



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

**OPTIMIZACIÓN DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE BIMODAL DE  
PASAJEROS USANDO TAXIS COMPARTIDOS Y METRO**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

**JAVIERA ISABEL FIGOLS ABARCA**

PROFESOR GUÍA:  
MARCOS KIWI KRAUSKOPF

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN  
IVÁN RAPAPORT ZIMERMANN

SANTIAGO DE CHILE

2020

---

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERÍA  
POR: JAVIERA ISABEL FIGOLS ABARCA  
FECHA: 2020  
PROF. GUÍA: MARCOS KIWI KRAUSKOPF

## **OPTIMIZACIÓN DE UN SISTEMA DE TRANSPORTE BIMODAL DE PASAJEROS USANDO TAXIS COMPARTIDOS Y METRO**

El problema que motivó este trabajo, llamado problema del Traslado de Personal Operativo (TPO), es la planificación de rutas e itinerarios de vehículos que, en conjunto con la utilización de una red de transporte de ruta fija, deben permitir que el personal de una empresa se traslade de ida y regreso entre su domicilio y el lugar de trabajo, minimizando el costo total del servicio. El estudio se realizó considerando a los trabajadores de Metro, los cuales desempeñan labores en las estaciones de trenes de dicha empresa, y para el traslado se contempló un sistema integrado de transporte conformado por un servicio de radiotaxis y la red de metro de Santiago.

Para resolver el problema del TPO se planteó un programa lineal entero (PLE) cuyo proceso de resolución consta de 3 etapas: la primera, de precómputo, en que se determinan las mejores opciones de viaje para los pasajeros una vez que el vehículo se ha detenido en una estación de metro; la segunda, en la que influyen los horarios y domicilios de los pasajeros, donde se calculan los costos asociados a las variables del programa; y la última de resolución del PLE con los datos obtenidos. El TPO fue resuelto para instancias artificiales que captaron las principales características de la operación diaria de Metro. En todas ellas, las rutas e itinerarios obtenidos permitieron el traslado del total de trabajadores bajo el cumplimiento de horarios de ingreso laboral y tiempo máximo de viaje, donde para las instancias más grandes se obtuvo en promedio un índice de ocupación de 2.7 pasajeros por vehículo (para un máximo de 3), un 45 % de viajes con transbordo y costos totales menores en un 15 % respecto de un servicio de traslado donde sólo se utilizan vehículos. Si bien no se llegó a resolver instancias de tamaño similar a las reales, el estudio realizado sugiere que sí se podrían abordar con técnicas de paralelismo y heurísticas ad-hoc, logrando eficiencias y ahorros crecientes con el tamaño de las instancias.

La formulación y resultados obtenidos en este trabajo pueden ser aplicados a cualquier transporte de ruta y horario fijos que cuenten con paradas establecidas durante el recorrido; en particular, para situaciones en que los traslados son hacia/desde una red de trenes, metrotrenes o metro.



---

*A Javier y Amanda,  
mis abuelos.*

# Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mis padres por el apoyo incondicional durante todos estos años, por su cariño, comprensión y consejos, los que me dieron la seguridad que necesité para continuar este largo camino. A mi hermana, por siempre creer en mí, por su alegría e interminables conversaciones sobre la vida.

A mi profesor guía Marcos Kiwi, por su dedicación y apoyo durante estos meses. Admiro su rigurosidad y paciencia como docente y tutor, además de la generosidad con sus conocimientos. Sin duda me hizo crecer en mi formación como profesional.

A mis amigos, que hicieron el paso por esta facultad una de las experiencias más bonitas de mi vida. Fueron mis compañeros en esta y muchas otras aventuras, y les agradezco por permitirme también ser parte de las suyas. A Cristián, por todas las tardes de compañía y risas en nuestra cafetería favorita, y por su inmenso apoyo desde siempre. A Romina, que es mi partner desde que entramos a la facultad y la persona con el corazón más grande que conozco.

Quiero también agradecer al departamento de Matemática por los conocimientos que me entregaron sus docentes, que me servirán para el comienzo de esta nueva etapa. A Natacha Astromujoff por su apoyo estos últimos meses y a Georgina Paredes por el cariño y alegría en cada una de nuestras conversaciones. A los profesores integrantes de la comisión José Soto e Iván Rapaport por su tiempo y disposición para ser parte de la defensa de mi trabajo de título.

Finalmente, agradezco el financiamiento recibido para la realización de este trabajo de parte de CONICYT + FONDEF / Concurso IDeA I+D, FONDEF/CONICYT 2018 folio ID18I10250, y de PIA/Concurso Apoyo a Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia con Financiamiento Basal, AFB170001.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Literatura . . . . .	4
1.2. Descripción del Problema . . . . .	6
1.3. Organización del Trabajo . . . . .	8
<b>2. Formulación Matemática</b>	<b>9</b>
2.1. Formulación . . . . .	9
2.1.1. Extensiones . . . . .	17
<b>3. Conjuntos Pareto y Costos</b>	<b>18</b>
3.1. Descripción de la Red . . . . .	18
3.2. Primera Etapa . . . . .	20
3.2.1. Cálculo de Conjuntos Pareto . . . . .	21
3.2.1.1. Métodos para Encontrar un Conjunto No-dominado . . . . .	26
3.3. Segunda Etapa . . . . .	29
<b>4. Evaluación Experimental</b>	<b>34</b>
4.1. Generación de Instancias . . . . .	34
4.1.1. Conjunto de Estaciones Activas . . . . .	36
4.1.2. Personal por Estación . . . . .	37
4.1.2.1. Domicilios y Horarios de Ingreso . . . . .	38
4.2. Resultados de Experimentos . . . . .	39
4.2.1. Utilización de Recursos Computacionales . . . . .	40
4.2.2. Calidad de la Solución . . . . .	46
<b>5. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Índice de Ilustraciones

3.1.	Ejemplo de traslado de pasajeros. . . . .	19
4.1.	Ubicación de la Línea 1 de Metro en el plano de Santiago. . . . .	35
4.2.	Representación de la Línea 1 de Metro de Santiago. . . . .	36
4.3.	Tiempo de cálculo de los puntos de Pareto ( $\Delta t$ ) según el número de estaciones de la línea de metro. . . . .	40
4.4.	Tamaño de archivo de Pareto vs número de estaciones de la línea de metro. . .	41
4.5.	Tiempo de cálculo de costos ( $\Delta t$ ) vs número de personal. . . . .	42
4.6.	Tamaño de archivo de costos vs número de trabajadores. . . . .	43
4.7.	Curvas de número de datos de costos según la cantidad de pasajeros del traslado asociado. . . . .	43
4.8.	Número de variables del PLE vs número de personas. . . . .	44
4.9.	Tiempo de resolución del PLE ( $\Delta t$ ) vs número de personas. . . . .	45
4.10.	Porcentaje de tiempo para la determinación de los puntos de Pareto, cálculo de costos y resolución del PLE. . . . .	46
4.11.	Porcentaje de viajes con transbordo. . . . .	47
4.12.	Tiempo promedio de traslado por trabajador. . . . .	48
4.13.	Costo promedio de traslado por pasajero vs número de trabajadores. . . . .	48
4.14.	Relación tiempo de traslado y tiempo mejor viaje. . . . .	49
4.15.	Distancia máxima ( $\Delta x$ ) entre domicilios para traslados en que 3 pasajeros comparten un vehículo. . . . .	50
4.16.	Relación entre tiempos promedio de viaje para traslados con y sin incorporación de servicio de trenes. . . . .	51
4.17.	Porcentaje de ahorro respecto de un traslado sin servicio de trenes. . . . .	51

