



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE ENDOMORFISMOS DE SISTEMAS DINÁMICOS  
MINIMALES DE CANTOR

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

BASTIÁN ALEJANDRO ESPINOZA CONTRERAS

PROFESOR GUÍA:  
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

PROFESOR CO-GUÍA:  
SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
MICHAEL HEINRICH SCHRAUDNER

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE

2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCION MATEMÁTICAS APLICADAS  
POR: BASTIÁN ALEJANDRO ESPINOZA CONTRERAS  
FECHA: 2020  
PROF. GUÍA: ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA  
PROF. CO-GUÍA: SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

## CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE ENDOMORFISMOS DE SISTEMAS DINÁMICOS MINIMALES DE CANTOR

Los sistemas dinámicos minimales de Cantor representan una clase relevante de estudio en teoría ergódica y dinámica simbólica desde hace más de un siglo. Ejemplos relevantes son el sistema de Thue-Morse o el sistema substitutivo de Fibonacci, que sirvió como modelo inicial para el estudio de traslaciones en superficies planas. El resultado de Herman, Putnam y Skau a inicios de los noventa, que caracteriza la equivalencia orbital (fuerte y débil) por medio del grupo de dimensión asociado a este tipo de dinámicas, marca un hito en la teoría. La herramienta principal en estos estudios son las representaciones usando diagramas de Bratteli-Vershik.

Posteriormente, el uso de los diagramas de Bratteli-Vershik permitió entender clases muy estudiadas de subshifts minimales y probar propiedades finas de su comportamiento dinámico. En particular, el resultado de Durand, Host y Skau a fines de los noventa establece que la clase de los sistemas substitutivos minimales coincide con los sistemas de Bratteli-Vershik estacionarios (todos los niveles del diagrama coinciden) y el resultado de Durand algunos años después caracteriza la clase de subshifts linealmente recurrentes. En ambos casos las representaciones de Bratteli-Vershik tienen un número uniformemente acotado de vértices por nivel.

El estudio de muchas propiedades dinámicas de estas dos clases de sistemas motivaron la definición de los sistemas minimales de Cantor de rango finito (RF): son aquellos que admiten representaciones de Bratteli-Vershik con un número uniformemente acotado de vértices por nivel. Además de los sistemas antes mencionados esta clase incluye a muchos de los sistemas dinámicos de entropía cero clásicos como las extensiones simbólicas de transformaciones de intercambios de intervalos.

En los últimos veinte años se han probado resultados interesantes sobre los sistemas RF, como lo son una descripción de sus medidas invariantes, su expansividad, la caracterización de sus valores propios y recientemente para la clase de subshifts de complejidad no-superlineal (que son todos de RF) se probó que el grupo de automorfismos es virtualmente  $\mathbb{Z}$ .

El objetivo de este trabajo es abordar distintas preguntas sobre la dinámica de sistemas de RF. En particular, se prueba que en la clase de sistemas de RF el grupo de automorfismos es virtualmente  $\mathbb{Z}$ . Por otro lado, motivados por trabajos de Durand y Durand-Leroy del 2018 donde se estudian sistemas linealmente recurrentes, probamos para una clase significativa de sistemas de RF, el número de factores simbólicos es esencialmente finito. En particular, mostramos que esta subclase incluye a una familia genérica de transformaciones de intercambios de intervalos.



# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Sistemas dinámicos . . . . .	3
1.1.1. Generalidades . . . . .	3
1.1.2. Sistemas simbólicos y S-ádicos . . . . .	5
1.2. Representación por diagramas de Bratteli-Vershik . . . . .	7
1.2.1. Diagramas de Bratteli . . . . .	7
1.2.2. Diagramas de Bratteli ordenados y el sistema de Bratteli-Vershik . . . . .	8
1.3. Sistemas minimales de Cantor de rango finito . . . . .	9
1.4. Ejemplos . . . . .	12
1.4.1. Substituciones . . . . .	12
1.4.2. Intercambios de intervalos . . . . .	13
<b>2. Sobre el número de Factores</b>	<b>15</b>
2.1. Palabras de retorno . . . . .	15
2.2. Resultados principales . . . . .	18
2.2.1. Acotar el número de factores . . . . .	18
2.2.2. Resultado principal . . . . .	22
2.3. Una condición suficiente para sistemas S-ádicos . . . . .	23
2.4. Aplicación a Transformaciones de Intercambios de Intervalos . . . . .	26
<b>3. Sobre el número de Automorfismos</b>	<b>28</b>
3.1. Resultados principales . . . . .	29
3.2. Interpretaciones . . . . .	30
3.3. Lemas previos . . . . .	33
3.4. Demostración de la Proposición 3.3 . . . . .	35
<b>Conclusión</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>



# Introducción

Una forma de construir sistemas simbólicos minimales no triviales es tomando un subshift cuyo lenguaje esté generado por la iteración de una regla de substitución sobre un alfabeto finito; estos sistemas se llaman *substitutivos* y, por su construcción sencilla, han sido extensamente estudiados. Sus propiedades más elementales, como que son únicamente ergódicos, que tienen complejidad lineal o los criterios para que tengan espectro racional, fueron obtenidos haciendo uso de sus particulares formas auto-similares, pero los resultados más profundos, como la caracterización de Durand de estos subshifts a través de sus sistemas inducidos [7] y el teorema de Host sobre equivalencia de valores propios medibles y continuos [14], se lograron gracias a la noción de *reconocibilidad* y el celebrado Teorema de Mossé [17].

La reconocibilidad se puede reinterpretar en el contexto mucho más general de diagramas de Bratteli-Vershik de rango finito (RF) gracias a un teorema clásico de Downarowicz y Maass [6] sobre la expansividad de estos sistemas. Es de esperar entonces que los comportamientos substitutivos se extiendan de alguna manera a RF. Este enunciado casi “filosófico” ha ido mostrándose verdadero en muchos estudios de la última década.

Los primeros trabajos que lograron llevar a cabo esta idea son teoremas sobre los subshifts linealmente recurrentes -una clase especial de sistemas RF-, entre los que se incluye una caracterización de los valores propios continuos y medibles (que, aunque ya no necesariamente coinciden, el criterio es esencialmente el mismo al dado por Host), la única ergodicidad y la complejidad lineal. En el caso general, RF ya no es únicamente ergódico, pero tiene una cantidad acotada (por el rango) de medidas ergódicas [2], y aunque no son de complejidad lineal como los substitutivos, sí son de entropía cero.

En esta tesis continuamos desarrollando este programa en el contexto del reciente interés que ha surgido en el estudio de grupos de automorfismos de sistemas simbólicos de entropía cero. Más precisamente, el punto de partida son tres artículos. Uno es [4], donde se muestra que los subshifts minimales de complejidades no-superlineal tienen grupo de automorfismos virtualmente  $\mathbb{Z}$ . Los subshifts con estas complejidades incluyen a los substitutivos, son RF y de hecho se pueden considerar genéricos en esta última clase [1], así que es natural preguntarse por si el grupo de automorfismos de todo sistema RF es virtualmente  $\mathbb{Z}$ . Los otros dos artículos que motivan esta tesis son [8] y [11], donde se prueba que los factores de sistemas linealmente recurrentes son finitos salvo composiciones con el shift y conjugaciones. Siguiendo la idea del párrafo anterior, se espera que este fenómeno sea más general. El objetivo de esta tesis es extender en RF, tanto como sea posible, estos dos teoremas descritos.

La estructura de esta memoria es de tres capítulos. Partimos dando las definiciones elemen-

tales de la Teoría Ergódica y los Sistemas Dinámicos, enfocándonos en describir los diagramas de Bratteli-Vershik de rango finito y su conexión con los subshifts S-ádicos. En el Capítulo 2 probamos que, para una clase de sistemas -que incluye a casi todas las transformaciones de intervalos-, el número de factores simbólicos es finita salvo composiciones con el shift y conjugaciones, extendiendo así [8] y [11]. En el Capítulo 3 nos dedicamos a demostrar que el grupo de automorfismos de todo sistema RF es, salvo un caso trivial, virtualmente  $\mathbb{Z}$ , generalizando [4] a todo RF.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo presentaremos los conceptos básicos de la Teoría de Sistemas Dinámicos, con especial detalle en los sistemas minimales de Cantor y los sistemas simbólicos relacionados. Comenzamos con las definiciones generales de sistemas dinámicos y de expansividad/equicontinuidad. Hacemos énfasis en las dinámicas del shift y en los subshifts S-ádicos. Continuamos con una descripción de los diagramas de Bratteli y la acción de Vershik como representaciones de un sistema dinámico minimal de Cantor. Luego establecemos una relación entre diagramas de Bratteli y subshifts S-ádicos que será central en los capítulos que siguen. Terminamos el capítulo presentando algunos ejemplos de sistemas minimales de Cantor y sus representaciones por diagramas de Bratteli.

Para exposiciones sistemáticas, referimos al lector a [19] para la teoría general de sistemas dinámicos, a [15] para la de sistemas simbólicos, y a [13] y [9] para la de los diagramas de Bratteli y su conexión con los sistemas dinámicos.

### 1.1. Sistemas dinámicos

Partimos definiendo los objetos principales del área y la notación básica.

Todos los intervalos que consideremos serán de números enteros, *i.e.*  $[a, b] := \{n \in \mathbb{Z} : a \leq n \leq b\}$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , salvo que indiquemos lo contrario. Letras como  $n$ ,  $m$  y  $k$  siempre denotarán enteros. El conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  comienza con 0.

#### 1.1.1. Generalidades

Un **sistema dinámico** es un par  $(X, T)$ , donde  $X$  es un espacio métrico compacto y  $T: X \rightarrow X$  un homeomorfismo. Por lo general diremos que  $T$  es la **acción** en  $X$ , y usaremos, salvo que indiquemos lo contrario, la letra  $T$  para denotar la acción de un sistema dinámico indistintamente del espacio subyacente  $X$ .

**Definición 1.1** *Un sistema dinámico  $(X, T)$  es*



1. **minimal**, si para todo  $x \in X$ , su **órbita**

$$\text{orb}(x) := \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subconjunto denso de  $X$ ;

2. **de Cantor**, si  $X$  es un espacio de Cantor, *i.e.* es totalmente desconexo y no tiene puntos aislados.

Este trabajo se centra en estudiar algunas propiedades de los llamados **endomorfismos** de sistemas minimales de Cantor.

**Definición 1.2** (Endomorfismos) Sean  $(X, T)$  y  $(Y, T)$  sistemas dinámicos y  $f: X \rightarrow Y$  una función. Decimos que  $f$  es un **factor** si es continua, sobreyectiva y  $f \circ T = T \circ f$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Diremos que un factor  $f: (X, T) \rightarrow (Y, T)$  es

1. **conjugación** si  $f$  es homeomorfismo,
2. **automorfismo** si  $f$  es conjugación y  $X = Y$ .

Dado un sistema dinámico  $(X, T)$ , el conjunto  $\text{Aut}(X, T)$  de todos los automorfismos de  $X$  tiene la estructura de grupo bajo la operación de composición, y por eso es llamado el **grupo de automorfismos de  $X$** . Además, el grupo  $\langle T \rangle$  generado por la acción es normal y, por lo tanto,  $\text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$  es un grupo. Por otro lado, cuando existe una conjugación  $f: (X, T) \rightarrow (Y, T)$  entre sistemas dinámicos, diremos que  $(X, T)$  es **conjugado** a  $(Y, T)$ ; esta noción define una relación de equivalencia.

Dentro de la clase de sistemas que estudiaremos se dará una dicotomía entre las siguientes propiedades.

**Definición 1.3** (Expansividad, Equicontinuidad) Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico y  $d$  una métrica para  $X$ . Decimos que  $(X, T)$  es **expansivo** si existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in X$  se cumple

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) \leq \delta \quad \text{implica} \quad x = y.$$

También decimos que  $\delta$  es una **constante de expansividad**. En el otro extremo, decimos que  $(X, T)$  es **equicontinuo** si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in X$  cumplen  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $d(T^n x, T^n y) \leq \varepsilon$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Llamaremos a  $\delta$  una **constante de equicontinuidad** para  $\varepsilon$ .

**Observación** Como  $X$  es compacto, estas propiedades no dependen de la métrica elegida para  $X$ , aunque el valor de las constantes sí.

Un ejemplo clásico de sistemas dinámicos minimales de Cantor equicontínuos son los **odómetros**, que ahora describimos. Sea  $q = (q_n)_{n \geq 1}$  una secuencia de enteros positivos tales que  $q_n$  divide a  $q_{n+1}$ . Definimos

$$X_q = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/q_n\mathbb{Z} : x_{n+1} = x_n \pmod{q_n}, \forall n \geq 1 \right\},$$

donde  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  es el anillo de enteros módulo  $k$ . Entonces  $X_q$  es totalmente desconexo bajo la topología inducida por el producto de las topologías discretas de  $\mathbb{Z}/q_n\mathbb{Z}$ . La acción en  $X_q$  es

$$\begin{aligned} T: X_q &\rightarrow X_q \\ (x_n)_{n \geq 1} &\mapsto (x_n + 1)_{n \geq 1}. \end{aligned}$$

Es claro que  $T$  es un homeomorfismo. Más aun,  $(X_q, T)$  es un sistema dinámico minimal equicontínuo, y es de Cantor si, y sólo si,  $X_q$  es infinito. A este sistema lo llamamos el **odómetro de base  $q$** . Es un resultado del folclore que  $\text{Aut}(X_q, T) = X_q$ .

En la próxima subsección definiremos una clase de sistemas, que al contrario de los odómetros, son expansivos.

### 1.1.2. Sistemas simbólicos y S-ádicos

Uno de los ejemplos clásicos de sistemas dinámicos de Cantor expansivos, y también una de las clases de sistemas centrales en este trabajo, es la de los subshifts. Primero discutiremos la notación básica de dinámica simbólica que usaremos por el resto de este trabajo.

Un **alfabeto** es un conjunto  $A$  finito y no vacío. Para  $n \geq 0$ ,  $A^n$  es el conjunto de palabras en  $A$  de **largo  $n$** . Anotamos  $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$  para el conjunto de palabras no vacías en  $A$  y  $A^* = A^+ \cup \{1\}$  para el conjunto de todas las palabras en  $A$ . Si  $u, v \in A^+$ , entonces la concatenación de  $u$  con  $v$  la escribimos  $uv$ . Esto le da a  $A^+$  la estructura de semigrupo y a  $A^*$  la de monoide. Sea  $B$  otro alfabeto. Un **morfismo de palabras** (o, simplemente, **morfismo**) es una función  $\sigma: A^+ \rightarrow B^+$  tal que

$$\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v), \quad \forall u, v \in A^+.$$

Si  $\sigma: A \rightarrow B^+$  es cualquier función, entonces ésta se extiende por concatenación a un morfismo  $\sigma: A^+ \rightarrow B^+$  que seguimos llamando  $\sigma$ . Más aun,  $\sigma$  se puede extender a  $\sigma: A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$  y a  $\sigma: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  por

$$\begin{aligned} x_0x_1x_2 \cdots &\mapsto \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2) \cdots \\ \cdots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2 \cdots &\mapsto \cdots \sigma(x_{-2})\sigma(x_{-1}).\sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2) \cdots, \end{aligned}$$

donde, en la segunda línea, el punto indica el inicio de la coordenada 0 de la secuencia. Al revés, si  $\sigma: A^+ \rightarrow B^+$  es un morfismo, entonces  $\sigma$  es la extensión al semigrupo de palabras de su restricción  $\sigma: A \rightarrow B^+$  al alfabeto.

Sean  $u, w \in A^*$  palabras. Escribimos  $u \leq_p w$ ,  $u \leq_s w$  y  $u \sqsubseteq w$  para las relaciones de ser prefijo, sufijo y subpalabra, respectivamente. También escribimos  $u <_p w$ ,  $u <_s w$  y  $u \sqsubset w$  cuando además  $u \neq w$ . El largo de una palabra  $w \in A^*$  es  $|w|$ . Si  $F \subseteq A^*$ , entonces anotamos

$$\langle F \rangle = \min_{w \in F} |w| \quad \text{y} \quad |F| = \max_{w \in F} |w|.$$

De manera similar, si  $\sigma: A^+ \rightarrow B^+$  es morfismo, entonces

$$\langle \sigma \rangle := \langle \sigma(A) \rangle = \min_{a \in A} |\sigma(a)| \quad \text{y} \quad |\sigma| := |\sigma(A)| = \max_{a \in A} |\sigma(a)|.$$

Al espacio  $A^{\mathbb{Z}}$ , de secuencias bi-infinitas  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  cuyas coordenadas  $x_n$  son elementos de  $A$ , le damos siempre la topología producto originada de la topología discreta en  $A$ . Entonces  $A^{\mathbb{Z}}$  es un espacio métrico compacto totalmente desconexo. El **shift** en  $A^{\mathbb{Z}}$  es la función

$$\begin{aligned} T: A^{\mathbb{Z}} &\rightarrow A^{\mathbb{Z}} \\ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

y, como es fácil ver, es un homeomorfismo. Entonces  $(A^{\mathbb{Z}}, T)$  es un sistema dinámico de Cantor y lo llamamos el **full-shift en  $A$** . Un conjunto  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$  es **invariante** si  $T(X) = X$ .

**Definición 1.4** (Subshift) *Un par  $(X, T)$ , donde  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$  es un subconjunto cerrado e invariante y  $T$  es la restricción del shift a  $X$ , lo llamamos un **subshift**.*

Notemos que si  $(X, T)$  es minimal e infinito, entonces  $(X, T)$  es un sistema dinámico de Cantor. Sean  $x, y \in X$  e  $I \subseteq \mathbb{Z}$  un intervalo. Usaremos la notación  $x_I$  para denotar la palabra obtenida al restringir  $x$  a  $I$ . Diremos que  $x = y$  en  $I$  si  $x_I = y_I$ . Es fácil ver que  $X$  es expansivo bajo la métrica estándar del producto:

$$d(x, y) := \exp(-\min\{n \geq 0 : x_{[-n, n]} \neq y_{[-n, n]}\}) \quad \forall x, y \in X,$$

donde  $\min \emptyset = \infty$ . El **leanguaje** de  $X$  es el conjunto

$$\mathcal{L}(X) = \{u \in A^* : \text{existe } x \in X \text{ tal que } u \sqsubseteq x\}.$$

Usaremos la notación  $\mathcal{L}_{\geq k}(X)$  para indicar al conjunto de palabras  $u \in \mathcal{L}(X)$  tales que  $|u| \geq k$ .

Introducimos ahora los sistemas S-ádicos.

**Definición 1.5** *Un morfismo  $\sigma: A^+ \rightarrow B^+$  es*

1. **primitivo**, si para todo  $a \in A$  y  $b \in B$ ,  $b$  es una letra de  $\sigma(a)$ .
2. **propio**, si existen  $a, b \in B$  tales que para todo  $c \in A$ ,  $\sigma(c)$  comienza con  $a$  y termina con  $b$ .

Una secuencia de morfismos  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \in \mathbb{N}}$  es primitiva (resp. propia) si cada  $\sigma_n$  es primitivo (resp. propio). Decimos que  $\sigma$  es **correcta** si es primitiva y propia.

**Definición 1.6** (Subshifts S-ádicos) *Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de morfismos. Para  $n \geq 1$ , definimos el subshift*

$$X_{\sigma}^{(n)} = \{x \in A_n^{\mathbb{Z}} : \text{para todo } k \geq 0 \text{ existe } N > n \text{ y } a \in A_N \text{ tales que } x_{[-k, k]} \sqsubseteq \sigma_{(n, N]}(A)\},$$

donde  $\sigma_{(n, N]} := \sigma_{n+1} \cdots \sigma_N$ . El **subshift S-ádico** generado por  $\sigma$  es  $X_{\sigma} := X_{\sigma}^{(0)}$ .

**Proposición 1.7** Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de morfismos. Entonces

$$X_\sigma^{(n)} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k \sigma_{n+1}(X_\sigma^{(n+1)}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Si  $\sigma$  es primitiva, entonces  $X_\sigma$  es minimal.

La ecuación (1.1) implica que para cada  $x \in X_\sigma^{(n)}$  existe  $y \in X_\sigma^{(n+1)}$  y  $k \in [0, |\sigma_{n+1}(y_0)|)$  tales que  $x = T^k \sigma_{n+1}(y)$ . Si esta representación es única para cada  $n \geq 1$ , entonces decimos que  $\sigma$  es **reconocible**.

**Definición 1.8** (Rango) Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de morfismos. Definimos su **rango** por

$$R(\sigma) = \sup_{n \geq 1} \#A_n$$

## 1.2. Representación por diagramas de Bratteli-Vershik

Sea  $(X, T)$  un sistema minimal de Cantor. Entonces  $X$  puede ser representado como un diagrama de Bratteli ordenado y  $T$  como el homeomorfismo de Vershik actuando en el diagrama. Describiremos en esta sección los diagramas de Bratteli, el lenguaje que usaremos y los teoremas de representación clásicos de la teoría.

### 1.2.1. Diagramas de Bratteli

Un diagrama de Bratteli es un grafo infinito  $(V, E)$  que consiste de un conjunto de vértices  $V$  y de aristas  $E$ , ambos divididos en niveles  $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots$  y  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$  disjuntos a pares. El conjunto  $V_0$  es un singleton  $\{v_0\}$  y para todo  $n \geq 1$  las aristas en  $E_n$  unen vértices en  $V_{n-1}$  con vértices en  $V_n$ . Si  $e \in E$  conecta  $u \in V_{n-1}$  con  $v \in V_n$ , escribimos  $s(e) = u$  y  $r(e) = v$ , donde  $s: E_n \rightarrow V_{n-1}$  y  $r: E_n \rightarrow V_n$  son los mapeos de **origen** y **llegada**, respectivamente. También es necesario que  $r^{-1}(v) \neq \emptyset$  para todo  $v \in V$  y  $s^{-1}(v) \neq \emptyset$  para todo  $v \in V \setminus V_0$ .

