



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ESTUDIO Y OPTIMIZACIÓN DE COMPRESIVE SENSING APLICADO A LA  
SÍNTESIS DE IMÁGENES EN RADIO INTERFEROMETRÍA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA

ROBERTO PATRICIO ROJAS PIZARRO

PROFESOR GUÍA:  
DR. JORGE SILVA SÁNCHEZ  
PROFESOR CO-GUÍA:  
DR. AXEL OSSES ALVARADO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DR. MARCOS ORCHARD CONCHA  
DRA. LAURA PÉREZ MUÑOZ  
DR. PABLO ROMÁN ASENJO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT

SANTIAGO DE CHILE

2019

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA  
POR: ROBERTO PATRICIO ROJAS PIZARRO  
FECHA: 2019  
PROF. GUÍA: DR. JORGE SILVA SÁNCHEZ

## ESTUDIO Y OPTIMIZACIÓN DE COMPRESSIVE SENSING APLICADO A LA SÍNTESIS DE IMÁGENES EN RADIO INTERFEROMETRÍA

Durante la última década, los métodos de minimización  $l_1$  en el marco de Compressive Sensing han mostrado éxito consistentemente en el contexto de radio interferometría. Desde su primera aplicación, varias bases y diccionarios han sido utilizados como dominios de compresibilidad, pero en ningún caso se ha provisto una justificación numérica de su elección.

Este trabajo propone una metodología de selección de diccionario basada en la compresibilidad de la proyección de análisis. El diccionario propuesto corresponde a una concatenación de bases ortonormales, seleccionadas iterativamente a partir de un conjunto de transformaciones candidatas.

La metodología es aplicada sobre un conjunto de imágenes test, para luego comparar el desempeño de reconstrucción respecto al diccionario SARA en un escenario simulado y a partir de datos reales. El algoritmo NESTA es utilizado para resolver el problema de minimización  $l_1$  basada en análisis.

Los resultados muestran que los diccionarios propuestos alcanzan un desempeño tan bueno como el del diccionario SARA en términos de SNR, pero con una menor cantidad de bases concatenadas y, por ende, con un tiempo de cómputo mucho menor. Los resultados obtenidos a partir de datos reales confirman lo anterior.

Este trabajo evidencia el compromiso existente entre compresibilidad promovida y tamaño de diccionario bajo la estrategia de selección propuesta, determinando un punto óptimo en términos de calidad de la reconstrucción y costo computacional. Esta metodología permitiría una mejora en los tiempos de cómputo de los algoritmos que usan actualmente el diccionario SARA, como PURIFY.



*A mis padres.*



# Tabla de Contenido

Índice de Tablas	vii
Índice de Ilustraciones	viii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Definición del problema . . . . .	1
1.3. Estado del arte . . . . .	2
1.3.1. Compressive Sensing para el problema de síntesis en radio interferometría	2
1.3.2. Dominio de compresibilidad para CS en el contexto radio interferométrico	3
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo general . . . . .	5
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.5. Hipótesis . . . . .	6
1.6. Estructura del documento . . . . .	6
<b>2. Presentación del problema y contexto teórico</b>	<b>8</b>
2.1. Síntesis de imágenes en radio interferometría . . . . .	8
2.2. Compressive Sensing (CS) . . . . .	10
2.2.1. Restricted Isometry Property (RIP) . . . . .	11
2.2.2. Dominios de medición y compresibilidad . . . . .	11
2.2.3. Reconstrucción vía minimización $l_1$ : setting ortonormal . . . . .	12
2.2.4. Reconstrucción vía minimización $l_1$ : setting redundante . . . . .	14
2.3. Síntesis de imágenes en interferometría basada en CS . . . . .	15
<b>3. Selección de diccionario</b>	<b>17</b>
3.1. Caso ortonormal . . . . .	17
3.1.1. Formalización del método . . . . .	17
3.1.2. Resultados experimentales . . . . .	19
3.2. Caso redundante . . . . .	21
3.2.1. Formalización del método . . . . .	21
3.2.2. Resultados experimentales . . . . .	23
3.2.3. Estabilidad de las reconstrucciones . . . . .	26
3.2.4. Trade-off entre compresibilidad y carga computacional . . . . .	27
3.2.5. Variabilidad del diccionario óptimo . . . . .	28
<b>4. Evaluación del método en escenario simulado</b>	<b>29</b>

4.1. Resultados de reconstrucción . . . . .	29
4.2. Desempeño del método respecto a diccionario SARA . . . . .	34
4.3. Desempeño del método para distintas configuraciones de antenas . . . . .	35
<b>5. Evaluación del método en escenario con datos reales</b>	<b>36</b>
5.1. Observaciones . . . . .	36
5.1.1. HD142527 . . . . .	36
5.1.2. HLTau . . . . .	36
5.2. Detalles de implementación: CS . . . . .	37
5.3. Detalles de implementación: CLEAN . . . . .	38
5.4. Reconstrucciones . . . . .	39
5.5. Desempeño del método respecto a diccionario SARA . . . . .	42
5.6. Desempeño del método respecto a CLEAN . . . . .	42
5.7. Conservación de flujo en reconstrucciones CS . . . . .	43
<b>6. Conclusión</b>	<b>45</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>Anexos</b>	<b>52</b>
<b>A. Física del problema de síntesis en interferometría</b>	<b>53</b>
A.1. Interferometría: escenario general . . . . .	53
A.2. Respuesta frente a una fuente puntual . . . . .	54
A.3. Respuesta frente a una fuente extendida . . . . .	57
A.4. Simplificación a problema 2D . . . . .	59
<b>B. Región factible inducida por constante de isometría</b>	<b>62</b>
<b>C. Modelo de observación</b>	<b>64</b>
<b>D. Análisis local de coherencia y compresibilidad</b>	<b>71</b>
D.1. Coherencias locales . . . . .	71
D.2. Compresibilidad local . . . . .	73
<b>E. Imágenes test en dominio de la frecuencia</b>	<b>75</b>
<b>F. Resultados complementarios</b>	<b>77</b>
F.1. Tasa de coeficientes críticos . . . . .	77
F.2. Reconstrucciones modelo . . . . .	79
F.3. CLEAN beam . . . . .	80
F.4. Conservación de flujo . . . . .	81

# Índice de Tablas

3.1.	Desempeño de reconstrucción promovido por la metodología de selección de diccionario propuesta. Cada celda informa el promedio y desviación del SNR graficado para cada fuente en los paneles (b), (d), (f), (h) y (j) de la Figura 3.2.	26
3.2.	Diccionarios seleccionados de acuerdo a la metodología propuesta en Algoritmo 1. . . . .	26
4.1.	Resumen de imágenes test. Las imágenes CLEAN fueron sintetizadas con el software CASA, mientras que las imágenes MEM se obtuvieron usando el algoritmo descrito en [13]. . . . .	31
4.2.	Comparación de desempeño (SNR) entre diccionario SARA y diccionario propuesto para todas las fuentes test en escenario interferométrico. Cada celda indica el promedio y desviación estándar del SNR computado sobre 20 simulaciones. . . . .	33
4.3.	Comparación de desempeño (tiempo de ejecución) entre diccionario SARA y diccionario propuesto para todas las fuentes test en escenario interferométrico. Cada celda indica el promedio y desviación estándar del tiempo de ejecución computado sobre 20 simulaciones. . . . .	34
5.1.	Detalle de los datasets y reconstrucciones obtenidas. . . . .	39
F.1.	Parámetros de elipses ajustadas sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas. . . . .	81

# Índice de Ilustraciones

1.1. Esquema que resume los trabajos asociados a la aplicación de CS en radio interferometría, organizado en función del aspecto sobre el cual se realiza la contribución. . . . .	5
2.1. Elementos principales del problema de síntesis en radio interferometría. La imagen asociada a la fuente de interés y el módulo de su transformada de Fourier se aprecian en (a) y (b), respectivamente. La disposición de antenas en el terreno (c) determina las frecuencias espaciales observadas, traducidas en una máscara de medición (d) cuyos pixeles en blanco indican los puntos del espectro (b) que son medidos. El objetivo es reconstruir la imagen original (a) a partir de dichas observaciones. . . . .	9
3.1. <b>Izquierda:</b> Curvas de selección de base para el caso ortonormal, indicando la cantidad de mediciones requeridas por cada base candidata para inducir reconstrucciones con un error máximo tolerable $\xi$ . <b>Derecha:</b> Desempeño de reconstrucción en función de la tasa de medición (muestreo URF), evaluado a través de la tasa de reconstrucciones exitosas con un umbral de $RE = 10^{-2}$ y considerando 20 simulaciones por cada nivel de medición. Cada fila corresponde a una fuente test distinta. . . . .	21
3.2. Selección de diccionario. <b>Izquierda:</b> Compresibilidad global $\frac{s(\epsilon)}{N}$ promovida por el diccionario propuesto según Algoritmo 1, considerando $k$ bases concatenadas. <b>Derecha:</b> Desempeño de reconstrucción promovido por el diccionario propuesto en función de la cantidad de bases concatenadas. Cada curva indica el SNR promedio computado sobre 20 simulaciones de reconstrucción, cuyo escenario de medición corresponde a una observación de 12 [h] con cierta configuración de antenas (URA, NRA, VLA). Cada fila corresponde a una fuente test distinta. . . . .	25
4.1. Imágenes test utilizadas para la selección de diccionario y evaluación de desempeño en escenario simulado. . . . .	30
4.2. Comparación de desempeño entre diccionario SARA y diccionario propuesto para fuente HD142527 en escenario interferométrico. Cada fila corresponde a un tipo de disposición distinto y cada curva corresponde al promedio de 20 simulaciones. <b>Izquierda:</b> SNR promedio en función del tiempo de observación. <b>Derecha:</b> Tiempo de ejecución promedio en función del tiempo de observación.	32

5.1. Patrones de muestreo uv asociados a las observaciones reales de HD142527 y HLTau. . . . .	37
5.2. Comparación entre CS con diccionario propuesto (izquierda), CS con diccionario SARA (centro) y método CLEAN (derecha) para la recuperación de HD142527. <b>De arriba a abajo:</b> reconstrucción, imagen residuo e histograma del residuo. . . . .	40
5.3. Comparación entre CS con diccionario propuesto (izquierda), CS con diccionario SARA (centro) y método CLEAN (derecha) para la recuperación de HLTau. <b>De arriba a abajo:</b> reconstrucción, imagen residuo e histograma del residuo. . . . .	41
5.4. Resultados para verificar la conservación de flujo en la reconstrucción de HLTau mediante CS. <b>Izquierda:</b> Rotación y estiramiento sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas. <b>Derecha:</b> Intensidad radial promedio computada sobre las Visibilidades transformadas. . . . .	44
A.1. Arreglo de antenas en observatorio ALMA, región de Atacama, Chile. Fuente: <a href="http://www.eso.org/public/teles-instr/alma/">http://www.eso.org/public/teles-instr/alma/</a> . . . . .	54
A.2. Escenario básico en Interferometría: dos antenas separadas una distancia $D$ , apuntando hacia una fuente en la esfera celestial. El par de antenas realiza la correlación de las señales captadas. . . . .	55
A.3. Escenario fuente extendida. . . . .	58
A.4. Sistema de coordenadas en el dominio espacial ( $\hat{l}\hat{l} + m\hat{m} + n\hat{n}$ ) y en el dominio de la frecuencia ( $u\hat{u} + v\hat{v} + w\hat{w}$ ). La dirección $\hat{u}$ resulta de la proyección del polo norte celestial sobre el plano perpendicular a $\hat{s}_0$ , mientras que para $\hat{v}$ es análogo pero con el este celestial. . . . .	60
B.1. Constante $C_\delta$ en función de la constante de isometría $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$ , correspondiente a los valores factibles para $C_\delta$ en el escenario donde se satisface la hipótesis del Teorema 2.4. . . . .	63
C.1. Baselines proyectados no normalizados asociados a datos reales y al modelo de observación implementado. . . . .	67
C.2. Tasa de medición efectiva asociada a cada configuración de antenas, en función del tiempo de observación. Cada curva muestra el promedio y desviación estándar asociados a 20 realizaciones del modelo. . . . .	67
C.3. Realizaciones del modelo de observación para las configuraciones URA, NRA y VLA. La columna izquierda muestra la disposición de antenas en el terreno, mientras que a la derecha se encuentra la máscara en el plano (u,v) mapeada por dicha disposición. . . . .	68
C.4. Realizaciones de patrones de medición en plano uv para las 3 configuraciones analizadas, considerando rotación terrestre. <b>Izquierda:</b> Disposición URA. <b>Centro:</b> Disposición NRA. <b>Derecha:</b> Disposición VLA. Cada fila corresponde a un tiempo de observación distinto: 1[h], 3[h], 6[h], 12[h] y 24[h]. . . . .	70
D.1. Módulo del producto punto entre vectores base del dominio de medición (Fourier) y distintos dominios de compresibilidad: wavelet Daubechies con 1, 3 y 5 niveles de descomposición en paneles (a), (b) y (c) respectivamente, y la DCT en panel (d). Dimensión: 512x512. . . . .	72

D.2.	Representación de imágenes test en distintos dominios de compresibilidad: wavelet Daubechies con 5 niveles de descomposición (izquierda) y DCT (derecha).	74
E.1.	<b>Izquierda:</b> Imágenes test en dominio del pixel. <b>Derecha:</b> Imágenes test en dominio de la frecuencia, representadas a través de una visualización logarítmica del módulo de la transformada de Fourier. . . . .	76
F.1.	Tasa crítica de coeficientes significativos $\frac{S^*}{N}$ requerida para acotar las reconstrucciones CS por un error máximo tolerable $\xi$ , considerando distintas bases de compresibilidad. Cada panel esta asociado a una imagen test distinta. . .	78
F.2.	Imágenes modelo obtenidas con cada método. <b>De izquierda a derecha:</b> CS con diccionario propuesto, CS con diccionario SARA y método CLEAN. <b>De arriba a abajo:</b> Fuentes HD142527 y HLTau. . . . .	79
F.3.	Ajuste elíptico para la determinación del FWHM asociado a la PSF de cada patrón de muestreo . . . . .	80
F.4.	Ajuste de elipses sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas mediante CS. . . . .	81
F.5.	Transformación sobre el módulo del mapa de Visibilidades para la obtención de un patrón de anillos circulares concéntricos. . . . .	82

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Radio astronomía es el campo de la astronomía que estudia los objetos celestiales en la banda de las radio frecuencias, cuyas ondas poseen longitudes que van desde los milímetros hasta unos cuantos metros. Debido al fenómeno de difracción de la luz, la resolución límite de una antena es proporcional a la razón entre la longitud de onda observada y el diámetro de su plato [49]. En particular para una radio-antena, la observación de una onda con longitud en torno a los milímetros requeriría la construcción de un plato con kilómetros de diámetro, algo completamente inviable.

En ese contexto nace la técnica conocida como radio interferometría, caracterizada por la disposición de un arreglo de antenas que emula una única gran apertura, alcanzando así una resolución que ahora depende de la máxima separación entre antenas y no del tamaño de sus platos. Esto permite obtener resoluciones angulares impensadas con un único plato de observación.

Bajo ciertas condiciones, el proceso de observación interferométrico se aproxima como un muestreo de la señal de interés en el dominio de Fourier. Si bien la disposición específica de las antenas determina el conjunto de mediciones adquiridas, la naturaleza del problema impide observar todo el mapa de Fourier. De este modo, el proceso de recuperación en interferometría constituye un problema inverso lineal *ill-posed* [2].

### 1.2. Definición del problema

Lo anterior ha motivado la aplicación de métodos pertenecientes al *framework* de Compressive Sensing (CS) [24, 11, 8] durante la última década. Este esquema de reconstrucción utiliza minimización en norma  $l_1$  para recuperar una señal compresible bajo alguna transformación, a partir de datos obtenidos mediante un proceso de observación lineal. El dominio sobre el cual se promueve compresibilidad constituye uno de los grados de libertad ligados

a la herramienta y representa el foco específico de este trabajo. En particular, el problema aquí abordado consiste en la selección de dicho dominio de compresibilidad, basada en los resultados teóricos que ofrece CS y sujeta a las condiciones propias del escenario radio-interferométrico.

## 1.3. Estado del arte

En uno de los principales trabajos precursores de Compressive Sensing [10], Candes, Romberg y Tao abordan, tal como en interferometría, el problema de recuperar una señal a partir de mediciones incompletas en el plano de Fourier. El buen desempeño ofrecido por CS en dicho escenario es justificado en función de un elemento clave: la compresibilidad de la señal. Estos resultados no solo motivaron el uso de CS en el problema radio-interferométrico, sino también la búsqueda de representaciones compresibles para señales astronómicas [48].

### 1.3.1. Compressive Sensing para el problema de síntesis en radio interferometría

El primer trabajo que utiliza el esquema de reconstrucción asociado a CS para el problema de síntesis de imágenes en radio interferometría corresponde al de Wiaux et al. [52]. En él se considera un escenario de observación simulado (muestreo uniforme en frecuencia, sin utilización de antenas) sobre fuentes astronómicas sintéticas, mostrando desempeños de reconstrucción competitivos respecto al método tradicional CLEAN. A partir de dicha publicación, se desencadena una sucesión de trabajos que pueden ser agrupados de acuerdo al ámbito en el cual se enmarca su contribución, como son: aplicación de la herramienta en un escenario de observación específico, aplicación de la herramienta sobre un modelo de señal específico, desarrollo de mejoras sobre el algoritmo que resuelve el problema de optimización o selección y análisis de los grados de libertad del problema (disposición de antenas, dominio de compresibilidad, etc.).

Los trabajos enmarcados en un contexto específico de observación buscan converger a un escenario interferométrico realista, incorporando elementos que reflejen aquello sobre el operador de medición que representa el proceso de observación. Por ejemplo, en [53] se asume un campo de visión pequeño, pero con componente  $w$  (ver Figura A.4) no despreciable e igual para todos los *baselines* medidos. Bajo estas condiciones, el operador de medición original es premultiplicado por una matriz caracterizada por el valor que posee la componente  $w$ . En [37] se extiende el trabajo anterior al escenario de campo de visión amplio, incorporando al proceso de medición un operador de proyección que relaciona el espacio tridimensional de observación con el plano en el que se muestra la imagen sintetizada resultante. Siguiendo en la misma línea, en [54] se extiende el escenario anterior al caso de *baselines* con componentes  $w$  distintas. Para ello, se incorpora el algoritmo conocido como *w-projection* [21] y se introduce una aproximación sobre el operador de medición que permite una mejora en términos del costo computacional. En [30] se incorporan al escenario de observación otros efectos prácticos relacionados con la polarización de la onda recibida (*DDE effects*), los cuales cobran

relevancia en arreglos de alta sensibilidad como el SKA (*Square Kilometre Array*) o de alta resolución angular como el LOFAR (*Low Frequency Array*). La integración de dichos fenómenos se realiza mediante la incorporación del algoritmo conocido como *A-projection* [5] y la metodología es validada sobre datos reales.

Por otro lado, son varios los trabajos que han puesto el foco en el desarrollo de algoritmos para la resolución del problema de optimización que surge al emplear el esquema de CS en el problema interferométrico. En [51] se presenta un algoritmo para solucionar problemas *least squares* regularizados en norma  $l_1$ . Éste constituye el primer trabajo en dicho contexto que aplica el método de reconstrucción basado en CS sobre datos reales. En [16] se propone SARA (*Sparsity Averaging Reweighted Analysis*), un algoritmo *reweighted*  $l_1$  que promueve compresibilidad en un diccionario redundante, sujeto a la restricción de positividad. Dos años más tarde aparece PURIFY [15], cuya principal contribución corresponde al desarrollo de un nuevo algoritmo para resolver los problemas de minimización  $l_1$  en el campo de CS. El resultado es un software liberado para uso público y con la capacidad de admitir datos reales provenientes de un arreglo de antenas. Los trabajos posteriores [40, 43] robustecen PURIFY disminuyendo el tiempo de cómputo del algoritmo (estructura paralelizable) e incorporando distintos kernels de gridding-interpolación para solucionar apropiadamente el problema en el espacio continuo de visibilidades.

Por último, se encuentran los trabajos centrados en el análisis y selección de los grados de libertad asociados al problema. En [27] se evalúa por primera vez el desempeño de reconstrucción promovido por distintas configuraciones de antenas, bajo el esquema de reconstrucción asociado a CS. Por otro lado, la contribución de [35] se basa exclusivamente en la utilización de la transformada IUWT como dominio de compresibilidad. El resto de bases utilizadas en este contexto se detallan en la sección 1.3.2, pues constituyen el eje central del trabajo. La Figura 1.1 resume la información expuesta en este apartado.

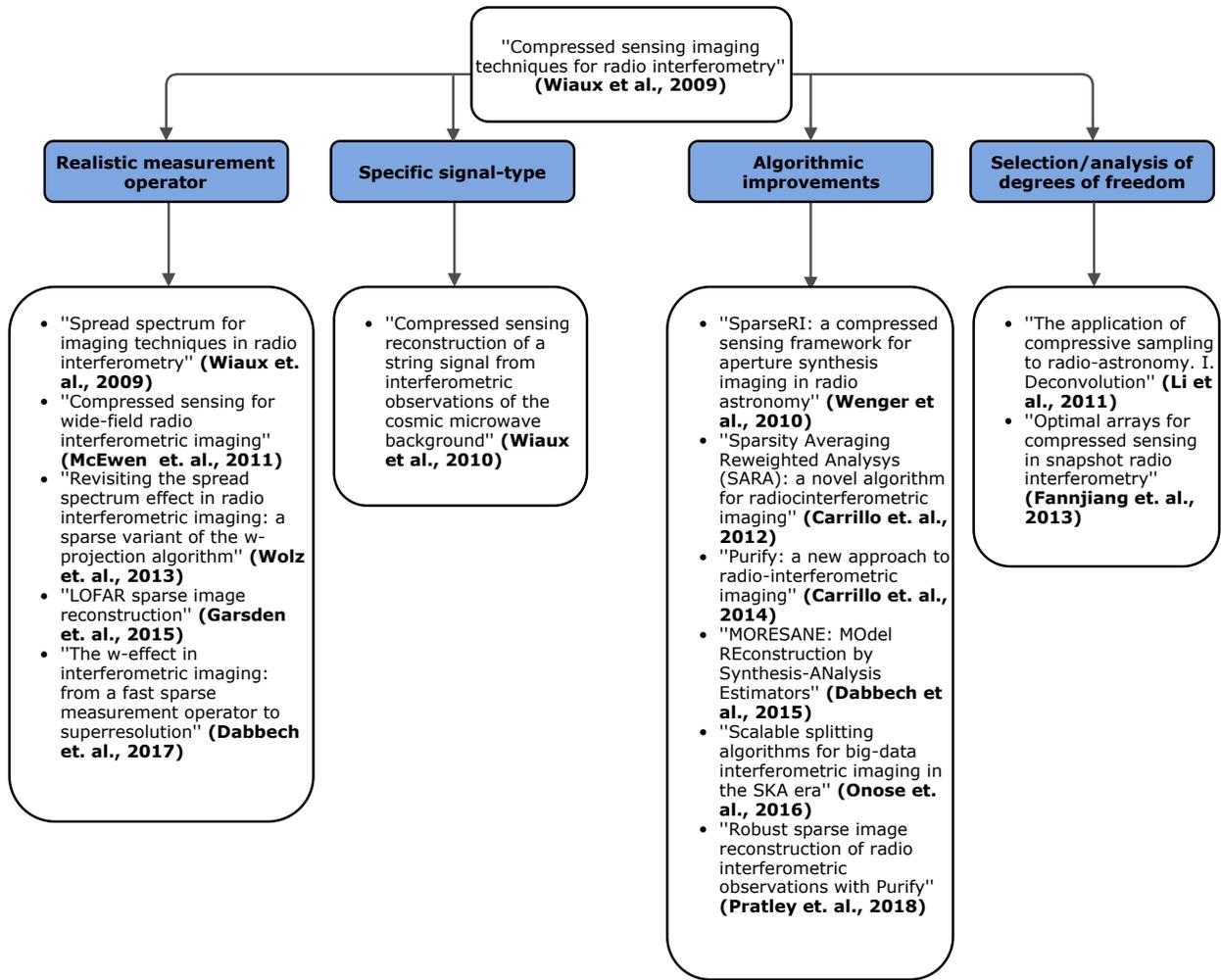
### 1.3.2. Dominio de compresibilidad para CS en el contexto radio interferométrico

Los primeros resultados [52, 53, 51, 37] muestran la superioridad de CS respecto al método tradicional CLEAN en la recuperación de imágenes sintéticas bajo un escenario de observación interferométrico. Dichos trabajos utilizan el dominio canónico (Dirac) y wavelets (Daubechies) como bases de compresibilidad, argumentando cualitativamente su elección en función de la naturaleza de las señales evaluadas. En [35] se propone por primera vez en este contexto la utilización del diccionario wavelet IUWT (*Isotropic Undecimated Wavelet Transform*), justificado por su buena representación de fuentes sin direcciones de privilegio y por su invarianza a la traslación. El desempeño obtenido con IUWT es superior al de la base canónica, el cual a su vez supera a CLEAN. Un año más tarde se publica SARA [14], trabajo donde se propone un algoritmo *reweighted*- $l_1$  que establece como diccionario de compresibilidad una concatenación de 9 bases ortonormales (Dirac y 8 wavelets Daubechies). Dicho método muestra superioridad frente al resto de métodos evaluados, los cuales utilizan solo una base para representar la señal original. En [27] se evalúa el desempeño inducido por distintos arreglos de antenas, utilizando la DCT por bloques para promover compresión

bilidad. Esta transformación es difícil de justificar en el contexto de CS (por su similitud con el dominio de medición) y desde entonces no ha sido utilizada nuevamente. Dos años después de la publicación de SARA aparece PURIFY [15], una librería en C++ de uso libre en la cual se implementa un nuevo algoritmo para resolver los problemas  $l_1$  en el framework de CS, adoptando al diccionario SARA como dominio de compresibilidad. A excepción de [30], donde se utiliza la IUWT, los trabajos posteriores son contribuciones sobre el operador de medición de PURIFY [22] o sobre el algoritmo que resuelve el problema de optimización [40, 43], manteniendo al diccionario SARA como operador de compresibilidad.

Si bien el diccionario SARA ha mostrado mejor desempeño de reconstrucción que las demás transformaciones propuestas hasta ahora, el análisis que lo valida en [14] se realiza en condiciones distintas de un escenario estándar de interferometría en términos de imagen test, operador de medición y simulación del proceso de observación. Además, el orden en que se agregan las bases al diccionario es definido arbitrariamente, sin dar claridad respecto al criterio de diseño utilizado para estos fines. El presente trabajo de tesis aborda estas limitaciones, proponiendo una metodología de selección de diccionario que toma en cuenta la compresibilidad promovida sobre la proyección de análisis.

Otros procedimientos han sido propuestos para la selección de base asociada a CS en un contexto genérico. En [41], la selección de base se realiza adaptativamente a la solución actual en cada iteración del algoritmo de reconstrucción. La figura de mérito usada para elegir la mejor base es una suma ponderada entre el error de aproximación y la norma  $l_1$  de la compresión. En [6] utilizan el mismo procedimiento, pero utilizando el índice de Gini como métrica de compresibilidad. La ventaja de estos métodos respecto al propuesto es que poseen una conexión explícita entre la base óptima y el algoritmo que resuelve el problema de reconstrucción. De hecho, en [41] se demuestra que la base seleccionada es óptima en términos del error de reconstrucción (no necesariamente en términos de la compresibilidad promovida). Por otra parte, la metodología propuesta selecciona una base óptima a priori, antes de resolver el problema de síntesis. La relación con éste es implícita y la optimalidad se justifica en términos de cotas teóricas asociadas al desempeño de la herramienta. En relación a la selección de diccionario, no fueron encontrados en la literatura métodos análogos a los recién mencionados para el caso de bases ortonormales. La mayoría de los trabajos situados en aquel contexto seleccionan un conjunto de átomos optimizados para promover compresibilidad sobre datos de entrenamiento, como K-SVD [19, 46].



**Figura 1.1:** Esquema que resume los trabajos asociados a la aplicación de CS en radio interferometría, organizado en función del aspecto sobre el cual se realiza la contribución.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Establecer e implementar una metodología de selección de diccionario para Compressive Sensing en un contexto de observación radio-interferométrico, induciendo desempeños de reconstrucción competitivos respecto a los obtenidos mediante el diccionario SARA.

### 1.4.2. Objetivos específicos

En relación a la aplicación de CS para el problema de síntesis de imágenes en radio interferometría, se definen los siguientes objetivos:

- Establecer e implementar una metodología de selección de base ortonormal basada en los conceptos de sparsidad y coherencia mutua.
- Extender la metodología anterior al caso de diccionarios redundantes, basándose en resultados teóricos que se ajusten a este escenario [9, 33, 42].
- Evaluar las metodologías de selección desarrolladas en un escenario simulado de observación, utilizando como *ground truth* imágenes astronómicas sintetizadas a partir de datos reales.
- Evaluar el desempeño de reconstrucción inducido por la metodología de selección de diccionario, a partir de la síntesis realizada con observaciones reales.
- Comparar el desempeño de reconstrucción asociado a la metodología propuesta, con los obtenidos mediante el diccionario SARA y el método tradicional CLEAN.

## 1.5. Hipótesis

La hipótesis principal de este trabajo es que las propiedades de compresibilidad promovida en la señal y coherencia mutua entre los dominios de compresibilidad y medición, permiten establecer una estrategia de selección que garantiza errores de reconstrucción acotados. Para el escenario de bases ortonormales, en [8] se demuestra que el esquema de recuperación propuesto en el campo de CS ofrece errores de reconstrucción controlados por la compresibilidad promovida por la base, cuando el proceso de observación cumple ciertas condiciones relacionadas a la tasa de medición y a la forma en que se obtienen los datos [29]. Para el escenario de diccionarios redundantes, en [9, 33, 42] se presentan resultados análogos a los recién mencionados, introduciendo un análisis local tanto para la compresibilidad promovida, como para la coherencia o similitud entre los distintos átomos del diccionario y aquellos asociados al dominio de medición.

Por otro lado, se conjetura la suboptimalidad del diccionario SARA en términos de la relación entre desempeño de reconstrucción y costo computacional asociado. Esta afirmación se origina a partir de la saturación en desempeño exhibida por este diccionario en [14], en un escenario de observación distinto al interferométrico.

## 1.6. Estructura del documento

El resto del trabajo está organizado en 5 capítulos, bibliografía y anexos. El Capítulo 2 resume el problema de síntesis en radio interferometría y los principios matemáticos que garantizan el desempeño de la herramienta de reconstrucción: Compressive Sensing. El Capítulo 3 constituye la contribución principal de esta tesis, pues es donde se formaliza el criterio adoptado para la selección de diccionario. La metodología es aplicada sobre varias imágenes test, obteniendo un diccionario propuesto para cada fuente. El Capítulo 4 evalúa dichos diccionarios en un escenario simulado de observaciones interferométricas, contrastando su desempeño con el obtenido por el diccionario SARA en términos de la relación señal a ruido

(SNR) y tiempo de cómputo. El Capítulo 5 realiza una comparación análoga a partir de observaciones reales, incluyendo además las reconstrucciones generadas por el método CLEAN. Finalmente, en el Capítulo 6 se exhiben las principales conclusiones y posibles extensiones o aristas por desarrollar como trabajo futuro.

Por su parte, el Anexo A explica detalladamente el escenario de observación interferométrico, el Anexo C describe el modelo matemático utilizado para el proceso de medición, mientras que los Anexos B, D, E y F incorporan resultados complementarios a las metodologías y análisis realizados en este trabajo.

# Capítulo 2

## Presentación del problema y contexto teórico

### 2.1. Síntesis de imágenes en radio interferometría

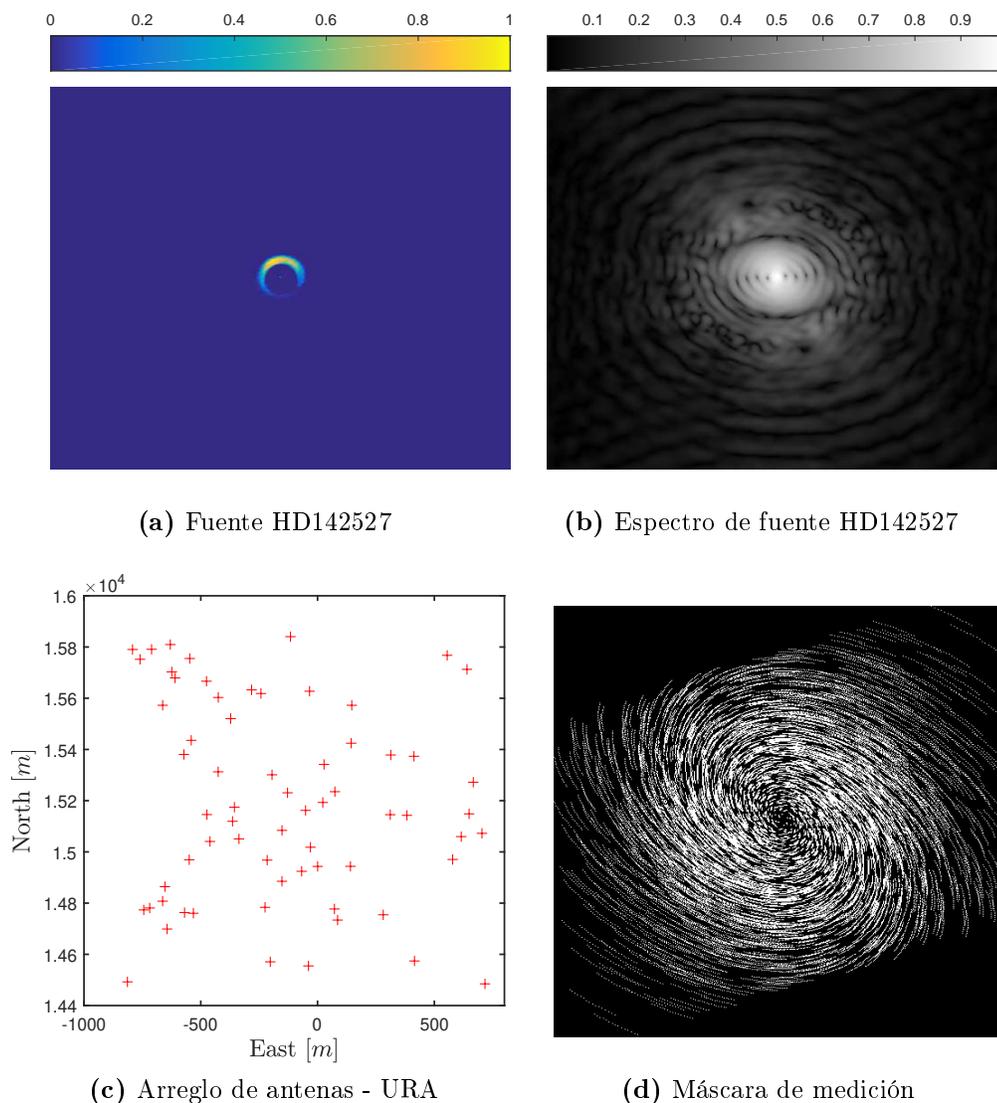
Radio interferometría es una técnica astronómica utilizada para generar imágenes de fuentes que emiten energía en la banda de radio del espectro electromagnético (30 [MHz] - 300 [GHz]), alcanzando resoluciones impensadas con un único plato de observación. Para ello, se dispone un conjunto de antenas en cierta zona del terreno, apuntando en la misma dirección hacia alguna posición en la esfera celeste. Cada par de antenas del arreglo capta señales electromagnéticas que son correlacionadas sobre un período de tiempo breve (en la práctica, desde milisegundos hasta unos cuantos segundos). Cuando el campo de visión es lo suficientemente pequeño, cada correlación computada permite conocer el valor de la transformada de Fourier 2D de la imagen de interés, evaluada en una frecuencia espacial particular determinada por el vector *baseline* que une ambas antenas [50]. Específicamente, si denotamos por  $I(l, m) \in \mathbb{R}$  la señal o mapa de interés, la ecuación que representa el dominio de medición se expresa como

$$\mathcal{V}(u, v) = \mathcal{F}[I(l, m)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(l, m) e^{-j2\pi(ul+vm)} dl dm, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{V}(u, v) \in \mathbb{C}$  se conoce como la función de Visibilidad y  $(u, v)$  son las componentes de las frecuencias espaciales en el dominio de Fourier. La relación anterior se conoce como el teorema de van Cittert-Zernike.

