



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

MEJORAMIENTO DE MALLAS DE TETRAEDROS MEDIANTE ALGORITMOS LEPP

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS MENCIÓN
COMPUTACIÓN**
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL EN COMPUTACIÓN

FERNANDO ANDRÉS BALBOA VERDUGO

PROFESOR GUÍA:
MARÍA CECILIA RIVARA ZÚÑIGA

MIEMBROS DE LA COMISION:
MAURICIO CERDA VILLABLANCA
NANCY HITSCHFELD KAHLER
JAVIER VIDAL VALENZUELA

SANTIAGO DE CHILE
2020

Resumen

La generación y mejoramiento de mallas de tetraedros es un tema actual de gran interés en aplicaciones de elementos finitos.

En el desarrollo de esta tesis, se estudia el mejoramiento de mallas de tetraedros mediante algoritmos Lepp, que en español significa camino de propagación por la arista más larga. Estos algoritmos usan el Lepp como subrutina principal para refinar o mejorar mallas. En tres dimensiones, el Lepp comienza en un tetraedro y se expande recursivamente a los vecinos que tienen aristas más largas que el elemento anterior del Lepp, hasta llegar a un conjunto de aristas localmente más largas, conocidas como aristas terminales. Los tetraedros que comparten estas aristas son conocidos como estrellas terminales.

Los algoritmos Lepp refinan o mejoran calculando iterativamente el Lepp de los tetraedros de mala calidad, destruyendo las estrellas con inserción (del centroide de los tetraedros, del punto medio de la arista más larga, etc.) hasta remover los tetraedros objetivo. En esta tesis se desarrolló el algoritmo Lepp Selectivo, un algoritmo que destruye las estrellas terminales usando la mejor operación disponible entre la inserción del centroide o el intercambio de aristas (que reconfigura la conexión de los puntos de la estrella terminal), además, si ninguna operación mejora la malla un mínimo establecido, se pueden omitir estrellas terminales, procesando el elemento anterior del Lepp.

Para mejorar las mallas de tetraedros, se desarrolló una medida de calidad basada en el ángulo diedro que considera tanto el ángulo diedro mínimo como el máximo. Los resultados empíricos muestran que el Lepp selectivo reduce el porcentaje de tetraedros de mala calidad de a entre un 40% y un 70% de la malla original, generando mallas finales con un tamaño que oscila entre un 1.1 y 2.9 veces el tamaño de la malla original.

Una de las principales ventajas del Lepp selectivo, es su bajo costo computacional, procesando la mayoría de las mallas de tetraedros en 30 segundos o menos, usando una versión secuencial en un computador portátil de gama media. En comparación, el tiempo es solo entre un 2.5% y un 14% del tiempo que tardan los algoritmos de Klingner y Shewchuk.

El Lepp Selectivo obtiene buenos resultados en mallas de interés, como mallas con pocos puntos interiores o de baja calidad inicial, por lo que tiene potencial de ser un algoritmo que pueda ser usado en la práctica.

Tabla de Contenido

Introducción.....	1
1.1 Generación y mejoramiento de mallas.....	2
1.2 Foco de la tesis.....	3
1.1.1 Hipótesis.....	3
1.2.1 Objetivo General.....	3
1.2.2 Objetivos específicos.....	3
1.1.2 Metodología.....	3
Conceptos y trabajo previo.....	4
2.1 Calidad de un tetraedro.....	4
2.1.1 Tetraedros de mala calidad.....	4
2.1.2 Angulo Diedro.....	5
2.1.3 Medida de calidad basada en el volumen.....	5
2.2 Lepp 2D.....	6
2.3 Algoritmos Lepp de refinación 2D.....	6
2.3.1 Algoritmos originales de refinamientos por bisección.....	7
2.3.2 Algoritmo Lepp Bisección 2D.....	7
2.3.3 Algoritmo Lepp 2D Genérico.....	8
2.4 Lepp en tres dimensiones.....	9
2.4.1 Lepp3D.....	9
2.4.2 Lepp-Simple.....	10
2.5 Estrella terminal.....	11
2.5.1 Estrella cerrada.....	11
2.5.2 Estrella abierta.....	11
2.6 Algoritmos Lepp en tres dimensiones.....	12
2.7 Algoritmos Lepp 3D basados en inserción simple.....	12
2.7.1 Lepp Bisección.....	12
2.7.2 Lepp Centroide.....	13
2.8 Algoritmo Lepp Delaunay 3D.....	14
2.8.2 Inserción Delaunay.....	14
2.8.3 Algoritmo Lepp Delaunay.....	14
2.9 Mejoramiento de mallas de tetraedros propuestos en la literatura.....	15
2.9.1 Mejoramiento de mallas de tetraedros de Freitag y Ollivier-Gooch usando smoothing y swapping.....	15
2.9.2 Mejoramiento de Klingner-Shewchuk.....	16
Operaciones usadas en esta tesis para mejorar una malla de tetraedros.....	18
3.1 Inserción en la estrella terminal.....	18
3.1.1 Validación luego de la inserción del centroide.....	19
3.1.2 Propiedades de la inserción en la estrella cerrada.....	21
3.1.3 Propiedades de la inserción en la Inserción en la estrella abierta.....	21
3.2 Operaciones de intercambio de aristas.....	22
3.2.2 Configuraciones posibles para un intercambio de aristas.....	23
3.3 Operaciones de intercambio de caras.....	24
3.4 Suavizado de Laplace.....	25
Representación del Lepp en 3D.....	26
4.1 Aristas principales del Lepp.....	26

4.1.2	Representación del Lepp3D.....	26
4.2	Cálculo del Lepp3D luego de procesar una estrella terminal.....	28
4.2.2	Cálculo del Lepp3D a partir del Lepp3D anterior.	28
4.3	Implementación eficiente del Lepp.	30
4.3.1	Cálculo del Lepp Simple a partir del Lepp Simple Anterior.	30
Estudio del desempeño de los algoritmos Lepp no Delaunay previos		31
5.1.1	Función de calidad.	31
5.1.2	Lepp Centroide.	31
Algoritmos Lepp desarrollados en esta tesis.....		34
6.1	Lepp Swap/ Centroid.....	34
6.1.2	Algoritmo Lepp-Swap/Centroid	34
6.1.3	Función de calidad.	36
6.1.4	Resultados empíricos Lepp Swap/Centroid.	36
6.2	Algoritmo Lepp Selectivo.	37
6.2.2	Lepp3D Truncado.	38
6.2.3	Lepp Simple Truncado.....	39
6.2.4	Lepp Selectivo	40
6.2.5	Aristas no refinables	41
6.2.6	Función de calidad.	41
6.2.7	Conjunto de tetraedros a mejorar.....	41
6.2.8	Condición de parada.	41
Estudio empírico del algoritmo Lepp Selectivo usando la medida de calidad basada en los ángulos diedros.		44
7.1	Software de prueba.....	44
7.1.1	Estructuras de datos.	44
7.1.2	Testing.	45
7.2	Parámetros del estudio.	45
7.2.1	Mejoramiento de la malla	45
7.2.2	Condición de parada	45
7.3	Mallas de prueba.	45
7.3.1	Retinal.....	46
7.3.2	P.	46
7.3.3	N090.....	47
7.3.4	Fémur	47
7.3.5	RND2000	48
7.4	Lepp Selectivo combinado con otras operaciones.	48
7.4.1	Lepp Selectivo + Smoothing.....	49
7.4.2	Lepp Selectivo + Face Swap.....	50
7.5	Tamaño de la malla.	51
7.5.1	Efecto del factor mejora en el tamaño de la malla.....	51
7.6	Calidad de los ángulos diedros.....	52
7.6.1	Retinal.....	52
7.6.2	P.	54
7.6.3	N090.....	55
7.6.4	Fémur.....	57
7.6.5	Rnd2000.....	59
7.6.6	Discusión sobre la calidad de las mallas mejoradas.	60
7.6.7	Costo computacional del algoritmo Lepp Selectivo.....	61

Análisis de las mallas finales usando la medida de calidad basada en el volumen.	62
8.1.1 Retinal.....	62
8.1.2 P.	63
8.1.3 N090.....	64
8.1.4 Fémur.	65
8.1.5 Rnd2000.....	66
8.1.6 Resultados midiendo la calidad basada en el volumen.	67
Análisis de las estrellas terminales en los algoritmos estudiados.....	68
9.1.1 Estrellas visitadas en Lepp-Inserción y Lepp Swap/Centroid	68
9.1.2 Estrellas visitadas en el Lepp Truncado.	69
9.2 Inserciones e Intercambios de aristas inválidos.	71
9.3 Estrella terminal	72
9.3.1 Tamaño de las estrellas cerradas.....	72
9.3.2 Tamaño de las estrellas abiertas.....	73
9.4 Operaciones realizadas en las estrellas terminales.	73
9.4.2 Operaciones usadas para mejorar las estrellas cerradas.....	75
9.5 Discusión sobre los resultados del análisis de las estrellas terminales.	76
Conclusiones	77
Bibliografía	79
Anexos	82
Anexo A: Histogramas ángulos diedros Lepp-Centroide	82
Anexo B: Histogramas ángulos diedros Lepp-Swap/Centroid	85
Anexo C: Histogramas ángulos diedros Lepp Selectivo.....	88
Anexo D: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp-Centroide	91
Anexo E: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp-Swap/Centroid	95
Anexo F: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp Selectivo	98

Capítulo 1

Introducción.

Las mallas de tetraedros han sido usadas en un amplio rango de aplicaciones desde hace décadas por ingenieros e investigadores, debido a sus aplicaciones en métodos de elementos finitos [3,22]. Para la mayoría de las aplicaciones, el tamaño y la calidad de la malla influyen directamente en el tiempo requerido para procesarla y en la calidad de los resultados obtenidos. Actualmente, existen múltiples técnicas diseñadas para generar y refinar mallas de buena calidad y tamaño adecuado. Sin embargo, la generación de mallas de buena calidad aún sigue siendo un cuello de botella en el desempeño de técnicas como el método de volúmenes finitos y el análisis de elementos finitos en tres dimensiones.

Los algoritmos basados en el Lepp (Lepp bisección y Lepp Delaunay) desarrollados por Rivara [22] son técnicas rápidas, simples y eficientes para el refinamiento/mejoramiento de mallas de buena calidad. Estos algoritmos funcionan tanto en dos dimensiones, como en tres dimensiones. En particular, sobre mallas de tetraedros se desarrollaron los algoritmos Lepp bisección [28], Lepp centroide [30] y Lepp Wcentroide [30]. En esta tesis se realizó un estudio empírico del comportamiento de los algoritmos Lepp Simple (no Delaunay) en tres dimensiones [22,23,28,30] y sus componentes. A partir de este estudio se desarrolló un nuevo algoritmo Lepp, llamado Lepp Selectivo, diseñado para mejorar mallas de tetraedros de forma rápida y manteniendo una malla de tamaño razonable.

El Lepp, sigla que en español se traduce como camino de propagación por la arista más larga es la operación principal del proceso de mejoramiento en los algoritmos Lepp, ya que se utiliza para encontrar la zona donde se realizará la mejora en cada paso. En tres dimensiones, el Lepp es una búsqueda multidireccional de aristas localmente más largas, las que son modificadas con técnicas como la inserción o intercambio de aristas. En esta tesis se utiliza una variante simplificada del Lepp, que es más rápida de calcular y en la mayoría de los casos se comporta de la misma manera que el Lepp original.

En el capítulo 2 se presenta el Lepp y algoritmos basados en el Lepp presentes en la literatura, además se presentan otros algoritmos de mejoramiento desarrollados por otros autores. En el capítulo 3 se estudian las operaciones usadas para mejorar mallas de tetraedros que son usadas en los algoritmos de mejoramiento estudiados en esta tesis. En el capítulo 4 se estudia el Lepp y se presenta una forma de calcularlo eficientemente. En el Capítulo 5 se estudia el comportamiento de los algoritmos Lepp existentes al ser usados para el mejoramiento de mallas. En el capítulo 6 se presentan dos algoritmos Lepp diseñados en esta tesis para mejorar una malla de tetraedros. En el capítulo 7 y 8 se realiza un estudio empírico del Lepp Selectivo, que presenta los mejores resultados al mejorar mallas de tetraedros y es la contribución más importante de esta tesis. En el capítulo 9 se hace un análisis empírico de la cantidad de elementos visitados para el cálculo del Lepp y el tamaño de las estrellas terminales.

1.1 Generación y mejoramiento de mallas.

La generación de mallas para métodos de elementos finitos y sus aplicaciones pueden ser divididas en categorías, según su forma de operar:

- *Algoritmos de Delaunay*, basados en la inserción de puntos en mallas que cumplen con las propiedades de Delaunay [5,11,31,35].
- *Algoritmos Advancing front*, que construyen mallas desde los bordes hacia el centro de la malla [11,33].
- *Algoritmos basados en octrees*, que dividen el problema en zonas más pequeñas de interés [13].
- *Algoritmos de refinamiento basados en la bisección del lado más largo y algoritmos Lepp de refinamiento*, basados en la bisección de triángulos y tetraedros por la arista más larga [23,24,25,28,30].
- *Algoritmos de refinamiento Delaunay*, basados en inserción Delaunay del circuncentro [32].

En los métodos de elementos finitos, se requieren mallas de buena calidad, la que está determinada por la calidad geométrica de los elementos que la componen. Los tetraedros de mala calidad pueden introducir errores de interpolación y de discretización, o un mal condicionamiento de las matrices de rigidez asociadas al método de elementos finitos.

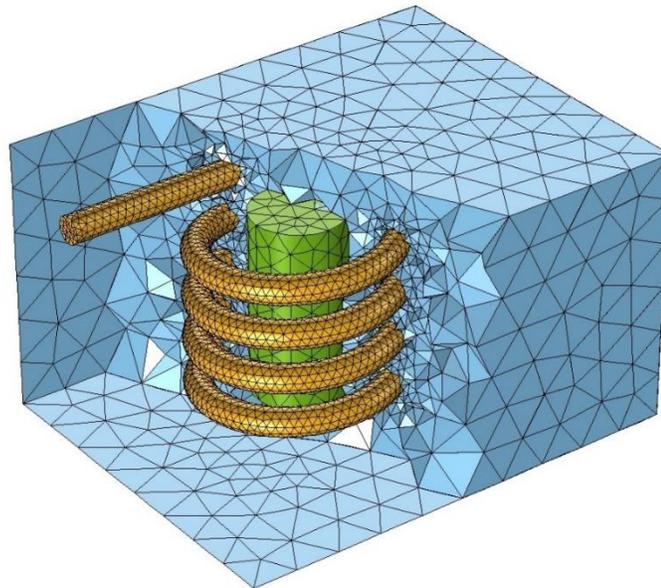


Figura 1.1: Mallas de tetraedros usadas en un problema de elementos finitos.
Imagen obtenida por Frei [8].

1.2 Foco de la tesis.

El tema de esta tesis es el desarrollo de algoritmos Lepp simples (no Delaunay) para mejorar mallas de tetraedros de forma rápida, entregando como resultado una malla de buena calidad y de tamaño razonable. Para desarrollar un algoritmo con las características mencionadas, se estudiaron los algoritmos Lepp existentes usados para el mejoramiento de mallas de tetraedros, se investigó el Lepp (el camino de propagación por la arista más larga), sus características y el desarrollo de una implementación eficiente. También se investigaron operaciones locales usadas para mejorar mallas de tetraedros, tales como la inserción y el intercambio de aristas.

1.1.1 Hipótesis.

En tres dimensiones, es posible desarrollar un algoritmo eficiente usando operaciones locales sobre estrellas terminales (conjunto de tetraedros que comparten una arista más larga localmente) para mejorar mallas de tetraedros.

1.2.1 Objetivo General.

Desarrollar algoritmos Lepp en tres dimensiones que puedan mejorar la calidad de mallas tetraedros de forma eficiente y realizar estudios empíricos de estos algoritmos.

1.2.2 Objetivos específicos.

Estudiar los algoritmos Lepp en 3D basados en la inserción.

Desarrollar una implementación eficiente para encontrar una estrella terminal.

Estudiar el uso de operaciones sobre estrellas terminales.

1.1.2 Metodología.

Se estudiaron los algoritmos Lepp existentes y la literatura asociada a las operaciones de mejoramiento sobre conjuntos de tetraedros, en especial las inserciones simples de puntos en el interior de estrellas terminales (conjunto de tetraedros que comparten una arista más larga localmente) y las operaciones de intercambio de aristas y caras estudiados por Freitag y Ollivier-Gooch [9].

Para desarrollar los algoritmos Lepp se procedió de la siguiente forma. Usando los estudios realizados se diseñó el algoritmo basándose en los algoritmos Lepp existentes, combinándolos con operaciones que puedan ser usadas en estrellas terminales. Se implementaron los algoritmos Lepp Simples usando como base el software tetra, desarrollado en C++ por Pedro Rodríguez. Estos algoritmos fueron testeados para asegurar su correcto funcionamiento. Finalmente, se realizó un estudio empírico sobre un conjunto de 21 mallas de tetraedros recopiladas por Pedro Rodríguez usando las librerías de CGAL (CGAL Delaunay Software).

Capítulo 2

Conceptos y trabajo previo.

En este capítulo se introducen los conceptos bases para el desarrollo de esta tesis, tales como, la calidad de un tetraedro y la definición de Lepp. Además, se presentan algoritmos basados en Lepp y otros algoritmos de mejoramiento descritos por otros autores.

2.1 Calidad de un tetraedro.

Para mejorar una malla de tetraedros, en primer lugar, es necesario determinar qué elementos son considerados de mala calidad y deben ser mejorados.

2.1.1 Tetraedros de mala calidad.

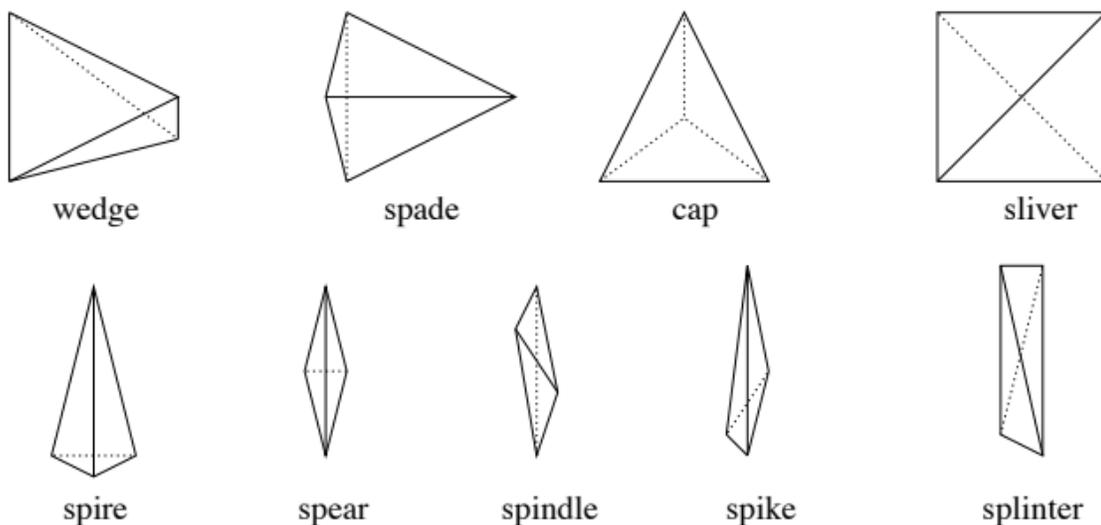


Figura 2.1: Tipos de tetraedros de mala calidad.
Imagen y clasificación obtenida por Shewchuck, Dey y Cheng [36]

Desde el punto de vista geométrico, los tetraedros de mala calidad se clasifican en 9 tipos ilustrados en la Figura 2.1. En general, estos son dañinos para las aplicaciones de elementos finitos a excepción de los *spires* con buenos ángulos diedros, que suelen ser inocuos para las aplicaciones, llegando incluso a ser indispensables para un dominio anguloso [36].

Definición 2.1 Una medida de calidad es un mapeo desde un elemento a un valor escalar que mide la calidad geométrica de la forma del elemento, independientemente de su tamaño [36].

Una medida de calidad adecuada debe ser capaz de identificar los tetraedros considerados de mala calidad geométrica.

Si bien existen varias medidas de calidad, en el desarrollo de esta tesis se usarán dos medidas específicas: una basada en el ángulo diedro y otra basada en razones de volumen.

2.1.2 Angulo Diedro.

Definición 2.2 Un ángulo diedro es el ángulo que forman dos planos o polígonos que se interceptan, por ejemplo, dos caras de un tetraedro [14].

Un tetraedro tiene 6 ángulos diedros. Cada uno de éstos es el ángulo generado al interceptar los planos de un par de sus caras. Los tetraedros de mala calidad se caracterizan por tener al menos un ángulo extremo, es decir, cerca de 0° o de 180° . La principal excepción es un tetraedro *spire* que puede tener todos sus ángulos entre 60° y 90° , sin embargo, como se clarificó anteriormente, estos no suelen ser dañinos, por lo que pueden ser omitidos del mejoramiento.

Una medida de calidad que utilice el ángulo diedro debe penalizar a los tetraedros con ángulos cercanos a 0° y a los con ángulos cercanos a 180° .

En esta tesis se introduce la siguiente medida:

$$Qty_{diedral}(t) = \text{Minimo} (\alpha_{min}, 180^\circ - \alpha_{max})$$

Donde α_{min} es el ángulo diedro mínimo y α_{max} es el ángulo diedro máximo.

Usando esta medida y dada una tolerancia, si un tetraedro t contiene al menos un ángulo diedro de mala calidad entonces $Qty_{diedral}(t) < Tolerancia$.

Nota: En el desarrollo de esta tesis, se usó una tolerancia de 30° , por lo que todos los resultados se presentan para 30° .

2.1.3 Medida de calidad basada en el volumen.

Definición 2.3 La medida de calidad basada en el volumen de un tetraedro t se calcula como:
 $Q_{volumen}(tetraedro) = C * V / l_{max}^3$.

Donde V es el volumen del tetraedro, l_{max} es el lado más largo del tetraedro, y C es un valor constante, para que el valor máximo de la calidad del volumen sea 1 (para los tetraedros equiláteros), el valor de C debe ser $6\sqrt{2}$. Los tetraedros de peor calidad tienen una medida de calidad del volumen cercana a 0.

2.2 Lepp 2D.

El camino de propagación por la arista más larga, llamado Lepp por su sigla en inglés (Longest Edge Propagation Path), es una operación usada sobre un triángulo t_0 perteneciente a una triangulación y se define formalmente como [3,22,24,30]:

Definición 2.4 Para cualquier triángulo t_0 en una triangulación, el Lepp de t_0 es la lista ordenada de todos los triángulos $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$, donde t_i es el triángulo vecino de t_{i-1} , por el lado más largo de t_{i-1} para $i = 1, 2, \dots, n$ y donde $\text{lado más largo}(t_j) > \text{lado más largo}(t_{j-1})$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

El Lepp en 2D corresponde a un conjunto de triángulos (submalla), que va desde el triángulo objetivo, avanzando por los vecinos por la arista más larga, hasta los triángulos que contienen una arista localmente más larga.

Definición 2.5 Una arista E es llamada arista terminal en una triangulación si es la arista más larga de cada triángulo que comparte E . Los triángulos que comparten una arista terminal son llamados triángulos terminales.

En dos dimensiones, si la arista terminal se encuentra en el interior de la malla, esta tendrá asociada dos triángulos terminales y si la arista terminal se encuentra en el borde de la malla, solo tendrá asociado un triángulo terminal.

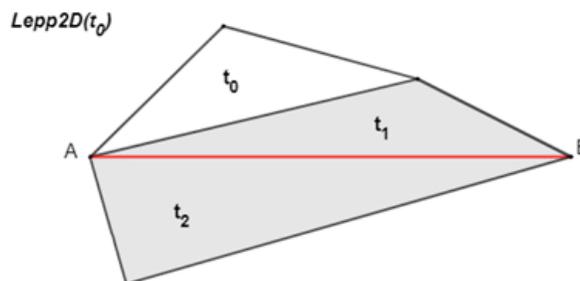


Figura 2.2: Lepp2D de t_0 , con arista terminal AB y triángulos terminales t_1 y t_2 .

2.3 Algoritmos Lepp de refinación 2D.

La operación Lepp y sus conceptos asociados fueron diseñados para reformular el algoritmo de bisección por la arista más larga [20,21] de forma simple y eficiente, y se usa en la generación o refinación de mallas de triángulos para métodos de elementos finitos [20,22,24].

2.3.1 Algoritmos originales de refinamientos por bisección

En la bisección por la arista más larga de un triángulo t_0 perteneciente al conjunto de triángulos a refinar, se inserta el punto medio de su arista más larga y se une con el vértice opuesto a esta arista. Esto crea triángulos no conformes, los cuales tienen dos vecinos por una misma arista y son eliminados iterativamente realizando la bisección de su arista más larga.

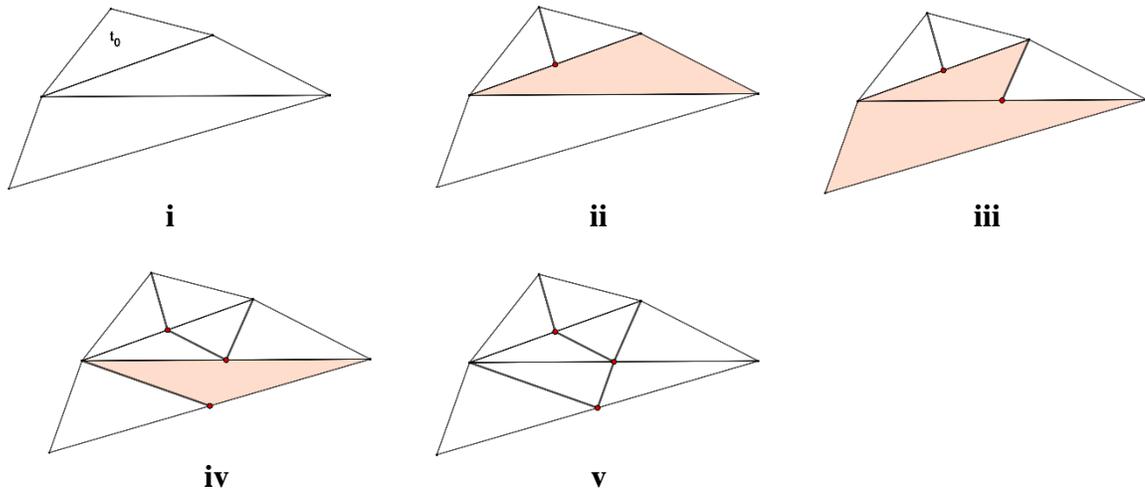


Figura 2.3: Bisección de la arista más larga de t_0 .

La Figura 2.3 ilustra la refinación de t_0 paso a paso usando la refinación de la arista más larga, los triángulos no conformes generados tras cada inserción son coloreados.

2.3.2 Algoritmo Lepp Bisección 2D.

Usando el concepto de Lepp, el algoritmo de bisección de la arista más larga puede ser reformulado como el algoritmo Lepp Bisección.

El algoritmo Lepp bisección en 2D refina una malla de triángulos mediante la bisección de la arista más larga de los triángulos ubicados en los triángulos terminales [22,24].

Algoritmo 2.1 Lepp Bisección 2D

Entrada: Una triangulación T y un conjunto S de triángulos a refinar.

Salida: Una triangulación T' en la que cada triángulo $t \in S$ ha sido refinado.

```
for cada triángulo  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    Calcular  $\text{Lepp2D}(t_i)$  y sus triángulos terminales.
    Realizar la bisección de la arista más larga de los
    triángulos terminales.
  end while
end for
```

A diferencia del algoritmo de bisección de la arista más larga, el Lepp Bisección 2D no genera triángulos no conformes en los pasos intermedios de la refinación.

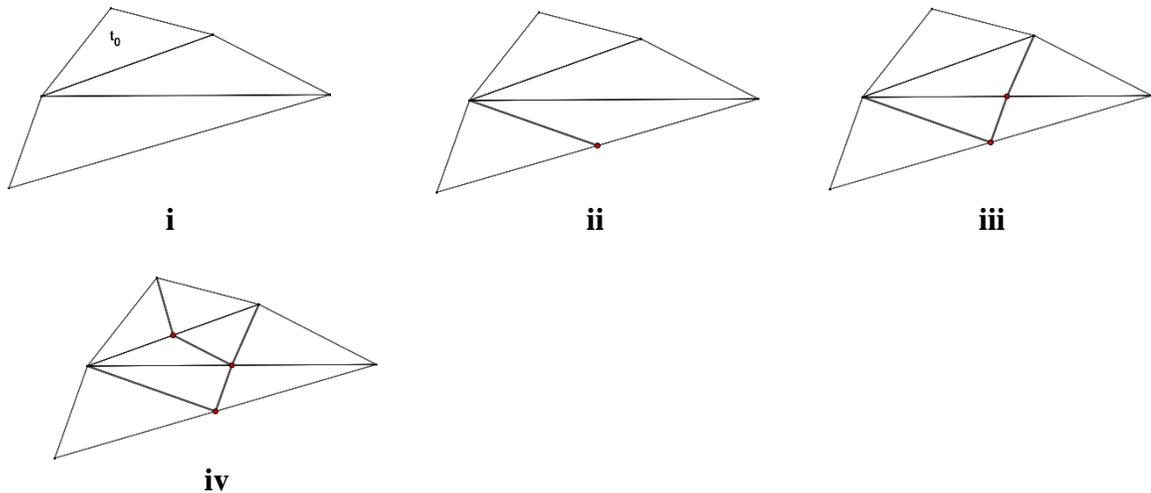


Figura 2.4: Refinación de t_0 usando el algoritmo Lepp Bisección.

En general la triangulación final obtenida es igual en ambos algoritmos, salvo excepciones (triángulos con más de un lado más largo).

2.3.3 Algoritmo Lepp 2D Genérico.

Todos los algoritmos Lepp son formulados en términos de los conceptos de aristas terminales, triángulos terminales y el Lepp definidos en la sección 2.2.

Los algoritmos Lepp comparten una estructura común, realizando la refinación de cada triángulo t_i en tres pasos básicos [19,22]:

Se calcula el $\text{Lepp2D}(t_i)$ y sus triángulos terminales.

2) Se encuentra el punto P a ser insertado.

3) Se inserta P en la triangulación.

Este proceso se repite hasta que el triángulo t_i es destruido.

Algoritmo 2.2 Algoritmo Lepp 2D

Entrada: Una triangulación T y un conjunto S de triángulos a refinar.

Salida: Una triangulación T' en la que cada triángulo $t \in S$ ha sido refinado.

```

for cada triángulo  $t_i$  en S do
  while  $t_i$  se mantenga en T do
    Calcular  $\text{Lepp2D}(t_i)$  y sus triángulos terminales.
    Encontrar el punto P a ser insertado
    Insertar P en la triangulación
  end while
end for

```

En un algoritmo Lepp, la refinación ocurre en los triángulos terminales, los que son destruidos en el proceso. La forma en la que los triángulos terminales son destruidos es determinada por la variante del algoritmo Lepp usado [3,29], por ejemplo, los triángulos terminales pueden ser destruidos mediante la inserción del punto medio de la arista terminal [29], la inserción del centroide de los triángulos terminales [29] o inserción Delaunay de los puntos antes mencionados [3,6].

Notar que la refinación de la malla no ocurre directamente en el triángulo objetivo, si no que ocurre en los triángulos terminales, por lo tanto, la refinación del triángulo objetivo ocurre cuando este se convierte en triángulo terminal (o es destruido indirectamente por la inserción Delaunay), por lo que la refinación se propaga desde las aristas terminales hasta el triángulo objetivo. Bedregal y Rivara demostraron que el tamaño promedio del Lepp2D es menor a 3 [2,19, 30].

Los últimos algoritmos Lepp desarrollados tienen las siguientes propiedades: son fáciles de implementar, independientes del orden de la entrada, robustos y adecuados para su uso en métodos de elementos finitos adaptativos.

En la referencia [19] se han estudiado las propiedades matemáticas del algoritmo Lepp Centroide en dos dimensiones y se ha demostrado que el algoritmo produce triangulaciones de calidad superior a 30° para cualquier grafo plano de líneas rectas (planar straight line graph) cuyos ángulos restringidos sean de 30 o más grados.

2.4 Lepp en tres dimensiones.

El camino de propagación de la arista más larga en tres dimensiones, que será llamado Lepp3D, es un subconjunto de una malla de tetraedros que se encuentra partiendo por el tetraedro t_0 , avanzando por las aristas más largas de los tetraedros, hasta llegar a un conjunto de aristas terminales [22]. El concepto de Lepp3D, es la extensión tridimensional del Lepp2D [22].

2.4.1 Lepp3D.

Formalmente, en tres dimensiones, dada una malla de tetraedros y un tetraedro t_0 en dicha malla, el Lepp3D(t_0) se define [25,27] como:

Definición 2.6 *Para cualquier tetraedro t_0 en una malla M , el Lepp3D(t_0) es un subconjunto de la malla definido como:*

- a) *El Lepp3D(t_0) incluye a t_0 y a cada tetraedro t_i que comparte la arista más larga de t_0 con t_i , y arista más larga(t_i) > arista más larga(t_0).*
- b) *Para cualquier tetraedro t_j en el Lepp3D(t_0), el Lepp3D (t_0) también contiene cada tetraedro t_k , que aún no pertenezca a Lepp3D(t_0), tal que t_k comparte la arista más larga de t_k y arista más larga(t_k) > arista más larga(t_j).*

Definición 2.7 Una arista E , es una arista terminal, si es la arista más larga de todos los tetraedros que comparten E .

Definición 2.8 Una estrella terminal es el conjunto de tetraedros que comparten una arista terminal.

