UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

POTENCIAS DE HADAMARD DEL KERNEL DE GREEN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO CON DRIFT EN $\mathbb{R}$

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

PABLO IGNACIO LÓPEZ RIVERA

PROFESOR GUÍA:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CMM-Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS Y MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: PABLO IGNACIO LÓPEZ RIVERA
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

POTENCIAS DE HADAMARD DEL KERNEL DE GREEN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO CON DRIFT EN $\mathbb{R}$

En este trabajo de tesis, enmarcado en la Teoría de Potencial Probabilista, se examinan algunas transformaciones del kernel de Green asociado al movimiento browniano con drift en $\mathbb{R}$, denotado por $\widetilde{u}$. Más precisamente, el análisis se centra en el estudio de algunas propiedades de $\widetilde{U}^{(\beta)}$, la β-potencia de Hadamard pertinente a $\widetilde{u}$.

En particular, se prueba que para cada $\beta \geq 1$, el operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$ calza con el potencial de otro proceso de Markov felleriano: un cambio de tiempo de un movimiento browniano con un drift diferente. Para el propósito recién mencionado, se explicita primero el kernel de Green $\widetilde{u}$ del MB con drift d-dimensional, para todo $d \geq 1$, mediante el uso de funciones de Bessel. Este mismo procedimiento se aplica para obtener las densidades $(\widetilde{u}_\lambda)_{\lambda>0}$ asociadas a la resolvente del MB con drift, $\left(\widetilde{U}_\lambda\right)_{\lambda>0}$. Posterior a esto, se estudia la regularidad de todos los operadores recién mencionados, en el caso $d = 1$.

Finalmente, se exhibe el cálculo para encontrar explícitamente el proceso mencionado en el párrafo anterior, para luego demostrar su unicidad dentro de la clase de todos los procesos de Feller que poseen una resolvente extensible a $L^1(\mathbb{R})$. Para probar esto, se verificó que $\widetilde{U}^{(\beta)}$ satisface el Principio del Máximo Completo (PMC) sobre $L^1(\mathbb{R})$, resultado que a su vez pasa por una aproximación discreta del operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$, un resultado de matrices y potencial discreto, entre otras técnicas.

«You can spend your time alone, redigesting past regrets,
or you can come to terms and realize
you're the only one who can forgive yourself.
Makes much more sense to live in the present tense»
Present Tense – Pearl Jam

Agradecimientos

Aprovecho este pequeño espacio como una oportunidad para darle las gracias a todas las personas que en este momento son significativas para mí y han hecho posible que pueda terminar esta tesis. Le agradezco a Hugo, mi padre, a quien siempre llevaré en el corazón, por haberlo dado todo para que tuviésemos lo mejor como familia y ser un buen papá. A Alejandra, mi madre, por ser una mamá (y papá, al mismo tiempo) excepcional. Estaré agradecido de por vida de que se haya sacrificado por brindarme la mejor educación, y sobre todo por siempre ir más allá, formándome como persona, y también siempre fomentar mi capacidad crítica y analítica sobre las cosas, a su manera. Sencillamente admiro su temple, resiliencia e inteligencia.

A mis hermanas Nanicha y Ellita, que han sido como otras dos madres para mí y que perpetuamente me han apoyado en todo sentido, desde cambiarme los pañales cuando fui guagua, hasta los buenos regalos, auspicios y principalmente, el apañe y cariño de hoy en día. A mis sobrinas Victoria y Simona, a mi sobrino Mateo, por su noble afecto, por ser ellos chispa en mi vida y siempre permitirme enseñarles cualquier tontera que se me ocurra. A mi abuela Rosa, por quererme en todo momento.

A mis más íntimos amigos del Colegio San Ignacio El Bosque, por seguir ahí presentes, incluso seis años después del egreso, y bancar mis eternos conflictos internos, mis lateros rollos sentimentales, mi persistente sed mis desesperantes ganas de siempre quedarme hasta tarde en todas las juntas y sobre todo, por siempre valorarme: gracias, Mortero, Pepe, Chap, Loyan, Jefe y Pugato; gracias, Benja, Chapa y Martín, y a tantos otros que han estado ahí. También le agradezco a mis amigos y amigas fuera de la Universidad y del Colegio: gracias, Mane, Flo, Claudia y Cloé por tantos años de amistad; gracias, Berto y Trini por siempre estar ahí cuando los he necesitado y ser muy buenos consejeros.

Al llegar a la Universidad en 2014, conocí a un tremendo grupo de amigos en la Sección 4, que hasta el día de hoy sigue vigente, a pesar del desparramo de carreras y caminos que hemos elegido: gracias, Fabián, Ale, Pino, Max, Sergio, Santiago, Franco, Feña, Ángela, Jorge, Carlitos, Vicho, Cristian, Pérez, Zamo, Milla, Hans, Tania, Fran y Claudio; nunca olvidaré los jaivoltachs, las salidas a terreno a otras facultades y esas prolongadas y entretenidas tardes de Cafeta con más conversación y risas que estudio; gracias a ustedes Beauchef fue un lugar muy agradable para mí. Gracias también a Bitar y Papitas, por ser muy buenos amigos desde Plan Común —y destacar que hemos sido compañeros hasta el día de hoy en el DIM—; gracias por ser muy generosos e incondicionales conmigo. No me olvido de otros amigos de Beauchef que han aparecido en estos seis años en diversas oportunidades: gracias, Magda, Baldo y a tantos otros que amenizaron estos años.

Gracias a Los Cauchynos (actualmente Los Amigos del 22) por ser un tremendo bastión y apoyo desde que entramos al DIM: gracias, Feña Guzmán, Feña García, Freddy, Mati, Alonso, Acuña, Kike, Nano, Juan d'Etigny, Pablo y Guillaume; realmente sin ustedes habría sido insufrible la carrera. Por último, a mis amigos del DIM que he ido haciendo durante estos años, que sin lugar a dudas hacen un poco más ameno este Departamento: gracias, Edo y Juan Pedro (por ser tan apañadores y por las buenas conversas, cigarros y brebajes que nos hemos pegado); gracias, Rola (y también gracias a casi toda esa generación por ser tan buena onda y simpáticos); gracias, Zelada, Pablo, Vicente y Pereda; gracias, Cabezas, Nico y Rapa; gracias, Pancho, Mauro, Calisto y Camilo.

Dentro de estos seis años doy gracias a mis formadores: gracias a Jaime San Martín por enseñarme Teoría de la Medida y ser un excelente guía durante la elaboración de esta tesis, dando espacio a conversar también sobre la vida y el acontecer nacional, fomentando mi conciencia crítica. Gracias a Joaquín Fontbona por despertar en mí el gusto por las Probabilidades y los Procesos Estocásticos, y por aceptar estar en mi comisión. También, gracias a Servet Martínez por su buena voluntad y participación en el comité de esta tesis. Gracias a Aris Daniilidis por haberme formado en casi todos los cursos de la rama de análisis, en los cuales incorporé el rigor como un gran valor esencial y adquirí las bases de mi formación matemática. Gracias a los Profesores Alejandro Maass, Martín Matamala y Raimundo Undurraga por ser grandes docentes que me han marcado. Una mención especial a Natacha, que siempre ha estado muy dispuesta a ayudar de manera muy jugada en todo; gracias por su simpatía y buena onda, buen gusto musical y las conversaciones entretenidas durante los breaks de tabaco.

No puedo olvidarme de las y los funcionarios del Departamento, que siempre con una sonrisa y gran disposición, han estado dispuestos a ayudarme, y en varias ocasiones, hemos tenido buenas y amenas conversaciones: gracias, Karen, Juanito, Kuky, Eterin, Silvia, Óscar, Luis y Gladys.

Un agradecimiento para la Anto, que me ha dado mucho ánimo y fuerza en los momentos de frustración de esta tesis; ella me convenció de que era capaz y que tenía que creerme el cuento. Gracias por todo lo que hemos vivido juntos en este tiempo, te quiero mucho.

También le doy las gracias a muchos héroes que no me conocen, pero yo sí a ellos, que amenizaron muchas largas noches de estudio en estos años y han sido esenciales para sobrellevar la vida. Gracias, Pearl Jam (lejos mi banda favorita, gracias por tanto), Alice in Chains, Soundgarden, Beatles, Rolling Stones, Congreso, Pink Floyd, The Who, Cream, Led Zeppelin, Oasis, Stone Temple Pilots, Sublime, U2, Temple of the Dog, Jane's Addiction, Jeff Buckley, John Lennon, Charly García, Serú Girán, Divididos, Babasónicos, Los Piojos, Las Pastillas del Abuelo, Nano Stern, Luis Alberto Spinetta, Chris Cornell, Onda Vaga, Tame Impala, Roger Waters, Paul McCartney, Faith No More, Rod Stewart, Red Hot Chili Peppers, Inti Illimani, George Harrison, Chico Trujillo, Juana Fe, Los Tetas, Bloque Depresivo, Liam Gallagher, Rage Against The Machine, Jimi Hendrix, Los Tres, Mac Demarco, Mecánica Popular, Camila Moreno, Iron Maiden, Joe Cocker, Joaquín Sabina, Mauricio Redolés, Daft Punk, Lorde, Florence + The Machine, Eric Clapton, Mad Season, Calle 13, Smashing Pumpkins, Villa Cariño, Sumo, Manuel García y muchos otros.

Tabla de Contenido

Introducción

Dentro de las matemáticas un tema importante es la Teoría del Potencial (clásica), que consiste —*grosso modo*— en el estudio de las funciones armónicas y de la ecuación de Poisson. A mediados del siglo XX se encontraron puentes entre este tópico y la Teoría de la Probabilidad. Concretamente, se recuperan los mismos resultados de la teoría clásica mediante técnicas y métodos probabilistas. A este puente se le suele denominar *Teoría de Potencial Probabilista*.

Uno de los conceptos más importantes en esta área es el de *operador de Green* o *potencial* asociado a un proceso estocástico. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov subyacente a éste, a valores en $(E, \mathcal{B}(E))$, donde E se considera Hausdorff, localmente compacto con base numerable (segundo contable) y $\mathcal{B}(E)$ denota la tribu boreliana de E. Definimos el *potencial* como el operador U, dado por

$$Uf(x) \doteq \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\,dt\right), \quad \forall x \in E,$$

donde f es una función medible y tal que la esperanza anterior tenga sentido.

Es bien sabido que al tomar $(X_t)_{t\geq 0}$ como el movimiento browniano en dimensión d, con $d \geq 3$, detenido al salir de un abierto regular $D \subseteq \mathbb{R}^d$, entonces el funcional de potencial U_D asociado a éste, tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue, u_D, denominada *kernel de Green*. Es decir,

$$U_D f(x) = \int_D f(y) u_D(x, y)\,dy.$$

Al existir densidad, es posible definir para $\beta \geq 1$ el *operador de β-potencia de Hadamard* del kernel de Green del MB, $U_D^{(\beta)}$, como

$$U_D^{(\beta)} f(x) \doteq \int_D f(y)[u_D(x, y)]^\beta\,dy.$$

En 2019, en [4] se probó que para $d \geq 3$ y ciertos valores de β (dependientes de la dimensión), existe un único proceso de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$, tal que su operador de Green es exactamente $U_D^{(\beta)}$; es decir, para cada $f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}(D) \cap L^1(D, \mathcal{B}(D), dx)$ y todo $x \in D$,

$$U_D^{(\beta)} f(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(Y_t)\,dt\right).$$

Esta tesis centra su estudio en el *movimiento browniano con drift*, $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$; es decir, para cada $t \geq 0$,

$$\widetilde{B}_t \doteq B_t + \mu t,$$

donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un MB estándar sobre $\mathbb{R}^d$ y $\mu \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ un parámetro denominado *drift*. Uno de los primeros resultados de este trabajo es la existencia y cálculo explícito de la densidad del kernel de Green asociado a $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$, para $d \geq 1$, y lo mismo para la resolvente asociada. Para ello, se calculó una transformada de Laplace, expresada en términos de funciones de Bessel. Posteriormente, se expone un análisis de la regularidad que posee la resolvente.

El centro de esta memoria es la extensión del resultado probado en 2019, anteriormente mencionado, para el caso del movimiento browniano con drift en $\mathbb{R}$. Para ello, primero se halló explícitamente el proceso que satisface lo que se quiere. Luego, se demostró unicidad (en cierto sentido) mediante el Principio de Máximo Completo (PMC), propiedad que posee el operador en cuestión.

La estructura de este texto se divide en tres partes. Primero, un capítulo de preliminares, donde se introducen los procesos de Markov a tiempo continuo y se hacen alcances de Teoría de Potencial Probabilista, continua y discreta, entre otras herramientas necesarias para los resultados que se prueban.

Posteriormente, el segundo apartado habla sobre el kernel de Green del movimiento browniano con drift, encontrándose las densidades respectivas con respecto a la medida de Lebesgue y haciendo el análisis de regularidad de la resolvente.

Finalmente, el tercer y último capítulo condensa la demostración del teorema central de esta memoria, probando PMC para el operador, encontrando el proceso deseado y coronando con la unicidad de éste.

Este trabajo es autocontenido, siempre y cuando el lector domine los conceptos esenciales de Análisis Real, Teoría de la Medida y Probabilidades.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este capítulo se definirán los elementos fundamentales de nuestra teoría básica y se recopilarán sus propiedades más relevantes, de acuerdo al interés de este trabajo de tesis. Para ello, hemos tomado como inspiración a [2], [3], [5], [6], [10] y [13], textos esenciales en lo que concierne a Procesos de Markov y Teoría de Potencial Probabilista.

La estructura de este apartado consta de una revisión de la teoría de kernels y semigrupos submarkovianos, para posteriormente estudiar a fondo a los procesos de Markov a tiempo continuo y establecer un vínculo entre ellos y la teoría de potencial continua y discreta, mediante el estudio de la resolvente y el operador de potencial. También se hace una breve revisión al paseo aleatorio simple y sus aspectos más relevantes, cerrándose este capítulo con el caso de las potencias de Hadamard del kernel de Green del movimiento browniano, importantísimo precedente para este trabajo.

En lo que sigue, E denotará un espacio Hausdorff, localmente compacto con base numerable (segundo contable), el cual estará dotado de la σ-álgebra boreliana, $\mathcal{B}(E)$. El espacio de las funciones continuas sobre E a valores reales lo anotaremos como $\mathcal{C}(E)$; el subespacio de $\mathcal{C}(E)$ de funciones que se anulan en infinito se simbolizará por por $\mathcal{C}_0(E)$; $\mathcal{C}_\mathrm{b}(E)$ será el subespacio de $\mathcal{C}(E)$ de funciones acotadas; $\mathcal{C}_\mathrm{c}(E)$ denotará a las funciones continuas a soporte compacto. Por último, $\mathbb{B}(E)$ representará el espacio de funciones (a valores reales) medibles y acotadas sobre E. Recordemos que $\mathcal{C}_0(E)$, $\mathcal{C}_\mathrm{b}(E)$ y $\mathbb{B}(E)$ son espacios de Banach si se les dota de la norma uniforme, $\|\cdot\|_\infty$.

1.1. Kernels y semigrupos

Partimos con la definición de *kernel*, noción básica para este trabajo.

Definición 1.1. Un *kernel submarkoviano* sobre E es una función $N : E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ tal que

i) para cada $A \in \mathcal{B}(E)$, la función $x \mapsto N(x,A)$ es $\mathcal{B}(E)$-medible; y
ii) para todo $x \in E$, $A \mapsto N(x,A)$ es una medida (positiva) sobre $\mathcal{B}(E)$ con masa total igual o menor a 1.

Diremos que un kernel submarkoviano es *markoviano* si su masa total es exactamente 1.

Dado un kernel N, se puede considerar su acción sobre una función, siempre y cuando haya «integrabilidad»: si $f : E \to \mathbb{R}$ es medible y acotada (o bien medible y positiva), entonces se define $Nf : E \to \mathbb{R}$ como

$$\forall x \in E, \quad Nf(x) \doteq \int_E N(x, dy) f(y). \tag{1.1}$$

La notación es consistente con el carácter de medida de N: si tomamos $f = \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}(E)$, entonces $N\mathbb{1}_A(x) = N(x, A)$. Por otro lado, gracias a la propiedad i) de la definición 1.1, se tiene que para $f \in \mathbb{B}(E)$, entonces $Nf \in \mathbb{B}(E)$. Finalmente, se ve que $N : \mathbb{B}(E) \to \mathbb{B}(E)$ es un operador lineal, gracias a la linealidad de la integral; continuo, gracias a la masa finita del kernel; y positivo, debido a que Nf es una integral. También se tiene una recíproca.