Un interferómetro puede realizar una observación *snapshot* de la fuente, adquiriendo todas las correlaciones calculadas en cierto instante de tiempo. No obstante, la práctica habitual consiste en usar la rotación terrestre para redirigir continuamente la dirección del vector *pointing*, obteniendo así una colección de observaciones *snapshot* al finalizar la etapa de medición. Sin embargo, debido a limitaciones físicas no es posible cubrir completamente el plano de Fourier. Luego, la recuperación de la imagen de interés a partir de muestras en el dominio de la frecuencia constituye un problema inverso *ill-posed* gobernado por el proceso

de medición lineal presentado en la ecuación (2.1). La Figura 2.1 muestra los elementos principales del problema recién descrito.



**Figura 2.1:** Elementos principales del problema de síntesis en radio interferometría. La imagen asociada a la fuente de interés y el módulo de su transformada de Fourier se aprecian en (a) y (b), respectivamente. La disposición de antenas en el terreno (c) determina las frecuencias espaciales observadas, traducidas en una máscara de medición (d) cuyos píxeles en blanco indican los puntos del espectro (b) que son medidos. El objetivo es reconstruir la imagen original (a) a partir de dichas observaciones.

En términos matemáticos, el modelo básico de observación se describe a continuación. La función de muestreo<sup>1</sup>  $S(u, v) \in \mathbb{R}$  definida en la ecuación (2.2) contiene la información sobre los pares de frecuencias espaciales medidos por el arreglo de antenas, los cuales a su

<sup>1</sup>La definición formal de  $S(u, v)$  utiliza la función Delta Dirac [49]. La ecuación (2.2) corresponde a la forma en que se implementa.

vez dependen directamente de la posición que éstas adoptan en el terreno.

$$S(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u, v) \text{ es medido} \\ 0 & \sim \end{cases} \quad (2.2)$$

El proceso de medición en interferometría es representado mediante la ecuación (2.3), donde  $V_d(u, v) \in \mathbb{C}$  es la función que contiene las visibilidades medidas. A su vez, la ecuación (2.4) muestra la expresión equivalente en el dominio del espacio, donde  $I_d(l, m) = \mathcal{F}^{-1}[V_d(u, v)] \in \mathbb{C}$  es conocida como la imagen sucia o *dirty map* y  $B(l, m) = \mathcal{F}^{-1}[S(u, v)] \in \mathbb{C}$  como el *beam* sucio o *dirty beam* asociado al arreglo. Dicha relación permite interpretar el problema de síntesis como uno de deconvolución, en el cual se busca deconvolucionar el beam sucio a partir de la imagen sucia para obtener la imagen original.

$$V_d(u, v) = S(u, v) \cdot V(u, v) \quad (2.3)$$

$$I_d(l, m) = B(l, m) * I(l, m) \quad (2.4)$$

En relación a los supuestos considerados en este trabajo, se asume un campo de visión pequeño, de modo que la señal de interés queda completamente definida por una imagen bidimensional. Además, se asume una componente  $w$  constante, lo cual se expresa de manera implícita en la ecuación (2.1). Por último, es importante mencionar que las relaciones matemáticas presentadas en esta sección obvian la influencia de la longitud de onda observada. Por completitud, una descripción detallada de la física que explica el modelo de observación del problema se presenta en el Anexo A.

## 2.2. Compressive Sensing (CS)

Consideremos el problema general de recuperar un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  a partir de  $m \ll N$  observaciones lineales adquiridas mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$  corresponde al vector que contiene las observaciones y  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  es la matriz que representa el proceso de medición. Este es el problema clásico de muestreo de una señal por medio de un subconjunto de mediciones lineales. Dado que la cantidad de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones disponibles, dicho escenario constituye un problema ill-posed. Compressive Sensing (CS) es una teoría emergente del área de Procesamiento de Señales que ofrece garantías teóricas para resolver este tipo de problemas inversos. Específicamente, CS recupera de manera estable señales compresibles en algún dominio de representación, a partir de algoritmos de optimización convexa que minimizan la norma  $l_1$  [11, 9, 29, 1, 42]. En [47] se provee una explicación intuitiva de por qué la norma  $l_1$  promueve compresibilidad.

A continuación, la Sección 2.2.1 muestra la definición e interpretación de RIP (*Restricted Isometry Property*), propiedad de preservación de norma sobre la cual se basan la mayoría de los resultados teóricos pertenecientes al campo de CS. La Sección 2.2.2 introduce el dominio de compresibilidad, elemento sobre el cual yace el foco del trabajo. Tanto el problema de

optimización planteado, como las garantías teóricas asociadas a éste, dependen de si dicha transformación es representada por una matriz ortonormal o por un diccionario redundante. Las Secciones 2.2.3 y 2.2.4 muestran el alcance de la herramienta en ambos escenarios.

### 2.2.1. Restricted Isometry Property (RIP)

**Definición 2.1** Se define el soporte de un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  como el conjunto de componentes distintas de cero, esto es

$$\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} : x_i \neq 0\} \quad (2.6)$$

**Definición 2.2** Un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  se dice  $S$ -sparse si tiene a lo más  $S$  componentes distintas de cero. En otras palabras, si la cardinalidad del soporte de  $\mathbf{x}$  es menor o igual a  $S$

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \text{card}(\text{supp}(\mathbf{x})) \leq S \quad (2.7)$$

**Definición 2.3** Para  $S \in \{1, 2, \dots, N\}$ , se define la constante de isometría  $\delta_S > 0$  de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$  como el real más pequeño tal que la desigualdad

$$(1 - \delta_S)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|A\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_S)\|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.8)$$

se cumpla para todo vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  que sea  $S$ -sparse. Si existe tal constante, entonces se dice que la matriz  $A$  es RIP con constante  $\delta_S$ . En su defecto, dicha matriz no cumple esta propiedad de isometría.

La importancia de esta propiedad radica en que si la matriz de medición  $A$  es RIP con  $\delta_{2S} \in (0, 1)$ , entonces vectores  $S$ -sparse distintos mapean a vectores de medición distintos mediante la operación lineal  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ . De forma más específica, la distinción de vectores  $S$ -sparse mediante su proyección en el dominio de observación solo es posible si  $\delta_{2S} \in (0, 1)$ .

### 2.2.2. Dominios de medición y compresibilidad

En general, las señales de interés en un problema inverso no son *sparse* o compresibles en su dominio original. Luego, resulta necesario introducir una matriz de transformación  $\Psi = [\psi_1 | \psi_2 | \dots | \psi_N] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  que permita representar dicha señal  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  como un vector  $\alpha \in \mathbb{C}^N$  con pocos coeficientes significativos, mediante  $\mathbf{x} = \Psi\alpha$ . De esta manera, si denotamos la matriz que representa el dominio de medición como  $\Phi = [\phi_1 | \phi_2 | \dots | \phi_N] \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , entonces podemos construir la nueva matriz de medición  $A$  seleccionando  $m$  filas de la matriz transpuesta conjugada  $\Phi^*$  y reescribir el proceso de medición lineal de la ecuación (2.5) como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \Phi_m^* \Psi\alpha \quad (2.9)$$

donde  $\Phi_m^* \in \mathbb{C}^{m \times N}$  corresponde a la submatriz formada a partir de  $\Phi^*$  luego de la selección de  $m$  filas. Es importante notar que ahora es  $\alpha$  el vector que nos interesa recuperar por medio de  $\mathbf{y}$ , utilizando algún método de reconstrucción. Este escenario de compresibilidad se entenderá como el *setting* ortonormal.

Una extensión natural del caso ortonormal consiste en promover compresibilidad en un espacio de mayor dimensión, utilizando un diccionario que posea más de  $N$  átomos para representar la señal de interés. Este trabajo solo considera diccionarios  $D = \frac{1}{\sqrt{k}}[\Phi_1|\Phi_2|\dots|\Phi_k] \in \mathbb{C}^{N \times k \cdot N}$  formados como concatenación de  $k \in \mathbb{N}$  bases ortonormales, promoviendo compresibilidad en el vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{k \cdot N}$  mediante la relación  $\mathbf{x} = D\mathbf{v}$ . Luego, el proceso de medición lineal expresado en la ecuación (2.5) se puede reescribir como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \Phi_m^* D\mathbf{v} \quad (2.10)$$

Debido a que el conjunto generador deja de ser linealmente independiente, este escenario se entenderá como el *setting* redundante.

### 2.2.3. Reconstrucción vía minimización $l_1$ : setting ortonormal

El proceso de medición descrito en la ecuación (2.9) constituye un escenario de submuestreo en el cual existe una cantidad infinita de posibles soluciones. Compressive Sensing se caracteriza por utilizar la compresibilidad de la señal como conocimiento a priori y lo incorpora al problema de optimización para que éste entregue una solución única. Específicamente, si la señal de interés  $\alpha$  es sparse y la matriz de proyección  $\Phi_m^* \Psi$  cumple RIP con  $\delta_{2S} \in (0, 1)$ , entonces basta con buscar el vector de mínima norma  $l_0$  que se ajusta a las mediciones para lograr una recuperación exacta. Esto se explica en el hecho de que la propiedad de isometría (con una constante apropiada) permite asegurar que para cada vector de observación existe un único vector  $S$ -sparse asociado.

El principal inconveniente del procedimiento recién mencionado es que la minimización en norma  $l_0$  constituye un problema *NP-hard*<sup>2</sup> [31]. Sin embargo, el teorema que se enuncia a continuación muestra que si la restricción sobre el valor de la constante  $\delta_{2S}$  se vuelve más estricta, es posible sustituir la norma  $l_0$  por la norma  $l_1$  y obtener un resultado equivalente. Esta relajación permite expresar el problema original como uno convexo y utilizar herramientas de optimización convexa para resolverlo.

**Teorema 2.4** (Teorema 1.2 en [8]) *Sea  $\alpha \in \mathbb{C}^N$ ,  $\Phi_m^* \Psi \in \mathbb{C}^{m \times N}$  con  $m < N$  y el problema de optimización conocido como *Basis Pursuit**

$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \Phi_m^* \Psi \alpha \quad (2.11)$$

*Además, sea  $S \in \{1, 2, \dots, N\}$  y  $\alpha_S$  el vector  $\alpha$  con ceros en todas sus componentes, excepto en las  $S$  mayores en módulo. Si la matriz de proyección  $\Phi_m^* \Psi$  cumple RIP con constante  $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$ , entonces la solución  $\hat{\alpha}$  al problema en la ecuación (2.11) obedece la siguiente desigualdad*

$$\|\alpha - \hat{\alpha}\|_2 \leq C_\delta \frac{\|\alpha - \alpha_S\|_1}{\sqrt{S}} \quad (2.12)$$

con  $C_\delta = 2 \frac{1+\rho_\delta}{1-\rho_\delta}$  y  $\rho_\delta = \frac{\sqrt{2}\delta_{2S}}{1-\delta_{2S}}$ .

---

<sup>2</sup>En efecto, minimizar en norma  $l_0$  implica testear todas las posibles combinaciones de valores 0 en el vector de interés.

Resulta importante destacar que el Teorema 2.4 nos garantiza un error de reconstrucción acotado por la diferencia en norma  $l_1$  entre  $\alpha$  y su mejor versión  $S$ -sparse, permitiendo una recuperación exacta cuando el vector  $\alpha$  es  $S$ -sparse y estable cuando es compresible. Además, la reconstrucción es uniforme pues la garantía teórica se cumple para todos los vectores  $S$ -sparse, dada una matriz de observación apropiada. Más aún, en [8] se aprecia que bajo las mismas condiciones del Teorema 2.4 se aseguran garantías teóricas de reconstrucción para el caso de mediciones ruidosas.

El resultado anterior requiere principalmente una matriz de proyección que cumpla RIP con una constante de isometría adecuada. Sin embargo, la construcción determinística de matrices que satisfagan esta propiedad es un ejercicio de dificultad elevada, puesto que computar las constantes de isometría es en sí mismo un problema NP-hard [3]. En ese contexto, surge la idea de estudiar matrices generadas a partir de una selección aleatoria de parámetros y ver bajo qué condiciones éstas cumplen RIP con cierta probabilidad [29]. Este apartado finaliza con la presentación de un resultado teórico que constituye un caso particular de dicho escenario, en el cual la matriz de proyección se genera a partir de la selección aleatoria de filas pertenecientes a una matriz unitaria compuesta por dos bases ortonormales. Antes de enunciar el teorema, es necesario introducir una medida de similitud entre bases ortonormales, definida por Candes, Romberg y Tao en [11].

**Definición 2.5** *Se define la coherencia mutua  $\mu \in [1, \sqrt{N}]$  entre dos matrices ortonormales  $V = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_N] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  y  $W = [\mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 | \dots | \mathbf{w}_N] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  como*

$$\mu(V, W) = \sqrt{N} \max_{i, j \in [N]} |\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle| \quad (2.13)$$

**Teorema 2.6** (Teorema 12.31 en [29]) *Sea  $U = \Theta^* \Psi \in \mathbb{C}^{N \times N}$  la matriz unitaria compuesta por el producto de dos bases ortonormales  $\Theta, \Psi \in \mathbb{C}^{N \times N}$  y su versión normalizada  $\tilde{U} = \sqrt{N}U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ . Sea  $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  una submatriz de  $\tilde{U}$  formada al seleccionar  $m$  de sus  $N$  filas de manera aleatoria con una distribución uniforme. Si, para  $\delta \in (0, 1)$ , se cumple que*

$$m \geq C\mu^2(\Psi, \Theta)\delta^{-2}S \ln^4(N) \quad (2.14)$$

*entonces con probabilidad al menos  $1 - N^{-\ln^3(N)}$  la constante de isometría  $\delta_S$  de  $\tilde{A}$  satisface  $\delta_S \leq \delta$ . La constante  $C > 0$  es universal.*

La relevancia práctica del Teorema 2.6 radica en que impone condiciones sobre la tasa de medición y la forma en cómo se debe realizar dicho proceso, para asegurar con alta probabilidad la propiedad de isometría requerida en la hipótesis del Teorema 2.4. Por esto último, resulta natural imponer  $\delta = \sqrt{2} - 1$  en la ecuación (2.14) y considerar  $\Theta, \Psi$  como los dominios de medición y compresibilidad introducidos en la Sección 2.2.2. Concretamente, el Teorema 2.6 requiere que el muestreo sea uniformemente aleatorio y que la cantidad de mediciones sea mayor a un umbral que depende directamente del tamaño de la señal  $N$ , su nivel de sparsidad  $S$  y de la coherencia mutua  $\mu$  entre los dominios de medición y compresibilidad.

## 2.2.4. Reconstrucción vía minimización $l_1$ : setting redundante

La búsqueda de representaciones sparse promovidas por diccionarios redundantes no es algo nuevo en el área de Procesamiento de Señales. De hecho, existen condiciones de unicidad para su representación mediante 2 bases ortonormales concatenadas y condiciones de equivalencia para su recuperación via minimización  $l_1$ - $l_2$  [25]. Más aún, en [23] se extienden dichos resultados teóricos al caso de diccionarios con una estructura más general.

Dado que en este escenario redundante se pierde la ortonormalidad del operador de proyección, es posible identificar dos enfoques mediante los cuales se busca una representación sparse.

**Definición 2.7** *Se define la proyección de análisis  $\mathbf{v}_{(a)} \in \mathbb{R}^L$  promovida por el diccionario  $D \in \mathbb{R}^{N \times L}$  sobre la señal  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  como*

$$\mathbf{v}_{(a)} = D^* \mathbf{x} \quad (2.15)$$

**Definición 2.8** *Se define la proyección de síntesis  $\mathbf{v}_{(s)} \in \mathbb{R}^L$  como aquella promovida por el diccionario  $D \in \mathbb{R}^{N \times L}$  sobre la señal  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  mediante*

$$\mathbf{x} = D \mathbf{v}_{(s)} \quad (2.16)$$

El enfoque basado en análisis (ecuación (2.15)) se interpreta como la aplicación de una serie de filtros lineales sobre la señal original. Dichos filtros se ubican como columnas en la matriz  $D$  y buscan promover compresibilidad sobre el vector  $\mathbf{v}_{(a)}$  resultante del filtrado. Por otro lado, el enfoque basado en síntesis (ecuación (2.16)) busca representar la señal como combinación lineal de un conjunto de átomos ubicados como columnas en la matriz  $D$ . En este caso, la compresibilidad es promovida sobre el vector  $\mathbf{v}_{(s)}$  que contiene los coeficientes asociados a dicha combinación lineal.

La única similitud aparente entre estos dos enfoques es que ambos buscan una representación sparse en sus proyecciones respectivas, además de ser equivalentes para el caso  $L = N$ . En relación a sus diferencias, el enfoque basado en síntesis ha presentado mayor desarrollo teórico y práctico al poseer una estructura más intuitiva, y al mismo tiempo, posee mayor evidencia empírica en términos de la compresibilidad promovida. Sin embargo, el enfoque basado en análisis presenta una ventaja en términos de complejidad computacional: posee un espacio de búsqueda mucho más pequeño que su contraparte basada en síntesis (asumiendo el setting redundante donde  $L > N$ ). Aun cuando la literatura existente es ambivalente en relación a la comparación de ambos enfoques, en [26] se logran identificar escenarios de equivalencia y no equivalencia entre ellos. Específicamente, se muestran resultados teóricos y numéricos que evidencian un gap importante entre las soluciones de análisis y síntesis para el caso de minimización en norma  $l_1$ . Más aún, se presentan simulaciones donde se observa un mejor desempeño del enfoque basado en análisis.

En el presente trabajo se utiliza el esquema de recuperación basado en análisis vía minimización  $l_1$  descrito en la ecuación (2.17), donde  $\eta \in \mathbb{R}$  corresponde a un parámetro que

representa el ruido en las observaciones.

$$\hat{x} = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|D^*x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|y - \Phi_m^*x\|_2 \leq \eta \quad (2.17)$$

Respecto a los resultados teóricos asociados a este problema de optimización, se destaca el trabajo de Candes et al. [9] cuya garantía teórica presenta una estructura análoga a la del Teorema 2.4. En otras palabras, se ofrece un error de reconstrucción acotado por la suma de dos términos: uno relacionado a la compresibilidad promovida y otro relacionado al ruido de medición. La hipótesis más fuerte de este resultado consiste en que la matriz de medición  $\Phi_m^*$  cumpla D-RIP<sup>3</sup>, sin embargo no se presenta ningún resultado teórico que permita verificar dicha propiedad. En [33] se resuelve este asunto, derivando una condición suficiente sobre la cantidad de mediciones para el cumplimiento de D-RIP, análoga a la expresada en el Teorema 2.6 para un escenario de bases ortonormales. El trabajo más reciente en este contexto [42] también garantiza una reconstrucción estable y robusta, enmarcándose además en un escenario más realista que el anterior. En particular, considera esquemas de muestreo estructurado en función de las propiedades locales asociadas a la compresibilidad de la señal y coherencia entre los dominios de representación y medición.

### 2.3. Síntesis de imágenes en interferometría basada en CS

En este trabajo de tesis, el problema de síntesis de imágenes en interferometría introducido en la Sección 2.1 es resuelto mediante alguno de los problemas de optimización descritos en las ecuaciones (2.11) y (2.17), asociados a los escenarios ortonormal y redundante, respectivamente. Luego, resulta necesario explicitar la relación entre las variables de dichos problemas y aquellas asociadas al proceso de observación en interferometría.

**Dominio de medición  $\Phi^*$ :** corresponde a la matriz que contiene en sus filas los vectores base asociados al dominio de Fourier. Esta es una variable fija determinada por la naturaleza del problema.

**Matriz de medición  $\Phi_m^*$ :** se construye seleccionando  $m$  filas de la matriz de Fourier  $\Phi^*$ , correspondientes a las  $m$  frecuencias espaciales medidas por el arreglo de antenas de acuerdo a la función de muestreo  $S(u, v)$ . Constituye uno de los grados de libertad del problema, manejado a través de la disposición de antenas en el terreno. En este trabajo se consideran 3 tipos de arreglos, utilizados previamente en [27] para la evaluación de disposición óptima:

1. *Uniform random array* (URA): disposición aleatoria uniforme de antenas en el plano terrestre (panel (a) de Figura C.3).
2. *Normal random array* (NRA): disposición aleatoria Gaussiana de antenas en el plano terrestre (panel (b) de Figura C.3).
3. *Very large array* (VLA): disposición pseudo-determinística que coincide con el arreglo de antenas ubicado en el observatorio VLA, Nuevo México (panel (c) de Figura C.3).

---

<sup>3</sup>Extensión de RIP en la que se pide preservación de norma para la proyección de vectores suficientemente sparse en cierto *tight frame* utilizado como diccionario.

Esta disposición es aleatoria en 2 de las 3 componentes del vector posición asociado a cada antena. Para ver más detalles de estas disposiciones y del modelo de observación utilizado, dirigirse al Anexo C.

**Dominios de compresibilidad**  $\Psi, D$ : matrices que buscan promover compresibilidad sobre la imagen de interés  $\mathbf{x}$  para los escenarios ortonormal y redundante, respectivamente. Éste constituye el grado de libertad más relevante del trabajo. Las bases ortonormales utilizadas para el diseño del diccionario óptimo son: canónica (matriz identidad), DCT y wavelets Daubechies.

Respecto al algoritmo de reconstrucción, el método NESTA [4] es utilizado para resolver los problemas de optimización planteados en ambos settings. Éste consiste en un algoritmo iterativo de primer orden basado en el método desarrollado por Nesterov para minimización de problemas convexos [39, 38], adaptado al framework de CS para resolver las formulaciones de Basis Pursuit Denoising, minimización  $l_1$  basada en análisis y Total Variation. Tal como el método de Nesterov, las iteraciones de NESTA se caracterizan por considerar las soluciones obtenidas previamente y, principalmente, por introducir una técnica de suavizado para la norma  $l_1$  que garantiza convergencia a una tasa  $\mathcal{O}(1/k^2)$ . De hecho, el parámetro principal del algoritmo maneja dicho suavizado, controlando así el compromiso entre precisión y rapidez. El código asociado es de acceso libre y se encuentra disponible en <https://statweb.stanford.edu/~candes/nesta/>.

# Capítulo 3

## Selección de diccionario

En este capítulo se explica la metodología de selección del dominio de compresibilidad adecuado para el problema de minimización  $l_1$ , en función de la naturaleza de la señal de interés y otros parámetros del problema de síntesis. En primer lugar, se revisa el caso donde la matriz de compresibilidad corresponde a una base ortonormal, justificando teóricamente el procedimiento utilizado para su selección. El análisis desprendido de dicha metodología es incorporado como el caso base de la selección de diccionario vista a continuación. Ambos procedimientos son aplicados sobre las imágenes astronómicas de test apreciadas en la Figura 4.1 y evaluados para las disposiciones de antenas introducidas en la Sección 2.3. Todas las reconstrucciones realizadas en este y el siguiente capítulo utilizan observaciones sin ruido, generadas con el modelo descrito en el Anexo C. Además, a diferencia del capítulo 5, las mediciones pertenecen originalmente a un espacio discreto y, por tanto, no requieren Gridding.

### 3.1. Caso ortonormal

#### 3.1.1. Formalización del método

La selección de la base ortonormal óptima se basa en las garantías teóricas expuestas en la Sección 2.2.3. La estrategia consiste en la evaluación del compromiso existente entre compresibilidad y coherencia, el cual bajo la relación expuesta en la ecuación (2.14) determina una cantidad de mediciones necesarias para satisfacer con alta probabilidad el Teorema 2.4 de recuperación estable. La base seleccionada es aquella que minimiza el umbral en la tasa de medición requerida para garantizar cierto error relativo de reconstrucción bajo el esquema de minimización  $l_1$  descrito en la ecuación (2.11). A continuación, se definen las variables y parámetros utilizados en el método de selección de base.

**Definición 3.1** *El error relativo (RE) asociado a la reconstrucción  $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}^N$  se define en la ecuación (3.1), donde  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  denota la señal original proyectada sobre el dominio de*

compresibilidad.

$$RE = \frac{\|\alpha - \hat{\alpha}\|_2}{\|\alpha\|_2} \quad (3.1)$$

**Definición 3.2** Se define el error máximo tolerable  $\xi \in \mathbb{R}^+$  como el orden del error relativo que será tolerado al momento de resolver (2.11) para sintetizar la imagen de interés.

**Definición 3.3** Se define la cantidad crítica de coeficientes significativos  $S_{\alpha, \Psi, \xi}^* \in \mathbb{N}$  como la cantidad mínima de coeficientes significativos necesarios para asegurar un error relativo de reconstrucción menor al error máximo tolerable  $\xi$ , resolviendo (2.11) para reconstruir el vector original  $\alpha$ , satisfaciendo las hipótesis del Teorema 2.4. Matemáticamente

$$S_{\alpha, \Psi, \xi}^* = \min\{S \in \mathbb{N} : \beta_{app}(\alpha, \Psi, S) \leq \xi\}, \quad (3.2)$$

donde

$$\beta_{app}(\alpha, \Psi, S) = \frac{\|\alpha - \alpha_S\|_1}{\sqrt{S}\|\alpha\|_2} \quad (3.3)$$

Es importante destacar que la cantidad crítica de coeficientes significativos  $S_{\alpha, \Psi, \xi}^*$  mide la compresibilidad de la señal  $\alpha$  promovida por la base  $\Psi$ , en función del error máximo tolerable  $\xi$ . El Teorema 2.4 permite acotar este error de reconstrucción  $\xi$  por el error de aproximación normalizado  $\beta_{app}(\alpha, \Psi, S^*)$  inducido por los  $S_{\alpha, \Psi, \xi}^*$  coeficientes mayores en módulo. Esto justifica la definición de la variable  $\beta_{app}(\alpha, \Psi, S^*)$  en la ecuación (3.3), cuya expresión coincide con el término que acompaña a la constante  $C_\delta$  en la ecuación (2.12), normalizada por la energía de la señal para ajustarse a la definición de error relativo. De esta manera, dado un error máximo tolerable  $\xi$  (que podría establecer el astrónomo), se define inmediatamente una cantidad mínima  $S_{\alpha, \Psi, \xi}^*$  de coeficientes significativos necesarios para acotar el error relativo por  $C_\delta \cdot \xi$  al reconstruir la imagen vectorizada  $\alpha$ , resolviendo el problema de minimización  $l_1$  expuesto en la ecuación (2.11).

**Algoritmo de selección de base.** El método de selección propuesto contempla el cumplimiento del Teorema 2.4 a través del Teorema 2.6. Para ello, se define  $\beta_m(\alpha, \Psi, \xi)$  en la ecuación (3.4) como un funcional proporcional al umbral en la cantidad de mediciones de la ecuación (2.14), que depende de la coherencia de la base candidata con el dominio de medición y de la cantidad crítica de coeficientes significativos requeridos por la base para acotar el error de reconstrucción por el error máximo tolerable  $\xi$ . Teniendo en cuenta lo anterior, se selecciona la base óptima dentro de un *set* de índices  $\Delta = \{1, 2, \dots, N_B\}$  asociados a  $N_B$  bases candidatas  $\{\Psi_j : j \in \Delta\}$ , como aquella que resuelve:

$$j_{\alpha, \xi}^* = \arg \min_{j \in \Delta} \{\beta_m(\alpha, \Psi_j, \xi) = \mu_j^2(\Psi_j, \Phi) S^*(\alpha, \Psi_j, \xi) \ln^4(N)\}, \quad (3.4)$$

donde  $j_{\alpha, \xi}^*$  indexa la base seleccionada  $\Psi_{j_{\alpha, \xi}^*}$  que es función de la señal a reconstruir  $\alpha$  y del error tolerable  $\xi$ .

Luego, la base óptima según esta estrategia es aquella que minimiza la cantidad de mediciones necesarias para satisfacer apropiadamente RIP con alta probabilidad, acotando así el error relativo de reconstrucción por el error máximo tolerable  $\xi$  establecido.

### 3.1.2. Resultados experimentales

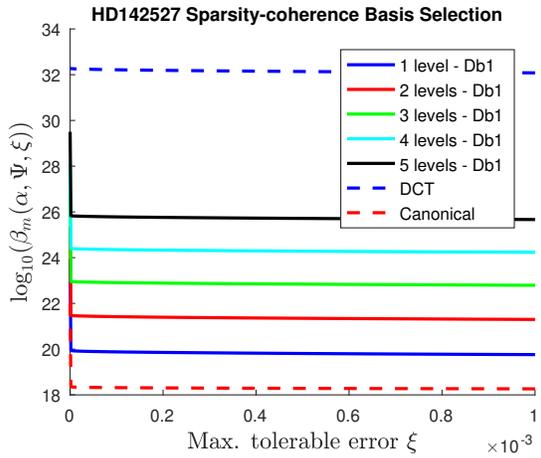
Los paneles (a), (c), (e), (g) e (i) de la Figura 3.1 muestran los resultados de la metodología de selección de base al ser aplicada sobre las fuentes test de la Figura 4.1. Los gráficos indican el orden de la cantidad de mediciones necesarias para obtener reconstrucciones con un error máximo tolerable  $\xi$ , considerando distintas bases ortonormales como dominios de compresibilidad (canónica, DCT y wavelets Daubechies con distintos niveles de descomposición). El primer punto a destacar de este análisis es que, para todas las fuentes evaluadas, la cantidad de mediciones requeridas por las bases está fuertemente determinada por la coherencia entre éstas y el dominio de medición. De hecho, se observa que la base canónica, que es la de mínima coherencia con Fourier, es la óptima en términos del criterio establecido. Las bases wavelets van requiriendo más mediciones a medida que aumentan sus niveles de descomposición, y finalmente, la base DCT, de máxima coherencia con Fourier, es la que requiere un muestreo prácticamente exhaustivo de la señal. La creciente similitud entre los dominios de Fourier y Wavelet se justifica en la aparición de elementos base con mayor soporte al ir aumentando los niveles de descomposición de las wavelets.

Para validar de forma práctica los resultados descritos en el párrafo anterior, los paneles (b), (d), (f), (h) y (j) de la Figura 3.1 evalúan el desempeño de las bases candidatas en la síntesis de las imágenes test mediante CS (problema de optimización en ecuación (2.11)), considerando un patrón de muestreo aleatorio uniforme en frecuencia (URF). La importancia de este escenario de muestreo es que satisface la hipótesis relacionada al esquema de observación expresada en el Teorema 2.6. El desempeño de cada base es medido a través de la tasa de reconstrucciones exitosas en función de la tasa de medición, donde una reconstrucción es considerada exitosa si ésta posee un error relativo menor a  $10^{-2}$ . La tasa de éxito es computada sobre un total de 20 simulaciones por cada nivel de submuestreo evaluado.

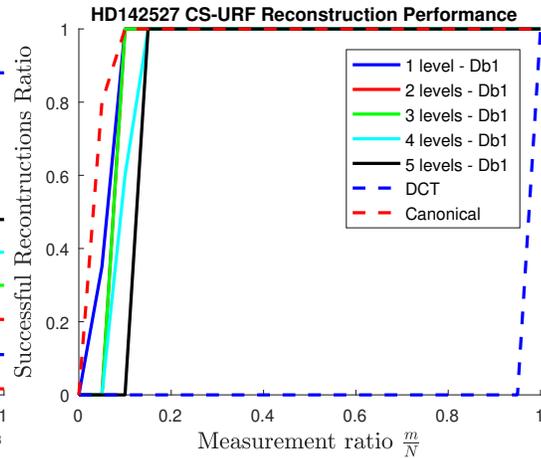
Los resultados de reconstrucción para cada fuente (paneles a la derecha en Figura 3.1) indican consistencia con las curvas obtenidas mediante el criterio de diseño propuesto (paneles a la izquierda en Figura 3.1), manteniendo el orden en que las bases pasan a la zona de reconstrucciones exitosas en función de la tasa de medición.