# Índice de Tablas

2.1.	Parámetros y variables en el modelo matemático. . . . .	11
2.2.	Tamaño de formulaciones. . . . .	15
4.1.	Características base de las instancias. . . . .	35
4.2.	Número de estaciones simples y total de trabajadores a trasladar. . . . .	37
4.3.	Tamaño de la flota. . . . .	38
4.4.	Promedio de número de subintervalos. . . . .	44
4.5.	Promedio de ocupación de vehículos. . . . .	47



# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

Con el crecimiento económico de las grandes ciudades y la explosión demográfica, se ha hecho necesario el desarrollo de soluciones inteligentes para enfrentar el grave problema de congestión vial existente. En gran medida, el aumento en el uso de autos particulares para trasladarse ha contribuido al incremento del tráfico en áreas urbanas, debido a la combinación de bajas tasas de ocupación de los vehículos con altos números de viajes al día.

Para mitigar este problema, los gobiernos han adoptado como medida principal la promoción del uso del transporte público. Sin embargo, este sistema debe conciliar los objetivos contradictorios de operaciones rentables y servicios de alta calidad. Los autobuses y trenes, si bien pueden transportar un gran número de pasajeros (y por lo tanto son rentables), viajan en rutas fijas a horas fijas a las que los pasajeros deben ajustar sus planes de viaje. Por otra parte, una red de autobuses no se implementa en comunidades rurales porque el costo de funcionamiento del servicio no puede justificarse por la baja demanda. Y en cuanto a los servicios de taxi, estos ofrecen traslados puerta a puerta a petición, pero con un elevado costo, tanto en términos monetarios como de impacto medioambiental.

Recientemente, el uso compartido de vehículos está ganando importancia y se considera una forma eficaz de reducir la congestión y aumentar la eficiencia de la red de transporte sin necesidad de nuevas infraestructuras viales: por una parte, aumenta la ocupación media de los vehículos, reduce la distancia total recorrida a nivel de ciudad y no tienen rutas fijas ni horarios, sino que funcionan en base a la demanda de transporte; y por otra, conduce al desarrollo sostenible de las ciudades, ya que ofrece beneficios en comparación con lo costoso y poco sustentable de los viajes individuales.

Los servicios de *ride-sharing* (transporte compartido) han surgido en muchas ciudades de todo el mundo como nuevas soluciones de movilidad. En estos sistemas, múltiples viajeros

comparten los asientos dentro de un vehículo si sus itinerarios son similares en un sentido espacio-temporal. Al inscribirse en el sistema (por lo general una plataforma) se pide a un participante (viajero o conductor) que proporcione información sobre sus puntos de partida y de destino, una ventana de tiempo de viaje limitada inferior y superiormente por la hora de salida más temprana desde su punto de origen y por la hora de llegada más tardía a su punto de destino, respectivamente, además de una fecha límite de notificación en la que se le debe informar si ha sido o no emparejado. También se pide a los conductores que proporcionen la capacidad de sus vehículos, además de tener la opción de especificar el número máximo de traslados que están dispuestos a hacer.

Los servicios de viaje compartido existentes difieren entre sí en términos de características clave, como la ocupación típica del vehículo, el tiempo de espera previsto, el tiempo de conducción esperado, así como las normas de emparejamiento pasajero-vehículo. Por ejemplo, *carpooling* es un servicio para viajeros que comparten el transporte hacia sus lugares de trabajo en un vehículo privado con otro trabajador, y generalmente prefieren hacerlo de manera continua y regular, mientras que *dynamic real-time sharing* (compartición dinámica en tiempo real) es un sistema que proporciona un proceso automatizado de emparejamiento de viajes (rutas, horarios y precios) entre los conductores y los pasajeros a muy corto plazo o incluso en ruta.

Dentro de las modalidades de ride-sharing se encuentra el de *Demand-Responsive Transport* (Transporte de Respuesta a la Demanda), abreviado DRT, que corresponde a un servicio de transporte en el que la operación está determinada por las necesidades de los usuarios. Normalmente, éstos llaman a una central de reservas, la cual planificará una ruta para recogerlos y luego llevarlos al destino deseado. El modo DRT es considerado como una extensión de dos problemas fundamentales de enrutamiento y programación de vehículos: el *Vehicle Routing Problem* (Problema de enrutamiento de vehículos), abreviado VRP, que asigna vehículos para visitar un conjunto de locaciones geográficas dispersas; y el *Pickup and Delivery Problem* (Problema de recogida y entrega) o PDP, que traslada un número de mercancías desde ciertas locaciones de recogida a otras de entrega. Un ejemplo de DRT es el *Demand Responsive Connector* (Conector de Respuesta a la Demanda) o DRC, que transporta pasajeros desde ubicaciones residenciales a centros de transbordo, donde luego continúan su viaje a través de un sistema de transporte de horarios fijos, por ejemplo, de metrotrenes.

En los últimos años, el uso compartido de vehículos en Chile ha experimentado un aumento: surgieron empresas como AllRide, que corresponde a un servicio de *carpooling*, y se ha incrementado el uso de aplicaciones *ride-hailing* (viajes por demanda) como Uber, Cabify y Didi, que corresponden a servicios puerta a puerta donde los pasajeros buscan en una

plataforma a conductores disponibles en las cercanías para ser trasladados por una cierta tarifa.

Aunque este aumento en la demanda de viajes compartidos parece ser un paso adelante en la dirección de un sistema de transporte más eficiente y sustentable, no es necesariamente el caso. Los beneficios de compartir viajes dependen enormemente de un cambio en el modelo, ya que se obtendrá una reducción de la congestión y la contaminación si la demanda se desplaza de los vehículos de ocupación única a los sistemas de transporte compartido, pero pueden no ser significativos si la demanda de transporte compartido desplaza a la del transporte público.

Una alternativa ambientalmente sustentable y menos costosa es entonces utilizar modos de viaje compartido como alimentadores del transporte público. La integración tiene potenciales beneficios debido a que se complementan uno al otro: por un lado, el uso compartido de vehículos puede servir como un sistema alimentador que conecta las zonas menos densamente pobladas con el transporte público; por otro lado, el sistema de transporte público puede ampliar el alcance de los viajes compartidos y reducir los desvíos de los conductores. De este modo, puede ayudar a superar las incompatibilidades en los itinerarios de los conductores y pasajeros y facilitar el proceso de emparejamiento.