Fijemos  $n \geq 1$ . El **nivel**  $n$  del diagrama es el subgrafo de vértices  $V_{n-1} \cup V_n$  y aristas  $E_n$  entre estos vértices. El nivel 1 se llama el **sombbrero** del diagrama. Describimos el conjunto de aristas  $E_n$  con una matriz  $M_n$  de dimensiones  $V_{n-1} \times V_n$  cuya entrada  $(u, v)$  es el número de aristas en  $E_n$  que unen el vértice  $u \in V_{n-1}$  con el vértice  $v \in V_n$ . También consideramos varios niveles al mismo tiempo. Para enteros  $0 \leq m < n$ , anotamos  $E_{m,n}$  para el conjunto de caminos en el grafo que unen vértices de  $V_m$  con vértices de  $V_n$ . Entonces la entrada  $(u, v)$  de la matriz  $P_{m,n} = M_{m+1} \cdots M_n$  es el número de caminos que suben desde  $u \in V_m$  a  $v \in V_n$ .

Un diagrama de Bratteli  $(V, E)$  es **simple** si para todo  $m \geq 1$  existe  $n > m$  tal que cada par de vértices  $u \in V_m$  y  $v \in V_n$  está conectado por un camino finito, **i.e.**,  $P_{m,n}$  tiene todas sus coordenadas positivas.

## 1.2.2. Diagramas de Bratteli ordenados y el sistema de Bratteli-Vershik

Un diagrama de Bratteli **ordenado** es una tripleta  $B = (V, E, \preceq)$ , donde  $(V, E)$  es un diagrama de Bratteli y  $\preceq$  es un orden parcial en  $E$  tal que: las aristas  $e, e' \in E$  son comparables si, y sólo si  $r(e) = r(e')$ .

Para describir el nivel  $E_n$  ya no nos bastan las matrices  $M_n$  de la subsección anterior pues no consideran el orden  $\preceq$ . Ahora usaremos morfismos  $\sigma_n^B$  definidos como sigue: si  $n \geq 2$ ,  $v \in V_n$  y  $e \in r^{-1}(v)$  es la  $k$ -ésima arista de  $r^{-1}(v)$  según  $\preceq$ , entonces la  $k$ -ésima letra de  $\sigma_n^B(v)$  es  $s(e)$ ; si  $v \in V_1$  y  $e \in r^{-1}(v)$  es la  $k$ -ésima arista de  $r^{-1}(v)$  según  $\preceq$ , entonces la  $k$ -ésima letra de  $\sigma_1^B(v)$  es  $e$ . Así,  $\sigma_n: V_n^+ \rightarrow V_{n-1}^+$  si  $n \geq 2$  y  $\sigma_1: V_1^+ \rightarrow E_1^+$ . Escribimos  $\sigma^B = (\sigma_n^B)_{n \geq 1}$ . Para  $n \geq 1$ , sea  $l: V_n^* \rightarrow \mathbb{Z}^{V_n}$  el mapeo que manda la palabra  $w \in V_n^*$  al vector  $l(w) \in \mathbb{Z}^{V_n}$  cuya coordenada  $u \in V_n$  es el número de letras  $u$  que  $w$  tiene.  $l$  es el **mapeo abelianización** y se cumple que  $l \circ \sigma_{n+1}^B = P_{n+1} \circ l$ . Para  $n = 0$  tenemos en  $E_1$  una definición y relación similar.

El orden parcial  $\preceq$  define naturalmente aristas minimales y maximales. Además, este orden en  $E$  induce otro en el conjunto de caminos  $E_{m,n}$  para todo  $0 \leq m < n$ :  $(e_{m+1}, \dots, e_n) \preceq (f_{m+1}, \dots, f_n)$  si, y sólo si, existe  $i \in (m, n]$  tal que  $e_i \preceq f_i$  y  $e_j = f_j$  para  $j \in (i, n]$ .

Dada una secuencia creciente de enteros  $(n_k)_{k \geq 0}$  con  $n_0 = 0$ , definimos la **contracción** de  $B = (V, E, \preceq)$  respecto a  $(n_k)_{k \geq 0}$  por

$$\left( (V_{n_k})_{k \geq 0}, (E_{n_k, n_{k+1}})_{k \geq 0}, \preceq \right),$$

donde  $\preceq$  es el orden inducido en cada conjunto de aristas  $E_{n_k, n_{k+1}}$ . La operación reversa es una **expansión**.

Dado un diagrama de Bratteli ordenado  $B = (V, E, \preceq)$ , definimos  $X_B \subseteq E^{\mathbb{Z}}$  como el conjunto de caminos infinitos  $(x_1, x_2, \dots)$  que parten en  $v_0$  y tales que  $r(x_n) = s(x_{n+1})$  para todo  $n \geq 1$ . Le damos a  $X_B$  la topología que tiene como base a los **cilindros**

$$[e_1, e_2, \dots, e_n] = \{(x_1, x_2, \dots) \in X_B ; x_i = e_i, \text{ for } 1 \leq i \leq n \}.$$

Cada  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$  también es cerrado, como es fácil ver, por lo que  $X_B$  es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo. Si  $(V, E)$  es simple y  $X_B$  infinito, entonces  $X_B$  es de Cantor.

Cuando existe un único punto  $(x_1, x_2, \dots) \in X_B$  tal que  $x_n$  es maximal para todo  $n \geq 1$  y un único punto  $(y_1, y_2, \dots) \in X_B$  tal que  $y_n$  es mínimo para todo  $n \geq 1$ , decimos que  $B = (V, E, \preceq)$  es **propio**. Llamamos a estos puntos  $x_{\max}$  y  $x_{\min}$ , respectivamente. En este caso definimos un mapeo  $V_B: X_B \rightarrow X_B$ , llamada la acción de Vershik, como sigue: sea  $x = (x_1, x_2, \dots) \in X_B \setminus \{x_{\max}\}$  y sea  $n \geq 1$  el entero más pequeño tal que  $x_n$  no es una arista maximal. Sea  $y_n$  el sucesor de  $x_n$  y  $(y_1, \dots, y_{n-1})$  el único camino minimal en  $E_{0, n-1}$  que conecta  $v_0$  con el vértice inicial de  $y_n$ . Ponemos  $V_B(x) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, \dots)$  y  $V_B(x_{\max}) = x_{\min}$ . Entonces es fácil ver que  $V_B$  es un homeomorfismo en  $X_B$ .

El sistema  $(X_B, V_B)$  es llamado el **sistema de Bratteli-Vershik** generado por  $B =$

$(V, E, \preceq)$ . Cualquier contracción de  $B$  es simple y propia, y define un sistema conjugado a  $(X_B, V_B)$ .

El teorema central de esta sección es:

**Teorema 1.9** ([13]) *Sea  $(X_B, V_B)$  un sistema de Bratteli-Vershik dado por un diagrama  $B$  simple y propio. Si  $X_B$  es infinito, entonces  $(X_B, V_B)$  es un sistema dinámico minimal de Cantor. Recíprocamente, si  $(X, T)$  es un sistema dinámico minimal de Cantor, entonces existe un diagrama de Bratteli ordenado  $B$  simple y propio tal que  $(X_B, V_B)$  es conjugado a  $(X, T)$ .*

Cualquier diagrama ordenado  $B = (V, E, \preceq)$  simple y propio tal que  $(X_B, V_B)$  sea conjugado a  $(X, T)$  se llamará una **representación de Bratteli-Vershik** de  $(X, T)$ . En lo que sigue, cada vez que tengamos una representación como esta, identificaremos  $X_B$  con  $X$ .

Muchas veces conviene trabajar con una “buena” representación de Bratteli-Vershik. Consideraremos representaciones tales que

(B) Para todo  $n \geq 1$ ,  $\sigma_n$  es primitiva y propia.

Argumentos clásicos muestran que siempre es posible modificar un diagrama para obtener uno que cumpla estas propiedades. En particular, para que los morfismos sean primitivos se usa que el diagrama es simple, y para que sean propios la Proposición 2.8 en [13]. Un diagrama que cumpla estas condiciones lo llamaremos **correcto**.

**Definición 1.10** *El **rango** de un diagrama  $B = (V, E, \preceq)$  es*

$$R(B) = \sup_{n \geq 1} \#V_n$$

### 1.3. Sistemas minimales de Cantor de rango finito

Un sistema minimal de Cantor es de **rango topológico finito** si admite una representación de Bratteli-Vershik de rango finito. El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente relación crucial entre diagramas de Bratteli y secuencias de morfismos que, en particular, dice que los sistemas de rango finito son, salvo un caso trivial, subshifts S-ádicos generados por secuencias de rango finito.

**Teorema 1.11** *Sea  $B$  diagrama de Bratteli correcto de rango finito. Entonces ocurre exactamente una de las siguientes situaciones:*

1. Cada  $X_{\sigma_B}^{(n)}$  es periódico y  $(X_B, V_B)$  es conjugado al odómetro de base  $(\#X_{\sigma_B}^{(n)})_{n \geq 1}$ .
2. Existe una contracción  $B'$  de  $B$  tal que  $(X_B, V_B)$  es conjugado a  $X_{\sigma_{B'}}$ .

**Observación** Notemos que si  $B$  es un diagrama como en el teorema, entonces

$$R(\sigma^{B'}) = R(B') \leq R(B) = R(\sigma^B).$$

En particular,  $\sigma^{B'}$  tiene rango finito.

El punto de partida para la demostración del Teorema 1.11 es el siguiente resultado clásico.

**Teorema 1.12** ([6]) *Sea  $(X, T)$  un sistema de rango finito que no es un odómetro. Entonces  $(X, T)$  es expansivo.*

Sea  $B = (V, E, \preceq)$  diagrama de Bratteli correcto. Para  $n \geq 1$  y  $x \in X$ , sea

$$\pi_n(x) = ((V_B^k x)_{(0,n]})_{k \in \mathbb{Z}} \in E_{0,n}^{\mathbb{Z}}.$$

Es fácil ver entonces que

$$X_B^{(n)} = \{\pi_n(x) : x \in X_B\} \subseteq E_{0,n}^{\mathbb{Z}}$$

es un subshift y  $\pi_n : (X_B, V_B) \rightarrow (X_B^{(n)}, T)$  un factor.

**Proposición 1.13** *Sea  $B = (V, E, \preceq)$  diagrama de Bratteli correcto. Entonces ocurre exactamente una de las siguientes situaciones:*

1. Cada  $X_B^{(n)}$  es periódico y  $(X_B, V_B)$  es conjugado al odómetro de base  $(\#X_B^{(n)})_{n \geq 1}$ .
2. Existe  $n \geq 1$  tal que  $(X_B, V_B)$  es conjugado a  $(X_B^{(N)}, T)$ , para todo  $N \geq n$ .

DEMOSTRACIÓN. Definimos, para  $x, y \in X_B$ ,

$$d(x, y) = \exp(-\min\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}),$$

con la convención  $\min(\emptyset) = \infty$ . Es fácil ver que  $d$  es una métrica que origina la topología de  $X_B$ . Primero supongamos que  $(X_B, V_B)$  es expansivo y tomemos  $\delta > 0$  una constante de expansividad. Elijamos  $n \geq 1$  tan grande como para que  $\exp(-n) < \delta$ . Entonces,

$$\text{para todo } x, y \in X_B \text{ tales que } x_{(0,n]} = y_{(0,n]}, \text{ se tiene } d(x, y) < \delta \quad (1.2)$$

Veamos que  $\pi_n : (X_B, V_B) \rightarrow (X_B^{(n)}, T)$  es inyectiva. Si  $x, y \in X_B$  cumplen  $\pi_n(x) = \pi_n(y)$ , entonces  $(V_B^k x)_{[1,n]} = (V_B^k y)_{[1,n]}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego, por (1.2),

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} d(V_B^k x, V_B^k y) < \delta,$$

y  $x = y$ . Entonces  $\pi_n$  es un factor inyectivo; es decir, una conjugación.

Supongamos ahora que  $(X_B, V_B)$  no es expansivo. El Teorema 1.12 implica que  $(X_B, V_B)$  es equicontinuo. Para  $n \geq 1$ , sea  $\delta_n > 0$  una constante de equicontinuidad para  $\varepsilon_n = \exp(-n)$ . Entonces,

$$\text{para todo } x, y \in X_B \text{ tales que } d(x, y) < \delta_n \text{ se tiene } \pi_n(x) = \pi_n(y). \quad (1.3)$$

Como  $X_B$  es compacto, puede ser recubierto por una cantidad finita de bolas de diámetro  $< \delta_n$ . Luego, como  $\pi_n$  es sobreyectiva, la condición (1.3) implica que  $X_B^{(n)}$  es finito; más aun, como  $X_B$  es minimal,  $X_B^{(n)}$  consiste de sólo una órbita finita. Definimos

$$\begin{aligned}\pi: X_B &\rightarrow \prod_{n \geq 1} X_B^{(n)} \\ x &\mapsto (\pi_n(x))_{n \geq 1}.\end{aligned}$$

Como  $\pi_n(x) = \pi_n(y)$  implica que  $x_{[1,n]} = y_{[1,n]}$ ,  $\pi$  es inyectiva, y así un homeomorfismo con su imagen  $Z := \pi(X_B)$  (bajo la topología inducida por la topología producto). Además, el mapeo

$$\begin{aligned}T: Z &\rightarrow Z \\ (\pi_n(x))_{n \geq 1} &\rightarrow (T\pi_n(x))_{n \geq 1}\end{aligned}$$

define un homeomorfismo que conmuta con  $\pi$ . Luego,  $(Z, T)$  es un sistema dinámico que es conjugado a  $(X_B, V_B)$  a través de  $\pi$ . Consideremos ahora el factor  $f_n: X_B^{(n)} \mapsto X_B^{(n-1)}$  que manda  $x_{[1,n]} \rightarrow x_{[1,n-1]}$ . Notemos que si  $y, y' \in X_B^{(n-1)}$ , entonces podemos tomar  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $T^k y = y'$  y calcular

$$T^k f_n^{-1}(y) = f_n^{-1}(T^k y) = f_n^{-1}(y'),$$

con lo que  $\#f_n^{-1}(y) = \#f_n^{-1}(y')$  (pues  $T$  es biyección). Se sigue de esto que  $\#X_B^{(n-1)}$  divide a  $X_B^{(n)}$ . Es fácil ver entonces que  $Z$  es el odómetro de base  $(\#X_B^{(n)})_{n \geq 1}$ .  $\square$

**Proposición 1.14** *Sea  $B = (V, E, \preceq)$  diagrama de Bratteli correcto y  $B' = (V', E', \preceq')$  el diagrama obtenido al contraer los primeros  $n \geq 1$  niveles de  $B$ :*

$$\begin{aligned}V' &= V_0 \cup V_n \cup V_{n+1} \cup \dots \\ E' &= E_{0,n} \cup E_{n+1} \cup E_{n+2} \cup \dots\end{aligned}$$

Entonces  $X_B^{(n)} = X_{\sigma_{B'}}^{(n)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Anotemos, para aligerar un poco la notación,  $\tau = (\tau_N)_{N \geq 1} = \sigma^{B'}$ . Entonces  $\tau_{N-n+1} = \sigma_N^B$  para todo  $N > n$ , y si  $v \in V_n$ , entonces la  $i$ -ésima letra de  $\tau_1(a)$  es el  $i$ -ésimo de los caminos de  $E_{0,n}$  que terminan en  $v$ . Sea  $x_{\min} \in X_B$  el único camino minimal y pongamos  $y = \pi_n(x_{\min})$ . Sea  $N > n$ . Como  $\tau_{N-n+1} = \sigma_N^B$  es propia, existen  $a_N, b_N \in V_{N-1}$  tales que  $\tau_{N-n+1}(c)$  parte con  $a_N$  y termina con  $b_N$ , para todo  $c \in V_N$ . Luego, como  $y$  es imagen del camino minimal,

$$\begin{aligned}\tau_{[1, N-n]}(a_N) &\leq_p y_{[0, +\infty)}, \\ \tau_{[1, N-n]}(b_N) &\leq_s y_{(-\infty, 0)}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Notemos que si  $\#V_N = 1$ , entonces  $X_B^{(n)}$  y  $X_{\sigma_{B'}}^{(n)}$  son la misma órbita periódica de tamaño  $\#E_{0,N}$ . Podemos entonces suponer que  $\#V_N \geq 2$  para todo  $N$  lo suficientemente grande. Esto, que  $\tau_{N-n+2} = \sigma_{N+1}^B$  es primitiva y (1.4) implican que

$$y_{[-|\tau_{[1, N-n]}(b_N)|, |\tau_{[1, N-n]}(a_N)|]} = \tau_{[1, N-n]}(b_N)\tau_{[1, N-n]}(a_N) \sqsubseteq \tau_{[1, N-n+2]}(c), \quad \forall c \in V_{N+1}, \tag{1.5}$$

para todo  $N$  grande. Haciendo tender  $N \rightarrow \infty$  en (1.5) deducimos que  $y \in X_\tau$ . Como  $X_\tau$  es minimal, se sigue que  $X_B^{(n)} \supseteq X_\tau$ , y como  $X_B^{(n)}$  es minimal, que  $X_B^{(n)} = X_\tau$ .  $\square$



El Teorema 1.11 se sigue directamente de las Proposiciones 1.13 y 1.14.

El problema reverso al del Teorema 1.11 que pregunta por si, dada una secuencia de morfismos correcta  $\sigma$  de rango finito, el sistema simbólico  $(X_\sigma, T)$  posee una representación de Bratteli-Vershik de rango finito, está abierto; ver [5]. La siguiente construcción da una respuesta parcial a esta pregunta al mostrar que  $(X_\sigma, T)$  es *factor* de un sistema de rango finito.

Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \geq 1}$  una secuencia de morfismos. A partir de  $\sigma$  podemos construir naturalmente un diagrama de Bratteli ordenado  $B^\sigma = (V^\sigma, E^\sigma, \preceq)$  como sigue:

1. su conjunto de vértices es  $V_0^\sigma = \{v_0\}$  y  $V_n^\sigma = A_{n-1}$  para  $n \geq 1$ ,
2. el diagrama tiene sombrero simple *i.e.* para todo  $v \in V_1^\sigma$  hay exactamente una arista entre  $v_0$  y  $v$ ,
3. el nivel  $n \geq 2$  del diagrama está descrito por el morfismo  $\sigma_{n-1}$ .

Diremos que  $B^\sigma$  es el diagrama de Bratteli construido a partir de  $\sigma$ . Es claro que  $\sigma$  es de rango finito si, y sólo si  $B^\sigma$  es de rango finito. Si  $\sigma$  es correcta, entonces  $B^\sigma$  es correcto y la Proposición 1.14 implica que  $(X_\sigma, T)$  es un factor de  $(X_{B^\sigma}, V_{B^\sigma})$ . En general, este factor no es una conjugación.

## 1.4. Ejemplos

### 1.4.1. Substituciones

Sea  $\sigma: A^+ \rightarrow A^+$  un morfismo primitivo. El subshift S-ádico  $X_\sigma$  generado por la secuencia de morfismos  $\sigma = (\sigma)_{n \geq 1}$  es conocido como el **subshift substitutivo** generado por  $\sigma$ . Esta clase de sistemas surgieron inicialmente como codificaciones de trayectorias en ciertas superficies y han sido muy estudiados a lo largo de los años. La relevancia que tienen aquí es que, al ser la secuencia  $\sigma$  constante, hace de los subshifts substitutivos, en cierto sentido, los sistemas S-ádicos más sencillos. Efecto de esto es que los subshifts substitutivos aperiódicos son conjugados al Bratteli que la substitución define:

**Teorema 1.15** ([10]) *Sea  $\sigma: A^+ \rightarrow A^+$  un morfismo primitivo y propio y  $B^\sigma$  el diagrama de Bratteli ordenado construido a partir de la secuencia de morfismos constante  $\sigma = (\sigma)_{n \geq 1}$ . Supongamos que  $X_\sigma$  es aperiódico. Entonces  $(X_\sigma, T)$  es conjugado a  $(X_{B^\sigma}, V_{B^\sigma})$ .*

En particular, los subshifts substitutivos aperiódicos son de rango topológico finito.

El siguiente ejemplo es de [18]. Sea  $A = \{0, 1\}$ ,  $\sigma: A^+ \rightarrow A^+$  el morfismo tal que  $0 \mapsto 01$ ,  $1 \mapsto 10$  y  $X_\sigma \subseteq A^\mathbb{Z}$  el subshift substitutivo asociado. Este es el **subshift de Thue-Morse**. Sea  $\varphi: A \rightarrow A$  la función que intercambia 0 con 1. Esta función se extiende a  $\varphi: X_\sigma \rightarrow X_\sigma$  y define un automorfismo de  $X_\sigma$ . Más aun,  $\text{Aut}(X_\sigma, T)$  es generado por  $T$  y  $\varphi$ ; en particular,  $\text{Aut}(X_\sigma, T)/\langle T \rangle$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . En general,  $\text{Aut}(X_\sigma, T)/\langle T \rangle$  es finito para todo morfismo primitivo y propio  $\sigma$ , pero cualquier grupo finito se puede realizar de esta manera [4]. En el Capítulo 3 generalizaremos este fenómeno.

