



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

OPTIMIZACIÓN DE BAND-GAP EN MATERIALES TIPO SÁNDWICH

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MECÁNICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

LEONEL DAVID QUINTEROS PALOMINOS

PROFESOR GUÍA:
VIVIANA MERUANE NARANJO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
EDUARDO LENZ CARDOSO
RAFAEL RUIZ GARCÍA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
Núcleo Milenio Materiales Mecánicos Suaves e Inteligentes

SANTIAGO, CHILE
2020

RESUMEN DE: Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Mención Mecánica y Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Mecánico
POR: Leonel David Quinteros Palominos
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: Viviana Meruane Naranjo

OPTIMIZACIÓN DE BAND-GAP EN MATERIALES TIPO SÁNDWICH

El siguiente trabajo tiene por objetivo diseñar y optimizar un panel tipo sándwich para evitar la propagación de ondas mecánicas en el plano del material. Este sándwich estará confeccionado en su núcleo por un material celular, por lo que se optimiza tanto al sección transversal de los elementos celulares, como también el material de cada uno.

El diseño de este trabajo se basa en diversas estructuras tipo enrejado de la literatura que han sido estudiadas en el marco de materiales celulares, otorgándole diversas propiedades como una excelente relación peso - desempeño, para su posterior uso en un núcleos sándwich.

Para modelar la propagación de ondas se introdujo la teoría de materiales periódicos. Esta teoría impone condiciones de borde de periodicidad infinita para así, simular que un material esté desplegado en un plano con periodicidad infinita en teoría. A partir de la teoría anterior se define un gráfico llamado diagrama de bandas, el cual es simplemente una forma de representar la respuesta de un cuerpo a excitaciones en un rango de frecuencias en distintas direcciones. Lo importante de este diagrama es que un vacío entre dos bandas a lo largo del vector de ondas indica que no hay propagación de ondas en ese rango de frecuencias, estas zonas de no propagación son denominadas como band gaps.

Luego, la formulación del problema de optimización consiste en elegir dos bandas del diagrama de bandas y maximizar la separación entre estas, variando solo el núcleo del panel sándwich. Como el núcleo esta compuesto solo de elementos tipo viga, se varia el material de cada viga y sección transversal respectiva, por lo que se definen dos variables de decisión por viga.

Con el objetivo de llevar a cabo la optimización del panel tipo sándwich, se optimizó un enrejado en 2D con elementos barra (Truss) para estudiar como se comporta el band gap en este tipo de estructuras, pues el problema de optimización de band gap solo se ha estudiado en materiales continuos. Luego, se llevó a cabo la optimización de un panel tipo sándwich con un enrejado de elementos tipo viga, obteniendo band gaps en un amplio espectro de frecuencias.

Cómo resultados, se logra optimizar exitosamente el enrejado en 2D hecho de barras como el panel sándwich con núcleo celular. Se aprecia que, en el caso 2D, la variación del band gap en función de la complejidad de la estructura (número de celdas) y, en el caso del panel celular, como varía la estructura misma en función de la selección de las bandas que se deseen optimizar.

El trabajo concluye observando que hay ciertas bandas que se pueden optimizar, mientras que en otras la física del problema no permite su generación. Es interesante observar como sutiles cambios en la estructura del panel permite la generación de band gaps en distintas frecuencias. También debe llevarse a cabo un post-procesamiento pues el algoritmo de optimización llegará a un mínimo que a veces puede no tener sentido para la construcción del material.

A mi mamá, papá, hermanos y a mi amor.

Agradecimientos

Quiero iniciar los agradecimientos con mi familia, la cual siempre ha estado conmigo y me ha apoyado. En primer lugar agradecer a mi mamá por preocuparse por mí todos los días, desde levantarme (sin escatimar en recursos para ello) hasta por preguntarme la hora a la cual voy a llegar a mi casa. A mi papá por siempre ayudarme a tomar decisiones y ver cual es un buen camino a seguir. A mis hermanos Valentina, Victor y Luciano por ser la excelente compañía que han sido siempre.

También quiero agradecer especialmente a mi amor Maria Luisa, por ser parte de este proceso universitario, gracias por cada palabra de aliento y apoyo que me has dado durante todos los años, tanto en la universidad como fuera de ella.

A mis amigos mas cercanos que me han acompañado, con los cuales, he compartido tanto, hablo de Cristian, Nachin, Diego y Nicolas. Gracias por ser parte de este camino conmigo y espero que nuestra amistad perdure.

También agradecer la excelente recepción por parte del profesor Eduardo Lenz en Brasil, también de los muchachos del Labmec en general por ser tan acogedores y hacerme sentir como en casa, en especial a Pedro y Kelvin.

Por último, quiero agradecer a los docentes que han sido parte de este proceso sin los cuales no podría estar presentando este trabajo. Al profesor Rafael Ruiz por sus excelentes consejos, sin los cuales este trabajo hubiera tomado mucho mas tiempo. Al profesor Eduardo Lenz, por enseñarme lo que tenía que aprender para llevar a cabo este trabajo, además aconsejarme lecturas, responder todas las dudas que tuviera, prácticamente por estar siempre disponible para ayudarme. Finalmente a la profesora Viviana, por ser una excelente profesora Guía, por entregarme todas las oportunidades para que haga este trabajo, darme los consejos precisos cada vez que iba a su oficina por ayuda y confiar en mí para llevar a cabo este trabajo.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	1
1.2.1. Objetivo general	1
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcances	2
2. Antecedentes generales	3
2.1. Paneles sándwich	3
2.2. Materiales celulares	4
2.3. Band gap fonónico	6
2.4. Teoría de materiales periódicos	7
2.4.1. Imposición de la periodicidad infinita	9
2.4.2. Imposición de la simetría	11
2.5. Optimización topológica	12
2.6. Algoritmos de optimización	14
3. Formulación	16
3.1. Modelación del panel tipo sándwich	16
3.1.1. Geometría	16
3.1.2. Modelación por el método de elementos finitos	18
3.2. Mallado y sensibilidad del diagrama de bandas	19
3.3. Condiciones de borde	22
3.4. Imposición de la simetría	22
3.4.1. Simetría vigas en el plano $x - y$	23
3.4.2. Simetría vigas dirección \hat{z}	24
3.5. Formulación de la optimización	25
3.6. Análisis de sensibilidad	27
3.6.1. Diferenciación de la frecuencia natural	27
3.6.2. Diferenciabilidad de los valores propios y la norma-P	29
3.7. Problema de mínimos locales	30
4. Resultados y discusión	31
4.1. Optimización band gap en enrejado de elementos tipo barra	31
4.1.1. Geometría y propiedades	31
4.1.2. Diagrama de bandas y estructura	33
4.1.3. Análisis con estructura finita	36

4.2. Optimización band gap Placa tipo sándwich	38
4.2.1. Geometría y propiedades	38
4.2.2. Diagramas de Bandas y estructura	38
5. Conclusión y trabajos futuros	43
Bibliografía	45
Anexo A. Cálculos realizados	48
A.1. Propiedades de área viga con sección circular	48
A.2. Cálculo derivadas del elemento viga	48

Índice de Tablas

2.1.	Ejemplificación de la eficiencia de los paneles tipo sándwich en relación a su peso.[34]	4
2.2.	Propiedades y número de grados de libertad en el diseño, en función de la complejidad de la arquitectura celular del material.[23]	5
3.1.	Error RMS en función del mallado	22
4.1.	Propiedades mecánicas de aluminio 6061 y tungsteno.	33
4.2.	Band gap relativo en función del procesamiento y la banda optimizada en el enrejado 2D.	35
4.3.	Band gap relativo en función del procesamiento y la banda optimizada en panel sándwich.	41

Índice de Ilustraciones

2.1.	Esquema de panel tipo sándwich.[7]	4
2.2.	Ejemplos de topología de núcleo de panel tipo sándwich con materiales celulares.[35]	6
2.3.	Ejemplo de estructuras y diagrama de bandas.[36]	7
2.4.	Geometría de las estructuras.	8
2.5.	Tipos de arreglos.	8
2.6.	Simetría reflectiva y zona irreducible de Brillouin.	9
2.7.	Nodos en el borde.	10
2.8.	Elementos unidimensionales con simetría reflectiva horizontal, vertical y en 45° con respecto al centro, en cual los elementos del mismo color están relacionados.	12
2.9.	Las tres categorías en optimización estructural. a) Optimización de tamaño en una estructura de barras, b) Optimización de forma y d) optimización topológica. La malla inicial se muestra en la izquierda y la derecha está la optimizada.[4]	13
2.10.	Diagrama de flujo para la optimización estructural.[4]	14
3.1.	Ejemplo de panel sándwich con dos láminas exteriores y un núcleo enrejado.	17
3.2.	Vista isométrica del núcleo del panel sándwich con distintos número de celdas n_c y n_z .	18
3.3.	Estructuras con $n_c = 2$, $n_z = 1$ en función de n_{ref} .	20
3.4.	Diagramas de bandas con $n_c = 2$, $n_z = 1$ en función de n_{ref} .	21
3.5.	Vista isométrica del núcleo del panel sándwich con $n_c = 4$ y $n_z = 4$ número de celdas en la que, en la parte izquierda, están solo las vigas en el plano $x - y$ y en la derecha las ortogonales al plano $x - y$.	23
3.6.	simetría en el plano $x - y$.	24
3.7.	simetría en el eje z .	25
3.8.	En la izquierda está la zona irreducible de Brillouin indicando el camino del vector de ondas. En el lado derecho se encuentra el diagrama de bandas indicando los primeros cuatro valores propios a lo largo del vector de ondas $\Gamma - X - M - \Gamma$ en al zona irreducible de Brillouin.[4]	25
4.1.	Enrejado de barras a optimizar.	32
4.2.	Diagrama de bandas para $n_c = 4$.	34
4.3.	Diagrama de bandas para $n_c = 6$.	34
4.4.	Diagrama de bandas para $n_c = 8$.	34
4.5.	Estructuras optimizadas.	35
4.6.	Ensamble de la estructura optimizada $n_c = 4$ de 10×10 celdas con apoyo simple en las esquinas y una excitación periodica de $1[N]$ en el medio del borde izquierdo.	36
4.7.	FRF de la estructura optimizada con $n_c = 4$.	37
4.8.	FRF de la estructura optimizada con $n_c = 6$.	37

4.9.	FRF de la estructura optimizada con $n_c = 8$.	37
4.10.	Diagrama de bandas para $n = 5$.	39
4.11.	Diagrama de bandas para $n = 6$.	39
4.12.	Diagrama de bandas para $n = 8$.	39
4.13.	Diagrama de bandas para $n = 9$.	40
4.14.	Estructuras tipo sándwich optimizadas.	41
A.1.	Elemento viga 3D.	48

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, los avances tecnológicos en manufactura han permitido crear estructuras cada vez más complejas gracias a la manufactura aditiva, la cual ha otorgado una gran libertad en el diseño, permitiendo emplear materiales polímeros, cerámicos, metálicos o mezclas entre estos, dando lugar a la confección de materiales, estructuras e inclusive moldes para otros materiales con formas muy complejas y novedosas. Gracias a esta versatilidad, se han obtenido estructuras que son prácticamente imposibles de fabricar con los procesos de manufactura convencionales, además, a precios relativamente bajos, con el objetivo de obtener un prototipado rápido. Con esta idea de la versatilidad actual de la manufactura en mente, se pretende diseñar, modelar y optimizar un material tipo sándwich con un núcleo interno hecho con una arquitectura celular modelándolo con el método de elementos finitos de tal forma que pueda suprimir la propagación de ondas en un cierto rango de frecuencia, con el objetivo de evitar la vibración en un medio infinitamente periódico (en el plano de la placa tipo sándwich), suponiendo que esta placa se réplica en el plano de manera infinita.

1.1. Motivación

La motivación de este trabajo surge de evitar la propagación de ondas mecánicas en placas tipo sándwich, utilizando una mezcla de dos tipos de materiales novedosos en la literatura, por un lado las denominadas estructuras fonónicas, mientras que por el otro, los materiales celulares. En este trabajo se desea diseñar, modelar y optimizar un material tipo sándwich, es decir con tres capas, que sería las capas delgadas exteriores y el núcleo. Este material debe ser capaz de aislar las vibraciones en un espectro de frecuencias, suprimiendo las ondas mecánicas gracias a su periodicidad de celdas.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Diseñar y optimizar panel tipo sándwich periódico con un núcleo hecho de arquitectura celular cuadrada, con la capacidad de aislar vibraciones mecánicas en el plano del material.

1.2.2. Objetivos específicos

- Formular el problema de optimización maximizando el band gap variando las propiedades del núcleo del material tipo sándwich, las que son las propiedades de área y el material en si mismo de cada elemento viga.
- Realizar un análisis con un enrejado en 2D para observar cómo se comporta la maximización de bandgap en este tipo de estructuras.
- Evaluar como se comporta la optimización 2D en función del número de celdas.
- Evaluar como se comporta la optimización en el panel en función de las bandas a optimizar.

1.3. Alcances

Este trabajo pretende influir en el diseño y optimización del panel sándwich, por lo tanto, presentará un amplio trasfondo matemático y teórico sobre el diseño, optimización del material y también entregando distintas opciones y grados de libertad de diseño para este. En consecuencia, todo lo que tiene que ver con la confección del material no se llevará a cabo, tales como el proceso de manufactura y el ajuste de modelo de la estructura.

Capítulo 2

Antecedentes generales

A continuación se presentan diversos tópicos y teoría necesaria para poder entender el trabajo a cabalidad. En primer lugar se presentan los paneles tipo sándwich y materiales celulares, los cuales dan la forma al material que se desea optimizar, luego, se desarrolla brevemente el trasfondo de las estructuras fonónicas y teoría de materiales periódicos, para obtener un band gap. Finalmente se introduce lo que es optimización topológica, la cual sirve para poder optimizar la estructura, ver que variables se modificaran en la optimización y en adición a esto se habla brevemente del algoritmo de optimización a emplear en este problema.

2.1. Paneles sándwich

Los paneles sándwich son estructuras con múltiples capas, que tienen dos láminas delgadas en los extremos, las que poseen alta densidad y rigidez, las cuales a su vez rodean un núcleo de baja densidad. La Figura 2.1 presenta un panel tipo sándwich y su composición, incluyendo el adhesivo para unir el núcleo con las láminas exteriores.

Con respecto a las propiedades mecánicas de los paneles sándwich, la rigidez a la flexión es mucho mayor que tener una sola placa con el mismo peso del panel a lo mismo con la resistencia a la flexión. La tabla 2.1 muestra la rigidez a flexión y su resistencia, en comparación con una placa sólida.

La función de las placas de los extremos es resistir los esfuerzos de tracción y compresión en el sándwich, la resistencia a la flexión es tan pequeña que puede ser despreciada en estas placas. Por otro lado, el núcleo debe tener rigidez suficiente a lo largo del material como para mantener la distancia entre las placas constante y suficiente rigidez en corte como para asegurar que cuando se doble el panel no ocurra deslizamiento entre si, porque o si no, las placas se comportaran como si no hubiera un núcleo.

Estos paneles han demostrado ser altamente aplicable en diseño mecánico de ingeniería cuando se requiere de materiales con una buena relación masa - rigidez [1],[8], incluyendo la industria aeroespacial [33].

Estos paneles también se emplean por sus increíbles propiedades vibroacusticas [7], las cuales son cuantificadas calculando indicadores como la pérdida de transmisión de sonido (Sound transmission loss) y la eficiencia de radiación (sound efficiency), los cuales dependen de la superficie que emite esta onda (material y condiciones de borde) y del medio que se este inmerso. Diversos artículos han buscado optimizar paneles sándwich, minimizando la transmisión de sonido calculando una función objetivo que depende de las variables de

Tabla 2.1: Ejemplificación de la eficiencia de los paneles tipo sándwich en relación a su peso.[34]

			
Rigidez a la flexión relativa	1	7.0	37
Resistencia a la flexión relativa	1	3.5	9.2
Peso relativo	1	1.03	1.06

diseño del panel (problema de valores y vectores propios), de esa forma optimizándolo. Por ejemplo Denli & Sun [10] optimizaron, un panel con un núcleo celular hecho de elementos tipo barra (Truss), también Thamburaj & Sun [31] optimizó un panel con núcleo de elementos viga (beam), finalmente Denli & Sun [9] proponen una metodología para llevar a cabo esta optimización, la cual detalla desde el análisis estructural, acústico hasta la optimización. Este análisis solo es aplicable a una estructura, por lo que, si se desea optimizar una gran estructura será muy costoso computacionalmente.

