POSTGRADO
ECONOMÍA Y NEGOCIOS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Evaluación económica de modelos de valoración de activos bajo escepticismo, aplicando un enfoque bayesiano

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN FINANZAS

Alumno: Ignacio Carrasco Contreras

Profesor guía: Erwin Hansen Silva

Santiago, marzo 2019

1.- INTRODUCCIÓN

Distintos modelos financieros han sido desarrollados para describir el comportamiento de los retornos de los activos. Sin embargo, ningún modelo realiza una descripción completa y precisa de dicho comportamiento. En este sentido, Pástor (2000) señala que es razonable suponer que los modelos financieros no son perfectos ni tampoco se debieran descartar completamente, puesto que cada modelo es una simplificación de la realidad, sugiriendo que éstos pueden ser utilizados como puntos de referencia que permitan complementar las creencias previas que tienen los inversionistas al momento de realizar una toma de decisión.

En este sentido, el enfoque bayesiano entrega herramientas que hacen posible incorporar dichos modelos en la toma de decisión y, en particular, considerar distintos grados de confianza o escepticismo que el inversionista tiene sobre los mismos al momento de realizar el proceso de construcción de portafolios.

Cabe recordar que el método bayesiano define la probabilidad como una medida condicional de incertidumbre asociada con la ocurrencia de un evento en particular, dada la información disponible y los supuestos considerados (Bernardo et al., 2000). De esta forma, las probabilidades son consideradas subjetivas, las cuales se van modificando/actualizando a medida que se recibe información o evidencia adicional.

A pesar de las ventajas que proporciona el enfoque bayesiano, este no ha sido ampliamente usado en el área de las finanzas. Beck et al. (2012) señalan que si bien el interés en la utilización de métodos bayesianos se ha incrementado desde mediados de la década de los 90´s, el uso de este enfoque en investigaciones financieras ha decrecido en los primeros años del presente siglo. En particular, los autores examinan artículos de 87 journals de finanzas, economía y estadística cuyas aplicaciones estuvieran relacionadas con el enfoque bayesiano durante el período 1960-2004, encontrando que el uso de este análisis ha sido infrecuente durante el período y que se ha concentrado, principalmente, en pocos journals[1].

1 De los artículos que consideraron aplicaciones bayesianas, un 27% fueron publicados en Journal of Finance, un 11,5% en Review of Financial Studies y un 10% en Journal of Financial and Quiatitative Analysis.

Por otro lado, los mismos autores muestran que si bien la utilización de este enfoque ha ido disminuyendo, éste ha sido aplicado en una amplia variedad de temas dentro del área de las finanzas[2]. En este sentido, se han ampliado las investigaciones relacionadas al proceso de optimización y análisis de portafolios, dadas las ventajas que el enfoque bayesiano presenta: (i) uso de información previa sobre variables de interés, (ii) facilidades para la implementación de algoritmos numéricos que permitan simular variables económicas complejas y (iii) toma en consideración los riesgos de estimación y la incertidumbre en el problema de optimización de portafolios. Además, Avramov et al. (2010) señalan que este enfoque hace una descripción realista del proceso de toma de decisión y el uso de la información.

Dentro de la literatura relacionada con la selección de portafolios está el trabajo realizado por Pástor (2000), quien desarrolla una metodología que permite a un inversionista bayesiano incluir un cierto grado de confianza o escepticismo sobre un modelo en particular, al momento de realizar el proceso de optimización. En este sentido, los resultados encontrados por el autor muestran que en comparación al enfoque *data-based*, las ponderaciones óptimas dentro de un portafolio son menos sensibles al error muestral y tienden a tener valores menos extremos, señalando que el portafolio óptimo refleja tanto las implicaciones del modelo como también las series de tiempo de los retornos de los activos.

Utilizando la metodología propuesta por Pástor, el presente trabajo busca contribuir en esta rama de la literatura, al evaluar fuera de muestra (*out-of-sample evaluation*) de qué manera la incorporación de escepticismo sobre diferentes modelos de valoración de activos mejora o empeora la performance de los portafolios construidos a partir de éstos, a través de cuatro medidas de desempeño (*Sharpe Ratio*, *Certainty Equivalent Return*, *Turnover* y *Return-Loss*).

Como sabemos, distintos modelos de valoración de activos establecen que el rendimiento esperado de un activo es proporcional a una combinación lineal de los factores que consideren, cuya estructura está dada por la siguiente expresión

$$R_{i,t} - R_f = \alpha + \beta_{i,1}\left(f_{1,t} - R_f\right) + \cdots + \beta_{i,k}\left(f_{k,t} - R_f\right) + \epsilon_{i,t}$$

En donde α es a veces interpretado como una medida *ex post* de la habilidad que posee un *portfolio manager* a través de la gestión activa, mientras que, en el contexto de selección de activos, una

2 Se destacan: Market efficiency, Asset pricing and cross-sectional return predictability, Time varying returns, Portfolio analysis and performance, Derivates, entre otros.

magnitud positiva (negativa) *ex post* de α refleja que un activo se encuentra subvalorado (sobrevalorado).

Dado lo anterior, si el modelo se considera válido, entonces el verdadero valor de α es cero, es decir, el modelo implica *no mispricing*. Sin embargo, si un inversionista es escéptico en cuanto a las implicancias del modelo, dicho escepticismo puede reflejarse mediante una distribución de probabilidad previa sobre α.

Para efectos del presente trabajo, se toma en consideración la desviación estándar de α, cuyo valor es elegido por el inversionista para reflejar el grado de confianza/escepticismo que tiene respecto al modelo en cuestión. En el caso de $\sigma_\alpha = 0$, el inversionista confía completamente en el modelo, mientras que si $\sigma_\alpha = \infty$, el inversionista rechaza el modelo. Adicionalmente, también se consideran grados intermedios de escepticismo ($\sigma_\alpha = 1\%$ y $\sigma_\alpha = 5\%$), con la finalidad de reflejar creencias no tan extremas que pueda tener un inversionista en relación a un modelo en particular. Posteriormente, mediante combinaciones entre los modelos y *test assets* considerados, se realiza el proceso de asignación de portafolio.

Al igual que en el trabajo de Hansen (2018), los modelos considerados corresponden al modelo de tres factores de Fama & French (1993), el modelo de *momentum* de Cahart (1997), *q-factor model* de Hou et al. (2015) y el modelo de 5 factores de Fama & French (2015), puesto que en el último tiempo la literatura ha mostrado un mayor interés sobre éstos.

Una vez realizado el proceso de asignación de portafolio, se hace una evaluación fuera de muestra o *out-of-sample* considerando las medidas de desempeño mencionadas anteriormente, las cuales permiten cuantificar el efecto de si existe una mejora o no en la performance de los portafolios al incorporar algún grado de escepticismo sobre los modelos utilizados.

Dado lo anterior, los resultados encontrados muestran que la incorporación de escepticismo permite mejorar el desempeño de los portafolios en relación al escenario base de completa confianza ($\sigma_\alpha = 0\%$). En particular, se observa que las métricas de *Sharpe Ratio* y *Certainty Equivalent Return* mejoran al incorporar algún grado de escepticismo sobre los modelos. Sin embargo, los resultados no son muy concluyentes en relación a la medida *Turnover*, lo cual implica que, si bien se obtiene un mejor desempeño en términos de las dos primeras medidas, dichas estrategias, en algunos casos, incurren en mayores costos de transacción en comparación al escenario base. Por otro lado, se observa que niveles muy altos de escepticismo sobre los modelos conllevan a un deterioro en la performance de los portafolios en comparación a niveles intermedios ($\sigma_\alpha = 1\%$ y $\sigma_\alpha = 5\%$).

El resto del trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la sección 2 se hace una revisión de la literatura. En la sección 3 se presenta la metodología utilizada, la cual describe el proceso de selección de portfolios incorporando escepticismo en los modelos financieros, para luego realizar una evaluación *out-of-sample* que permita medir el desempeño económico a través de las cuatro métricas mencionadas anteriormente. En la sección 4 se presentan los datos utilizados y sus respectivas fuentes de información. En la sección 5 se muestran los principales resultados obtenidos, para luego en la sección 6 compararlos con otras especificaciones. Finalmente, en la sección 7 se muestran las conclusiones.

2.- LITERATURA

El principal objetivo de la teoría de portafolio es asignar óptimamente la inversión a través de distintos activos. El punto de partida de la teoría moderna de portafolios fue establecido por Markowitz (1952), quien desarrolló el procedimiento de optimización de media-varianza, permitiendo comprender la relación entre riesgo, retorno y comportamientos de inversión, señalando que el inversor incorpora sus preferencias dentro de la relación riesgo - retorno esperado para realizar la mejor asignación de su riqueza. Desde entonces, los trabajos relacionados a la teoría de portafolios han buscado detectar y corregir los problemas que presenta el trabajo inicial de Markowitz, como también la formulación de extensiones que han permitido representar de mejor forma el proceso de toma de decisiones de los inversionistas.

Si bien la visión tradicional o estándar ha realizado importantes avances en esta materia, no ha estado ajena a problemas relevantes que presenta este enfoque, ya que trata las estimaciones como parámetros verdaderos, ignorando los riesgos de estimación. Chopra (1993) muestra que pequeños cambios en los parámetros pueden resultar en importantes cambios en la asignación óptima, mientras que Chopra et al. (1993) muestra que la mala especificación de los mismos conlleva a un peor desempeño de los portafolios. De esta forma, Zellner et al. (1965) señalan que el proceso de optimización debería considerar la incertidumbre en los parámetros, por lo que un inversor debería maximizar su utilidad esperada respecto a la distribución predictiva de los retornos futuros.

En este sentido, la distribución predictiva es un concepto clave dentro del enfoque bayesiano. Klein et al. (1979) muestran que optimizar la utilidad esperada en función de la distribución predictiva resulta ser una estrategia óptima. Otros trabajos, como los de Bawa et al. (1979) y Brown (1976), también incorporan incertidumbre en los parámetros dentro del problema de optimización de portafolios. En particular, utilizan *improper priors* para computar la distribución predictiva de los parámetros y optimizan la utilidad esperada en función de ésta.