Proposición 1.2 *Sea $T : \mathbb{B}(E) \to \mathbb{B}(E)$ un operador lineal positivo con $T1(x) \leq 1$ para cada $x \in E$, tal que para toda sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{B}(E)$ creciente y convergente a $f \in \mathbb{B}(E)$, se tiene que $\lim_{n \to +\infty} Tf_n = f$. Luego existe un kernel submarkoviano N que representa a T: para toda $f \in \mathbb{B}(E)$ y todo $x \in E$,*

$$Tf(x) = \int_E N(x, dy) f(y).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar para cada $A \in \mathcal{B}(E)$, $N(x, A) \doteq T\mathbb{1}_A(x)$. Las propiedades deseadas se deducen inmediatamente por escalamiento. $\square$

A continuación, daremos paso a una de las definiciones más significativas para este trabajo, la de *semigrupo submarkoviano*.

Definición 1.3. Una colección $(P_t)_{t \geq 0}$ de kernels submarkovianos se dice *semigrupo submarkoviano de transición* si para cada $f \in \mathcal{B}(E)$, $x \in E$, y $s, t \geq 0$,

$$P_{t+s} f(x) = P_t(P_s f)(x). \tag{1.2}$$

El semigrupo $(P_t)_{t \geq 0}$ se dirá *markoviano* si los kernels P_t son markovianos para cada $t \geq 0$.

Observación Muchas veces en la definición 1.3 se exige además que $P_0 = I$, el operador identidad. Para efectos de este trabajo, sólo en ciertos casos se tomará esta convención.

Si se quiere visualizar qué representa un semigrupo submarkoviano, se puede pensar en una partícula puntual que inicia su viaje en el punto x. La cantidad $P_t(x, A)$ indica la probabilidad de que ésta se encuentre dentro de A a tiempo t. La ecuación (1.2) indica que en un intervalo de tiempo $[0, t + s]$ es equivalente estudiar el comportamiento de la partícula desde tiempo 0 hasta s y luego desde s hasta $s + t$, a evaluar la trayectoria completa.

En vista del último párrafo, puede sonar impreciso hablar de probabilidad cuando no necesariamente se exige que las medidas inducidas por los kernels del semigrupo tengan peso total igual a 1. Interpretativamente, ello se puede ver como una «pérdida de masa» del movimiento: la partícula sencillamente tiene la chance de desaparecer del mapa durante su trayectoria. Esta discusión apunta a darle sentido a la siguiente construcción, cuyo objetivo es convertir un semigrupo estrictamente submarkoviano en uno markoviano, y así reducir el análisis sólo a este último caso.

Sea $\partial \notin E$ y definamos $E_\partial \doteq E \cup \{\partial\}$. Si E es compacto, ∂ es un punto aislado del conjunto original; si no, aprovechamos la estructura topológica que le dimos a E para decir que E_∂ es la compactificación de Alexandroff de E (construcción detallada en la sección 8 del capítulo 11 de [7]). Dotaremos a E_∂ de la σ-álgebra boreliana $\mathcal{B}(E_\partial)$. A continuación, procedemos a definir un nuevo semigrupo $(P'_t)_{t\geq 0}$ sobre $(E_\partial, \mathcal{B}(E_\partial))$. La idea es repartir la masa remanente hacia el estado cementerio ∂. Así, para $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{B}(E)$:

$$\begin{aligned} P'_t(x, A) &\doteq P_t(x, A); \\ P'_t(x, \{\partial\}) &\doteq 1 - P_t(x, E), \quad \text{si } x \neq \partial; \\ P'_t(\partial, E) &\doteq 0, \quad P'_t(\partial, \{\partial\}) \doteq 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Evidentemente, el semigrupo $(P'_t)_{t\geq 0}$ es markoviano. A lo largo de este trabajo será provechoso tomar la convención de que toda función $f : E \to \mathbb{R}$ se extienda a E_∂ mediante $f(\partial) = 0$. Gracias a esta construcción, de ahora en adelante nos remitiremos sólo al caso markoviano.

1.2. Procesos de Markov

En la subsección anterior se definió lo que es un semigrupo markoviano, sin hablar de algún proceso estocástico subyacente o de la propiedad de Markov. Aquí haremos esos alcances, ya empapándonos de aspectos provenientes de la teoría de procesos. De ahora en adelante, $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ denotará un espacio de probabilidad filtrado; es decir, $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, $\mathbb{P}$ es medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es una familia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Recordemos que una colección $(X_t)_{t\geq 0}$ se dice *proceso estocástico* si para cada $t \geq 0$, X_t es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{F}$-medible (cosa que se anotará de ahora en adelante como $X_t \in \mathcal{F}$).

1.2.1. Definiciones básicas y ejemplos

Comencemos con definir qué es un *proceso de Markov*.

Definición 1.4. Sea $(P_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo de transición markoviano. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, se dirá que es un *proceso de Markov con función de transición* $(P_t)_{t\geq 0}$ si se cumple la *propiedad de Markov débil*: para cada $t, s \geq 0$ y $f \in \mathbb{B}(E)$,

$$\mathbb{E}(\, f(X_{t+s}) |\, \mathcal{F}_t) = P_s(X_t, f) \text{ c.s.} \tag{1.4}$$

Observación Es importante destacar que la ecuación (1.4) se debe interpretar como una igualdad entre variables aleatorias. Por un lado, ello conlleva nunca descuidar la dependencia en $\omega \in \Omega$: $X_t(\omega)$. Tampoco olvidemos que ésta es en el sentido *casi seguro*. De ahora en adelante, igualdades entre variables aleatorias siempre se entenderán así, salvo que se explicite lo contrario.

A continuación, procedemos a caracterizar la ley de un proceso de Markov, mediante su acción sobre los cilindros del espacio producto $E^{[0,+\infty)}$.

Definición 1.5. Sea $\mu : \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ dada por $\mu(A) \doteq \mathbb{P}(X_0 \in A)$, para cada $A \in \mathcal{B}(E)$. La medida μ se denominará la *distribución inicial* del proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$.

Sean $n \geq 1$, $f \in \mathbb{B}(E^n)$ y $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$. A partir de lo anterior, y gracias a la forma funcional del teorema de la clase monótona, se ve que

$$\mathbb{E}(f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})) = \int_E \mu(dx_0) \int_E P_{t_1}(x_0, dx_1) \cdots \int_E P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.5}$$

Tomando conjuntos $A_j \in \mathcal{B}(E)$, para $j = 1, \ldots, n$ y definiendo $f = \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_n}$, se recuperan las *leyes finito-dimensionales* del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$. Recíprocamente, dado un semigrupo markoviano, es posible construir un proceso que tenga esas leyes, gracias al teorema de Kolmogorov (cuya demostración e intuición se pueden leer en [11]).

Teorema 1.6 *Sea $\Omega = E^{[0,+\infty)}$. Dado un semigrupo markoviano $(P_t)_{t\geq 0}$ y una distribución inicial μ, es posible construir un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ tal que su ley están dadas por (1.5).*

De ahora en adelante, supondremos que en el espacio de probabilidad inicial, al darnos una distribución inicial y un semigrupo markoviano, siempre existirá un proceso de Markov con esa ley. En particular, al tomar un semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$, $x \in E$ y $\mu = \delta_x$, la *delta de Dirac en x*, diremos que el proceso asociado $(X_t)_{t\geq 0}$ *parte en x*. Sea $\mathcal{F}^0 \doteq \sigma(\{X_s : s \geq 0\}) \subseteq \mathcal{F}$. La medida de probabilidad $\mathbb{P}_x$ generada por $(X_t)_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{F}^0$ se convertirá en un objeto de gran relevancia, dado que nos permitirá expresar la propiedad de Markov de una manera astuta. Nótese que lo anterior no sólo aplica para la delta de Dirac, sino para toda μ medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(E)$. Más aún, para cada $\Lambda \in \mathcal{F}^0$,

$$\mathbb{P}_\mu(\Lambda) = \int_E \mu(dx)\, \mathbb{P}_x(\Lambda). \tag{1.6}$$

Sea $\mathbb{E}_x$ la esperanza asociada a la medida $\mathbb{P}_x$, construida en el párrafo anterior. Si tomamos $Y = \mathbb{1}_A(X_t)$, para $A \in \mathcal{B}(E)$, gracias a (1.5) se deduce que

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A) = \mathbb{E}_x(Y) = P_t(x, A). \tag{1.7}$$

Así, la propiedad de Markov débil, expuesta en (1.4), se convierte en

$$\mathbb{P}(X_{s+t} \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}_{X_t}(X_s \in A) = P_s(X_t, A), \quad \forall t, s \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(E). \tag{1.8}$$

Si queremos obtener más generalidad y una escritura un poco más compacta, es posible hacerlo: basta introducir lo que es un *operador de shift*.

Definición 1.7. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico subyacente al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Una colección $(\theta_t)_{t\geq 0}$ donde para cada $t \geq 0$, $\theta_t : \Omega \to \Omega$, se dirá *shift* si actúa de la siguiente forma:

$$\forall t \geq 0, \quad (X_s \circ \theta_t)(\omega) = X_s(\theta_t \omega) = X_{s+t}(\omega). \tag{1.9}$$

Gracias a este artilugio, es posible escribir la propiedad de Markov débil (1.8) como

$$\mathbb{E}(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(Y), \quad \forall Y \in \mathbb{B}(E), \forall t \geq 0. \tag{1.10}$$

Observación *A priori*, nada asegura la existencia de un shift en el espacio de probabilidad atingente. Sin embargo, en el caso del espacio canónico $\Omega = E^{[0,+\infty)}$, basta definir un shift del siguiente modo: para $\omega \in \Omega$,

$$\theta_t \omega \doteq X(t + \cdot, \omega).$$

Para no complicarnos, siempre supondremos que dados un proceso de Markov (o bien un semigrupo markoviano) y un espacio de probabilidad, entonces existe un shift asociado a ellos.

Habiendo terminado con las definiciones más elementales, demos paso a algunos ejemplos clásicos de procesos de Markov.

Ejemplo (Cadenas de Markov) Aquí tomaremos E como un conjunto discreto. Dado que $\mathcal{B}(E) = \mathcal{P}(E)$, para construir una medida basta con definir su valor en cada síngleton $\{j\}$, con $j \in E$. Con ello, para precisar un semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$, basta con explicitar para cada $t \geq 0$, la cantidad $P_t(i, \{j\})$, para todo $\forall i, j \in E$. Así, para $A \subseteq E$,

$$P_t(i, A) = \sum_{j \in A} P_t(i, \{j\}).$$

Otra consecuencia de la numerabilidad del espacio es que la medibilidad de los (*a posteriori*) kernels se satisface trivialmente.

Para que el semigrupo sea markoviano, basta con exigir que

$$\forall i \in E, \quad \sum_{j \in E} P_t(i, \{j\}) = 1.$$

Finalmente, para obtener la propiedad de semigrupo, se debe imponer que

$$\forall i \in E, \forall k \in E, \quad P_{s+t}(i, \{k\}) = \sum_{j \in E} P_s(i, \{j\}) P_t(j, \{k\}).$$

Ejemplo (Movimiento browniano (MB) en $\mathbb{R}^d$) El ejemplo del movimiento browniano es fundamental para nuestro estudio; de él provendrá parte del problema a abordar en esta tesis. Aquí $E = \mathbb{R}^d$, con $d \geq 1$, dotado de la norma euclidiana $\|\cdot\|$; dx representará la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. El kernel de transición (markoviano) está dado por $P_t(x,dy) \doteq p_t(x-y)dy$ para $x \in E$ y $t > 0$, con

$$p_t(z) \doteq \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|z\|^2}{2t}\right); \tag{1.11}$$

para $t = 0$, se tomará el kernel identidad; es decir, $P_0(x,dy) = \delta_x(dy)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Para avanzar en la teoría, nos damos cuenta de que al trabajar con procesos estocásticos, no sólo las variables aleatorias en cuestión deben ser los objetos sujetos a la aleatoriedad —valga la redundancia—, sino también, el conjunto de índices (en nuestro caso, $[0,+\infty)$): el tiempo. Recordamos la clásica definición de *tiempo de parada*.

Definición 1.8. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,+\infty]$ se dirá *tiempo de parada* si para cada $t \geq 0$,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{1.12}$$

Inmediatamente conectamos lo recién definido con los procesos estocásticos.

Definición 1.9. Para $(X_t)_{t\geq 0}$ proceso estocástico y τ tiempo de parada definimos el *proceso detenido* como la variable aleatoria $X_{\tau(\omega)}(\omega)$, para cada $\omega \in \Omega$.

Más aún, se puede conectar toda esta construcción con la filtración.

Definición 1.10. Dado τ tiempo de parada, definimos la *σ-álgebra de eventos anteriores* como

$$\mathcal{F}_T \doteq \{\Lambda \in \mathcal{F} \mid \forall t \geq 0, \Lambda \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}. \tag{1.13}$$

Es posible aterrizar lo discutido en el párrafo anterior a la definición 1.8 para nuestro caso, adaptando la propiedad de Markov (condensada en (1.10)) a esta idea de otorgarle aleatoriedad al tiempo. De aquí en adelante se supondrá que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ está *completada* (i.e., contiene a los conjuntos $\mathbb{P}$-negligibles) y es *continua a la derecha*: para todo $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}, \tag{1.14}$$

donde definimos $\mathcal{F}_{t+} \doteq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

Definición 1.11. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Markov. Se dirá que es un *proceso de Markov fuerte* si satisface la *propiedad de Markov fuerte*: para cada $f \in \mathbb{B}(E)$, $t \geq 0$ y todo tiempo de parada τ,

$$\mathbb{E}\big(f(X_{t+\tau})\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \,\big|\, \mathcal{F}_\tau\big) = \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} P_t f(X_\tau). \tag{1.15}$$

Observación Tal como se dedujo (1.10), tenemos que la definición 1.11 es equivalente a que para toda $Y \in L^1(\mathcal{F}^0)$ y todo τ tiempo de parada,

$$\mathbb{E}(Y \circ \theta_\tau \,|\, \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}_{X_\tau}(Y), \tag{1.16}$$

recordando la dependencia en ω de τ para definir el shift en el lado izquierdo: $\theta_{\tau(\omega)}$.

1.2.2. Más hipótesis para procesos de Markov

En el apartado anterior se definió bien qué es un proceso de Markov, la propiedad de Markov fuerte y toda la maquinaria básica necesaria para trabajar en este contexto. A continuación, sencillamente daremos más hipótesis sobre nuestros procesos de Markov, ya que lo que se busca es tener cierta regularidad sobre éstos; es decir, buscamos que ellos satisfagan ciertos criterios de continuidad. Aproximémonos primero desde el semigrupo.

Definición 1.12. Un semigrupo markoviano $(P_t)_{t\geq 0}$ se dirá *felleriano* o *de Feller* si $P_0 = I$; y

i) $\forall f \in \mathcal{C}_0(E), \forall t \geq 0,$

$$P_t f \in \mathcal{C}_0(E); \text{ y} \tag{1.17}$$

ii) $\forall f \in \mathcal{C}_0(E),$

$$\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0. \tag{1.18}$$

Un proceso de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ originado por un semigrupo de Feller se dirá *proceso de Feller*.

A continuación, apreciamos la regularidad sobre el proceso que otorga la propiedad de Feller sobre el semigrupo.

Teorema 1.13 *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ proceso de Feller. Entonces éste posee una versión con trayectorias $t \mapsto X_t$ continuas a la derecha y con límites a la izquierda (i.e., càdlàg).*

Otra consecuencia del carácter felleriano de un proceso puede observarse en los eventos alojados en $\mathcal{F}_0$. Aquí se ocupa intensivamente el que la filtración esté completada.

Teorema 1.14 (Ley 0-1 de Blumenthal) *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ proceso de Feller y tomemos $\Lambda \in \mathcal{F}_0$. Entonces para cada $x \in E$, $\mathbb{P}_x(\Lambda) \in \{0, 1\}$.*

1.3. La resolvente y el operador de potencial

A continuación damos un giro en nuestra exposición para centrarnos en objetos de carácter analítico, construidos éstos a partir de los procesos estocásticos.