Además del carácter alimentador, el uso de los modos compartidos de transporte puede tener variadas aplicaciones. Por ejemplo, los pasajeros a trasladar podrían ser empleados de una empresa la cual gestiona una flota de vehículos de poca capacidad (vans o automóviles) para proveer transporte compartido a sus trabajadores. Para reducir costos, la empresa podría proporcionar transporte sólo hasta una red pública de locomoción (por ejemplo, hacia y desde estaciones de tren rápido y/o metro). En el caso en que la empresa operara el transporte compartido, estaríamos frente a una situación como la mencionada en el párrafo anterior, es decir, un servicio alimentador pero de un sistema que no es necesariamente público. La motivación de este trabajo es justamente resolver un problema de traslado haciendo uso de los beneficios de un sistema integrado con el fin de reducir los costos que tiene el servicio de ride-sharing, dentro del contexto en que los pasajeros son empleados de una empresa que a su vez controla este transporte. El problema recién descrito está precisamente motivado por uno que enfrenta la Empresa de Transporte de Pasajeros Metro S.A. (en adelante abreviada Metro), encargada del servicio de ferrocarriles metropolitanos de Santiago. Debido a un acuerdo con sus trabajadores, además de la escasez de transporte público durante la madrugada y noche, el costo de proveer estacionamiento a sus empleados y lo crítico que resulta el cumplimiento de los inicios de jornada por parte de los trabajadores, Metro ofrece a su personal el traslado durante el inicio y término de la jornada laboral, es decir, desde los domicilios particulares

a estaciones de Metro y viceversa, y busca mejorar la calidad y reducir los costos de esta operación. El objetivo entonces es resolver un problema de optimización que contempla la integración de viajes compartidos y el sistema de transporte público, teniendo como referente el problema que enfrenta Metro de Santiago.

## 1.1. Literatura

En la literatura es posible encontrar diversos trabajos abocados a encontrar soluciones para aumentar la flexibilidad de los sistemas de transporte, una de las cuales es la integración de diferentes servicios que permitan una mejora en la cobertura y disponibilidad. La mayoría de los modelos propuestos plantean utilizar el ride-sharing como un complemento del transporte público, en el sentido de funcionar como alimentador de un sistema de transporte, el que generalmente se escoge de itinerario fijo debido a la conveniencia de puntos de recogida establecidos, rutas determinadas y horarios fijos que facilitan el desarrollo del modelo.

En [1] proponen la integración de un servicio *Dial-a-Ride* (DAR) con uno de ruta fija. Un DAR es un servicio del tipo DRC de alta calidad en cuanto a menores tiempos de acceso y de espera, pero con costos de operación más altos. Este servicio se utiliza principalmente en zonas de baja demanda o en zonas rurales extensas para personas con necesidades especiales y personas mayores, y zonas con dificultades de traslado.

En la formulación del modelo en [1] el objetivo es encontrar itinerarios y horarios óptimos para el servicio DAR, de manera que los usuarios puedan utilizarlo en conjunto con el transporte de ruta fija minimizando el costo total del traslado. En este costo se consideran gastos operacionales del DAR, costo del viaje para el pasajero y penalización por transbordos. Algunas características relevantes del modelo es que cuenta con ventanas de tiempo en las que el servicio puede comenzar a atender las solicitudes, tiempo máximo de ruta de cada vehículo de DAR y variables que denotan la presencia de un transbordo durante un viaje. Además, posee variables continuas de tiempo indicando cuándo un vehículo arriba en cierto punto, el tiempo de los pasajeros en cada locación y tiempos de transbordo, lo que hace posible realizar un seguimiento preciso de los movimientos de los pasajeros a través de la red.

Al igual que en [1], otros trabajos escogen un servicio DRC como alimentador del transporte de ruta fija. Los servicios DRC generalmente operan dentro de una zona predeterminada acorde a las condiciones geográficas o a las comunidades vecinas, con baja demanda de tránsito. En [6] proponen una extensión del modo DRC dejando a un lado estos esquemas descentralizados o regionales, permitiendo a los vehículos atender a cualquier pasajero

y dejarlos en cualquier parada (siempre que las restricciones restantes sean satisfechas).

El problema abordado en [6] consiste en trasladar a un grupo de personas desde sus locaciones de residencia al centro de la ciudad, para lo cual se utilizará la red de trenes en conjunto con el servicio alimentador. Para la configuración de los viajes, cada pasajero debe proporcionar la estación de tren de destino para así poder determinar la ruta que seguirá el servicio DRC, el que lo acercará a alguna estación conveniente de transbordo o lo trasladará directamente a la estación de destino, lo cual será determinado bajo restricciones de tiempo y disponibilidad de automóviles. En la formulación del problema en [6] se consideran puntos de recogida (con uno o más pasajeros) que deben ser visitados por sólo un vehículo, pudiendo éste visitar otras locaciones de retiro siempre que se respete su capacidad. Un aspecto clave del referido artículo es que una vez que el móvil se acerca a un punto de bajada, todos los pasajeros en él deben descender. El problema de optimización resultante es encontrar una programación factible que minimice el costo enfrentado por el sistema proveedor.

La integración de los servicios de transporte puede producirse de diferentes formas dependiendo de los objetivos perseguidos. En [6] el problema de optimización está enfocado en minimizar el costo de operación del servicio alimentador, lo que nos muestra que tiene un enfoque orientado al proveedor, mientras que en [8] intentan equilibrar los conflictos de intereses que se producen entre usuarios y operadores, para lo cual incorporan en su objetivo la maximización de la satisfacción del usuario.

El problema en [8] consiste en encontrar las rutas y horarios óptimos para el traslado de pasajeros desde puntos de demanda a estaciones de trenes, utilizando un servicio de vehículos de tipo DRT. La formulación del modelo se realiza sobre un grafo, cuyos nodos representan estaciones de trenes, centros de despacho de vehículos y puntos de demanda, y buscan encontrar un subgrafo que simultáneamente maximice la satisfacción del pasajero y minimice el costo del kilometraje total de las rutas de alimentación diseñadas. Para la configuración de las rutas, en [8] permiten que un vehículo pueda visitar más de un punto antes de arribar en alguna estación, pero cada punto de recogida debe ser visitado por sólo un vehículo. Además, cada pasajero tiene una o múltiples ventanas de tiempo preferidas para abordar los vehículos, permitiendo encontrar rutas más cortas respecto del caso en que el pasajero indique una única ventana. Esto último es relevante para la satisfacción del pasajero, ya que la función asociada está basada en el tiempo de viaje, por lo que una menor duración del traslado resulta en mayor satisfacción del cliente.

Finalmente, podemos encontrar una versión más sencilla del problema común de traslado antes revisado. Dejando fuera la posibilidad de reutilización de los vehículos, es decir, que un vehículo realice más de un viaje, podemos considerar el trazado de rutas del servicio

alimentador como un *matching problem* (problema de emparejamiento). En [7] plantean la integración de una red de trenes con un servicio ride-sharing, donde un sistema centralizado establecerá de forma automática asignaciones entre conductores del servicio compartido y pasajeros. En el modelo un conductor puede llevar a un pasajero desde su origen hasta su destino o a una estación de tren para que pueda continuar su viaje. Dos aspectos clave de esta formulación son que tanto los pasajeros como los conductores del servicio tienen un locación de destino, y que el transbordo es una opción dentro del viaje siempre que exista una estación en un radio cercano al destino en la que el pasajero pueda descender para luego caminar hasta él. Además, se relaja la restricción de emparejamiento para dos casos, en los que se permite asignar a un conductor a dos pasajeros: cuando el conductor lleva a los pasajeros a una estación de tren, dirigiéndose luego en vehículo hasta su destino; y cuando el conductor aparca su vehículo en alguna estación, para luego dirigirse en tren a su destino. En cualquiera de estos casos, ambos pasajeros deben descender en la misma estación. En [7] buscan maximizar el número de pasajeros emparejados y a la vez minimizar la distancia adicional de manejo de los conductores, por lo que ambos objetivos serán considerados de forma jerárquica, es decir, la maximización es el objetivo primario y la minimización el secundario.