De esta forma, el enfoque o método bayesiano ha adquirido mayor relevancia en el último tiempo, puesto que, por un lado, se hace cargo de los problemas encontrados en el enfoque tradicional y, por otro lado, realiza una descripción más realista acerca del comportamiento del inversionista. En particular, el método bayesiano permite que el inversionista tome en consideración la incertidumbre en los parámetros, incorpore creencias previas en el proceso de toma de decisión y permita controlar la sensibilidad del portafolio óptimo en relación a los parámetros (Rachev et al., 2008).

Un ejemplo clásico que incorpora creencias previas dentro del proceso de inversión es el trabajo desarrollado por Black & Litterman (1992), quienes asumen que el inversionista tiene creencias iniciales consistentes con el equilibrio de mercado, las cuales se van actualizando acorde con sus propias visiones mediante una regla bayesiana. En este sentido, los autores consideran que tanto las visiones del inversionista (las cuales pueden basarse en eventos, noticias o análisis de la economía, entre otros) como el equilibrio de mercado, son fuentes de información respecto a los retornos futuros. A pesar de que se considera dentro de la literatura bayesiana, este trabajo no presenta la estructura formal que requiere esta metodología al no desarrollar, como se mencionó anteriormente, una distribución predictiva de los retornos.

En línea con lo anterior, algunos trabajos han mostrado cómo la incorporación de creencias previas puede ayudar a mejorar el proceso de toma de decisión. Baks et al. (2001), por ejemplo, incorporan creencias previas que reflejen el escepticismo sobre la habilidad de los managers en el proceso de inversión en fondos mutuos que son administrados activamente, mientras que Pastor et al. (1999) y Pastor (2000) muestran de qué manera la incertidumbre respecto a modelos de valoración de activos influye en el problema de optimización de portafolio.

En relación a este último, Pastor (2000) señala que hay al menos dos enfoques que son muy utilizados en la selección de portafolios. Por un lado, hay un enfoque "*data-based*", el cual asume una forma funcional para la distribución de los retornos y estima sus parámetros a partir de una serie de tiempo de dichos retornos y, por otro lado, está el enfoque "*model- based*", en el cual el portfolio óptimo de cada inversor es una combinación de portafolios *benchmark*. Ambos enfoques reflejan visiones extremas respecto a la validez de los modelos de valoración de activos. A partir de esto, el autor desarrolla el problema de selección de portafolio a través de un esquema bayesiano que considera el grado de confianza o escepticismo sobre dichos modelos.

Finalmente, a pesar de las múltiples ventajas que presenta el enfoque bayesiano, una de las principales complicaciones tiene relación con la elección de las distribuciones previas o *a priori* de los parámetros desconocidos, puesto que dicha elección conlleva a resultados diferentes. En este sentido, Avramov et al. (2010) señala que el enfoque bayesiano basado en distribuciones previas difusas o no informativas[3], si bien parecieran ser más objetivas, no conducen a decisiones de portafolios significativamente diferente en comparación a la proporcionada por el enfoque clásico o tradicional. De esta forma, los autores sugieren que, para conseguir las ventajas del enfoque bayesiano, es necesario considerar

3 Son aquellas distribuciones que tienen un impacto mínimo en la distribución posterior o *a posteriori*.

distribuciones previas informativas[4] que tomen en cuenta eventos, condiciones macro, teorías de valoración de activos o cualquier otro antecedente relevante sobre la evolución del precio de los activos.

4 Ejemplo de este tipo de distribuciones son: Conjugate Prior, Hyperparameter Prior, Asset Pricing Prior, Objective-Based Prior, entre otros.

3.- METODOLOGÍA

La metodología del presente trabajo utiliza un enfoque que permite al inversionista usar un modelo de valoración de activos al momento de realizar la selección de portafolios e incorporar algún grado de confianza previo respecto a dicho modelo. En particular, la metodología se basa en el trabajo desarrollado por Pástor (2000).

3.1.- Selección de Portafolio

Se considera un inversionista averso al riesgo con un horizonte de inversión de un período, el cual debe asignar su riqueza entre un activo libre de riesgo y un portafolio de $(N + K)$ activos riesgosos, en donde K denota los *benchmarks portfolio*[5], mientras que N denota los *test assets*[6]. Se asume que el inversionista considera al pasado como una fuente de información del futuro. La asignación se realiza en base a un conjunto de información Φ que está contenido en los datos históricos de retornos e información previa.

Por otro lado, denotemos como W a la riqueza actual del inversionista y δ a la proporción de la riqueza invertida en el activo libre de riesgo. De esta forma, la riqueza del inversionista en un período más adelante es

$$W_{t+1} = W\left(1 + \delta r_f + (1 - \delta)\omega' r_{t+1}\right) \qquad (1)$$

donde r_f es la tasa del activo libre de riesgo, r_{t+1} es el vector $(N + K)\, x\, 1$ de los retornos de los activos riesgosos sobre r_f en el período siguiente y ω corresponde al vector $(N + K)\, x\, 1$ de ponderadores en el portfolio de activos invertibles, es decir, *benchmarks portfolio* y *test assets*. El inversionista escoge ω para maximizar su utilidad esperada en el siguiente período

$$\max_{\omega} \int u(W_{t+1})\, p(r_{t+1}|\Phi) d\, r_{t+1} \qquad (2)$$

donde u es la función de utilidad del inversionista y $p(r_{t+1}|\Phi)$ es la función de densidad de probabilidad de r_{t+1} condicional a Φ, también conocida como densidad de probabilidad predictiva. Si

5 Corresponden a las fuentes de riesgo de un determinado modelo de valoración de activos.

6 También se les conoce como non-benchmark assets.

bien la función de densidad de probabilidad predictiva es en general desconocida, la densidad $p(r_{t+1}|\theta,\Phi)$ es usualmente asumida como conocida, donde θ denota los parámetros que describen el comportamiento estocástico de los retornos. Sin embargo, el valor de θ no se conoce, por lo que una forma de tratar con esto es considerar los estimadores muestrales $\hat{\theta}$ como sus valores verdaderos. El problema de este enfoque es que ignora los riesgos de estimación en los estimadores, por lo que el verdadero nivel de incertidumbre que enfrenta el inversionista se subestima. Dado lo anterior, la función de densidad predictiva se puede obtener como

$$p(r_{t+1}|\Phi) = \int p(r_{t+1}|\theta,\Phi)\, p(\theta|\Phi) d\theta \qquad (3)$$

donde la distribución posterior de θ, $p(\theta|\Phi)$, es proporcional al producto entre la distribución previa y la función *likelihood*

$$p(\theta|\Phi) \propto \; p(\theta)L(\theta;\Phi) \qquad (4)$$

Una manera de especificar la función *likelihood* es asumir que, en cada período, la distribución conjunta de los excesos de retornos de los activos invertibles es una normal multivariada con parámetros E y V. Si la distribución previa de $\theta \equiv (E,V)$ no es informativa y todos los activos invertibles tienen retornos con la misma cantidad de datos, entonces la función de densidad predictiva es una t-Student multivariada.

3.2.- Modelos de valoración de activos[7]

Como sabemos, diferentes modelos de valoración de activos describen el comportamiento de precios o retornos como funciones de distintos factores o *benchmark portfolios*, los cuales son considerados como medidas de riesgo. En este sentido, dichos modelos establecen que el rendimiento esperado de un activo es proporcional a una combinación lineal de los factores que consideren. En particular,

$$E(R_i) - R_f = \; \beta_{i,1}\big(E(f_1) - R_f\big) + \cdots + \beta_{i,k}\big(E(f_k) - R_f\big) \qquad (5)$$

donde $E(f_i)$ es el retorno esperado del factor o *benchmark portfolio* j y $\beta_{i,j}$ corresponde a la sensibilidad del retorno esperado del activo i respecto al factor j.

7 Para más detalles, ver Rachev et al. (2008).

Para estimar los β_s del modelo en cuestión, es necesario reescribir la ecuación (5) a través de la siguiente forma

$$R_{i,t} - R_f = \alpha + \beta_{i,1}(f_{1,t} - R_f) + \cdots + \beta_{i,k}(f_{k,t} - R_f) + \epsilon_{i,t} \qquad (6)$$

En la ecuación (6), α es a veces interpretado como una medida *ex post* de la habilidad que posee un *portfolio manager* en la gestión activa de cartera. Por otro lado, en el contexto de selección de activos, una magnitud positiva (negativa) *ex post* de α refleja que un activo se encuentra subvalorado (sobrevalorado).

Dado lo anterior, si un modelo de valoración de activos es válido, entonces el verdadero valor de α es cero, es decir, el modelo implica *no mispricing*. Sin embargo, si un inversionista es escéptico en cuanto a las implicancias del modelo, dicho escepticismo puede reflejarse en la creencia de que la relación de precios está desalineada en una magnitud λ

$$E(R_i) - R_f = \lambda + \beta_{i,1}(E(f_1) - R_f) + \cdots + \beta_{i,k}(E(f_k) - R_f) \qquad (7)$$

De esta forma, la creencia subjetiva del inversionista (escepticismo) se expresa como una perturbación del modelo ideal.

3.3.- Función *Likelihood*

Supongamos que los retornos de los *N test assets* y los *K portfolios benchmark* están disponibles en T períodos, a los cuales los denotaremos a través de las matrices $T\ x\ N$ y $T\ x\ K$ (por simplicidad la denotaremos por F), respectivamente. Para la estimación de los modelos, se considera una regresión multivariada de los retornos de los activos sobre los retornos de los *portfolios benchmarks*, la cual está dada por

$$R = XB + U, \qquad vec(U) \sim N(0, \Sigma \otimes I_T) \qquad (8)$$

donde $X = [\mathbf{1}\ F]$, $\mathbf{1}$ es un vector $T\ x\ 1$ de unos, I_T es una matriz de identidad de $T\ x\ T$, "vec" denota el proceso de vectorización, $\otimes$ denota el producto de Kronecker y

$$B = \begin{bmatrix} \alpha' \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

es una matriz $(K+1)\,x\,N$ que contiene un vector $N\,x\,1$ de interceptos α y una matriz $K\,x\,N$ de *benchmark loadings* de la regresión. Por otro lado, se asume que las filas de la matriz U no están serialmente correlacionadas y son homocedásticas con una matriz de covarianza Σ de $N\,x\,N$. Además, denotamos el vector $N(K+1)\,x\,1$

$$b = vec(B') = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} \quad (10)$$

donde $\beta = vec(\beta_2')$ es un vector de $NK\,x\,1$.