1.3.1. La resolvente

Definición 1.15. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ proceso de Markov continuo a la derecha, con semigrupo generador $(P_t)_{t\geq 0}$. Para $\alpha > 0$, se define el *operador de α-potencial* como

$$U_\alpha f(x) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(X_t)\, dt\right), \tag{1.19}$$

para toda $f \in \mathbb{B}(E)$ y $x \in E$. La familia de operadores $(U_\alpha : \alpha > 0)$ se denomina la *resolvente* (asociada a $(X_t)_{t\geq 0}$ ó a $(P_t)_{t\geq 0}$).

Vamos con algunos comentarios sobre la definición 1.15.

Observación La continuidad a la derecha se exige para asegurar la medibilidad conjunta de $(t,x) \mapsto P_t f(x)$, para cada $f \in \mathbb{B}(E)$.

Observación La segunda igualdad de (1.19) se deduce del teorema de Fubini.

Al mirar la construcción del α-potencial se ve que no es más que la *transformada de Laplace* de $t \mapsto P_t f(x)$; i.e., se heredan sus propiedades esenciales (condiciones para la unicidad, regularidad, etc.). Por otro lado, tenemos derecho a nombrar el α-potencial como un kernel, invocando la proposición 1.2, notando que $U_\alpha(\mathbb{B}(E)) \subseteq \mathbb{B}(E)$. Veamos algunas propiedades de la resolvente, bajo la hipótesis de semigrupo Felleriano.

Proposición 1.16 *Supongamos que $(U_\alpha : \alpha > 0)$ es la resolvente asociada a $(P_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo de Feller. Entonces:*

i) se satisface la ecuación de la resolvente*: para cada $f \in \mathbb{B}(E)$,*

$$U_\alpha f - U_\beta f = (\beta - \alpha) U_\alpha U_\beta f = (\beta - \alpha) U_\beta U_\alpha f. \tag{1.20}$$

ii) Para todo $\alpha > 0$,

$$\|\alpha U_\alpha\|_{\mathcal{L}(\mathbb{B}(E))} \leq 1, \tag{1.21}$$

donde $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{B}(E))}$ es la norma asociada al espacio de operadores lineales sobre $\mathbb{B}(E)$, denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{B}(E))$.

iii) Para cada $\alpha > 0$ y toda $f \in \mathcal{C}_0(E)$, entonces $U_\alpha f \in \mathcal{C}_0(E)$. Más aún, para toda $f \in \mathcal{C}_0(E)$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \|\alpha U_\alpha f - f\|_\infty = 0. \tag{1.22}$$

Demostración. La más simple de probar es ii): sean $\alpha > 0$ y $f \in \mathbb{B}(E)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$. Así, para $x \in E$:

$$|U_\alpha f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \|f\|_\infty \, dt = \frac{1}{\alpha} \|f\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha},$$

de donde deducimos iii) al tomar supremo sobre $x \in E$.

Para demostrar la ecuación de la resolvente tomemos $\alpha \neq \beta$, $f \in \mathbb{B}(E)$ y $x \in E$. Así,

$$\begin{aligned}
U_\alpha U_\beta f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \left(P_s \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} P_t f(x)\, dt \right) \right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s - \beta t} P_{s+t} f(x)\, dt\, ds \\
&= \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{(\beta-\alpha)s} e^{-\beta u} P_u f(x)\, du\, ds \quad \text{(haciendo el c.v. } u = s + t) \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{u} e^{(\beta-\alpha)s} e^{-\beta u} P_u f(x)\, ds\, du \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha u} - e^{-\beta u}}{\beta - \alpha} P_u f(x)\, du \\
&= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\int_0^{+\infty} e^{\alpha u} P_u f(x)\, du - \int_0^{+\infty} e^{-\beta u} P_u f(x)\, du \right) \\
&= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(U_\alpha f(x) - U_\beta f(x) \right),
\end{aligned}$$

que completa esa parte de la demostración.

Finalmente, para la primera afirmación de iii), basta usar convergencia dominada y (1.17). Para (1.22), tomemos $f \in \mathcal{C}_0(E)$ y acotemos:

$$\begin{aligned}
\|\alpha U_\alpha f - f\|_\infty &= \sup_{x\in E} |\alpha U_\alpha f(x) - f(x)| \\
&= \sup_{x\in E} \left| \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt - \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(x)\, dt \right| \\
&\leq \sup_{x\in E} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} \left| P_t f(x) - f(x) \right| \, dt \\
&= \sup_{x\in E} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left| P_{\frac{u}{\alpha}} f(x) - f(x) \right| \, du \quad \text{(haciendo el c.v. } u = \alpha t) \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-u} \left\| P_{\frac{u}{\alpha}} f - f \right\|_\infty du.
\end{aligned}$$

Pero, gracias a (1.18), la norma dentro de la última integral se va a 0, por lo que, nuevamente, gracias a convergencia dominada se acaba la demostración, al hacer $\alpha \to +\infty$. □

Observación Notemos que la propiedad de Feller sólo se usó para demostrar i). Es decir, ii) y iii) son verdaderas para cualquier semigrupo markoviano.

Observación En ii) también es usual considerar otros espacios funcionales, como por ejemplo $\mathcal{C}_0(E)$ ó $\mathcal{C}_\mathrm{b}(E)$. En el fondo, se puede trabajar una resolvente sobre cualquier espacio de Banach.

Concretamente, el giro de nuestra exposición radica en que podríamos tomar como objeto central a la resolvente —antes lo fueron el semigrupo y el proceso estocástico en sí— y hacer teoría *desde* ella. En particular, las tres propiedades expuestas en la proposición 1.16 pueden ser el punto de partida, que es a lo que apunta la próxima definición.

Definición 1.17. Una familia $(U_\alpha : \alpha > 0)$ de operadores lineales continuos sobre $\mathbb{B}(E)$ se dirá *resolvente* si satisface i) de 1.16. Una resolvente se dirá *de contracción* si verifica ii) de 1.16 y *regular* si cumple iii) de 1.16.

Al partir con la resolvente, en vez del semigrupo, para hacer teoría, la verdad es que no se pierde mucho; es más, ambos están íntimamente ligados. Esta idea queda plasmada y formalizada en el teorema de Hille-Yosida, cuya demostración —que es constructiva— se puede leer en [6].

Teorema 1.18 (Hille-Yosida) *Sea $(U_\alpha : \alpha > 0)$ una resolvente de contracción regular sobre $\mathbb{B}(E)$. Entonces existe un semigrupo de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ tal que para todo $\alpha > 0$,*

$$\forall f \in \mathbb{B}(E), \forall x \in E, \quad U_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt. \tag{1.23}$$

1.3.2. El operador de potencial

Un lector o una lectora agudos se podrán estar preguntando qué ocurre al tomar $\alpha = 0$ en la definición 1.15. Es evidente que perdemos propiedades al hacer eso; por ejemplo, la integral puede que no converja, cosa que se verá en algunos ejemplos más adelante.

Definición 1.19. Dado un semigrupo $(P_t)_{t\geq 0}$, definimos el *operador de potencial* U ó U_0 como

$$Uf(x) \doteq U_0 f(x) \doteq \int_0^{+\infty} P_t f(x)\, dt, \tag{1.24}$$

para toda $f \in \mathbb{B}(E)$ y $x \in E$, cuando la integral tenga sentido.

Observación Para f medible positiva —vía teorema de convergencia monótona— se tendrá que $\lim_{\lambda \searrow 0} U_\lambda f = Uf$.

Observación Cuando Uf tiene sentido, la ecuación de la resolvente (1.20) se extiende para todo $\alpha, \beta \geq 0$.

Observación Si se quiere calcular el potencial de f medible positiva, (1.24) se convierte en

$$Uf(x) = \int_0^{+\infty} P_t f(x)\, dt = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\, dt\right), \tag{1.25}$$

recuperándose el espíritu de la segunda igualdad de (1.19).

Si en (1.25) tomamos $f = \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}(E)$, la ecuación se convierte en

$$Uf(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(X_t)\, dt\right) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_t \in A\}}\, dt\right). \tag{1.26}$$

Dándole significado a esto último, vemos que el potencial de una indicatriz cuantifica el tiempo esperado que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ *gasta* en el conjunto A a lo largo de su trayectoria.

1.3.3. Ejemplos

Demos algunos ejemplos de resolvente y potencial, antes de adentrarnos más profundamente en el estudio de este último operador en sí. Este apartado se inspira en [3] y [10].

Ejemplo (Movimiento browniano en $\mathbb{R}^d$) Para calcular el α-potencial recordemos lo visto en el ejemplo del MB en $\mathbb{R}^d$. Para $\alpha \geq 0$ definamos

$$u_\alpha(z) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p_t(z)\, dt, \quad \forall z \in \mathbb{R}^d. \tag{1.27}$$

Así, para f medible positiva y $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} U_\alpha f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(x-y)\, dy\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) u_\alpha(x-y)\, dy, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Fubini en la última igualdad.

Si queremos verificar la existencia del operador de potencial U, se puede ver que para el caso $d = 1$ y $d = 2$, $u_0 \equiv +\infty$, por lo que en esas dimensiones, $Uf \equiv +\infty$, para cada $f \neq 0$.

Para $d \geq 3$, el operador de potencial no es trivial. La densidad (1.27) para $\alpha = 0$ se puede expresar como

$$u_0(z) = \frac{C_d}{\|z\|^{d-2}}, \tag{1.28}$$

con $C_d \doteq \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{2\pi^{d/2}}$.

Para fijar ideas, desarrollaremos $d = 3$, pero el caso $d > 3$ es bastante parecido. Tenemos que para esta dimensión, (1.28) se encarna en

$$u_0(z) = \frac{1}{2\pi \|z\|}, \tag{1.29}$$

y así

$$U(x, dy) = \frac{1}{2\pi \|x-y\|}\, dy. \tag{1.30}$$

Si tomamos f medible, acotada y a soporte compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$, vemos que para $x \in \mathbb{R}^d$ y $\delta > 0$:

$$Uf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{f(y)}{\|x-y\|}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{K\cap B(x,\delta)} \frac{f(y)}{\|x-y\|}\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{K\setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)}{\|x-y\|}\, dy. \tag{1.31}$$

La primera integral después de la segunda igualdad en (1.31) está acotada por $\frac{\|f\|_\infty \delta^2}{4}$; la segunda, al no estar integrando sobre la singularidad en x, es una cantidad continua en x y acotada por $\frac{\|f\|_\infty m(K)}{\delta}$, donde $m(\cdot)$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. O sea, Uf es una función continua y acotada.

En otras palabras, hemos apreciado que el operador de potencial para el movimiento browniano en $d = 3$ no es trivial y, más aún, posee un efecto regularizador: toma una función medible acotada a soporte compacto y devuelve una función continua acotada.

Ejemplo (Movimiento browniano detenido en 0) Tomemos $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar en $\mathbb{R}$. Sea $T_0 \doteq \inf\{t > 0 \mid B_t = 0\}$, el primer instante en que el browniano toca el origen, que es tiempo de parada (salvo que se diga lo contrario, siempre tomaremos la convención $\inf\{\varnothing\} = +\infty$). Definimos el *movimiento browniano detenido en 0* como el proceso estocástico $\left(\widehat{B}_t\right)_{t\geq 0}$ que vive sobre $(0, +\infty) \cup \{\partial\}$, con $\partial \notin (0, +\infty)$ (tal como en (1.3)), dado para cada $t \geq 0$ por

$$\begin{aligned} \widehat{B}_t &\doteq B_t, \quad \text{sobre } \{t < T_0\}, \\ \widehat{B}_t &\doteq \partial, \quad \text{sobre } \{t \geq T_0\}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Se puede ver que gracias al *principio de reflexión* (leer [9], página 97), $\left(\widehat{B}_t\right)_{t\geq 0}$ tiene un semigrupo de Feller asociado (el resultado general para el movimiento browniano detenido se ve en la página 177 de [3]), dado por

$$\forall f \in \mathbb{B}((0, +\infty)), \forall x \in (0, +\infty) \quad Q_t f(x) = \int_0^{+\infty} f(y)\left(p_t(x-y) - p_t(x+y)\right) dy. \tag{1.33}$$

Como se ve en la página 133 de [10], el potencial asociado a $\left(\widehat{B}_t\right)_{t\geq 0}$ está dado por

$$\forall x \in (0, +\infty), \quad Uf(x) = 2\int_0^{+\infty} (x \wedge y) f(y)\, dy. \tag{1.34}$$

Es claro que este último operador tiene una integrabilidad muy pobre, a pesar del carácter felleriano de $(Q_t)_{t\geq 0}$. Es decir, buena regularidad en el semigrupo no es una propiedad que necesariamente se herede al potencial.

1.3.4. El teorema de Hunt

Luego de estos ejemplos, ahondemos más en el estudio del operador de potencial. En lo que se ha expuesto hasta el momento, hemos trabajado en ver cuándo una resolvente admite un potencial con cierto nivel de regularidad. A continuación presentamos un teorema que establece condiciones para decir que un determinado operador es el potencial de una resolvente proveniente de un semigrupo felleriano. Su demostración puede ser vista en [10] ó [6].

Diremos que un operador lineal positivo $G : X(E) \to Y(E)$, con $X(E)$ e $Y(E)$ espacios de funciones a valores reales sobre E, satisface el *principio del máximo completo (PMC)*: para cada $h \in X(E)$,

$$\sup_{\{x\in E \,|\, h(x)\geq 0\}} Gh(x) \leq 1 \Longrightarrow \sup_{x\in E} Gh(x) \leq 1. \tag{1.35}$$

Teorema 1.20 (Hunt) *Sea $G : \mathcal{C}_0(E) \to \mathcal{C}_0(E)$ un operador lineal continuo positivo. Los siguientes son equivalentes:*

i) *G es el potencial de un semigrupo de Feller $(P_t)_{t\geq 0}$ sobre E.*

ii) *G satisface el principio del máximo completo y la imagen de $\mathcal{C}_0(E)$ según G es densa en $\mathcal{C}_0(E)$.*

1.3.5. Funciones supermedianas y el proceso de Ray

El presente apartado no dista mucho de lo hecho en la anterior, en el sentido de que también usaremos los conceptos de resolvente y semigrupo, salvo que miraremos a estos objetos en su acción sobre $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E)$, en vez de $\mathcal{C}_0(E)$. Sea $(U_\alpha : \alpha \geq 0)$ una resolvente de contracción (tal como en la definición 1.17), donde los operadores U_α son positivos.

Definición 1.21. Una función $f \in \mathbb{B}(E)_+$ (donde el subíndice $+$ indica que las funciones son positivas) se dirá *supermediana* si

$$\alpha U_\alpha f(x) \leq f(x), \quad \forall x \in E, \forall \alpha \geq 0. \tag{1.36}$$

$\mathcal{M}_+$ denotará el conjunto de funciones supermedianas y a su vez definiremos $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}_+ - \mathcal{M}_+, \mathcal{H} \doteq \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E) - \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E)$.

Notemos que si $f \in \mathcal{M}_+$ y $x \in E$, gracias a la ecuación de la resolvente (1.20), luego la función $\alpha \mapsto \alpha U_\alpha f(x)$ será creciente, por lo que tiene sentido definir

$$\widehat{f}(x) \doteq \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha U_\alpha f(x), \quad \forall x \in E. \tag{1.37}$$

Es directo ver que la función $\widehat{f}$ es tal que $\widehat{f} \leq f$ y $\widehat{f} \in \mathcal{M}_+$. $\widehat{f}$ se dirá la *regularización excesiva* de $f \in \mathcal{M}_+$. Vamos con el resultado central de esta subsección, cuya demostración se encuentra en [10].

Teorema 1.22 *Sea $(U_\alpha : \alpha \geq 0)$ una resolvente de contracción sobre $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E)$. Bajo la hipótesis de que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_0(E)$ es denso en $\mathcal{C}_0(E)$, entonces es posible construir un semigrupo submarkoviano $(P_t)_{t\geq 0}$ sobre $(E, \mathcal{B}(E))$, tal que para cada $f \in \mathbb{B}(E)$ y todo $x \in E$, $t \mapsto P_t f(x)$ es continua a la derecha y para cada $\alpha \geq 0$,*

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E), \forall x \in E, \quad U_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} P_t f(x)\, dt. \tag{1.38}$$

El semigrupo submarkviano $(P_t)_{t\geq 0}$ se dirá *semigrupo de Ray.*

Observación La novedad del teorema 1.22 es que con hipótesis más débiles se puede construir un semigrupo tal que su transformada de Laplace calce con la resolvente dada inicialmente. La única desventaja es que no necesariamente $P_0 = I$.