Si bien en los estudios mencionados el transporte de ruta fija es por lo general un servicio de trenes, son igual de válidas las formulaciones considerando redes de buses, tranvías o metros, ya que la característica fundamental en el desarrollo de los modelos es que el servicio a alimentar posea rutas e itinerarios determinados.

## 1.2. Descripción del Problema

La congestión de tránsito ha ido en aumento en gran parte del mundo, desarrollado o no, y todo indica que seguirá agravándose. Santiago no queda fuera de este fenómeno y se visibiliza en los aumentos de los tiempos de viaje, los costos operacionales de los vehículos y la contaminación ambiental. La ciudad alberga actualmente a más de 5,6 millones de habitantes y debido a esta gran cantidad el traslado de las personas se hace complejo, especialmente en horarios de mayor tráfico vehicular u *horarios punta*.

Principalmente, la ciudad basa su sistema de transporte público en una red de buses urbanos y un servicio de trenes subterráneo, además del transporte público menor como taxis y colectivos. Actualmente, gracias a la masificación del uso de teléfonos inteligentes, se han incorporado servicios puerta a puerta solicitados a través de aplicaciones web, los cuales han ganado relevancia como opción para desplazarse dentro de la ciudad.

Como mencionamos anteriormente, la mayor congestión se produce dentro de los horarios punta, que corresponden a intervalos en la mañana y tarde en que gran parte de la masa laboral ingresa y se retira de sus puestos de trabajo, respectivamente. El problema que motiva este trabajo tiene relación con la planificación de rutas e itinerarios de vehículos que, en conjunto con la utilización de una red de transporte de ruta fija, permitirán que el personal de una empresa se traslade de ida y regreso entre su domicilio y el lugar de trabajo.

El problema a resolver, que llamaremos problema del Traslado de Personal Operativo (TPO), consiste en trasladar a trabajadores de Metro desde sus residencias particulares a determinadas estaciones y viceversa, utilizando un sistema integrado de transporte conformado por un servicio DRC y la red de Metro de Santiago. El objetivo es disminuir los costos que actualmente esto conlleva, bajo el cumplimiento de ciertas restricciones de tiempo impuestas.

La planificación de las rutas, que por simplicidad la haremos sólo para el ingreso al turno laboral, debe tener en cuenta tiempos de viaje esperados y horarios de inicio de jornada, que pueden variar según la labor que desempeña el trabajador dentro de la empresa. Para el transporte de los pasajeros se cuenta con un número fijo de *taxis*, los que pueden ser reutilizados una vez que estos finalizan el traslado de un grupo determinado. El viaje de un trabajador puede realizarse de dos maneras: un vehículo lo recoge en su punto de origen y lo lleva hasta su estación de destino; o es trasladado en vehículo hasta una estación distinta desde donde continúa su viaje en tren hasta su lugar de trabajo.

Es importante notar que, como la planificación de rutas se realiza para el turno de la mañana, se debe tener en cuenta la disponibilidad del servicio de metrotrenes si se quiere utilizar dentro de un trayecto, ya que éste comienza a funcionar a partir de cierto horario. Además, no se permite más de un transbordo durante el viaje, es decir, si el trayecto considera un viaje en tren, este debe ser sólo dentro de la línea a la que pertenece la estación de destino.

En la resolución del TPO es relevante el tiempo de cómputo de la solución, ya que consideramos un escenario en que una fracción significativa del personal modifica frecuentemente su locación de recogida, por lo que el cálculo debe poder realizarse de manera diaria de ser necesario. En cualquier caso, asumimos siempre que el personal comunica con la debida antelación (horas) el origen y/o destino de los viajes a realizar.

Para la evaluación del modelo se generarán instancias artificiales que captarán las principales características de la operación diaria de Metro. La formulación y resultados obtenidos en este trabajo pueden ser aplicados a cualquier transporte de ruta y horario fijos, que cuenten con paradas establecidas durante el recorrido. Específicamente, para situaciones en que

los traslados son hacia/desde una red de trenes, metrotrenes o metro.

## 1.3. Organización del Trabajo

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 presentaremos la formulación matemática para la obtención de rutas e itinerarios durante el traslado de pasajeros, donde describiremos las restricciones sobre las que se desarrolla el modelo; en el Capítulo 3 detallaremos la estrategia de 2 etapas seguida durante el cálculo de los datos necesarios para la implementación del modelo presentado; en el Capítulo 4 generaremos y resolveremos instancias artificiales que capten las características esenciales del problema, lo que permitirá conocer el uso de los recursos computacionales y la calidad de la solución obtenida; y finalmente, conclusiones relativas al análisis previamente realizado junto con el posible trabajo futuro serán descritas en el Capítulo 5.



# CAPÍTULO 2

---

## Formulación Matemática

---

En el capítulo anterior, hablamos sobre los modelos propuestos en la literatura para la integración de los servicios de ruta fija y flexible, mostrando que existen distintos prototipos según los objetivos que se persigan. En este capítulo, mostraremos la formulación matemática para la obtención de rutas e itinerarios del servicio de transporte compartido, el cual alimentará la red de trenes subterráneos Metro. Las definiciones de variables y la descripción de las restricciones sobre las que se desarrolla el modelo también son abordadas dentro de este capítulo.

### 2.1. Formulación

Formularemos el problema del TPO como un programa lineal entero (PLE), el cual busca minimizar el costo total de los viajes realizados para el traslado del personal. Como se mencionó en el capítulo anterior, el servicio alimentador corresponde a una flota de taxis y sus vehículos poseen una capacidad máxima equivalente de pasajeros. Luego, es necesario agrupar a los trabajadores que serán trasladados dentro de un mismo viaje, donde el tamaño de cada grupo no debe sobrepasar la capacidad de los taxis. Además, se debe seleccionar el orden en que serán recogidos los pasajeros al inicio del viaje, lo que incrementa la variedad de potenciales trayectos para realizar el traslado. Definimos entonces el conjunto  $\vec{\mathcal{P}}$  de todos los vectores o *tuplas* posibles de pasajeros, donde el vehículo seguirá el orden dado por el arreglo durante el recorrido de las locaciones de retiro.

Otro aspecto que incide en el trazado de rutas es el momento en que el vehículo inicia la recogida de pasajeros, ya que existirán trayectos más o menos convenientes según sean los horarios de ingreso al turno de los trabajadores y el tiempo de viaje que esto permita. Para incorporar este elemento en la formulación, definimos el conjunto  $\mathcal{T}$  de todos los subintervalos

de tiempo  $\tau$  en que se puede dar inicio a un viaje.