## 1.4.2. Intercambios de intervalos

Las transformaciones de intercambios de intervalos son sistemas dinámicos de sencilla definición pero con ricas propiedades dinámicas. Para nosotros serán un ejemplo de sistemas con representaciones de Bratteli-Vershik no triviales. Nuestra presentación sigue la de [1].

Sea  $I = [l, r) \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo de número reales y  $\{I_a = [l_a, r_a) : a \in A\}$  una partición finita de  $I$  en  $d := \#A$  intervalos. Una **transformación de intercambio de intervalos** (t.i.i.) es una función biyectiva  $T: I \rightarrow I$  cuya restricción a cada  $I_a$  es una traslación. Toda la información relevante de la transformación  $T$  queda descrita por una tupla  $(\pi, \lambda)$  que consiste de:

1. un par de biyecciones  $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ , con  $\pi_\varepsilon: A \rightarrow \{1, \dots, d\}$ , que describen cómo es el orden de los intervalos  $I_a$  antes y después de aplicar  $T$ , respectivamente. Anotamos

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1^t & a_2^t & \cdots & a_d^t \\ a_1^b & a_2^b & \cdots & a_d^b \end{pmatrix},$$

donde  $a_j^\varepsilon = \pi_\varepsilon^{-1}(j)$ , para  $\varepsilon \in \{t, b\}$ .

2. un vector columna positivo  $\lambda \in \mathbb{R}_+^A$ , llamado vector de largos, cuya coordenada  $\lambda_a$ ,  $a \in A$ , es el largo del intervalo  $I_a$ .

Si  $(\pi, \lambda)$  es una t.i.i. tal que  $\lambda_{a_d^t} \neq \lambda_{a_d^b}$ , entonces la **inducción de Rauzy-Veech** de  $(\pi, \lambda)$  es la t.i.i.  $(\pi', \lambda') = R(\pi, \lambda)$  definida por:

1. si  $\lambda_{a_d^t} > \lambda_{a_d^b}$ , entonces

$$\pi' = R_t(\pi) := \begin{pmatrix} a_1^t & \cdots & a_{k-1}^t & a_k^t & a_{k+1}^t & a_{k+2}^t & \cdots & a_d^t \\ a_1^b & \cdots & a_{k-1}^b & a_d^t & a_d^b & a_{k+1}^b & \cdots & a_{d-1}^b \end{pmatrix},$$

donde  $k$  es tal que  $a_k^b = a_d^t$ , y

$$\lambda'_a = \lambda_a, \quad \forall a \neq a_d^t, \quad \text{y} \quad \lambda'_{a_d^t} = \lambda_{a_d^t} - \lambda_{a_d^b};$$

decimos que  $w := a_d^t$  es el **winner** y  $l := a_d^b$  es el **loser**.

2. si  $\lambda_{a_d^t} < \lambda_{a_d^b}$ , entonces

$$\pi' = R_b(\pi) := \begin{pmatrix} a_1^t & \cdots & a_{k-1}^t & a_d^b & a_d^t & a_{k+1}^t & \cdots & a_{d-1}^t \\ a_1^b & \cdots & a_{k-1}^b & a_k^b & a_{k+1}^b & a_{k+2}^b & \cdots & a_d^b \end{pmatrix},$$

donde  $k$  es tal que  $a_k^t = a_d^b$ , y

$$\lambda'_a = \lambda_a, \quad \forall a \neq a_d^b, \quad \text{y} \quad \lambda'_{a_d^b} = \lambda_{a_d^b} - \lambda_{a_d^t};$$

decimos que  $w := a_d^b$  es el **winner** y  $l := a_d^t$  es el **loser**.

Si  $(\pi, \lambda)$  es una t.i.i. minimal, entonces  $R(\pi, \lambda)$  es otra vez una t.i.i. minimal; en particular, todos los iterados  $R^n(\pi, \lambda)$ ,  $n \geq 0$ , de la inducción de Rauzy-Veech están definidos. El **grafo de Rauzy** es el grafo dirigido etiquetado cuyos vértices son todas las permutaciones  $\pi$  que

proviene de una t.i.i.  $(\pi, \lambda)$  minimal y sus aristas etiquetadas son  $\pi \xrightarrow{t} R_t(\pi)$  y  $\pi \xrightarrow{b} R_b(\pi)$ . La **clase de Rauzy** de  $\pi$  es la componente conexa  $\mathcal{R}(\pi)$  de  $\pi$  en el grafo de Rauzy. Toda clase de Rauzy es de hecho fuertemente conexa. A cada arista  $e := \pi \xrightarrow{\varepsilon} \pi'$  le asignamos un morfismo  $S(e): A^+ \rightarrow A^+$  definido como sigue: sean  $w, l \in A$  los símbolos loser y winner, respectivamente; entonces  $S(e)(a) = a$  para todo  $a \in A \setminus \{l\}$  y

$$S(e)(l) = \begin{cases} lw & \text{si } \varepsilon = t, \\ wl & \text{si } \varepsilon = b. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ahora construiremos una extensión simbólica de una t.i.i. y su representación de Bratteli-Vershik. Si  $(\pi, \lambda)$  es una t.i.i., definimos el mapeo  $\psi$  que a cada  $x \in I$  le asigna la secuencia  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , donde  $x_n = a$  si  $T^n x \in I_a$ . Entonces  $\psi$  es invertible salvo en las órbitas de las discontinuidades de  $(\pi, \lambda)$  y define un factor  $f: (\Omega, T) \rightarrow (I, T)$ , donde

$$\Omega = \overline{\{\psi(x) : x \in I\}} \subseteq A^{\mathbb{Z}}.$$

El sistema  $(\Omega, T)$  es la **extensión simbólica** de  $(\pi, \lambda)$ .

**Teorema 1.16** ([1]) *Sea  $(\pi, \lambda)$  una t.i.i. minimal. Entonces su extensión simbólica  $(\Omega, T)$  es un sistema dinámico minimal de Cantor. Más aun, si  $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$  es el camino de aristas en el grafo de Rauzy que define los iterados de la inducción de Rauzy-Veech, entonces*

1. *el diagrama de Bratteli ordenado  $B^\sigma$  construido a partir de la secuencia de morfismos  $\sigma = (S(\gamma_n))_{n \geq 0}$  es simple, propio y tal que  $(X_{B^\sigma}, V_{B^\sigma})$  es conjugado a  $(X_\sigma, T)$ , y*
2.  $X_\sigma = \Omega$ .

*En particular,  $B^\sigma$  es una representación de Bratteli-Vershik de rango finito de  $(\Omega, T)$ .*

En el Capítulo 3 utilizaremos esta representación para probar una propiedad genérica de las t.i.i.

# Capítulo 2

## Sobre el número de Factores

El objetivo de este capítulo es estudiar el número de factores simbólicos de un sistema de rango finito. El punto de partida son dos artículos. El primero es [8], donde se prueba que los sistemas linealmente recurrentes tienen finitos sistemas simbólicos factores salvo conjugación, y el otro [11], donde, para esta misma clase de sistemas y una vez fijado un sistema simbólico factor, demuestran que existen finitos mapeos factores salvo composiciones con el shift. En el Teorema 2.14 de este capítulo se extenderán estos resultados a una clase más general de subshifts, en el Teorema 2.17 se dará una condición suficiente para que un subshift S-ádico pertenezca a esta clase y en el Teorema 2.22 mostraremos que esta condición es genérica dentro de la clase de transformaciones de intercambios de intervalos.

El capítulo se divide en cuatro secciones. Primero, en la Sección 1, se define lo que es una *palabra de retorno*, la principal herramienta de este capítulo, y se obtienen las propiedades básicas que se necesitarán. La Sección 2 se dedica a extender los resultados de [8] y [11] a una clase de subshifts más grande. En la Sección 3, se da una condición suficiente natural para que una secuencia S-ádica pertenezca a la clase antes mencionada (y, por lo tanto, tenga una cantidad controlada de factores) y probamos, en la Sección 4, que esta condición es genérica dentro de la clase de transformaciones de intercambios de intervalos.

### 2.1. Palabras de retorno

Fijamos, por el resto de esta Sección, un subshift  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$  minimal aperiódico. Recordemos que una ocurrencia de una palabra  $u \in A^*$  en una secuencia  $x \in A^{\mathbb{Z}}$  es un entero  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_{[i, i+|u|)} = u$ .

**Definición 2.1** *Sea  $x \in X$  y  $u \in A^*$ . Decimos que  $w \in A^*$  es una palabra de retorno a  $u$  en  $x$  si existen dos ocurrencias consecutivas  $i, j$  de  $u$  en  $x$  tales que  $x_{[i, j)} = w$ . Escribimos  $\mathcal{R}_{x,u}$  para el conjunto de palabras de retorno a  $u$  en  $x$ .*

*Sea  $R_{x,u} = \{1, 2, \dots, \#\mathcal{R}_{x,u}\}$ . Definimos una biyección  $\Theta_{x,u}: R_{x,u} \rightarrow \mathcal{R}_{x,u}$  como sigue: ordenamos  $\mathcal{R}_{x,u}$  de acuerdo a la posición de la primera ocurrencia de sus elementos en  $x_{[0, \infty)}$  y definimos  $\Theta_{x,u}(k)$  como el  $k$ -ésimo elemento de  $\mathcal{R}_{x,u}$  según este orden.*

Como  $X$  es minimal,  $\mathcal{R}_{x,u}$  no depende de  $x$ ; anotaremos  $\mathcal{R}_u$  para este conjunto común. Es importante destacar que  $\Theta_{x,u}$  sí depende de  $x$ .

**Lema 2.2** Sean  $x, y \in X$  y  $u \leq_p y_{[0,\infty)}$ . Entonces existe  $\bar{y} \in R_{x,u}^{\mathbb{Z}}$  que cumple  $\Theta_{x,u}(\bar{y}) = y$ . Más aun,  $\bar{y}$  es única en el siguiente sentido: si  $\bar{z} \in R_{x,u}^{\mathbb{Z}}$  y  $T^r \Theta_{x,u}(\bar{z}) = y$ , entonces existe  $s \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\bar{z} = T^s \bar{y} \quad y \quad r = \begin{cases} |\Theta_{x,u}(\bar{y}_{[0,s)})| & \text{si } r \geq 0, \\ -|\Theta_{x,u}(\bar{y}_{[s,0)})| & \text{si } r < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $X$  es minimal, el conjunto de ocurrencias de  $u$  en  $y$  se puede escribir como una secuencia creciente de enteros  $(i_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ; más aun, como  $u \leq_p y_{[0,\infty)}$ , podemos suponer que  $i_0 = 0$ . Entonces cada  $y_{[i_k, i_{k+1})}$  es una palabra de retorno a  $u$ . Sea  $\bar{y} \in R_{x,u}^{\mathbb{Z}}$  la secuencia cuya coordenada  $k$  es

$$\bar{y}_k = \Theta_{x,u}^{-1}(y_{[i_k, i_{k+1})})$$

Se sigue de la definición que  $\Theta_{x,u}(\bar{y}) = y$ .

Sea  $\bar{z} \in R_{x,u}^{\mathbb{Z}}$  otra secuencia tal que  $T^r \Theta_{x,u}(\bar{z}) = y$ . Notemos que si  $w \in \mathcal{R}_u$ , entonces las únicas ocurrencias de  $u$  en  $wu$  son al principio y al final. Sea  $i \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $u$  ocurre en  $\Theta_{x,u}(\bar{z}_{(-\infty, i]})u$  al principio de  $\Theta_{x,u}(\bar{z}_i)u$ . Luego,  $u$  ocurre al principio de  $\Theta_{x,u}(\bar{z}_{[i-1, i]})u$ . Podemos continuar inductivamente para deducir que  $u$  ocurre al principio de  $\Theta_{x,u}(\bar{z}_{[j, i]})u$ , para todo par de enteros  $j \leq i$ . Se sigue de esto que  $u$  ocurre en cada posición  $r + |\Theta_{x,u}(\bar{z}_{[0, i]})|$ ,  $i \geq 0$ , y  $r - |\Theta_{x,u}(\bar{z}_{[-i, 0]})|$ ,  $i \geq 1$ , de  $y$ . Más aun, estas son las únicas ocurrencias de  $u$  en  $y$ . Esto equivale a (2.1).  $\square$

Siguiendo [10], definimos la clase de subshifts linealmente recurrentes.

**Definición 2.3** Decimos que  $(X, T)$  es linealmente recurrente si existe una constante  $c \in \mathbb{N}$  tal que para toda palabra  $u \in \mathcal{L}(X)$  y  $w \in \mathcal{R}_u$  se tiene que  $|w| \leq c|u|$ .

Nosotros trabajaremos con una versión localizada de esta noción, que permitirá extender algunas propiedades de sistemas linealmente recurrentes a una clase más general de sistemas.

**Definición 2.4** Decimos que un entero  $k \geq 1$  es un **largo de recurrencia lineal** para la constante  $c > 0$  si para toda palabra  $u \in \mathcal{L}_k(X)$  de largo  $k$  y  $w \in \mathcal{R}_u$  se tiene que  $|w| \leq c|u|$ . Anotamos  $\text{LR}_c(X)$  para el conjunto de tales  $k$ .

**Ejemplo** 1. Sea  $\sigma: A^+ \rightarrow A^+$  un morfismo primitivo y  $(X, T)$  el sistema substitutivo asociado. Entonces  $(X, T)$  es linealmente recurrente con constante  $2|\sigma|^4$ . Esto es consecuencia del Lema 2.15. Por ejemplo, la substitución de Thue-Morse en  $A = \{0, 1\}$

definida por

$$\begin{aligned}\sigma: A &\rightarrow A^+ \\ 0 &\mapsto 01 \\ 1 &\mapsto 10\end{aligned}$$

define un subshift linealmente recurrente de constante 16 [11].

2. Si  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$  es un subshift, entonces  $(X, T)$  es linealmente recurrente si, y sólo si existe  $c > 0$  y una representación por Bratteli-Vershik de  $(X, T)$  dado por un diagrama  $B = (V, E, \leq)$  correcto tal que  $\#E_n \leq c$ , para todo  $n \geq 1$ . Esto es probado en [9].

Se tienen los análogos locales de las propiedades básicas de los subshifts linealmente recurrentes:

**Lema 2.5** *Sea  $u \in \mathcal{L}(X)$ .*

- i) Si  $k \in \text{LR}_c(X)$  y  $v \in \mathcal{L}_{\geq(c+1)k-1}(X)$ , entonces en  $v$  ocurren todas las palabras de largo a lo más  $k$ .*
- ii) Si  $|u| \in \text{LR}_c(X)$ , entonces  $u^{c+1} \notin \mathcal{L}(X)$ .*
- iii) Si  $\left(\frac{|u|}{2(c+1)}, \frac{|u|}{c+1}\right] \subseteq \text{LR}_c(X)$ , entonces  $\langle \mathcal{R}_u \rangle > \frac{|u|}{c+1}$ .*
- iv) Si  $\left(\frac{|u|}{2(c+1)}, (c+1)|u|\right] \subseteq \text{LR}_c(X)$ , entonces  $\#\mathcal{R}_u \leq (c+1)^3$ .*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos  $x \in X$ .

- i) Sea  $w \in \mathcal{L}_k(X)$  y  $v \in \mathcal{L}_{\geq(c+1)k-1}(X)$ . Como  $X$  es minimal y  $k \in \text{LR}_c(X)$ ,  $w$  ocurre en  $x$  en posiciones separadas por a lo más  $ck$  símbolos. Luego,  $w$  necesariamente aparece en  $v$ .
- ii) Supongamos que  $u^{c+1} \in \mathcal{L}(X)$ . De (i), toda palabra de largo  $|u|$  aparece en  $u^{c+1}$ . Por otro lado, en  $u^{c+1}$  aparecen a lo más  $|u|$  palabras de largo  $|u|$ . Luego,  $p_X(|u|) \leq |u|$ . El Teorema de Morse-Hedlund [16] entonces implica que  $X$  es periódico.
- iii) Supongamos que existe  $w \in \mathcal{R}_u$  con  $|w| \leq \frac{|u|}{c+1}$ . Entonces  $u$  tiene periodo  $|w|$ . Más aun,  $w^{c+1} \leq_p u \leq_p w^\infty$ . Sea  $k \geq 1$  el máximo entero tal que  $(w^k)^{c+1} \leq_p u$ . Por un lado,  $|w^k| \leq \frac{|u|}{c+1}$ . Por otro lado, si  $|w^k| \leq \frac{|u|}{2(c+1)}$ , entonces  $(c+1)|w^{2k}| \leq |u|$ , por lo que  $(w^{2k})^{c+1} \leq_p u$ , lo que contradice la definición de  $k$ . Concluimos que

$$|w^k| \in \left( \frac{|u|}{2(c+1)}, \frac{|u|}{c+1} \right].$$

Luego, de (ii),  $(w^k)^{c+1} \notin \mathcal{L}(X)$ , que es una contradicción.

- iv) Sea  $v \in \mathcal{L}(X)$  de largo  $|v| = c(c+1)|u| - 1$ . Como  $|u| \in \text{LR}_c(X)$ ,  $|\mathcal{R}_u| \leq c|u|$  y de (i) vemos que todas las palabras de retorno a  $u$  aparecen en  $v$ . Entonces, usando (iii), es fácil ver que:

$$\#\mathcal{R}_u \leq \frac{|v|}{\langle \mathcal{R}_u \rangle} \leq \frac{c(c+1)|u|}{|u|/(c+1)} \leq (c+1)^3.$$

□

Los siguientes lemas permiten transferir las propiedades de recurrencia de  $X$  a sus factores. Recordemos primero el siguiente resultado elemental:

**Teorema 2.6** (Curtis-Hedlund-Lyndon [15]) *Sean  $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ ,  $Y \subseteq B^{\mathbb{Z}}$  subshifts y  $f: X \rightarrow Y$  un factor entre ellos. Entonces existe  $r \geq 0$  y  $\psi: A^{2r+1} \rightarrow B$  tal que*

$$f(x) = \left( \psi(x_{[k-r, k+r]}) \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \forall x \in X.$$

*Decimos que  $\psi$  es una **función local de radio  $r$**  para  $f$ .*

**Lema 2.7** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un factor simbólico (i.e.  $Y$  es un subshift) con función local  $\psi$  de radio  $r \geq 0$  y  $k \geq 4r$  un entero. Si  $k \in \text{LR}_c(X)$ , entonces  $k - 2r \in L_{2c}(Y)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v \in \mathcal{L}_{k-2r}(Y)$  y  $u \in \mathcal{L}_k(X)$  tal que  $\psi(u) = v$ . Es fácil ver que  $|\mathcal{R}_v| \leq |\mathcal{R}_u|$ . Luego,

$$|\mathcal{R}_v| \leq c|u| = c(|v| + 2r) \leq 2c|v|.$$

□

**Lema 2.8** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  factor simbólico, con  $Y$  aperiódico. Sea  $\psi: A^{2r+1} \rightarrow B$  la función local de  $f$ . Supongamos que  $\left( \frac{k}{2(2c+1)}, 2(c+1)k \right] \subseteq \text{LR}_c(X)$ , con  $\frac{k}{2(2c+1)} \geq 4r$ . Si  $v \in \mathcal{L}_k(Y)$ , entonces*

1.  $\langle \mathcal{R}_v \rangle > \frac{|v|}{(2c+1)}$ ,
2.  $\#\mathcal{R}_v \leq (2c+1)^3$ .

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 2.7 obtenemos

$$\left( \frac{k}{2(2c+1)}, (2c+1)k \right] \subseteq L_{2c}(Y).$$

Se satisfacen las condiciones del Lema 2.5 y podemos concluir. □

## 2.2. Resultados principales

### 2.2.1. Acotar el número de factores

Necesitaremos la siguiente consecuencia de la lineal recurrencia local, que puede ser interesante en si misma; notar que la cota obtenida es universal.

**Proposición 2.9** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  factor entre subshifts minimales aperiódicos con función local  $\psi: A^{2r+1} \rightarrow B$ . Supongamos que existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\left( \frac{k}{2(2c+1)}, 2(c+1)k \right] \subseteq \text{LR}_c(X)$  y*

$\frac{k}{2(2c+1)} \geq 4r$ . Entonces, para todo  $v \in \mathcal{L}_k(Y)$ , el conjunto

$$\psi^{-1}(v) := \{u \in \mathcal{L}_{|v|+2r}(X) : \psi(u) = v\}$$

tiene a lo más  $4(c+1)^2$  elementos.

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que podemos usar el Lema 2.7 para obtener

$$\left( \frac{k}{2(2c+1)}, (2c+1)k \right] \subseteq L_{2c}(Y). \quad (2.2)$$

Sea  $v \in \mathcal{L}_k(Y)$ . La ecuación (2.2) nos permite usar el Lema 2.5 para deducir que dos ocurrencias de elementos de  $\psi^{-1}(v)$  están separadas por al menos  $|v|/(2c+1)$  símbolos. Más aun,  $|v| + 2r \in \text{LR}_c(X)$ , por lo que cada palabra en  $X$  de largo  $(c+1)(|v| + 2r)$  tiene ocurrencias de cada palabra de  $\mathcal{L}_{|v|+2r}(X) \supseteq \psi^{-1}(v)$ . Luego,

$$\#\psi^{-1}(v) \leq \frac{(c+1)(|v| + 2r)}{|v|/2(c+1)} \leq 4(c+1)^2.$$

□

La última herramienta que usaremos es el siguiente resultado técnico.

