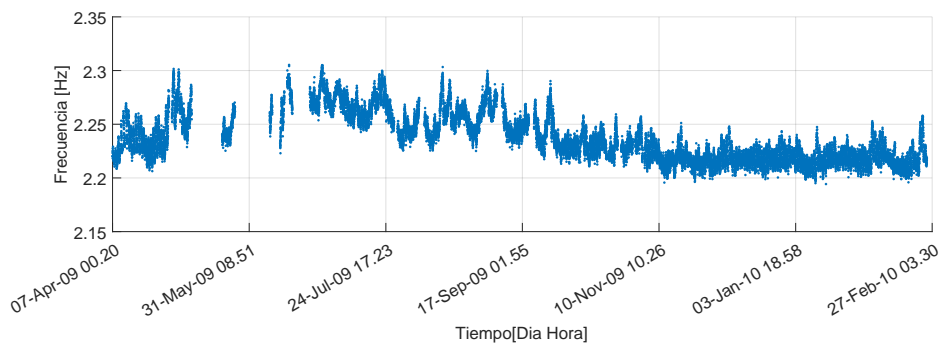


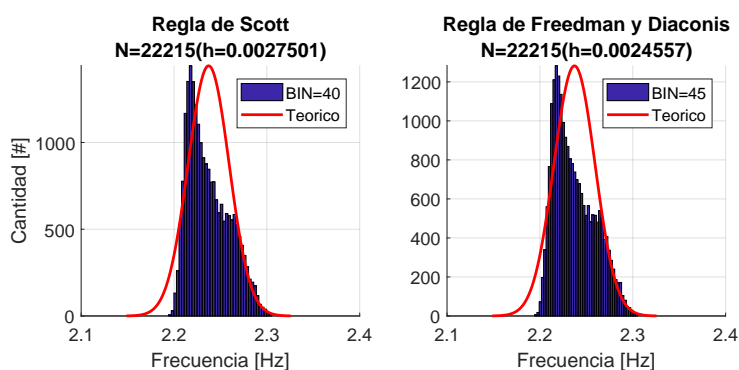
Figura 6.16: *Cambio de Estado Observado en Torre Central*

### Primera Frecuencia Observada

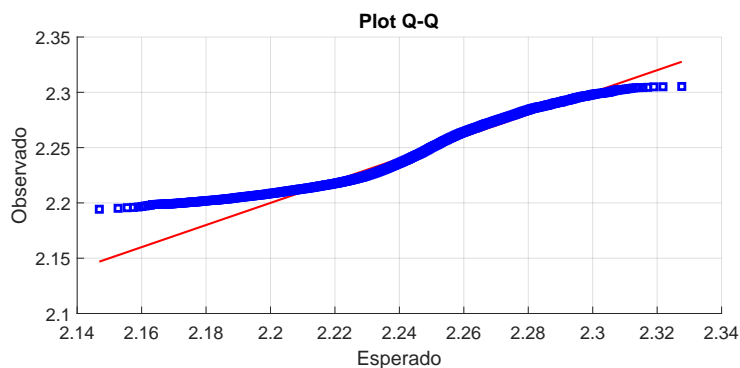
La primera frecuencia observada, en su condición normal tiene un rango entre 2.19 Hz y 2.31 Hz, Figura 6.17 (a). En la señal existe oscilación entre el día y la noche, y por cambio de estación, que se debe principalmente a la variación de masa, temperatura y humedad. Del análisis estadístico realizado se considera un valor *a priori* para la media de  $\bar{x} = 2,25$  y desviación estándar de  $s = 0,021$ .



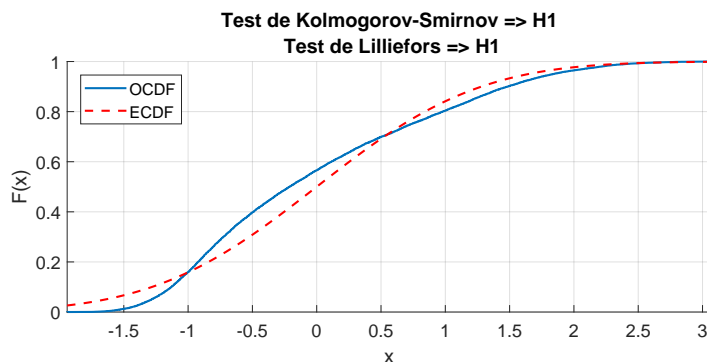
(a) Primera frecuencia observada entre 2.19 Hz y 2.31 Hz



(b) Histograma de la serie de frecuencias



(c) Representación Q-Q



(d) Test de Kolmogorov-Smirnov y Test Lilliefors

Figura 6.17: Evaluación de Normalidad de la Primera Frecuencia Observada

El histograma de la señal no tiene la forma de una distribución normal, Figura 6.17(b), debido a un cambio estacional en el registro entre abril y noviembre; esto se verifica en la representación Q-Q al observar una curva en forma de S, Figura 6.17(c); finalmente el análisis con Test de Kolmogorov-Smirnov y Test Lilliefors ratifica numéricamente que la señal no tiene una distribución normal, Figura 6.17(d).

En las Figuras 6.18 a 6.25, se muestra la detección de cambio para diferentes ventanas de observación indicadas en el índice ii) de la sección anterior. De los resultados obtenidos se observa que todas las ventanas de observación detectan el cambio de estado debido al terremoto del Maule de 2010. Adicional al cambio de estado, se observa también la presencia de sectores de alerta, y corresponde a una zona con interrupción en el monitoreo de la estructura, cuya variación en la magnitud de frecuencias se debe a la diferencia entre el momento de corte y la restitución del servicio, presentando un escalón en la medición. Esta condición puede generar mensajes de alerta en el sistema, pero al no ser permanente no se considera como un cambio de estado en el sistema.

En la Figura 6.18, la elección de una ventana de 3 observaciones, detecta de forma adecuada el cambio de estado para el terremoto del 27 de febrero de 2010, y posee porcentajes de detección que varían entre 1 % y 10 % para todo el período evaluado y cuyo valor máximo no supera el 40 %. Estas ligeras variaciones se deben a que una ventana de 3 observaciones es sensible a la detección debido a que un valor atípico cambia fácilmente el valor de la media móvil.

La Figura 6.19, considera una ventana móvil de 5 observaciones, la variación de los porcentajes de detección en el período evaluado no supera el 1 %, el comportamiento de las mayores detecciones se ubica en los mismos sectores observados en la Figura 6.18, con 3 observadores; aunque sus porcentajes de detección son menores en un 50 %.

La Figura 6.20, considera 10 observadores, y muestra la presencia de un sector en condición de alerta previo al terremoto del 27 de febrero de 2010, esta condición no es evidente en las Figuras 6.19 y 6.20, y corresponde a una zona con interrupción en el monitoreo de la estructura, cuya variación de frecuencias entre el momento de corte y la restitución del servicio presentan un escalón en la medición. Esta condición genera alerta en el sistema para los observadores, pero al no ser permanente no se considera como un cambio de estado.

La Figura 6.21, considera 15 observadores y presenta un comportamiento similar al observado en la Figura 6.20, con 10 observadores.

La Figura 6.22, considera 20 observadores en su análisis, además de tener un comportamiento similar a las Figuras 6.20 y 6.21, presenta también dos anomalías entre el 22 de enero de 2015 y el 27 de diciembre de 2016, con un porcentaje de detección inferior a un 80 %. Estas también se deben a que existe una interrupción durante las mediciones en la estructura.

Las Figuras 6.23, con 30 observaciones presenta una detección de alertas en los puntos donde se realiza la interrupción del servicio de medición. La detección de cambio de estado se realiza de manera adecuada.

Resultados similares se muestran en las Figuras 6.24 y 6.25, corresponden a 40 y 50 observaciones. En ellas se observa una adecuada detección de cambio de estado y la presencia de alertas en el sistema producto de cortes de servicio durante el monitoreo.

Las curvas ROC correspondientes a las Figuras 6.18 a 6.25, se muestran en el Anexo G de esta tesis. Los valores obtenidos para el cambio de estado observado indican que el umbral del valor de significancia seleccionado  $\sigma = 5\%$ , tiene valores de AUC superiores a 0,90, por lo que es adecuado para una clasificación con probabilidad de detección positiva.

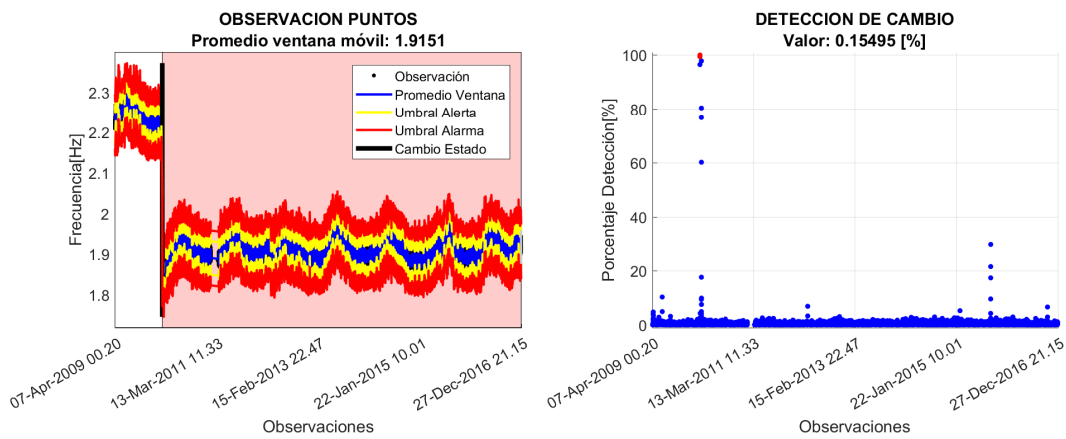


Figura 6.18: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 3 Observaciones*

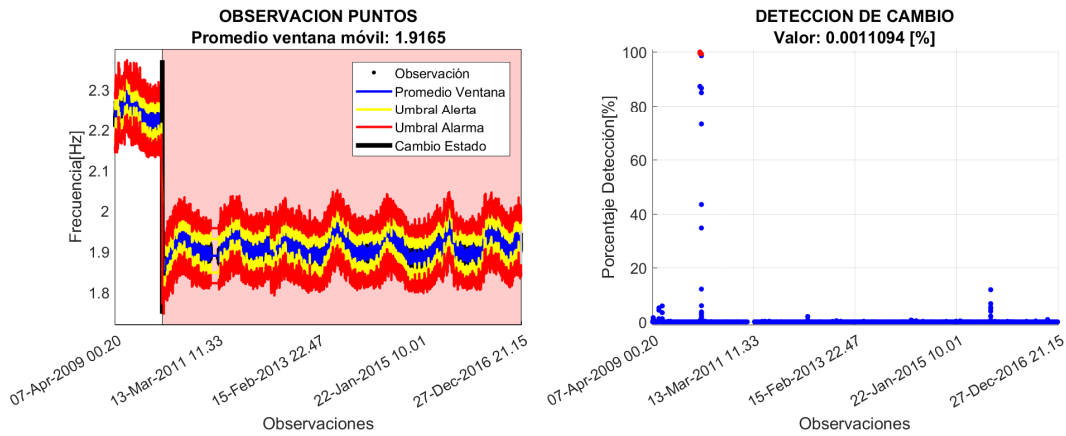


Figura 6.19: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 5 Observaciones*

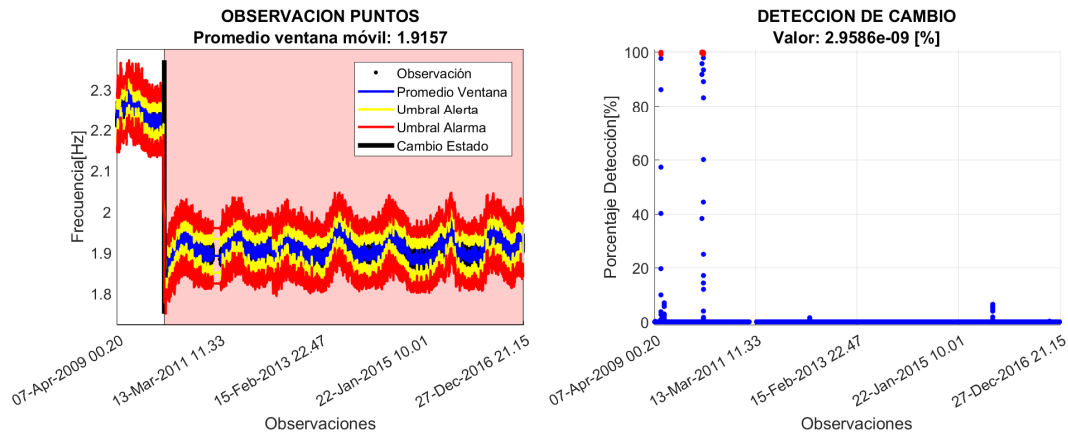


Figura 6.20: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 10 Observaciones*

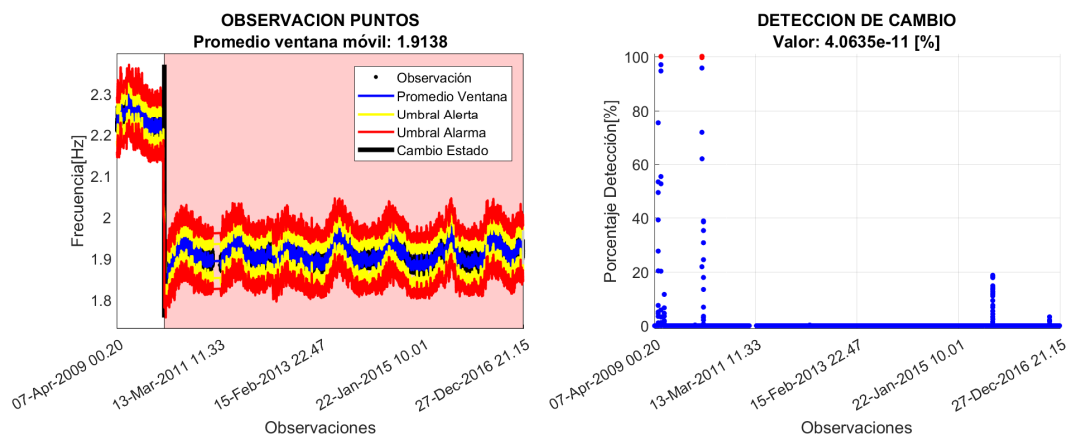


Figura 6.21: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 15 Observaciones*

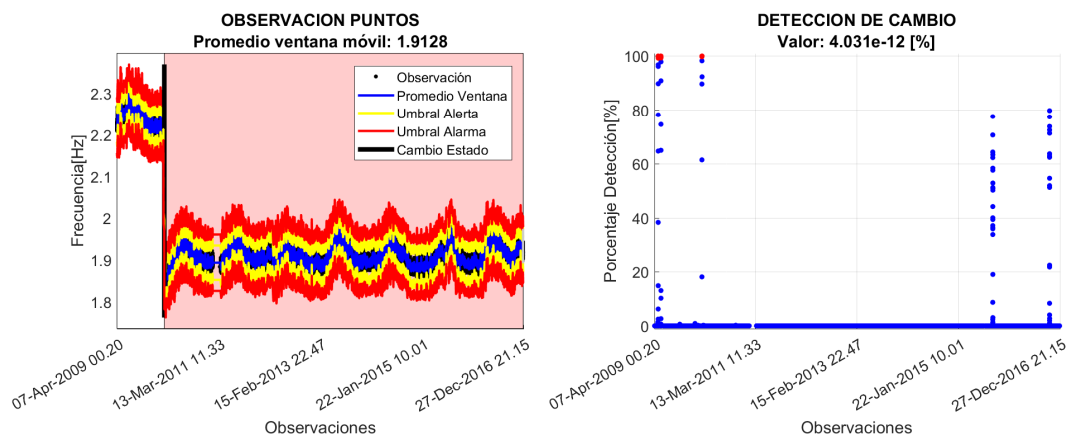


Figura 6.22: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 20 Observaciones*



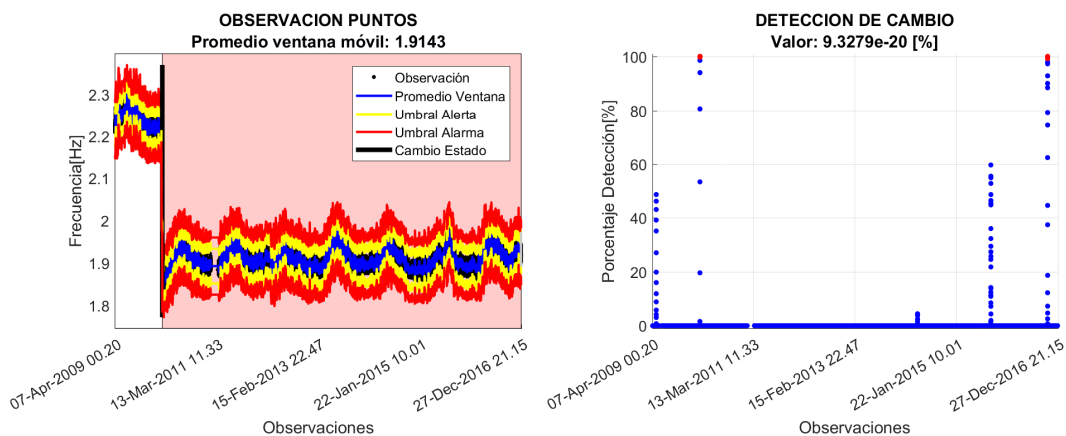


Figura 6.23: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 30 Observaciones*

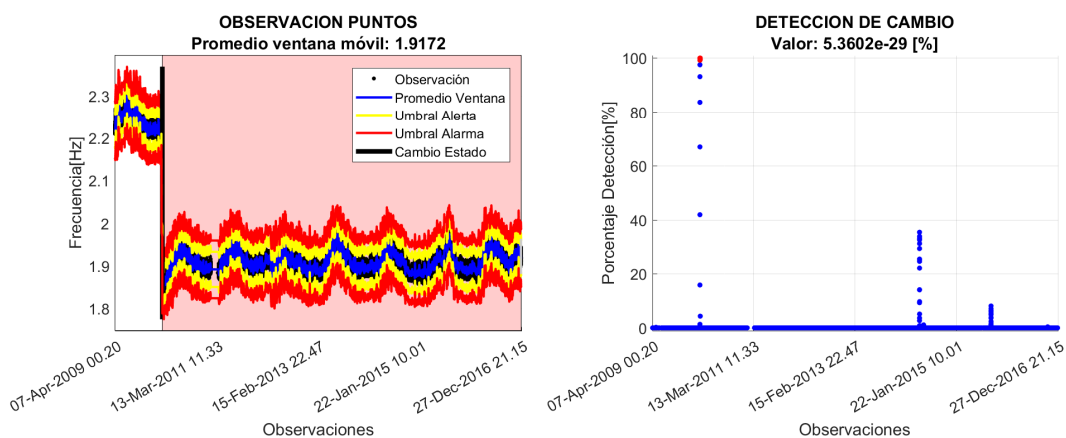


Figura 6.24: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 40 Observaciones*

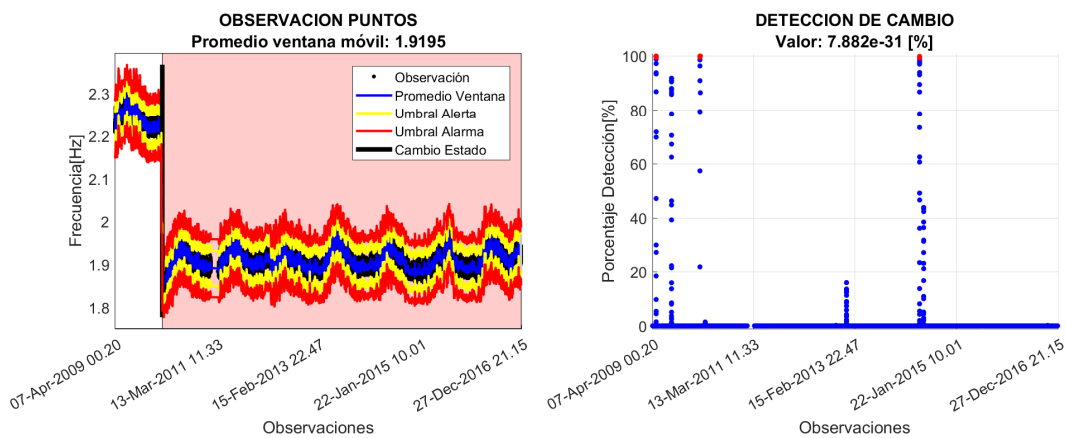


Figura 6.25: *Detección de Cambio para la Primera Frecuencia, Considerando 50 Observaciones*

Por los resultados obtenidos se considera que en las detecciones de cambio de las siguientes frecuencias observadas, solo se mostrarán los resultados correspondientes a una ventana de 10 observaciones; ya que éste tamaño es sensible a la presencia de alerta por corte en el servicio.

### Segunda Frecuencia Observada

La segunda frecuencia observada tiene un rango, entre 2.58 Hz y 2.71 Hz, antes del sismo, Figura 6.26. En la señal existen oscilaciones entre el día y la noche, y variaciones estacionarias, que son similares a lo observado en la primera frecuencia. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 2,63$  y una desviación estandar de  $s = 0,0198$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.27.

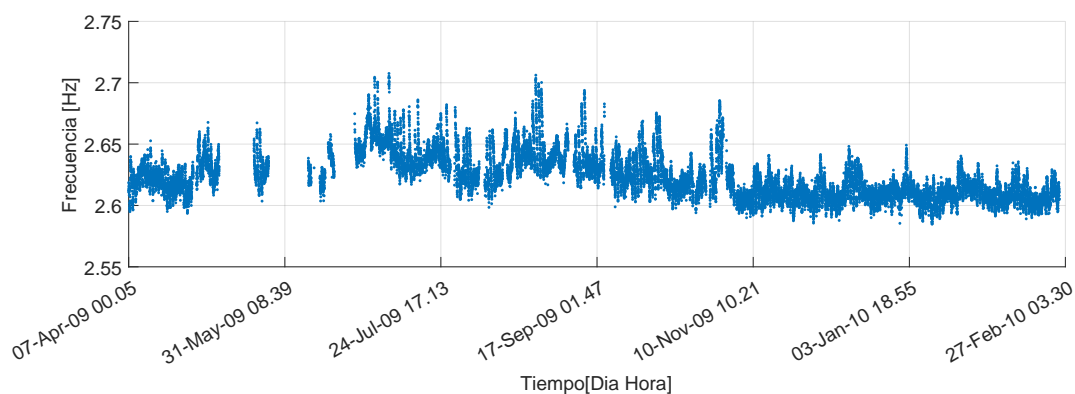


Figura 6.26: Segunda Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 2.58 Hz y 2.71 Hz

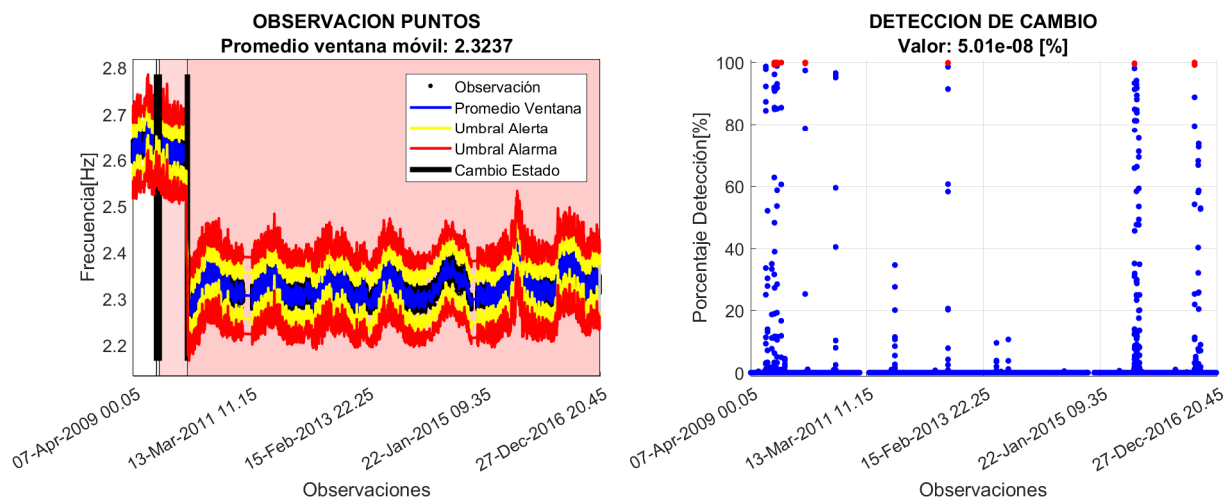


Figura 6.27: Detección de Cambio para la Segunda Frecuencia

### Tercera Frecuencia Observada

La tercera frecuencia observada tiene un rango, entre 2.93 Hz y 3.08 Hz, antes del sismo, Figura 6.28, existiendo varios cortes de servicio entre mayo y junio de 2010. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 2,99$  y una desviación estandar de  $s = 0,0198$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.29.

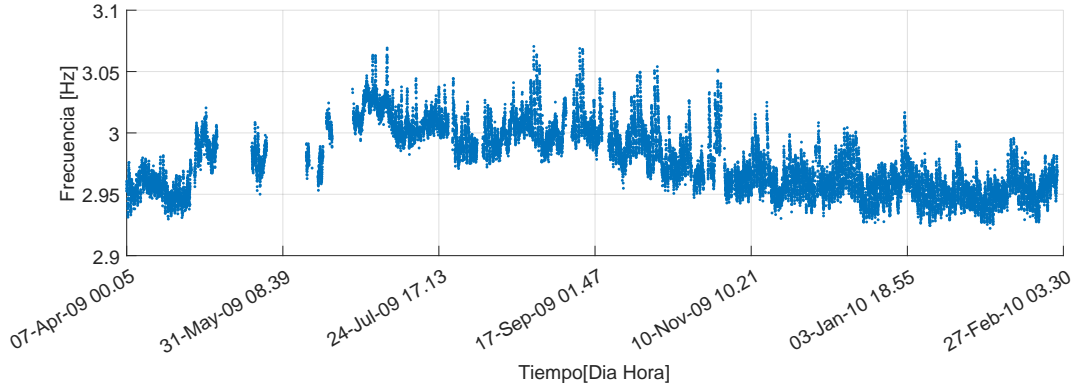


Figura 6.28: Tercera Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 2.93 Hz y 3.08 Hz

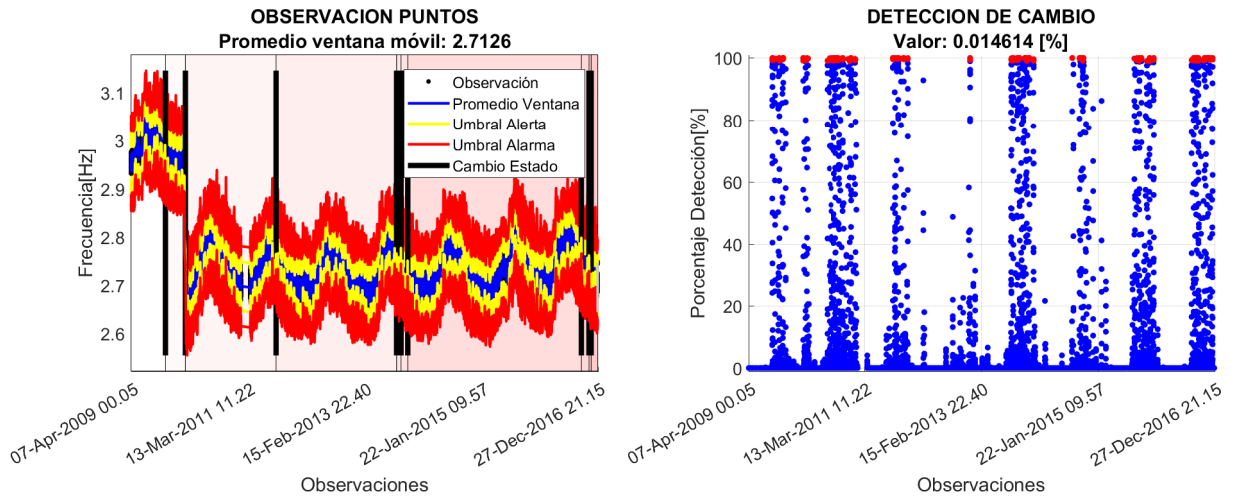


Figura 6.29: Detección de Cambio para la Tercera Frecuencia

### Cuarta Frecuencia Observada

La cuarta frecuencia observada tiene un rango, entre 6.19 Hz y 6.52 Hz, antes del sismo, Figura 6.30. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 6,35$  y una desviación estandar de  $s = 0,0378$ . La detección de cambio se observa en la Figura 6.31.

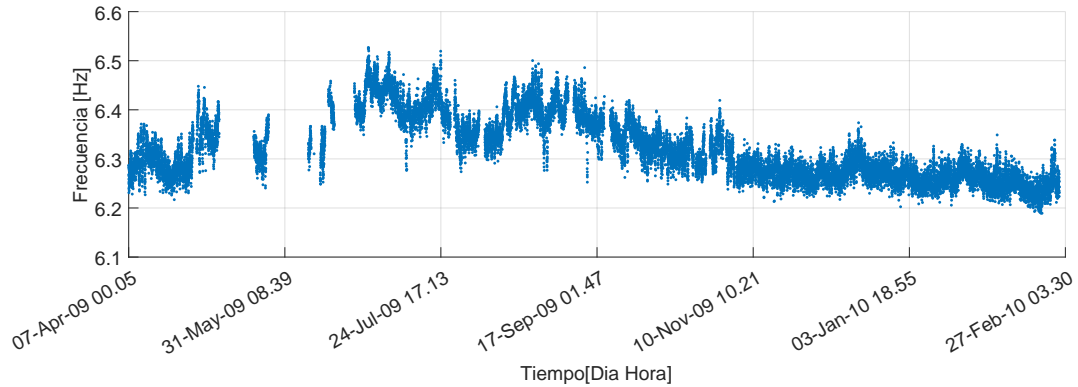


Figura 6.30: Cuarta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 6.19 Hz y 6.52 Hz

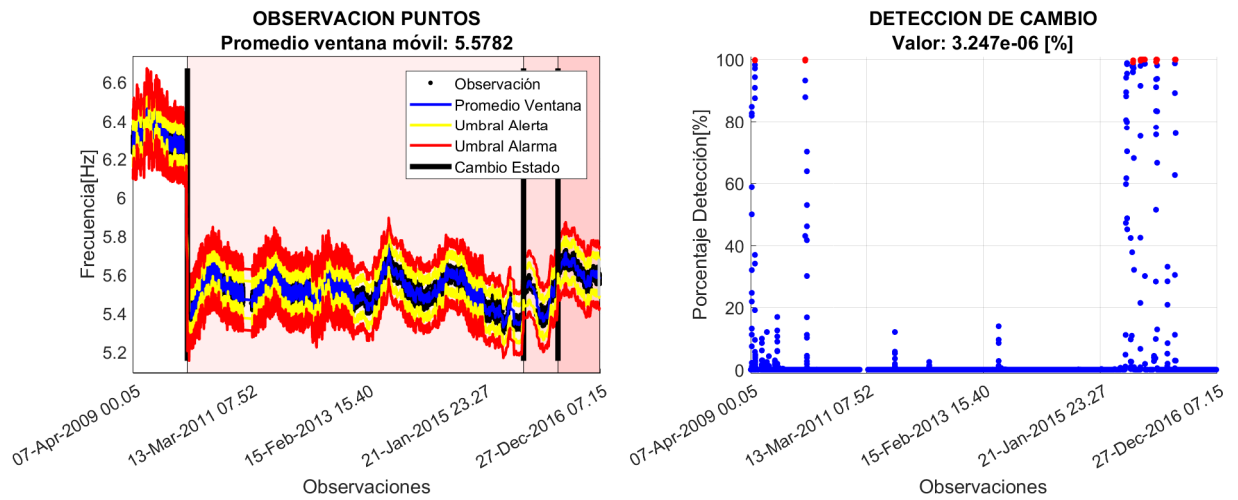


Figura 6.31: Detección de Cambio para la Cuarta Frecuencia

### Quinta Frecuencia Observada

La quinta frecuencia observada tiene un rango, entre 7.30 Hz y 7.78 Hz, antes del sismo, Figura 6.32. En esta frecuencia, la variación de la señal entre el día y noche es menos evidente. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 7,49$  y una desviación estandar de  $s = 0,0640$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.33.

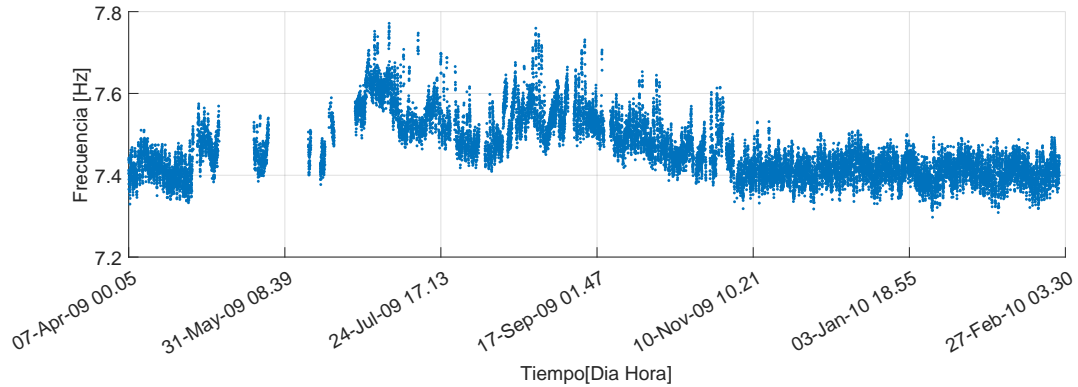


Figura 6.32: Quinta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.30 Hz y 7.78 Hz

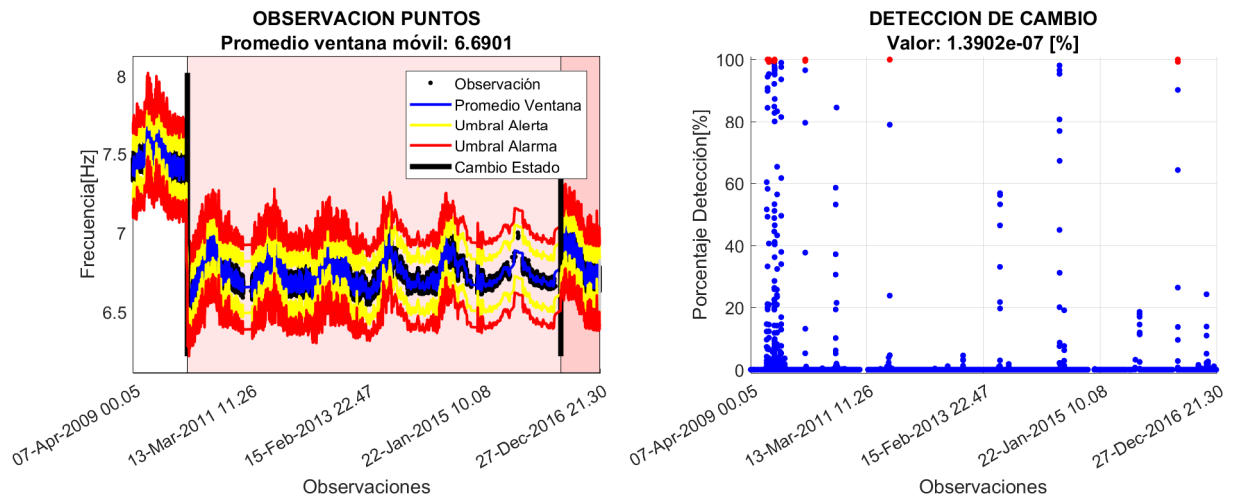


Figura 6.33: Detección de Cambio para la Quinta Frecuencia

### Sexta Frecuencia Observada

La sexta frecuencia observada tiene un rango, entre 7.78 Hz y 8.21 Hz, antes del sismo, Figura 6.34. En esta frecuencia, la variación de la señal entre el día y noche es menos evidente. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 7,93$  y una desviación estandar de  $s = 0,0556$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.35.