A fin de capturar las característica del problema definimos entonces variables binarias  $x_{\vec{p},\tau,v}$  que especifican si un grupo de pasajeros  $\vec{p}$ , con su respectivo orden de recogida, es atendido o no por un vehículo  $v$  de la flota iniciando el viaje en un subintervalo determinado  $\tau$ . De ser realizado este traslado, se le asociará un intervalo  $I^*(\vec{p}, \tau)$  y un costo compuesto por la suma de un cargo fijo  $C_{fjo}$  y uno variable  $C^*(\vec{p}, \tau)$ , siendo este último función de la tupla a bordo y del subintervalo en que comienza el viaje. El intervalo  $I^*(\vec{p}, \tau)$  corresponde a la unión de subintervalos de tiempo en que permanece ocupado el móvil que realiza la ruta de costo variable  $C^*(\vec{p}, \tau)$ . Luego, podemos formular el problema del TPO como el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
 (\text{PLE}_0) \quad \Lambda_0 := & \min_x \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}) x_{\vec{p},\tau,v} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} x_{\vec{p},\tau,v} = 1, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \quad (\text{Recog.}), \\
 & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} x_{\vec{p},\tau,v} \leq 1, \quad \forall v \in \mathcal{V}; \forall \tilde{\tau} \in \mathcal{T}, \quad (\text{Simult.}), \\
 & x_{\vec{p},\tau,v} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in \mathcal{V}; \forall \vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \tau \in \mathcal{T}.
 \end{aligned}$$

La función objetivo busca minimizar el costo total del traslado. Las restricciones *Recogida* y *Simultaneidad* aseguran que cada trabajador sea visitado sólo una vez y que un vehículo no realice más de un viaje en un mismo instante, respectivamente. El costo variable  $C^*(\vec{p}, \tau)$  presente en el objetivo, es el costo de la ruta óptima para el traslado de la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  si el viaje comienza en  $\tau$ . La elección de esta ruta, que detallaremos en el siguiente capítulo, debe ser sobre un conjunto de trayectorias factibles y dentro de éstas la de menor costo.

Para conveniencia del lector y facilitar futuras referencias, en la Tabla 2.1 se incluye un resumen con la notación introducida previamente.

Índices	
$\vec{p}$	Tupla de pasajeros
$\tau$	Subintervalo de tiempo
$v$	Índice de vehículo
Conjuntos	
$\vec{\mathcal{P}}$	Conjunto de tuplas de pasajeros
$\mathcal{T}$	Conjunto de subintervalos de tiempo
$\mathcal{V}$	Conjunto de vehículos
Parámetros	
$C^*(\vec{p}, \tau)$	Costo operacional variable del traslado de $\vec{p}$ iniciado en $\tau$
$q$	Pasajero en $\mathcal{P}$
$C_{fjo}$	Costo operacional fijo por viaje
$I^*(\vec{p}, \tau)$	Conjunto de subintervalos de tiempo que emplea el viaje de la tupla $\vec{p}$ al comenzar en $\tau$
Variables de Decisión	
$x_{\vec{p}, \tau, v}$	Si la tupla de pasajeros $\vec{p}$ es trasladada por $v$ comenzando el viaje en $\tau$ , o no; $\forall \vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, \forall \tau \in \mathcal{T}, \forall v \in \mathcal{V}$

**Tabla 2.1:** Parámetros y variables en el modelo matemático.

A continuación, relajaremos  $PLE_0$  y obtendremos un programa lineal en el que convertimos la restricción Recogida en una desigualdad y ampliamos a los naturales el conjunto donde toman valores las variables de decisión. El nuevo programa lineal, que llamaremos  $PLE_1$ , se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 (\text{PLE}_1) \quad \Lambda_1 := \min_x \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}) x_{\vec{p}, \tau, v} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} x_{\vec{p}, \tau, v} \geq 1, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \quad (\text{Recog.}), \\
 & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} x_{\vec{p}, \tau, v} \leq 1, \quad \forall v \in \mathcal{V}; \forall \tilde{\tau} \in \mathcal{T}, \quad (\text{Simult.}), \\
 & x_{\vec{p}, \tau, v} \in \mathbb{N}, \quad \forall v \in \mathcal{V}; \forall \vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \tau \in \mathcal{T}.
 \end{aligned}$$

**Proposición 1.** *El valor de  $PLE_1$  es igual al de  $PLE_0$ , es decir,  $\Lambda_1 = \Lambda_0$ .*

*Demostración.* Probaremos que se cumplen ambas desigualdades. Denotemos por  $\mathcal{S}_0$  y  $\mathcal{S}_1$  los conjuntos de soluciones factibles de  $PLE_0$  y  $PLE_1$ , respectivamente.

Para probar que  $\Lambda_1 \leq \Lambda_0$ , basta notar que  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1$  y que las funciones objetivo son idénticas, de donde se obtiene la desigualdad.

Para ver la desigualdad restante, tomemos  $\hat{x}$  solución factible de  $PLE_1$  y veamos que existe una solución en  $PLE_0$  de igual o menor valor. Si  $\hat{x} \in \mathcal{S}_0$ , es trivial. Sea entonces  $\hat{x} \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$ .

Luego, existe  $q \in \mathcal{P}$  tal que

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} > 1. \quad (2.1)$$

En (2.1) tenemos dos casos posibles. En el primero, la sumatoria posee sólo un elemento no nulo, al cual podemos asignarle el valor 1 y así obtenemos una solución de igual o menor valor que la inicial. En el otro caso, hay más de un elemento no nulo, esto es, existe al menos un par de tripletas  $(\vec{p}', \tau', v')$  y  $(\vec{p}'', \tau'', v'')$ , con  $q \in \vec{p}', \vec{p}''$  tal que

$$\hat{x}_{\vec{p}', \tau', v'} + \hat{x}_{\vec{p}'', \tau'', v''} > 1.$$

Al igual que en el primer caso, podemos fijar el valor de ambas variables en 1. Si  $\vec{p}'$  es de dimensión 1, fijamos  $\hat{x}_{\vec{p}', \tau', v'} = 0$ . Si  $\vec{p}'$  es de dimensión 2 o más, e  $i$  la posición de  $q$  en  $\vec{p}'$ , denotamos por  $(\vec{p}')_{-i}$  a la tupla sin el pasajero  $q$ . Luego, fijamos  $\hat{x}_{\vec{p}', \tau', v'} = 0$  y  $\hat{x}_{(\vec{p}')_{-i}, \tau', v'} = 1$ . Esta solución sigue siendo factible, y como  $C_{(\vec{p}')_{-i}, \tau'} \leq C_{\vec{p}', \tau'}$ , tenemos que es de igual o menor valor que la inicial.

En ambos casos, las soluciones obtenidas no necesariamente pertenecen a  $\mathcal{S}_0$ , ya que debemos asegurarnos que se satisfaga la igualdad de la restricción Recogida. Sin embargo, es posible aplicar estas modificaciones mientras exista algún  $q \in \mathcal{P}$  en que se tenga (2.1) y así eventualmente obtener una solución factible en  $\text{PLE}_0$  de igual o menor valor que la de  $\mathcal{S}_1$ . Sigue que  $\Lambda_0 \leq \Lambda_1$  y concluimos que  $\Lambda_1 = \Lambda_0$ . □

Una de las ventajas del nuevo programa lineal en comparación con el original, es que la relajación de las restricciones de igualdad por las de desigualdad facilita encontrar soluciones iniciales factibles. No obstante, el número de variables involucradas es potencialmente alto. Por ejemplo, en  $\text{PLE}_1$  las desigualdades de Simultaneidad están indexadas por los móviles de la flota y subintervalos de tiempo, lo que corresponde a una cantidad de  $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{T}|$  restricciones. Para facilitar la resolución del problema, buscaremos reescribir el programa lineal antes planteado definiendo variables que permitan reducir el número de desigualdades a satisfacer.