Por otro lado, el régimen de medición en el que las bases candidatas comienzan a generar reconstrucciones exitosas varía entre una fuente test y otra (comparar paneles (b) y (d), por ejemplo). Esto se explica por los diferentes perfiles de compresibilidad asociados a la naturaleza de cada señal, manifestados a través de la tasa crítica de coeficientes significativos cuyos resultados se exponen en el Anexo F. Fuentes que requieren una baja tasa de coeficientes significativos, como HD142527 (panel (a) de Figura F.1), permiten a las bases experimentar la transición de fase en un régimen de medición menor que aquellas fuentes que presentan una alta tasa de coeficientes significativos, como 30Dor y freq78 (paneles (d) y (e) de Figura F.1, respectivamente).

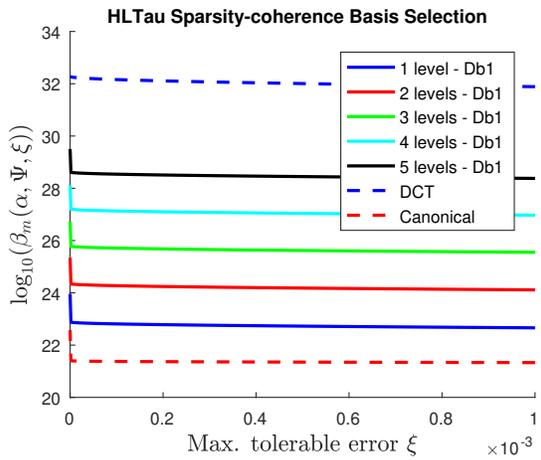
Por último, resulta interesante observar el caso de fuentes donde el dominio canónico induce la tasa más alta de coeficientes significativos en el régimen analizado, pero aun así resulta ser la base óptima en términos de la metodología aplicada. Tal es el caso de las fuentes 3c286, 30Dor y freq78 (paneles (c)-(e) de Figura F.1), cuyos resultados enfatizan la preponderancia de la coherencia por sobre la compresibilidad promovida por la base.



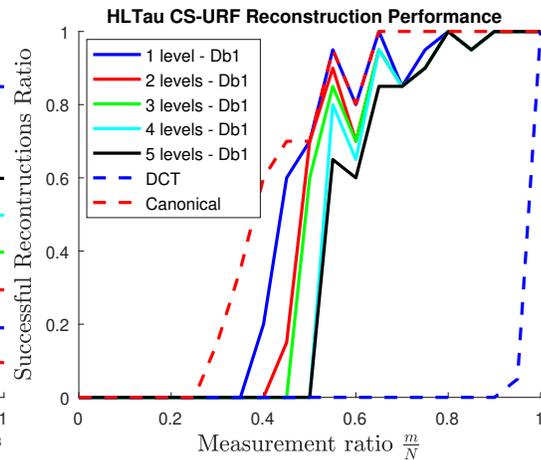
(a) HD142527



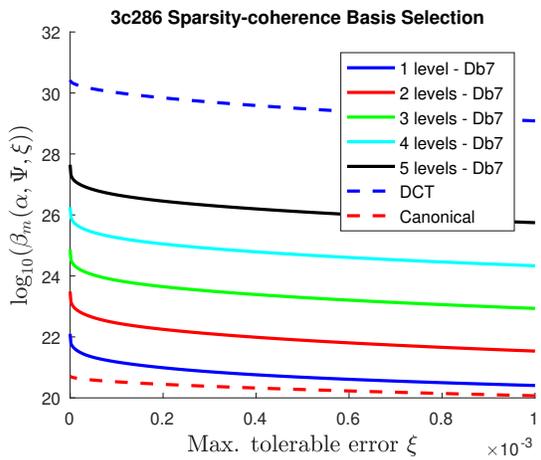
(b) HD142527



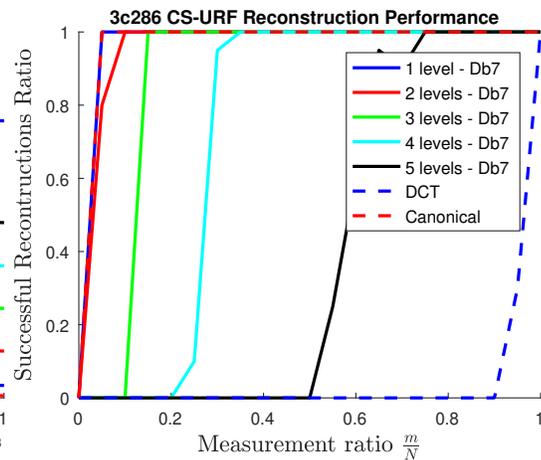
(c) HLTau



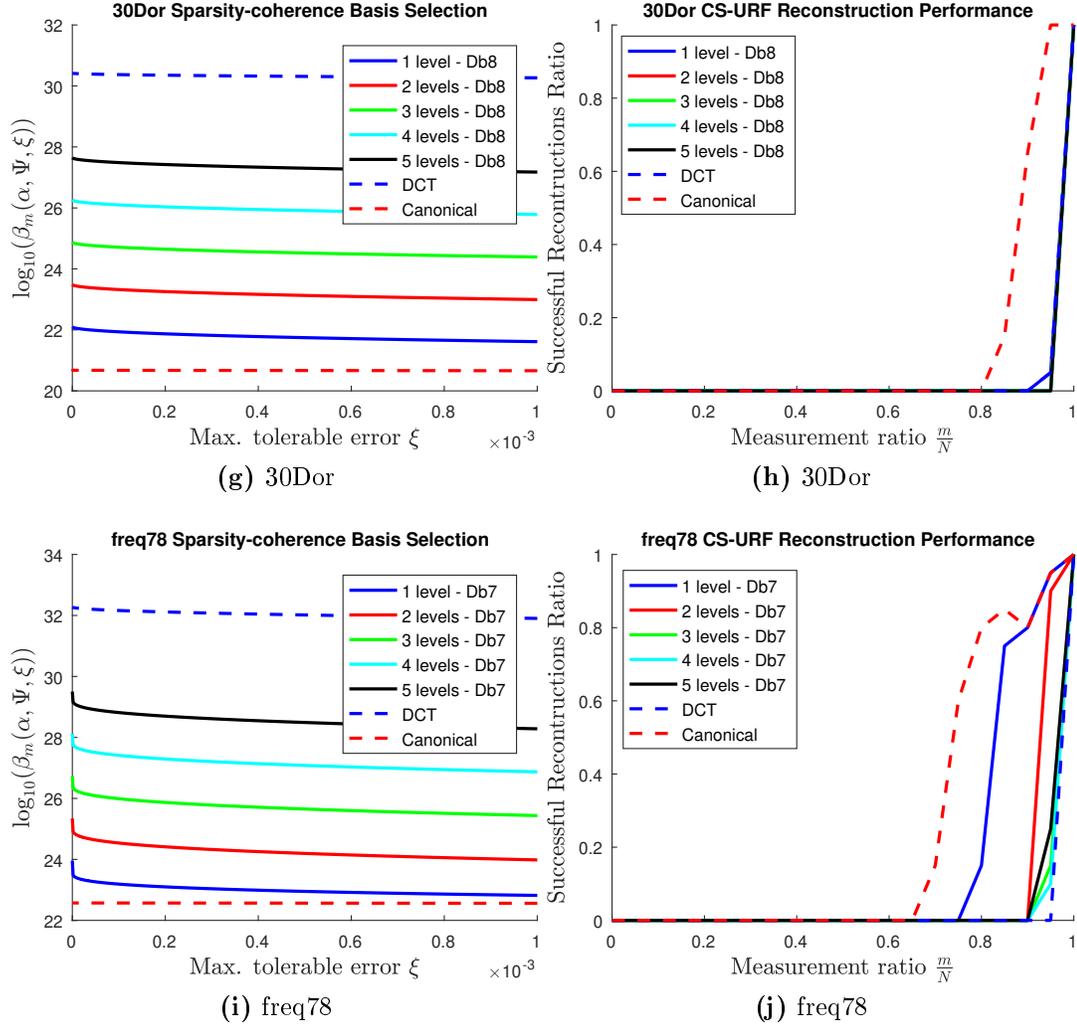
(d) HLTau



(e) 3c286



(f) 3c286



**Figura 3.1:** Izquierda: Curvas de selección de base para el caso ortonormal, indicando la cantidad de mediciones requeridas por cada base candidata para inducir reconstrucciones con un error máximo tolerable  $\xi$ . Derecha: Desempeño de reconstrucción en función de la tasa de medición (muestreo URF), evaluado a través de la tasa de reconstrucciones exitosas con un umbral de  $RE = 10^{-2}$  y considerando 20 simulaciones por cada nivel de medición. Cada fila corresponde a una fuente test distinta.

## 3.2. Caso redundante

### 3.2.1. Formalización del método

A diferencia del caso ortonormal presentado en la Sección 2.2.3, el setting con diccionarios redundantes como dominio de compresibilidad es más reciente y más difícil de analizar. Así mismo, los resultados teóricos introducidos en la Sección 2.2.4 para este escenario presentan mayor complejidad al momento de aplicarlos para definir un criterio de selección de diccionario. Por ejemplo, en [9] se garantiza recuperación estable y robusta cuando la matriz de

medición satisface D-RIP, pero no se deriva una condición que permita verificar dicha propiedad en la práctica. En [33] se presenta un resultado teórico que permite garantizar D-RIP con alta probabilidad, de manera análoga al Teorema 2.6, pero introduciendo un término de difícil cómputo conocido como factor de localización. La relevancia de dicho término yace en su directa relación con el diccionario utilizado, entregando una medida de su capacidad para preservar la compresibilidad de la proyección de análisis en señales sparse bajo su proyección de síntesis. Finalmente, las garantías teóricas derivadas en [42] se complejizan en relación a las recién mencionadas. En particular, dicho trabajo ofrece resultados de reconstrucción estable a partir de un esquema de muestreo multinivel, basado en un análisis local de compresibilidad y coherencia. A pesar del cumplimiento de estas propiedades en el escenario interferométrico estudiado (ver Anexo D), la dificultad de evaluar los conceptos de sparsidad relativa y sparsidad localizada introducidos en [42], impide en la práctica la utilización de tales resultados como criterio de diseño para el diccionario óptimo.

La metodología adoptada en este trabajo para la selección de diccionario se basa en la compresibilidad que el diccionario promueve en la proyección de análisis, coincidiendo así con la función objetivo del problema de optimización descrito en la ecuación (2.17). Tal como en [1], dicha compresibilidad es medida por la capacidad de representación en norma  $l_1$  que tienen los coeficientes más significativos de la proyección de análisis. De forma más concreta, se utiliza el concepto de compresibilidad global definido a continuación.

**Definición 3.4** *Se define el indicador de compresibilidad global  $s_{\mathbf{x},D,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  como la cantidad mínima de coeficientes mayores en módulo que conservan al menos una tasa  $\varepsilon \in (0, 1]$  de la norma  $l_1$  asociada a la proyección de análisis de la señal original  $\mathbf{x}$ , mediante el diccionario  $D$ . Matemáticamente*

$$s_{\mathbf{x},D,\varepsilon} = \min\{S \in \mathbb{N} : \frac{\|(D^*\mathbf{x})_S\|_1}{\|D^*\mathbf{x}\|_1} \geq \varepsilon\} \quad (3.5)$$

donde el vector  $(D^*\mathbf{x})_S$  es la proyección de análisis  $D^*\mathbf{x}$  con cero en todas sus componentes, excepto en las  $S$  mayores en módulo.

Notar que la expresión definida en la ecuación (3.5) es una función creciente con la tasa  $\varepsilon$ , conocida también como umbral relativo. Dado un umbral  $\varepsilon > 0$ , la compresibilidad promovida por cierto diccionario es mayor mientras menor sea la cantidad de coeficientes significativos requeridos.

**Algoritmo de selección de diccionario.** Para implementar la selección de diccionario se propone un algoritmo que en cada iteración minimiza el indicador definido en la ecuación (3.5). De esta manera, dicho algoritmo selecciona en cada paso aquella base candidata que promueve mayor compresibilidad en la proyección de análisis al ser concatenada con el diccionario actual, dado un umbral relativo previamente establecido. Luego, la base seleccionada se concatena al diccionario actual y se continúa con la siguiente iteración. El diccionario inicial del algoritmo corresponde a la base canónica, pues de los resultados obtenidos en la Sección 3.1 se desprende que dicho dominio es el óptimo para el setting ortonormal. El pseudocódigo del método recién descrito se presenta en el Algoritmo 1.

---

**Algorithm 1** Algorithm for dictionary selection

---

**Require:** Canonical basis matrix  $\mathbf{I}$ .

Set of candidate orthonormal basis matrices  $U$ .

Desired number of bases  $K$ .

Ratio of preserved  $l_1$  norm  $\varepsilon$ .

Original signal  $\mathbf{x}$ .

Length of original signal  $N$ .

**Ensure:** Selected dictionary  $\hat{\mathbf{D}}$ .

1: Initialize  $\mathbf{D} = [\mathbf{I}]$  and  $i = 1$ .

2: **while**  $i < K$  **do**

3:   Update  $N \leftarrow (i + 1) \cdot N$

4:   Compute a solution

$$\hat{\Psi}_{\varepsilon, \mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\Psi \in U} \frac{S_{\varepsilon, \mathbf{x}}(\mathbf{D}_{\Psi}^{(i)})}{N}$$

$$\text{with } \mathbf{D}_{\Psi}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{i+1}}[\mathbf{D}, \Psi]$$

5:   Update  $\mathbf{D} \leftarrow [\mathbf{D}, \hat{\Psi}_{\varepsilon, \mathbf{x}}]$

6:   Update  $U \leftarrow U \setminus \{\hat{\Psi}_{\varepsilon, \mathbf{x}}\}$

7:   Update  $i \leftarrow i + 1$

8: **end while**

9: Compute  $\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{\sqrt{K}}\mathbf{D}$

10: **return**  $\hat{\mathbf{D}}$ 

---

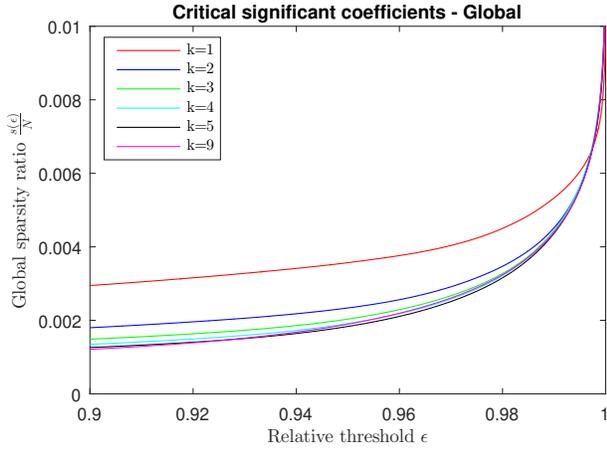
### 3.2.2. Resultados experimentales

Para ilustrar el resultado de este algoritmo, los paneles (a), (c), (e), (g) e (i) de la Figura 3.2 muestran la evolución de la compresibilidad global a medida que aumenta la cantidad de bases concatenadas  $k$ , para el régimen de umbral relativo  $\varepsilon \in [9 \times 10^{-1}, 1]$  sobre las 5 fuentes test analizadas. A su vez, los paneles (b), (d), (f), (h) y (j) grafican el desempeño asociado a la reconstrucción vía (2.17) a medida que aumenta la cantidad de bases concatenadas, para los tres tipos de disposición de antenas durante 12 [h] de observación (resultados resumidos en la Tabla 3.1). La calidad de la síntesis se mide a través del SNR (*Signal to noise ratio*) definido en la ecuación (3.6), donde  $\mathbf{x}$  denota la señal original y  $\hat{\mathbf{x}}$  la señal reconstruida.

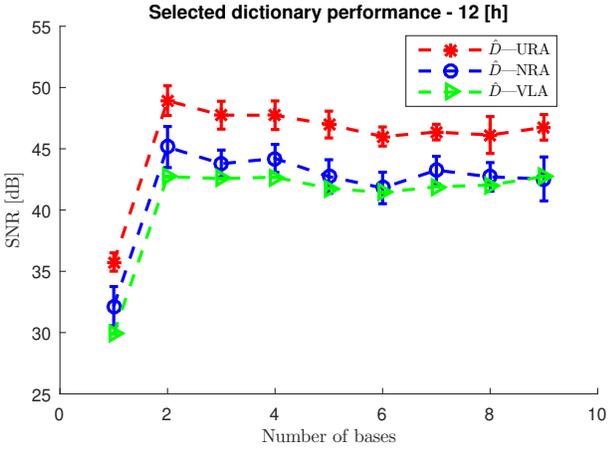
$$\text{SNR} = 20 \log_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2} \right] \quad (3.6)$$

Interesantemente, los resultados de la Figura 3.2 muestran que la compresibilidad promovida sobre la proyección de análisis aumenta al ir concatenando bases al diccionario, pero en una medida distinta para cada iteración. La mejora en compresibilidad obtenida al incorporar la segunda base es notoriamente mayor que aquella conseguida en las demás etapas del algoritmo, traduciéndose en una notoria ganancia en el desempeño de reconstrucción al pasar de una a dos bases en el diccionario seleccionado. Luego, la mejora en compresibilidad comienza a ser cada vez más marginal, generando un estancamiento e, incluso, una pérdida

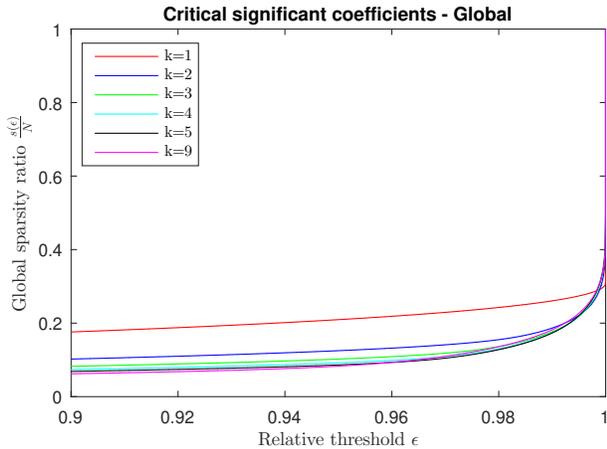
de desempeño en la reconstrucción interferométrica. Debido a esto, se selecciona el diccionario óptimo para cada fuente como aquel formado por la última concatenación que induce un desempeño igual o mejor al anterior. La Tabla 3.2 resume la información del diccionario óptimo  $D_{\hat{k}}$  obtenido según este método para cada imagen test, donde se ha utilizado  $\varepsilon = 0.96$  como umbral relativo para el algoritmo.



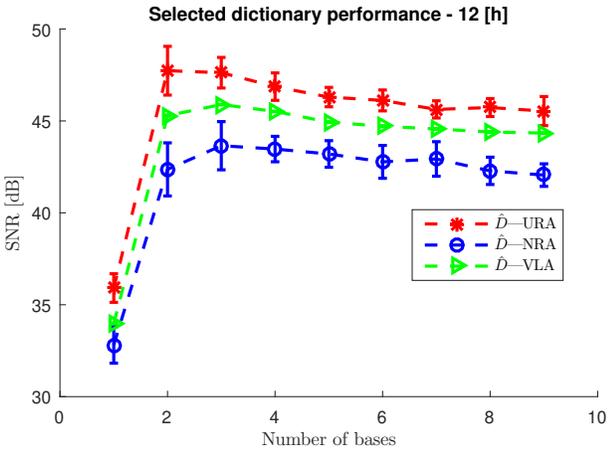
(a) HD142527



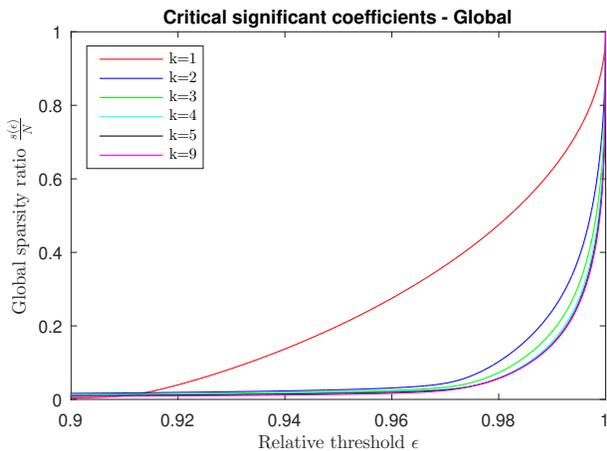
(b) HD142527



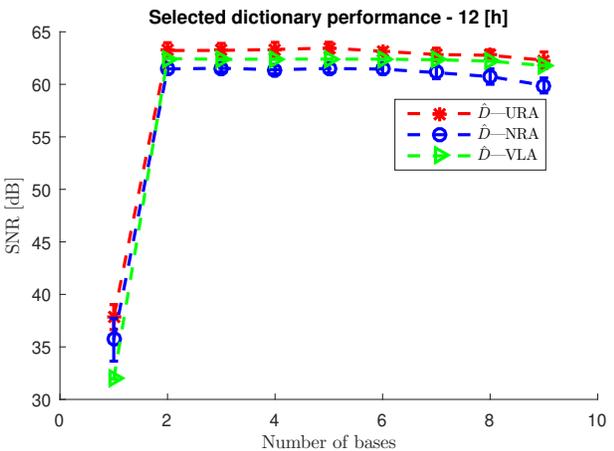
(c) HLTau



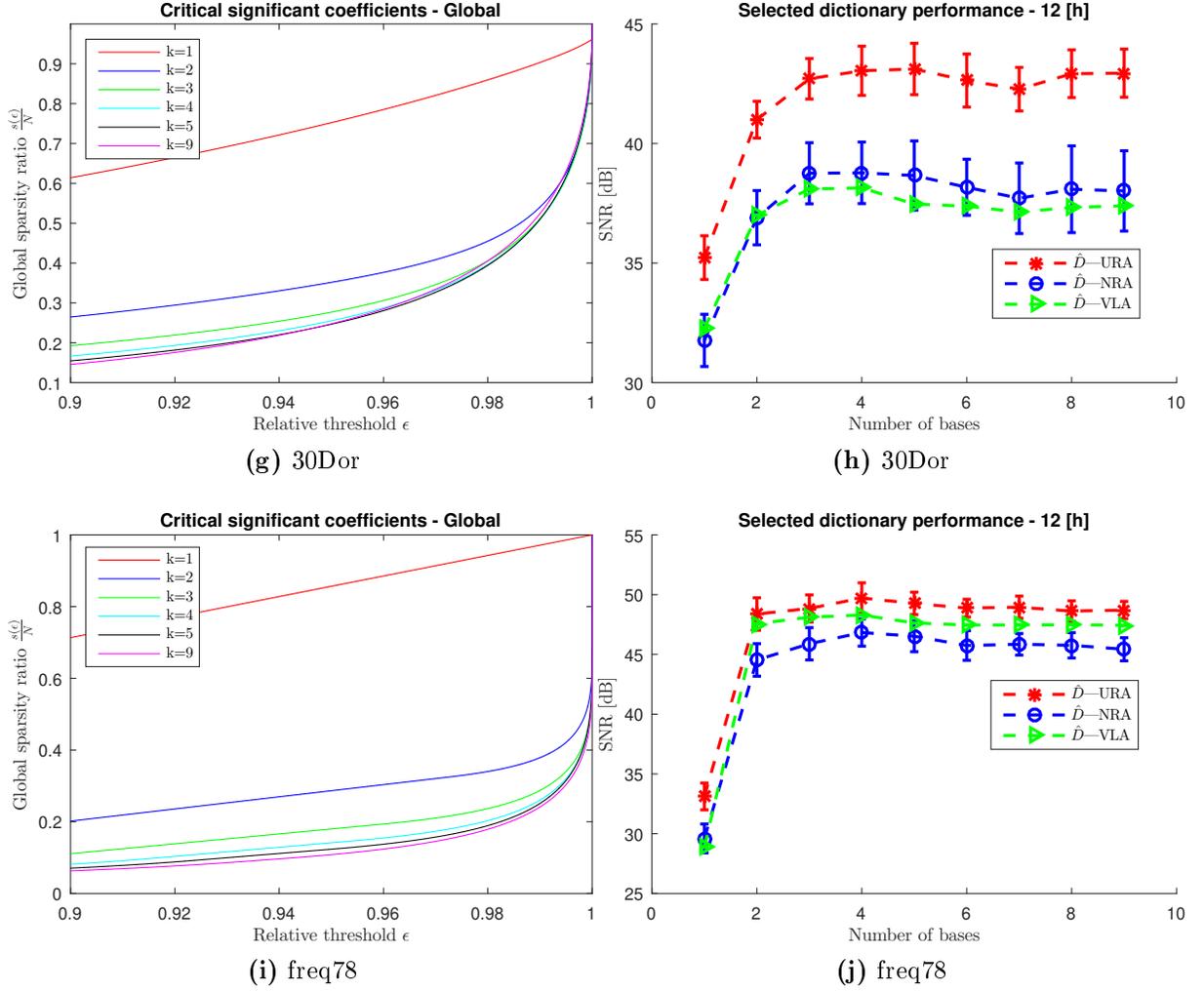
(d) HLTau



(e) 3c286



(f) 3c286



**Figura 3.2:** Selección de diccionario. **Izquierda:** Compresibilidad global  $\frac{s(\epsilon)}{N}$  promovida por el diccionario propuesto según Algoritmo 1, considerando  $k$  bases concatenadas. **Derecha:** Desempeño de reconstrucción promovido por el diccionario propuesto en función de la cantidad de bases concatenadas. Cada curva indica el SNR promedio computado sobre 20 simulaciones de reconstrucción, cuyo escenario de medición corresponde a una observación de 12 [h] con cierta configuración de antenas (URA, NRA, VLA). Cada fila corresponde a una fuente test distinta.

**Tabla 3.1:** Desempeño de reconstrucción promovido por la metodología de selección de diccionario propuesta. Cada celda informa el promedio y desviación del SNR graficado para cada fuente en los paneles (b), (d), (f), (h) y (j) de la Figura 3.2.

Source	Array	Performance with $k$ bases (dB)					
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
HD142527	URA	$35.76 \pm 0.74$	$48.93 \pm 1.21$	$47.74 \pm 1.14$	$47.74 \pm 1.17$	$46.98 \pm 1.09$	$46.00 \pm 0.78$
	NRA	$32.16 \pm 1.60$	$45.14 \pm 1.68$	$43.78 \pm 1.11$	$44.21 \pm 1.14$	$42.74 \pm 1.37$	$41.80 \pm 1.28$
	VLA	$29.90 \pm 0.04$	$42.72 \pm 0.03$	$42.57 \pm 0.04$	$42.68 \pm 0.03$	$41.78 \pm 0.02$	$41.44 \pm 0.01$
HLTau	URA	$35.91 \pm 0.78$	$47.73 \pm 1.32$	$47.62 \pm 0.83$	$46.87 \pm 0.75$	$46.30 \pm 0.53$	$46.11 \pm 0.57$
	NRA	$32.82 \pm 0.99$	$42.36 \pm 1.44$	$43.65 \pm 1.31$	$43.47 \pm 0.69$	$43.20 \pm 0.72$	$42.77 \pm 0.89$
	VLA	$33.98 \pm 0.02$	$45.29 \pm 0.03$	$45.89 \pm 0.02$	$45.52 \pm 0.02$	$44.93 \pm 0.02$	$44.71 \pm 0.03$
3c286	URA	$37.84 \pm 1.19$	$63.22 \pm 0.74$	$63.23 \pm 0.67$	$63.32 \pm 0.67$	$63.46 \pm 0.55$	$63.14 \pm 0.31$
	NRA	$35.68 \pm 2.04$	$61.46 \pm 0.45$	$61.53 \pm 0.36$	$61.39 \pm 0.38$	$61.51 \pm 0.42$	$61.45 \pm 0.47$
	VLA	$31.95 \pm 0.03$	$62.45 \pm 0.01$	$62.37 \pm 0.01$	$62.40 \pm 0.01$	$62.40 \pm 0.01$	$62.39 \pm 0.01$
30Dor	URA	$35.23 \pm 0.91$	$41.00 \pm 0.77$	$42.71 \pm 0.85$	$43.04 \pm 1.03$	$43.11 \pm 1.07$	$42.63 \pm 1.11$
	NRA	$31.76 \pm 1.09$	$36.90 \pm 1.13$	$38.75 \pm 1.28$	$38.77 \pm 1.29$	$38.66 \pm 1.45$	$38.17 \pm 1.17$
	VLA	$32.25 \pm 0.06$	$37.00 \pm 0.02$	$38.10 \pm 0.03$	$38.14 \pm 0.04$	$37.47 \pm 0.04$	$37.37 \pm 0.04$
freq78	URA	$33.12 \pm 1.12$	$48.38 \pm 1.36$	$48.84 \pm 1.14$	$49.71 \pm 1.27$	$49.26 \pm 0.94$	$48.87 \pm 0.74$
	NRA	$29.60 \pm 1.21$	$44.53 \pm 1.36$	$45.89 \pm 1.35$	$46.83 \pm 1.14$	$46.52 \pm 1.29$	$45.74 \pm 1.24$
	VLA	$28.89 \pm 0.03$	$47.56 \pm 0.02$	$48.11 \pm 0.02$	$48.29 \pm 0.02$	$47.63 \pm 0.02$	$47.45 \pm 0.03$

**Tabla 3.2:** Diccionarios seleccionados de acuerdo a la metodología propuesta en Algoritmo 1.

Source	$\hat{k}$	$D_{\hat{k}}$
HD142527	2	Canonical, db7 - 1 level
HLTau	3	Canonical, db8 - 1 level, db7 - 1 level
3c286	2	Canonical, dct
30Dor	4	Canonical, db5 - 3 levels, db4 - 3 levels, db3 - 3 levels
freq78	4	Canonical, db5 - 7 levels, db4 - 7 levels, db6 - 7 levels

### 3.2.3. Estabilidad de las reconstrucciones

La evolución experimentada por el desempeño de reconstrucción y su relación con la evolución de la compresibilidad global como función de la cantidad de bases concatenadas (ver Figura 3.2), pone de manifiesto la estabilidad de las reconstrucciones generadas en este escenario interferométrico. En otras palabras, el error de reconstrucción se ve fuertemente condicionado por el nivel de compresibilidad promovido sobre la proyección de análisis de la señal de interés, otorgando validez al criterio de selección propuesto en este trabajo. Este hecho es evidenciado por el significativo aumento en compresibilidad y desempeño experimentado al incorporar la segunda base al diccionario propuesto, y por la saturación en compresibilidad y desempeño producida al continuar iterando el método. El deterioro en SNR sufrido por la fuente HLTau a partir de la tercera base concatenada (panel (d) en Figura 3.2) podría indicar la presencia de otro factor con influencia sobre la calidad de la reconstrucción, pues la compresibilidad global promovida por el diccionario propuesto mejora monótonamente al ir adicionando bases.

A pesar de lo anterior, la estabilidad observada en la calidad de las reconstrucciones puede ser justificada por las garantías teóricas de muestreo multinivel presentadas en [1, 42] para los casos ortonormal y redundante, respectivamente. El resultado principal de ambos trabajos ofrece estabilidad en la reconstrucción bajo un esquema de medición por niveles, donde cada tasa de submuestreo es proporcional a la compresibilidad y coherencia exhibidas en cada nivel. Una mirada local de estas dos propiedades revela un comportamiento distinto en función de los átomos de medición y compresibilidad involucrados. En el caso del escenario evaluado en este trabajo, es posible observar que los elementos base de baja frecuencia en el dominio de Fourier (medición) son los que inducen la mayor coherencia al ser comparados con algún dominio Wavelet (compresibilidad). Esto se debe principalmente a su alta similitud con los elementos base de baja escala (soporte extendido) asociados a la banda de aproximación, tal como se aprecia en los paneles (b), (c) y (d) de la Figura D.1 en el Anexo D. Este alto valor de coherencia local impide realizar submuestreo en ese nivel, determinando un esquema de medición exhaustivo en las bajas frecuencias de acuerdo al resultado teórico de muestreo multinivel recién descrito [1, 42]. Dado que los patrones interferométricos de medición aquí estudiados se caracterizan por estar concentrados en las bajas frecuencias (ver Figura C.4 en Anexo C), dicho resultado teórico permite justificar el buen desempeño de reconstrucción visto en la práctica mediante CS.

### 3.2.4. Trade-off entre compresibilidad y carga computacional

El diccionario construido bajo el criterio de diseño propuesto induce una saturación en la compresibilidad promovida sobre la proyección de análisis. Este fenómeno ocurre inevitablemente a partir de cierta base concatenada, debido a la limitada diversidad de bases candidatas. Dicha saturación también es reflejada en el desempeño de reconstrucción, tal como se explica en la Sección 3.2.3. Si bien los resultados de la Figura 3.2 muestran que el desempeño solo se puede ver afectado levemente, continuar concatenando bases al diccionario resulta una estrategia ineficiente en términos del tiempo de cómputo. La complejidad del algoritmo de reconstrucción utilizado (NESTA) está determinada por el costo de aplicar  $D^*$  a un vector, el cual depende del tamaño del diccionario [4]. Aun cuando el espacio de búsqueda mantiene su dimensionalidad (a diferencia del enfoque basado en síntesis), la carga computacional asociada a la reconstrucción aumenta con cada iteración del Algoritmo 1, pues cada vez se agregan  $N$  átomos nuevos al diccionario en construcción. Lo anterior establece un compromiso entre compresibilidad promovida en la proyección de análisis y carga computacional, determinando así un tamaño de diccionario óptimo en términos de la calidad de la reconstrucción y tiempo de ejecución.

Un comportamiento similar es exhibido en el artículo del algoritmo asociado al diccionario SARA [14], donde también se observa la saturación antes mencionada. Sin embargo, las curvas se obtienen para una imagen no astronómica en un escenario de observación que no contempla disposición de antenas, a diferencia de los resultados presentados en este trabajo. Tampoco se advierte el fuerte incremento en el tiempo de cómputo debido a la concatenación, utilizando así la máxima cantidad de bases evaluadas para formar el diccionario SARA.