**Lema 2.10** *Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico minimal y  $f_j: (X, T) \rightarrow (Y_j, T)$  factor,  $j = 1, 2$ . Supongamos que  $Y_1, Y_2$  son aperiódicos, que  $f_1$  es finito-a-uno y que existen  $x, y \in X$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  tales que  $f_1(x) = f_1(y)$  y  $f_2(x) = T^r f_2(y)$ . Entonces  $r = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ponemos  $y_1 = y$ . De la minimalidad y compacidad podemos encontrar una secuencia  $(n_j)_{j \geq 1}$  e  $y_2 \in X$  tales que  $T^{n_j} x \rightarrow y_1$  y  $T^{n_j} y_1 \rightarrow y_2$ . Entonces  $f_1(y_1) = f_1(y_2)$  y  $f_2(y_1) = T^r f_2(y_2)$ . De manera similar, podemos encontrar  $y_3 \in X$  tal que  $f_1(y_2) = f_1(y_3)$  y  $f_2(y_2) = T^r f_2(y_3)$ . De esta manera construimos una secuencia  $(y_n)_{n \geq 1}$  tal que

$$f_1(y_k) = f_1(y_{k+1}) \quad f_2(y_k) = T^r f_2(y_{k+1}) \quad k \geq 1.$$

Como  $f_1$  es finito-a-uno, existen  $i < j$  tales que  $y_i = y_j$ . Tenemos entonces:

$$f_2(y_i) = T^r f_2(y_{i+1}) = T^{2r} f_2(y_{i+2}) = \dots = T^{r(i-j)} f_2(y_j) = T^{r(i-j)} f_2(y_i).$$

Pero  $Y_2$  es aperiódico, por lo que  $r = 0$ . □

Las siguientes dos proposiciones son el núcleo del Capítulo.

**Proposición 2.11** *Sea  $X$  subshift minimal aperiódico. Supongamos que se cumple:*

*Existe  $E \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $c > 0$  tal que para todo  $k \in E$  se tiene:*



$$\left( \frac{k}{2(2c+1)}, 2(c+1)k \right] \subseteq \text{LR}_c(X). \quad (\text{H1})$$

Entonces  $X$  tiene a lo más  $C := (2c+1)^{12c^2(c+1)^3}$  factores simbólicos aperiódicos, salvo conjugación.

DEMOSTRACIÓN. Para  $i = 0, \dots, C$ , sea  $f_i: X \rightarrow Y_i$  factor simbólico aperiódico. Probaremos que existen  $i \neq j$  tales que  $Y_i$  es conjugado a  $Y_j$ .

Sea  $r \geq 0$  tal que todos los  $f_i$  tienen una función local de radio  $r$ , sea  $B_i$  el alfabeto de  $Y_i$  y  $\phi_i: A_0^{2r+1} \rightarrow B_i$  la función local de  $f_i$ . Tenemos entonces

$$(f_i(x))_l = \phi_i(x_{[l-r, l+r]}) \quad \forall x \in X, \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Escribamos  $A = A_0^{2r+1}$  y sea  $h: X \rightarrow X^{[r]}$  el isomorfismo al shift de bloques, con  $\eta: A_0^{2r+1} \rightarrow A$  su función local. Entonces  $f'_i := f_i \circ h^{-1}$  es un factor de  $X^{[r]}$  a  $Y_i$  con función local  $\phi'_i: A \rightarrow B_i$  de radio 0 dado por la ecuación

$$\phi'_i(\eta(u)) = \phi_i(u) \quad \forall u \in A_0^{2r+1}.$$

Sea  $k \in E$  tan grande como para que

$$\frac{k}{2(2c+1)} \geq 4r. \quad (2.3)$$

Fijamos  $x \in X$  y  $u := x_{[-r, k+r]} \in \mathcal{L}_{k+2r}(X)$ . Ponemos  $x' := h(x)$  y  $u' := x'_{[0, k]} = \eta(u) \in \mathcal{L}_k(X^{[r]})$ . Para  $i \in [0, C]$ , sea  $x_i := f_i(x)$  y  $u_i = (x_i)_{[0, k]} = \phi'_i(u') \in \mathcal{L}_k(Y_i)$ . Para cada palabra de retorno  $w \in \mathcal{R}_{x', u'}$  a  $u'$ , la palabra  $\phi'_i(w)$  es concatenación de palabras de retorno a  $u_i$ . Esto induce un morfismo  $\lambda_i: R_{x', u'}^+ \rightarrow R_{x_i, u_i}^+$  definido por la ecuación

$$\phi'_i \circ \Theta_{x', u'} = \Theta_{x_i, u_i} \circ \lambda_i. \quad (2.4)$$

Entonces también tenemos

$$f'_i \circ \Theta_{x', u'} = \Theta_{x_i, u_i} \circ \lambda_i. \quad (2.5)$$

Usando (2.3) es fácil ver que se satisfacen las condiciones del Lema 2.5 para  $u$  y del Lema 2.8 para  $v$ ; obtenemos las cotas:

$$\begin{aligned} |\lambda_i(b)| &\leq \frac{|\mathcal{R}_{u'}|}{\langle \mathcal{R}_v \rangle} \leq \frac{c|u|}{|u_i|/2c} = \frac{c(k+2r)}{k/2c} \leq 4c^2, \\ \#\mathcal{R}_{u'} &= \#\mathcal{R}_u \leq (c+1)^3, \\ \#\mathcal{R}_v &\leq (2c+1)^3. \end{aligned}$$

Deducimos que

$$\#\{\lambda_i : i \in [0, C]\} \leq \left( ((2c+1)^3)^{4c^2} \right)^{(c+1)^3} = C,$$

por lo que existen  $i \neq j$  tales que  $\lambda_i = \lambda_j$ . Escribamos  $\lambda := \lambda_i$ .

**Afirmación.** Para todo  $y, z \in X^{[r]}$ , si  $f_i(y) = f_i(z)$ , entonces  $f_j(y) = f_j(z)$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $y, z \in X^{[r]}$  tales que  $f_i(y) = f_i(z)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $u'$  es prefijo de  $y_{[0,\infty)}$ . Sea  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $u'$  es prefijo de  $z_{[r,\infty)}$ . Con esto, el Lema 2.2 nos da una secuencia  $\bar{y} \in R_{u'}^{\mathbb{Z}}$  (resp.  $\bar{z} \in R_{u'}^{\mathbb{Z}}$ ) tal que  $\Theta_{x',u'}(\bar{y}) = y$  (resp.  $\Theta_{x',u'}(\bar{z}) = T^r z$ ). Usando (2.5), tenemos:

$$\begin{aligned} f_i(y) &= f_i \Theta_{x',u'}(\bar{y}) = \Theta_{x_i,u_i} \lambda(\bar{y}), \\ f_i(z) &= T^{-r} f_i \Theta_{x',u'}(\bar{z}) = T^{-r} \Theta_{x_i,u_i} \lambda(\bar{z}). \end{aligned}$$

Pero  $f_i(y) = f_i(z)$ , por lo que la parte de unicidad del Lema 2.2 implica que  $r = |\Theta_{x_i,u_i}(m)|$ , donde  $m$  es un prefijo de  $\lambda(\bar{y})_{[0,\infty)}$  tal que  $T^{|m|} \lambda(\bar{y}) = \lambda(\bar{z})$ . Por otro lado:

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_j \Theta_{x',u'}(\bar{x}) = \Theta_{x_j,u_j} \lambda(\bar{x}), \\ f_j(y) &= T^{-r} \Theta_{x_j,u_j} \lambda(\bar{y}) = T^{-r} \Theta_{x_j,u_j} T^{|m|} \lambda(\bar{x}) = T^{|\Theta_{x_j,u_j}(m)|-r} \Theta_{x_j,u_j} \lambda(\bar{x}). \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$f_j(y) = T^{|\Theta_{x_j,u_j}(m)|-r} f_j(x). \quad (2.6)$$

Ahora, de (H1) y la Proposición 2.9 es fácil ver que  $f_j$  es acotado-a-uno. Podemos entonces usar el Lema 2.10 en (2.6) para obtener  $r = 0$ .  $\square$

Gracias a la afirmación, tiene sentido definir  $f: Y_i \rightarrow Y_j$  por  $f(y) = f_j(y')$ , donde  $y'$  es cualquier elemento de  $f_i^{-1}(y)$ . Es fácil ver que  $f$  es una conjugación entre  $Y_i$  e  $Y_j$ .  $\square$

**Proposición 2.12** *Sean  $X$  e  $Y$  subshifts minimales y aperiódicos. Supongamos que se cumple:*

*Existe  $E \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $c > 0$  tal que para todo  $k \in E$  se tiene:*

$$\left( \frac{k}{2(2c+1)}, 2(c+1)^2 k \right) \subseteq \text{LR}_c(X). \quad (\text{H2})$$

*Entonces existen a lo más  $C := (2c+1)^{12(c+1)^6}$  mapeos factores de  $X$  a  $Y$ , salvo composiciones con el shift.*

DEMOSTRACIÓN. Para  $i = 0, \dots, C$ , sea  $f_i: X \rightarrow Y$  factor. Probaremos que existen  $i \neq j$  y  $r \in \mathbb{Z}$  tales que  $f_i = T^r \circ f_j$ .

Sea  $r \geq 0$  tal que todos los  $f_i$  tienen una función local de radio  $r$  y sea  $\phi_i: A_0^{2r+1} \rightarrow B$  la función local de  $f_i$ . Fijemos  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Sea  $k \in E$  tan grande como para que

$$\frac{k}{2(2c+1)} \geq 4r. \quad (2.7)$$

Para cada  $i \in \{0, \dots, C\}$ , existe  $k_i \in [0, ck)$  tal que  $(T^{k_i} f_i(x))_{[0,k)} = y_{[0,k)}$ . Definamos  $f'_i = T^{k_i} \circ f_i$ . Entonces  $f'_i$  tiene radio  $r' = r + ck$  y podemos tomar una función  $\phi'_i: A_0^{2r'+1} \rightarrow B$  como su función local. Tenemos entonces

$$\phi'_i(x_{[-r',k+r')}) = y_{[0,k)}.$$

Mostraremos que existen  $i \neq j$  tales que  $f'_i = f'_j$ ; esto implica que  $f_i = T^{k_j - k_i} f_j$ .

Escribamos  $A = A_0^{2r'+1}$  y sea  $h: X \rightarrow X^{[r']}$  la conjugación al shift de bloques, con  $\eta: A_0^{2r'+1} \rightarrow B$  su función local. Entonces  $g_i := f_i \circ h^{-1}$  es un factor de  $X^{[r']}$  a  $Y$  con función local  $\psi_i: A \rightarrow B$  de radio 0 dado por

$$\psi_i(\eta(u)) = \phi'_i(u) \quad \forall u \in \mathcal{L}_{2r'+1}(X).$$

De la minimalidad, basta probar que existen  $i \neq j$  tales que  $g_i(h(x)) = g_j(h(x))$ .

Sea  $u = x_{[-r', k+r']}$ ,  $u' := \eta(u)$ ,  $v = y_{[0, k]}$ . Notemos que  $\psi_i(u') = v$  para todo  $i \in [0, C]$ . Entonces, para cada palabra de retorno  $w \in \mathcal{R}_{u'}$ , la palabra  $\phi_i(w)$  es concatenación de palabras de retorno a  $v$ . Esto induce un morfismo  $\lambda_i: R_{u'}^+ \rightarrow R_v^+$  definido por la ecuación

$$\psi_i \circ \Theta_{x', u'} = \Theta_{y, v} \circ \lambda_i.$$

Tenemos entonces también

$$g_i \circ \Theta_{x', u'} = \Theta_{y, v} \circ \lambda_i.$$

Usando (2.7) es fácil ver que se satisfacen las condiciones del Lema 2.5 para  $u$  y del Lema 2.8 para  $v$ ; obtenemos las cotas:

$$\begin{aligned} |\lambda_j(b)| &\leq \frac{|\mathcal{R}_{u'}|}{\langle \mathcal{R}_v \rangle} \leq \frac{c|u|}{|u_j|/2c} = \frac{c(k+2r')}{k/2c} \leq 4(c+1)^3 \quad \forall b \in R_v, \\ \#\mathcal{R}_{u'} &= \#\mathcal{R}_u \leq (c+1)^3, \\ \#\mathcal{R}_v &\leq (2c+1)^3. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\#\{\lambda_j : j \in \{0, \dots, C\}\} \leq \left( ((2c+1)^3)^{4(c+1)^3} \right)^{(c+1)^3} = C,$$

lo que implica que existen  $i \neq j$  tales que  $\lambda_i = \lambda_j$ . Sea  $\lambda := \lambda_i$ .

Como  $h(x)_{[0, \infty)}$  tiene a  $u'$  como prefijo, el Lema 2.2 nos da una secuencia  $\bar{x} \in R_{u'}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $\Theta_{u'}(\bar{x}) = h(x)$ . Tenemos:

$$g_i(h(x)) = g_i(\Theta_{u'}(\bar{x})) = \Theta_v(\lambda(\bar{x})) = g_j(\Theta_{u'}(\bar{x})) = g_j(h(x)).$$

Esto termina la demostración. □

## 2.2.2. Resultado principal

**Definición 2.13** Sean  $\phi: X \rightarrow Y$  y  $\phi': X \rightarrow Y'$  factores entre sistemas dinámicos. Diremos que  $\phi$  es equivalente a  $\phi'$  si existe  $\psi: Y \rightarrow Y'$  conjugación y  $\ell \in \mathbb{Z}$  tales que

$$S^\ell \circ \phi' = \psi \circ \phi.$$

Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia.

Con esto ya podemos enunciar el teorema central de este capítulo.

**Teorema 2.14** *Sea  $X$  un subshift minimal aperiódico. Supongamos que se satisface la condición (H2):*

*Existe  $E \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $c > 0$  tal que para todo  $k \in E$  se tiene:*

$$\left( \frac{k}{2(2c+1)}, 2(c+1)^2 k \right] \subseteq \text{LR}_c(X). \quad (\text{H2})$$

*Entonces  $X$  tiene a lo más  $C := (2c+1)^{24(c+1)^6}$  factores simbólicos aperiódicos, salvo equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN. Para  $i \in [0, C]$ , sea  $f_i: X \rightarrow Y_i$  un factor simbólico aperiódico. Probaremos que existen  $i \neq j$  tales que  $f_i$  es equivalente a  $f_j$ .

Las hipótesis permiten usar la Proposición 2.11, por lo que el principio del palomar nos da  $F \subseteq [0, C]$  tal que

1.  $\#F > (2c+1)^{12(c+1)^6}$ ,
2. para cada  $i, j \in F$  existe una conjugación  $\psi_{i,j}: Y_i \rightarrow Y_j$ .

Fijemos  $i \in F$  y definamos  $\phi'_j := \psi_{i,j} \circ \phi_j$  para  $j \in F$ . Entonces  $\phi'_j: X \rightarrow Y_i$  es un factor de  $X$  a  $Y_i$ . Usando la Proposición 2.12 y el principio del palomar obtenemos  $j, j' \in F$  distintos y  $\ell \in \mathbb{Z}$  tales que

$$S^\ell \circ \phi'_j = \phi'_{j'}.$$

Luego,  $S^\ell \circ \phi_j = (\psi_{i,j}^{-1} \psi_{i,j'}) \circ \phi'_{j'}$  y  $\phi_j$  es equivalente a  $\phi_{j'}$ . □

### 2.3. Una condición suficiente para sistemas S-ádicos

Para dar una condición suficiente para que sistemas S-ádicos sean parte de la clase del Teorema 2.14 necesitaremos algunos lemas que permitan transportar la primitividad de una secuencia de morfismos a propiedades de recurrencia del sistema asociado.

**Lema 2.15** *Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \geq 1}$  secuencia de morfismos correcta. Supongamos que existen  $1 \leq n < N$  y  $c_0 > 0$  tales que  $|\sigma_j| \leq c_0$  para todo  $j \in [n, N+2]$ . Entonces*

$$(\langle \sigma_{(0,n]} \rangle, \langle \sigma_{(0,N]} \rangle) \subseteq \text{LR}_{2c_0^4}(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $j \in [n+1, N]$  y  $k \geq 0$  tales que  $\langle \sigma_{(0,j-1]} \rangle < k \leq \langle \sigma_{(0,j]} \rangle$  y tomemos  $u \in \mathcal{L}_k(X)$ . Como  $|u| \leq \langle \sigma_{(0,j]} \rangle$ , existe  $ab \in \mathcal{L}_2(X^{(j+1)})$  tal que  $u$  aparece en  $\sigma_{(0,j+1]}(ab)$ . Más aun, como  $\sigma_{j+2}$  es primitiva y propia,  $ab$  aparece en  $\sigma_{j+2}(c)$  para todo  $c \in A_{j+2}$ . Deducimos que  $\sigma_{(0,j+1]}(ab)$  (y por lo tanto  $u$ ) aparece en cada  $\sigma_{(0,j+2]}(c)$ . Ahora, en cada ventana de largo  $2|\sigma_{(0,j+2]}|$  de cada punto de  $X$  aparece algún  $\sigma_{(0,j+2]}(c)$ ; se sigue de esto que

$$|\mathcal{R}_u| \leq 2|\sigma_{(0,j+2]}| \leq 2c_0^4 |\sigma_{(0,j-1]}| \leq 2c_0^4 |u|.$$

□

**Lema 2.16** Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \geq 1}$  secuencia de morfismos correcta y  $0 < \alpha < \beta$  reales. Supongamos que existen  $1 \leq n < N$  y  $c_0 > 0$  tales que  $|\sigma_j| \leq c_0$  para todo  $j \in [n, N+2]$  y que se cumple la condición

$$\langle \sigma_{(n,N]} \rangle \geq \beta/\alpha.$$

Entonces para  $k = \lfloor \langle \sigma_{(0,n]} \rangle / \alpha \rfloor$  se tiene que

$$(\alpha k, \beta k] \subseteq L_{2c_0^4}(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$\beta k \leq \frac{\beta}{\alpha} \langle \sigma_{(0,n]} \rangle \leq \langle \sigma_{(n,N]} \rangle \langle \sigma_{(0,n]} \rangle \leq \langle \sigma_{(0,N]} \rangle.$$

Luego, del Lema 2.15 tenemos:

$$L_{2c_0^4} \supseteq (\langle \sigma_{(0,n]} \rangle, \langle \sigma_{(0,N]} \rangle] \supseteq (\alpha k, \beta k].$$

□

**Teorema 2.17** Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \geq 1}$  secuencia de morfismos correcta. Supongamos que existe  $E \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $c_0 > 0$  tales que para todo  $n \in E$  existe  $N > n$  que cumple

1.  $|\sigma_j| \leq c_0$  para todo  $j \in [n, N+2]$ ,
2.  $\langle \sigma_{(n,N]} \rangle \geq 4(2c_0^4 + 1)^2(4c_0^4 + 1)$ .

Entonces  $X_\sigma$  tiene a lo más  $(4c_0^4 + 1)^{24(2c_0^4 + 1)^6}$  factores simbólicos aperiódicos, salvo equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $k \in E$  podemos usar el Lema 2.15 para deducir que

$$\left( \frac{k}{2(2c_0 + 1)}, 2(c_0 + 1)^2 k \right] \subseteq \text{LR}_c(X).$$

donde  $c := 2c_0^4$ . Esto implica que  $X$  satisface las hipótesis (H2). Entonces podemos usar el Teorema 2.14 y concluir. □

En el siguiente corolario reemplazamos la condición 2 del Teorema 2.17 por una que sólo toma en cuenta el número de niveles sobre los cuales se tiene control.

**Corolario 2.18** Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n^+ \rightarrow A_{n-1}^+)_{n \geq 1}$  secuencia de morfismos correcta. Supongamos que existe  $E \subseteq \mathbb{N}$  infinito y  $c_0 > 0$  tales que para todo  $n \in E$ ,

1.  $|\sigma_j| \leq c_0$  para todo  $j \in [n, n + K]$ ,

donde  $K = \frac{\log(4(2c_0^4 + 1)^2(4c_0^4 + 1))}{\log(K_0)} + 3$  y  $K_0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \#A_n$ . Entonces  $X_\sigma$  tiene a lo más  $(4c_0^4 + 1)^{24(2c_0^4 + 1)^6}$  factores simbólicos aperiódicos, salvo equivalencia.

**Observación** El caso  $K_0 = 1$  es trivial, pues implica que  $X_\sigma$  es periódico y, por lo tanto, no tiene factores aperiódicos.

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.17. Notemos que para  $n \in E$ ,

$$\langle \sigma_{(n, n+K-2]} \rangle \geq K_0^{\lfloor K \rfloor - 2} \geq 4(2c_0^4 + 1)^2(4c_0^4 + 1).$$

Luego, las condiciones del Teorema 2.17 se satisfacen y podemos concluir.  $\square$

Terminamos esta sección mostrando que los sistemas que considera el Teorema 2.14 tienen como factores de Cantor sólo a odómetros y subshifts.