Notar que los conceptos de Lepp3D, arista terminal y estrella terminal son la extensión tridimensional del Lepp2D, arista terminal y triángulos terminales.

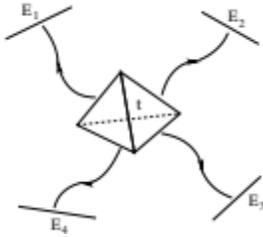


Figura 2.5: El Lepp3D usa una búsqueda multidireccional para encontrar un conjunto de estrellas terminales.

En tres dimensiones, cada arista pertenece a múltiples tetraedros, por lo que pueden existir múltiples tetraedros con aristas más largas a la anterior, extendiendo la búsqueda de las aristas terminales por varios caminos, los que pueden llegar a múltiples aristas terminales con sus correspondientes estrellas terminales. Ver Figura 2.5.

Propiedad 2.1 Para cualquier tetraedro t_i en una malla, el $\text{Lepp3D}(t_i)$ contiene un conjunto de N aristas terminales, donde $N \geq 1$ [25].

2.4.2 Lepp-Simple.

Una de las ventajas del Lepp2D es ser un algoritmo sencillo y fácil de implementar [19,22], sin embargo, la existencia de múltiples caminos hace que la implementación del Lepp3D sea más complicada que la implementación del Lepp2D.

Es posible simplificar el cálculo del Lepp3D siguiendo solo un camino hasta una estrella terminal. A partir de esta simplificación se define el Lepp Simple.

El Lepp Simple de un tetraedro t_0 , que se denota como $\text{Lepp-Simple}(t_0)$ se define como [1,27]:

Definición 2.9 Para cualquier tetraedro t_0 en una malla, el $\text{Lepp-Simple}(t_0)$ es la lista ordenada de todos los tetraedros t_0, t_1, \dots, t_n . que comienza con t_0 y $i = 1, 2, \dots, n$. t_i es elegido del conjunto de tetraedros que comparte la arista más larga de t_{i-1} , y arista más larga(t_i) > arista más larga(t_{i-1})

El tetraedro t_i puede ser elegido usando distintos criterios, sin embargo, los experimentos estudiados en esta tesis realizados para encontrar el mejor camino del Lepp-Simple en los algoritmos Lepp3D no muestran diferencias significativas en las mallas mejoradas, por lo que es conveniente elegir el camino que tome menos tiempo encontrar.

2.5 Estrella terminal.

En esta tesis el concepto de estrella terminal tiene gran relevancia para los algoritmos Lepp en tres dimensiones, pues las operaciones usadas para refinar o mejorar la malla de tetraedros actúan sobre estos conjuntos de tetraedros, reemplazando los tetraedros de la estrella terminal por un nuevo conjunto de tetraedros que ocupan su lugar.

Las estrellas terminales se dividen morfológicamente en dos tipos [22,27]:

2.5.1 Estrella cerrada.

Una estrella cerrada se caracteriza por tener su arista terminal totalmente rodeada por el conjunto de tetraedros, lo que la convierte en un lugar apropiado para realizar operaciones como las inserciones simples [23,28,30] y el intercambio de aristas [9], las que serán tratadas en detalle en el capítulo 3.

Definición 2.10 *Una estrella cerrada es una estrella terminal cuya arista terminal se encuentra en el interior de la malla de tetraedros.*

Propiedad 2.2 Toda estrella cerrada contiene al menos 3 tetraedros.

2.5.2 Estrella abierta.

Las estrellas abiertas se caracterizan por tener su arista terminal en el borde de la malla y tienen las siguientes propiedades:

Definición 2.11 *Una estrella abierta es una estrella terminal cuya arista terminal se encuentra en el borde de la malla de tetraedros.*

Propiedad 2.3 Una estrella abierta tiene al menos dos caras en el borde de la malla de tetraedros.

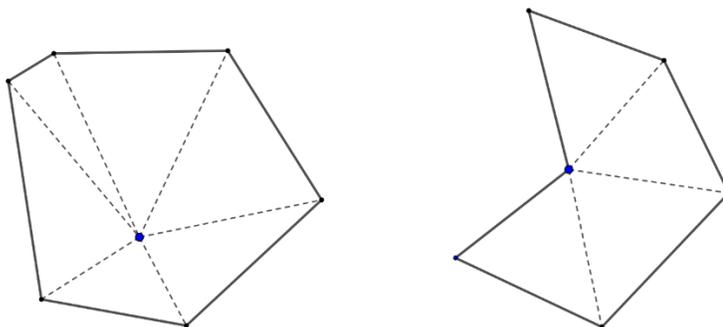


Figura 2.6: Vista aérea de dos estrellas terminales, a la izquierda una estrella terminal cerrada de tamaño 6, a la derecha una estrella terminal abierta de tamaño 4.

2.6 Algoritmos Lepp en tres dimensiones.

Al igual que los algoritmos Lepp en 2 dimensiones, en tres dimensiones la refinación de cada tetraedro t_i se realiza siguiendo los mismos tres pasos básicos:

Algoritmo 2.3 Algoritmo Lepp 3D

Entrada: Una malla de tetraedros T y un conjunto S de tetraedros a refinar.

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido refinado.

```
for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    1.- Calcular  $\text{Lepp}(t_i)$  y su estrella terminal asociada
    2.- Encontrar el punto  $P$  a insertar
    3.- Insertar  $P$  en la estrella terminal
  end while
end for
```

En el desarrollo de esta tesis el $\text{Lepp}(t_i)$ se calcula usando Lepp-Simple.

Al insertar P en la estrella terminal se realizan cambios locales confinados al espacio que ocupa la estrella terminal, es decir, se reemplazan los tetraedros de la estrella terminal por un nuevo conjunto de tetraedros que ocupan el mismo lugar de la estrella terminal. Este proceso destruye la arista terminal.

Observación Importante: En tres dimensiones, la refinación ocurre destruyendo la arista terminal y los tetraedros que forman parte de la estrella terminal. Si bien la refinación de la estrella terminal puede ser realizada realizando una inserción Delaunay dentro de la estrella terminal [22,24], en esta tesis solo se estudian técnicas de refinación que modifican la malla localmente, es decir, dentro de la estrella terminal.

2.7 Algoritmos Lepp 3D basados en inserción simple.

Con anterioridad a este trabajo de tesis, se desarrollaron algoritmos Lepp basados en inserción simple del punto medio de la arista terminal [28], del centroide de la estrella terminal y del Wcentroide de la estrella terminal [30], así como algoritmos basados en la inserción Delaunay del punto medio de la arista terminal [24,27].

2.7.1 Lepp Bisección.

El algoritmo Lepp Bisección refina la malla de tetraedros mediante la bisección de tetraedros por la arista más larga [23,28]. En dos dimensiones el algoritmo garantiza que el menor ángulo del triángulo refinado se mantendrá acotado por el menor ángulo del triángulo original. En tres dimensiones esta propiedad no está demostrada.

Algoritmo 2.4 Algoritmo Lepp Bisección 3D

Entrada: Una malla de tetraedros T y un conjunto S de tetraedros a refinar.

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido refinado.

```
for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    Calcular  $Lepp(t_i)$ , su estrella terminal y su arista terminal
    Calcular el punto  $P$  como el punto medio de la arista terminal
    Insertar  $P$  en la estrella terminal
  end while
end for
```

Dado que el algoritmo Lepp Bisección no está diseñado para mejorar la calidad de los tetraedros que refina no tiende a mejorar la calidad de la malla de tetraedros significativamente.

Por construcción el algoritmo Lepp Bisección garantiza que la inserción mantiene una malla no enredada.

2.7.2 Lepp Centroide.

El algoritmo Lepp Centroide refina los tetraedros objetivo insertando iterativamente el centroide de la estrella terminal del Lepp de los tetraedros de mala calidad. El centroide es insertando en dos pasos: se remueve la arista terminal (formando una cavidad) y unen las caras externas de la estrella terminal con el centroide insertado.

Algoritmo 2.5 Lepp Centroide 3D

Entrada: Una malla de tetraedros T y un conjunto S de tetraedros a refinar.

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido refinado.

```
for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    Calcular  $Lepp(t_i)$  su estrella terminal y su arista terminal
    if estrella terminal es cerrada:
      Calcular  $P$  como el centroide de la estrella terminal
    else
      Insertar el punto medio de la arista terminal en la
      estrella terminal
    end if
    if inserción de  $P$  es válida do
      Insertar  $P$  en la estrella terminal
    else
      Insertar el punto medio de la arista terminal en la
      estrella terminal
    end if
  end while
end for
```

A diferencia del algoritmo Lepp Bisección, la inserción del centroide no garantiza mantener una malla no enredada (ver sección 3.1). Cuando la inserción del centroide enreda la malla o la estrella terminal es abierta, se recurre a la inserción del punto medio de la arista terminal para garantizar una malla válida.

Una variante del algoritmo Lepp Centroide, el algoritmo Wcentroide [28,30] inserta el promedio de los centroides de cada tetraedro perteneciente a la estrella terminal.

2.8 Algoritmo Lepp Delaunay 3D.

El Algoritmo Lepp Delaunay [24] fue diseñado para mejorar la calidad de las mallas de tetraedros.

Definición 2.12 *Una malla Delaunay, es una malla de tetraedros en que toda esfera circunscrita a cada tetraedro de la malla no contiene ningún punto de otro tetraedro en su interior.*

2.8.2 Inserción Delaunay.

Al realizar una inserción Delaunay, es necesario asegurar que la malla de tetraedros siga siendo Delaunay luego de la inserción. Esto se puede lograr usando el algoritmo Bowyer-Watson [4,36], que es un algoritmo incremental que permite insertar puntos en una malla de tetraedros manteniendo una malla Delaunay.

El algoritmo Bowyer-Watson comienza encontrando el conjunto de tetraedro cuya esfera circunscrita contiene al nuevo punto, removiendo las aristas que pertenecen a más de un tetraedro encontrado, formando una cavidad con forma de estrella. Como último paso, se conectan todos los vértices de la cavidad al nuevo punto.

Algoritmo 2.6 Algoritmo Bowyer-Watson.

Entrada: Un punto P y una malla de tetraedros S

Salida: Una malla S' con el punto P insertado cumpliendo las propiedades Delaunay.

Crear la lista T que contiene cada tetraedro cuya esfera circunscrita contenga a P

Remover cada arista que aparece en más de un tetraedro de la lista.
(Formando una cavidad con forma de estrella)

Reconectar la cavidad con el punto P .

2.8.3 Algoritmo Lepp Delaunay.

En los algoritmos Lepp Delaunay [24,27] la inserción debe cumplir con las propiedades Delaunay, por lo que se expande fuera de la estrella terminal.

El algoritmo Lepp Delaunay en 3D es propuesto en la referencia [22] y estudiado empíricamente en la referencia [24] y produce mallas de calidad.

Algoritmo 2.7 Algoritmo Lepp Delaunay 3D

Entrada: Una malla de tetraedros T y un conjunto S de tetraedros a refinar.

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido mejorado.

```
for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    Calcular Lepp( $t_i$ ) su estrella terminal y su arista terminal
    Calcular el punto  $P$  como el punto medio de la arista terminal
    Insertar de forma Delaunay  $P$  en la estrella terminal
  end while
end for
```

La implementación de este algoritmo es más complicada que los otros algoritmos Lepp, por lo que en esta tesis se propone un algoritmo más simple que usa operaciones más locales que la inserción Delaunay.

2.9 Mejoramiento de mallas de tetraedros propuestos en la literatura.

2.9.1 Mejoramiento de mallas de tetraedros de Freitag y Ollivier-Gooch usando smoothing y swapping.

El mejoramiento de mallas de tetraedros usando smoothing y swapping estudiado por Freitag y Ollivier-Gooch [9] mejora mallas de tetraedros usando operaciones que mejoran la conectividad de una malla de tetraedros.

El mejoramiento de malla de tetraedros usando smoothing y swapping se basa en tres operaciones principales:

Intercambio de aristas: Reconfigura la conexión de un conjunto de tetraedros unidos por una arista en común, eliminando la arista común y la remplazándola por nuevas aristas que unen los demás vértices del conjunto de tetraedros.

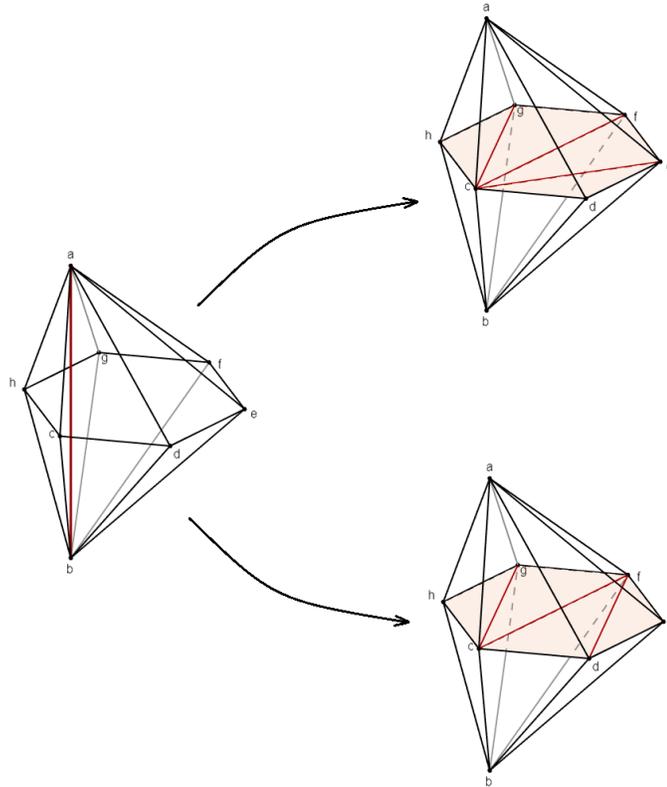


Figura 2.7: Ejemplos de dos posibles Intercambios de aristas de un conjunto de 6 a uno de 8 tetraedros.

Intercambio de caras: Reconecta dos tetraedros unidos por una cara eliminando la cara común y reemplazándola por tres nuevas caras.

Suavizado Laplaciano: Mueve un punto interior al promedio de los puntos que están conectados a él.

Estas tres operaciones son descritas detalladamente en el capítulo 3.

El mejoramiento de la malla de tetraedros se realiza en una serie de pasos, en cada paso, se realiza un barrido usando una de las tres operaciones antes mencionadas, aceptando cambios si se cumple un criterio de mejoramiento específico. En la publicación de Freitag y Ollivier-Goosh [9] se experimenta con distintas combinaciones de pasos, ofreciendo 5 recomendaciones para mejorar la calidad de la malla resultante.

El mejoramiento usando Smoothing y Swapping genera mallas de buena calidad, pero tiene problemas mejorando elementos en los bordes de la malla.

2.9.2 Mejoramiento de Klingner-Shewchuk.

El mejoramiento de Klingner-Shewchuk, también conocido como mejoramiento agresivo de mallas de tetraedros fue desarrollado por Klingner y Shewchuk [14] y procede a intentar mejorar siempre el peor tetraedro de la malla.

El algoritmo mejora el peor tetraedro de la malla usando un amplio conjunto de operaciones, incluyendo las tres operaciones descritas en la sección anterior y, además, añade las siguientes operaciones:

Remoción de múltiples caras: es una operación que reemplaza $2M$ tetraedros por $M+2$ tetraedros, el algoritmo remueve un conjunto de caras cuyos tetraedros pueden unirse en dos vértices extremos (a y b en la Figura 2.8). Esta operación se ilustra en la Figura 2.8.

Inserción de vértices: Se inserta un punto en una ubicación que maximice la mejora.

Operaciones compuestas: Consiste en combinaciones de las operaciones anteriores con el fin de obtener la mayor mejora en la malla.

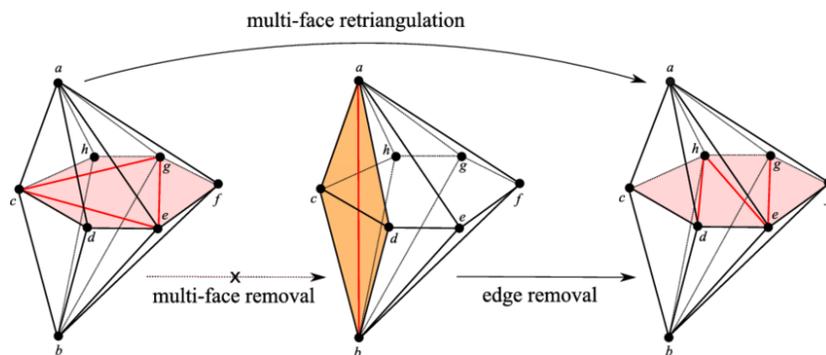


Figura 2.8: A la izquierda, el conjunto de tetraedros original, al centro conjunto de tetraedros luego de la remoción múltiple de caras, a la derecha conjunto de tetraedros luego de realizar intercambio de aristas (también llamado remoción de aristas)
Imagen obtenida por Misztal, Bærentzen, Anton y Erleben [18].

El mejoramiento agresivo de mallas de tetraedros obtiene mallas de tetraedros mejoradas de muy buena calidad, eliminando casi por completo los tetraedros de mala calidad, sin embargo, es un algoritmo costoso y complejo, que involucra múltiples optimizaciones. Por esas razones, es un algoritmo difícil de reproducir.

Capítulo 3

Operaciones usadas en esta tesis para mejorar una malla de tetraedros.

Los algoritmos Lepp desarrollados en este trabajo de tesis mejoran la calidad de una malla de tetraedros usando dos operaciones principales, inserción del centroide de una estrella terminal e intercambio de aristas en mallas de tetraedros. También se estudió el uso del intercambio de caras y el suavizado de Laplace como operaciones complementarias.

3.1 Inserción en la estrella terminal.

En los algoritmos Lepp, la operación de inserción dentro de la estrella terminal se realiza seleccionando un punto Q al interior de la estrella terminal (e.g. punto medio de la arista terminal o centroide de la estrella terminal), luego se destruye la arista terminal y los tetraedros que la contienen (la estrella terminal) formando una cavidad. Finalmente, se conecta Q con las caras de la cavidad, formando un nuevo conjunto de tetraedros en el espacio que ocupaba la estrella terminal.

En general la operación de inserción tiene la siguiente forma:

Algoritmo 3.1 Operación de Inserción dentro de la estrella terminal

Entrada: una estrella terminal TS , perteneciente a una malla de tetraedros M

Salida: una malla de tetraedros M'

Calcular el punto P a insertar al interior de TS .

Remover la arista terminal de TS , formando una cavidad con las aristas exteriores de TS .

Reconectarlas caras de la cavidad con el punto P .

En los algoritmos Lepp, el punto que se inserta dentro de la estrella terminal depende de la geometría de ésta. En estos algoritmos se ha estudiado la inserción del punto medio de la arista terminal [23,28] y el centroide de la estrella terminal [28,30].

Los resultados empíricos muestran que, usar la inserción del centroide de la estrella terminal como operación para mejorar la calidad de una malla de tetraedros, obtiene mejores resultados que la inserción del punto medio de la arista terminal, tanto en el tamaño de la malla resultante como en su calidad, obteniéndose mallas de mejor calidad y menor tamaño usando la inserción del centroide de la estrella terminal.

La inserción del centroide es equivalente a realizar la inserción del punto medio de la arista terminal y luego realizar un suavizado laplaciano sobre ese punto en la malla actual [1].

Definición 3.1 Una malla de tetraedros es válida si no contiene tetraedros enredados (tetraedros solapados).

Por definición [23], la inserción del punto medio de la arista terminal por bisección de tetraedros genera una malla válida, sin embargo, la inserción del centroide puede generar una malla enredada. Si bien es posible usar algoritmos que desenredan la malla [10,16], en el desarrollo de esta tesis, se prefiere evitar el enredar la malla identificando las inserciones que generan tetraedros solapados.

Observación: Las operaciones que producen elementos enredados no son aceptables en el contexto de esta tesis.

3.1.1 Validación luego de la inserción del centroide.

Para evitar enredar la malla al usar la inserción del centroide, es necesario identificar cuando se produce una malla enredada. En este trabajo de tesis se identificaron dos casos que pueden enredar la malla:

1) Inserción fuera de la estrella terminal.

En ocasiones, el centroide de la estrella terminal se encuentra fuera de la estrella terminal, lo que provoca que al unirlo con los puntos de la estrella terminal se generen tetraedros solapados.

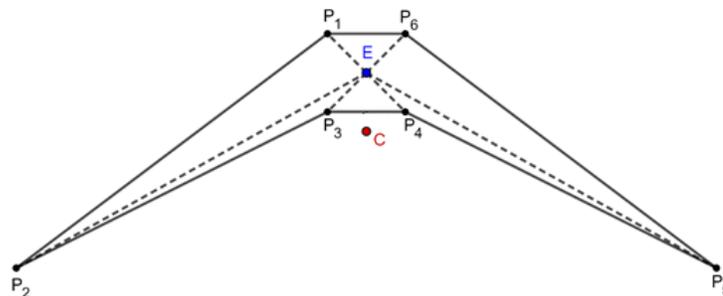


Figura 3.1: Centroide fuera de la estrella terminal.

La Figura 3.1 muestra la vista aérea de una estrella terminal cuyo centroide, denotado por el punto rojo marcado como C, se encuentra fuera de la estrella terminal.

Esta inserción inválida se evita verificando que el centroide se encuentre dentro de al menos un tetraedro perteneciente a la estrella terminal.

2) Las nuevas aristas cruzan una cara de la estrella terminal.

Al unir el centroide (que se encuentra al interior de la estrella terminal) con los puntos de la estrella terminal, las aristas creadas al conectar los puntos de la estrella terminal con el centroide cruzan las caras exteriores de la estrella, provocando que varios tetraedros se solapen parcialmente.

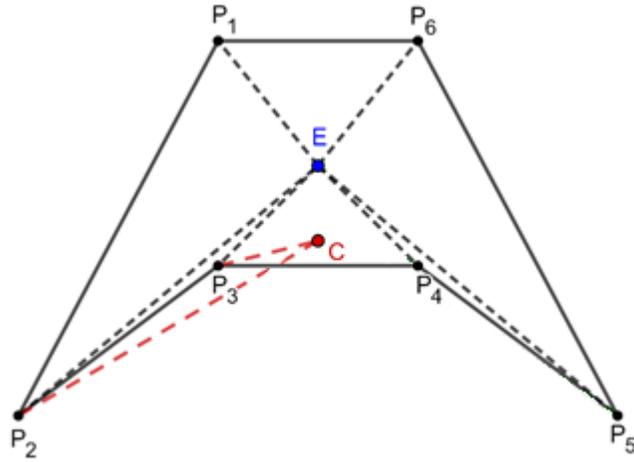


Figura 3.2: Las aristas cruzan las caras externas de la estrella terminal.

La Figura 3.2 muestra la vista aérea de una estrella terminal, con la arista terminal E normal al lector, la arista formada por (P₂, C) atraviesa la cara formada por (P₃, P₄, E).

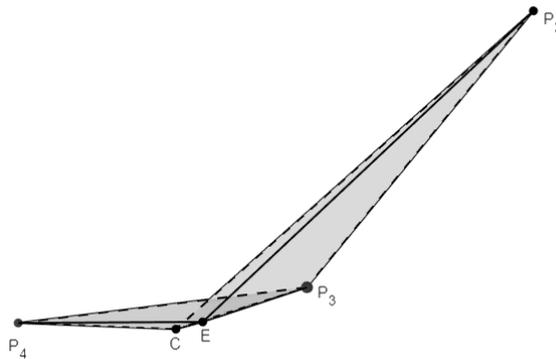


Figura 3.3: Dos tetraedros de la estrella terminal se solapan.

La Figura 3.3 muestra los tetraedros t_2 (P₂, P₃, E, C) y t_3 (P₃, P₄, E, C) vecinos por la cara formada por los puntos (C, E, P₃) solapados tras la reconexión del centroide con los puntos de la estrella terminal en la Figura 3.2.

Distintos criterios pueden ser usados para detectar el solapamiento de tetraedros, como la prueba de intersección entre un segmento y un triángulo en 3 dimensiones [34] u otra técnica equivalente.

3.1.2 Propiedades de la inserción en la estrella cerrada.

Propiedad 3.1 Al insertar un punto al interior de una estrella cerrada de N tetraedros que produce una malla válida, los tetraedros son reemplazados por $2N$ tetraedros.

Ya que cada tetraedro de la estrella cerrada rodea totalmente a la arista terminal, cada tetraedro tendrá dos caras compartidas por otros tetraedros que rodean la arista terminal y dos caras en el exterior de la estrella terminal, por lo tanto, al remover la arista terminal, se genera una cavidad de $2N$ caras. Al conectar los puntos de la estrella terminal con el punto insertado se generan $2N$ tetraedros (uno por cada cara).

Propiedad 3.2 Tras la inserción de un punto válido al interior de la estrella terminal en una estrella cerrada, la arista terminal es reemplazada por $N + 2$ aristas.

Definición 3.2 *Un punto ecuatorial de una estrella terminal es todo vértice de la estrella terminal que no forma parte de la arista terminal.*

Cada punto de la estrella terminal genera una nueva arista al ser conectado con el punto insertado, ya que la estrella terminal cerrada tiene $N + 2$ puntos (N puntos ecuatoriales y 2 puntos que forman la arista terminal), se crean $N+2$ aristas.

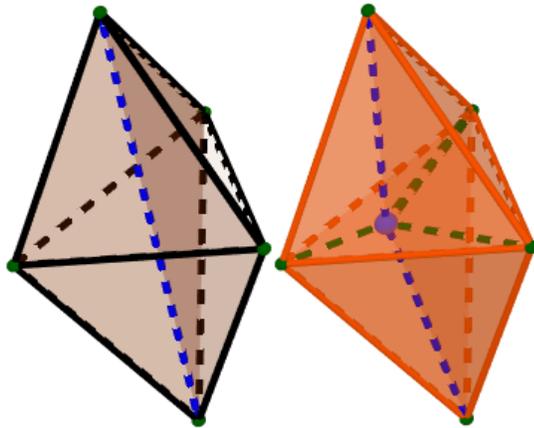


Figura 3.4: A la izquierda, una estrella terminal, a la derecha, inserción de un punto al interior de la estrella terminal.

La Figura 3.4 se muestra que, tras la inserción de un punto en una estrella terminal de tres tetraedros, estos son reemplazados por seis tetraedros que ocupan el espacio de la estrella terminal. Además, la arista terminal ha sido reemplazada por 5 nuevas aristas.

3.1.3 Propiedades de la inserción en la Inserción en la estrella abierta.

En las estrellas terminales abiertas, los algoritmos Lepp [23,28,30] solo realizan la inserción del punto medio de la arista terminal.

Propiedad 3.3 Al insertar del punto medio de la arista terminal por bisección de tetraedros en una estrella abierta de N tetraedros, los tetraedros son reemplazados por $2N$ tetraedros.

Al insertar el punto medio, cada tetraedro de la estrella terminal es disectado, por lo que se generan $2N$ tetraedro a partir de una estrella abierta de N tetraedros.

Propiedad 3.4 Tras la inserción del punto medio de la arista terminal en una estrella abierta, la arista terminal es reemplazada por $N + 3$ aristas.

En la sección ecuatorial, cada nuevo par de tetraedros contendrá 2 nuevas aristas, las que son compartidas con sus vecinos, ya que los tetraedros de los extremos no tienen vecinos por un lado, se crean $N+1$ aristas en la sección ecuatorial. Además, se crean 2 aristas que ocupan el lugar de la arista terminal. Obteniéndose $N+3$ aristas.

3.2 Operaciones de intercambio de aristas.

El intercambio de aristas (edge swapping) es una operación que reconfigura N tetraedros conectados a una arista común, removiendo la arista común y reemplazando el conjunto de N tetraedros por $2N-4$ tetraedros. Esta operación ha sido estudiada y usada para mejorar mallas de tetraedros por Freitag y Ollivier-Gooch [9].

El intercambio de aristas reconfigura las conexiones de los $N + 2$ puntos que forman el conjunto de tetraedros. Esta operación conserva las caras exteriores del conjunto, remueve la arista común (que es la única arista interior de conjunto) y la reemplaza por $N - 3$ nuevas aristas, que conectan los N *puntos ecuatoriales* del conjunto (los puntos del conjunto que no pertenecen a la arista común).

Cabe destacar que el intercambio de aristas solo puede realizarse si la arista común se encuentra completamente rodeada por los N tetraedros, por lo que es una operación apta solo para estrellas cerradas.

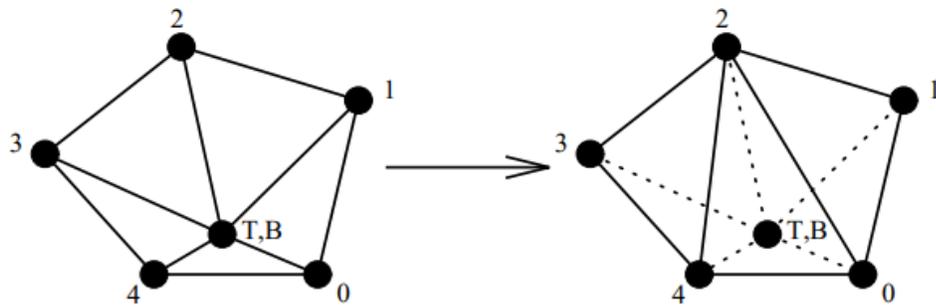


Figura 3.5: Intercambio de aristas de un conjunto de 5 a uno de 6 tetraedros. Imagen obtenida por Freitag y Ollivier-Gooch [9].

En la Figura 3.5 se muestran el intercambio de aristas en un conjunto original de 5 tetraedros unidos por la arista común **TB**. La arista que une al conjunto (**TB**) es removida y reemplazada por las aristas **24** y **02**, las que son generadas al reconectar los puntos ecuatoriales del conjunto de tetraedros (en la Figura 3.5 los vértices 0, 1, 2, 3 y 4). Esto destruye los tetraedros originales y los reemplaza por 6 nuevos tetraedros (Los tetraedros formados por los puntos [2,3,4,T], [0,2,4,T], [0,1,2,T] y [2,3,4,B], [0,2,4,B], [0,1,2, B]).

3.2.2 Configuraciones posibles para un intercambio de aristas.

El número de configuraciones posibles (configuraciones validas e invalidas) para el intercambio de aristas de un conjunto de N tetraedros depende directamente de N . Se ha demostrado que el número de intercambios de aristas posibles para N tetraedros es el número de catalán $N-1$ [12]:

$$\text{Edge Swaps posibles para } N \text{ tetraedros} = \text{Cat}(N - 1) = \frac{(2N - 4)!}{(N - 1)! * (N - 2)!}$$

Tabla 3.1 Número de tetraedros únicos y posibles configuraciones realizando intercambio de aristas. [11]

Tetraedros		Configuraciones	Tetraedros x	
Antes	Después		Configuraciones	Tetraedros únicos
3	2	1	2	2
4	4	2	8	8
5	6	5	30	20
6	8	14	112	40
7	10	42	420	70

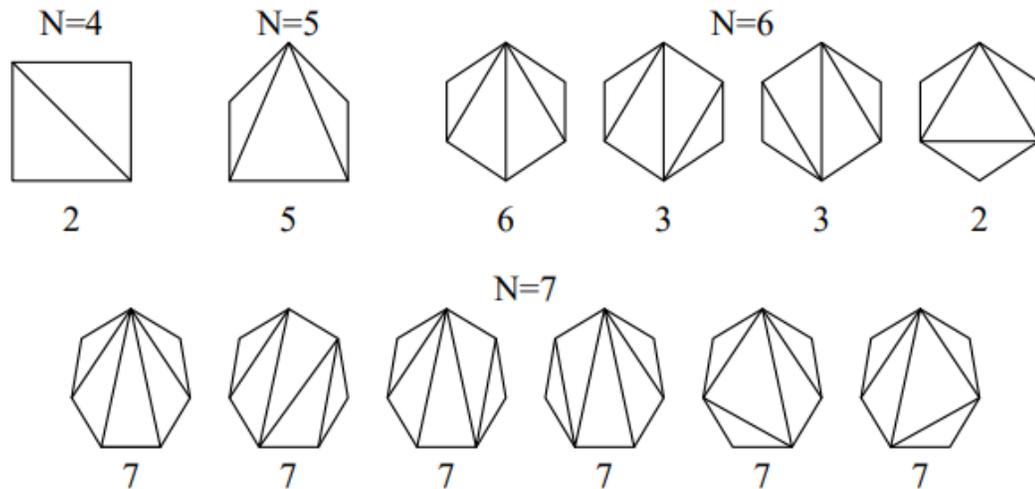


Figura 3.6: Configuraciones canónicas del intercambio de aristas para los casos $4 \leq N \leq 7$. Imagen obtenida por Freitag y Ollivier-Gooch [9].

La Figura 3.6 ilustra las configuraciones canónicas para $4 \leq N \leq 7$. Ya que los tetraedros pueden repetirse en algunas configuraciones, el número de tetraedros únicos tiende a ser mucho menor que el *número de configuraciones x número de tetraedros*, como lo muestra la tabla 3.1.

3.3 Operaciones de intercambio de caras.

El intercambio de caras reconecta dos tetraedros separados por una cara interior [9]. En tres dimensiones, existen dos reconfiguraciones válidas [17] de dos tetraedros unidos por una cara, los que son ilustrados en la Figura 3.7.

