



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

PROCESOS GAUSSIANOS Y ANÁLISIS BAYESIANO, APLICADOS A LA DETECCIÓN
DE DAÑOS EN PLACAS DE MATERIALES COMPUESTOS.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL.

ANA-CATALINA ALEJANDRA VILLALOBOS CONTARDO

PROFESOR GUÍA:

RAFAEL OMAR RUIZ GARCÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

JUAN F. BELTRÁN MORALES

VIVANA MERUANE NARANJO

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR FONDECYT

SANTIAGO DE CHILE

2020

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE:** Ingeniera Civil
POR: Ana-Catalina A. Villalobos Contardo
FECHA: 15 de Abril de 2020
PROFESOR GUÍA: Rafael Ruiz García

PROCESOS GAUSSIANOS Y ANÁLISIS BAYESIANO, APLICADOS A LA DETECCIÓN DE DAÑOS EN PLACAS DE MATERIALES COMPUESTOS

Las placas de materiales compuestos son placas formadas por la unión de dos o más materiales distintos, lo que le otorga propiedades especiales a la estructura. Este trabajo de título se centra en un tipo particular de placas de materiales compuestos, conocidas también como estructuras tipo sándwich, las que se componen de un núcleo de celdas, generalmente hexagonales (“panal de abeja”), en medio de dos capas externas, fabricadas con materiales livianos. Estas placas presentan importantes beneficios estructurales, ya que tienen bajo peso y alta rigidez, pero se ven afectadas por el desprendimiento de sus capas. Por lo tanto, resulta útil poder determinar las zonas de daño asociado al desprendimiento, antes de que dicho daño pase a ser una falla.

El desprendimiento de capas en las placas de materiales compuestos afecta las propiedades mecánicas de la estructura, por lo que se han desarrollado métodos de detección de daño basados en el análisis de las propiedades de los modos de vibración de las placas. Estos métodos trabajan contrastando las propiedades de una placa dañada con una placa sana.

El método de *gapped smoothing* utiliza diferencias centrales para estimar curvaturas de modos de vibrar asociadas a placas sanas, y compararlas con las de modos de vibrar medidos en placas que se crean dañadas, pero el uso de métodos numéricos para esta estimación favorece la propagación de errores. Por su parte, los modos de vibrar medidos de placas que se crean dañadas tendrán ruido asociado a la medición; en la actualidad existen metodologías que proponen el uso de Procesos Gaussianos para limpiar este ruido, pero los hiperparámetros que definen estos procesos deben ser escogidos de forma manual y arbitraria.

En el presente trabajo se propone el uso de modelos regresivos basados en Procesos Gaussianos para obtener modos de vibración libres de ruido, utilizando análisis bayesiano para la determinación automática de los hiperparámetros de cada proceso. Posteriormente, modificando los hiperparámetros determinados es posible estimar modos de vibración asociados a placas sin daño. El uso de Procesos Gaussianos permite que las curvaturas de todos los modos de vibración en estudio puedan ser calculadas como la segunda derivada analítica de la función de autocorrelación del proceso, evitando así el uso de métodos numéricos. Las diferencias entre las curvaturas de ambos modos corresponderán a los índices de daño de cada placa. Finalmente, utilizando algoritmos de agrupación se pueden identificar las zonas de daño.

La efectividad de la metodología propuesta se comprueba mediante simulaciones numéricas y pruebas experimentales, contrastando las zonas de daño identificadas utilizando la metodología con las reales, que se tienen como datos de referencia. Tanto en las simulaciones numéricas como en las pruebas experimentales se obtienen resultados favorables.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia por todo el amor que me entregan. A todos mis tíos y primos por su apoyo, en particular a mi tía Paulina que hizo posible mi estadía en Santiago. Y a los más importantes, mi mamá y mis abuelos, por todo lo que han hecho y hacen por mi día a día, y que es imposible enumerar en sólo un párrafo (o en una página, o en una memoria entera).

Además, quiero dar las gracias a todos los amigos que me han acompañado en este camino. Especialmente a Catalina, Claudia, Karol y Nicole, por todo su cariño, y por ayudarme a sobrevivir la vida universitaria. De igual forma, gracias a Fernanda, Javiera y Natalia, por ayudarme a recordar que hay vida fuera de la universidad también.

La realización de este trabajo no hubiese sido posible sin el apoyo del profesor Rafael Ruiz, quien fue un excelente guía a lo largo de este proceso; gracias por su confianza y paciencia. También agradezco a la profesora Viviana Meruane, quien compartió los resultados obtenidos en sus investigaciones y siempre estuvo dispuesta responder dudas e inquietudes. Asimismo, quiero agradecer al profesor J. Felipe Beltrán, uno de los primeros profesores que tuve en el departamento de ingeniería civil, por acceder a ser parte de esta comisión.

Finalmente, es necesario agradecer a FONDECYT por la financiación parcial de este trabajo, mediante el proyecto FONDECYT 11180812, y el proyecto FONDECYT 1170535.

Tabla de contenido

1	Introducción	1
1.1	Objetivos	3
1.1.1	Objetivos generales.....	3
1.1.2	Objetivos específicos	3
1.2	Alcances y resultados esperados	3
2	Antecedentes	4
2.1	Procesos Gaussianos y Análisis Bayesiano	4
2.1.1	Generalidades de los Procesos Gaussianos.	4
2.1.2	Análisis Bayesiano en el entrenamiento de Procesos Gaussianos.....	6
2.2	Placas de Materiales Compuestos.....	8
2.2.1	Índices de daño en placas de materiales compuestos	9
3	Metodología propuesta.....	12
3.1	Datos de entrada.....	12
3.2	Filtración de modos de vibrar	13
3.3	Estimación de curvaturas y suavizado	14
3.4	Evaluación de daño	15
3.4.1	Índices de daño	15
3.4.2	Identificación de zonas dañadas	15
3.5	Indicador de confiabilidad	16
3.6	Resumen del algoritmo	17
4	Implementación.....	18
4.1	Instalación experimental	18
4.2	Simulaciones numéricas	20
4.3	Funciones de covarianza o <i>kernels</i>	21

4.4	Métricas de validación	22
5	Análisis de resultados.....	24
5.1	Selección de <i>kernel</i> , factor de suavización y métrica de validación.....	24
5.2	Filtro Gaussiano sobre Índices de Daño	27
5.3	Confiabilidad de la clasificación.....	29
5.4	Variación de <i>SPI</i> respecto a tamaños de zonas de daño	32
6	Conclusiones	36
	Bibliografía.....	37
	Anexos	39
	Anexo A	39
	Anexo B	40
	Anexo C	41
	Anexo D.....	42

Índice de Tablas

Tabla 1: Zonas daño en placas para pruebas experimentales. 18

Tabla 2: Valores promedio de SPI de placas de pruebas experimentales, para diferentes $kernels$, y distintos factores de suavización β 24

Tabla 3: Valores promedio de IoU de placas de pruebas experimentales, para diferentes $kernels$, y distintos factores de suavización β 25

Tabla 4: SPI promedio, y su variación, para diferentes factores de suavización β 25

Anexo B

Tabla B 1: Valores de SPI para $kernel$ SE, para diferentes valores de β 40

Tabla B 2: Valores de SPI para $kernel$ RQ; para diferentes valores de β 40

Tabla B 3: Valores de SPI para $kernel$ γ -exponencial, para diferentes valores de β 40

Anexo C

Tabla C 1: Valores de IoU para $kernel$ SE, para diferentes valores de β 41

Tabla C 2: Valores de IoU para $kernel$ RQ, para diferentes valores de β 41

Tabla C 3: Valores de IoU para $kernel$ γ -exponencial, para diferentes valores de β 41

Anexo D

Tabla D 1: Porcentajes de clasificación acertada considerando diferentes umbrales de daño. 42

Índice de Figuras

Figura 1: Esquema de la composición de una placa de materiales compuestos.....	8
Figura 2: Primeros modos de vibrar de una placa sana (a) y de una placa dañada (b).....	10
Figura 3: Curvaturas asociadas a los primeros modos de vibración de una placa sana (a) y de una placa dañada (b).....	10
Figura 4: Esquema de la instalación experimental.	19
Figura 5: Representación gráfica de la vista lateral de placas en la simulación numérica: (a) es una placa sin daño y (b) es una placa con una zona de desprendimiento de capas.....	20
Figura 6: Placas ejemplos para ilustrar funcionamiento de métricas de validación.	23
Figura 7: Ilustración del beneficio de aplicar filtro Gaussiano sobre índices de daño, sobre placa de simulación numérica.....	27
Figura 8: Ilustración del beneficio de aplicar filtro Gaussiano sobre índices de daño, sobre placa experimental.	28
Figura 9: Índice de confiabilidad R para todos los casos estudiados.	29
Figura 10: Matriz de confusión.	30
Figura 11: Probabilidad de clasificación acertada según el umbral de daño considerado.	30
Figura 12: Probabilidad de clasificación acertada según el umbral de daño considerado, diferenciando entre placas con o sin daño en su condición real.....	31
Figura 13: Variaciones de SPI según tamaño de zona de daño.	32
Figura 14: Resultados de simulaciones numéricas seleccionadas, mencionadas en Figura 11.....	33
Figura 15: Resultados experimentales.....	34
Anexo D	
Figura D 1: Matrices de confusión para diferentes umbrales de daño.	43

1 Introducción

La detección oportuna de daños es de fundamental importancia en las estructuras, ya que permite que estos daños puedan ser reparados antes de que se produzcan fallas de mayor gravedad. Existen diferentes metodologías para la detección y evaluación de daño estructural, dependiendo del tipo de estructura y la composición de esta. Este trabajo de título se centra en la detección de daños en placas de materiales compuestos.

La denominación de placa de materiales compuestos puede ser aplicada a cualquier placa conformada la unión de distintos materiales, pero este trabajo en particular estudia placas que se componen de un núcleo de celdas, generalmente hexagonales (“panal de abeja”), en medio de dos capas exteriores fabricadas con materiales livianos, como por ejemplo aluminio; es por esto que se les conoce como estructuras tipo sándwich. Los beneficios estructurales de esta clase de placas están asociados a su bajo peso y alta rigidez, por lo que su uso ha ido en aumento en diferentes industrias. El problema es que, debido al desgaste por uso, a impactos fuertes, o a problemas de fabricación, pueden sufrir el desprendimiento de sus capas.

Los daños por desprendimiento de capas alteran las propiedades mecánicas de las placas de materiales compuestos. Esto ha llevado a desarrollar métodos de detección de daño basados en determinación y análisis de modos de vibración, que trabajan contrastando las propiedades de los modos de placas dañadas, como por ejemplo sus curvaturas, con las mismas propiedades obtenidas de modos de placas sanas. Por lo tanto, estos métodos de detección requieren tanto de datos experimentales de modos de vibración de placas dañadas, como de una línea de referencia asociada a placas sin daño.

Los datos obtenidos a partir de las mediciones experimentales tienen asociado ruido, propio de los instrumentos de medición. Para solucionar este problema, en trabajos recientes se ha propuesto representar los modos de vibración como modelos regresivos basados en Procesos Gaussianos. Esto permite limpiar el ruido y además obtener las derivadas de los modos de forma analítica. Una de las dificultades que presenta esta solución es que los hiperparámetros que describen cada Proceso Gaussiano deben ser determinados de forma manual y arbitraria.

Para tener una línea de referencia respecto a los modos de vibración en placas sanas, sin tener datos experimentales, se utiliza un método llamado *gapped smoothing*, que permite obtener aproximaciones de curvaturas suavizadas a partir de modos dañados, las que pueden ser asociadas a supuestos modos sin daño, utilizando diferencias centrales. Las curvaturas suavizadas se comparan entonces a las curvaturas reales de los modos dañados medidos, para así obtener un índice de daño. El problema es que la utilización de métodos numéricos para la estimación de curvaturas favorece la propagación de errores.

Como solución a los problemas mencionados anteriormente, se plantea la hipótesis de que los modos de vibración de las placas pueden ser representados por modelos regresivos basados en Procesos Gaussianos cuyos hiperparámetros son determinados de forma automática mediante análisis bayesiano. Esto permitiría, además de automatizar el proceso, que los modos de vibración correspondientes a placas sanas sean representados también como Procesos Gaussianos, mediante una ligera modificación a los hiperparámetros determinados para cada proceso. De esta forma, las derivadas de los modos de vibración tanto de placas sanas como dañadas pueden ser calculadas de forma analítica, sin tener que recurrir a métodos numéricos.

Este trabajo de título pone a prueba la hipótesis planteada, mediante la propuesta de una metodología basada exclusivamente en Procesos Gaussianos que permite detectar zonas de desprendimiento de capas en placas de materiales compuestos. Para comprobar su efectividad, se realizan simulaciones numéricas y pruebas experimentales en estructuras tipo sándwich con zonas dañadas, y se contrasta el daño detectado a través de la metodología con el daño real de las placas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos generales

El objetivo general de este trabajo de título es desarrollar una metodología que sea capaz de detectar el daño en placas de materiales compuestos, en específico en estructuras tipo sándwich, utilizando exclusivamente Procesos Gaussianos.

1.1.2 Objetivos específicos

- Automatizar el proceso de identificación de hiperparámetros de Procesos Gaussianos, mediante el uso de análisis bayesiano.
- Determinar curvaturas de modos de vibración utilizando modelos regresivos autoajustables basados en Procesos Gaussianos.
- Crear un índice que cuantifique la calidad de la metodología de detección de daño, considerando factores como el tamaño, la posición y la forma de la zona de daño identificada y cómo se comparan con la zona de real de daño.
- Validar metodología propuesta para detección de daños en mediante simulaciones numéricas y pruebas experimentales.

1.2 Alcances y resultados esperados

Este trabajo contempla el desarrollo teórico y la implementación de una metodología capaz de determinar daños en placas de materiales compuestos, utilizando Procesos Gaussianos y análisis bayesiano. La implementación se realiza a través de simulaciones numéricas y también de pruebas experimentales. Las simulaciones numéricas contemplan 1000 modelos de placas de estructuras compuestas con diferentes escenarios de daño, mientras que las pruebas experimentales consisten en 4 placas construidas con distintos escenarios de daño. En ambos, se busca detectar las zonas de daño y contrastarlas con el daño real para comprobar la efectividad de la metodología propuesta.