De esta forma, los retornos de los *test assets* se distribuyen a través de una normal multivariada

$$(vec(R)|X) \sim N\left(\left[\mathrm{B}' \otimes I_T\right]vec(X), \Sigma \otimes I_T\right) \quad (11)$$

donde $\left[\mathrm{B}' \otimes I_T\right]vec(X) = vec(XB)$.

Por otro lado, para tomar en consideración la incertidumbre sobre los retornos de los *portfolios benchmarks*, se asume que éstos son estocásticos y siguen también una distribución normal multivariada

$$F_t \sim N(E, \mathrm{V}) \quad (12)$$

donde E es un vector $1\,x\,K$ de retornos esperados de los *portfolios benchmarks* y V es una matriz de covarianza $K\,x\,K$ de los *retornos benchmarks*. Es importante señalar que los retornos de los *portfolios benchmarks* son asumidos a ser independientes en el tiempo e independientes de U.

Los supuestos sobre el comportamiento estocástico de los retornos implica que la función *likelihood* de los parámetros $(B, \Sigma, \mathrm{E}, \mathrm{V})$ está dado por

$$p(R, F|B, \Sigma, \mathrm{E}, \mathrm{V}) = p(R|F, B, \Sigma)\, p(F|E, V) \quad (13)$$

La función *likelihood* de los parámetros de la regresión está dada por

$$p(R|F, B, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-T/2}\, exp\left\{-\frac{1}{2}tr(R - XB)'(R - XB)\Sigma^{-1}\right\} \quad (14)$$

donde tr corresponde a la traza y $|\Sigma|$ denota el determinante de Σ. Por otra parte, la función *likelihood* para E y V está dada por

$$p(F|E,V) \propto |\mathrm{V}|^{-T/2}\, exp\left\{-\frac{1}{2}tr(F-E)'(F-E)\mathrm{V}^{-1}\right\} \qquad (15)$$

3.4.- Distribuciones a priori

La perturbación del modelo se expresa a través de una distribución de probabilidad previa sobre α, en donde la media de α igual a cero refleja el escenario base de *no mispricing*. La desviación estándar de α (σ_α) es un parámetro cuyo valor es elegido por el inversionista para reflejar el grado de confianza que tiene respecto al modelo en cuestión. Si el valor de σ_α es bajo, la confianza sobre el modelo se hace más fuerte. En el caso extremo de $\sigma_\alpha = 0$, el inversionista confía completamente en el modelo, mientras que si $\sigma_\alpha = \infty$, entonces la distribución previa de α es completamente plana y, por ende, rechaza el modelo. Para el presente trabajo se consideran los niveles de escepticismo $\sigma_\alpha = 0\%$, $\sigma_\alpha = 1\%$, $\sigma_\alpha = 5\%$ y $\sigma_\alpha = \infty$ (en términos prácticos, $\sigma_\alpha = \infty$ se construye utilizando un valor muy grande).

Se asume que los parámetros de la regresión y los momentos de los *retornos benchmarks* (E, V) son independientes

$$p(B, \Sigma, \mathrm{E}, \mathrm{V}) = p(B, \Sigma)\, p(E, V) \qquad (16)$$

Por otro lado, se asume que los parámetros del modelo tienen una distribución previa o *a priori* conjugada

$$b|\,\Sigma \sim N(b_0, \Sigma \otimes \Psi_0) \qquad (17)$$

$$\Sigma \sim W^{-1}(H_0, \upsilon_0) \qquad (18)$$

donde

$$b_0 = \binom{\alpha_0}{\beta_0} \qquad (19)$$

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2/s^2 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \qquad (20)$$

$$\mathbb{E}(\Sigma) = s^2 I_N \qquad (21)$$

Con $\alpha_0 = 0$ y β_0 se construye a partir de estimaciones premuestrales. La notación $W^{-1}(H_0, \upsilon_0)$ hace referencia a una distribución Wishart invertida con un parámetro matriz H_0 y υ_0 grados de libertad. De las propiedades de la distribución Wishart invertida, $\mathbb{E}(\Sigma) = H_0/(\upsilon_0 - N - 1)$, donde $H_0 = s^2(\upsilon_0 - N - 1)I_N$.

Dado que en el presente trabajo la inferencia sobre Σ no es de interés, se asume que su distribución previa no es informativa (plana), por lo que se le asigna un valor pequeño al parámetro υ_0. Por otro lado, $\Sigma \otimes {\Psi_0}^{-1}$ es una matriz $N(K+1)\, x\, N(K+1)$, en donde el bloque (1,1) es una matriz de covarianza $N\, x\, N$ de α condicional a Σ. Los bloques (1,2) y (2,1) son matrices ceros, ya que se asume que los interceptos no están correlacionados con las pendientes (β) de la regresión. El bloque (2,2) es la matriz covarianza $NK\, x\, NK$ (Ω) de los βs de la regresión. Dado que tampoco es de interés la inferencia respecto a los βs, se asume que la distribución previa no es informativa y se impone que Ω es igual a una matriz diagonal con valores muy grandes como, por ejemplo

$$\Omega = 100 I_K \qquad (22)$$

La distribución *a priori* para E y V se asume como *Jeffreys´ prior*

$$E, V \propto |V|^{-(T+1)/2} \qquad (23)$$

3.5.- Distribuciones a posteriori

Dados los supuestos utilizados sobre los parámetros en las secciones anteriores, se tiene que las distribuciones *a posteriori* tienen la misma forma que las distribuciones *a priori*. De esta manera,

$$b|\,\Sigma, \mathrm{R}, \mathrm{F} \sim \mathcal{M}N(b^*, \Psi^*, \Sigma) \qquad (24)$$

donde la notación $\mathcal{M}N\left(b^*, {\Psi^*}^{-1}, \Sigma\right)$ hace referencia a una distribución *matrix normal* y

$$\Psi^* = \left(\Psi_0 + X^{\prime}X\right)^{-1} \qquad (25)$$

$$b^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \Psi^*\left({\Psi_0}^{-1} b_0 + X^{\prime}X\hat{b}\right) \qquad (26)$$

En la ecuación anterior, $\hat{b}$ denota el estimador MCO de b.

Por otro lado, la distribución *a posteriori* de Σ es una distribución Wishart invertida

$$\Sigma \sim W^{-1}(H^*, \upsilon^*) \quad (27)$$

donde

$$H^* = H_0 + (R - X\hat{b})^{'}(R - X\hat{b}) + (\hat{b} - b_0)^{'}\Psi_0(\hat{b} - b_0) \quad (28)$$

$$\upsilon^* = \upsilon_0 + T \quad (29)$$

Finalmente, las distribuciones *a posteriori* para E y V son

$$E|\,\mathrm{V},\mathrm{F} \sim N\left(\hat{E}, \frac{V}{T}\right) \quad (30)$$

$$\mathrm{V} \sim W^{-1}(\Omega\,, T - 1) \quad (31)$$

donde

$$\hat{E} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} F_t \quad (32)$$

$$\Omega = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(F_t - \hat{E})^{'}(F_t - \hat{E}) \quad (33)$$

3.6.- Distribuciones predictivas y selección de portafolio

El tema fundamental en la selección del portafolio bajo un enfoque bayesiano corresponde a la distribución predictiva de los retornos. Para esto, se considera lo siguiente.

Denotemos como F_{T+1} al vector $1xK$ de retornos de los *portfolios benchmark* y como R_{T+1} al vector $1xN$ de retornos de los *test assets* en el período siguiente. Dado que se asumió que los *retornos benchmark* son variables aleatorias, es necesario predecir F_{T+1} antes de realizar las predicciones sobre R_{T+1}.

Tal como se señaló en las secciones anteriores y de acuerdo con los supuestos utilizados, la distribución predictiva de F_{T+1} es una distribución t-student multivariada con $T - K$ grados de libertad, por lo que la media y la covarianza predictiva de F_{T+1} corresponden a:

$$\tilde{E}_F = \hat{E} \quad y \quad \tilde{V}_F = \frac{T+1}{(T-K-2)}\Omega \quad (34)$$

Por otro lado, se tiene que la distribución predictiva de R_{T+1} es una t-student multivariada con $T+\nu_0$ grados de libertad. De esta forma, se tiene que la media y la varianza predictiva están dadas por:

$$\tilde{E}_R = \tilde{E}_X b^* \quad y \quad \tilde{V}_R = \frac{T+\nu_0}{T+\nu_0-2} H^*\left(1-\tilde{E}_X \Psi^* \tilde{E}_X\right) \quad (35)$$

donde $\tilde{E}_X = (\mathbf{1}\ \tilde{E}_F)$. Finalmente, la covarianza predictiva entre R_{T+1} y $F_{j,T+1}$, está dada por:

$$\tilde{V}_{R,F} = \beta_j^* \tilde{V}_{F,jj} \quad (36)$$

donde β_j^* es la media posterior del factor j^{th} y $\tilde{V}_{F,jj}$ es el componente diagonal j^{th} de $\tilde{V}_F$.

Juntando las ecuaciones (34), (35) y (36), se obtienen los parámetros que resuelven el problema de optimización de portafolio:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_R \\ \tilde{E}_F \end{pmatrix} \quad y \quad \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_R & \tilde{V}_{R,F} \\ \tilde{V}_{R,F} & \tilde{V}_F \end{pmatrix} \quad (37)$$

los cuales permiten calcular los ponderadores del portafolio óptimo a través de la siguiente expresión:

$$max_\omega \left(\omega' \tilde{\mu} - \frac{\gamma}{2}\omega' \tilde{\Sigma}\omega\right) \quad (38)$$

donde γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo. Para el presente trabajo, se considera un parámetro de aversión al riesgo de $\gamma = 1$ y no se permite realizar venta corta ni *leverage*.