### 3.2.5. Variabilidad del diccionario óptimo

Un punto importante en el análisis de los resultados obtenidos es lo que respecta a la variabilidad del diccionario óptimo seleccionado, como función de la señal (imagen) evaluada. Dado que el dominio canónico es la base inicial en todos los casos, resulta natural realizar dicho análisis a partir de la compresibilidad promovida por ésta, manifestada a través de la tasa crítica de coeficientes significativos ya descrita en la Sección 3.1.1 y cuyos resultados se adjuntan en el Anexo F. Con esto en mente, es posible observar que las dos fuentes con menor tasa de coeficientes significativos (HD142527 y HLTau) añaden al diccionario óptimo bases coherentes con el dominio canónico en las siguientes iteraciones del método. Específicamente, incorporan wavelets con 1 nivel de descomposición, las cuales presentan alta similitud con el dominio canónico debido a su acotado soporte. Por otro lado, las fuentes que presentan una elevada tasa de coeficientes significativos (3c286, 30Dor y freq78) añaden al diccionario óptimo bases incoherentes con el dominio canónico en las siguientes iteraciones del método, ya sea wavelets con altos niveles de descomposición o, incluso, la DCT. A pesar de ser éste un análisis preliminar, resulta interesante notar la tendencia que presenta la concatenación de bases en el diccionario óptimo como función de la compresibilidad promovida por la base inicial. De hecho, una categorización de las fuentes realizada a partir de las ideas recién expuestas permite distinguir a un grupo de señales compactas con un amplio background nulo y a otro grupo de señales más extendidas en el dominio del pixel. Si bien la fuente 3c286 debería pertenecer al grupo de objetos compactos, el comportamiento mostrado por la tasa crítica de coeficientes requerida con el dominio canónico (panel (c) de Figura F.1) y por la concatenación realizada en la selección del diccionario óptimo (Tabla 3.2), difiere de aquel exhibido por las fuentes compactas HD142527 y HLTau. Esto se justifica por el hecho de que el background presente en 3c286 (panel (c) de Figura 4.1) no es nulo, sino que corresponde a valores con una magnitud pequeña en relación a los pixeles de alta intensidad ubicados en el centro de la imagen, afectando considerablemente la compresibilidad promovida por el dominio canónico.

# Capítulo 4

## Evaluación del método en escenario simulado

El objetivo de este capítulo es evaluar el desempeño del diccionario propuesto en la Sección 3.2.2, enmarcándose en un escenario simulado donde las observaciones se obtienen a través de un modelo y utilizando imágenes test consideradas como *ground truth*. En particular, se compara su desempeño con el obtenido por el diccionario SARA, empleado en trabajos anteriores para la síntesis de imágenes en interferometría [14, 15, 43].

### 4.1. Resultados de reconstrucción

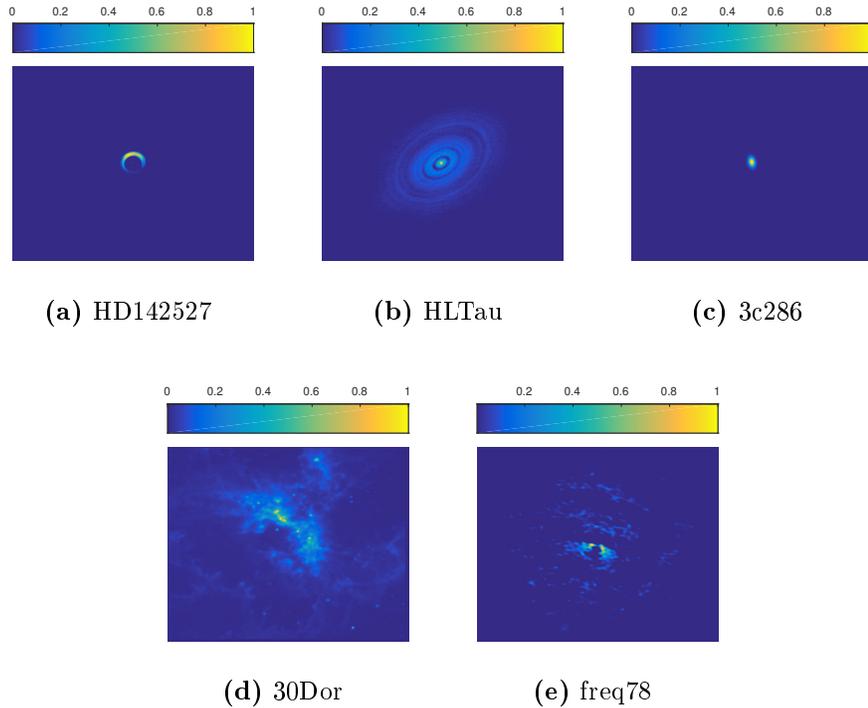
Las imágenes de evaluación empleadas en este trabajo se aprecian en la Figura 4.1, mientras que una descripción detallada se reporta en la Tabla 4.1. Todas corresponden a una síntesis obtenida a partir de datos reales mediante CLEAN o MEM, los dos métodos más utilizados por los astrónomos en radio interferometría [50]. Es importante destacar la diversidad de dichas imágenes en el dominio del pixel, observándose fuentes puntuales (3c286), fuentes con estructura compacta (HD142527, HLTau) y fuentes con emisión más extendida (freq78, 30Dor). Esto permite evaluar la selección de diccionario abarcando un espectro amplio en términos de la naturaleza de las fuentes. El Anexo E presenta las imágenes test en el dominio de la frecuencia, haciendo posible su categorización en el espacio de observación.

Los experimentos realizados en esta sección consisten en la síntesis de cada imagen test vía minimización  $l_1$  basada en análisis, a partir de mediciones generadas mediante el modelo de observación detallado en el Anexo C. El objetivo es comparar el diccionario óptimo propuesto en este trabajo con respecto al diccionario SARA en términos del SNR y tiempo de cómputo asociado a la reconstrucción. El diccionario utilizado en el algoritmo SARA posee la misma estructura que el diccionario generado por la metodología de selección, formándose a partir de la concatenación de bases ortonormales con un factor de normalización para preservar la energía de la señal al realizar la proyección. Específicamente, el diccionario SARA está formado por la concatenación de 9 bases: el dominio canónico y las primeras 8 wavelets

Daubechies con 4 niveles de descomposición [16].

El setting interferométrico de medición contempló el uso de la rotación terrestre, por lo que la cantidad de mediciones disponible se manejó a través del tiempo total de observación. El Anexo C presenta la gráfica que relaciona dicha variable con la tasa de medición inducida por cada tipo de disposición, mostrando además ejemplos de los patrones de medición asociados en el plano uv. Por otro lado, debido a que no se incorporó ruido aditivo sobre las observaciones generadas por el modelo, se estableció  $\eta = 0$  para el parámetro asociado al nivel de ruido en la ecuación (2.17). Para el resto de los parámetros asociados al método NESTA se conservó su valor definido por defecto.

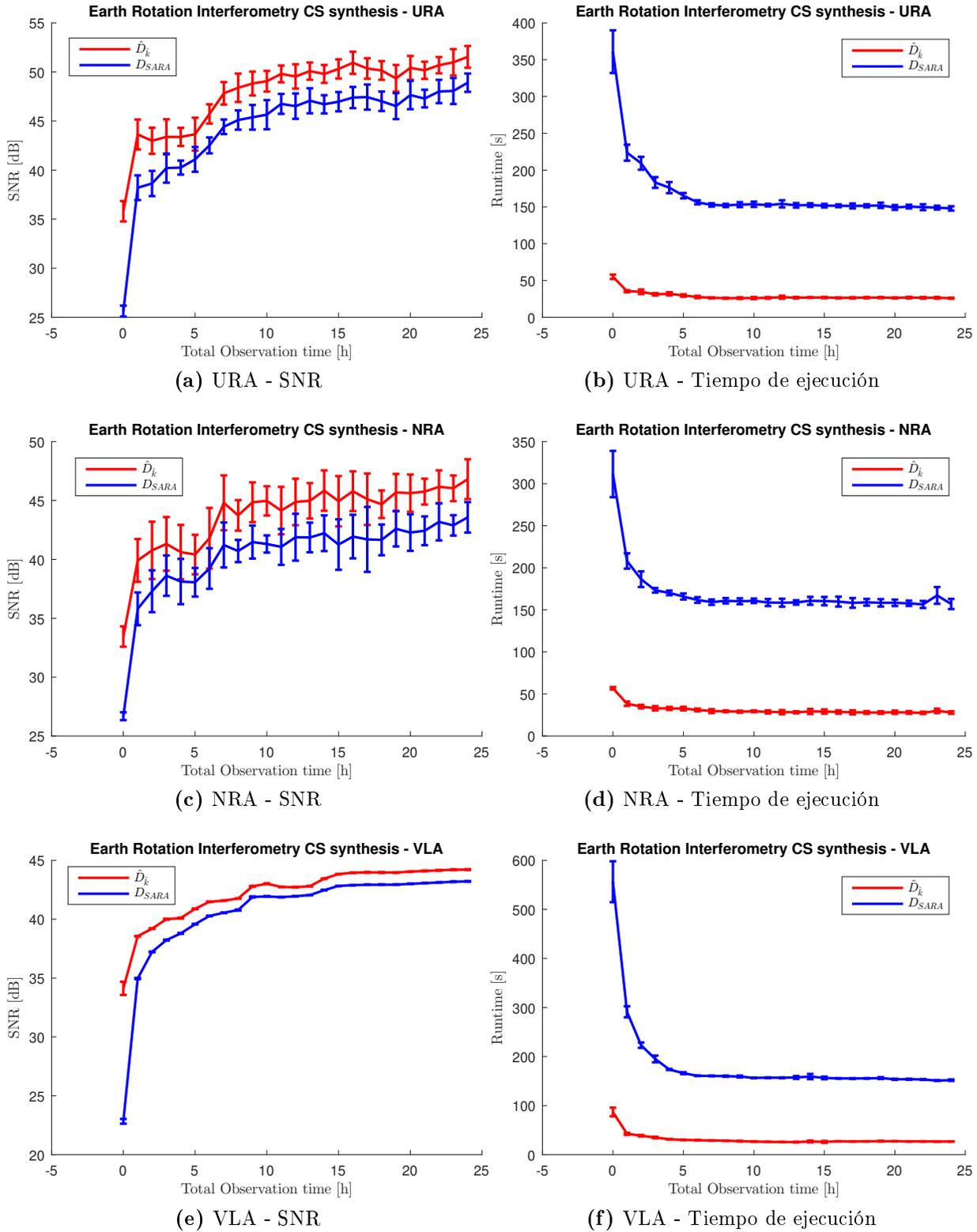
La Figura 4.2 muestra los desempeños promedio de SNR y tiempo de ejecución obtenidos en la síntesis de la imagen test asociada a la fuente HD142527, para los 3 tipos de disposición evaluados. Los resultados indican que el diccionario óptimo supera la calidad de la reconstrucción del diccionario SARA en todo el régimen de observación. Más aún, las reconstrucciones del diccionario  $D_{\hat{k}}$  requieren un tiempo que es al menos 6 veces menor que el requerido por el diccionario  $D_{SARA}$ . Esto se explica evidentemente en la menor cantidad de bases usadas para la concatenación. Para el resto de las fuentes, si bien existen algunas en las que el desempeño es peor para  $t_{obs} = 0$  [h] (modo Snapshot), siempre existe un momento a partir del cual el diccionario propuesto presenta mejor desempeño promedio de reconstrucción que el diccionario SARA. Dichos resultados se pueden observar en la Tabla 4.2. Los resultados análogos para el tiempo de ejecución se reportan en la Tabla 4.3, de donde se desprende un mayor requerimiento computacional promedio por parte del diccionario SARA, en mayor o menor medida dependiendo de la fuente evaluada.



**Figura 4.1:** Imágenes test utilizadas para la selección de diccionario y evaluación de desempeño en escenario simulado.

**Tabla 4.1:** Resumen de imágenes test. Las imágenes CLEAN fueron sintetizadas con el software CASA, mientras que las imágenes MEM se obtuvieron usando el algoritmo descrito en [13].

Test image	Description	Method	Size	Resolution
HD142527	HD142527 is a star in the constellation of Lupus. It is notable for its protoplanetary disk and its discovery has helped refine models of planet formation. Data was collected with ALMA array on 2015-06-29 by Cassasus [17].	MEM	512×512	0.05'' × 0.05''
HLTau	HL Tauri is a very young T Tauri star in the constellation Taurus, approximately 450 light-years from Earth. Data was collected with ALMA array on 2014-10-24. This reconstruction was published in [13].	MEM	512×512	0.005'' × 0.005''
3c286	3c286 is a quasar at position 1328+307 (B1950 coordinates) and is one of four primary calibrators used by the Very Large Array (along with 3C 48, 3C 138, and 3C 147). This observations were taken by ALMA array for scientific verification purposes and the data is publicly available in <a href="https://almascience.nrao.edu/alma-data/science-verification">https://almascience.nrao.edu/alma-data/science-verification</a> .	CLEAN	256×256	0.1'' × 0.1''
30Dor	30 Doradus (also known as Tarantula Nebula) is an H II region in the Large Magellanic Cloud. This test image was also used in [15] and the fits data is publicly available in <a href="https://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Sim_Inputs">https://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Sim_Inputs</a>	MEM	256×256	0.05'' × 0.05''
freq78	HD142527 molecular line emission centered at 345.8 [GHz]. Data was collected with ALMA array on 2012-06-02 by Cassasus.	CLEAN	256×256	2.16'' × 2.16''



**Figura 4.2:** Comparación de desempeño entre diccionario SARA y diccionario propuesto para fuente HD142527 en escenario interferométrico. Cada fila corresponde a un tipo de disposición distinto y cada curva corresponde al promedio de 20 simulaciones. **Izquierda:** SNR promedio en función del tiempo de observación. **Derecha:** Tiempo de ejecución promedio en función del tiempo de observación.

**Tabla 4.2:** Comparación de desempeño (SNR) entre diccionario SARA y diccionario propuesto para todas las fuentes test en escenario interferométrico. Cada celda indica el promedio y desviación estándar del SNR computado sobre 20 simulaciones.

Source	$t_{\text{obs}}$ (h)	URA (dB)		NRA (dB)		VLA (dB)	
		$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$	$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$	$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$
HD142527	0	$35.42 \pm 0.96$	$24.86 \pm 1.58$	$33.86 \pm 1.01$	$26.79 \pm 0.23$	$34.37 \pm 0.54$	$22.89 \pm 0.21$
	2	$43.35 \pm 1.70$	$39.25 \pm 1.28$	$41.80 \pm 1.87$	$38.23 \pm 1.53$	$39.17 \pm 0.03$	$37.20 \pm 0.03$
	4	$43.32 \pm 0.77$	$40.27 \pm 1.02$	$41.42 \pm 2.42$	$38.71 \pm 1.81$	$40.11 \pm 0.04$	$38.79 \pm 0.04$
	8	$47.78 \pm 0.72$	$44.75 \pm 0.70$	$44.48 \pm 1.17$	$41.16 \pm 1.04$	$41.76 \pm 0.01$	$40.78 \pm 0.04$
	12	$49.43 \pm 1.17$	$46.50 \pm 1.28$	$45.28 \pm 1.68$	$41.71 \pm 1.68$	$42.72 \pm 0.02$	$41.96 \pm 0.02$
	24	$51.49 \pm 0.94$	$48.72 \pm 1.10$	$47.19 \pm 1.52$	$43.62 \pm 1.44$	$44.23 \pm 0.03$	$43.23 \pm 0.02$
HLLtau	0	$0.97 \pm 0.62$	$1.87 \pm 0.91$	$2.15 \pm 1.49$	$3.98 \pm 1.86$	$1.04 \pm 0.14$	$2.13 \pm 0.57$
	2	$5.42 \pm 4.78$	$5.34 \pm 4.62$	$12.71 \pm 11.59$	$11.69 \pm 10.16$	$4.39 \pm 1.19$	$4.68 \pm 1.50$
	4	$17.43 \pm 15.55$	$15.48 \pm 13.65$	$25.36 \pm 15.82$	$24.08 \pm 15.10$	$26.78 \pm 11.60$	$24.45 \pm 10.17$
	8	$44.97 \pm 0.68$	$42.08 \pm 0.52$	$40.28 \pm 0.92$	$38.50 \pm 0.91$	$41.08 \pm 0.05$	$39.74 \pm 0.08$
	12	$47.65 \pm 0.77$	$44.84 \pm 0.54$	$44.15 \pm 1.14$	$42.08 \pm 0.91$	$45.90 \pm 0.01$	$43.59 \pm 0.03$
	24	$50.47 \pm 1.03$	$47.63 \pm 0.82$	$46.02 \pm 0.92$	$43.99 \pm 0.73$	$47.68 \pm 0.04$	$45.74 \pm 0.04$
3c286	0	$37.80 \pm 0.72$	$39.95 \pm 0.64$	$40.50 \pm 0.88$	$41.90 \pm 0.55$	$27.19 \pm 0.64$	$36.06 \pm 0.55$
	2	$52.52 \pm 1.23$	$52.06 \pm 0.97$	$55.43 \pm 1.23$	$51.44 \pm 1.92$	$51.27 \pm 0.31$	$45.18 \pm 0.05$
	4	$58.67 \pm 1.62$	$56.49 \pm 1.41$	$59.75 \pm 0.54$	$53.75 \pm 2.62$	$58.98 \pm 0.69$	$46.07 \pm 0.06$
	8	$63.12 \pm 0.88$	$58.28 \pm 3.09$	$60.35 \pm 0.64$	$51.03 \pm 4.16$	$61.61 \pm 0.09$	$46.06 \pm 0.06$
	12	$63.32 \pm 0.80$	$60.51 \pm 2.04$	$61.68 \pm 0.67$	$57.80 \pm 2.61$	$62.44 \pm 0.01$	$61.35 \pm 0.05$
	24	$64.61 \pm 0.60$	$62.47 \pm 1.24$	$62.42 \pm 0.53$	$59.45 \pm 2.10$	$63.07 \pm 0.08$	$62.07 \pm 0.08$
30Dor	0	$6.53 \pm 3.27$	$6.58 \pm 2.83$	$8.63 \pm 3.84$	$8.39 \pm 3.43$	$5.07 \pm 0.52$	$5.26 \pm 0.50$
	2	$12.52 \pm 6.84$	$11.90 \pm 6.08$	$17.27 \pm 8.80$	$16.18 \pm 7.76$	$17.71 \pm 6.75$	$16.29 \pm 5.78$
	4	$24.71 \pm 13.26$	$22.30 \pm 11.43$	$34.37 \pm 6.43$	$33.11 \pm 6.14$	$29.84 \pm 9.41$	$28.29 \pm 8.79$
	8	$42.00 \pm 1.19$	$41.46 \pm 1.22$	$37.25 \pm 1.64$	$36.39 \pm 1.77$	$36.20 \pm 0.03$	$35.61 \pm 0.03$
	12	$42.50 \pm 1.15$	$42.15 \pm 1.30$	$38.79 \pm 0.93$	$38.03 \pm 0.97$	$38.15 \pm 0.03$	$37.47 \pm 0.04$
	24	$45.46 \pm 0.93$	$45.07 \pm 1.06$	$40.94 \pm 1.66$	$40.36 \pm 1.81$	$39.26 \pm 0.02$	$38.63 \pm 0.02$
freq78	0	$3.95 \pm 0.93$	$6.30 \pm 0.70$	$6.82 \pm 1.42$	$8.89 \pm 1.17$	$3.12 \pm 0.24$	$5.84 \pm 0.14$
	2	$12.25 \pm 2.46$	$14.59 \pm 2.37$	$16.52 \pm 4.02$	$18.58 \pm 4.25$	$12.13 \pm 0.70$	$13.94 \pm 0.60$
	4	$17.48 \pm 6.01$	$18.93 \pm 5.19$	$27.20 \pm 7.61$	$28.79 \pm 8.00$	$23.26 \pm 4.32$	$25.03 \pm 5.33$
	8	$49.24 \pm 0.84$	$47.83 \pm 0.79$	$45.76 \pm 1.06$	$44.68 \pm 0.92$	$47.40 \pm 0.02$	$46.34 \pm 0.03$
	12	$49.60 \pm 1.08$	$48.23 \pm 1.03$	$47.23 \pm 0.92$	$45.96 \pm 0.90$	$48.30 \pm 0.02$	$47.50 \pm 0.02$
	24	$51.47 \pm 1.17$	$50.29 \pm 1.05$	$48.75 \pm 1.02$	$47.73 \pm 0.93$	$50.38 \pm 0.04$	$49.72 \pm 0.04$

**Tabla 4.3:** Comparación de desempeño (tiempo de ejecución) entre diccionario SARA y diccionario propuesto para todas las fuentes test en escenario interferométrico. Cada celda indica el promedio y desviación estándar del tiempo de ejecución computado sobre 20 simulaciones.

Source	$t_{\text{obs}}$ (h)	URA (s)		NRA (s)		VLA (s)	
		$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$	$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$	$D_{\hat{k}}$	$D_{SARA}$
HD142527	0	$29.02 \pm 2.01$	$210.10 \pm 28.28$	$28.84 \pm 0.95$	$177.77 \pm 8.06$	$41.90 \pm 3.55$	$293.46 \pm 16.11$
	2	$16.51 \pm 0.95$	$106.89 \pm 3.83$	$17.87 \pm 1.06$	$104.13 \pm 5.99$	$16.76 \pm 0.35$	$110.31 \pm 2.28$
	4	$16.55 \pm 1.12$	$94.58 \pm 2.15$	$16.81 \pm 0.75$	$93.77 \pm 0.86$	$15.65 \pm 0.29$	$93.19 \pm 0.74$
	8	$13.45 \pm 0.51$	$83.46 \pm 1.57$	$14.89 \pm 0.69$	$85.24 \pm 1.38$	$14.17 \pm 0.31$	$84.48 \pm 1.04$
	12	$12.83 \pm 0.54$	$81.50 \pm 1.74$	$14.95 \pm 0.75$	$87.93 \pm 2.24$	$12.62 \pm 0.20$	$82.28 \pm 0.52$
	24	$12.68 \pm 0.42$	$80.25 \pm 1.23$	$13.96 \pm 0.66$	$85.45 \pm 1.82$	$12.53 \pm 0.16$	$80.14 \pm 0.39$
HLTau	0	$57.87 \pm 25.71$	$277.72 \pm 98.59$	$71.85 \pm 27.47$	$363.54 \pm 112.14$	$71.82 \pm 23.22$	$373.34 \pm 49.57$
	2	$32.90 \pm 6.21$	$193.15 \pm 72.85$	$30.68 \pm 7.12$	$171.41 \pm 55.20$	$34.94 \pm 6.32$	$219.97 \pm 66.03$
	4	$26.24 \pm 2.97$	$140.80 \pm 26.27$	$23.34 \pm 3.12$	$126.49 \pm 29.59$	$26.89 \pm 3.69$	$151.60 \pm 35.70$
	8	$16.02 \pm 0.16$	$73.01 \pm 0.45$	$16.13 \pm 0.29$	$73.02 \pm 1.45$	$15.87 \pm 0.17$	$73.29 \pm 0.35$
	12	$14.29 \pm 0.36$	$64.62 \pm 0.40$	$15.81 \pm 0.23$	$70.50 \pm 0.80$	$14.87 \pm 0.07$	$69.23 \pm 0.53$
	24	$15.32 \pm 0.20$	$70.32 \pm 0.51$	$15.03 \pm 0.29$	$68.27 \pm 0.98$	$14.65 \pm 0.37$	$67.63 \pm 0.85$
3c286	0	$2.98 \pm 0.21$	$21.24 \pm 1.37$	$2.42 \pm 0.13$	$17.96 \pm 0.86$	$3.59 \pm 0.04$	$27.96 \pm 1.00$
	2	$1.66 \pm 0.04$	$14.31 \pm 0.31$	$1.62 \pm 0.09$	$14.13 \pm 0.25$	$1.75 \pm 0.08$	$14.89 \pm 0.12$
	4	$1.51 \pm 0.07$	$13.23 \pm 0.31$	$1.47 \pm 0.06$	$13.33 \pm 0.13$	$1.53 \pm 0.04$	$13.23 \pm 0.09$
	8	$1.39 \pm 0.04$	$12.62 \pm 0.17$	$1.46 \pm 0.05$	$13.19 \pm 0.25$	$1.50 \pm 0.09$	$12.90 \pm 0.49$
	12	$1.45 \pm 0.06$	$12.65 \pm 0.18$	$1.45 \pm 0.03$	$13.06 \pm 0.25$	$1.65 \pm 0.02$	$13.49 \pm 0.13$
	24	$1.44 \pm 0.02$	$12.57 \pm 0.10$	$1.46 \pm 0.03$	$12.90 \pm 0.22$	$1.46 \pm 0.05$	$12.54 \pm 0.09$
30Dor	0	$11.14 \pm 2.23$	$44.70 \pm 13.73$	$8.56 \pm 0.34$	$32.96 \pm 8.93$	$11.48 \pm 0.57$	$39.82 \pm 2.37$
	2	$5.55 \pm 0.19$	$21.64 \pm 5.40$	$5.55 \pm 0.17$	$19.44 \pm 0.91$	$6.03 \pm 0.89$	$21.95 \pm 3.91$
	4	$5.74 \pm 1.85$	$19.47 \pm 6.56$	$4.75 \pm 0.26$	$16.59 \pm 0.73$	$4.99 \pm 0.82$	$16.77 \pm 0.82$
	8	$3.94 \pm 0.08$	$14.31 \pm 0.29$	$4.48 \pm 0.16$	$16.16 \pm 0.45$	$4.16 \pm 0.04$	$15.11 \pm 0.14$
	12	$3.94 \pm 0.11$	$14.53 \pm 0.47$	$4.27 \pm 0.09$	$15.55 \pm 0.34$	$3.90 \pm 0.03$	$14.54 \pm 0.12$
	24	$3.82 \pm 0.09$	$13.93 \pm 0.28$	$4.07 \pm 0.20$	$15.00 \pm 0.50$	$3.79 \pm 0.05$	$13.83 \pm 0.09$
freq78	0	$73.06 \pm 3.72$	$257.46 \pm 25.43$	$65.77 \pm 5.33$	$229.84 \pm 28.99$	$84.36 \pm 2.26$	$309.31 \pm 21.03$
	2	$48.01 \pm 2.01$	$145.23 \pm 17.33$	$43.45 \pm 5.35$	$129.41 \pm 8.20$	$45.36 \pm 1.07$	$140.49 \pm 2.24$
	4	$46.67 \pm 7.06$	$129.10 \pm 19.68$	$34.63 \pm 5.32$	$97.86 \pm 10.71$	$36.23 \pm 3.35$	$109.76 \pm 4.31$
	8	$21.07 \pm 0.32$	$70.71 \pm 0.81$	$21.99 \pm 0.27$	$72.57 \pm 0.87$	$21.40 \pm 0.16$	$71.69 \pm 0.35$
	12	$21.25 \pm 0.40$	$70.58 \pm 0.71$	$21.17 \pm 0.36$	$69.91 \pm 1.36$	$20.34 \pm 0.73$	$68.48 \pm 2.33$
	24	$20.43 \pm 0.28$	$68.43 \pm 1.58$	$21.13 \pm 0.17$	$70.99 \pm 0.64$	$20.03 \pm 0.36$	$67.68 \pm 1.03$

## 4.2. Desempeño del método respecto a diccionario SARA

La forma en la que se construye el diccionario bajo la metodología propuesta en la Sección 3.2.1 permite una comparación justa con el diccionario SARA, pues en ambos casos se realiza una concatenación de bases ortonormales. Los resultados expuestos en la Tabla 4.2 indican claramente que el diccionario propuesto induce una mejor calidad de reconstrucción promedio que la obtenida por el diccionario SARA, a partir de cierto tiempo de observación. De hecho, para la fuente HD142527 el desempeño es mejor en todo el régimen de medición, tal como se aprecia en la Figura 4.2. Más aún, el tiempo de cómputo requerido es menor debido a la diferencia en el tamaño de los diccionarios. En [43] ya se destaca el considerable aumento en el tiempo de ejecución debido a la concatenación de bases en el diccionario SARA. Este trabajo no solo corrobora ese hecho, sino que además muestra que es posible mantener o mejorar

la calidad de la síntesis con una cantidad menor de bases, lo que representa un resultado notable.

### 4.3. Desempeño del método para distintas configuraciones de antenas

Las disposiciones de antenas utilizadas en este trabajo inducen patrones de medición que se diferencian entre sí durante las primeras horas de observación. Tal como se aprecia en la Figura C.3, en modo Snapshot los esquemas URA y NRA presentan una distribución de mediciones altamente determinada por la distribución de probabilidad asociada al posicionamiento de las antenas. Asimismo, el esquema VLA presenta un patrón geométrico que privilegia ciertas direcciones en el plano de medición. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo éstos tienden a concentrarse en las bajas frecuencias del plano uv, siendo bastante similares entre sí desde las 6 horas en adelante. La evolución temporal de los patrones uv para cada disposición se puede observar en la Figura C.4.

Por otro lado, cada tipo de arreglo induce una tasa de medición efectiva distinta, cuyas curvas en función del tiempo de observación se expresan en la Figura C.2. En ella se puede apreciar que durante las primeras 2 horas las tasas de medición son similares para cada disposición, para luego manifestarse una brecha importante entre la disposición NRA y los esquemas URA y VLA.

La diferencia en los desempeños de reconstrucción obtenidos para cada tipo de arreglo, resumidos en la Tabla 4.2, está determinada principalmente por los dos factores anteriormente descritos: por un lado, el patrón de medición inducido en el plano uv y su relación con el espectro en frecuencia de la fuente, y por otro, la tasa de medición efectiva inducida por cada esquema. En el primer régimen de observación, el desempeño parece estar dominado por el primer factor. De hecho, exceptuando a HD142527, en todas las fuentes el esquema NRA genera el mayor SNR promedio al menos durante las primeras 4 horas de observación, aun cuando dicha disposición es la que induce la menor tasa de medición efectiva. Luego, en el segundo régimen de medición (desde las 8 horas en adelante), el esquema URA es el que ofrece el mejor desempeño para todas las fuentes analizadas. Este último resultado estaría dominado por la supremacía que presenta la disposición URA en la tasa de medición efectiva, pues la estructura del patrón uv es similar para las 3 disposiciones en este régimen de medición (cubren completamente el centro del plano).

Por último, resulta importante mencionar el efecto de saturación en el desempeño de reconstrucción observado en todos los esquemas de antenas analizados. En todos los casos, las ganancias significativas en el rendimiento se producen antes de las 12 horas de observación. Luego de esto, en el mejor de los casos, se obtiene una mejora de solo 3 [dB]. Este fenómeno obedece claramente a la saturación que experimenta la tasa de medición efectiva.

# Capítulo 5

## Evaluación del método en escenario con datos reales

En esta sección se comparan las reconstrucciones promovidas por el diccionario óptimo propuesto en la Sección 3.2.2 con aquellas obtenidas mediante el diccionario SARA, a partir de mediciones reales adquiridas en el observatorio ALMA. Se incluye además la síntesis basada en el método CLEAN para poder evaluar el desempeño de CS respecto a una de las técnicas actualmente utilizadas. A continuación, se describen los detalles de cada dataset considerado, correspondientes a observaciones de las fuentes HD142527 y HL Tauri.

### 5.1. Observaciones

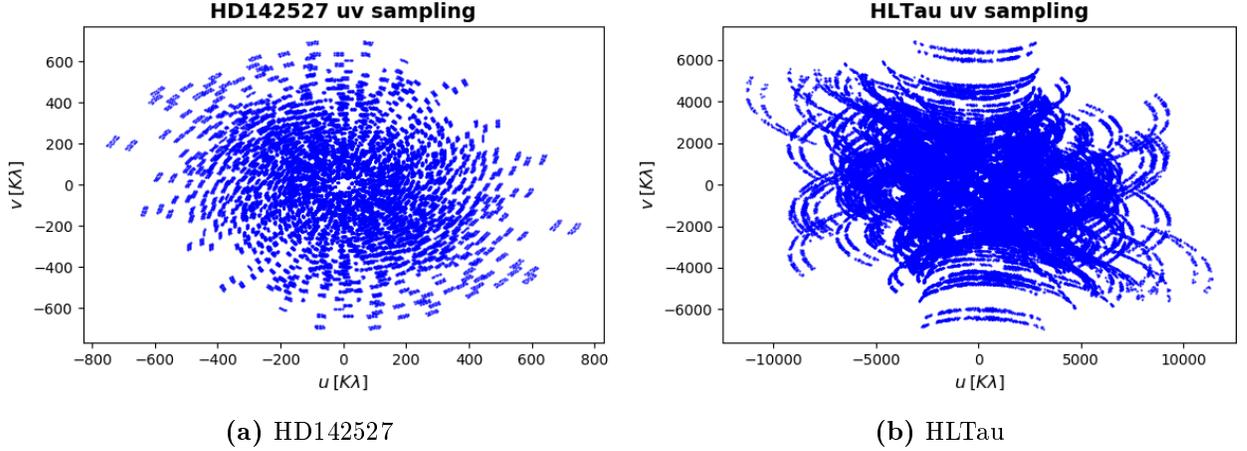
#### 5.1.1. HD142527

La observación de esta estrella en banda 4 posee el centro de fase en las coordenadas  $RA = 15^{\text{h}}56^{\text{m}}41^{\text{s}}.874$ ,  $Dec. = -42^{\circ}19'23''.653$  (J2000) y fue realizada por Casasus et al. [17] en el observatorio ALMA con fecha 29 de junio de 2015 (ALMA#2011.0.00465.S). Se utilizaron 43 antenas en un lapso de 24.95 [min], desde las 03:12:14.0 hasta las 03:37:11.6 (UTC), generando el patrón uv desplegado en el panel (a) de la Figura 5.1. La calibración de los datos fue realizada en CASA, siguiendo el procedimiento estándar descrito en su manual.

#### 5.1.2. HLTau

Esta observación de la estrella HL Tauri en banda 6 registra el centro de fase en las coordenadas  $RA = 04^{\text{h}}31^{\text{m}}38^{\text{s}}.426$ ,  $Dec. = +18^{\circ}13'57''.047$  (J2000) y fue realizada en el observatorio ALMA durante la campaña *ALMA Long Baseline Campaign* en 2014 (ALMA#2011.0.00015.S). Para este proceso de medición se utilizaron 42 antenas desde las 06:58:24.0 (UTC) del día 24 de octubre hasta las 08:37:11.6 (UTC) del día 31 de octu-

bre, generando el patrón uv desplegado en el panel (b) de la Figura 5.1. La calibración de los datos fue realizada en CASA, siguiendo el procedimiento estándar descrito en su manual.