2 Antecedentes

Este capítulo se divide en dos grandes partes: Procesos Gaussianos y placas de materiales compuestos. En la primera parte se explica de manera general qué es un Proceso Gaussiano, para introducir a continuación como pueden ser entrenados de forma automática utilizando análisis bayesiano. La segunda parte consiste en la revisión de antecedentes sobre placas de materiales compuestos, y cómo puede realizarse evaluación de daño sobre estas.

2.1 Procesos Gaussianos y Análisis Bayesiano

2.1.1 Generalidades de los Procesos Gaussianos.

Un Proceso Gaussiano (GP, por sus siglas en inglés) es una clase de proceso estocástico. De acuerdo a Williams y Rasmussen [1], un proceso estocástico es una generalización de una distribución de probabilidad (que describe una variable aleatoria de dimensiones finitas) a una función; en particular, un GP corresponda a una distribución normal o Gaussiana sobre una función.

Suponiendo que se tiene un set de datos de entrenamiento $\hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$, donde $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{x}}_1 \ \dots \ \hat{\mathbf{x}}_n]$ es una matriz de n -por- m , que contiene entradas m -dimensionales para n observaciones, y $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}_1 \ \dots \ \hat{y}_n]^T$ es un vector de n -por- 1 que contiene las respectivas observaciones de salida. Asumiendo que las observaciones se obtienen a partir de procesos con ruido

$$\hat{y} = f(\hat{\mathbf{x}}) + e \quad (1)$$

donde e es una variable aleatoria de distribución normal (Gaussiana) con media cero y varianza σ_n^2 que representa el ruido. Si se tiene una entrada de prueba \mathbf{x} , y condicionado a los datos de entrenamiento $\hat{\mathbf{D}}$, un GP puede definir una distribución Gaussiana predictiva sobre la salida y como

$$p(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}) \sim N(\mu, \Sigma) \quad (2)$$

donde μ es el valor medio del proceso

$$\mu = E(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}) = \mathbf{k}^T (\mathbf{K} + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{Y}} \quad (3)$$

y Σ es su covarianza

$$\Sigma = \text{cov}(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}) = r - \mathbf{k}^T (\mathbf{K} + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{k} \quad (4)$$

definidos a través de una función de covarianza o *kernel* $k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_p)$ que indica las correlaciones entre pares de puntos de la entrada, por ejemplo entre \mathbf{x}_s y \mathbf{x}_p . Basado en esto, r se define como el *kernel* evaluado en la nueva entrada \mathbf{x} , tal que $r = k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, mientras que \mathbf{k} es un vector de largo n definido por los valores del *kernel* entre \mathbf{x} y cada observación $\hat{\mathbf{x}}_i$, tal que $k_i = k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_i)$; de forma similar, \mathbf{K} es una matriz de n -por- n definida por el *kernel* evaluado entre las observaciones de entrada $K_{ij} = k(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j)$.

La elección del *kernel* depende de la aplicación, sin embargo, una de las más usadas es la conocida como exponencial al cuadrado (SE, *squared exponential*):

$$k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_p) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_p)^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_p)\right) \quad (5)$$

donde σ_f^2 corresponde a la varianza de la señal, que controla la incerteza de las predicciones en áreas donde la densidad de datos de entrenamiento es baja. La matriz \mathbf{W} contiene largos de correlación del proceso, de modo tal que $\mathbf{W} = \text{diag}[1/L_1^2 \ \cdots \ 1/L_m^2]$; estos largos reflejan la suavidad relativa del GP en las diferentes dimensiones de la entrada, es decir, a mayores largos de correlación el GP tiene un comportamiento más suave.

En general, los largos de correlación L , la varianza de la señal σ_f^2 , y la varianza del ruido σ_n^2 se conocen como hiperparámetros, que deben ser seleccionados basándose en el comportamiento que se desea que tenga el GP. Por simplicidad, de aquí en adelante los hiperparámetros se denotarán como $\boldsymbol{\theta}$, por lo tanto para el *kernel* presentado en la Ec.(5) los hiperparámetros serán $\boldsymbol{\theta} = [L_1 \ \cdots \ L_m \ \sigma_f^2 \ \sigma_n^2]$.

Existen diferentes familias de funciones de covarianza, y cada una de estas queda determinada por diferentes hiperparámetros; por lo tanto, para elegir el *kernel* apropiado para cada aplicación es necesario escoger qué familia de funciones es la adecuada, y determinar los valores de los hiperparámetros de la función escogida.

2.1.2 Análisis Bayesiano en el entrenamiento de Procesos Gaussianos

Tal como fue establecido anteriormente, un GP es una distribución de probabilidad para la salida de una función, conociendo la entrada y un set de datos de entrenamiento (Ec.(2)); sin embargo, es conveniente explicitar que la salida también depende de hiperparámetros θ , por lo que un GP puede ser expresado como $p(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}, \theta)$, es decir, la función de distribución de probabilidad (PDF) de la salida, conociendo la entrada, los datos de entrenamiento y los hiperparámetros.

Se puede asumir que las observaciones son independientes entre sí, y por lo tanto para todo el set de datos se tiene

$$p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}}) = \prod_{i=1}^n p(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{D}}, \theta) \quad (6)$$

La PDF de θ puede calcularse utilizando el Teorema de Bayes; recordando la formulación más general de la Regla de Bayes se tiene que

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{\int p(B|A)p(A)dA} \quad (7)$$

Luego, aplicando la Ec.(7) a θ es posible obtener

$$p(\theta|\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}) = \frac{p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}})p(\theta)}{\int p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}})p(\theta)d\theta} \quad (8)$$

En la Ec.(8), $p(\theta)$ se conoce como *prior* y representa la distribución de probabilidad que se presume tendrá θ sin conocer los datos de entrenamiento; $p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}})$ es la función de verosimilitud o *likelihood* y es equivalente a la PDF descrita en la Ec.(6); y $p(\theta|\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$ es la PDF a *posterior* de θ , es decir la distribución de probabilidad estimada una vez que se conocen los datos de entrenamiento. Finalmente, $\int p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}})p(\theta)d\theta$ se conoce como *evidencia*, pero no es más que una constante de normalización.

Los valores de θ que mejor se ajusten al set de datos harán que el *posterior* (Ec.(8)) sea máximo, lo que conduce al estimador de máximo a posterior (MAP),

$$\theta^{MAP} = \arg \max \left[\ln \left(p(\hat{\mathbf{Y}}|\theta, \hat{\mathbf{X}})p(\theta) \right) \right] \quad (9)$$

Es importante notar que θ^{MAP} sólo considera el numerador de la expresión a la izquierda de la Ec.(8) ya que, como se dijo anteriormente, la *evidencia* es simplemente una constante de normalización,

por lo que el argumento que maximice toda la expresión será el mismo que maximice sólo al numerador. Además, se introduce el logaritmo para darle estabilidad numérica a la maximización.

La sensibilidad del estimador al *prior* depende de la función de covarianza. Para un *kernel* SE, por ejemplo, los estimadores no se ven afectados de manera determinante por el *prior* utilizado, según Chen y Wang [2].

También existe el estimador de máxima verosimilitud (MLE, *maximum likelihood estimate*), que simplemente se centra en maximizar el *likelihood* sin considerar el *prior*. Sin embargo, debido a que el *likelihood* no necesariamente es convexo respecto a los hiperparámetros, la optimización puede no converger al máximo global, por lo que resulta más adecuado utilizar el estimador MAP que el MLE.

De acuerdo a Ko y Fox [3], la función objetivo de la Ec.(9) puede ser trabajada para obtener la siguiente expresión

$$\ln\left(p(\hat{\mathbf{Y}}|\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}})p(\boldsymbol{\theta})\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(|\mathbf{K} + \sigma_n^2\mathbf{I}|\right) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{Y}}^T\left(\mathbf{K} + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)^{-1}\hat{\mathbf{Y}} + \ln(p(\boldsymbol{\theta})) \quad (10)$$

Para mayores detalles respecto al cálculo del estimador $\boldsymbol{\theta}^{MAP}$ se sugiere consultar el Anexo A.

La utilización de análisis bayesiano en el entrenamiento de GPs permite que dicho entrenamiento se haga de manera automática, es decir, sin tener que seleccionar manualmente los hiperparámetros más adecuados para cada caso.

2.2 Placas de Materiales Compuestos

En la generalidad, se puede llamar placa de materiales compuestos a cualquier placa formada por la unión de distintos materiales, lo que le entrega propiedades particulares a la estructura. Este trabajo se centra en el estudio de una clase específica de placas, que también son conocidas como estructuras “tipo sándwich”, y se componen de dos capas exteriores adheridas a un núcleo de celdas, como se observa en la Figura 1. Las capas exteriores se fabrican con materiales livianos como fibra de vidrio, fibra de carbono, o aluminio, mientras que el núcleo está generalmente compuesto de celdas hexagonales, por lo que se le conoce como “panal de abeja”.

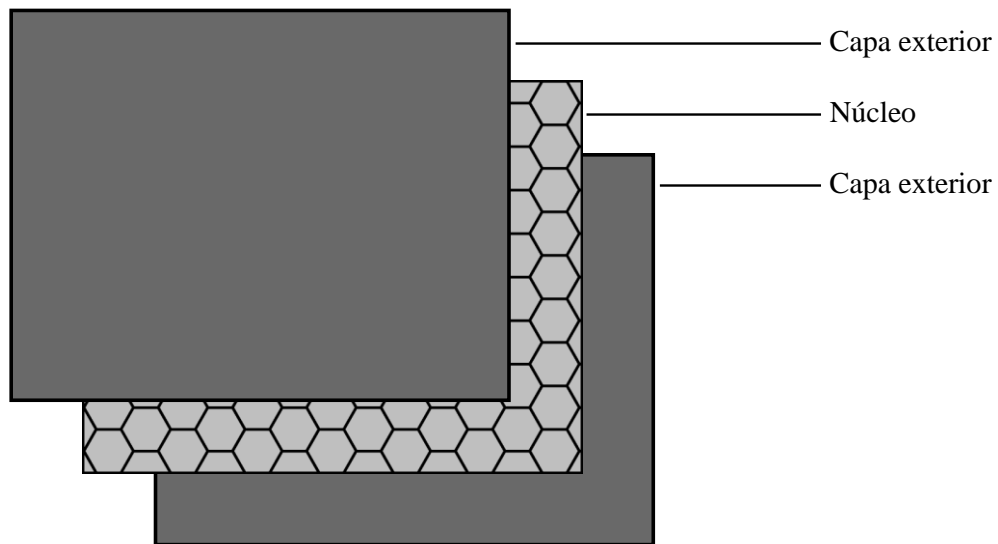


Figura 1: Esquema de la composición de una placa de materiales compuestos.

El núcleo de celdas es liviano y aporta estabilidad estructural, haciendo de este tipo de placas una alternativa interesante en la construcción de diversas estructuras que requieran alta resistencia y bajo peso. Para su buen funcionamiento, es necesario que todos los elementos de la placa trabajen como un conjunto, por lo que la adherencia entre las capas es fundamental.

Debido a errores de fabricación, fatiga de material, o impactos en la estructura, las placas de materiales compuestos pueden presentar problemas asociados al desprendimiento de sus capas. Este tipo de daño puede afectar severamente las propiedades mecánicas de la estructura, y conducir a fallas catastróficas. La seguridad y funcionalidad de esta clase de estructuras puede ser mejorada utilizando metodologías de evaluación de daño estructural, que sirven para detectar algún daño antes de que este desencadene una falla.

2.2.1 Índices de daño en placas de materiales compuestos

Dentro de las metodologías existentes para la evaluación de daño en placas de materiales compuestos, destacan los métodos basados en vibraciones. Como se mencionó anteriormente, el daño por desprendimiento de capas modifica las propiedades mecánicas de la estructura; estas modificaciones causan variaciones en las propiedades de vibración. Por lo tanto, mediante el monitoreo de propiedades tales como frecuencias de resonancia, cambios en las formas modales, o amortiguamiento modal, es posible identificar daño.

Se han empleado diferentes parámetros de respuesta para la evaluación de daño basada en propiedades de vibración. Cornwell et al. [4] aplican energía de deformación modal (MSE, *modal strain energy*) para localizar daño en placas; la energía de deformación de la placa en condiciones dañada y no dañada se usa para el cálculo de índices de daño. Li et al [5] presentan dos índices de daño: índice de modo de deformación residual e índice de momento flector. Wu y Law [6] localizan daño en placas utilizando las variaciones de la curvatura de la superficie de carga. Y Moreno-García et al. [7] estudian el comportamiento de las derivadas de modos de orden superior para la localización de daño en estructuras en dos dimensiones.

Este trabajo se basa en los índices de daño obtenidos al monitorear los modos de vibración de una placa, y comparando las curvaturas de estos modos para una placa en estado sano con las de la misma placa una vez que está dañada.

Se define $\varphi_d^k(u, v)$ como el modo de vibración k -ésimo de una placa dañada, y $\varphi_o^k(u, v)$ como el modo de vibración k -ésimo de una placa sana. Ambos modos están definidos como funciones de u y v , que representan las coordenadas de la superficie bidimensional de la placa; u representa la posición en el eje longitudinal y v la posición en el eje transversal. En la Figura 2 se observa un ejemplo del primer modo de vibrar de una placa sana y una placa dañada.

Las curvaturas de cada uno de los modos de vibrar de una placa se calculan como lo muestra la Ec.(11). En la Figura 3 se observa un ejemplo de las curvaturas de los modos de vibrar mostrados en la Figura 2.

$$\begin{aligned}\gamma_d^k(u, v) &= \nabla^2 \varphi_d^k(u, v) \\ \gamma_o^k(u, v) &= \nabla^2 \varphi_o^k(u, v)\end{aligned}\tag{11}$$

Luego, el índice de daño puede ser calculado como la suma de las diferencias de curvaturas de los distintos modos de vibración, en cada punto, como se indica a continuación:

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^M |\gamma_d^k(u, v) - \gamma_o^k(u, v)|\tag{12}$$

Finalmente, el espacio en donde el índice de daño d sea considerablemente mayor que en el resto de los puntos puede ser identificado como la zona de daño, es decir, el área donde existe desprendimiento de las capas de la placa.