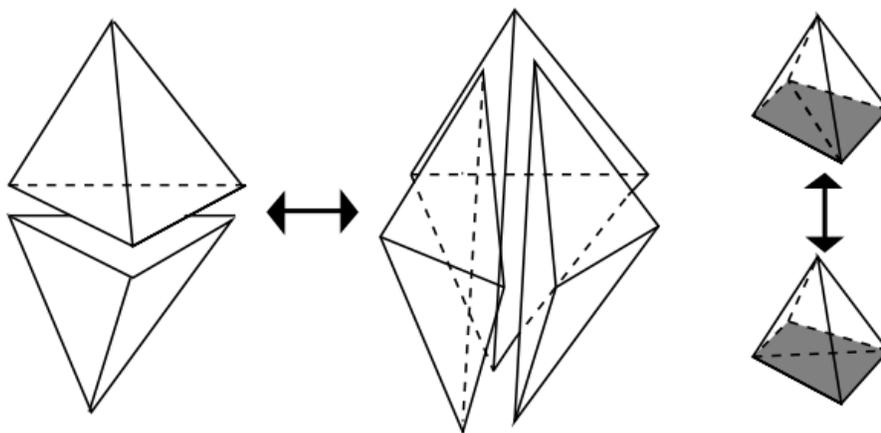


Figura 3.7: Reconfiguraciones válidas de 5 puntos en tres dimensiones. Imagen obtenida por Freitag y Ollivier-Gooch [9].

El primer caso, representado a la izquierda en la Figura 3.7, reconfigura dos tetraedros unidos por una cara a tres tetraedros unidos por una arista común, en particular, esta es la operación inversa al intercambio de aristas 3-2.

El segundo caso, representado a la derecha en la Figura 3.7, requiere que 4 de los 5 puntos sean coplanares, reconfigurando las dos caras que se encuentran en el mismo plano.

En los algoritmos Lepp, el intercambio de caras resulta efectivo como operación complementaria para mejorar la calidad de la malla tras el uso del algoritmo Lepp.

3.4 Suavizado de Laplace.

El suavizado de Laplace (Laplacian Smoothing), es una técnica de mejoramiento sobre una triangulación en dos o tres dimensiones que mueve cada vértice al promedio de los vértices vecinos [7,9]. El suavizado de Laplace se suele aplicar repetidamente (se itera varias veces por los puntos de la malla) para obtener buenos resultados.

La inserción del centroide es equivalente a insertar el punto medio de la arista terminal obtenida por la bisección por la arista más larga de los triángulos/tetraedros que comparten la arista terminal y realizar suavizado de Laplace sobre el punto insertado [1].

Capítulo 4

Representación del Lepp en 3D.

El camino de propagación por la arista más larga, conocido por su sigla en inglés Lepp, es la principal subrutina de los algoritmos basados en Lepp. En este capítulo se estudia el comportamiento del Lepp luego de procesar la estrella terminal.

4.1 Aristas principales del Lepp.

Al calcular el Lepp3D de un tetraedro t_i , este se propaga por las aristas más largas de los tetraedros que lo componen, generando caminos que van desde t_i hasta las estrellas terminales del Lepp3D.

Definición 4.1 *Una arista perteneciente a un Lepp3D(t_0) o a un Lepp-Simple(t_0) es una arista principal si es la arista más larga de al menos un tetraedro miembro del Lepp3D.*

Si A_p es una arista principal del Lepp3D de t_0 , por definición será la arista más larga de un tetraedro t_i miembro del Lepp3D, además si A_p es la arista más larga de todos los tetraedros que la contienen, por definición también es una arista terminal.

Los algoritmos Lepp en tres dimensiones insertan sucesivamente puntos en las estrellas terminales del Lepp3D(t_0) hasta que t_0 es removido de la malla. Luego de procesar una estrella terminal del Lepp3D(t_0), las aristas principales del Lepp son candidatos para convertirse en aristas terminales al volver a calcular el Lepp3D(t_0). Esto es estudiado en detalle en la sección 4.2.

4.1.2 Representación del Lepp3D.

Para simplificar la representación del Lepp3D en este escrito, se representa el Lepp3D de forma simplificada, transformándolo en un grafo dirigido.

Las aristas principales del Lepp3D de t_0 pueden ser ordenadas como un grafo dirigido siguiendo las siguientes reglas:

- 1) Se crea un nodo N_i por cada arista principal A_i del Lepp(t_0).
- 2) Se crea un arco dirigido desde el nodo N_j al nodo N_k si existe un tetraedro T_k perteneciente al Lepp que contenga a la arista A_j y A_k , donde A_k es la arista más larga de T_k .

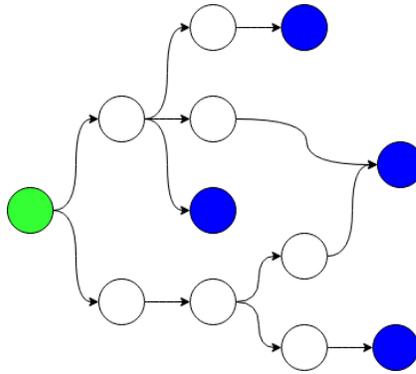


Figura 4.1: Aristas principales del Lepp3D ordenadas como un grafo dirigido.

La Figura 4.1 muestra una representación de las aristas principales del $\text{Lepp}(t_0)$, esta representación muestra el camino desde la arista más larga de t_0 (nodo verde) hasta las aristas terminales (nodos azules) de un Lepp3D . Al representar las aristas principales de un Lepp como un grafo, las aristas terminales corresponden a nodos sin hijos en el grafo.

El grafo de las aristas principales de un Lepp es una forma simple de representar un Lepp en tres dimensiones en un espacio bidimensional, por lo que será usada en el resto de este escrito para describir de forma gráfica las propiedades del Lepp .

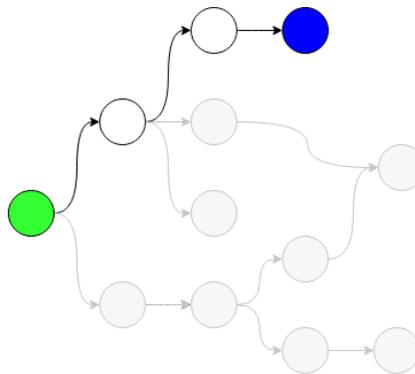


Figura 4.2: Aristas principales del $\text{Lepp-Simple}(t_0)$

La Figura 4.2 muestra uno de los posibles caminos del $\text{Lepp-Simple}(t_0)$, el que es un subconjunto del Lepp3D .

4.2 Cálculo del Lepp3D luego de procesar una estrella terminal.

Al procesar un tetraedro t_i en un algoritmo Lepp, se calcula el $\text{Lepp3D}(t_i)$ y se modifica la malla en la estrella terminal sucesivamente hasta que el tetraedro t_i es removido de la malla de tetraedros. En esta sección se estudia que ocurre al volver a calcular el Lepp cuando t_i aún no ha sido removido de la malla.

Propiedad 4.1 Si una operación se realiza en el interior de la estrella terminal, el resto de la malla no tendrá cambios.

Tanto la inserción al interior de la estrella terminal, como el intercambio de aristas son operaciones que se realizan al interior de la estrella terminal. En el desarrollo de esta tesis se estudian algoritmos que solo usan operaciones en la estrella terminal que cumplen la Propiedad 4.1.

Propiedad 4.2 Dado un tetraedro t_i que está siendo procesado por un algoritmo Lepp Simple (que cumple Propiedad 4.1), luego de la refinación o mejora de una estrella terminal del $\text{Lepp3D}(t_i)$, si t_i se mantiene en la malla de tetraedros, volver a calcular $\text{Lepp3D}(t_i)$ solo diferirá del $\text{Lepp3D}(t_i)$ original a partir del o los tetraedros cuya arista principal se encuentra en el borde la estrella terminal refinada o mejorada.

Ya que el resto de la malla no ha sido modificada, si se vuelve a calcular $\text{Lepp3D}(t_i)$ se obtendrá el mismo conjunto de elementos, salvo en la vecindad de la estrella terminal donde la geometría ha cambiado.

4.2.2 Cálculo del Lepp3D a partir del Lepp3D anterior.

Al volver a calcular el Lepp3D de un tetraedro, pueden ocurrir tres casos a partir de las aristas principales que se encontraban en el borde de la estrella terminal procesada.

1) La arista principal en el borde de la estrella terminal se transforma en una arista terminal.

Si A_p es la arista más larga de los nuevos tetraedros (los creados al procesar la estrella terminal) que contienen a la arista principal y además A_p es la arista más larga de los demás tetraedros que contienen a A_p , entonces A_p se convertirá en una arista terminal.

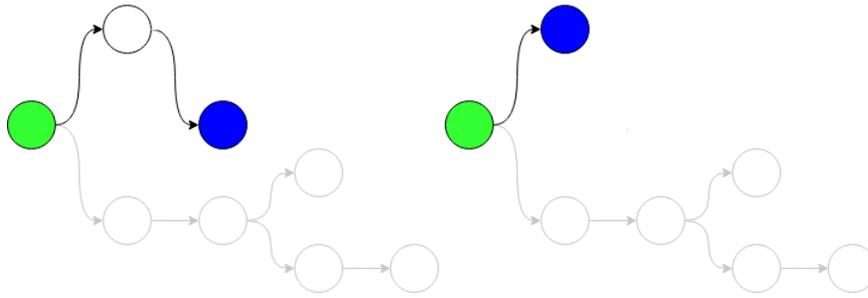


Figura 4.3: La arista principal anterior se convierte en una arista terminal.

2) La arista principal en el borde de la estrella terminal sigue otro camino existente.

Si A_p es la arista más larga de los nuevos tetraedros (los creados al procesar la estrella terminal) que contienen a la arista principal, pero A_p no es la arista más larga de alguno de los tetraedros existentes que contienen a A_p , entonces el Lepp seguirá el camino de la arista más larga de alguno de esos tetraedros.

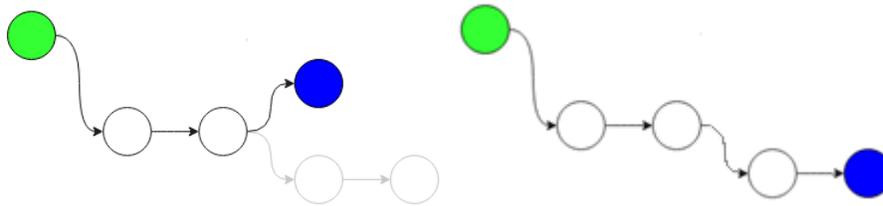


Figura 4.4: El Lepp3D sigue otro camino existente.

3) Se crea una nueva arista más larga a la arista principal anterior que comparte un tetraedro con la arista principal anterior, expandiendo el Lepp3D.

Si se forma un nuevo tetraedro que contiene a la arista principal A_p cuya arista más larga A_n es más larga que A_p , entonces el Lepp3D contendrá al nuevo tetraedro y deberá seguir calculándose a partir de aquí.

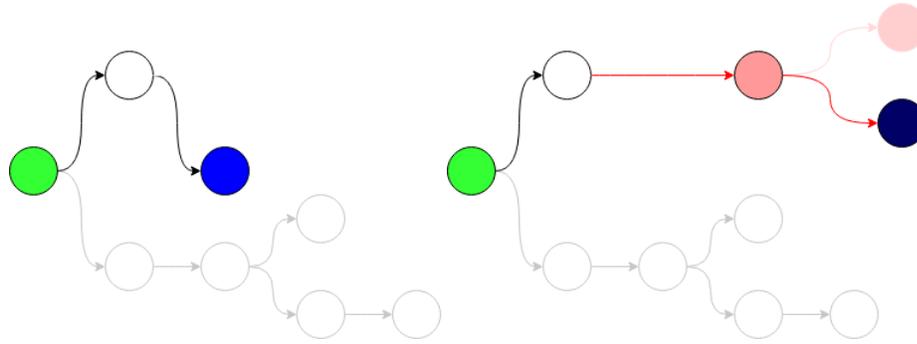


Figura 4.5: Se crea una nueva arista más larga, generando un nuevo camino en el Lepp.

4.3 Implementación eficiente del Lepp.

Ya que t_0 solo puede ser procesado si su arista más larga es una arista terminal, es necesario eliminar a las aristas principales conectadas a su arista más larga, las que a su vez solo pueden ser eliminadas si son estrellas terminales, por lo tanto, se deben destruir todas las aristas principales del Lepp3D para eliminar a t_0 de la malla.

Observación: En el desarrollo de esta tesis se probó el mejoramiento de mallas de tetraedro usando distintos criterios para elegir el camino del Lepp Simple, resultando en mallas casi idénticas. Por lo tanto, en general es más conveniente elegir el camino del Lepp Simple más fácil o más rápido de calcular.

4.3.1 Cálculo del Lepp Simple a partir del Lepp Simple Anterior.

Los algoritmos Lepp usados en este trabajo de tesis usan el Lepp Simple para encontrar las estrellas terminales a refinar o mejorar. Esta operación debe ser calculada en cada iteración, por lo que debe ser programada eficientemente.

En primer lugar, dado que el Lepp Simple sigue un camino de la estrella terminal, este puede ser almacenado como una lista doblemente enlazada que va desde el tetraedro inicial, hasta el tetraedro que pertenece a la estrella terminal.

Si se usa una estructura de datos en el que cada tetraedro tiene referencias a sus vecinos por las caras (estructura de datos usada en esta tesis), encontrar un nuevo tetraedro con una arista más larga costará a lo más m , donde m es el número de tetraedros que comparten la arista más larga del último elemento de la lista enlazada calculado hasta el momento.

Una vez refinada o mejorada la estrella terminal, el siguiente Lepp puede ser calculado a partir del penúltimo elemento de la lista enlazada (último si se elimina la referencia a la arista terminal procesada), evitando calcular la mayor parte del Lepp.

Capítulo 5

Estudio del desempeño de los algoritmos Lepp no Delaunay previos

En este capítulo se estudia el desempeño de los algoritmos Lepp Inserción presentados en la sección 2.6 (Lepp Bisección, Lepp Centroide y Lepp Wcentroide) al ser usados para mejorar la calidad de una malla de tetraedros.

5.1.1 Función de calidad.

Para mejorar la calidad de la malla de tetraedros se requiere una función que determine la calidad de los tetraedros de la malla para generar el conjunto S de tetraedros a mejorar.

En el desarrollo de esta tesis la función usada para determinar si un tetraedro es de buena o mala calidad es la siguiente (Presentada en la sección 2.1.2):

$$Qty_{diedral}(t) = \min(\alpha_{min}, 180^\circ - \alpha_{max})$$

Un tetraedro se considera de mala calidad si:

$$Qty_{diedral}(t) < 30^\circ$$

Se eligió una función de calidad basada en el ángulo diedro por ser fácil de calcular, además, suelen ser usadas por otros autores.

5.1.2 Lepp Centroide.

En la práctica, el algoritmo Lepp centroide mejora visiblemente la calidad de la malla de tetraedros usando la inserción simple del centroide (unión del centroide con las caras externas de la estrella terminal), sin embargo, el tamaño de la malla resultante lo vuelve un algoritmo poco usable en aplicaciones reales, pues la malla mejorada tiende a contener una cantidad muy alta de tetraedros, en comparación con la malla original.

La Figura 5.2 muestra el histograma de ángulo diedros de la malla elefante, antes y después de la mejora, mostrando una mejora notable en la calidad de la malla al usar el algoritmo Lepp Centroide y Lepp Wcentroide, en comparación a la malla original y la malla resultante usando el algoritmo Lepp Bisección.

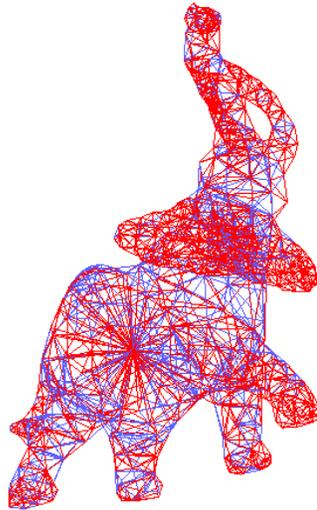


Figura 5.1: Malla Elefante.

La Figura 5.1 muestra la malla inicial del elefante. Inicialmente, un 32.8% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

Histograma ángulos diedros Elefante

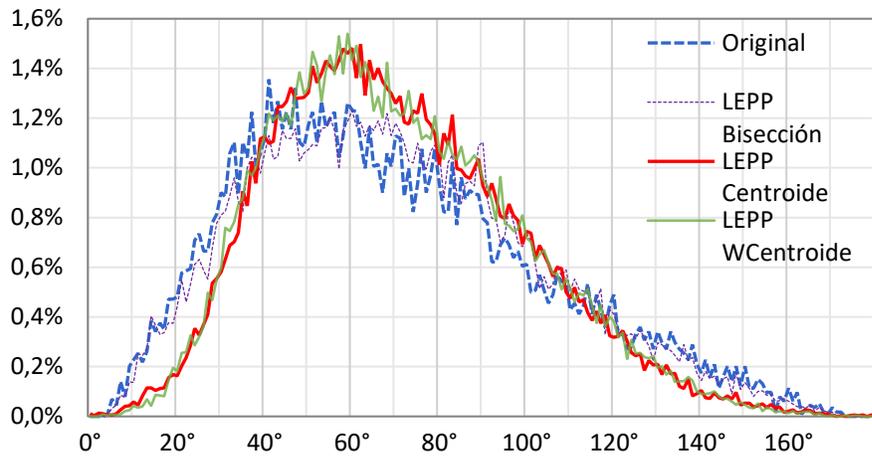


Figura 5.2: Histogramas sobre la malla elefante.

Si bien, la mejora obtenida por el algoritmo Lepp Centroide es buena, el tamaño de la malla resultante es de 3.2 veces el tamaño de la malla original, lo que no es adecuado desde el punto de vista de las aplicaciones.

Tabla 5.1 Tamaño de las mallas de tetraedros en cada algoritmo Lepp

Malla	# Tetraedros	$\frac{\# \text{Tetraedros}}{\# \text{Original}}$
Original	1905	1
Lepp Centroide	6221	3.26
Lepp Wcentroide	6127	3.21
Lepp Bisección	6812	3.57

Al mejorar una estrella terminal, se pueden generar nuevos tetraedros considerados de mala calidad por la función de calidad. Se ha experimentado el comportamiento de los algoritmos al procesar los nuevos elementos de mala calidad generados [28,30], lo que mejora notablemente la calidad de la malla resultante, pero también aumenta significativamente el tamaño de la malla resultante.

La principal ventaja de los algoritmos Lepp es su simplicidad, esto facilita la implementación, pues se requiere de dos operaciones principales: el cálculo del Lepp y la inserción.

Observación: Mientras que otros algoritmos [9, 14] recurren a una amplia combinación de operaciones sobre la malla para realizar el mejoramiento, los algoritmos Lepp estudiados solo utilizan inserción. Si bien los algoritmos Lepp dan como resultado mallas de tetraedros de calidad aceptable, la cantidad de tetraedros resultantes es muy alta para poder utilizar los algoritmos Lepp en situaciones prácticas.

Capítulo 6

Algoritmos Lepp desarrollados en esta tesis.

En este capítulo se presentan dos algoritmos Lepp desarrollados en esta tesis. El primer algoritmo, el Lepp-Swap/Centroid combina el algoritmo Lepp Centroid con el intercambio aristas como operación posible al mejorar una estrella terminal. El segundo algoritmo, el Lepp selectivo [1] está diseñado para obtener una malla de tetraedros de mejor calidad, evitando cambios que empeoren o mantengan la calidad de la malla.

6.1 Lepp Swap/ Centroid.

El algoritmo Lepp Swap/Centroid utiliza el intercambio de aristas descrito en la sección 3.2 combinado con la inserción simple del centroid en la estrella terminal.

Tabla 6.1 Comparación entre la inserción y el intercambio de aristas para una estrella cerrada de tamaño N

	Inserción	Intercambio de aristas
Tamaño resultante	$2N$	$2N-4$
Número de aristas	$N+2$	$N-3$

En comparación con la inserción, el intercambio de aristas añade menos tetraedros y aristas a la malla, de hecho, reduce el tamaño de la malla cuando es usada en conjuntos de tres tetraedros.

6.1.2 Algoritmo Lepp-Swap/Centroid

Con el fin de mejorar los resultados obtenidos con los algoritmos Lepp Centroid, se optó por añadir el intercambio de aristas como una opción para mejorar la malla de tetraedros.

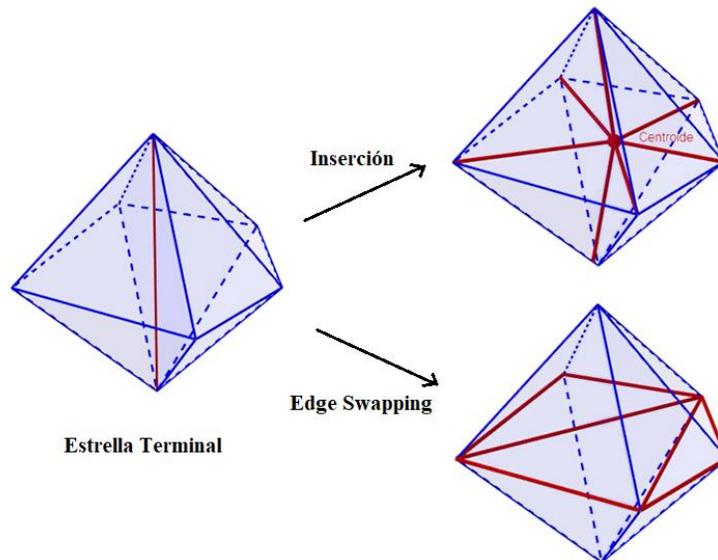


Figura 6.1: Operaciones posibles en el algoritmo Lepp-Swap/Centroid

El algoritmo Lepp-Swap/Centroid es una modificación del algoritmo Lepp-Inserción que añade el intercambio de aristas [9] al conjunto de operaciones posibles usadas al mejorar la estrella terminal.

Algoritmo 6.1 Lepp Swap/Centroid

Entrada: Una malla de tetraedros T y un conjunto S de tetraedros a mejorar.

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido mejorada.

```

for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  do
    Calcular Lepp( $t_i$ ) su estrella terminal y su arista terminal
    Calcular el punto  $P$  como el centroide de la estrella terminal
    if inserción de  $P$  no es válida o no es estrella cerrada do
      Calcular  $P$  como el punto medio de la arista terminal
    end if
    Encontrar el mejor intercambio de aristas de la estrella
    if Qty(intercambio de aristas)  $\geq$  Qty(Inserción  $P$ ) do
      Realizar el intercambio de aristas
    else
      Insertar  $P$  en la estrella terminal
    end if
  end while
end for

```

El Lepp Swap/Centroid mejora cada estrella terminal seleccionando la mejor opción entre el intercambio de aristas y la inserción del centroide. Al igual que el algoritmo Lepp Inserción, el algoritmo itera mejorando estrellas terminales hasta remover todos los tetraedros de mala calidad iniciales de la malla.

6.1.3 Función de calidad.

Para seleccionar el mejor conjunto de tetraedros que reemplace la estrella terminal es necesaria una métrica que compare la calidad de conjuntos de tetraedros, con el fin de determinar la mejor operación disponible para mejorar la estrella terminal.

Si bien existen múltiples métricas de determinar la calidad de un conjunto de tetraedros [15,36], en el desarrollo de esta tesis se usó el comparar la calidad del peor elemento de cada conjunto, pues es un criterio simple, genera buenos resultados y ha sido usado en la literatura anteriormente [9,14,18].

Para determinar la calidad de un conjunto de tetraedros se usa la siguiente función:

Algoritmo 6.2 Función para determinar la calidad basada en el ángulo diedro (múltiple)

Entrada: Un Conjunto de tetraedros **S**

Salida: calidad del conjunto **S**

Definir Qty = MAX_VALUE

if **S** = \emptyset **do**

 Qty = 0

end if

foreach tetraedro **T** en **S** **do**

 Definir:

α_{min} = ángulo diedro mínimo de **T**

α_{max} = ángulo diedro máximo de **T**

 Qty_T = $\min(\alpha_{min}, 180^\circ - \alpha_{max})$

if Qty_T < Qty **do**

 Qty = Qty_T

end if

end foreach

return Qty

El Algoritmo 6.2 retorna la calidad del peor elemento del conjunto de tetraedros.

6.1.4 Resultados empíricos Lepp Swap/Centroid.

En la práctica, el algoritmo Lepp Swap/Centroid genera mejores resultados que los algoritmos Lepp Inserción, tanto en la calidad de la malla resultante que es ligeramente superior a los resultados obtenidos en el algoritmo Lepp Centroide, como el tamaño de la malla mejorada, la que es significativamente menor que la resultante en el algoritmo Lepp Centroide.

Histograma Ángulos Diedros Elefante

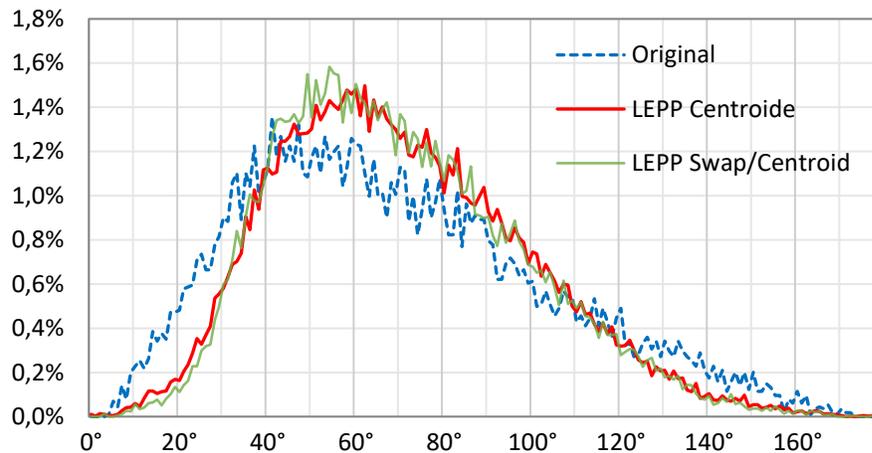


Figura 6.2: Histograma refinación malla elefante.

Tabla 6.2 Tamaño de las mallas de tetraedros en cada algoritmo Lepp

Malla	# Tetraedros	$\frac{\# \text{Tetraedros}}{\# \text{Original}}$
Original	1905	1
Lepp Centroide	6221	3.26
Lepp Swap/Centroid	4958	2.60

La Tabla 6.2 muestra el tamaño de la malla elefante antes y después de la mejora. La malla resultante tras mejorar usando el algoritmo Lepp Swap/Centroid tiene 2.6 veces más tetraedros que la malla original.

Al igual que el Lepp Inserción, la introducción de los nuevos elementos de mala calidad al conjunto de tetraedros a mejorar genera mallas de una mejor calidad, pero también aumenta significativamente el tamaño de la malla resultante.

6.2 Algoritmo Lepp Selectivo.

Si bien los resultados del algoritmo Lepp Swap/Centroid son superiores a los de los algoritmos Lepp Inserción, el tamaño de la malla de tetraedros resultante puede ser reducido al evitar modificar estrellas terminales que no puedan mejorarse con las operaciones disponibles.

El Lepp Selectivo es una reformulación del algoritmo Lepp Swap/Centroid, que permite marcar aristas como no refinables cuando la mejor operación de mejora de su estrella terminal tiene una calidad peor que la estrella terminal, lo que cancela la operación de mejora en esa estrella terminal.

Definición 6.1 En el algoritmo Lepp Selectivo, una arista no refinable es una arista cuya estrella terminal no fue modificada al ser procesada.

6.2.2 Lepp3D Truncado.

Para evitar procesar estrellas terminales que no mejoran la calidad de la malla, es necesario modificar el Lepp3D para que permita descartar caminos que no puedan ser mejorados.

El Lepp3D Truncado corresponde a un Lepp3D en el que uno o más caminos no son seguidos si la arista más larga del camino ha sido marcada como no refinable. Las aristas marcadas como no refinables son añadidas al conjunto de aristas no refinables.

Definición 6.2 Para cualquier tetraedro t_0 en una malla M con un conjunto de aristas no refinables A_{NR} , el $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$ es un subconjunto de la malla definido como:

- El $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$ incluye a t_0 si su arista más larga no pertenece a A_{NR} .
- Si $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$ incluye a t_0 , $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$ incluye a cada tetraedro t_i que comparte la arista más larga de t_0 con t_i y cumple $\text{arista más larga}(t_i) > \text{arista más larga}(t_0)$, y la arista más larga de t_i no pertenece a A_{NR} .
- Para cualquier tetraedro t_j en el $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$, el $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$ también contiene cada tetraedro t_k , que aún no pertenezca a $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$, tal que t_k comparte la arista más larga de t_j y cumple $\text{arista más larga}(t_k) > \text{arista más larga}(t_j)$, y la arista más larga de t_k no pertenece a A_{NR} .

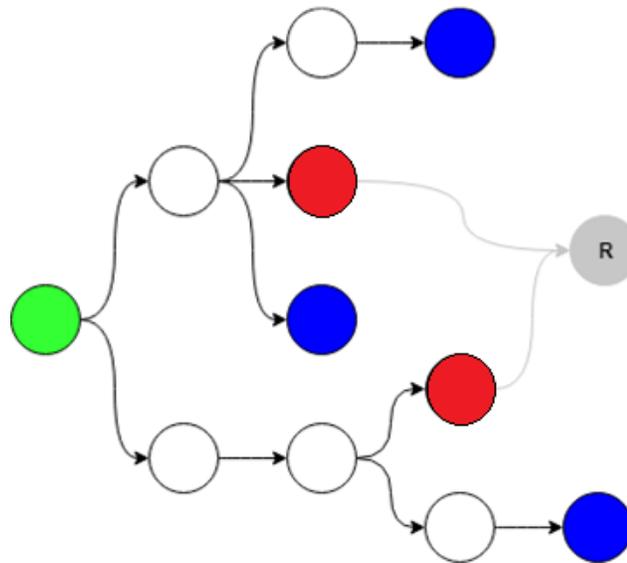


Figura 6.3: Aristas principales de un $\text{Lepp3D-Truncado}(t_0)$, en verde la arista más larga de t_0 , en gris una arista no refinable, en azul las aristas terminales, en rojo aristas terminales generadas al marcar como no refinable la arista en gris.

La Figura 6.3 muestra un Lepp3D-Truncado , las aristas no refinables conllevan a que otras aristas principales sean el ultimo nodo de sus caminos sin ser aristas terminales.

Definición 6.3 Una arista E , es una arista terminal truncada si es la arista más larga de todos los tetraedros que comparten E , exceptuando todo tetraedro cuya arista más larga es una arista no refinable.

Definición 6.4 Una estrella terminal truncada es el conjunto de tetraedros que comparte una arista terminal del Lepp truncado.

A diferencia de la arista terminal, la arista terminal truncada no necesariamente es una arista localmente más larga, ya que pueden existir tetraedros que contienen aristas no refinables más largas a la arista terminal truncada. Esto permite al algoritmo Lepp Selectivo ampliar las zonas posibles en las que puede realizar la refinación. Notar que toda arista terminal truncada corresponde a una arista principal del Lepp3D, por lo que las zonas posibles de refinación siguen relacionadas al Lepp3D original.

6.2.3 Lepp Simple Truncado.

El Lepp Simple truncado es análogo al Lepp Simple y se enfoca en seguir solo un camino del Lepp3D Truncado.

Definición 6.5 El Lepp-Simple truncado de un tetraedro t_0 , perteneciente a una malla de tetraedros con un conjunto de aristas no refinables A_{NR} se calcula como:

Para cualquier tetraedro t_0 en una malla, el Lepp-Simple truncado(t_0), es la lista ordenada de todos los tetraedros t_0, t_1, \dots, t_n . que comienza con t_0 y $i = 1, 2, \dots, n$. t_i es elegido del conjunto de tetraedros que comparte la arista más larga de t_{i-1} , y se cumple $\text{arista más larga}(t_i) > \text{arista más larga}(t_{i-1})$ y además la arista más larga de t_i no pertenece a A_{NR} .

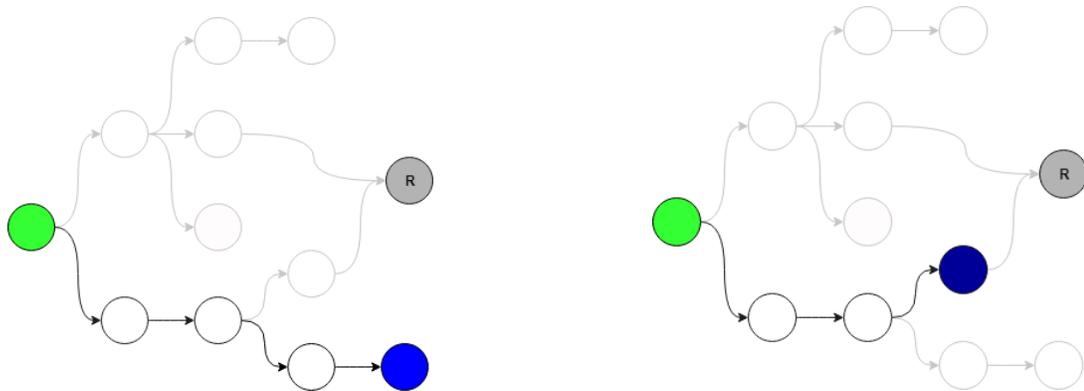


Figura 6.4: Dos posibles caminos del Lepp-Simple truncado con una arista no refinable.

La Figura 6.4 muestra dos posibles caminos del Lepp-Simple truncado, a la izquierda un camino que no es alterado por la arista no refinable, mientras que a la derecha el Lepp termina en una arista terminal truncada.

6.2.4 Lepp Selectivo

Algoritmo 6.3 Lepp Selectivo

Entrada: Una malla de tetraedros T , un conjunto S de tetraedros a mejorar, una función Qty que determina la calidad de un conjunto de tetraedros y m un factor de mejora ≥ 1 .

Salida: Una malla de tetraedros T' en la que cada tetraedro $t \in S$ ha sido mejorado.