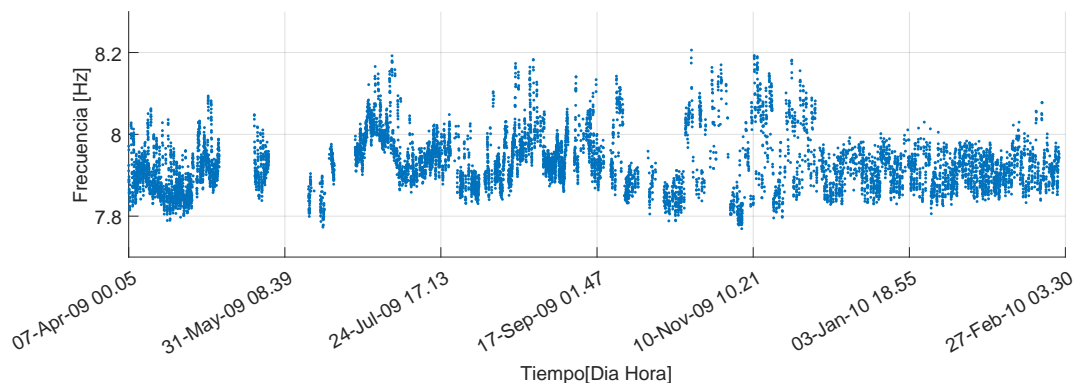


Figura 6.34: *Sexta Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.78 Hz y 8.21 Hz*

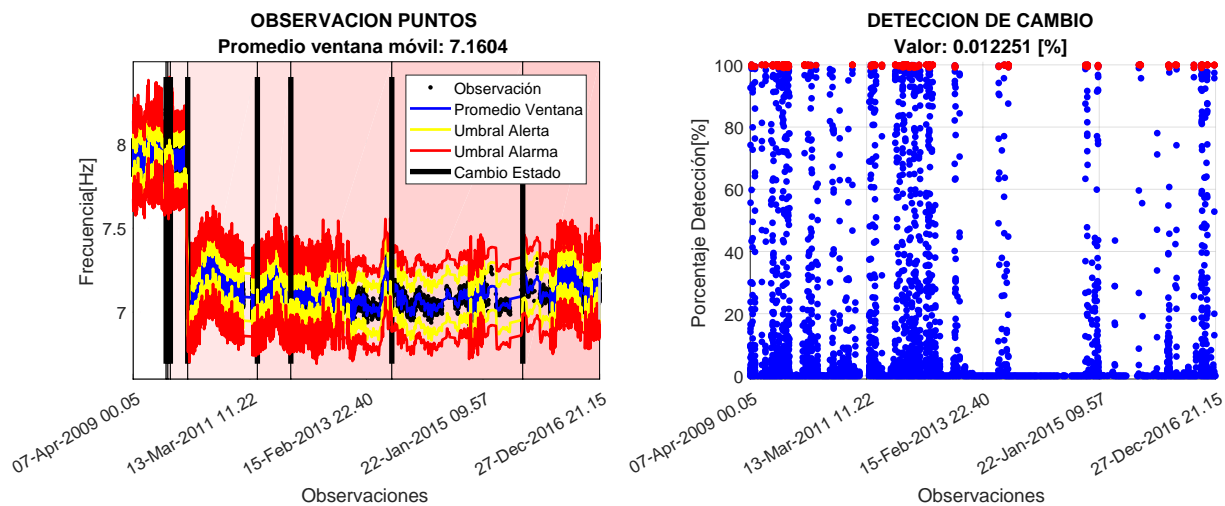


Figura 6.35: *Detección de Cambio para la Sexta Frecuencia*

### Séptima Frecuencia Observada

La séptima frecuencia observada tiene un rango, entre 7.94 Hz y 8.39 Hz, antes del sismo, Figura 6.36. En esta frecuencia, la variación de la señal entre el día y noche es menos evidente. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 8,14$  y una desviación estandar de  $s = 0,0516$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.37.

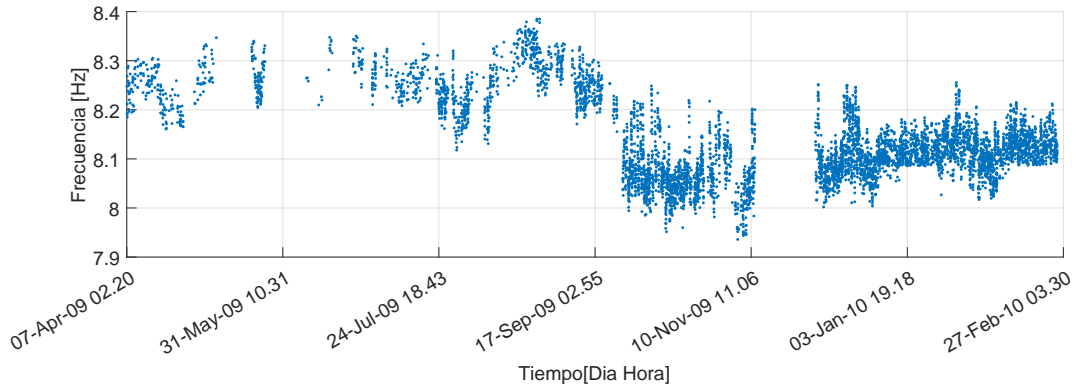


Figura 6.36: Séptima Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 7.94 Hz y 8.39 Hz

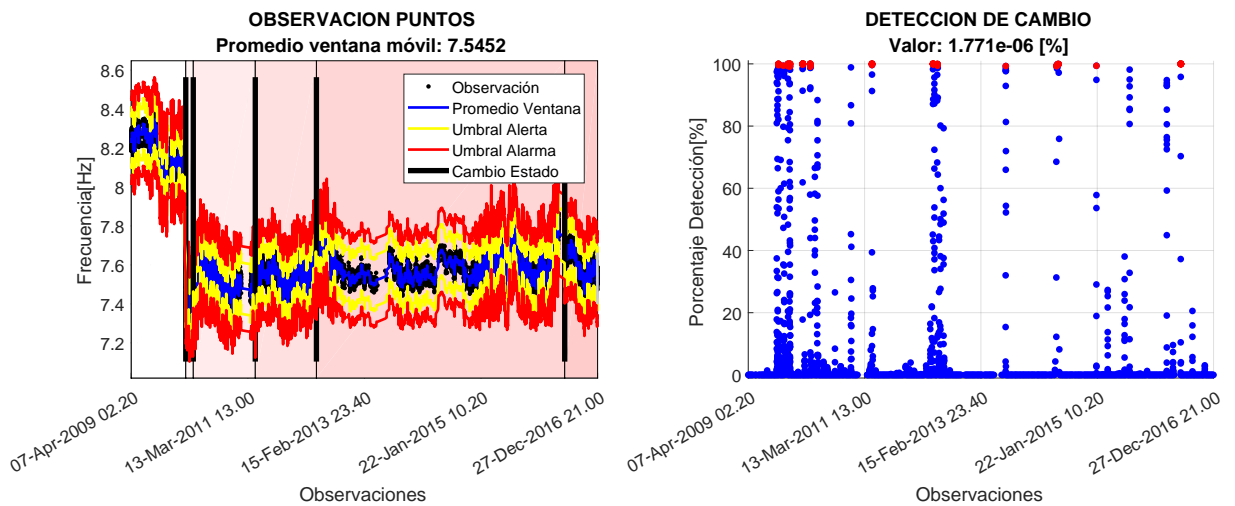


Figura 6.37: Detección de Cambio para la Séptima Frecuencia

### Octava Frecuencia Observada

La cuarta frecuencia observada tiene un rango, entre 8.77 Hz y 9.19 Hz, antes del sismo, Figura 6.38. En esta frecuencia, la variación de la señal entre el día y noche es menos evidente. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 9,00$  y una desviación estandar de  $s = 0,0901$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.39.

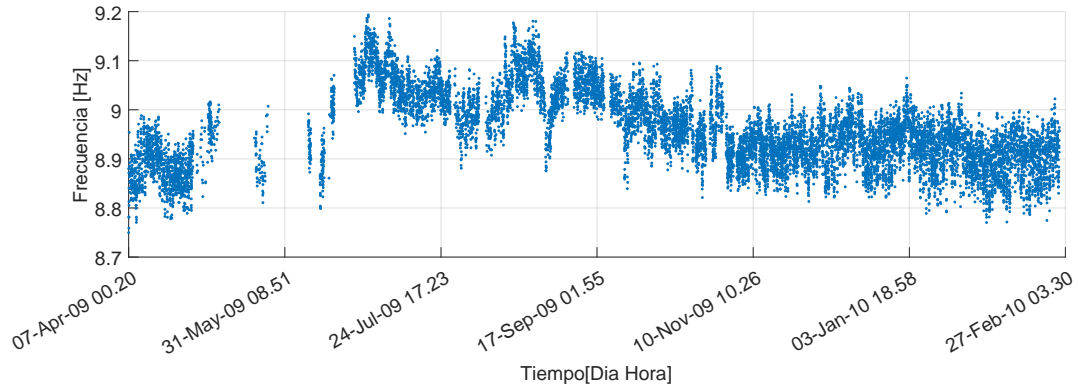


Figura 6.38: Octava Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 8.77 Hz y 9.19 Hz

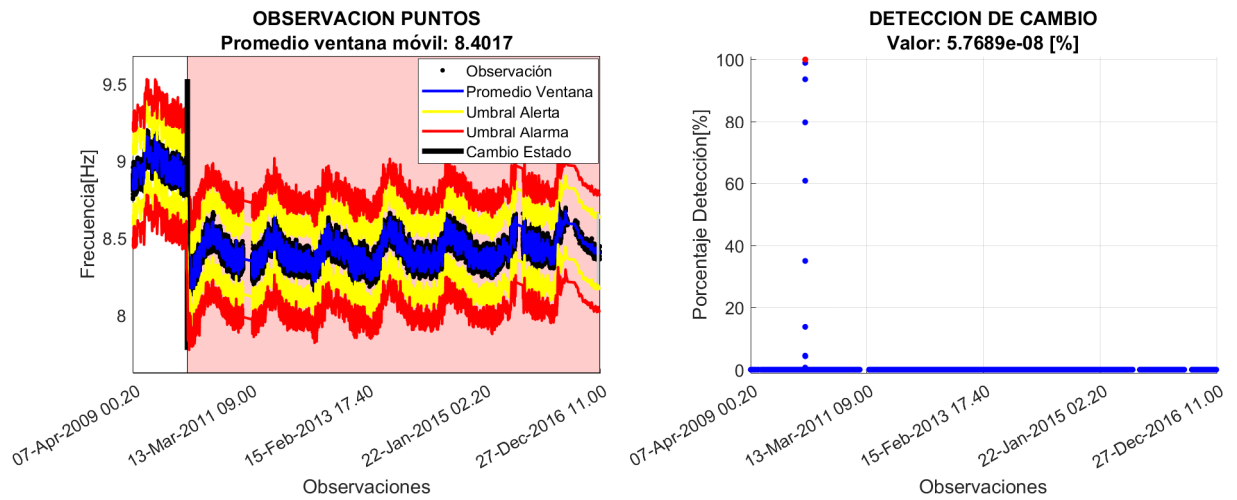


Figura 6.39: Detección de Cambio para la Octava Frecuencia

### Novena Frecuencia Observada

La novena frecuencia observada tiene un rango, entre 9.09 Hz y 9.48 Hz, antes del sismo, Figura 6.40. En esta frecuencia, la variación de la señal entre el día y noche es menos evidente. Del análisis estadístico se considera un valor apriori para la media de  $\bar{x} = 9,27$  y una desviación estandar de  $s = 0,0658$ . La detección de cambio se muestra en la Figura 6.41.



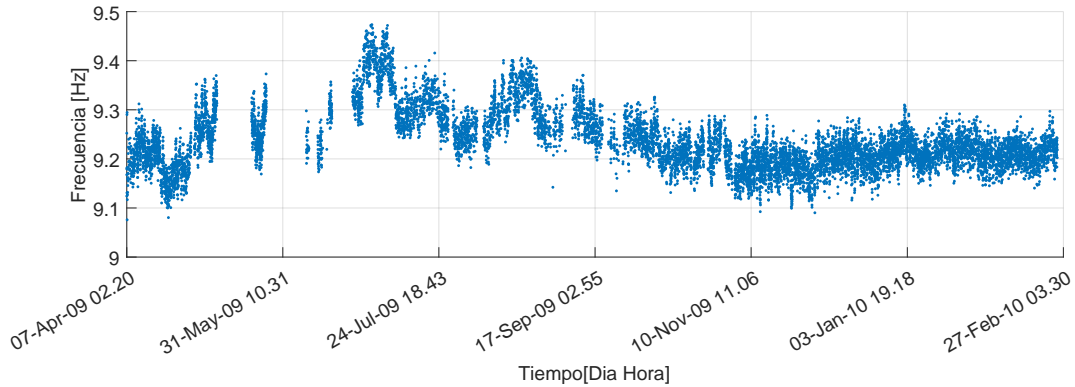


Figura 6.40: Novena Frecuencia Observada, Antes del Sismo del 27-feb-2010, entre 9.09 Hz y 9.48 Hz

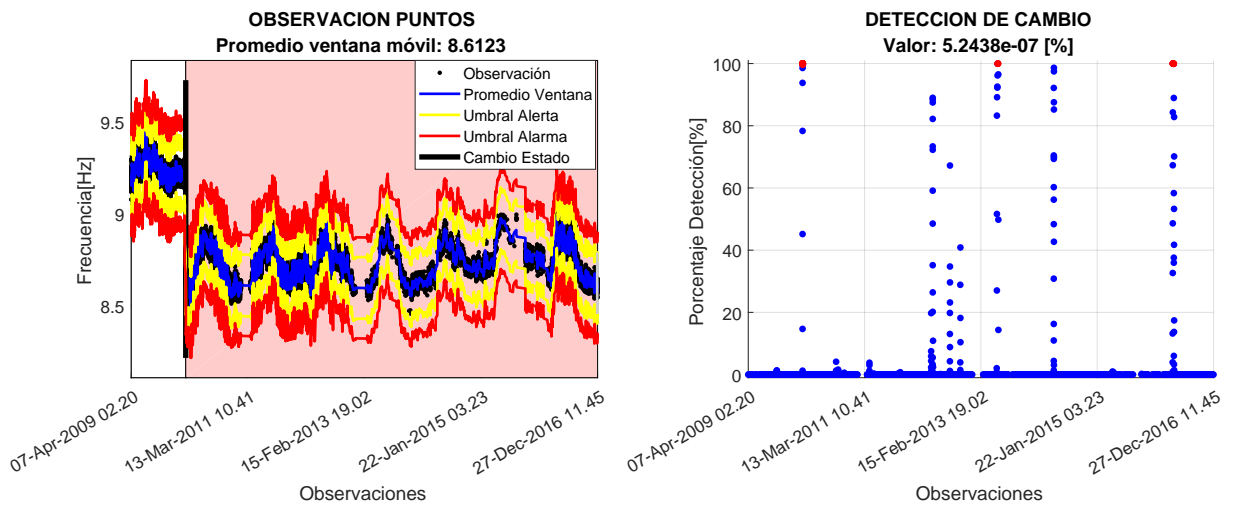


Figura 6.41: Detección de Cambio para la Novena Frecuencia

Del análisis de la detección de cambio, se observa que:

- i. Es posible detectar el cambio de estado ocurrido después del terremoto del 27 de febrero de 2010, en todas las frecuencias observadas; este hecho se debe a la magnitud de cambio observado en la señal.
- ii. Es posible observar la detección de cambio debido a interrupciones temporales durante el servicio de monitoreo que son visibles en varias de las frecuencias observadas.
- iii. Durante las mediciones estacionales, otoño-invierno, existe una mayor sensibilidad a detectar modificaciones en la estructura sin que esto corresponda a un cambio de estado en la estructura.
- iv. No es posible observar un cambio de estado debido al terremoto de Illapel del 16 de septiembre de 2016.

El análisis de la Figura 6.29, muestra la presencia de varios cambios de estado asociados a discontinuidad del servicio de monitoreo. Este modo es más sensible al cambio de temperatura entre invierno y verano. Por último, la detección de alertas esta localizada principalmente en períodos de otoño-invierno.

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES

### 7.1. Conclusiones y Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos en los Capítulos presedentes se concluye lo siguiente:

- a) La programación de algoritmos de identificación de propiedades modales basados en Sub-Espacio Estado, para diferentes condiciones de excitación fue desarrollado, verificado y demostrado en la estructura ensayada en laboratorio. La elección de polos físicos representativos es realizada a partir de un diagrama de estabilización utilizando la tecnica de triple acierto para la frecuencia, razon de amortiguamiento y forma modal.

Los resultados de la estructura ensayada en laboratorio permiten observar para la Condicion Normal, que los tres metodos de identificación implementados, ERA, MOESP y SSI-COV, poseen variaciones entre ellos que no superan los 0.93 %; lo que demuestra, como era de esperar, que la estructura posee respuestas modales similares para diferentes tipos de excitación. La comparación entre las frecuencias modales de la estructura ensayada y el modelo numérico, tienen un error mínimo de 0.72 % para el segundo modo y un error máximo absoluto de 2.62 % para el sexto modo, lo que muestra que el modelo numérico esta adecuadamente calibrado con las mediciones realizadas en la estructura.

La aplicación de Anomalías por Temperatura y aumento de Masa del 0.5 % en la Condición Normal de la estructura son observables en frecuencia a través de las identificaciones, mostrando que existe una buena sensibilidad ante pequeñas variaciones presentes en la estructura. Se observa que:

- En la Anomalía por Temperatura, con aumento de 5 grados Celcius, el promedio de cada una de las frecuencias identificadas tienen una variación entre un 0.03 % a 0.32 %, esta variación se debe a que el ensayo normal y el ensayo con aumento de 5 grados Celcius fueron realizados en días y horarios diferentes, lo que modifico la respuesta esperada de la estructura, que era una reducción en frecuencia de los modos.
- La Anomalía por Masa, modifica la media de todos los modos observados, reduciendo su valor promedio entre un -0.11 % y -0.54 %, siempre negativos, este hecho es principalmente evidente para los registros de ruido; la variación de valores MAC para formas modales

muestra que los 6 modos longitudinales, en la dirección de movimiento de la mesa, son especialmente sensibles al cambio de masa.

Los resultados de la aplicación de Daño Leve y Daño Severo a la estructura muestran para diferentes configuraciones de sensores:

Configuración 1. Con ocho sensores en la estructura:

- La aplicación de anomalía y daño en la estructura son observables en frecuencia, amortiguamiento y forma modal (MAC). La variación de las propiedades modales permite detectar y cuantificar daño de forma exitosa en la estructura.
- Con esta configuración de sensores es posible observar 8 modos en la estructura, 6 modos longitudinales, 1 traslacional y 1 rotacional.
- Las formas modales y MAC, dada la alta densidad de los sensores permiten capturar en forma precisa las variaciones de toda la estructura.

Configuración 2. Con tres sensores en el nivel 6 de la estructura:

- Se observan variaciones en la frecuencia, amortiguamiento y MAC con la aplicación de anomalía y daño en la estructura. El cambio en la condición modal observada, permite detectar daño de forma limitada en la estructura.
- En esta configuración no es posible observar el modo 7 correspondiente al sexto modo longitudinal, en dirección del movimiento de la mesa, debido a que tiene bajas amplitudes de desplazamiento en el nivel 6 y las mayores amplitudes de desplazamiento están en la parte baja de la estructura.
- Las frecuencias identificadas con esta configuración, no superan el 0.1 % de variación, con respecto a la Configuración 1, para los 7 modos indentificados.

Configuración 3. Con 3 sensores en los niveles 1, 2 y 3 de la estructura:

- Es posible observar variaciones en la identificación de propiedades modales, producto de la aplicación de anomalías y daño por reducción de la sección de columnas.
- La variación modal observada permite detectar y cuantificar daño en la estructura de forma adecuada.
- Con esta configuración solo es posible identificar 6 modos, correspondientes a los modos longitudinales, en sentido de movimiento de la mesa vibradora.
- Al utilizar menos sensores no existe una disminución en la precisión de la identificación de la frecuencia modal. En el caso evaluado diferencia no varía más de un 0.3 %.
- En esta configuración, no es posible identificar los modos 6 y 8 que corresponden a los modos de movimiento traslacional y de rotación de la estructura, debido a que no cuenta con sensores en la parte alta de la estructura.

De los resultados obtenidos se concluye que la metodología para la identificación de propiedades modales es robusta y es posibles observar variaciones modales en frecuencia, razón de amortiguamiento y forma modal (MAC), debidas a condiciones de Anomalía por Masa y por

efecto de la aplicación de Daño en condición Leve y Severa. Estos resultados al ser sensibles a cambios de propiedades modales pueden ser utilizados en la detección y diagnóstico de daño en una estructura.

- b) Una nueva metodología de identificación de daño en estructuras es aplicada en la estructura ensayada en laboratorio, utilizando un método de aproximación lineal con inferencia estadísticas basada en el principio de máxima entropía. La validación se realiza calibrando numéricamente un modelo de la estructura para condiciones normales y utilizando los resultados obtenidos experimentalmente de la identificación de propiedades modales de la estructura bajo diferentes condiciones de daño y tres configuraciones de sensores, para conocer su influencia en la determinación de resultados.

La metodología muestra que la detección de daño es asignada a todas los elementos columna que componen un mismo nivel. Esto se debe a la falta de información local del daño, por tanto, el método asigna una magnitud a los elementos que posean similares características en el mismo nivel. De las 3 configuraciones estudiadas se concluye lo siguiente:

Configuración 1. Con ocho sensores en la estructura:

- No se analiza la condición de anomalía por cambio de temperatura porque las variaciones observadas son menores a un 0.35 % en frecuencia, en todos los modos identificados, con respecto a la Condicion Normal de referencia.
- La detección de daño con anomalía por adición de masa solo se detecta bajo condiciones de Daño Leve, con reducción del 50 % de la sección transversal de una columna, esto muestra que los cambios causados por el aumento de la masa alteran la localización de daño, hasta que el daño tiene una magnitud lo suficientemente alta que no se ve afectada por la perturbación de la masa.
- La localización de Daño Leve, con reducción del 20 % de la sección transversal de una columna, es asignada al nivel 1; esto se puede deber a que la amplitud de las aceleraciones registradas por los sensores, por lo tanto el sensor que esta mas cercano a la base es menos representativo que el resto de los sensores en los otros niveles.
- La localización del daño se logra de forma exitosa, a partir de una reducción 35 % de la sección transversal de una columna.
- La cuantificación del daño tiene variaciones entre un 3 % y 38 % con el valor asignado y mientras mayor es el daño asignado, menor es la variación entre la cuantificación de daño estimada y el valor del daño asignado.
- Existe una mejor detección y cuantificación de daño en la estructura cuando se seleccionan sólo los modos longitudinales, en la dirección de movimiento de la mesa, esto se debe a que los modos traslacionales y rotaciones poseen formas modales que tienen un MAC bajo, lo que introduce dispersión en el algoritmo al momento de realizar la detección y cuantificación de daño.

Configuración 2. Con tres sensores en el nivel 6 de la estructura:

- Al igual que en la configuración 1, no se considera la anomalía por cambio de temperatura por las pequeñas variaciones observadas en frecuencia.
- No es posible realizar la detección de daño con la adición de masa en ninguna de condiciones de daño aplicadas a la estructura, esto se debe a que la posición de los sensores no es sensible a la aplicación de daño y anomalía en el sistema.
- No es posible detectar y cuantificar daño en todos los ensayos realizados lo que no garantiza la obtención de buenos resultados con esta metodología utilizando esta configuración de sensores. A pesar de esto se observa que existen mejores resultados cuando se consideran todos los modos identificados en lugar de solo los modos traslacionales, en dirección de movimiento de la mesa vibradora.

Configuración 3. Con tres acelerómetros en los niveles 1, 2 y 3 de la estructura:

- Al igual que en las Configuraciones 1 y 2, no se analiza la condición de anomalía por cambio de temperatura porque las variaciones observadas son menores a un 0.35 % en frecuencia.
- No es posible detectar y cuantificar daño con esta configuración, en ninguna de las condiciones de daño asignadas a la estructura. Esto puede deberse a que la posición de los sensores no permiten diferenciar la magnitud del daño aplicada con la Anomalía debida a la Masa.
- La detección de daño se realiza con éxito a partir de una reducción del 50 % de la sección transversal de una columna.
- La cuantificación de daño varía entre un 2 % y un 37 %, las menores variaciones en la cuantificación se producen cuando existe una mayor magnitud de daño.

La estructura ensayada bajo diferentes condiciones de observación y condiciones de daño, ha demostrado la validación de la metodología de forma exitosa, ya que es posible detectar daño, identificar su ubicación y cuantificar su magnitud. La baja capacidad de detectar daño en las primeras pruebas se debe a que el daño local en el elemento columna no es representado en las mediciones globales de los parámetros modales.

- c) El proceso de detección y cuantificación utilizando Información Mutua y Redes Neuronales a partir de Transformadas Wavelet, fue probada en la estructura ensayada en laboratorio, su aplicación se realiza sólo para registros de ruido coloreado. El análisis realizado considera que el mejor tamaño de ventana de observación es de 1000 muestras, considerando sectores acotados en los rangos 21-32, 35-47 y 90-132, que están asociados a la tercera, segunda y primera frecuencia observable de la estructura.

La comparación de la Condición Normal (referencia), con los resultados bajo los estados de Daño Leve y Severo muestran que el sensor 3, que está ubicado en el nivel 6 y mide en la dirección transversal al movimiento de la mesa, es más sensible al daño en la estructura. La Figura 5.50, que compara la respuesta entre sensores muestra que: i) no existe diferencia entre un clúster de la Condición Normal y Daño Leve, ii) la condición con Daño Severo a 50 % posee un clúster que se separa del Daño Leve y es observable en la combinación de sensores 3-7 y

3-8, estando los sensores 7 y 8 próximos a la aplicación física del daño. iii) la evaluación de los sensores 3, 7 y 8 bajo condiciones de entropía condicional  $H_{y|x}$  permite realizar la detección de cambio de estado en la estructura, aplicable a condición de Daño Severo a 50 %, iv) por lo mencionado en los índices i y ii se define una clasificación binaria compuesta por una condición Pseudo-Normal y una condición con daño.

La detección de daño aplicando redes neuronales auto-organizadas (SOM), se realiza considerando las observaciones y los sensores que mayor sensibilidad aportan a la condición de daño. El entrenamiento se realiza utilizando el 65 % de los registros y la validación con 35 % restante de los registros. Los resultados muestran que la red neuronal realiza una clasificación entre una condición con Pormal (normal mas Daño Leve) y Daño Severo de 50 %; el Daño Severo a 35 % se encuentra en una zona de transición entre estas dos condiciones. Al evaluar los resultados se observa que el entrenamiento tiene una buena clasificación para el Daño Severo a 50 %, mientras que existe una limitada detección para el Daño Severo a 35 %, finalmente la detección de la condición Pseudo-Normal, la realiza de forma adecuada.

La cuantificación de daño se realiza considerando redes neuronales Feedforward, entrenada con 21 parámetros. De acuerdo a las combinaciones realizadas, el mejor desempeño corresponde a una red de dos capas cuya capa oculta utiliza una función tangente sigmooidal y la capa de salida es lineal; los resultados obtenidos muestran que: i) existe una asignación variable de detección para Condición Normal y Daño Leve hasta una reducción de 35 %, esto es concordante con lo observado en la formación del clúster Pseudo-Normal, ii) la determinación eficiente de daño se observa para condiciones de Daño Severo con reducción total de 35 % y 50 %.

La aplicación de esta metodología es eficiente para condiciones de daño severa, las que fueron determinadas con éxito, mientras que la detección de Daño Leve es poco precisa, esto muestra que las primeras etapas de daño en la estructura no son visibles para esta metodología y es comun la presencia de falsos negativos para las condiciones en las que la estructura ya requiere de observaciones y control técnico .

- d) La metodología para la detección de cambio utilizando test de Hipótesis con inferencia Bayesiana, fue probado en un modelo numérico y en una estructura real, bajo diferentes tamaños de ventanas de observación. Esto permite la aplicación de este procedimiento para procesos con datos secuenciales en los que es posible utilizar ventanas de observación de tamaño moderado (10 a 30) o procesos donde la detección de cambio es fundamental y debe ser reconocida a la brevedad con ventanas de observación de tamaño pequeño (3 a 5).

La capacidad de detección depende principalmente de dos parametros: i) la varianza muestral a priori, determinada preliminarmente considerando variaciones representativas del parámetro de observación y ii) el nivel de significancia de la distribución, representado prácticamente como el límite de alerta, que puede ser tan bajo como el nivel de falsas alarmas deseado en el sistema. Por último y no menos importante, la detección de cambio, esta acompañada del cambio de estado a partir de la superación continua y sostenida de un umbral expresado como porcentaje superior al 90 % durante un número de observaciones definidas como mínimas.

Con el objeto de considerar las variaciones ambientales y no estacionarias, el algoritmo de detección aplica el teorema de Bayes, para esto determina que la información a priori del sistema ha sido obtenida en  $N_{change}$  (número de puntos de cambio para cambio de estado) observaciones previas a la observación actual, de esta forma es posible hacer una mejor estimación de la información a posteriori, y considerar cambios de la señal producto de variaciones temporales en el sistema.

Los resultados numéricos del modelo, muestran que para una señal senoidal perturbada con ruido gaussiano, pueden ser detectados cambios tan pequeños como una variación de un 1.3% de cambio de la media, utilizando en el algoritmo una ventana móvil que tiene 5 muestras de observación y que recorre todo el registro; se considera un nivel de significancia de 5%, cuyo valor de AUC es mayor a 0,9. La ventaja de elegir una menor cantidad de puntos de observación esta en que la detección de cambio se realiza con pocos puntos observados, la desventaja se encuentra en el hecho de que ligeras variaciones en el cambio de media de la señal observada producen porcentajes de detección altos. La detección con una ventana de tamaño moderado, mayor a 20 observaciones, hace que que las líneas continuas del promedio de la ventana, el límite de alerta y alarma estén más suavizados, reduciendo la cantidad de alertas durante el análisis de detección realizado. La variación en la posición del cambio de estado, representado como una línea vertical negra, se debe a que el algoritmo considera que el cambio ocurrió la primera vez que el sistema presenta una detección por sobre el umbral definido.

Para la aplicación del algoritmo en una estructura real, se utilizan las frecuencias observadas en la Torre Central de la FCFM, los resultados muestran una dificultad adicional ya que además de considerar las variaciones de temperatura diaria, tambien se observan variaciones debidas al cambio de estación de forma anual. Analizando la primera frecuencia observada cuyo rango inicial está entre 2.19 y 2.31 Hz, el algoritmo detecta de manera adecuada el cambio de estado debido al sismo del 27 de febrero de 2010. En el caso de la tercera frecuencia, cuyo rango inicial está entre 2.93 y 3.08 Hz, el algoritmo detecta el cambio de estado lo que es real.

Para una mayor seguridad en la detección de cambio de estado se recomienda aplicar en paralelo dos detecciones i) una considerando una ventana de tamaño pequeño (3 a 10 observaciones), de modo que sea sensible a la detección temprana de cambio y ii) una ventana de tamaño moderado (mayor a 20 observaciones) que otorga una mayor confianza a los resultado observados. En este punto, es importante mencionar que la recurrencia y periodicidad con que se obtienen las observaciones es un asunto importante a considerar al momento de elegir el tamaño de la ventana ya que las observaciones pueden no ser periodicas en el tiempo.

### 7.2. Limitaciones

Dentro de las limitaciones de este trabajo, se mencionan los siguientes:

- i. Las condiciones en laboratorio no permitieron que el gradiente de temperatura fuera aplicado de manera uniforme en toda la estructura.



- ii. La cantidad y continuidad de ensayos realizados en un día estaba limitada por el calentamiento del sistema hidráulico de la mesa vibradora.
- iii. La distribución de sensores en la estructura solo permite evaluar el comportamiento global de la estructura.
- iv. La limitada cantidad de ensayos, por condición de daño, no permite realizar una mejor estimación de la influencia de anomalías en los resultados.
- v. El alto consumo computacional de procesar imágenes y determinar parámetros con Información mutua y Entropía, no permite su implementación en tiempo real.
- vi. Existen periodos de tiempo sin medición en el sistema de monitoreo de Torre Central, o desconexión de sensores que dificultan la continuidad el seguimiento modal en la estructura y generan detecciones de cambio en el proceso.