**Figura 5.1:** Patrones de muestreo uv asociados a las observaciones reales de HD142527 y HLTau.

## 5.2. Detalles de implementación: CS

En el contexto de CS aplicado al problema de síntesis en interferometría, son varios los trabajos que han puesto el foco en la incorporación de elementos realistas al proceso de observación, tales como baselines con componentes  $w$  no despreciables, campos de visión extendidos, patrón de radiación, entre otros (ver Sección 1.3.1). Dichos aspectos no son considerados en este trabajo, pues el objetivo consiste en la optimización de la herramienta de síntesis en relación al dominio de compresibilidad utilizado. Sin embargo, sí se consideran otros elementos, como lo son la incorporación de pesos en las mediciones y un esquema de gridding-interpolación que permite relacionar el espacio discreto en el que se resuelve el problema, con el espacio continuo en el cual se adquieren las mediciones.

La discretización de los dominios espacio-frecuencia se realiza en base a una grilla regular cuya resolución espacial se fija en el valor informado por los astrónomos luego del proceso de medición. Dicho valor es determinado en función del tamaño del beam sucio, el cual depende a su vez de la frecuencia espacial máxima medida. El tamaño de las imágenes en píxeles queda como grado de libertad, mientras que la resolución en frecuencia se obtiene mediante el teorema del muestreo de Shannon-Nyquist. La interpolación realizada para definir el valor de las visibilidades discretas consiste en computar el promedio de las visibilidades medidas dentro de cada celda, de manera similar al efecto producido por el kernel cuadrado presentado en [43]. En dicho trabajo se muestran distintos kernels que, mediante una operación de convolución, realizan la interpolación en el dominio de la frecuencia.

Además, se utiliza un esquema de ponderación natural, en el que cada elemento del vector de medición es normalizado por el inverso de su desviación estándar. Dado que cada celda medida es el promedio de un conjunto de observaciones, dicha desviación se estima a partir de la propagación de los errores informados para cada observación en la celda. De esta manera,

si al modelo de ruido aditivo se incorpora la hipótesis de ruido i.i.d. Gaussiano, el esquema de ponderación natural induce en el cuadrado de la norma  $l_2$  del vector de residuos una distribución  $\chi^2$  con una cantidad de grados de libertad igual a la cantidad de mediciones  $2m$  (considerando partes real e imaginaria). De esta manera, y tal como se indica en los trabajos [15, 43], el umbral de la energía del ruido  $\eta$  se establece en dos desviaciones estándar por sobre la media de dicha distribución:

$$\eta^2 = 2m + 2\sqrt{4m} \quad (5.1)$$

### 5.3. Detalles de implementación: CLEAN

El método CLEAN, tanto en su publicación original [32] como en versiones posteriores [20, 44], intenta resolver el problema de deconvolución descrito en la ecuación (2.4) modelando la imagen de interés como una colección de fuentes puntuales. Para ello, en cada iteración se detecta el valor peak en la imagen residuo actual, para luego extraer de ella una versión escalada de la PSF centrada en el pixel detectado, obteniendo así la imagen residual para la siguiente iteración. La porción de señal deconvolucionada es sumada a la solución actual, la cual inicialmente corresponde a un mapa lleno de ceros. Matemáticamente, el algoritmo puede ser expresado como

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \mathcal{T}[\Phi_m(\mathbf{y} - \Phi_m^* \mathbf{x}^{(t-1)})] \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{x}^{(t)}$  representa la solución después de  $t$  iteraciones y  $\mathcal{T}$  representa el proceso de deconvolucionar la fuente más intensa en la imagen residuo  $\Phi_m(\mathbf{y} - \Phi_m^* \mathbf{x}^{(t-1)})$  [40].

Si bien dicho algoritmo ha sido el estándar en interferometría desde su publicación, CLEAN constituye un método iterativo sin garantías de convergencia a un óptimo global para alguna función objetivo [45]. Lo más cercano a una justificación teórica se aprecia en [36], donde se conjetura que CLEAN corresponde a un método *greedy* de minimización en norma  $l_1$ , estableciendo una posible similitud con el esquema de recuperación propuesto en CS cuando se busca compresibilidad en el dominio de los pixeles.

Las reconstrucciones CLEAN mostradas en este trabajo se obtuvieron mediante el software CASA, ampliamente utilizado por la comunidad astronómica. Cada síntesis se restringió a la zona de interés para cada fuente, correspondiente al centro de la imagen. La reconstrucción finalizó cuando el método no pudo extraer más estructuras de la imagen residuo. Se privilegió esta metodología por sobre el criterio de parada en función del peak en la imagen residuo, debido a la obtención de mejores resultados visuales en la imagen sintetizada.

Por último, es importante mencionar que las reconstrucciones CLEAN reportadas en las Figuras 5.2 y 5.3 corresponden a la solución final del proceso en la ecuación (5.2), convolucionada con una Gaussiana y luego sumada a la imagen residual final:

$$\mathbf{x}^{restored} = \mathcal{P}[\mathbf{x}^f] + \Phi_m(\mathbf{y} - \Phi_m^* \mathbf{x}^f) \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{P}$  es el operador que convolucionar la solución final  $\mathbf{x}^f$  con una gaussiana del mismo FWHM que la PSF (CLEAN *beam*). Este post-procesamiento se justifica en el hecho de que la resolución efectiva de la imagen final debe estar determinada por el tamaño de la PSF.

## 5.4. Reconstrucciones

La Tabla 5.1 muestra el detalle de las reconstrucciones asociadas a cada dataset, independiente de la técnica de síntesis utilizada. En teoría, la máxima resolución observable en cierto conjunto de observaciones depende de la máxima frecuencia espacial medida. Sin embargo, los astrónomos usualmente ajustan la resolución de tal manera que el FWHM de la PSF sea resuelto por 3-5 pixeles en cada eje [50]. Además, el tamaño de las imágenes es determinado de tal manera que no se pierda información del campo de visión asociado a las antenas.

Por otro lado, si bien la cantidad de observaciones en ambos datasets difiere en dos órdenes de magnitud, la tasa de medición efectiva en cada caso es bastante similar y menor al 5%. Dicha tasa es consecuencia del gridding realizado y se computa como la razón entre la cantidad de pixeles con observaciones y el total de pixeles.

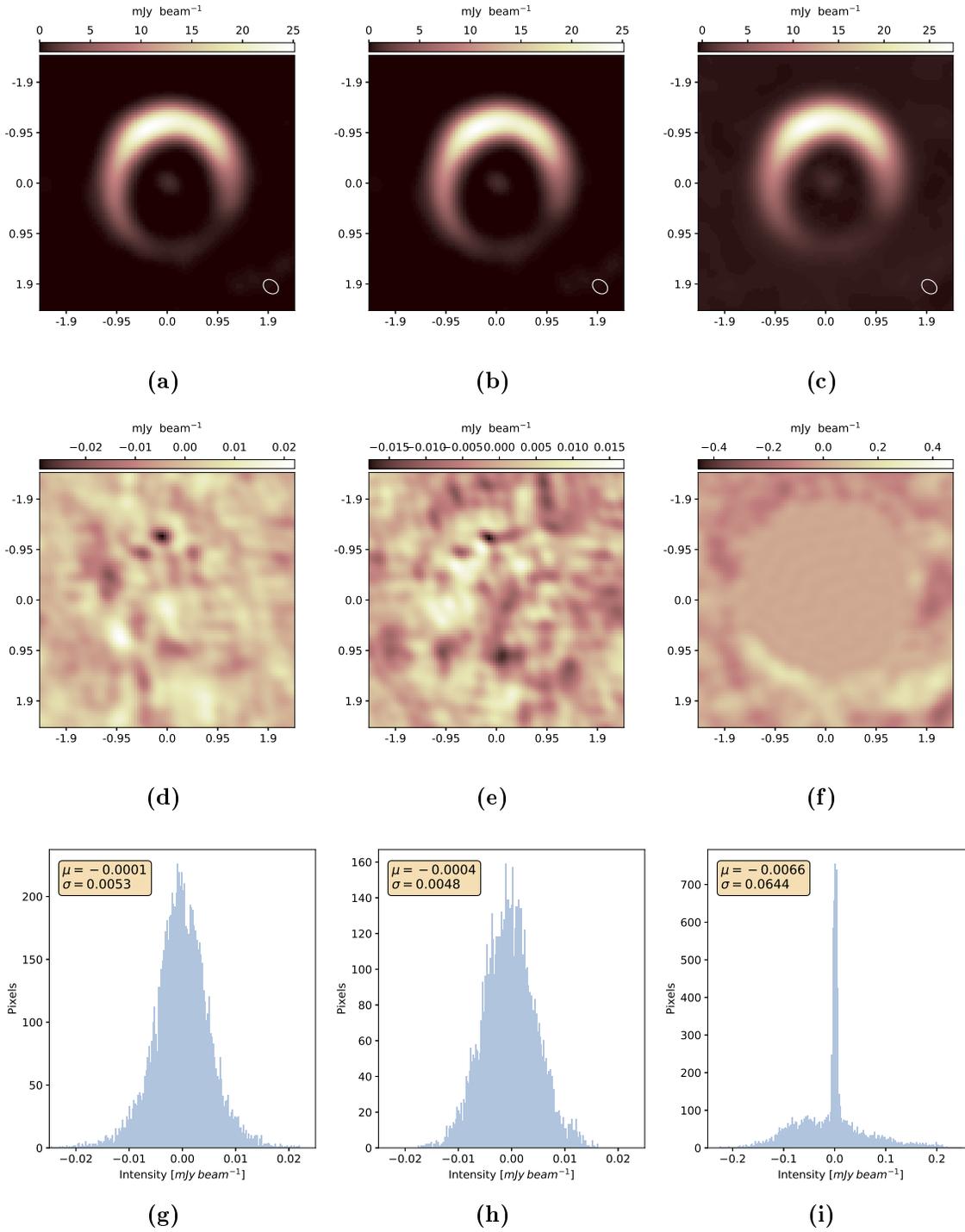
Las Figuras 5.2 y 5.3 evalúan el desempeño de los distintos métodos de reconstrucción sobre los datasets de HD142527 y HLTau, respectivamente. Las columnas indexan el método de síntesis utilizado: CS en setting redundante con diccionario propuesto (izquierda), CS en setting redundante con diccionario SARA (centro) y CLEAN (derecha). Por su parte, cada fila indexa una figura de mérito distinta: reconstrucción en el dominio del pixel (arriba), imagen residuo (centro) e histograma de la imagen residuo (abajo). Se entiende que una reconstrucción de buena calidad no debe presentar estructuras de señal en su imagen residuo y su histograma asociado debe estar dominado por ruido Gaussiano [43].

Por su parte, las reconstrucciones mostradas en la primera fila corresponden, tanto para CS como para CLEAN, a sus versiones restauradas de acuerdo a la ecuación (5.3), con el fin de poder realizar una comparación justa entre ambos métodos. La generación del CLEAN beam requirió la estimación del FWHM asociado a la PSF. Para ello, se realizó el ajuste de una elipse sobre la curva de nivel ubicada en la mitad del valor máximo de la PSF, bajo un enfoque Least Squares [28] (detalles en Figura F.3). Los tamaños estimados del beam fueron  $0.312'' \times 0.239''$  para HD142527 y  $0.029'' \times 0.017''$  para HLTau.

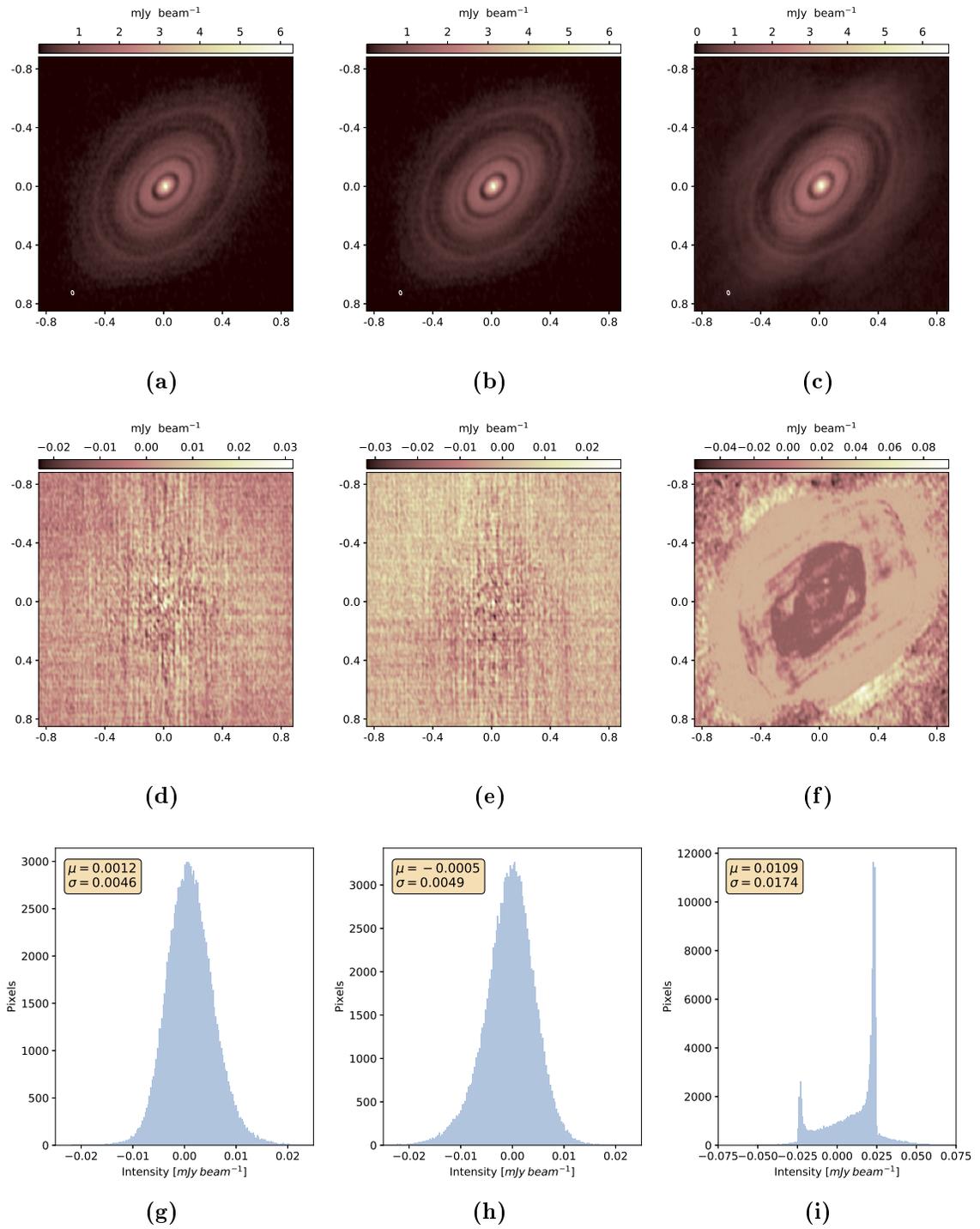
Por último, se informan los tiempos de cómputo asociados a las reconstrucciones mediante CS. Para el dataset HD142527, la síntesis con el diccionario propuesto tomó 36.91 [s], mientras que con el diccionario SARA tomó 94.04 [s]. Para el dataset HLTau, la síntesis con el diccionario propuesto tomó 17.84 [min], mientras que con el diccionario SARA tomó 164.36 [min]. Las reconstrucciones CLEAN no fueron marcadas con un tiempo de cómputo pues el software CASA fue utilizado de manera manual.

**Tabla 5.1:** Detalle de los datasets y reconstrucciones obtenidas.

Source	Measurements	Weighting	Eff. measurement ratio	Image size	Pixel Size
HD142527	72 360	Natural	0.0323	512×512	0.05'' × 0.05''
HLTau	6 392 752	Natural	0.0488	2048×2048	0.005'' × 0.005''



**Figura 5.2:** Comparación entre CS con diccionario propuesto (izquierda), CS con diccionario SARA (centro) y método CLEAN (derecha) para la recuperación de HD142527. **De arriba a abajo:** reconstrucción, imagen residuo e histograma del residuo.



**Figura 5.3:** Comparación entre CS con diccionario propuesto (izquierda), CS con diccionario SARA (centro) y método CLEAN (derecha) para la recuperación de HLTau. **De arriba a abajo:** reconstrucción, imagen residuo e histograma del residuo.

## 5.5. Desempeño del método respecto a diccionario SARA

En términos de las reconstrucciones restauradas que se informan en las Figuras 5.2 y 5.3, las soluciones generadas por cada diccionario parecen no distinguirse una de otra. Por ende, resulta necesario establecer diferencias mediante el análisis de las imágenes modelo exhibidas en la Figura F.2. Las síntesis obtenidas para HD142527 y HLTau a partir de datos reales muestran una calidad visual bastante similar a sus respectivas reconstrucciones MEM, utilizadas en este trabajo como imágenes test en los capítulos previos. Ambos diccionarios logran reconstruir la estructura gruesa de ambas fuentes, pero se diferencian sutilmente al observar la estructura fina. Para HD142527, si bien ambos diccionarios recuperan el objeto central, la emisión difusa reconstruida en el disco externo difiere entre un caso y otro. Aun cuando esta diferencia pareciera ser leve, su importancia radica en que dicha emisión es útil para la identificación de los procesos físicos que regulan la formación de planetas en sistemas binarios de estrellas. Para HLTau, el diccionario SARA parece recuperar de manera más suave las elipses concéntricas que caracterizan a la fuente. A pesar de ello, las reconstrucciones generadas por ambos diccionarios son bastante similares, lo cual se ratifica en los residuos asociados, en ambos casos siendo dominados por ruido Gaussiano tal como se aprecia en los histogramas de las Figuras 5.2 y 5.3. Esta similitud en la calidad de las reconstrucciones es consistente con el análisis desprendido del escenario simulado, donde la principal diferencia entre ambos diccionarios radica en el tiempo de ejecución requerido por cada uno.

## 5.6. Desempeño del método respecto a CLEAN

La comparación con el método CLEAN se basa exclusivamente en los resultados obtenidos a partir de datos reales, expuestos en las Figuras 5.2 y 5.3. En ambos casos, la reconstrucción generada por el diccionario propuesto es superior a CLEAN en términos de calidad visual. Para HD142527, la síntesis CLEAN logra recuperar la estructura gruesa de la fuente y las zonas de alta intensidad en el disco externo, pero no logra detectar claramente el objeto central, el cual posee una intensidad confundible con el ruido de fondo que aún conserva dicha solución. La comparación de los residuos confirma la diferencia entre ambos métodos.

Para HLTau, la estructura de anillos concéntricos y el objeto central son recuperados exitosamente por el método CLEAN. Sin embargo, dicha solución presenta un ruido de fondo mayor que el asociado a las reconstrucciones mediante CS. Además, la imagen CLEAN comienza a presentar artefactos al alejarse del centro, tal como se puede observar en la imagen residuo asociada. La diferencia entre la calidad de la reconstrucción generada por el diccionario propuesto y CLEAN se manifiesta notoriamente en el histograma residual, donde para este último se observa un ruido claramente no Gaussiano.

Por último, es importante recalcar la suboptimalidad de las reconstrucciones CLEAN evaluadas en este trabajo, puesto que carecen de la expertiz astronómica necesaria en la utilización del software CASA. Si bien esto significa que el análisis anterior pierde su carácter conclusivo, las reconstrucciones mediante CS aquí mostradas son competitivas visualmente con aquellas publicadas para HD142527 [18] y HLTau [7] usando el método CLEAN.

## 5.7. Conservación de flujo en reconstrucciones CS

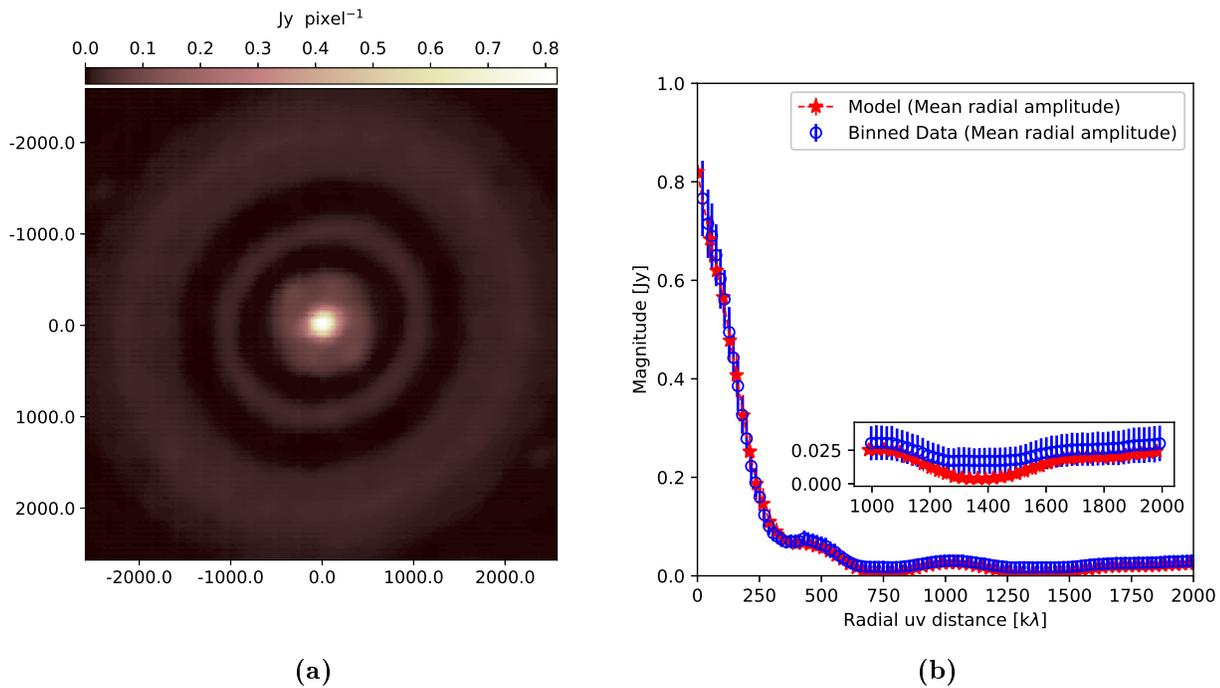
Los resultados anteriormente expuestos dan cuenta, en términos visuales, del buen ajuste realizado mediante Compressive Sensing al tratar con observaciones reales provenientes de un arreglo de antenas. Sin embargo, es necesario verificar la consistencia de dichas soluciones con la magnitud de los datos observados, los cuales miden densidad de flujo expresada en Janskys. Para ello, se asume un modelo de elipses concéntricas para HLTau, presentes tanto en el dominio del pixel como en el dominio de Fourier [34], y se propone una transformación tal que la imagen final posea una estructura de circunferencias concéntricas que permita computar radialmente una intensidad promedio por anillo. La idea es aplicar esta transformación sobre las Visibilidades reconstruidas y observadas, para luego poder comparar sus perfiles de intensidad promedio.

La implementación de la metodología recién descrita requirió el ajuste de un modelo elíptico sobre la magnitud del mapa de Visibilidades reconstruido. Con el objetivo de obtener puntos que caractericen dicha estructura elíptica, se computaron los bordes del mapa de Visibilidades mediante el algoritmo Canny [12]. A partir de la imagen resultante es posible identificar 5 contornos visualmente bien definidos, sobre los cuales se realiza de manera independiente un ajuste elíptico bajo un enfoque Least Squares [28]. La Figura F.4 muestra los resultados parciales de dicha metodología, mientras que la Tabla F.1 resume los parámetros asociados a cada una de las 5 elipses ajustadas. El ángulo informado corresponde a la inclinación del semieje mayor respecto al norte en sentido anti-horario. Mediante inspección visual se determinó que los 3 contornos más externos caracterizan apropiadamente la estructura elíptica del resto de la imagen. De hecho, los parámetros asociados a sus elipses (contornos 3,4 y 5 en Tabla F.1) presentan valores similares y se diferencian de aquellos obtenidos para los 2 contornos internos.

Finalmente, los parámetros de la elipse ajustada para el contorno 5 son utilizados para realizar la transformación sobre el mapa de Visibilidades reconstruido. Específicamente, dicha imagen es rotada de acuerdo al ángulo de inclinación calculado, y estirada de acuerdo a la razón existente entre los semiejes de la elipse ajustada. La Figura F.5 muestra los resultados parciales para cada una de estas etapas, a partir de la imagen inicial correspondiente a la magnitud del mapa de Visibilidades sintetizado mediante CS.

El panel (a) de la Figura 5.4 muestra el resultado de la transformación propuesta sobre el mapa de Visibilidades reconstruido. La imagen ilustra claramente el patrón de anillos circulares concéntricos al que se apuntó con el desarrollo de la metodología descrita en esta sección. Por su parte, el panel (b) contrasta la intensidad radial promedio de las Visibilidades reconstruidas y observadas. Éstas últimas fueron igualmente transformadas y luego discretizadas con un tamaño de bin igual a  $17.75 [K\lambda]$ . En dicho gráfico se puede observar que el modelo respeta la tendencia seguida por las observaciones en todo el rango analizado. Además, se aprecia que el nivel de intensidad promedio de las Visibilidades modelo es sistemáticamente menor que en las observaciones. Esto se justifica en la hipótesis de ruido en las mediciones adoptada como restricción en el problema de optimización resuelto, el cual se expresa matemáticamente en la ecuación (2.17). Por último, es importante notar que tanto en la reconstrucción como en los datos es posible identificar 4 máximos locales (en  $0, \sim 400, \sim 1000, \sim 2000 [K\lambda]$ ) correspondientes a los anillos de alta amplitud observados en el panel

(a), coincidiendo con lo exhibido en [55].



**Figura 5.4:** Resultados para verificar la conservación de flujo en la reconstrucción de HLTau mediante CS. **Izquierda:** Rotación y estiramiento sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas. **Derecha:** Intensidad radial promedio computada sobre las Visibilidades transformadas.

# Capítulo 6

## Conclusión

En este trabajo se evidencia el compromiso existente entre compresibilidad y tamaño de diccionario para la metodología de selección propuesta. En otras palabras, existe una cantidad óptima de bases concatenadas mediante dicha estrategia, la cual induce una proyección de análisis cuya compresibilidad alcanza un punto de saturación igualmente reflejado en el desempeño de reconstrucción. El costo computacional de seguir concatenando bases no justifica la ganancia marginal alcanzada, o incluso pérdida en algunos casos, en términos del SNR.

En relación al escenario simulado, los diccionarios seleccionados para cada imagen test promueven un error relativo promedio tan bueno como el asociado al diccionario SARA, pero con un tiempo de cómputo dramáticamente menor. Esta diferencia en costo computacional se mantiene en el escenario con datos reales, donde las reconstrucciones de ambos diccionarios muestran una calidad visual bastante similar, tal como se aprecia en sus residuos. Esto demuestra que la concatenación de bases en el diccionario SARA no es óptima respecto a la relación entre calidad de reconstrucción y carga computacional.

A pesar de lo anterior, ambos diccionarios generan reconstrucciones claramente superiores a las obtenidas por CLEAN a partir de observaciones reales, las cuales presentan notorios artefactos en la zona de interés. Esta diferencia en desempeño se reduce considerablemente cuando la comparación se realiza con reconstrucciones CLEAN obtenidas por un astrónomo. Los resultados aquí expuestos se suman a los obtenidos en este mismo ámbito durante los últimos años, dando cuenta de la competitividad respecto a CLEAN de los métodos de minimización  $l_1$  incorporados en el framework de CS.

En términos de la contribución de este trabajo, es importante notar que los resultados y análisis obtenidos en relación al diccionario óptimo pueden ser utilizados en algoritmos  $l_1$ -análisis que incorporen más restricciones al problema, convergiendo así a un escenario cada vez más realista. Condiciones como positividad de la señal o correcciones al modelo de observación no fueron aquí incorporadas pues no corresponden al foco del trabajo.

Por último, se mencionan algunas extensiones y mejoras que forman parte de un potencial trabajo futuro. Si bien el método propuesto fue evaluado sobre imágenes de distintas

características estructurales, resulta necesario sistematizar el análisis para lograr categorizar el diccionario óptimo en función de la naturaleza de la señal. Por otro lado, sería interesante refinar la metodología de selección desarrollando un algoritmo análogo en el que en cada iteración se agregue un átomo o elemento base, en vez de concatenar una base ortonormal completa. En esta misma línea, resulta un desafío importante la incorporación de resultados teóricos asociados con muestreo en función de la estructura local promovida por los diccionarios, en vista de las garantías teóricas desarrolladas recientemente en torno a CS.

# Capítulo 7

## Bibliografía

- [1] Ben Adcock, Anders C Hansen, Clarice Poon, and Bogdan Roman. Breaking the coherence barrier: A new theory for compressed sensing. In *Forum of Mathematics, Sigma*, volume 5. Cambridge University Press, 2017.
- [2] Nathaël Alibaud, Pierre Maréchal, and Yaowaluk Saesor. A variational approach to the inversion of truncated fourier operators. *Inverse Problems*, 25(4):045002, 2009.
- [3] Afonso S Bandeira, Edgar Dobriban, Dustin G Mixon, and William F Sawin. Certifying the restricted isometry property is hard. *IEEE transactions on information theory*, 59(6):3448–3450, 2013.
- [4] Stephen Becker, Jérôme Bobin, and Emmanuel J Candès. NESTA: A fast and accurate first-order method for sparse recovery. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1):1–39, 2011.
- [5] S Bhatnagar, TJ Cornwell, K Golap, and Juan M Uson. Correcting direction-dependent gains in the deconvolution of radio interferometric images. *Astronomy & Astrophysics*, 487(1):419–429, 2008.
- [6] Dongjie Bi, Yongle Xie, Xifeng Li, and Yahong Rosa Zheng. A sparsity basis selection method for compressed sensing. *IEEE Signal Processing Letters*, 22(10):1738–1742, 2015.
- [7] CL Brogan, LM Pérez, TR Hunter, WRF Dent, AS Hales, RE Hills, S Corder, EB Formalont, C Vlahakis, Y Asaki, et al. The 2014 alma long baseline campaign: first results from high angular resolution observations toward the hl tau region. *The Astrophysical Journal Letters*, 808(1):L3, 2015.
- [8] Emmanuel J Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(9-10):589–592, 2008.
- [9] Emmanuel J Candès, Yonina C Eldar, Deanna Needell, and Paige Randall. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 31(1):59–73, 2011.

- [10] Emmanuel J Candès, Justin Romberg, and Terence Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on information theory*, 52(2):489–509, 2006.
- [11] Emmanuel J Candès, Justin K Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on pure and applied mathematics*, 59(8):1207–1223, 2006.
- [12] John Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, (6):679–698, 1986.
- [13] Miguel Cárcamo, Pablo E Román, Simon Casassus, Victor Moral, and Fernando R Rannou. Multi-gpu maximum entropy image synthesis for radio astronomy. *Astronomy and computing*, 22:16–27, 2018.
- [14] Rafael E Carrillo, Jason D McEwen, Dimitri Van De Ville, Jean-Philippe Thiran, and Yves Wiaux. Sparsity averaging for compressive imaging. *IEEE Signal Processing Letters*, 20(6):591–594, 2013.
- [15] Rafael E Carrillo, Jason D McEwen, and Yves Wiaux. Purify: a new approach to radio-interferometric imaging. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(4):3591–3604, 2014.
- [16] Rafael E Carrillo, JD McEwen, and Yves Wiaux. Sparsity averaging reweighted analysis (sara): a novel algorithm for radio-interferometric imaging. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(2):1223–1234, 2012.
- [17] Simon Casassus, Sebastian Marino, Sebastian Pérez, Pablo Roman, Alex Dunhill, PJ Armitage, Jorge Cuadra, Al Wootten, Gerrit van der Plas, Lucas Cieza, et al. Accretion kinematics through the warped transition disk in hd 142527 from resolved co (6–5) observations. *The Astrophysical Journal*, 811(2):92, 2015.
- [18] Simon Casassus, Chris M Wright, Sebastian Marino, Sarah T Maddison, Al Wootten, Pablo Roman, Sebastian Pérez, Paola Pinilla, Mark Wyatt, Victor Moral, et al. A compact concentration of large grains in the hd 142527 protoplanetary dust trap. *The Astrophysical Journal*, 812(2):126, 2015.
- [19] Volkan Cevher and Andreas Krause. Greedy dictionary selection for sparse representation. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 5(5):979–988, 2011.
- [20] BG Clark. An efficient implementation of the algorithm ‘clean’. *Astronomy and Astrophysics*, 89:377, 1980.
- [21] Tim J Cornwell, Kumar Golap, and Sanjay Bhatnagar. The noncoplanar baselines effect in radio interferometry: The w-projection algorithm. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2(5):647–657, 2008.
- [22] Arwa Dabbech, Laura Wolz, Luke Pratley, Jason D McEwen, and Yves Wiaux. The w-effect in interferometric imaging: from a fast sparse measurement operator to super-

- resolution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471(4):4300–4313, 2017.
- [23] David L Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (non-orthogonal) dictionaries via  $l_1$  minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 100(5):2197–2202, 2003.
- [24] David L Donoho et al. Compressed sensing. *IEEE Transactions on information theory*, 52(4):1289–1306, 2006.
- [25] Michael Elad and Alfred M Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(9):2558–2567, 2002.
- [26] Michael Elad, Peyman Milanfar, and Ron Rubinstein. Analysis versus synthesis in signal priors. *Inverse problems*, 23(3):947, 2007.
- [27] Clara Fannjiang. Optimal arrays for compressed sensing in snapshot-mode radio interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, 559:A73, 2013.
- [28] Andrew Fitzgibbon, Maurizio Pilu, and Robert B Fisher. Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 21(5):476–480, 1999.
- [29] Simon Foucart and Holger Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*, volume 1. Birkhäuser Basel, 2013.
- [30] Hugh Garsden, JN Girard, Jean-Luc Starck, Stéphane Corbel, C Tasse, A Woiselle, JP McKean, Alexander S Van Amesfoort, J Anderson, IM Avruch, et al. Lofar sparse image reconstruction. *Astronomy & astrophysics*, 575:A90, 2015.
- [31] Dongdong Ge, Xiaoye Jiang, and Yinyu Ye. A note on the complexity of  $l_p$  minimization. *Mathematical programming*, 129(2):285–299, 2011.
- [32] JA Högbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 15:417, 1974.
- [33] Felix Krahmer, Deanna Needell, and Rachel Ward. Compressive sensing with redundant dictionaries and structured measurements. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(6):4606–4629, 2015.
- [34] OP Lay, JE Carlstrom, and RE Hills. Constraints on the  $\tau$  protostellar disk from millimeter-and submillimeter-wave interferometry. *The Astrophysical Journal*, 489(2):917, 1997.
- [35] Feng Li, Tim J Cornwell, and Frank de Hoog. The application of compressive sampling to radio astronomy-i. deconvolution. *Astronomy & Astrophysics*, 528:A31, 2011.
- [36] KA Marsh and JM Richardson. The objective function implicit in the clean algorithm. *Astronomy and Astrophysics*, 182:174–178, 1987.