Crear el conjunto vacío de aristas no refinables E_r

```
for cada tetraedro  $t_i$  en  $S$  do
  while  $t_i$  se mantenga en  $T$  y
    Arista_más_larga( $T$ ) no pertenece a  $E_r$  do
      Calcular Lepp Truncado( $t_i$ ) su estrella terminal truncada
      y su arista terminal truncada
      Calcular el punto  $P$  como el centroide de la estrella
      if inserción de  $P$  no es válida o no es estrella cerrada do
        Calcular  $P$  como el punto medio de la arista terminal
      end if
      Encontrar el mejor intercambio de aristas de la estrella
      Calcular:
      Qty_swap = Qty(intercambio de aristas)
      Qty_insert = Qty(Inserción  $P$ )
      Qty_star = Qty(estrella terminal truncada)
      Qty_best = Max(Qty_swap, Qty_insert)
      if Qty_best > Qty_star*m do
        if Qty_best == Qty_swap do
          Realizar el intercambio de aristas
        else
          Insertar  $P$  en la estrella
        end if
      Remove las aristas de la estrella de  $E_r$ 
      Añadir los nuevos tetraedros de mala calidad a  $S$ 
      else
        Añadir la arista terminal truncada a  $E_r$ 
        Mover los tetraedros de mala calidad de la estrella
        al final de  $S$ 
      end if
      Si la arista más larga de todos los tetraedros de  $S$  no
      pertenece a  $E_r$  parar el algoritmo.
    end while
  end for
```

El Lepp Selectivo actúa de manera similar al Lepp Swap/Centroid seleccionando la mejor operación para mejorar la estrella terminal, pero la estrella terminal solo es modificada si el conjunto de tetraedros que reemplaza la estrella terminal sobrepasa en calidad a la estrella terminal en un porcentaje dado por el factor mejora.

Definición 6.6 *El factor mejora, denotado por m , representa el porcentaje de mejora mínimo requerido para aceptar cambios en la malla en el algoritmo Lepp selectivo.*

Cuando la estrella terminal no es reemplazada, su arista terminal se marca como no refinable, esto indica al Lepp Truncado que la estrella terminal no pudo ser mejorada, por lo que debe seguir otro camino.

La mejora de un tetraedro culmina cuando es removido de la malla o su arista más larga es marcada como no refinable. Esto implica que el algoritmo Lepp Selectivo no necesariamente removerá los tetraedros de mala calidad originales.

6.2.5 Aristas no refinables

El Lepp Selectivo añade el conjunto de aristas no refinables, este conjunto contiene las aristas cuyas estrellas terminales truncadas no fueron modificadas al ser procesadas. El conjunto de aristas terminales es usado para el cálculo del Lepp Truncado de todos los tetraedros procesados.

El conjunto de aristas no refinables es común para todos los Lepp, pues sin importar que Lepp marcó una arista como no refinable, no se podrá ser mejora si la geometría de la estrella terminal no ha cambiado, es decir, si los tetraedros que la rodean no han sido modificados. Si algún tetraedro que contiene a la arista no refinable es modificado, entonces la estrella terminal truncada de la arista podría ser mejorada en otra iteración.

6.2.6 Función de calidad.

En el Lepp Selectivo solo se realizan cambios en la malla si la mejor operación disponible (intercambio de aristas o inserción) tiene una calidad superior a la estrella terminal original. En la práctica se pueden conseguir una malla mejorada de un mejor tamaño si se usa un factor mejora mayor a 1, evitando los cambios en la malla si la mejora es muy pequeña.

6.2.7 Conjunto de tetraedros a mejorar.

Para mejorar la malla de tetraedros el algoritmo Lepp Selectivo mejora un conjunto de tetraedros a mejorar (conjunto S). Inicialmente, el conjunto S contiene todos los tetraedros considerados de mala calidad de la malla inicial. Luego de cada iteración, se eliminan del conjunto S todos los tetraedros de mala calidad eliminados de la malla, se añaden los nuevos tetraedros de mala calidad generados por las operaciones que modificaron la malla y se añaden al final del conjunto los tetraedros de mala calidad que no pudieron ser mejorados.

6.2.8 Condición de parada.

Para que el algoritmo Lepp Selectivo termine, es necesario agregar una condición de parada para el algoritmo. Se pueden determinar distintas condiciones para que el algoritmo termine, por ejemplo, condiciones basadas en el tamaño de la malla o en la calidad de sus elementos.

En el desarrollo de esta tesis, se establecieron condiciones de parada con respecto al conjunto de tetraedros a mejorar (Conjunto S). Se experimentó con tres condiciones de parada:

- 1) **Conjunto S Original:** Parar luego de mejorar el conjunto S original, sin agregar elementos a S.
- 2) **Número fijo de iteraciones:** Parar luego de una cantidad fija de iteraciones (i.e. cada iteración calcula un conjunto S y lo mejora)
- 3) **Reintroduciendo elementos a S:** Parar cuando ningún elemento del conjunto S pueda ser mejorado (i.e. se mejora hasta que el conjunto S este vacío o hasta que la arista más larga de cada tetraedro del conjunto S sea una arista no refinable). Para esto deben agregarse a S los nuevos tetraedros de mala calidad.

En la práctica, iterar el conjunto S un máximo de 5 veces entrega una malla similar que usando la tercera condición de parada. Además, la primera iteración es la que reduce en un mayor porcentaje los elementos de mala calidad y la reducción del porcentaje de elementos de mala calidad es menor en cada iteración subsiguiente.

Histograma Ángulos diedros Elefante

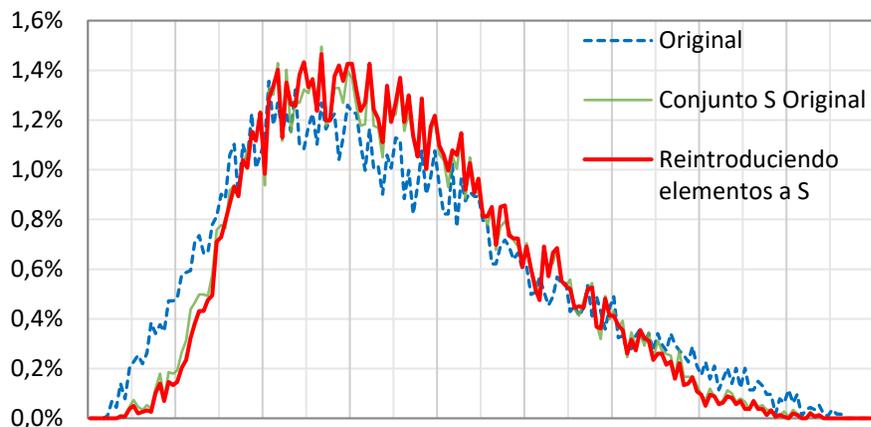


Figura 6.5: Histograma mejora malla elefante.

La Figura 6.5 compara los histogramas de ángulos diedros del Lepp Selectivo usando el Lepp selectivo sin reintroducir elementos al conjunto de tetraedros a mejorar (en verde) y reintroduciendo los elementos nuevos y de mala calidad al conjunto de tetraedros a mejorar (en rojo).

Tabla 6.3 Tamaño de las mallas de tetraedros en cada algoritmo Lepp para la malla elefante

Malla	# Tetraedros	$\frac{\# \text{Tetraedros}}{\# \text{Original}}$	ángulos diedros de mala calidad
Original	1905	1	12.11%
Solo S	2508	1.32	6.04%
5 iteraciones	2628	1.38	4.98%
Reintroduciendo elementos	2628	1.38	4.98%

En la Tabla 6.3 se muestran los resultados usando las tres condiciones de parada, tanto el número fijo de iteraciones como reintroducir elementos obtienen el mismo resultado. Para la malla elefante, a partir de la cuarta iteración ya no se producen más cambios en la malla.

Reintroducir elementos al conjunto S provoca un tradeoff entre el tamaño de la malla y el porcentaje de elementos de mala calidad. En la malla elefante reintroducir elementos genera una malla con más elementos, pero de mejor calidad que mejorando únicamente el conjunto S original.

Capítulo 7

Estudio empírico del algoritmo Lepp Selectivo usando la medida de calidad basada en los ángulos diedros.

En este capítulo, se muestran los resultados empíricos de la calidad de las mallas mejoradas con el Lepp Selectivo, usando la medida de calidad del ángulo diedro, además se realizan pruebas del comportamiento del algoritmo Lepp selectivo al ser complementado con otras técnicas de mejoramiento, como el suavizado laplaciano y el intercambio de caras.

7.1 Software de prueba.

En esta tesis, todos los experimentos fueron realizados usando una versión modificada en este trabajo de tesis del software Tetra desarrollado en QT y C++ por Pedro Rodríguez [27]. Se conservaron las estructuras de datos y se implementaron los algoritmos Lepp Swap/Centroid y Lepp Selectivo.

Los experimentos se realizaron en un computador portátil con procesador Intel core i7 6500U usando una versión secuencial de cada algoritmo.

7.1.1 Estructuras de datos.

La malla de tetraedros consiste en un conjunto de vértices, aristas, caras y tetraedros. Además, para el algoritmo Lepp Selectivo es necesario almacenar el conjunto de tetraedros a mejorar y el de aristas no refinables. La operación predominante del algoritmo Lepp Selectivo (y los otros algoritmos Lepp) al operar en estos conjuntos es *contains* (además de *insert* y *remove*) por lo tanto, se almacenan en un Hash-Set, ya que esta operación tiene un costo amortizado $O(1)$.

Cada tetraedro es representado por punteros a sus cuatro vértices, a sus cuatro tetraedros vecinos y a sus seis aristas. El i -ésimo vértice está opuesto a la i -ésima cara y al i -ésimo tetraedro vecino (el que es vecino por la i -ésima cara). Esta representación es análoga a la usada por la librería CGAL y facilita el acceso rápido a los elementos y la navegación por la malla.

7.1.2 Testing.

Durante la fase de desarrollo, se verificó que la geometría de la malla siguiera siendo válida luego de cada modificación en la malla de tetraedros. Además de verificar la validez de la estructura de datos en cada paso.

7.2 Parámetros del estudio.

7.2.1 Mejoramiento de la malla

En este capítulo se estudia el comportamiento del Lepp Selectivo, mejorando elementos cuyo ángulo diedro sea menor a 30° o mayor a 150° .

Para que un cambio en la malla se realice, se debe cumplir $F_{qty}(R_{best}) > F_{qty}(TS)*m$, donde F_{qty} es la función de calidad, R_{best} es el conjunto de tetraedros candidato a reemplazar a la estrella terminal, TS es la estrella terminal y m es el factor mejora.

Para los experimentos empíricos, se usó como función de calidad el Algoritmo 6.2, con una tolerancia de 30° . Usando el Algoritmo 6.2, la calidad de un conjunto de tetraedros es la calidad del elemento de peor calidad del conjunto, por lo tanto, todo conjunto de tetraedros que contenga al menos un tetraedro con al menos un ángulo diedro menor a 30° se considera de mala calidad.

7.2.2 Condición de parada

La implementación del algoritmo Lepp Swap/Centroid itera una vez por el conjunto de tetraedros de mala calidad original.

Las implementaciones del algoritmo Lepp Selectivo usan la tercera condición de parada descrita en la sección 6.2.8, es decir, se intenta mejorar la malla de tetraedros hasta que todos los tetraedros de mala calidad no pueden ser mejorados con el algoritmo Lepp Selectivo.

7.3 Mallas de prueba.

Las pruebas empíricas se realizaron sobre un conjunto de 21 mallas de prueba, las que fueron generadas por Pedro Rodríguez usando las librerías de CGAL (CGAL Delaunay Software).

Se escogieron 5 mallas para ser analizadas en este capítulo, los histogramas de la mejora de las 21 mallas se encuentran en los anexos.

7.3.1 Retinal.

La malla Retinal, fue seleccionada por representar a una malla construida solo con los puntos exteriores del objeto que representa.

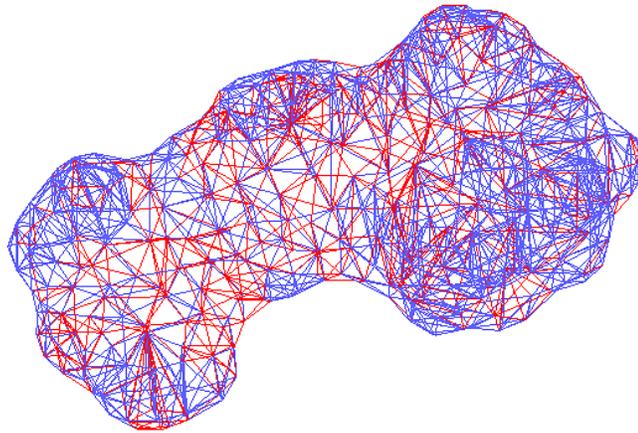


Figura 7.1: Malla Retinal.

La Figura 7.1 muestra la malla retinal, un 68.9% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

7.3.2 P.

La malla P, fue seleccionada por representar a una malla con una buena calidad inicial, donde pocos elementos requieren ser mejorados.

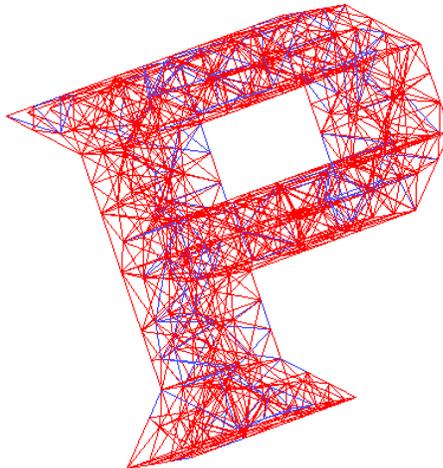


Figura 7.2: Malla P.

La Figura 7.2 muestra la malla P, un 15.8% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

7.3.3 N090.

La malla N090 corresponde a una malla con una gran cantidad de tetraedros de mala calidad, fue seleccionada por tener una pobre calidad inicial.

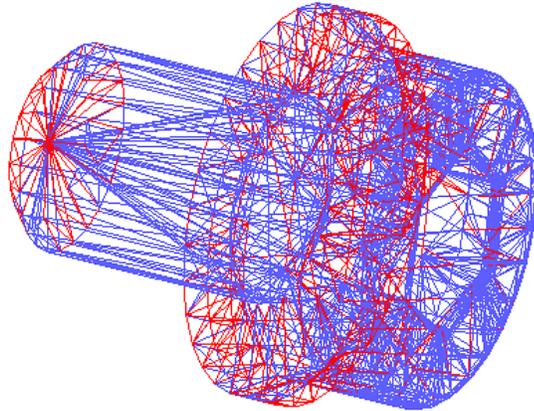


Figura 7.3: Malla N090.

La Figura 7.3 muestra la malla N090, un 86.4% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

7.3.4 Fémur

La malla Fémur corresponde a la malla con la mayor cantidad de tetraedros iniciales.

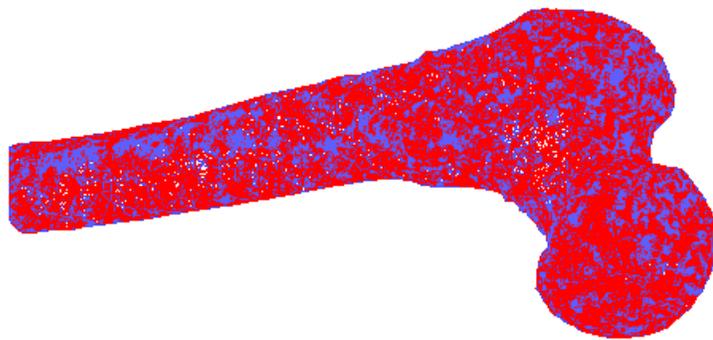


Figura 7.4: Malla Fémur.

La Figura 7.4 muestra la malla Fémur, un 43.0% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

7.3.5 RND2000

La malla RND2000, fue seleccionada por representar a una malla de puntos aleatorios con una distribución irregular de puntos.

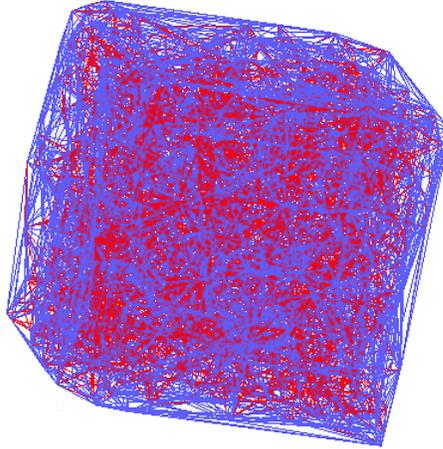


Figura 7.5: Malla RND2000.

La Figura 7.5 muestra la malla RND2000, un 54.4% de los tetraedros contienen al menos un ángulo diedro de mala calidad. Las aristas de los tetraedros de mala calidad están dibujadas en azul.

7.4 Lepp Selectivo combinado con otras operaciones.

La primera serie de experimentos tiene como objetivo mejorar el desempeño del Lepp al combinarlo con otras operaciones de mejoramiento básicas. Los experimentos se realizaron usando el algoritmo Lepp Selectivo con un factor de mejora de 1.1.

El procedimiento genérico se ilustra en el Algoritmo 7.1.

Algoritmo 7.1 Lepp Selectivo + Operación básica

Entrada: Una malla de tetraedros \mathbf{T}

Salida: Una malla de tetraedros \mathbf{T}' mejorada

while \mathbf{T} puede ser mejorado **do:**

 Mejorar \mathbf{T} usando un barrido de una operación básica.

 Mejorar \mathbf{T} usando Lepp Selectivo.

end while

En primer lugar, se realiza un barrido por la malla usando una operación básica. A continuación, se mejora la malla usando el algoritmo Lepp Selectivo usando como condición de parada el haber mejorado el conjunto S (i.e. una iteración al conjunto de tetraedros de mala calidad).

7.4.1 Lepp Selectivo + Smoothing.

En este experimento se combina el Lepp Selectivo con el algoritmo Smart Laplacian Smoothing [9].

El Smart Smoothing Laplaciano [9] se hace realizando barridos por los puntos de la malla, moviendo cada punto a la posición promedio de los puntos conectados por una arista al punto a mover. Cada punto es movido si no enreda la malla y los tetraedros resultantes son de mejor calidad que los tetraedros originales.

Algoritmo 7.2 Lepp Selectivo + Smoothing

Entrada: Una malla de tetraedros T
Salida: Una malla de tetraedros T' mejorada
while T puede ser mejorado **do**:
 Mejorar T usando smart smoothing laplaciano.
 Mejorar T usando Lepp Selectivo
end while

En los experimentos realizados, el algoritmo Lepp Selectivo + Smoothing provoca una mejora marginal en la malla mejorada comparado con el algoritmo Lepp Selectivo.

La marginal mejora del Lepp Selectivo + Smoothing puede ser atribuida, a que la inserción del centroide es equivalente a haber realizado laplacian smoothing al punto insertado, por lo tanto, aplicar smoothing laplaciano a estos puntos no los moverá.

En general, es recomendable usar Smart Laplacian Smoothing como proceso previo al Lepp Selectivo para mejorar la distribución de puntos de la malla, en especial si esta tiene una mala distribución inicial de puntos.

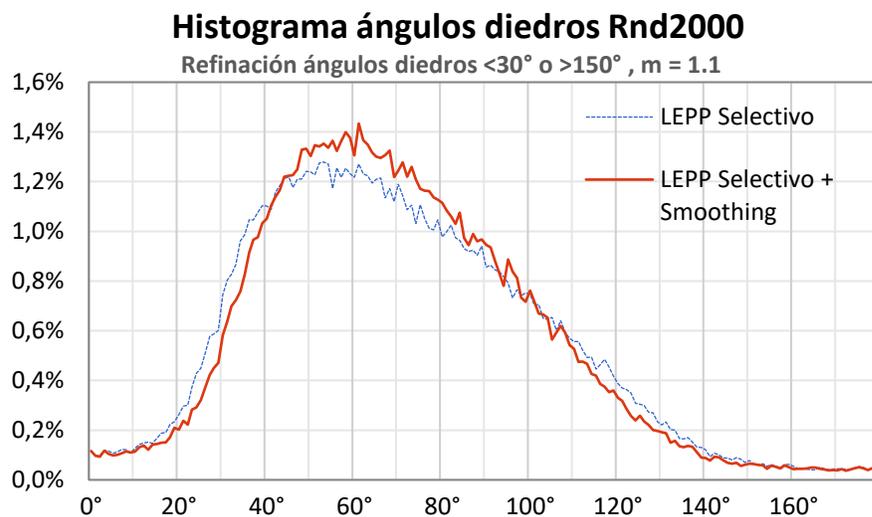


Figura 7.6: Histograma ángulos diedros RND2000.

Las mallas de puntos aleatorios, que en general tienen una mala distribución inicial de puntos, experimentan una mejora visible al usar el Algoritmo 7.2 al ser comparado con el Lepp Selectivo.

La Figura 7.6 muestra la mejora en la calidad de los ángulos diedros al realizar smoothing laplaciano como complemento al Lepp Selectivo.

7.4.2 Lepp Selectivo + Face Swap.

En este experimento se combina el Lepp Selectivo con el intercambio de caras.

El Intercambio de caras se hace realizando un barrido por los tetraedros de la malla, realizando intercambio de caras de un tetraedro con su vecino si la calidad del conjunto de tetraedros que resultante es mejor que la original y no se enreda la malla.

Algoritmo 7.3 Lepp Selectivo + Face Swap

Entrada: Una malla de tetraedros T

Salida: Una malla de tetraedros T' mejorada

while T puede ser mejorar **do:**

 Mejorar T haciendo un barrido de face swap.

 Mejorar T usando Lepp Selectivo

end while

En los experimentos realizados, el Lepp Selectivo + Face Swap provoca una mejora visible en la calidad de la malla. En el experimento se realizaron pocas operaciones de Face swap, sin embargo, los cambios a la geometría de la malla provocan que el Lepp refine una mayor cantidad de estrellas terminales.

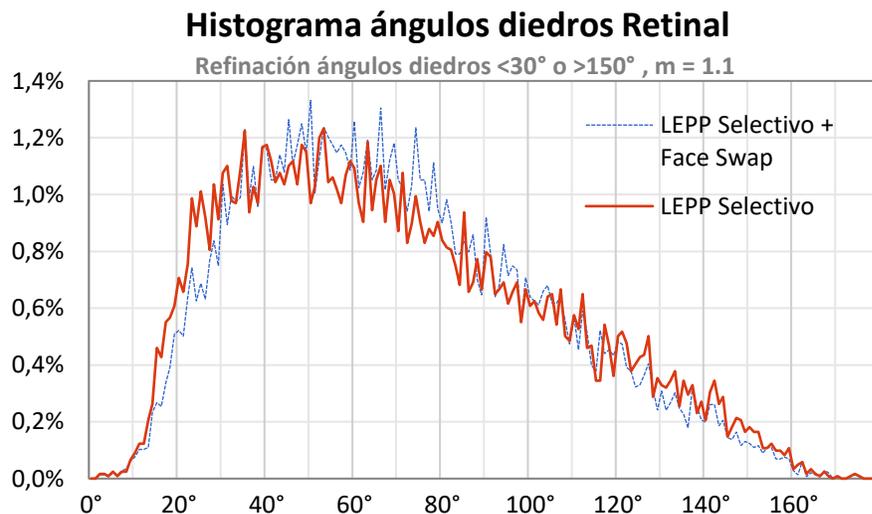


Figura 7.7: Histograma ángulos diedros RND2000.

En la Figura 7.7 se muestran los Histogramas del Lepp selectivo y Lepp selectivo + Face Swap, la operación Face Swap se realizó un total de 20 veces. En el caso de la malla retinal, se experimenta una disminución en el porcentaje de tetraedros de mala calidad, especialmente en el intervalo entre 15 y 30 grados.

7.5 Tamaño de la malla.

7.5.1 Efecto del factor mejora en el tamaño de la malla.

En el Lepp Selectivo, el factor mejora, denotado como m , representa el porcentaje de mejora mínimo requerido para aceptar cambios en la malla, por ejemplo, si $m = 1.1$ la estrella terminal será reemplazada por un nuevo conjunto de tetraedros si la calidad del nuevo conjunto es al menos un 10% mejor que la calidad de la estrella terminal.

El factor de mejora tiene un efecto significativo tanto en el tamaño, como en la calidad de la malla mejorada y en menor medida en el tiempo de ejecución. Un mayor factor de mejora provoca que el Lepp Selectivo sea más estricto al aceptar cambios en la malla, generando una malla de tamaño menor en un menor tiempo, pero de peor calidad que la malla mejorada con un menor factor de mejora.

Es importante encontrar un equilibrio entre la calidad de la malla y el tamaño de la malla procesada, lo que en general depende de la malla a mejorar y los requerimientos de la aplicación que utiliza la malla procesada.

Tabla 7.1 Tamaño de la malla según el valor del factor de mejora m .

	# de tetraedros				
	Retinal	P	N090	Fémur	RND 2000
Original	1374	926	2623	52848	13016
Lepp Swap/Centroid	4893	1443	28393	270789	45978
Lepp Selectivo (m= 1.00)	5276	1140	19627	187808	55015
Lepp Selectivo (m= 1.05)	3489	1055	11059	132460	35409
Lepp Selectivo (m= 1.08)	2623	1024	8766	114138	30562
Lepp Selectivo (m= 1.10)	2426	1019	7687	105163	28307
Lepp Selectivo (m= 1.15)	1990	992	6741	90028	24191
Lepp Selectivo (m= 1.20)	1757	977	6219	80034	21081

Como es esperado, empíricamente se puede comprobar que un mayor factor de mejora genera mallas mejoradas de menor tamaño. En la Tabla 7.1 se indican los tamaños de las cinco mallas de tetraedros que serán analizadas en este capítulo, como referencia se añade el tamaño de la malla original y el tamaño de la malla usando Lepp Swap/Centroid.

Tabla 7.2 Razón entre el tamaño de la malla original y la malla procesada según el valor del factor de mejora m.

	Retinal	P	# Tetraedros # Original		
			N090	Fémur	RND 2000
Lepp Swap/Centroid	3.56	1.56	10.82	5.12	3.53
Lepp Selectivo (m= 1.00)	3.84	1.23	7.48	3.55	4.23
Lepp Selectivo (m= 1.05)	2.54	1.14	4.22	2.51	2.72
Lepp Selectivo (m= 1.08)	1.91	1.11	3.34	2.16	2.35
Lepp Selectivo (m= 1.10)	1.77	1.10	2.93	1.99	2.17
Lepp Selectivo (m= 1.15)	1.45	1.07	2.57	1.70	1.86
Lepp Selectivo (m= 1.20)	1.28	1.06	2.37	1.51	1.62

La Tabla 7.2 incluye la razón entre el tamaño de la malla original y el de la malla procesada usando distintos valores para el factor de mejora. El tamaño de la malla procesada depende directamente del valor del factor de mejora.

7.6 Calidad de los ángulos diedros.

7.6.1 Retinal.

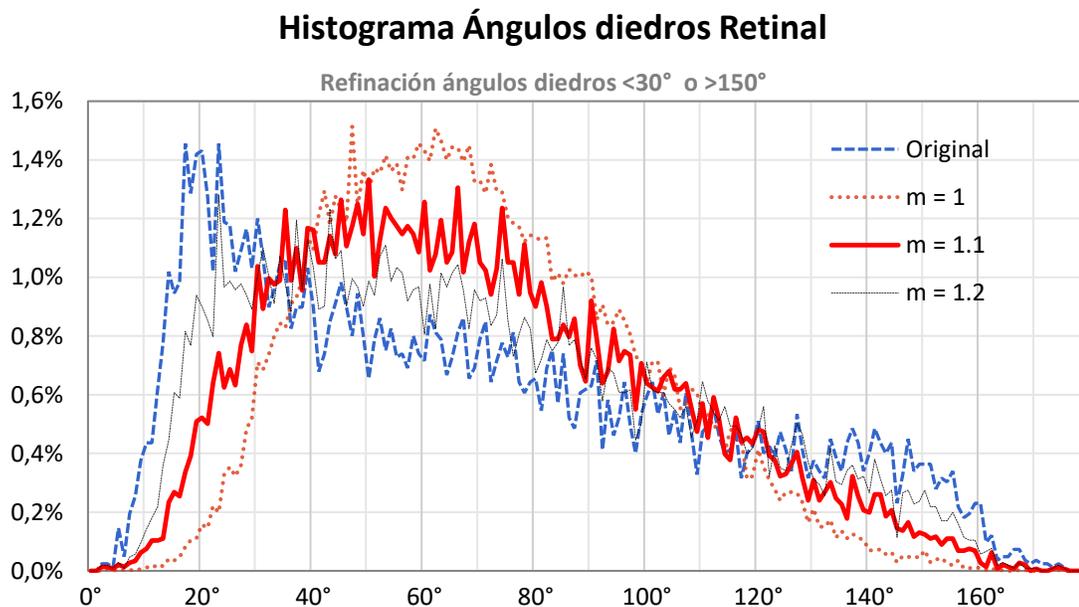


Figura 7.8: Histograma de ángulos diedros de la malla original y mejorada, usando distintos factores de mejora.

Tabla 7.3 Porcentaje de ángulos diedros de la malla Retinal en los ángulos extremos

Malla	Porcentaje de ángulos diedros									
	<5°	<10°	<15°	<20°	<25°	<30°	>150°	>160°	>170°	>175°
Original	0.06	1.08	4.37	10.46	16.82	22.31	3.71	0.92	0.13	0.01
Lepp Swap/Centroid	0.07	0.18	0.56	1.35	2.67	4.98	0.71	0.27	0.09	0.03
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.01	0.03	0.13	0.51	1.56	3.60	0.33	0.04	0.01	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.02	0.09	0.31	1.28	3.30	6.19	0.68	0.11	0.02	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.08)	0.03	0.15	0.65	2.33	5.09	8.95	1.07	0.19	0.03	0.01
Lepp Selectivo (m= 1.10)	0.03	0.19	0.82	2.58	5.61	9.28	1.17	0.23	0.03	0.01
Lepp Selectivo (m= 1.15)	0.03	0.18	1.16	4.05	8.43	12.98	1.73	0.26	0.03	0.01
Lepp Selectivo (m= 1.20)	0.05	0.28	1.63	5.35	10.15	14.90	2.11	0.37	0.05	0.01

La Tabla 7.3 muestra el porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos, los mejores resultados ocurren en el Lepp Selectivo con factor de mejora $m = 1$, además, a mayor factor de mejora, existe un mayor porcentaje de ángulos diedros de mala calidad. Como se estableció anteriormente, para el Lepp Selectivo el tamaño de la malla depende directamente del factor de mejora, para $m = 1$ es que el tamaño de la malla resultante es 3.84 veces el tamaño original, mientras que para $m = 1.08$ o más el tamaño de la malla resultante es menor a 2 veces el tamaño original.

Tabla 7.4 Tamaño de la malla y tiempo de ejecución algoritmos Lepp malla Retinal.

Malla	Total	# tetraedros		Tiempo de ejecución (s)
		$\frac{\# Tetraedros}{\# Original}$	% Mala calidad	
Original	1374	1.00	66.89	-
Lepp Swap/Centroid	4893	3.56	31.07	0.95
Lepp Selectivo (m= 1.00)	5276	3.84	16.7	3.425
Lepp Selectivo (m= 1.05)	3489	2.54	25.25	2.301
Lepp Selectivo (m= 1.08)	2623	1.91	34.43	2.493
Lepp Selectivo (m= 1.10)	2426	1.77	34.58	1.790
Lepp Selectivo (m= 1.15)	1990	1.45	46.53	1.739
Lepp Selectivo (m= 1.20)	1757	1.28	51.62	1.443

En la Tabla 7.4 se muestra el porcentaje de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, la mala inicial contiene un 66.89% de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, este porcentaje puede ser reducido casi a la mitad usando un factor mejora 1.1 o menor.

El algoritmo Lepp Swap/Centroid obtiene los peores resultados en los extremos, aumentando el porcentaje de ángulos diedros en el rango $[0^\circ, 5[$ y $]175^\circ, 180^\circ]$ con relación a la malla original. Para el rango $[0^\circ, 10[$ el algoritmo obtiene resultados comparables a un $m = 1.15$ y resultados intermedios a $m = 1$ y $m = 1.05$ para el rango $[0^\circ, 30^\circ[$

El tiempo de ejecución del algoritmo es mejor para el algoritmo Lepp Swap/Centroid, un 65% del tiempo que el Lepp Selectivo más rápido. Además, a mayor factor mejora tiende a un menor tiempo de ejecución (salvo para $m = 1.08$).

7.6.2 P.

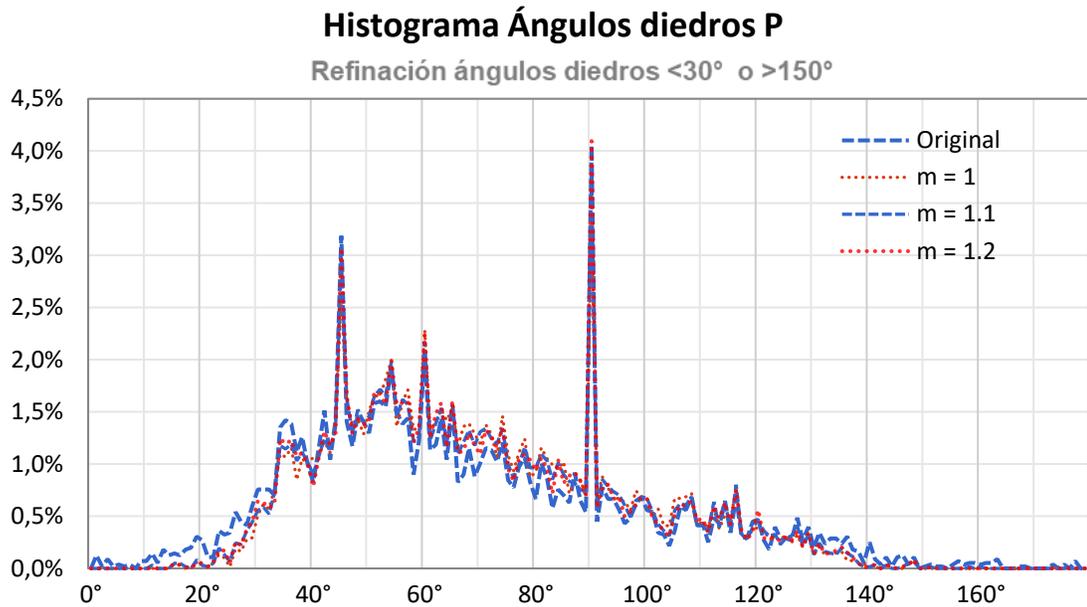


Figura 7.9: Histograma de ángulos diedros de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 7.5 Porcentaje de ángulos diedros de la malla P en los ángulos extremos.