Observación En [10] se expone un procedimiento de compactificación, teñido de un espíritu muy semejante a lo que hicimos en (1.3). Este artilugio permite definir el *proceso de Ray*, que es básicamente un proceso de Markov continuo a la derecha, con la excepción de que $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ no se tiene para todo $x \in E$. Se puede ver también que un semigrupo de Ray origina a un proceso de Ray, teniendo un resultado al estilo del teorema 1.6. Otra buena referencia para profundizar es [6], donde la añadidura de un estado cementerio se denomina la *compactificación de Ray*.

1.4. Potencial discreto

A lo largo de este capítulo de preliminares, el concepto central ha sido el de operador de potencial asociado a un proceso estocástico (a un semigrupo, a una resolvente) a tiempo continuo. Es posible extender esta noción cuando estamos en tiempo discreto; es decir, se puede calcular este operador para una cadena de Markov. Acá, E denotará un conjunto discreto. Si se quiere leer una exposición más detallada del tópico, una buena referencia es [5].

Definición 1.23. Una matriz con entradas positivas $U = (U_{i,j})_{i,j\in E}$ se dirá *matriz de potencial* si es invertible y su inversa satisface:

i) para cada $i, j \in E$ con $i \neq j$, se tiene que $(U^{-1})_{i,j} \leq 0$; y
ii) para todo $i \in E$, $\sum_{j\in E}(U^{-1})_{i,j} \geq 0$.

Es posible probar que si U es una matriz de potencial, entonces $P \doteq I - U^{-1}$ es una matriz de entradas positivas y subestocástica, a la que se le puede asociar una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para cada $i, j \in E$,

$$U_{i,j} = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n=j}\right). \tag{1.39}$$

Es decir, $U_{i,j}$ es la esperanza del número de visitas al punto j, partiendo desde i. Concretamente, en el caso discreto se preserva la idea de medir el tiempo esperado que el proceso gasta visitando un determinado lugar, rescatándose la filosofía del potencial continuo, condensada en (1.26).

A continuación, exhibiremos un resultado que será de mucha utilidad para este trabajo de tesis, dado que otorga una caracterización práctica para una matriz de potencial cuando E es finito. Su demostración se puede ver en [4]. Acá $\vec{1}_E$ denotará al vector de dimensión $|E|$, tal que $\forall j \in E$, $\vec{1}_E(j) = 1$; y $(\cdot)^+$ representa a la función parte positiva.

Proposición 1.24 *Sea U una matriz invertible de entradas positivas, indexada por E finito. Si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^E, \quad \left\langle \left(Ux - \vec{1}_E\right)^+, x \right\rangle \geq 0, \tag{1.40}$$

luego U es un potencial. Recíprocamente, si U y $U^\intercal$ son matrices de potencial, entonces se satisface la propiedad (1.40).

Para cerrar este apartado, vamos con un último resultado. Para $\alpha > 0$ definimos la α-*potencia de Hadamard* de una matriz $A = (A_{i,j})_{i,j\in E}$ como la matriz $A^{(\alpha)} \doteq \left(A^{\alpha}_{i,j}\right)_{i,j\in E}$.

Proposición 1.25 *Sea U una matriz de potencial y tomemos $\alpha \geq 1$. Entonces la matriz $U^{(\alpha)}$ también es un potencial.*

1.5. Estudio del paseo aleatorio simple en $\mathbb{Z}$

A lo largo de esta subsección se estudiarán los aspectos básicos del *paseo aleatorio simple* en una dimensión, sobre todo cuando éste es *no simétrico*; es decir, posee una dirección privilegiada. Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sea $(\xi_k)_{k\geq 1}$, sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, todas Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$; es decir, para cada $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\xi_k = +1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_k = -1) = 1 - p.$$

A partir de lo anterior, para $x \in \mathbb{Z}$, definamos un nuevo proceso $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, el *paseo aleatorio simple partiendo en x*: sea $S_0 \doteq x$, y para $n \geq 1$, $S_n \doteq \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Es bien sabido que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso de Markov (a tiempo discreto) y tal como se expuso antes, haremos uso de la medida de probabilidad $\mathbb{P}_x(\cdot)$ cuando $S_0 = x$.

Una propiedad interesante del paseo aleatorio simple consiste en la *homogeneidad espacial*: para $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}_x(S_n = y) = \mathbb{P}_0(S_n = y - x). \tag{1.41}$$

Gracias a ella, es posible simplificar el análisis de este proceso a cuando éste parte en $x = 0$. Por otro lado, notemos que (1.41) no es más que una manifestación de la propiedad de Markov.

1.5.1. La función de Green del paseo aleatorio

Antes se expuso el concepto de *kernel de potencial*, estando éste asociado a un proceso estocástico a tiempo continuo. La verdad es que es factible extender la definición anterior cuando el tiempo es discreto, cosa que aplica al paseo aleatorio.

Definición 1.26. Sea $(S_t)_{t\geq 0}$ el paseo aleatorio simple sobre $\mathbb{Z}$. Se define su *función de Green* $\mathfrak{g} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ como

$$\mathfrak{g}(x, y) \doteq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(S_n = y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}. \tag{1.42}$$

Observación Nótese que gracias a (1.41), $\mathfrak{g}(x, y) = \mathfrak{g}(0, y - x)$.

Si se quiere entender un poco más la trascendencia de el significado de la función de Green, notemos que para $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(x,y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(S_n = y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{S_n=y}) \\ &= \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{S_n=y}\right).\end{aligned}$$

O sea, la matriz (infinita) no es más que el potencial asociado al proceso $(S_t)_{t\geq 0}$, siendo esto un ejemplo de lo visto anteriormente en (1.39).

En el caso simétrico ($p = \frac{1}{2}$) se tiene que $\mathfrak{g} \equiv +\infty$ (cada punto es visitado infinitas veces, casi seguramente). Sin embargo, para $p \neq \frac{1}{2}$ se tiene que $\mathfrak{g}$ es finita y para mejor, es una cantidad con una fórmula explícita y sencilla. Tomaremos el caso $p > \frac{1}{2}$, dado que el otro es absolutamente análogo. Si se desea ver una demostración, se puede revisar [13].

Proposición 1.27 *Sea $(S_t)_{t\geq 0}$ el paseo aleatorio simple con parámetro $p > \frac{1}{2}$. Entonces para $x, y \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathfrak{g}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p-1}, & \text{si } y - x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2p-1}\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^{y-x}, & \text{si } y - x \leq 0. \end{cases} \tag{1.43}$$

1.5.2. Aproximación del MB con drift mediante el paseo aleatorio

Es bien sabido que el MB se puede aproximar bien, mediante un escalamiento adecuado del paseo aleatorio, todo gracias al famoso *teorema de Donsker* (ver [9] para una detallada exposición y demostración), que básicamente nos dice que al tomar una secuencia $(\xi_k)_{k\geq 1}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$(S_{t,n})_{t\geq 0} \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} (B_t)_{t\geq 0},$$

donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano, $\mathcal{D}$ denota convergencia en distribución —al proceso entero— y $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función *parte entera* de un real.

Para aproximar al MB con drift, la heurística es la siguiente: si se considera para cada $n \geq 1$ una sucesión i.i.d. $\left(\xi_k^{(n)}\right)_{k\geq 1}$ Bernoulli de parámetro $p_n = \frac{1}{2} + \frac{\mu/2}{\sqrt{n}}$, entonces se tiene que $\mathbb{E}\left(\xi_k^{(n)}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$ y $\mathrm{Var}\left(\xi_k^{(n)}\right) = 1 - \frac{\mu^2}{n}$. Así, normalizando estas variables aleatorias para «aplicar» Donsker, se obtiene que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \frac{\xi_k^{(n)} - \mathbb{E}\left(\xi_k^{(n)}\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\xi_k^{(n)}\right)}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} (B_t)_{t\geq 0},$$

cosa equivalente a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{n}}}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_k^{(n)}-\frac{\mu}{\sqrt{n}}\lfloor nt\rfloor\right)\right)_{t\geq 0}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}}(B_t)_{t\geq 0}.$$

Finalmente, usando que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor nt\rfloor}{nt}=1$ y $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{\mu^2}{n}}=1$, despejando se obtiene que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_k^{(n)}\right)_{t\geq 0}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}}(B_t+\mu t)_{t\geq 0}.$$

Es decir, mediante un escalamiento adecuado del paseo aleatorio, es posible aproximar al MB con drift. Lo recién discutido no es más que un cálculo *formal*. A continuación presentamos la adaptación de un resultado expuesto en [8] (teorema II.3.2, página 342) que sirve para darle fundamento a los cálculos de arriba.

Lema 1.28 *Sea* $\left(Y_k^{(n)}\right)_{n\geq 1,k\geq 1}$ *una secuencia doble de variables aleatorias reales tales que para cada* $n\geq 1$ *fijo, se tiene que la colección* $\left(Y_k^{(n)}\right)_{k\geq 1}$ *es independiente. Sean* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $h(x)\doteq x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, $(B_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento browniano estándar y* $\mu\in\mathbb{R}$*. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}Y_k^{(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}}(B_t+\mu t)_{t\geq 0},$$

si y sólo si se satisfacen las tres siguientes condiciones:

i) para cada $t>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{s\leq t}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}\Big(h\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)-\mu t\right|=0;$$

ii) para todo $t>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\mathbb{E}\Big(h^2\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)-\Big(\mathbb{E}\Big(h\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)\Big)^2\right)=t;$$

iii) y para cada $t>0$*, y toda función* $f\in\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E)$ *nula en una vecindad abierta de* 0,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}\Big(f\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)=0.$$

Observación El lema recién expuesto proviene de un contexto más general, y provee la convergencia de paseos aleatorios más generales a *procesos de Lévy* (ver la definición 1.33). La adaptación que hemos hecho está ya preprocesada para el caso particular del movimiento browniano con drift.

Ahora apliquemos el lema 1.28 para nuestro propósito particular.

Teorema 1.29 *Sea* $\left(\xi_k^{(n)}\right)_{n\geq 1, k\geq 1}$ *tal como se construyó arriba. Entonces*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_k^{(n)}\right)_{t\geq 0}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}}(B_t+\mu t)_{t\geq 0}.$$

Demostración. Apliquemos el lema anterior con $Y_k^{(n)} \doteq \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_k^{(n)}$. Verifiquemos la primera condición; sea $t > 0$. Para todo $n \geq 1$ se tendrá que $-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \in [-1, 1]$, por lo que al calcular la esperanza, se obtiene

$$\mathbb{E}\Big(h\big(Y_k^{(n)}\big)\Big) = \frac{\mu}{n},$$

y así

$$\begin{aligned}
\sup_{s\leq t}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}\Big(h\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)-\mu t\right| &= \sup_{s\leq t}\left|\lfloor ns\rfloor\frac{\mu}{n}-\mu s\right| \\
&= \frac{|\mu|}{n}\sup_{s\leq t}\left|\lfloor ns\rfloor - ns\right| \\
&\leq \frac{|\mu|}{n}\cdot 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Para probar ii), nuevamente sea $t > 0$. Notemos que

$$\mathbb{E}\Big(h^2\big(Y_k^{(n)}\big)\Big) = \frac{1}{n},$$

para todo $n \geq 1$. Con ello,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\mathbb{E}\Big(h^2\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)-\Big(\mathbb{E}\Big(h\big(Y_k^{(n)}\big)\Big)\Big)^2\right) &= \lfloor nt\rfloor\left(\frac{1}{n}-\frac{\mu^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{\lfloor nt\rfloor}{nt}\cdot nt\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{\mu^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{\lfloor nt\rfloor}{nt}\cdot\left(t-\frac{t\mu^2}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} t,
\end{aligned}$$

donde se usó nuevamente que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor nt\rfloor}{nt} = 1$.

Sólo resta verificar que se satisface iii). En efecto, sea $t > 0$ y tomemos $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(E)$ y supongamos que existe $a > 0$ tal que f se anula en $(-a, a)$. Para todo $n \geq 1$ suficientemente grande, es claro que el soporte de $Y_k^{(n)}$, correspondiente a $\left\{-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$, estará contenido en $(-a, a)$ y en consecuencia, $\mathbb{E}\Big(f\big(Y_k^{(n)}\big)\Big) = 0$. Así, directamente se deduce que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\mathbb{E}\Big(f\big(Y_k^{(n)}\big)\Big) = 0.$$

$\square$

1.6. Potencias del kernel de Green del movimiento browniano

Antes de partir este apartado, vale decir que nos centraremos en el caso del movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$, con $d \geq 3$, salvo que se diga lo contrario. Para $D \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel-medible, definimos $\tau_D \doteq \inf\{t > 0 \mid B_t \notin D\}$, el *tiempo de primera salida de* D.

Definición 1.30. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ el movimiento browniano sobre $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 3$. Definimos para $D \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto no vacío su *operador de Green* asociado, U_D, como el funcional tal que para cada $f \in \mathbb{B}(D)$ y todo $x \in D$,

$$U_D f(x) \doteq \mathbb{E}_x\left(\int_0^{\tau_D} f(B_t)\,dt\right) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(B_{t\wedge\tau_D})\,dt\right). \tag{1.44}$$

Observación Lo anterior no es más que el operador de potencial del MB detenido al salir de D.

Afortunadamente, tenemos una fórmula un poco más explícita para calcular U_D.

Teorema 1.31 *Para $D \subseteq \mathbb{R}^d$ se tiene que U_D tiene densidad $u_D(\cdot,\cdot)$ con respecto a la medida de Lebesgue, dada por*

$$u_D(x,y) = u(x,y) - \mathbb{E}_x(u(B_{\tau_D}, y)), \quad \forall x,y \in D, x \neq y \tag{1.45}$$

con $u(x,y) = u_0(x-y)$ (ver (1.28)).

La densidad otorgada por el teorema 1.31 se denomina el *kernel de Green* asociado a D. El nombre tiene sentido, pues efectivamente el operador lineal U_D genera un kernel, tal como manda la definición 1.1.

Ejemplo Si tomamos $D = B(0,1)$ (con la norma euclidiana), se tiene que

$$u_{B(0,1)}(x,y) = u(x,y) - C_d \cdot \left(\frac{1}{\left|y\,|x| - \frac{x}{|x|}\right|}\right)^{d-2}, \quad \forall x,y \in B(0,1), x \neq y. \tag{1.46}$$

Ejemplo Es claro que si $D = \mathbb{R}^d$, entonces $u_D \equiv u$.

Ya aproximándonos al objetivo de este trabajo de tesis, demos la definición de *potencia de Hadamard*.

Definición 1.32. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ y tomemos u_D su kernel de Green asociado (tal como se ve en el teorema 1.31). Para $\beta > 0$ definimos el operador de *β-potencia de Hadamard* como

$$U_D^{(\beta)} f(x) \doteq \int_D f(y)[u_D(x,y)]^\beta\,dy, \tag{1.47}$$

donde f se pide medible y con la integrabilidad suficiente, tal que la integral converja (por ejemplo, si D es acotado, basta con que f sea acotada).

Para analizar un ejemplo más concreto de lo anterior, construyamos el *movimiento browniano subordinado*. Para ello, recordemos un par de conceptos.

Definición 1.33. Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se dirá *proceso de Lévy* si satisface las siguientes propiedades:

i) $X_0 = 0$;
ii) posee *incrementos independientes*: para todo $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias $\{X_{t_0}, X_{t_k} - X(t_{k-1}), 1 \leq k \leq n\}$ son independientes;
iii) tiene *incrementos estacionarios*: para cada $s, t \geq 0$, $(X_{s+t} - X_t)$ tiene la misma ley que $(X_s - X_0)$; y
iv) es *continuo en probabilidad*: para todo $\varepsilon > 0$ y $t \geq 0$,

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0.$$

Buenos ejemplos de procesos de Lévy son el movimiento browniano d-dimensional, el proceso de Poisson, etc. Uno que en particular aporta a nuestro estudio, es el conformado por los *tiempos de alcance brownianos*: si $(W_t)_{t\geq 0}$ es un browniano unidimensional, para cada $t \geq 0$ consideremos los *tiempos de alcance*

$$\tau_t \doteq \inf\{s \geq 0 \mid W_s > t\}.$$

Se puede probar, con ayuda de la propiedad de Markov fuerte, que $(\tau_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy.

Ahora, sea $0 < \gamma < 1$. Diremos que un proceso de Lévy a valores en $\mathbb{R}_+$ $\left(\eta_t^{(\gamma)}\right)_{t\geq 0}$ es un *subordinador γ-estable* si para cada $t \geq 0$, su transformada de Laplace es de la forma

$$\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda\eta_t^{(\gamma)}}\Big) = e^{-t\lambda^\gamma}, \quad \forall\lambda > 0.$$

Ahora estamos en condiciones de dar la construcción del MB subordinado.