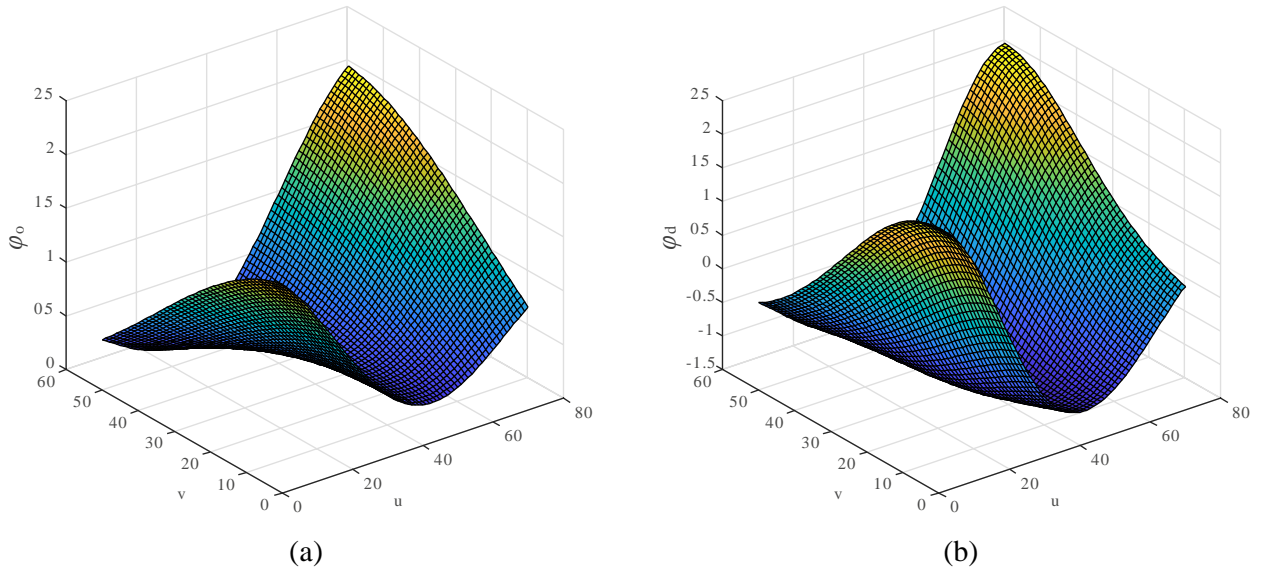


Figura 2: Primeros modos de vibrar de una placa sana (a) y de una placa dañada (b).

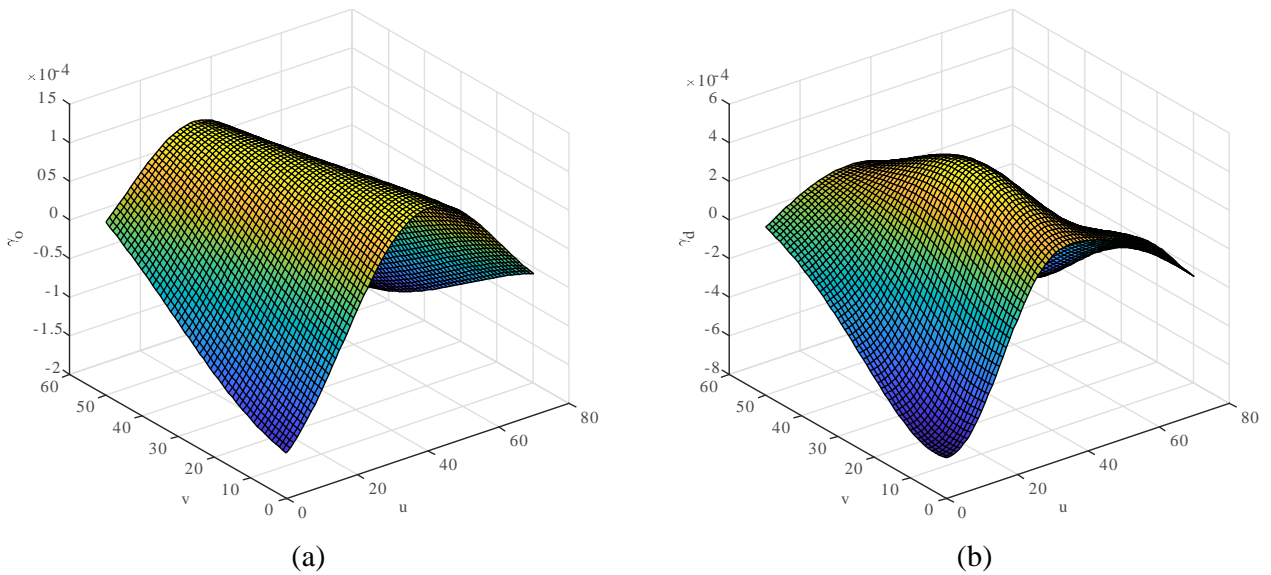


Figura 3: Curvaturas asociadas a los primeros modos de vibración de una placa sana (a) y de una placa dañada (b).

Es importante recalcar que el cálculo de este índice requiere datos asociados a una placa sana como línea de base para comparar las curvaturas. En general, las evaluaciones de daño basadas en vibraciones se basan en la comparación de propiedades de vibración de placas sanas y placas dañadas, por lo que obtener datos de referencia de estructuras sanas se vuelve un requisito fundamental en su implementación. Además, es necesario comparar los modos de vibrar de las placas en estudio con los datos de referencia correspondientes, haciendo que, por ejemplo, ciertos

modos medidos correctamente en placas dañadas no puedan ser analizados porque no se tiene la referencia de placas sanas para estos mismos modos de vibrar.

Para solucionar estas eventuales complicaciones, se han propuesto algoritmos de evaluación de daño que no requieren una línea de base, entre los que destacan el suavizado de espacios (GS, *gapped smoothing*) y el enfoque basado en ondículas (*wavelet-based approach*).

La metodología propuesta por Yoon et al. [8] consiste en un algoritmo que no necesita referencias, y utiliza las curvaturas de modos de vibrar y el método GS para identificar daños en placas. El estudio realizado por Qiao et al. [9], por su parte, implementa tres metodologías experimentales para identificar daño en laminados compuestos: dimensión fractal generalizada, MSE y GS; los resultados indican que el método GS es mejor para identificar delaminación. Rucevskis et al. [10] proponen un algoritmo de detección de daño donde el índice de daño se calcula como la diferencia entre la curvatura medida de la placa dañada y el polinomio suavizado que representa el caso sin daño. El trabajo de Chang y Cheng [11] consiste en el desarrollo de un algoritmo de detección de daño para placas usando la técnica del ondículo espacial (*spatial wavelet technique*). Douka et al. [12] aplican la transformada de ondículo continuo (CWT, *continuous wavelet transform*) unidimensional con diferentes ondículos para detectar grietas en placas. En los trabajos de Katunin [13],[14],[15] también utiliza algoritmos basados en ondículos para la localización de daño.

Los métodos descritos requieren mediciones de datos de placas sometidas a vibración. Usualmente estos pueden ser medidos con grandes arreglos de acelerómetros triaxiales o con un vibrómetro de escaneo laser (*scanning laser vibrometer*, SLV). Sin embargo, en el primer caso la estructura se ve afectada por la masa que añaden los acelerómetros, y el número de acelerómetros disponibles restringe el número de puntos de medición. En el segundo caso, los vibrómetros de escaneo laser pueden usarse para medir más puntos, pero las mediciones son asincrónicas.

La correlación de imagen digital (DIC, *digital image correlation*) en tres dimensiones es una técnica que utiliza cámaras de alta velocidad para medir el desplazamiento de miles de puntos de un objeto en un periodo de tiempo acotado. El trabajo de Seguel y Meruane [16] introduce la aplicación de mediciones mediante DIC 3D en la evaluación de daños por desprendimiento de capas en placas de materiales compuestos, comprobando su efectividad. Los buenos resultados de esta técnica de medición también se observan en la investigación de Meruane et al. [17].

Diversos trabajos de investigación plantean técnicas para la limpieza del ruido asociado a la medición, pero Meruane et al. [18] propone el uso de modelos regresivos basados en GPs para limpiar el ruido de mediciones mediante DIC 3D en placas de materiales compuestos.

3 Metodología propuesta

La metodología propuesta en este trabajo introduce el uso de GPs no sólo para limpiar el ruido de las mediciones, sino que también para estimar modos de vibraciones que representan el estado base de placas (antes de que ocurra el daño) mediante la modificación de los hiperparámetros obtenidos mediante análisis bayesiano. Además, el uso de GPs permite calcular derivadas de modos de vibración de forma analítica, derivando la función de covarianza.

A continuación, se exponen los distintos pasos de la metodología para la identificación de zonas dañadas por desprendimiento de capas en placas de materiales compuestos. Primero, se establecen los datos de entrada que se necesitan; luego se explican los procesos de filtración de ruido y cálculos de curvaturas; a continuación, se detalla la evaluación de daño y se introduce un indicador de confiabilidad; y finalmente se entrega un resumen del algoritmo.

3.1 Datos de entrada

Para poner en práctica la metodología propuesta, se requiere un set de M modos de vibración de una placa de materiales compuestos. La información de cada modo de vibración se compone de n puntos observables, tal que $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{x}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{x}}_n] = \left[\begin{matrix} [u_1 \ v_1]^T & \cdots & [u_n \ v_n]^T \end{matrix} \right]$ corresponde a las coordenadas donde cada amplitud de modo es medida, mientras que $\hat{\mathbf{Y}}^k = [\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_n]^T$ se define como el vector con la amplitud del modo de vibración k -ésimo detectada en cada punto de $\hat{\mathbf{X}}$. Es importante notar que cada modo de vibración debe ser medido usando los mismos puntos $\hat{\mathbf{X}}$.

Se recomienda normalizar los modos medidos de la siguiente forma

$$\hat{\mathbf{Y}}^k = \hat{\mathbf{Y}}_o^k \sqrt{\frac{n}{\sum \sum (\hat{\mathbf{Y}}_o^k)^2}} \quad (13)$$

donde $\hat{\mathbf{Y}}_o^k$ corresponde al modo de vibración k -ésimo obtenido directamente de la medición.

3.2 Filtración de modos de vibrar

Las mediciones de los modos de vibrar se verán afectadas por el ruido instrumental propio de los artefactos que se utilicen en la medición; este ruido puede tener una influencia más notoria en los modos más altos, donde los cambios de curvatura debido al daño son significativos.

Para filtrar los modos y limpiarlos de ruido, se propone el entrenamiento de un GP independiente por cada modo de vibración, utilizando los datos disponibles descritos en la sección anterior. El entrenamiento consiste en la selección automática de los hiperparámetros θ utilizando el estimador MAP definido en la Ec.(9). El modo libre de ruido, entonces, está dado por la Ec.(3), de donde se obtiene que el modo k -ésimo limpio corresponde a

$$\boldsymbol{\mu}^k = \mathbf{K}^T (\mathbf{K} + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{Y}}^k \quad (14)$$

donde \mathbf{K} se obtiene utilizando el *kernel* SE (Ec.(5)) para dos dimensiones, evaluado en cada observación $\{\hat{\mathbf{x}}_i; i = 1, \dots, n\}$.

$$k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_p) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_p)^T \begin{bmatrix} 1/L_u^2 & 0 \\ 0 & 1/L_v^2 \end{bmatrix} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_p)\right) \quad (15)$$

El modo libre de ruido corresponde al valor medio del GP, y los hiperparámetros quedan definidos como $\boldsymbol{\theta} = [L_u \quad L_v \quad \sigma_f^2 \quad \sigma_n^2]$. Estos hiperparámetros son los argumentos maximizados en la Ec.(9). En la maximización, se propone utilizar un prior específico $p^k(\boldsymbol{\theta})$ para cada modo de vibración, correspondiente a la distribución log-normal (para asegurar valores positivos de $\boldsymbol{\theta}$), cuya mediana es

$$\mathbf{m}^k = \begin{bmatrix} \frac{l_u}{2k} & \frac{l_v}{2k} & 0,1\delta_k & 0,1\delta_k \end{bmatrix} \quad (16)$$

y su coeficiente de variación es 50% (las variables en $\boldsymbol{\theta}$ se consideran no correlacionadas). En la Ec.(16), l_u y l_v corresponden a el largo y ancho de la placa, respectivamente, mientras que δ_k es la diferencia entre el máximo y el mínimo valor del modo k -ésimo de vibración (amplitud *peak-to-peak*).

Como se dijo anteriormente, se sugiere el uso del *kernel* SE. Sin embargo, es importante notar que otras funciones también fueron testeadas. Se sugiere ver la Sección 4.3 para revisar los diferentes *kernels* probados, y la Sección 5.1 para revisar los resultados obtenidos con cada uno de ellos.

3.3 Estimación de curvaturas y suavizado

Después de identificar los hiperparámetros óptimos para cada modo de vibración, es posible calcular la curvatura de cada uno de estos modos mediante el Laplaciano (Ec.(11)) del valor medio del GP correspondiente a cada modo (Ec.(14)), como

$$\boldsymbol{\gamma}_d^k = \mathbf{k}_{lap} (\mathbf{K} + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{Y}}^k \quad (17)$$

donde \mathbf{k}_{lap} corresponde al Laplaciano del *kernel* evaluado en cada observación. Cada punto de \mathbf{k}_{lap} queda definido como

$$k_{lap}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_p) = \left([1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/L_u^2 & 0 \\ 0 & 1/L_v^2 \end{bmatrix} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_p)^2 - \frac{1}{L_u^2} - \frac{1}{L_v^2} \right) k(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_p) \quad (18)$$

En la Ec.(17), $\boldsymbol{\gamma}_d^k$ corresponde a un vector de n -por-1 que contiene la curvatura del modo de vibración k -ésimo en cada punto de observación. La metodología asume que los modos de vibración medidos corresponden a una placa dañada, y el subíndice d lo indica explícitamente.