Malla	Porcentaje de ángulos diedros									
	$<5^\circ$	$<10^\circ$	$<15^\circ$	$<20^\circ$	$<25^\circ$	$<30^\circ$	$>150^\circ$	$>160^\circ$	$>170^\circ$	$>175^\circ$
Original	0.25	0.41	0.99	1.94	3.11	5.45	0.76	0.41	0.14	0.11
Lepp Swap/Centroid	0.00	0.02	0.03	0.24	0.60	1.74	0.10	0.02	0.01	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.00	0.00	0.00	0.13	0.48	1.42	0.00	0.00	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.00	0.00	0.02	0.21	0.58	1.86	0.03	0.00	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.08)	0.00	0.00	0.03	0.23	0.60	1.95	0.05	0.02	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.10)	0.00	0.00	0.03	0.23	0.65	2.00	0.05	0.02	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.15)	0.00	0.00	0.00	0.15	0.60	1.95	0.02	0.00	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.20)	0.00	0.00	0.00	0.15	0.61	1.96	0.02	0.00	0.00	0.00

La Tabla 7.5 muestra el porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos, la mejor distribución en todos los segmentos ocurre en el Lepp Selectivo con factor de mejora $m = 1$. Los porcentajes finales son similares para todos los demás algoritmos, incluido el algoritmo Lepp Swap/Centroid.

Tabla 7.6 Tamaño de la malla y tiempo de ejecución algoritmos Lepp malla P.

Malla	Total	# tetraedros		
		$\frac{\# \text{Tetraedros}}{\# \text{Original}}$	% Mala calidad	Tiempo de ejecución (s)
Original	926	1.00	15.77	-
Lepp Swap/Centroid	1443	1.56	10.65	0.111
Lepp Selectivo (m= 1.00)	1140	1.23	6.75	0.178
Lepp Selectivo (m= 1.05)	1055	1.14	8.06	0.148
Lepp Selectivo (m= 1.08)	1024	1.11	8.50	0.161
Lepp Selectivo (m= 1.10)	1019	1.10	8.64	0.131
Lepp Selectivo (m= 1.15)	992	1.07	8.77	0.152
Lepp Selectivo (m= 1.20)	977	1.06	8.80	0.122

La malla inicial contiene un 15.77% de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, este porcentaje se reduce hasta un 6.75% para $m = 1$.

Para la malla P, la ventaja de usar un factor mejora $m = 1$ (una malla de mejor calidad) supera ampliamente a sus desventajas (mayor tiempo de ejecución y malla de mayor tamaño).

7.6.3 N090.

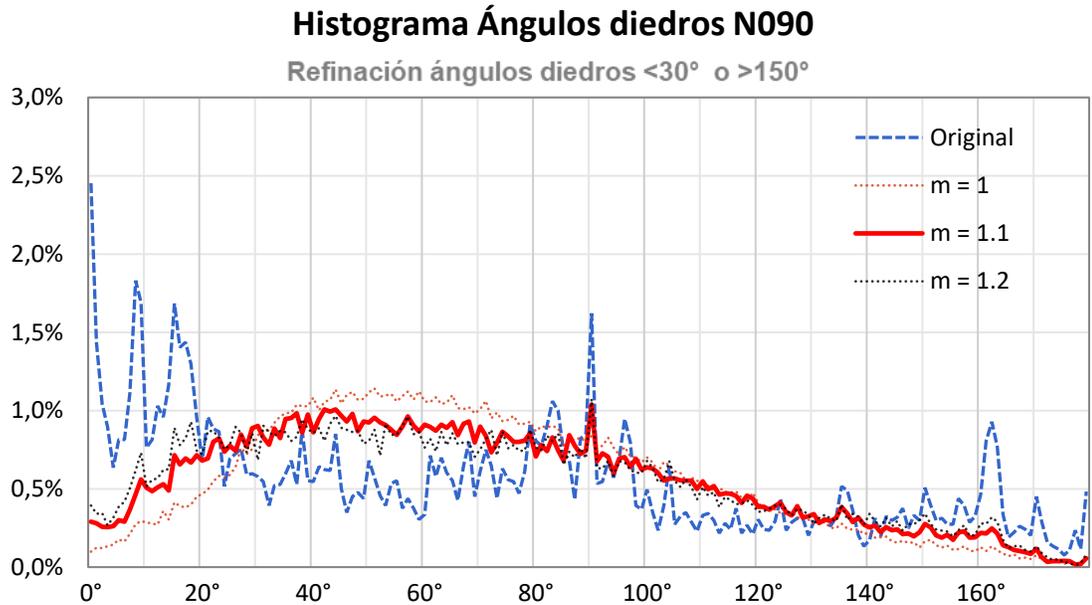


Figura 7.10: Histograma de ángulos diedros de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 7.7 Porcentaje de ángulos diedros de la malla N090 en los ángulos extremos.

Malla	Porcentaje de ángulos diedros									
	<5°	<10°	<15°	<20°	<25°	<30°	>150°	>160°	>170°	>175°
Original	6.46	12.72	17.45	24.22	28.12	31.48	10.08	6.58	2.16	1.02
Lepp Swap/Centroid	2.49	4.63	6.52	8.52	10.69	13.22	4.05	2.66	1.16	0.58
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.62	1.74	3.24	5.28	7.94	11.41	2.53	1.23	0.35	0.12
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.81	2.26	4.02	6.66	9.79	13.60	2.93	1.37	0.31	0.09
Lepp Selectivo (m= 1.08)	1.14	2.97	5.18	8.32	11.76	15.68	3.68	1.82	0.42	0.15
Lepp Selectivo (m= 1.10)	1.35	3.33	5.85	9.29	13.03	17.05	4.14	2.01	0.46	0.17
Lepp Selectivo (m= 1.15)	1.55	3.91	6.70	10.73	14.89	19.21	4.78	2.35	0.55	0.19
Lepp Selectivo (m= 1.20)	1.66	4.32	7.20	11.37	15.40	19.52	4.92	2.50	0.56	0.18

La Tabla 7.7 muestra el porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos, al igual que en la malla retinal la mejor distribución en todos los segmentos ocurre en el Lepp Selectivo con factor de mejora $m = 1$.

Tabla 7.8 Tamaño de la malla y tiempo de ejecución algoritmos Lepp malla N090.

Malla	Total	# tetraedros		
		$\frac{\# Tetraedros}{\# Original}$	% Mala calidad	Tiempo de ejecución (s)
Original	2623	1.00	86.43	-
Lepp Swap/Centroid	28393	10.82	42.21	6.383
Lepp Selectivo (m= 1.00)	19627	7.48	41.41	23.964
Lepp Selectivo (m= 1.05)	11059	4.22	49.26	14.868
Lepp Selectivo (m= 1.08)	8766	3.34	54.32	12.221
Lepp Selectivo (m= 1.10)	7687	2.93	58.31	10.814
Lepp Selectivo (m= 1.15)	6741	2.57	64.41	10.003
Lepp Selectivo (m= 1.20)	6219	2.37	64.61	9.593

La malla inicial contiene un 86.43% de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, este porcentaje puede ser reducido a menos de mitad usando un factor mejora 1.0, sin embargo, el tamaño de la malla resultante es más de 7.48 veces la original.

Para la malla N090 el tamaño de la malla resultante es más del doble de la original en todos los casos, siendo en los peores casos 10.82 veces el tamaño original para el algoritmo Lepp Swap/Centroid y 7.48 veces el tamaño original para el algoritmo Lepp Selectivo con un $m = 1$.

Al igual que la malla Retinal, el algoritmo Lepp Swap/Centroid obtiene los peores resultados en los extremos, con mejores resultados para rangos más amplios, similares a $m = 1.05$ en el mejor caso.

El tiempo de ejecución del algoritmo es mejor para el algoritmo Lepp Swap/Centroid, un 66% del tiempo que el Lepp Selectivo más rápido. Además, a mayor factor mejora tiende a un menor tiempo de ejecución.

7.6.4 Fémur.

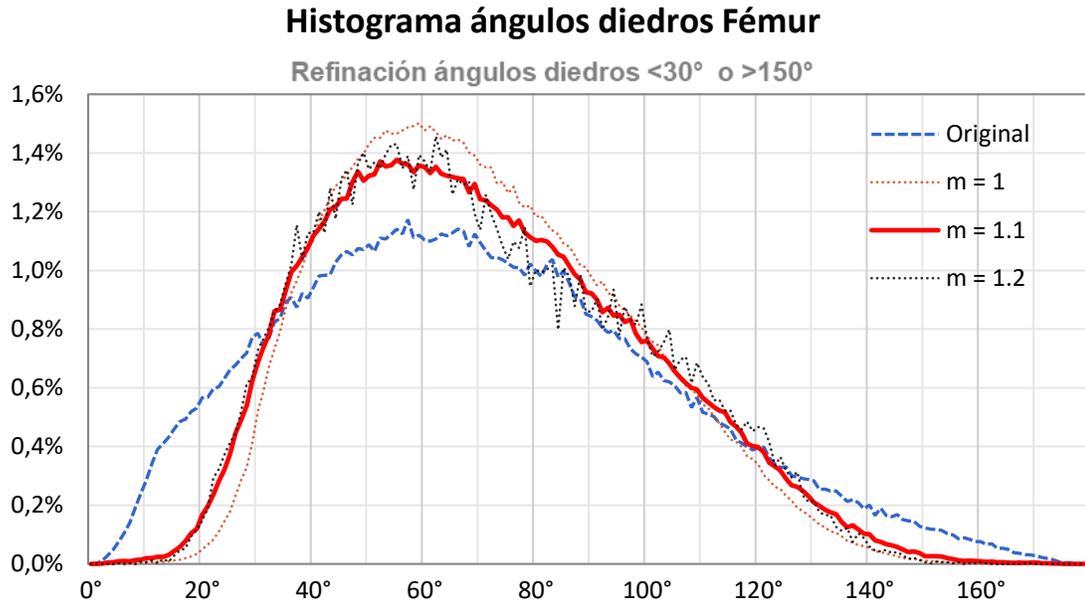


Figura 7.11: Histograma de ángulos diedros de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 7.9 Porcentaje de ángulos diedros de la malla Fémur en los ángulos extremos

Malla	Porcentaje de ángulos diedros									
	<5°	<10°	<15°	<20°	<25°	<30°	>150°	>160°	>170°	>175°
Original	0.09	0.85	2.72	5.21	8.17	11.70	1.61	0.60	0.10	0.01
Lepp Swap/Centroid	0.02	0.09	0.23	0.50	1.14	2.48	0.27	0.11	0.03	0.01
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.00	0.02	0.06	0.16	0.62	2.05	0.08	0.02	0.00	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.01	0.05	0.12	0.36	1.19	3.22	0.17	0.05	0.01	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.08)	0.01	0.06	0.15	0.49	1.57	3.87	0.22	0.06	0.01	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.10)	0.01	0.07	0.18	0.59	1.79	4.26	0.25	0.07	0.01	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.15)	0.01	0.09	0.26	0.85	2.34	5.11	0.32	0.09	0.02	0.00
Lepp Selectivo (m= 1.20)	0.00	0.01	0.06	0.39	1.72	4.34	0.5	0.1	0.00	0.00

La Tabla 7.9 muestra el porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos, la mejor distribución en todos los segmentos ocurre en el Lepp Selectivo con factor de mejora $m = 1$, a mayor factor de mejora, existe un mayor porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos (a excepción de $m = 1.15$ que obtiene peores resultados que $m = 1.2$).

Al igual que las mallas anteriores, el algoritmo Lepp Swap/Centroid obtiene los peores resultados en los extremos, con mejores resultados para rangos más amplios, similares a $m = 1.05$ en el mejor caso.

Tabla 7.10 Tamaño de la malla y tiempo de ejecución algoritmos Lepp malla Fémur.

Malla	Total	$\frac{\# \text{Tetraedros}}{\# \text{Original}}$	# tetraedros	
			% Mala calidad	Tiempo de ejecución (s)
Original	52848	1.00	42.99	-
Lepp Swap/Centroid	270789	5.12	18.22	61.43
Lepp Selectivo (m= 1.00)	187808	3.55	10.08	140.958
Lepp Selectivo (m= 1.05)	132460	2.51	15.25	114.456
Lepp Selectivo (m= 1.08)	114138	2.16	18.07	105.599
Lepp Selectivo (m= 1.10)	105163	1.99	19.71	105.116
Lepp Selectivo (m= 1.15)	90028	1.70	23.27	93.72
Lepp Selectivo (m= 1.20)	80034	1.51	26.13	83.64

La malla inicial contiene un 52.99% de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, este porcentaje puede ser reducido al menos a la mitad usando un factor mejora 1.1 o menor.

Para la malla Fémur, el uso de un factor de mejora de 1.1 o más evita que la malla resultante duplique su tamaño.

El tiempo de ejecución del algoritmo es mejor para el algoritmo Lepp Swap/Centroid, tomando un 73% del tiempo que el algoritmo Lepp Selectivo más rápido. Además, a mayor factor mejora tiende a un menor tiempo de ejecución.

7.6.5 Rnd2000.

RND2000, corresponde a la malla generada con 2000 puntos aleatorios.

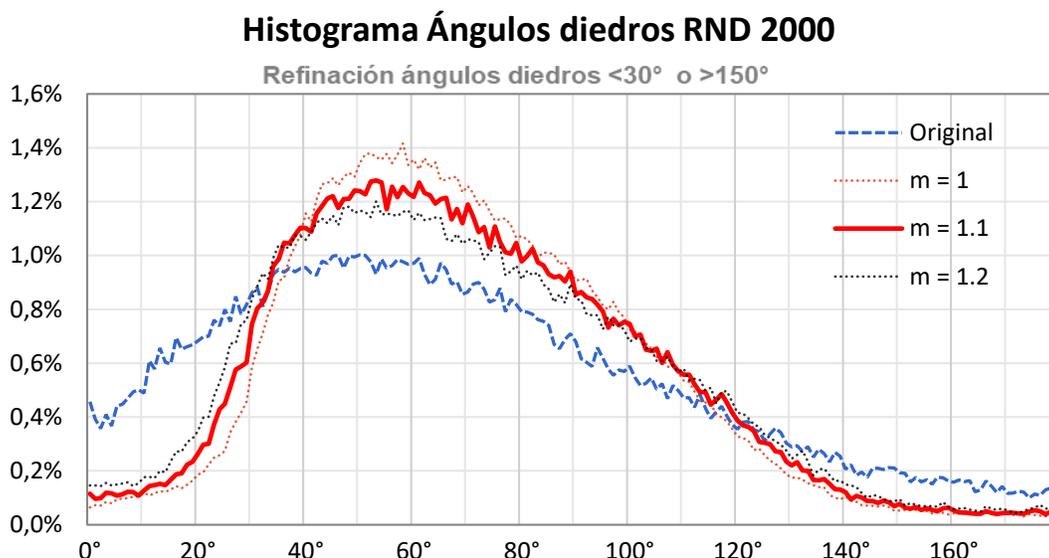


Figura 7.12: Histograma de ángulos diedros de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 7.11 Porcentaje de ángulos diedros de la malla RND2000 en los ángulos extremos

Malla	Porcentaje de ángulos diedros									
	$<5^\circ$	$<10^\circ$	$<15^\circ$	$<20^\circ$	$<25^\circ$	$<30^\circ$	$>150^\circ$	$>160^\circ$	$>170^\circ$	$>175^\circ$
Original	1.98	4.34	7.27	10.55	14.13	18.13	4.41	2.70	1.23	0.65
Lepp Swap/Centroid	2.20	3.85	5.30	6.87	8.75	11.31	3.68	2.62	1.50	0.82
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.37	0.87	1.47	2.19	3.30	5.17	1.27	0.77	0.35	0.16
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.45	0.93	1.50	2.30	3.64	5.92	1.28	0.78	0.38	0.19
Lepp Selectivo (m= 1.08)	0.53	1.06	1.70	2.63	4.16	6.79	1.43	0.86	0.44	0.23
Lepp Selectivo (m= 1.10)	0.55	1.12	1.84	2.84	4.50	7.22	1.52	0.91	0.46	0.24
Lepp Selectivo (m= 1.15)	0.65	1.33	2.16	3.36	5.29	8.47	1.73	1.05	0.52	0.28
Lepp Selectivo (m= 1.20)	0.74	1.50	2.42	3.82	5.98	9.42	1.89	1.15	0.57	0.32

La Tabla 7.11 muestra el porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos, la mejor distribución en todos los segmentos ocurre en el Lepp Selectivo con factor de mejora $m = 1$, a mayor factor de mejora, existe un mayor porcentaje de ángulos diedros en los ángulos extremos.

Usando un factor de mejora $m = 1$ hay una mayor reducción en el porcentaje de ángulos diedros, sin embargo, sin embargo, la malla resultante es 4.23 veces el tamaño original.

Tabla 7.12 Tamaño de la malla y tiempo de ejecución algoritmos Lepp malla RND2000.

Malla	Total	# tetraedros		
		$\frac{\# Tetraedros}{\# Original}$	% Mala calidad	Tiempo de ejecución (s)
Original	13016	1.00	55.43	-
Lepp Swap/Centroid	45978	3.53	34.75	9.41
Lepp Selectivo (m= 1.00)	55015	4.23	19.04	48.37
Lepp Selectivo (m= 1.05)	35409	2.72	22.34	34.702
Lepp Selectivo (m= 1.08)	30562	2.35	25.77	30.505
Lepp Selectivo (m= 1.10)	28307	2.17	27.52	30.456
Lepp Selectivo (m= 1.15)	24191	1.86	32.09	25.176
Lepp Selectivo (m= 1.20)	21081	1.62	35.53	22.198

La malla inicial contiene un 55.43% de tetraedros con al menos un ángulo diedro de mala calidad, este porcentaje puede ser reducido al menos a la mitad usando un factor mejora 1.1 o menor.

Para la malla RND2000, el uso de un factor de mejora de 1.15 o más evita que la malla resultante duplique su tamaño.

El tiempo de ejecución del algoritmo es mejor para el algoritmo Lepp Swap/Centroid, tomando un 42% del tiempo que el algoritmo Lepp Selectivo más rápido. Además, a mayor factor mejora tiende a un menor tiempo de ejecución.

7.6.6 Discusión sobre la calidad de las mallas mejoradas.

En primer lugar, el factor de mejora influye directamente en el tamaño de la malla mejorada y el tiempo de ejecución del algoritmo, a mayor factor de mejora, menor es el tamaño de la malla mejorada y el tiempo de ejecución del algoritmo. El factor de mejora también influye en la calidad de la malla mejorada, a menor factor de mejora, mejor es la calidad de la malla mejorada.

El algoritmo Lepp Swap/Centroid es el algoritmo con el mejor tiempo de ejecución, este se ejecuta en un tiempo entre un 42% a un 73% del tiempo que toma el Lepp Selectivo más rápido. Una posible explicación del menor tiempo de ejecución del algoritmo Swap/Centroid es que este itera una única vez por el conjunto de tetraedros de mala calidad, mientras que el algoritmo Lepp Selectivo itera hasta que ningún tetraedro puede ser mejorado.

En los experimentos realizados, el algoritmo Lepp Selectivo obtiene los mejores en las mallas retinal y P, que representan a una malla sin puntos interiores y a una malla con una buena calidad inicial. En general, el algoritmo Lepp Selectivo funciona mejor en mallas con puntos interiores y en mallas con buena calidad inicial.

Los peores resultados, principalmente en el tamaño de la malla resultante, se dan en las mallas N090 y RND2000, la malla N090 representa una malla con una muy mala geometría inicial y RND2000 una malla de puntos aleatorios. Los resultados sugieren que este tipo de geometrías necesitan añadir una gran cantidad de nuevos tetraedros.

El Lepp Selectivo tiene potencial para ser un algoritmo rápido y competitivo, si bien existen algoritmos que arrojan mejores resultados, como el mejoramiento agresivo [12], el tiempo de procesamiento de una malla con tamaño similar a fémur puede tardar hasta una hora en ser procesada [14].

7.6.7 Costo computacional del algoritmo Lepp Selectivo.

El costo computacional del algoritmo Lepp Selectivo es bajo, siendo la mayoría de las mallas procesadas en 30 segundos o menos, y 141 segundos para el caso más lento (para la malla más grande, inicialmente de 52848 tetraedros) en un computador portátil de gama media, el tiempo de ejecución es entre un 2.5% y 14% de los tiempos presentados por Klingner y Shewchuk que tardan de 950 a 5823 segundos (en un computador con características similares) para una malla de 50000 tetraedros [14], si bien este algoritmo obtiene mejores resultados, tardan un tiempo considerable, otras referencias no entregan un tiempo de procesamiento.

Capítulo 8

Análisis de las mallas finales usando la medida de calidad basada en el volumen.

En este capítulo se usa la calidad basada en el volumen para evaluar la malla inicial y la malla mejorada obtenida al mejorar tetraedros con ángulos diedros menores a 30° o mayores a 150° . Las mallas resultantes evaluadas son las mismas de la sección 7.6.

8.1.1 Retinal.

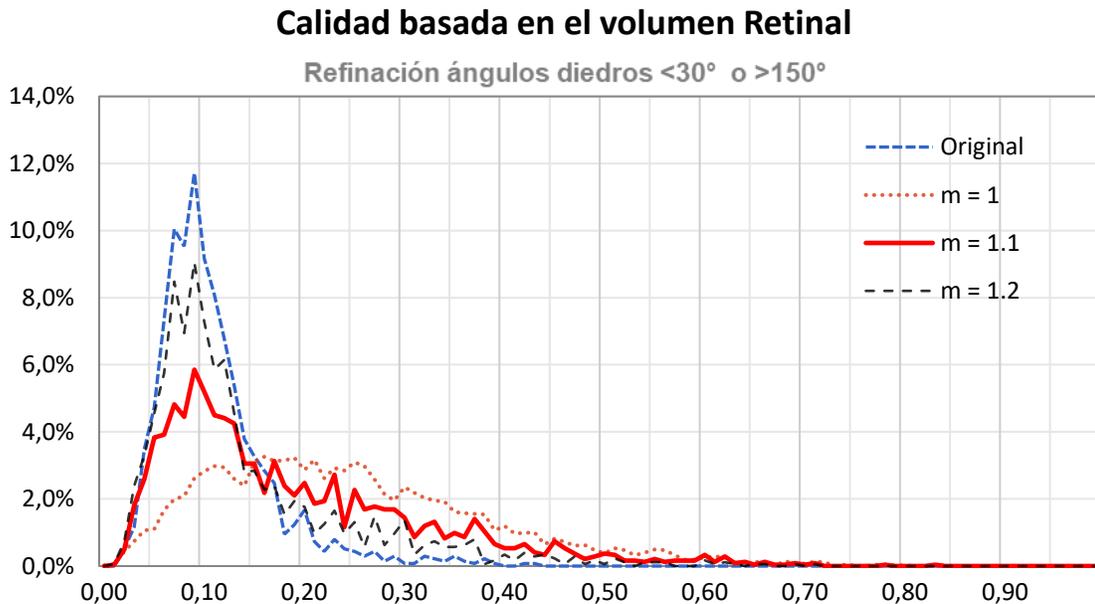


Figura 8.1: Histograma de calidad basada en el volumen de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Los mejores resultados al evaluar la malla usando la calidad del volumen ocurren al mejorar la malla usando el algoritmo Lepp Swap/Centroid, sin embargo, la mayor desventaja de este algoritmo es el tamaño de la malla resultante.

Tabla 8.1 Porcentaje de elementos menores a una calidad específica en Retinal

	Porcentaje de tetraedros según calidad de volumen					
	<0.05	<0.1	<0.15	<0.2	<0.25	<0.3
Original	5.17	48.54	81.73	92.50	96.65	98.25
Lepp Swap/Centroid	1.31	6.83	18.97	34.33	48.66	62.54
Lepp Selectivo (m= 1.00)	2.31	11.77	25.49	41.34	55.74	68.48
Lepp Selectivo (m= 1.05)	3.84	20.06	37.52	52.51	64.89	74.69
Lepp Selectivo (m= 1.08)	5.30	27.72	47.50	61.00	71.67	80.33
Lepp Selectivo (m= 1.10)	4.95	27.82	49.22	62.08	72.22	81.33
Lepp Selectivo (m= 1.15)	5.63	36.48	61.26	73.17	80.40	87.49
Lepp Selectivo (m= 1.20)	6.49	41.26	67.90	78.88	85.49	90.44

8.1.2 P.

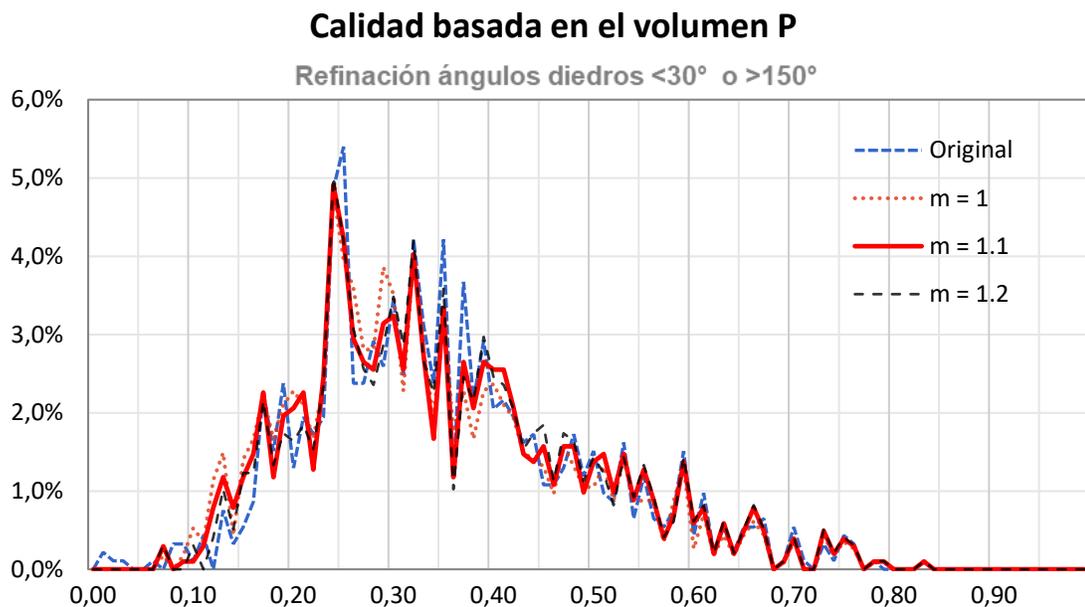


Figura 8.2: Histograma de calidad basada en el volumen de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

La Tabla 8.2 muestra que el algoritmo Lepp selectivo disminuye el porcentaje de elementos con calidad 0.1 o menos. En el caso de la malla P, los mejores resultados se dan en las mallas con un factor de mejora 1.15 y 1.2.

Tabla 8.2 Porcentaje de elementos menores a una calidad específica en P

	Porcentaje de tetraedros según calidad de volumen					
	<0.05	<0.1	<0.15	<0.2	<0.25	<0.3
Original	0.43	1.19	2.81	10.37	22.14	37.80
Lepp Swap/Centroid	0.21	1.39	6.44	17.67	28.90	46.43
Lepp Selectivo (m= 1.00)	0.00	0.35	4.30	13.33	26.58	43.60
Lepp Selectivo (m= 1.05)	0.09	0.38	3.51	11.85	25.21	41.52
Lepp Selectivo (m= 1.08)	0.00	0.39	3.52	11.72	24.51	40.33
Lepp Selectivo (m= 1.10)	0.00	0.39	3.53	11.58	24.53	40.04
Lepp Selectivo (m= 1.15)	0.00	0.30	2.62	9.78	22.18	37.70
Lepp Selectivo (m= 1.20)	0.00	0.31	2.56	10.24	22.62	37.67

8.1.3 N090.

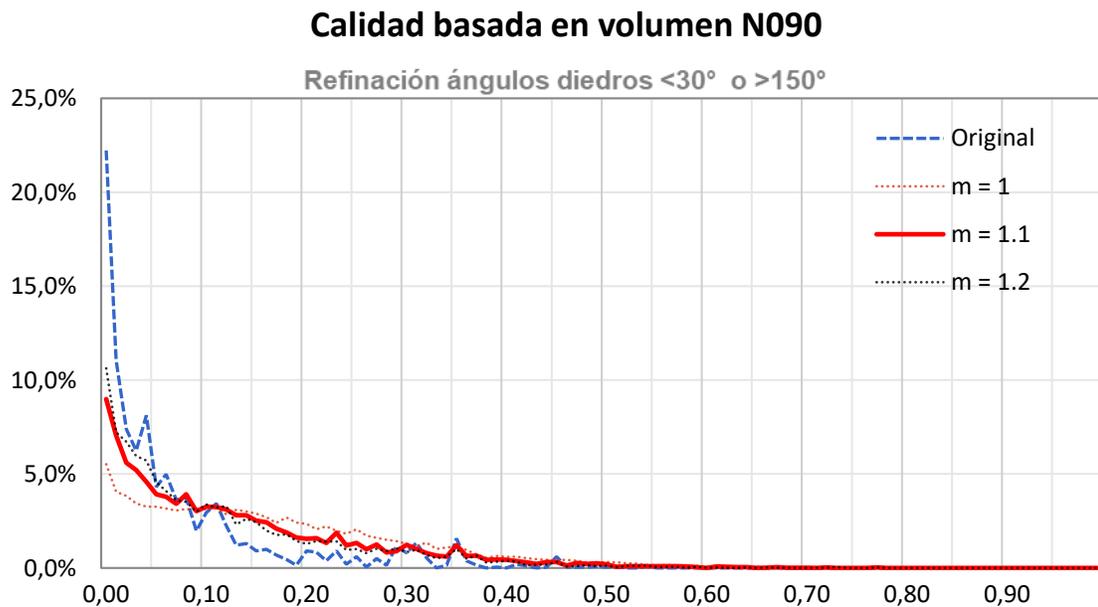


Figura 8.3: Histograma de calidad basada en el volumen de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

La malla N090 original contiene un 55.05% de elementos con una calidad basada en el volumen menor a 0.05, lo que ejemplifica la mala calidad inicial de esta malla.

Tabla 8.3 Porcentaje de elementos menores a una calidad específica en N090

	Porcentaje de tetraedros según calidad de volumen					
	<0.05	<0.1	<0.15	<0.2	<0.25	<0.3
Original	55.05	73.69	84.83	88.03	91.27	93.71
Lepp Swap/Centroid	19.27	29.07	39.99	51.74	62.93	73.05
Lepp Selectivo (m= 1.00)	20.12	35.80	51.08	64.20	74.62	82.96
Lepp Selectivo (m= 1.05)	24.30	42.28	57.97	70.11	78.83	85.27
Lepp Selectivo (m= 1.08)	28.56	46.18	61.35	72.59	80.76	86.85
Lepp Selectivo (m= 1.10)	31.46	49.53	64.76	75.31	82.87	88.19
Lepp Selectivo (m= 1.15)	35.38	54.95	69.72	78.89	85.86	90.73
Lepp Selectivo (m= 1.20)	36.24	55.02	69.85	79.24	85.74	90.51

Los mejores resultados para la malla N090 ocurren usando el algoritmo Lepp Swap/Centroid. En el caso de los algoritmos Lepp Selectivo, la mejora en la calidad de la malla resultante disminuye al aumentar el valor del factor de mejora.