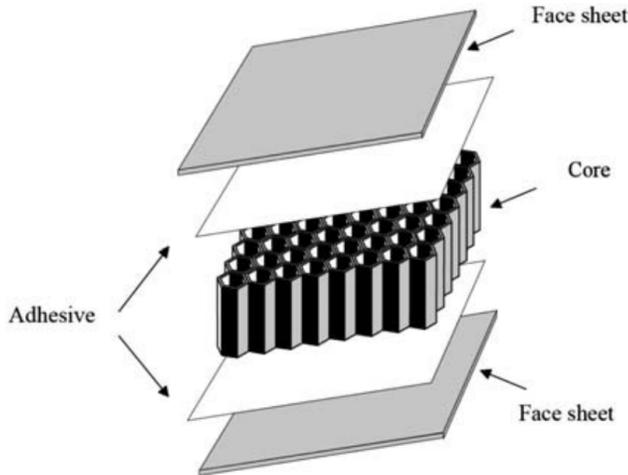


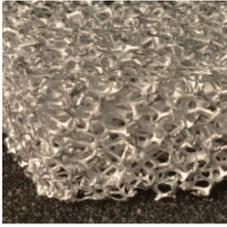
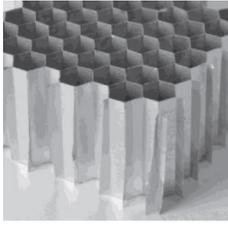
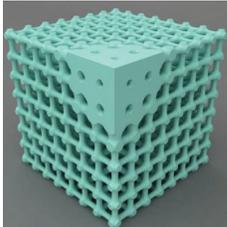
Figura 2.1: Esquema de panel tipo sándwich.[7]

2.2. Materiales celulares

Se definen como materiales formados por arreglos periódicos o estocásticos de celdas, cerradas o abiertas, las que pueden representar en su interior configuraciones de celdas en 2D (honeycomb) o 3D (lattice) [20]. La naturaleza emplea materiales celulares en ocasiones en las cuales se necesita tener una baja densidad, en adición con una alta rigidez y resistencia, en estos casos utiliza geometrías complejas con ligamentos y gradientes de densidad. En la actualidad, gracias a los avances en la manufactura aditiva, se han logrado crear complejas

arquitecturas celulares, combinando espacios vacíos y sólidos de maneras muy complejas, como también diversos tipos de plástico y materiales. En la Tabla 2.2 se esquematiza la relación entre de la complejidad del material, las propiedades y la cantidad de variables de diseño que pueden llegar a poseer estos materiales [23].

Tabla 2.2: Propiedades y número de grados de libertad en el diseño, en función de la complejidad de la arquitectura celular del material.[23]

				
Arquitectura celular	Ninguna	Aleatoria	Ordenada	Ordenada y con ubicaciones específicas
Propiedades	Continuo y homogéneo	Homogéneo en escalas superiores al tamaño de la celda	Homogéneo y altamente anisótropo	Inhomogéneo y altamente anisótropo
Variables de diseño	Material	Material y tamaño de celda	Material, Tamaño de celda y orientación	Tamaño de celda, forma, topología de los nodos, forma del ligamento, material, entre otros.

Entre todas las posibles aplicaciones estructurales que poseen este tipo de materiales, ser usados para núcleo de paneles tipo sándwich es una de las más importante. Como se indicó anteriormente, las estructuras tipo sándwich son usadas ampliamente cuando se necesita un material liviano, en especial cuando se trata de la industria aeroespacial. Dicho lo anterior solamente colocando 2 capas delgadas de material rígido en los bordes de un material celular se pueden crear distintos tipos de materiales tipo sándwich como indica [35], no solo presentándolos, si no también indicando procesos de manufactura convencionales para poder llevarlos a cabo, por ejemplo se presenta la Figura 2.2

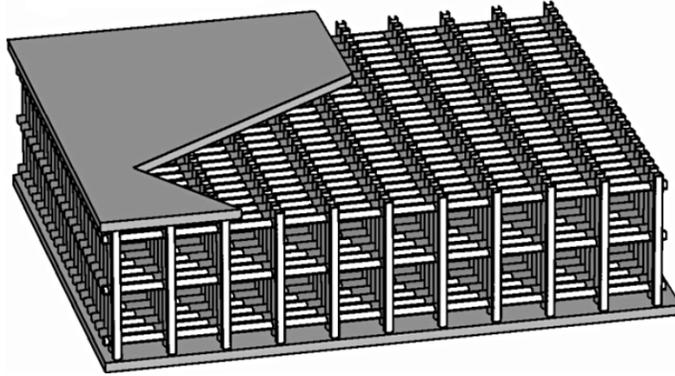


Figura 2.2: Ejemplos de topología de núcleo de panel tipo sándwich con materiales celulares.[35]

Con respecto a la manufactura, si bien, se pueden manufacturar convencionalmente arquitecturas celulares, estas son muy limitadas en diseño y además el costo de configurar previamente los equipos de manufactura (setup) son extremadamente alto. Por esto último, la manufactura aditiva surge como una alternativa de crear materiales que antes era imposibles de fabricar y/o muy caros. La Tabla 1 que muestran Schaedler & Carter en [22] compara diversos tipos de manufactura aditiva y sus posibles aplicaciones en la arquitectura de los materiales celulares, en lo que se pueden destacar comparación entre variar el material, posibilidad de mezclar materiales, geometría, aplicación, entre otras características que pueden ser consideradas como variables de decisión al momento de optimizar.

2.3. Band gap fonónico

El band gap fonónico en los materiales consiste en un cierto rango de frecuencia, en el que las ondas mecánicas son suprimidas por completo, en un material periódico, denominado en el literatura cristal fonónico [11], [36] o simplemente materiales con band gap fonónico [28]. Sigalas [26] notó la existencia de estos band gaps, concluyendo que estos eran un efecto combinado de la difracción de Bragg y de Scattering de las ondas, los cuales son mecanismos activados por la geometría y periodicidad del material.

Estos materiales para poder estar definidos se necesita de un vector de ondas \mathbf{k} , el cual entrega información de la repetición de la celda (forma de la celda y que simetría tiene). Por lo tanto, a partir de una celda unitaria se puede expresar en el diagrama de bandas el cual consiste en básicamente graficar los valores propios o frecuencias naturales en función de un vector de ondas.

A modo de ejemplo para observar el diagrama de bandas y como la celda unitaria la afecta, se presentan algunas estructura utilizadas por Yi [36] en las que modeló la propagación de ondas elásticas en el plano $x-y$ con dos materiales (verde es aluminio y el azul tungsteno), suponiendo simetrías reflectivas en el eje horizontal, eje vertical y una simetría con respecto a una recta que pasa por el centro en 45° (esto se detallará en la sección 2.4). La Figura 2.3.(a), (b) y (c) son las celdas unitarias con diversos patrones y (d), (e) y (f) su diagrama de bandas respectivo.

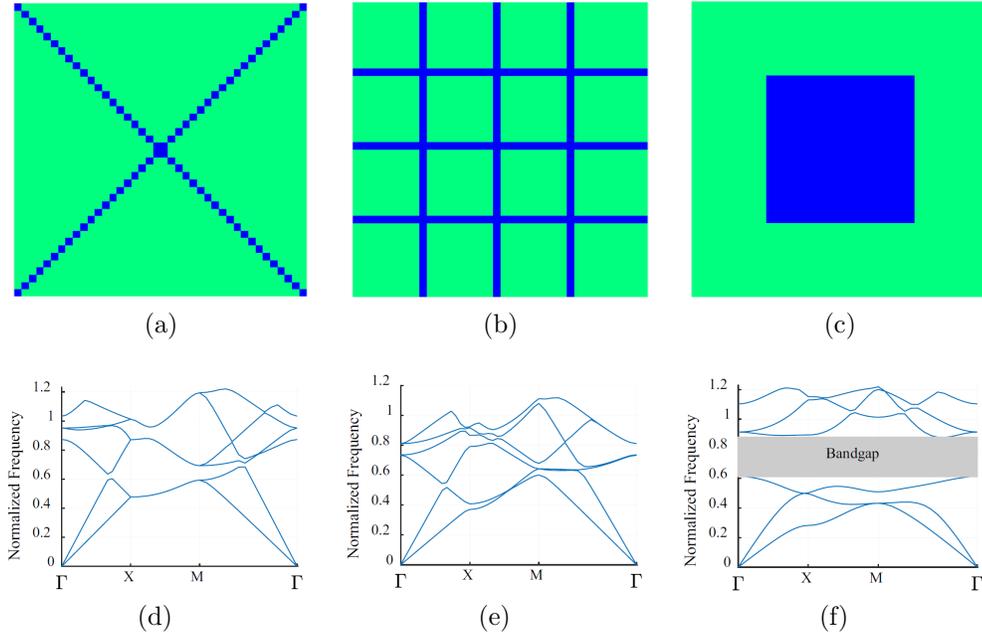


Figura 2.3: Ejemplo de estructuras y diagrama de bandas.[36]

Cómo se observa cada estructura con periodicidad, en teoría infinita, tiene un diagrama de bandas asociado, pero solo la estructura 2.3.(c) posee una zona dónde no hay bandas que se traslapen, a esto se le denominará band gap, y en ese rango de frecuencias no hay propagación de ondas mecánicas.

También hay estudios, como el hecho por Liebold-Ribeiro & Körner [18], en el cual analizan distintas geometrías celulares con ciertos patrones de celdas hechas con elementos unidimensionales, en las que estudia cuadriláteros y hexágonos con simetría regular, inversa y quiral, con el objetivo de encontrar cual es la que genera un band gap mayor, concluyendo que solo las geometrías quirales presentan bandgap de manera natural (con solo un material y espesor) y en distintas frecuencias.

2.4. Teoría de materiales periódicos

A continuación se impondrán las condiciones de bordes que permiten simular periodicidad infinita, esta teoría consta de diversos pasos que son detallados a continuación. Cabe destacar que en esta oportunidad se utilizará una estructura hecha de elementos unidimensionales (truss o beam) para ejemplificar, porque este es el tipo de estructuras que se utilizarán en este trabajo, pero esta teoría ha sido ampliamente utilizada en elementos 2D y 3D.

En primer lugar se debe describir la celda a estudiar, a modo de ejemplificación estudiará la celda de la Figura 2.4.(b) que esta hecha de una malla de 4×4 celdas básicas definidas en la Figura 2.4.(a) la cual, a su vez, está hecha de 4 elementos unidimensionales conectados de forma tal que forman un cuadrado, dónde los nodos están marcados por los círculos grises. La estructura de la Figura 2.4.(b) es la que en teoría posee una periodicidad infinita, tanto en el eje x como en el y.

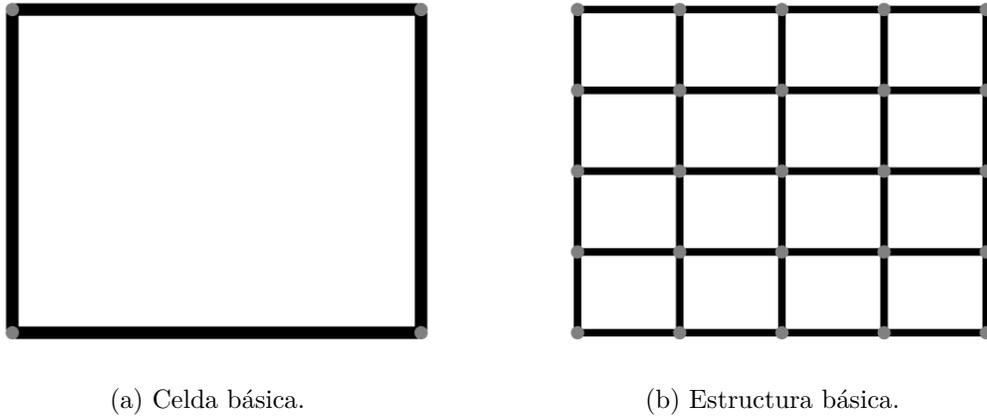


Figura 2.4: Geometría de las estructuras.

El siguiente paso es definir los vectores del arreglo directo, los cuales serán denotados por t_1 y t_2 , ambos son perpendiculares entre si como muestra la Figura 2.5.(a) Esta Figura también describe el largo y ancho de la celda, que en el caso del ejemplo, es un cuadrado de largo y ancho L . Luego, a partir de lo anterior se puede definir el vector recíproco del arreglo el cual se muestra en la Figura 2.5.(b). Estos vectores se denotan con las letras T_1 y T_2 , nuevamente ambos son perpendiculares y, además ambos poseen una magnitud igual a $2\pi/L$. Cabe destacar que, para una formulación mas simple, vectores ambos están definidos centrados en el punto $(0,0)$ del plano cartesiano.

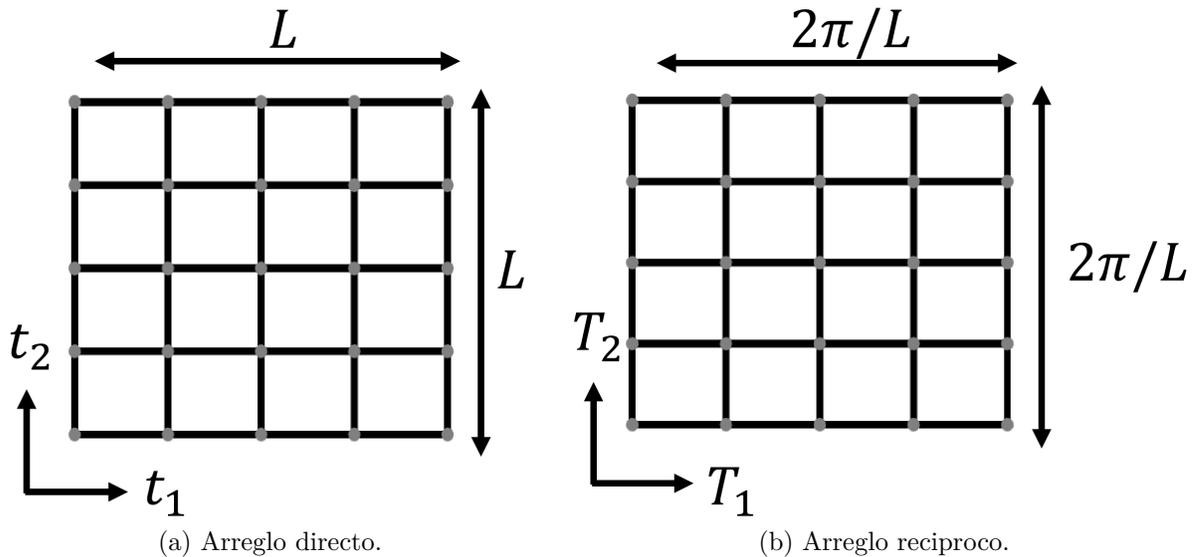


Figura 2.5: Tipos de arreglos.

Ahora el tercer paso es explotar la simetría reflectiva de los arreglos con respecto al centro. Primero que todo, en el arreglo directo se puede ver fácilmente que posee reflexión izquierda/derecha como también arriba/abajo, y finalmente tiene simetría 45° , todas con respecto al centro. Este mismo ejercicio puede ser realizado con el arreglo recíproco del cual se obtiene la zona irreducible de Brillouin [5] (ZIB). Este ejercicio de simetría también tiene por objetivo reducir el número de variable, para así reducir el costo computacional que posee este tipo de problemas.

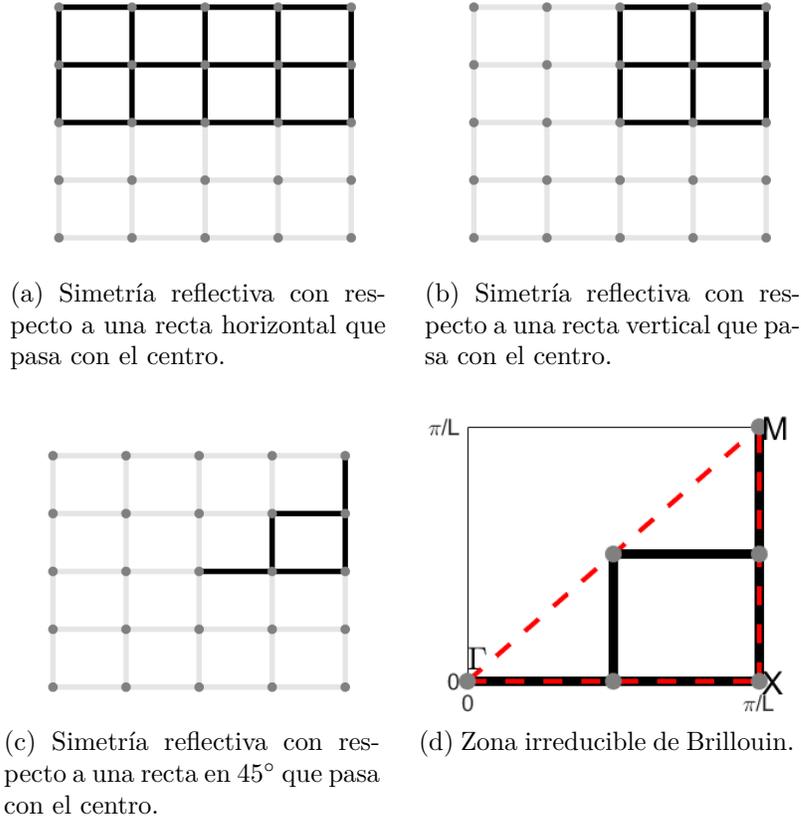


Figura 2.6: Simetría reflectiva y zona irreducible de Brillouin.

Los vértices del triángulo de la zona irreducible de Brillouin serán denotados por las letras griegas Γ , M y X , luego un vector de onda \mathbf{k} puede ser definido a partir del perímetro del camino cerrado que se recorre al rededor de la ZIB. El recorrido comienza en Γ , X , M para finalmente retornar a Γ , esto se muestra en la Figura 2.6.(d). Este ejercicio de encontrar la simetría y el vector de ondas asociado a la ZIB puede ser bastante complejo en el caso tridimensional como muestra Setwayan & Curtarolo en [24]. Obtenido el vector \mathbf{k} , esa información se utiliza para aplicarla en el teorema de Bloch y, este a su vez, se utiliza para imponer condiciones de borde de periodicidad infinita de la forma siguiente:

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{R}_j) = u(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j}. \quad (2.1)$$

En la que \mathbf{R}_j es la periodicidad de la celda en la coordenada j , u son los grados de libertad correspondiente a ese nodo, \mathbf{k} el vector de ondas definido en la ZIB e i la componente imaginaria.

Lo interesante es que esta ecuación es que al imponerla como condición de borde lo que hace es analizar la respuesta de una estructura infinitamente periódica frente a ondas mecánicas incidentes de cualquier largo y dirección.