Como la metodología propuesta no requiere referencia, es necesario estimar las curvaturas correspondientes a los modos de vibrar de la placa sana. Para lograrlo, se propone modificar los hiperparámetros correspondientes a los largos de correlación, L_u y L_v . Como se dijo en la Sección 2.1, a mayores largos de correlación aumenta la suavidad del GP, por lo tanto resulta lógico aumentar los valores de L_u y L_v , multiplicándolos por un factor de suavización β , para aumentar la superficie en la cual la amplitud del modo está correlacionada, y así lograr que las curvaturas más altas de la superficie del modo sean suavizadas. El factor de suavización está limitado inferiormente por 1, ya que cuando $\beta=1$ el modo de vibración permanece inalterado. En el caso contrario, cuando β tiende a infinito, el modo de vibración vuelve completamente plano.

De acuerdo a lo anterior, para estimar la curvatura dañada se utiliza la Ec.(17), pero en vez de considerar $\boldsymbol{\theta}_{MAP}^k = [L_u \quad L_v \quad \sigma_f^2 \quad \sigma_n^2]$ se debe usar $\boldsymbol{\theta}_{MAP}^k = [\beta L_u \quad \beta L_v \quad \sigma_f^2 \quad \sigma_n^2]$. En base a los resultados presentados en la Sección 5.1 se recomienda el uso de $\beta=2$.

3.4 Evaluación de daño

3.4.1 Índices de daño

Una vez calculadas las curvaturas asociadas a la placa dañada y la placa sin daño, se calcula el índice de daño (Ec.(12)) para todo el set de modos de vibración, expresado como

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^M \mathbf{d}_k = \sum_{k=1}^M |\gamma_d^k - \gamma_o^k| \quad (19)$$

donde \mathbf{D} es un vector de n -por-1 que contiene el índice de daño asociado a cada punto de observación. Para obtener una representación gráfica del índice de daño, los puntos de este vector pueden ser reordenados y ubicados en las posiciones de su punto de observación correspondiente, con las coordenadas contenidas en $\hat{\mathbf{X}}$, obteniendo así una imagen en dos dimensiones.

3.4.2 Identificación de zonas dañadas

Para identificar y delimitar las zonas de la placa en las que hay desprendimiento de capas se utiliza un algoritmo de *clustering* conocido como *k-means*. Sin embargo, antes de aplicar este algoritmo es conveniente aplicar un filtro digital Gaussiano sobre la imagen correspondiente a la representación gráfica del índice de daño. Se recomienda definir la desviación estándar del filtro en 0,5 para obtener una imagen más uniforme del índice de daño. Los beneficios de la aplicación de este filtro se demuestran en la Sección 5.2.

Posterior a la aplicación del filtro Gaussiano, se utiliza el algoritmo de agrupamiento (*clustering*) conocido como *k-means* sobre \mathbf{D} para separar los índices obtenidos en dos grupos: zona dañada y zona no dañada. El grupo cuyo centroide tenga mayor valor (es decir, el grupo en el cual el índice de daño en la ubicación del centroide sea más grande) corresponde a la superficie dañada.

A pesar de que existen varias técnicas para la definición de umbral de daño automático (por ejemplo, la propuesta por Ng [19]), la selección de una técnica alternativa no influye de manera significativa en la identificación de la superficie de daño. Por lo tanto, se escoge utilizar *k-means* puesto que es un algoritmo conocido, y que se encuentra disponible en la mayoría de los lenguajes de programación.

3.5 Indicador de confiabilidad

Uno de los principales problemas de las metodologías de detección de daño sin datos de referencia es que fallan en la detección de daños en zonas pequeñas, ya sea no identificando daño o identificando zonas sanas como dañadas. Para esto se introduce el índice R , que indica cuando la metodología propuesta es capaz de identificar daño o cuando los resultados obtenidos no son concluyentes, y se define de la siguiente forma

$$R = \frac{|\max(\mathbf{D}_{\max}) - \min(\mathbf{D}_{\max})|}{\max(\mathbf{D}_{\max})} \quad (20)$$

donde \mathbf{D}_{\max} corresponde al vector que contiene los índices de daño máximos de cada modo de vibración estudiado, tal que $\mathbf{D}_{\max} = [\max(\mathbf{d}_1) \ \cdots \ \max(\mathbf{d}_M)]$.

El índice R presentado en la Ec.(20) sirve como indicador de la confiabilidad del método: cuando $R > 0,9$ existe daño en la placa, mientras que cuando $R \leq 0,9$ la placa puede estar sana o tener una superficie dañada pequeña. La elección del valor límite definido para R se justifica en la Sección 5.3.

3.6 Resumen del algoritmo

Inicialización:

M	Número de modos
N	Número de puntos espaciales
l_u	Largo de la placa
l_v	Ancho de la placa
$\hat{\mathbf{X}} = [[u_1 \ v_1]^T \ \cdots \ [u_n \ v_n]^T]$	Coordenadas espaciales de las observaciones
$\{\hat{\mathbf{Y}}_o^k; k = 1, \dots, M\}$	Amplitudes de modos de vibración

Ciclo iterativo para cada $k = 1, 2, \dots, M$

Limpieza de ruido:

- (i) $\hat{\mathbf{Y}}^k$ Normalizar modo (Ec.(13))
- (ii) δ_k Calcular amplitud de modo
- (iii) \mathbf{m}^k Definir la media del prior (Ec.(16))
- (iv) θ_{MAP}^k Maximizar Ec.(10) para encontrar hiperparámetros

Estimación de curvaturas:

- (v) γ_d^k Calcular curvatura dañada usando θ_{MAP}^k en Ec.(17)
- (vi) γ_o^k Calcular curvatura sana usando θ_{MAP}^k en Ec.(17), con $\beta=2$
- (vii) $\max(\mathbf{d}_k)$ Calcular máximo índice de daño para el modo k -ésimo

Fin del ciclo iterativo

Identificación de daño:

- (viii) R Calcular índice de confiabilidad (Ec.(20)) y revisar $R > 0,9$
 - (ix) \mathbf{D} Calcular el índice de daño (Ec.(19))
 - (x) Aplicar filtro Gaussiano sobre \mathbf{D}
 - (xi) Aplicar k -means y conservar cluster con mayor centroide (zona de daño).
-

4 Implementación

Con el objetivo de demostrar que la metodología propuesta efectivamente es capaz de detectar daño en placas de materiales compuestos, esta es puesta a prueba en la detección de daño en 1000 escenarios de falla generados aleatoriamente mediante simulaciones numéricas, y además en 4 placas construidas especialmente para pruebas experimentales.

Los datos utilizados en este trabajo fueron obtenidos a partir de experimentos previos realizados por Meruane et al.[18]. A continuación, se explican las simulaciones numéricas y pruebas experimentales realizadas. Además, se describen los *kernels* que se implementan y las métricas de validación de la metodología. Es importante mencionar que la implementación de la metodología se realiza utilizando el programa computacional MATLAB.

4.1 Instalación experimental

Se construyen placas de compuestas de un núcleo tipo “panal de abeja” rodeado de dos capas de aluminio, que se adhieren utilizando resina epoxica. Las placas tienen un largo de 0,35 metros, un ancho de 0,25 metros, y un espesor de 0,021 metros.

De manera intencional se dejan áreas sin pegamento, para simular zonas con daño por desprendimiento de capas. Las características de las zonas de daño de las cuatro placas construidas se indican en la Tabla 1.

Tabla 1: Zonas daño en placas para pruebas experimentales.

Placa	Tamaño de daño (normalizado)			Forma del daño
	Daño 1	Daño 2	Total	
E1	0,09	-	0,09	Circular
E2	0,12	-	0,12	Circular
E3	0,14	0,07	0,21	Cuadrada
E4	0,11	0,17	0,28	Circular

Para poder medir modos de vibración en las placas construidas se utiliza la técnica de DIC 3D, mencionada en la Sección 2.2. Un esquema de la instalación experimental utilizada se presenta en la Figura 4.

Cada placa se conecta a un agitador electrodinámico, mediante resortes altamente elásticos para simular una condición libre de apoyo. Este a su vez está conectado a un amplificador de señales que recibe información de un generador de funciones.

Los movimientos de las placas son registrados por dos cámaras de alta velocidad, que están sincronizadas entre sí y conectadas a un sistema de adquisición de datos, para que estos sean finalmente procesados.

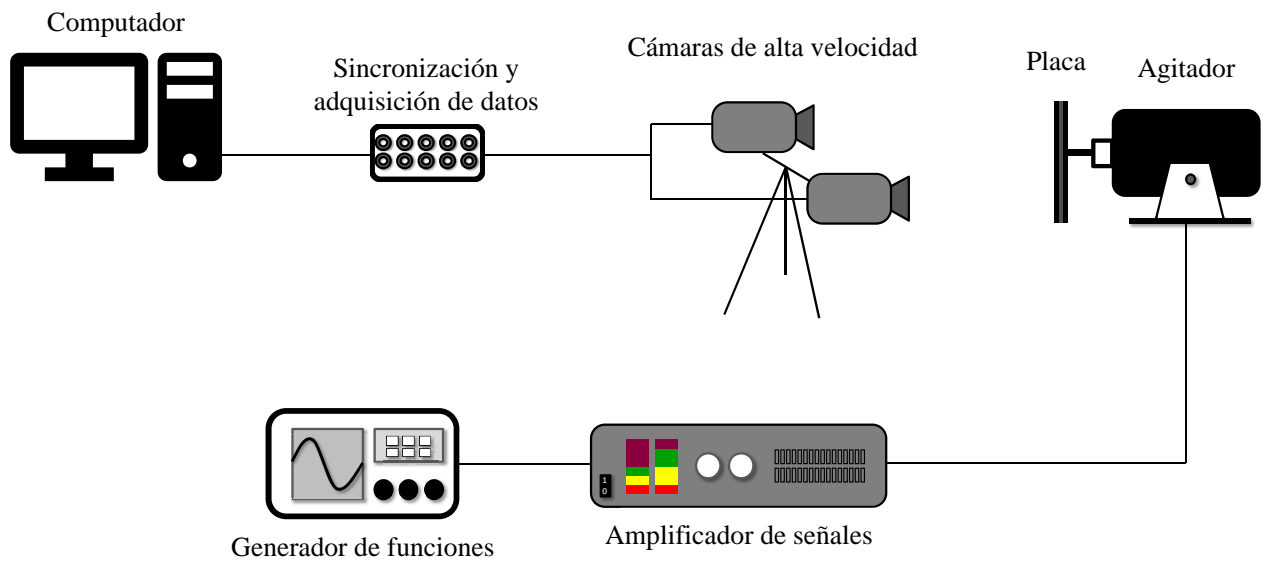


Figura 4: Esquema de la instalación experimental.

4.2 Simulaciones numéricas

Se modelan elementos de área de tres capas, para representar el núcleo y las planchas metálicas de una estructura tipo sándwich, con una razón entre largo y ancho de 7:5 (al igual que las placas construidas para pruebas experimentales). La capa adhesiva se modela como un conjunto de resortes, como se observa en la Figura 5a. El daño por desprendimiento de capas se representa mediante una reducción en la rigidez de los resortes del área dañada, como ilustra la Figura 5b.

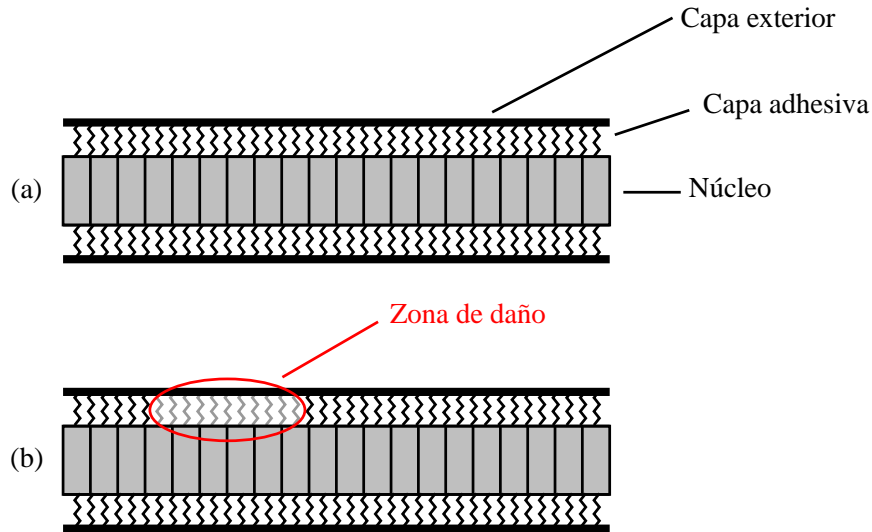


Figura 5: Representación gráfica de la vista lateral de placas en la simulación numérica: (a) es una placa sin daño y (b) es una placa con una zona de desprendimiento de capas.

Para obtener modos de vibración se utiliza un modelo de elementos finitos. Adicionalmente se agrega ruido aleatorio de 10% de variación para simular el ruido asociado a mediciones experimentales.

Se crea una base de datos con 1000 escenarios de daño diferentes, con zonas de falla de forma cuadrada y circular. El tamaño normalizado de las zonas de falla, que se calcula como la razón entre la diagonal de la zona de falla y la diagonal de la placa, varía entre 0% y 25% de la superficie.

Es importante notar que cuando los valores de daño son menores al 2,33% de la superficie, la referencia se considera como sin daño; es otras palabras, la base de datos considera un umbral de daño de 2,33%. De acuerdo a lo anterior, existen 96 casos en que las placas se consideran como sin daño.

Las placas correspondientes a simulaciones numéricas se etiquetan con la letra N seguida de un número correlativo que crece linealmente con el tamaño de daño normalizado. Es decir, la placa con el tamaño de daño más pequeño será N1, y la con el tamaño de daño más grande será N1000.