### 7.3. Líneas Futuras de Investigación

- i. Es necesario implementar una metodología mas robusta para realizar la selección de polo estable representativo para una modo físico, a pesar de haber obtenido buenos resultados en su elección la dispersión puede ser mejorada al considerar parametros como densidad de la distribución del polo estable, combinar la estabilización entre polos no colindantes, etc.
- ii. Para evaluar la aplicación de identificación de daño con máxima entropía, se pueden realizar ensayos en laboratorio considerando estructuras asimétricas, que estén sometidas a diferentes escenarios y combinaciones de daño, ya que esta tesis se aplicó el daño a un solo elemento. Otra opción está en la evaluación con modelos computacionales en los que se puede realizar la modificación de uno o varios de sus elementos y de esta manera evaluar el desempeño del algoritmo.
- iii. Para futuros ensayos en laboratorio se puede instrumentalizar la colindancia al elemento a la localización de daño, de esta forma se contaría con mayor información de la zona afectada y verificar si existe una mayor sensibilidad local de los métodos para detectar y cuantificar daño.
- iv. Evaluar la sensibilidad de sensores y su aporte de información a la detección e identificación de daño, de forma que se garantice que estos sensores aporten información al sistema y no sean una fuente de ruido o dispersión.
- v. Considerar una metodología que evalúe la detección de cambio considerando la evaluación de cada modo de manera individual y otra de manera unificada considerando para ello una ponderación de todos los modos identificados.
- vi. Evaluar la identificación de otros parámetros, estadísticos o características modales del sistema, que pueden aportar información en la detección de cambio en el sistema.
- vii. Considerar la utilización de diferentes distribuciones para la detección de cambio, de forma que se elija la que mayor sensibilidad aporte a las mediciones realizadas.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

- viii. Normalizar las frecuencias identificadas para reducir la variabilidad observada debida a condiciones ambientales y estacionales.

# Bibliografía

- [Alampalli et al., 1997] Alampalli, S., Fu, G., and Dillon, E. W. (1997). Signal versus noise in damage detection by experimental modal analysis. *Journal of Structural Engineering*, 123(2):237–245.
- [Allemang, 2003] Allemang, R. J. (2003). The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37(8):14–23.
- [Arroyo and Ortiz, 2006] Arroyo, M. and Ortiz, M. (2006). Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(13):2167–2202.
- [Ashari and Mevel, 2010] Ashari, A. E. and Mevel, L. (2010). *Optimal Input Design for Subspace-Based Fault Detection and Identification*. PhD thesis, INRIA.
- [Ashari and Mevel, 2013] Ashari, A. E. and Mevel, L. (2013). Auxiliary input design for stochastic subspace-based structural damage detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 34(1):241–258.
- [Astola and Virtanen, 1981] Astola, J. and Virtanen, I. (1981). *Entropy correlation coefficient, a measure of statistical dependence for categorized data*. Lappeenranta teknillinen korkeakoulu.
- [Avci and Abdeljaber, 2015] Avci, O. and Abdeljaber, O. (2015). Self-organizing maps for structural damage detection: a novel unsupervised vibration-based algorithm. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 30(3):04015043.
- [Bakir, 2011] Bakir, P. G. (2011). Automation of the stabilization diagrams for subspace based system identification. *Expert Systems with Applications*, 38(12):14390–14397.
- [Balmes et al., 2008] Balmes, E., Basseville, M., Bourquin, F., Mevel, L., Nasser, H., and Treysse, F. (2008). Merging sensor data from multiple temperature scenarios for vibration monitoring of civil structures. *Structural health monitoring*, 7(2):129–142.
- [Bandara et al., 2014] Bandara, R. P., Chan, T. H., and Thambiratnam, D. P. (2014). Structural damage detection method using frequency response functions. *Structural Health Monitoring*, page 1475921714522847.
- [Barrientos Oliva, 2008] Barrientos Oliva, J. F. (2008). Montaje puesta en marcha y calibración de una mesa de vibrar de un grado de libertad.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [Basoalto, 2013] Basoalto, J. A. (2013). Análisis del efecto de las condiciones ambientales en las propiedades modales de un edificio de hormigón armado.
- [Basogain, 2008] Basogain, X. (2008). Redes neuronales artificiales y sus aplicaciones. *Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Superior de Ingeniería Bilbao. Open Course Ware.*[En línea] disponible en [http://ocw.ehu.es/enseñanzas-tecnicas/redes-neuronales-artificiales-y-sus-aplicaciones/Course\\_listing](http://ocw.ehu.es/enseñanzas-tecnicas/redes-neuronales-artificiales-y-sus-aplicaciones/Course_listing). [Consultada 20-09-2012].
- [Basseville et al., 1993] Basseville, M., Nikiforov, I. V., et al. (1993). *Detection of abrupt changes: theory and application*, volume 104. Prentice Hall Englewood Cliffs.
- [Bayissa et al., 2008] Bayissa, W., Haritos, N., and Thelandersson, S. (2008). Vibration-based structural damage identification using wavelet transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(5):1194–1215.
- [Beale et al., 2017] Beale, M. H., Hagan, M. T., and Demuth, H. B. (2017). Neural network toolbox<sup>TM</sup> user’s guide. *The Mathworks Inc.*
- [Benveniste and Mevel, 2007] Benveniste, A. and Mevel, L. (2007). Nonstationary consistency of subspace methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(6):974–984.
- [Bilbao, 2014] Bilbao, J. A. (2014). Interpretación automática de diagramas de estabilización.
- [Blanco, 2010] Blanco, D. D. (2010). *Extensividad de la información mutua en teorías relativistas*. PhD thesis, Universidad Nacional de Cuyo.
- [Borici, 2010] Borici, A. (2010). A concise introduction to information theory and entropy.
- [Boroschek, 2014] Boroschek, R. (2014). Apuntes de clase - dinámica avanzada de estructuras.
- [Boroschek et al., 1997] Boroschek, R., Moroni, M., Sarrazin, M., Segovia, E., and Soto, P. (1997). Determinación de las propiedades dinámicas del puente aislado marga – marga. *Séptimas Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica y Primer Congreso Iberoamericano de Sismología*, pages 565–574.
- [Boroschek et al., 1993] Boroschek, R., Moroni, M. O., Sarrazin, M., and Vergara, C. (1993). Programa de ensayos en un edificio aislado sísmicamente. *XXVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*, 1:381–392.
- [Cara et al., 2013] Cara, F. J., Juan, J., Alarcón, E., Reynders, E., and De Roeck, G. (2013). Modal contribution and state space order selection in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2):276–298.
- [Caro, 2004] Caro, F. J. B. (2004). Aplicación de las técnicas de la teoría de la información en el registro de imágenes médicas. *XIII Seminario de Ingeniería Biomédica*.
- [Caroca, 2012] Caroca, J. L. (2012). Desarrollo e implementación de un sistema de detección de dano estructural.
- [Carreno, 2009] Carreno, R. (2009). Variación de propiedades dinámicas del edificio de la cámara chilena de la construcción: caso sísmico.

- [Castillo and Boroschek, 2005] Castillo, A. and Boroschek, R. (2005). Uso del método de frecuencia no paramétrica y ssi para la identificación de propiedades modales de edificios. *XI Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, page 15.
- [Cawley, 1978] Cawley, P. (1978). Defect location in structures by a vibration technique. *N 80-21797*, 127.
- [Collignon, 1998] Collignon, A. (1998). Multi-modality medical image registration by maximization of mutual information.
- [Cover and Thomas, 2006] Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006). Elements of information theory 2nd edition.
- [Doebling et al., 1998] Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., et al. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and vibration digest*, 30(2):91–105.
- [Doebling et al., 1996] Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., and Shevitz, D. W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review.
- [Dohler and Mevel, 2011] Dohler, M. and Mevel, L. (2011). Fast multi-order stochastic subspace identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):6523–6528.
- [Dohler and Mevel, 2013] Dohler, M. and Mevel, L. (2013). Efficient multi-order uncertainty computation for stochastic subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2):346–366.
- [Eriksson, 2013] Eriksson, T. (2013). Change detection in telecommunication data using time series analysis and statistical hypothesis testing.
- [Farrar and Doebling, 1999] Farrar, C. and Doebling, S. (1999). Damage detection and evaluation ii. In *Modal analysis and testing*, pages 345–378. Springer.
- [Farrar and Worden, 2012] Farrar, C. R. and Worden, K. (2012). *Structural health monitoring: a machine learning perspective*. John Wiley & Sons.
- [Fawcett, 2006] Fawcett, T. (2006). An introduction to roc analysis. *Pattern recognition letters*, 27(8):861–874.
- [Felber, 1993] Felber, A. J. (1993). *Development of a hybrid bridge evaluation system*. PhD thesis, University of British Columbia.
- [Fierro Aguirre, 2014] Fierro Aguirre, V. A. d. (2014). Detección de daños en una placa de material compuesto tipo panal de abeja mediante métodos de aprendizaje supervisado.
- [Freedman and Diaconis, 1981] Freedman, D. and Diaconis, P. (1981). On the histogram as a density estimator: L 2 theory. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(4):453–476.

- [Gomez, 2008] Gomez, H. F. (2008). *Aplicación de la Kernel Predictibilidad en el Registro y Segmentación de Imágenes*. PhD thesis, Centro de Investigación en Matemáticas.
- [Gómez-Luna et al., 2013] Gómez-Luna, E., Silva, D., and Aponte, G. (2013). Selección de una wavelet madre para el análisis frecuencial de señales eléctricas transitorias usando wpd. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 21(2):262–270.
- [Goupillaud et al., 1984] Goupillaud, P., Grossmann, A., and Morlet, J. (1984). Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, 23(1):85–102.
- [Grimmelsman, 2006] Grimmelsman, K. A. (2006). *Experimental characterization of towers in cable-supported bridges by ambient vibration testing*. PhD thesis, Drexel University.
- [Gruen, 2012] Gruen, A. (2012). Development and status of image matching in photogrammetry. *The Photogrammetric Record*, 27(137):36–57.
- [Gupta, 2003] Gupta, M. R. (2003). *An information theory approach to supervised learning*. PhD thesis, Stanford University.
- [Gupta et al., 2006] Gupta, M. R., Gray, R. M., and Olshen, R. A. (2006). Nonparametric supervised learning by linear interpolation with maximum entropy. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(5):766–781.
- [Hagan et al., 2016] Hagan, M., Demuth, H., Beale, M., and De Jesús, O. (2016). Neural network design. 2nd. Ed., Lexington, KY.
- [Hartley, 1928] Hartley, R. V. (1928). Transmission of information. *Bell Labs Technical Journal*, 7(3):535–563.
- [Hung and Kao, 2002] Hung, S.-L. and Kao, C. (2002). Structural damage detection using the optimal weights of the approximating artificial neural networks. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 31(2):217–234.
- [Isermann and Balle, 1997] Isermann, R. and Balle, P. (1997). Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control engineering practice*, 5(5):709–719.
- [James et al., 1995] James, G., Carne, T. G., Lauffer, J. P., et al. (1995). The natural excitation technique (next) for modal parameter extraction from operating structures. *Modal Analysis-the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 10(4):260.
- [Jaynes, 1957] Jaynes, E. T. (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, 106(4):620.
- [Jiménez et al., 2010] Jiménez, M., Antonio, J., Arias Pérez, B., González Aguilera, D., and Gómez Lahoz, J. (2010). Procesamiento avanzado de imágenes digitales, 2010-11.
- [Juang, 1986] Juang, J.-N. (1986). Mathematical correlation of modal parameter identification methods via system realization theory.

- 
- [Juang and Pappa, 1985] Juang, J.-N. and Pappa, R. S. (1985). An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance*, 8(5):620–627.
- [Juang and Pappa, 1986] Juang, J.-N. and Pappa, R. S. (1986). Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm. *J. Guid. Control Dyn.*
- [Kay, 1998] Kay, S. M. (1998). Fundamentals of statistical signal processing, vol. ii: Detection theory. *Signal Processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.*
- [Kohonen, 1982] Kohonen, T. (1982). Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological cybernetics*, 43(1):59–69.
- [Kovacevic et al., 2013] Kovacevic, J., Goyal, V., and Vetterli, M. (2013). Fourier and wavelet signal processing. *Fourier and Wavelets. org*, pages 1–294.
- [Kronland-Martinet et al., 1987] Kronland-Martinet, R., Morlet, J., and Grossmann, A. (1987). Analysis of sound patterns through wavelet transforms. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1(02):273–302.
- [Kullback and Leibler, 1951] Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The annals of mathematical statistics*, 22(1):79–86.
- [León, 2013] León, P. (2013). Variación de propiedades dinámicas de la torre central debido a factores sísmicos.
- [Lilliefors, 1967] Lilliefors, H. W. (1967). On the kolmogorov-smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American statistical Association*, 62(318):399–402.
- [Loftsgaarden et al., 1965] Loftsgaarden, D. O., Quesenberry, C. P., et al. (1965). A nonparametric estimate of a multivariate density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36(3):1049–1051.
- [Mallat, 1989] Mallat, S. G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 11(7):674–693.
- [Martinez and Castro, 2002] Martinez, J. and Castro, J. (2002). Análisis de la teoría de ondículas orientada a las aplicaciones en ingeniería eléctrica: Fundamentos. *ETSII/Universidad Politécnica de Madrid.*
- [Meruane and Mahu, 2014] Meruane, V. and Mahu, J. (2014). Real-time structural damage assessment using artificial neural networks and antiresonant frequencies. *Shock and Vibration*, 2014.
- [Meruane and Ortiz-Bernardin, 2015] Meruane, V. and Ortiz-Bernardin, A. (2015). Structural damage assessment using linear approximation with maximum entropy and transmissibility data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54:210–223.
- [Montgomery, 2014] Montgomery, D. C. (2014). Textbook: Design and analysis of experiments.
- [Moon and Stirling, 2000] Moon, T. K. and Stirling, W. C. (2000). *Mathematical methods and algorithms for signal processing*, volume 1. Prentice hall New York.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [Moroni et al., 2000] Moroni, M., Sarrazin, M., Boroschek, R., Valdebenito, R., and Romo, D. (2000). Analysis of seismic records obtained in isolated structures. *12 World Conference on Earthquake Engineering*.
- [Moroni et al., 1993] Moroni, M. O., Sarrazin, M., Boroschek, R., Herbach, E., Luis, M., and Vergara, C. (1993). Ensayos de vibraciones en edificio aislado sísmicamente. *6tas. Jornadas Chilenas de Sismología e Ingeniería Antisísmica*.
- [Núñez, 2009] Núñez, T. (2009). Variación debido a cambios de masa y rigidez de las propiedades dinámicas de una estructura en proceso constructivo.
- [Orellana, 2014] Orellana, C. (2014). Identificación de daño en estructuras complejas utilizando una aproximación lineal mediante el principio de máxima entropía.
- [Pappa et al., 1992] Pappa, R. S., Elliott, K. B., and Schenk, A. (1992). *A consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm*. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center.
- [Peeters and De Roeck, 1999] Peeters, B. and De Roeck, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical systems and signal processing*, 13(6):855–878.
- [Pluim et al., 2003] Pluim, J. P., Maintz, J. A., and Viergever, M. A. (2003). Mutual-information-based registration of medical images: a survey. *IEEE transactions on medical imaging*, 22(8):986–1004.
- [Quesada et al., 1994] Quesada, F., Graciani, M., Bonal, M., and Díaz-Mata, M. (1994). Aprendizaje con redes neuronales artificiales. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (9), pages 169–180.
- [Reynders et al., 2008] Reynders, E., Pintelon, R., and De Roeck, G. (2008). Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4):948–969.
- [Rozas and Boroschek, 2009] Rozas, L. and Boroschek, R. (2009). Reducción de la respuesta estructural por medio del uso de disipadores de masa sintonizada y disipadores de columna líquida sintonizada. *Master’s thesis, Universidad de Chile*.
- [Rytter, 1993] Rytter, A. (1993). *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. PhD thesis, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University.
- [Sarrazin et al., 1993] Sarrazin, M., Moroni, M. O., and Boroschek, R. (1993). Experiments on a base isolated confined masonry buildings. *Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation, and Active Control*, 1:425–433.
- [Scott, 1979] Scott, D. W. (1979). On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3):605–610.
- [Shannon, 1948] Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3):379–423.



- 
- [Stone, 1977] Stone, C. J. (1977). Consistent nonparametric regression. *The annals of statistics*, pages 595–620.
- [Studholme et al., 1999] Studholme, C., Hill, D. L., and Hawkes, D. J. (1999). An overlap invariant entropy measure of 3d medical image alignment. *Pattern recognition*, 32(1):71–86.
- [Tamayo, 2014] Tamayo, F. (2014). Métodos de extracción de efectos ambientales en procesos de identificación de sistemas.
- [Thode, 2002] Thode, H. C. (2002). *Testing for normality*, volume 164. CRC press.
- [Verhaegen, 1993] Verhaegen, M. (1993). Subspace model identification part 3. analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm. *International Journal of control*, 58(3):555–586.
- [Verhaegen and Dewilde, 1992] Verhaegen, M. and Dewilde, P. (1992). Subspace model identification part 1. the output-error state-space model identification class of algorithms. *International journal of control*, 56(5):1187–1210.
- [Viola and Wells, 1995] Viola, P. and Wells, W. M. (1995). Alignment by maximization of mutual information. In *Computer Vision, 1995. Proceedings., Fifth International Conference on*, pages 16–23. IEEE.
- [Wilks, 2011] Wilks, D. S. (2011). *Statistical methods in the atmospheric sciences*, volume 100. Academic press.
- [Yam et al., 2003] Yam, L., Yan, Y., and Jiang, J. (2003). Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network identification. *Composite Structures*, 60(4):403–412.
- [Yan and Yam, 2002] Yan, Y. and Yam, L. (2002). Online detection of crack damage in composite plates using embedded piezoelectric actuators/sensors and wavelet analysis. *Composite structures*, 58(1):29–38.
- [Yanez, 2009] Yanez, J. T. (2009). Implementacion de un sistema de monitoreo continuo de parametros dinamicos de un edificio de muro.
- [Yun and Bahng, 2000] Yun, C.-B. and Bahng, E. Y. (2000). Substructural identification using neural networks. *Computers & Structures*, 77(1):41–52.

## Anexo A

# TERMINOLOGÍA

La terminología sugerida por [Isermann and Balle, 1997], que esta basada en el compendio de varios comites (IFAC, RAM, DIN, entre otros), es la que se describe en las siguientes secciones. Esta terminología se aplica a la instrumentación realizada y se utiliza en toda la tesis.

### A.1. Estado y Señales

- a. **Falla.** Es una desviación no permitida de al menos un parámetro o propiedad característica de una estructura, equipo o sistema, observado a partir de una condición aceptable, usual o normal.
- b. **Corte permanente.** Es una interrupción permanente de la capacidad que tiene un equipo o sistema, de realizar una función requerida, bajo condiciones de operación especificada.
- c. **Mal funcionamiento.** Es una irregularidad intermitente en el cumplimiento de la función deseada de un equipo o sistema.
- d. **Error.** Es una desviación entre una medición o valor calculado (de una variable) y el valor verdadero, que es especificado o teóricamente correcto.
- e. **Alteración.** Es una entrada desconocida y no controlada que actúa sobre la estructura, equipo o sistema.
- f. **Perturbación.** Es una entrada actuante sobre la estructura, equipo o sistema, que resulta en una desviación temporal del estado actual de la observación.
- g. **Residuo.** Es un indicador de falla, basado en la desviación entre las mediciones y los calculos basados en la ecuación modelo.
- h. **Síntoma.** Es el cambio de una cantidad observable desde su comportamiento normal.

### A.2. Funciones

- a. **Detección de Falla.** Determina la presencia de fallas en la estructura, equipo o sistema; así como el tiempo de detección.

- b. **Aislación de Falla.** Determina la clase, localización y el tiempo de detección de una falla. Es el paso siguiente a la *Detección de Falla*.
- c. **Identificación de Falla.** Determina el tamaño y el comportamiento variante en el tiempo. Es el paso siguiente a la *Aislación de Falla*.
- d. **Diagnóstico de Falla.** Determina la clase, tamaño, localización y tiempo de detección de una falla. Es el paso siguiente a la *Detección de Falla*, pero que también incluye a la *Aislación de Falla* e *Identificación de Falla*.
- e. **Monitoreo.** Es una tarea continua que se realiza en tiempo real para la determinación de las condiciones físicas de una estructura, equipo o sistema; por medio de medición de información, reconocimiento e indicación de anomalías en el comportamiento.
- f. **Supervisión.** Es el *Monitoreo* de una estructura, equipo o sistema físico, en el que se toman las acciones apropiadas para mantener la operación en caso de fallas.
- g. **Protección.** Es el medio por el que un comportamiento potencialmente peligroso en una estructura, equipo o sistema son suprimidos, si es posible; o es el medio por el que las consecuencias de un comportamiento peligroso son evitadas.

## Anexo B

# ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN CON FAST MULTI-ORDER

La comprobación en la aplicación del procedimiento con Fast Multi-Order (FMO), así como un algoritmo de desarrollo e implementación en la rutina, son detallados en los subtítulos siguientes.

### B.1. FMO para ERA

#### B.1.1. Desarrollo de Formulación

De acuerdo con la Sección 2.3 y 2.6.1 y las Ecuaciones (2.23), (2.28) y (2.75), es posible escribir las matrices de descomposición de valores singulares de Hankel, de la forma:

$$H_k = U_t S_t V_t^T, \quad (\text{B.1})$$

$$U_t = [ U_j \quad \tilde{U}_j ], \quad S_t^{1/2} = \begin{bmatrix} S_j^{1/2} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_j^{1/2} \end{bmatrix}, \quad V_t = \begin{bmatrix} V_j^T \\ \tilde{V}_j^T \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Con la definición de la matriz de transición de estado  $A_j$ , dado por la Ecuación (2.33), es posible determinar la matriz de  $A_t$ , a partri de un bloque  $n_j$  de matrices definido por:

$$A_t = \begin{bmatrix} S_j^{-1/2} U_j^T H_{k+1} V_j S_j^{-1/2} & S_j^{-1/2} U_j^T H_{k+1} \tilde{V}_j \tilde{S}_j^{-1/2} \\ \tilde{S}_j^{-1/2} \tilde{U}_j^T H_{k+1} V_j S_j^{-1/2} & \tilde{S}_j^{-1/2} \tilde{U}_j^T H_{k+1} \tilde{V}_j \tilde{S}_j^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$A_t = \begin{bmatrix} A_j & \tilde{A}_j' \\ \tilde{A}_j'' & \tilde{A}_j \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Un caso similar sucede con la matriz de observación  $C_j$  que se expresa de la forma mostrada en la Ecuación (2.32):

$$C = E_l^T U_1 S_1^{1/2}, \quad (\text{B.5})$$

$$C_j = E_l^T U_j S_j^{1/2}. \quad (\text{B.6})$$

Dado que la submatriz superior izquierda de la Ecuación (B.3) es igual a la expresión dada en (2.33), se demuestra que es posible aplicar la descomposición SVD al orden máximo  $n_t$ , buscado en un sistema y a partir de este, determinar los órdenes inferiores  $j = 1, \dots, t - 1$  del sistema. De esta forma la matriz  $n$  de estado  $A_j$ , se determina a partir de las Ecuaciones (B.3) y (B.6). El algoritmo resultante de la aplicación Fasta multi-Order para ERA se describe en como sigue.

### B.1.2. Algoritmo FMO-ERA

- Datos de entrada
  - Vector de observación:  $y_k, \dots, y_N \in \mathbb{R}^{l \times 1}$
  - Rango orden deseado:  $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}^{1 \times n_t}$
1. Formación de matrices Hankel:  $H_0 = Y_{0|i}$  y  $H_1 = Y_{1|i+1}$
  2. Descomposición SVD a Toeplitz:  $H_0 = USV^T = U_{[:,1:n_t]} S_{[1:n_t,1:n_t]} V_{[1:n_t,:]}^T$
  3. Matriz Imagen:  $E_l^T = [I_l \quad 0_l \quad \dots \quad 0_l]_{[l \times l_i]}$
  4. Para  $j = 2$  hasta  $t$
  5.  $A_j = S_{[1:n_j,1:n_j]}^{-1/2} U_{[:,1:n_j]} H_1 V_{t[:,1:n_j]} S_{[1:n_j,1:n_j]}^{-1/2}$
  6.  $C_j = E_l^T U_{[:,1:n_j]} S_{[1:n_j,1:n_j]}^{1/2}$
  7.  $\{A_j, C_j\} \rightarrow f_j, \beta_j, \Phi_j$
  8. Fin

## B.2. FMO para MOESP

### B.2.1. Desarrollo de Formulación

Considerando la Sección 2.4 y 2.6.2 y las Ecuaciones (2.44), (2.45) y (2.80), después de realizar la descomposición de valores singulares de la matriz  $L_{22}$  la expresión queda de la forma:

$$L_{22} = U_t S_t V_t^T. \quad (\text{B.7})$$

Similar a lo observado en el desarrollo con la metodología ERA, con la definición de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_j$ , dado por la Ecuación (2.45), es posible determinar la matriz de  $\mathcal{O}_t$ , con un bloque  $n_j$  definido por:

$$\mathcal{O}_t = \begin{bmatrix} U_j S_j^{1/2} & U_j \tilde{S}_j^{1/2} \\ \tilde{U}_j S_j^{1/2} & \tilde{U}_j \tilde{S}_j^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{O}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_j & \tilde{\mathcal{O}}_j' \\ \tilde{\mathcal{O}}_j'' & \tilde{\mathcal{O}}_j \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

La matriz de observabilidad  $C_j$  se determina considerando los  $l$  primeros sensores, se muestra en la Ecuación (B.10):

$$C_j = \mathcal{O}_j(1:l, 1:j). \quad (\text{B.10})$$

El algoritmo resultante de la aplicación Fast multi-Order para MOESP se describe en como sigue.

### B.2.2. Algoritmo FMO-MOESP

- Datos de entrada.

- Vector de entradas:  $u_k, \dots, u_N \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

- Vector de observación:  $y_k, \dots, y_N \in \mathbb{R}^{l \times 1}$

- Rango orden deseado:  $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}^{1 \times n_t}$

1. Formación de matrices Hankel:  $H_0 = \begin{bmatrix} U_{0,i,N} \\ Y_{0,i,N} \end{bmatrix}$

2. Factorización LQ de Hankel:  $H_0 = LQ = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}$

3. Formación de la matriz  $L_{22}$ :  $L_{22} = L_{[mi+1:i \times (l+m), mi+1:i \times (l+m)]}$

4. Descomposición SVD a  $L_{22}$ :  $L_{22} = USV^T$

5. Matriz de observabilidad:  $\mathcal{O}_t = U_{[:,1:n_t]} S_{[1:n_t, 1:n_t]}^{1/2}$

6. Matriz de observación:  $C_t = \mathcal{O}_{t[1:l, 1:n_t]}$

7. Para  $j = 2$  hasta  $t$

8.  $A_j = \mathcal{O}_j^{\uparrow \dagger} \mathcal{O}_j^{\downarrow}$

9.  $C_j = C_{t[1:l, 1:n_j]}$

10.  $\{A_j, C_j\} \rightarrow f_j, \beta_j, \Phi_j$

11. Fin

### B.3. FMO para SSICOV

#### B.3.1. Desarrollo de Formución

Considerando la sección 2.5 y 2.6.3 y las definiciones para las matrices de observabilidad para un orden máximo  $n_t$ , dado por las Ecuaciones (2.69), (2.71) y (2.81); es posible escribir las siguientes matrices  $\mathcal{O}_t, A_t, S_t$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{O}_t^\uparrow = Q_t R_t, \quad S_t = Q_t^T \mathcal{O}_t^\downarrow, \quad A_t = R_t^{-1} S_t, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{O}_t^\uparrow A_t = \mathcal{O}_t^\downarrow. \quad (\text{B.12})$$

Por su parte las matrices  $R_t, S_t$ , pueden ser divididas en bloques  $n_j$  que componen el orden máximo  $n_t$ :

$$R_t^{-1} = \begin{bmatrix} R_j^{(11)} & R_j^{(12)} \\ 0 & R_j^{(22)} \end{bmatrix}, \quad S_t = \begin{bmatrix} S_j^{(11)} & S_j^{(12)} \\ S_j^{(21)} & S_j^{(22)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Siendo las matrices  $R_j^{(11)}, S_j^{(11)} \in \mathbb{R}^{n_j \times n_j}$ , entonces la matriz de transición de estado se construye de tal manera que satisface la siguientes expresión:

$$A_j = R_j^{(11)} S_j^{(11)}, \quad (\text{B.14})$$

considerando además que:

$$\hat{R}_j^{(11)-1} = R_j^{(11)}. \quad (\text{B.15})$$

Para llegar a esta solución, se busca que las matrices de observabilidad  $\mathcal{O}_t^\uparrow, \mathcal{O}_t^\downarrow$  de la Ecuación (2.71), sean particionadas en las primeras  $n_j$  órdenes, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_t &= \begin{bmatrix} Q_j^{(1)} & Q_j^{(2)} \end{bmatrix}, \quad R_t = \begin{bmatrix} \hat{R}_j^{(11)} & \hat{R}_j^{(12)} \\ 0 & \hat{R}_j^{(22)} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{O}_t^\uparrow &= \begin{bmatrix} Q_j^{(1)} & Q_j^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{R}_j^{(11)} & \hat{R}_j^{(12)} \\ 0 & \hat{R}_j^{(22)} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{O}_t^\downarrow &= \begin{bmatrix} Q_j^{(1)} \hat{R}_j^{(11)} & Q_j^{(1)} \hat{R}_j^{(12)} + Q_j^{(2)} \hat{R}_j^{(22)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Por comparación de las Ecuaciones (B.11) y (B.16), la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_j^\uparrow$ , es igual a:

$$\mathcal{O}_j^\uparrow = Q_j^{(1)} R_j^{(11)}. \quad (\text{B.17})$$

Que es equivalente a realizar la descomposición  $QR$  de  $\mathcal{O}_j^\uparrow$ , con este resultado, la determinación de la matriz de transición de estado,  $A$ , a partir de las Ecuaciones (B.13) y (B.16), se expresa como:

$$A_j = R_j^{(11)-1} Q_j^{(1)T} \mathcal{O}_j^\downarrow, \quad (\text{B.18})$$

si se considera la expresión (B.11) y (B.16), se obtiene:

$$S_j = Q_j^T \mathcal{O}_j^\downarrow = \begin{bmatrix} Q_j^{(1)T} \\ Q_j^{(2)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_j^\downarrow & \tilde{\mathcal{O}}_j^\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_j^{(1)T} \mathcal{O}_j^\downarrow & Q_j^{(1)T} \tilde{\mathcal{O}}_j^\downarrow \\ Q_j^{(2)T} \mathcal{O}_j^\downarrow & Q_j^{(2)T} \tilde{\mathcal{O}}_j^\downarrow \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

de la Ecuación (B.19), se obtiene el siguiente valor para  $S_j^{(11)}$

$$S_j^{(11)} = Q_j^{(1)T} \mathcal{O}_j^\downarrow. \quad (\text{B.20})$$

Con el desarrollo realizado, queda demostrado que la determinación de varios órdenes de un sistema puede realizarse a partir de la factorización  $QR$  para un orden máximo  $n_t$  en la estructura. Para todas las restantes  $j = 1, \dots, t-1$  órdenes, la matriz de transición de estado,  $A_j$ , se determina a partir de las Ecuación (B.15) y (B.20). El algoritmo resultante de la aplicación de Fast Multi-Order a SSICOV, queda expresado en la siguiente sección.

### B.3.2. Algoritmo FMO-SSICOV

- Datos de entrada.
  - Vector de observación:  $y_k, \dots, y_N \in \mathbb{R}^{l \times 1}$
  - Rango orden deseado:  $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}^{1 \times n_t}$
1. Formación de matrices Hankel:  $Y_p^{ref} = Y_{0|i-1}^{ref}$  y  $Y_f = Y_{i|2i-1}$
  2. Formación matriz de Toeplitz:  $\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = Y_f Y_p^{refT}$
  3. Descomposición SVD a Toeplitz:  $\mathcal{T}_{1|i}^{ref} = U S V^T$
  4. Matriz de Observabilidad:  $\mathcal{O}_t = U_{[:,1:n_t]} S_{[1:n_t,1:n_t]}^{1/2}$
  5.  $\mathcal{O}_t^\uparrow = \mathcal{O}_{t[1:l(i-1),1:n_t]}$
  6.  $\mathcal{O}_t^\downarrow = \mathcal{O}_{t[(l+1):li,1:n_t]}$
  7. Matriz de observación:  $C_t = \mathcal{O}_{t[1:l,1:n_t]}$
  8. Factorización  $QR$ :  $\mathcal{O}_t^\uparrow = Q_t R_t$
  9.  $S_t = Q_t^T \mathcal{O}_t^\downarrow$
  10.  $T = R_t^{-1}$
  11. Para  $j = 2$  hasta  $t$
  12.  $A_j = T_{[1:n_j,1:n_j]} S_{t[1:n_j,1:n_j]}$
  13.  $C_j = C_{t[1:l,1:n_t]}$
  14.  $\{A_j, C_j\} \rightarrow f_j, \beta_j, \Phi_j$
  15. Fin



## Anexo C

# IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

### C.1. Introducción

Con la finalidad de comprobar el funcionamiento de los algoritmos descritos en el Capítulo 2, se desarrolla un modelo numérico, que corresponde a un edificio de corte plano, estructurado en base a columnas y vigas metálicas, Figura C.1. La estructura es excitada en la base por diferentes acciones que corresponden a impacto, ruido blanco y sismo. Para cada una de las excitaciones se realizan identificaciones de propiedades modales de la estructura y se comprueban los resultados numéricos de la identificación con los valores teóricos.

#### C.1.1. Descripción de la Estructura

La estructura modelada, tiene características similares a la estructura ensayada en laboratorio; empotrada en la base, tiene 6 niveles (equivalentes a 6 grados de libertad determinada por el desplazamiento horizontal) con alturas variables entre niveles y una altura total de  $1,99[m]$ . Se asume que la viga de entrepiso es indeformable. Los pesos se encuentran concentrados en los nodos que forman la unión entre vigas y columnas; sus dimensiones se indican en la Figura C.1.

La Tabla C.1 describe un resumen del peso concentrado y actuante sobre cada nivel y las alturas de entrepisos. Se considera que las alturas para cada uno de los entrepisos es entre las partes superiores de la viga de entrepiso, como lo muestra la Figura C.1.