- [37] JD McEwen and Yves Wiaux. Compressed sensing for wide-field radio interferometric imaging. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 413(2):1318–1332, 2011.
- [38] Yu Nesterov. Smooth minimization of non-smooth functions. *Mathematical programming*, 103(1):127–152, 2005.
- [39] Yurii Nesterov. A method for unconstrained convex minimization problem with the rate of convergence  $\mathcal{O}(1/k^2)$ . In *Doklady AN USSR*, volume 269, pages 543–547, 1983.
- [40] Alexandru Onose, Rafael E Carrillo, Audrey Repetti, Jason D McEwen, Jean-Philippe Thiran, Jean-Christophe Pesquet, and Yves Wiaux. Scalable splitting algorithms for big-data interferometric imaging in the ska era. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462(4):4314–4335, 2016.
- [41] Gabriel Peyre. Best basis compressed sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 58(5):2613–2622, 2010.
- [42] Clarice Poon. Structure dependent sampling in compressed sensing: theoretical guarantees for tight frames. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 42(3):402–451, 2017.
- [43] Luke Pratley, Jason D McEwen, Mayeul d’Avezac, Rafael E Carrillo, Alexandru Onose, and Yves Wiaux. Robust sparse image reconstruction of radio interferometric observations with purify. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473(1):1038–1058, 2017.
- [44] FR Schwab. Relaxing the isoplanatism assumption in self-calibration; applications to low-frequency radio interferometry. *The Astronomical Journal*, 89:1076–1081, 1984.
- [45] UJ Schwarz. Mathematical-statistical description of the iterative beam removing technique (method clean). *Astronomy and Astrophysics*, 65:345, 1978.
- [46] Yanfei Shen, Jintao Li, Zhenmin Zhu, Wei Cao, and Yun Song. Image reconstruction algorithm from compressed sensing measurements by dictionary learning. *Neurocomputing*, 151:1153–1162, 2015.
- [47] Younghak Shin, Seungchan Lee, Junho Lee, and Heung-No Lee. Sparse representation-based classification scheme for motor imagery-based brain–computer interface systems. *Journal of neural engineering*, 9(5):056002, 2012.
- [48] Jean-Luc Starck and Jérôme Bobin. Astronomical data analysis and sparsity: From wavelets to compressed sensing. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):1021–1030, 2009.
- [49] Greg B Taylor, Chris Luke Carilli, and Richard A Perley. Synthesis imaging in radio astronomy ii. In *Synthesis Imaging in Radio Astronomy II*, volume 180, 1999.
- [50] A Richard Thompson, James M Moran, and George W Swenson Jr. *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. John Wiley & Sons, 2008.

- [51] Stephan Wenger, Marcus Magnor, Y Pihlström, S Bhatnagar, and U Rau. Sparseri: A compressed sensing framework for aperture synthesis imaging in radio astronomy. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 122(897):1367, 2010.
- [52] Yves Wiaux, Laurent Jacques, Gilles Puy, Anna MM Scaife, and Pierre Vanderghenst. Compressed sensing imaging techniques for radio interferometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 395(3):1733–1742, 2009.
- [53] Yves Wiaux, Gilles Puy, Yannick Boursier, and Pierre Vanderghenst. Spread spectrum for imaging techniques in radio interferometry. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400(2):1029–1038, 2009.
- [54] Laura Wolz, Jason D McEwen, FB Abdalla, Rafael E Carrillo, and Yves Wiaux. Revisiting the spread spectrum effect in radio interferometric imaging: a sparse variant of the w-projection algorithm. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436(3):1993–2003, 2013.
- [55] Ke Zhang, Edwin A Bergin, Geoffrey A Blake, L Ilseore Cleeves, Michiel Hogerheijde, Vachail Salinas, and Kamber R Schwarz. On the commonality of 10–30 au sized axisymmetric dust structures in protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal Letters*, 818(1):L16, 2016.

# Anexos

# Anexo A

## Física del problema de síntesis en interferometría

### A.1. Interferometría: escenario general

Interferometría consiste en una técnica utilizada en astronomía para mapear regiones de la esfera celestial que emiten radiación en cierta banda de frecuencia. En otras palabras, es una herramienta que permite generar imágenes de fuentes energéticas en el espacio. Para ello, un arreglo de  $N_a$  antenas es ubicado en el terreno, tal como se aprecia en la Figura A.1. Todas las antenas apuntan en una misma dirección, hacia un punto particular de la esfera celestial conocido como centro de fase o *phase reference position* y que corresponde al centro de la imagen que se desea obtener. La extensión angular de dicho mapa es denominada Campo de visión o *Field of View* y es función del diámetro de los platos. Además, todas las antenas poseen una respuesta en frecuencia que filtra la banda de interés  $\Delta\nu$  y un patrón de radiación característico.

En relación al proceso de observación, cada par de antenas promedia el producto de las señales captadas sobre un período de tiempo breve  $2T$ , llevando a cabo una correlación entre las ondas recibidas. Dicho cómputo entrega el valor de la transformada de Fourier de la señal de interés en una frecuencia espacial particular, determinada por el vector distancia que separa a las antenas y que se conoce como *baseline*. De esta manera, la cantidad máxima de frecuencias espaciales conocidas simultáneamente por un arreglo de  $N_a$  antenas es  $M_{N_a} = N_a \cdot (N_a - 1)$ . Este procedimiento se conoce como *snapshot*, pues es análogo al hecho de tomar una fotografía de la fuente en cierto instante de tiempo. Por otro lado, dado que las mediciones se obtienen en milésimas de segundo, resulta interesante analizar la posibilidad de realizar observaciones consecutivas, cada cierto período de tiempo entre una y otra. Dado que la rotación de la Tierra cambia la dirección relativa de las antenas respecto a la fuente, éstas deben ir redireccionándose en función del movimiento terrestre para siempre apuntar hacia el objeto de interés. Este procedimiento se puede entender como una ráfaga de fotografías, correspondiente a la colección de varias snapshots.

A continuación, se muestra la expresión analítica de la salida del correlador para el caso

de dos antenas y una fuente puntual, con sus supuestos correspondientes. Luego, se extiende el resultado para una fuente extendida en el caso general de baselines tridimensionales y su simplificación a dos dimensiones. La teoría expuesta en este anexo se basa en [50].



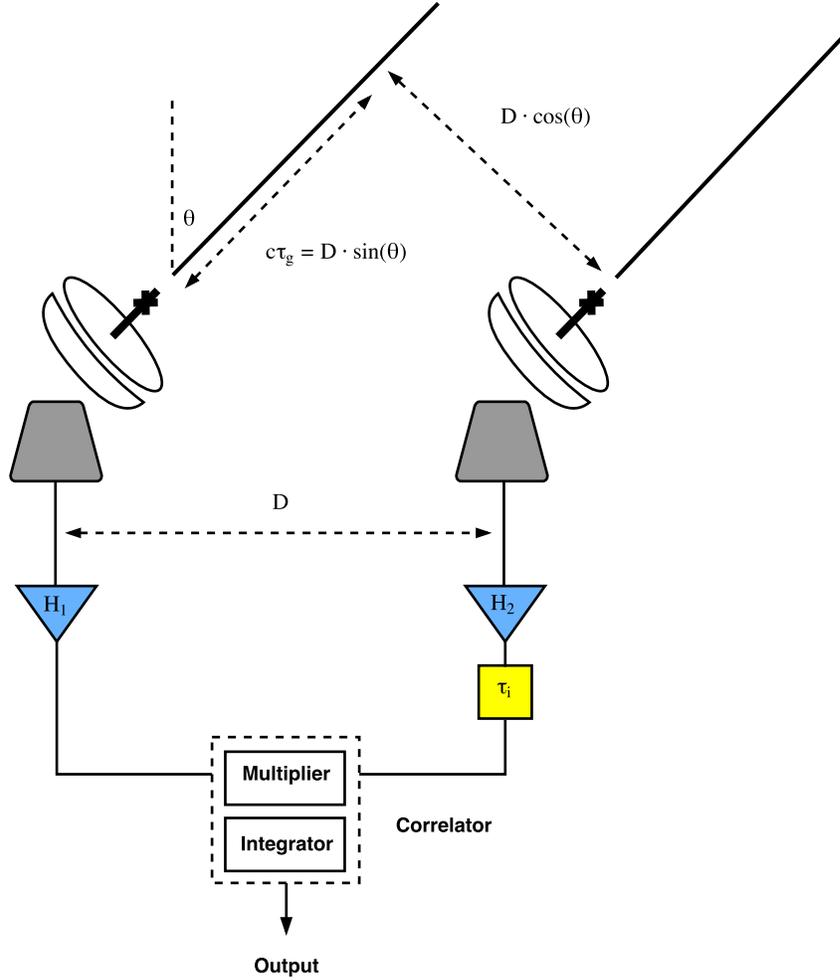
**Figura A.1:** Arreglo de antenas en observatorio ALMA, región de Atacama, Chile. Fuente: <http://www.eso.org/public/teles-instr/alma/>.

## A.2. Respuesta frente a una fuente puntual

**Fuente puntual en posición nominal.** El escenario más básico consiste en tener dos antenas separadas por una distancia  $D$ , apuntando hacia una fuente puntual en una dirección  $\theta$ , como se observa en la Figura A.2. Cada antena recibe una señal (la señal izquierda llega  $\tau_g$  segundos después que aquella de la derecha), la amplifica (para aumentar el SNR) y la pasa al correlador. Además, a la señal derecha se le aplica un retardo instrumental  $\tau_i$  para cumplir ciertas condiciones que permiten simplificar la solución analítica<sup>1</sup>. La respuesta en frecuencia de la antena se considera un filtro perfecto para la frecuencia de interés  $\nu$ , aunque en la práctica no ocurra así. Además, la dirección en la que apunta el par de antenas pertenece al plano formado por las antenas y la fuente. Esto simplifica el cálculo de la proyección del baseline sobre el plano perpendicular a la dirección *pointing*.

---

<sup>1</sup>Más detalle en capítulo 6 de [50].



**Figura A.2:** Escenario básico en Interferometría: dos antenas separadas una distancia  $D$ , apuntando hacia una fuente en la esfera celestial. El par de antenas realiza la correlación de las señales captadas.

La salida del correlador, como función del retardo geométrico  $\tau_g$ , se expresa matemáticamente en la ecuación (A.1):

$$r(\tau_g) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t)v(t - \tau_g) dt \quad (\text{A.1})$$

Además, la distancia a la que se ubica la fuente es lo suficientemente grande como para que el frente de onda sea plano en el lugar de recepción. Luego, de acuerdo a la solución de la ecuación de una onda plana, la señal que llega a la antena se expresa en la ecuación (A.2), sin considerar los amplificadores y el retardo instrumental, puesto que son constantes conocidas.

$$v(t) = \sin(2\pi\nu t) \quad (\text{A.2})$$

Usando algunas identidades trigonométricas, el producto de las señales captadas se puede expandir como:

$$\begin{aligned} v(t)v(t - \tau_g) &= \sin(2\pi\nu t) \sin(2\pi\nu t - \tau_g) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi\nu\tau_g) - \cos(4\pi\nu t) \cos(2\pi\nu\tau_g) - \sin(4\pi\nu t) \sin(2\pi\nu\tau_g)] \end{aligned}$$

donde, luego de tomar el promedio como se aprecia en la ecuación (A.1), solo el primer término se conserva. El segundo término se desvanece dado que  $T \rightarrow \infty$  (respecto al período de la onda recibida<sup>2</sup>) y el tercero igual pues es la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico. De esta forma, salvo una constante de proporcionalidad, se puede escribir la salida del correlador para una fuente puntual en dirección  $\theta$  como se ve en la ecuación (A.3), donde  $\lambda$  es la longitud de la onda captada. Dicho resultado se conoce como *fringe pattern* y es una señal cosenoidal cuya frecuencia depende de la separación entre las antenas y la dirección pointing.

$$r(D, \theta) = \cos(2\pi\nu\tau_g) = \cos\left(\frac{2\pi D \sin(\theta)}{\lambda}\right) \quad (\text{A.3})$$

**Fuente puntual a  $\Delta\theta$  de posición nominal.** En este caso, la fuente puntual no está en la posición nominal  $\theta_0$  hacia la que apunta el arreglo, sino que se ubica en una posición aledaña angularmente y cuya dirección corresponde a  $\theta_0 - \Delta\theta$ . A continuación, se muestra la derivación de la salida del correlador para este escenario, considerando la respuesta para una fuente puntual ubicada en la posición nominal y que se aprecia en la ecuación (A.3). Notar que se agrega el retardo instrumental  $\tau_i$  al análisis, de modo que el retardo total es  $\tau_g - \tau_i$ .

$$\begin{aligned} r(D, \theta_0, \Delta\theta) &= \cos(2\pi\nu[\tau_g - \tau_i]) \\ &= \cos\left(2\pi\nu\left[\frac{D}{c}\sin(\theta_0 - \Delta\theta) - \tau_i\right]\right) \\ &= \cos\left(2\pi\nu\left[\frac{D}{c}\sin(\theta_0)\cos(\Delta\theta) - \frac{D}{c}\cos(\theta_0)\sin(\Delta\theta) - \tau_i\right]\right) \\ &\approx \cos\left(2\pi\nu\left[\frac{D}{c}\sin(\theta_0) - \frac{D}{c}\cos(\theta_0)\sin(\Delta\theta) - \tau_i\right]\right) \end{aligned}$$

La última expresión resulta de una aproximación de ángulo pequeño, pues efectivamente éste es uno de los supuestos para  $\Delta\theta$ . Por otro lado, si se establece un retardo instrumental  $\tau_i$  igual al retardo geométrico en el centro de fase  $\tau_g(\theta_0) = \frac{D}{c}\sin(\theta_0)$ , entonces:

$$\begin{aligned} r(D, \theta_0, \Delta\theta) &\approx \cos\left(2\pi\nu\left[\frac{D}{c}\sin(\theta_0) - \frac{D}{c}\cos(\theta_0)\sin(\Delta\theta) - \frac{D}{c}\sin(\theta_0)\right]\right) \\ &= \cos\left(2\pi\nu\left[-\frac{D}{c}\cos(\theta_0)\sin(\Delta\theta)\right]\right) \\ &= \cos\left(2\pi\frac{D}{\lambda}\cos(\theta_0)\sin(\Delta\theta)\right) \end{aligned}$$

Finalmente, se introduce la cantidad  $u = \frac{D}{\lambda}\cos(\theta_0)$  correspondiente a la proyección del baseline sobre el plano perpendicular al vector pointing. Además, se denota como  $l = \sin(\theta)$  a la dirección coseno<sup>3</sup> del vector pointing sobre la dirección  $\hat{\mathbf{u}}$  y cuyo valor indica la distancia angular entre el centro de fase y la posición en la que se encuentra la fuente puntual. La razón

<sup>2</sup>Esto se cumple si  $\nu^{-1} \ll 2T$ , lo que significa una señal  $v(t)$  con muchos ciclos durante  $2T$ .

<sup>3</sup>La dirección coseno de un vector  $\mathbf{v}_1$  sobre otro  $\mathbf{v}_2$  es el coseno del ángulo entre ellos. Notar que el resultado es un escalar, no un vector.

de usar  $\sin(\Delta\theta)$  en vez de  $\Delta\theta$  se basa simplemente en facilitar los cálculos para la derivación del resultado fundamental. Además, para ángulos pequeños la diferencia es despreciable. De esta forma, la respuesta que produce una fuente puntual ubicada en  $\theta_0 - \Delta\theta$  sobre un par de antenas cuyo retardo neto es nulo en el centro de fase, corresponde a:

$$r(l) = \cos(2\pi ul) \quad (\text{A.4})$$

donde solo se ha dejado explícita la dependencia en la posición angular de la fuente puntual respecto al centro del fase.

### A.3. Respuesta frente a una fuente extendida

En este apartado se extienden los resultados previamente encontrados al caso general donde la fuente es espacialmente extendida y el arreglo de antenas apunta en una dirección arbitraria, como se aprecia en la Figura A.3. Respecto a los escenarios ya analizados se producen las siguientes modificaciones.

1. **Posición de la fuente extendida.** El fenómeno de interés se entiende como una sumatoria de fuentes puntuales con posición  $\boldsymbol{\sigma}$ , medida desde el centro de fase, y posición  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma}$  medida desde el origen del sistema de referencia del arreglo de antenas. En relación al escenario de fuente puntual recién visto, la variable de posición unidimensional  $l$  pasa a ser el vector  $\mathbf{s} = (l, m, n)$ .
2. **Baseline proyectado.** La proyección del baseline posee tres componentes, pues  $\hat{\mathbf{s}}_0$  no necesariamente pertenece al plano formado por las antenas (plano de la hoja, en este caso). Dicho vector representa la proyección de  $\mathbf{B}_\lambda$ <sup>4</sup> sobre el plano perpendicular a  $\hat{\mathbf{s}}_0$  y se denota como  $\mathbf{D}_\lambda = (u, v, w)$ , correspondiendo al caso general de la frecuencia espacial  $u$  vista en los casos anteriores.
3. **Amplitud de la fuente extendida.** En este caso, la fuente posee una función que indica la amplitud de ésta, en función de la posición  $\boldsymbol{\sigma}$  relativa al centro de fase. Dicha función se denota por  $I(\boldsymbol{\sigma})$  y se conoce como Intensidad de fuente, cuyas unidades son  $\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ .
4. **Patrón de radiación.** El patrón de radiación de la antena se denota como  $A(\boldsymbol{\sigma})$  y también se mide respecto al centro de fase. Dado que se puede asociar cada fuente puntual en posición  $\boldsymbol{\sigma}$  con una porción de ángulo sólido<sup>5</sup>  $d\Omega$ , la respuesta del correlador para una fuente extendida se puede escribir como:

$$r(\mathbf{D}_\lambda, \mathbf{s}_0, \nu) = \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma}) I(\boldsymbol{\sigma}) \cos[2\pi \mathbf{D}_\lambda \cdot (\mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma})] d\Omega \quad (\text{A.5})$$

5. **Respuesta en frecuencia.** La respuesta de la ecuación (A.5) solo considera una fuente

---

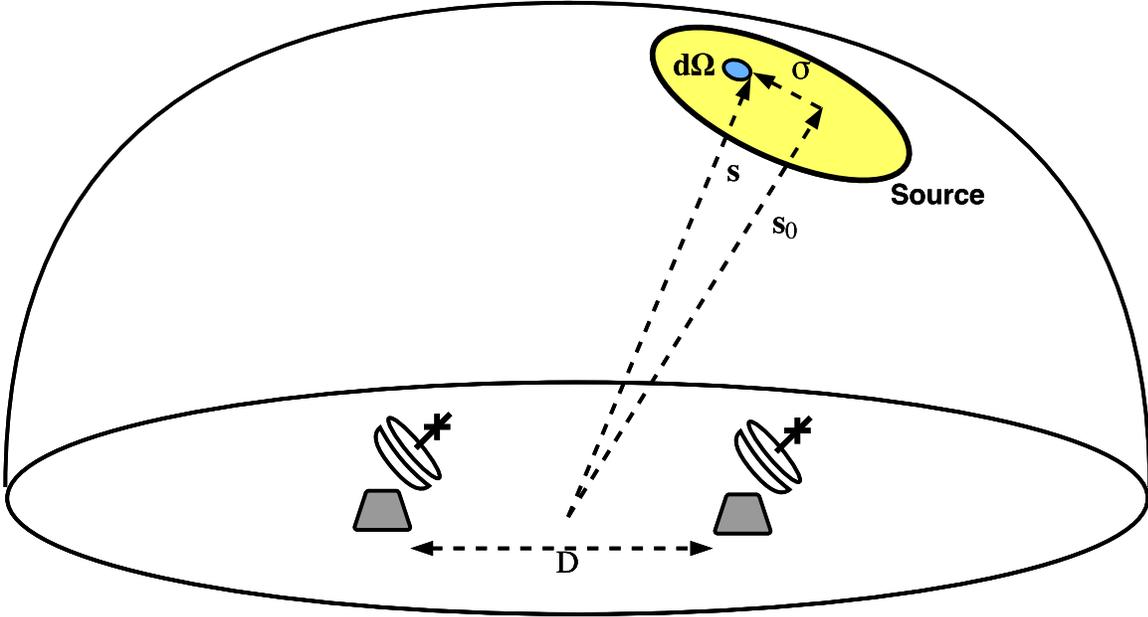
<sup>4</sup>El vector  $\mathbf{B}_\lambda$  corresponde a la diferencia de posiciones entre dos antenas, bajo algún sistema de referencia, y dividido por la longitud de onda de la señal.

<sup>5</sup>Área de esfera unitaria cubierta por un objeto cuando éste es proyectado sobre ella. El ángulo sólido máximo es  $4\pi$ , correspondiente a cubrir la esfera entera.

monocromática. Si este no fuera el caso, se debe considerar la respuesta en frecuencia<sup>6</sup> de la antena  $F_{\Delta\nu}(\nu)$ , cuyo ancho de banda se denota como  $\Delta\nu$  con frecuencia central  $\nu_0$ . Si además la fuente posee densidad espectral uniforme en  $\Delta\nu$  (lo cual se cumple aproximadamente para anchos de banda pequeños), la salida del correlador se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 r(\mathbf{D}_{\lambda_0}, \mathbf{s}_0) &= \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} F_{\Delta\nu}(\nu) \cdot r(\mathbf{D}_\lambda, \mathbf{s}_0, \nu) d\nu \\
 &= \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma}) I(\boldsymbol{\sigma}) \left[ \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} F_{\Delta\nu}(\nu) \cos [2\pi \mathbf{D}_\lambda \cdot (\mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma})] d\nu \right] d\Omega \\
 &= \Delta\nu \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma}) B_{\Delta\nu}(\boldsymbol{\sigma}) I(\boldsymbol{\sigma}) \cos [2\pi \mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot (\mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma})] d\Omega
 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha asumido que  $F_{\Delta\nu}(\nu)$  es uniforme y unitario en  $\Delta\nu$ , resultando la función  $B_{\Delta\nu}(\boldsymbol{\sigma})$  que, en este caso, corresponde a una función  $\text{sinc}(\cdot)$  que se expande a medida que el ancho de banda disminuye.  $B_{\Delta\nu}(\boldsymbol{\sigma})$  se conoce como patrón de ancho de banda (*beamwidth* o *delay pattern*).



**Figura A.3:** Escenario fuente extendida.

Debido a que en general el ancho de banda de la respuesta en frecuencia de la antena es pequeño, se cumple uniformidad en la densidad espectral de la señal y un patrón de ancho de banda aproximadamente constante y unitario en torno al cero (respecto al centro de fase, en otras palabras). Finalmente, la respuesta del correlador frente a una fuente extendida con

<sup>6</sup>Notar que hay dos tipos de frecuencias involucrados en el problema: frecuencias espaciales ( $(l, m, n) \leftrightarrow (u, v, w)$ ) y frecuencias temporales ( $t \leftrightarrow \nu$ ).

frecuencia de interés  $\nu_0$ , con un par de antenas apuntando en dirección  $\mathbf{s}_0$  y con baseline proyectado  $\mathbf{D}_{\lambda_0}$ , se expresa matemáticamente como:

$$r(\mathbf{D}_{\lambda_0}, \mathbf{s}_0) = \Delta\nu \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma}) \cos [2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot (\mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma})] d\Omega \quad (\text{A.6})$$

**Relación entre salida del correlador y Visibilidad.** De la ecuación (A.6) se tiene que la salida del correlador se puede escribir como:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{D}_{\lambda_0}, \mathbf{s}_0) &= \Delta\nu \cos(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0) \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma}) \cos [2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}] d\Omega \\ &\quad - \Delta\nu \sin(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0) \int_{4\pi} A(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma}) \sin [2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}] d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado, se introduce el término  $A_0 = A(\mathbf{0})$  y el patrón de radiación normalizado  $A_N(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{A(\boldsymbol{\sigma})}{A_0}$ . Luego, la ecuación (A.8) muestra la definición de Visibilidad compleja  $\mathcal{V}$  en función de las frecuencias espaciales. Las unidades de  $\mathcal{V}$  son  $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$ .

$$\mathcal{V}(u, v, w) = |\mathcal{V}|e^{j\phi_{\mathcal{V}}} = \int_{4\pi} A_N(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma})e^{-j2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}} d\Omega \quad (\text{A.8})$$

Separando en parte real e imaginaria:

$$\text{Re}[\mathcal{V}] = |\mathcal{V}| \cos(\phi_{\mathcal{V}}) = \int_{4\pi} A_N(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma}) \cos(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Im}[\mathcal{V}] = |\mathcal{V}| \sin(\phi_{\mathcal{V}}) = - \int_{4\pi} A_N(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma}) \sin(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \quad (\text{A.10})$$

Luego, utilizando las ecuaciones (A.9) y (A.10) en (A.7), se tiene que:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{D}_{\lambda_0}, \mathbf{s}_0) &= \Delta\nu \cos(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0)A_0|\mathcal{V}| \cos(\phi_{\mathcal{V}}) + \Delta\nu \sin(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0)A_0|\mathcal{V}| \sin(\phi_{\mathcal{V}}) \\ &= \Delta\nu \cdot A_0 \cdot |\mathcal{V}| [\cos(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0}) \cos(\phi_{\mathcal{V}}) + \sin(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0}) \sin(\phi_{\mathcal{V}})] \\ &= \Delta\nu \cdot A_0 \cdot |\mathcal{V}| \cos(2\pi\mathbf{D}_{\lambda_0} - \phi_{\mathcal{V}}) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

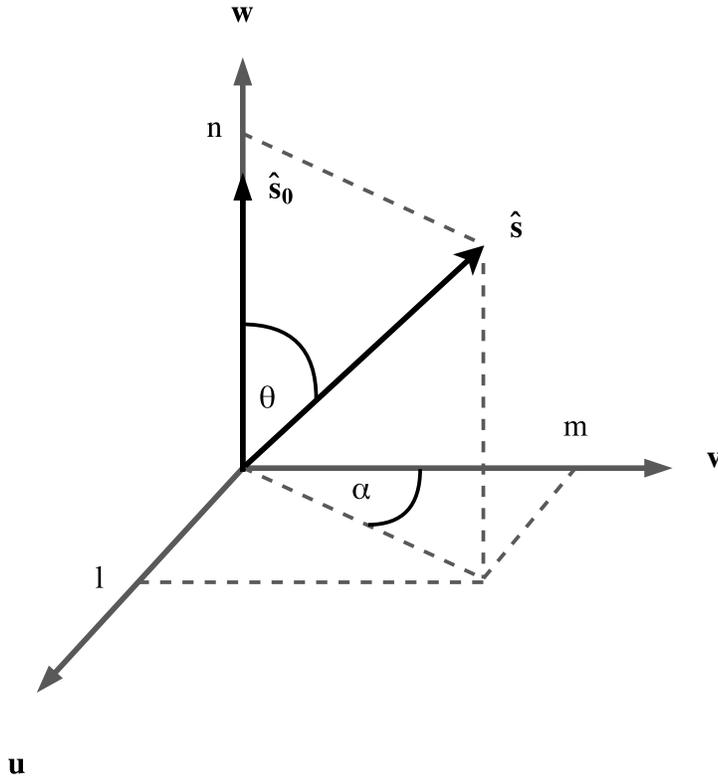
Finalmente, se logra notar que la salida del correlador posee una amplitud proporcional al módulo de la Visibilidad y un desfase igual a la fase de la Visibilidad. Notar que la constante de proporcionalidad es conocida, pues corresponde al producto de parámetros instrumentales o de diseño. El detalle de cómo obtener módulo y fase de  $\mathcal{V}$  a partir de la medición del correlador se encuentra en el capítulo 6 de [50].

## A.4. Simplificación a problema 2D

Hasta aquí, se conoce la expresión matemática que identifica a la Visibilidad y su relación con la salida del correlador. A pesar de poseer una forma similar a una transformada de Fourier sobre el mapa, aparecen términos que impiden establecer dicha relación. A continuación,

se muestran las condiciones que permiten aproximar la Visibilidad como la transformada de Fourier 2D de la imagen de interés.

**Sistema de referencia.** El sistema de referencia utilizado se basa en la dirección de las frecuencias espaciales y corresponde a  $(u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}} + w\hat{\mathbf{w}})$ , donde se indica módulo y dirección unitaria en cada componente. En particular, las direcciones  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{v}}$  yacen en el plano perpendicular a la dirección pointing  $\hat{\mathbf{s}}_0$ ;  $\hat{\mathbf{v}}$  resulta como proyección del polo norte celestial sobre dicho plano, mientras que  $\hat{\mathbf{u}}$  es proyección del este celestial. Por otro lado, la dirección  $\hat{\mathbf{w}}$  coincide con  $\hat{\mathbf{s}}_0$ . La Figura A.4 grafica dicho escenario.



**Figura A.4:** Sistema de coordenadas en el dominio espacial ( $l\hat{\mathbf{u}} + m\hat{\mathbf{v}} + n\hat{\mathbf{w}}$ ) y en el dominio de la frecuencia ( $u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}} + w\hat{\mathbf{w}}$ ). La dirección  $\hat{\mathbf{u}}$  resulta de la proyección del polo norte celestial sobre el plano perpendicular a  $\hat{\mathbf{s}}_0$ , mientras que para  $\hat{\mathbf{v}}$  es análogo pero con el este celestial.

Las coordenadas  $(l\hat{\mathbf{u}} + m\hat{\mathbf{v}} + n\hat{\mathbf{w}})$  asociadas a la posición del fenómeno en la imagen reconstruida poseen la misma dirección que el sistema de frecuencias espaciales ya mencionado. Su módulo corresponde a la dirección coseno del vector  $\hat{\mathbf{s}}$  (posición en el mapa de interés, ver Figura A.4) sobre  $(\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{w}})$ , específicamente:

$$\begin{aligned} l &= \sin(\theta) \sin(\alpha) \\ m &= \sin(\theta) \cos(\alpha) \\ n &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Tal como se desprende de estas expresiones, y dado que  $\theta$  es pequeño,  $l$  y  $m$  resultan ser

proporcionales a la distancia angular respecto al centro de fase, puesto que  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

**Visibilidad como Transformada de Fourier 2D.** Dado el sistema de referencia recién descrito en la Figura A.4, se cumplen las siguientes relaciones expresadas en la ecuación (A.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0 &= w \\ \mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s} &= \left( ul + vm + w\sqrt{1 - l^2 - m^2} \right) \\ d\Omega &= \frac{dl \, dm}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde  $\sqrt{1 - l^2 - m^2}$  corresponde al valor de la dirección coseno  $n$ . Dado que  $\mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{D}_{\lambda_0} \cdot \mathbf{s}_0$ , la Visibilidad compleja de la ecuación (A.8) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(u, v, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_N(l, m) I(l, m) \\ &\cdot \exp \left\{ -j2\pi \left[ ul + vm + w \left( \sqrt{1 - l^2 - m^2} - 1 \right) \right] \right\} \frac{dl \, dm}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La ecuación (A.13) correspondería a una transformada de Fourier 2D si la componente  $w$  fuese nula. Para que esto ocurra, las antenas deben disponerse en un plano perpendicular a la dirección en la que apuntan, lo cual generalmente es inviable. Sin embargo, si  $l$  y  $m$  son lo suficientemente pequeños, entonces el término  $\left( \sqrt{1 - l^2 - m^2} - 1 \right) w \approx -\frac{1}{2} (l^2 + m^2) w$  será despreciable. Fundamentalmente, la aproximación realizada pide un campo de visión pequeño. Considerando lo anterior, la Visibilidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{V}(u, v, w) \approx \mathcal{V}(u, v, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_N(l, m) I(l, m)}{1 - l^2 - m^2} e^{-j2\pi(ul+vm)} \, dl \, dm \quad (\text{A.14})$$

Denotando  $\tilde{I}(l, m) = \frac{A_N(l, m) I(l, m)}{1 - l^2 - m^2}$  y  $\mathcal{V}(u, v) = \mathcal{V}(u, v, 0)$ , la ecuación (A.14) muestra la relación fundamental asociada a la síntesis de imágenes en interferometría, bajo los supuestos ya mencionados.