**Proposición 2.19** *Sea  $X$  un subshift como en el Teorema 2.14. Entonces  $X$  tiene la propiedad de coalescencia, es decir, existe una constante  $C$  tal que si*

$$X \xrightarrow{\phi_1} Y_1 \xrightarrow{\phi_2} Y_2 \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_{\ell-1}} Y_{\ell-1} \xrightarrow{\phi_\ell} Y_\ell$$

*es una cadena de factores donde cada  $Y_j$  es un subshift y  $\ell \geq C$ , entonces existe  $j \in [1, \ell]$  tal que  $\phi_j$  es una conjugación. Más aun,  $C$  es la misma constante que en el Teorema 2.14.*

DEMOSTRACIÓN. Anotamos  $\phi_{(i,j]} = \phi_{i+1} \circ \phi_{i+2} \circ \dots \circ \phi_j$ . Si  $\ell \geq C$ , con  $C$  la constante del Teorema 2.14, entonces el principio del palomar implica la existencia de  $i < j$  tales que  $\phi_{(0,i]}$  es equivalente a  $\phi_{(0,j]}$ ; sea  $\psi: X_i \rightarrow X_j$  una conjugación y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $S^k \phi_{(0,j]} = \psi \circ \phi_{(0,i]}$ . Entonces tenemos

$$\phi_{(i,j]} \circ \phi_{(0,i]} = (S^{-k} \psi) \circ \phi_{(0,i]}.$$

Como  $\phi_{(0,i]}$  es sobreyectiva deducimos que  $\phi_{(i,j]} = S^{-k} \psi$ . Se sigue fácilmente de esto que  $\phi_j$  es inyectiva y por lo tanto una conjugación.  $\square$

**Corolario 2.20** *Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico como en el Teorema 2.14 y  $f: (X, T) \rightarrow (Y, T)$  un factor tal que  $Y$  es de Cantor. Entonces  $Y$  es un odómetro o un subshift.*

DEMOSTRACIÓN. Como  $Y$  es Cantor, podemos construir una secuencia  $\mathcal{P}_n = \{P(n, 1), \dots, P(n, p_n)\}$ ,  $n \geq 0$ , de particiones de  $Y$  tales que

1. cada  $P(n, i)$  es clopen,
2. cada  $P(n, i)$  está contenido en algún  $P(n-1, j)$ , y
3. para todo  $x, y \in Y$  distintos, existe  $n \geq 0$  tal que  $x, y$  están en distintos elementos de  $\mathcal{P}_n$ .

Sea  $n \geq 0$ . Definimos  $A_n = [1, p_n]$  y  $\delta: Y \rightarrow A_n$  por  $\delta(x) = i$  si, y sólo si  $x$  pertenece a  $P(n, i)$ . Sea  $\pi_n: Y \rightarrow A_n^{\mathbb{Z}}$  la función definida por  $(\pi_n(x))_i = \delta(S^i(x))$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Ponemos  $Y_n = \pi_n(Y)$ . Entonces  $\pi_n$  es un factor de  $(Y, T)$  al subshift  $(Y_n, T)$ .

La propiedad 2 implica que existe una función  $\gamma_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$  que se extiende a un factor  $\gamma_n: (Y_n, T) \rightarrow (Y_{n-1}, T)$  tal que  $\gamma_n \circ \pi_n = \pi_{n-1}$ . Tenemos la cadena de factores:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi_n} Y_n \xrightarrow{\gamma_n} Y_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} \dots \xrightarrow{\gamma_2} Y_1 \xrightarrow{\gamma_1} Y_0, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.8)$$

Entonces

$$Z := \left\{ (y_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \geq 0} Y_n : \gamma_n(y_n) = y_{n-1}, \forall n \geq 1 \right\},$$

con la topología inducida por la topología producto y la acción  $T(y_n)_{n \geq 0} := (Ty_n)_{n \geq 0}$  es un sistema dinámico minimal Cantor que, por la propiedad 3, es conjugado a  $(Y, T)$  a través de la función  $\varphi(y) := (\pi_n(y))_{n \geq 0}$ .

Si todos los  $Y_n$  son periódicos, entonces  $Z$  es un  $(\#Y_n)_{n \geq 0}$ -odómetro, y así  $Y$  es conjugado a uno. Si existe algún  $Y_n$  aperiódico, entonces podemos suponer que todos los  $Y_n$  son aperiódicos al considerar una secuencia  $(\mathcal{P}_n)_{n > n_0}$ ; luego, la Proposición 2.19 en la cadena (2.8) implica que todos los  $\gamma_n$  son conjugaciones. Es fácil ver entonces que  $(Z, T)$  es conjugado a  $(Y_0, T)$ , y así  $(Y, T)$  es conjugado a un subshift.  $\square$

## 2.4. Aplicación a Transformaciones de Intercambios de Intervalos

En esta sección mostraremos que las condiciones del Corolario 2.18 son genéricas, en cierto sentido, dentro de la clase de transformaciones de intercambio de intervalos (introducidas en el Capítulo 1).

Sea  $A$  un alfabeto finito y  $C = (V, E)$  una clase de Rauzy de t.i.i. en  $A$ . Si  $e = \pi \xrightarrow{\varepsilon} \pi' \in E$  es una arista de  $C$ , entonces anotamos  $s(e) = \pi$ ,  $r(\pi')$  y  $l(e) = \varepsilon$ . Sea

$$X = \{(\gamma_n)_{n \geq 1} \in E^{\mathbb{N}} : r(\gamma_n) = s(\gamma_{n+1}), \forall n \geq 1\}$$

el subshift de aristas en  $C$ . El Teorema 1.16 nos dice que la extensión simbólica de una t.i.i. minimal  $(\pi, \lambda)$  tal que  $\pi \in C$  es un subshift S-ádico cuyos niveles están construidos a partir de un paseo infinito de  $X$ . Aquí probaremos que las hipótesis del Teorema 2.17 se cumplen “para casi todos los paseos de  $X$ ”. Primero recordemos el siguiente resultado clásico.

**Proposición 2.21** ([19]) *Existe un medida ergódica  $\mu$  en  $X$ , llamada la medida de Parry, que le asigna masa positiva a todo cilindro no vacío de  $X$ .*

**Teorema 2.22** *Sea  $\mu$  la medida de Parry en  $X$ . Entonces para  $\mu$ -casi todo  $\gamma \in X$ , el subshift S-ádico generado por la secuencia de morfismos  $\sigma = (S(\gamma_n))_{n \geq 1}$  cumple las hipótesis del Corolario 2.18.*

**Observación** En [1] se prueba que  $\gamma \in X$  proviene de una t.i.i. si, y sólo si cada símbolo  $a \in A$  es el winner y looser de infinitos  $\gamma_n$ . Es fácil ver de esto que si  $\mu$  es la medida de Parry, entonces  $\mu$ -casi todo  $\gamma \in X$  proviene de una t.i.i.

DEMOSTRACIÓN. Para  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  un paseo en  $C$ , definimos

$$S(\gamma) := (S(\gamma_1), \dots, S(\gamma_n)).$$

Es fácil ver que existen paseos  $\gamma$  y  $\gamma'$  en  $C$  tales que  $S(\gamma)$  es propio y  $S(\gamma')$  es primitivo. Como  $C$  es fuertemente conexo, podemos unir último vértice de  $\gamma$  con el primero de  $\gamma'$  con un paseo  $\delta$ , y el último vértice de  $\gamma'$  con el primero de  $\gamma$  con un paseo  $\delta'$ . Luego,  $\gamma := \gamma\delta\gamma'\delta'$  es un ciclo en  $C$  tal que  $S(\gamma)$  es primitivo y propio. Sea  $c_0 = |S(\gamma)|$  y

$$K = \frac{\log(4(2c_0^4 + 1)^2(4c_0^4 + 1))}{\log(\#A)} + 3$$

la constante del Corolario 2.18. Sea  $\gamma'$  la concatenación de  $K$  ciclos  $\gamma$ . Por la Proposición 2.21,  $\mu([\gamma']) > 0$  y  $\mu$  es ergódica. Luego, para  $\mu$ -casi todo punto  $\gamma \in X$ , existen infinitas ocurrencias de  $\gamma'$  en  $\gamma$ . Luego, para  $\mu$ -casi todo punto  $\gamma \in X$ , una contracción adecuada de la secuencia  $S(\gamma')$  satisface las hipótesis del Corolario 2.18.  $\square$



# Capítulo 3

## Sobre el número de Automorfismos

El grupo de automorfismos de un sistema dinámico permite medir, en cierto sentido, la complejidad del sistema: mientras más grande y complicado el grupo de automorfismos, más complejo se espera que sea el sistema. Por ejemplo, un resultado clásico es que cualquier subshift sófico de entropía positiva tiene en su grupo de automorfismos copias isomorfas de un grupo libre en numerables generadores y una de la suma directa de numerables copias de  $\mathbb{Z}$  [3]. En el otro extremo, un resultado reciente es que los subshifts de complejidad *no-superlineal* tienen un grupo de automorfismos virtualmente  $\mathbb{Z}$  [4]; es decir, tan pequeño como puede ser. Cabe destacar que todo subshift minimal de complejidad no-superlineal es un sistema minimal de Cantor de rango finito [5].

En este capítulo extenderemos el resultado de [4] dentro del caso minimal, probando que todo sistema minimal de Cantor de rango finito que no es un odómetro tiene un grupo de automorfismos virtualmente  $\mathbb{Z}$ :

**Teorema 3.1** *Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico minimal de Cantor de rango finito que no es un odómetro. Entonces  $\text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$  es finito.*

La demostración se puede dividir en dos partes: primero se utiliza un lema de [4] que permite relacionar el número de clases asintóticas con el tamaño de  $\text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$ . Luego se usa el Teorema 1.11 para reducir el estudio al caso S-ádico y se realiza un análisis cuidadoso de la combinatoria de palabras que surge en los pares asintóticos.

En la Sección 1 presentamos los resultados principales, entre los que se encuentra la demostración del Teorema 3.1 una vez asumida la proposición técnica central de este capítulo, la Proposición 3.3. El resto del capítulo se centra en demostrar esta proposición. Para esto, en la Sección 2 introducimos las nociones de interpretación y doble interpretación, que son centrales en su demostración, y algunas de sus propiedades básicas. En la Sección 3 probamos los lemas de combinatoria de palabras que necesitaremos. Finalmente, en la Sección 4 terminamos de introducir notación y demostramos la Proposición 3.3.

### 3.1. Resultados principales

Sea  $(X, T)$  un subshift. Dos puntos  $x, y \in X$  son **asintóticos** si  $x_{(-\infty, 0]} = y_{(-\infty, 0]}$  y  $x_1 \neq y_1$ . Definimos la relación  $\sim$  en  $X$  por

$x \sim y$  si, y sólo si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $T^k x$  e  $y$  son asymptóticos o iguales.

Es fácil ver que  $\sim$  es relación de equivalencia. Una clase de equivalencia de  $\sim$  que no es la órbita de un punto la llamamos **componente asintótica**, y anotamos  $\mathcal{AS}(X)$  para el conjunto de todas las componentes asintóticas.

La siguiente proposición, probada en [4], da una relación entre el número de componentes asintóticas y el tamaño de  $\text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$ .

**Proposición 3.2** *Sea  $(X, T)$  un subshift minimal. Entonces existe un morfismo de grupos inyectivo  $j: \text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle \rightarrow \text{Per}\mathcal{AS}(X)$ , donde  $\text{Per}\mathcal{AS}(X)$  es el grupo de permutaciones en  $\#\mathcal{AS}(X)$  símbolos.*

Un análisis de la combinatoria de palabras que surge en los pares asintóticos permite obtener la siguiente proposición, cuya demostración posponemos hasta la sección 4. Primero una definición.

Sea  $W \subseteq \mathcal{A}^+$  un conjunto finito de palabras no vacías sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$ . Un punto  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es **factorizable** sobre  $W$  si existe una función  $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times W$  tal que

- i) si  $F(j) = (i, w)$ , entonces  $x_{(i-|w|, i]} = w$ ,
- ii) si  $F(j) = (i, w)$  y  $F(j+1) = (i', w')$ , entonces  $i' = i + |w|$ ,
- iii) si  $F(0) = (i, w)$ , entonces  $i \in [0, |w|)$ .

Es fácil ver que esto equivale a que exista  $y \in W^{\mathbb{Z}}$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $x = T^k y$ , donde  $T: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es el shift. Los cortes de  $F$  son las posiciones  $i$  que aparecen en  $F(j) = (i, w)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 3.3** *Sea  $W \subseteq \mathcal{A}^+$  conjunto finito de palabras no vacías. Entonces existe  $B \subseteq \mathcal{A}^+$  tal que*

1.  $\#B \leq 41(\#W)^7$ ,
2.  $\langle B \rangle \geq \langle W \rangle$  y
3. si  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  son asintóticos y factorizables sobre  $W$ , entonces existe  $w \in B$  tal que  $w \leq_s x_{(-\infty, 0]}$ .

**Teorema 3.4** *Sea  $\sigma = (\sigma_n: A_n \rightarrow A_{n-1})_{n \geq 1}$  una secuencia de morfismos de rango  $K$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_{(0, n]} \rangle = \infty$ . Entonces  $(X_\sigma, T)$  tiene a lo más  $41K^7$  componentes asintóticas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $W_n = \sigma_{(0, n]}(A_n)$ ,  $n \geq 1$ . Sea  $B_n \subseteq A_0$  el conjunto que nos da el Lema 3.3 al usarlo sobre  $W_n$ . Entonces  $\#B_n \leq K' := 41K^7$ . Sean  $(x_0, y_0), \dots, (x_{K'}, y_{K'})$  pares de

puntos asintóticos en  $X_\sigma$ . Para cada  $n \geq 0$  y  $j \in [0, K']$ , la Proposición 1.7 implica que  $x_j$  e  $y_j$  se factorizan sobre  $W_n$ . Luego, de las propiedades de  $B_n$ , existen  $j_n \neq j'_n$  tales que

$$(x_{j_n})_{\langle W_n, 0 \rangle} = (x_{j'_n})_{\langle W_n, 0 \rangle}. \quad (3.1)$$

Como  $\#W_n \leq K$  para todo  $n \geq 1$ , podemos elegir  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  tales que  $j_{n_1} = j_{n_2} = \dots = j \neq j' = j'_{n_1} = j'_{n_2} = \dots$ . Por (3.1),

$$(x_j)_{\langle W_{n_i}, 0 \rangle} = (x_{j'})_{\langle W_{n_i}, 0 \rangle}, \quad \forall i \geq 1. \quad (3.2)$$

Como  $\langle W_n \rangle \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue de (3.2) que  $(x_j)_{(-\infty, 0]} = (x_{j'})_{(-\infty, 0]}$ , y así  $x_j \sim x_{j'}$ . Esto prueba que hay a lo más  $K'$  clases asintóticas en  $X_\sigma$ .  $\square$

Con esto ya podemos demostrar el Teorema 3.1.

DEMOSTRACIÓN (DEL TEOREMA 3.1). Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico minimal de Cantor de rango finito que no es un odómetro. El Teorema 1.11 nos da una secuencia de morfismos correcta  $\sigma = (\sigma_n: A_n \rightarrow A_{n-1})_{n \geq 1}$  de rango finito tal que  $(X, T)$  es conjugado a  $(X_\sigma, T)$ . Como  $X_\sigma$  es infinito,  $\min_{n \geq 1} \#A_n \geq 2$ . Luego, la primitividad de  $\sigma$  implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_{(0, n]}(A_n) \rangle \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

Entonces, si  $K$  es el rango de  $\sigma$ , el Teorema 3.4 nos da que  $\#\mathcal{AS}(X) \leq 41K^7$ , y la Proposición 3.2 que

$$\#\text{Aut}(X, T) / \langle T \rangle \leq (\#\mathcal{AS}(X))! \leq (41K^7)! < +\infty.$$

$\square$

## 3.2. Interpretaciones

Fijamos, por el resto del capítulo, un alfabeto  $\mathcal{A}$  y un conjunto de palabras finito  $W \subseteq \mathcal{A}^+$ . Si  $u, v, w \in \mathcal{A}^*$  son tales que  $w = uv$ , entonces escribimos  $u = wv^{-1}$  y  $v = u^{-1}w$ .

**Definición 3.5** Sea  $w \in \mathcal{A}^*$ . Una *interpretación* en  $W$  de  $w$  es una sucesión  $I = w_0, w_1, \dots, w_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , de palabras de  $\mathcal{A}^*$  tal que

1.  $w_1, \dots, w_n \in W$ ,  $w_0 <_p w_1$ ,  $w_{n+1} \leq_s w_n$  y  $w_{n+1} \neq 1$ .
2.  $w_0 w w_{n+1} = w_1 \cdots w_n$ .

Ver Figura 3.1. Notar el rol asimétrico que cumplen  $w_0$  y  $w_{n+1}$  respecto a los otros  $w_j$ . Los cortes de  $I$  son

$$c_I = \{i \in [0, |w|] : \exists j \in [1, n] : w_{(i, |w|]} = w_j \cdots w_n (w_{n+1})^{-1}\}.$$

Notemos que  $0 \in c_I$  ssi  $w_0 = 1$  y  $|w| \in c_I$  ssi  $w_{n+1} = w_n$ .

Si el contexto es claro, hablaremos simplemente de *interpretaciones*, sin hacer referencia a  $W$ .

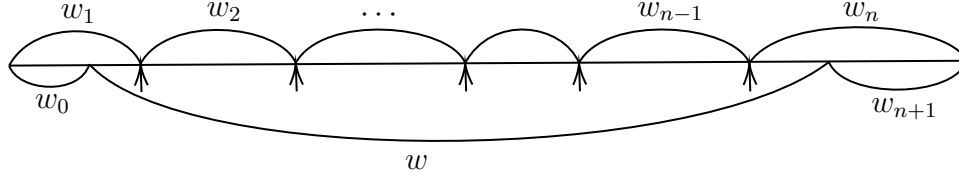


Figura 3.1: Diagrama de una interpretación  $I = w_0, \dots, w_{n+1}$ . Los cortes de  $I$  están marcados con flechas.

**Ejemplo** Sea  $W := \{A := aa, B := baab, C := babb\}$ . Sean  $u = aabbabba$ ,  $v = aabaab$ ,  $w = 1$ . Entonces

$$\begin{array}{ll} I_u = b, B, C, A, a & c_{I_u} = \{3, 7\} \\ I_v = 1, A, B, B & c_{I_v} = \{0, 2, 6\} \\ I_w = 1, A, A & c_{I_w} = \{0\} \end{array}$$

son interpretaciones en  $W$  de  $u, v, w$ , respectivamente, junto a sus cortes.

**Lema 3.6** Sea  $I = w_0, \dots, w_{n+1}$  una interpretación de  $w$ . Si  $w' = w_{(j_1, j_2]}$ ,  $j_1 < j_2 \in (0, |w|]$ , entonces  $w'$  tiene una interpretación de la forma  $I' = u, w_{i_1}, w_{i_1+1}, \dots, w_{i_2}, v$ .

Omitimos la demostración. Diremos que  $I'$  es la **interpretación heredada** por  $I$ . Destacamos que  $I'$  depende de la posición de  $w$  en la que ocurre  $w'$ .

La demostración del Teorema 3.1 se basa en una inducción en base a *reducciones de doble interpretaciones*. Definimos ahora esto último.

**Definición 3.7** Una **doble interpretación** (abreviado *d.i.*) en  $W$  de  $w$  es una tupla  $D = (w; I; I')$  tal que  $I = w_0, w_1, \dots, w_{n+1}$  e  $I' = w'_0, w'_1, \dots, w'_{m+1}$  son interpretaciones de  $w$ . Ver Figura 3.2. La *d.i.*  $D$  es **maximal** si  $w_{n+1}, w'_{m+1}$  parten con letras distintas. Una *d.i.* maximal es

1. **primaria**, si  $n = 1$  y  $w_0 = w'_0 = 1$ .
2. **secundaria**, si
  - i)  $n, m \geq 2$  y  $w'_2 \cdots w'_m \cdot (w'_{m+1})^{-1} <_s w_n (w_{n+1})^{-1} <_s w'_1 \cdots w'_m \cdot (w'_{m+1})^{-1}$ , y
  - ii) ó  $w'_0 = 1$  ó  $|(w'_0)^{-1} w'_1| \geq |w_n|$ .

Ver figuras 3.3 y 3.4. Sea  $x := w_n$ . El conjunto de cortes de  $D$  es:

$$c_D = \{i \in [0, |x|] : \exists j \in [1, m] : x_{(i, |x|]} = w'_j \cdots w'_m (w'_{m+1})^{-1} \cdot w_{n+1}\}.$$

Equivalentemente,  $c_D := c_J$ , donde  $J$  es la interpretación de  $w_n (w_{n+1})^{-1} \leq_s w$  heredada de  $I'$ .

Es importante notar que si  $D = (w; I; I')$  es secundaria, entonces  $|w| \geq \langle W \rangle$ , y que si  $|w| < \langle W \rangle$ , entonces  $D$  es primaria y  $m = 1$ .

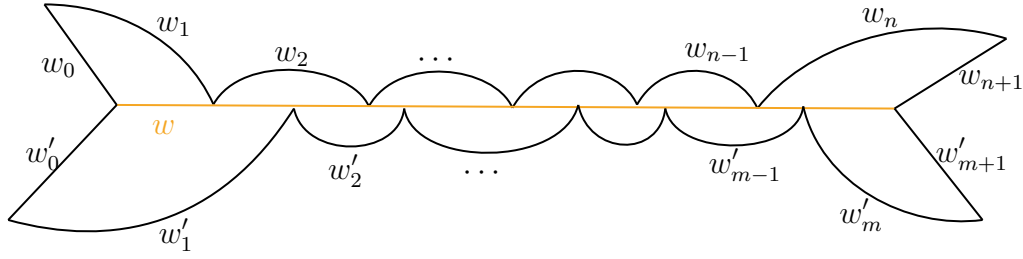


Figura 3.2: Diagrama de una doble interpretación de  $w$ .

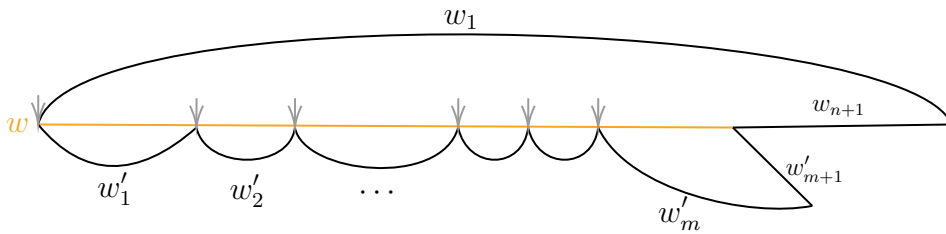


Figura 3.3: Diagrama de una d.i. primaria. Los cortes  $c_D$  están destacados con flechas grises.