Definición 1.34. Sean $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB d-dimensional, $\alpha > 0$ y $(\eta_t)_{t\geq 0}$ un $\frac{\alpha}{2}$-subordinador, tales que los dos procesos estocásticos son independientes. Definimos el *movimiento browniano subordinado al proceso $\frac{\alpha}{2}$-estable* (en este caso, $(\eta_t)_{t\geq 0}$) como la colección de variables aleatorias dada por $(B_{\eta_t})_{t\geq 0}$.

Exponemos este ejemplo, ya que sienta un precedente importante para lo que queremos desarrollar en esta tesis.

Teorema 1.35 *Sean $d \geq 3$ y $\beta \in [1, \frac{d}{d-2})$. Si se define $\alpha = d - \beta(d-2) \in (0, 2]$, entonces se tiene que para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$,*

$$U_{\mathbb{R}^d}^{(\beta)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)[u(x,y)]^\beta\, dy = C \cdot \mathbb{E}_x\bigg(\int_0^{+\infty} f(X_t)\, dt\bigg), \tag{1.48}$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un MB d-dimensional subordinado a un proceso $\frac{\alpha}{2}$-estable, y

$$C \doteq \frac{\left(\frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{d-\alpha}{d-2}}}{\frac{\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)2^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}}}.$$

Demostración. Sean $(B_t)_{t\geq 0}$ MB d-dimensional y $(\eta_t)_{t\geq 0}$ un $\frac{\alpha}{2}$-subordinador, los procesos que constituyen a $(X_t)_{t\geq 0}$; i.e., $X_t = B_{\eta_t}$. Sea $f \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$ y calculemos su potencial asociado al proceso $(X_t)_{t\geq 0}$. Es bien sabido (usando transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad) que si $\theta_t(s)$ es la densidad (con respecto a Lebesgue en $\mathbb{R}_+$) de la ley de la variable aleatoria η_t, entonces

$$\int_0^{+\infty} \theta_t(s)\, dt = \frac{s^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

Con ello, al efectuar el cálculo y usar la independencia entre los procesos $(B_t)_{t\geq 0}$ y $(\eta_t)_{t\geq 0}$, más el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\, dt\right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x(f(X_t))\, dt = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^{+\infty} p_s(x,y)\theta_t(s)\, ds\, dy\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_s(x,y) \frac{s^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\, ds\, dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^{+\infty} s^{\frac{\alpha}{2}-\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2s}}\, ds\, dy \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) 2^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{d-\alpha}}\, dy,
\end{aligned}$$

donde para pasar a la última línea se ha usado convenientemente la función Gamma junto a un cambio de variables apropiado. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}
C \cdot \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\, dt\right) &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{d-\alpha}{d-2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{d-\alpha}}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left[u_{\mathbb{R}^d}(x,y)\right]^{\beta},
\end{aligned}$$

recordando que $\alpha = d - \beta(d-2)$. $\square$

Observación La constante C del teorema anterior puede ser absorbida por el proceso, mediante un cambio de tiempo del tipo $s = C \cdot t$.

Vamos a un caso concreto para fijar ideas: tomemos $d = 3$ y $\beta = 2$ (i.e., $\alpha = 1$). Con ello, tenemos que $U^{(2)}_{\mathbb{R}^3}$ es

$$U^{(2)}_{\mathbb{R}^3} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y)[u(x,y)]^2\, dy = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \frac{1}{\|x-y\|^2}\, dy. \tag{1.49}$$

En vista del teorema anterior, se tiene que el MB 3-dimensional, subordinado a un proceso $\frac{1}{2}$-estable, tiene un operador de potencial proporcional, con constante $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$, al operador $U_{\mathbb{R}^3}^{(2)}$. Si $(W_t)_{t\geq 0}$ es un MB unidimensional, independiente de un MB 3-dimensional $(B_t)_{t\geq 0}$, al considerar sus tiempos de alcance $(\tau_t)_{t\geq 0}$, se tiene que ellos conforman un proceso de Lévy, y sus transformadas de Laplace están dadas por $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda\tau_t}\big) = e^{\sqrt{2}t\lambda^{\frac{1}{2}}}$, por lo que si tomamos para cada $t \geq 0$, $\eta_t \doteq \tau_{\frac{1}{\sqrt{2}}t}$, se tiene que él es un subordinador $\frac{1}{2}$-estable; i.e., $(B_{\eta_t})_{t\geq 0}$ es el proceso cuyo potencial es proporcional al operador $U_{\mathbb{R}^3}^{(2)}$.

En 2019, en [4] se probó la siguiente generalización del teorema 1.35.

Teorema 1.36 *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto regular (para el movimiento browniano), con $d \geq 3$, y $1 \leq \beta < \frac{d}{d-2}$. Entonces el operador $U_D^{(\beta)}$ corresponde al kernel de potencial de un único proceso de Feller $(X_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias càdlàg sobre $D \uplus \{\partial\}$. Es decir, para toda $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(D) \cap L^1(D, \mathcal{B}(D), dx)$ y cada $x \in D$,*

$$U_D^{(\beta)} f(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\,dt\right). \tag{1.50}$$

En el resultado anterior, el que un conjunto D sea *regular para el MB*, alude a que para cada $x \in \partial D$, $\mathbb{P}_x(\tau_D = 0) = 1$. Se puede probar que un abierto con frontera regular, en términos de *suavidad diferencial*, es regular para el MB.

Capítulo 2

Estudio del movimiento browniano con drift en $\mathbb{R}^d$

Se puede decir en cierto sentido que acá «comienza» este trabajo en términos de originalidad, puesto que el capítulo primero consistió casi en su totalidad de un compendio de resultados ya bien sabidos. El objetivo de esta tesis es estudiar cómo se comportan las potencias de Hadamard del kernel de Green del movimiento browniano con drift en $\mathbb{R}$, denotado por $\widetilde{u}$, por lo que un punto inicial es explicitar esta función $\widetilde{u}$

En particular, aquí se procede al cálculo de la ley del movimiento browniano con drift, paso que nos permitirá caracterizar los objetos más relevantes desde el punto de vista de Teoría del Potencial: el operador de Potencial (valga la redundancia) y la resolvente; cerrando con algunos alcances sobre la regularidad de esta última, ya que serán usados en el capítulo siguiente.

Sea $(B_t)_{t\geq 0} = \left(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}\right)$ un movimiento browniano sobre $\mathbb{R}^d$ y tomemos $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. El *movimiento browniano con drift* (en $\mathbb{R}^d$) se define como el proceso $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0} = \left(\widetilde{B}_t^{(1)}, \ldots, \widetilde{B}_t^{(d)}\right)_{t\geq 0}$, tal que para cada $t \geq 0$, y todo $1 \leq j \leq d$,

$$\widetilde{B}_t^{(j)} \doteq B_t^{(j)} + \mu_j \cdot t. \tag{2.1}$$

A continuación, la idea será estudiar cómo es el operador de potencial de este proceso, para lo cual primero se estudiará la distribución de $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$.

2.1. Cálculo de la densidad de $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$

Sea $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ como se definió arriba. Nuestro objetivo es calcular su ley, basándonos en la distribución del movimiento browniano, explicitada en la ecuación (1.11) del capítulo anterior. Notemos que gracias a la independencia estocástica de las coordenadas del MB (sin drift) es posible obtener la densidad conjunta del proceso, mediante el estudio de cada una de ellas por separado.

Sea $1 \leq j \leq d$ y tomemos $\varphi(\cdot)$ la función distribución del proceso; es decir, para $a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a) = \mathbb{P}_x\Big(B_t^{(j)} + \mu_j \cdot t \leq a\Big)$. Nótese que

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \mathbb{P}_x\Big(B_t^{(j)} \leq a - \mu_j t\Big) \\ &= \int_{-\infty}^{a-\mu_j t} p_t(x,y)\,dy,\end{aligned}$$

donde $p_t(x,y)$ es la densidad dada en (1.11) para el caso unidimensional. Derivando a ambos lados, obtenemos $\varphi'(a) = p_t(x, a-\mu_j t)$. Finalmente, deducimos que el proceso $\big(\widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$ tiene densidad con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, dígase $q_t(x,y)$, dada por

$$q_t(x,y) = \prod_{j=1}^{d} p_t(x_j, y_j - \mu_j t) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y_j - \mu_j t - x_j)^2}{2t}\right), \tag{2.2}$$

con $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$.

De lo anterior se ve que el proceso $\big(\widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$ es de Feller, y por ende posee bastante regularidad, estocásticamente hablando: tiene la propiedad de Markov fuerte, entre otras ventajas. Por otro lado, gracias a su construcción, vemos que tendrá trayectorias continuas, heredadas éstas del MB estándar.

2.2. El operador de potencial de $\big(\widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$

Una vez calculada la densidad del proceso $\big(\widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$, damos paso a caracterizar el operador $\widetilde{U}$, su potencial asociado; o mejor dicho, el cálculo de $\widetilde{u}(x,y)$, su densidad. Sea $f \geq 0$ medible y denotemos el semigrupo asociado a $\big(\widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$ como $(Q_t)_{t\geq 0}$. Así, para $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\widetilde{U}f(x) &= \int_0^{+\infty} Q_t f(x)\,dt = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) q_t(x,y)\,dy\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^{+\infty} q_t(x,y)\,dt\,dy.\end{aligned}$$

Si calculamos $\widetilde{u}(x,y) \doteq \int_0^{+\infty} q_t(x,y)\,dt$, ya tendríamos caracterizado el operador de potencial. Desarrollemos esta cantidad:

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y) &= \int_0^{+\infty} q_t(x,y)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \exp\left(-\frac{1}{2t}\sum_{j=1}^d (y_j - \mu_j t - x_j)^2\right) dt \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2t}\left(\sum_{j=1}^d (y_j - x_j)^2 - 2t\sum_{j=1}^d \mu_j (y_j - x_j) + t^2 \sum_{j=1}^d \mu_j^2\right)\right) dt \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{\langle \mu, y-x\rangle} \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{1}{2}\|\mu\|^2} \cdot \left[t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2t}\|y-x\|^2}\right] dt,\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ y $\|\cdot\|$ representan al producto escalar y la norma euclidiana en $\mathbb{R}^d$, respectivamente. En la última línea se han agrupado los términos a propósito: la integral se puede ver como una *transformada de Laplace*.

En [1] se explicita una fórmula para esta transformada, que enunciaremos a modo de lema.

Lema 2.1 *Sea $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) \doteq t^{\nu-1}e^{-\frac{\alpha}{4t}}$, con $\nu \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$. Entonces*

$$\mathcal{L}[h](p) = 2\left(\frac{\alpha}{4p}\right)^{\frac{1}{2}\nu} K_\nu(\alpha^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}), \quad \forall p > 0; \tag{2.3}$$

donde $\mathcal{L}[h](\cdot)$ denota la transformada de Laplace de la función h y $K_\nu(\cdot)$ representa la función de Bessel modificada de tercera especie *con parámetro $\nu \in \mathbb{R}$.*

Para $\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, la función de Bessel modificada de tercera especie se define como

$$K_\nu(z) \doteq \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}, \quad \forall z > 0,$$

con $I_\nu(z) \doteq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}$, la *función de Bessel modificada de segunda especie*, donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma (esta última bien sabida, a diferencia de I y K). Para $\nu \in \mathbb{Z}$, está dada por $K_\nu(z) \doteq \lim_{\nu' \to \nu} \frac{I_{-\nu'}(z) - I_{\nu'}(z)}{\operatorname{sen}(\nu'\pi)}$.

Si se desea consultar más detalles sobre las funciones de Bessel modificadas, se puede leer [14]. Allí mismo, se encuentran fórmulas que otorgan expresiones cerradas de esta función especial, para los parámetros ν que son de nuestra incumbencia: para $n \in \mathbb{N}$,

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!(2z)^r}, \tag{2.4}$$

$$K_n(z) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r(n-r-1)!}{r!\left(\frac{1}{2}z\right)^{n-2r}} + S_n(z); \tag{2.5}$$

donde

$$S_n(z) \doteq (-1)^{n+1}\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!}\left(\log\left(\frac{1}{2}z\right) - \frac{1}{2}\psi(r+1) - \frac{1}{2}\psi(n+r+1)\right),$$

con $\psi(1) \doteq -\gamma$, $\psi(m+1) \doteq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \gamma$, y γ la constante de Euler-Mascheroni.

Gracias a todo lo hecho arriba, es posible demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *Sean $d \geq 1$ y $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ como al inicio de esta sección. Entonces:*

i) si $d = 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$,

$$\widetilde{u}(x,y) = \frac{1}{|\mu|}e^{\mu\cdot(y-x)-|\mu|\cdot|y-x|};$$

ii) si $d \geq 3$ es impar, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y) &= (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}\left\|y-x\right\|^{\frac{1-d}{2}}\left\|\mu\right\|^{\frac{d-3}{2}}e^{\langle\mu,y-x\rangle-\|\mu\|\cdot\|y-x\|} \\ &\cdot \sum_{r=0}^{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1}\frac{\left(\left(\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1\right)+r\right)!}{r!\left(\left(\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1\right)-r\right)!(2\left\|y-x\right\|\cdot\left\|\mu\right\|)^r};\end{aligned}$$

iii) si $d \geq 2$ es par, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x,y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{\|y-x\|}{\|\mu\|} \right)^{\frac{2-d}{2}} e^{\langle \mu, y-x \rangle} \\ &\cdot \left(\sum_{r=0}^{\frac{d-2}{2}-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{d-2}{2}-r-1\right)!}{r! \left(\frac{1}{2}\|y-x\| \cdot \|\mu\|\right)^{\frac{d-2}{2}-2r}} + 2S_{\frac{d-2}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) \right).\end{aligned}$$

Demostración. Gracias al primer cálculo hecho para $\widetilde{u}(x,y)$, al aplicar el lema 2.1 con $\nu = \frac{2-d}{2}$, $\alpha = 2\|y-x\|^2$ y $p = \frac{1}{2}\|\mu\|^2$, se tiene que

$$\widetilde{u}(x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{\langle \mu, y-x \rangle} \left(2 \left(\frac{\|y-x\|}{\|\mu\|} \right)^{\frac{2-d}{2}} K_{\frac{2-d}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) \right).$$

Ahora, sea $d \geq 3$ impar; con ello, $\frac{2-d}{2} = \left(1 - \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor\right) - \frac{1}{2}$. Aplicando la fórmula (2.4) y el hecho de que $K_\nu = K_{-\nu}$, se tiene que

$$\begin{aligned}K_{\frac{2-d}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) &= K_{\frac{d-2}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) \\ &= K_{\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1\right) + \frac{1}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) \\ &= \left(\frac{\pi}{2\|y-x\| \cdot \|\mu\|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\|y-x\| \cdot \|\mu\|} \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} \frac{\left(\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1\right) + r\right)!}{r! \left(\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1\right) - r\right)! (2\|y-x\| \cdot \|\mu\|)^r},\end{aligned}$$

de donde deducimos la segunda parte de la proposición.

Para la tercera afirmación, tomemos $d \geq 2$ par, con lo que $\frac{2-d}{2}$ será entero y así, podremos usar la ecuación (2.5). Nuevamente, gracias a la simetría de signos de K_ν, obtenemos que

$$\begin{aligned}K_{\frac{2-d}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) &= K_{\frac{d-2}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\frac{d-2}{2}-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{d-2}{2}-r-1\right)!}{r! \left(\frac{1}{2}\|y-x\| \cdot \|\mu\|\right)^{\frac{d-2}{2}-2r}} + S_{\frac{d-2}{2}}(\|y-x\| \cdot \|\mu\|).\end{aligned}$$

Finalmente, la primera afirmación se deduce de (2.4), tal como se hizo en el caso $d \geq 3$ impar, notando que $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. □

Ejemplo Tomando $d = 3$, vemos que allí la densidad del potencial toma la forma

$$\widetilde{u}(x,y) = e^{\langle \mu, y-x \rangle - \|y-x\| \cdot \|\mu\|} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|y-x\|}. \tag{2.6}$$

Nótese que la cantidad dentro de la exponencial siempre es negativa —gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz—; es decir, el kernel de Green del movimiento browniano con drift en $\mathbb{R}^3$ es proporcional, con un decaimiento exponencial, al del browniano estándar en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo Eligiendo $d = 1$ y suponiendo $\mu > 0$, se ve que para cuando $y - x \geq 0$, el argumento de la exponencial se anula. Reescribiendo la densidad como una función por partes, se ve que

$$\widetilde{u}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}, & \text{si } y - x \geq 0 \\ \dfrac{1}{\mu} e^{2\mu(y-x)}, & \text{si } y - x \leq 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

En este caso no podemos hacer conexión con el kernel de Green del MB unidimensional, pues este último proceso es recurrente y por ende, posee un operador de potencial degenerado.