4.3 Funciones de covarianza o *kernels*

En la Sección 2.1 se menciona la existencia de varias funciones de covarianza, cada una con un set de hiperparámetros distintos. Dentro de las familias de funciones de covarianza destacan las estacionarias, que se caracterizan por comparar dos puntos mediante su diferencia, es decir contienen el término $(x_i - x_j)$. También existen las funciones de covarianza de producto punto, y otras funciones no estacionarias [1].

La función SE (Ec.(21)), es ampliamente utilizada cuando se trabaja con GPs, principalmente debido a que, al ser infinitamente diferenciable, le entrega suavidad al proceso. Esta función pertenece a la familia de funciones estacionarias, por lo que se decide probar también otras funciones pertenecientes a la misma familia.

En particular, se implementan las funciones cuadrática racional (RQ, *rational quadratic*), presentada en la Ec.(22), y γ -exponencial, presentada en la Ec.(23).

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\ell^2}\right) + \sigma_n^2 \delta \quad (21)$$

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{(x_i - x_j)^2}{2\alpha\ell^2}\right)^{-\alpha} + \sigma_n^2 \delta \quad (22)$$

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^\gamma}{\ell^\gamma}\right) + \sigma_n^2 \delta \quad (23)$$

Es importante notar que, para la aplicación de estas funciones al problema propuesto, x_i, x_j y ℓ corresponden a vectores con 2 elementos, el valor asociado a la dimensión u y el valor asociado a la dimensión v (largo y ancho de la placa, respectivamente).

4.4 Métricas de validación

La validación de la metodología propuesta se hace comparando la zona de daño detectada con la zona de daño real de las placas (daño de referencia), por lo que se hace necesario un índice capaz de cuantificar la similitud entre las dos zonas.

Existe un índice conocido como *intersection over union (IoU)*, que compara el área de intersección entre dos conjuntos (en este caso, zona de daño detectada y referencial) con el área de unión de estos, de la siguiente forma

$$IoU = \frac{A_{intersección}}{A_{unión}} \quad (24)$$

El *IoU* está delimitado inferiormente por 0, cuando el daño detectado no coincide en ningún punto con el de referencia, y superiormente por 1, cuando el daño detectado es exactamente igual al de referencia.

Una de las desventajas del índice *IoU* para su aplicación en este problema, es que puede entregar valores pequeños (cercanos a 0) tanto por diferencias en tamaño como en posición de las dos zonas de daño, a pesar de que exista coincidencia en el otro aspecto, como muestran los ejemplos de la Figura 6. En ella se puede observar que, por una parte, la Placa A y la Placa B presentan zonas identificadas (en negro) en la misma ubicación espacial que las zonas de referencia (en rojo), pero su valor de *IoU* es muy pequeño debido a las diferencias de tamaño. Por otra parte, la Placa C también presenta un *IoU* igual a 0, a pesar de que ambas zonas tienen el mismo tamaño y la misma forma, debido a la diferencia de ubicación.

Otro problema del índice *IoU* es que las diferencias de forma y de orientación de las zonas detectadas con las de referencia también es severamente castigada, aunque estas tengan el mismo tamaño y estén centradas en el mismo punto, como se observa en la Placa D de la Figura 6.

Debido a que el índice *IoU* no toma en consideración los factores de tamaño, posición, forma y orientación, se considera necesaria la introducción de un nuevo índice que cuantifique de algún modo estos factores. Para esto, se propone el índice *SPI*,

$$SPI = \frac{1}{3} \left(\frac{S+I}{S_{ref}} + \frac{P}{P_{ref}} \right) \quad (25)$$

En la ecuación anterior, *S* corresponde al área de la zona de daño detectada mediante la metodología propuesta, *P* corresponde a la ubicación del centroide del área detectada respecto a un punto de referencia (como el centro de la placa o una de sus esquinas), e *I* corresponde a la intersección de la zona detectada con la zona de referencia. Por su parte, *S_{ref}* y *P_{ref}* corresponden al área y la posición del centroide de la zona de daño de referencia, respectivamente.

El índice *SPI* recibe esta denominación porque compara de manera simultánea el tamaño (*size*) de la zona detectada y la referencia, la posición (*position*) de las mismas, y la intersección (*intersection*) entre estas. La intersección pretende capturar de manera simultánea posibles similitudes o diferencias tanto en forma como en orientación. Este índice les asigna a todos los factores mencionados la misma relevancia, razón por la cual todos están ponderados por 1/3.

Cuando el *SPI* toma el valor de 1, esto indica que la zona detectada es exactamente igual a la zona de referencia, tanto en tamaño como en posición, forma y orientación. Además, está limitado inferiormente por 0, valor que indica una discrepancia entre las zonas detectada y de referencia, tanto en tamaño como en posición. Finalmente, es importante notar que el *SPI* puede tomar valores mayores a 1, cuando la zona de daño detectada es mayor a la de referencia, lo que le entrega un valor agregado a este índice porque hace posible detectar la sobreestimación de daño en la metodología propuesta. Lo anterior se ve reflejado en las placas ejemplo de la Figura 6.

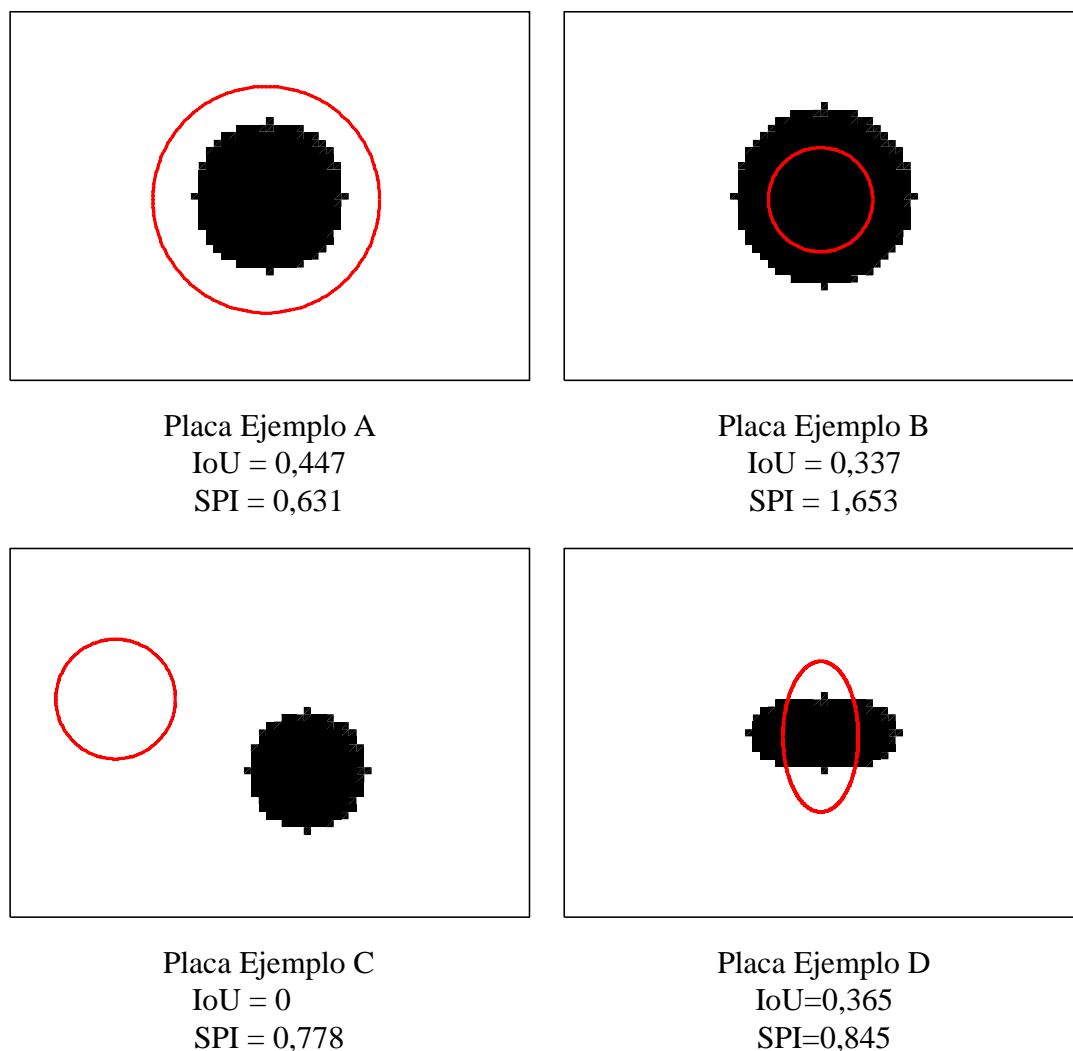


Figura 6: Placas ejemplos para ilustrar funcionamiento de métricas de validación.

5 Análisis de resultados

5.1 Selección de *kernel*, factor de suavización y métrica de validación

En esta sección se evalúa la efectividad de la metodología propuesta utilizando los *kernels* mencionados en el capítulo anterior: SE (Ec.(21)), RQ (Ec.(22)) y γ -exponencial (Ec.(23)). La metodología es evaluada utilizando diferentes factores de suavización β , con las dos métricas mencionadas anteriormente: *SPI* e *IoU*.

Tanto en la Tabla 2 como en la Tabla 3 se puede observar que el *kernel* SE conduce a mejores resultados al identificar daño en las placas de pruebas experimentales, sin importar el factor de suavización que se escoja, presentando una variación del 4% respecto a β . Por su parte, el *kernel* RQ funciona de manera adecuada sólo para factores de suavización pequeños (iguales o menores a 2), teniendo una variación del 45% respecto a β . Por último, el *kernel* γ -exponencial no entrega buenos resultados para ninguno de los valores de β testeados.

El buen comportamiento del *kernel* SE en la detección de zonas de daño, sumado a su baja sensibilidad a la elección del factor β , hacen que este el más adecuado para utilizar en la metodología propuesta.

Tabla 2: Valores promedio de *SPI* de placas de pruebas experimentales, para diferentes *kernels*, y distintos factores de suavización β .

β	SE	RQ	γ -exponencial
1,2	1,075	1,104	2,968
1,5	1,128	1,039	3,256
2	1,159	1,004	3,353
3	1,110	2,463	3,372
4	1,092	2,576	3,488
5	1,041	2,390	3,581
Variación	4%	45%	6%

Se observa que los resultados de la Tabla 2 y la Tabla 3 reflejan las mismas tendencias, es decir, el buen o mal comportamiento del método al elegir distintos *kernels* o factores de suavización es capturado correctamente al utilizar cualquiera de las dos métricas de validación. Sin embargo, ya que el *SPI* considera más factores en su cálculo y además es capaz de identificar cuando el tamaño de zona de falla está siendo sobreestimado o subestimado (como se explicó en la Sección 4.3.2), se decide solamente considerar el *SPI* en el análisis de resultados desde aquí en adelante.

Los valores de *SPI* e *IoU* para cada placa experimental pueden ser encontrados en los Anexos B y C, respectivamente.

Tabla 3: Valores promedio de IoU de placas de pruebas experimentales, para diferentes $kernel$ s, y distintos factores de suavización β .

β	SE	RQ	γ -exponencial
1,2	0,509	0,439	0,154
1,5	0,538	0,442	0,138
2	0,547	0,444	0,133
3	0,539	0,436	0,125
4	0,531	0,330	0,116
5	0,525	0,298	0,112
Variación	2%	17%	12%

Para la selección del factor de suavización, se introduce la Tabla 4, que compara valores de SPI promedio tanto de pruebas experimentales como de simulaciones numéricas, para los diferentes valores de β considerados. Además, se indica la variación de SPI respecto a las diferentes placas consideradas en cada caso.

Tabla 4: SPI promedio, y su variación, para diferentes factores de suavización β .

β	Pruebas experimentales (set de 4 placas)		Simulaciones numéricas (daño entre 5% y 25%)		Simulaciones numéricas (daño entre 15% y 25%)	
	Promedio	Variación	Promedio	Variación	Promedio	Variación
1,2	1,075	37%	1,869	47%	1,383	12%
1,5	1,128	32%	1,835	64%	1,237	23%
2	1,159	31%	1,473	63%	1,054	15%
3	1,110	36%	1,334	59%	1,004	10%
4	1,092	42%	1,270	53%	0,995	9%
5	1,041	39%	1,294	58%	0,992	9%

Es posible observar que los resultados obtenidos con placas de pruebas experimentales son mejores que los asociados a simulaciones numéricas considerando cualquier tamaño de daño (valores de la cuarta columna), ya que son más cercanos a 1; en el caso de las simulaciones numéricas, en cambio, se produce una sobreestimación del daño que se ve reflejada en valores de SPI mayores a 1, especialmente cuando se utilizan factores de suavización pequeños. Al considerar solamente las simulaciones numéricas correspondientes a placas con zona de daño iguales o mayores al 15% de la superficie de cada placa, los resultados (valores de la sexta columna) se acercan a los obtenidos en las pruebas experimentales. La influencia del tamaño de la zona de daño en la identificación de la zona dañada es analizada nuevamente y en más detalle en la Sección 5.4.

Para la elección del factor de suavización óptimo, se considera tanto que este conduzca a buenos resultados (valores de *SPI* cercanos a 1) como que la calidad de los resultados sea constante para todos los casos (porcentajes de variación pequeños). La elección de $\beta=2$ sería la adecuada si sólo se consideraran los resultados de pruebas experimentales, mientras que, si solo se tomaran en cuenta los resultados de simulaciones numéricas, la elección de $\beta=4$ sería la correcta. La utilización de cualquier factor entre 2 y 4 conduciría eventualmente a buenos resultados, pero pensando en futuras aplicaciones de la metodología a casos reales se escoge utilizar $\beta=2$ para los resultados presentados de aquí en adelante.

5.2 Filtro Gaussiano sobre Índices de Daño

Tanto los resultados presentados en la sección anterior como los que se presentan más adelante se obtienen mediante la utilización de un filtro Gaussiano sobre las imágenes correspondientes a las representaciones gráficas de los índices de daño, tal como se describe en la sección 3.5. Sin embargo, la utilización de este filtro no ha sido justificada hasta el momento.