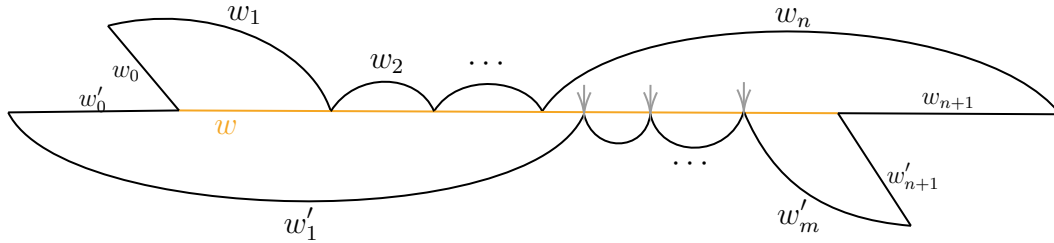


Figura 3.4: Diagrama de una d.i. secundaria. Las posiciones de  $w_n$  que corresponden a los cortes  $c_D$  están destacados con flechas grises.

**Ejemplo** Sea  $W = \{A := a; B := bab; C := baab\} \subseteq \{a, b\}^*$ . Sean  $u := babaa$ ,  $v := baba$ . Cualquier palabra  $x \in \{u, v\}^*$  tiene una d.i. maximal. Por ejemplo, si  $x = uvvu$ , entonces

$$D = (x; I := 1, B, A, A, B, A, B, A, B, A, A, A, a; \\ I' := ba, B, A, C, A, B, A, B, A, C, b)$$

es una d.i. maximal. Ver Figura 3.5. Notemos que  $c_D = \emptyset$ , pero que si  $D' = (x; I'; I)$ , entonces  $c_{D'} = \{1, 2, 3\}$ .

Notemos que existe  $x \in \{a, b\}^{\mathbb{Z}}$  aperiódico con dos factorizaciones sobre  $W$ . Esto no ocurre cuando  $\#W \leq 2$ . Para  $\#W \geq 3$  la combinatoria es mucho más complicada y permite esta clase de situaciones.

$$x = \begin{array}{cccccccccccc}
& & B & A & A & B & A & B & A & B & A & A & A \\
& & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown & \frown \\
& & b & a & b & a & a & b & a & b & a & b & a & b & a & a & a \\
& \underbrace{\hspace{1em}} & & & & & & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{1em}} \\
& B & A & C & A & B & A & B & A & C & & & & & & & 
\end{array}$$

Figura 3.5: Un esquema de la d.i.  $D$ .

### 3.3. Lemas previos

Partimos recordando el siguiente resultado clásico:

**Lema 3.8** (Fine and Wilf [12]) *Sean  $u, v \in \mathcal{A}^+$  palabras tales que  $uv = vu$ . Entonces existe  $w \in \mathcal{A}^+$  y  $n, m \geq 1$  tales que  $u = w^n$  y  $v = w^m$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $|u| = |v|$ , entonces  $w := u = v$  sirve. En otro caso, sin pérdida de generalidad podemos suponer  $|u| > |v|$ . Pongamos  $u' = v^{-1}u \in \mathcal{A}^+$  y notemos que

$$u'v = v^{-1}uv = v^{-1}vu = u = vu' \quad \text{y} \quad |u'| + |v| < |u| + |v|.$$

Entonces, por inducción, existe  $w \in \mathcal{A}^+$  y  $n, m \geq 1$  tales que  $u' = w^n$  y  $v = w^m$ , es decir,  $u = w^{n+m}$  y  $v = w^m$ .  $\square$

Si  $u \in \mathcal{A}^*$ , entonces anotamos  $u^\infty := uuu\dots$  y  $u^{-\infty} := \dots uuu$ . Los Lemas 3.9 y 3.10 hablan sobre cierta “sincronización” de las ocurrencias de  $u$  respecto a la periodicidad de  $w$ :

**Lema 3.9** *Sean  $u, w \in \mathcal{A}^*$ ,  $0 = j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq |w|$  tales que  $w_{(j_i, |w|]} \leq_p u$  para todo  $l \in [1, s]$ . Sea  $p \in \mathcal{A}^*$  la palabra de largo mínimo tal que  $w \leq_p p^\infty$ . Si  $|p| \leq |w_{(j_s, |w|]}|$ , entonces  $j_l = j_1 \pmod{|p|}$  para todo  $l \in [1, s]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $l \in [1, s]$ . Como  $w_{(j_1, |w|]}, w_{(j_l, |w|]} \leq_p u$  y  $|w_{(j_l, |w|]}| \geq |w_{(j_s, |w|]}| \geq |p|$ , tenemos que

$$p \leq_p w_{(j_l, |w|]}. \tag{3.3}$$

Si  $j_l \neq j_1 \pmod{|p|}$ , entonces descomponemos  $p = p_0p_1$ ,  $p_0, p_1 \in \mathcal{A}^+$ , con  $|p_0| = j_l \pmod{|p|}$  y, de (3.3) y  $w \leq_p p^\infty$ , deducimos que

$$p_0p_1 = p = w_{(j_l, j_l+|p|]} = w_{(|p_0|, |p_0|+|p|]} = p_1p_0.$$

Ver Figura 3.6. Luego, el Lema 3.8 nos dice que  $p_0$  y  $p_1$  son potencias de una misma palabra, lo que contradice la minimalidad de  $|p|$ .

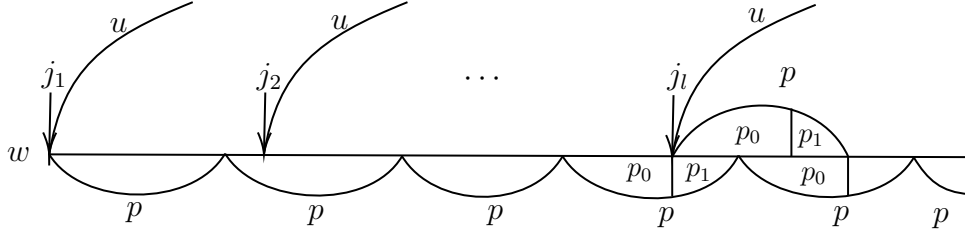


Figura 3.6: Si  $j_l \neq j_1 \pmod{|p|}$ , entonces en la posición  $j_l$  se produce una “desincronización” de las ocurrencias de  $p$  que nos permite usar Fine and Wilf.

□

Si  $u \in \mathcal{A}^*$  y  $k \in \mathbb{N}$ , decimos que  $u$  es  $k$ -**periódica** si existe  $v \in \mathcal{A}^k$  tal que  $u \sqsubseteq v^\infty$ .

**Lema 3.10** Sean  $u, v, w \in \mathcal{A}^*$ ,  $0 = j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq i_1 < i_2 \leq |w|$  tales que para todo  $l \in [1, s]$ ,  $w_{(j_l, |w|]} \leq_p u$  y para todo  $l \in [1, 2]$ ,  $w_{(0, i_l]} \leq_s v$ . Sea  $p \in \mathcal{A}^*$  la palabra de largo mínimo tal que  $w \leq_p p^\infty$ . Entonces  $j_l = j_1 \pmod{|p|}$  para todo  $l \in [1, s]$ .

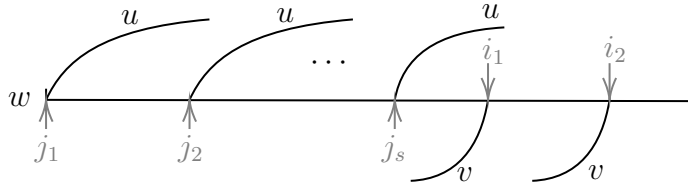


Figura 3.7: Esquema de las hipótesis del Lema 3.10.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer  $s \geq 2$ . Notemos que

$$w_{(j_1, i_1]} \leq_s v \quad \text{y} \quad w_{(j_1, i_2]} \leq_s v$$

implica que  $w' := w_{(j_1, i_2]}$  es  $k$ -periódica, con  $k = |w_{(i_1, i_2]}|$ . Sea  $q \in \mathcal{A}^*$  tal que  $w' \leq_p q^\infty$  con  $|q|$  mínimo. Es claro que  $|q| \leq |p|$ . Por otro lado

$$|q| \leq k = |w_{(i_1, i_2]}| \leq |w_{(j_s, |w|]}|. \quad (3.4)$$

Entonces el Lema 3.9 nos dice que  $j_l = j_1 \pmod{|q|}$  para todo  $l \in [1, s]$ . En particular, existe  $n \geq 1$  tal que  $w_{(j_1, j_2]} = q^n$ . Como

$$w_{(j_1, |w|]} \leq_p u \quad \text{y} \quad w_{(j_2, |w|]} \leq_p u,$$

$w$  es  $|w_{(j_1, j_2]}| = |q^n|$  periódica y  $w \leq_p q^\infty$ . Esto implica que  $|q| \geq |p|$ . Luego,  $q = p$  y terminamos. □

Luego será común tener palabras con varias interpretaciones. El siguiente lema nos da una condición suficiente útil para construir una d.i. a partir de estas interpretaciones.

**Lema 3.11** Sea  $D = (d; I = d_0, \dots, d_{n+1}; I' = d'_0, \dots, d'_{m+1})$  d.i. en  $W$  maximal. Supongamos que existen cortes  $i \in c_I$ ,  $i' \in c_{I'}$  tales que  $[i, |d|] \cap c_{I'}$  y  $[i', |d|] \cap c_I$  son no vacíos. Entonces existe  $E = (e; J; J')$  d.i. principal o secundaria tal que  $e = d_{(k, |d|)}$ , con  $k \in c_I \cup c_{I'}$ . Más aun, ó  $e = d_{(k, |d|)}$  y  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , ó  $|e| \geq \langle W \rangle$ .

DEMOSTRACIÓN. Las hipótesis implican que  $c_I, c_{I'}$  son no vacíos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $i := \max c_I \leq \max c_{I'}$ . Notemos que  $d_{(i, |d|)} = d_n d_{n+1}^{-1}$ . Sea  $i' \in c_{I'}$  el elemento más pequeño tal que  $i' \geq i$ . Sea  $j \in [1, m]$  tal que  $d_{(i', |d|)} = d'_j \cdots d'_m \cdot (d'_{m+1})^{-1}$ . Hay dos casos:

1. si  $i' = i$ . Ponemos  $e = d_{(i, |d|)}$ ,  $J = 1, w_n, w_{n+1}$  y  $J' = 1, d'_j, \dots, d'_{m+1}$ . Entonces  $E = (e; J; J')$  es primaria y parte en  $i \in c_I \cap c_{I'}$ .
2. si  $i' > i$ . Entonces  $[i', |d|] \cap c_I = \emptyset$  (pues  $i < i'$  es el corte más grande de  $I$ ). Luego, existe  $k \in c_{I'}$  el antecesor de  $i'$  en  $c_{I'}$ . Notemos que  $d_{(k, |d|)} = d'_{j-1} \cdots d'_m \cdot (d'_{m+1})^{-1}$ . La minimalidad de  $i'$  implica que  $k < i$ . Podemos tomar entonces  $l \in [1, n-1]$  el entero más grande tal que  $d_{(k, |d|)} \leq_s d_l \cdots d_n \cdot (d_{n+1})^{-1}$ . Sea  $h \in \mathcal{A}^*$  tal que  $hd_{(k, |d|)} = d_l \cdots d_n \cdot (d_{n+1})^{-1}$ . Ponemos  $e = d_{(k, |d|)}$ ,  $J = h, d_l, \dots, d_{n+1}$  y  $J' = 1, d'_{j-1}, \dots, d'_{m+1}$ . Entonces  $E = (e; J; J')$  es secundaria. Esto implica que  $|e| \geq \langle W \rangle$ .

□

El Lema 3.12 es la relación entre pares asintóticos y d.i.

**Lema 3.12** Si  $x, x' \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  son asintóticos y factorizables sobre  $W$ , entonces existe un corte  $l \leq 0$  de la factorización de  $x$  ó de  $x'$  tal que  $w := x_{(l, 0]} = x'_{(l, 0]}$  tiene d.i. en  $W$  principal o secundaria.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $l' = -2|W|$ . Entonces  $w := x_{(l', 0]} = x'_{(l', 0]}$  hereda de manera natural interpretaciones  $I$  y  $I'$  de las factorizaciones de  $x$  y  $x'$ . Como  $x_1 \neq x'_1$ ,  $D := (w; I; I')$  es d.i. maximal. Notemos que si  $[a, b] \subseteq [0, |w|]$  es un intervalo de largo al menos  $|W|$ , entonces  $[a, b] \cap c_I, [a, b] \cap c_{I'} \neq \emptyset$ . Como  $|w| \geq |W|$ , esto implica que  $c_I, c_{I'} \neq \emptyset$ . Sea  $i = \min c_I$ . Entonces  $i \leq |W|$ ,  $(i, |w|]$  tiene largo al menos  $|W|$  y así  $(i, |w|] \cap c_{I'} \neq \emptyset$ . Un razonamiento análogo prueba que existe  $i' \in c_{I'}$  tal que  $(i', |w|] \cap c_I \neq \emptyset$ . Podemos entonces usar el Lema 3.11 sobre  $D$  para concluir. □

### 3.4. Demostración de la Proposición 3.3

Ahora introduciremos bastante notación; recomendamos apoyar la lectura en la Figura 3.8.

De ahora en adelante, si usamos la letra  $D$  para denotar una d.i., entonces esta se escribe  $D = (d; I_D = d_{n_D+1}, \dots, d_0; I'_D = d'_0, \dots, d'_{m_D+1})$ . Notemos el orden reverso en la primera



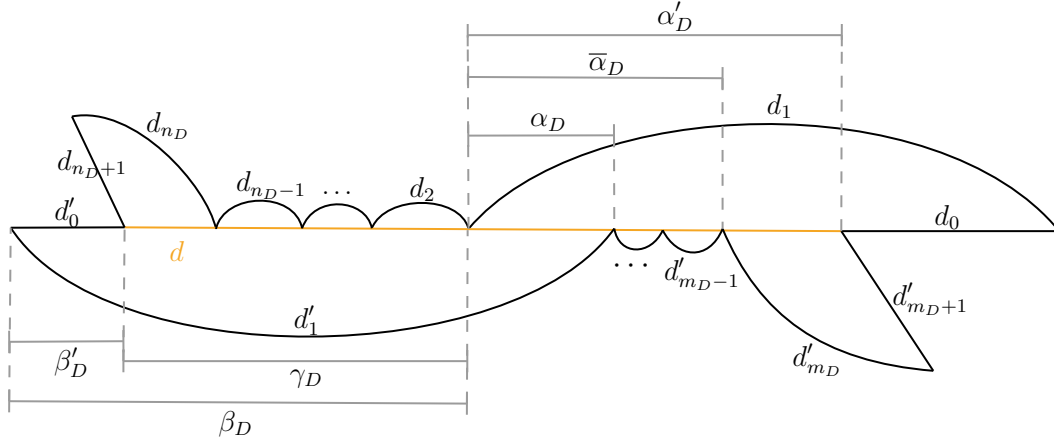


Figura 3.8: Ilustración de las definiciones en una d.i. secundaria

interpretación. Para  $D$  d.i. primaria o secundaria, definimos:

$$\alpha_D := \min c_D = \begin{cases} 0 & \text{si } D \text{ es primaria} \\ |(d'_0)^{-1}d'_1| - |(d_{n_D+1})^{-1}d_{n_D} \cdots d_2| & \text{si } D \text{ es secundaria} \end{cases}$$

$$\alpha'_D := \begin{cases} |d| & \text{si } D \text{ es primaria} \\ |d| - |(d_{n_D+1})^{-1}d_{n_D} \cdots d_2| & \text{si } D \text{ es secundaria} \end{cases}$$

Cuando  $D$  es secundaria definimos:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_D &:= \max c_D = \alpha_D + |d'_2 \cdots d'_{m_D-1}|, \\ \gamma_D &:= |(d_{n_D+1})^{-1}d_{n_D} \cdots d_2|, \\ \beta'_D &:= |d'_0|, \\ \beta_D &:= \beta'_D + \gamma_D. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} R_D &:= (d_1)_{(0, \alpha_D]}, \\ S_D &:= (d_1)_{(\alpha_D, \alpha'_D]} = d'_2 \cdots d'_{m_D} \cdot (d'_{m_D+1})^{-1}, \\ T_D &:= R_D S_D = (d_1)_{(0, \alpha'_D]}. \end{aligned}$$

Es importante destacar que  $R_D = (d_1)_{(0, \alpha_D]} = (d'_1)_{(\beta_D, |\alpha'_D|]}$ .

La demostración de la Proposición 3.3 será una especie de inducción en base a *reducciones*.

**Definición 3.13** Sean  $D, E$  d.i. en  $W$ .

1. Decimos que  $D$  se **reduce** (débilmente) a  $E$ , anotado  $D \rightarrow E$ , si existe un sufijo común  $w \leq_s d, e$  tal que, ó  $|w| \geq \langle W \rangle$  ó  $w$  parte en  $d_1$  en un corte de  $D$  i.e.  $w = (d_1)_{(i, \alpha'_D]}$  con  $i \in c_D$ .

2. Escribimos  $D \Rightarrow E$ , leído  $D$  se **reduce fuertemente** a  $E$ , si  $e <_s d$  y, ó  $|e| \geq \langle W \rangle$  ó  $e$  parte en  $d_1$  en un corte de  $D$ .

Es importante notar que siempre se tiene la reducción trivial  $D \rightarrow D$ .

Para  $x, x' \in W$ , sea  $\mathcal{P}_{x'}^x$  el conjunto de d.i. principales  $D$  tales que  $d_1 = x$  y  $d'_1 = x'$ .

**Lema 3.14** *Si  $\mathcal{P}_{x'}^x \neq \emptyset$ , entonces existe  $D \in \mathcal{P}_{x'}^x$  tal que para todo  $E \in \mathcal{P}_{x'}^x$ , ó  $E \rightarrow D$  ó  $E$  tiene reducción fuerte.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier  $D \in \mathcal{P}_{x'}^x$  tal que  $\alpha'_D$  es máximo funciona. En efecto: sea  $E \in \mathcal{P}_{x'}^x$  y sepáremos en dos casos:

1. si  $\alpha'_E = \alpha'_D$ : entonces  $e = (e_1)_{(0, \alpha'_E]} = (d_1)_{(0, \alpha'_D]} = d$  y  $E \rightarrow D$  (pues 0 es corte de  $E$ ).
2. si  $\alpha'_E < \alpha'_D$ : entonces, como  $d'_1 = e'_1 = x'$ ,  $D \neq E$  y  $D, E$  son maximales, tenemos que  $m_D, m_E \geq 2$  y  $|x| > |x'|$ . Sea  $w := x_{(|x'|, \alpha'(E)]}$ . Ver Figura 3.9. Como  $\alpha'_E \leq \alpha'_D$ , existe  $I := 1, d'_2, \dots, d'_l, h$  la interpretación de  $w = d_{(|x'|, \alpha'_E]}$  heredada de  $I'_D$ . Sea  $I' := 1, e'_2, \dots, e'_{m_E+1}$ . Como  $\alpha'_E < \alpha'_D$ ,  $h$  y  $e'_{m_E+1}$  inician con letras distintas, por lo que  $F := (w; I; I')$  es una d.i. maximal. Más aun,  $0 \in c_I \cap c_{I'}$ , así que podemos usar el Lema 3.11 para encontrar una d.i.  $G = (g; I_G, I'_G)$  principal o secundaria tal que  $g \leq_s w$ . Además, ó  $g = w_{(k, |w|]}$  con  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , por lo que  $g = (e_1)_{(|x'|+k, \alpha'(E)]}$  con  $|x'|+k \in c_E$ , ó  $|g| \geq \langle W \rangle$ . Como  $|g| \leq |w| < |e|$ , en ambos casos tenemos que  $E \Rightarrow G$ .

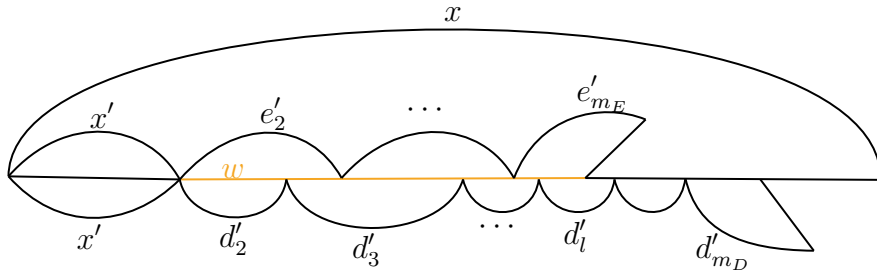


Figura 3.9: Como  $d_1 = e_1 = x$ , las interpretaciones  $I'_D, I'_E$  se sobreponen y forman una nueva d.i. que es una reducción fuerte de  $E$ .

□

Fijamos ahora  $x, y, x', z' \in W$ ,  $u \in W \cup \{1\}$ . Sea  $\mathcal{S}_{x', z'}^{y, x}(u)$  el conjunto de d.i. secundarias  $D$  tales que

$$\begin{aligned} d_1 &= x, \quad d_2 = y, \\ d'_1 &= x', \quad d'_{m_D} = z', \\ \text{máx}\{|d'_j| : j \in [2, m_D - 1]\} &= |u|, \end{aligned} \tag{3.5}$$

con la convención  $\text{máx} \emptyset = 0$ .