8.1.4 Fémur.

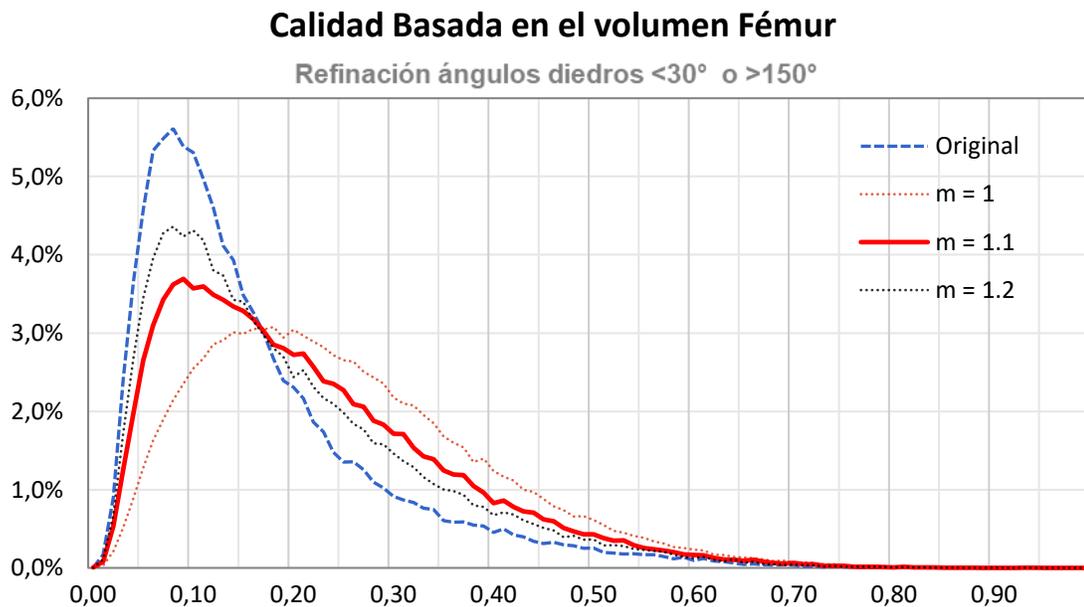


Figura 8.4: Histograma de calidad basada en el volumen de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 8.4 Porcentaje de elementos menores a una calidad específica en Fémur

	Porcentaje de tetraedros según calidad					
	<0.05	<0.1	<0.15	<0.2	<0.25	<0.3
Original	7.12	33.51	56.44	71.26	80.81	86.90
Lepp Swap/Centroid	0.87	5.79	15.56	28.87	43.34	57.22
Lepp Selectivo (m= 1.00)	1.65	10.95	24.95	40.06	54.49	67.08
Lepp Selectivo (m= 1.05)	2.90	16.10	32.15	47.38	60.75	72.05
Lepp Selectivo (m= 1.08)	3.50	18.93	35.79	50.86	63.82	74.40
Lepp Selectivo (m= 1.10)	3.84	20.33	37.75	52.90	65.66	75.80
Lepp Selectivo (m= 1.15)	4.55	23.25	41.76	56.90	69.03	78.35
Lepp Selectivo (m= 1.20)	5.18	25.46	44.91	59.96	71.50	80.26

Al igual que dos de las tres mallas anteriores, los mejores resultados ocurren con el algoritmo Lepp Swap/Centroid

8.1.5 Rnd2000.

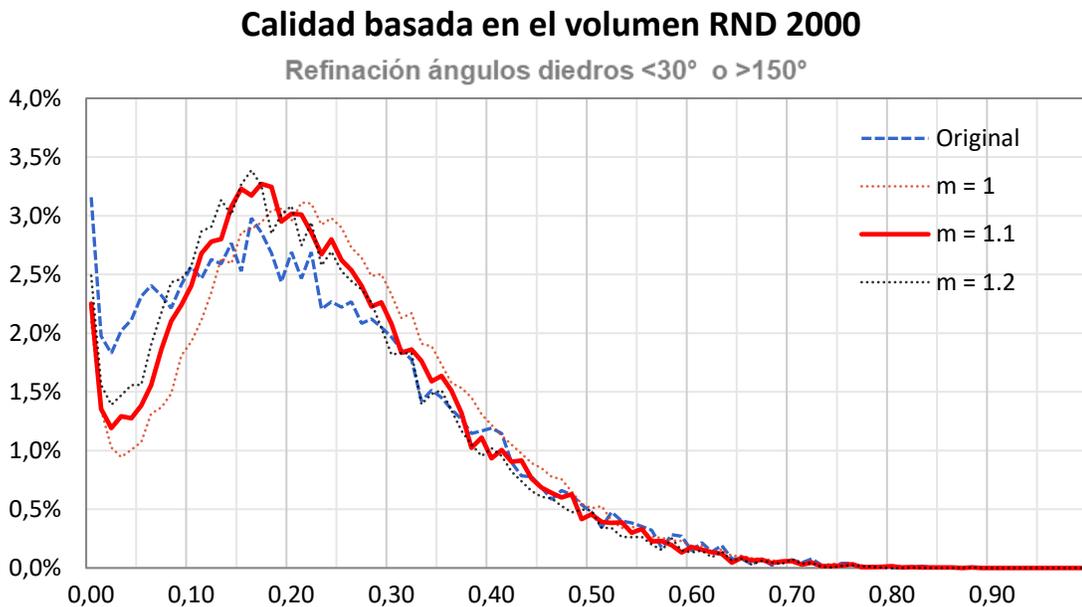


Figura 8.5: Histograma de calidad basada en el volumen de la malla original y mejorada usando distintos factores de mejora.

Tabla 8.5 Porcentaje de elementos menores a una calidad específica en RND2000

	Porcentaje de tetraedros según calidad de volumen					
	<0.05	<0.1	<0.15	<0.2	<0.25	<0.3
Original	11.09	22.76	35.77	49.25	61.57	72.31
Lepp Swap/Centroid	11.16	20.04	31.22	44.81	58.37	70.41
Lepp Selectivo (m= 1.00)	6.42	13.46	25.07	39.87	54.94	68.20
Lepp Selectivo (m= 1.05)	6.40	14.22	27.11	42.58	57.32	69.97
Lepp Selectivo (m= 1.08)	6.80	15.48	28.79	44.78	59.54	71.72
Lepp Selectivo (m= 1.10)	7.36	16.51	30.25	46.12	60.47	72.52
Lepp Selectivo (m= 1.15)	8.02	18.17	32.73	48.45	62.59	74.31
Lepp Selectivo (m= 1.20)	8.47	19.00	33.49	49.26	63.30	74.95

A excepción de las demás mallas, la malla mejorada con el algoritmo Lepp Swap/Centroid no obtiene los mejores resultados, sino que se obtienen con el algoritmo Lepp Selectivo con un factor de mejora $m = 1$.

8.1.6 Resultados midiendo la calidad basada en el volumen.

Usando la calidad basada en el volumen como medida de calidad, el algoritmo Lepp Swap/Centroid obtiene los mejores resultados en 3 de las 5 mallas estudiadas. Usando el algoritmo Lepp Selectivo, los resultados tienden a mejorar a menor factor mejora, sin embargo, esto no necesariamente es cierto en todas las mallas, en especial en la malla P.

Capítulo 9

Análisis de las estrellas terminales en los algoritmos estudiados.

En este capítulo se analizan los resultados de la cantidad de estrellas terminales que deben ser visitadas para mejorar un tetraedro objetivo, las mallas resultantes evaluadas son las mismas de la sección 7.6.

En general, la distribución de las estrellas terminales visitadas por el Lepp es similar en todas las mallas de tetraedros, existiendo discrepancias en la cantidad máxima de estrellas terminales visitadas en una mejora, las que tienen una correlación con el tamaño de la malla inicial, que en general a mayor tamaño de la malla, mayor es el máximo de estrellas terminales visitadas para mejorar un tetraedro.

9.1.1 Estrellas visitadas en Lepp-Inserción y Lepp Swap/Centroid

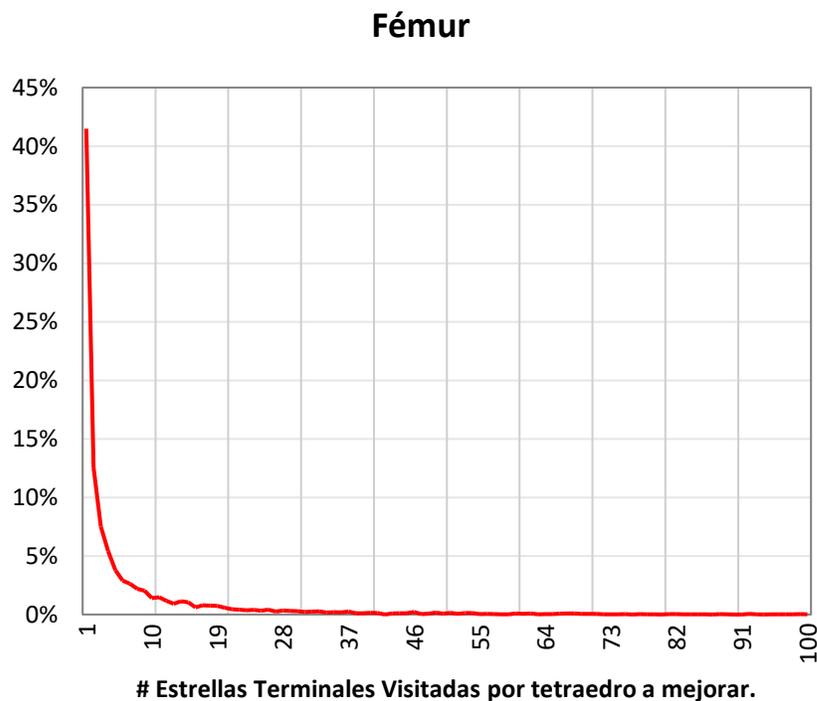


Figura 9.1: Distribución del número de estrellas terminales visitadas por tetraedro a mejorar en el algoritmo Lepp Centroide.

Debido a que los resultados son uniformes en las mallas, tanto al usar Lepp-Inserción como Lepp Swap/Centroid, solo se muestran los resultados para la malla Fémur usando Lepp Centroide.

En primer lugar, en la Figura 9.1 se observa que un 41.48% de los tetraedros son procesados luego de visitar una única estrella terminal (el porcentaje exacto depende de la malla a evaluar, pero es cercano a un 40% en todas las mallas evaluadas) lo que significa que el tetraedro de mala calidad comienza en una estrella terminal. Además, se observa un brusco descenso en el porcentaje de tetraedros que requieren visitar N estrellas terminales a medida que N aumenta.



Figura 9.2: Distribución del número de estrellas terminales visitadas por tetraedro a mejorar en el algoritmo Lepp Centroid en el intervalo [1,10].

La Figura 9.2 muestra el intervalo [1,10] de la Figura 9.1 en la que se aprecia con más detalle el rápido descenso en el porcentaje de tetraedros que requieren visitar más estrellas terminales.

En los casos analizados, entre un 50 y un 80% de los tetraedros son procesados luego de visitar un máximo de 2 estrellas terminales y entre un 75% y un 99% de los tetraedros son procesados luego de visitar un máximo de 10 estrellas terminales.

9.1.2 Estrellas visitadas en el Lepp Truncado.

A diferencia del Lepp Centroid y el Lepp Swap/Centroid, el Lepp Selectivo usa el Lepp Truncado para elegir que estrellas visitar. Por lo tanto, en el algoritmo Lepp Selectivo es posible procesar un tetraedro sin visitar estrellas terminales, lo que ocurre cuando la arista más larga del tetraedro objetivo pertenece al conjunto de aristas no refinables (la estrella terminal ya se intentó procesar sin éxito anteriormente).

Fémur

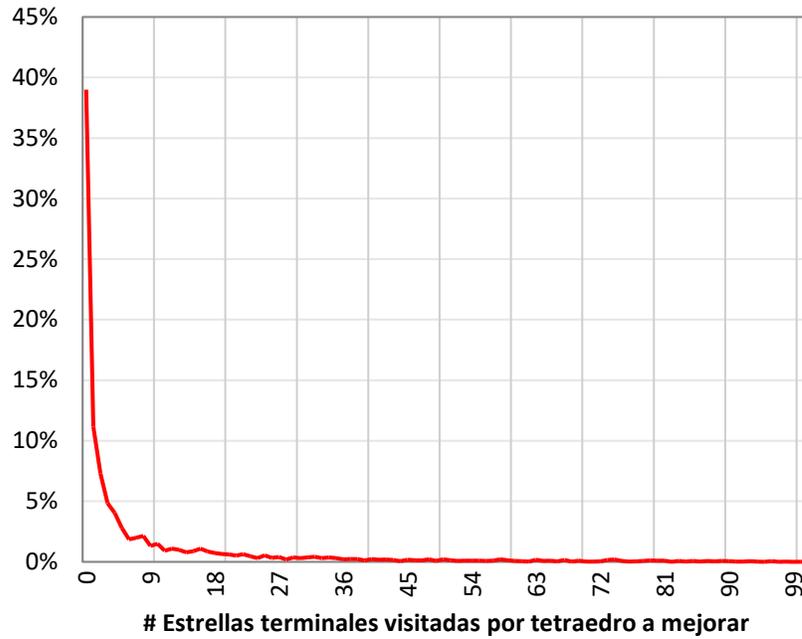


Figura 9.3: Distribución del número de estrellas terminales visitadas por tetraedro a mejorar en el algoritmo Lepp Selectivo.

Femur



Figura 9.4: Distribución del número de estrellas terminales visitadas por tetraedro a mejorar en el algoritmo Lepp Selectivo en el intervalo [0,10].

Al igual que en el Lepp Centroide, se observa un brusco descenso en el porcentaje de tetraedros que requieren visitar N estrellas terminales a medida que N aumenta. Además, en un 38.99% de los casos no se requiere procesar estrella terminal, ya que el tetraedro está marcado para no ser mejorado.

9.2 Inserciones e Intercambios de aristas inválidos.

Tabla 9.1 Porcentajes de estrellas terminales validas e inválidas.

	Procesamientos Validos		Procesamientos Inválidos	
	Estrella Cerrada	Estrella Abierta	Tetraedros enredados	Fuera de la estrella
P	70.21%	29.43%	0.36%	0%
Retinal	89.68%	7.04%	3.28%	0%
N090	59.81%	29.03%	9.44%	1.72%
Femur	93.05%	5.51%	1.39%	0.05%
RND 2000	84.16%	5.15%	7.56%	3.13%

En los algoritmos Lepp la mayoría de las estrellas terminales son cerradas, mientras que un porcentaje mucho menor corresponde a estrellas abiertas, cabe destacar que en la distribución de las estrellas terminales abiertas y cerradas, tanto la malla P y N090 son casos aislados y la distribución de las estrellas terminales tiende a ser 85-95% de estrellas cerradas y 5-15% de estrellas abiertas.

En cuanto a los tetraedros inválidos, el caso más común es que la mojarra enrede la malla, lo que es mucho más común en mallas con una mala calidad inicial, llegando casi al 10% en la malla N090, sin embargo, los rangos suelen estar entre 1-5% del total. La inserción fuera de la estrella terminal es un caso muy raro en la mayoría de las mallas, salvo en las mallas de puntos aleatorios y N090.

9.3 Estrella terminal

9.3.1 Tamaño de las estrellas cerradas

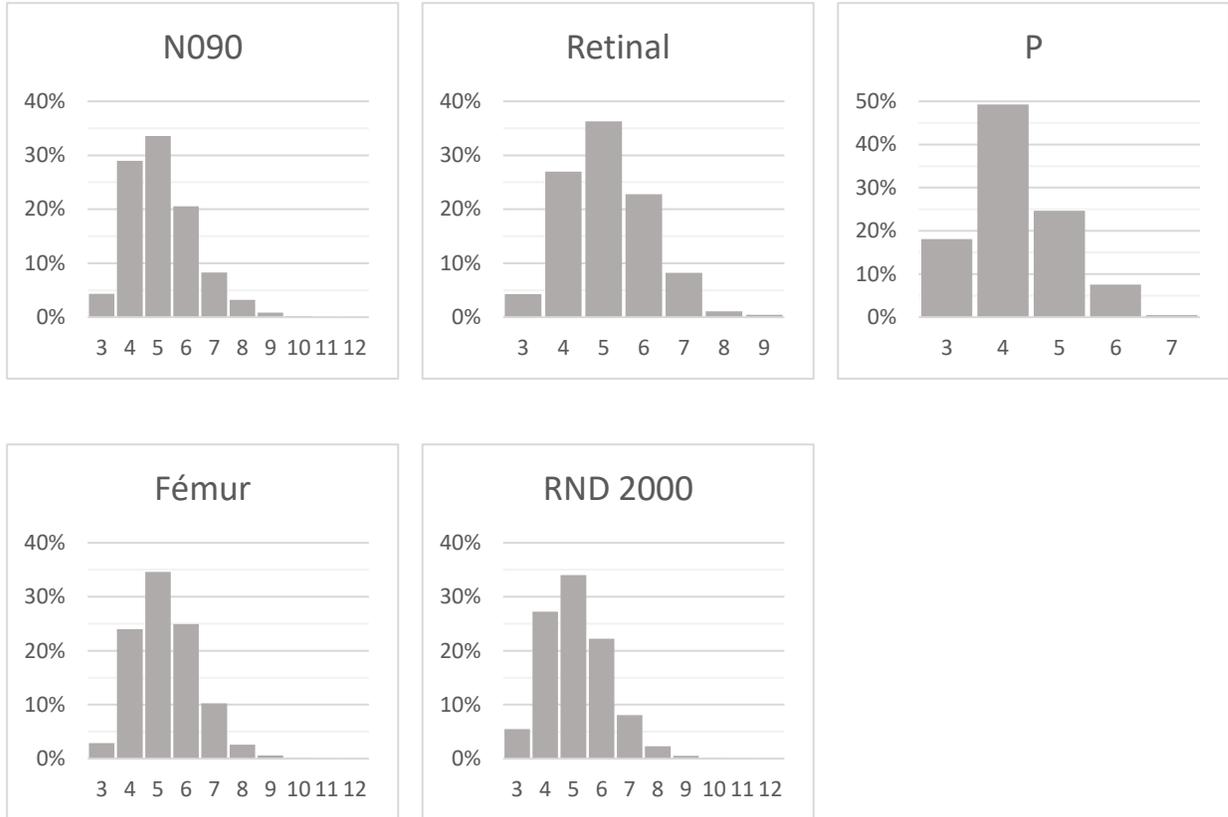


Figura 9.5: Distribución de los tamaños de las estrellas terminales cerradas.

La distribución de las estrellas terminales cerradas tiende a ser uniforme entre las distintas mallas de tetraedros, siendo las estrellas de tamaño 5,4 y 6 (ordenadas de la más a la menos común) las más comunes, concentrando alrededor de un 80% de todas las estrellas terminales cerradas.

Las estrellas cerradas de tamaño 7 o más son poco comunes, siendo menos comunes a mayor tamaño de la estrella.

9.3.2 Tamaño de las estrellas abiertas

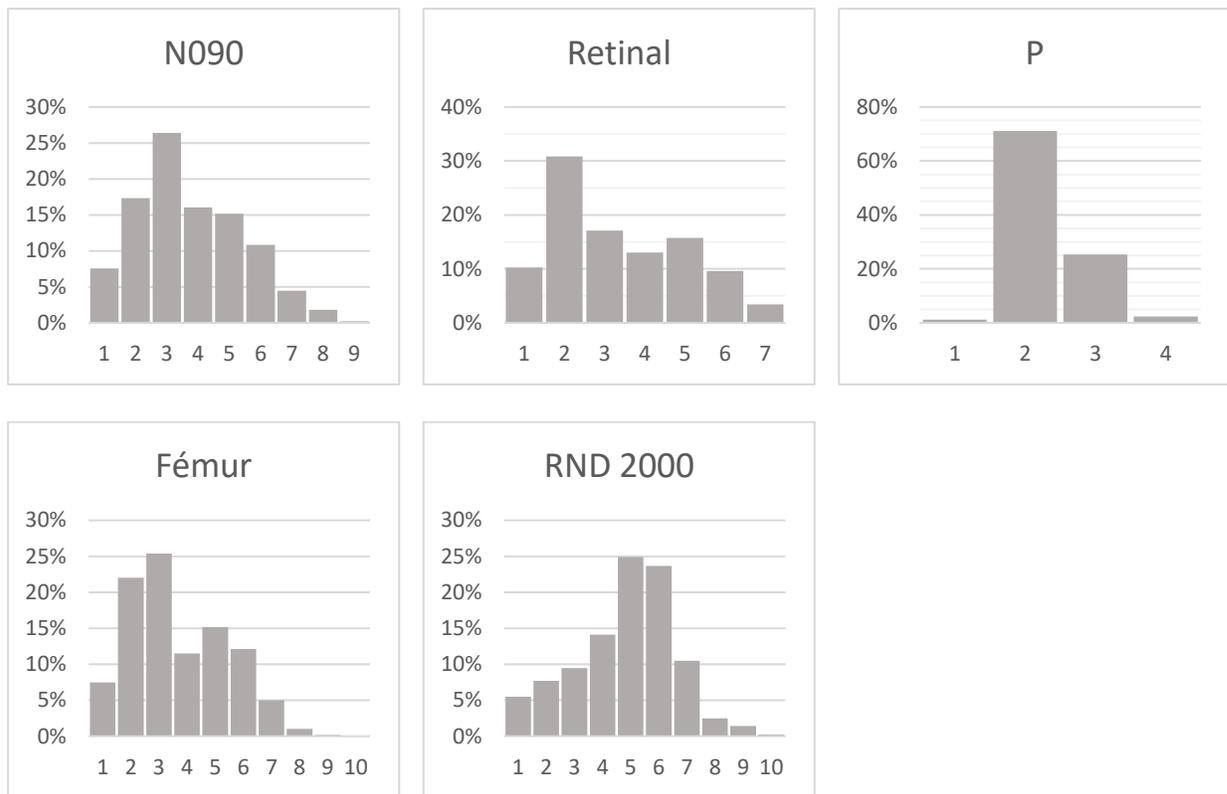


Figura 9.6: Distribución de los tamaños de las estrellas terminales abiertas.

La distribución del tamaño de las estrellas abiertas tiende a variar según la malla a mejorar, por lo que no se pueden realizar aseveraciones generales de estas.

9.4 Operaciones realizadas en las estrellas terminales.

Usando un factor de mejora $m = 1.1$ casi el 100% de las estrellas terminales abiertas no pueden ser mejoradas. La razón principal de esto es el limitado repertorio de operaciones en la estrella terminal abierta, que solo se remite a la inserción del punto medio de la arista terminal.

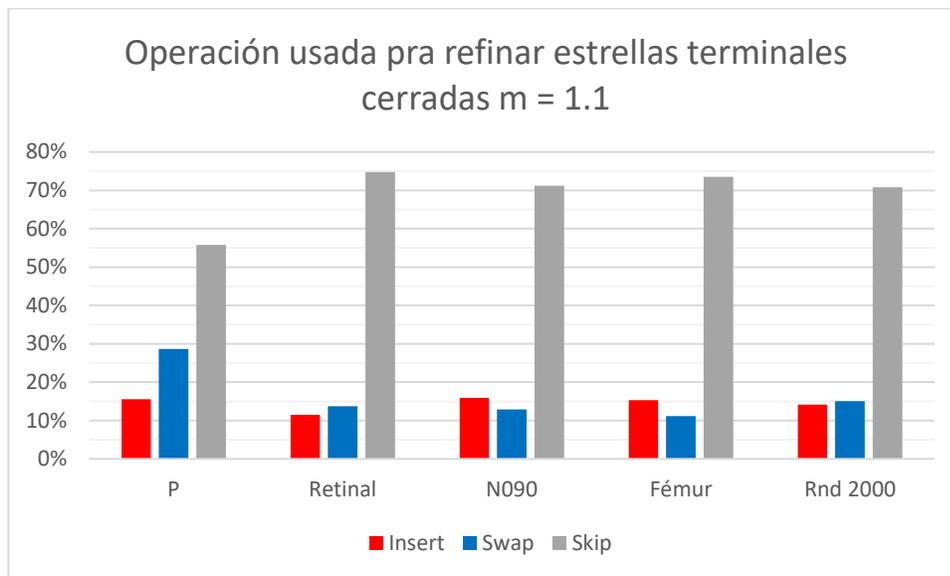


Figura 9.7: Distribución de la operación usada en las estrellas terminales cerradas.

En estrellas terminadas cerradas, entre un 70 a 75% son marcadas como no refinables (salvo en la malla P con un 55%).

El porcentaje de estrellas terminales mejoradas usando inserción es similar al porcentaje de estrellas terminales mejoradas usando intercambio de aristas. Sin embargo, la operación más usada varía dramáticamente según el tamaño de la estrella terminal, lo que es estudiado en la siguiente sección.

9.4.2 Operaciones usadas para mejorar las estrellas cerradas.

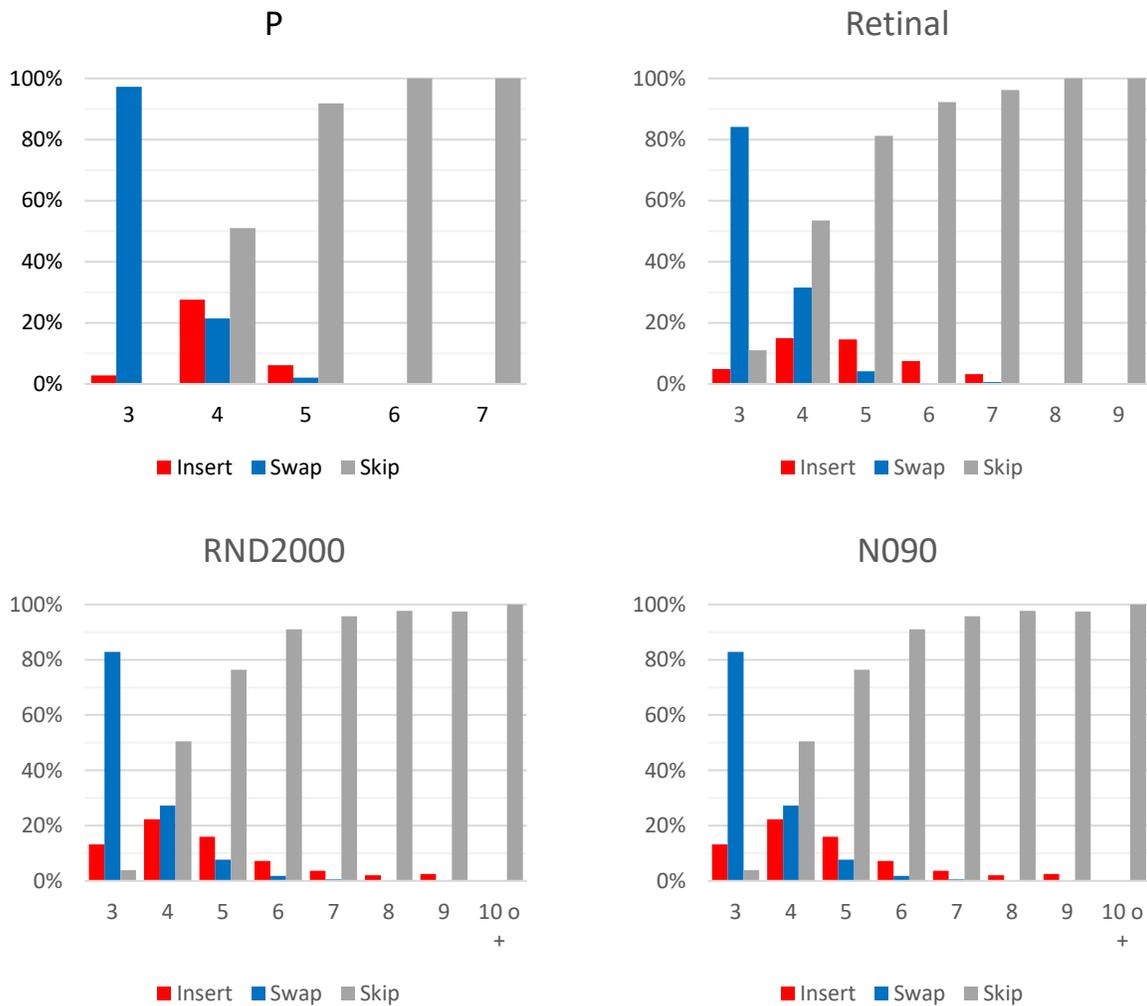


Figura 9.8: Distribución de las operaciones según el tamaño de la estrella terminal cerrada.

Dependiendo del tamaño de la estrella terminal, la operación predominante varía. Para las estrellas terminales de tamaño 3, casi el 100% de las mejoras se realiza realizando intercambio de aristas 3-2.

A mayor el tamaño de las estrellas terminales, menor es el porcentaje de elementos que son mejorados usando intercambio de aristas llegando a ser casi un 0% en las estrellas terminales cerradas de tamaño 6 o más.

La inserción del centroide, al igual que el intercambio de aristas, decrece en porcentaje a medida que el tamaño de la estrella terminal cerrada aumenta llegando a ser muy poco frecuente en las estrellas terminales de tamaño 8 o más.

9.5 Discusión sobre los resultados del análisis de las estrellas terminales.

Los resultados empíricos muestran que para procesar un Lepp en general se deben visitar pocas estrellas terminales (dos o menos en más de un 50% de los casos para el Lepp y el Lepp truncado), estos resultados son análogos a los resultados teóricos del tamaño promedio del Lepp en dos dimensiones, en donde se ha demostrado por Bedregal y Rivara que el tamaño promedio del Lepp2D es menor a 3 [2,19, 30]. Si bien en dos dimensiones se contaron los triángulos que contiene el Lepp (lo que es análogo a contar cada par de triángulos terminales), en tres dimensiones se contaron las estrellas terminales visitadas, pues cada estrella terminal procesada significa una operación de mejora realizada en la malla sin importar el tamaño de la estrella terminal.

El hecho de que las estrellas terminales abiertas no puedan ser mejoradas usando un factor de mejora de 1.1 (el porcentaje de es mínimo incluso con un factor de mejora de 1) es un fuerte indicador de que se requiere una nueva operación que pueda mejorar la calidad de las estrellas terminales abiertas. Lo mismo es cierto para las estrellas terminales grandes (de 6 o más elementos), las que tampoco pueden ser mejoradas eficientemente. El procesamiento de las estrellas terminales grandes y de las estrellas terminales abiertas toma entre un 30 y un 50% del tiempo de ejecución del algoritmo. Por lo que la versión actual del algoritmo puede ser optimizada evitando procesar estos elementos, con una pérdida mínima en la calidad de la malla final.

Con respecto a las estrellas terminales, en la práctica la mayoría (entre un 80% y 90% de las estrellas terminales) de las estrellas terminales se compone de 6 o menos tetraedros, además, en las pruebas realizadas durante el desarrollo de esta tesis la mayor estrella terminal tenía un tamaño de 14 tetraedros.

Capítulo 10

Conclusiones

Esta tesis se enfocó en el estudio de los algoritmos Lepp no Delaunay en 3 dimensiones y en el desarrollo de un algoritmo Lepp (Lepp Selectivo).

Los algoritmos Lepp se basan en el Lepp para encontrar las estrellas terminales, en las cuales se usan operaciones locales para mejorar la malla de tetraedros. Una implementación simple y eficiente del Lepp es crucial para poder crear algoritmos Lepp simples y rápidos. Usando la definición simplificada del Lepp (que sigue solo una arista más larga) y aprovechando el hecho de que en los algoritmos Lepp estudiados las operaciones usadas solo afectan la estrella terminal (conjunto de tetraedros que comparten una arista más larga), se desarrolló una implementación eficiente, recalculando el Lepp desde la penúltima arista más larga del Lepp anterior. Además, los resultados empíricos muestran que la cantidad de estrellas terminales visitadas para procesar el Lepp es en la mayoría de los casos baja (al menos un 50% de los Lepp es procesado luego de visitar dos estrellas terminales o menos)

Para determinar la calidad de un tetraedro se desarrolló una medida de calidad que simultáneamente utiliza los ángulos diedros cercanos a 0° y los cercanos a 180° , a diferencia de medidas que solo usan el mínimo o el máximo, permite penalizar ambos tipos de tetraedros a la vez.

El algoritmo Lepp Selectivo es un algoritmo simple y efectivo que permite el mejoramiento de mallas de tetraedros trabajando con operaciones locales sobre las estrellas terminales usando la inserción de puntos y el intercambio de aristas. El Lepp selectivo mejora la calidad de las mallas reduciendo el porcentaje de tetraedros de mala calidad a entre un 40% y un 70% del porcentaje original, con una razón entre el tamaño de la malla final y la malla original oscila entre 1.1 y 2.93 encontrándose típicamente por debajo de 2. Usando una versión más agresiva del Lepp Selectivo el porcentaje de tetraedros de mala calidad está entre un 20% y un 50% del porcentaje original, con una razón que oscila entre 1.5 y 7.5, encontrándose típicamente en valores cercanos a 4.

El costo computacional del algoritmo Lepp Selectivo es bajo, siendo la mayoría de las mallas procesadas en 30 segundos o menos, y 141 segundos para el caso más lento (para la malla más grande, inicialmente de 52848 tetraedros) en un computador portátil de gama media, el mayor tiempo es de 7 a 42 veces menor a los tiempos presentados por Klingner y Shewchuk que tardan de 950 a 5823 segundos para una malla de 50000 tetraedros, si bien este algoritmo obtiene mejores resultados, tardan un tiempo considerable, otras referencias no entregan un tiempo de procesamiento.

El algoritmo Lepp Selectivo mejoró la calidad de todas las mallas de prueba, obteniendo los mejores resultados en mallas con pocos o ningún punto interior, que son casos de interés en la práctica.

Empíricamente, se mostró que las estrellas terminales son en su mayoría cerradas (con su arista compartida en el interior de la malla) y de tamaño reducido (cerca del 90% de las estrellas cerradas tienen 6 o menos tetraedros), donde las operaciones de mejoramiento utilizadas son más efectivas. Para estrellas con tamaños superiores a 6, las operaciones utilizadas son poco efectivas y pueden ser omitidas para mejorar el tiempo de ejecución del algoritmo en hasta un 50%.

Ya que la refinación y la mejora en los algoritmos Lepp afecta localmente la malla en las estrellas terminales, es un algoritmo apropiado para ser paralelizado, pues es posible procesar múltiples estrellas terminales en paralelo sin afectar la integridad del algoritmo.

El Lepp selectivo tiene potencial para convertirse en un algoritmo sólido de mejoramiento de mallas de tetraedros si se añade una operación adecuada para el mejoramiento de los tetraedros de borde y de estrellas terminales con tamaño superior a 6.