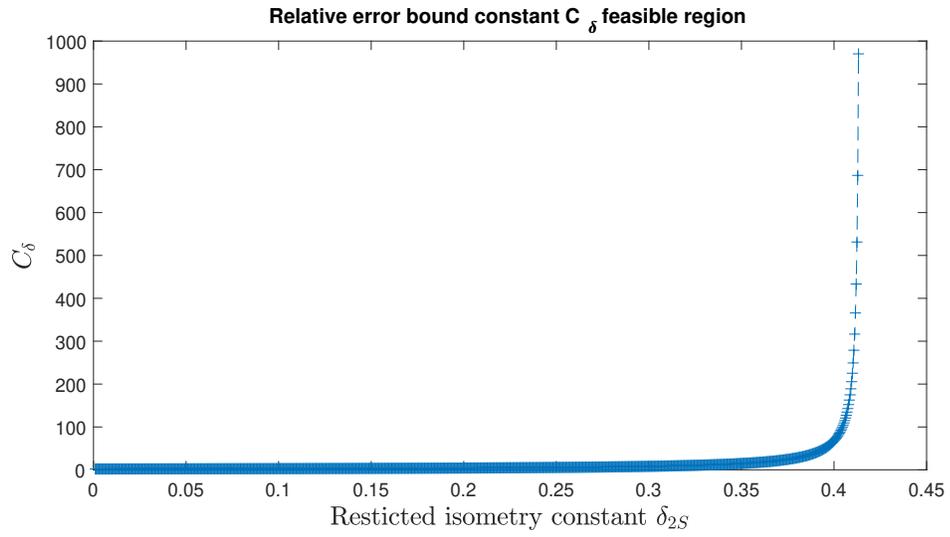
$$\mathcal{V}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(l, m) e^{-j2\pi(ul+vm)} \, dl \, dm = \mathcal{F} \left[ \tilde{I}(l, m) \right] \quad (\text{A.15})$$

La Visibilidad, función que se debe estimar a partir de las observaciones captadas por el arreglo de antenas, corresponde a la transformada de Fourier bidimensional del mapa de intensidad que se desea obtener.

# Anexo B

## Región factible inducida por constante de isometría

Para poder definir el régimen de interés asociado al error máximo tolerable, se debe recordar que la garantía teórica del Teorema 2.4 permite acotar el error relativo de reconstrucción por el término  $C_\delta \cdot \xi$ . Dado que la constante de isometría  $\delta$  con la que cierta matriz de medición satisface RIP depende exclusivamente de dicha matriz, tanto la constante  $C_\delta$  como la cota sobre el error relativo  $C_\delta \cdot \xi$  varían de un caso a otro. Sin embargo, al estudiar  $C_\delta$  como una función en la región  $\delta \in [0, \sqrt{2} - 1)$ , se observa que tal variación no es tan significativa en la mayor parte de esta región. Específicamente, se puede demostrar que  $C_\delta$  es no decreciente con  $\delta$  y toma valores en el rango  $C_\delta \in [2, \infty)$ , presentando un crecimiento bastante lento desde su valor mínimo hasta diverger rápidamente cuando la constante isométrica tiende a  $\delta^* = \sqrt{2} - 1$ , tal como se aprecia en la Figura B.1. De hecho, cerca del 77 % de las constantes factibles se agrupan en el intervalo  $C_\delta \in [2, 10]$ . Más aún, aproximadamente el 97 % de las constantes factibles se agrupan en el intervalo  $C_\delta \in [2, 100]$ , aumentando en solo 1 orden de magnitud. Por otro lado, luego de observar imágenes sintetizadas mediante CS se pudo notar que para un error relativo menor o igual a  $10^{-2}$  las reconstrucciones son aceptables desde un punto de vista astronómico. Luego, considerando una constante  $C_\delta = 10$ , se requiere un error máximo tolerable  $\xi \leq 10^{-3}$  para asegurar un error relativo tal que  $RE \leq C_\delta \cdot \xi = 10^{-2}$ . Esto define el régimen de interés analizado en el resto del trabajo.



**Figura B.1:** Constante  $C_\delta$  en función de la constante de isometría  $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$ , correspondiente a los valores factibles para  $C_\delta$  en el escenario donde se satisface la hipótesis del Teorema 2.4.

# Anexo C

## Modelo de observación

La implementación del modelo de observación requiere la utilización de 3 sistemas de referencia, descritos a continuación:

- A. **Sistema de coordenadas local (E,N,U)**. Origen  $O'$  en posición del observador (en este caso, ubicación del observatorio en la Tierra), plano (E,N) tangencial a la Tierra en  $O'$ , dirección U radial desde el centro de la Tierra a  $O'$ , plano (N,U) contiene a vector que une ambos polos. Convención de mano derecha. Notamos sus vectores unitarios como  $\{\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}\}$ .
- B. **Sistema geocéntrico (X,Y,Z)**. Origen  $O$  correspondiente al centro de la Tierra, plano (X,Y) en el plano del ecuador, dirección Z hacia el Norte celestial, dirección X hacia el meridiano cero (Greenwich). Convención de mano derecha. Notamos sus vectores unitarios como  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ .
- C. **Sistema (u,v,w)**. Origen coincide con  $O'$ , plano (u,v) perpendicular al vector pointing  $\mathbf{s}$ , con la dirección v en el plano definido por  $\mathbf{s}$  y  $\hat{\mathbf{z}}$ , dirección w paralela a  $\mathbf{s}$ . Convención de mano derecha. Notamos sus vectores unitarios como  $\{\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{\mathbf{w}}_s\}$ .

En términos generales, el modelo entrega el conjunto de baselines discretos asociados a un conjunto de antenas dispuestas en el terreno con cierta configuración, en cierto instante de tiempo, en cierto lugar del planeta y apuntando hacia algún punto de la esfera celestial. El procedimiento se divide en las siguientes etapas:

1. **Disposición de antenas en sistema local (E,N,U)**. En este trabajo en particular, se disponen las antenas en el plano (E,N) siguiendo cierta distribución de probabilidad (uniforme, normal o determinística), en una zona delimitada por las estadísticas de datos reales adquiridos en el observatorio ALMA. Así, para  $N_a$  antenas se genera el conjunto de posiciones  $\{(E_i, N_i)\}_{i=1, \dots, N_a}$ . Finalmente, a cada tupla se le asocia de forma independiente una componente  $U_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , donde  $\mu, \sigma$  se estiman a partir del mismo conjunto de datos reales. La salida de esta etapa corresponde a las posiciones de las antenas  $\{(E_i, N_i, U_i)\}_{i=1, \dots, N_a}$  en el sistema (E,N,U).
2. **Obtención de vectores unitarios  $\{\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}\}$** . Dada la latitud y longitud asociada al

origen  $O'$ , se computan los vectores unitarios  $\{\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}\}$  en el sistema  $(X, Y, Z)$ <sup>1</sup>. Esto se realiza mediante operaciones de producto cruz, identificando la relación entre  $\{\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}\}$  y los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas  $\{\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$ , para luego usar la relación conocida entre éstos y  $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ .

Notar que con las tuplas  $\{(E_i, N_i, U_i)\}_{i=1, \dots, N_a}$  y los vectores  $\{\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{u}}\}$ , podemos expresar la posición de las antenas en el sistema  $(X, Y, Z)$ .

3. **Cómputo de baselines continuos expresados en sistema  $(X, Y, Z)$ .** Por definición, el vector baseline proyectado  $\mathbf{b}$  asociado a un par de antenas con vector pointing  $\mathbf{s}$  se obtiene mediante:

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{s}) \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathbf{B}$  corresponde al vector que une al par de antenas. De esta manera, un arreglo de  $N_a$  antenas queda determinado por el conjunto de vectores  $\{\mathbf{B}_i\}_{i=1, \dots, M_{N_a}}$ , donde  $M_{N_a} = \frac{N_a(N_a-1)}{2}$ . Notar que en un escenario Snapshot el vector pointing  $\mathbf{s}$  es fijo, mientras que en un escenario dinámico éste varía con el tiempo, puesto que debe redirigirse continuamente para seguir apuntando al objeto de interés.

- (a) Lo primero es obtener el conjunto  $\{\mathbf{B}_i\}_{i=1, \dots, M_{N_a}}$  a partir de la posición de las antenas. Esto se traduce simplemente en restar los vectores de posición.
- (b) Cómputo del vector pointing. Para ello, se utilizan los datos disponibles de posición del observatorio (latitud, longitud), posición de la fuente (Ascensión recta, declinación) y fecha de observación para obtener el par  $(Az, El)$  correspondiente a los ángulos azimuth y elevación de la fuente en el sistema de coordenadas horizontal. Luego, podemos obtener sus coordenadas en el sistema de referencia local (E, N, U) mediante:

$$\begin{aligned} E_s &= \cos(El) \sin(Az) \\ N_s &= \cos(El) \cos(Az) \\ U_s &= \sin(El) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Luego, el vector pointing en cierto instante de tiempo queda representado por:

$$\mathbf{s} = E_s \hat{\mathbf{e}} + N_s \hat{\mathbf{n}} + U_s \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{C.3})$$

Finalmente, se tiene el conjunto de baselines proyectados  $\{\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{b}_i = \mathbf{s} \times (\mathbf{B}_i \times \mathbf{s})\}_{i=1, \dots, M_{N_a}}$ .

4. **Obtención de componentes  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ .** Hasta el momento se tiene el conjunto de baselines  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1, \dots, M_{N_a}}$  expresado como:

$$\mathbf{b}_i = b_{i,x} \hat{\mathbf{x}} + b_{i,y} \hat{\mathbf{y}} + b_{i,z} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{C.4})$$

mientras que se desea conocer las componentes de dichos vectores asociadas al sistema  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , es decir:

$$\mathbf{b}_i = u_i \hat{\mathbf{u}}_s + v_i \hat{\mathbf{v}}_s + w_i \hat{\mathbf{w}}_s \quad (\text{C.5})$$

---

<sup>1</sup>Esto es, considerando  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Para ello, se debe computar los vectores base  $\{\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{\mathbf{w}}_s\}$ . Geométricamente, se puede demostrar que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_s &= -\frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{z}}}{\|\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{z}}\|_2} \\ \hat{\mathbf{v}}_s &= \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}_s}{\|\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}_s\|_2} \\ \hat{\mathbf{w}}_s &= \hat{\mathbf{s}}\end{aligned}\tag{C.6}$$

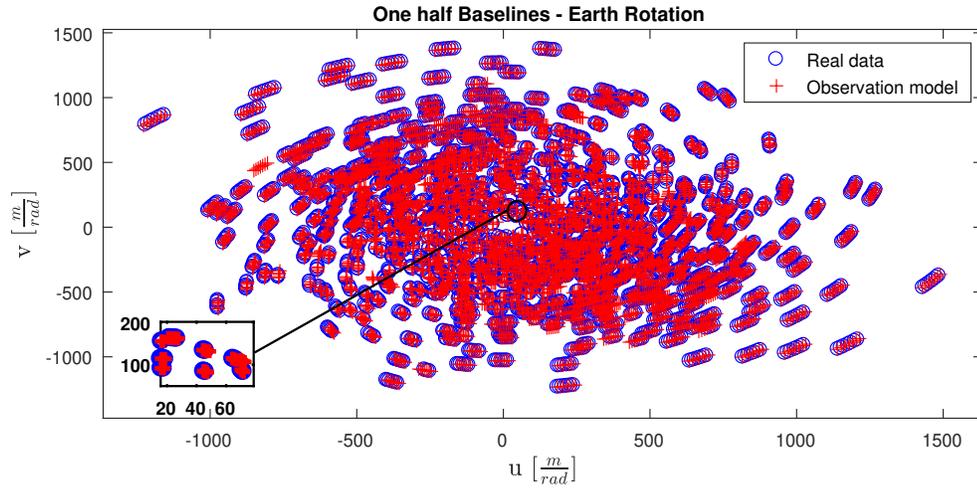
Finalmente, se obtienen las componentes  $(u_i, v_i, w_i)$  como:

$$\begin{aligned}u_i &= \mathbf{b}_i \bullet \hat{\mathbf{u}}_s \\ v_i &= \mathbf{b}_i \bullet \hat{\mathbf{v}}_s \\ w_i &= \mathbf{b}_i \bullet \hat{\mathbf{w}}_s\end{aligned}\tag{C.7}$$

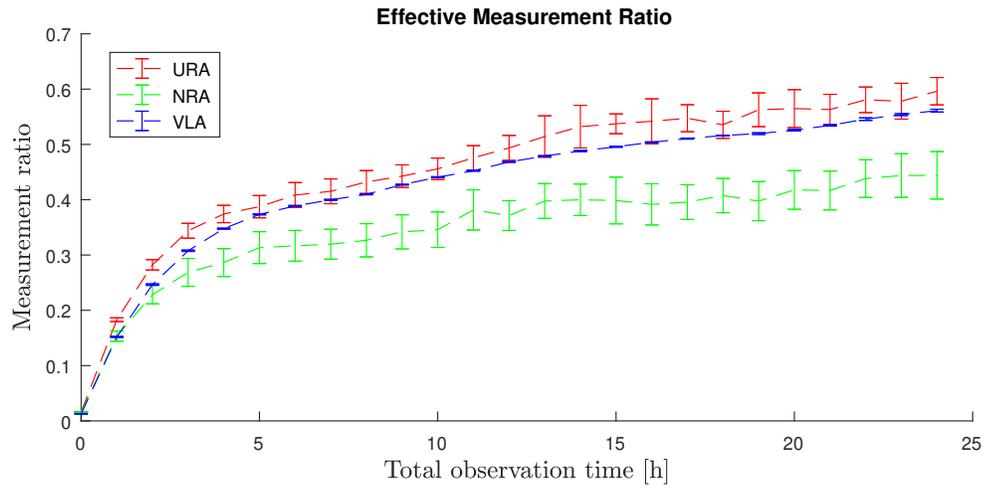
5. **Discretización de baselines continuos.** Esta etapa consiste en discretizar el conjunto de tuplas  $\{(u_i, v_i)\}_{i=1, \dots, M_{N_a}}$ , llevándolas al espacio  $\{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ , donde  $M \times N$  corresponde al tamaño de la imagen a sintetizar. La implementación se realiza utilizando una grilla uniforme y asumiendo que las frecuencias espaciales máximas medidas  $u_{max}, v_{max}$  coinciden con las frecuencias máximas del objeto de interés. De esta manera, el mapeo de baselines continuos a su versión discreta se realiza según:

$$\begin{aligned}u_i^d &= \left\lfloor \frac{N}{2} \left( \frac{u_i}{u_{max}} + 1 \right) \right\rfloor \\ v_i^d &= \left\lfloor \frac{M}{2} \left( \frac{v_i}{v_{max}} + 1 \right) \right\rfloor\end{aligned}\tag{C.8}$$

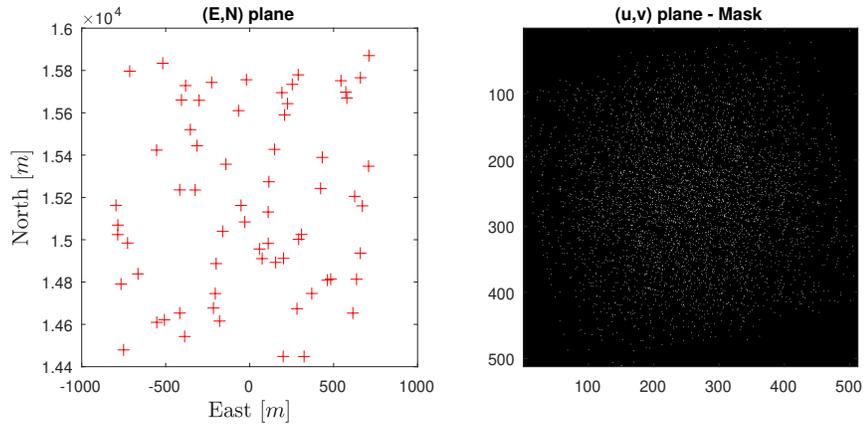
La Figura C.1 compara datos reales en el plano  $(u, v)$  con los baselines generados por el modelo recién descrito, considerando el mismo escenario de observación (lugar, hora, ubicación del objeto de interés y disposición de las antenas). Además, la Figura C.3 muestra una realización del modelo para los 3 tipos de configuración de antenas analizados, análogo a lo exhibido en [27]. Finalmente, la Figura C.2 muestra la relación entre la tasa de medición efectiva y el tiempo de observación, generada por la etapa de discretización o Gridding.



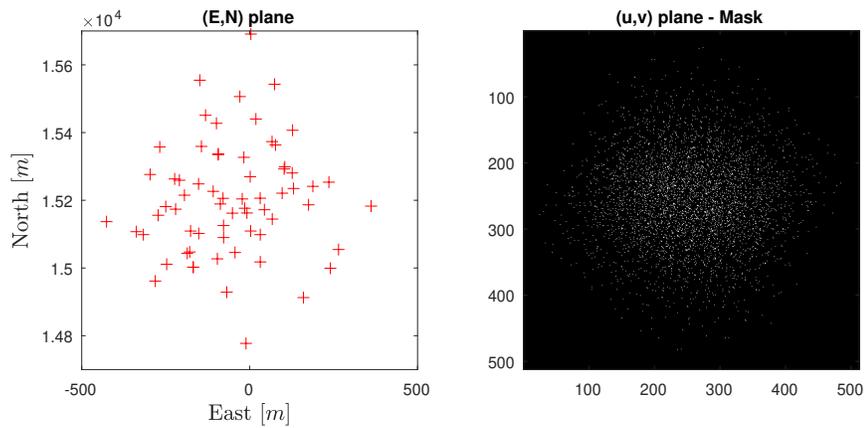
**Figura C.1:** Baselines proyectados no normalizados asociados a datos reales y al modelo de observación implementado.



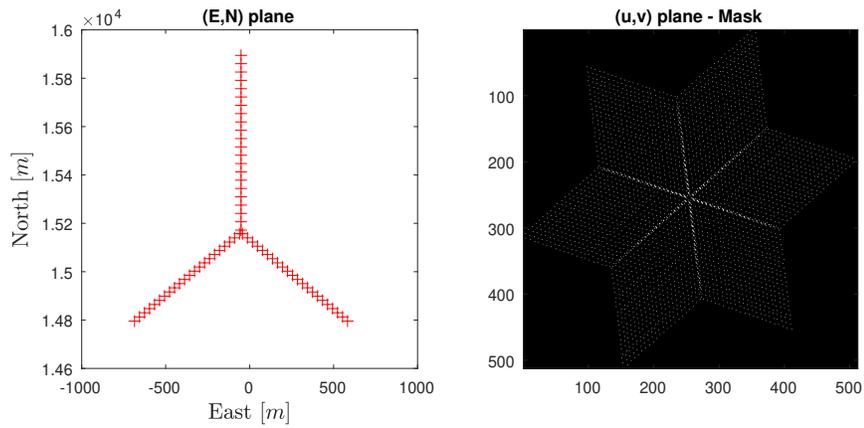
**Figura C.2:** Tasa de medición efectiva asociada a cada configuración de antenas, en función del tiempo de observación. Cada curva muestra el promedio y desviación estándar asociados a 20 realizaciones del modelo.



(a) URA.



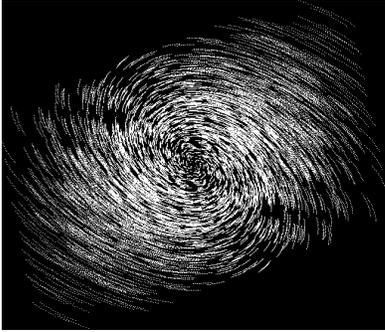
(b) NRA.



(c) VLA.

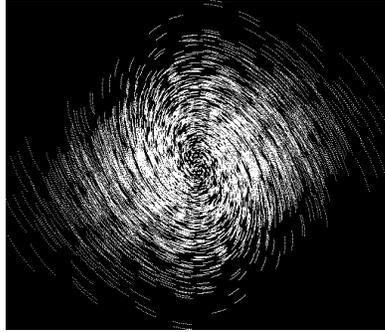
**Figura C.3:** Realizaciones del modelo de observación para las configuraciones URA, NRA y VLA. La columna izquierda muestra la disposición de antenas en el terreno, mientras que a la derecha se encuentra la máscara en el plano  $(u,v)$  mapeada por dicha disposición.

(u,v) plane - URA - 1 [h]



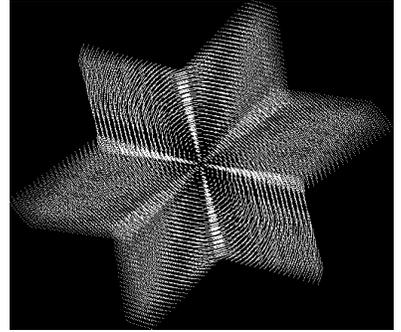
(a)

(u,v) plane - NRA - 1[h]



(b)

(u,v) plane - VLA - 1 [h]



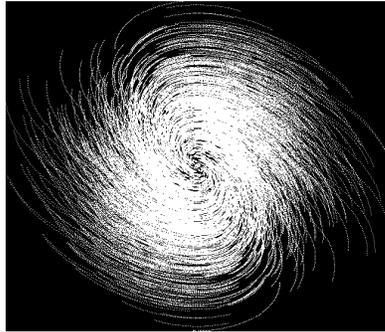
(c)

(u,v) plane - URA - 3 [h]



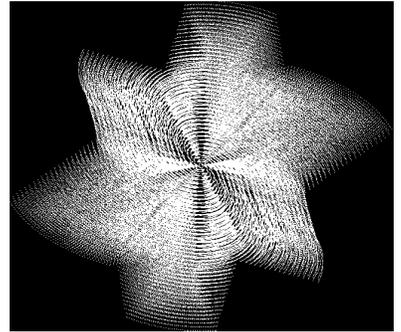
(d)

(u,v) plane - NRA - 3 [h]



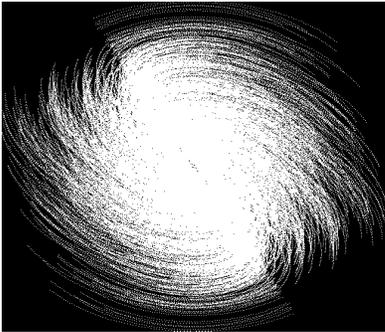
(e)

(u,v) plane - VLA - 3 [h]



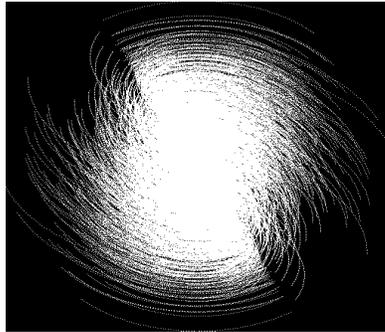
(f)

(u,v) plane - URA - 6 [h]



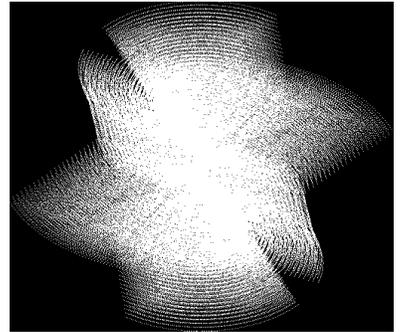
(g)

(u,v) plane - NRA - 6 [h]



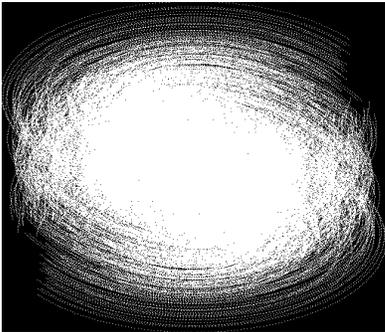
(h)

(u,v) plane - VLA - 6 [h]



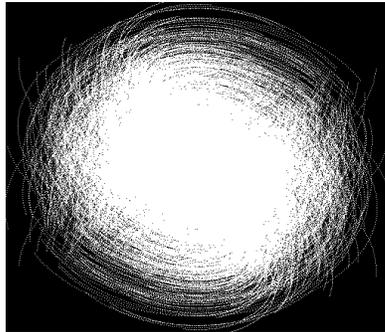
(i)

(u,v) plane - URA - 12 [h]



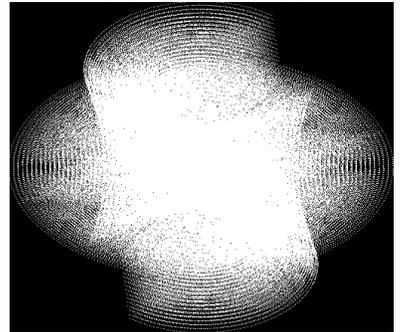
(j)

(u,v) plane - NRA - 12 [h]

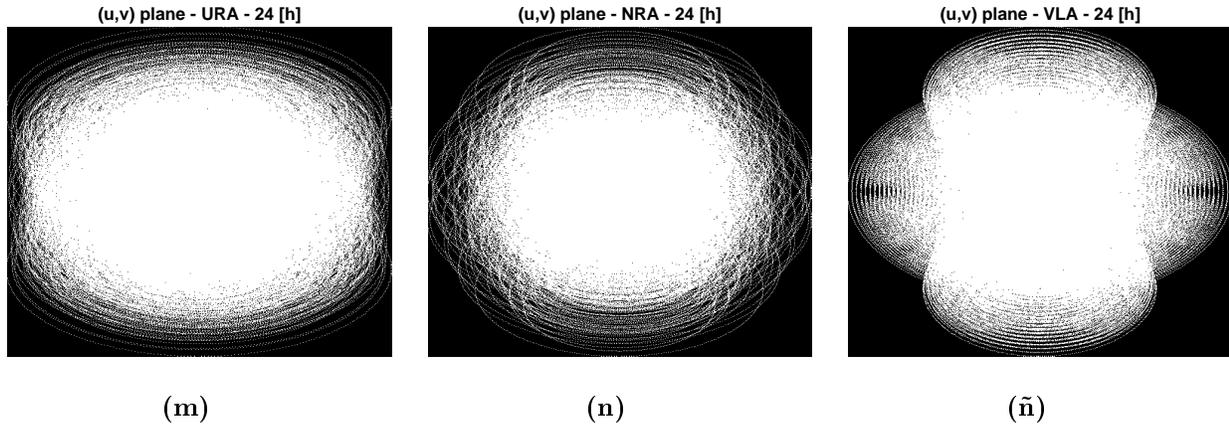


(k)

(u,v) plane - VLA - 12 [h]



(l)



**Figura C.4:** Realizaciones de patrones de medición en plano  $uv$  para las 3 configuraciones analizadas, considerando rotación terrestre. **Izquierda:** Disposición URA. **Centro:** Disposición NRA. **Derecha:** Disposición VLA. Cada fila corresponde a un tiempo de observación distinto: 1[h], 3[h], 6[h], 12[h] y 24[h].

# Anexo D

## Análisis local de coherencia y compresibilidad

En este anexo se verifican experimentalmente las propiedades locales de coherencia y compresibilidad, introducidas en los resultados teóricos de CS asociados a muestreo multinivel [1, 42].

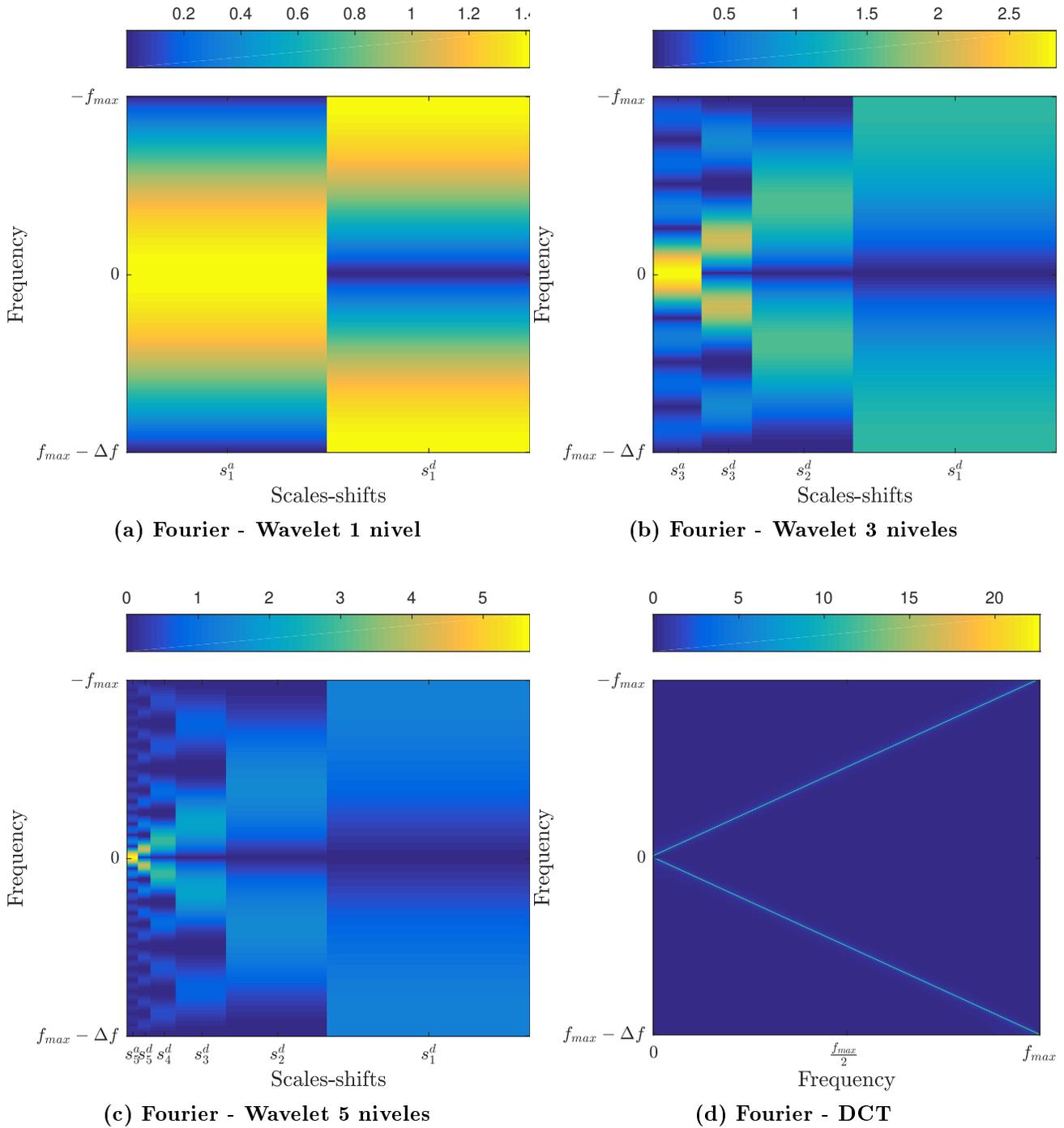
### D.1. Coherencias locales

En esta sección se analiza la similitud entre los elementos base de medición en interferometría (Fourier) y los elementos base de distintos dominios de compresibilidad. Para ello, se computa el módulo de la matriz de productos punto  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  respecto a los elementos base del dominio de medición:

$$M = \sqrt{n} \cdot |F \cdot D| \quad (\text{D.1})$$

donde  $n \in \mathbb{R}$  es la dimensión del espacio,  $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es la matriz con los vectores base de Fourier en sus filas y  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz con los vectores base de compresibilidad en sus columnas. La coherencia *worst case* definida en la ecuación (2.13) corresponde al máximo valor presente en la matriz  $M$ .

La Figura D.1 grafica la matriz  $M$  computada para wavelets con distintos niveles de descomposición (paneles (a), (b) y (c)) y para la DCT (panel (d)) como dominios de compresibilidad. La primera observación es que la similitud entre los elementos base de cada dominio no es uniforme, justificando así un análisis local de las estructuras promovidas en la matriz  $M$ . Para el caso de las wavelets, se verifica la alta similitud entre los átomos de soporte extendido en la banda de aproximación ( $s_5^g$  en panel (c), por ejemplo) y los átomos de baja frecuencia en el dominio de Fourier. Tal como se expresa en [1, 42], esta alta coherencia local es la que determina la necesidad de un muestreo concentrado en las bajas frecuencias. Por otro lado, la estructura diagonal presente en la matriz  $M$  del panel (d) muestra que todos los átomos de Fourier encuentran en la DCT un elemento base máximamente coherente, lo cual justifica la necesidad de un muestreo exhaustivo en todo el mapa de frecuencias.



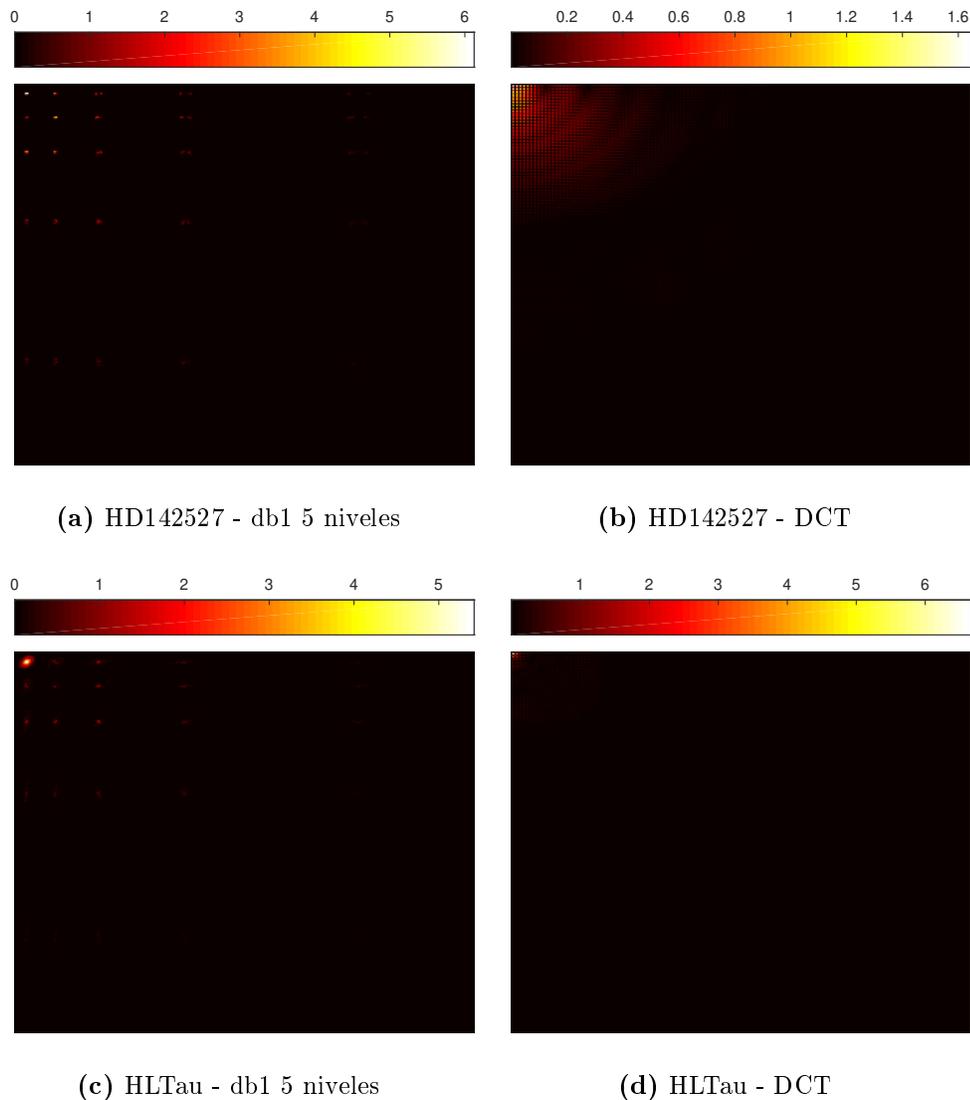
**Figura D.1:** Módulo del producto punto entre vectores base del dominio de medición (Fourier) y distintos dominios de compresibilidad: wavelet Daubechies con 1, 3 y 5 niveles de descomposición en paneles (a), (b) y (c) respectivamente, y la DCT en panel (d). Dimensión: 512x512.