Si observamos el programa  $\text{PLE}_1$ , notamos que el término correspondiente al costo en la función objetivo depende de  $v$  sólo a través de  $\sum_{v \in \mathcal{V}} x_{\vec{p}, \tau, v}$ . Luego, podemos definir, para todo  $\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}$  y todo  $\tau \in \mathcal{T}$ , la variable  $y_{\vec{p}, \tau}$  de la forma

$$y_{\vec{p}, \tau} := \sum_{v \in \mathcal{V}} x_{\vec{p}, \tau, v}.$$

A partir de esto, es posible reescribir  $\text{PLE}_1$  como el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned}
 (\text{PLE}_2) \quad \Lambda_2 := \min_y \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}) y_{\vec{p}, \tau} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} y_{\vec{p}, \tau} \geq 1, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \quad (\text{Recog.}), \\
 & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} y_{\vec{p}, \tau} \leq |\mathcal{V}|, \quad \forall \tilde{\tau} \in \mathcal{T}, \quad (\text{Simult.}), \\
 & y_{\vec{p}, \tau} \in \mathbb{N}, \quad \forall \vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \tau \in \mathcal{T}.
 \end{aligned}$$

**Proposición 2.** *El valor de  $\text{PLE}_2$  es igual al de  $\text{PLE}_1$ , es decir,  $\Lambda_2 = \Lambda_1$ .*

*Demostración.* Comenzaremos probando  $\Lambda_2 \leq \Lambda_1$ . Sea  $\hat{x}$  solución factible en  $\text{PLE}_1$ , y para todo  $\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}$  y todo  $\tau \in \mathcal{T}$  definimos

$$\hat{y}_{\vec{p}, \tau} := \sum_{v \in \mathcal{V}} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v}.$$

Al igual que en la demostración anterior, notamos por  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  los conjuntos factibles de  $\text{PLE}_1$  y  $\text{PLE}_2$ , respectivamente. Por construcción,  $\hat{y} \in \mathcal{S}_2$ , por lo que podemos asociar a cada elemento de  $\mathcal{S}_1$  un elemento de  $\mathcal{S}_2$  y que evaluados en las funciones objetivo de  $\text{PLE}_1$  y  $\text{PLE}_2$ , respectivamente, dan el mismo resultado. Luego, como las funciones objetivo de  $\text{PLE}_1$  y  $\text{PLE}_2$  evaluadas en  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , respectivamente, dan el mismo valor, se concluye que  $\Lambda_2 \leq \Lambda_1$ .

Probemos ahora la desigualdad restante. La idea es que dada una solución factible en  $\text{PLE}_2$  podamos encontrar una en  $\text{PLE}_1$  de igual o menor valor. Sea  $\hat{y} \in \mathcal{S}_2$  y denotemos por  $\hat{x}$  la solución que construiremos para obtener lo deseado. Inicializamos  $\hat{x} = 0$ . Enumeraremos los subintervalos de tiempo disjuntos de la forma  $\tau_1, \dots, \tau_{|\mathcal{T}|}$  respetando el orden temporal y de manera inductiva iremos asignando valores a los elementos de  $\hat{x}$ . Los pasos a seguir en la construcción de la solución se describen a continuación:

**Paso Base** En  $\tau = \tau_1$ , denotamos por  $k_1$  la cantidad de tuplas  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k_1}$  tales que  $\hat{y}_{\vec{p}_j, \tau_1} \neq 0$  para todo  $j \in [k_1]$ . Por Simultaneidad, y dado que  $\tau_1 \in I^*(\vec{p}, \tau_1)$  para todo  $\tau_1 \in \mathcal{T}$ , tenemos que

$$|\mathcal{V}| \geq \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tau_1 \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} \hat{y}_{\vec{p}, \tau} \geq \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \hat{y}_{\vec{p}, \tau_1} \geq k_1.$$

Luego, podemos seleccionar un conjunto  $\mathcal{V}_1 := \{v_1, \dots, v_{k_1}\}$  de móviles y asignarlos a cada una de las tuplas  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k_1}$  señaladas, de manera que fijemos  $\hat{x}_{\vec{p}_j, \tau_1, v_j} = 1$  para

cada  $j \in [k_1]$ . La solución obtenida hasta este punto verifica en  $\tilde{\tau} = \tau_1$

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} = \hat{x}_{\vec{p}_j, \tau, v_j} = 1, \quad \forall v = v_j \in \mathcal{V}_1, \quad (2.2)$$

y

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} = 0, \quad \forall v \notin \mathcal{V}_1,$$

y por lo tanto

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} \leq 1, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.3)$$

**Paso Inductivo** Supongamos que hemos repetido el proceso de asignación de vehículos hasta  $\tau_n$ , con  $n < |\mathcal{T}|$ , y que para todo  $\tilde{\tau} \in \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  se tiene (2.3). Apliquemos ahora el procedimiento en  $\tau_{n+1}$  y veamos que se cumplen las condiciones requeridas.

Sea  $k_{n+1} \in \mathbb{N}$  la cantidad de tuplas  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k_{n+1}}$  tales que  $\hat{y}_{\vec{p}_j, \tau_{n+1}} \neq 0$  para todo  $j \in [k_{n+1}]$ . Sea además  $\mathcal{V}_{n+1}$  el conjunto de vehículos que están en servicio durante el subintervalo  $\tau_{n+1}$  y que han iniciado el viaje en un subintervalo anterior, i.e.,  $\mathcal{V}_{n+1} := \{v \in \mathcal{V} \mid \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} = 1 \wedge \tau_{n+1} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset, \tau < \tau_{n+1}\}$ . Por Simultaneidad, en  $\tilde{\tau} = \tau_{n+1}$  tenemos

$$|\mathcal{V}| \geq \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}: \tilde{\tau} \cap I^*(\vec{p}, \tau) \neq \emptyset} \hat{y}_{\vec{p}, \tau} \geq |\mathcal{V}_{n+1}| + k_{n+1}.$$

Luego, es posible seleccionar  $k_{n+1}$  vehículos  $v_1, \dots, v_{k_{n+1}} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_{n+1}$  y asignarlos a las tuplas antes referidas, de manera que podamos fijar  $\hat{x}_{\vec{p}_j, \tau_{n+1}, v_j} = 1$  para todo  $j \in [k_{n+1}]$ . Por construcción,  $\hat{x}$  verifica en  $\tilde{\tau} = \tau_{n+1}$  la desigualdad (2.3), puesto que la selección de vehículos en este subintervalo se realiza fuera del conjunto  $\mathcal{V}_{n+1}$ , lo que asegura que estos no estén siendo ya utilizados. Para los subintervalos anteriores, ésta se satisface por hipótesis inductiva. Concluimos así que para todo  $\tilde{\tau} \in \{\tau_1, \dots, \tau_{n+1}\}$  se tiene (2.3).