Cabe recordar que los ponderadores del portafolio óptimo se pueden computar mediante la siguiente expresión:

$$\omega^* = \frac{\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{\mu}}{\mathbf{1}'\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{\mu}} \quad (39)$$

Como se ha mencionado anteriormente, el inversionista asignará su riqueza entre los *test assets* y los *benchmark portfolios*, cuyo portafolio óptimo variará de acuerdo al nivel de escepticismo considerado. En particular, se tiene que si el inversionista confía completamente en el modelo ($\sigma_\alpha = 0$), entonces el portafolio óptimo considerará solamente invertir en los factores o *benchmark portfolios* de dicho modelo, mientras que a medida que aumenta el nivel de escepticismo (σ_α se hace más grande), el portafolio óptimo irá asignando una mayor proporción a los *test assets* en desmedro de los *benchmark portfolios*.

Para efectos de comparar los resultados obtenidos al considerar los distintos niveles de escepticismo en los modelos de valoración de activos, se utilizan las estrategias de asignación de media-varianza y de distribución igualitaria (1/N).

3.7.- Evaluación desempeño fuera de muestra (*Out-of-sample evaluation*)

Para la evaluación fuera de muestra o *Out-of-Sample*, se considera el trabajo realizado por DeMiguel et al. (2009). En particular, se utiliza un enfoque *rolling-sample*, el cual se describe a continuación.

Dada una base de T meses de retornos de activos, se escoge una ventana de estimación o muestra inicial de longitud M. En cada mes t, partiendo por t=M+1, se usan los datos de los M meses previos para estimar los parámetros $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\Sigma}$, los cuales, como se señaló anteriormente, se utilizan para determinar los ponderadores del portafolio óptimo. Luego, se utilizan dichos ponderadores para computar los retornos en el mes t+1. Posteriormente, se agrega el retorno del período siguiente de la base de datos en la ventana de estimación y se elimina el retorno correspondiente al primer período de dicha ventana, con la finalidad de mantener siempre una muestra móvil de M retornos. Este proceso se repite hasta alcanzar el período T. El resultado de este enfoque es una serie de $T - M$ retornos mensuales fuera de muestra o *out-of-sample*.

Es importante señalar que a diferencia de la metodología desarrollada por DeMiguel et al. (2009), el presente trabajo considera una pre-muestra, con la finalidad de realizar las estimaciones sobre β_0 descrito en la sección anterior. De esta forma, se considera una longitud de M igual a 120 meses, en donde los primeros 60 meses corresponden a la pre-muestra, mientras que los siguientes 60 meses corresponden a la muestra que permite estimar los parámetros $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\Sigma}$.

Una vez obtenidas las series de tiempo, se computan cuatros medidas de evaluación de desempeño, las cuales permitirán hacer las comparaciones pertinentes entre el escenario base de plena confianza en los modelos y los distintos escenarios de escepticismo.

En primer lugar, se considera el *Sharpe Ratio*, definido como la media muestral de los excesos de retornos *out-of-sample* (sobre el activo libre de riesgo), $\hat{\mu}_k$, dividido por su desviación estándar,$\hat{\sigma}_k$:

$$\widehat{SR}_k = \frac{\hat{\mu}_k}{\hat{\sigma}_k} \qquad (40)$$

donde *k* corresponde a una especificación en particular.

En segundo lugar, se calcula el *Certainty-Equivalent Return (CER)*, el cual se define como la tasa libre de riesgo que el inversor está dispuesto a aceptar en vez de adoptar una estrategia particular de portafolio:

$$\widehat{CEQ}_k = \hat{\mu}_k - \frac{\gamma}{2}\hat{\sigma}_k^2 \qquad (41)$$

donde $\hat{\mu}_k$ y $\hat{\sigma}_k^2$ son la media y la varianza de los excesos de retornos *out-of-sample*, respectivamente; mientras que γ corresponde al coeficiente de aversión al riesgo.

Como tercera medida, se computa el *Turnover*, el cual se define de la siguiente manera:

$$Turnover = \frac{1}{T-M}\sum_{t=1}^{T-M}\sum_{j=1}^{N}\left(\left|\widehat{w}_{k,j,t+1} - \widehat{w}_{k,j,t^+}\right|\right) \qquad (42)$$

donde $\widehat{w}_{k,j,t}$ es el peso del activo *j* dentro del portafolio en el período *t* bajo la especificación *k*. $\widehat{w}_{k,j,t^+}$ es el peso dentro del portafolio antes de rebalancearlo en *t+1* y $\widehat{w}_{k,j,t+1}$ es el peso dentro del portafolio deseado en el período *t+1*, después de rebalancearlo. De esta forma, el *Turnover* puede ser interpretado como el porcentaje promedio de riqueza tranzada en cada período.

Finalmente, se reporta una medida económica que considera de qué manera los costos de transacción proporcionales generados por el *Turnover* afectan los retornos de una especificación en particular. Al igual que en DeMiguel et al. (2009), se consideran costos de transacción igual a 50 p.b. por transacción. Sea $R_{k,p}$ el retorno de la especificación *k* sobre el portafolio de N activos antes de rebalancear, esto es:

$$R_{k,p} = \sum_{j=1}^{N} R_{j,t+1}\widehat{w}_{k,j,t} \qquad (43)$$

Cuando el portafolio es rebalanceado en el período t+1 y denotando como c el costo de transacción proporcional, entonces el costo sobre todos los activos es

$$c \times \sum_{j=1}^{N} \left| \widehat{w}_{k,j,t+1} - \widehat{w}_{k,j,t^+} \right| \qquad (44)$$

De esta forma, es posible describir la evolución de la riqueza para la especificación *k* como:

$$W_{k,t+1} = W_{k,t}\left(1 + R_{k,p}\right)\left(1 - c \times \sum_{j=1}^{N} \left| \widehat{w}_{k,j,t+1} - \widehat{w}_{k,j,t^+} \right| \right) \qquad (45)$$

Con el retorno neto de los costos de transacción dado por $\frac{W_{k,t+1}}{W_{k,t}} - 1$.

Para cada especificación, se procede a calcular el *Return-Loss (R-L)*, el cual se define como el retorno adicional necesario para que la especificación *k* se desempeñe de manera similar a la estrategia *1/N* en términos de *Sharpe Ratio*. Para computar el *Return-Loss*, primero se obtiene la media (μ_{ew}) y la volatilidad (σ_{ew}) de los retornos netos mensuales de la estrategia 1/N. Luego, se calculan las mismas medidas para cada especificación *k*, es decir, μ_k y σ_k. Finalmente, el *Return-Loss* de la especificación *k* corresponde a:

$$Return - Loss_k = \frac{\mu_{ew}}{\sigma_{ew}} \times \sigma_k - \mu_k \qquad (46)$$

4.- DATOS

La base utilizada contiene retornos mensuales de distintos factores o *benchmark portfolios* considerados en cuatro modelos de valoración de activos y diferentes portafolios que son utilizados como *test assets*. Además, la muestra abarca el período de enero 1968 hasta diciembre 2016.

En cuanto a los modelos de valoración de activos, se considera el modelo de 3 factores de Fama & French (1993), el cual utiliza los factores *market excess return (MKT)*, *size premium (SMB)* y *value premium (HML)*. El segundo modelo corresponde una extensión del modelo anterior al incorporar el factor *momentum (MOM)*, de acuerdo al trabajo desarrollado por Carhart (1997). El tercer modelo corresponde al trabajo propuesto por Hou, Xue & Zhang (2014), el cual se denomina *q-factor* y considera los factores de mercado *(MKT)*, de tamaño: la diferencia entre el retorno de un portafolio de acciones de bajo tamaño y el retorno de un portafolio de acciones de tamaño grande (r_{ME}), de inversion: la diferencia entre el retorno de un portafolio de acciones de baja inversion y el retorno de un portafolio de acciones con alta inversión ($r_{I/A}$) y de rentabilidad: la diferencia entre el retorno de un portafolio de acciones con alta rentabilidad y el retorno de un portfolio de acciones de baja rentabilidad (r_{ROE}). Finalmente, el último corresponde al modelo de 5 factores de Fama & French (2015), el cual incorpora los factores de rentabilidad *(RMW)* y de inversión *(CMA)* al modelo de tres factores de Fama & French (1993) mencionado anteriormente.

En relación a los *test assets*, se consideran 25 y 100 portafolios *size and book-to-market*, y 30 y 49 portafolios industria.

La información se obtiene del website de Kenneth French[8], en donde se encuentran disponible los portafolios *size and book-to-market* (25 y 100), los portafolios industria (30 y 49) y los factores utilizados en los modelos de Fama & French (1993), Cahart (1997) y Fama & French (2015). En cuanto a los factores utilizados en el modelo de Hou, Xue & Zhang (2015), éstos fueron provistos por el Profesor Kewei Hou.

8 http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

TABLA 1. Estadística Descriptiva

Factores	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max	Skewness	Kurtosis
MKT - RF	588	0.0049	0.0454	-0.2324	0.1610	-0.5109	4.7877
SMB	588	0.0020	0.0307	-0.1528	0.1873	0.4126	6.6381
HML	588	0.0039	0.0290	-0.1125	0.1291	0.0513	5.0255
MOM	588	0.0063	0.0434	-0.3458	0.1838	-1.3396	13.2927
RMW	588	0.0026	0.0230	-0.1911	0.1352	-0.3713	15.7669
CMA	588	0.0036	0.0202	-0.0688	0.0955	0.3269	4.5713
MKT	588	0.0048	0.0454	-0.2314	0.1603	-0.5370	4.9063
ME	588	0.0027	0.0308	-0.1439	0.2213	0.6275	8.3178
IA	588	0.0043	0.0187	-0.0716	0.0925	0.1198	4.5490
ROE	588	0.0054	0.0256	-0.1385	0.1037	-0.6845	7.5743

Nota: Estadística descriptiva de factores considerados en los modelos de valoración de activos. Período: 01/1968 - 12/2016.

La Tabla 1 muestra la estadística descriptiva de los factores considerados en los distintos modelos de valoración de activos.

5.- RESULTADOS

En esta sección, se compara el desempeño de distintos portafolios construidos a partir de los modelos de valoración de activos utilizados. En particular, en cada modelo se consideran distintos niveles de escepticismo y se reportan las medidas antes mencionadas, es decir, *Sharpe Ratio*, *Certainty-Equivalent Return*, *Turnover* y *Return-Loss*.