2.4.1. Imposición de la periodicidad infinita

Utilizando el método de elemento finitos [2], es posible incorporar la condición descrita por la ecuación (2.1). Para llevar a cabo la imposición, se utilizará la metodología presentada por Langlet [17]. En primer lugar la geometría que se utilizará para emplear la condición

de borde, será la presentada en la Figura 2.4.(b) de la sección anterior la cual consiste de elementos unidireccionales tanto en la dirección x como en y .

El vector de ondas \mathbf{k} posee dos coordenadas (como en ejemplo está en el plano 2D), el cual se puede escribir como $\mathbf{k} = k\sin\theta\hat{x} + k\cos\theta\hat{y}$, este vector se mueve al rededor de la ZIB. Utilizando la Figura 2.7 como referencia, se puede imponer el teorema de Bloch con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 u_T &= u_B e^{iLk\cos\theta} \\
 u_R &= u_L e^{iLk\sin\theta} \\
 u_{BR} &= u_{BL} e^{iLk\cos\theta} \\
 u_{TL} &= u_{BL} e^{iLk\sin\theta} \\
 u_{TR} &= u_{BL} e^{iLk(\cos\theta+\sin\theta)}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

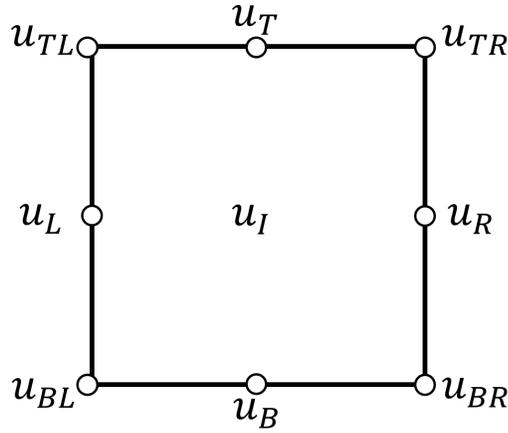


Figura 2.7: Nodos en el borde.

El nodo u_L corresponde a todos los nodos en el borde izquierdo, u_R a los de la derecha, u_B los de la zona inferior y u_T a los de la zona superior. Esos vectores no toman en consideración los bordes los cuales son denotados por u_{BL} , u_{BR} , u_{TL} y u_{TR} . El resto de los nodos será llamados nodos internos y son estarán definidos por u_I .

Debido a relación de Bloch el número de variables se reduce con la relación $\mathbf{u} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{u}}$, en la que \mathbf{u} es el vector de todos los grados de libertad de los nodos [21], $\tilde{\mathbf{u}}$ el vector reducido. Estos vectores se definen como :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_R \\ u_B \\ u_T \\ u_{BL} \\ u_{TL} \\ u_{BR} \\ u_{TR} \\ u_I \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_B \\ u_{BL} \\ u_I \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Mientras tanto, la matriz \mathbf{T} esta dada por la ecuación,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Ie^{iLk\sin\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Ie^{iLk\cos\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{iLk\sin\theta} & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{iLk\cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{iLk(\sin\theta+\cos\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Con la matriz global de masa \mathbf{M} y la de rigidez \mathbf{K} ensambladas, es posible expresar el problema de valores y vectores propios como:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_i = 0 \quad \mathbf{k} \in [\Gamma, X, M, \Gamma], \quad (2.5)$$

Dónde λ_i corresponde al i -esimo valor propio relacionado a la frecuencia natural ω_i usando la relación $\lambda_i = \omega_i^2$, y \mathbf{u}_i el i -esimo vector modal asociado. La condición de borde se impone multiplicando la matriz \mathbf{T} y su transpuesta \mathbf{T}^T en la formulación del problema de valores y vectores propios como sigue,

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} - \omega_i^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}) \mathbf{u}_i &= 0 \\ (\mathbf{K}' - \omega_i^2 \mathbf{M}') \tilde{\mathbf{u}}_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

En dónde $\mathbf{K}' = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ es la matriz de rigidez con las condiciones de bordes impuestas y $\mathbf{M}' = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ la de masa con las condiciones de borde impuestas.

En este caso solo se desarrolló el caso 2D, pero el caso 3D es similar (suponiendo que es la misma zona irreducible de Brillouin), solo hay que incorporar un camino en la dirección \hat{z} igual a cero para que solo sea plano.

2.4.2. Imposición de la simetría

Cuando se introduce la zona irreducible de Brillouin, se hace mención a las simetrías reflectivas con respecto al centro. Estas se deben imponer para que sea consistente el problema, por lo mismo, se imponen utilizando una matriz de reducción que cumple la misma función que la matriz introducida en la ecuación (2.4). Para hacer la sencilla la introducción de esta matriz, en primer lugar se presenta Figura 2.8, en al cual se toma la misma estructura estudiada en la Figura 2.4 pero en este caso se analizan cuales son las vigas que están relacionadas entre si para respetar la simetría de la Figura 2.6. Nuevamente para poder realizar el ejercicio de la simetría se debe suponer que tanto el ancho y el largo de la estructura es el mismo, el cual se llamará L_c , también el refinamiento debe ser el mismo en ambos ejes, el cual estará representado por n_c .

Las vigas del mismo color son las que están relacionadas entre si para imponer la simetría.

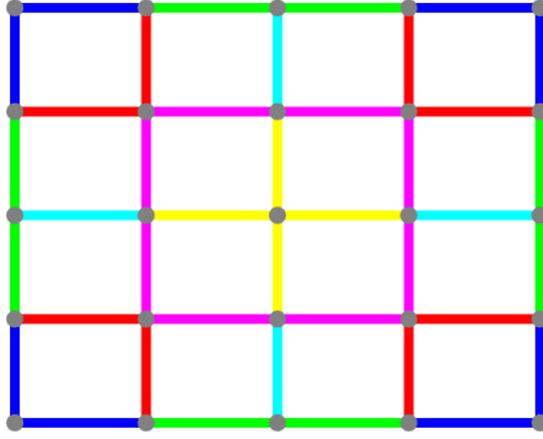


Figura 2.8: Elementos unidimensionales con simetría reflectiva horizontal, vertical y en 45° con respecto al centro, en cual los elementos del mismo color están relacionados.

Ahora se calcularán el número de elementos totales y el número de elementos luego de aplicar la reducción en la Figura 2.8. El número total de elementos está dado por la expresión:

$$N_{e_{tot}} = N_{e_{horizontal}} + N_{e_{vertical}} = n_c \times (n_c + 1) + (n_c + 1) \times n_c \quad (2.7)$$

y el número de variables reducidas está dado por la expresión:

$$N_{e_{red}} = \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2} + \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2} \quad (2.8)$$

En este caso $N_{e_{tot}} = 40$ y $N_{e_{red}} = 6$, por lo se reduce drásticamente el número de variables para definir la estructura.

La dimensionalidad es reducida con la expresión $\tilde{x} = Sx$, donde S es la matriz de reducción, \tilde{x} el vector de variables reducido y x todas las variables. También esto se puede aplicar para obtener el vector x en función de \tilde{x} multiplicando por la traspuesta de S .

2.5. Optimización topológica

La optimización estructural dicho en palabras muy sencillas es tratar de utilizar algoritmos de optimización, ya sea basado en gradientes o no, para optimizar una estructura, la cual comúnmente es modelada por el método de elementos finitos [2]. En primer lugar hay que distinguir 3 tipos de optimizaciones estructurales [4], la optimización de tamaño (sizing optimization), optimización de forma (shape optimization) y optimización topológica, la Figura 2.9 se muestra un ejemplo de estas. En palabras simples la optimización de tamaño juega con un mallado inicial de barras (Truss) para luego elegir cuales son las barras necesarias para obtener una estructura óptima y cuales no. En segundo lugar la optimización de forma trata de encontrar una geometría que satisfaga las condiciones del problema modificando estos espacios abiertos en la estructura. Este tipo de optimización es bastante compleja de realizar con elementos finitos tradicionales por lo que, es muy común utilizar un análisis isogeométrico [6] ya que facilita la modificación de un contorno. Finalmente la optimización topológica vela

por una configuración óptima entre vacíos y espacios llenos en un dominio inicial.

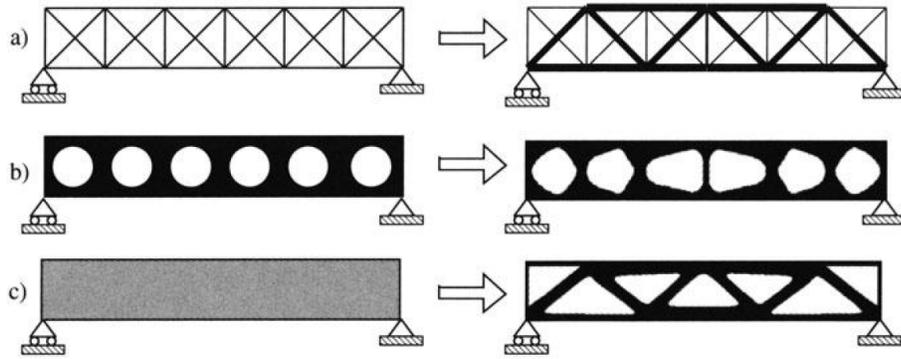


Figura 2.9: Las tres categorías en optimización estructural. a) Optimización de tamaño en una estructura de barras, b) Optimización de forma y d) optimización topológica. La malla inicial se muestra en la izquierda y la derecha está la optimizada.[4]

Si bien se hace una clara distinción entre la optimización de tamaño y topológica, en la literatura estas se tratan de manera indistinta la una de la otra, ya que trata la estructura hecha por las barras como una topología a optimizar.

Los pasos para realizar optimización estructural se encuentran en la Figura 2.10, en donde se detalla el diagrama de flujo a seguir, en primer lugar se modela la naturaleza del problema, generalmente con el método de elementos finitos. Posteriormente si se va a utilizar un algoritmo de optimización basado en gradiente, se debe calcular este valor, para seguir con el algoritmo como tal y actualizar el valor del vector de variables de decisión, si el valor converge bajo cierto criterio se realiza el post-procesamiento, que en la mayoría de los casos consiste en eliminar elementos cuya ponderación sea nula, si no converge se recalcula el problema con el vector de variables de decisión nuevo.

Hay muchos mas problemas en la optimización estructural como la dependencia de la malla, ya que a medida que se refina mas un espacio, la solución se va refinando con ella o inclusive el problema del tablero de ajedrez en el problema del cumplimiento mínimo [27], por lo que este tema no puede evitarse cuando se optimizan estructuras.

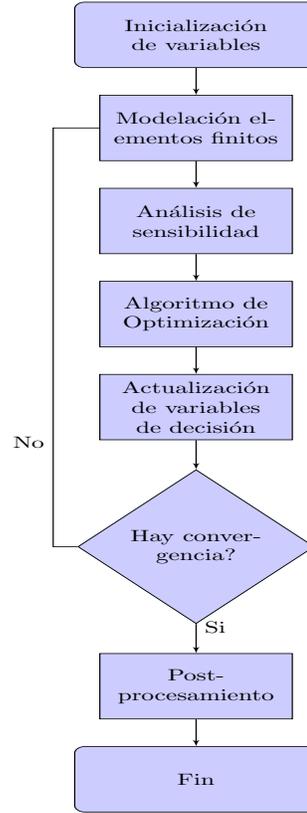


Figura 2.10: Diagrama de flujo para la optimización estructural.[4]

2.6. Algoritmos de optimización

Para resolver el problema de maximizar band gap en estructuras se han utilizado algoritmos genéticos [12], como también, algoritmos basados en gradientes [36], como lo son el método de las asintotas móviles (MMA) [29] y el método globalmente convergente de las asintotas móviles (GCMMA) [30], a continuación se explicará brevemente en que consisten.

El MMA y GCMMA buscan resolver el problema no lineal de optimización de la ecuación (2.11), en el cual, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ y $z \in \mathbb{R}$.

$$\text{Min } f_0(\mathbf{x}) - a_0 z + \sum_{i=1}^m (c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2) \quad (2.9)$$

$$\text{t.q } f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

$$\mathbf{x} \in X, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (2.11)$$

En la que, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, \dots, n\}$, donde x_j^{\min} y x_j^{\max} son números reales que cumplen que $x_j^{\min} \leq x_j^{\max}$ para todo j , además, f_0, f_1, \dots, f_m son funciones continuas diferenciables con valores reales en el dominio X , también, a_0, a_i, c_i y d_i son valores reales que satisfacen que $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$, $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$ y $c_i + d_i > 0$ para todo i , cumpliendo también que, $a_i c_i > a_0$ para todo i con $a_i > 0$.

En el problema (2.11) las variables x_1, \dots, x_n son denominadas naturales, mientras que, y_1, \dots, y_m y z son variables artificiales creadas para hacer más fácil la formulación de problemas

de mínimos cuadrados, minmax [30].

Suponiendo que en este caso se quiere resolver el problema estándar de optimización no lineal de la ecuación (2.14). Para hacer la optimización (2.11) equivalente a (2.14) se toma que $a_0 = 1$ y $a_i = 0$ para todo i . Luego, $z = 0$ en cada solución óptima de (2.11), además dejando que $d_i = 1$ y c_i sea un número relativamente grande, hará que \mathbf{y} se vuelva una variable muy costosa, logrando que cada una de las componentes de ese vector se haga 0.

$$\text{Min } f_0(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\text{t.q } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x} \in X. \quad (2.14)$$

Para entender el GCMMA primero se debe tener claro como funciona el MMA. El MMA soluciona problemas de optimización de la forma (2.11) de la siguiente forma: En cada iteración el punto $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, z^k)$ está dado. Luego, se aproxima utilizando un sub-problema en el cual las funciones f_i son reemplazadas por una función convexa $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$. La elección de estas funciones están basadas en su gradiente y los parámetros $u_j^{(k)}$ u $l_j^{(k)}$ que son las llamadas asíntotas móviles (he ahí su nombre), las cuales son actualizadas en cada iteración por el punto $k - 1$. El sub-problema es resuelto y la única solución óptima se vuelve el siguiente punto de iteración $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, z^{k+1})$, y así sucesivamente hasta un cierto criterio de convergencia. De una forma muy parecida trabaja el GCMMA, el cual también resuelve el problema (2.11) con iteraciones internas y externas. El índice k será utilizado para denotar a las iteraciones externas y el ν para las internas, luego, el doble índice (k, ν) se refiere a la ν -ésima iteración interna en la k -ésima iteración externa.

Dado un punto $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, z^k)$, este genera un subproblema es resuelto. En el subproblema, semejante al MMA, la función f_i es reemplazada por una función convexa $\tilde{f}_i^{(k,0)}(\mathbf{x})$. El óptimo de este subproblema se denota como $(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,0)}, \hat{z}^{(k,0)})$. Si $\tilde{f}_i^{(k,0)}(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}) \geq f_i(\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}) \quad \forall i = 0, 1, \dots, m$, la siguiente iteración se vuelve $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)}) = (\hat{\mathbf{x}}^{(k,0)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,0)}, \hat{z}^{(k,0)})$, lo que implica que un iteración externa es completada. En caso contrario, una iteración interna es realizada, lo que implica que un nuevo subproblema es generado y resuelto con $\mathbf{x}^{(k)}$, con la aproximación $\tilde{f}_i^{(k,1)}(\mathbf{x})$, la cual es mas conservadora que $\tilde{f}_i^{(k,0)}(\mathbf{x})$ para los índices que no cumplan la desigualdad. La solución óptima del subproblema es denotada como $(\hat{\mathbf{x}}^{(k,1)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,1)}, \hat{z}^{(k,1)})$. Si $\tilde{f}_i^{(k,1)}(\hat{\mathbf{x}}^{(k,1)}) \geq f_i(\hat{\mathbf{x}}^{(k,1)}) \quad \forall i = 0, 1, \dots, m$ el siguiente punto es $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)}) = (\hat{\mathbf{x}}^{(k,1)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,1)}, \hat{z}^{(k,1)})$ y la iteración externa es completa, llevando a cabo una iteración interna. En caso que nuevamente no se cumpla la desigualdad, se genera un nuevo problema con las funciones $\tilde{f}_i^{(k,2)}(\mathbf{x})$. Estas iteraciones internas son llevadas a cabo hasta que $\tilde{f}_i^{(k,\nu)}(\hat{\mathbf{x}}^{(k,\nu)}) \geq f_i(\hat{\mathbf{x}}^{(k,\nu)}) \quad \forall i = 0, 1, \dots, m$, lo cual siempre ocurre luego de un número finito (relativamente pequeño) de iteraciones. El siguiente punto se vuelve $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)}, z^{(k+1)}) = (\hat{\mathbf{x}}^{(k,\nu)}, \hat{\mathbf{y}}^{(k,\nu)}, \hat{z}^{(k,\nu)})$ y una iteración externa es llevada a cabo. Para saber como se calcula la función $\tilde{f}_i^{(k,\nu)}(\mathbf{x})$ utilizando las asíntotas móviles, esto se encuentra en [30], lo cual por temas de extensión no se incluye.

Capítulo 3

Formulación

En este capítulo se abordará la formulación del problema de optimización en el material celular para lograr una supresión de vibraciones mecánicas. En primer lugar se define la geometría del núcleo, como se imponen las condiciones de borde, la periodicidad y todas las consideraciones para el método de elementos finitos, luego, se desarrolla el problema de optimización, utilizando conceptos de la optimización topológica y teoría de materiales periódicos. A continuación, se presenta la sensibilidad de los valores propios, teniendo cuidado con la no diferenciación de estos, aplicando la norma p . Finalmente se presenta la forma de elegir los puntos iniciales en el algoritmo de optimización de forma que sean completamente aleatorias y equidistantes a la misma vez, con el objetivo de ser lo mas representativo del dominio posible.