**Definición 3.15**  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}_{x',z'}^{y,x}(u)$  es *irreducible* si

1. No existe  $D \in \mathcal{D}$  con reducción fuerte.
2. No existen  $D, E \in \mathcal{D}$  distintos con  $D \rightarrow E$ .

En otro caso se dice reducible.

Es importante notar que si  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}'$  es reducible, entonces  $\mathcal{D}$  también lo es.

**Lema 3.16** Sean  $D, E \in \mathcal{S}_{x',z'}^{y,x}(u)$  distintos tales que  $S_E \leq_p S_D$ . Entonces  $\{D, E\}$  es reducible.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que mirar dos casos:

1. si  $S_E = S_D$ : entonces  $d, e \leq_s x'S_D = x'S_E$ . Como  $|d|, |e| \geq \langle W \rangle$ , esto implica que  $d, e$  tienen un sufijo común de largo al menos  $\langle W \rangle$ , por lo que  $D \rightarrow E$ .
2. si  $S_E <_p S_D$ : sean  $w := S_E$  e  $I := 1, e'_2, \dots, e'_{m_E+1}$ . Como  $|S_E| \leq |S_D|$ , existe  $I' := 1, d'_2, \dots, d'_j, h$  la interpretación de  $w = x_{(\alpha_D, \alpha_D + |S_E|)}$  heredada de  $I'_D$ . Como  $|S_E| < |S_D|$ ,  $F := (w; I; I')$  es d.i. maximal y el Lema 3.11 nos da una d.i  $G = (g; I_G, I'_G)$  tal que  $g \leq_s w$ . Más aun, ó  $g = w_{(k, |w|)}$  con  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , por lo que  $g = (e_1)_{(\alpha_E + k, \alpha'(E))}$  con  $\alpha_E + k \in c_E$ , ó  $|g| \geq \langle W \rangle$ . Como  $|g| \leq |w| < |e|$ , en ambos casos tenemos que  $E \Rightarrow G$ .

□

**Lema 3.17** Sean  $D, E \in \mathcal{S}_{x',z'}^{y,x}(u)$  distintos tales que  $c_D \cap c_E \neq \emptyset$  ó  $\alpha'_D = \alpha'_E$ . Entonces  $\{D, E\}$  es reducible.

DEMOSTRACIÓN. Hay dos casos:

1. si  $\alpha'_D = \alpha'_E$ . Como  $d_2 = y$ , tenemos que

$$yx_{(0, \alpha'_D]} \leq_s d \text{ si } n_D > 2 \text{ y } d \leq_s yx_{(0, \alpha'_D]} \text{ si } n_D = 2. \quad (3.6)$$

Ahora, como  $\alpha'_D = \alpha'_E$  y  $e_2 = y$ , lo mismo ocurre para  $e$ :

$$yx_{(0, \alpha'_D]} \leq_s e \text{ si } n_E > 2 \text{ y } e \leq_s yx_{(0, \alpha'_D]} \text{ si } n_E = 2. \quad (3.7)$$

Por otro lado,

$$|d|, |e| \geq \langle W \rangle \text{ y } |yx_{(0, \alpha'_D]}| \geq \langle W \rangle. \quad (3.8)$$

Se sigue de (3.6), (3.7) y (3.8) que el sufijo común maximal  $q$  de  $d, e$  tiene largo  $|q| \geq \langle W \rangle$ .

2. si  $\alpha'_D \neq \alpha'_E$  y existe un corte común  $i \in c_D \cap c_E$ . Sin pérdida de generalidad  $\alpha'_D > \alpha'_E$ . Entonces existen  $j_D \in [2, m_D]$  y  $j_E \in [2, m_E]$  tales que

$$\begin{aligned} x'_{(i, \alpha'_D]} &= d'_{j_D} \cdots d'_{m_D} (d'_{m_D+1})^{-1}, \\ x'_{(i, \alpha'_E]} &= e'_{j_E} \cdots e'_{m_E} (e'_{m_E+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Ver Figura 3.10. Sea  $w := x_{(i, \alpha'_E)}$ ,  $I := 1, d'_{j_D}, \dots, d'_k, h$  la interpretación de  $w = d_{(\gamma_D + i, \gamma_D + \alpha'_E]}$  heredada de  $I'_D$  e  $I' := 1, e'_{j_E}, \dots, e'_{m_E}, e'_{m_E+1}$ . Como  $\alpha'_D > \alpha'_E$ ,  $F := (w; I; I')$  es d.i. maximal. Además,  $0 \in c_I \cap c_{I'}$ , por lo que podemos usar el Lema 3.11 para encontrar una d.i.  $G = (g; I_G, I'_G)$  tal que  $g \leq_s w$ . Más aun, ó  $g = w_{(k, |w|]}$  con  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , por lo que  $g = (e_1)_{(i+k, \alpha'(E))]}$  con  $i+k \in c_E$ , ó  $|g| \geq \langle W \rangle$ . Como  $|g| \leq |w| < |e|$ , en ambos casos tenemos que  $E \Rightarrow G$ .

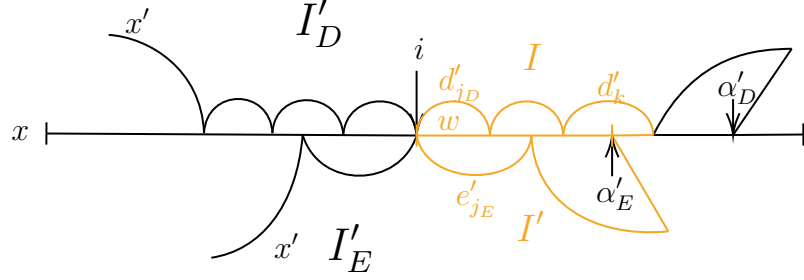


Figura 3.10: Como  $d_1 = e_1 = x$ , las interpretaciones  $I'_D, I'_E$  se sobreponen y forman una nueva d.i.  $F$  (destacada en naranja) de la cual se puede extraer una reducción fuerte de  $E$  usando el Lema 3.11.

□

**Lema 3.18** Sea  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}_{x', z'}^{y, x}(u)$  un conjunto irreducible. Entonces  $\#\mathcal{D} \leq 40(\#W)$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que, para  $D, E \in \mathcal{D}$ ,

$$R_E <_p R_D \Leftrightarrow \alpha_D > \alpha_E \Leftrightarrow \beta_D < \beta_E. \quad (3.9)$$

Entonces, por el Lema 3.17 y la irreducibilidad de  $\mathcal{D}$ , la siguiente relación define un orden total en  $\mathcal{D}$ :

$$D < E \Leftrightarrow R_E <_p R_D.$$

Sean  $D(1) < \dots < D(s)$  todos los elementos de  $\mathcal{D}$ . Identificamos, si el contexto es claro,  $\mathcal{D}$  con  $(0, s]$ . Adoptamos la notación mnemotécnica:

$$\begin{aligned} D(j) &= (d(j); d_{n(j)+1}(j), \dots, d_0(j); d'_0(j), \dots, d'_{m(j)+1}(j)); \\ \alpha(j) &:= \alpha_{D(j)}, \quad \beta(j) := \beta_{D(j)}, \text{ etc } \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sean  $D, E \in \mathcal{D}$ . Como  $T_D, R_E \leq_p x$ , tendremos  $T_D <_p R_E$  si, y sólo si  $\alpha'_D < \alpha_E$ . Para  $j \in (0, s]$ , definimos

$$\mathcal{D}(j) := \{D \in \mathcal{D} : T_D <_p R(j)\} = \{D \in \mathcal{D} : \alpha'_D < \alpha(j)\}$$

y  $\mathcal{D}(0) := \mathcal{D}$ . Notemos que  $\mathcal{D}(j) \subseteq (j, s]$  para todo  $j \in [0, s]$ .

**Afirmación.** Sea  $p \in [0, s]$  tal que  $\mathcal{D}(p)$  no es vacío y  $p' := \min \mathcal{D}(p)$ . Entonces  $\#\mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p') \leq 5$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que  $p' \geq 1$ . Sea  $D \in \mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p')$ . Entonces

$$\begin{aligned} D \in \mathcal{D}(p) &\text{ implica } \alpha_D \leq \alpha(p') \text{ y} \\ D \notin \mathcal{D}(p') &\text{ implica } \alpha'_D \geq \alpha(p'), \end{aligned}$$

es decir,

$$\alpha_D \leq \alpha(p') \leq \alpha'_D. \quad (3.11)$$

Esta es la única propiedad que usaremos de  $\mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p')$ . Sean  $D, E \in \mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p')$  con  $\alpha_D < \alpha_E$ . Supongamos que  $\alpha_E \leq \bar{\alpha}_D$  con el fin de obtener una contradicción. Ver Figura 3.11. Hay dos casos:

1. si existe  $i \in c_D \cap [\alpha_E, \bar{\alpha}_E]$ : supongamos  $\alpha'_D > \alpha'_E$ ; el otro caso es  $\alpha'_D < \alpha'_E$  (Lema 3.17) y es similar. Definamos  $w := x_{(\alpha_D, \alpha'_E)}$ . Sea  $I = 1, d'_2, \dots, d'_k, h$  la interpretación de  $w = d_{(\gamma_D + \alpha_D, \gamma_D + \alpha'_E)}$  heredada de  $I'_D$  e  $I' = h', e'_1, \dots, e'_{m_E+1}$  la interpretación de  $w = e_{(\gamma_E + \alpha_D, |e|)}$  heredada de  $I'_E$ . Como  $\alpha'_E < \alpha'_D$ ,  $F := (w; I; I')$  es d.i. maximal. Además,  $0 \in c_I$ ,  $\alpha_E - \alpha_D \in c_{I'}$  y  $\alpha_E - \alpha_D \in [0, |w|] \cap c_{I'}$ ,  $i - \alpha_D \in [\alpha_E - \alpha_D, |w|] \cap c_I$ . Se satisfacen las condiciones del Lema 3.11 y obtenemos una d.i.  $G = (g; I_G, I'_G)$  tal que  $g \leq_s w$ . Más aun, ó  $g = w_{(k, |w|)}$  con  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , con lo que  $g = (e_1)_{(\alpha_D + k, \alpha'_E)}$  y  $\alpha_D + k \in c_E$ , ó  $|g| \geq \langle W \rangle$ . Como  $|g| \leq |w| < |e|$ , en ambos casos tenemos que  $E \Rightarrow G$ .
2. si  $c_D \cap [\alpha_E, \bar{\alpha}_E] = \emptyset$ : entonces  $\bar{\alpha}_E < \bar{\alpha}_D$  (pues  $\bar{\alpha}_D \in c_D$ ). Más aun, existe  $j \in [2, m_D - 1]$  tal que  $e'_2 \cdots e'_{m_E-1} \sqsubset d'_j$ , lo que contradice la última condición de (3.5).

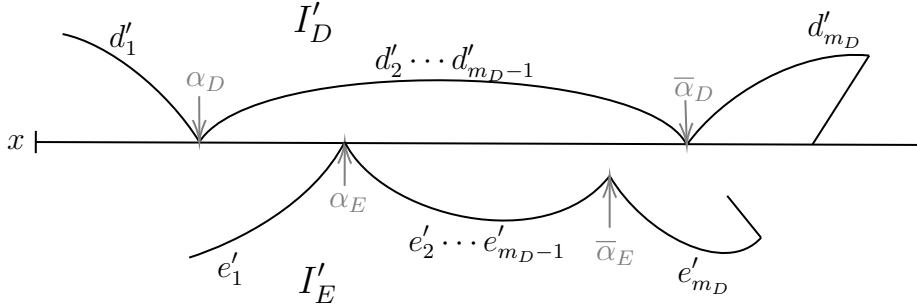


Figura 3.11: Si  $\alpha_E \leq \bar{\alpha}_D$ , entonces la situación se ve así. Hay dos casos: 1. si  $e'_2 \cdots e'_{m_D-1}$  “ve” algún corte de  $I'_D$ , entonces podemos construir una reducción fuerte. 2. si no ve cortes es porque  $e'_2 \cdots e'_{m_D-1}$  está contenido en alguno de los  $d'_j$ ,  $j \in [2, m_D - 1]$ , lo que contradice la condición (3.5).

Concluimos que

$$\bar{\alpha}_D < \alpha_E \text{ para todo } D, E \in \mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p') \text{ tales que } D > E. \quad (3.12)$$

Razonando por contradicción, supongamos que  $\#\mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p') \geq 6$ . Sean  $D(j_1) > D(j_2) > \dots > D(j_6) \in \mathcal{D}(p) \setminus \mathcal{D}(p')$ . Por (3.11) tenemos que  $\alpha'(j_l) \geq \alpha(j_6)$  para todo  $l \in [1, 6]$ . Luego, como  $d'_1 = x'$  y  $d'_{m_D} = z'$  para todo  $D \in \mathcal{D}$ ,

$$x_{(\bar{\alpha}(j_l), \alpha(j_6))} \leq_p x_{(\bar{\alpha}(j_l), \alpha'(j_l))} \leq_p z', \quad \forall l \in [1, 4], \quad (3.13)$$

$$x_{(\bar{\alpha}(j_1), \alpha(j_1))} \leq_s x_{(0, \alpha(j_1))} \leq_s x', \quad \forall l \in [5, 6]. \quad (3.14)$$

para todo  $l \in [1, 6)$ . Por otro lado, (3.12) implica que

$$\alpha(j_l) \leq \bar{\alpha}(j_l) < \alpha(j_{l+1}) \leq \bar{\alpha}(j_{l+1}), \quad \forall l \in [1, 6).$$

Sea  $w := x_{(\bar{\alpha}(j_1), \alpha(j_6))}$ . Ver Figura 3.12.

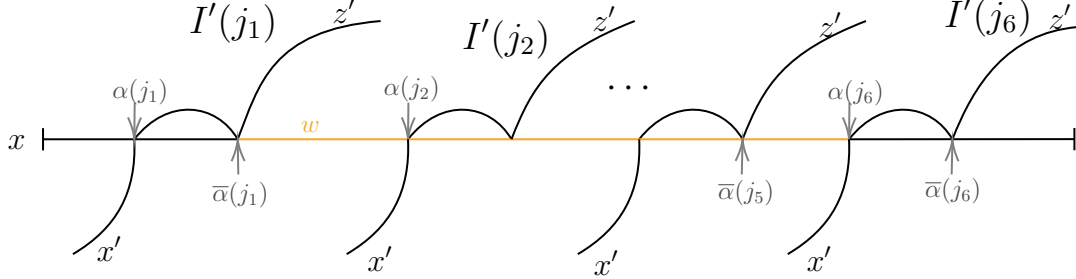


Figura 3.12: Gracias a (3.12), las ocurrencias de  $x'$  y  $z'$  de las interpretaciones  $I'(j_l)$ ,  $l \in [1, 6]$ , aparecen intercaladas. Con (3.11) obtenemos (3.13) y (3.14), lo que nos permite usar el Lema 3.10 sobre  $w$ .

Entonces podemos usar el Lema 3.10 sobre  $w$  para encontrar  $q \in \mathcal{A}^*$  tal que  $x_{(\bar{\alpha}(j_1), \alpha(j_6))} \leq_p q^\infty$  y  $\bar{\alpha}(j_l) = \bar{\alpha}(j_1)$  mód  $|q|$  para todo  $l \in [1, 4]$ . Esto implica que, para todo  $l \in [1, 4]$ , existe  $n(j_l) \geq 1$  tal que  $x_{(\bar{\alpha}(j_l), \bar{\alpha}(j_l))} = q^{n(j_l)}$  y que  $x_{(\bar{\alpha}(j_l), \alpha(j_6))} \leq_p q^\infty$ .

Escribamos  $x_{(\bar{\alpha}(j_l), |x|]} = q^n x_0$  y  $z' = q^m z'_0$ ,  $x_0, z'_0 \in \mathcal{A}^*$ , con  $n, m$  tan grandes como sea posible. Para  $\mathcal{R} \in \{=, <, >\}$ , sea

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}} = \{l \in [1, 4] : m \mathcal{R} n - n(j_l)\}.$$

Como  $\#\mathcal{I}_{=} \leq 1$ , ó  $\#\mathcal{I}_{>} \geq 2$  ó  $\#\mathcal{I}_{<} \geq 2$ . Miramos sólo el caso  $\#\mathcal{I}_{>} \geq 2$  pues el otro es similar.

1. si  $\#\mathcal{I}_{>} \geq 2$ : sean  $j_l < j_{l'} \in \mathcal{I}_{>}$ . Sea  $q_0 <_p q$  el prefijo común maximal de  $q$  y  $x_0$ . Para  $j \in \{j_l, j_{l'}\}$ ,  $m - 1 \geq n - n(j)$ , por lo que:

$$z' = q^{n-n(j)} q \cdot q^{m-1-(n-n(j))} z'_0,$$

$$x_{(\bar{\alpha}(j), |x'|]} = q^{n-n(j)} x_0.$$

Se sigue de esto que  $x_{(\bar{\alpha}(j), \alpha'(j))} = q^{n-n(j)} q_0$ . Como  $n(j_l) < n(j_{l'})$ , esto implica que  $x_{(\bar{\alpha}(j_{l'}), \alpha'(j_{l'}))} \leq_p x_{(\bar{\alpha}(j_l), \alpha'(j_l))}$  y el Lema 3.16 implica que  $\mathcal{D}$  es reducible.

□

**Afirmación.** Sea  $p \in [1, s]$  tal que  $\#\mathcal{D}(p) \geq 2$  y sean  $p' < p'' \in \mathcal{D}(p)$  sus dos elementos más pequeños. Entonces:

1.  $|R(p'')| < |R(p)R(p')^{-1}|$ .
2. Existe  $c \in W$ ,  $i \in (\beta(p), \beta(p''))$  tales que  $|c| \geq |R(p')|$  y  $x_{(i_0, i]} \leq_s c$ , donde  $i_0 = \max(i - |c|, \beta(1))$ .

Como  $R(j) = x'_{(\beta(j), |x|]}$  y  $p < p'$ ,  $R(p)R(p')^{-1}$  está bien definido. La condición  $|R(p'')| < |R(p)R(p')^{-1}|$  equivale a

$$|x'_{(\beta(p''), |x'|]}| < |x'_{(\beta(p), \beta(p'))}|. \quad (3.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $|R(p'')| \geq |R(p)R(p')^{-1}|$ . Entonces

$$|x_{(\alpha(p'), \alpha(p))}| \leq |x_{(0, \alpha(p''))}|. \quad (3.16)$$

Sea  $q \in \mathcal{A}^*$  tal que  $x_{(0, \alpha(p))} \leq_s q^{-\infty}$  con  $|q|$  mínimo. Notemos que  $x_{(0, \alpha(j))} \leq_s x'$  para todo  $j \in \{p, p', p''\}$ . Esto y (3.16) implican  $|q| \leq |x_{(\alpha(p'), \alpha(p))}| \leq |x_{(0, \alpha(p''))}|$ , por lo que podemos usar el Lema 3.9 sobre  $w := x_{(0, \alpha(p))}$  para concluir que  $\alpha(j) = \alpha(p) \pmod{|q|}$ , para todo  $j \in \{p, p', p''\}$ . En particular, existe  $\ell(j) \geq 1$  tal que  $x_{(\alpha(j), \alpha(p))} = q^{\ell(j)}$  para todo  $j \in \{p', p''\}$ . Además, si  $j \in \{p', p''\}$ , entonces  $j \in \mathcal{D}(p)$ , por lo que  $|T(j)| \leq |R(p)|$ . Luego,

$$S(j) = x_{(\alpha(j), \alpha'(j))} \leq_p x_{(\alpha(j), \alpha(p))} = q^{\ell(j)} \leq_p q^\infty,$$

para todo  $j \in \{p', p''\}$ . Esto implica que  $S(p') \leq_p S(p'')$  ó  $S(p'') \leq_p S(p')$ , y así el Lema 3.16 nos da que  $\mathcal{D}$  es reducible. Contradicción.