Bibliografía

- [1] Balboa F., Rodriguez-Moreno P., Rivara MC. (2019) Terminal Star Operations Algorithm for Tetrahedral Mesh Improvement. In: Roca X., Loseille A. (eds) 27th International Meshing Roundtable. IMR 2018. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 127. Springer.
- [2] Bedregal, C., & Rivara, M. C. (2014). Longest-edge algorithms for size-optimal refinement of triangulations. *Computer-Aided Design*, 46, 246-251.
- [3] Bedregal, C., and Rivara, M. C. (2015). New results on Lepp-Delaunay algorithm for quality triangulations. *Procedia Engineering*, 124, 317-329.
- [4] Bowyer, A. (1981). Computing dirichlet tessellations. *The computer journal*, 24(2), 162-166.
- [5] Chen, M. B. (2011, May). A parallel 3D Delaunay triangulation method. In *Parallel and Distributed Processing with Applications (ISPA), 2011 IEEE 9th International Symposium on* (pp. 52-56). IEEE.
- [6] Delanue, B. (1934). Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, 1934, no. 6, 793–800
- [7] Field, D. A. (1988). Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. *Communications in applied numerical methods*, 4(6), 709-712.
- [8] Frei, Walter. “Improving Your Meshing with Swept Meshes.” COMSOL Multiphysics®, 2 Sept. 2015, www.comsol.com/blogs/improving-your-meshing-with-swept-meshes/.
- [9] Freitag, L. A., and Ollivier-Gooch, C. (1997). Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(21), 3979-4002.
- [10] Freitag, L. A., and Plassmann, P. (2000). Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1-2), 109-125.
- [11] Frey, P. J., Borouchaki, H., and George, P. L. (1998). 3D Delaunay mesh generation coupled with an advancing-front approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157(1-2), 115-131.
- [12] George, P. L., and Borouchaki, H. (2003, September). Back to Edge Flips in 3 Dimensions. In *IMR* (pp. 393-402).
- [13] Hu, R., Pang, S., Chen, X., Liang, L., and Shao, X. (2017). An octree-based adaptive mesh refinement method for three-dimensional modeling of keyhole mode laser welding. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115, 258-263.

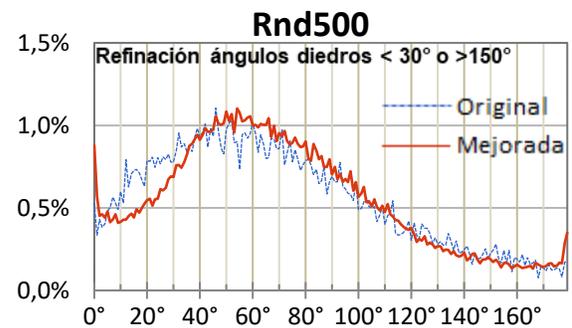
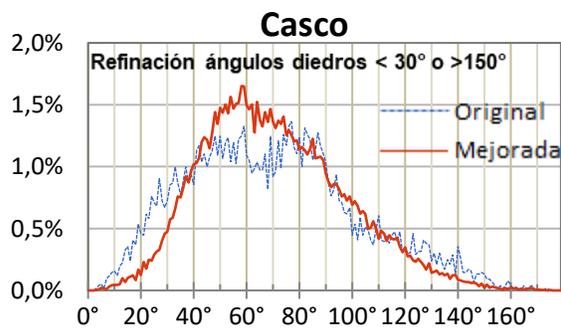
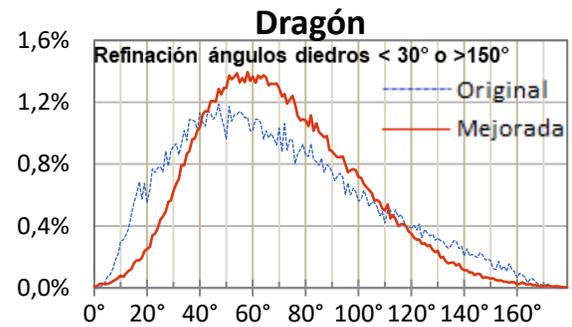
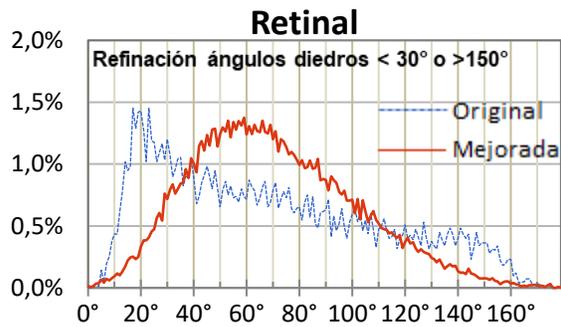
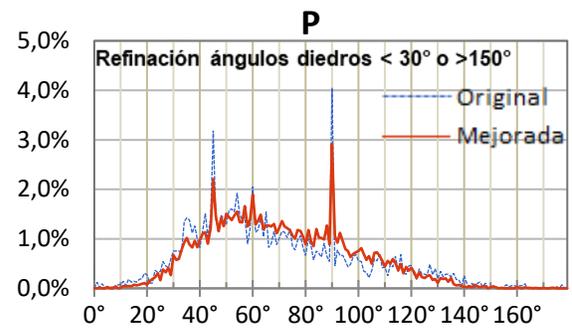
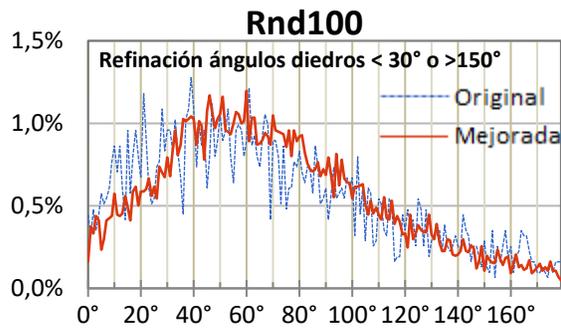
- [14] Klingner, B. M., and Shewchuk, J. R. (2008). Aggressive tetrahedral mesh improvement. In Proceedings of the 16th international meshing roundtable (pp. 3-23). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [15] Knupp, P. M. (2001). Algebraic mesh quality metrics. *SIAM journal on scientific computing*, 23(1), 193-218.
- [16] Knupp, P. M. (2001). Hexahedral and tetrahedral mesh untangling. *Engineering with Computers*, 17(3), 261-268.
- [17] Lawson, C. L. (1986). Properties of n-dimensional triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 3(4), 231-246.
- [18] Misztal, M. K., Bærentzen, J. A., Anton, F., and Erleben, K. (2009). Tetrahedral mesh improvement using multi-face retriangulation. In Proceedings of the 18th international meshing roundtable (pp. 539-555). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [19] Rivara MC., Rodriguez-Moreno P.A. (2019) Tuned Terminal Triangles Centroid Delaunay Algorithm for Quality Triangulation. In: Roca X., Loseille A. (eds) 27th International Meshing Roundtable. IMR 2018. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 127. Springer, Cham.
- [20] Rivara, M. C. (1984). Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques. *International journal for numerical methods in Engineering*, 20(4), 745-756.
- [21] Rivara, M. C. (1984). Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(3), 604-613.
- [22] Rivara, M. C. (1997). New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations. *International journal for numerical methods in Engineering*, 40(18), 3313-3324.
- [23] Rivara, M. C., and Calderon, C. (2010). Lepp terminal centroid method for quality triangulation. *Computer-Aided Design*, 42(1), 58-66.
- [24] Rivara, M. C., and Palma, M. (1997). New Lepp-algorithms for quality polygon and volume triangulation: Implementation issues and practical behavior. *ASME APPLIED MECHANICS DIVISION-PUBLICATIONS-AMD*, 220, 1-8.
- [25] Rivara, M. C., Calderon, C., Fedorov, A., and Chrisochoides, N. (2006). Parallel decoupled terminal-edge bisection method for 3D mesh generation. *Engineering with Computers*, 22(2), 111-119.
- [26] Rivara, M. C., & Levin, C. (1992). A 3-D refinement algorithm suitable for adaptive and multi-grid techniques. *Communications in Applied Numerical Methods*, 8(5), 281-290.
- [27] Rodriguez, P. (2016). Parallel Lepp-based algorithms for the generation and refinement of triangulations. Tesis de doctorado en ciencias mención computación. Universidad de Chile, Santiago, Chile.

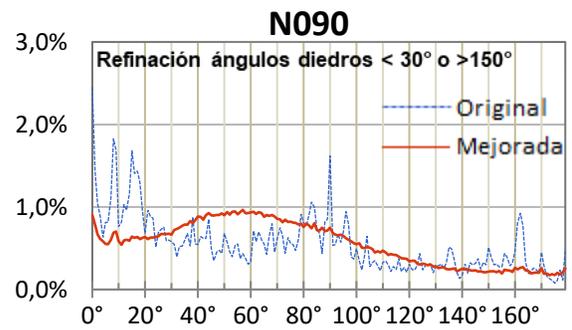
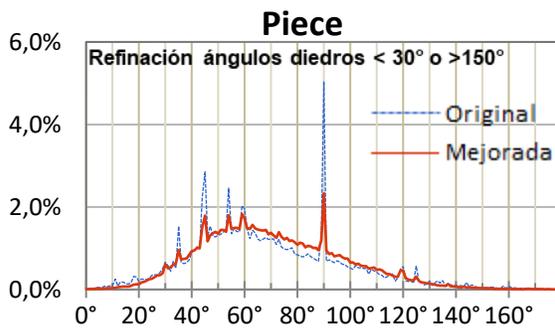
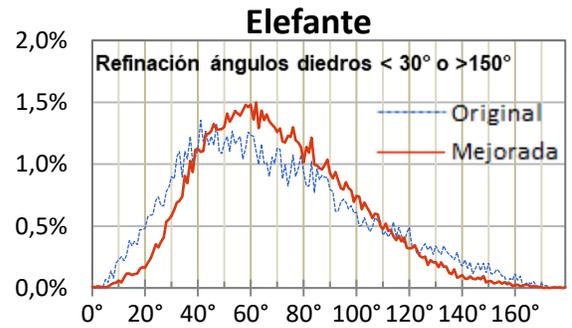
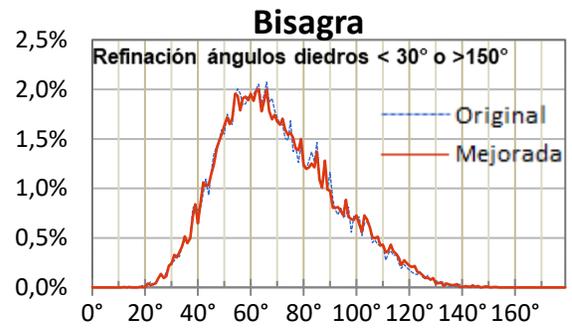
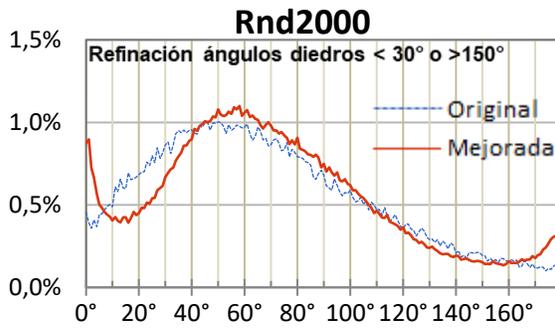
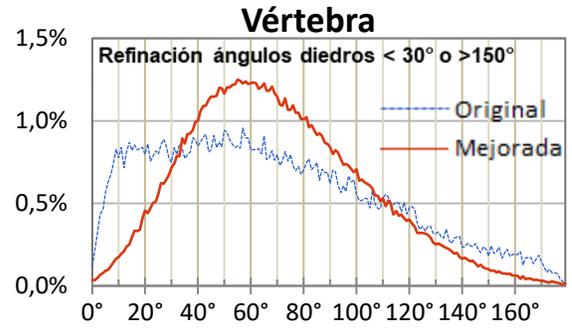
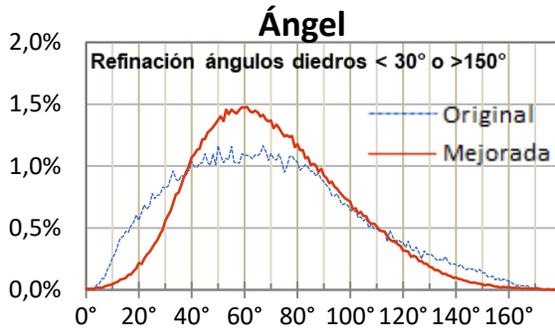
- [28] Rodriguez, P. A., and Rivara, M. C. (2014). Multithread lepp-bisection algorithm for tetrahedral meshes. In Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable (pp. 525-540). Springer, Cham.
- [29] Rodriguez, P. A., and Rivara, M. C. (2014, November). Point Selection Strategies for Lepp-Based Refinement Algorithms and New (Non-Delaunay) Lepp-Based Algorithms. In Chilean Computer Science Society (SCCC), 2014 33rd International Conference of the (pp. 98-101). IEEE.
- [30] Rodriguez-Moreno, P. A., and Rivara, M. C. (2017). Lepp-WCentroid method for tetrahedral mesh improvement.
- [31] Romanoni, A., Delaunoy, A., Pollefeys, M., and Matteucci, M. (2016). Automatic 3d reconstruction of manifold meshes via delaunay triangulation and mesh sweeping. arXiv preprint arXiv:1604.06258.
- [32] Ruppert, J. (1995). A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *Journal of algorithms*, 18(3), 548-585.
- [33] Sastry, S. P. (2015). Snow Globe: An Advancing-Front 3D Delaunay Mesh Refinement Algorithm. arXiv preprint arXiv:1508.00060.
- [34] Segura, R. J., and Feito, F. R. (1998). An algorithm for determining intersection segment-polygon in 3D. *Computers and Graphics*, 22(5), 587-592.
- [35] Shewchuk, J. R. (1998, June). Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement. In Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry (pp. 86-95). ACM.
- [36] Shewchuk, J., Dey, T. K., and Cheng, S. W. (2016). *Delaunay mesh generation*. Chapman and Hall/CRC.

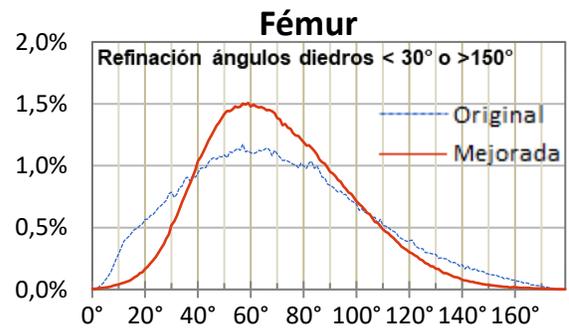
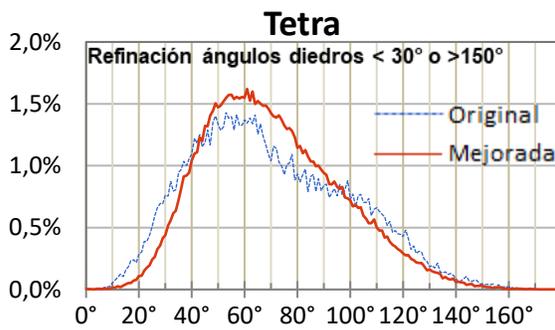
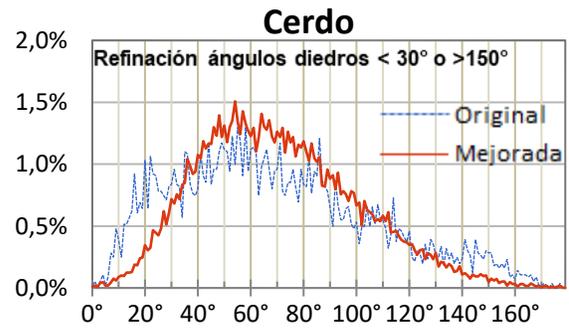
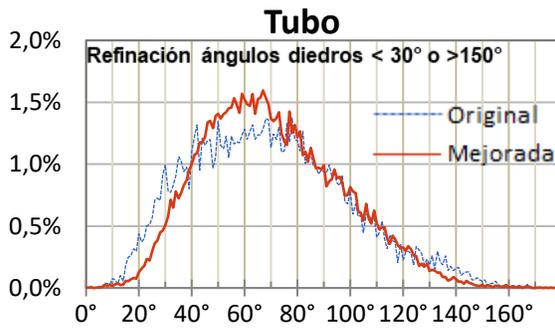
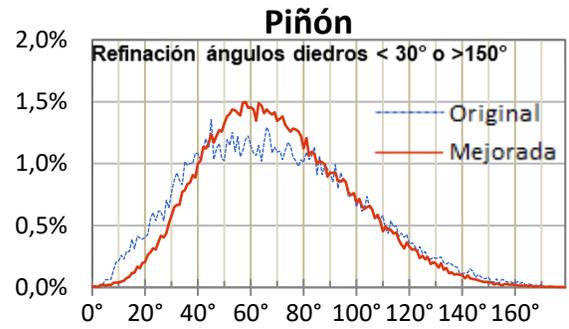
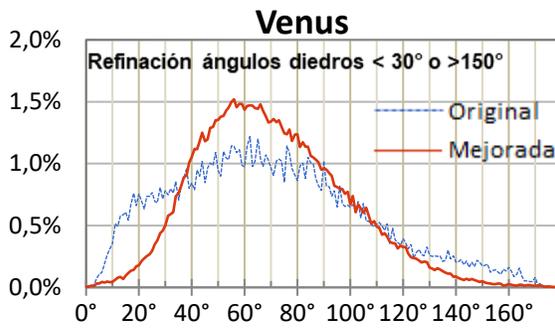
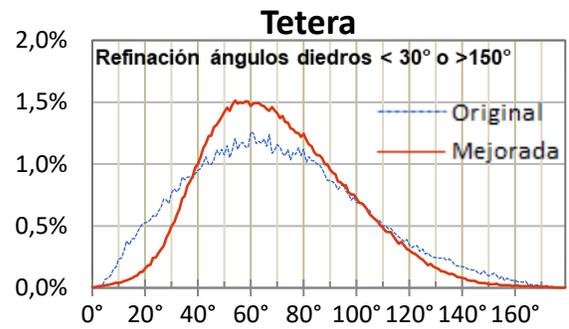
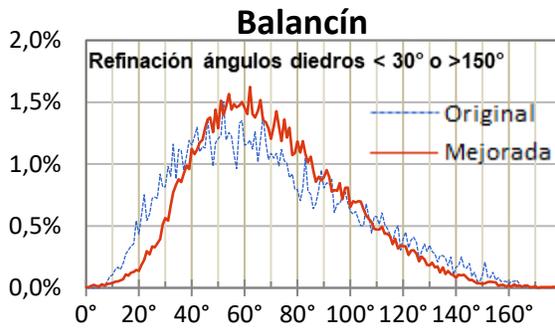
Anexos

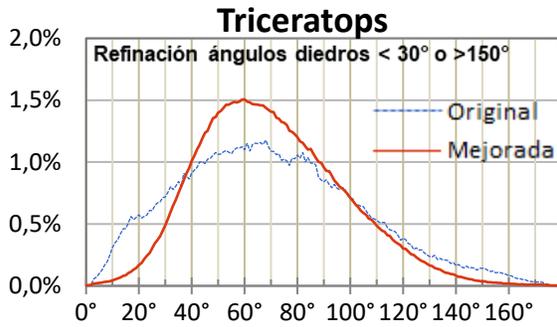
Los histogramas presentados en los anexos

Anexo A: Histogramas ángulos diedros Lepp-Centroide

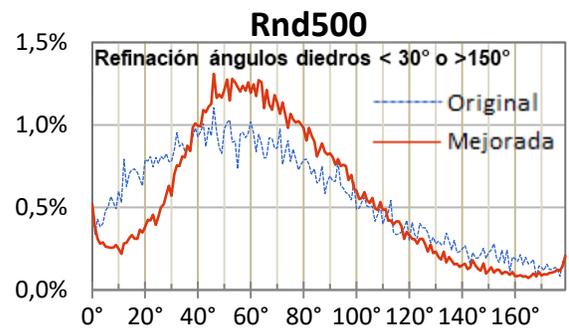
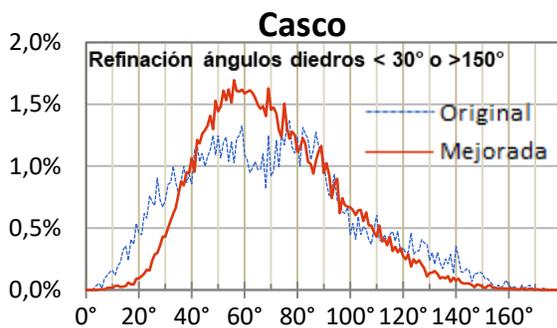
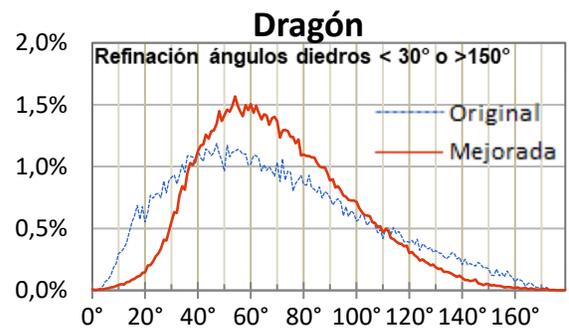
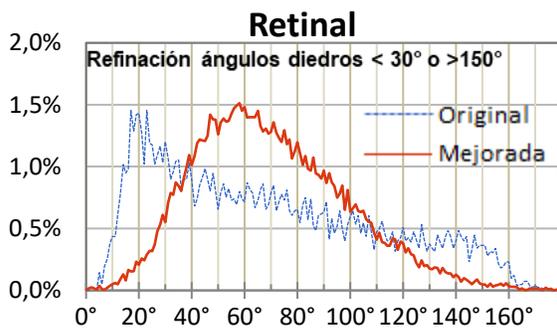
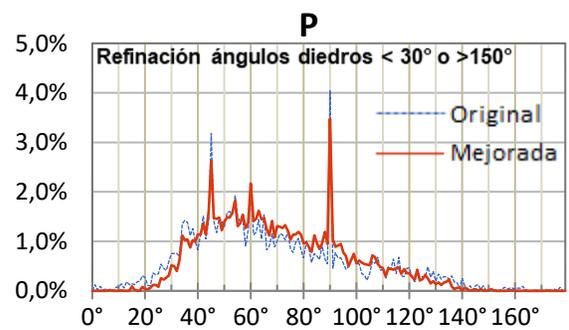
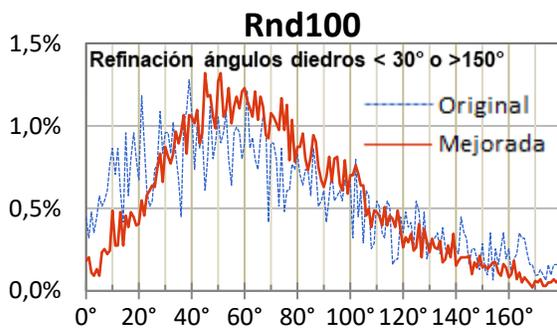


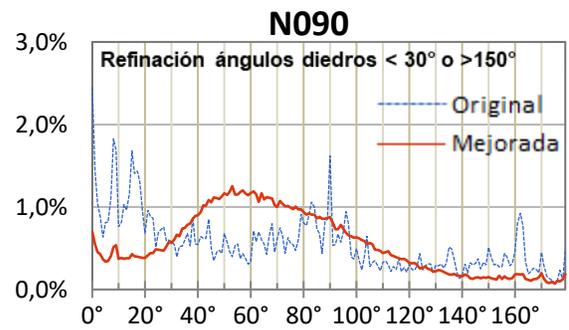
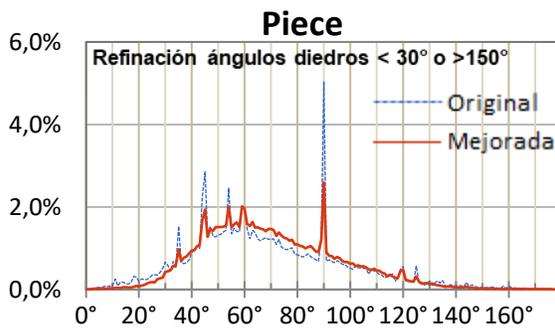
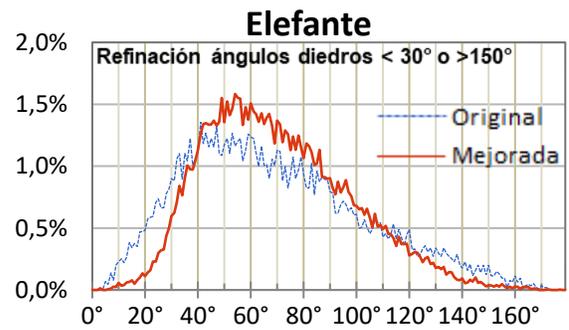
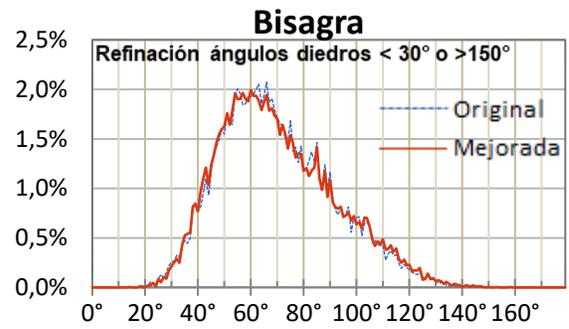
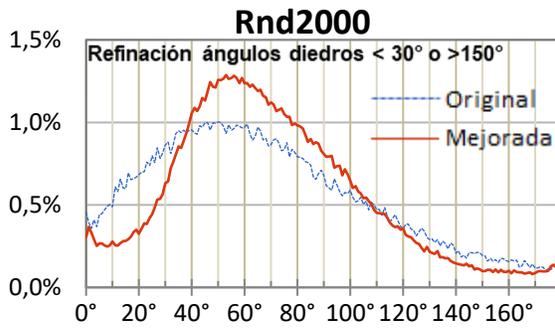
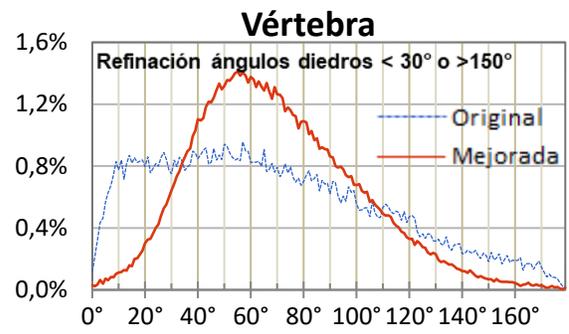
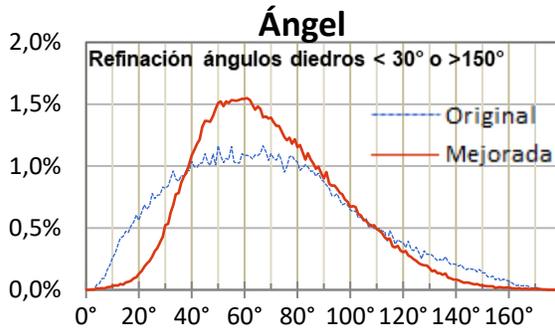


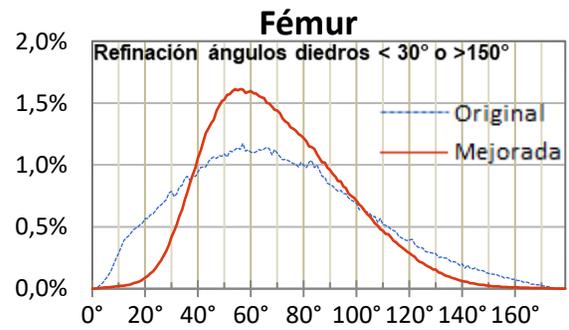
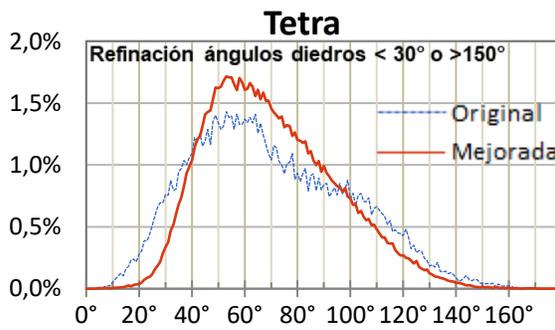
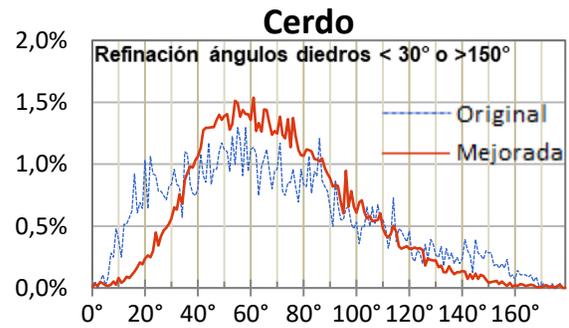
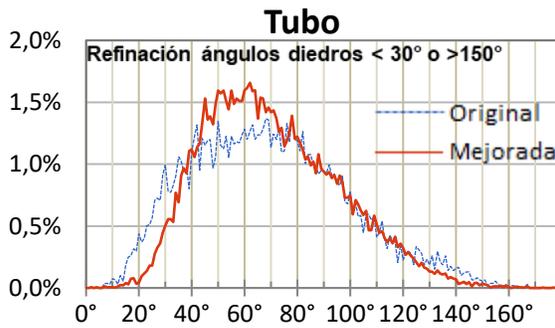
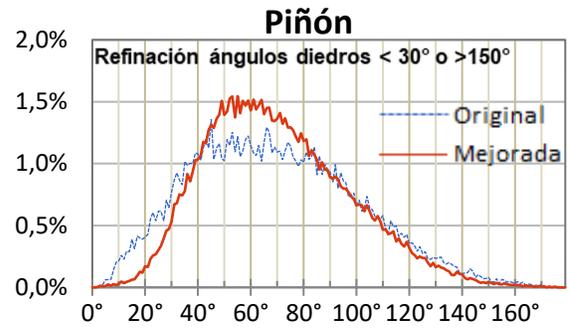
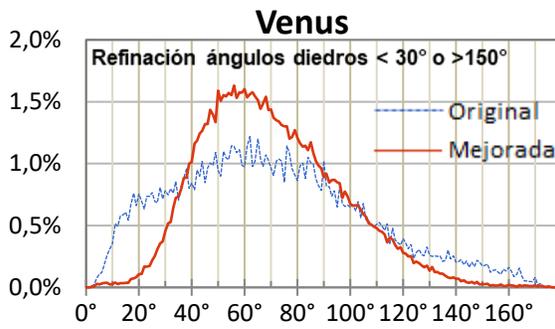
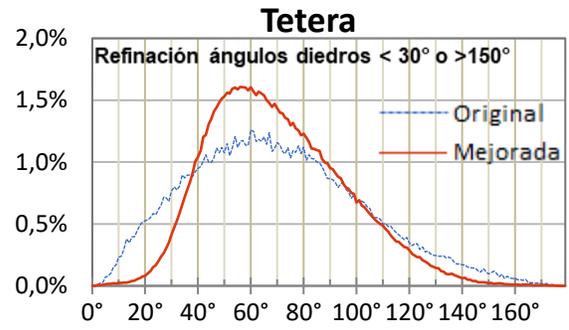
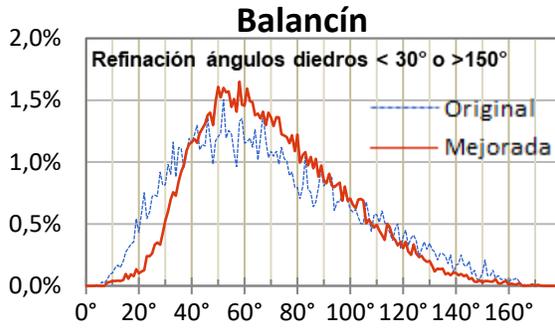


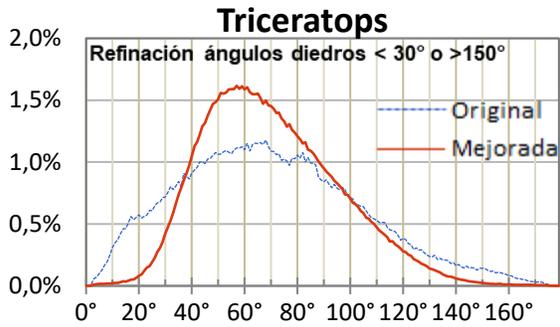


Anexo B: Histogramas ángulos diedros Lepp-Swap/Centroid

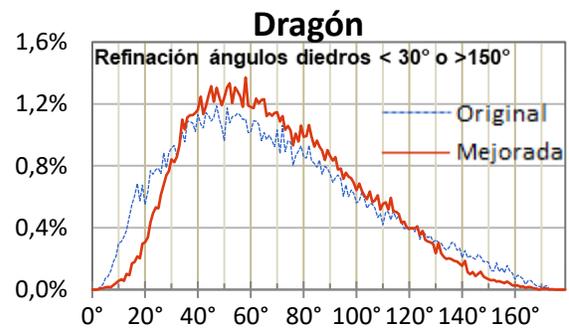
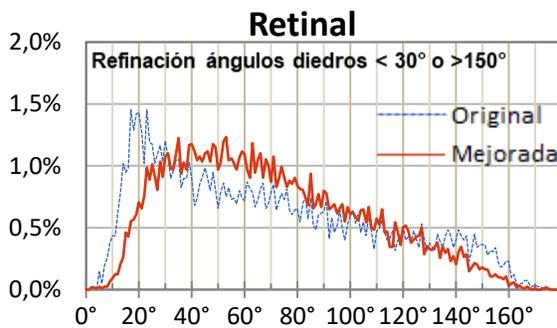
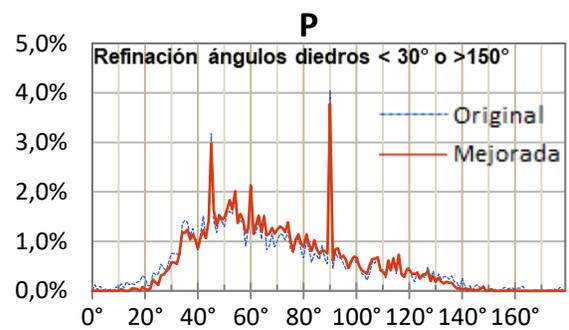
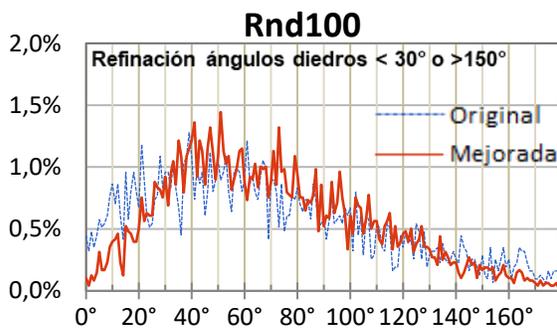