En la Tabla 2 se reportan los resultados para el caso de 25 portafolios *size and book-to-market*. En primera instancia, se observa que, para todos los modelos, el *Sharpe Ratio* mejora de manera importante al considerar algún nivel de escepticismo respecto al escenario base en que el inversionista confía plenamente en el modelo. Si bien los *SR* mejoran al incorporar algún grado de escepticismo, los resultados muestran que, en algunos casos, desconfiar completamente en el modelo conlleva a un menor desempeño en relación a niveles intermedios de escepticismo. En particular, se observa que para los modelos FF3 y FF5 un nivel de escepticismo del 1% permite obtener una mayor performance en relación a niveles de escepticismo mayores (5% e infinito). Se obtienen conclusiones similares al considerar como medida el *CER*, en el cual se observa que el desempeño de los modelos mejora al incorporar algún grado de escepticismo. Sin embargo, para el caso del *Turnover* se obtienen resultados dispares. En particular, se tiene que el desempeño bajo esta medida mejora al incorporar escepticismo para los modelos HXZ y FF5, y empeora para el caso de los modelos FF3 y FF3 + MOM.

Considerando, para efectos de comparabilidad, los procesos de asignación de media-varianza (MV) y de distribución igualitaria (1/N), se observan resultados dispares dependiendo de la medida económica que se esté utilizando. Para el caso de los niveles de escepticismo mayores a 0% (dado que es el interés del presente trabajo), se tiene que bajo las medidas de *SR* y *Turnover*, los resultados difieren dependiendo del modelo. A modo de ejemplo, se observa que al considerar algún nivel de escepticismo para los modelos FF3 y HXZ se obtiene un peor desempeño en términos de SR en comparación a los procesos de asignación MV y 1/N, mientras que los resultados son mejores si se considera la medida *Turnover*. Ahora, al utilizar la medida *CER*, se observan mejores resultados al considerar algún nivel de escepticismo en comparación a las estrategias MV y 1/N.

Al realizar la comparación entre modelos, se observa que el modelo de Fama & French de 3 factores obtiene el mejor desempeño bajo todas las medidas utilizadas cuando se consideran las estrategias que incluyen algún grado de nivel de escepticismo. Lo anterior puede deberse a que el modelo FF3 realiza una mejor estimación de los retornos de los portafolios *size and book-to market*. Por otro lado, los resultados muestran que a medida que aumenta el nivel de escepticismo en los modelos, se produce una convergencia en el desempeño de los mismos, lo cual, de alguna forma es lógico, puesto que al incorporar un mayor escepticismo se obtiene una menor ponderación en los factores considerados en cada modelo y, por ende, una mayor ponderación de los activos riesgosos dentro del portfolio.

En la Tabla 3 se reportan los resultados para el caso de 30 portfolios industria. En términos generales, se observa que los resultados no varían cualitativamente en comparación al caso anterior de 25 portfolios. Al considerar las medidas *SR* y *CER*, se tiene que el desempeño en ambos indicadores mejora al incorporar algún grado de escepticismo en los modelos. En particular, cuando se considera un nivel de 1%, se tiene que todos los modelos mejoran su performance. Sin embargo, cuando se toman en cuenta niveles de escepticismo mayores, los resultados obtenidos muestran ser dispares. Para el caso de los modelos *FF3* y *FF3+MOM*, se tiene que tanto el *SR* como el *CER* mejoran a medida que aumenta el nivel de escepticismo, obteniendo los mayores resultados en el caso de $\sigma_\alpha = \infty$. En el caso del modelo HXZ, se observa que el performance de ambos indicadores empeora cuando consideramos niveles de escepticismos mayores al 1%, mientras que para el caso del modelo FF5, se tiene que el mejor desempeño se obtiene cuando aplicamos un $\sigma_\alpha = 5\%$. Bajo la medida *Turnover*, se observa que la performance empeora en los modelos FF3 y FF5 cuando agregamos algún nivel de escepticismo y, en particular, se va deteriorando a medida que aumenta dicho nivel. Por otro lado, en los modelos FF3+MOM y HXZ se observa un mejor desempeño bajo este indicador cuando se considera un nivel de $\sigma_\alpha = 1\%$ en relación al escenario base de completa confianza.

Haciendo la comparación entre modelos, se observan resultados dispares a lo obtenido en el caso anterior de 25 portfolios. En este caso, no es posible concluir de manera clara que un modelo obtenga un mejor desempeño en relación a los demás. Bajo la métrica de *SR*, se observa que en el escenario base de $\sigma_\alpha = 0\%$ el mayor valor lo obtiene el modelo FF5. Sin embargo, cuando consideramos mayores niveles de escepticismo la situación cambia. Por ejemplo, considerando un $\sigma_\alpha = 1\%$, el mejor desempeño bajo esta métrica lo obtiene el modelo HXZ, mientras que en el escenario de $\sigma_\alpha = \infty$ el *SR* más alto se observa al considerar el modelo FF3. Un patrón similar de comportamiento se observa cuando se toman en cuenta las demás métricas consideradas en el presente trabajo. Sin embargo, los resultados exhibidos siguen mostrando la tendencia de convergencia descrito en el caso anterior.

Al extender el análisis para los casos en que el *holding period* es de 6 meses o 1 año, se observa que los resultados son similares para las medidas *SR* y *CER*, es decir, que el desempeño mejora al incorporar algún grado de escepticismo en los modelos utilizados, ya sea considerando como *test asset* los 25 portafolios *size and book-to-market*, o bien, los 30 portfolios industria.

En cuanto a la medida *Turnover*, los resultados no son tan concluyentes para determinar que la incorporación de escepticismo implique una mejor performance de los portafolios. En el caso de 25 portafolios *size and book-to-market* se observa que los resultados, en términos generales, refuerzan lo encontrado en el caso de un *holding period* igual a 1 mes. Para los casos de 6 meses o 1 año, en los modelos FF3 y FF3+MOM, la medida *Turnover* empeora al considerar algún grado de escepticismo, mientras que ésta mejora cuando se utiliza el modelo HXZ. Sin embargo, el modelo FF5 muestra resultados dispares, puesto que la incorporación de un mayor σ_α implica un mejor desempeño bajo esta medida en el escenario de 6 meses, no así en el caso de 1 año.

A diferencia del caso anterior, al considerar los 30 portfolios industria, todos los modelos presentan una mejora en la medida *Turnover* cuando se considera algún grado de escepticismo en relación al escenario base de plena confianza en los *holding period* de 6 meses o 1 año.

Finalmente, al igual que en Avramov (2002), se obtienen conclusiones similares respecto al comportamiento que tiene la medida *Sharpe Ratio* ante distintos niveles de escepticismo. En este sentido, el autor muestra que bajo el escenario que no permite venta corta ni leverage, los *SR* más altos se obtienen al considerar niveles intermedios de escepticismo. No obstante, desconfiar completamente en el modelo resulta en un menor desempeño en comparación al escenario base de plena confianza. Cabe señalar que, a diferencia del presente trabajo, la metodología de Avramov considera que los retornos pueden ser predichos por distintas variables como, por ejemplo, *dividend yield*, *default spread*, *term spread*, entre otros.

TABLA 2. 25 Portfolios *size and book-to-market*

Modelo / Escepticismo	$\sigma_\alpha = 0\%$				$\sigma_\alpha = 1\%$				$\sigma_\alpha = 5\%$				$\sigma_\alpha = \infty$				Media-varianza				1/(N+k)		
	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover
1 mes																							
Modelo FF3	0.1395	0.0061	0.3298	-0.0037	0.1662	0.0075	0.3272	-0.0051	0.1625	0.0073	0.3409	-0.0048	0.1629	0.0074	0.3394	-0.0048	0.1679	0.0073	0.3496	-0.0047	0.1659	0.0066	1.1391
Modelo FF3 + MOM	0.0991	0.0040	0.3361	-0.0017	0.1245	0.0054	0.3619	-0.0029	0.1274	0.0056	0.3593	-0.0031	0.1273	0.0055	0.3516	-0.0031	0.1233	0.0051	0.3603	-0.0026	0.1714	0.0066	1.1697
Modelo HXZ	0.1165	0.0048	0.4018	-0.0019	0.1576	0.0070	0.3577	-0.0043	0.1610	0.0071	0.3399	-0.0046	0.1609	0.0071	0.3413	-0.0046	0.1619	0.0068	0.3712	-0.0040	0.1722	0.0067	1.1513
Modelo FF5	0.1347	0.0055	0.3529	-0.0032	0.1625	0.0071	0.3406	-0.0049	0.1578	0.0069	0.3453	-0.0047	0.1580	0.0069	0.3413	-0.0047	0.1542	0.0063	0.3351	-0.0041	0.1728	0.0065	1.1700
6 meses																							
Modelo FF3	0.2716	0.0285	0.7788	0.0013	0.3303	0.0374	0.8257	-0.0070	0.3348	0.0379	0.8160	-0.0077	0.3350	0.0380	0.8199	-0.0077	0.3175	0.0349	0.8603	-0.0047	0.3846	0.0384	3.2360
Modelo FF3 + MOM	0.1592	0.0126	0.7940	0.0187	0.2088	0.0203	0.8669	0.0118	0.2143	0.0211	0.8624	0.0110	0.2145	0.0211	0.8591	0.0109	0.1791	0.0155	0.8989	0.0159	0.3987	0.0387	3.3245
Modelo HXZ	0.2385	0.0235	0.9162	0.0078	0.2955	0.0327	0.8383	-0.0007	0.3009	0.0334	0.8269	-0.0015	0.3015	0.0335	0.8257	-0.0016	0.2745	0.0284	0.8816	0.0027	0.4007	0.0389	3.2753
Modelo FF5	0.2611	0.0258	0.8535	0.0033	0.3047	0.0332	0.8258	-0.0031	0.3104	0.0341	0.8228	-0.0039	0.3098	0.0340	0.8280	-0.0038	0.2683	0.0270	0.8501	0.0023	0.4001	0.0377	3.3278
1 año																							
Modelo FF3	0.3869	0.0569	1.0695	0.0143	0.4137	0.0655	1.1814	0.0099	0.4184	0.0663	1.1753	0.0089	0.4189	0.0664	1.1803	0.0088	0.4095	0.0633	1.2176	0.0109	0.5726	0.0767	4.9672
Modelo FF3 + MOM	0.2242	0.0250	1.1114	0.0510	0.2915	0.0394	1.2311	0.0381	0.2957	0.0402	1.2325	0.0371	0.2966	0.0404	1.2277	0.0369	0.2634	0.0328	1.2611	0.0423	0.5929	0.0772	5.1117
Modelo HXZ	0.3330	0.0449	1.2146	0.0280	0.3654	0.0551	1.2001	0.0241	0.3761	0.0574	1.1849	0.0217	0.3779	0.0577	1.1840	0.0213	0.3530	0.0505	1.2308	0.0255	0.5978	0.0777	5.0346
Modelo FF5	0.3713	0.0515	1.1514	0.0185	0.3827	0.0583	1.2010	0.0181	0.3913	0.0602	1.1977	0.0163	0.3909	0.0601	1.1988	0.0164	0.3500	0.0494	1.1849	0.0236	0.5970	0.0752	5.1175

Nota: Retornos mensuales no anualizados. Portafolios con ponderadores entre 0 y 1. Período de premuestra y muestra corresponden a 5 años (esquema rolling). Período de estudio: 01/1968 - 12/2016.