Probemos 2. ahora. Por un lado, como  $p' \in \mathcal{D}(p)$ ,

$$T(p') \leq_p R(p) = x'_{(\beta(p), |x'|]}. \quad (3.17)$$

Por otro lado, usando (3.15) podemos calcular:

$$\begin{aligned} |R(p')| &= |x'_{(\beta(p'), |x'|]}| = |x'_{(\beta(p'), \beta(p''))}| + |x'_{(\beta(p''), |x'|]}| \\ &< |x'_{(\beta(p'), \beta(p''))}| + |x'_{(\beta(p), \beta(p'))}| \\ &= |x'_{(\beta(p), \beta(p''))}|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De (3.17) y (3.18) se sigue que

$$R(p') <_p x'_{(\beta(p), \beta(p''))}. \quad (3.19)$$

Ahora, como  $|x'_{(\beta(p), |x'|]}| \leq |x|$ , la condición (ii) de la definición de d.i. secundaria implica que  $\beta'(p'') \leq \beta(p)$ . Entonces  $k := \beta(p) - \beta'(p'') \geq 0$  y, de (3.17), tenemos que  $T(p') = d(p'')_{(k, k+|T(p')|]}$ . Sea  $I = h, d_{l_1}(p''), \dots, d_{l_2}(p'')$ ,  $h'$  la interpretación de  $T(p') = d(p'')_{(k, k+|T(p')|]}$  heredada de  $I(p'')$  y sea  $I' = H, d'_1(p'), \dots, d'_{m(p')+1}$  la interpretación de  $T(p') = d(p')_{(\gamma(p'), |d(p')|]}$  heredada de  $I'(p')$ . Elijamos  $c = d_l(p'') = x'_{(i_0, i]}$ ,  $l \in [l_1, l_2]$ , tal que  $i_0 < \beta(p) + |R(p')|$ , con  $i_0$  tan grande como sea posible. De (3.19) es fácil ver que  $l_2 < m(p'')$ , por lo que  $i \leq \beta(p'')$ . Por otro lado, la maximalidad de  $i_0$  implica que  $i \geq \beta(p) + |R(p')|$ . Entonces,

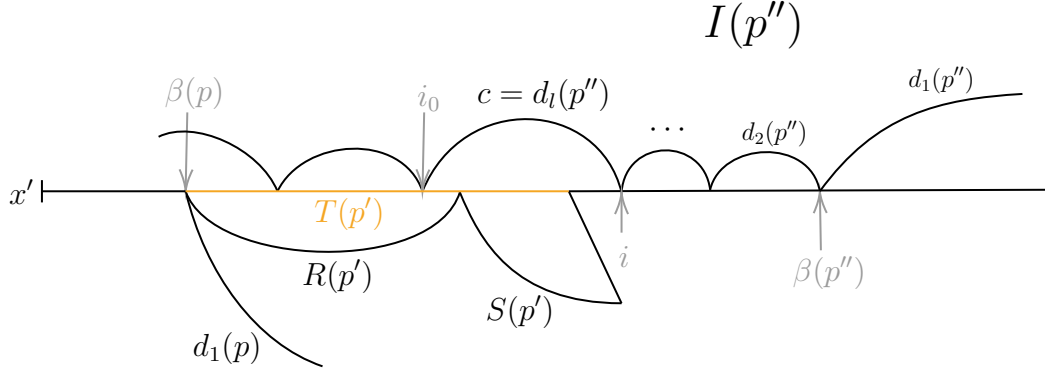
$$i \in [\beta(p) + |R(p')|, \beta(p'')] \subseteq (\beta(p), \beta(p'')). \quad (3.20)$$

Supongamos, con el objetivo de obtener una contradicción, que  $|c| < |R(p')|$ . Entonces  $i_0 \geq \beta(p) \geq \beta'(p'')$ , por lo que  $i_0 = i - |c|$ . Hay dos casos (ver figuras 3.13a, 3.13b):

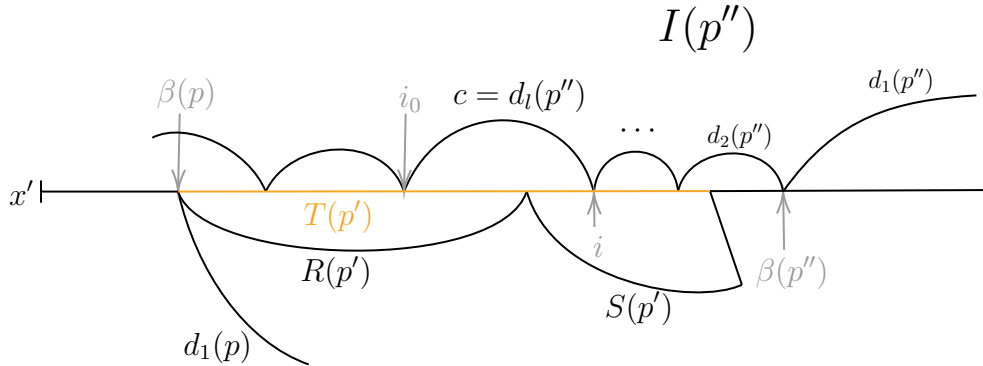
1. si  $\beta(p) + |T(p')| < i$ . Entonces  $E := (T(p'); I; I')$  es maximal y secundaria (pues  $|R(p')| > |c|$ ). En particular,  $|T(p')| \geq \langle W \rangle$ , por lo que  $D(p') \Rightarrow E$  (es claro que  $|T(p')| < |d(p')|$ ). Contradicción.

2. si  $\beta(p) + |T(p')| \geq i$ . Entonces  $i_0 - \beta(p) \in c_I$ ,  $|R(p')| \in c_{I'}$  y  $|R(p')| \in [i_0 - \beta(p), |T(p')|] \cap c_{I'}$ ,  $i - \beta(p) \in [|R(p')|, |T(p')|] \cap c_I$ . Luego, podemos usar el Lema 3.11 sobre la d.i. maximal  $E := (T(p'); I'; I)$  para obtener una d.i  $G = (g; I_G, I'_G)$  tal que  $g \leq_s T(p')$ . Más aun, ó  $g = T(p')_{(k, |w|]}$  con  $k \in c_I \cap c_{I'}$ , con lo que  $g = d_1(p')_{(k, \alpha'(p'))]}$  con  $k \in c_{D(p')}$ , ó  $|g| \geq \langle W \rangle$ . Como  $|g| \leq |T(p')| < |d(p')|$ , en ambos casos tenemos que  $D(p') \Rightarrow G$ . Contradicción.

Concluimos que  $|c| \geq |R(p')|$ . Como  $|x_{(\beta(1), |x'|]}| \leq |x'|$ , tenemos que  $\beta'(p'') \leq \beta(1)$  (es decir, la interpretación  $I(p'')$  parte antes de  $x_{\beta(1)}$ ), por lo que  $i_0 \leq \max(i - |c|, \beta(1))$ .



(a) Caso 1.  $S(p')$  no ve la posición  $i$ .



(b) Caso 2.  $S(p')$  ve la posición  $i$ .

Figura 3.13: Definimos  $c$  como el primer  $d_j(p'')$  que toca a  $R(p')$ . Este símbolo no es  $d_1(p'')$  pues (3.19) dice que  $R(p')$  no llega más allá de  $\beta(p'')$ . Además,  $|c| \geq |R(p')|$ , o si no podríamos construir una reducción fuerte de  $D(p')$ .

□

Sea  $p_0 = 0$ . Para  $i \geq 0$ , definimos inductivamente: si  $\#\mathcal{D}(p_i) \leq 1$ , ponemos  $p_{i+1} = s$ . En otro caso, sean  $p'_i < p''_i \in \mathcal{D}(p_i)$  los dos números más pequeños de  $\mathcal{D}(p_i)$  y sean  $c_i \in W$ ,  $r_i \in (\beta(p_i), \beta(p''_i)]$  los elementos que nos da el claim 3.4 al usarlo sobre  $\mathcal{D}(p_i)$ . Ponemos  $p_{i+1} := p'_i$ .



Notemos que  $\mathcal{D}(p_{i+1}) \subset \mathcal{D}(p_i)$ . Sea  $t \geq 0$  mínimo tal que  $p_t = s$ ; entonces

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=0}^{t-1} \mathcal{D}(p_i) \setminus \mathcal{D}(p_{i+1}).$$

El claim 3.4 implica que  $\#\mathcal{D} \leq 5t$ .

**Afirmación.**  $t \leq 8(\#W)$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $t > 8(\#W)$ . Entonces el Principio de Palomar nos da  $i_1 < \dots < i_5$  tales que

1.  $c := c_{i_1} = \dots = c_{i_5}$ .
2.  $i_{k+1} - i_k \geq 2$  para todo  $k \in [1, 5)$ .

Notemos que  $p'_{i_k} \leq p_{i_{k+1}}$  para todo  $k \in [1, 5)$ , por lo que

$$|c| \geq |R(p'_{i_1})| \geq |R(p_{i_2})|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x'_{(\beta(p_{i_k}), |x'|)} &\leq_p x, & k \in [2, 4], \\ x'_{(\beta(p_{i_2}), r_{i_k})} &\leq_s c, & k \in [4, 5]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como  $i_{k+1} - i_k \geq 2$ , tenemos que  $p'_{i_k} \leq p_{i_{k+1}}$ , por lo que  $r_{i_k} \in (\beta(p_{i_k}), \beta(p_{i_{k+1}})]$  para todo  $k \in [1, 5)$ . En particular,  $\beta(p_{i_2}) < \beta(p_{i_3}) < \beta(p_{i_4}) \leq r_{i_4} < r_{i_5}$ . Ver Figura 3.14. Esto y las ecuaciones (3.21) nos permiten usar el Lema 3.10 sobre  $R(p_{i_2}) = x'_{(\beta(p_{i_2}), |x'|)}$ : sea  $q \in \mathcal{A}^*$  tal que  $R(p_{i_2}) \leq q^\infty$ , con  $|q|$  mínimo; entonces  $\beta(p_{i_k}) = \beta(p_{i_2}) \pmod{|q|}$  para todo  $k \in [2, 4]$ . Para  $k \in [3, 4]$ , sea  $\ell(p_{i_k}) \geq 1$  tal que  $x'_{(\beta(p_{i_2}), \beta(p_{i_k}))} = q^{\ell(p_{i_k})}$ . Escribamos  $q = q_0 q_1$  de manera que  $R(p_{i_2}) = q^\ell q_0$ . Tenemos entonces, para  $k \in [3, 4]$ ,

$$R(p_{i_k}) = \left( x'_{(\beta(p_{i_2}), \beta(p_{i_k}))} \right)^{-1} \cdot x'_{(\beta(p_{i_2}), |x'|)} = q^{-\ell(p_{i_k})} \cdot R(p_{i_2}) = q^{\ell - \ell(p_{i_k})} q_0. \tag{3.22}$$

Luego

$$\begin{aligned} S(p_{i_k}) &= R(p_{i_k})^{-1} T(p_{i_k}) \\ &\leq_p R(p_{i_k})^{-1} R(p_{i_2}) && \text{pues } p_{i_k} \in \mathcal{D}(p_{i_2}) \\ &\leq_p (q^{\ell - \ell(p_{i_k})} q_0)^{-1} \cdot q^\infty && \text{por (3.22)} \\ &= (q_1 q_0)^\infty. \end{aligned}$$

Esto implica que  $S(p_{i_3}) \leq_p S(p_{i_4})$  ó  $S(p_{i_4}) \leq_p S(p_{i_3})$  y el Lema 3.16 nos da una reducción; contradicción.  $\square$

Concluimos que  $\#\mathcal{D} \leq 5 \cdot 8(\#W)$ .

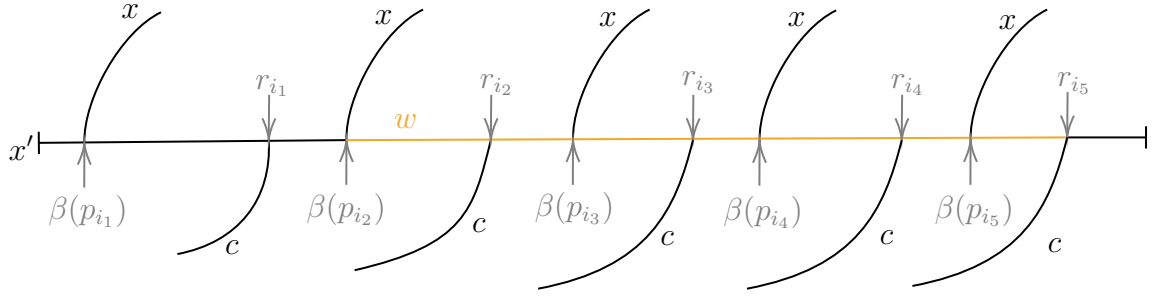


Figura 3.14: Por un lado, aparecen los símbolos  $x$  de las interpretaciones  $I(p_i)$ . Por otro lado, aparecen los símbolos  $c$  de la construcción de los  $p_i$ . Preocupándonos de que  $c$  sea lo suficientemente grande y de otros detalles técnicos podemos usar el Lema 3.10 para que algunos de los  $\beta(p_{i_k})$  “sincronicen” y así poder construir una reducción fuerte con el Lema 3.16.

□

Ya podemos probar la Proposición 3.3.

DEMOSTRACIÓN (DE LA PROPOSICIÓN 3.3). Para cada elección de  $x, x' \in W$  tal que  $\mathcal{P}_x^{x'}$  es no vacío, el Lema 3.14 nos da un singleton  $\{D(x, x')\} \subseteq \mathcal{P}_{x'}^x$ . Para cada elección de  $x, y, x', z' \in W$  y  $u \in W \cup \{1\}$ , sea  $\mathcal{S}(x, y, x', z', u) \subseteq \mathcal{S}_{x', z'}^{y, x}(u)$  irreducible de tamaño máximo. Sea  $\mathcal{T}$  la unión de todos estos conjuntos. Entonces:

Para toda d.i.  $D$  primaria o secundaria,

$$\text{ó } D \text{ tiene reducción fuerte ó existe } E \in \mathcal{T} \text{ tal que } D \rightarrow E. \quad (3.23)$$

Sea

$$B = \{zd : D \in \mathcal{T}, |d| < \langle W \rangle, z \in W\} \cup \{d_{(|d| - \langle W \rangle, |d|)} : D \in \mathcal{T}, |d| \geq \langle W \rangle\}.$$

Tenemos  $\langle B \rangle \geq \langle W \rangle$  y, por el Lema 3.18,

$$\#B \leq ((\#W)^2 + 40(\#W + 1)^6) \cdot (\#W) \leq 41(\#W)^7.$$

Sólo falta probar 3. Sean  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  asintóticos y factorizables sobre  $W$ . Entonces el Lema 3.12 nos da una d.i.  $D(0) = (d(0), I(0), I'(0))$  primaria o secundaria tal que  $d(0) = x_{(l, 0]}$  (aquí volvemos a usar la notación mnemotécnica de (3.10)), donde  $l$  es un corte de la factorización de  $x$  ó  $y$ .

Sea  $D(0) \Rightarrow D(1) \Rightarrow \dots$  una cadena de reducciones fuertes que parte con  $D(0)$  y de largo máximo. Como  $|d(i+1)| < |d(i)|$ , esta cadena es finita y termina en un elemento  $D(k-1)$ ,  $k \geq 1$ . Como  $D(k-1)$  no tiene reducción fuerte, (3.23) implica que existe  $D(k) \in \mathcal{T}$  tal que  $D(k-1) \rightarrow D(k)$ . Si  $|d(k)| \geq \langle W \rangle$ , entonces  $d(k)_{(|d(k)| - \langle W \rangle, |d(k)|)} \in B$  y de las definiciones de reducción tenemos

$$d(k)_{(|d(k)| - \langle W \rangle, |d(k)|)} \leq_s d(k-1) \leq_s \dots \leq_s d(0) \leq_s x_{(-\infty, 0]}.$$

Ahora, si  $|d(k)| < \langle W \rangle$ , sea  $D(i)$  con  $i \in [0, k]$  mínimo tal que  $|d(i)| < \langle W \rangle$ . Notemos que  $D(i)$  no puede ser secundaria; de hecho es primaria y  $n_{D(i)} = m_{D(i)} = 1$ . En particular, 0 es

el único corte de  $D(i)$ . Es fácil ver entonces que  $D(i)$  no puede tener reducción fuerte, por lo que  $i \in [k-1, k]$ . Más aun, se sigue de estas propiedades que  $d(i) = d(k)$ . Ahora miramos dos casos.

1. Si  $i = 0$ , entonces, como  $l$  es corte de  $x$  ó  $y$ , existe  $z \in W$  tal que  $x_{(l-|z|, l]} = z$ , con lo que  $zd(i) = zd(0) = x_{(l-|z|, 0]} \leq_s x_{(-\infty, 0]}$  y  $zd(i) = zd(k) \in B$ .
2. Si  $i > 0$ , entonces  $i-1 \geq 0$  y  $D(i-1)$  se reduce fuertemente a  $D(i)$ . Como  $|d(i)| < \langle W \rangle$ , esta reducción es de la forma  $d(i) = d_1(i-1)_{(p, |d_1(i-1)|]}$ , con  $p$  un corte de  $D(i-1)$ . Más aun, la minimalidad de  $i$  implica que  $|d(i-1)| \geq \langle W \rangle$ , por lo que existe  $z \in W$  tal que  $zd(i) \leq_s d(i-1)$ . Luego

$$zd(i) \leq_s d(i-1) \leq_s \cdots \leq_s d(0) \leq_s x_{(-\infty, 0]}.$$

Como  $zd(i) = zd(k) \in B$ , concluimos.

□

# Conclusión

En el Capítulo 3 probamos que todo sistema  $(X, T)$  de rango finito (RF) tiene un grupo de automorfismos virtualmente  $\mathbb{Z}$ . La demostración se basó en, por un lado, la existencia de una acción de  $\text{Aut}(X, T)/\langle T \rangle$  en el conjunto de clases asintóticas y, por otro lado, de un análisis cuidadoso de la combinatoria de palabras que surge en los pares asintóticos. Lo primero es algo general de subshifts minimales, mientras que lo segundo depende de la estructura de rango finito de  $(X, T)$ ; más precisamente, el resultado central de este análisis, la Proposición 3.3, sólo utiliza la estructura “por bloques de palabras” de los puntos de  $X$ . Una situación similar ya se había visto en la demostración de expansividad de los sistemas RF de Downarowicz y Maass [6], donde la parte central de la prueba se basa en un lema combinatorial (el llamado “Lema de Infección”). Cabe mencionar que en [5] se observa que el Lema de Infección es consecuencia de un teorema profundo de combinatoria de palabras: el Teorema de la Factorización Crítica.

En el Capítulo 2 mostramos que, bajo hipótesis genéricas, el número de factores de un sistema de rango finito es finito salvo composiciones con el shift y conjugaciones, y esta demostración resulta ser una localización de análisis clásicos de palabras de retorno. Es importante destacar que estos análisis sólo usan propiedades de recurrencia del sistema y no su estructura RF, a diferencia de lo hecho en el Capítulo 3, que estudia directamente la combinatoria de rango finito.

Esto sugiere que parte de la rigidez de los sistemas RF es que la combinatoria de palabras que presentan, de aparente enorme complejidad, tiene ciertas restricciones poco entendidas que la vuelven controlada(cambiar?). Esto va a la par de ciertas conjeturas sobre RF; por ejemplo, ¿un factor simbólico de RF es RF? Dado que el rango controla el número de medidas ergódicas, el número de automorfismos y otras propiedades dinámicas, es muy esperable que la respuesta sea afirmativa, pero sin fuertes propiedades de recurrencia que controlen la combinatoria de palabras, los intentos de demostración fallan rápidamente al tratar de construir un diagrama de Bratteli del factor.

Esperamos, entonces, que las ideas desarrolladas en esta tesis ayuden a entender mejor esta combinatoria y a la clase RF. Una posible dirección de investigación es saber si la conjetura antes mencionada, sobre si un factor simbólico de un sistema RF es RF, es cierta o no. Cabe destacar que este problema es esencialmente equivalente al siguiente:

**Problema.** Sea  $K \geq 2$  y  $X$  un subshift con alfabeto  $\mathcal{A}$ . Supongamos que existen  $W_1, W_2, \dots$ , conjuntos de palabras en  $\mathcal{A}$ , tales que:

1. Cada  $W_n$  tiene a lo más  $K$  elementos.
2. Los largos mínimos  $\langle W_n \rangle$  tienden a infinito.
3. Todo  $x \in X$  es factorizable en  $W_n$ , para todo  $n \geq 1$ .

¿Es  $X$  un sistema de rango topológico finito?

Una respuesta afirmativa a este problema significaría que si un subshift tiene una estructura “por bloques de palabras” (es decir, que se cumple 1, 2 y 3), entonces ya es posible construir en  $X$  otra estructura por bloques de palabras que además sea reconocible.

# Bibliografía

- [1] F. Arbulú. Contribución al estudio de valores propios y mezcla débil en transformaciones de intercambios de intervalos y sistemas geométricos afines, 2018.
- [2] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, and B. Solomyak. Invariant Measures on Stationary Bratteli Diagrams. *arXiv e-prints*, page arXiv:0812.1088, December 2008.
- [3] E. Bilotta. *Cellular Automata and Complex Systems: Methods for Modeling Biological Phenomena: Methods for Modeling Biological Phenomena*. IGI Global research collection. Medical Information Science Reference, 2010.
- [4] S. Donoso, F. Durand, A. Maass, and S. Petite. On automorphism groups of low complexity subshifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10 2014.
- [5] S. Donoso, F. Durand, A. Maass, and S. Petite. Finite topological rank minimal systems versus s adic subshift. *In preparation*, 2020.
- [6] T. Downarowicz and A. Maass. Finite-rank bratteli–vershik diagrams are expansive. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28(3):739–747, 2008.
- [7] F. Durand. A characterization of substitutive sequences using return words. *Discrete Mathematics*, 179(1):89 – 101, 1998.
- [8] F. Durand. Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors. *arXiv e-prints*, page arXiv:0807.4430, Jul 2008.
- [9] F. Durand. *Combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems*, page 324–372. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2010.
- [10] F. Durand, B. Host, and C. Skau. Substitutional dynamical systems, bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19(4):953–993, 1999.
- [11] F. Durand and J. Leroy. Decidability of the isomorphism and the factorization between minimal substitution subshifts. *arXiv e-prints*, page arXiv:1806.04891, Jun 2018.
- [12] N. J. Fine and H. S. Wilf. Uniqueness theorems for periodic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16(1):109–109, January 1965.
- [13] R. Herman, I. Putnam, and C. Skau. Ordered bratteli diagrams, dimension groups and

topological dynamics. *International Journal of Mathematics*, 03, 01 2012.

- [14] B. Host. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6(4):529–540, 1986.
- [15] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [16] M Morse and G Hedlund. Symbolic dynamics ii. sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62(1):1–42, 1940.
- [17] B Mossé. Puissance de mots et reconnaissabilité des points fixes d’une substitution. *Theoretical Computer Science*, 99(2):327 – 334, 1992.
- [18] M. Queffélec. *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [19] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1982.