Nótese que la forma que toma la densidad en (2.7) nos indica que ésta no tendrá buena integrabilidad: en la región de puntos del plano tales que $y \geq x$, $\widetilde{u}(x,y)$ es idénticamente igual a una constante, por lo que no para toda función en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ se tendrá finitud de su potencial, cosa que también se extiende a su potencia de Hadamard.

Por otro lado, el buen comportamiento de la función exponencial ante su exponenciación, valga la redundancia, permitirá fácil manejo de las potencias de Hadamard del kernel de Green del MB con drift.

2.3. La resolvente asociada a $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$

En este apartado, procederemos al cálculo de la resolvente $\left(\widetilde{U}_\lambda\right)_{\lambda > 0}$ generada por el proceso $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$. Obraremos tal como en la subsección anterior, encontrando la densidad asociada a los kernels. Sean $\lambda > 0$ y $f \geq 0$ medible. Así:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_\lambda f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} Q_t f(x)\, dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\lambda t} q_t(x,y)\, dy\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} q_t(x,y)\, dt\, dy. \end{aligned}$$

Definamos $\widetilde{u}_\lambda(x,y) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} q_t(x,y)\, dt$. De forma bastante semejante a lo hecho para el cálculo de la densidad $\widetilde{u}$, se obtiene que

$$\widetilde{u}_\lambda(x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{\langle \mu, y-x \rangle} \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{1}{2}\|\mu\|^2 + \lambda} \cdot \left[t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2t}\|y-x\|^2} \right] dt; \tag{2.8}$$

es decir, podremos aplicar las mismas ideas de la subsección anterior para obtener una fórmula explícita para la densidad $\widetilde{u}_\lambda$, obteniéndose lo siguiente.

Proposición 2.3 *Sean $d \geq 1$ y $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ como al inicio de esta sección. Entonces:*

i) si $d = 1$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$ y $\lambda > 0$,

$$\widetilde{u}_\lambda(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}} e^{\mu\cdot(y-x) - \sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}\cdot|y-x|};$$

ii) si $d \geq 3$ es impar, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$ y $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_\lambda(x,y) &= (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} \|y-x\|^{\frac{1-d}{2}} \left(\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)^{\frac{d-3}{2}} e^{\langle \mu, y-x\rangle - \sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\cdot\|y-x\|} \\ &\quad \cdot \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{d}{2}\rfloor -1} \frac{\left(\left(\lfloor \frac{d}{2}\rfloor -1\right)+r\right)!}{r!\left(\left(\lfloor \frac{d}{2}\rfloor -1\right)-r\right)!\left(2\|y-x\|\cdot\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)^r};\end{aligned}$$

iii) si $d \geq 2$ es par, para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$ y $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_\lambda(x,y) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{\|y-x\|}{\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}}\right)^{\frac{2-d}{2}} e^{\langle \mu, y-x\rangle} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{r=0}^{\frac{d-2}{2}-1} \frac{(-1)^r\left(\frac{d-2}{2}-r-1\right)!}{r!\left(\frac{1}{2}\|y-x\|\cdot\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)^{\frac{d-2}{2}-2r}} + 2S_{\frac{d-2}{2}}\left(\|y-x\|\cdot\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)\right).\end{aligned}$$

Demostración. Tal como se hizo en la demostración de la proposición 2.2, al aplicar el lema 2.1 con $\nu = \frac{2-d}{2}, \alpha = 2\|y-x\|^2$ y $p = \frac{1}{2}\|\mu\|^2 + \lambda$, se tiene que

$$\widetilde{u}_\lambda(x,y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{\langle \mu, y-x\rangle} \left(2\left(\frac{\|y-x\|^2}{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}\frac{2-d}{2}} K_{\frac{2-d}{2}}\left(\|y-x\|\cdot\sqrt{\|\mu\|^2+2\lambda}\right)\right).$$

Posterior a ello, la separación de casos otorga el resultado, al igual que antes. □

2.4. Análisis de regularidad para la resolvente $\left(\widetilde{U}_\lambda\right)_{\lambda>0}$

Aludiendo a la proposición 1.16 del capítulo de preliminares, sabemos que gracias al carácter felleriano del semigrupo asociado al movimiento browniano con drift, entonces para cada $\lambda > 0$ se tiene que $U_\lambda\left(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)\right) \subseteq \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. *A posteriori*, se verá que esta condición no basta para nuestro trabajo; necesitamos un poco más. Ahora mismo, esta inquietud pareciera no tener cabida, pero a lo largo de que avance el texto, se hará evidente este alcance que estamos haciendo. De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, $d = 1$.

Como bien se vio en la proposición 2.3, para $\lambda > 0$ la densidad del kernel $\widetilde{U}_\lambda$ tiene una forma cerrada y bastante abordable. Incluso es posible reescribirla, cosa de poder integrar de una forma más concreta. Tal como hicimos en (2.7), se tendrá que

$$\widetilde{u}_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{(y-x)\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}, & \text{si } y-x \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{(y-x)\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}, & \text{si } y-x \leq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Hecha esta observación, probemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4 *Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, entonces la función $\widetilde{U}_\lambda f$ es Lebesgue-integrable.*

Demostración. Notemos primero que para cada $x \in \mathbb{R}$, gracias a (2.9) es posible separar la integral en dos, obteniéndose

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_\lambda f(x) &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{-x\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{-\infty}^{x} f(y) e^{y\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{-x\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{x}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy.\end{aligned}$$

Integremos cada uno de los dos términos anteriores. Nótese que el soporte compacto de f nos permite manipular las integrales a nuestra conveniencia. Así, para el primero:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{-x\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{-\infty}^{x} f(y) e^{y\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy\,dx \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{y}^{+\infty} e^{-x\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dx\,dy \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \frac{1}{\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \cdot e^{-y\left(\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \frac{1}{\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

De forma análoga se desarrolla el otro:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} e^{-x\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{x}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy\,dx \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \int_{-\infty}^{y} e^{-x\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dx\,dy \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}-\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{y\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)} \cdot e^{-y\left(\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}\right)}\,dy \\ = &\ \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}-\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Nótese que en ambos cálculos se usó, al evaluar la integral de la exponencial, el que $\mu+\sqrt{|\mu|^2+2\lambda} \geq 0$, y $\mu-\sqrt{|\mu|^2+2\lambda} \leq 0$. Así, juntando ambos desarrollos:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{U}_\lambda f(x)\right| \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} & \widetilde{U}_\lambda \left|f\right|(x) \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} - \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \; dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}} \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} - \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \; dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}} \left(\frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} + \mu} + \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} - \mu} \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda}} \cdot \frac{\left(\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} + \mu\right) + \left(\sqrt{|\mu|^2 + 2\lambda} - \mu\right)}{|\mu|^2 + 2\lambda - \mu^2} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 < +\infty,
\end{aligned}
$$

donde $\|\cdot\|_1$ denota la norma usual en $L^1(\mathbb{R})$. □

Sin embargo, es posible extender el resultado anterior a toda la clase $L^1(\mathbb{R})$, usando el hecho de que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ es denso (en norma $\|\cdot\|_1$) dentro de $L^1(\mathbb{R})$. Por otro lado, el efecto regularizante de la resolvente también es efectivo para este tipo de funciones.

Teorema 2.5 *Para cada $\lambda > 0$, el operador $\widetilde{U}_\lambda$ se puede extender a $L^1(\mathbb{R})$. Más aún, $\widetilde{U}_\lambda f\left(L^1(\mathbb{R})\right) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.*

Demostración. Es evidente que por densidad podemos extender $\widetilde{U}_\lambda$ a todo $L^1(\mathbb{R})$. Probaremos primero la integrabilidad de las imágenes de la resolvente. Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tales que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} f$. Así, usando sucesivamente el lema de Fatou, más la proposición anterior:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{U}_\lambda f(x)\right| \, dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} \left|\widetilde{U}_\lambda f_n(x)\right| \, dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widetilde{U}_\lambda f_n(x)\right| \, dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda} \|f_n\|_1 = \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 < +\infty,
\end{aligned}
$$

donde en la última línea se ha usado el hecho de que al ser la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, entonces ésta debe ser acotada uniformemente.

Para demostrar continuidad, tomemos $f \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$.

Gracias a la continuidad de la densidad $\widetilde{u}_\lambda$, se tendrá que

$$f(\cdot)\widetilde{u}_\lambda(x_n,\cdot) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{c.t.p.}} f(\cdot)\widetilde{u}_\lambda(x,\cdot).$$

También,

$$|f(\cdot)\widetilde{u}_\lambda(x_n,\cdot)| \leq \frac{1}{\sqrt{|\mu|^2+2\lambda}}\,|f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Luego, usando el teorema de convergencia dominada se deduce que

$$\widetilde{U}_\lambda f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widetilde{U}_\lambda f(x).$$

Finalmente, el hecho de que $\widetilde{U}_\lambda f$ se anule en infinito se deduce de que ello es condición necesaria para que sea integrable.

$\square$

Nótese que lo anterior nos permite pensar en que la resolvente actúa sobre $L^1(\mathbb{R})$.

Corolario 2.6 $\left(\widetilde{U}_\lambda\right)_{\lambda>0}$ *constituye una resolvente de contracción sobre* $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

Demostración. De la demostración anterior se deduce que para todo $\lambda > 0$, $\left\|\lambda\widetilde{U}_\lambda\right\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))} \leq 1$. La ecuación de la resolvente se puede extender a $L^1(\mathbb{R})$ por densidad, a partir de su validez sobre el espacio $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. $\square$

Observación El último corolario tiene sentido si invocamos la segunda observación después de la demostración de la proposición 1.16, tomando como espacio funcional a $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

Capítulo 3

Potencias de Hadamard del kernel $\widetilde{u}$ en $d = 1$

En el capítulo anterior se caracterizaron los operadores de potencial y resolvente asociadas al movimiento browniano con drift para todas las dimensiones $d \geq 1$. En este apartado nos enfocaremos en $d = 1$ y probaremos un resultado al estilo del teorema 1.36. Supondremos de ahora en adelante, sin pérdida de generalidad, que $\mu > 0$, para simplificar el análisis.

Análogo a la definición 1.32, construimos la *β-potencia de Hadamard* del operador $\widetilde{U}$ como

$$\widetilde{U}^{(\beta)} f(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\widetilde{u}(x, y)\right]^{\beta} dy, \tag{3.1}$$

donde $\beta \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$, f es una función medible tal que la integral anterior tenga sentido (cosa que se precisará pronto) y $\widetilde{u}$ corresponde al caso $d = 1$ de la proposición 2.2.

Esta sección parte con el estudio de los ámbitos más básicos de las potencias de Hadamard del kernel $\widetilde{u}$. Posteriormente, se probará un resultado de matrices y potencial discreto que será usado en la siguiente subsección, cuando se demuestre que $\widetilde{U}^{(\beta)}$ satisface PMC (ver la ecuación (1.35)). Finalmente, se encontrará una resolvente de contracción compatible con este último operador, originada por un proceso de Feller, y se verificará —en cierto sentido— que ella es única.

3.1. El operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$

Invocando el comentario posterior a la ecuación (2.7), notamos que el operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$ no tendrá un dominio tan regular como pueden ser $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ ó $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Sin embargo, al mirar (2.7) nos damos cuenta de que las funciones integrables se comportan bien para $\widetilde{U}^{(\beta)}$.

Proposición 3.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widetilde{U}^{(\beta)} f$ está bien definido, y más aún, $\widetilde{U}^{(\beta)} f \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$; es evidente que $\widetilde{U}^{(\beta)}f$ está bien definido y es finito en todo $\mathbb{R}$, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ (y recordando que estamos tomando $\mu > 0$),

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|f(y)\,[\widetilde{u}(x,y)]^{\beta}\right| \,dy \\ &= \frac{1}{\mu^{\beta}} \int_{-\infty}^{x} |f(y)|\, e^{2\beta\mu(y-x)}\,dy + \frac{1}{\mu^{\beta}} \int_{x}^{+\infty} |f(y)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{\mu^{\beta}} \left(\int_{-\infty}^{x} |f(y)|\,dy + \int_{x}^{+\infty} |f(y)|\,dy \right) \\ &= \frac{1}{\mu^{\beta}} \|f\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$

Probemos ahora que $\widetilde{U}^{(\beta)}f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$: tomemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$. Gracias a la continuidad de la densidad $\widetilde{u}$, tenemos que

$$f(\cdot)\,[\widetilde{u}(x_n,\cdot)]^{\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{c.t.p.}} f(\cdot)\,[\widetilde{u}(x,\cdot)]^{\beta}.$$

Por otro lado,

$$\left|f(\cdot)\,[\widetilde{u}(x_n,\cdot)]^{\beta}\right| \leq \frac{1}{|\mu|^{\beta}} |f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Luego, usando el teorema de convergencia dominada se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{U}^{(\beta)}f(x_n) = \widetilde{U}^{(\beta)}f(x).$$

Finalmente, notemos que al tomar supremo sobre $x \in \mathbb{R}$ en la primera desigualdad que se probó en esta demostración, se deduce que $\left\|\widetilde{U}^{(\beta)}f\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\mu^{\beta}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$; es decir, $\widetilde{U}^{(\beta)}f$ es acotada. □

Corolario 3.2 $\widetilde{U}^{(\beta)} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ *es un operador lineal continuo.*

Demostración. Directo de las últimas líneas de la demostración anterior. □

3.2. Un útil resultado de matrices

Aquí nos desconectamos un poco de lo anterior para probar un lema de matrices que será aprovechado en la próxima subsección, cuando se demuestre que $\widetilde{U}^{(\beta)}$ verifica PMC.

Lema 3.3 *Sean $0 < q < p < 1$ tales que $p + q = 1$ y fijemos $m \geq 3$ impar. Construyamos la matriz cuadrada $U \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ dada, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$, por*

$$U_{i,j} \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{p-q}, & \text{si } j - i \geq 0 \\ \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{p}{q}\right)^{j-i}, & \text{si } j - i \leq 0. \end{cases}$$

Entonces U es invertible y más aún, existe $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ tal que $U^{-1} = I_{m\times m} - P$, donde $I_{m\times m}$ denota la identidad de $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ y P corresponde, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq m$, a

$$P_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1, \text{ con } i < m \\ q, & \text{si } (i,j) \in \{(1,1),(m,m)\} \text{ ó } j = i-1, \text{ con } i > 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Antes de probar el lema, veamos qué forma general tienen las matrices U y P e $I_{m\times m} - P$ cosa de hacernos una idea de cómo actúan:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \cdots & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} \\ \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \cdots & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} \\ \frac{1}{p-q}\frac{q^2}{p^2} & \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \cdots & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-3}}{p^{m-3}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-4}}{p^{m-4}} & \cdots & \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} \\ \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-2}}{p^{m-2}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-3}}{p^{m-3}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-4}}{p^{m-4}} & \cdots & \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} & \frac{1}{p-q} & \frac{1}{p-q} \\ \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-1}}{p^{m-1}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-2}}{p^{m-2}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-3}}{p^{m-3}} & \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-4}}{p^{m-4}} & \cdots & \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} & \frac{1}{p-q} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} q & p & & & & & \\ q & 0 & p & & & \text{\Large 0} & \\ & q & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p & \\ \text{\Large 0} & & & & q & 0 & p \\ & & & & & q & q \end{pmatrix}, \quad I_{m\times m} - P = \begin{pmatrix} p & -p & & & & & \\ -q & 1 & -p & & & \text{\Large 0} & \\ & -q & 1 & -p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -q & 1 & -p & \\ \text{\Large 0} & & & & -q & 1 & -p \\ & & & & & -q & p \end{pmatrix},$$

donde hemos usado en el cálculo de la última matriz el hecho de que $1 - p = q$

Demostración. Calculemos $((I_{m\times m} - P)U)$ para cada fila. Dada la estructura de las matrices involucradas, notemos que la siguiente separación de casos es útil:

- Fila $i = 1$:

$$((I_{m\times m} - P)U)_{1,1} = p \cdot \frac{1}{p-q} + (-p) \cdot \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} = \frac{p-q}{p-q} = 1;$$

$$((I_{m\times m} - P)U)_{1,j} = p \cdot \frac{1}{p-q} + (-p) \cdot \frac{1}{p-q} = 0, \quad \forall j \geq 2.$$

- Fila $i = m$:

$$((I_{m\times m} - P)U)_{m,m} = (-q) \cdot \frac{1}{p-q} + p \cdot \frac{1}{p-q}\frac{q}{p} = \frac{p-q}{p-q} = 1;$$

$$\begin{aligned} ((I_{m\times m} - P)U)_{m,j} &= (-q) \cdot \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-j-1}}{p^{m-j-1}} + p \cdot \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-j}}{p^{m-j}} \\ &= \frac{1}{p-q}\frac{q^{m-j-1}}{p^{m-j-1}} \cdot (-q+q) = 0, \quad \forall j \leq m-1. \end{aligned}$$

- Fila $2 \leq i \leq m-1$:

$$
\begin{aligned}
((I_{m\times m}-P)U)_{i,j} &= (-q)\cdot\frac{1}{p-q}\frac{q^{i-j-1}}{p^{i-j-1}} + 1\cdot\frac{1}{p-q}\frac{q^{i-j}}{p^{i-j}} + (-p)\cdot\frac{1}{p-q}\frac{q^{i-j+1}}{p^{i-j+1}};\\
&= \frac{1}{p-q}\frac{q^{i-j}}{p^{i-j}}(-p+1-q) = 0, \quad \forall j<i;\\
((I_{m\times m}-P)U)_{i,i} &= (-q)\cdot\frac{1}{p-q} + 1\cdot\frac{1}{p-q} + (-p)\cdot\frac{1}{p-q}\frac{q}{p}\\
&= \frac{(1-q)-q}{p-q} = \frac{p-q}{p-q} = 1,\\
((I_{m\times m}-P)U)_{2,j} &= (-q)\cdot\frac{1}{p-q} + 1\cdot\frac{1}{p-q} + (-p)\cdot\frac{1}{p-q} = \frac{1-q-p}{p-q} = 0, \quad \forall j>i.
\end{aligned}
$$

Es decir, hemos probado que para cada i,j se tiene que $((I_{m\times m}-P)U)_{i,j} = \mathbb{1}_{i=j}$; i.e., $U^{-1} = I_{m\times m}-P$.