3.1. Modelación del panel tipo sándwich

3.1.1. Geometría

La geometría esta inspirada en el creciente estudio de materiales celulares los cuales apuntan a obtener una buena relación entre las propiedades deseadas y el peso que este pueda obtener. La Figura 3.1 presenta cómo se dividen estas estructuras, dónde en la zona superior e inferior son placas y, en el centro, el núcleo que consiste en un enrejado, con el objetivo de reducir el peso del panel. Se supone que ambos están perfectamente unidos entre si, evitando así el modelar un adhesivo.

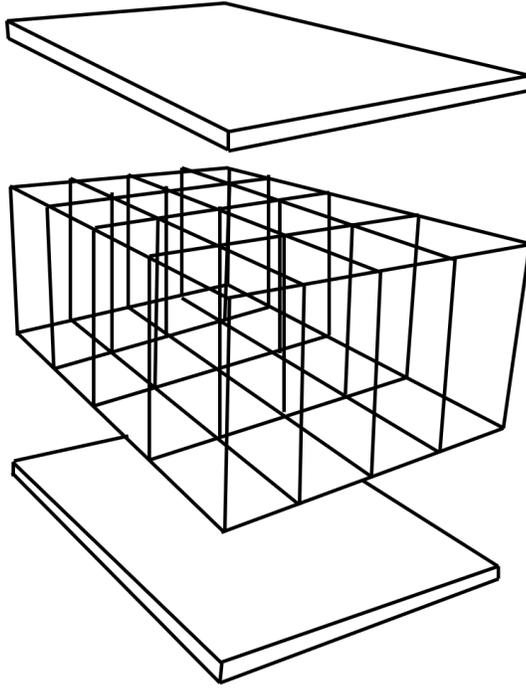


Figura 3.1: Ejemplo de panel sándwich con dos láminas exteriores y un núcleo enrejado.

El enrejado formado por el núcleo se define por capas de elementos interconectados de tal forma que generan un cuadrado en el plano $x - y$, cuyas celdas pueden ir variando en número en función del refinamiento deseado. Para realizar este apilamiento entre capas, en los nodos de manera ortogonal al plano, se generan elementos con el objetivo de crear otro plano con sus nodos, lo que hace finalmente obtener una estructura enrejada, con la posibilidad de variar la cantidad de vigas en el eje z . Para ser más preciso matemáticamente, el número de celdas en los tres ejes estará definido por n_x , n_y y n_z , además el ancho, largo y altura se definen por L_x , L_y y L_z , respectivamente. Un punto importante es que se supondrá que $n_c = n_x = n_y$ y $L_c = L_x = L_y$ con el objetivo de utilizar el vector de ondas en el plano $\mathbf{x-y}$ definido en la sección 2.4, sin tomar en cuenta la componente en z .

En la Figura 3.2, se observan ejemplos en los que se varían n_c y n_z con el objetivo de hacer más clara la definición de las estructuras.

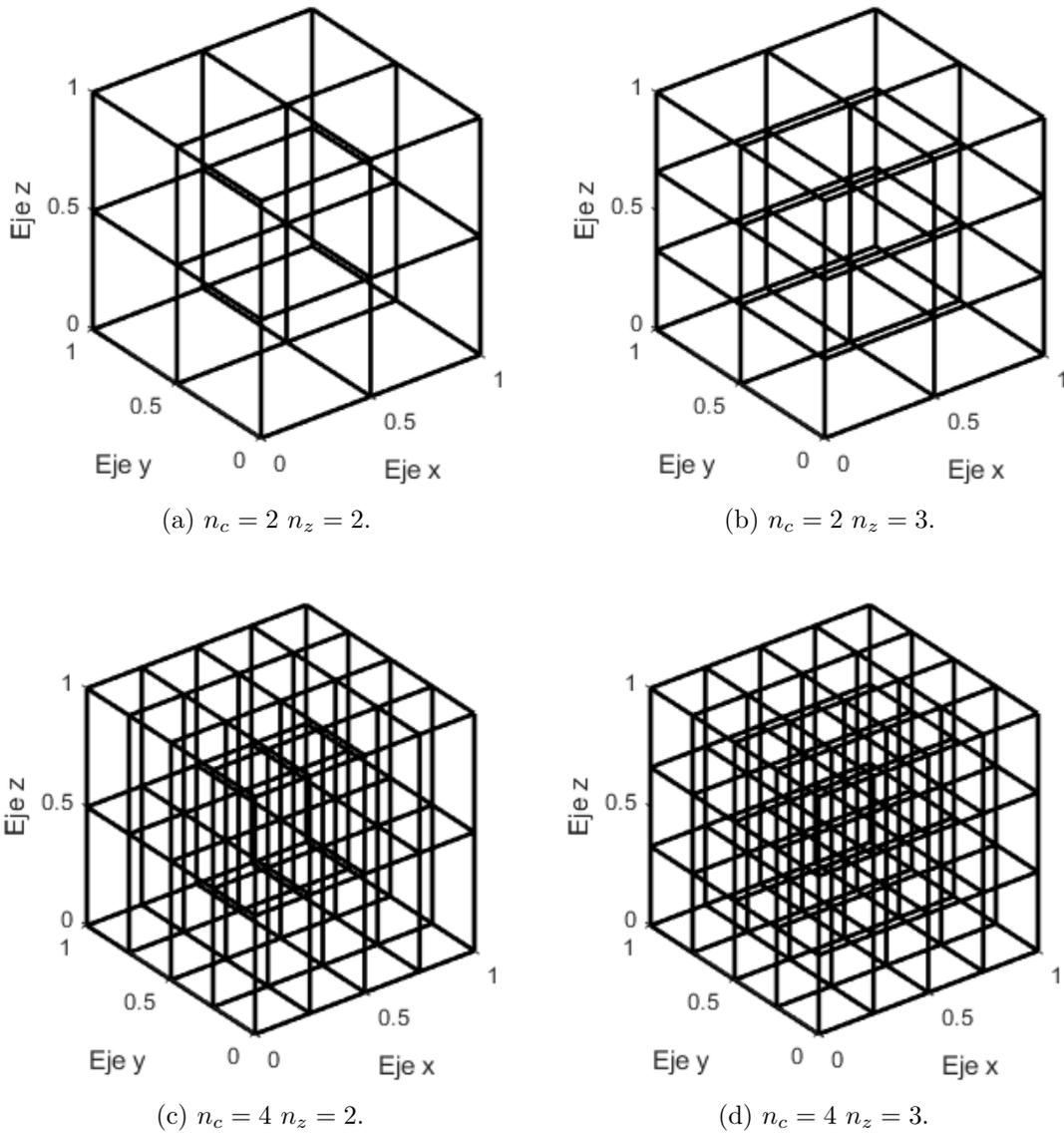


Figura 3.2: Vista isométrica del núcleo del panel sándwich con distintos número de celdas n_c y n_z .

3.1.2. Modelación por el método de elementos finitos

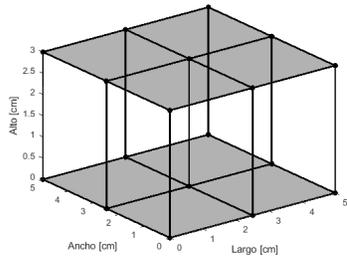
Los elementos que se utilizarán para modelar la estructura de la Figura 3.1 serán tipo placa de Reissner-Mindlin en las láminas, por otro lado el núcleo se modelará con un enrejado hecho de elementos tipo viga (frame) [16] suponiendo que ambos están perfectamente unidos como se comentó anteriormente, para así evitar la formulación de algún adhesivo.

Para generar las matrices de masa y rigidez globales se deben ensamblar las matrices locales respectivas, el problema surge cuando se ensamblan tipos de elementos distintos, como en este caso viga y placa, ya que ambos poseen distintos grados de libertad asociados a cada nodo. El número de grados de libertad asociados a los elementos viga es 6, en los cuales 3 corresponden a rotaciones y los otros 3 a las traslaciones, en cambio, el elemento placa posee solo 5 grados de libertad, en los que 3 son traslaciones y 2 rotaciones. La diferencia

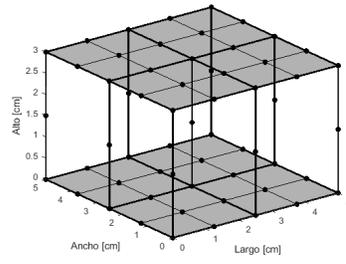
radica en que el elemento placa no incluye la rotación fuera del plano. Lo que se hace en este caso es sumar los grados de libertad, si bien el elemento placa no puede tener esta rotación, al momento de ensamblarlo con el elemento viga, esta rotación está incluida en este sistema acoplado.

3.2. Mallado y sensibilidad del diagrama de bandas

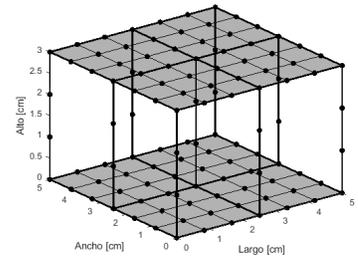
Como todo análisis en elemento finitos, un análisis de sensibilidad de la malla es necesario para ver que tan fina debe ser mallada la estructura de forma que los resultados no varíen en función de esta. En primer lugar se explicará la forma en la que se refina la estructura para, después, observar como esto afecta al diagrama de bandas y que métrica se utiliza cuantificar el error entre bandas. En la Figura 3.3 presenta la estructura con el número de celdas unitarias $n_c = 2$, $n_z = 1$ en función de n_{ref} y con dimensiones $L_c = 5[cm]$ y $L_z = 3[cm]$, en la cual se observa cómo el número de nodos aumenta a medida que se refina cada una de las vigas y, por consecuente, las placas de los extremos. El material empleado en las vigas es tungsteno y en las placas de los bordes es aluminio, cuyas especificaciones se detallan en la Tabla 4.1. Los diagramas de bandas de las respectivas estructuras están presentes en la Figura 3.4 en la que se presenta una clara convergencia a medida que se refinan las bandas, cabe destacar que solo se estudian las primeras 6 bandas, osea, las primeras 6 frecuencias naturales en función del vector de ondas.



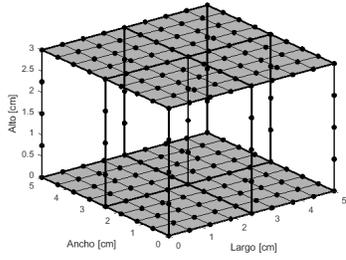
(a) $n_{ref} = 1$.



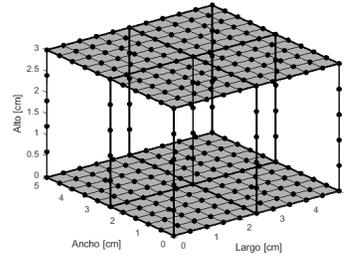
(b) $n_{ref} = 2$.



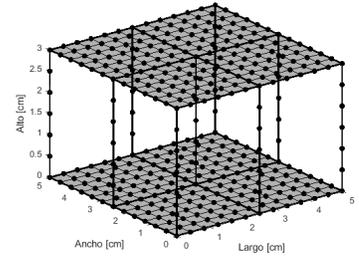
(c) $n_{ref} = 3$.



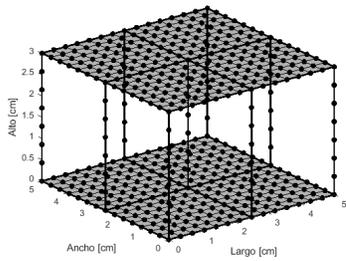
(d) $n_{ref} = 4$.



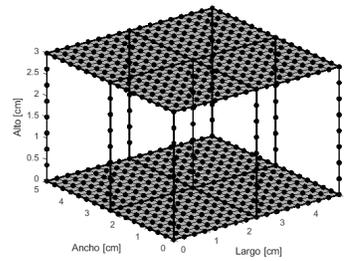
(e) $n_{ref} = 5$.



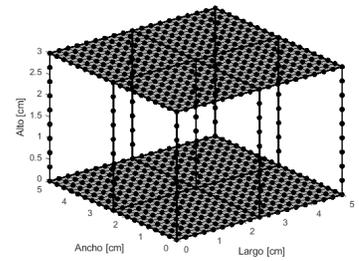
(f) $n_{ref} = 6$.



(g) $n_{ref} = 7$.



(h) $n_{ref} = 8$.



(i) $n_{ref} = 9$.

Figura 3.3: Estructuras con $n_c = 2$, $n_z = 1$ en función de n_{ref} .

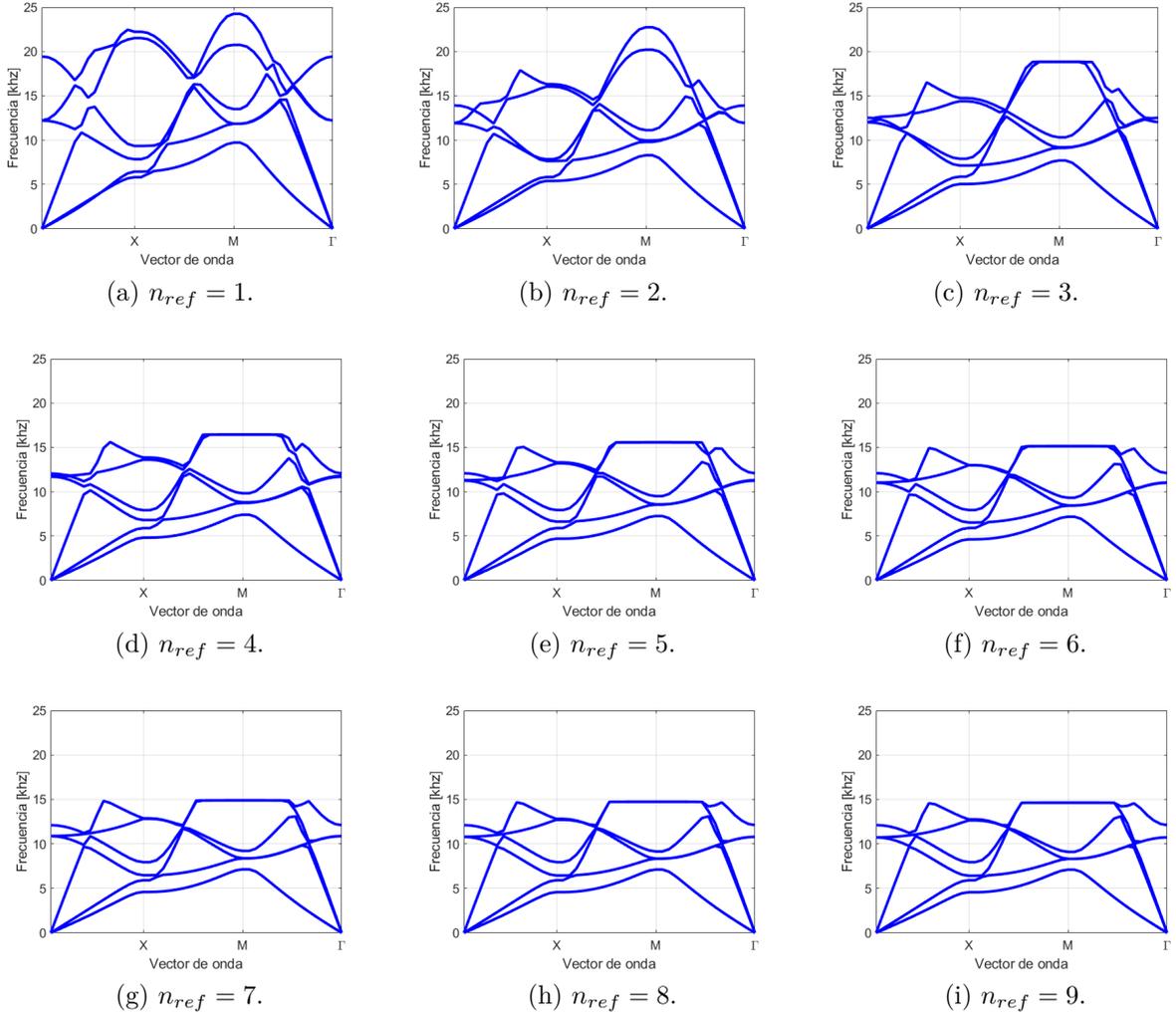


Figura 3.4: Diagramas de bandas con $n_c = 2$, $n_z = 1$ en función de n_{ref} .

La métrica elegida para calcular el error fue el error medio cuadrado (RMS), debido a que estas que para cada refinamiento de la malla hay un conjunto de bandas que conforman una matriz la cual se necesita un estimados global para saber si el error disminuye en general en la matriz o no. Estas matrices son de dimensiones $n_{vp} \times ZIB$ dónde n_{vp} es el número de valores propios elegidos y ZIB es el refinamiento del vector de ondas. La ecuación (3.1) es la utilizada para calcular el RMS, dónde m corresponde al refinamiento al refinamiento m que corresponde al numero de particiones de cada viga, además como se observa cada valor está normalizado.

$$Error_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n_{vp} \times ZIB} \sum_{j=1}^{ZIB} \sum_{i=1}^{n_{vp}} \left(\frac{\omega(i, j)^m - \omega(i, j)^{m+1}}{\omega(i, j)^{m+1}} \right)^2} \quad (3.1)$$

Se observa en la Tabla 3.1 que a medida que se refina, las frecuencias van disminuyendo, o sea, permite a la estructura tener frecuencias modales mas bajas gracias a la libertad de movimiento otorgada por los grados de libertad.