TABLA 3. 30 Portfolios industria

Modelo / Escepticismo	$\sigma_\alpha = 0\%$				$\sigma_\alpha = 1\%$				$\sigma_\alpha = 5\%$				$\sigma_\alpha = \infty$				Media-varianza				1/(N+k)		
	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover	R-L	SR	CER	Turnover
1 mes																							
Modelo FF3	0.0620	0.0019	0.3416	-0.0024	0.1328	0.0073	0.3566	-0.0094	0.1340	0.0076	0.3769	-0.0099	0.1364	0.0078	0.3769	-0.0101	0.1393	0.0079	0.3769	-0.0099	0.1594	0.0060	1.4703
Modelo FF3 + MOM	0.0664	0.0022	0.3959	-0.0030	0.1324	0.0072	0.3651	-0.0095	0.1331	0.0074	0.3726	-0.0099	0.1341	0.0075	0.3787	-0.0100	0.1343	0.0073	0.3656	-0.0095	0.1645	0.0060	1.5010
Modelo HXZ	0.1149	0.0051	0.3828	-0.0057	0.1397	0.0080	0.3482	-0.0103	0.1326	0.0075	0.3877	-0.0100	0.1341	0.0077	0.3830	-0.0101	0.1376	0.0077	0.3832	-0.0097	0.1646	0.0061	1.4826
Modelo FF5	0.1247	0.0057	0.3310	-0.0072	0.1302	0.0071	0.3737	-0.0099	0.1348	0.0077	0.3821	-0.0108	0.1336	0.0076	0.3853	-0.0106	0.1352	0.0075	0.3846	-0.0101	0.1650	0.0059	1.5013
6 meses																							
Modelo FF3	0.1033	0.0039	0.8716	0.0187	0.2985	0.0409	0.7948	-0.0178	0.3119	0.0441	0.7771	-0.0212	0.3138	0.0445	0.7750	-0.0216	0.3172	0.0443	0.7759	-0.0212	0.3767	0.0356	4.0473
Modelo FF3 + MOM	0.0868	-0.0003	0.9283	0.0241	0.2894	0.0385	0.8241	-0.0148	0.3038	0.0421	0.8014	-0.0185	0.3045	0.0422	0.8060	-0.0186	0.2967	0.0395	0.7958	-0.0159	0.3900	0.0359	4.1359
Modelo HXZ	0.2395	0.0263	0.8610	-0.0022	0.3215	0.0452	0.7662	-0.0210	0.3085	0.0434	0.7874	-0.0192	0.3099	0.0437	0.7816	-0.0195	0.3094	0.0423	0.8012	-0.0180	0.3905	0.0360	4.0866
Modelo FF5	0.2654	0.0298	0.8063	-0.0078	0.3026	0.0415	0.7976	-0.0192	0.3108	0.0438	0.7822	-0.0216	0.3107	0.0438	0.7817	-0.0217	0.3116	0.0429	0.7860	-0.0205	0.3901	0.0351	4.1392
1 año																							
Modelo FF3	0.2185	0.0239	1.2320	0.0381	0.4311	0.0840	1.1103	-0.0150	0.4477	0.0897	1.0952	-0.0205	0.4503	0.0905	1.0897	-0.0213	0.4524	0.0886	1.1157	-0.0203	0.5633	0.0714	6.2087
Modelo FF3 + MOM	0.1766	0.0136	1.2822	0.0521	0.4107	0.0769	1.1537	-0.0064	0.4262	0.0826	1.1316	-0.0115	0.4282	0.0832	1.1302	-0.0121	0.4220	0.0783	1.1391	-0.0091	0.5827	0.0720	6.3532
Modelo HXZ	0.4318	0.0692	1.2041	-0.0062	0.4591	0.0901	1.0877	-0.0186	0.4424	0.0880	1.1085	-0.0150	0.4430	0.0883	1.1044	-0.0152	0.4390	0.0836	1.1277	-0.0124	0.5849	0.0723	6.2761
Modelo FF5	0.4503	0.0748	1.1106	-0.0136	0.4382	0.0847	1.0933	-0.0161	0.4442	0.0885	1.0993	-0.0189	0.4474	0.0894	1.0989	-0.0198	0.4470	0.0862	1.1219	-0.0179	0.5848	0.0703	6.3590

Nota: Retornos mensuales no anualizados. Portafolios con ponderadores entre 0 y 1. Período de premuestra y muestra corresponden a 5 años (esquema rolling). Período de estudio: 01/1968 - 12/2016.

6.- OTRAS ESPECIFICACIONES

Con la finalidad de complementar los resultados encontrados para los casos de 25 y 30 portfolios, se consideran los casos de 49 portafolios industria y 100 portfolios *size and book-to-market*. Lo anterior es para dimensionar si existe algún cambio cualitativo y/o cuantitativo cuando se considera una mayor cantidad de portafolios o activos riesgosos.

En la Tabla 4 se reportan los resultados para el caso de 49 portfolios industria. En primera instancia, se observa, en términos generales, una mejora cuantitativa en todas las métricas consideradas en comparación al caso de 30 portfolios industria. En otras palabras, se observan valores más altos en las medidas *SR* y *CER* en prácticamente todos los niveles de escepticismos considerados y valores menores en la métrica de *Turnover*, el cual da cuenta de los costos de transacción involucrados en cada estrategia.

Por otro lado, al analizar los resultados en términos cualitativos, se observa que el comportamiento al incorporar escepticismo resulta ser similar a los casos anteriores. Esto significa que, al considerar algún grado de incertidumbre en los modelos, se observa un mejor desempeño bajo todas las métricas consideradas. Sin embargo, el comportamiento de estas difiere según el modelo utilizado. En los modelos FF3 y FF3+MOM, la mejor performance en cuanto a *SR* y *CER* se obtiene al aplicar un $\sigma_\alpha = 5\%$, mientras que para el *Turnover* se logra un mejor desempeño al considerar un $\sigma_\alpha = 1\%$. En el caso del modelo HXZ, los mejores resultados se logran al considerar un nivel de escepticismo de 1%, mientras que en el modelo FF5 se tiene que los mejores resultados en cuanto a *SR* y *CER* se obtienen cuando hay una completa desconfianza en el modelo.

Tal como en los casos de 25 y 30 portfolios, se realiza una comparación entre los modelos. En este caso, no es posible concluir que un modelo en particular se desempeñe mejor en comparación a los demás. Por ejemplo, si tomamos en cuenta el indicador *SR*, se observa que el modelo HXZ se desempeña mejor bajo los escenarios $\sigma_\alpha = 0\%$ y $\sigma_\alpha = 1\%$, mientras que en los niveles de escepticismo superiores el modelo FF3+MOM obtiene mayores resultados. Conclusiones similares se obtienen si es que en vez del *SR* se considera como medida de desempeño el *CER*. Sin embargo, bajo la métrica del *Turnover*, se observa que en los niveles extremos de escepticismo el modelo FF5 obtiene una mejor performance, mientras que en los niveles intermedios los mejores resultados corresponden al modelo FF3+MOM.