Se realizaron pruebas de detección de zonas daño en placas de materiales compuestos con y sin la utilización de este filtro, comprobando que al utilizarlo los resultados finales mejoran. A modo de ejemplo, se presenta la Figura 7, donde se muestran la representación gráfica del índice de daño con y sin filtro para la placa N1000 (correspondiente a una simulación numérica). En ella, es posible apreciar que el uso del filtro Gaussiano hace que el algoritmo de *clustering* que se utiliza posteriormente conduzca a una detección de daño más precisa, lo que se ve reflejado en un *SPI* más cercano a 1.

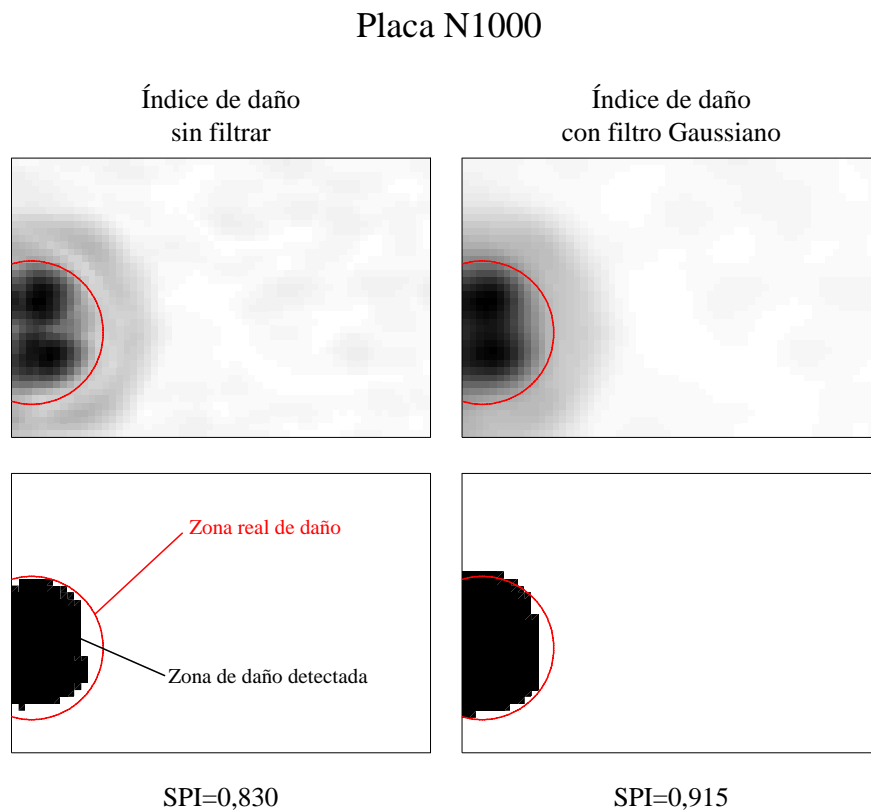


Figura 7: Ilustración del beneficio de aplicar filtro Gaussiano sobre índices de daño, sobre placa de simulación numérica.

En la Figura 8 se observa que el filtro Gaussiano también mejora los resultados obtenidos en las pruebas experimentales, en partículas en la placa E3. En general el beneficio de utilizar el filtro Gaussiano es más evidente en las pruebas experimentales que en las simulaciones numéricas. Sin embargo, en ambos casos se observa una mejora al utilizarlo y por eso es parte de la metodología propuesta para la detección de daños.

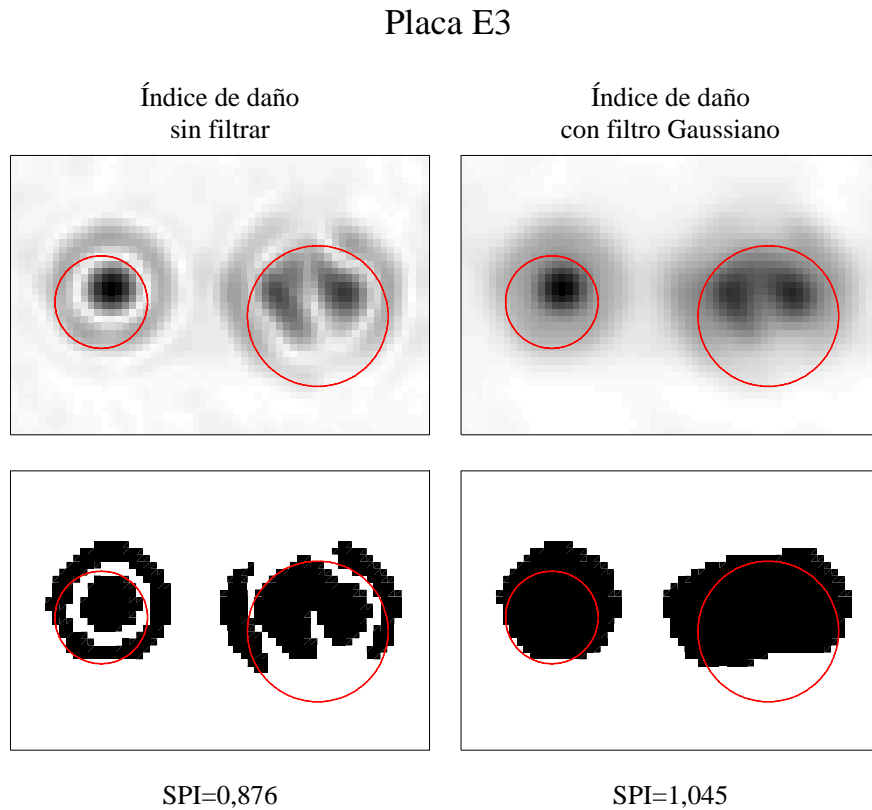


Figura 8: Ilustración del beneficio de aplicar filtro Gaussiano sobre índices de daño, sobre placa experimental.

5.3 Confiabilidad de la clasificación

Para justificar el límite establecido en la Sección 3.5 para el índice de confiabilidad R , que establece cuándo la metodología propuesta es capaz de detectar daño, se presenta la Figura 9. En ella es posible observar que todas las placas que se consideran como no dañadas, según los datos de referencia, tienen un R menor a 0,9. Además, la gran mayoría de las placas que se consideran dañadas poseen un R mayor a 0,9.

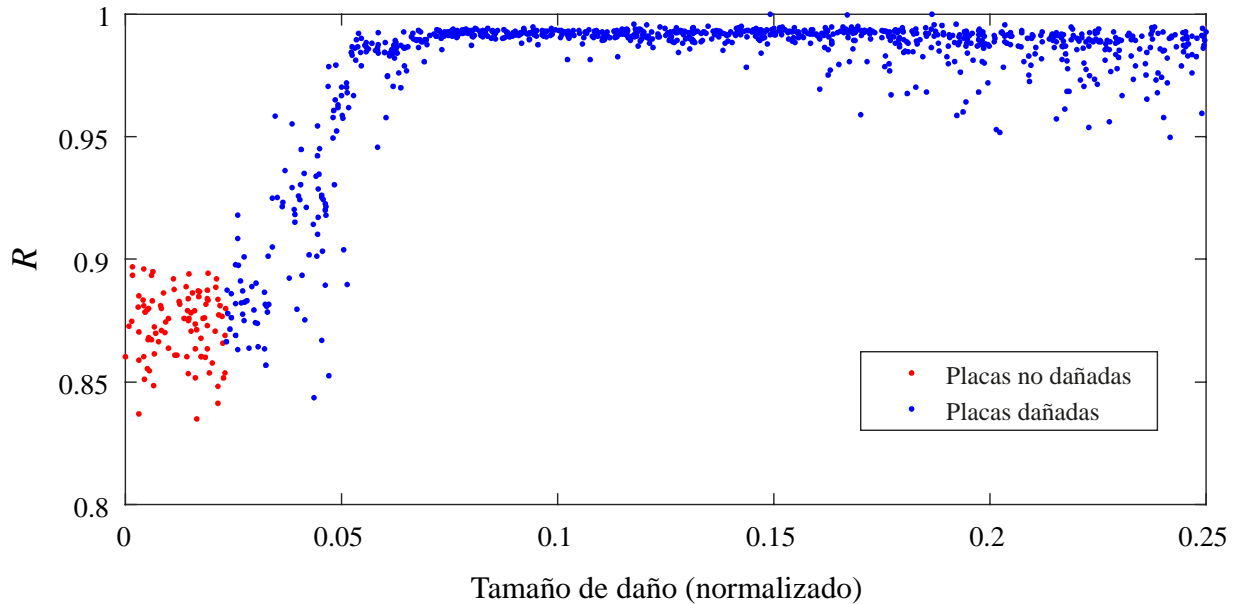


Figura 9: Índice de confiabilidad R para todos los casos estudiados.

El índice R permite que la metodología propuesta pueda ser considerada como un método de clasificación, que indique si una determinada placa está o no dañada sólo considerando el valor de R . De este modo, clasificando como dañadas todas las placas en las que $R > 0,9$, y contrastando la condición detectada (dañada o no dañada) con la condición real de las placas correspondientes a simulaciones numéricas, es posible obtener una matriz de confusión asociada a la metodología propuesta, que se presenta en la Figura 10.

A partir de los datos de la Figura 10, se obtiene que el método acierta en la clasificación en el 95,9% de los casos, considerando como aciertos tanto las placas sanas clasificadas como sin daño, como las placas dañadas clasificadas como tales. Es importante recordar que la condición real de las placas considera un umbral de daño de 2,33%, tal como se establece en la Sección 4.2.

El porcentaje de aciertos del método varía al establecer diferentes umbrales de daño para determinar la condición real de cada placa; por ejemplo, si placas con daños menores al 3% se consideran como sanas, el porcentaje de aciertos aumenta al 97,7% de los casos. La Figura 11 muestra la variación del porcentaje de acierto respecto al umbral de daño considerado.

		Condición Real	
		Dañada	No dañada
Condición detectada	Dañada	863 Placas	0 Placas
	No dañada	41 Placas	96 Placas

Figura 10: Matriz de confusión.

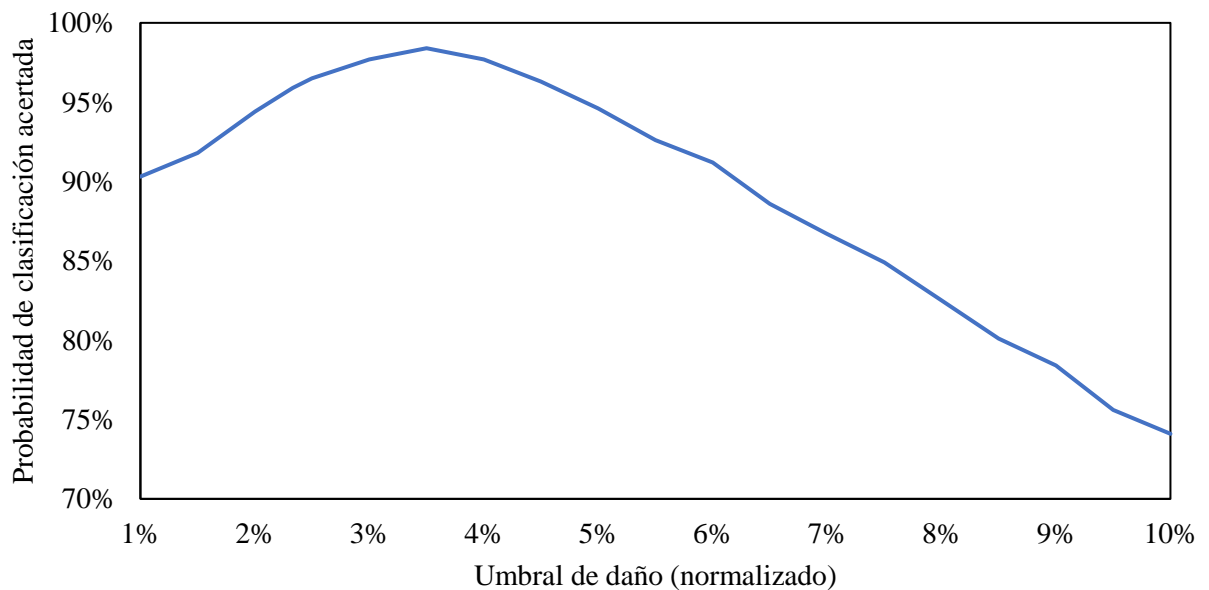


Figura 11: Probabilidad de clasificación acertada según el umbral de daño considerado.

El máximo porcentaje de aciertos se obtiene cuando se considera un umbral de daño de 3,64%, donde se obtiene una clasificación acertada en el 98,2% de los casos. Este porcentaje se ve afectado tanto por las placas sin daño que la metodología clasifica como dañadas, como por placas con daño que la metodología clasifica como no dañadas.

El gráfico de la Figura 12 muestra como varía la probabilidad de clasificar correctamente una placa al cambiar el umbral de daño considerado, haciendo la diferencia entre placas dañadas y placas sin daño (en su condición real). Es posible concluir que cuando se consideran umbrales de daño bajos, la metodología falla en la clasificación de placas sin daño, mientras que cuando se consideran umbrales de daño altos, la metodología falla en la clasificación de placas con daño.