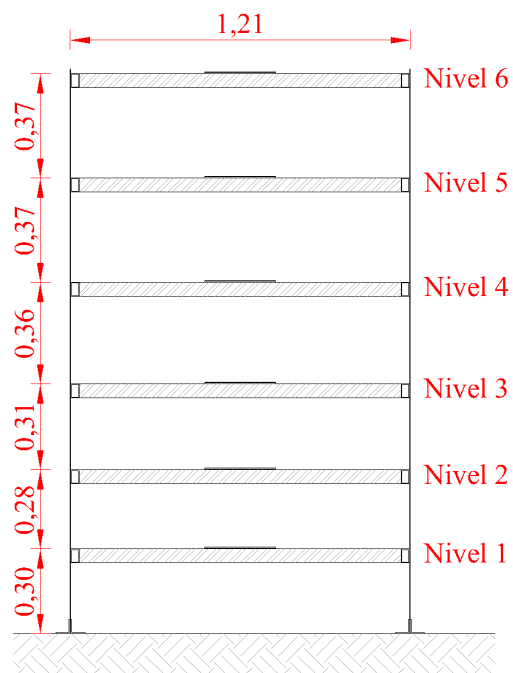


Figura C.1: *Modelo Numérico de la Estructura*

Tabla C.1: *Pesos y Alturas del Modelo Numérico*

<b>NIVEL</b>	<b>ALTURA</b> [m]	<b>PESO</b> [Kgf]
1	0,30	27,568
2	0,28	27,584
3	0,31	28,669
4	0,36	27,902
5	0,37	28,128
6	0,37	27,548

Las propiedades mecánicas del acero utilizado son las definidas en la Tabla C.2.

Tabla C.2: *Propiedades Mecánicas del Acero para el Modelo Numérico*

PROPIEDADES	UNIDAD	VALOR
Peso Específico, $\gamma$	$[Kgf/m^3]$	7850,0
Módulo de Elasticidad, $E$	$[Kgf - m^2]$	235,1
Tensión de Fluencia, $\sigma_y$	$[Kgf/m^2]$	2460,0
Sección transversal columna, $b \times h$	$[Kgf/m^3]$	50,0 $\times$ 3,0

La matriz de masa esta dado por:

$$M_e = \begin{bmatrix} 2,808 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,867 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,844 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,922 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,812 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,810 \end{bmatrix} \left[ \frac{Kgf - s^2}{m} \right].$$

La matriz de rigidez esta definida como:

$$K_e = \begin{bmatrix} 2554,89 & -2554,89 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2554,89 & 5109,78 & -2554,89 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2554,89 & 5328,66 & -2773,77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2773,77 & 7117,79 & -4344,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4344,03 & 10239,29 & -5895,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5895,26 & 10688,33 \end{bmatrix} \left[ \frac{Kgf}{m} \right].$$

Finalmente, se considera que la estructura tiene un amortiguamiento proporcional a la matriz de masa  $M_e$  y la matriz de rigidez  $K_e$ , con un amortiguamiento de  $\beta = 2[\%]$  para el modo 1, y  $\beta = 1[\%]$  para el modo 6, y la matriz de amortiguamiento es:

$$C_e = \begin{bmatrix} 1,492 & -0,505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,505 & 2,018 & -0,505 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,505 & 2,053 & -0,549 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,549 & 2,435 & -0,859 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,859 & 3,013 & -1,166 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,166 & 3,101 \end{bmatrix} \left[ \frac{Kgf \cdot s}{m} \right].$$

La determinación de frecuencias fundamentales y las formas de vibrar de la estructura, se realiza a partir de la obtención de los valores y vectores propios de la matriz  $[M_e]^{-1}[K_e]$ . Los resultados de frecuencia, amortiguamiento y forma modal se muestran en el Figura C.2.

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

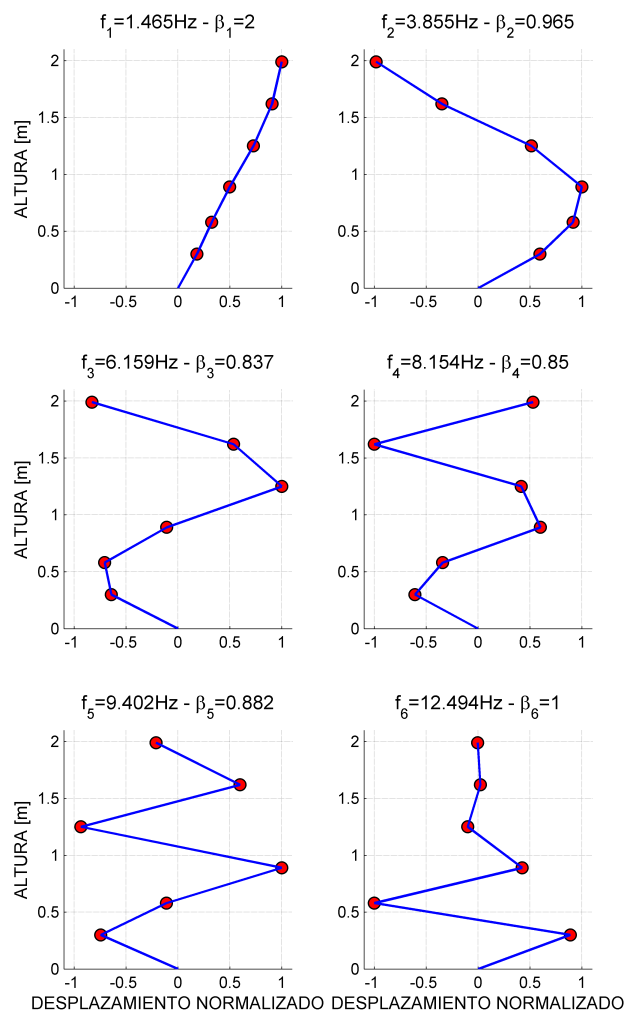


Figura C.2: Frecuencias, Amortiguamientos y Formas Modales de la Estructura Modelo

Los resultados de frecuencias y amortiguamientos identificados, para el prodecimiento numérico, son descritos en la Tabla C.3.

Tabla C.3: *Parámetros Modales Obtenidos de Prodemiemo Numérico*

MODO	FRECUENCIA $f$ [Hz]	AMORTIGUAMIENTO $\beta$ [%]
1	1,465	2,000
2	3,855	0,965
3	6,159	0,837
4	8,154	0,850
5	9,402	0,882
6	12,494	1,000

La matriz de formas modales que resulta de la formulación numérica ha sido normalizada de

modo que su valor máximo sea la unidad:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & -0,982 & -0,829 & 0,530 & -0,211 & -0,003 \\ 0,906 & -0,348 & 0,535 & -1 & 0,598 & 0,021 \\ 0,727 & 0,514 & 1 & 0,415 & -0,936 & -0,101 \\ 0,499 & 1 & -0,108 & 0,601 & 1 & 0,424 \\ 0,324 & 0,915 & -0,706 & -0,341 & -0,111 & -1 \\ 0,183 & 0,597 & -0,643 & -0,608 & -0,745 & 0,889 \end{bmatrix}.$$

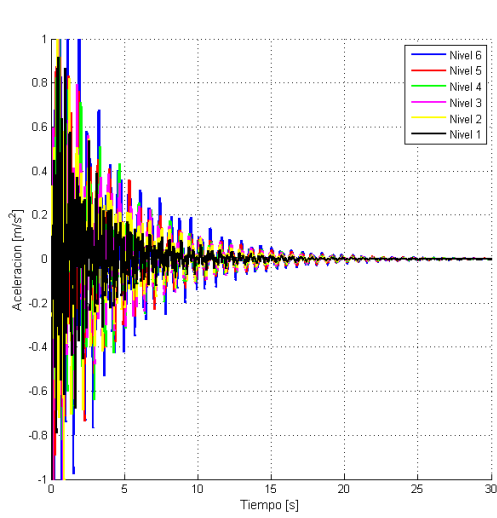
### C.1.2. Proceso de Identificación de Parámetros Modales

En los siguientes párrafos se describen las etapas que son necesarias para la identificación de propiedades modales, para aplicar los métodos de identificación ERA, MOESP y SSICOV a la estructura descrita en las secciones 2.3, 2.4 y 2.5; se emplea la siguiente metodología:

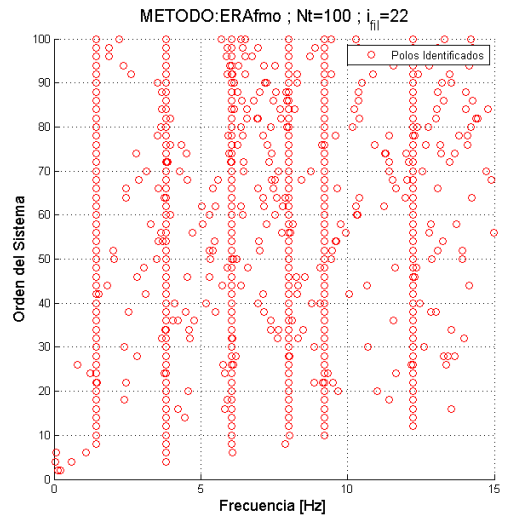
1. Se aplica una carga puntual, registro de sismo y registro de ruido coloreado en la base de la estructura.
2. La respuesta de la estructura, para la condición de impacto, se observa con una frecuencia de muestreo de  $Fs = 200[Hz]$  y un número total de  $N = 6000$  muestras, haciendo un tiempo de  $30[s]$ .
3. La respuesta de la estructura, para la condición de sismo, evalúa el sismo de Melipilla 2010, se observa con una frecuencia de muestreo de  $Fs = 200[Hz]$  y registro que cuenta con un número total de  $N = 15864$  muestras, haciendo un tiempo de  $79,32[s]$ .
4. La respuesta de la estructura, para la condición de ruido blanco, se observa con una frecuencia de muestreo de  $Fs = 200[Hz]$  y un número total de  $N = 72000$  muestras, haciendo un tiempo de  $360[s]$ .
5. Para la identificación de propiedades modales se consideran los grados de libertad 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
6. Para todas las identificaciones se define como órdenes del sistema  $n_j = 2 : 2 : 100$ .

La Figura C.3 muestra la respuesta de la estructura a impacto y los polos identificados con ERA; la Figura C.4 muestra la respuesta de la estructura a la acción de sismo y los polos identificados con MOESP y; la Figura C.5 muestra la respuesta de la estructura a ruido blanco y los polos identificados con SSICOV.

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

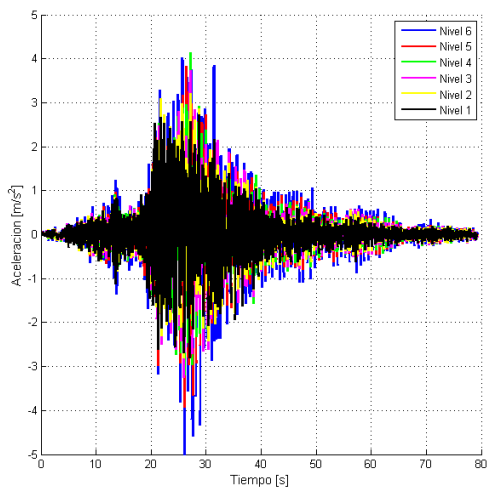


(a) Respuesta de la estructura ante impacto

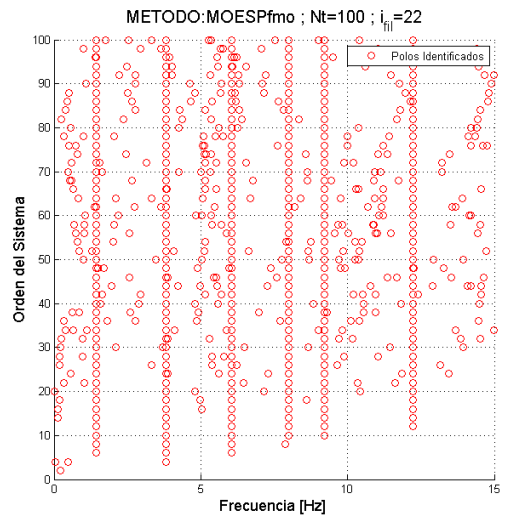


(b) Polos identificados con ERA

Figura C.3: *Registros de Impacto e Identificación de Polos con ERA*

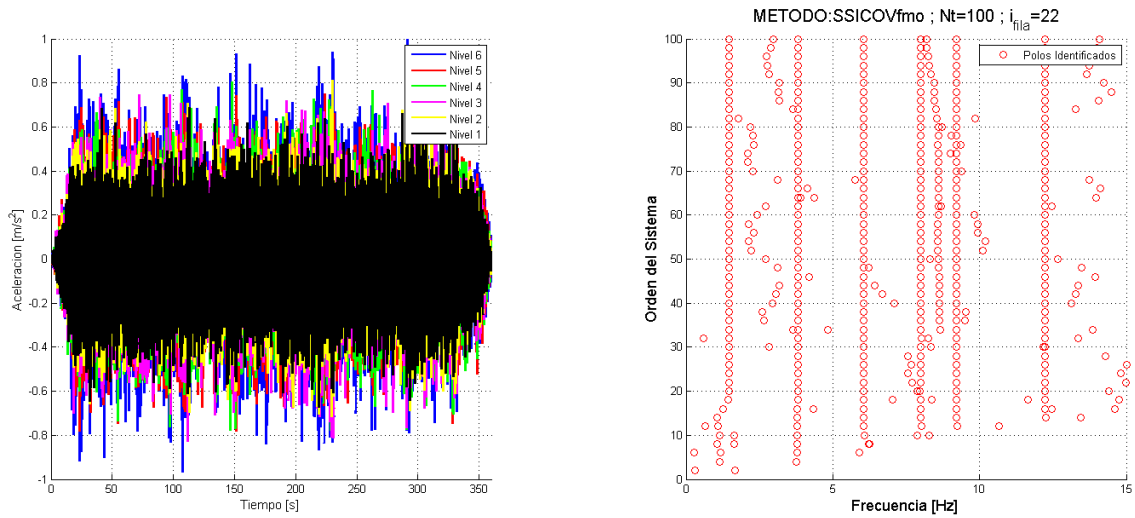


(a) Respuesta de la estructura por acción sísmica en la base



(b) Polos identificados con MOESP

Figura C.4: *Registros de Acción Sísmica e Identificación de Polos con MOESP*

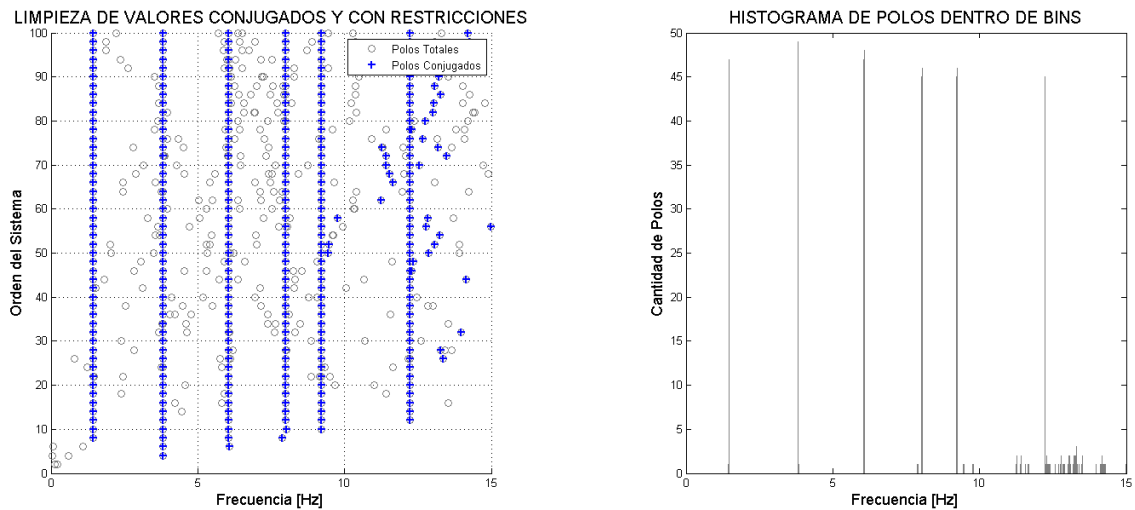


(a) Respuesta de la estructura por acción de ruido en todos los grados de libertad

(b) Polos identificados con SSICOV

Figura C.5: *Registros de Ruido Actuante e Identificación de Polos con SSICOV*

Luego se aplica el criterio fuerte de selección, que limpia los valores no conjugados, con restricciones para límites de frecuencia,  $f_{max}$ , y amortiguamiento,  $\beta_{max}$ ; un histograma completa este paso mostrando frecuencias predominantes en rangos bien definidos. Las Figuras C.6, C.7 y C.8, muestran la limpieza realizada en los polos identificados en el modelo para cada una de las excitaciones en análisis, se considera  $f_{max} = 15[Hz]$  y  $\beta_{max} = 20[\%]$ .

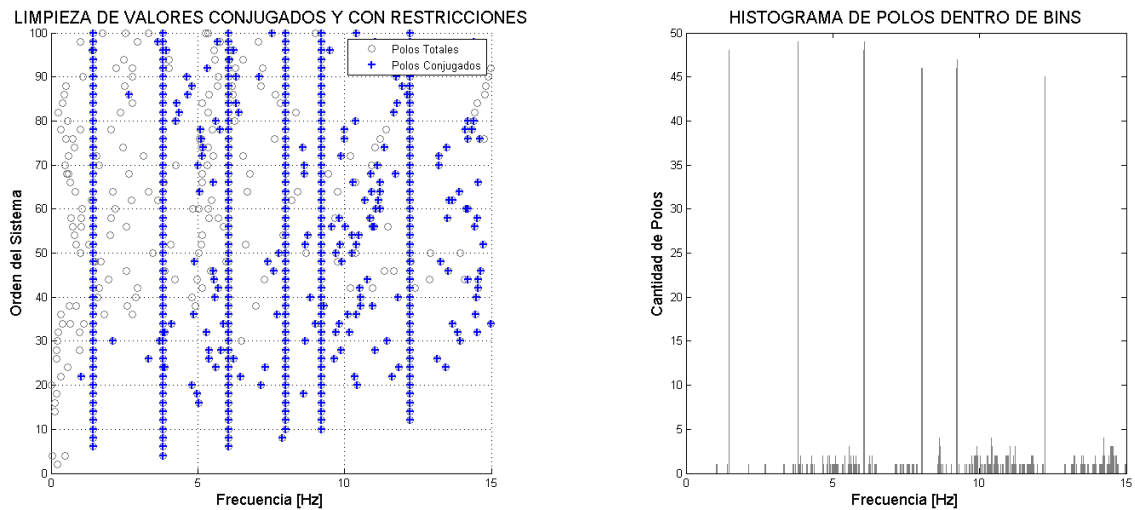


(a) Limpieza de polos y restricciones para frecuencia y amortiguamiento

(b) Histograma de polos

Figura C.6: *Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación ERA*

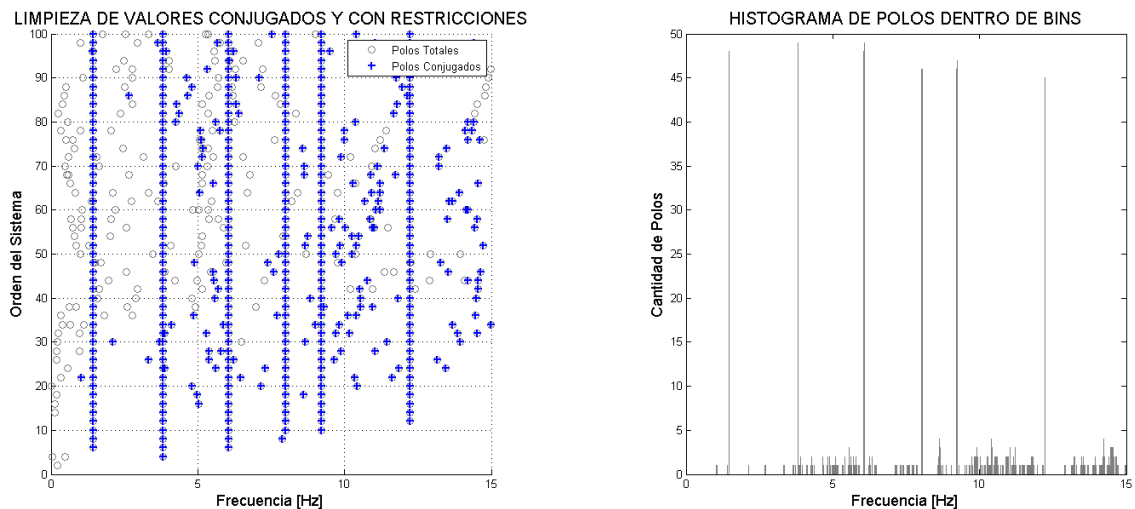
## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN



(a) Limpieza de polos y restricciones para frecuencia y amortiguamiento

(b) Histograma de polos

Figura C.7: *Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación MOESP*



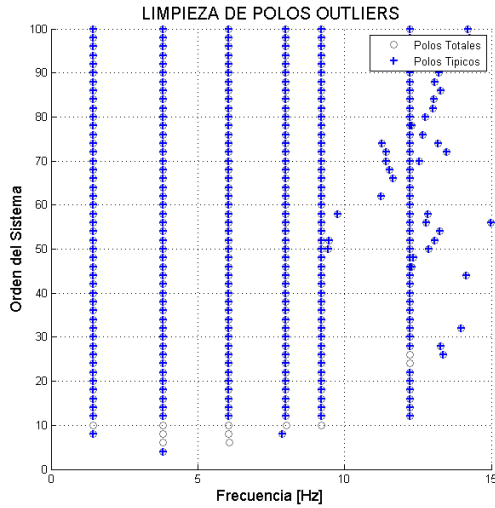
(a) Limpieza de polos y restricciones para frecuencia y amortiguamiento

(b) Histograma de polos

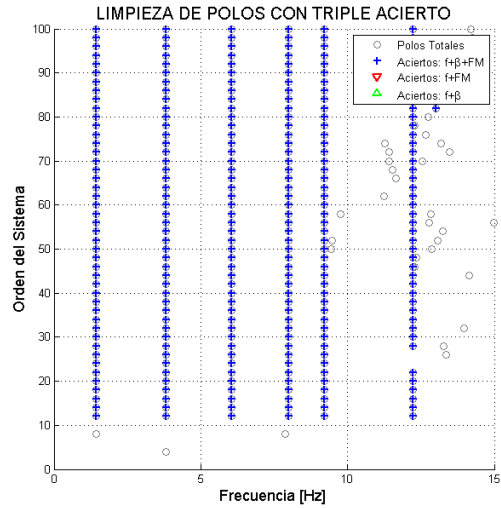
Figura C.8: *Criterio Fuerte de Selección y Generación de Histograma, Identificación SSICOV*

El criterio de limpieza débil, elimina polos con valores atípicos (outliers) dentro de un bin y verifica la estabilidad de los polos de la estructura a partir de la verificación de triple acierto para frecuencia, amortiguamiento y forma modal. Las Figuras C.9, C.10 y C.11, muestran la limpieza realizada, considerando las siguientes variaciones:  $f = 1[\%]$ ,  $\beta = 5[\%]$  y  $MAC = 2[\%]$ .



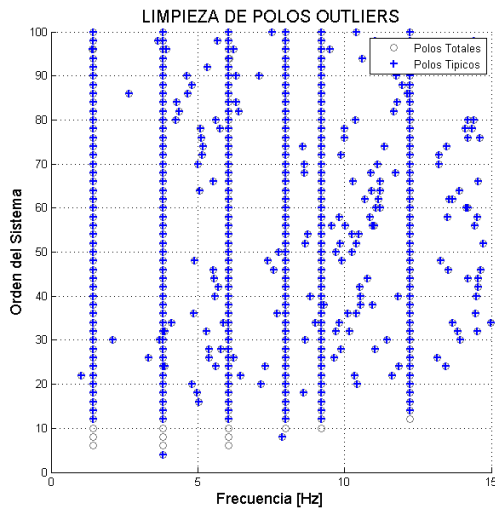


(a) Limpieza polos outliers

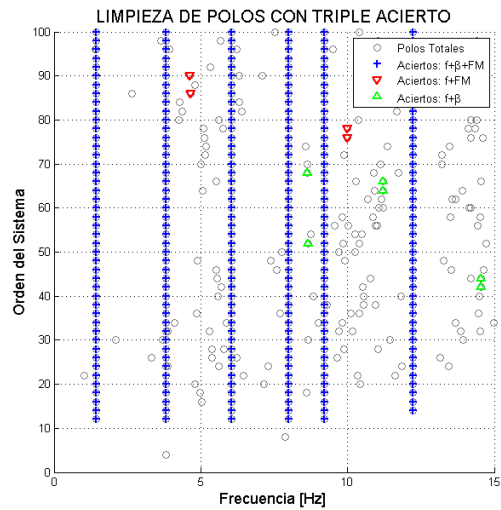


(b) Limpieza de polos con triple acierto

Figura C.9: Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación ERA



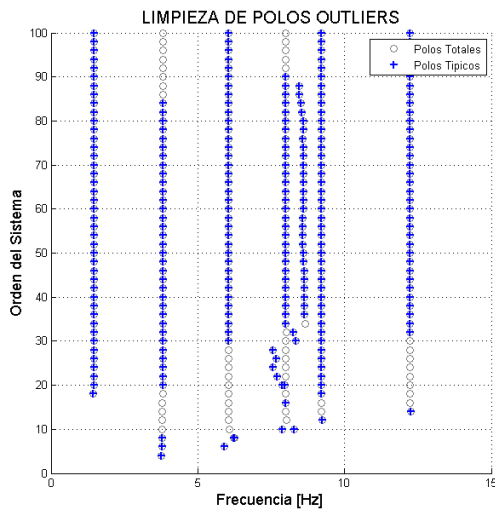
(a) Limpieza polos outliers



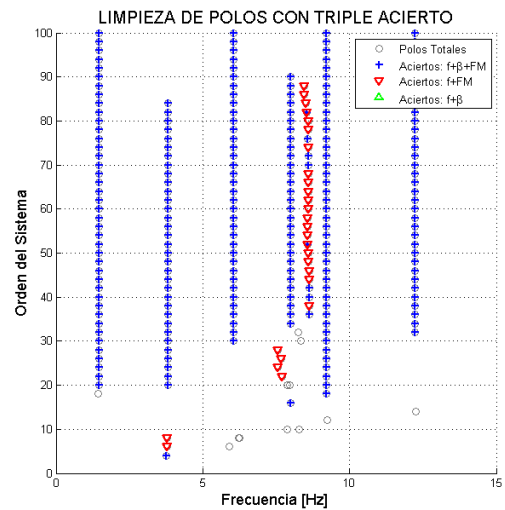
(b) Limpieza de polos con triple acierto

Figura C.10: Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación MOESP

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN



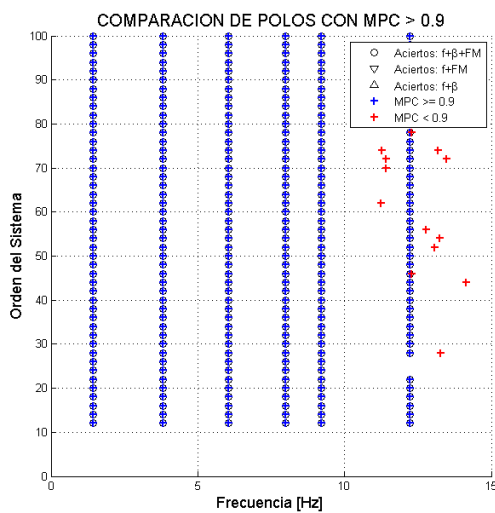
(a) Limpieza polos outliers



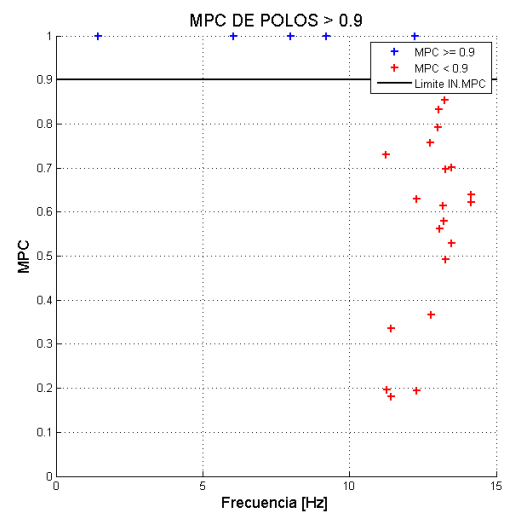
(b) Limpieza de polos con triple acierto

Figura C.11: Limpieza de Polos Atípicos y Diagrama de Estabilización con Triple Acierto, Identificación SSICOV

La consistencia de formas modales de los polos identificados, se realiza considerando un  $MPC$  superior a 90[%]. Las Figuras C.12, C.13 y C.14, muestran los resultados obtenidos.

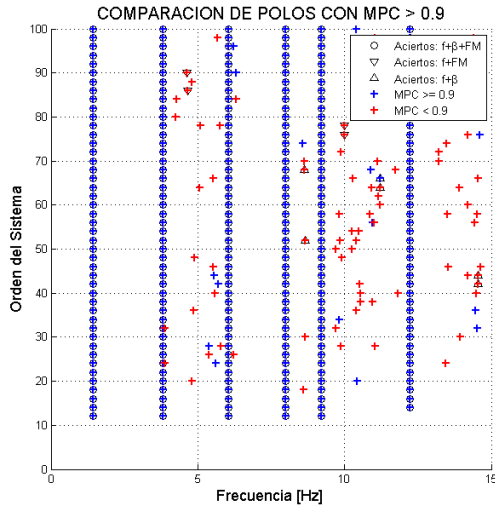


(a) Polos con  $MPC \geq 0.90$  en órdenes del sistema

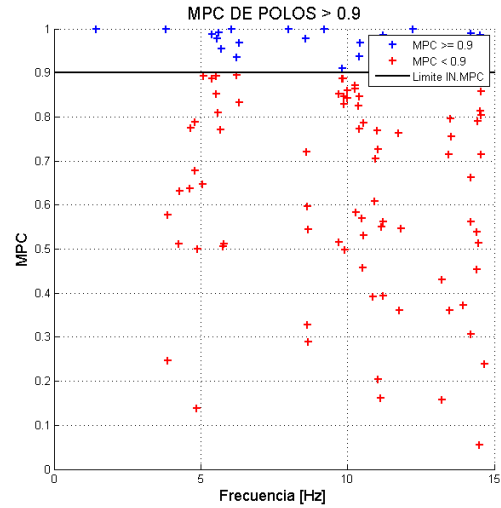


(b) Limpieza de polos  $MPC \geq 0.90$

Figura C.12: Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación ERA

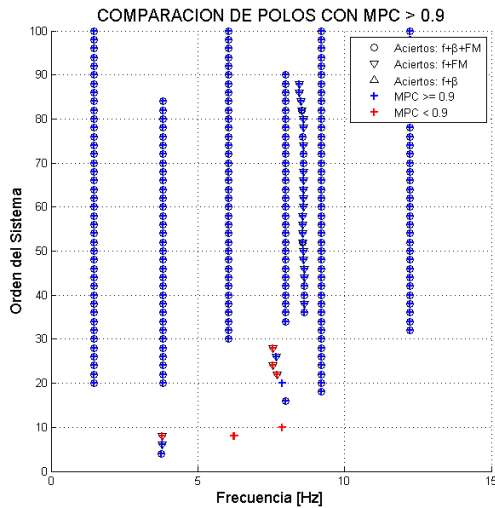


(a) Polos con  $MPC \geq 0.90$  en órdenes del sistema

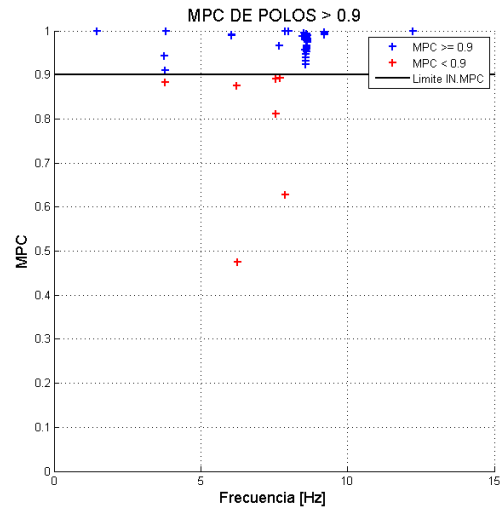


(b) Limpieza de polos  $MPC \geq 0.90$

Figura C.13: Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación MOESP



(a) Polos con  $MPC \geq 0.90$  en órdenes del sistema

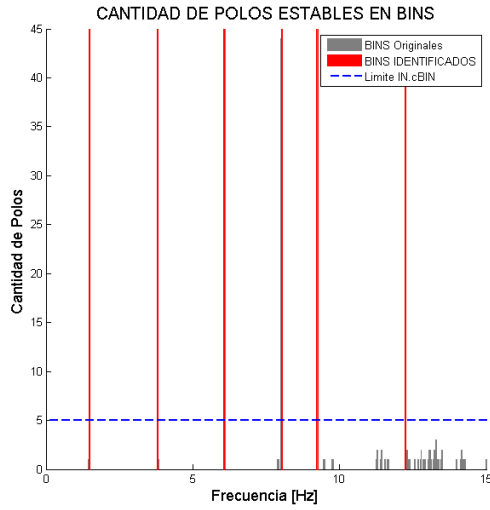


(b) Limpieza de polos  $MPC \geq 0.90$

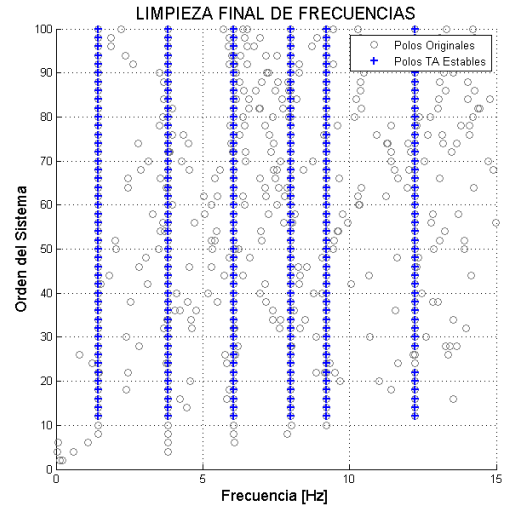
Figura C.14: Limpieza de Polos con MPC Inferior a 0.90, Identificación SSICOV

Completadas las limpiezas en función al criterio fuerte y criterio débil (MPC y estabilidad en órdenes próximos), se hace un resumen con la cantidad de polos estables en el sistema que se muestran en las Figuras C.15, C.16 y C.17.