□

3.3. $\widetilde{U}^{(\beta)}$ satisface PMC sobre $L^1(\mathbb{R})$

En vista de querer encontrar un semigrupo que genere al operador de potencial deseado, un paso esencial es demostrar que se satisface el PMC, expresado en (1.35). En este apartado se probará que se tiene la propiedad, primero en una clase más pequeña de funciones: las continuas a soporte compacto.

Teorema 3.4 *Para toda $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,*

$$\sup_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq 0\}} \widetilde{U}^{(\beta)}f(x) \leq 1 \Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \widetilde{U}^{(\beta)}f(x) \leq 1. \tag{3.2}$$

Para probar el teorema 3.4, tenemos que construir algunos objetos previos. Para $n\in\mathbb{N}$ y $\beta\geq 1$ definamos $\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}$ como el siguiente operador, actuando sobre $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, dado por

$$\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x) \doteq \sum_{w\in\mathbb{Z}_n} f(w+x)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(0,w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

donde $\mathbb{Z}_n \doteq \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}$ —con el perdón de los algebristas— y $\widetilde{\mathfrak{g}}_n$ corresponde a la función de Green asociada al paseo aleatorio simple de parámetro $p_n = \frac{1}{2}+\frac{\mu/2}{\sqrt{n}}$, donde invocamos lo expuesto en la sección 1.5.1. Gracias al soporte compacto de f, el operador está bien definido. Por otro lado, considerando la observación posterior a la definición 1.26, tendremos que para $x\in\mathbb{Z}_n$,

$$\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x) = \sum_{w\in\mathbb{Z}_n} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(x\sqrt{n},w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta}. \tag{3.3}$$

Definimos para $A\subseteq\mathbb{R}$,

$$A^{\boxplus} \doteq \{y\in\mathbb{R}\,|\,d(y,A)\leq 1\},$$

donde $d(\cdot, A)$ denota la función distancia a un conjunto. Esta construcción apunta a agrandar un conjunto y dar una «zona de seguridad» a la hora de acotar e integrar. Por otro lado, recordemos el concepto de *oscilación* de una función f: para $\delta > 0$,

$$\mathrm{osc}_f(\delta) \doteq \sup_{x,y\in\mathbb{R}:|x-y|\leq\delta} \{f(x) - f(y)\}.$$

Pasemos al primer lema para probar la proposición 3.4.

Lema 3.5 *Supongamos $\beta \geq 1$ y tomemos $f \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R})$, anotando $K \doteq \mathrm{sop}(f)$. Entonces para $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x-y| < 1$, se tiene que*

$$\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x) - \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(y)\right| \leq \mathrm{osc}_f(|x-y|) C(f), \tag{3.4}$$

donde $C(f) = \frac{1}{\mu^\beta} m\left(\left(K^{\boxplus}\right)^{\boxplus}\right)$, con m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. También se tiene que para cada $y \in \mathbb{R}$,

$$\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(y)\right| \leq 3C(f) \|f\|_\infty. \tag{3.5}$$

Por último, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $x_n \to x$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x_n) = \widetilde{U}^{(\beta)} f(x). \tag{3.6}$$

Demostración. Probemos la primera desigualdad del lema. Sea $w \in \mathbb{Z}_n$. Nótese que si $w+x \notin K$ y $w+y \notin K$, luego $f(w+x) - F(x+y) \neq 0$; es decir, si $F(w+x) - F(w+y) = 0$, entonces $w \in \mathbb{Z}_n \cap [(K-x) \cup (K-y)]$.

Sea ahora $y(n) \in \mathbb{Z}_n$ uno de los puntos más cercanos de $\mathbb{Z}_n$ a y en valor absoluto. En particular, $|y - y(n)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$. Notemos que

$$(K-x) \cup (K-y) \subseteq (K^{\boxplus} - y(n)).$$

En efecto, sea z tal que $z + y \in K$. Así, para $u \in K$,

$$|(z + y(n)) - u| = |(y(n) - y) + (z + y - u)| \leq |y(n) - y| + |(z+y) - u| \leq \frac{1}{2} + |(z+y) - u|.$$

Tomando ínfimo sobre $u \in K$ a ambos lados de la desigualdad, y notando que como $z+y \in K$, se tendrá que $d(z+y, K) = 0$, y entonces $d(z+y(n), K) \leq \frac{1}{2} \leq 1$; i.e., $z + y(n) \in K^{\boxplus}$. Hemos demostrado que $(K-y) \subseteq K^{\boxplus} - y(n)$. Probar que $(K-x) \subseteq K^{\boxplus} - y(n)$ es similar, con la sutileza de que se usa el hecho de que $|x - y(n)| \leq |x-y| + |y - y(n)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Gracias a lo anterior, si definimos $A_n \doteq \mathbb{Z}_n \cap K^{\boxplus}$, se tendrá que

$$\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x) - \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(y)\right| \leq \mathrm{osc}_f(|x-y|) \sum_{w\in A_n - y(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(0, w\sqrt{n}) \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta,$$

usando que $|f(w+x)-f(w+y)| \leq \mathrm{osc}_f(|x-y|)$. Ahora, aprovechando la forma explícita de $\widetilde{\mathfrak{g}}_n$ (ver (1.43)), es posible desarrollar más la expresión anterior, ayudándonos también de (3.3):

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in A_n - y(n)} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(0,w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta} &= \sum_{w\in A_n} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(y(n)\sqrt{n},w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta} \\
&= \sum_{\substack{w\in A_n \\ w\geq y(n)}} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta} + \sum_{\substack{w\in A_n \\ w< y(n)}} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta}\left(\left(\frac{1+\frac{\mu}{\sqrt{n}}}{1-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\beta(w-y(n))} \\
&\leq \sum_{\substack{w\in A_n \\ w\geq y(n)}} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta} + \sum_{\substack{w\in A_n \\ w< y(n)}} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta}\cdot 1 \\
&= \sum_{w\in A_n} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta} \\
&= \frac{1}{\mu^\beta}\sum_{w\in A_n}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left(w-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}},w+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(u)\,du \\
&\leq \frac{1}{\mu^\beta} m\left(\left(K^{\boxplus}\right)^{\boxplus}\right),
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)\right| \leq \mathrm{osc}_f(|x-y|)C(f),$$

con $C(f) \doteq \frac{1}{\mu^\beta} m\left(\left(K^{\boxplus}\right)^{\boxplus}\right)$, y así queda demostrada la primera desigualdad del lema.

Nótese que dado el cálculo anterior, es fácil ver que

$$\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y(n))\right| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{\mu^\beta} m\left(K^{\boxplus}\right) \leq \|f\|_\infty C(f).$$

Eso, sumado al hecho de que $\mathrm{osc}_f(|x-y|) \leq 2\|f\|_\infty$, nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)\right| &\leq \left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y(n))\right| + \left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)-\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y(n))\right| \\
&\leq \|f\|_\infty C(f) + 2\|f\|_\infty C(f) = 3\|f\|_\infty C(f),
\end{aligned}$$

donde hemos aprovechado la desigualdad (3.4).

Vamos a la última parte del lema. Probemos primero que para todo $y\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y(n)) = \widetilde{U}^{(\beta)}f(y). \tag{3.7}$$

En efecto, gracias a (3.3):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(y(n)) &= \sum_{w\in\mathbb{Z}_n} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(y(n)\sqrt{n}, w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\beta} \\
&= \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w\geq y(n)}} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta} + \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w< y(n)}} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\mu^\beta}\left(\left(\frac{1+\frac{\mu}{\sqrt{n}}}{1-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\beta(w-y(n))} \\
&= \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w\geq y(n)}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left(w-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}, w+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(u) f(w)\frac{1}{\mu^\beta}\, du \\
&\quad + \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w< y(n)}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left(w-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}, w+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(u) f(w)\frac{1}{\mu^\beta}\left(\left(\frac{1+\frac{\mu}{\sqrt{n}}}{1-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\beta(w-y(n))} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w\geq y(n)}} \mathbb{1}_{\left(w-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}, w+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(u) f(w)\frac{1}{\mu^\beta}\, du \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{w\in\mathbb{Z}_n\\ w< y(n)}} \mathbb{1}_{\left(w-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}, w+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(u) \frac{1}{\mu^\beta} f(w)\left(\left(\frac{1+\frac{\mu}{\sqrt{n}}}{1-\frac{\mu}{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\beta(w-y(n))} du.
\end{aligned}
$$

Si observamos detenidamente, el argumento de la primera integral converge puntualmente a $f(\cdot)\frac{1}{\mu^\beta}\mathbb{1}_{(y,+\infty)}(\cdot)$. Por otro lado, y recordando que $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m = e^\alpha$, vemos que el argumento de la segunda integral converge puntualmente a $f(\cdot)\frac{1}{\mu^\beta}e^{2\beta\mu(\cdot-y)}\mathbb{1}_{(-\infty,y)}(\cdot)$. Nótese que para cada $n\geq 1$, los argumentos de las integrales están acotados, y como f es a soporte compacto, estamos integrando sobre conjuntos de medida finita. Usando el teorema de convergencia dominada, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(y(n)) &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{1}{\mu^\beta}\mathbb{1}_{(y,+\infty)}(u)\, du + \int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{1}{\mu^\beta}e^{2\beta\mu(u-y)}\mathbb{1}_{(-\infty,y)}(u)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)[\widetilde{u}(y,u)]^\beta\, du \\
&= \widetilde{U}^{(\beta)} f(y).
\end{aligned}
$$

Finalmente, probemos lo deseado; sea $x_n \to x$. Usando (3.4), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x_n) - \widetilde{U}^{(\beta)} f(x)\right| &\leq \left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x_n) - \widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x(n))\right| + \left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x(n)) - \widetilde{U}^{(\beta)} f(x)\right| \\
&\leq \operatorname{osc}_f(|x_n - x(n)|)C(f) + \left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)} f(x(n)) - \widetilde{U}^{(\beta)} f(x)\right|.
\end{aligned}
$$

Como f es continua y a soporte compacto, en particular será uniformemente continua y por ende, $\operatorname{osc}_f(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$. Usando ese argumento, más (3.7), queda demostrado el límite.

$\square$

Necesitamos otro lema.

Lema 3.6 *Bajo las hipótesis y el contexto del lema anterior, se tiene que*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\frac{1}{\sqrt{n}}=\int_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\,dx, \tag{3.8}$$

donde $(\cdot)^+$ *denota la función parte positiva.*

Demostración. Gracias a (3.6) se deduce que la sucesión de funciones $\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(\cdot)-1\right)^+ f(\cdot)$ converge puntualmente a la función $\left(\widetilde{U}^{(\beta)}f(\cdot)-1\right)^+ f(\cdot)$. Usando (3.5) obtenemos la cota que nos permite usar convergencia dominada y concluir que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Tomemos ahora $x\in\mathbb{Z}_n$ e y tales que $|x-y|\le\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Vía (3.4), tenemos que $\left|\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)\right|\le$ $\mathrm{osc}_f(|x-y|)C(f)$. Ello, en conjunción con (3.5), implica que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)-1\right)^+ f(y)\,dy-\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\\
&\le\sum_{x\in A_n}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(y)-1\right)^+ f(y)-\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\right|\mathbb{1}_{\left(x-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}},x+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}(y)\,dy\\
&\le 4C(f)\,\|f\|_\infty\,\mathrm{osc}_f\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)m\left(K^{\boxplus}\right).
\end{aligned}$$

donde $A_n\doteq\mathbb{Z}_n\cap K^{\boxplus}$. Tomando $n\to+\infty$ se deduce lo pedido. □

Vamos ahora con el último lema necesario.

Lema 3.7 *Con el mismo preámbulo del lema 3.5, se tiene que para cada* $n\ge 1$,

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\frac{1}{\sqrt{n}}\ge 0. \tag{3.10}$$

Demostración. Notemos que como f es a soporte compacto, existirá $a>0$ suficientemente grande, tal que $\mathrm{sop}(f)\subseteq[-a,a]$. Sea $A_n\doteq\mathbb{Z}_n\cap[-a,a]$, que es finito y tiene una cantidad impar de elementos. Así:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}\left(\widetilde{\mathscr{G}}^{n,(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\frac{1}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{x\in\mathbb{Z}_n}\left(\sum_{w\in\mathbb{Z}_n} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(x\sqrt{n},w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta-1\right)^+ f(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{x\in A_n}\left(\sum_{w\in A_n} f(w)\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(x\sqrt{n},w\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\beta-1\right)^+ f(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{x\in A_n}\left(\sum_{w\in A_n} \frac{1}{n^{\frac{\beta+1}{2}}}\left(\widetilde{\mathfrak{g}}_n(x\sqrt{n},w\sqrt{n})\right)^\beta f(w)-1\right)^+ f(x).
\end{aligned}$$

Definamos ahora la matriz $U \doteq (\widetilde{\mathfrak{g}}_n(x\sqrt{n},w\sqrt{n}))_{x,w\in A_n}$. Si aplicamos el lema 3.3 con $p=\frac{1}{2}+\frac{\mu/2}{\sqrt{n}}$ y $q=\frac{1}{2}-\frac{\mu/2}{\sqrt{n}}$, y recordando lo visto en el apartado de potenciales discretos, se concluye que tanto U como $U^\intercal$ son matrices de potencial. Usando la proposición 1.25 y el hecho de que ponderación positiva de potenciales los preserva, se deduce que las matrices $\frac{1}{n^{\frac{\beta+1}{2}}}U^{(\beta)}$ y $\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta+1}{2}}}U^{(\beta)}\right)^\intercal$ son potenciales, también. Finalmente, notando que la última línea del cálculo anterior se puede reescribir de forma matricial como

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left\langle\left(\left(\frac{1}{n^{\frac{\beta+1}{2}}}U^{(\beta)}\right)v-\vec{1}_{A_n}\right)^+,v\right\rangle,$$

donde $v\doteq (f(y))_{y\in A_n}$, y al usar la proposición 1.24, se concluye lo pedido. $\square$

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 3.4.