TABLA 4. 49 Portfolios industria

Modelo / Escepticismo	σα = 0%				σα = 1%				σα = 5%				σα = ∞				Media-varianza				1/(N+k)		
	SR	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**
1 mes																							
Modelo FF3	0.1113	0.0051	0.3564	-0.0134	0.1472	0.0088	0.3130	-0.0210	0.1517	0.0094	0.3340	-0.0221	0.1499	0.0092	0.3381	-0.0220	0.1608	0.0099	0.3097	-0.0220	0.1566	0.0061	2.4867
Modelo FF3 + MOM	0.0890	0.0039	0.3399	-0.0146	0.1509	0.0091	0.3013	-0.0218	0.1536	0.0095	0.3320	-0.0226	0.1533	0.0095	0.3340	-0.0226	0.1590	0.0096	0.3135	-0.0219	0.1598	0.0061	2.5176
Modelo HXZ	0.1276	0.0064	0.3124	-0.0160	0.1531	0.0094	0.3146	-0.0222	0.1502	0.0093	0.3381	-0.0224	0.1507	0.0093	0.3362	-0.0225	0.1598	0.0098	0.3074	-0.0221	0.1599	0.0061	2.4990
Modelo FF5	0.1216	0.0062	0.3040	-0.0170	0.1509	0.0092	0.3172	-0.0226	0.1520	0.0094	0.3340	-0.0232	0.1524	0.0095	0.3325	-0.0233	0.1609	0.0099	0.3116	-0.0229	0.1602	0.0060	2.5181
6 meses																							
Modelo FF3	0.2074	0.0212	0.8482	-0.0237	0.3030	0.0436	0.7518	-0.0546	0.3220	0.0484	0.7658	-0.0599	0.3226	0.0485	0.7771	-0.0600	0.3252	0.0482	0.7738	-0.0579	0.3636	0.0354	6.8732
Modelo FF3 + MOM	0.1407	0.0076	0.8179	-0.0148	0.2965	0.0420	0.7647	-0.0537	0.3191	0.0476	0.7830	-0.0598	0.3209	0.0480	0.7808	-0.0603	0.3145	0.0456	0.7766	-0.0559	0.3715	0.0356	6.9626
Modelo HXZ	0.2487	0.0296	0.7869	-0.0345	0.3170	0.0468	0.7577	-0.0576	0.3211	0.0481	0.7777	-0.0596	0.3220	0.0484	0.7757	-0.0600	0.3201	0.0470	0.7847	-0.0567	0.3720	0.0357	6.9127
Modelo FF5	0.2338	0.0265	0.7548	-0.0327	0.3097	0.0451	0.7632	-0.0584	0.3233	0.0487	0.7711	-0.0625	0.3228	0.0485	0.7745	-0.0624	0.3240	0.0479	0.7793	-0.0598	0.3718	0.0351	6.9674
1 año																							
Modelo FF3	0.2873	0.0411	1.1556	-0.0205	0.3779	0.0707	1.1301	-0.0584	0.4017	0.0792	1.1369	-0.0676	0.4008	0.0788	1.1425	-0.0673	0.3961	0.0762	1.1587	-0.0622	0.5473	0.0719	10.5630
Modelo FF3 + MOM	0.2075	0.0179	1.2022	-0.0002	0.3641	0.0659	1.1467	-0.0540	0.3939	0.0764	1.1584	-0.0654	0.3956	0.0770	1.1553	-0.0661	0.3813	0.0711	1.1629	-0.0572	0.5585	0.0722	10.7063
Modelo HXZ	0.3877	0.0678	1.1206	-0.0463	0.3911	0.0750	1.1312	-0.0613	0.4003	0.0786	1.1447	-0.0660	0.4028	0.0796	1.1391	-0.0672	0.3904	0.0743	1.1649	-0.0592	0.5602	0.0725	10.6304
Modelo FF5	0.3049	0.0460	1.1031	-0.0288	0.3798	0.0713	1.1313	-0.0621	0.4018	0.0792	1.1388	-0.0709	0.4013	0.0790	1.1380	-0.0707	0.3953	0.0759	1.1642	-0.0647	0.5604	0.0713	10.7181

Nota: Retornos mensuales no anualizados. Portafolios con ponderadores entre 0 y 1. Período de premuestra y muestra corresponden a 5 años (esquema rolling). Período de estudio: 07/1969 - 12/2016.

TABLA 5. 100 Portfolios *size and book-to-market*

Modelo / Escepticismo	σα = 0%				σα = 1%				σα = 5%				σα = ∞				Media-varianza				1/(N+k)		
	SR	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**	**R-L**	**SR**	**CER**	**Turnover**
1 mes																							
Modelo FF3	0.0252	-0.0011	0.4083	-0.0263	0.1294	0.0062	0.4527	-0.0273	0.1244	0.0059	0.4784	-0.0270	0.1247	0.0060	0.4779	-0.0271	0.1371	0.0065	0.4638	-0.0265	0.1407	0.0057	4.6905
Modelo FF3 + MOM	0.0340	-0.0007	0.3686	-0.0297	0.1077	0.0048	0.4600	-0.0262	0.1076	0.0048	0.4804	-0.0261	0.1082	0.0049	0.4814	-0.0262	0.1096	0.0048	0.4728	-0.0248	0.1421	0.0058	4.7211
Modelo HXZ	0.1111	0.0050	0.4226	-0.0257	0.1302	0.0062	0.4551	-0.0272	0.1189	0.0055	0.4784	-0.0266	0.1192	0.0055	0.4763	-0.0266	0.1262	0.0057	0.4766	-0.0253	0.1423	0.0058	4.7027
Modelo FF5	0.0919	0.0037	0.3956	-0.0245	0.1302	0.0062	0.4544	-0.0275	0.1238	0.0059	0.4713	-0.0275	0.1248	0.0059	0.4687	-0.0275	0.1275	0.0058	0.4797	-0.0257	0.1424	0.0057	4.7214
6 meses																							
Modelo FF3	-0.0323	-0.0929	0.9377	-0.0919	0.3259	0.0364	1.0293	-0.0803	0.3240	0.0363	1.0456	-0.0805	0.3238	0.0363	1.0454	-0.0805	0.3404	0.0380	1.0339	-0.0809	0.3209	0.0330	13.2205
Modelo FF3 + MOM	-0.0655	-0.1516	0.9332	-0.1009	0.2569	0.0268	1.0181	-0.0732	0.2803	0.0303	1.0505	-0.0765	0.2801	0.0302	1.0508	-0.0764	0.2599	0.0267	1.0583	-0.0709	0.3243	0.0332	13.3090
Modelo HXZ	0.2047	0.0203	0.9518	-0.0762	0.3095	0.0344	1.0161	-0.0799	0.3061	0.0339	1.0407	-0.0794	0.3102	0.0344	1.0375	-0.0798	0.3216	0.0352	1.0453	-0.0784	0.3248	0.0332	13.2598
Modelo FF5	0.1716	0.0147	0.9324	-0.0752	0.3221	0.0358	1.0236	-0.0816	0.3232	0.0363	1.0476	-0.0827	0.3212	0.0360	1.0489	-0.0825	0.3251	0.0353	1.0458	-0.0788	0.3247	0.0330	13.3124
1 año																							
Modelo FF3	-0.0637	-0.3945	1.2607	-0.1621	0.3913	0.0589	1.4148	-0.1260	0.3911	0.0594	1.4311	-0.1279	0.3898	0.0592	1.4317	-0.1278	0.4175	0.0643	1.4309	-0.1314	0.4667	0.0658	20.1436
Modelo FF3 + MOM	-0.1118	-0.7910	1.2795	-0.1828	0.3074	0.0417	1.4237	-0.1103	0.3431	0.0490	1.4394	-0.1176	0.3426	0.0490	1.4384	-0.1176	0.3366	0.0468	1.4472	-0.1123	0.4714	0.0661	20.2881
Modelo HXZ	0.2713	0.0363	1.2919	-0.1234	0.3749	0.0561	1.4122	-0.1257	0.3783	0.0571	1.4207	-0.1276	0.3803	0.0575	1.4241	-0.1277	0.3981	0.0597	1.4273	-0.1264	0.4726	0.0662	20.2111
Modelo FF5	0.2469	0.0305	1.2419	-0.1240	0.3893	0.0583	1.4163	-0.1284	0.3937	0.0599	1.4381	-0.1318	0.3890	0.0590	1.4338	-0.1311	0.4024	0.0603	1.4339	-0.1286	0.4726	0.0657	20.2939

Nota: Retornos mensuales no anualizados. Portafolios con ponderadores entre 0 y 1. Período de premuestra y muestra corresponden a 5 años (esquema rolling). Período de estudio: 01/1968 - 12/2016.

En la Tabla 5 se reportan los resultados para el caso de 100 portfolios *size and book-to-market*. Se observa que, en términos cuantitativos, existe un deterioro en las métricas consideradas en comparación a lo reportado para el caso de 25 portfolios, produciéndose incluso valores negativos en las medidas *SR* y *CER* bajo el escenario de completa confianza en los modelos. Estos resultados se contraponen a lo obtenido para el caso de 49 portfolios industrias, el cual sugería, en cierta forma, que la incorporación de más activos o portfolios riesgosos permitía una mejora en las métricas.

En términos cualitativos, se observa que el comportamiento de los modelos al incorporar escepticismo es similar a lo encontrado en los casos anteriores. La incorporación de algún grado de escepticismo resulta en mejores desempeños al considerar como medición el *SR* y el *CER*, en relación al escenario base de completa confianza en los modelos. Sin embargo, al igual que lo encontrado anteriormente, desconfiar o descartar plenamente los modelos no necesariamente refleja mejores resultados. Esta situación se da solamente para el caso del modelo FF3+MOM, pero para los modelos FF3, HXZ y FF5 se observa que considerar un nivel de escepticismo de $\sigma_\alpha = 1\%$ permite obtener una mejor performance. Al considerar la métrica del *Turnover*, se observa que los resultados contrastan completamente a lo obtenido anteriormente. En este caso, se tiene que el mejor desempeño bajo esta medida se logra en el escenario de completa confianza en los modelos. De esta forma, si bien la incorporación de algún grado de escepticismo mejora los resultados en términos de *SR* y *CER*, esto a su vez conlleva en incurrir en mayores costos de transacción para lograr tal desempeño.

Al igual que en los casos anteriores, no se obtienen resultados concluyentes respecto a que un modelo tenga una mejor performance respecto a los demás. A modo de ejemplo, vemos que bajo los indicadores *SR* y *CER*, el modelo HXZ se desempeña mejor en los escenarios de $\sigma_\alpha = 0\%$ y $\sigma_\alpha = 1\%$. Sin embargo, al considerar niveles o grados de escepticismos mayores, los modelos FF3 y FF5 obtienen los mayores resultados. Una situación similar ocurre cuando se considera en el análisis la métrica del *Turnover*, el cual muestra que para niveles bajos de escepticismo el modelo que incurre en menores costos de transacción es el modelo FF3+MOM, mientras que para niveles más altos corresponde al modelo FF5.

Finalmente, en términos generales, se observa que las conclusiones son similares si el *holding period* se extiende a 6 meses o 1 año.

7.- CONCLUSIONES

La utilización del enfoque bayesiano está tomando cada vez más relevancia como herramienta de análisis. Lo anterior no solamente se debe a un mayor interés por parte de investigadores, sino que también por las facilidades en términos computacionales que existen hoy en día, las cuales permiten modelar con mayor precisión las exigencias que requiere este enfoque. Tal como se discutió en el presente trabajo, existen importantes ventajas de utilizar el método bayesiano en el área de las finanzas y, en particular, en la optimización de portafolios, puesto que permite construir y modelar de mejor forma el proceso de toma de decisión que realizan los inversionistas.

El objetivo principal del presente trabajo fue analizar de qué manera la incorporación de escepticismo sobre diferentes modelos de valoración de activos mejora o empeora la performance de los portafolios construidos a partir de éstos. En este sentido, es importante señalar que la utilización de distintos modelos no responde a realizar una comparación entre ellos y señalar que uno es mejor que los demás, sino que más bien dicha utilización responde a encontrar resultados que sean más robustos al incorporar diferentes grados de confianza/escepticismo entre los modelos considerados. En otras palabras, se realizó el supuesto de que un inversionista toma como dado un modelo en particular, y a partir de éste se aplican los niveles de σ_α.