Una vez que el proceso de asignación ha terminado, debemos verificar si la solución final  $\hat{x}$  es factible en  $\text{PLE}_1$ . La restricción Simultaneidad vimos que se satisface durante todo el proceso de asignación, por lo que sólo resta ver Recogida. Para esto, notemos que dado  $q \in \mathcal{P}$  debe existir un par  $(\vec{p}, \tau)$ , con  $q \in \vec{p}$ , tal que  $\hat{y}_{\vec{p}, \tau} \neq 0$ . Así, durante el proceso de construcción, en  $\tau$  asignaremos un vehículo  $v$  a la tupla  $\vec{p}$ , de donde obtendremos

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{v \in \mathcal{V}} \hat{x}_{\vec{p}, \tau, v} \geq 1.$$

Por lo tanto,  $\hat{x} \in \mathcal{S}_1$  y es de igual o menor valor que  $\hat{y}$ , ya que a cada  $\hat{y}_{\vec{p}, \tau} \neq 0$  se le asocia un

único vehículo  $v$  tal que  $\hat{x}_{\vec{p},\tau,v} = 1$ . Luego,

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}) \hat{y}_{\vec{p},\tau} \geq \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}) \sum_{v \in \mathcal{V}} \hat{x}_{\vec{p},\tau,v}.$$

Reordenando la sumatoria en el término de la derecha, se obtiene lo pedido. Concluimos entonces que  $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ , de donde finalmente obtenemos  $\Lambda_2 = \Lambda_1$ . □

En la siguiente tabla se indican los tamaños y tipos de restricciones de cada uno de los tres programas lineales anteriormente formulados.

	PLE <sub>0</sub>	PLE <sub>1</sub>	PLE <sub>2</sub>
No. variables binarias	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	0	0
No. variables integrales	0	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{T} $
No. variables	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \vec{\mathcal{P}}  \times  \mathcal{T} $
No. desigualdades	$ \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \mathcal{P}  +  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \mathcal{P}  +  \mathcal{T} $
No. igualdades	$ \mathcal{P} $	0	0
No. restricciones	$ \mathcal{P}  +  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \mathcal{P}  +  \mathcal{V}  \times  \mathcal{T} $	$ \mathcal{P}  +  \mathcal{T} $

**Tabla 2.2:** Tamaño de formulaciones.

Tras probar que los tres programas lineales son equivalentes en términos de su valor, optaremos por buscar una solución óptima del PLE<sub>2</sub> a fin de resolver el problema del TPO. Esta elección la hacemos basándonos en las bondades que tiene esta formulación por sobre las otras dos, en cuanto a la relajación de restricciones y al número total de éstas.

Para el problema del TPO podemos obtener una versión simplificada si quitamos de la formulación la restricción en la flota disponible de vehículos, es decir, una vez finalizado un viaje, el móvil queda inhabilitado para trasladar a un nuevo grupo de pasajeros. Bajo esta modificación, podemos plantear el problema como un *Set Covering Problem* (Problema del Conjunto de Cobertura), o SCP, en el que buscaremos cubrir el traslado de todos los pasajeros por un subconjunto del total de viajes posibles.

El SCP se formula sobre un universo finito  $\mathcal{U}$  y una colección  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de él, con subcolecciones  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$  cuya unión es  $\mathcal{U}$ , a las que llamaremos cubiertas. Si a cada conjunto en la colección se le asocia un costo, entonces el problema del conjunto de cobertura es encontrar un cubrimiento  $\mathcal{J}$  tal que el costo total se minimice. Usando esta definición, podemos obtener

un modelo de programación entera del SCP como

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{j \in \mathcal{S}} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \mathcal{S}} a_{ij} x_j \geq 1, \quad \forall i \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in \mathcal{S}. \quad (2.4b)$$

Aquí,  $c_j > 0$  es el costo de cobertura del  $j$ -ésimo conjunto;  $x_j$  es una variable binaria, que es igual a 1, si  $j \in \mathcal{J}$ ;  $a_{ij}$  es un parámetro binario, que es igual a 1, si el ítem  $i$  es cubierto por el  $j$ -ésimo conjunto. El conjunto de restricciones (2.4a) asegura que cada ítem es cubierto por al menos un conjunto, y las restricciones (2.4b) imponen integralidad en las variables.

En el problema del TPO deseamos encontrar un conjunto de viajes que cubran el traslado del personal al menor costo posible. Así, de manera intuitiva, podemos identificar a  $\mathcal{P}$  como el conjunto universo y a  $\vec{\mathcal{P}} \times \mathcal{T}$  como la colección de subconjuntos, ya que cada viaje queda determinado por la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  a bordo del móvil y el subintervalo  $\tau$  en que se inicia el traslado. El costo  $c$  asociado a cada elemento  $(\vec{p}, \tau)$  corresponde a la suma de los costos fijo y variable del  $\text{PLE}_0$ . Luego, siguiendo el modelo del SCP, podemos plantear nuestro problema de la forma

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} c_{\vec{p}, \tau} x_{\vec{p}, \tau} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}, q \in \vec{p}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} x_{\vec{p}, \tau} \geq 1, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \\ & x_{\vec{p}, \tau} \in \{0, 1\}, \quad \forall \vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}; \forall \tau \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

formulación que es equivalente a la de  $\text{PLE}_0$  si se elimina la restricción en la flota de vehículos disponibles.

A pesar de que el SCP también es un problema NP-difícil, la ventaja de esta formulación es que el modelo ha sido ampliamente estudiado y para abordarlo se han desarrollado metodologías que empíricamente se ha comprobado que funcionan bastante bien. Específicamente, se han logrado resolver [2] en un tiempo razonable a optimalidad instancias con universos de unos pocos cientos de elementos y colecciones con unos pocos miles de subconjuntos, y con una eficacia dentro del 1% del óptimo instancias con universos de unos pocos miles de elementos y unos pocos millones de subconjuntos.



### 2.1.1. Extensiones

En la formulación del modelo del TPO trabajamos sobre supuestos que permiten facilitar su desarrollo. No obstante, estos pueden relajarse y bajo leves modificaciones el modelo opera de igual forma.

En cuanto a los costos, se asume que el gasto fijo  $C_{fjo}$  de bajada de bandera es independiente del vehículo que realiza el traslado. Una alternativa es considerar que hay distintos tipos de móviles y luego trabajar en PLE<sub>2</sub> con variables integrales  $y_{\vec{p},\tau,\omega}$ , donde  $\omega$  varía sobre el conjunto  $\Omega$  de tipos de móviles. La función objetivo queda

$$\sum_{\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{\omega \in \Omega} (C^*(\vec{p}, \tau) + C_{fjo}^{\omega}) y_{\vec{p},\tau,\omega},$$

y las restricciones se adaptan de manera análoga. Si bien el número de variables aumenta en un factor  $|\Omega|$ , el número de restricciones no cambia.

También hemos implícitamente asumido que el retiro de pasajeros no conlleva costos ni tiempos de viaje adicionales. Con respecto a lo primero, no reviste ninguna dificultad incrementar  $C^*(\vec{p}, \tau)$  en función de la dimensión de la tupla  $\vec{p}$  manteniendo la misma formulación. Respecto a considerar tiempos de parada al recoger o dejar pasajeros, también puede ser incorporado fácilmente a nuestras formulaciones. Basta con incluirlo durante el cálculo del intervalo  $I^*(\vec{p}, \tau)$ , alargándolo acorde a los tiempos y número de paradas durante la ruta factible de menor costo para un móvil que inicia su recorrido en el subintervalo  $\tau$  y que traslada a un grupo de pasajeros  $\vec{p}$  con su respectivo orden de recogida.