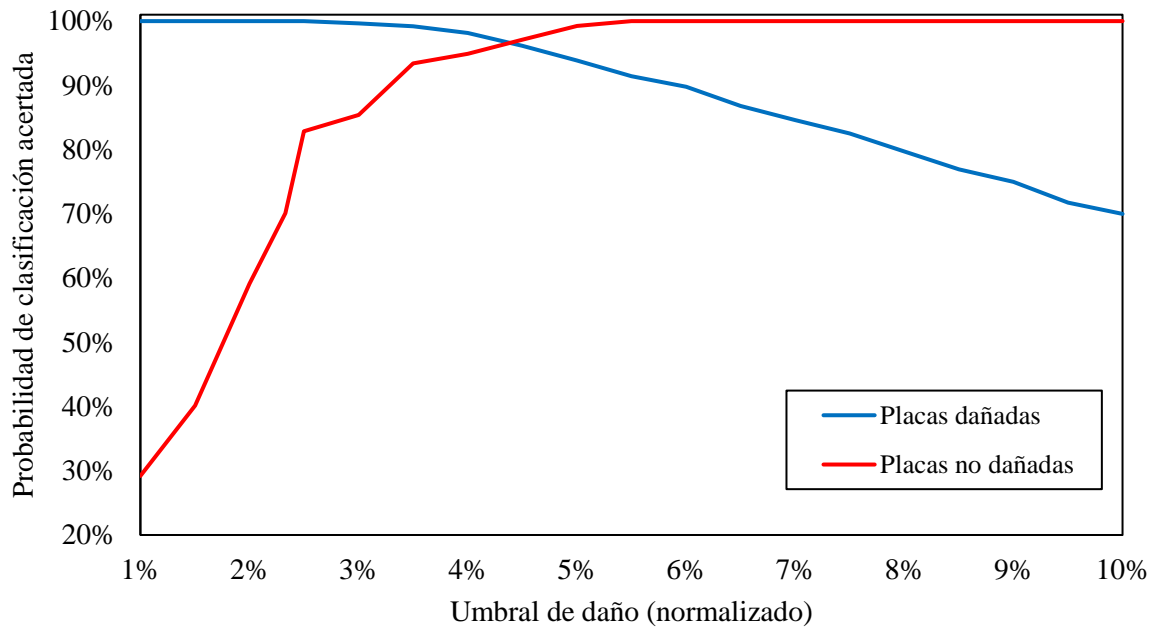


Figura 12: Probabilidad de clasificación acertada según el umbral de daño considerado, diferenciando entre placas con o sin daño en su condición real.

A partir de la Figura 9, y también de la Figura 12, se pueden extraer dos conclusiones importantes: primero, que si la metodología detecta daño (es decir, $R > 0,9$), se puede afirmar que el daño existe y es de al menos el 2,5% de la superficie de la placa; y segundo, que si la metodología no detecta daño, la placa tiene un daño menor al 5% aproximadamente.

El Anexo D contiene distintos porcentajes de clasificación acertada, para placas sin daño, con daño, y porcentajes generales, considerando diferentes umbrales de daño. Además, se presentan las matrices de confusión asociadas a esos umbrales de daño.

5.4 Variación de *SPI* respecto a tamaños de zonas de daño

Tal como se menciona en la Sección 5.1, el tamaño de la zona de daño parece tener una influencia en la calidad de la identificación. Es por esto que se decide analizar la variación de valores de *SPI* respecto a los tamaños de daño normalizados, con el fin de poder detectar una tendencia en su comportamiento.

En la Figura 13 se compara el resultado de *SPI* de todos los casos analizados (simulaciones numéricas y pruebas experimentales) con el tamaño de la zona de daño de referencia. Es importante notar que todos los casos representados en esta figura corresponden a las placas en las que el indicador de confiabilidad *R* es mayor que 0,9.

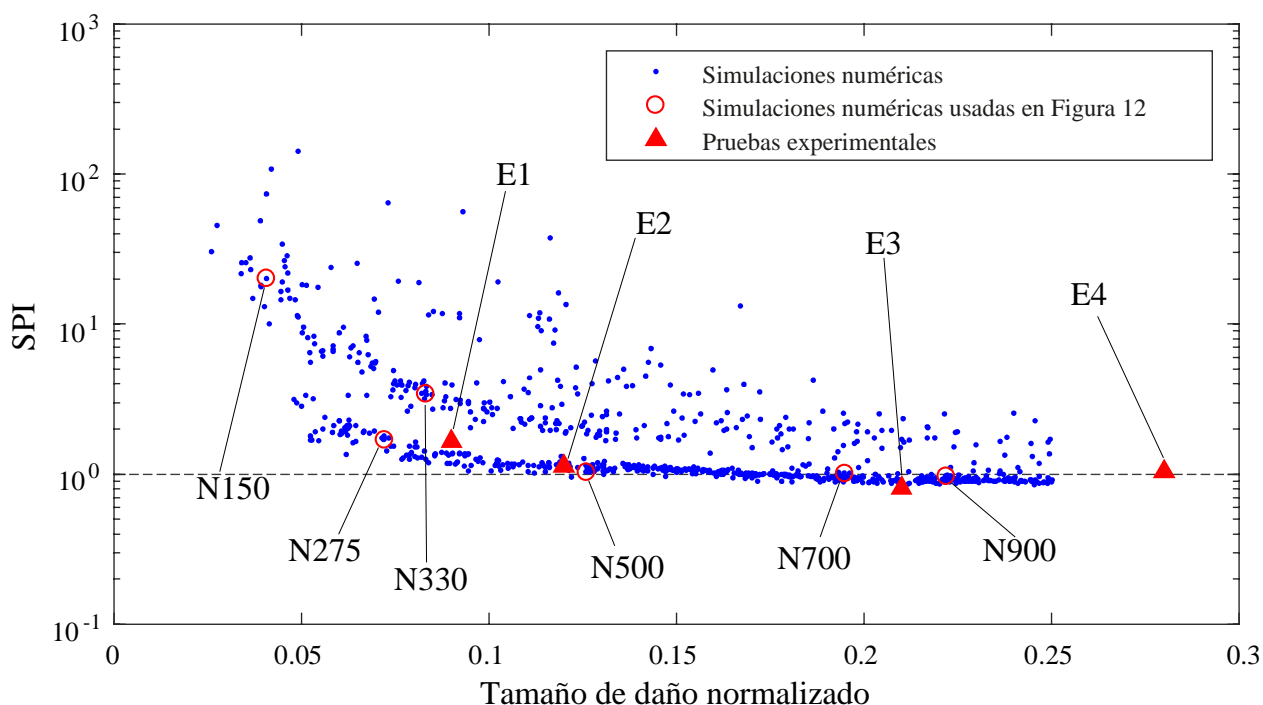


Figura 13: Variaciones de *SPI* según tamaño de zona de daño.

Recordando que el *SPI* idealmente debe ser cercano a 1 (que en la figura corresponde a 10^0), se observa que la metodología es más certera a medida que los tamaños de daño aumentan. Para tamaños de daño pequeños, en particular menores al 10%, el algoritmo propuesto tiende a sobreestimar de manera significativa la zona dañada. A medida que el tamaño de daño aumenta, los valores de *SPI* comienzan a concentrarse alrededor de 1.

Con el fin de analizar en detalle las variaciones de *SPI* respecto al tamaño, la Figura 14 presenta 6 casos representativos de los 1000 escenarios de falla estudiados mediante simulaciones numéricas, que corresponden a los casos destacados en la Figura 11. La Figura 15 contiene la misma información que la Figura 12 pero para las placas estudiadas en las pruebas experimentales.

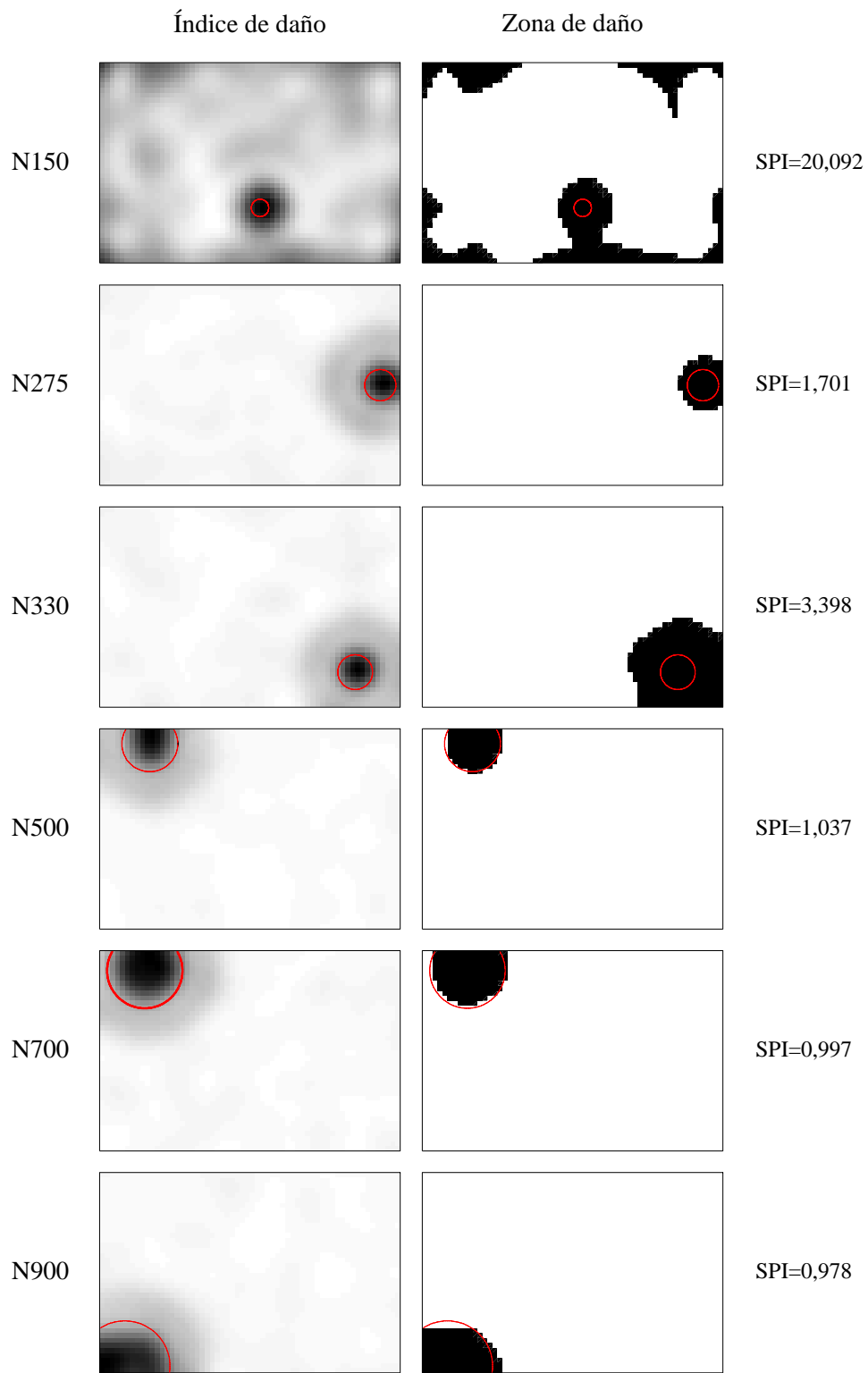


Figura 14: Resultados de simulaciones numéricas seleccionadas, mencionadas en Figura 11.

En la Figura 14 es posible apreciar que, para tamaños pequeños de falla, el algoritmo de *clustering* para la identificación de zonas dañadas no funciona de manera adecuada, causando que se detecte una zona de daño significativamente mayor a la real, lo que resulta en valores de *SPI* muy elevados; este comportamiento se puede observar en la placa N330 y más notoriamente en la placa N150. Sin embargo, tanto para los casos mostrados en la figura como para los que fueron omitidos, la zona de daño se puede identificar mediante inspección visual en la imagen que corresponde a la representación gráfica del índice de daño. Además, existen casos donde la zona de daño es pequeña, pero aún así puede ser detectada de forma satisfactoria, como se observa en la placa N275.

Al aumentar el tamaño de la zona de daño, el *clustering* funciona mejor, obteniéndose resultados de *SPI* cercanos a 1 en la mayoría de los casos, como se puede ver en las placas N500, N700 y N900. En estos casos la zona de daño también puede ser identificada de manera visual en la imagen correspondiente a la representación gráfica del índice de daño.

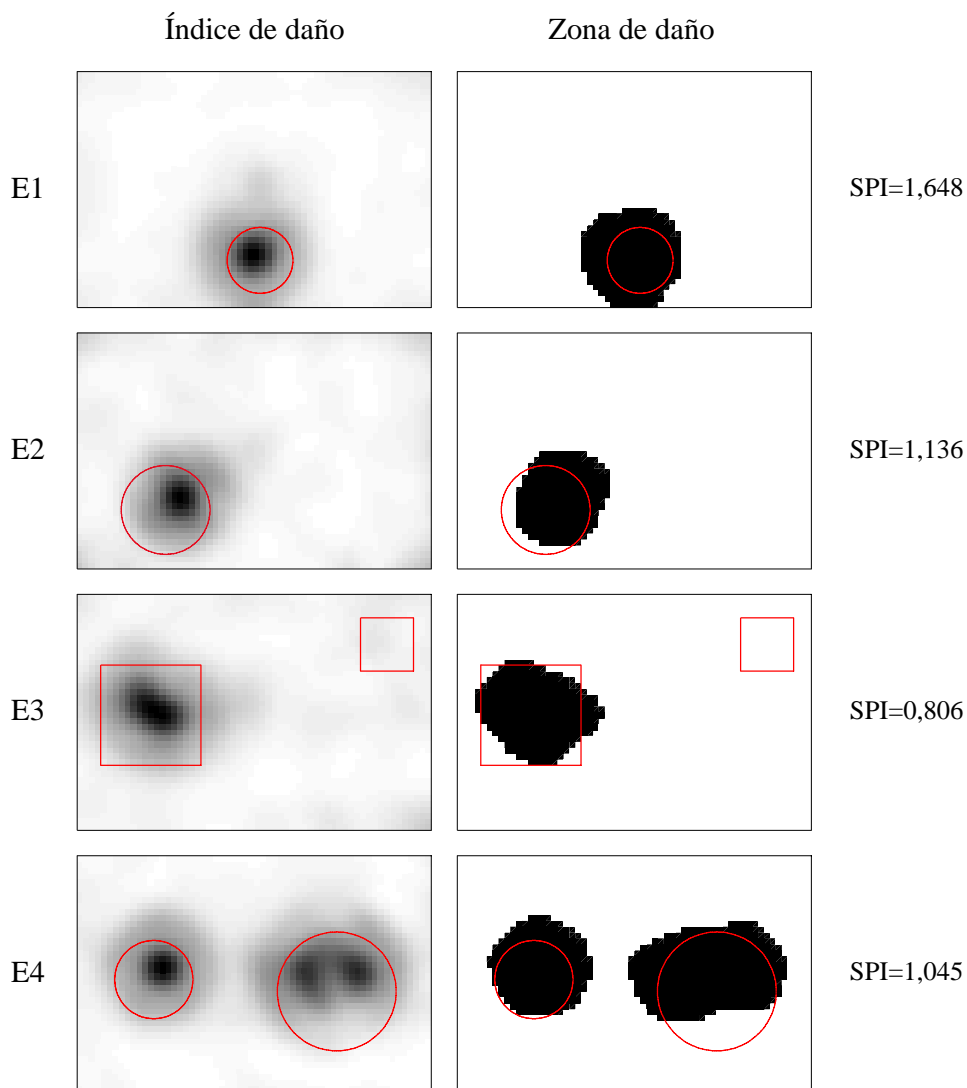


Figura 15: Resultados experimentales.