Tabla 3.1: Error RMS en función del mallado

Refinamiento m	$Error_{RMS}[\%]$
1	18.13
2	7.09
3	5.52
4	2.93
5	1.60
6	0.93
7	0.58
8	0.38
9	0.26

3.3. Condiciones de borde

La condición de borde del problema fue abordada en la sección 2.4, en la cual se explicó en detalle la imposición en un enrejado 2D. Este caso es análogo, con dos sutiles diferencias que se explican a continuación:

1. El vector de ondas $\mathbf{k} \in [\Gamma, M, X, \Gamma]$ es prácticamente el mismo que el definido anteriormente, ya que se desea la periodicidad infinita en el plano, con la única diferencia que la componente en el eje z es incluida con un valor que es siempre cero.
2. El material esta compuesto por láminas, las cuales son apiladas a medida que se generan mas capas en el panel. Cada una de estas capas se puede ver y discretizar como se observó en la Figura 2.7.

Evidentemente como la placa y el enrejado comparten nodos, las condiciones son impuestas a ambas, lo cual es natural porque también la placa posee periodicidad infinita aunque no sea optimizada.

3.4. Imposición de la simetría

A continuación se desea imponer la simetría tomando como base lo que se realizó en la sección 2.4. En primer lugar el vector de ondas \mathbf{k} supone que el material pose una simetría con respecto al centro, por lo que es necesario imponer las reflexiones de la Figura 2.6 restringiendo el número de variables. A continuación se detalla la forma para llevar a cabo la imposición de la simetría en el núcleo del material poniendo como ejemplo un material con $n_c = 4$ y $n_z = 2$ como el de la Figura 3.2.(c). En primer lugar se clasifican en dos los tipos de vigas que se desean imponer la simetría, la primera son las vigas que están presentes en el plano $x - y$ como se presentan en la Figura 3.5.(a), en la que se muestra 3 láminas y , en segundo lugar, las que están ortogonales al plano $x - y$ las que se observan en la Figura 3.5.(b), dónde hay dos elementos vigas juntos.

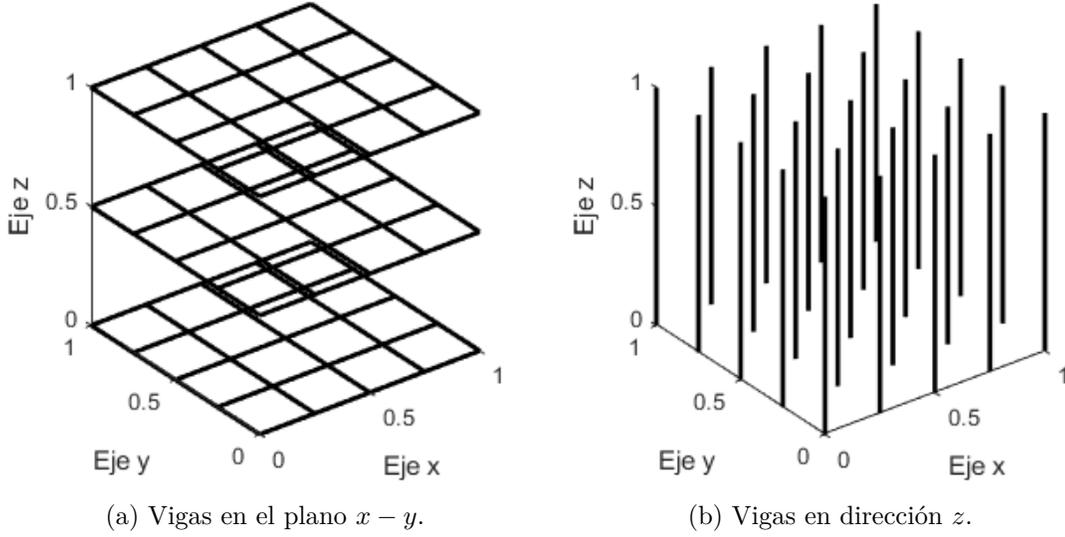


Figura 3.5: Vista isométrica del núcleo del panel sándwich con $n_c = 4$ y $n_z = 4$ número de celdas en la que, en la parte izquierda, están solo las vigas en el plano $x - y$ y en la derecha las ortogonales al plano $x - y$.

3.4.1. Simetría vigas en el plano $x - y$

Muy parecido a lo obtenido en 2.4, como se tiene que $n_c = n_x = n_y$, el número de elementos totales son las vigas horizontales (dirección \hat{x}) que se denotará por la letra n_{vh} en cambio el número de vigas verticales (dirección \hat{y}) con la letra n_{vv} y el número total de vigas en el plano se denotará por la letra n_{pt} , estos valores están definidos por:

$$n_{vh} = n_c \times (n_c + 1); \quad n_{vv} = n_c \times (n_c + 1); \quad n_{pt} = n_{vh} + n_{vv} \quad (3.2)$$

A continuación, el número reducido de vigas horizontales y verticales se denotarán por n_{rvh} , n_{rvv} y el total de vigas reducidas en el plano es n_{prt} , estos se expresan como:

$$n_{rvh} = \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2}; \quad n_{rvv} = \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2}; \quad n_{prt} = n_{rvh} + n_{rvv} \quad (3.3)$$

Ahora, para realizar el mapeo de todos los elementos en el plano, a un número reducido de variables hay que tomar como ejemplo la Figura 3.6, la cual con colores muestra los elementos que se relacionan para reducir el número de variables en el primer plano de un núcleo con número de celdas $n_c = 4$ y $n_z = 2$. Utilizando la ecuación (3.3) a modo de ejemplo, el número total de elementos en el plano es $n_{pt} = 20 + 20 = 40$ y el número de elementos reducidos es $n_{rt} = 3 + 3 = 6$.

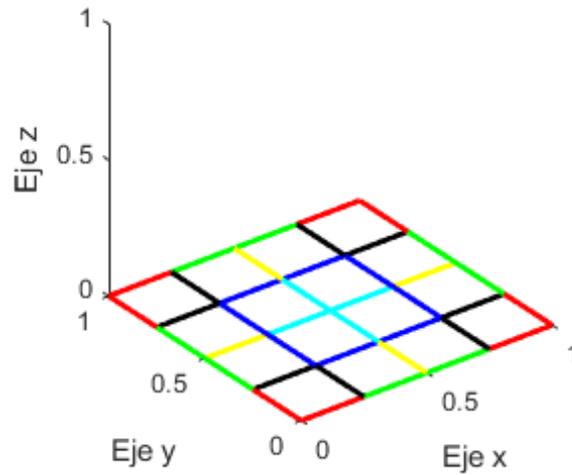


Figura 3.6: simetría en el plano $x - y$.

3.4.2. Simetría vigas dirección \hat{z}

Para reducir el número de variables nuevamente para ejemplificar se utilizará la Figura 3.7, en la cual los elementos que poseen el mismo color son los que están relacionados. En este caso, el número de elementos en dirección \hat{z} estará dado por n_{ov} y el número de variables reducidas por n_{rov} , las expresiones son las siguientes:

$$n_{ov} = (n_c + 1) \times (n_c + 1); \quad n_{rov} = \frac{\left(\frac{n_c}{2} + 1\right) \times \left(\frac{n_c}{2} + 2\right)}{2} \quad (3.4)$$

Utilizando las ecuaciones (3.4) el número de variables total es $n_{ov} = 25$ y el reducido es $n_{rov} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.

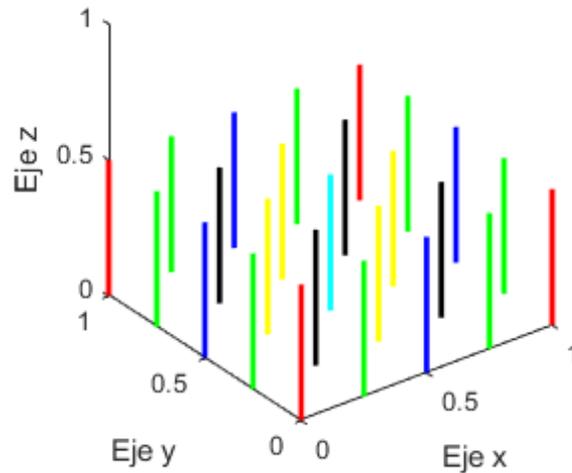


Figura 3.7: simetría en el eje z .

Para imponer esta condición, lo que se hace es ensamblar una matriz que relaciona elementos reducido con todos los otros elementos de manera similar a la que se presentó en las ecuaciones (2.3) y (2.4) en la que se relacionaban dos vectores, uno que incluye los valores del vector de variables de decisión con los elementos reducidos y otro con los “esclavos” (slaves).

3.5. Formulación de la optimización

Como bien se sabe el diagrama de bandas entrega información sobre la propagación de ondas mecánicas en el material periódico, como se presenta en la Figura 3.8 se observa en la derecha el diagrama de bandas asociado a la estructura y vector de ondas de la izquierda.

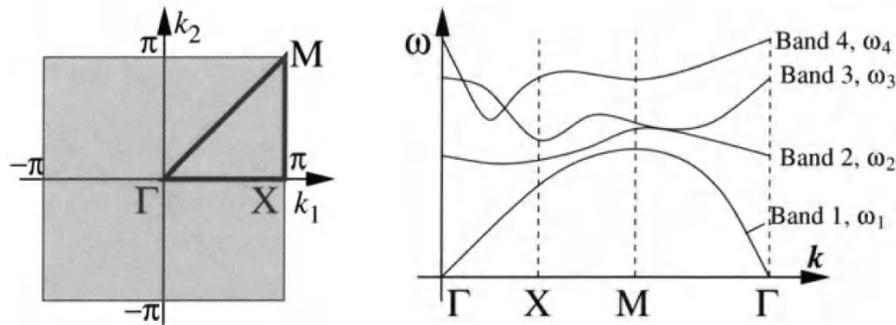


Figura 3.8: En la izquierda está la zona irreducible de Brillouin indicando el camino del vector de ondas. En el lado derecho se encuentra el diagrama de bandas indicando los primeros cuatro valores propios a lo largo del vector de ondas $\Gamma - X - M - \Gamma$ en la zona irreducible de Brillouin.[4]

Entonces, lo que se debe hacer para poder obtener el band gap mas ancho posible, es maximizar la distancia entre dos bandas contiguas del diagrama de bandas. Este problema

de optimización ya lo ha tratado Bendsøe & Sigmund [4] en el cual se dan una banda n y maximizan la distancia entre la banda n y la $n + 1$ utilizando optimización topológica, en la cual se varía el material de cada elemento del modelo en elementos finitos, de forma de obtener la óptima selección de material por elemento, como se observó en la Figura 2.3.

En este caso no se utilizaran materiales 2D para ser optimizados, si no que se optimizarán elementos viga presentes en el núcleo del material sándwich, por ende hay modificaciones que se le deben hacer al problema. Con respecto a la variable de decisión, se utilizará una variación de material por elemento al igual que la formulación de Bendsøe & Sigmund, pero en adición a esta, se le entregará una variable ligada a las propiedades de área de cada viga, por lo que no será solo una variable de decisión por elemento como en el caso 2D, si no que serán dos por elemento, lo que entrega mas libertad en el diseño.

Se supone también que esta variable ligada a las propiedades de área es solo una, por lo tanto, con un solo número debe quedar definida. Para esto se elige una sección circular ya que solo se necesita el diámetro para ser definido completamente, el cálculo de estas se encuentra en A.1.

A continuación se presenta el problema de maximización:

$$\text{Max} \quad \text{Min } \omega_{n+1}(\mathbf{x}) - \text{Max } \omega_n(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

$$\text{t.q} \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{k} \in [\Gamma - \text{M} - \text{X} - \Gamma] \quad (3.6)$$

$$0 \leq x_e^D \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

$$0 \leq x_e^M \leq 1, \quad e = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

En la cual ω_n y ω_{n+1} son las bandas n y $n + 1$ respectivamente y, lo que se formula, es maximizar la distancia entre el valor mínimo obtenido por la banda superior $n + 1$ y el valor máximo de la banda inferior contigua n , con el objetivo de generar un band gap entre estas bandas. La ecuación 3.6 indica que se debe resolver el problema de valores y vectores propios en la zona irreducible de Brillouin, donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices globales de rigidez y masa respectivamente. Por último, las ecuaciones 3.7 y 3.8 son las variables de decisión definidas en cada viga, x_e^D corresponde a la que controla el diámetro de la viga e y x_e^M controla el material correspondiente a cada viga e . Es interesante destacar que no es necesaria una restricción de volumen, pues como indica Sigmund & Jensen [28] tener solo un material no otorgará un band gap, pero un material entre medio con cierta fracción en volumen resultará con el mejor band gap.

Si bien, este trabajo no se busca sintonizar una frecuencia media de la optimización del band gap obtenido, esto es posible mediante la restricción documentada por Yi [36], la cual se escribe como:

$$\frac{\text{Min } \omega_{n+1}(\mathbf{x}) + \text{Max } \omega_n(\mathbf{x})}{2\omega_t} - 1 = 0 \quad (3.9)$$

Esta restricción indica que el promedio entre la cota superior de la banda n y la cota superior de la banda $n + 1$ debe estar en un valor dado, el cual se llamará ω_t . Si bien, esta restricción no se implementará, esta ha sido incluida en problema de optimización topológica de manera exitosa.

Una parte importante es definir como las variables de decisión influirán en las propiedades del material y de la sección transversal de la viga. Para poder variar la propiedad $P(x_e)$ que puede ser el módulo de elasticidad E , coeficiente de Poisson ν , densidad ρ (las variables

que controlan el material) o el diámetro de la sección transversal de la viga D (variable de decisión que controla las propiedades de área) del elemento e se debe elegir una función que pueda interpolar entre dos materiales y dos diámetros, de forma que si $x_e = 0$ el valor de P es $P(0) = P_1$ y si $x_e = 1$, el valor es $P(1) = P_2$. Elegir una interpolación entre las propiedades de la viga puede ser muy complicado, pues esta depende de la física del problema y, por lo tanto, se debe tomar en consideración como presenta Bendsøe & Sigmund [3] dependiendo de cada problema. Sin embargo, como muestra Sigmund en [28], no hay razón para utilizar una interpolación no lineal o un factor de penalización, lo cual es común en problemas de optimización topológica. La razón de esto está relacionado con el fenómeno del band gap en el cual, a medida que hay mas contraste entre los materiales, este se vuelve mas ancho y las propiedades del material tiende a irse a los bordes, es decir tiende a tener un gran contraste.

Ahora, la interpolación lineal de una propiedad $P(x)$, la cual podría ser en este caso módulo de Young, coeficiente de Poisson, densidad o el diámetro de la sección transversal, estará definida por:

$$P(x_e) = (P_2 - P_1)x_e + P_1 \quad (3.10)$$

En la cual, x_e representa la variable de decisión que está definida en $0 \leq x_e \leq 1$.

3.6. Análisis de sensibilidad

En esta sección se pretende diferenciar la frecuencia natural con respecto a una variable de decisión x_m . Esta diferenciación se hace lo mas general posible, suponiendo que todos los componentes de la ecuación dependen del elemento m , los cuales serán solo los elementos vigas, ya que los elementos placa solo se utilizan para ensamblar y no se les asignará ninguna variable de decisión. En primer lugar se pretende diferenciar los valores propios para luego utilizar la norma P para obtener el máximo de la banda ω_n y el mínimo de la banda ω_{n+1} , en adición con tratar el problema de la no diferenciabilidad de los valores y vectores propios, para luego se procederá a diferenciar esta expresión.

3.6.1. Diferenciación de la frecuencia natural

En primer lugar se define el problema de valores y vectores propios de la siguiente forma:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{u} = 0 \quad (3.11)$$

En el cual, \mathbf{K} es el ensamble global de la matriz de rigidez, \mathbf{M} el ensamble global de la matriz de masa, $\lambda = \omega^2$ los valores propios del sistema global y \mathbf{u} los vectores propios que son interpretados como los modos del sistema. Ahora diferenciando con respecto a la variable de decisión del sistema se obtiene:

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_m} - 2\omega \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} - \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m}\right) \mathbf{u} + \left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \frac{d\mathbf{u}}{dx_m} = 0 \quad (3.12)$$

Para poder desarrollarla, se multiplica por \mathbf{u}^T

$$\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_m} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T 2\omega \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \frac{d\mathbf{u}}{dx_m} = 0 \quad (3.13)$$

Luego, utilizando la identidad

$$\mathbf{u}^T \mathbf{A} \frac{d\mathbf{u}}{dx_m} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{A}}{dx_m} \mathbf{u} \quad (3.14)$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_m} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T 2\omega \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{d(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}{dx_m} \mathbf{u} &= 0 \\ 2\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_m} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T 2\omega \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} - 2\omega \mathbf{u}^T \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} &= 0 \\ 2\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_m} \mathbf{u} - 4\omega \mathbf{u}^T \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} &= 0 \\ 4\omega \mathbf{u}^T \frac{d\omega}{dx_m} \mathbf{M} \mathbf{u} = 2\mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_m} \mathbf{u} - 2\mathbf{u}^T \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \mathbf{u} & \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se puede simplificar a:

$$\frac{d\omega}{dx_m} = \frac{\mathbf{u}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_m} - \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \right) \mathbf{u}}{2\omega \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (3.15)$$

La cual es la expresión obtenida por Haftka & Zafer en [14]. Para terminar de desarrollar la expresión, se desarrollará la expresión de la diferenciación de la matriz de masa y rigidez global del sistema.