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

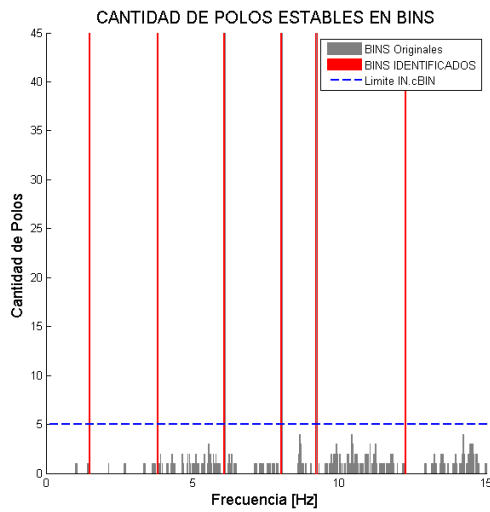


(a) Polos estables dentro de bin

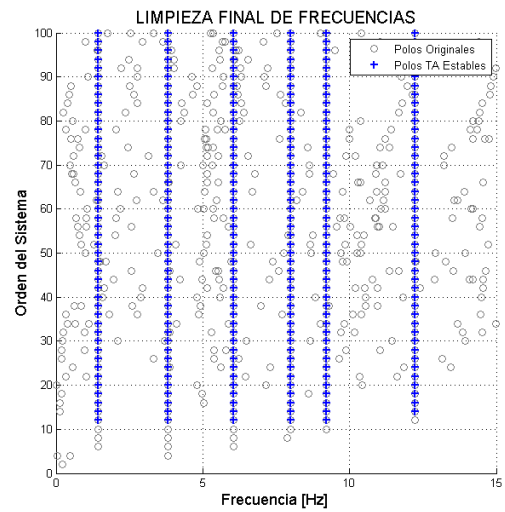


(b) Limpieza final de polos

Figura C.15: Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación ERA

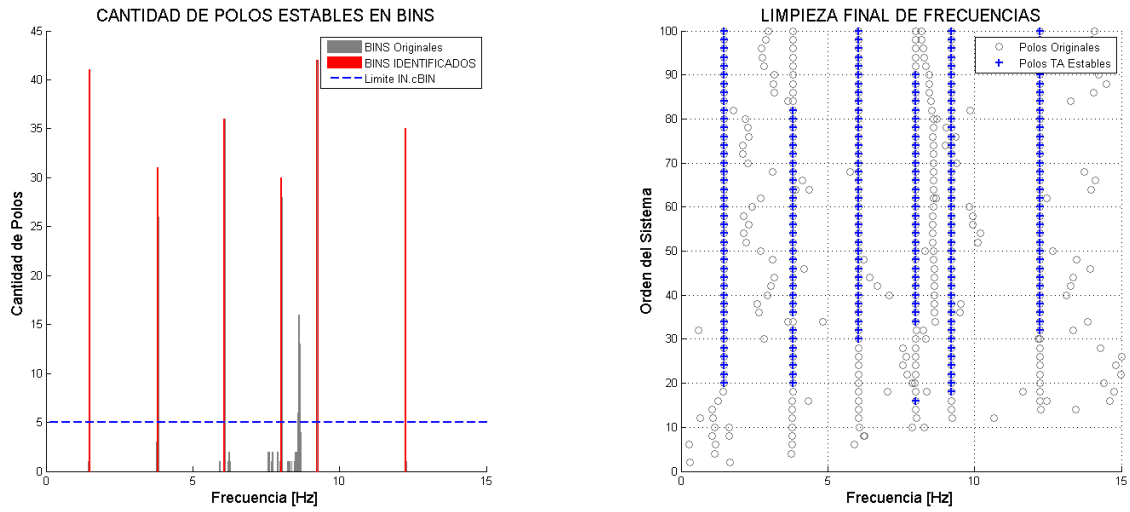


(a) Polos estables dentro de bin



(b) Limpieza final de polos

Figura C.16: Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación MOESP

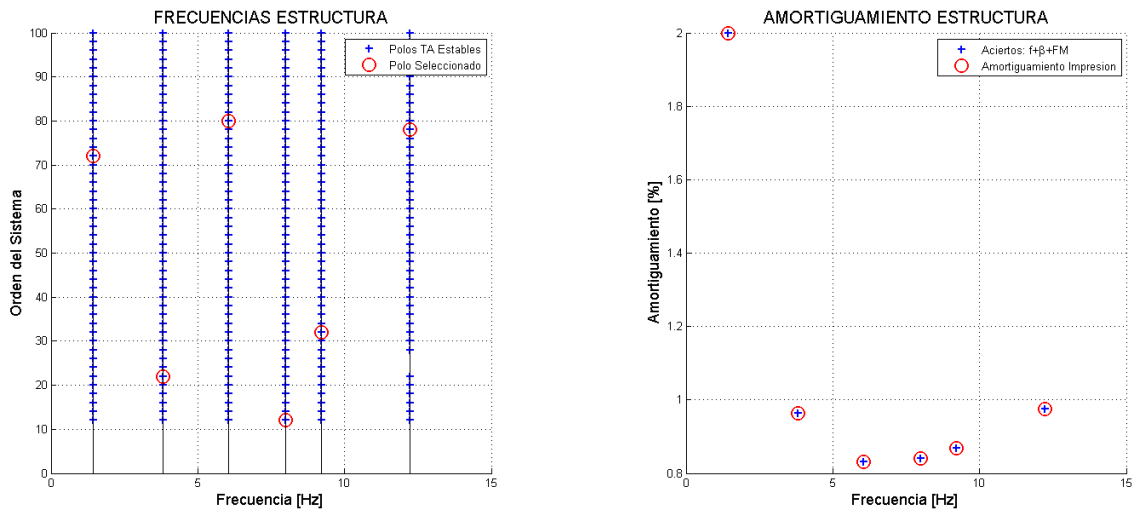


(a) Polos estables dentro de bin

(b) Limpieza final de polos

Figura C.17: Resumen de Polos Estables del Sistema, Identificación SSICOV

Finalmente se realiza la elección del polo representativo para todos los polos estables, esto se hace determinando el promedio de los polos estables en frecuencia y amortiguamiento, para forma modal se elige el polo que posee mayor MAC entre órdenes consecutivos. Los resultados son mostrados en las Figuras C.18, C.19 y C.20.

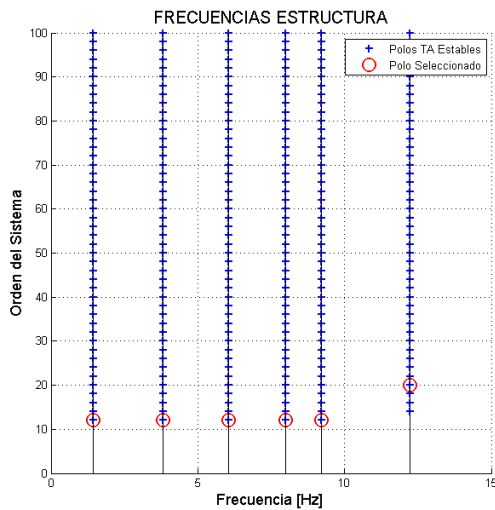


(a) Polo representativo en frecuencia

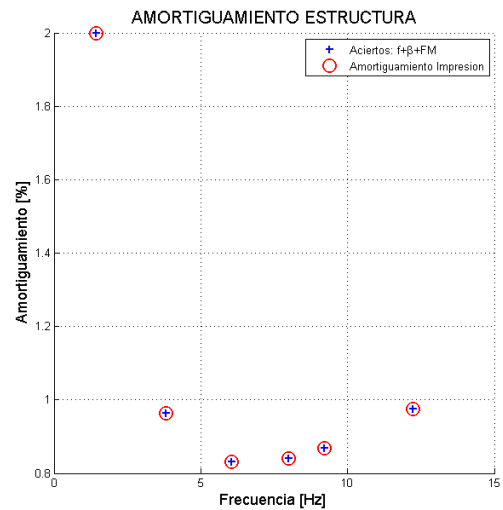
(b) Polo representativo en amortiguamiento

Figura C.18: Elección de Polo Estable Representativo, Identificación ERA

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

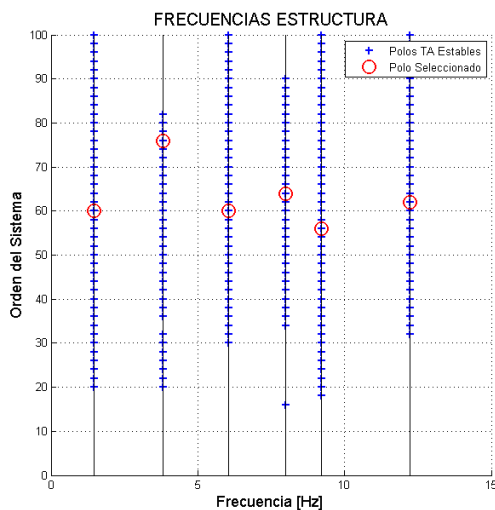


(a) Polo representativo en frecuencia

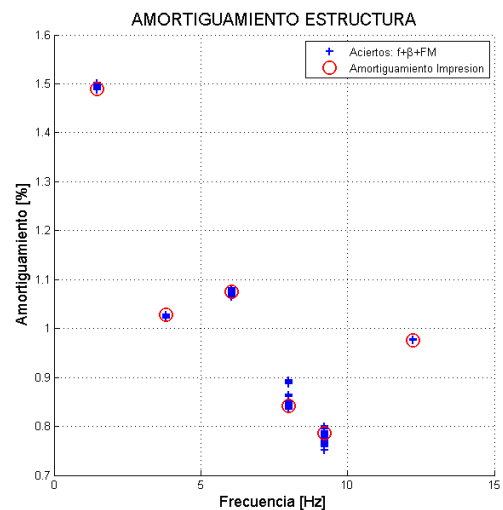


(b) Polo representativo en amortiguamiento

Figura C.19: Elección de Polo Estable Representativo, Identificación MOESP



(a) Polo representativo en frecuencia



(b) Polo representativo en amortiguamiento

Figura C.20: Elección de Polo Estable Representativo, Identificación SSICOV

Como se mencionó en la sección 2.7.6, como una metodología complementaria se determina la ANPSD de los registros, para ello se observa la respuesta de PSD para los registros en cada uno de los canales en la Figura C.21 y su aplicación en las identificaciones se observa en las Figuras C.22, C.23 y C.24, mostrando consistencia entre los polos identificados con la señal correspondiente al espectro de frecuencias.

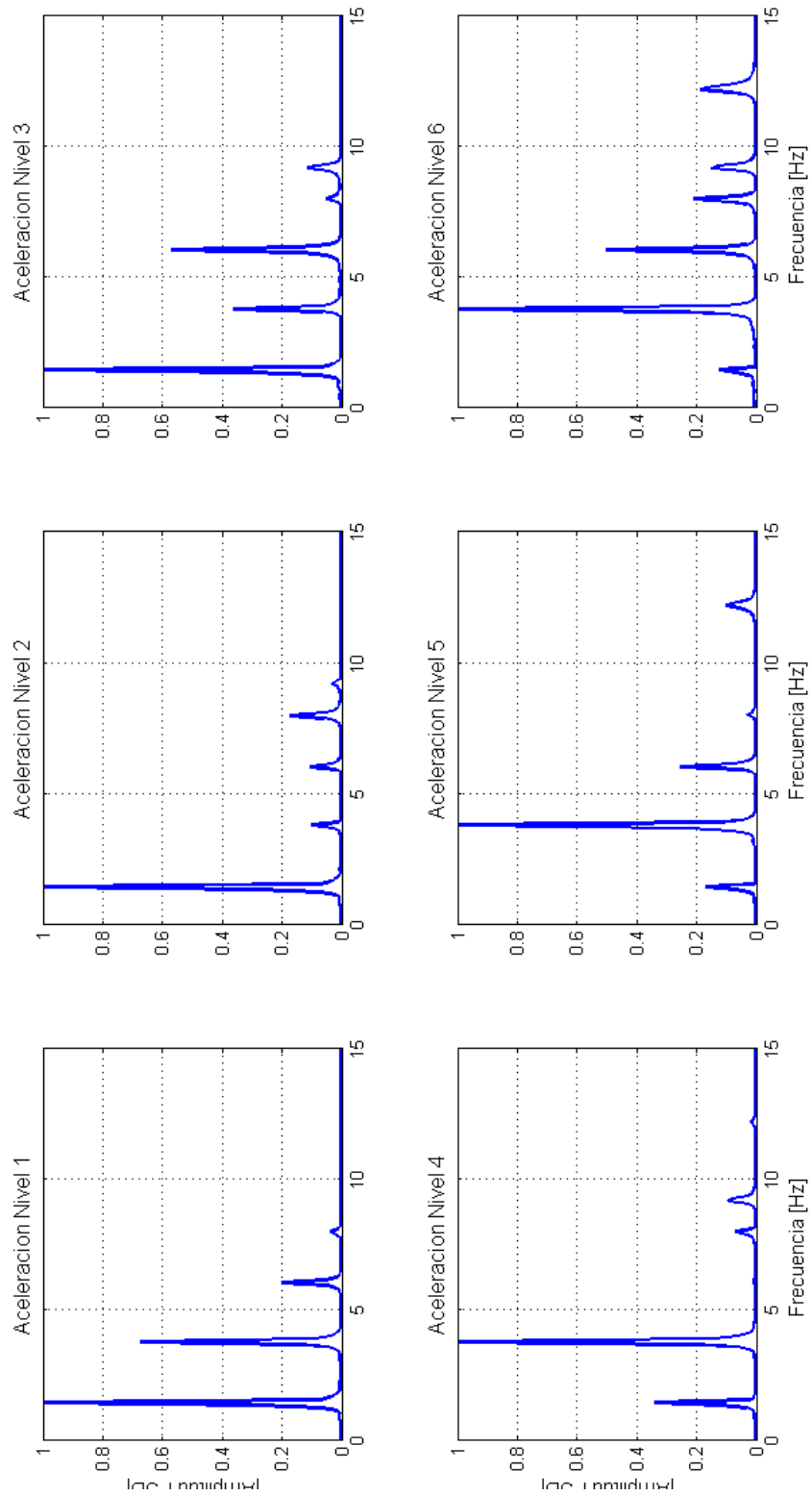


Figura C.21: *Promedio Normalizado de Densidad Espectral de Potencia*

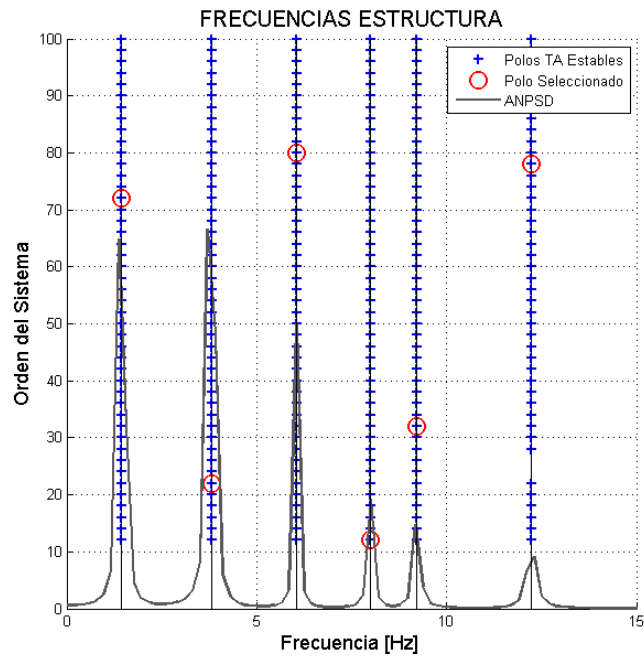


Figura C.22: Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación ERA

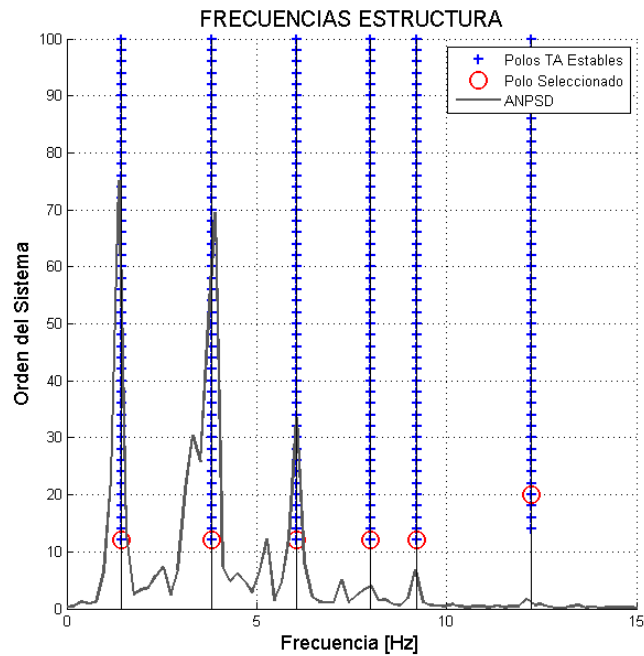


Figura C.23: Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación MOESP



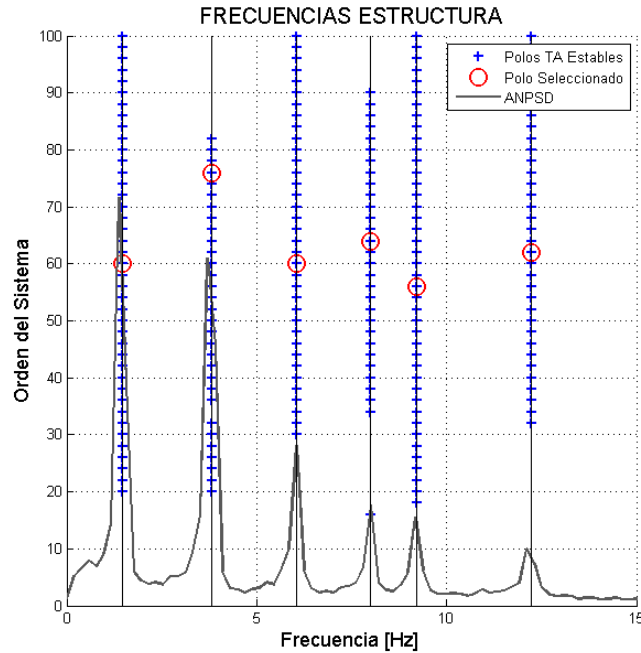


Figura C.24: Frecuencia Identificada con Polos Estables y ANPSD, Identificación SSICOV

Los resultados de la Tabla C.4 muestran las comparaciones en frecuencia, entre la solución teórica y la determinada con identificación del modelo numérico; los valores obtenidos son similares y las columnas de errores muestran que éste va aumentando para los modos superiores y el máximo error identificado es inferior a 1,25[%] (en el Modo 6).

Tabla C.4: Frecuencia de Modelo Teórico e Identificadas

MODO	MODELO NUMÉRICO	FREC.	ERROR	FREC.	ERROR	FREC.	ERROR
		ERA $f[Hz]$	ERA [%]	MOESP $f[Hz]$	MOESP [%]	SSICOV $f[Hz]$	SSICOV [%]
1	1,465	1,465	0,02	1,465	0,02	1,469	-0,28
2	3,855	3,850	0,12	3,850	0,12	3,848	0,17
3	6,159	6,140	0,31	6,140	0,31	6,158	0,02
4	8,154	8,110	0,54	8,110	0,54	8,096	0,71
5	9,402	9,334	0,72	9,334	0,72	9,323	0,84
6	12,494	12,337	1,25	12,337	1,25	12,342	1,21

La identificación de razones de amortiguamiento, la Tabla C.5, muestra la comparación entre los resultados determinados de manera teórica y los identificados con el modelo numérico. Los errores tiene un comportamiento similar al de frecuencias, aumentando el error en los modos superiores para las identificaciones en ERA y MOESP, llegando a errores que no superan el 2,50[%] (para el modo 6); un caso diferente ocurre en la identificación del amortiguamiento en SSICOV donde se presentan errores que están en el rango entre 3,29[%] y 39,76[%] que muestra la alta variabilidad que tiene el metodo en la identificación de este parámetro, este hecho se debe principalmente a que

## ANEXO C. IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN

la estructura no tiene suficiente energía para poder desplazar la estructura hasta valores límites que permitan identificar de manera precisa el amortiguamiento correspondiente.

Tabla C.5: *Amortiguamiento del Modelo Teórico e Identificadas*

MODO	MODELO NUMERICO	FREC.	ERROR	FREC.	ERROR	FREC.	ERROR
		ERA $f[Hz]$	ERA [%]	MOESP $f[Hz]$	MOESP [%]	SSICOV $f[Hz]$	SSICOV [%]
1	2,000	1,999	0,03	1,999	0,03	1,347	32,65
2	0,965	0,963	0,25	0,963	0,25	1,086	-12,51
3	0,837	0,832	0,62	0,832	0,62	1,169	-39,76
4	0,850	0,840	1,07	0,840	1,07	0,954	-12,25
5	0,882	0,869	1,42	0,869	1,42	0,833	5,54
6	1,000	0,975	2,48	0,975	2,48	0,967	3,29

Finalmente se realiza una comparación de las formas modales, para ello se emplea MAC como base de comparación las formas modales del modelo contra la forma modal identificada para cada una de las excitaciones realizadas. En todos los casos los MAC obtenidos están por sobre 0.995 lo que demuestra que se tiene una buena coherencia en los resultados obtenidos.

Tabla C.6: *Valores MAC de Formas Modales*

MODO	IDENTIFICACIÓN	IDENTIFICACIÓN	IDENTIFICACIÓN
	ERA	MOESP	SSICOV
1	1,000	1,000	1,000
2	1,000	1,000	0,996
3	1,000	1,000	1,000
4	1,000	1,000	1,000
5	1,000	1,000	0,995
6	1,000	1,000	1,000

Los resultados gráficos para el MAC entre formas modales del modelo contra la forma modal identificada para las excitaciones de análisis, se muestran en las Figuras C.25, C.26 y C.27.

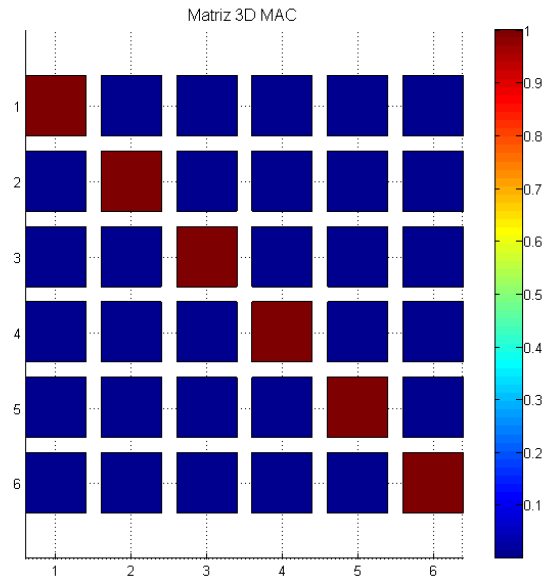


Figura C.25: *Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación ERA*

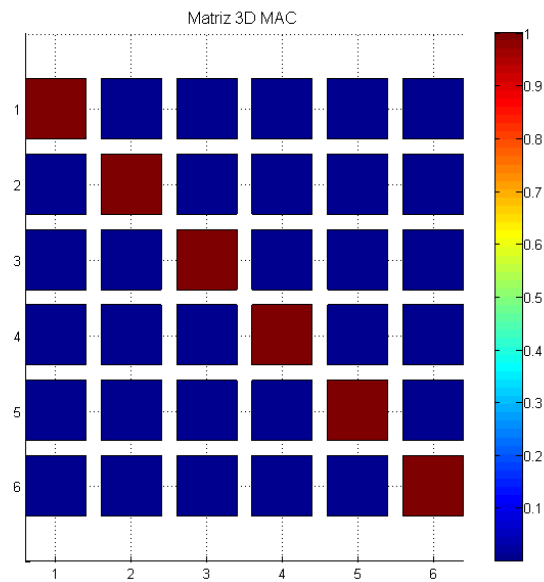


Figura C.26: *Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación MOESP*

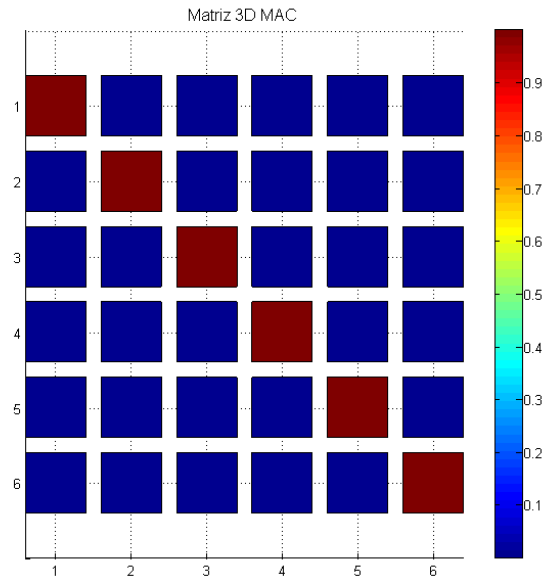


Figura C.27: Diagrama MAC para Forma Modal, Identificación SSICOV

## Anexo D

# MODELO ANALÍTICO PARA DETECCIÓN DE DAÑO POR MÁXIMA ENTROPÍA

### D.1. Introducción

El algoritmo de identificación de daño descrito en el Capítulo 3, es probado en un modelo numérico de modo que se verifique su efectividad previa a su aplicación práctica. Su implementación se realiza en el modelo de corte descrito en el Anexo C, se consideran tres tipos de excitación y siete escenarios de daño escalable en dos elementos del modelo.

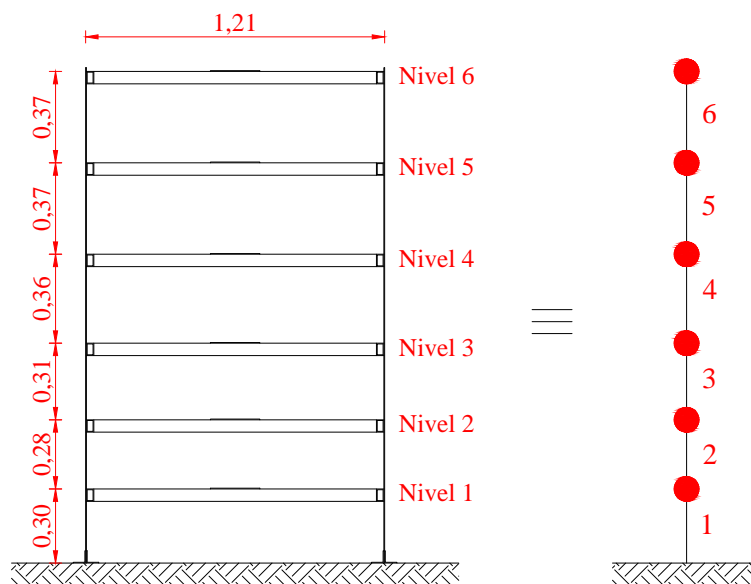


Figura D.1: *Modelo de Estructura*

### D.1.1. Descripción de la Estructura

La estructura modelada, es la descrita en el Anexo C, Figura D.1, tiene 6 grados de libertad horizontal, una altura de  $1,99[m]$ , viga indeformable y masa concentrada en los nodos. Se considera que tiene un amortiguamiento proporcional a la matriz de masa  $M_c$  y la matriz de rigidez  $K_c$ , definiendo amortiguamientos de  $\beta_1 = 2\%$  y  $\beta_6 = 1\%$ . Los resultados de frecuencia, amortiguamiento y forma modal se muestran en el Figura D.2.

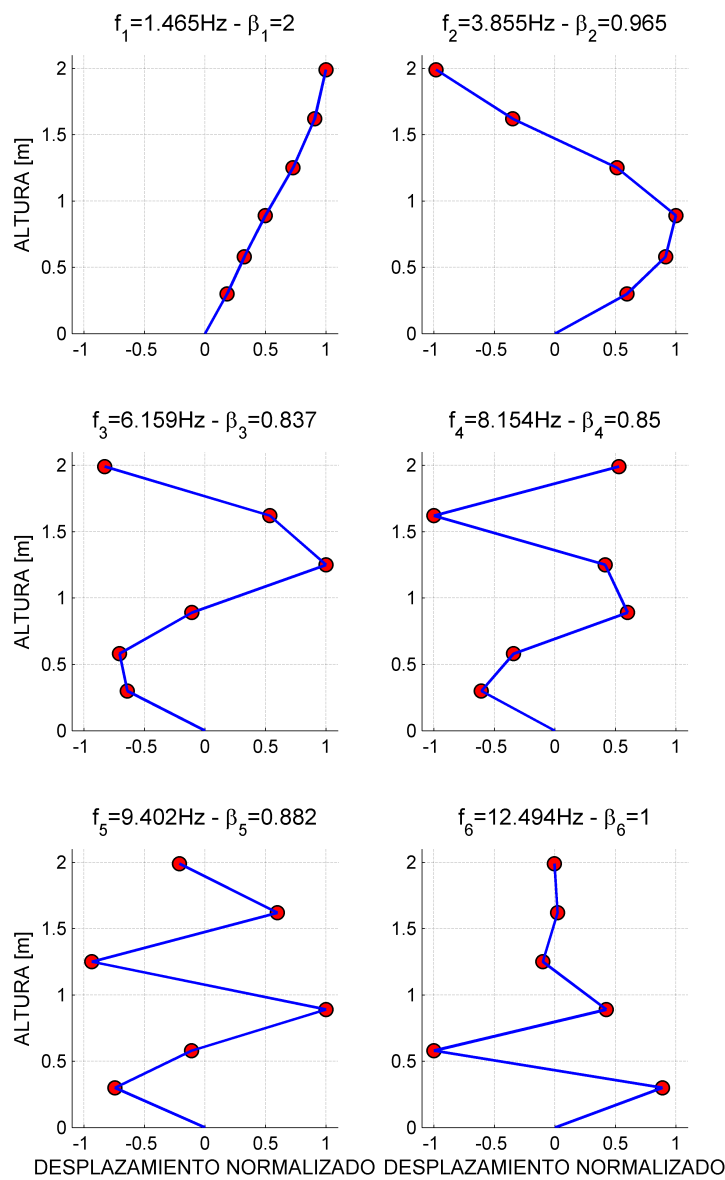


Figura D.2: Frecuencias, Amortiguamientos y Formas Modales de la Estructura Modelo

### D.1.2. Proceso de Identificación de Parámetros Modales

Para la evaluación de resultados se considera evaluar la aplicación de tres tipos de registros: i) impacto ( $\circ$ ), ii) sismo de Melipilla 2010 ( $\triangle$ ) y iii) ruido coloreado ( $\square$ ); la simbología es similar a la mostrada en el Capítulo 5 y el Anexo C. El análisis no considera la aplicación de anomalía en el modelo.

1. Se aplica la excitación en la base de la estructura.
2. La identificación del sistema se realiza considerando orden definido como:  $n_j = 2 : 2 : 100$ .
3. Se considera como elementos de observación, la respuesta en cada uno de los 6 nodos en la estructura.
4. Se definen dos elementos en la estructura, que se evalúan por separado, para verificar la efectividad del método, éstos son los elementos 2 y 4, mostrados en la Figura D.1.
5. Se consideran 7 escenarios de daño escalonado por reducción del modulo de elasticidad (EI) del elemento: 2,5[ %], 5,0[ %], 7,5[ %], 10,0[ %], 12,5[ %], 15,0[ %] y 17,5[ %].
6. El entrenamiento esta realizado considerando 10 condiciones: 10[ %], 20[ %], 30[ %], 40[ %], 50[ %], 60[ %], 70[ %], 80[ %], 90[ %] y 99[ %], para cada uno de elementos que componen el modelo.

Las Figuras D.3, D.4 y D.5, muestra la respuesta de la estructura a impacto, sismo y ruido blanco respectivamente, para la Condición Normal del modelo.

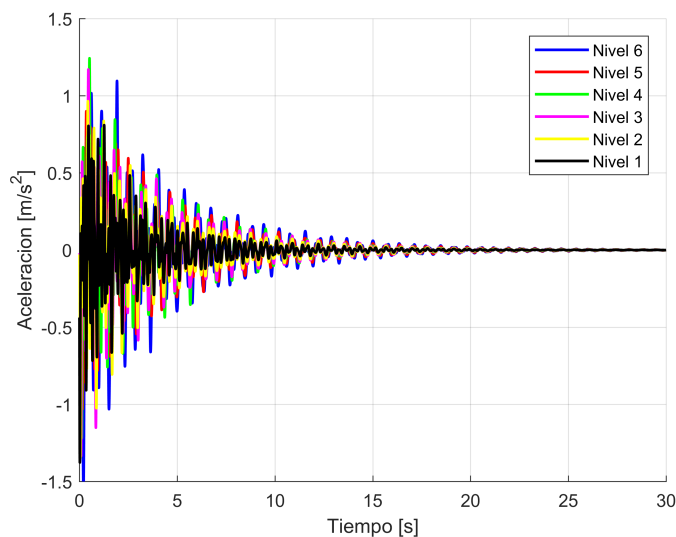


Figura D.3: *Registros de Impacto*

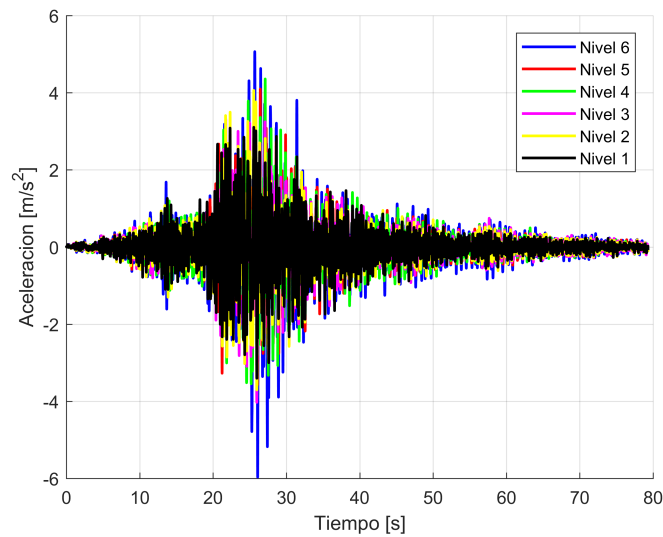


Figura D.4: *Registros de Acción Sísmica*

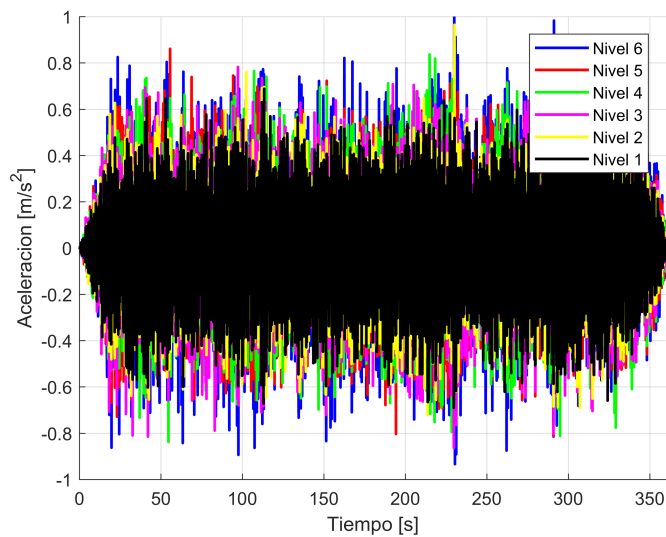


Figura D.5: *Registros de Ruido Coloreado*

Los resultados de la identificación de propiedades modales para la condición de daño en el elemento 2, se muestra en Figura D.6, para la frecuencia y la Figura D.7, para la forma modal. La Figura D.6 evidencia que: i) no existe variación en el modo 6, ii) existe una reducción gradual y leve para los modos 1 y 3 y iii) existe una variación gradual y pronunciada para los modos 2, 4 y 5. Las formas modales observadas en la Figura D.7 muestran desviaciones apreciables en la forma modal, en los modos 2, 4 y 5; y leves para los modos 1, 3 y 6.