Demostración. Sea $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tal que para cada $x\in\mathbb{R}$ con $f(x)\geq 0$, se tiene que $\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)\leq 1$, hipótesis del PMC. Combinando los dos lemas anteriores y la hipótesis, se concluye que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)<0\}}\left(\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)-1\right)^+ f(x)\,dx\geq 0,$$

y en consecuencia, $\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)-1\leq 0$ Lebesgue-c.t.p. Como se vio en la proposición 3.1, $\widetilde{U}^{(\beta)}f$ es continua (pues $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})\subseteq L^1(\mathbb{R})$), y así, la desigualdad se tiene en todo $\mathbb{R}$, que es lo que se quería probar. $\square$

Nuevamente, aprovechando la densidad de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$, es posible extender el resultado a este último espacio.

Corolario 3.8 *Para toda $f\in L^1(\mathbb{R})$,*

$$\sup_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\geq 0\}}\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)\leq 1\Longrightarrow\sup_{x\in\mathbb{R}}\widetilde{U}^{(\beta)}f(x)\leq 1. \tag{3.11}$$

Demostración. Sean $f\in L^1(\mathbb{R})$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tales que $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_1} f$. Sabemos que existe una suerte de recíproca al teorema de convergencia dominada que, dado lo anterior, nos otorga la existencia de una función $g \in L^1(\mathbb{R})$ y una subsucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{c.t.p.}} f$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}| \leq g$.

Por otro lado, gracias al corolario 3.2 deducimos que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \widetilde{U}^{(\beta)} f(x)$, y así

$$\left(\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(\cdot) - 1\right)^+ f_{n_k}(\cdot) \xrightarrow[k\to+\infty]{\text{c.t.p.}} \left(\widetilde{U}^{(\beta)} f(\cdot) - 1\right)^+ f(\cdot).$$

Como $\widetilde{U}^{(\beta)}$ es un operador positivo, tendremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(x) \leq \widetilde{U}^{(\beta)} g(x)$, y así

$$\left(\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(x) - 1\right)^+ \leq \left(\widetilde{U}^{(\beta)} g(x) - 1\right)^+.$$

Como $\widetilde{U}^{(\beta)} g \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}$, entonces existe $M > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\left(\widetilde{U}^{(\beta)} g(x) - 1\right)^+ \leq M$. Así,

$$\left(\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(\cdot) - 1\right)^+ f_{n_k}(\cdot) \leq M \cdot g(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Finalmente, gracias a convergencia dominada, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{U}^{(\beta)} f(x) - 1\right)^+ f(x)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\widetilde{U}^{(\beta)} f_{n_k}(x) - 1\right)^+ f_{n_k}(x)\, dx \geq 0,$$

donde la última desigualdad es consecuencia del teorema 3.4. □

3.4. En busca del proceso asociado a $\widetilde{U}^{(\beta)}$

A continuación, explicitaremos un proceso de Feller tal que su potencial calza con el operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$. Para ello, hagamos el siguiente cálculo. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}^{(\beta)} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\frac{1}{|\mu|} e^{\mu(y-x)-|\mu||y-x|}\right)^\beta dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{|\mu|^\beta} e^{(\beta\mu)(y-x)-|\beta\mu||y-x|}\, dy \\
&= \frac{|\beta\mu|}{|\mu|^\beta} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\frac{1}{|\beta\mu|} e^{(\beta\mu)(y-x)-|\beta\mu||y-x|}\right) dy.
\end{aligned}$$

Lo que está dentro del paréntesis en la última línea, si nos fijamos bien, no es más que el kernel de Green asociado un movimiento browniano con drift $\beta\mu$. Si para cada $t \geq 0$ definimos $X_t \doteq B_t + \beta\mu$, un movimiento browniano con drift $\beta\mu$, y tomamos $R \doteq \frac{|\beta\mu|}{|\mu|^\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}^{(\beta)} f(x) &= R \cdot \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t)\, dt\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(X_t) \cdot R\, dt\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f(\widetilde{X}_s^{(\beta)})\, ds\right),
\end{aligned}$$

donde denotamos $\widetilde{X}_s^{(\beta)} \doteq X_{\frac{1}{R}\cdot s}$. En otras palabras, se tiene que existe un proceso de Feller $\big(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\big)_{t\geq 0}$ tal que su operador de potencial calza con la β-potencia de Hadamard del kernel de Green del browniano con drift μ sobre $\mathbb{R}$. Más aún, éste es explícito y corresponde a un cambio de tiempo del browniano con drift $\beta\mu$.

Esto último es de mucho interés, pues ya sabemos cómo se comporta la resolvente asociada al browniano con drift, cosa vista en el capítulo dos. El cambio de tiempo puede ser manejado de la siguiente forma: si denotamos por $\big(\widetilde{U}_\lambda^{(\beta)}\big)_{\lambda>0}$ y $(U_\lambda)_{\lambda>0}$ las resolventes asociadas a $\big(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\big)_{t\geq 0}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_\lambda^{(\beta)} f(x) &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f\big(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\big)\, dt\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f\big(X_{\frac{1}{R}\cdot t}\big)\, dt\right)\\
&= R\cdot \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} e^{-R\lambda\cdot s} f\left(X_s\right)\, ds\right)\\
&= R\cdot U_{R\cdot\lambda} f(x).
\end{aligned}
$$

La consecuencia más importante de este último cálculo es que la resolvente asociada al proceso $\big(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\big)_{t\geq 0}$ heredará la misma regularidad de $(U_\lambda)_{\lambda>0}$, que no es más que la resolvente de un MB con drift, cosa estudiada en la sección 2.4. En términos concisos, podemos extender $\big(\widetilde{U}_\lambda^{(\beta)}\big)_{\lambda>0}$ a $L^1(\mathbb{R})$, y su acción sobre este espacio también está contenida en éste mismo.

3.5. Unicidad de la resolvente asociada a $\widetilde{U}^{(\beta)}$

Para cerrar el propósito de este trabajo de tesis, un punto importante es discutir la unicidad del proceso $\big(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\big)_{t\geq 0}$, encontrado en la sección anterior. En esa línea, nuestro objetivo para este apartado es probar lo siguiente.

Teorema 3.9 *Sea $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ una resolvente de contracción (recordar la definición 1.17) compatible con $\widetilde{U}^{(\beta)}$; i.e., $\lim_{\lambda\searrow 0} V_\lambda = \widetilde{U}^{(\beta)}$. También, supongamos que ella se puede extender a $L^1(\mathbb{R})$ y más aún, para cada $\lambda>0$, $V_\lambda\left(L^1(\mathbb{R})\right)\subseteq L^1(\mathbb{R})$. Entonces ésta debe ser única.*

Demostración. Sean $(V_\lambda^1)_{\lambda>0}$ y $(V_\lambda^2)_{\lambda>0}$ dos resolventes que comparten las propiedades del enunciado del teorema. Al ser ellas compatibles con el operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$, tendremos que para $i=1,2$ y toda $f\in L^1(\mathbb{R})$, se debe satisfacer la ecuación de la resolvente:

$$
\begin{aligned}
\forall\lambda>0,\quad \widetilde{U}^{(\beta)} f &= V_\lambda^i f + \lambda\widetilde{U}^{(\beta)} V_\lambda^i f\\
&= \left(I+\lambda\widetilde{U}^{(\beta)}\right) V_\lambda^i f,
\end{aligned}
$$

donde I denota el operador identidad en $L^1(\mathbb{R})$.

Si restamos ambas ecuaciones para $i=1,2$, obtenemos que

$$\left(I+\lambda\widetilde{U}^{(\beta)}\right)\left(V_\lambda^1 f - V_\lambda^2 f\right)=0,$$

de donde deducimos que si el operador $\left(I + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)}\right)$ fuese inyectivo sobre $L^1(\mathbb{R})$, entonces para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$, $V_\lambda^1 f = V_\lambda^2 f$ y habríamos acabado.

Para ver la inyectividad del operador, usaremos el corolario 3.8, que establece que el operador $\widetilde{U}^{(\beta)}$ cumple PMC sobre $L^1(\mathbb{R})$, que es precisamente el conjunto de llegada de la resolvente. En efecto, sea $h \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\left(I + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)}\right) h = 0$. Razonando por contradicción, supongamos que $f \neq 0$, y sin pérdida de generalidad, diremos que $\inf_{x\in\mathbb{R}} h(x) < 0$ (si no fuese así, basta trabajar con $-h$). Como $h \in \ker \left(I + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)}\right)$, se tendrá que

$$h(x) = -\lambda \widetilde{U}^{(\beta)} h(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ Lebesgue-c.t.p.; pero notando que el lado derecho de esta última ecuación es continuo gracias a la proposición 3.1, entonces es posible elegir una versión continua para h, y así la ecuación se tendrá para todo $x \in \mathbb{R}$.

Con lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &> \inf_{x\in\mathbb{R}} h(x) \\ &= \inf_{x\in\mathbb{R}} -\lambda \widetilde{U}^{(\beta)} h(x), \end{aligned}$$

y así vemos que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \widetilde{U}^{(\beta)} h(x) > 0$. Con ello, es posible encontrar $\alpha > 0$ suficientemente grande, tal que

$$1 < \alpha \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} \widetilde{U}^{(\beta)} h(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \widetilde{U}^{(\beta)} (\alpha h)(x),$$

por lo que al aplicar la contrarrecíproca del PMC para la función (αh), obtenemos que

$$1 < \sup_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,\alpha h(x)\geq 0\}} \widetilde{U}^{(\beta)} (\alpha h)(x) = \alpha \cdot \sup_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,h(x)\geq 0\}} \widetilde{U}^{(\beta)} h(x);$$

y por lo tanto, $\sup_{\{x\in\mathbb{R}\,|\,h(x)\geq 0\}} \widetilde{U}^{(\beta)} h(x) > 0$; es decir, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$, tal que $h(\bar{x}) \geq 0$ y $\widetilde{U}^{(\beta)} h(x) > 0$, cosa que implica que

$$0 < h(\bar{x}) + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)} h(x) = \left(I + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)}\right) h(\bar{x}).$$

Por continuidad se tendrá que más aún, esta desigualdad será valida en una vecindad abierta de $\bar{x}$; i.e., en un conjunto de medida de Lebesgue no nula, evidente contradicción con que $h \in \ker \left(I + \lambda \widetilde{U}^{(\beta)}\right)$. □

Lo que nos dice el teorema 3.9, es que si hallamos una resolvente de contracción que actúe sobre $L^1(\mathbb{R})$, ésta será única sobre esa clase de resolventes. En particular, sabemos de lo hecho en la subsección anterior, que existe una de aquellas características. Así, enunciamos el siguiente teorema, cuya demostración se ha hecho a largo del capítulo 3.

Teorema 3.10 *Sea* $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ *el movimiento browniano con drift* $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *sobre* $\mathbb{R}$. *Para* $\beta \geq 1$, *se tiene que existe un proceso de Feller* $\left(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\right)_{t\geq 0}$ *tal que su operador de potencial* *calza con la β-potencia de Hadamard del kernel de Green de $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$; es decir, para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ y todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\widetilde{U}^{(\beta)} f(x) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^{+\infty} f\left(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\right)\, dt\right). \tag{3.12}$$

Más aún, si existe otra resolvente de contracción $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ compatible con $\widetilde{U}^{(\beta)}$, tal que se puede extender a $L^1(\mathbb{R})$ y para cada $\lambda > 0$, $V_\lambda\left(L^1(\mathbb{R})\right) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, luego ésta debe ser igual a $\left(\widetilde{U}_\lambda^{(\beta)}\right)_{\lambda>0}$, la resolvente generada por $\left(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\right)_{t\geq 0}$. En otras palabras, si existe otro proceso de Feller con una resolvente asociada compatible con $\widetilde{U}^{(\beta)}$ y que posea la regularidad arriba descrita, entonces éste es igual en ley a $\left(\widetilde{X}_t^{(\beta)}\right)_{t\geq 0}$.

Conclusión

Como se planteó desde un inicio, esta tesis presentó dos objetivos concretos: caracterizar el kernel de potencial y la resolvente del movimiento browniano con drift, y el desarrollo de un estudio de las potencias de Hadamard de este operador, orientado a replicar lo obtenido en [4]. El primer propósito se cumplió a cabalidad, lográndose encontrar una expresión cerrada para la densidad en todas las dimensiones $d \geq 1$. Quizá lo más destacable de la metodología empleada en esta etapa es el uso de funciones de Bessel, cosa que también ocurre al estudiar el movimiento browniano estándar (véase [3], p. 129).

El segundo objetivo también fue conseguido: se probó existencia de un proceso de Feller —e incluso éste fue explicitado—, y se demostró unicidad de la resolvente asociada al proceso recién mencionado, dentro de la clase de procesos que poseen una resolvente con cierta regularidad, tal como se expresa en el teorema 3.9.

Un punto que generó discusión a la hora de probar la unicidad, radicó en lo patológico del kernel de potencial del MB con drift en $\mathbb{R}$; se ve en la ecuación (2.7) la anomalía: el kernel de Green —y en consecuencia, su potencia de Hadamard—, al actuar sobre funciones de clase $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, no devuelve una función en este espacio, ya que las imágenes de este tipo de funciones no necesariamente se anulan al tomar el límite el límite $x \to +\infty$.

Una condición suficiente para que $\widetilde{U}^{(\beta)} f$ esté bien definida es que f sea integrable, cosa que inmediatamente prohíbe la acción del funcional sobre $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$. Al estudiar esta limitación, se observó que va más allá de ser una restricción: se concluyó que $L^1(\mathbb{R})$ es el espacio natural en que debe estar definido el operador en cuestión, cosa que se dio bien, ya que la resolvente del MB con drift admite extensión a $L^1(\mathbb{R})$.

Lo anterior representó una dificultad, ya que los teoremas que aseguran existencia y unicidad de una resolvente de contracción compatible con un operador que verifica PMC (véase el capítulo 4 de [10]) requieren hipótesis de regularidad: el operador en cuestión debe actuar sobre un espacio de Banach, que en general corresponde a $\mathcal{C}_0$ ó $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}$, y más aún esta imagen debe pertenecer al mismo dominio.

El no poder utilizar teoremas ya existentes complejizó el propósito del trabajo, mas no lo imposibilitó. Lo interesante, es que el espíritu de las técnicas expuestas en el párrafo anterior es compartido con el de las desarrolladas en esta tesis: ambas estrategias se basan en que el operador cumpla PMC. Es decir, el Principio del Máximo parece ser el ingrediente maestro en nuestra receta.

Una primera continuación de este trabajo puede ser la extensión del teorema 3.10, apuntando a probar el resultado para dimensiones mayores que $d = 1$. Recuérdese que allí se tiene una expresión cerrada de la función de Green del paseo aleatorio simple, que es lo que permite aproximar la potencia de Hadamard, a la hora de probar que ella satisface PMC.

Evidentemente, otra pregunta que surge es si el tipo de resultado que es el teorema 3.10 sería replicable con otros procesos de Markov, no necesariamente de la familia browniana. Si se observa la demostración, un ingrediente esencial es que el kernel de Green del proceso en cuestión es aproximable de manera discreta. Dicho de forma general, se necesitaría una familia de cadenas de Markov que converjan al proceso en sí, y que tengamos control sobre esta tasa de convergencia.

Bibliografía

[1] H. Bateman y A. Erdélyi, *Tables of Integral Transforms: Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman*, Tables of Integral Transforms: Based, in Part, on Notes Left by Harry Bateman, nº v. 1, McGraw-Hill, 1954.

[2] R.M.C. Blumenthal y R.K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, Dover books on mathematics, Dover Publications, 2007.

[3] K.L. Chung, *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer New York, 2013.

[4] C. Dellacherie, M. Duarte, S. Martínez, J. San Martín y P. Vandaële, *Powers of Brownian Green Potentials*, 2019.

[5] C. Dellacherie, S. Martínez y J. San Martín, *Inverse M-Matrices and Ultrametric Matrices*, Lecture Notes in Mathematics, Springer International Publishing, 2014.

[6] C. Dellacherie y P.A. Meyer, *Probabilities and Potential*, North-Holland Mathematics Studies, vol. C, Elsevier Science, 1979.

[7] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon series in advanced mathematics, Allyn and Bacon, 1966.

[8] J. Jacod, *Theoremes Limite Pour Les Processus*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII — 1983 (Berlin, Heidelberg) (P. L. Hennequin, ed.), Springer Berlin Heidelberg, 1985, págs. 298–406.

[9] I. Karatzas y S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2014.

[10] M.B. Marcus y J. Rosen, *Markov Processes, Gaussian Processes, and Local Times*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, nº v. 13, Cambridge University Press, 2006.

[11] J. San Martín, *Teoría de la medida*, Textos Universitarios, Editorial Universitaria, 2018.

[12] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1999.

[13] F. Spitzer, *Principles of Random Walk*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New

York, 2013.

[14] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1995.