Con el objetivo de analizar la derivada de la matriz \mathbf{K} y \mathbf{M} es necesario escribirlo en forma de ensamble global, como se muestra en la ecuación (3.16) y (3.17), dónde \cup representa al operador de ensamble de la matriz local a global de cada elemento e , n_{ele} es el número total de elementos incluyendo tanto las vigas como los elementos tipo placa que están las tapas del panel sándwich.

$$\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{K}_e(x_e) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{M}_e(x_e) \quad (3.17)$$

Luego, diferenciando con respecto a la variable de decisión x_m se obtiene la expresión 3.18 y 3.19, en la cual δ_{em} es el delta de Dirac, en la que si $e = m$, $\delta_{em} = 1$, en caso contrario $e \neq m$, $\delta_{em} = 0$, luego la expresión solo depende del elemento m del cual se este diferenciando, lo que otorga más eficiencia al cálculo del gradiente.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dx_m} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \frac{d\mathbf{K}_e(x_e)}{dx_m} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta_{em} \frac{d\mathbf{K}_e(x_e)}{dx_m} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx_m} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \frac{d\mathbf{M}_e(x_e)}{dx_m} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta_{em} \frac{d\mathbf{M}_e(x_e)}{dx_m} \quad (3.19)$$

3.6.2. Diferenciabilidad de los valores propios y la norma-P

La sensibilidad de los valores propios con respecto a una variable de decisión cuando no hay repetición de esta, está bien definido, pero cuando se repiten los valores, la función (3.15) no es continua. Esto se debe a que, según la ecuación (3.15), si hay repetición de valores propios entonces $\omega_i = \omega_j$ con $i \neq j$, luego los vectores propios relacionados a esos valores propios son u_i y u_j , entonces cualquier combinación lineal de estos vectores es también un vector propio del problema, en conclusión no es posible saber cual vector debería ser utilizado en la ecuación (3.15). Se ha demostrado que la discontinuidad puede influir en la convergencia de la solución del problema, por ejemplo [13] muestra que la convergencia en un problema de imposición de valores propios repetidos simplemente no converge a una solución, también esto mismo reportó [19] en dónde maximizando valores propios, observó que los valores propios anteriores a este cambian de posición llegando claramente a una no convergencia.

Para solucionar el problema se han propuesto diversas soluciones, por ejemplo Seyranian [25] usó teoría de perturbación para evitar la no diferenciabilidad, también Bendsøe & Sigmund en [4] imponen una distancia mínima entre los valores propios para evitar que se traslapen, pero esto implica que no pueden cambiar de lugares, lo que perjudica y limita la optimización ya que esto suele ocurrir durante este proceso. Gravesen [13] propuso construir funciones diferenciables basadas en los valores propios del problema dado. La idea anterior es la base para la formulación de Torii & de Faria [32] para utilizar la norma P para converger a un valor propio mínimo en un conjunto de valores propios. La norma P a medida que aumenta el valor de P converge al máximo valor de un vector, como se define en la ecuación (3.20). También, se puede utilizar el inverso de la norma P para encontrar el mínimo de un vector como se observa en la siguiente ecuación.

$$\|\mathbf{v}\|_P = \left(\sum_{k=1}^n v_k^P \right)^{1/P} \quad (3.20)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{-P} = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{v_k} \right)^P \right)^{1/P} \quad (3.21)$$

Cabe destacar que tomando ω_{ij} como una matriz con las i filas, las cuales son las frecuencias naturales y j columnas, que son como varían estos valores con respecto al vector de ondas \mathbf{k} , se puede definir el máximo de las primeras n bandas como:

$$\text{Max}(\omega_n) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{ZIB} \omega_{ij}^P \right)^{1/P} \quad (3.22)$$

En estas expresiones ZIB son los puntos en la zona irreducible de Brillouin. Así mismo, con el inverso de la norma P se define el mínimo de la banda $n + 1$ hasta la última banda en estudio.

$$\text{Min}(\omega_{n+1}) = \left(\sum_{i=n+1}^{n_{vp}} \sum_{j=1}^{ZIB} \omega_{ij}^{-P} \right)^{-1/P} \quad (3.23)$$

En la que n_{vp} es el número de valores propios calculados en total, no necesariamente tienen que ser todos, de hecho es muy mala idea que sean todos porque el valor P tendría que ser

muy alto para poder converger al máximo, por lo que, si se quiere maximizar la distancia entre la banda n y $n + 1$, el valor de $n_{vp} = 2n$.

Ahora para calcular la sensibilidad de los valores propios, lo primero es escribir la diferenciación de la función objetivo como sigue:

$$\frac{d\Delta}{dx_m} = \frac{d\text{Min } \omega_{n+1}}{dx_m} - \frac{d\text{Max } \omega_n}{dx_m} \quad (3.24)$$

Ya expresados los valores máximos y mínimos de las bandas a optimizar, se deben derivar para realizar el análisis de sensibilidad.

$$\frac{d(\text{Max}(\omega_n))}{dx_m} = \frac{1}{P} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^P \right)^{1/P-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} P \omega_{ij}^{P-1} \frac{d\omega_{ij}}{dx_m} \right) \quad (3.25)$$

$$\frac{d(\text{Min}(\omega_{n+1}))}{dx_m} = -\frac{1}{P} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^{-P} \right)^{-1/P-1} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} -P \omega_{ij}^{-P-1} \frac{d\omega_{ij}}{dx_m} \right) \quad (3.26)$$

Reordenando unos términos, las expresiones finales son:

$$\frac{d(\text{Max}(\omega_n))}{dx_m} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^P \right)^{\frac{1-P}{P}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^{P-1} \frac{d\omega_{ij}}{dx_m} \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{d(\text{Min}(\omega_{n+1}))}{dx_m} = \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^{-P} \right)^{\frac{-(1+P)}{P}} \left(\sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{\text{ZIB}} \omega_{ij}^{-P-1} \frac{d\omega_{ij}}{dx_m} \right) \quad (3.28)$$

La sensibilidad de los valores propios ya fue calculada, pero anotandolo de forma inicial esta definida como:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dx_m} = \frac{u_{ijm}^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{dx_m} - \omega_{ij}^2 \frac{d\mathbf{M}}{dx_m} \right) u_{ijm}}{2\omega_{ij} u_{ij}^T \mathbf{M} u_{ij}} \quad (3.29)$$

Dónde u_{ijm} corresponde al vector propio asociado a la frecuencia natural i , en el vector de onda j y en la posición m del vector propio (solo los grados de libertad que estan asociados al elemento m), \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices de rigidez y masa global respectivamente.

3.7. Problema de mínimos locales

Debido a lo no convexo de esta optimización es muy común en el proceso converger a un mínimo local. Para evitar este problema se inician con valores aleatorios en el vector de variables de decisión, pero es probable que, cuando estos se generen, estén muy cercanos entre si, por lo que, ejecutar el problema n veces con valores aleatorios no asegura que se vaya a mapear todo el espacio o por lo menos, hacerlo con puntos lo mas espaciados entre si posible. Para superar este problema, se generan puntos con el muestreo latin hypercube, lo que es básicamente un algoritmo que de manera aleatoria obtiene puntos lo mas separados entre si que permite muestrear de mejor manera un espacio.

Capítulo 4

Resultados y discusión

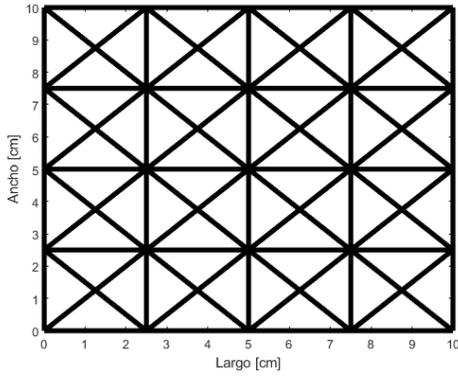
En esta sección se expondrán dos trabajos, en primer lugar, como en la bibliografía no se ha realizado optimización de band gap en enrejados tomando en cuenta su sección transversal y el material de cada elemento, se realizará un estudio preliminar en enrejados 2D con elementos tipo barra (Truss), para luego continuar con la placa tipo sándwich, optimizando el band gap de esta.

4.1. Optimización band gap en enrejado de elementos tipo barra

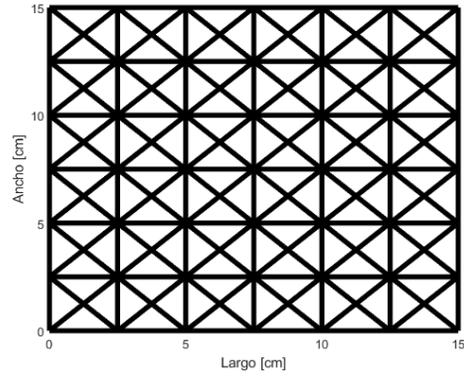
4.1.1. Geometría y propiedades

Los trabajos relacionados a la optimización de band gap solo han tratado el problema 2D o 3D continuo, luego, tratar con enrejados en este ámbito es un estudio que no se ha realizado antes. Para poder aplicar estos enrejados a un material sándwich, el cual es el objetivo final, el primer paso es observar el comportamiento de una sola lámina conformada por este enrejado.

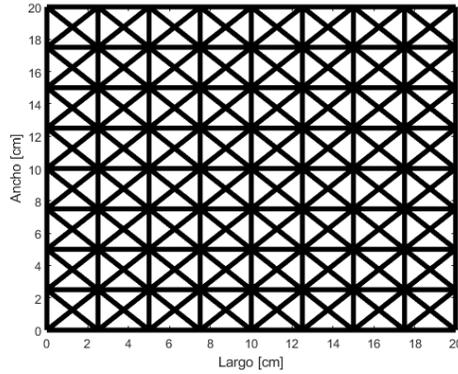
En primer lugar el enrejado a estudiar es el que se presenta en la Figura 4.1 la cual posee el mismo número de celdas tanto en x como en y denominado n_c , la cual corresponde a la misma estructura de la Figura 2.4, pero agregando con 2 barras de forma diagonal en cada celda para agregarle más rigidez a la estructura.



(a) Enrejado con $n_c = 4$.



(b) Enrejado con $n_c = 6$.



(c) Enrejado con $n_c = 8$.

Figura 4.1: Enrejado de barras a optimizar.

Lo que se desea determinar en este problema es la formación de band gap y como este varía en función del numero de celdas n_c dónde se utilizará $n_c = 4$, $n_c = 6$ y $n_c = 8$. El largo estará determinado por n_c y será calculado con la expresión $L_c = 0.025n_c[m]$ para que cada celda tenga $2.5[cm]$ en sus dimensiones.

Cómo hay 2 variables de decisión por cada elemento, dónde una controla el material y la otra la sección transversal, se deben elegir el rango de ambos. El material a emplear es aluminio y tungsteno descritos en la Tabla 4.1 por su alto contraste en las propiedades mecánicas. El área transversal, como es un elemento barra, solo interesa su área la cual se calcula como una sección circular con diámetro $4[mm]$ en la sección mas angosta y $8[mm]$ en la mas ancha. El n que indica cual banda se va a optimizar se emplea como $n = 3$ en todos los casos. Para optimizar este problema se utilizó el método de las asíntotas móviles globalmente convergente, explicado brevemente en la sección 2.6, en el cual se tomaron 100 puntos aleatorios iniciales optimizados como indica 3.7. Si bien, la optimización alcanza valores en los extremos de cada variable de decisión, hay casos dónde los valores difieren ligeramente de este, por eso, se aplicó un post-procesamiento que consiste en modificar solo las variables que están relacionadas con el material para obtener solo aluminio o tungsteno, de otra forma, no tiene sentido. La variable que controla el área no implica ninguna limitante en la manufactura por lo cual no se le aplica ningún post-proceso. La discretización del vector de ondas en este caso es de 30 puntos y el número de bandas graficadas, osea, frecuencias naturales calculadas a lo largo del vector de ondas es de 8.

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas de aluminio 6061 y tungsteno.

Propiedad	Aluminio (Material 1)	Tungsteno (Material 2)
Módulo de elasticidad	68.9 [GPa]	411.0 [GPa]
Densidad	2700 [$\frac{Kg}{m^3}$]	19300 [$\frac{Kg}{m^3}$]
Coefficiente de Poisson	0.33	0.28

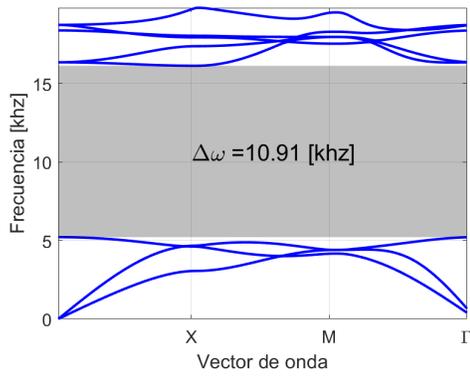
4.1.2. Diagrama de bandas y estructura

En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 en la izquierda se presenta el band gap sin post-procesamiento y en la derecha con post-procesamiento. Para analizar más fácilmente los band gap pues en estado no son comparables, puesto que algunos se dan a frecuencias altas del orden de 10 [khz] y otras en el orden de 6 [khz] en promedio. Para evitar este problema lo que se plantea es calcular el bandgap relativo ω_{rel} , el cual es calculado gracias a la frecuencia media del band gap ω_{media} y el ancho del band gap $\Delta\omega$ como presenta la ecuación (4.1). Luego se confecciona la tabla 4.2 que posee las frecuencias relativas, medias y band gap de cada optimización. Las frecuencias medias de las estructuras pre-procesadas fue disminuyendo a medida que se aumentaba el n_c lo cual tiene sentido pues a medida que se aumentaba este valor, también aumentaba el largo de cada estructura y, si la estructura es más grande, esta posee frecuencias naturales menores. En cambio, las estructuras post-procesadas no respetan esto, porque en el caso con $n_c = 4$ esta se divide en dos band gap entre las bandas 3 – 4 y 4 – 5.

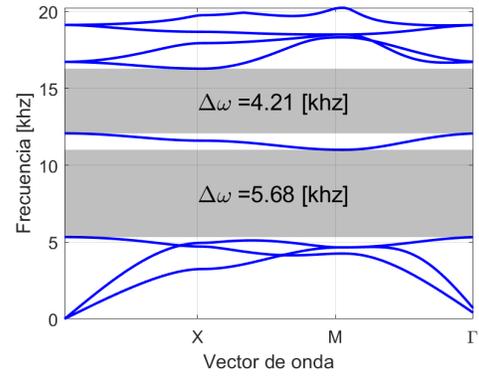
$$\omega_{rel} = \frac{\Delta\omega}{\omega_{media}} = 2 \frac{\text{Min}\omega_{n+1} - \text{Max}\omega_n}{\text{Min}\omega_{n+1} + \text{Max}\omega_n} \quad (4.1)$$

Cuando las estructuras son post-procesadas se disminuye el band gap, ligeramente en el caso de $n_c = 6$ u $n_c = 8$ y de manera drástica en el de $n_c = 3$ tomando en cuenta que se está analizado el band gap formado por las bandas 3y 4. Otro resultado es que el band gap relativo de estas estructuras hecha de barras oscila entre los valores 0.69 y 0.90 (analizando el band gap formado por la banda 3 y 4) lo cual son bastante altos en comparación con los resultados de Yi [36] que obtuvo band gaps relativos en el rango de 0.4.

Un punto a destacar es que, como bien se sabe, a medida que se aumenta el número de celdas, el número de variables de decisión crece también, lo que permite una mayor libertad de diseño. Lo anterior se puede observar cuando, luego del post-proceso, la banda con mayor número de celdas es a la que menos se le perjudica su band gap relativo, es decir, su band gap absoluto queda casi igual.

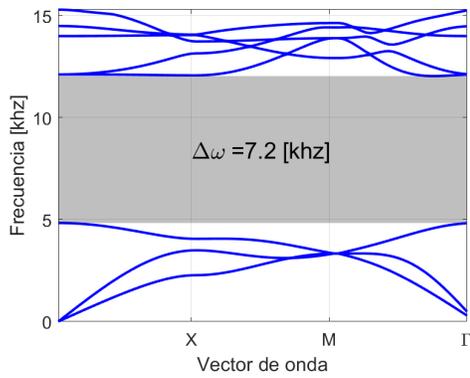


(a) Diagrama de bandas.

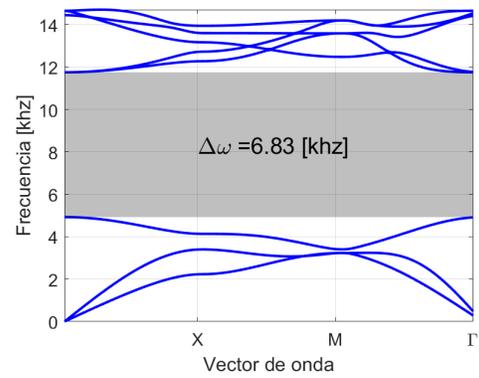


(b) Diagrama de bandas post-procesado

Figura 4.2: Diagrama de bandas para $n_c = 4$.

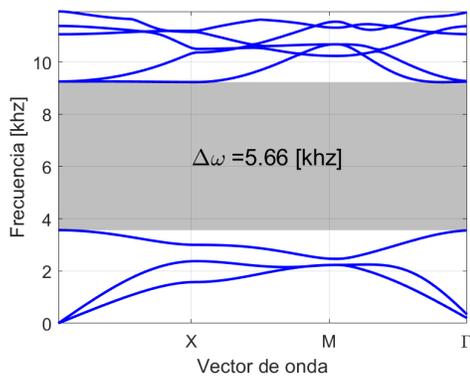


(a) Diagrama de bandas.