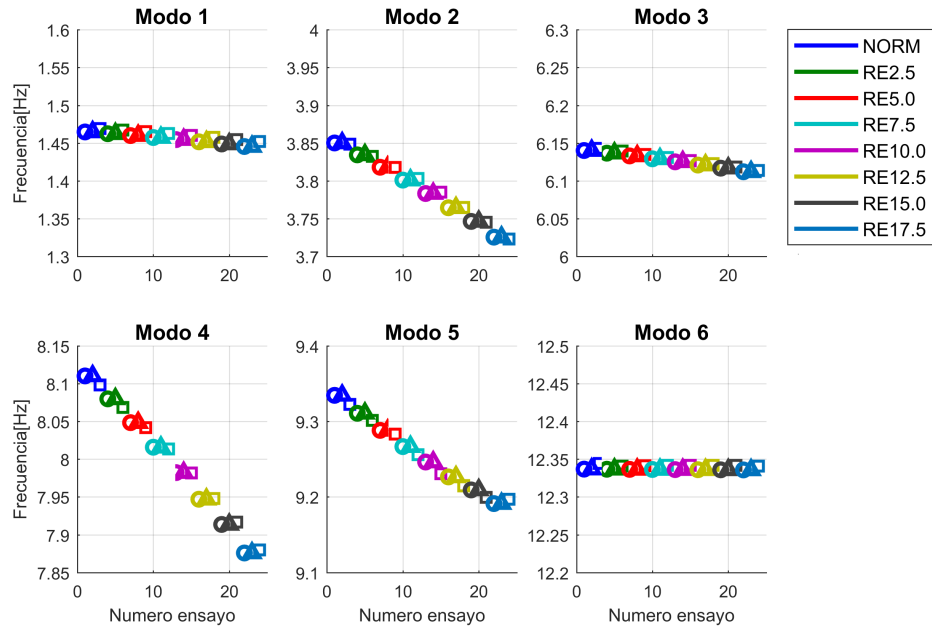


Figura D.6: Identificación de Frecuencias, Aplicando Daño en Elemento 2

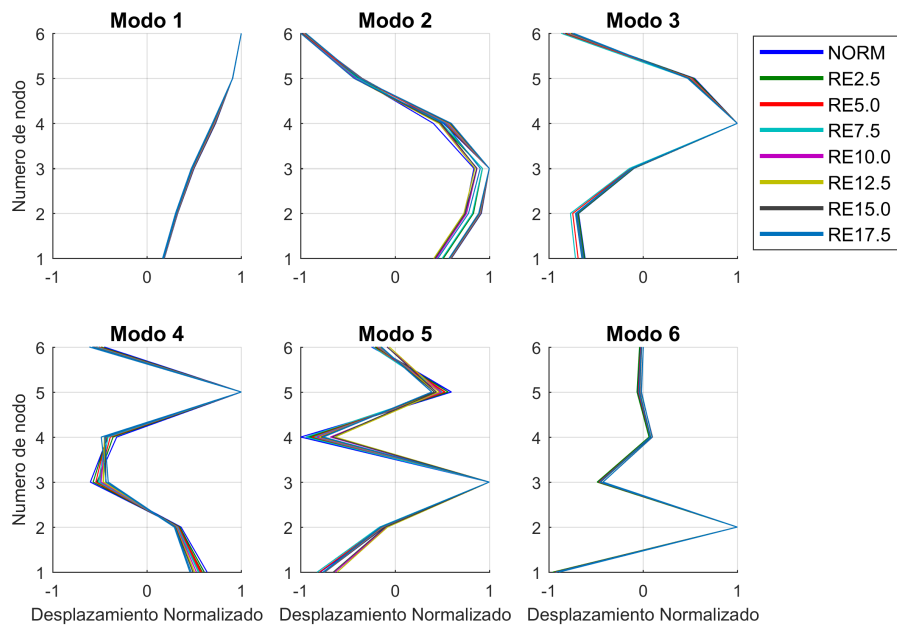


Figura D.7: Identificación de Forma Modal, Aplicando Daño en Elemento 2

La condición de daño en el elemento 4, se muestra en Figura D.8, para la frecuencia, ésta evidencia que: i) no existe variación en el modo 2, ii) existe una reducción gradual y leve para los

## ANEXO D. MODELO ANALÍTICO PARA DETECCIÓN DE DAÑO POR MÁXIMA ENTROPÍA

modos 1 y iii) existe una variación gradual y pronunciada para los modos 3, 4, 5 y 6. Las formas modales observadas en la Figura D.9 muestran desviaciones apreciables en la forma modal, en los modos 2, 3, 4 y 5; y leves para los modos 1 y 6.

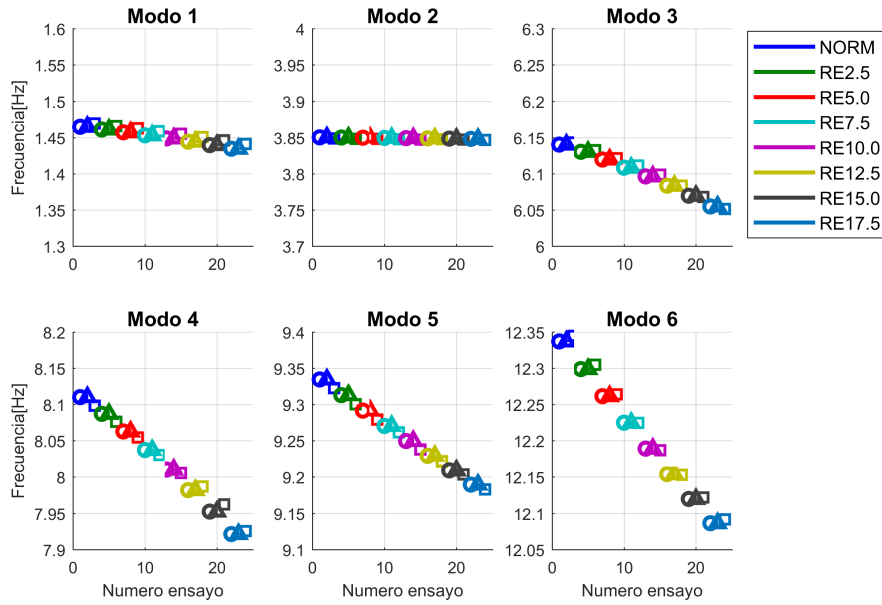


Figura D.8: *Identificación de Frecuencia, Aplicando Daño en Elemento 4*

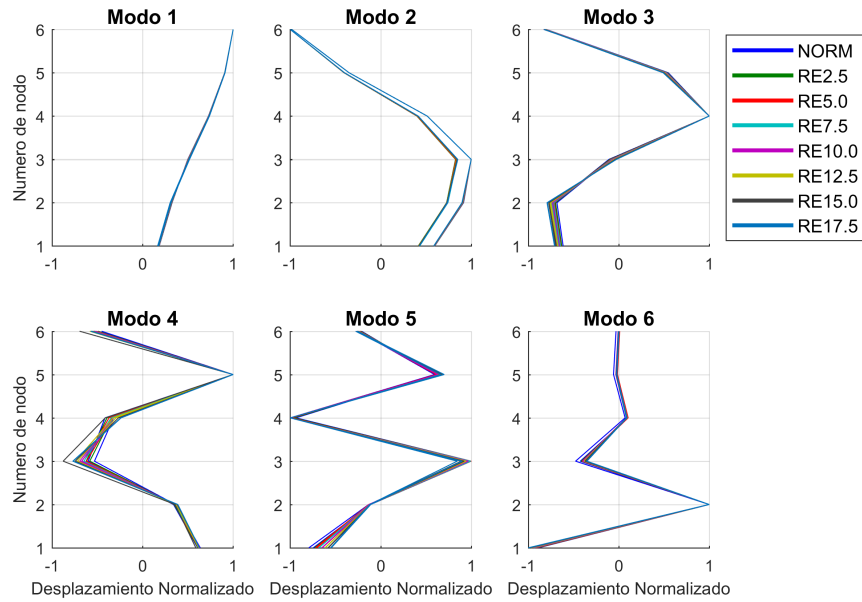


Figura D.9: *Identificación de Forma Modal, Aplicando Daño en Elemento 4*

## D.2. Identificación de Daño

La detección, localización e Identificación de Daño con Maxima Entropía, se realiza a partir de la construcción de la base de datos, para esto se consideran 6 elementos con daño correspondientes a los 6 niveles de la estructura, Figura D.1, a ésta se le asignan 10 magnitudes de daño, formando un total de 60 muestras, mas 1 correspondiente a la Normal. La base de datos considera los 6 modos de la estructura correspondientes a forma modal y frecuencia, definido en las Ecuaciones (D.1) y (D.2), el almacenamiento de esta base de datos de características  $X^j$  se realiza de acuerdo a la Ecuación D.3, considerando escalamiento de la forma modal a partir del Factor Modal de Escala (MSF):

$$diff\{\phi_{j,k}\} = \sum_{j=1}^n (\phi_{j,1}^U - \phi_{j,k}^{D*})^2 \rightarrow diff\{\phi_{j,k}\} = [ ]_{6 \times 61}, \quad (D.1)$$

$$diff\{\omega_{j,k}\} = \sum_{j=1}^n abs\left(\frac{\omega_{j,1}^U - \omega_{j,k}^D}{\omega_{j,1}^U}\right) \rightarrow diff\{\omega_{j,k}\} = [ ]_{6 \times 61}, \quad (D.2)$$

$$X^j = \begin{bmatrix} diff\{\phi_{j,k}\} \\ diff\{\omega_{j,k}\} \end{bmatrix}_{(6+6) \times 61}. \quad (D.3)$$

La matriz de observación  $Y^j$  asociada a la base de datos de las características  $X^j$  se construye a partir de las 10 condiciones de daño, correspondientes a 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 %, 90 %, 99 %, queda de la forma:

$$Y^j = \begin{bmatrix} 0 & 0,10 & \dots & 0,99 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0,99 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0,99 \end{bmatrix}_{6 \times 61}. \quad (D.4)$$

La matriz de la Ecuación D.4, considera que la primera columna corresponde a la Condición Normal (sin daño), las 10 columnas siguientes corresponden a las 10 condiciones de daño para el elemento 1 y así sucesivamente hasta completar los 6 elementos, con una matriz de  $6 \times 61$  columnas.

Los resultados para la evaluación del daño en el elemento 2 y elemento 4, se muestra en la Figura D.10 y Figura D.11, respectivamente. La detección, localización y cuantificación ha sido realizada para cada una de las condiciones evaluadas. La Figuras D.12 y D.13, muestran buena coherencia entre identificación de daño independiente de la excitación aplicada.

ANEXO D. MODELO ANALÍTICO PARA DETECCIÓN DE DAÑO POR MÁXIMA ENTROPÍA

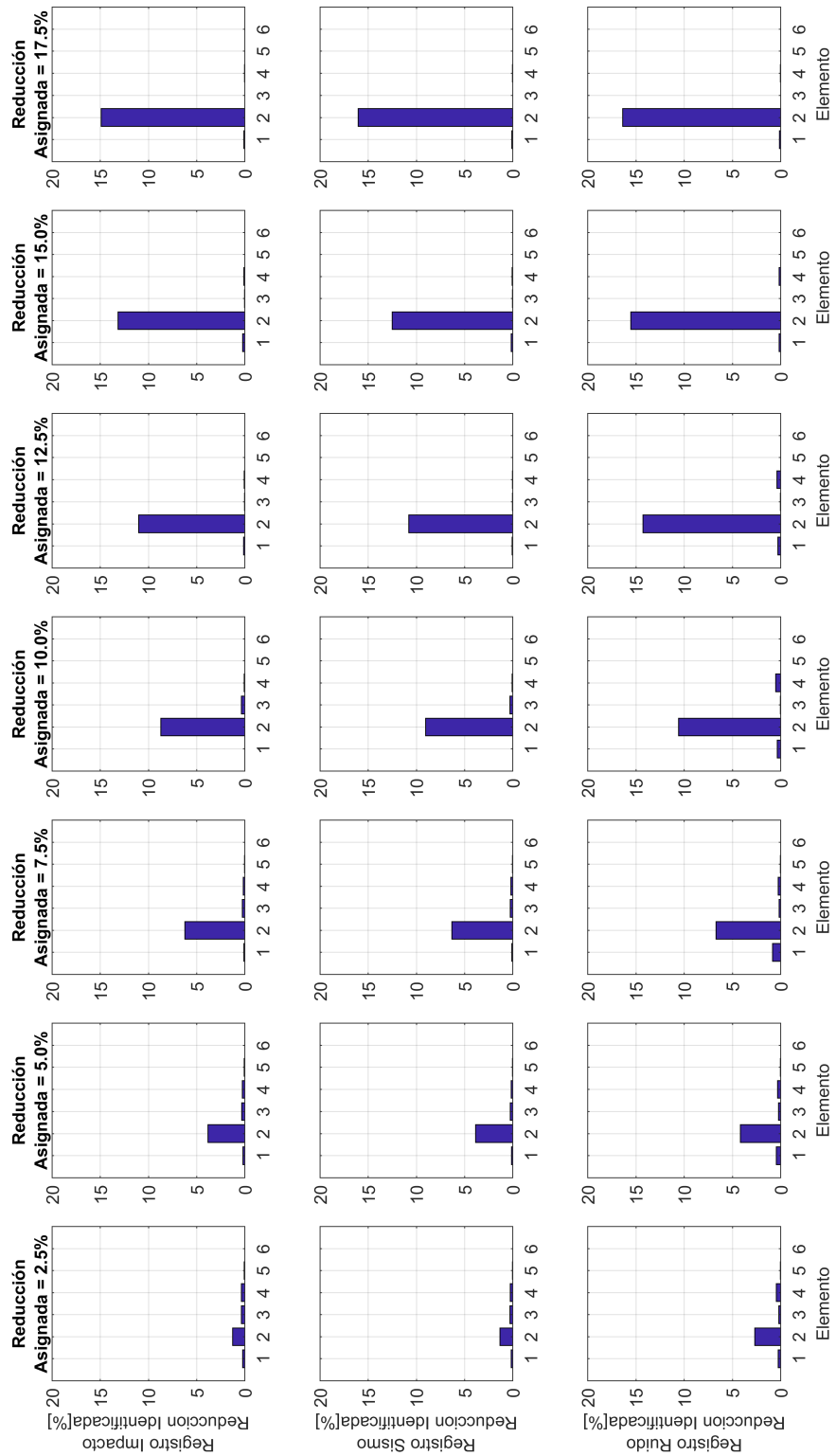


Figura D.10: Identificación de Daño para Nivel 2

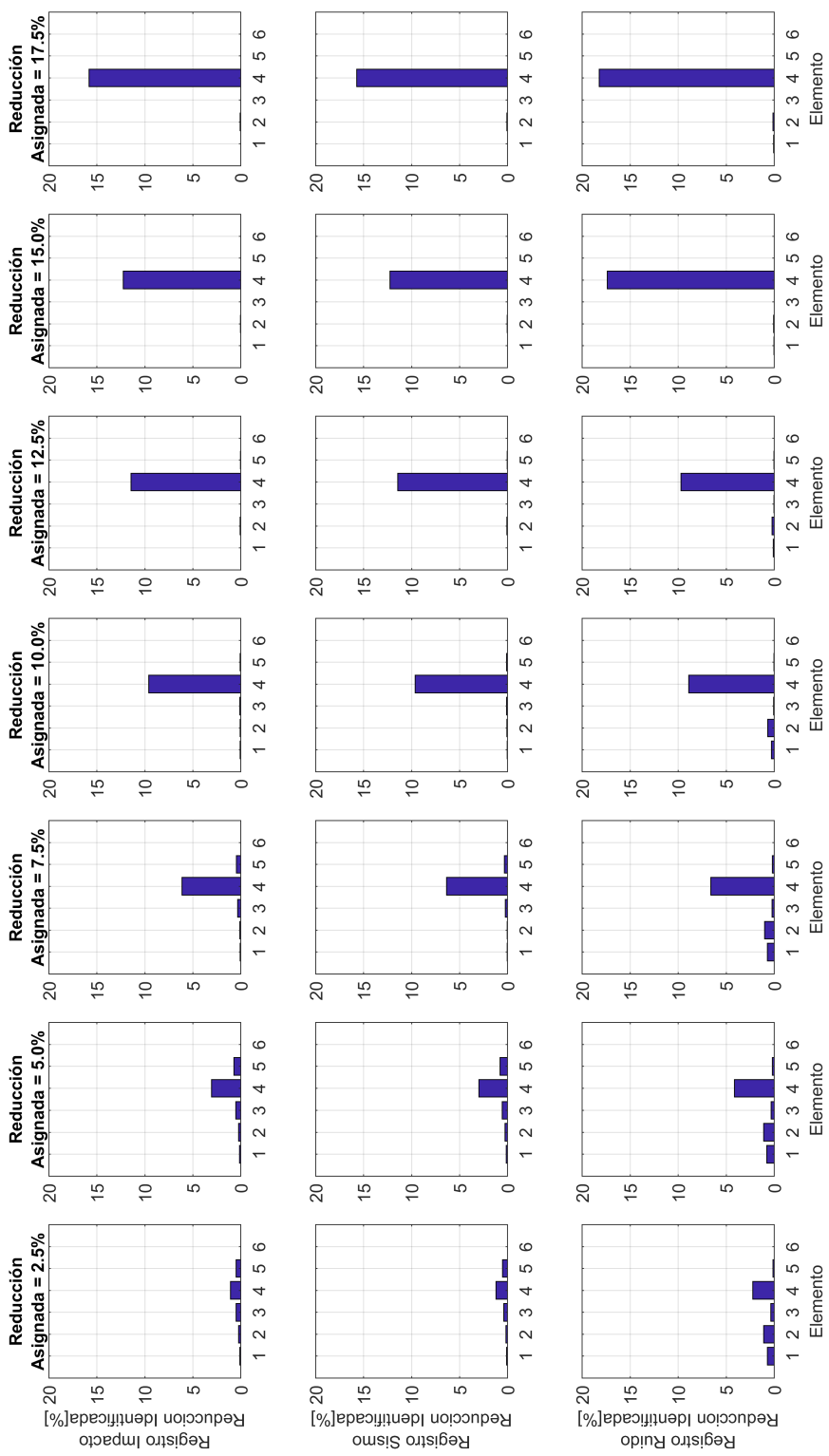


Figura D.11: Identificación de Daño para Nivel 4

## ANEXO D. MODELO ANALÍTICO PARA DETECCIÓN DE DAÑO POR MÁXIMA ENTROPÍA

Las Figuras D.12 y D.13, muestran en el eje de las ordenadas izquierdo el nivel en el que se aplica el daño; en el eje de las ordenadas derecho indica la magnitud del daño en porcentaje para un nivel; la línea continua de color gris muestra la magnitud cuantificada por el algoritmo para cada uno de los ensayos realizados y la línea gris segmentada indica la manitud de daño asignada de manera teórica. En estas figuras se observa que el método permite detectar, aislar e identificar el daño en la estructura en los dos elementos evaluados, con variaciones máximas de hasta un 17% entre el daño asignado y el daño estimado, lo que demuestra que la metodología puede ser aplicada adecuadamente para la detección de daño en estructuras reales.

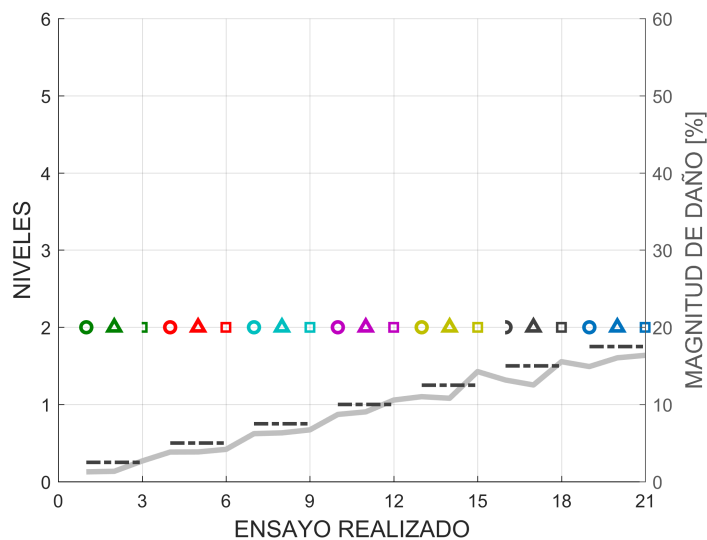


Figura D.12: *Detección, Localización e Identificación de Daño para Nivel 2*

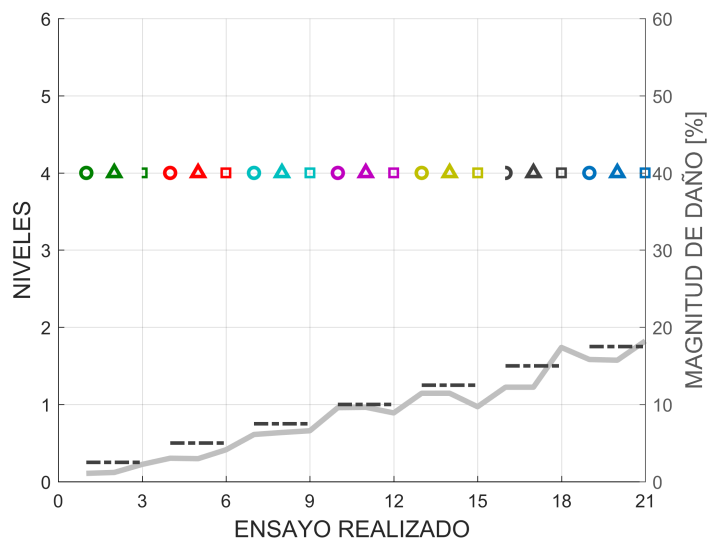


Figura D.13: *Detección, Localización e Identificación de Daño para Nivel 4*

## Anexo E

# ENTRENAMIENTO REDES NEURONALES SOM

### E.1. Calibración de Datos con Redes Neuronales Auto-Organizadas

Las figuras indicadas a continuación consideran el entrenamiento de red neuronal de mapa auto-organizado, para el análisis se toman los valores de los sensores 3, 7 y 8, con los entrenamientos indicados en la Tabla 5.22, replicada en la Tabla E.1:

Tabla E.1: *Redes Neuronales entrenadas para la Evaluación de Datos*

No RED	DESCRIPCIÓN	VALORES
Red1	Topología	$5 \times 5$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red2	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red3	Topología	$15 \times 15$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red4	Topología	$20 \times 20$ (neuronas)
	Iteraciones	200
Red5	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	100
Red6	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	500
Red7	Topología	$10 \times 10$ (neuronas)
	Iteraciones	1000

### E.1.1. Resultado de Entrenamiento Red 1

Considera una topología de  $5 \times 5$  (neuronas).  
Se realiza un total de 200 iteraciones.

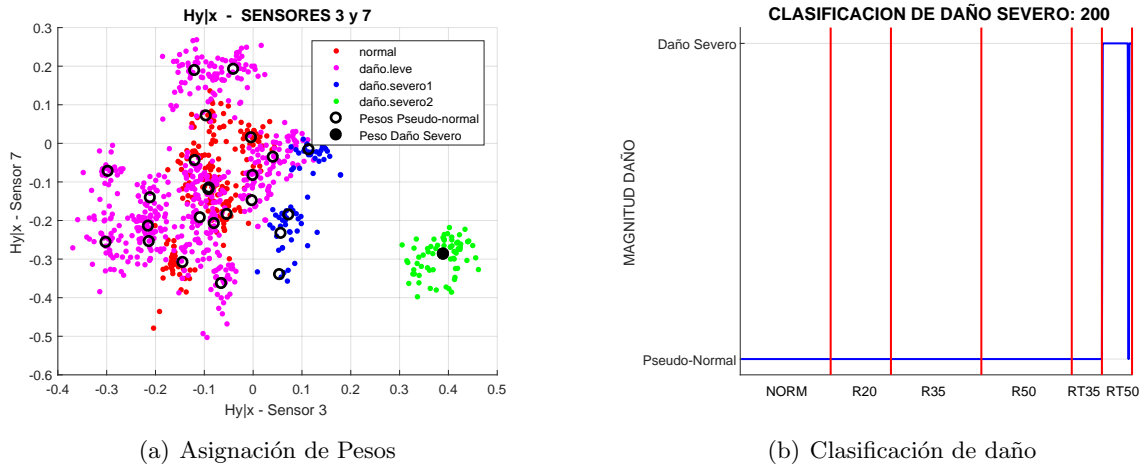


Figura E.1: *Cuantificación de Daño. Red 1*

### E.1.2. Resultado de Entrenamiento Red 2

Considera una topología de  $10 \times 10$  (neuronas).  
Se realiza un total de 200 iteraciones.

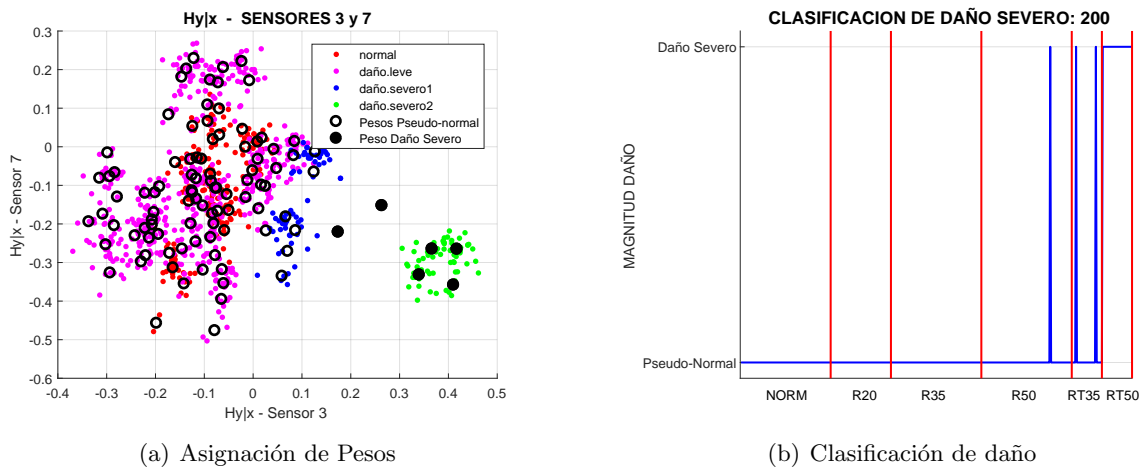


Figura E.2: *Cuantificación de Daño. Red 2*

### E.1.3. Resultado de Entrenamiento Red 3

Considera una topología de  $15 \times 15$  (neuronas).  
Se realiza un total de 200 iteraciones.



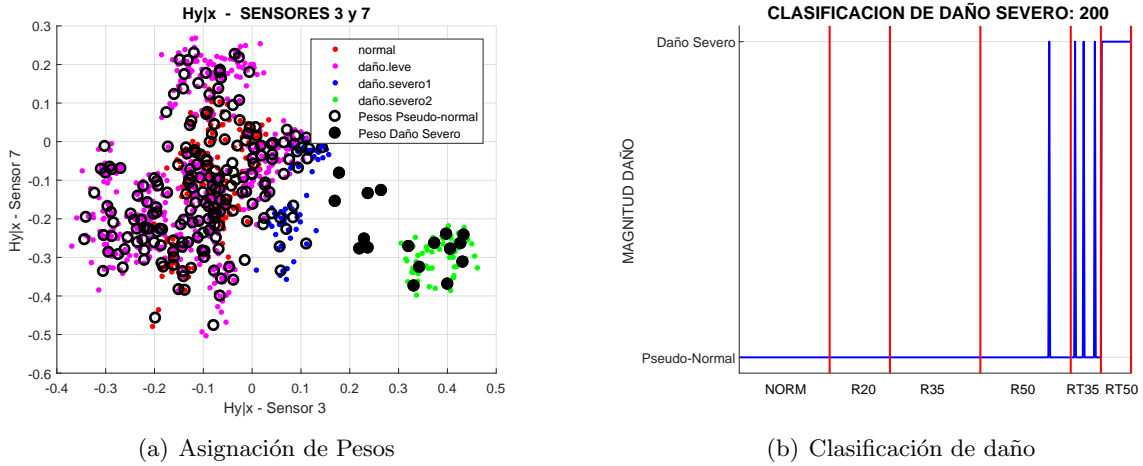


Figura E.3: *Cuantificación de Daño. Red 3*

#### E.1.4. Resultado de Entrenamiento Red 4

Considera una topología de  $20 \times 20$  (neuronas).  
Se realiza un total de 200 iteraciones.

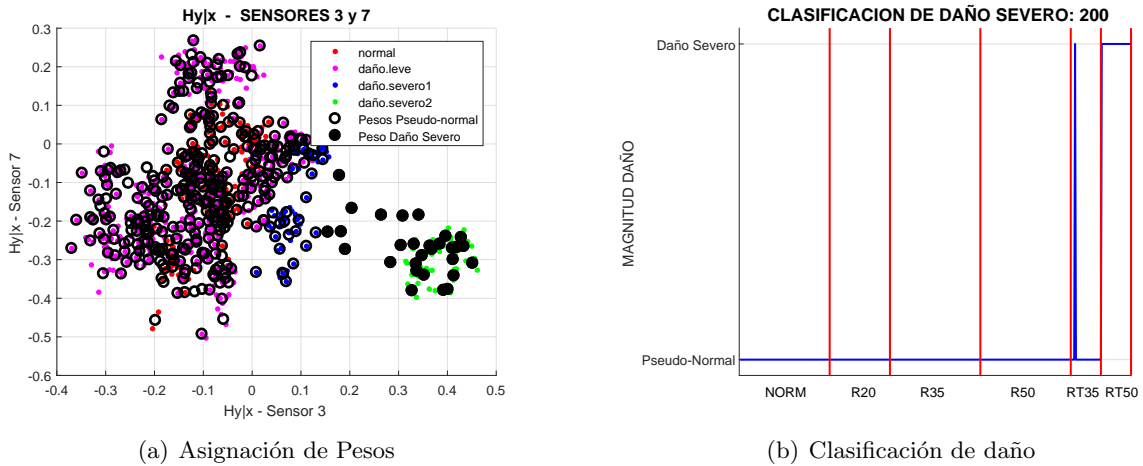


Figura E.4: *Cuantificación de Daño. Red 4*

#### E.1.5. Resultado de Entrenamiento Red 5

Considera una topología de  $10 \times 10$  (neuronas).  
Se realiza un total de 100 iteraciones.

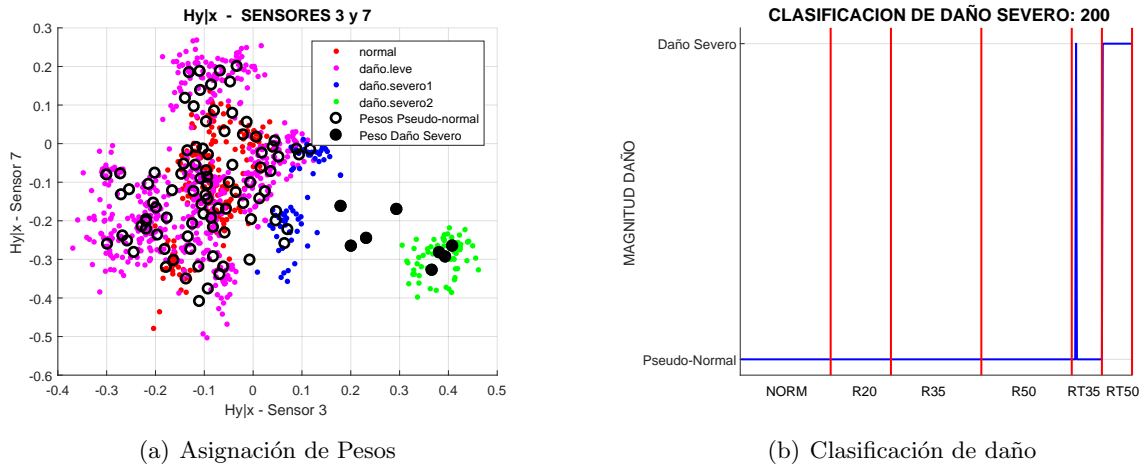


Figura E.5: *Cuantificacion de Daño. Red 5*

### E.1.6. Resultado de Entrenamiento Red 6

Considera una topología de  $10 \times 10$  (neuronas).  
Se realiza un total de 500 iteraciones.

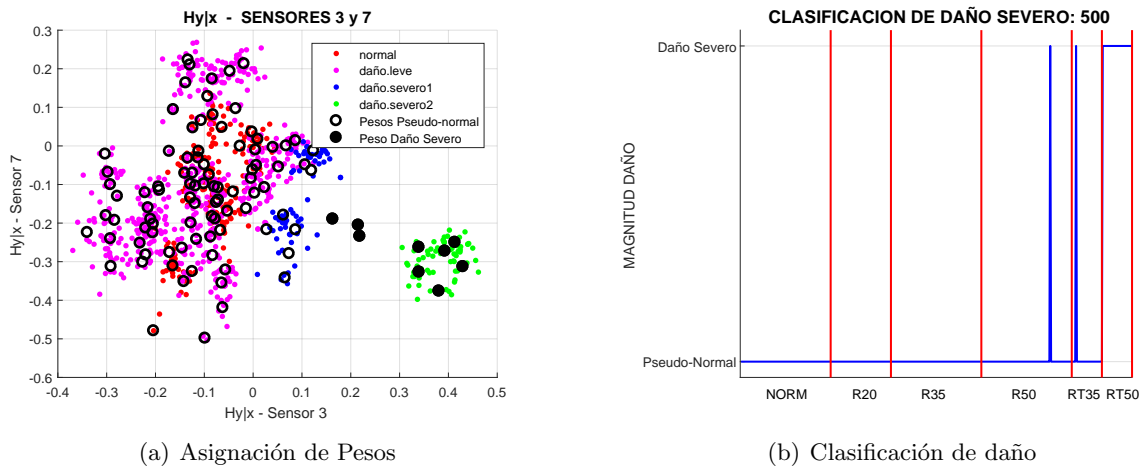


Figura E.6: *Cuantificacion de Daño. Red 6*

### E.1.7. Resultado de Entrenamiento Red 7

Considera una topología de  $10 \times 10$  (neuronas).  
Se realiza un total de 1000 iteraciones.