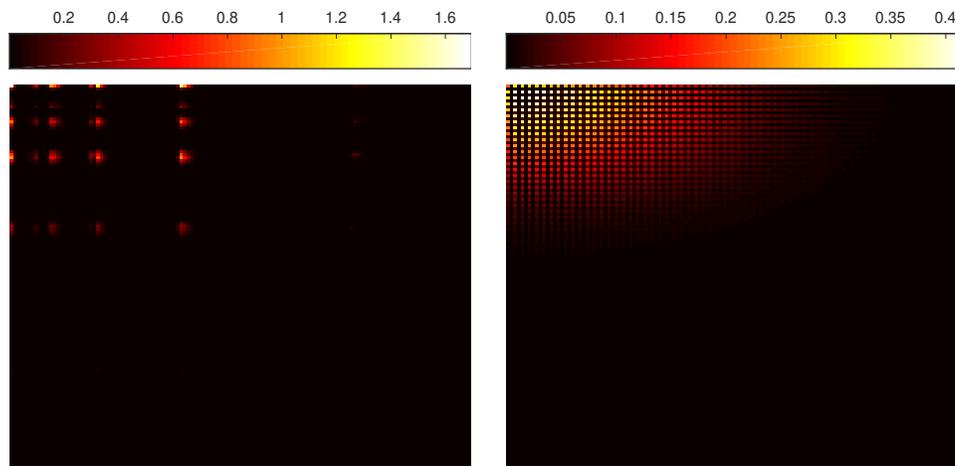
## D.2. Compresibilidad local

En esta sección se analiza la estructura promovida por las bases de compresibilidad sobre las imágenes test consideradas en este trabajo. La Figura D.2 grafica el módulo de la representación de dichas señales en un dominio Wavelet con 5 niveles de descomposición (paneles (a), (c), (g), (e) e (i)) y en el dominio DCT (paneles (b), (d), (f), (h) y (j)). En todos los casos, los elementos base de menor frecuencia/mayor soporte están ubicados en la esquina superior izquierda.

Los resultados expuestos en la Figura D.2 revelan el mismo comportamiento en todas las representaciones: los coeficientes significativos tienden a concentrarse en las zonas de baja frecuencia/soporte extendido, para luego disminuir asintóticamente hacia las zonas de alta frecuencia/soporte compacto.

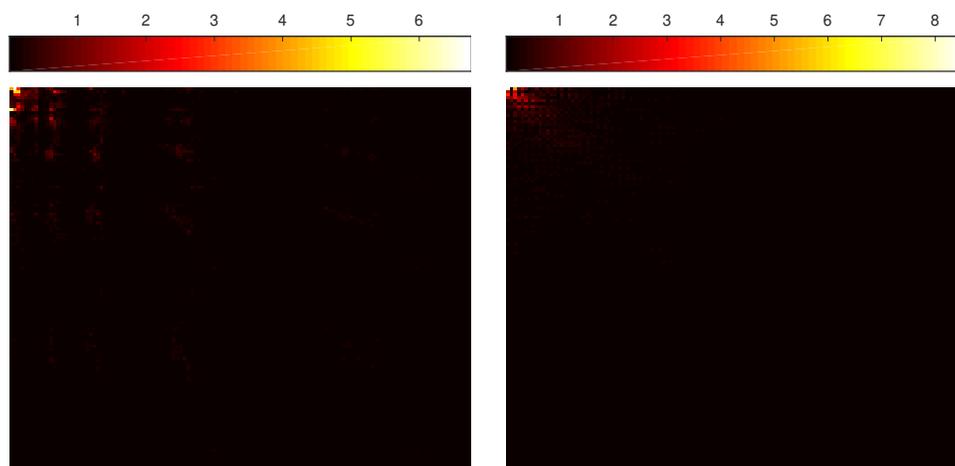
Estas estructuras locales exhibidas por coherencia y compresibilidad determinan la tasa de submuestreo admitida en cada nivel del esquema de muestreo propuesto en [1, 42].





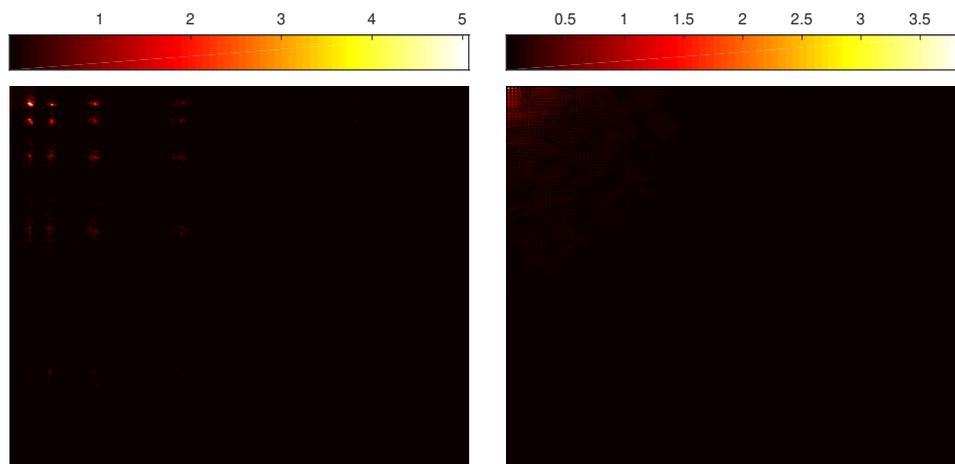
(e) 3c286 - db7 5 niveles

(f) 3c286 - DCT



(g) 30Dor - db8 5 niveles

(h) 30Dor - DCT



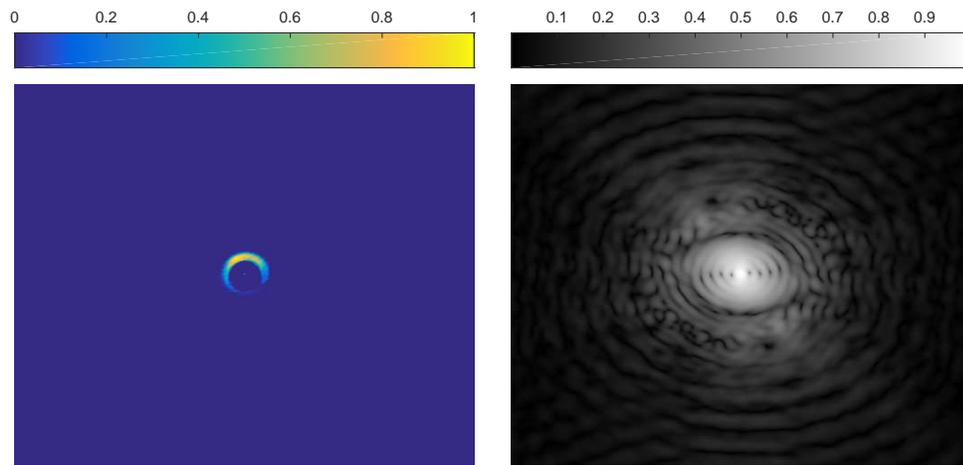
(i) freq78 - db1 5 niveles

(j) freq78 - DCT

**Figura D.2:** Representación de imágenes test en distintos dominios de compresibilidad: wavelet Daubechies con 5 niveles de descomposición (izquierda) y DCT (derecha).

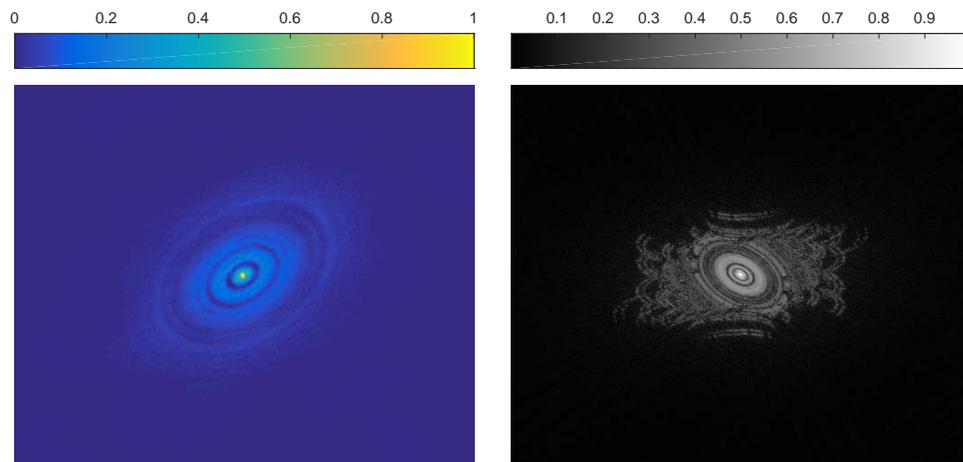
# Anexo E

## Imágenes test en dominio de la frecuencia



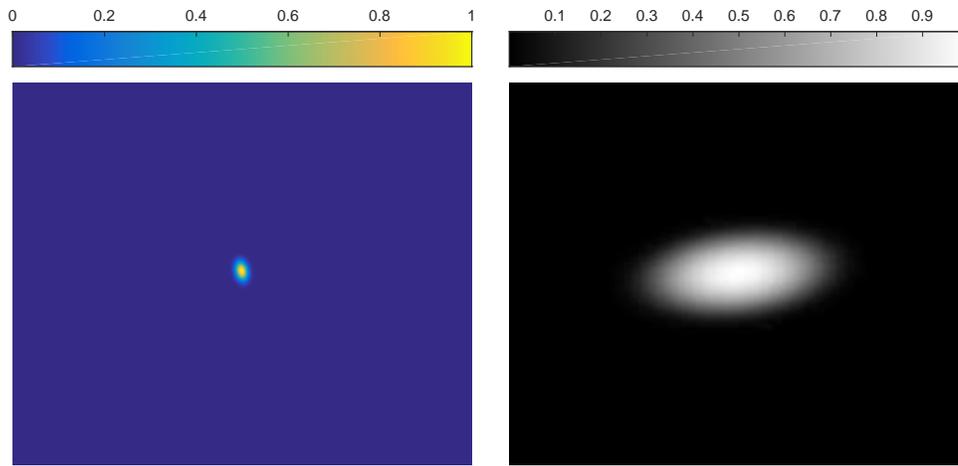
(a) HD142527-pixel

(b) HD142527-Fourier



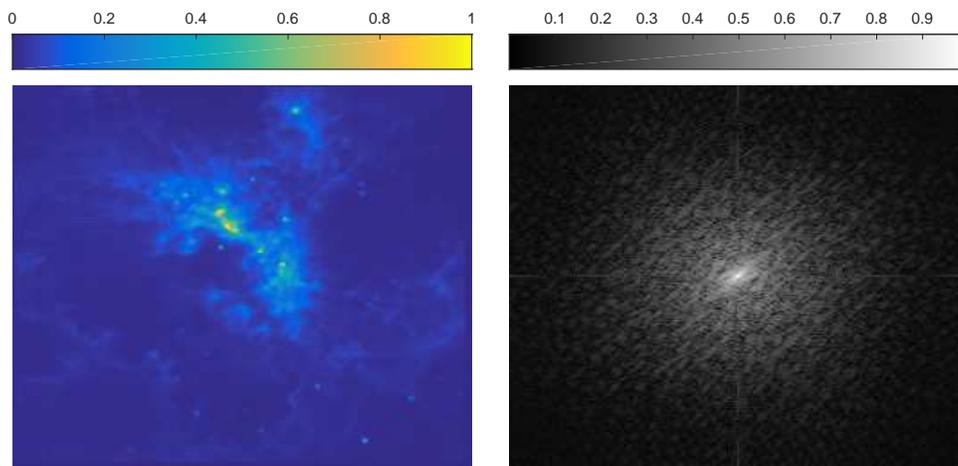
(c) HLTau-pixel

(d) HLTau-Fourier



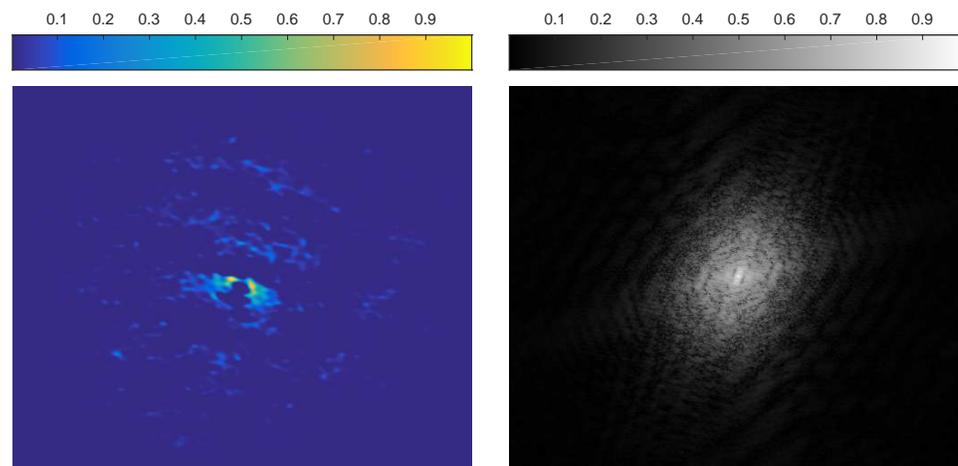
(e) 3c286-pixel

(f) 3c286-Fourier



(g) 30Dor-pixel

(h) 30Dor-Fourier



(i) freq78-pixel

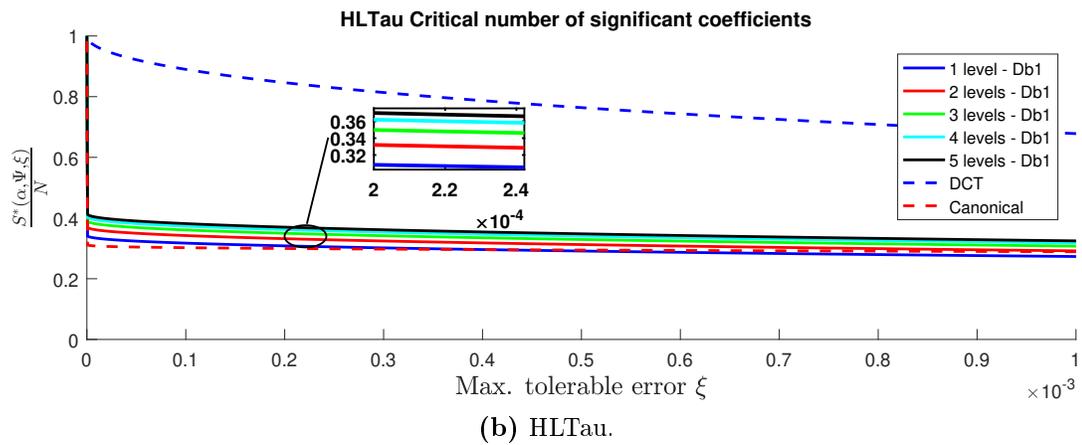
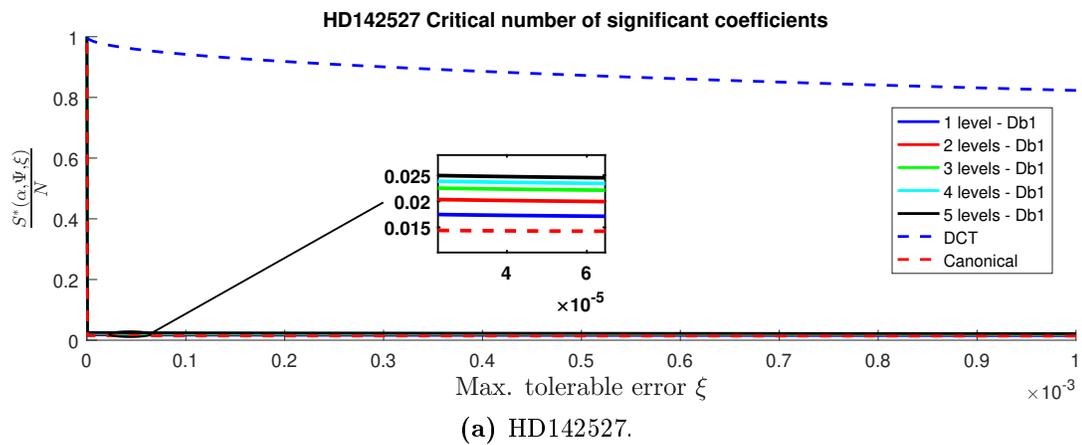
(j) freq78-Fourier

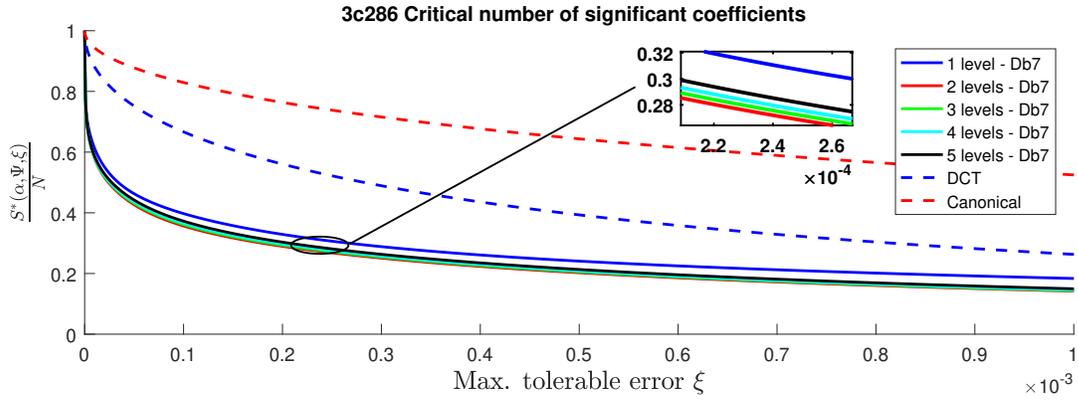
**Figura E.1:** **Izquierda:** Imágenes test en dominio del pixel. **Derecha:** Imágenes test en dominio de la frecuencia, representadas a través de una visualización logarítmica del módulo de la transformada de Fourier.

# Anexo F

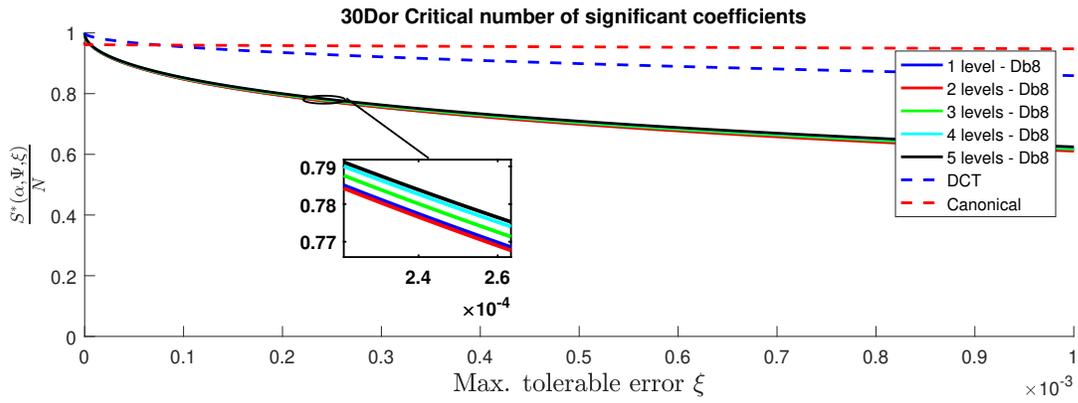
## Resultados complementarios

### F.1. Tasa de coeficientes críticos

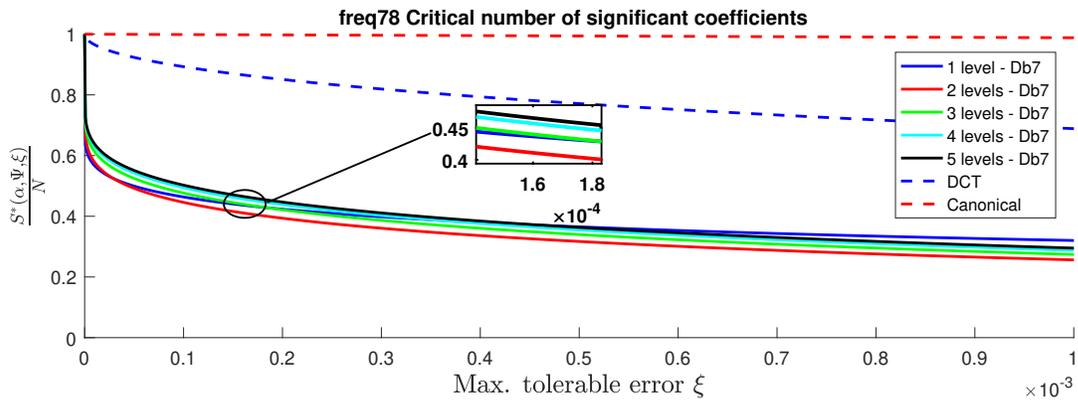




(c) 3c286.



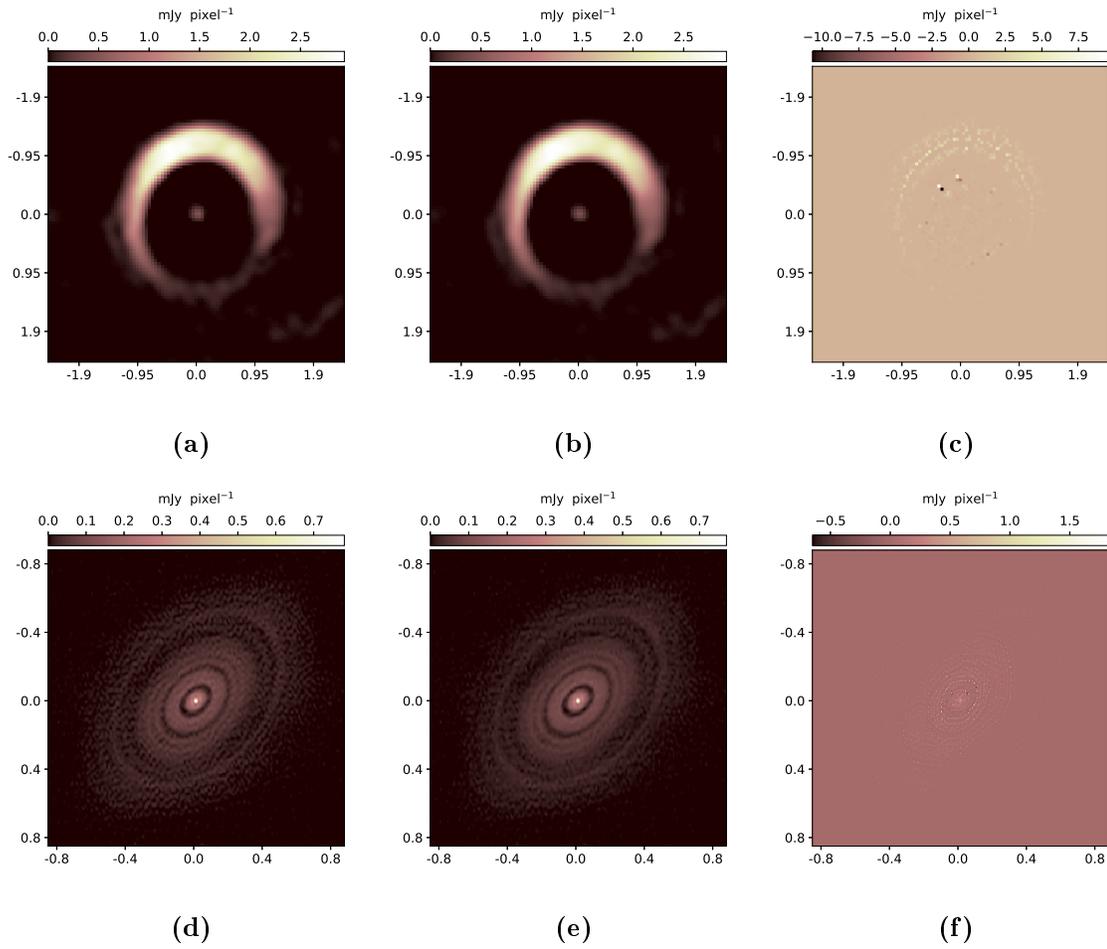
(d) 30Dor.



(e) freq78.

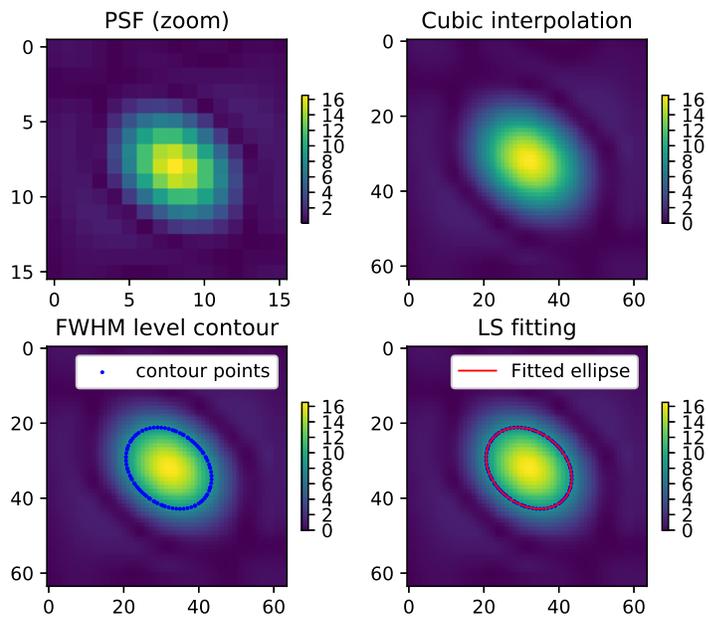
**Figura F.1:** Tasa crítica de coeficientes significativos  $\frac{S^*}{N}$  requerida para acotar las reconstrucciones CS por un error máximo tolerable  $\xi$ , considerando distintas bases de compresibilidad. Cada panel esta asociado a una imagen test distinta.

## F.2. Reconstrucciones modelo

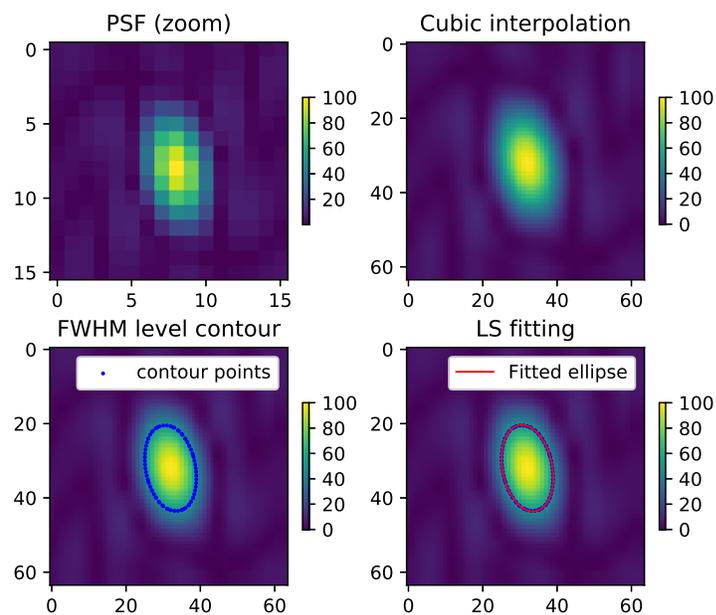


**Figura F.2:** Imágenes modelo obtenidas con cada método. **De izquierda a derecha:** CS con diccionario propuesto, CS con diccionario SARA y método CLEAN. **De arriba a abajo:** Fuentes HD142527 y HLTau.

### F.3. CLEAN beam



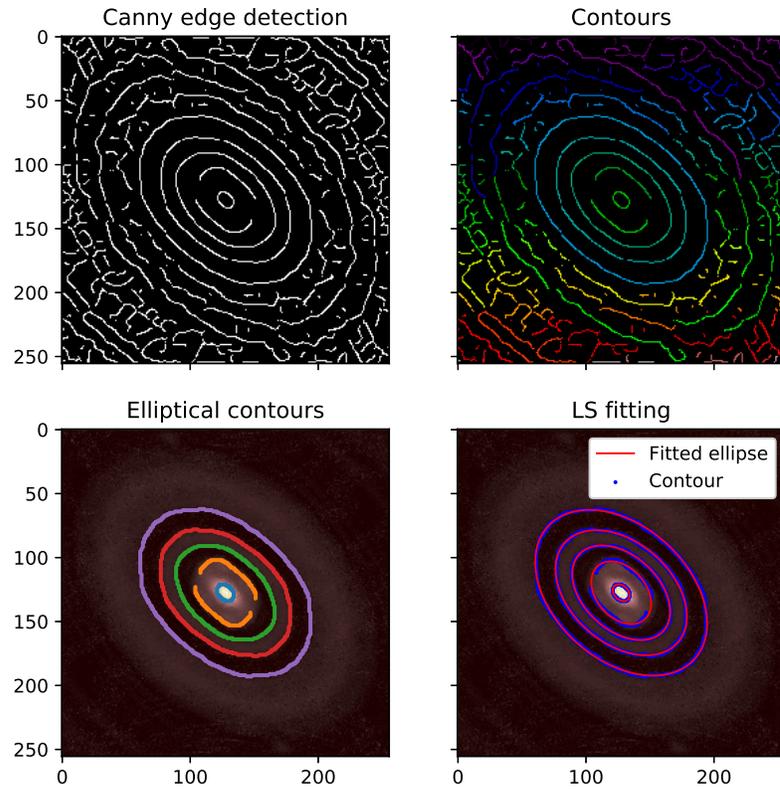
(a) HD142527



(b) HLTau

**Figura F.3:** Ajuste elíptico para la determinación del FWHM asociado a la PSF de cada patrón de muestreo

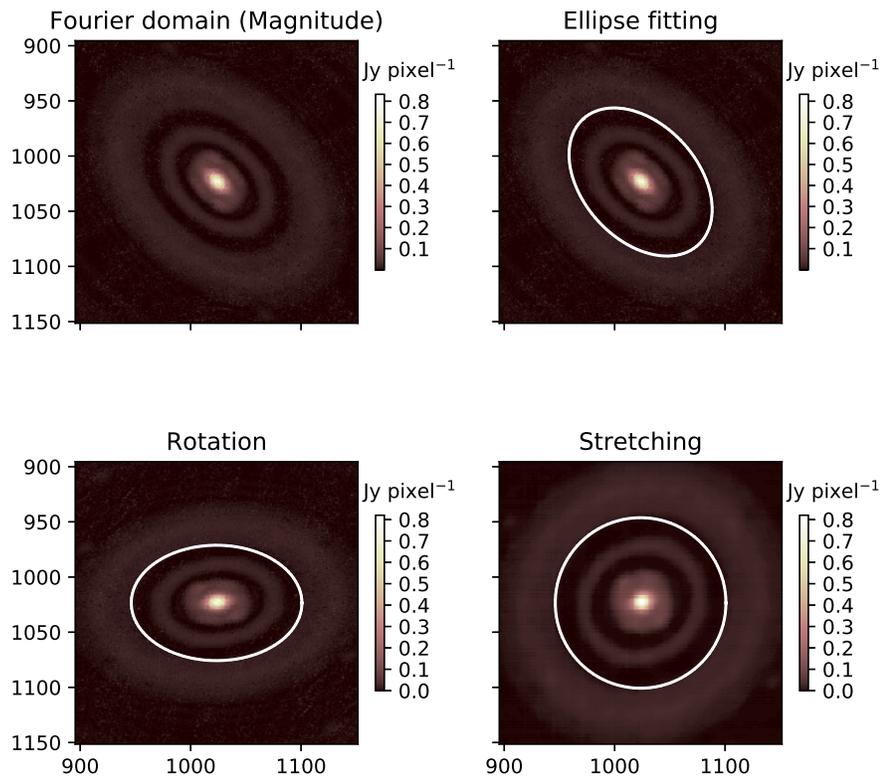
## F.4. Conservación de flujo



**Figura F.4:** Ajuste de elipses sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas mediante CS.

**Tabla F.1:** Parámetros de elipses ajustadas sobre el módulo de las Visibilidades reconstruidas.

Contour	Center ( $x, y$ )	Axes ( $px \times px$ )	Angle ( $^\circ$ )	Eccentricity	rms
1	(127.5, 127.5)	$7.52 \times 5.48$	45.45	0.68	$9.47 \times 10^{-5}$
2	(127.5, 127.5)	$27.77 \times 19.38$	40.89	0.71	$9.67 \times 10^{-4}$
3	(127.5, 127.5)	$44.50 \times 29.20$	47.40	0.75	$7.11 \times 10^{-4}$
4	(127.5, 127.5)	$58.91 \times 39.37$	48.60	0.74	$1.20 \times 10^{-3}$
5	(127.5, 127.5)	$77.28 \times 52.29$	47.73	0.73	$2.00 \times 10^{-3}$



**Figura F.5:** Transformación sobre el módulo del mapa de Visibilidades para la obtención de un patrón de anillos circulares concéntricos.