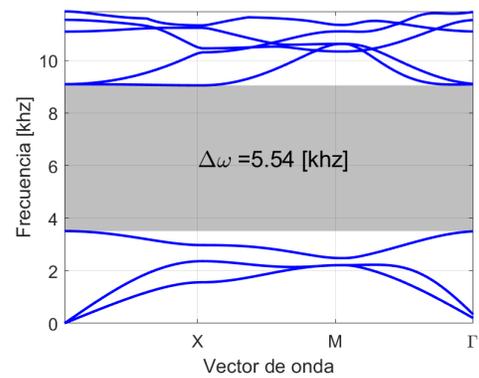


(b) Diagrama de bandas post-procesado

Figura 4.3: Diagrama de bandas para $n_c = 6$.



(a) Diagrama de bandas.

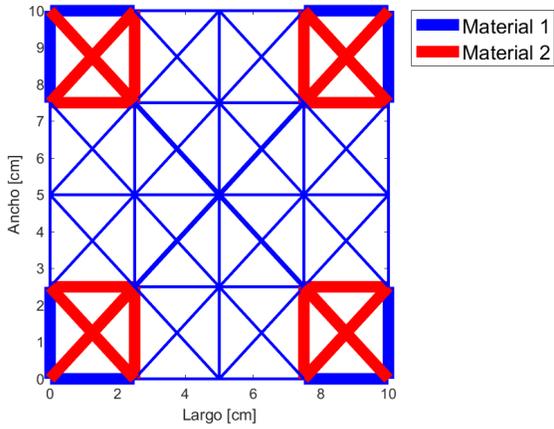


(b) Diagrama de bandas post-procesado

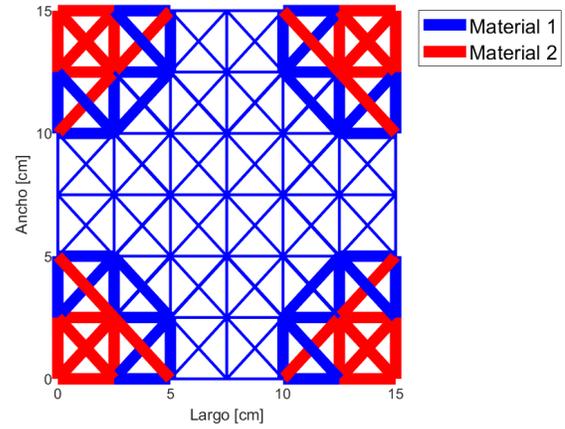
Figura 4.4: Diagrama de bandas para $n_c = 8$.

Tabla 4.2: Band gap relativo en función del procesamiento y la banda optimizada en el enrejado 2D.

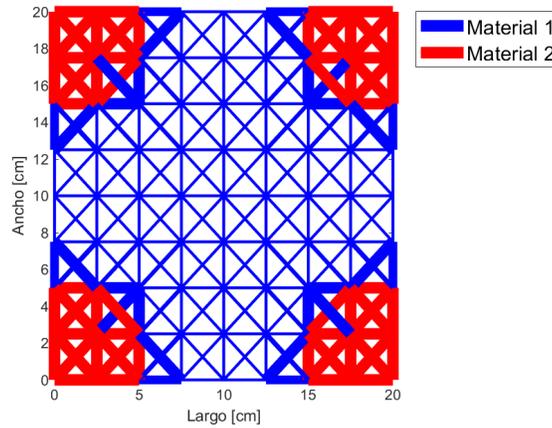
Tipo	Número de celdas n_c	Band gap relativo ω_{rel}	Frecuencia central [khz] ω_{media}	Band gap [khz] $\Delta\omega$
Pre-procesado	4	1.023	10.667	5.679
	6	0.854	8.430	7.200
	8	0.885	6.392	5.660
Post-procesado	4	0.695	8.165	0.296
	6	0.818	8.834	6.829
	8	0.882	6.279	5.542



(a) Estructura optimizada con $n_c = 4$.



(b) Estructura optimizada con $n_c = 6$.



(c) Estructura optimizada con $n_c = 8$.

Figura 4.5: Estructuras optimizadas.

La imagen 4.5 presentan la estructura final optimizada, en la cual el material 1 corresponde al aluminio y el 2 al tungsteno, el espesor de cada barra representa que tipo de sección

transversal, si opta por una estrecha o una mas gruesa. Se observa que en general el enrejado se refuerza en las esquinas con el tungsteno que corresponde al material con módulo de Young y densidad mas alto, en cambio en el núcleo se concentra el material 1 y con el menor espesor posible. La literatura presenta que las estructuras con band gap optimizado generan este tipo de patrón, dónde existe un núcleo dónde predomina un material y en el exterior predomina el otro material.

4.1.3. Análisis con estructura finita

Se desea verificar si este band gap obtenido se puede aplicar realmente a una estructura con cierta periodicidad, pues como indica [15] se puede ensamblar una estructura de 10×10 celdas unitarias optimizadas y obtener las propiedades de periodicidad infinita que requiere esta teoría.

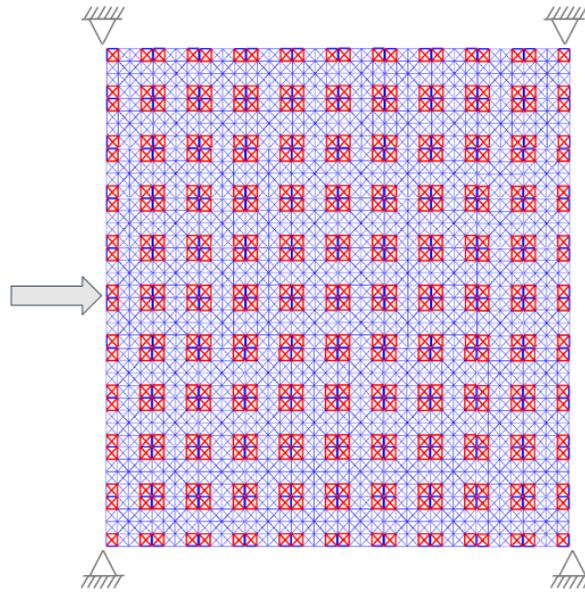


Figura 4.6: Ensamble de la estructura optimizada $n_c = 4$ de 10×10 celdas con apoyo simple en las esquinas y una excitación periódica de $1[N]$ en el medio del borde izquierdo.

Para llevar a cabo lo anterior, se genera una estructura con 10×10 celdas unitarias en el plano x-y que están dadas en la Figura 4.5. Luego, en las 4 esquinas se aplica condición de borde de apoyo simple y se aplica una fuerza de $1[N]$ en el medio del borde izquierdo de la estructura, para después medir su respuesta en el centro para calcular la función de respuesta en frecuencia (FRF) de la estructura la cual se puede observar en la Figura 4.6 tomando como ejemplo a la estructura optimizada con $n_c = 4$. Las FRFs obtenidas se gráficán en las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9 para $n_c = 4, 6$ y 8 . Estas FRFs demuestran que no es necesaria una estructura infinita para obtener las propiedades de band gap utilizando teoría de estructuras periódicas, pues el band gap de las Figuras está en las mismas frecuencias que se obtiene en las Figuras 4.3 y 4.4, con ciertas diferencias en la Figura 4.2 lo que puede deberse a que necesita mas celdas para representar el band gap como tal.

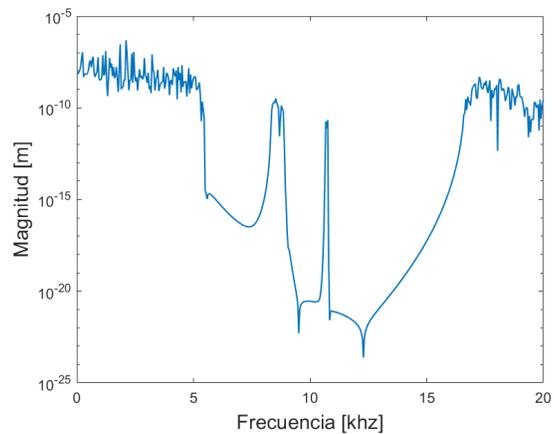


Figura 4.7: FRF de la estructura optimizada con $n_c = 4$.

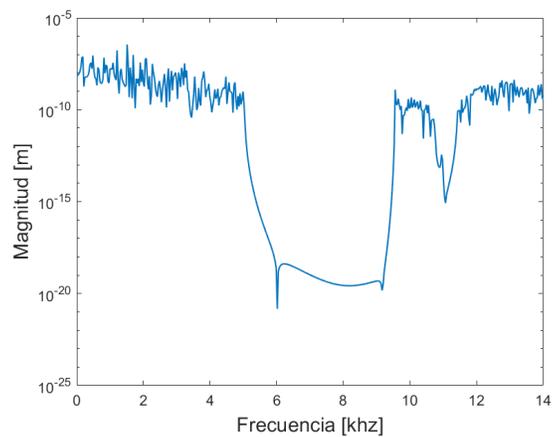


Figura 4.8: FRF de la estructura optimizada con $n_c = 6$.

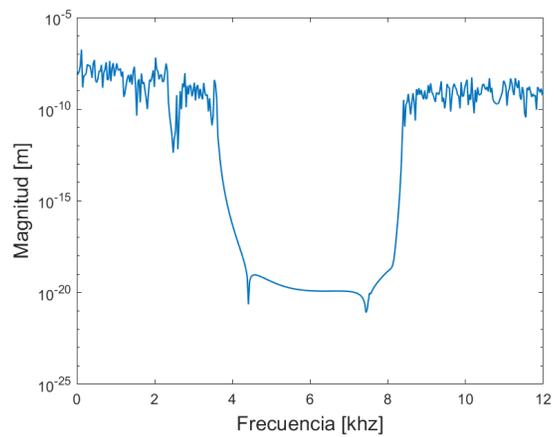


Figura 4.9: FRF de la estructura optimizada con $n_c = 8$.

4.2. Optimización band gap Placa tipo sándwich

4.2.1. Geometría y propiedades

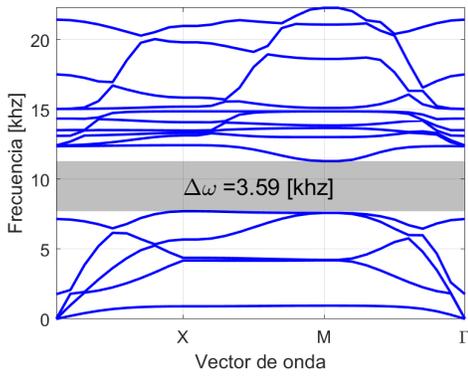
Cómo se detalló en la sección 3.1.1, la geometría del núcleo consiste en un arreglo cuadrado y depende tanto de las dimensiones L_c y L_z , como también del número de celdas n_c y n_z . Como en el estudio con elementos tipo barra anterior se observó la variación de estas en función del número de celdas n_c , en este caso solo se estudiará la optimización de una placa tipo sándwich con dejando fijo $n_c = 2$, $n_z = 1$, $L_c = 5[cm]$ y $L_z = 3[cm]$ debido al gasto computacional que implica aumentar el número de celdas. Las secciones transversales de las vigas tienen secciones circulares, las cuales poseen diámetros que varían, al igual que el caso anterior de las barras, entre $D_1 = 0.4[cm]$ y $D_2 = 0.8[cm]$, con el objetivo de encontrar el el mejor espesor en cada elemento dando la libertad de obtener un espesor intermedio, ya que este no incurre en limitantes tecnológicas como lo sería tener un material intermedio. También la placa que esta en los bordes del panel sándwich se empleará Aluminio de la Tabla 4.1 con un espesor de $0.2[cm]$.

En el enrejado se utilizaran los mismos material anteriores por sus alto contraste en sus propiedades mecánicas la cual se observa en la Tabla 4.1.

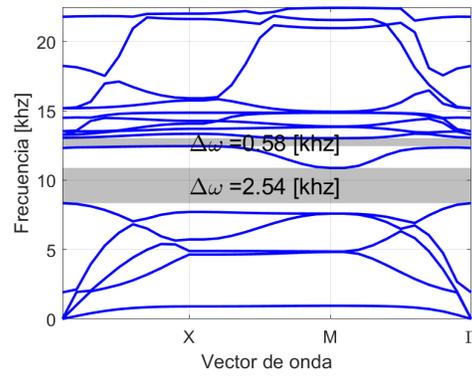
En este caso también se utilizó el GCMMA y el Latin hypercube sampling con 100 puntos para tratar de representar todo el dominio. Al momento de optimizar hay que elegir un n como se observa en la ecuación (3.5), la cual corresponde a la optimización entre la banda n y $n + 1$. En la bibliografía no hay ningún criterio que explique cual es la mejor banda a priori, por lo que, se debe probar con distintos n y ver cual permite a la física del problema obtener un band gap. Al igual que el caso anterior, se le aplica un post-proceso para evitar tener un valor físicamente imposible en la variable que controla el material. Cabe destacar que el refinamiento es $m = 6$ (6 elementos por viga) como indica la tabla 3.1 para obtener un error cuadrático medio inferior al 1%.

4.2.2. Diagramas de Bandas y estructura

Para obtener los siguientes resultados se realizó una optimización por cada n de 1 hasta la banda número 10 para observar cual propiciaba el mejor band gap. Los band gap obtenidos fueron al optimizar $n=5, 6, 8$ y 9 ya que en los otros casos el mínimo alcanzado con la optimización no permitía un band gap en la estructura. Las Figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 muestran el band gap optimizado sin procesar y post-procesado de la banda 5, 6, 8 y 9 respectivamente. En los resultados se grafican las primeras 15 frecuencias naturales, la discretización del vector de ondas fue de 30 puntos.

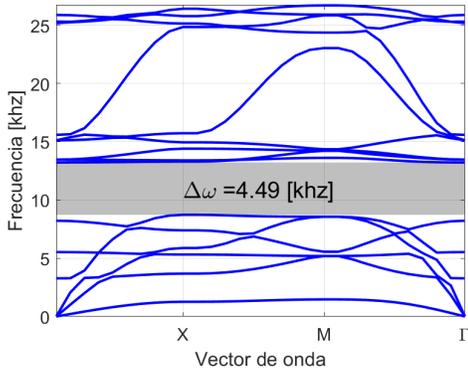


(a) Diagrama de bandas $n = 5$.

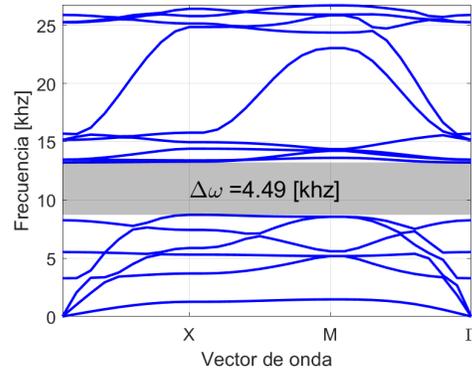


(b) Diagrama de bandas post-procesado $n = 5$.

Figura 4.10: Diagrama de bandas para $n = 5$.

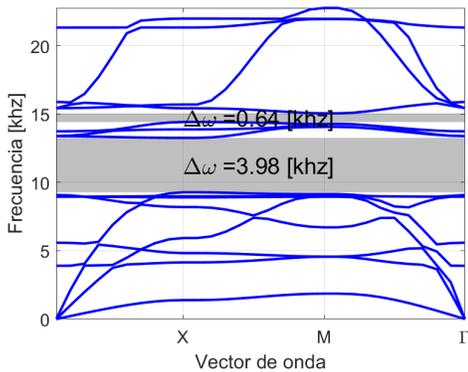


(a) Diagrama de bandas $n = 6$.

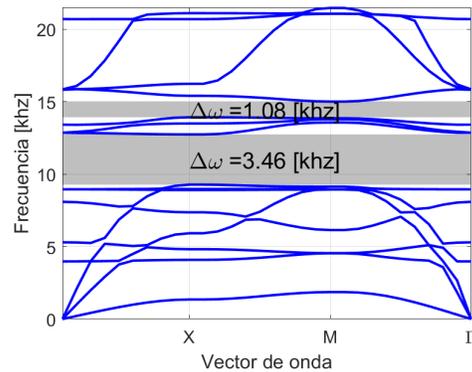


(b) Diagrama de bandas post-procesado $n = 6$.

Figura 4.11: Diagrama de bandas para $n = 6$.



(a) Diagrama de bandas $n = 8$.



(b) Diagrama de bandas post-procesado $n = 8$.

Figura 4.12: Diagrama de bandas para $n = 8$.

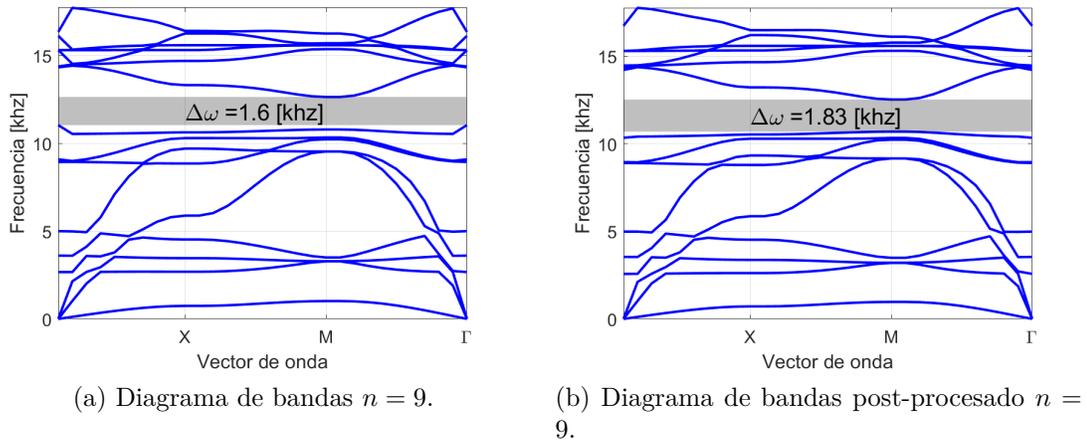


Figura 4.13: Diagrama de bandas para $n = 9$.