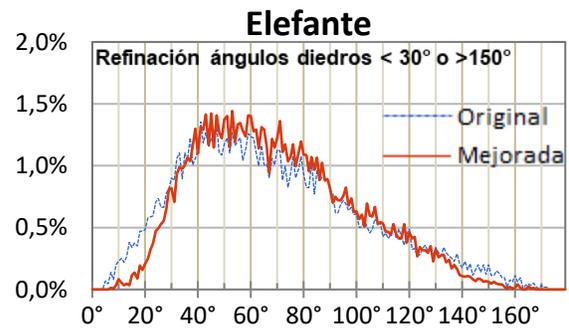
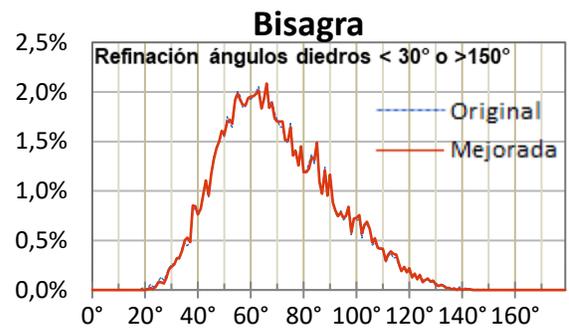
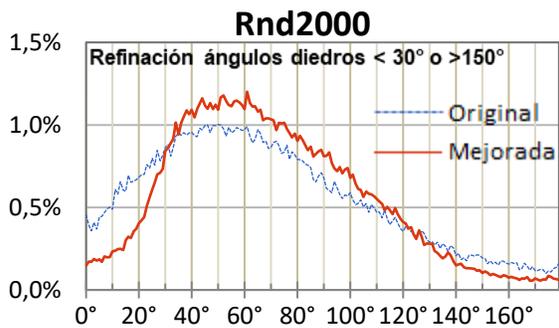
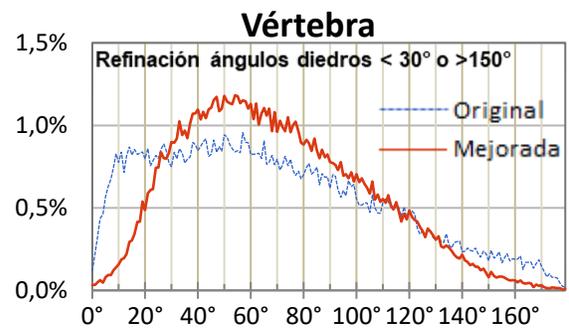
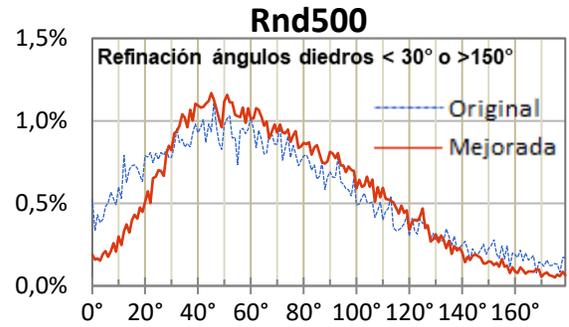
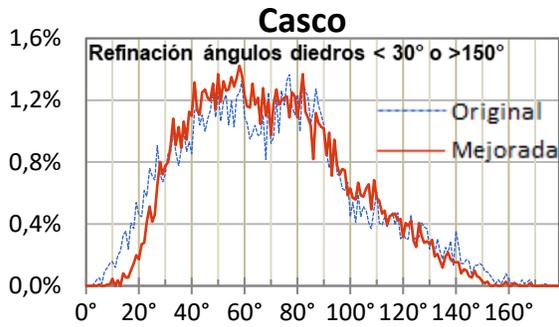


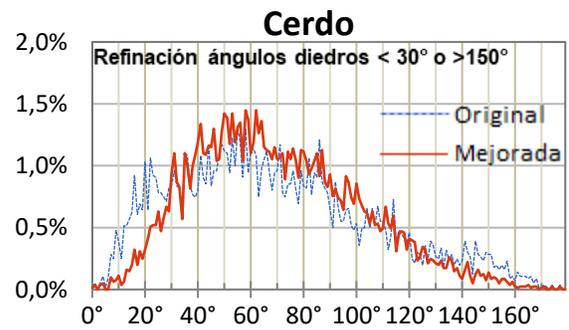
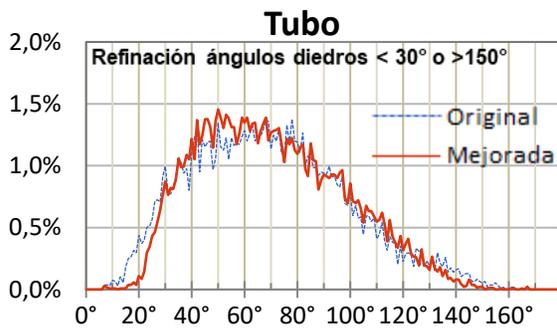
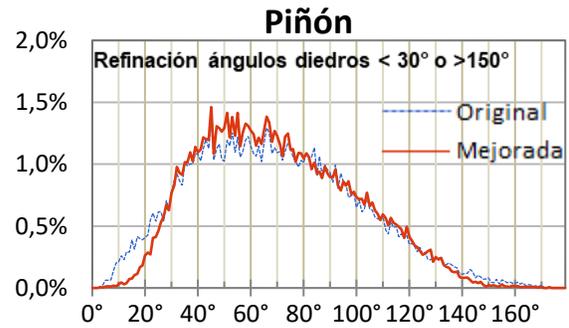
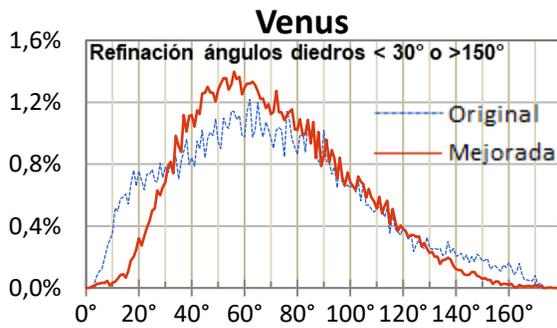
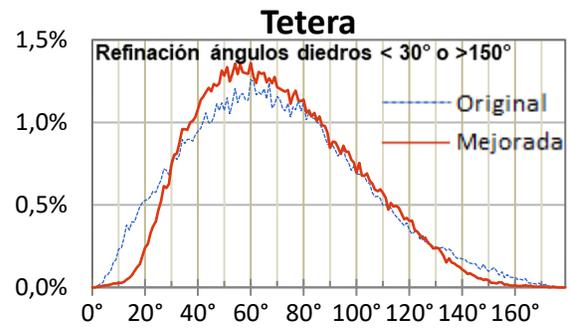
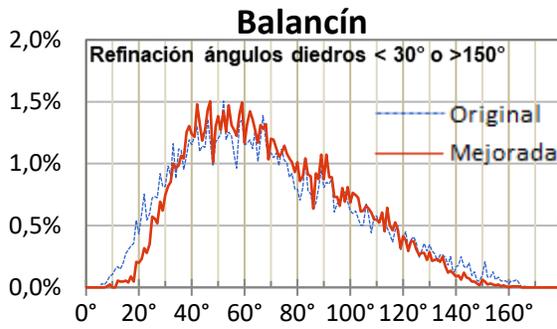
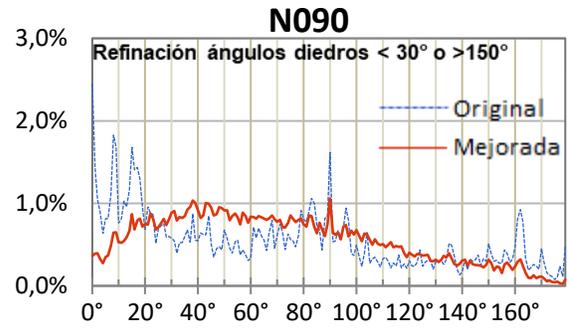
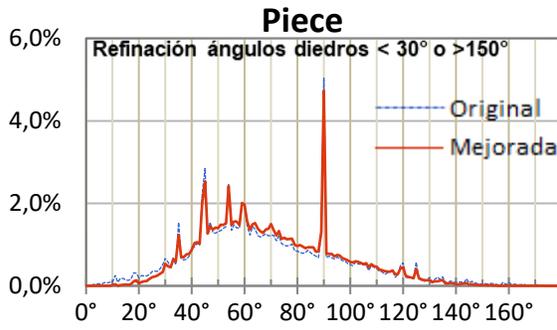


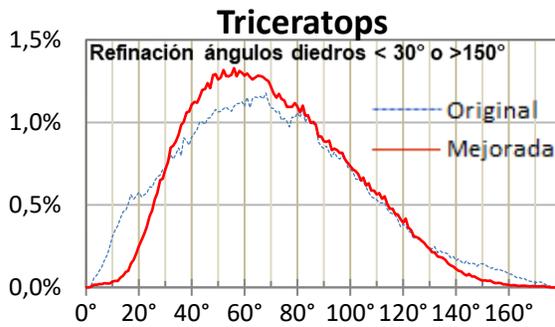
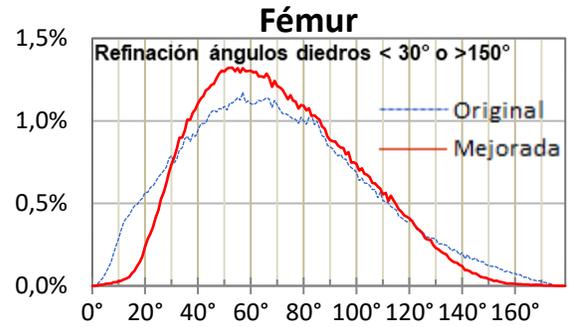
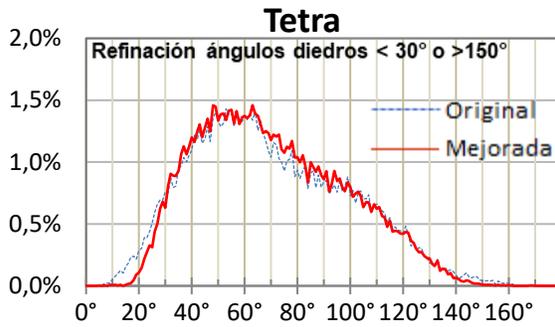


Anexo C: Histogramas ángulos diedros Lepp Selectivo

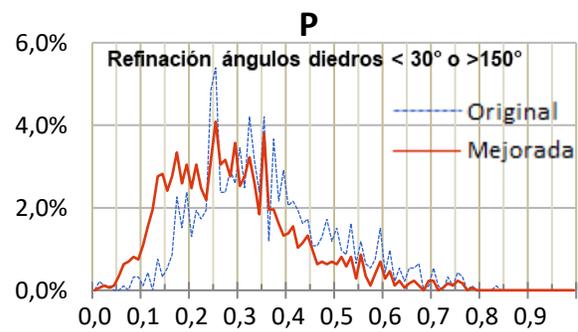
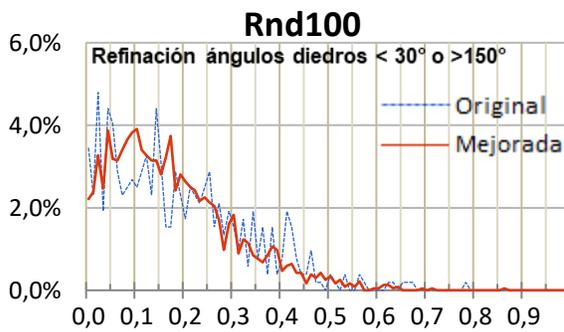


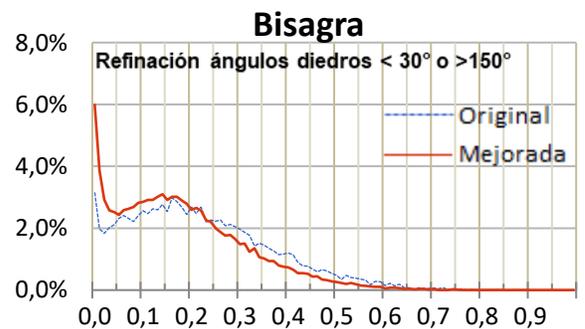
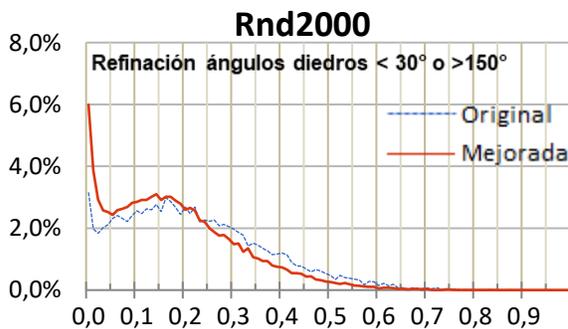
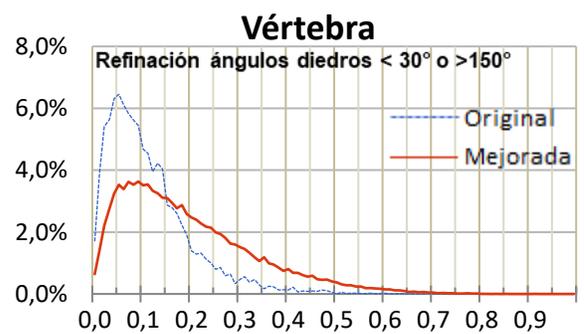
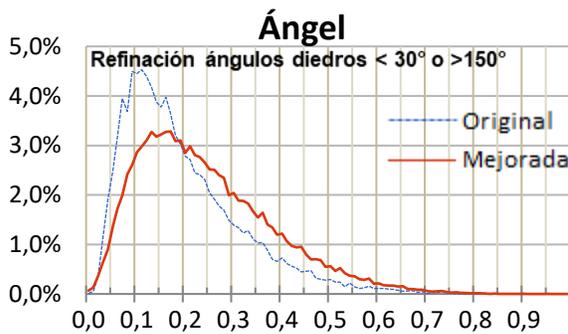
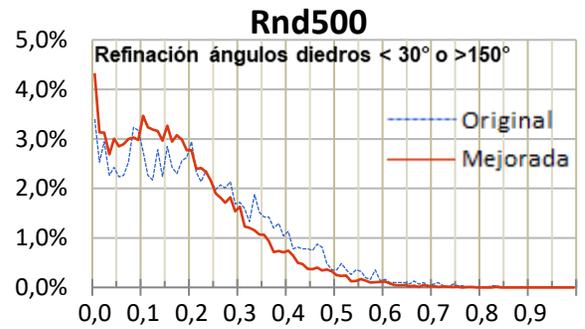
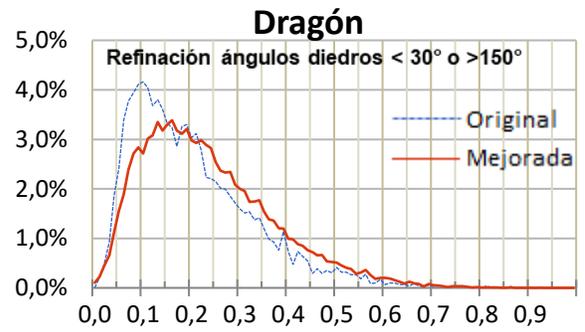
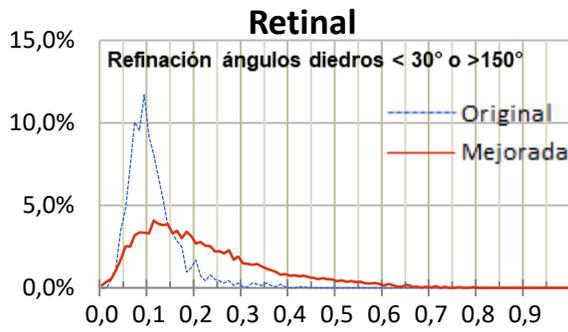


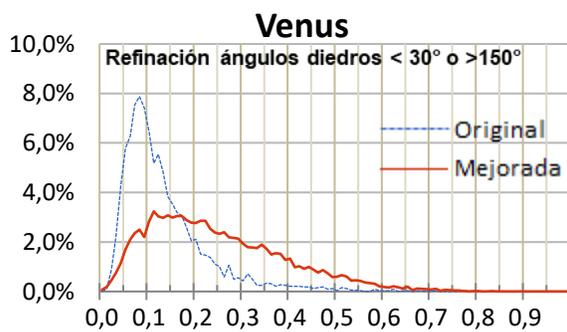
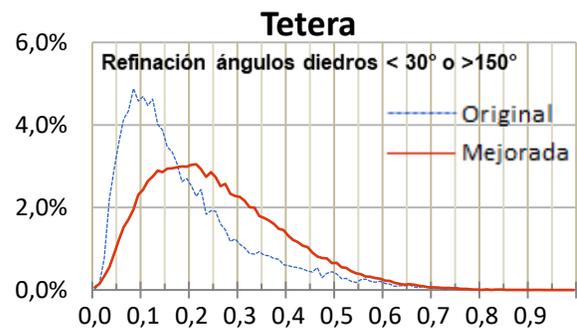
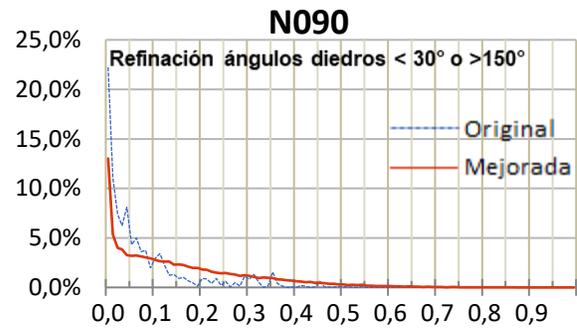
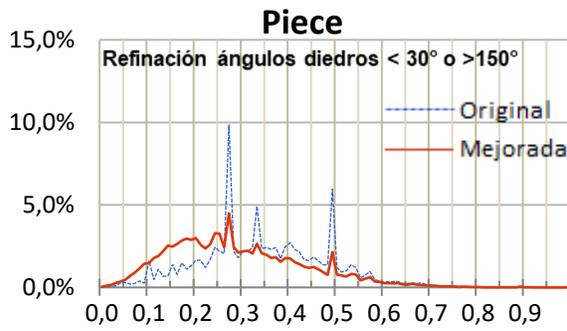
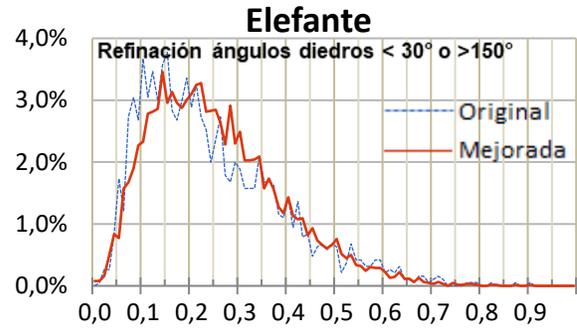


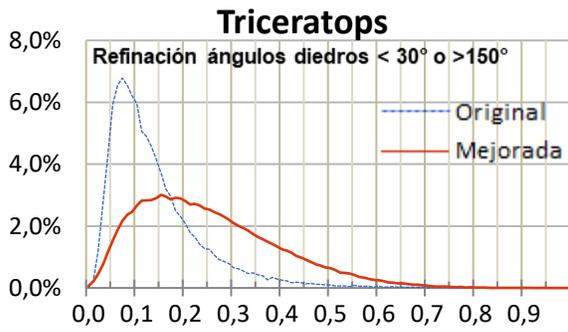
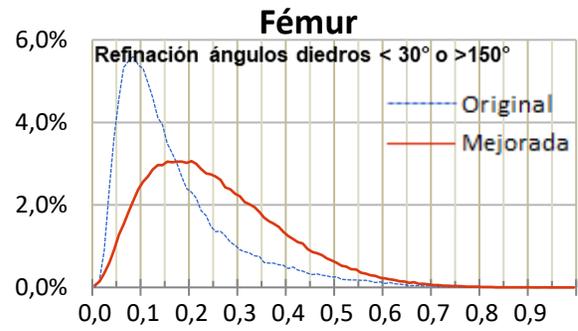
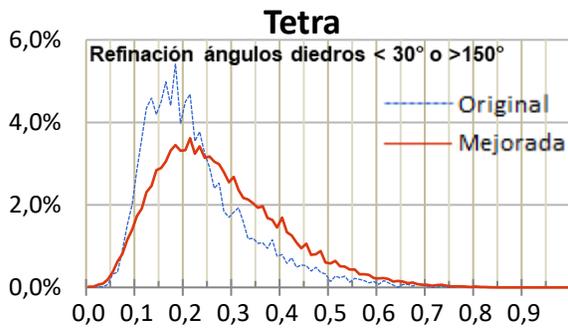
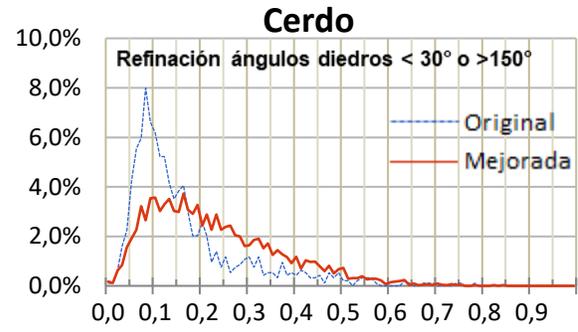
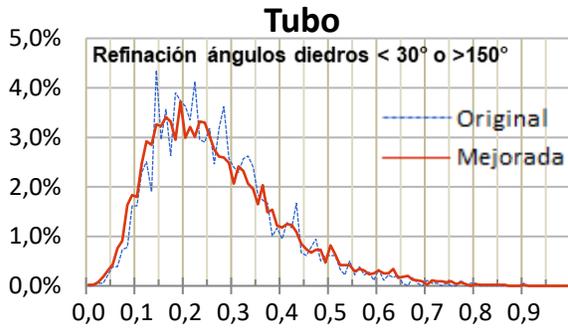


Anexo D: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp-Centroide

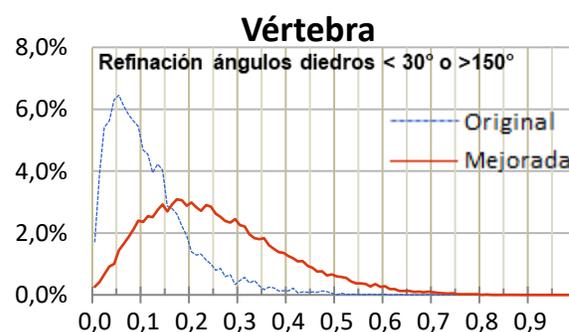
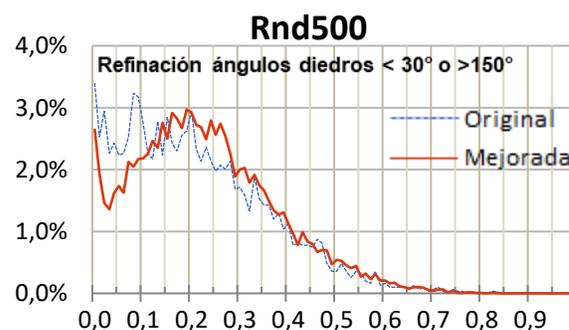
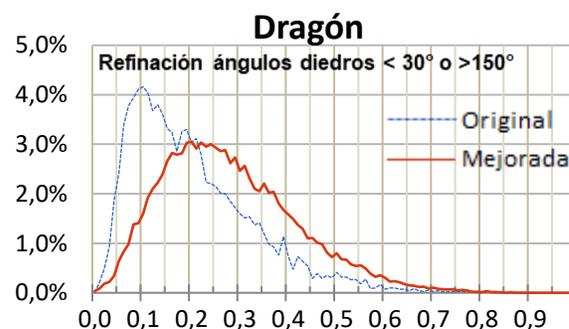
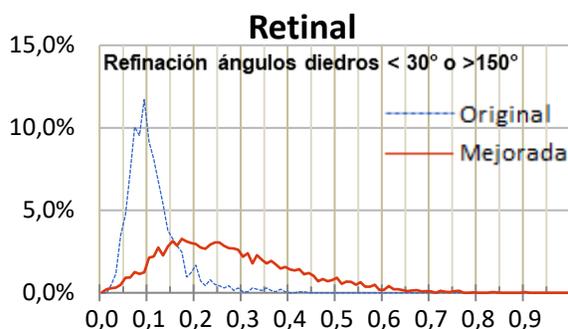
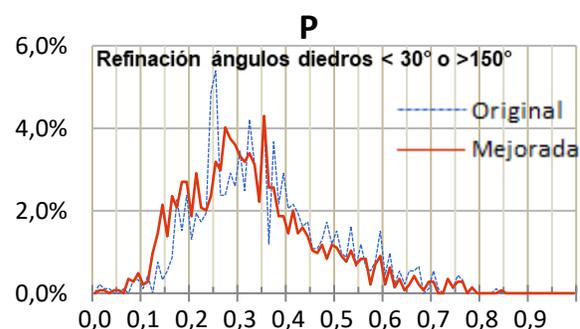
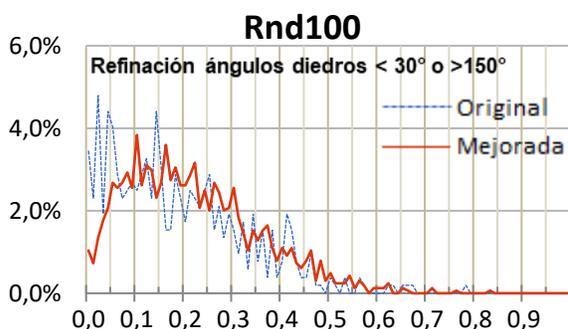


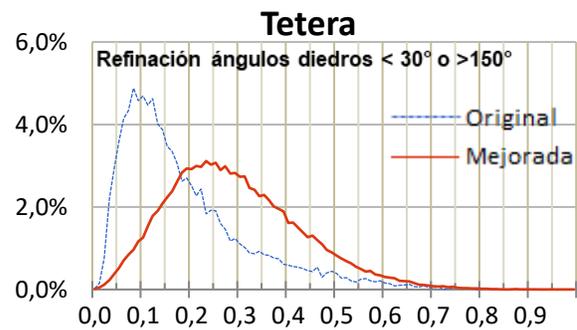
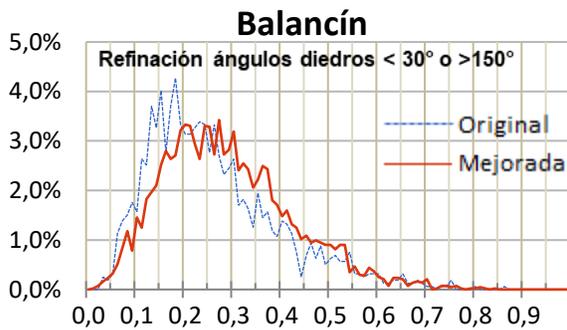
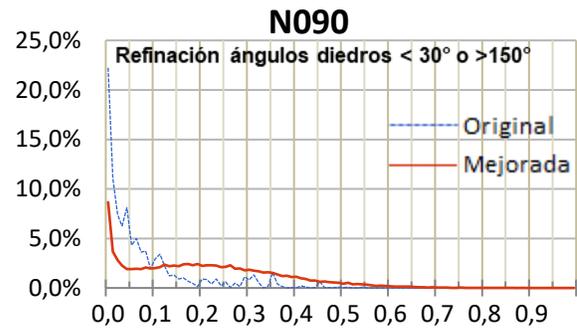
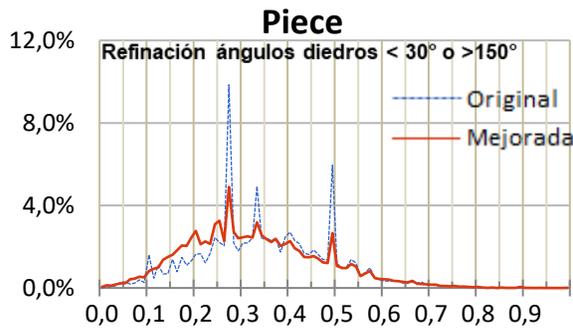
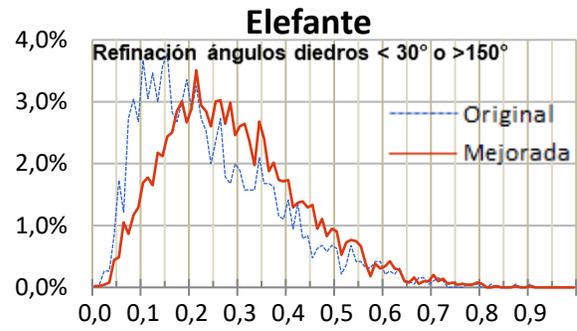
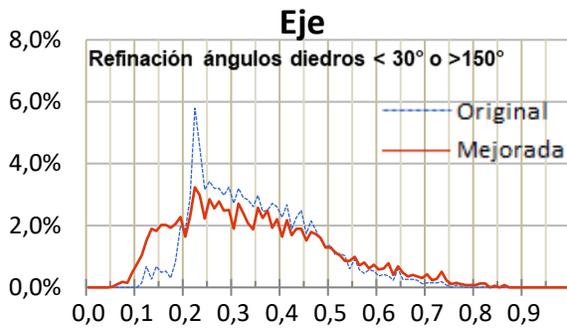
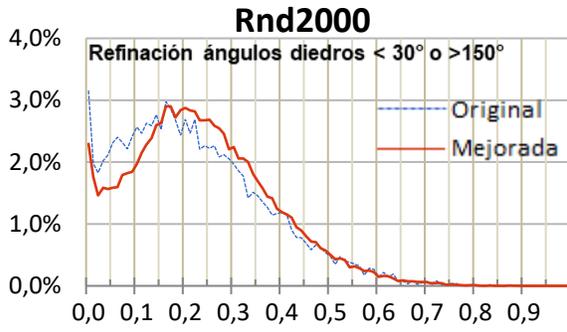


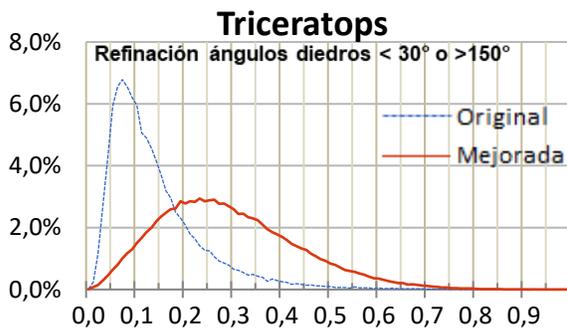
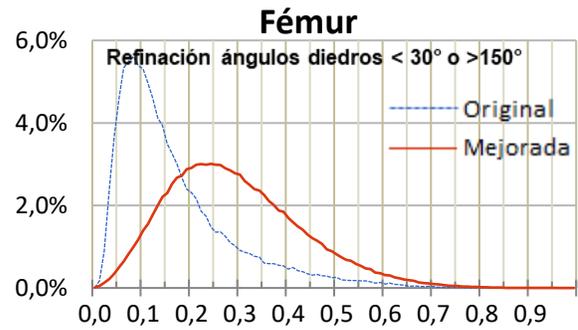
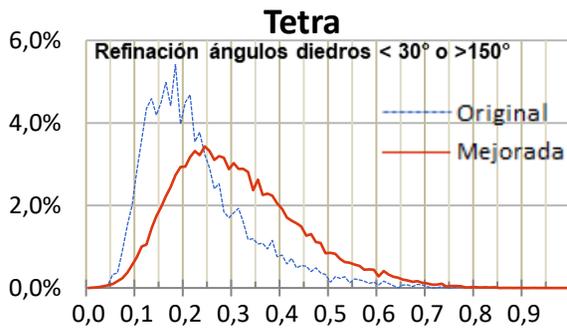
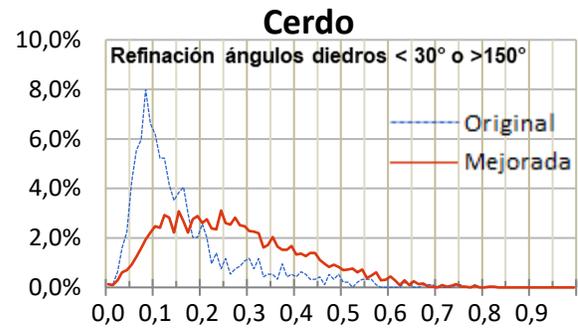
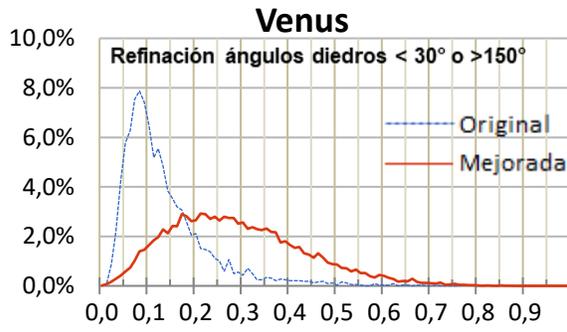




Anexo E: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp-Swap/Centroid







Anexo F: Histogramas Calidad basada en el Volumen algoritmo Lepp Selectivo