En la Figura 15 se observan los resultados correspondientes a las placas construidas para las pruebas experimentales. En la placa E1 se da una ligera sobre-estimación del tamaño de la zona de falla, debido al algoritmo de *clustering*. Sin embargo, en la imagen correspondiente a la representación gráfica del índice de daño, la zona de daño puede ser identificada de manera visual.

En las placas E2 y E4 tanto el índice de daño como la zona de daño detectada corresponden a la zona de daño real, obteniéndose valores de *SPI* de 1,136 y 1,045 respectivamente. Es importante recalcar que la placa E4 fue construida con 2 zonas de desprendimiento de capas, y la metodología propuesta fue capaz de identificar ambas.

Para la placa E3 el valor de *SPI* es menor a 1 puesto que la metodología propuesta no fue capaz de detectar la segunda zona dañada. Sin embargo, la zona de daño mayor es detectada sin problemas, lo que se puede apreciar tanto en el índice de daño calculado como en la detección de la zona dañada.

6 Conclusiones

Este trabajo utiliza modelos regresivos autoajustables basados en GPs para representar modos de vibración libres de ruido de placas de materiales compuestos con zonas de desprendimiento de capas. La aplicación del análisis bayesiano para encontrar los hiperparámetros de dichos GPs de forma automática, permite que los modelos regresivos se ajusten de forma óptima a los modos de vibración que se buscan representar. Además, al ponderar los hiperparámetros correspondientes a los largos de correlación por un factor de suavización β es posible estimar modos de vibración asociados a placas sin daño, lo que hace que la metodología propuesta no requiera de una línea base o de referencia.

Debido a que todos los modos de vibración que se analizan están representados por modelos basados en GPs, el cálculo de las curvaturas de estos modos puede realizarse de forma analítica, evitando la propagación de posibles errores. Además, es importante notar que en general el cálculo de derivadas analíticas requiere menos recursos computacionales que calcular las mismas derivadas mediante algún método numérico.

Para comparar las zonas de daño detectadas mediante la metodología propuesta con la información de referencia de las zonas de daño reales de las placas, se introduce el índice *SPI*. Este índice toma en consideración tamaño, posición, forma y orientación de las zonas a comparar, por lo que se concluye que es más apropiado para esta clase de pruebas que otros índices en existencia.

Respecto a la metodología propuesta, es importante destacar que funciona tanto como para clasificar una placa como sana o dañada, como para identificar la zona en la que ocurre el daño. Como método clasificador, tiene un porcentaje de confiabilidad mayor al 95%, presentando falencias solamente cuando la zona de daño es menor que el 5% de la superficie de la placa, aproximadamente.

El cálculo de índices de daño permite identificar visualmente la zona de daño, y para esto la metodología propuesta funciona sin problemas. Sin embargo, al separar de manera automática la zona de desprendimiento de capas, el algoritmo de *clustering* presenta deficiencias, especialmente cuando la zona de falla es pequeña (menor al 10% de la superficie de la placa, aproximadamente). Se deja propuesta una mejora a esta parte del algoritmo.

Para poner en práctica esta metodología se recomienda el uso de *kernel SE*, ya que es el que entrega mejores resultados. En cuando al factor de suavización, se obtienen buenos resultados utilizando cualquier factor entre 2 y 4, pero en este trabajo en particular se opta por $\beta=2$.

Bibliografía

- [1] C. K. Williams y C. E. Rasmussen, *Gaussian Processes For Machine Learning*, vol. 2. MIT Press Cambridge, MA, 2006.
- [2] Z. Chen y B. Wang, «How priors of initial hyperparameters affect Gaussian process regression models», *Neurocomputing*, vol. 275, pp. 1702-1710, 2018.
- [3] J. Ko y D. Fox, «GP-BayesFilters: Bayesian filtering using Gaussian process prediction and observation models», *Auton. Robots*, vol. 27, n.º 1, pp. 75–90, jul. 2009.
- [4] P. Cornwell, S. W. Doebling, y C. R. Farrar, «Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures», *J. Sound Vib.*, vol. 224, n.º 2, pp. 359-374, 1999.
- [5] Y. Y. Li, L. Cheng, L. H. Yam, y W. O. Wong, «Identification of damage locations for plate-like structures using damage sensitive indices: strain modal approach», *Comput. Struct.*, vol. 80, n.º 25, pp. 1881-1894, 2002.
- [6] D. Wu y S. S. Law, «Damage localization in plate structures from uniform load surface curvature», *J. Sound Vib.*, vol. 276, n.º 1-2, pp. 227-244, 2004.
- [7] P. Moreno-García, J. A. Dos Santos, y H. Lopes, «A new technique to optimize the use of mode shape derivatives to localize damage in laminated composite plates», *Compos. Struct.*, vol. 108, pp. 548-554, 2014.
- [8] M. K. Yoon, D. Heider, J. W. Gillespie Jr, C. P. Ratcliffe, y R. M. Crane, «Local damage detection using the two-dimensional gapped smoothing method», *J. Sound Vib.*, vol. 279, n.º 1-2, pp. 119-139, 2005.
- [9] P. Qiao, K. Lu, W. Lestari, y J. Wang, «Curvature mode shape-based damage detection in composite laminated plates», *Compos. Struct.*, vol. 80, n.º 3, pp. 409-428, 2007.
- [10] S. Rucevskis, R. Janeliukstis, P. Akishin, y A. Chate, «Mode shape-based damage detection in plate structure without baseline data», *Struct. Control Health Monit.*, vol. 23, n.º 9, pp. 1180-1193, 2016.
- [11] C.-C. Chang y L.-W. Chen, «Damage detection of a rectangular plate by spatial wavelet based approach», *Appl. Acoust.*, vol. 65, n.º 8, pp. 819-832, 2004.
- [12] E. Douka, S. Loutridis, y A. Trochidis, «Crack identification in plates using wavelet analysis», *J. Sound Vib.*, vol. 270, n.º 1-2, pp. 279-295, 2004.
- [13] A. Katunin, «Damage identification in composite plates using two-dimensional B-spline wavelets», *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 25, n.º 8, pp. 3153-3167, 2011.

- [14] A. Katunin, «Vibration-based spatial damage identification in honeycomb-core sandwich composite structures using wavelet analysis», *Compos. Struct.*, vol. 118, pp. 385-391, 2014.
- [15] A. Katunin, «Stone impact damage identification in composite plates using modal data and quincunx wavelet analysis», *Arch. Civ. Mech. Eng.*, vol. 15, n.º 1, pp. 251-261, 2015.
- [16] F. Seguel y V. Meruane, «Damage assessment in a sandwich panel based on full-field vibration measurements», *J. Sound Vib.*, vol. 417, pp. 1-18, 2018.
- [17] V. Meruane, M. Lasen, E. López Droguett, y A. Ortiz-Bernardin, «Modal strain energy-based debonding assessment of sandwich panels using a linear approximation with maximum entropy», *Entropy*, vol. 19, n.º 11, p. 619, 2017.
- [18] V. Meruane, I. Fernandez, R. O. Ruiz, G. Petrone, y E. Lopez-Droguett, «Gapped Gaussian smoothing technique for debonding assessment with automatic thresholding», *Struct. Control Health Monit.*, p. e2371, 2019.
- [19] H.-F. Ng, «Automatic thresholding for defect detection», *Pattern Recognit. Lett.*, vol. 27, n.º 14, pp. 1644-1649, 2006.

Anexos

Anexo A

Considerando la distribución Gaussiana presentada en la Ec.(2), se tiene que

$$p(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\theta}) \sim N(\mu, \Sigma) \quad (26)$$

Luego, la expresión $p(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\theta})$ puede ser definida como

$$p(y|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\Sigma}(y - \mu)^2\right) \quad (27)$$

Además, recordando que las observaciones en $\hat{\mathbf{D}}$ son independientes entre sí, como indica la Ec.(6), es posible obtener la siguiente equivalencia

$$p(\hat{\mathbf{Y}}|\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{X}}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \mu)^2\right) \quad (28)$$

De este modo, el estimador definido en la Ec.(9) puede ser expresado como

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \max \left(\ln \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \mu)^2 \right) \right) + \ln(p(\boldsymbol{\theta})) \right) \quad (29)$$

Trabajando la función objetivo de la ecuación anterior es posible obtener

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \max \left(-\frac{n}{2} \ln(2\pi\Sigma) - \frac{1}{2\Sigma} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \mu)^2 + \ln(p(\boldsymbol{\theta})) \right) \quad (30)$$

Finalmente, recordando las definiciones de μ y Σ indicadas en Ec.(3) y Ec.(4) respectivamente, es posible deducir la expresión de la Ec.(10).

Anexo B

Tabla B 1: Valores de *SPI* para *kernel* SE, para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	1,632	0,758	0,804	1,104	1,075	37%
1,5	1,639	0,976	0,810	1,088	1,128	32%
2	1,648	1,136	0,806	1,045	1,159	31%
3	1,660	1,109	0,719	0,951	1,110	36%
4	1,722	1,113	0,685	0,846	1,092	42%
5	1,603	1,061	0,666	0,833	1,041	39%

Tabla B 2: Valores de *SPI* para *kernel* RQ; para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	1,430	1,101	1,090	0,795	1,104	23%
1,5	1,310	0,997	1,053	0,798	1,039	20%
2	1,364	0,950	0,909	0,793	1,004	25%
3	6,602	0,939	1,670	0,642	2,463	113%
4	6,858	0,931	1,896	0,620	2,576	113%
5	6,178	0,933	1,837	0,613	2,390	108%

Tabla B 3: Valores de *SPI* para *kernel* γ -exponencial, para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	3,790	4,343	2,169	1,571	2,968	44%
1,5	4,374	4,959	2,130	1,561	3,256	51%
2	5,199	4,598	2,016	1,600	3,353	54%
3	5,807	4,067	1,938	1,676	3,372	58%
4	6,356	3,925	1,975	1,695	3,488	62%
5	6,719	3,859	2,063	1,681	3,581	64%

Anexo C

Tabla C 1: Valores de IoU para *kernel* SE, para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	0,361	0,555	0,599	0,523	0,509	20%
1,5	0,377	0,619	0,613	0,543	0,538	21%
2	0,406	0,629	0,583	0,570	0,547	18%
3	0,429	0,628	0,485	0,614	0,539	18%
4	0,451	0,626	0,449	0,598	0,531	18%
5	0,483	0,608	0,410	0,597	0,525	18%

Tabla C 2: Valores de IoU para *kernel* RQ, para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	0,514	0,570	0,378	0,293	0,439	29%
1,5	0,529	0,549	0,397	0,292	0,442	27%
2	0,533	0,541	0,405	0,295	0,444	26%
3	0,482	0,525	0,481	0,256	0,436	28%
4	0,073	0,525	0,489	0,235	0,330	65%
5	0,072	0,534	0,370	0,218	0,298	67%

Tabla C 3: Valores de IoU para *kernel* γ -exponencial, para diferentes valores de β .

β	E1	E2	E3	E4	Promedio	Variación.
1,2	0,083	0,116	0,218	0,200	0,154	42%
1,5	0,068	0,093	0,200	0,189	0,138	48%
2	0,062	0,096	0,193	0,182	0,133	48%
3	0,051	0,099	0,186	0,163	0,125	49%
4	0,050	0,102	0,177	0,137	0,116	46%
5	0,049	0,104	0,155	0,141	0,112	42%

Anexo D

Tabla D 1: Porcentajes de clasificación acertada considerando diferentes umbrales de daño.

Umbral de daño	Placas con daño clasificadas correctamente	Placas sin daño clasificadas correctamente	Porcentaje general de clasificación acertada
1%	100,00%	29,20%	90,30%
2%	100,00%	59,12%	94,40%
3%	99,65%	85,40%	97,70%
4%	98,15%	94,89%	97,70%
5%	93,86%	99,27%	94,60%
6%	89,80%	100,00%	91,20%
7%	84,59%	100,00%	86,70%
8%	79,72%	100,00%	82,50%
9%	74,97%	100,00%	78,40%
10%	69,99%	100,00%	74,10%

		Daño > 1%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	863 Placas	0 Placas
	No dañada	97 Placas	40 Placas

		Daño > 2%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	863 Placas	0 Placas
	No dañada	56 Placas	81 Placas

		Daño > 3%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	860 Placas	3 Placas
	No dañada	20 Placas	117 Placas

		Daño > 4%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	847 Placas	16 Placas
	No dañada	7 Placas	130 Placas

		Daño > 5%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	810 Placas	53 Placas
	No dañada	1 Placa	136 Placas

		Daño > 6%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	775 Placas	88 Placas
	No dañada	0 Placas	137 Placas

		Daño > 7%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	730 Placas	133 Placas
	No dañada	0 Placas	137 Placas

		Daño > 8%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	688 Placas	175 Placas
	No dañada	0 Placas	137 Placas

		Daño > 9%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	647 Placas	216 Placas
	No dañada	0 Placas	137 Placas

		Daño > 10%	
		Condición real	
Condición detectada	Dañada	604 Placas	259 Placas
	No dañada	0 Placas	137 Placas

Figura D 1: Matrices de confusión para diferentes umbrales de daño.