En primer lugar, el vector óptimo, tal como han reportado diversos investigadores, tiende a los bordes del conjunto, es decir, sus componentes tienden a cero o a uno. Si bien hay casos dónde los valores difieren, estos son escasos y siempre difieren con valores que siguen siendo muy cercanos a los extremos. Esto último se suprime con un post-proceso de las variables de decisión, ya que no tiene sentido (para este problema) tener un material del elemento e con $x_e^M = 0.7$ ya que se desea solo uno de los dos materiales interpolantes.

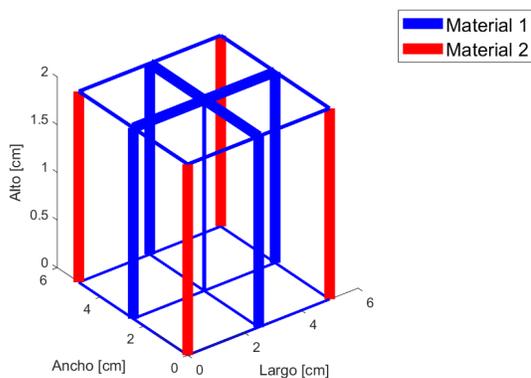
En los gráficos de las Figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 en la izquierda de cada uno se encuentra el diagrama de banda optimizado y a la derecha con su respectivo post-proceso.

Para poder hacer comparaciones de manera satisfactoria se utilizará nuevamente el band gap relativo, frecuencia central y el band gap absoluto, introducidos en la optimización de elementos tipo barra. La tabla 4.3 presenta estos valores en función de la banda n optimizada en la cual puede provocar otro band gap en otra banda, el cual es colocado también. Cuando se aplica el post-proceso el band gap formado tiende a disminuir su ancho inclusive, ocurre que en la optimización de la banda $n = 5$ se creó otra banda perjudicando la optimizada.

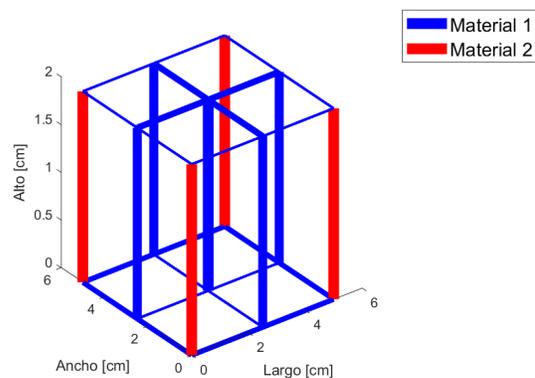
Las frecuencias medias no varían en gran medida, además, los band gaps relativos son bastante inferiores que en el caso anterior, esto puede deberse a la complejidad de este sistema en comparación a la de un enrejado de barras, además el hecho de solo ser una optimización con $n_c = 2$ limita mucho la cantidad de variables con las que se puede realizar la optimización.

Tabla 4.3: Band gap relativo en función del procesamiento y la banda optimizada en panel sándwich.

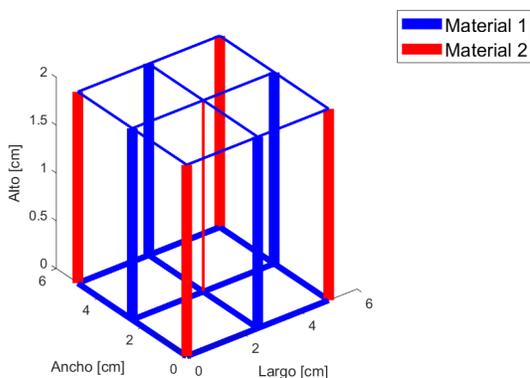
Tipo	Banda	Band gap relativo ω_{rel}	Frecuencia central [khz] ω_{media}	Band gap [khz] $\Delta\omega$
Pre-procesado	5	0.377	9.500	3.586
	6	0.409	10.968	4.489
	8	0.353	11.266	3.983
	9	0.135	11.831	1.602
Post-procesado	5	0.264	9.609	2.540
	6	0.409	10.969	4.490
	8	0.314	11.000	3.463
	9	0.158	11.602	1.834



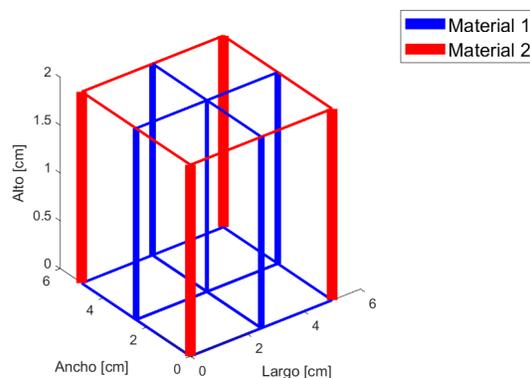
(a) Celda optimizada con $n = 5$.



(b) Celda optimizada con $n = 6$.



(c) Celda optimizada con $n = 8$.



(d) Celda optimizada con $n = 9$.

Figura 4.14: Estructuras tipo sándwich optimizadas.

Las estructuras de las Figuras 4.14 corresponden a las optimizadas con respecto a cada banda n , donde el material 1 corresponde al aluminio, el 2 a tungsteno y su espesor varia entre $0.4[cm]$ y $0.8[cm]$, dependiendo del espesor de la barra. En esta figura es muy interesante observar como una sola estructura puede cambiar su configuración para optimizar una banda u otra, ya que todas poseen un patrón muy parecido, al igual que el estudio con barras, de reforzar los extremos.

Nuevamente, se puede observar que las estructuras localizan mucho la rigidez, por lo que se tienen a formar zonas donde hay mas densidad de material, esto también se ha reportado cuando se optimizan placas en $2 - D$, puesto que se genera un núcleo con un material y el borde con otro (como estas placas con infinitas, el núcleo también puede tomarse como borde, ya que se repite).

Capítulo 5

Conclusión y trabajos futuros

Se logra diseñar y optimizar una panel tipo sándwich con estructura cuadrada, con el objetivo de maximizar el band gap, lo cual evita la propagación de ondas mecánicas en el plano del material, utilizando la teoría de estructuras periódicas. Se introducen distintas variables de optimización implementando correctamente la variación tanto del material de cada elemento viga en el núcleo, como también el espesor de esta, logrando así, una mayor libertad en el diseño del band gap.

También, como estudio preliminar, se logro analizar el band gap en una estructura en 2D hecha de elementos tipo barra (Truss), obteniendo buenos resultados con valores de band gaps relativos altos. También se estudió como afecta el número de celdas en la optimización, otorgando mas variables de decisión al problema, permitiendo un diseño casi sin variaciones luego del post-procesado. En esta sección también se hizo un paso muy crucial que es analizar si esta teoría sirve con un número finitos de celdas, lo cual se comprobó de manera satisfactoria mediante una función de respuesta en frecuencia de la estructura.

Cómo en el panel sándwich no se pueden realizar estudios con mas celdas por las limitaciones computacionales, lo que si se pudo hacer fue un estudio de como varía el band gap en función de la celda a optimizar. En este ámbito el panel tipo sándwich se observó como una misma estructura puede variar su topología a medida que se elige cual banda se desea optimizar, lo cual resultó muy interesante de observar, ya que, si bien todas estas geometrías poseen un patrón muy parecido, estas ligeras modificaciones hacen que cambie drásticamente la banda optimizada.

La norma-P demostró ser una inclusión interesante a la formulación, ya que evita de manera elegante la no diferenciación de los valores propios, lo cual ocurre en este problema muchas veces debido a la repetición de estos. La aplicación de esta norma a este tipo de problemas se analizará a fondo en otros trabajos.

Una conclusión muy importante de este tipo de formulaciones es que trabajar en espacios 3D es bastante costoso computacionalmente, lo que es una gran limitante cuando se desea diseñar con libertad una estructura, puesto que se podría simular mas casos con n_c o n_z pero el costo computacional de resolver el problema de valores y vectores propios crece exponencialmente, lo que hace casi inviable optimizar estructuras con mas grados de libertad.

Pese a que esta es una estructura que se vale netamente por su geometría, hay que destacar que este trabajo no tomó en consideración el efecto sobre el band gap que tendría si se pierde esta simetría, como por ejemplo, si se cometen errores en la manufactura, por lo que generar tolerancias en el proceso de manufacturación evitará que se genere perdidas en el band gap o que este disminuya de manera significativa su espesor. Tampoco se analizó la estática del

cuerpo, ya que esto le aplicaría mas restricciones al diseño y es muy probable que tenga problemas de convergencia. Por la misma razón anterior no se sintonizó una frecuencia media del band gap, porque la física del problema otorga un rango en el cual este se puede situar, y tratar de cambiar ese valor va acarrear problemas en la convergencia de la optimización, llegando a óptimos con materiales mezclados, lo que es físicamente imposible.

Para trabajos futuros hay muchos puntos que escapan los alcances de esta tesis pero que serían interesantes de estudiar como por ejemplo:

- Analizar la sensibilidad de la sección transversal de la viga en el bandgap, y si este es alto o considerable, realizar optimización de forma en la sección transversal de manera de obtener la mejor sección transversal para el problema, la cual podría variar en función de cada viga o podría ser la misma.
- Otro grado de libertad para el diseño que se comentó en la sección anteriores es agregarle masas concentradas (lumped mass) en los nodos, de manera de ver que tan sensible es a esta variable, si ver si ayuda a la generación de bandgap.
- En este caso como se utilizo un panel sándwich, otra variable es apilar muchos de estos y observar la dinámica de este.

Otra forma de haber optimizado este problema es maximizar la pérdida de transmisión de sonido y mezclar esto suponiendo que la estructura es periódica e infinita en un plano, lo que puede ser interesante.

Como se comentó anteriormente, el costo computacional del problema de valores y vectores propios es alto, lo que limitó el diseño, ya que en primera instancia se deseaba modelar un espacio 3D con elementos tipo bloque y solamente entregarle una restricción de masa para que de esa manera obtuviera la mejor estructura celular con esa masa. Pero utilizar esta formulación hace que el problema sea prácticamente imposible de resolver ya que se debe refinar fino para obtener buenas estructuras y el problema de valores y vectores propios se hace prácticamente imposible de resolver y, además este se debe resolver iterativamente en un problema de optimización, lo que acentúa aún mas lo costoso de esta formulación.

Bibliografia

- [1] John Banhart and H-W Seeliger. Aluminium foam sandwich panels: manufacture, metallurgy and applications. *Advanced Engineering Materials*, 10(9):793–802, 2008.
- [2] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [3] Martin P Bendsøe and Ole Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69(9-10):635–654, 1999.
- [4] Martin P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer, 2003.
- [5] Leon Brillouin. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation, 2003.
- [6] J Austin Cottrell, Thomas JR Hughes, and Yuri Bazilevs. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.
- [7] Vincenzo D’Alessandro, Giuseppe Petrone, Francesco Franco, and Sergio De Rosa. A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(5):541–582, 2013.
- [8] Julio F Davalos, Pizhong Qiao, X Frank Xu, Justin Robinson, and Karl E Barth. Modeling and characterization of fiber-reinforced plastic honeycomb sandwich panels for highway bridge applications. *Composite structures*, 52(3-4):441–452, 2001.
- [9] H Denli and JQ Sun. Minimization of acoustic radiation from composite sandwich structures. In *Sandwich Structures 7: Advancing with Sandwich Structures and Materials*, pages 587–596. Springer, 2005.
- [10] H Denli and JQ Sun. Structural-acoustic optimization of sandwich structures with cellular cores for minimum sound radiation. *Journal of Sound and Vibration*, 301(1-2): 93–105, 2007.
- [11] Pierre A Deymier. *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, volume 173. Springer Science & Business Media, 2013.
- [12] Hao-Wen Dong, Xiao-Xing Su, Yue-Sheng Wang, and Chuanzeng Zhang. Topological optimization of two-dimensional phononic crystals based on the finite element method and genetic algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50(4):593–604, 2014.
- [13] Jens Gravesen, Anton Evgrafov, and Dang Manh Nguyen. On the sensitivities of multiple eigenvalues. *Structural and Multidisciplinary optimization*, 44(4):583–587, 2011.
- [14] Raphael T Haftka and Zafer Gürdal. *Elements of structural optimization*, volume 11.

Springer Science & Business Media, 2012.

- [15] Søren Halkjær, Ole Sigmund, and Jakob S Jensen. Maximizing band gaps in plate structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(4):263–275, 2006.
- [16] Thomas JR Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.
- [17] Philippe Langlet, Anne-Christine Hladky-Hennion, and Jean-Noël Decarpigny. Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(5):2792–2800, 1995.
- [18] Yvonne Liebold-Ribeiro and Carolin Körner. Phononic band gaps in periodic cellular materials. *Advanced Engineering Materials*, 16(3):328–334, 2014.
- [19] Zheng-Dong Ma, Noboru Kikuchi, and Hsien-Chie Cheng. Topological design for vibrating structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 121(1-4): 259–280, 1995.
- [20] M Mazur, M Leary, M McMillan, S Sun, D Shidid, and M Brandt. Mechanical properties of ti6al4v and alsil2mg lattice structures manufactured by selective laser melting (slm). In *Laser Additive Manufacturing*, pages 119–161. Elsevier, 2017.
- [21] A Srikantha Phani, J Woodhouse, and NA Fleck. Wave propagation in two-dimensional periodic lattices. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(4):1995–2005, 2006.
- [22] Tobias A Schaedler and William B Carter. Architected cellular materials. *Annual Review of Materials Research*, 46:187–210, 2016.
- [23] Tobias A Schaedler, Alan J Jacobsen, and William B Carter. Toward lighter, stiffer materials. *Science*, 341(6151):1181–1182, 2013.
- [24] Wahyu Setyawan and Stefano Curtarolo. High-throughput electronic band structure calculations: Challenges and tools. *Computational materials science*, 49(2):299–312, 2010.
- [25] Alexander P Seyranian, Erik Lund, and Niels Olhoff. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. *Structural optimization*, 8(4):207–227, 1994.
- [26] Mihail Sigalas, Manvir S Kushwaha, Eleftherios N Economou, Maria Kafesaki, Ioannis E Psarobas, and Walter Steurer. Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment. *Zeitschrift für Kristallographie-Crystalline Materials*, 220(9-10):765–809, 2005.
- [27] Ole Sigmund and Joakim Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1):68–75, 1998.
- [28] Ole Sigmund and Jakob Søndergaard Jensen. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361(1806):1001–1019, 2003.
- [29] Krister Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural

- optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2):359–373, 1987.
- [30] Krister Svanberg. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM journal on optimization*, 12(2):555–573, 2002.
- [31] P Thamburaj and JQ Sun. Optimization of anisotropic sandwich beams for higher sound transmission loss. *Journal of Sound and Vibration*, 254(1):23–36, 2002.
- [32] André J Torii and Jairo R De Faria. Structural optimization considering smallest magnitude eigenvalues: a smooth approximation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 39(5):1745–1754, 2017.
- [33] Jack R Vinson. Sandwich structures. 2001.
- [34] JackR Vinson. *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. Routledge, 2018.
- [35] Haydn NG Wadley. Multifunctional periodic cellular metals. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 364(1838):31–68, 2005.
- [36] Guilian Yi, Yong Chang Shin, Heonjun Yoon, Soo-Ho Jo, and Byeng D Youn. Topology optimization for phononic band gap maximization considering a target driving frequency. *JMST Advances*, 1(1-2):153–159, 2019.

Anexo A

Cálculos realizados

A.1. Propiedades de área viga con sección circular

Se supone que la viga está alineada con respecto a los ejes mostrados en la Figura A.1 y que la sección transversal es circular de diámetro D .

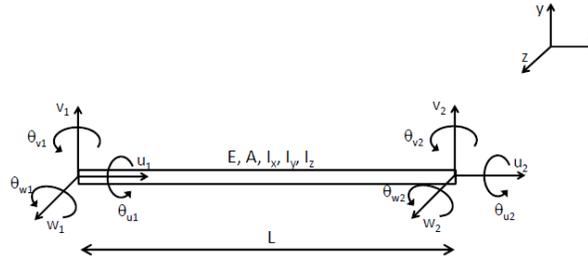


Figura A.1: Elemento viga 3D.

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{A.1})$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} \quad (\text{A.2})$$

$$I_x = I_y + I_z = \frac{\pi D^4}{32} \quad (\text{A.3})$$

A.2. Cálculo derivadas del elemento viga

$$\frac{dE(x)}{dx} = (E_2 - E_1) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = (\nu_2 - \nu_1) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = (\rho_2 - \rho_1) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{dD(x)}{dx} = (D_2 - D_1) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Con } A(x) = \frac{\pi}{4}((D_2 - D_1)x + D_1)^2$$

$$\frac{dA(x)}{dx} = \frac{\pi}{2}((D_2 - D_1)x + D_1)(D_2 - D_1) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Con } I_x(x) = \frac{((Lv_2 - Lv_1)x + Lv_1)^4}{12}$$

$$\frac{dI_y(x)}{dx} = \frac{4\pi((Lv_2 - Lv_1)x + Lv_1)^3(Lv_2 - Lv_1)}{64} \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Con } I_y(x) = \frac{((Lv_2 - Lv_1)x + Lv_1)^4}{12}$$

$$\frac{dI_z(x)}{dx} = \frac{4\pi((Lv_2 - Lv_1)x + Lv_1)^3(Lv_2 - Lv_1)}{64} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{con } I_z(x) = I_x(x) + I_y(x)$$

$$\frac{dI_x(x)}{dx} = \frac{dI_x(x)}{dx} + \frac{dI_y(x)}{dx} \quad (\text{A.11})$$