De esta forma, al considerar el modelo de tres factores de Fama & French (1993), el modelo de momentum de Cahart (1997), q-factor model de Hou et al. (2015) y el modelo de 5 factores de Fama & French (2015), los resultados encontrados muestran que la incorporación de escepticismo permite mejorar el desempeño de los portafolios en relación al escenario base de completa confianza ($\sigma_\alpha = 0$). En particular, se observa que las métricas de SR y CER mejoran al incorporar algún grado de escepticismo. Sin embargo, los resultados no son muy concluyentes en relación a la medida Turnover, lo cual implica que si bien se obtiene un mejor desempeño en términos de SR y CER, dichas estrategias, en algunos casos, incurren en mayores costos de transacción en comparación al escenario base. Además, se observa que niveles muy altos de escepticismo sobre los modelos ($\sigma_\alpha = \infty$) conllevan a un deterioro en la performance de los portafolios en comparación a niveles intermedios ($\sigma_\alpha = 1\% \; y \; \sigma_\alpha = 5\%$). Los resultados muestran ser similares a lo encontrado por Avramov (2002) y, en particular, al comportamiento que presenta la medida Sharpe Ratio.

Dado lo anterior, los resultados parecieran reforzar el trabajo desarrollado por Pástor (2000), quién señala que el portafolio óptimo refleja tanto las implicaciones del modelo como también las series de tiempo de los retornos de los activos.

Sin embargo, tal como se mencionó anteriormente, una de las desventajas que presenta el enfoque bayesiano dentro del proceso de asignación de portafolios tiene relación con la elección de las distribuciones a utilizar, puesto que dicha elección podría conllevar a resultados muy distintos. Además, ésta responde a cuestiones más bien subjetivas.

Finalmente, futuras investigaciones podrían considerar otro tipo de especificaciones, o bien, abarcar otros modelos de valoración de activos, con la finalidad de contrastar los resultados encontrados.

BIBLIOGRAFÍA

Avramov, D. (2002). Stock return predictability and asset pricing models. *Journal of Financial Economics*, 64.

Avramov, D. and Zhou, G. (2010). Bayesain portfolio analysis. *Annual Review of Financial Economics*, 2: 25-47.

Baks, P., Metrick, A. and Wachter, J. (2001), Should investors avoid all actively managed mutual funds? A study in Bayesian performance evaluation. *The Journal of Finance*, 56: 45-86.

Bawa, V. S., Brown, S. J., and Klein, R. W. (1979). Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice. North-Holland Pub. Co.

Beck, K., Niendorf, B. and Peterson, P. (2012). The use of bayesian methods in financial research. *Investment Management and Financial Innovations*, Volume 9, Issue 3.

Bernardo, J. and A.F.M. Smith (2000). Bayesian Theory. Wiley.

Black, F. and Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48: 28-43.

Brown, S. (1976). Optimal Portfolio Choice under Uncertainty: A Bayesian Approach. PhD thesis, University of Chicago.

Carhart, M. (1997). On persistence in mutual fund performance. *Journal of Finance*, 52: 57-82.

Chopra, V. and Ziemba, WT. (1993). The effect of error in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19: 6-11.

DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22: 1915-1953.

Fama, E. and French, K. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33: 3-56.

Fama, E. and French, K. (2014). A five-facor asset pricing model. *Journal of Financial Economics*, 116: 1-22.

Hansen, E. (2018). Economic evaluation of linear asset pricing models: Exploiting cross-sectional restrictions on return predictability dynamics. *Working paper*.

Hou, K., Xue, C. and Zhang, L. (2015). Digesting anomalies: an investment approach. The Review of Financial Studies, 28: 650-705.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7: 77-91.

Pástor, L. and Stambaugh, R. F. (1999). Comparing asset pricing models: an investment perspective. *Journal of Financial Economics*, 56: 335-381.

Pástor, L. (2000). Portfolio selection and asset pricing models. *The Journal of Finance*, 55: 179-223.

Rachev, S. T., Hsu, J. S. J., Bagasheva, B. S., and Fabozzi, F. J. (2008). Bayesian Methods in Finance. Wiley, New Jersey.

Zellner, A. and Chetty, VK. (1965). Prediction and decision problems in regression models from the bayesian point of view. *Journal of the American Statistical Association,* 60: 608-616.

ANEXOS

En este apartado se describen las distribuciones estadísticas consideradas en el presente trabajo.

- Normal Multivariada:

La distribución normal multivariada es una generalización de distribución normal, en donde la función de densidad de esta última está dada por

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

donde X es una variable aleatoria, $-\infty < x < \infty$, distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2.

De esta forma, la función de densidad de la distribución normal multivariada está dada por

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\, exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\prime}\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\prime}$ es un vector de $nx1$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^{\prime}$ es un vector de media de $nx1$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de covarianza de nxn. Los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{\Sigma}$ son las varianzas de cada uno de los componentes de $\boldsymbol{x}$, mientras que los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas entre dos componentes de $\boldsymbol{x}$ $\left(cov\left(x_i, x_j\right), i \neq j\right)$.

- t-Student´s Multivariada:

Sea X una variable aleatoria, $-\infty < x < \infty$, distribuida mediante una t-Student´s con ν grados de libertad, cuya función de densidad está dada por

$$f(x|\nu,\mu,\sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sigma\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}}\left(1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}$$

donde Γ es la función Gamma, $-\infty < \mu < \infty$ es la moda de X y $\sigma > 0$ es un parámetro de escala de X. La media y la varianza de X están dados por

$$E(X) = \mu \quad (para\, \nu > 1) \quad y \quad var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}\sigma^2 \quad (para\, \nu > 2)$$

De esta forma, la función de densidad de la distribución t-Student´s multivariada está dada por

$$f(\boldsymbol{x}|\nu,\boldsymbol{\mu},\mathbf{S}) = C \times \left(\nu + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\prime}\mathbf{S}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)^{-(n+\nu)/2}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\prime}$ es un vector de $nx1$, ν es el parámetro de grados de libertad, $\boldsymbol{\mu}$ es un vector de media, $\mathbf{S}$ es una matriz de escala y

$$C = \frac{\nu^{\nu/2}\,\Gamma((\nu+n)/2)\,|\mathbf{S}|^{1/2}}{\pi^{n/2}\,\Gamma(\nu/2)}$$

La matriz de covarianza de $\boldsymbol{x}$ está dado por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S}^{-1}\frac{\nu}{\nu-2} \quad (para\ \nu > 2)$$

- Wishart:

La distribución Wishart es una generalización de la distribución Gamma. Supongamos que se observa una muestra de $N \times 1$ vectores $(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_t, \dots, \boldsymbol{X}_T)$, los cuales son independientemente distribuidos a través de una normal multivariada. Esta distribución es conocida en estadísticas como la distribución de la cantidad, $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{T}(\boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}})\,(\boldsymbol{X}_t - \overline{\boldsymbol{X}})^{\prime}$$

la cual es igual a T veces la matriz de covarianza muestral y $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{X}_t$. Si $\boldsymbol{Q}$ es una matriz definida positiva, entonces su función de densidad está dada por

$$f(\boldsymbol{Q}|T,\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{|\boldsymbol{Q}|^{\frac{1}{2}(T-N-1)}\,exp\left(-\frac{1}{2}\,tr\,\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{Q}\right)}{2^{NT/2}\,\pi^{N(N-1)/4}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{T/2}\,\prod_{i=1}^{N}\Gamma((T+1-i)/2)}$$

- Wishart invertida:

Consideremos la matriz definida positiva $\boldsymbol{Q}$ y denotemos como $\mathbf{S}$ su inversa ($\mathbf{S} = \boldsymbol{Q}^{-1}$). De esta forma, la función de densidad está dada por

$$f(\mathbf{S}|\boldsymbol{\Psi}, \nu) = \frac{|\boldsymbol{\Psi}|^{\frac{\nu}{2}}}{2^{\nu N/2}\ \pi^{N(N-1)/4}\ \prod_{i=1}^{N} \Gamma((\nu - i + 1)/2)} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\ tr\ \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\right)}{|\mathbf{S}|^{(\nu+n+1)/2}}$$

donde $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ y ν es un parámetro de grados de libertad, tal que $\nu \geq N$. Los elementos de la diagonal de $\mathbf{S}$ se distribuyen mediante una χ^2 invertida.

$$E(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Psi}\frac{1}{N - T - 1}$$

- *Matrix Normal*:

La distribución *matrix normal* es una generalización de la distribución normal multivariada, cuya función de densidad está dada por

$$f(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\ tr\left[\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M})^{\prime}\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M})\right]\right)}{(2\pi)^{np/2}\ |\boldsymbol{V}|^{n/2}\ |\boldsymbol{U}|^{n/2}}$$

donde $\boldsymbol{X}$ es un vector de $n \times p$**,** $\boldsymbol{M}$ es una matriz de $n \times p$, $\boldsymbol{U}$ es una matriz de $n \times n$ y $\boldsymbol{V}$ es una matriz de $p \times p$.

Esta distribución está relacionada a la distribución normal multivariada en la siguiente forma

$$\boldsymbol{X} \sim \mathcal{M}N_{nxp}(\boldsymbol{M}, \mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \text{sí y solo si} \quad vec(\boldsymbol{X}) \sim N_{np}(vec(\boldsymbol{M}), \mathbf{V} \otimes \mathbf{U})$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker y $vec(\boldsymbol{M})$ la vectorización de $\boldsymbol{M}$.

Adicionalmente, se señalan las siguientes definiciones.

- Producto de Kronecker:

El producto de Kronecker entre dos matrices $A \in \boldsymbol{R}^{mxn}$ y $B \in \boldsymbol{R}^{pxq}$ es denotado por $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \boldsymbol{R}^{mp\;x\;nq}$ y está dado por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

- Vectorización:

La vectorización de una matriz $A \in \boldsymbol{R}^{mxn}$ es denotado por $vec(A) \in \boldsymbol{R}^{nm}$ y es igual a la concatenación de sus columnas

$$vec(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las columnas de A.