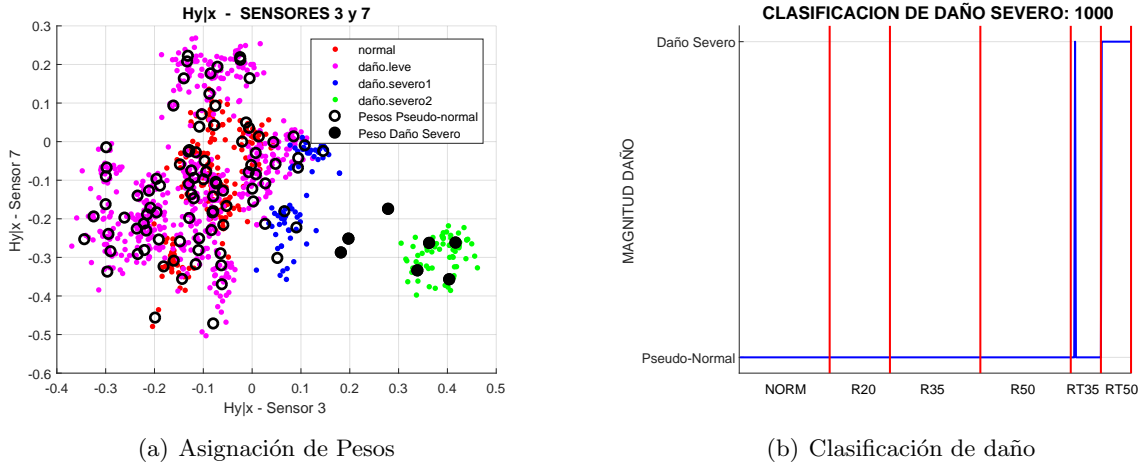


Figura E.7: *Cuantificacion de Daño. Red 7*

Los resultados de las Figuras E.1 a E.7, muestran que el mejor entrenamiento corresponde a la Red 2, por lo que los siguientes análisis de sensibilidad sólo consideraran esta red de entrenamiento.

## E.2. Análisis de sensibilidad 2

Considera los datos de los sensores 3 y 7, con la información de entrenamiento indicada en la Tabla E.1 y el entrenamiento de la red 2.

### E.2.1. Resultado de Entrenamiento Red 2

Considera una topología de  $10 \times 10$  (neuronas).  
Se realiza un total de 200 iteraciones.

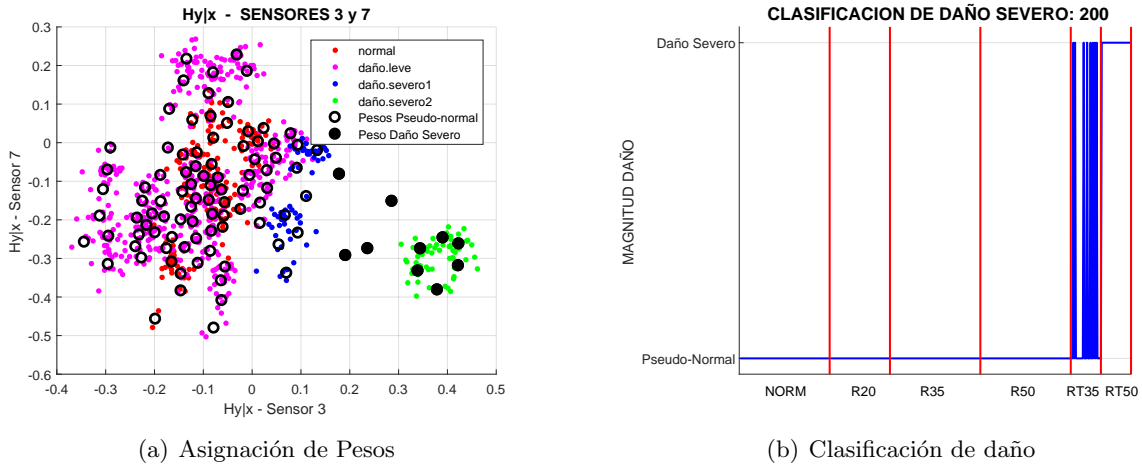


Figura E.8: *Cuantificacion de Daño. Red 2*

## Anexo F

# ENTRENAMIENTO REDES NEURONALES FEEDFORWARD

### F.1. Calibración de Datos con Redes Neuronales Levenberg-Marquardt

Las figuras indicadas a continuación consideran el entrenamiento de red neuronal FeedForward, considerando las indicaciones de la Tabla 5.23, replicada en la Tabla F.1:

Tabla F.1: *Redes Neuronales SOM Entrenadas para la Evaluación de Datos*

No RED	DESCRIPCIÓN	VALORES
Red1	Nro. de Neuronas	10 (una capa)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red2	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red3	Nro. de Neuronas	5 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red4	Nro. de Neuronas	20 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red5	Nro. de Neuronas	50 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red6	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Logaritmo Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Lineal
Red7	Nro. de Neuronas	10 (dos capas)
	F.Transferencia Oculta	Tangente Sigmoidal
	F.Transferencia Salida	Tangente Sigmoidal

## F.2. Análisis de Sensibilidad 1

Considera los 21 valores de condición de daño indicados en la Tabla F.2.

Tabla F.2: *Análisis de Sensibilidad 1, a la Condición de Daño*

OBSERVACIÓN	SENSOR	CANTIDAD
$H_y$	3,6,7	3
$H_{xy}$	3,6,7	3
$H_{x y}$	3,6,7	3
$H_{y x}$	3,4,6,7	4
$MI_{xy}$	4,6,7	3
$MIN_{xy}$	3,4,6,7,8	5
<b>TOTAL</b>		<b>21</b>

### F.2.1. Resultado de Entrenamiento Red 1

Número de Neuronas 10 (una capa oculta).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

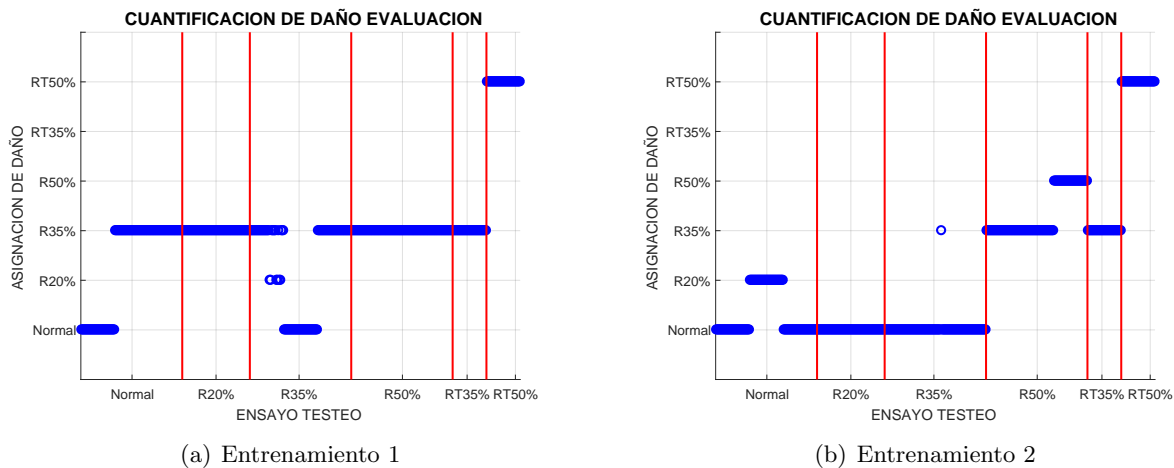


Figura F.1: *Cuantificacion de Daño. Red 1*

### F.2.2. Resultado de Entrenamiento Red 2

Número de Neuronas 10 (dos capa ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

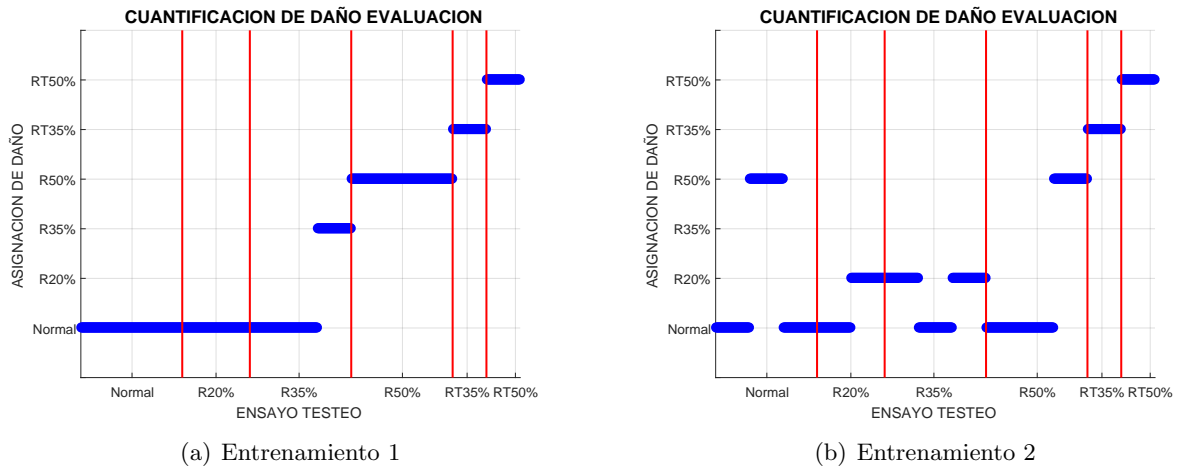


Figura F.2: Cuantificación de Daño. Red 2

### F.2.3. Resultado de Entrenamiento Red 3

Número de Neuronas 5 (dos capas ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

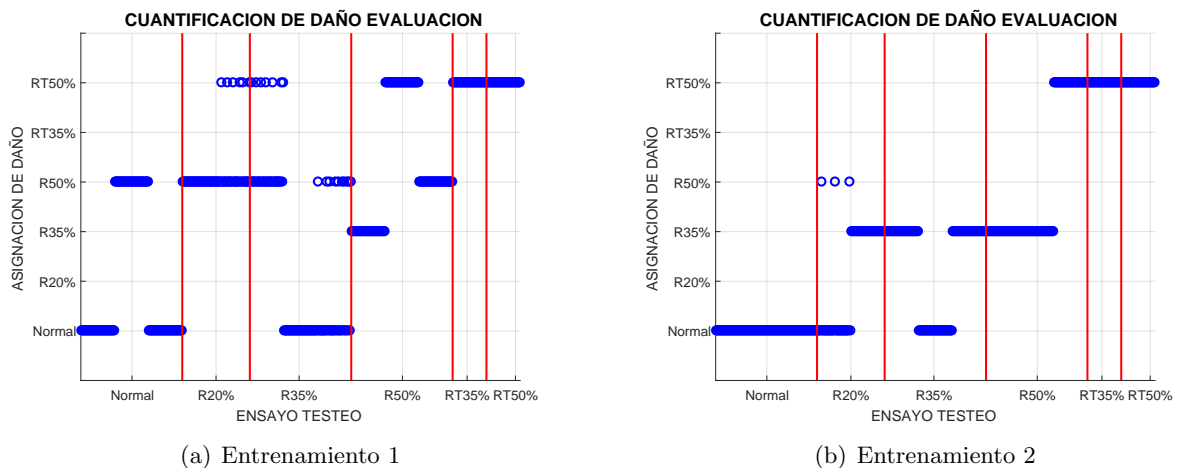


Figura F.3: Cuantificación de Daño. Red 3

**F.2.4. Resultado de Entrenamiento Red 4**

Número de Neuronas 20 (dos capas ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

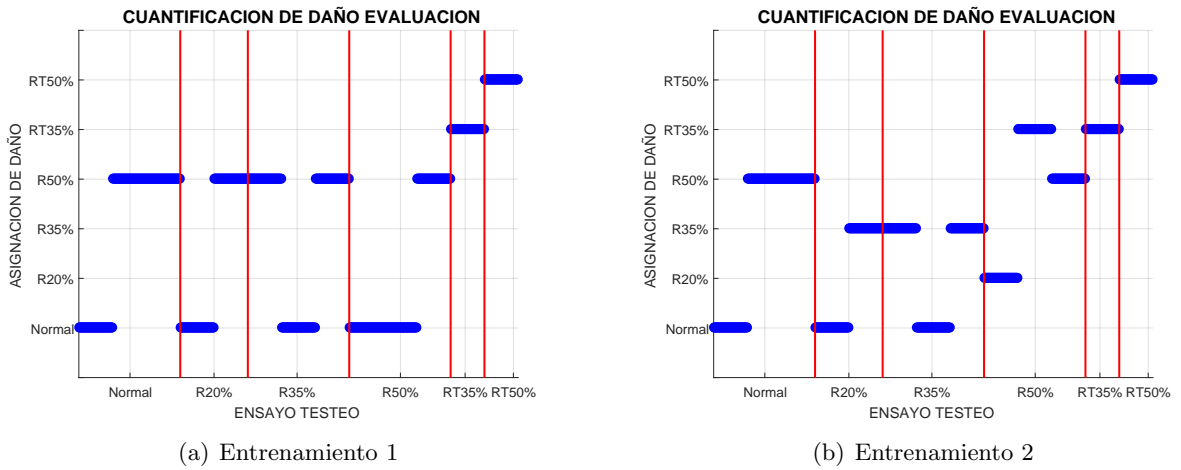


Figura F.4: *Cuantificacion de Daño. Red 4*

**F.2.5. Resultado de Entrenamiento Red 5**

Número de Neuronas 50 (dos capas ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

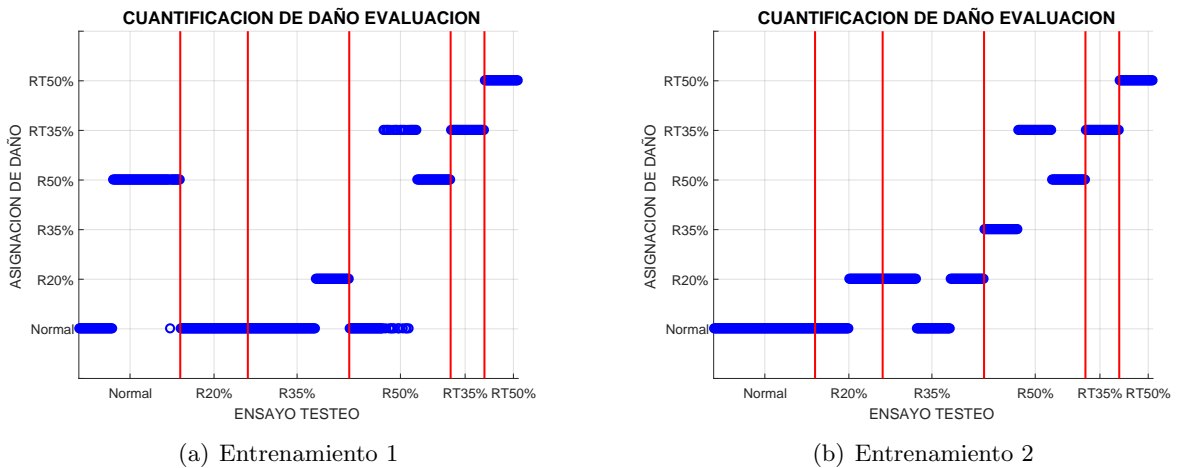


Figura F.5: *Cuantificacion de Daño. Red 5*

### F.2.6. Resultado de Entrenamiento Red 6

Número de Neuronas 10 (dos capas ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Logaritmo Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

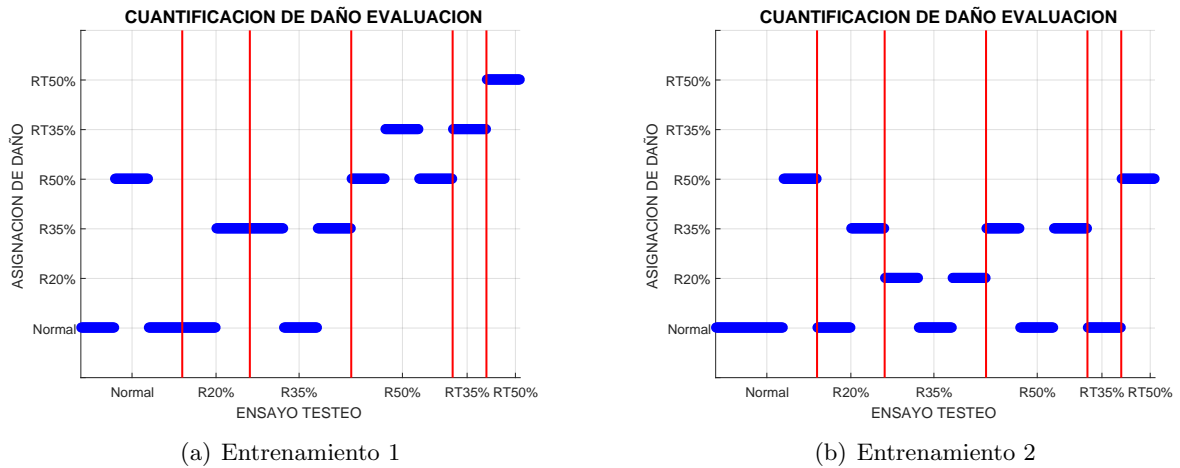


Figura F.6: Cuantificacion de Daño. Red 6

### F.2.7. Resultado de Entrenamiento Red 7

Número de Neuronas 10 (dos capas ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Tangente Sigmoidal.

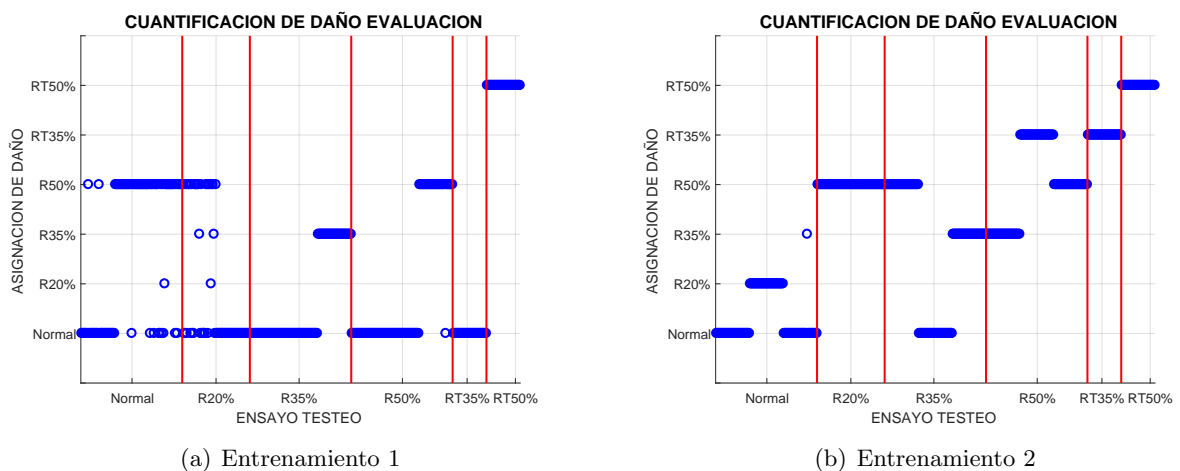


Figura F.7: Cuantificacion de Daño. Red 7

Los resultados de las Figuras F.1 a F.7, muestran que el mejor entrenamiento corresponde a la Red 2, por lo que los siguientes análisis de sensibilidad sólo consideran esta red de entrenamiento.



### F.3. Análisis de Sensibilidad 2

Considera los 14 valores de condición de daño indicados en la Tabla F.3.

Tabla F.3: *Análisis de Sensibilidad 2, a la Condición de Daño*

OBSERVACIÓN	SENSOR	CANTIDAD
$H_y$	3	1
$H_{xy}$	3,6,7	3
$H_{x y}$	3,7	2
$H_{y x}$	3,6,7	3
$MI_{xy}$	4	1
$MIN_{xy}$	3,4,7,8	4
<b>TOTAL</b>		<b>14</b>

#### F.3.1. Resultado de Entrenamiento Red 2

Número de Neuronas 10 (dos capa ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

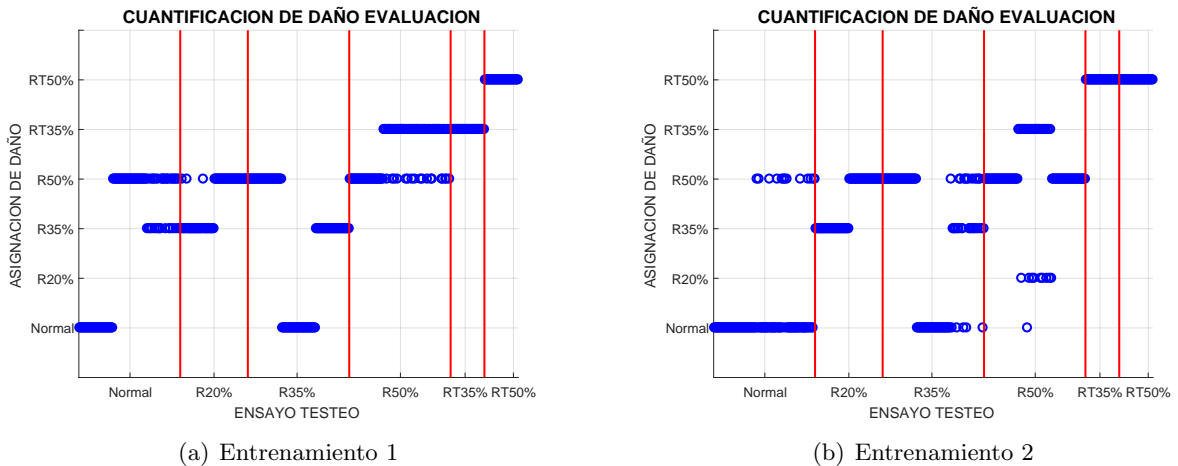


Figura F.8: *Cuantificacion de Daño. Red 2*

### F.4. Análisis de Sensibilidad 3

Considera los 7 valores de condición de daño indicados en la Tabla F.4.

Tabla F.4: *Análisis de Sensibilidad 3, a la Condición de Daño*

OBSERVACIÓN	SENSOR	CANTIDAD
$H_y$	3	1
$H_{xy}$	3	1
$H_{x y}$	3	1
$H_{y x}$	3	1
$MI_{xy}$	4	1
$MIN_{xy}$	3,4	2
<b>TOTAL</b>		<b>7</b>

#### F.4.1. Resultado de Entrenamiento Red 2

Número de Neuronas 10 (dos capa ocultas).  
 La Función de Transferencia Oculta es Tangente Sigmoidal.  
 La Función de Transferencia Salida es Lineal.

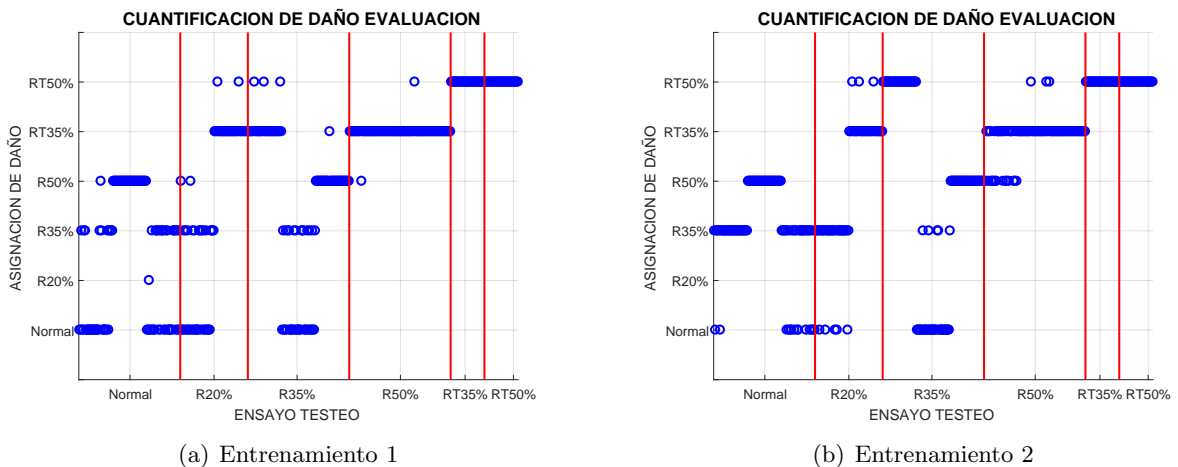


Figura F.9: *Cuantificación de Daño. Red 2*

### F.5. Cantidad de Datos para Entrenamiento

Complementado los datos obtenidos se han realizados dos últimos entrenamientos en la red neuronal, estos consisten en variar los porcentajes de entrenamiento, validación y evaluación de los resultados de los datos. La Tabla F.5 muestra los analisis realizados.

Tabla F.5: *Análisis de Sensibilidad con Variación de Porcentajes de Datos*

PARAMETRO	VARIACIÓN 1	VARIACIÓN 2
Entrenamiento	50 %	60 %
Validación	25 %	20 %
Evaluación	25 %	20 %

El entrenamiento considera, las características en la Red 2 indicadas en el sección H.2.2. Los resultados del entrenamiento se muestran a continuación:

**F.5.1. Variación Porcentual 1**

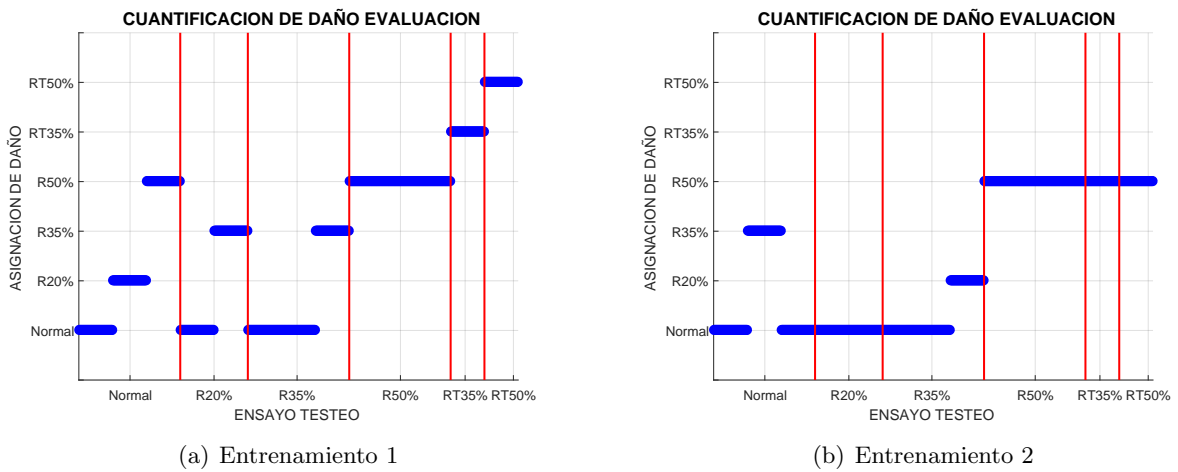


Figura F.10: *Cuantificación de Daño para Validación Porcentual 1*

**F.5.2. Variación Porcentual 2**

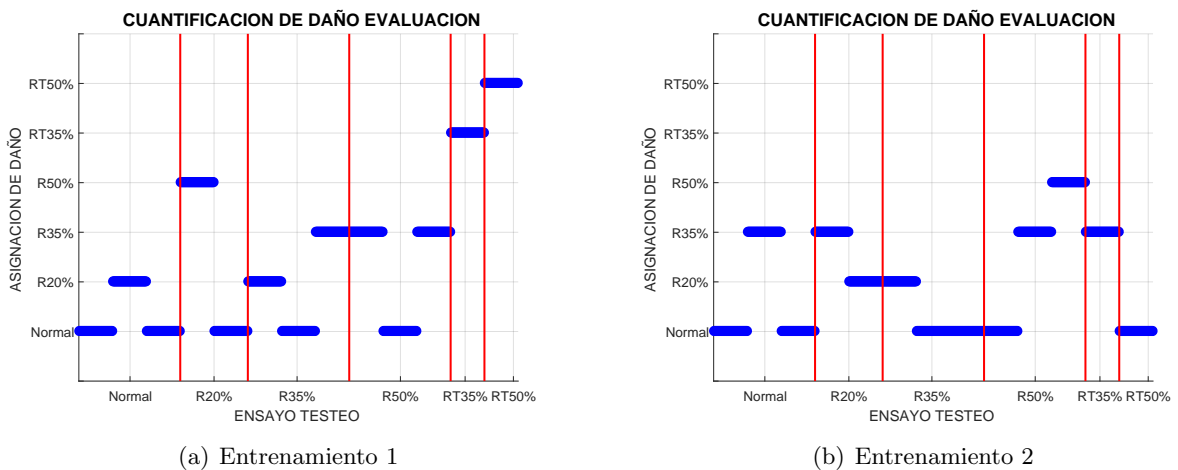


Figura F.11: *Cuantificación de Daño para Validación Porcentual 2*

## Anexo G

# Análisis ROC

### G.1. Introducción

Un gráfico de características operativas del receptor (ROC, por sus siglas en inglés) es una técnica para visualizar, organizar y seleccionar clasificadores según su rendimiento. Las figuras de ROC se utilizan en teoría de detección de señales para representar la relación entre las tasas de aciertos y las falsas alarmas de los clasificadores [Fawcett, 2006].

Una de las ventajas de los gráficos ROC es que permiten visualizar y organizar el rendimiento del clasificador sin importar las distribuciones de clase o los costos de error. Esta capacidad es importante cuando se investiga el aprendizaje con distribuciones sesgadas o datos sensible al costo.

### G.2. Clasificador de rendimiento

Dado un clasificador (con etiquetas con clase positiva y negativa) y un conjunto de instancias (conjunto de pruebas), se puede construir una matriz de confusión de dos por dos (también llamada tabla de contingencia) que representa las disposiciones del conjunto de instancias, Figura G.1. Los números a lo largo de la diagonal principal representan las decisiones correctas tomadas, y los números de la diagonal secundaria representan los errores, la confusión, entre las distintas clases.

		Clase Verdadera	
		P	N
Clase Hipotética	Y	Verdaderos Positivos	Falsos Positivos
	N	Falsos Negativos	Verdaderos Negativos

Figura G.1: *Matriz de confusión*

La *Tasa de Verdaderos Positivos*, TP, (conocida también como Tasa de Aciertos) de un clasifi-

cador se define como:

$$TP_{rate} = \frac{PositivosClasificadosCorrectamente}{TotalPositivos}. \quad (G.1)$$

La *Tasa de Falsos Positivos*, FP, (conocida también como Tasa de Falsa Alarma) de un clasificador se define como:

$$FP_{rate} = \frac{NegativosClasificadosIncorrectamente}{TotalNegativos}. \quad (G.2)$$

Las gráficas ROC son figuras bidimensionales en las que la tasa de Verdaderos Positivos se representa en el eje de las ordenadas, Y, y la tasa de Falsos Positivos en el eje de las abscisas, X. Un gráfico ROC describe las relaciones entre los beneficios (tasas de Verdaderos Positivos) y los costos (tasas de Falsos Positivos).

Varios puntos en el espacio ROC son importantes de mencionar, el punto inferior izquierdo (0,0) representa la estrategia de nunca emitir una clasificación positiva; este clasificador no comete errores de falsos positivos, pero tampoco obtiene verdaderos positivos. La estrategia opuesta, de la emisión incondicional de clasificaciones positivas, está representada por el punto superior derecho (1,1); finalmente, el punto (0,1) representa la clasificación perfecta, Figura G.2.

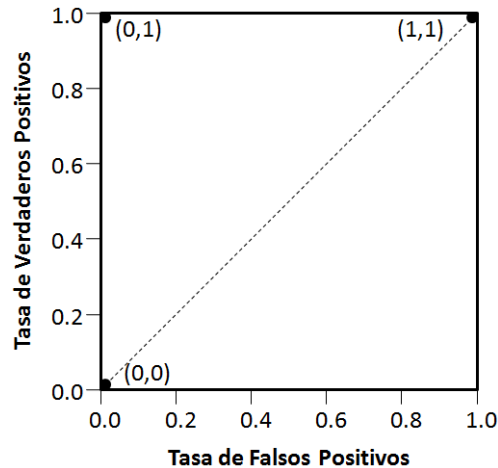


Figura G.2: *Gráfica ROC Básica*

Un punto en el espacio ROC es mejor que otro si está en la parte superior izquierda, ya que la tasa de Verdaderos Positivos es mayor y la tasa de Falsos Positivos es menor; en base a esto los clasificadores se consideran como:

- a. Conservadores, cuando el clasificador se encuentra en el lado izquierdo de un gráfico ROC, ya que hacen clasificaciones positivas solo con pruebas sólidas, por lo que cometen pocos errores de falsos positivos; pero puede darse el caso de tener tasas bajas de verdaderos positivos cuando el clasificador esta situado en la parte inferior.

- b. Liberales, cuando el clasificador esta en la parte superior derecha de un gráfico ROC, ya que hacen clasificaciones positivas con evidencia débil, por lo que clasifican casi todos los positivos correctamente, pero a menudo tienen altas tasas de falsos positivos.

La línea diagonal  $x = y$  representa la estrategia de adivinar aleatoriamente una clase. Por ejemplo, si un clasificador adivina aleatoriamente la clase positiva la mitad del tiempo, se puede esperar que obtenga la mitad de los positivos y la mitad de los negativos correctos; esto produce el punto  $(0.5, 0.5)$  en el espacio ROC.

Cuando el clasificador esta en el triángulo inferior derecho el comportamiento es peor que las suposiciones aleatorias, por este motivo este triángulo suele estar vacío y se dice que un clasificador debajo de la diagonal tiene información útil, pero está aplicando la información incorrectamente [Fawcett, 2006].

### G.3. Curvas en espacio ROC

Las curvas ROC son insensibles a los cambios en la distribución de clases. Si la proporción de instancias positivas a negativas cambia en un conjunto de pruebas, las curvas ROC no cambiarán. Esto se debe a que los gráficos de ROC se basan en la Tasa de Verdaderos Positivos y la Tasa de Falsos Positivos, en las que cada dimensión es una proporción estricta, por lo que no dependen de las distribuciones de clase.

### G.4. Área bajo la curva ROC (AUC)

Para comparar clasificadores se utiliza el área bajo la curva ROC (AUC por sus siglas en inglés), su valor siempre esta entre 0 y 1, sin embargo, ningún clasificador realista debería tener un AUC inferior a 0.5. El AUC de un clasificador es equivalente a la probabilidad de que el clasificador clasifique una observación positiva elegida al azar más alta que una observación negativa elegida al azar [Fawcett, 2006].

### G.5. Curva ROC aplicados a detección de cambio en Torre Central FCFM

Los resultados de la detección de cambio en las mediciones de frecuencias en Torre Central de la FCFM son mostradas a continuación, para ello se considera la variación de umbrales en  $1\sigma$ ,  $1.5\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $2.5\sigma$  y  $3\sigma$ . La Figura G.3 a Figura G.10, muestra el análisis considerando la primera frecuencia observada para variación de observadores de la siguiente forma:  $N_{Obs} = 3$ ,  $N_{Obs} = 5$ ,  $N_{Obs} = 10$ ,  $N_{Obs} = 15$ ,  $N_{Obs} = 20$ ,  $N_{Obs} = 30$ ,  $N_{Obs} = 40$ , y  $N_{Obs} = 50$ . Las figuras muestran que para todos los casos, el valor de AUC es superior a 0,90 para niveles de significancia menores a  $\alpha_{1,5\sigma} = 6,68\%$ .

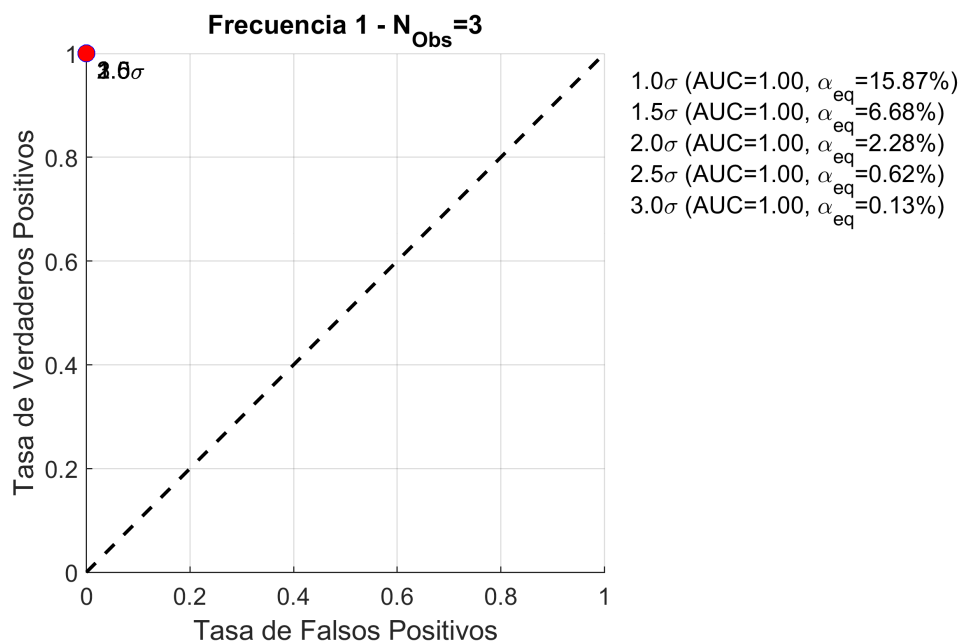


Figura G.3: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 3$

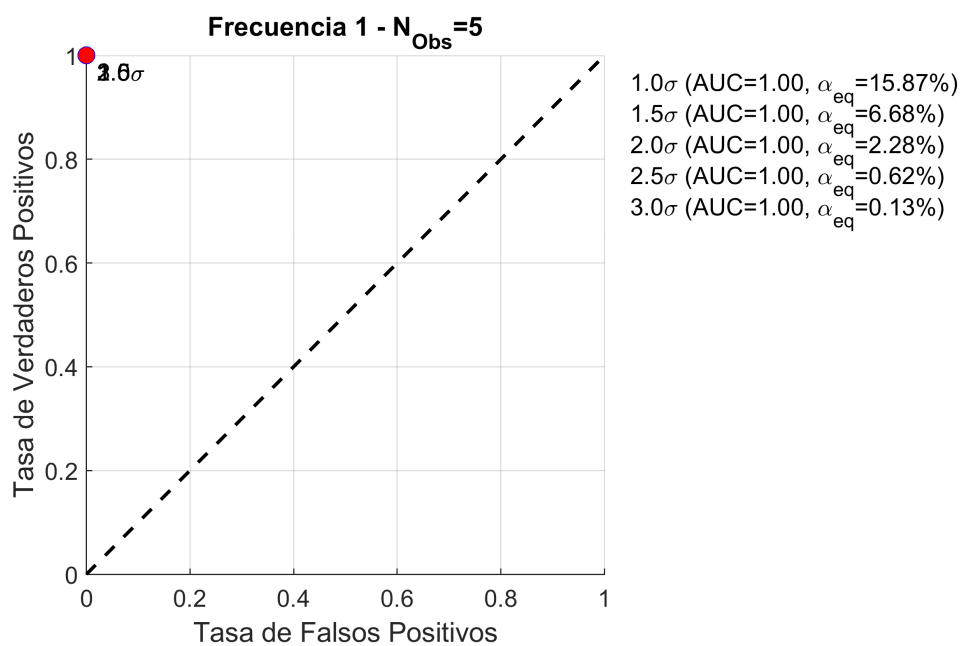


Figura G.4: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 5$

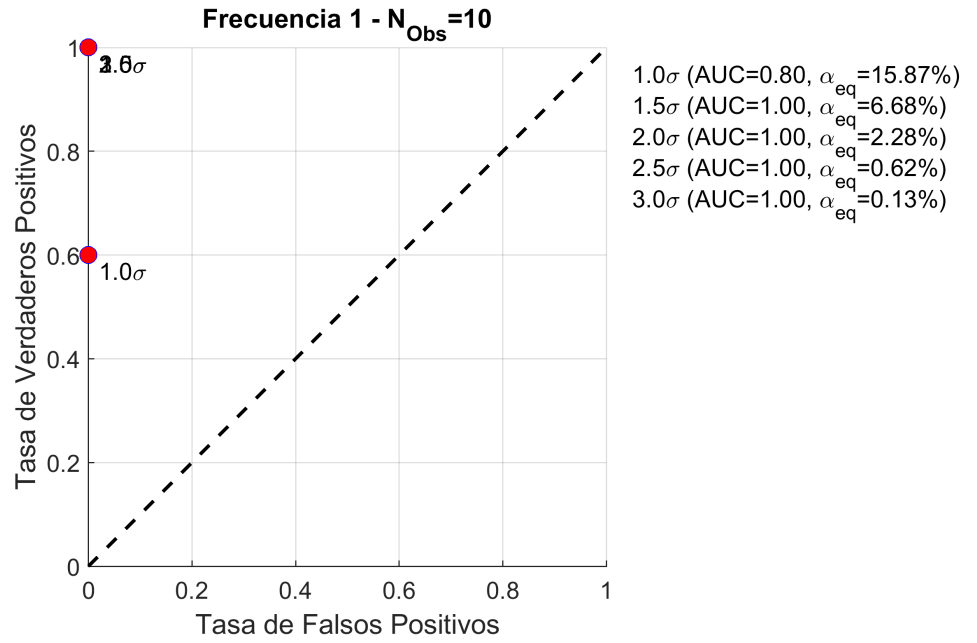


Figura G.5: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 10$

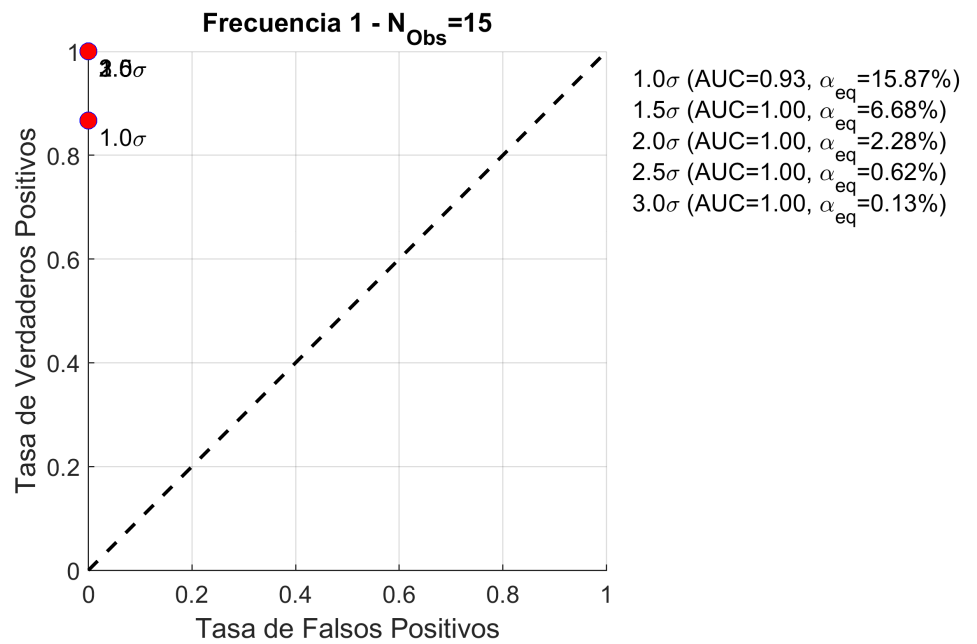
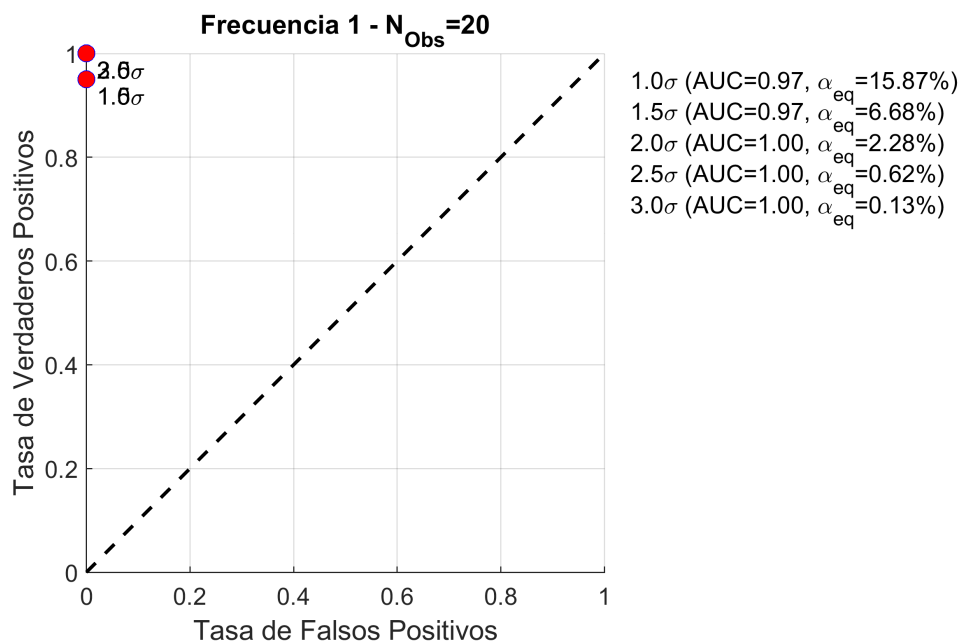
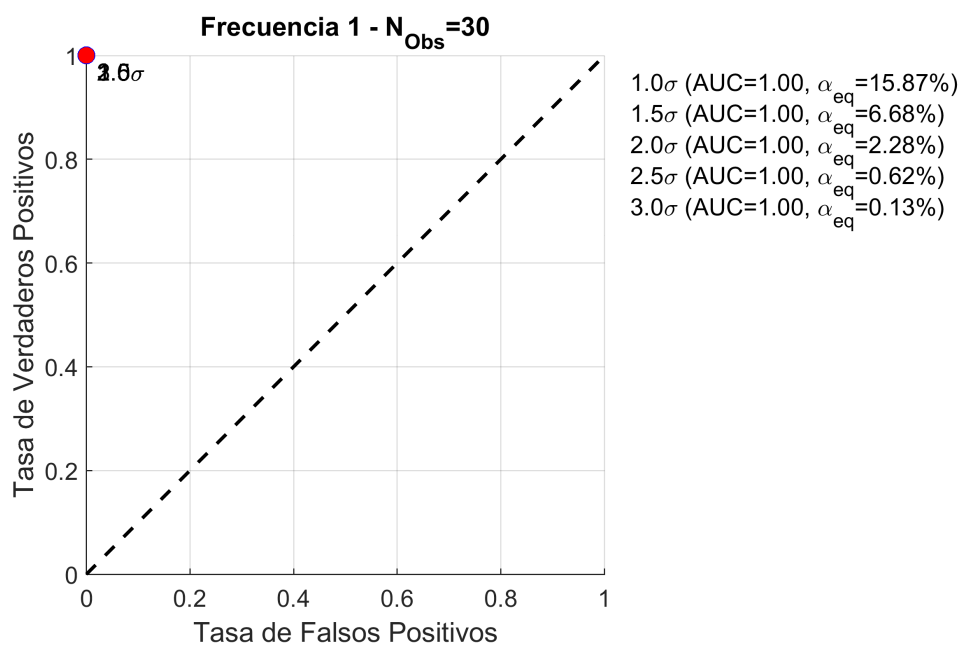


Figura G.6: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 15$



Figura G.7: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 20$ Figura G.8: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 30$

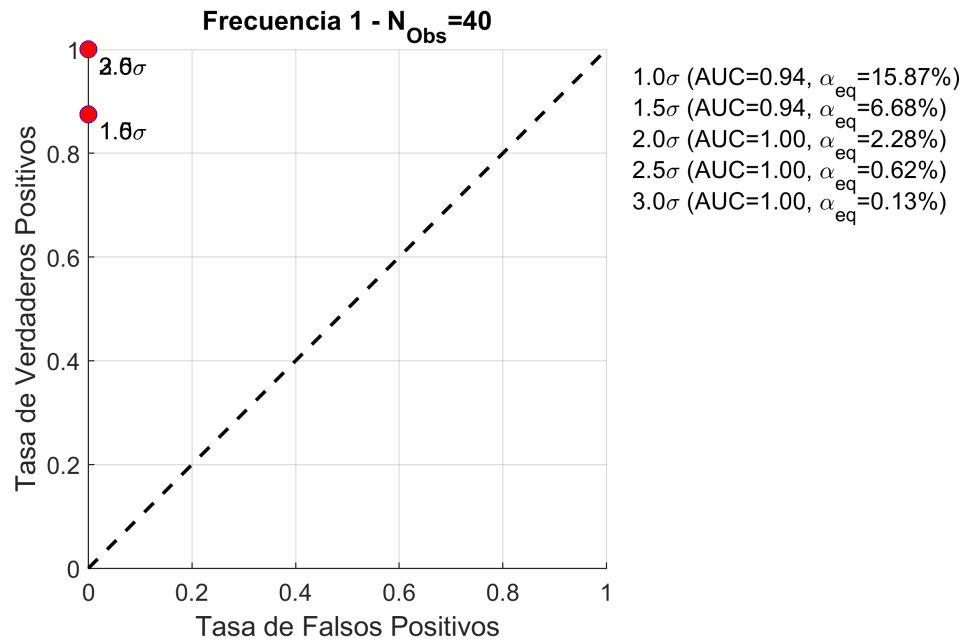


Figura G.9: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 40$

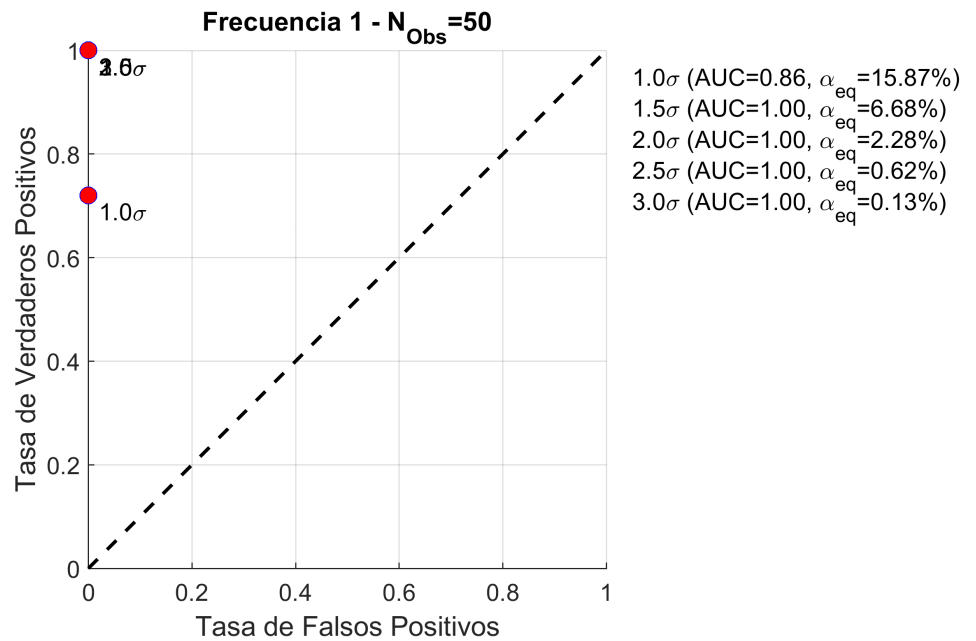
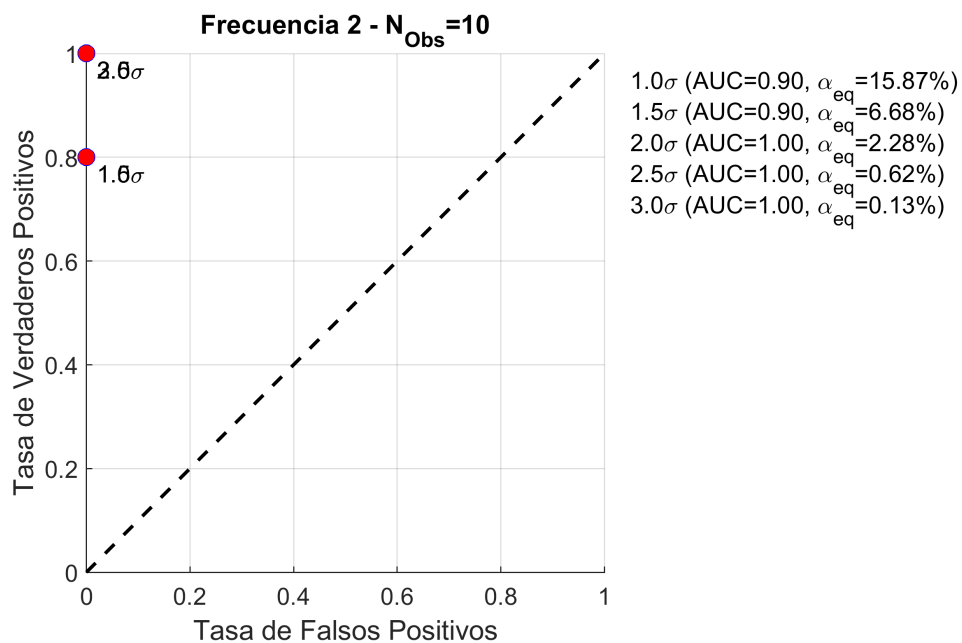
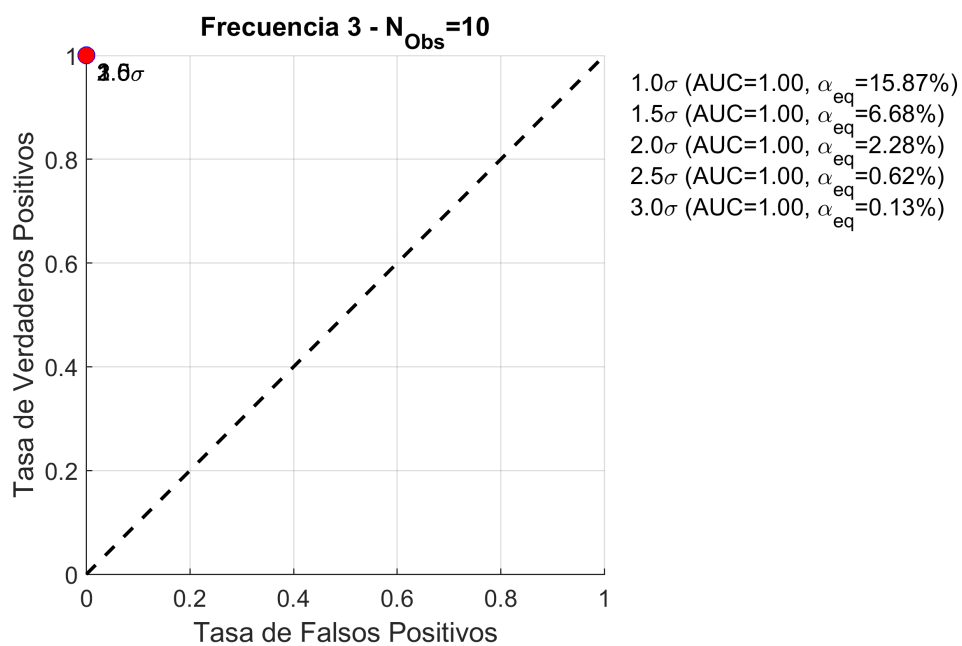


Figura G.10: Curva ROC para la Frecuencia 1,  $N_{Obs} = 50$

Los resultados de curva ROC también son aplicados a los resultados entre la segunda a novena frecuencia observada, considerando  $N_{Obs} = 10$ . La Figura G.11 y Figura G.18, muestran los resultados obtenidos.

Figura G.11: Curva ROC para la Frecuencia 2,  $N_{Obs} = 10$ Figura G.12: Curva ROC para la Frecuencia 3,  $N_{Obs} = 10$

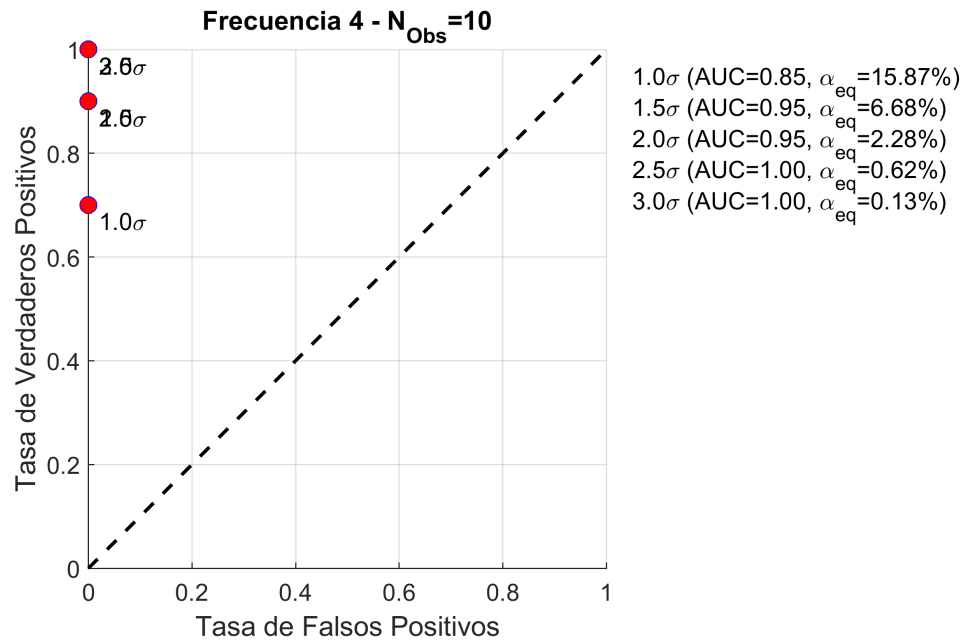


Figura G.13: Curva ROC para la Frecuencia 4,  $N_{Obs} = 10$

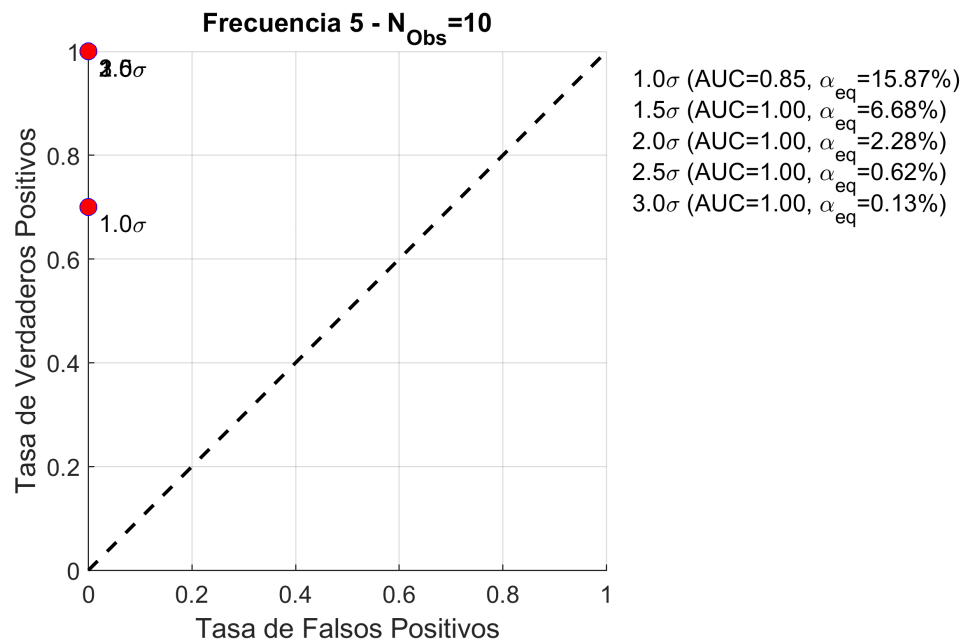
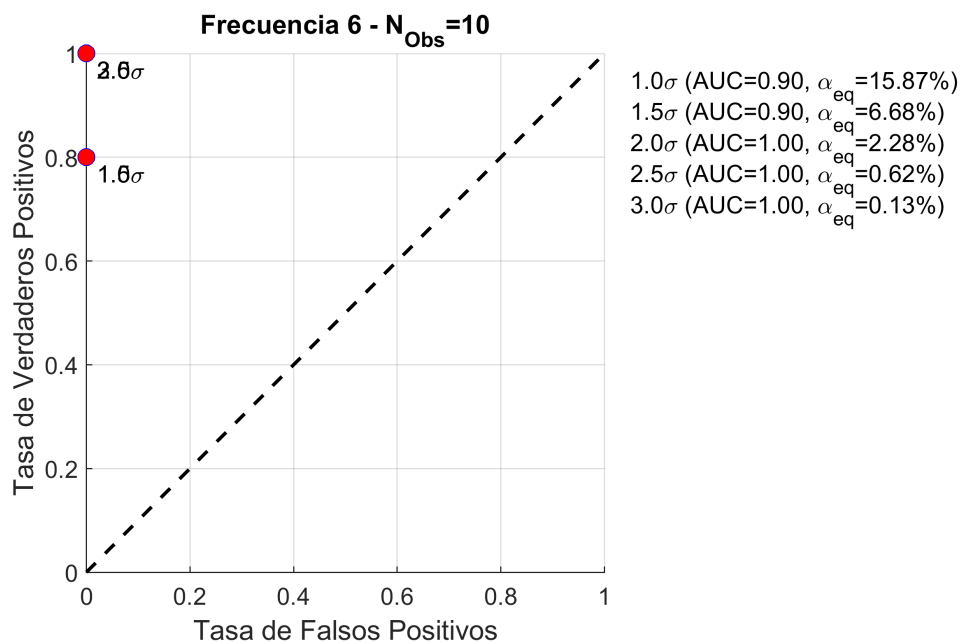
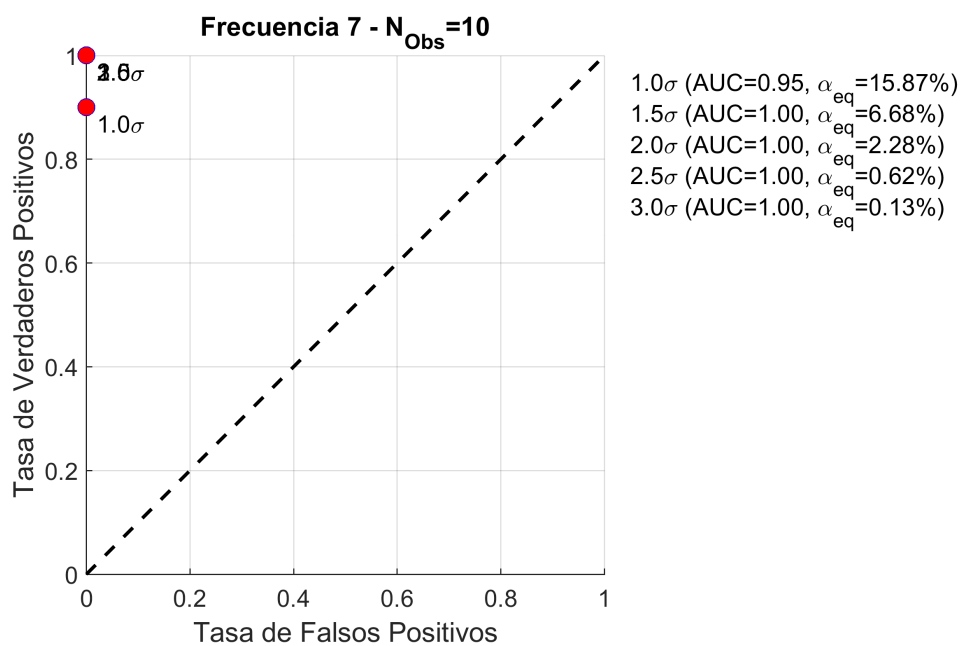


Figura G.14: Curva ROC para la Frecuencia 5,  $N_{Obs} = 10$

Figura G.15: Curva ROC para la Frecuencia 6,  $N_{Obs} = 10$ Figura G.16: Curva ROC para la Frecuencia 7,  $N_{Obs} = 10$

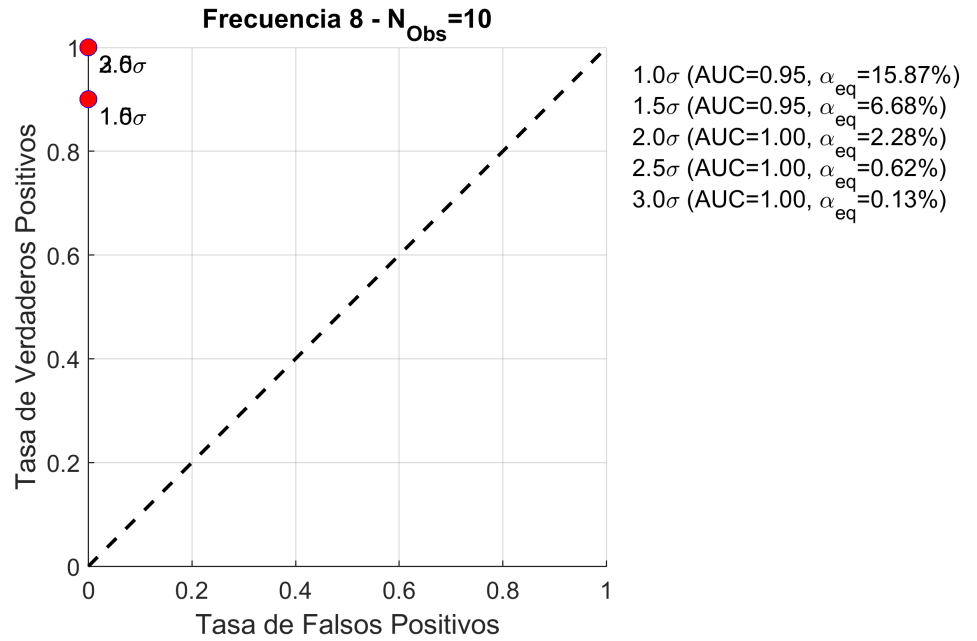


Figura G.17: Curva ROC para la Frecuencia 8,  $N_{Obs} = 10$

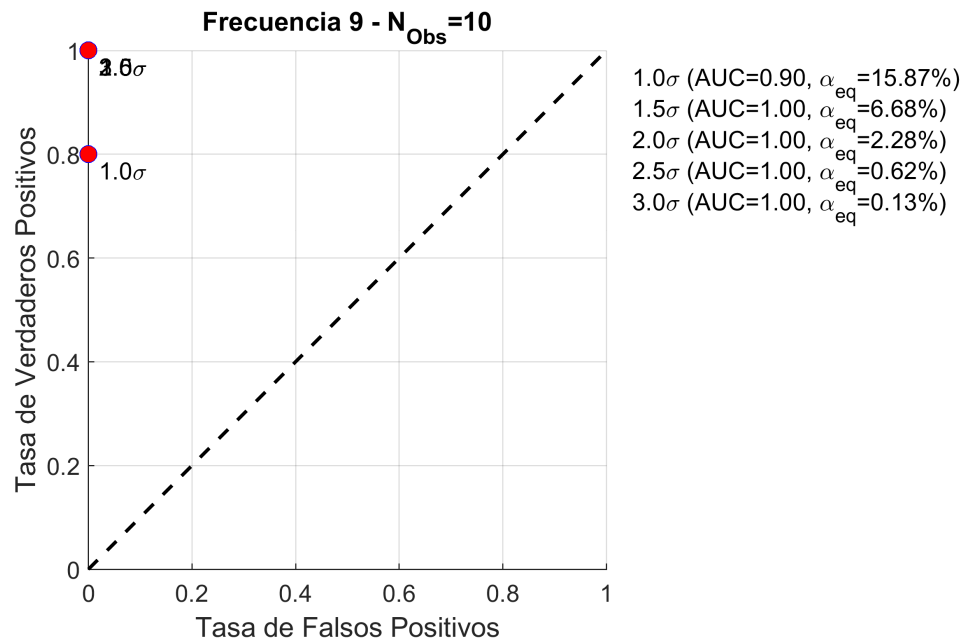


Figura G.18: Curva ROC para la Frecuencia 9,  $N_{Obs} = 10$

Al igual que en los resultados de la primera frecuencia observada, en todas las observaciones el valor de AUC es superior a 0,90 para niveles de significancia menores a  $\alpha_{1,5\sigma} = 6,68\%$ . Por lo que el valor asumido para el análisis aporta los mejores resultados de detección positiva del sistema de detección.