Nuestra formulación asume además que no se requiere tiempos adicionales para el tránsito desde la estación de descenso del vehículo hasta el andén, o desde el andén hasta el puesto de trabajo específico. Ambos supuestos pueden ser considerados en la formulación de forma similar al segundo escenario planteado en el párrafo anterior.

En relación a los tiempos de viaje, se asume que el tiempo máximo  $T_{\max}$  de traslado permitido es independiente del pasajero transportado. Esta restricción juega un papel relevante en la determinación de las rutas factibles y de menor costo a seguir durante el traslado de un grupo de pasajeros que se inicia en un subintervalo de tiempo dado. En el siguiente capítulo se describirá cómo incorporarlo al modelo formulado. También contemplaremos restricciones que excluyan aquellas rutas que hacen que un empleado llegue con demasiada anticipación a su destino final.

# CAPÍTULO 3

---

## Conjuntos Pareto y Costos

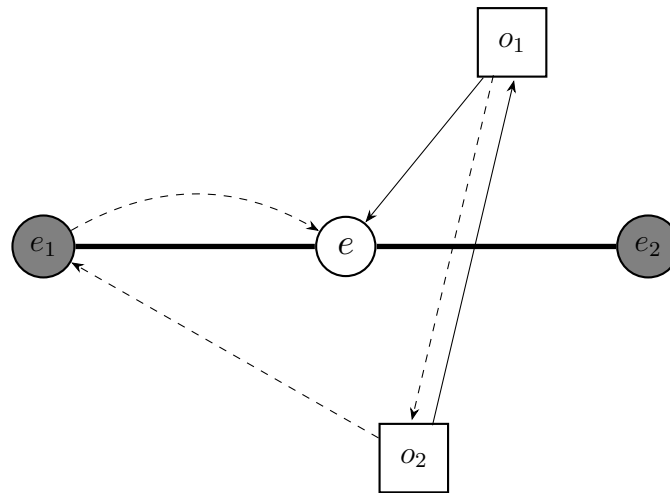
---

En el capítulo anterior presentamos la formulación del modelo para el problema TPO, correspondiente a una minimización que pretende encontrar un conjunto de rutas a seguir por una flota de vehículos, de tal forma que se realice el traslado del personal al menor costo posible. Como se mencionó en la descripción del modelo, en las formulaciones  $PLE_0$  y  $PLE_1$  cada variable de decisión  $x_{\vec{p},\tau,v}$  está asociada a una ruta, elegida de manera óptima, para el traslado de la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  por el vehículo  $v$  si el viaje se inicia dentro del subintervalo  $\tau$ . En este capítulo detallaremos la estrategia seguida para encontrar esta trayectoria óptima, proceso que puede descomponerse en dos etapas: el cálculo de conjuntos Pareto, que sólo involucra traslados entre estaciones de trenes, y el cálculo de los costos, donde utilizando la información de la etapa anterior determinaremos las rutas óptimas de traslado y sus respectivos costos.

### 3.1. Descripción de la Red

Recordemos que hemos denotado el conjunto de pasajeros a trasladar por  $\mathcal{P}$  y por  $\mathcal{E}$  al conjunto de estaciones de trenes. Para un pasajero  $q \in \mathcal{P}$  denotamos por  $o(q)$  y  $e(q)$  sus locaciones de origen y destino, respectivamente. En el proceso de traslado, los vehículos utilizados corresponden a taxis, los cuales tienen una capacidad máxima de 4 pasajeros. Cada pasajero sólo tiene dos modalidades de viaje para alcanzar su destino: traslado desde el domicilio a la estación de destino mediante móvil, o traslado desde domicilio a una estación de transbordo para continuar en tren hacia el destino. Así, al transportar a un grupo de pasajeros, algunos llegarán a su destino de manera directa en taxi y otros tendrán que realizar un transbordo en alguna estación de tren. Claramente, no tiene sentido que un móvil visite una estación si no es para dejar algún pasajero, por lo cual asumiremos en adelante que al menos un pasajero desciende de un taxi que visita una estación.

Consideremos el ejemplo en la Fig. 3.1. La línea de trenes está representada por las estaciones  $e, e_1, e_2$ , y para un par de pasajeros  $p_1, p_2$  denotamos por simplicidad sus locaciones de origen por  $o_1, o_2$ , y las estaciones de destino por  $e_1, e_2$ , respectivamente. En la figura se representan dos opciones de traslado para estos pasajeros: la graficada por la línea continua, donde se recoge a los trabajadores en el orden  $(p_2, p_1)$  y luego son llevados hasta  $e$ , estación en que ambos realizan el transbordo al tren y continúan en direcciones opuestas hacia sus destinos; y la trazada por la línea discontinua, en la que el móvil recoge a los pasajeros en el orden  $(p_1, p_2)$  para luego dirigirse a  $e_1$ , estación en que sólo desciende  $p_1$ , y continuar hasta  $e$ , donde el pasajero  $p_2$  realiza el transbordo.



**Figura 3.1:** Ejemplo de representación de la red para dos opciones de traslado pasajeros.

En el ejemplo, la elección entre estas dos opciones de traslado estaría dada, en primera instancia, por verificar si ambos trayectos son factibles, en términos de si cumplen o no las restricciones de tiempo impuestas como horarios de inicio de jornada y tiempo máximo de viaje, y de ser así, optar por la de menor costo posible. Sin embargo, como la red de trenes es mucho más extensa que la ejemplificada, la elección de la ruta óptima no sólo se remite a dos opciones, sino que a un número mucho mayor. Debido a la gran cantidad de rutas factibles para cada uno de los conjuntos posibles de pasajeros, será conveniente dividir en dos etapas la elección del trayecto óptimo:

- **Etapa 1:** Determinaremos para cada grupo de pasajeros las rutas Pareto optimales que puede seguir el vehículo durante el traslado una vez que se detiene en una estación de trenes, donde el criterio de optimalidad estará dado por el tiempo de viaje desde la estación de origen hasta la de destino, para cada uno de los pasajeros a bordo, y el costo del trayecto que realice el taxi durante esta operación.
- **Etapa 2:** Para cada tupla de pasajeros, es decir, para cada grupo y su respectivo orden de recogida, buscaremos una ruta óptima una vez que asciende el último pasajero al

vehículo, lo que se reduce a encontrar la estación de primera parada óptima utilizando lo estimado en la etapa anterior.

En las siguientes secciones describiremos en extenso los procedimientos seguidos en cada una de estas etapas.

## 3.2. Primera Etapa

En esta etapa nos interesa encontrar las mejores opciones de viaje, en cuanto a tiempo y costo, para un grupo de pasajeros a bordo de un vehículo que se encuentra detenido en una estación  $d \in \mathcal{E}$ .

Comencemos analizando el caso más simple, es decir, de un móvil con un único pasajero a bordo. Sea  $(d, e)$  el par de estaciones relativas a la ubicación del móvil y al destino del pasajero, respectivamente. Debido a que en nuestro modelo cada vez que un vehículo se detiene en una estación debe al menos descender un pasajero, para este caso la única opción de viaje del trabajador es que descienda en  $d$  y continúe su viaje en tren hasta  $e$ . Luego, el conjunto Pareto  $\mathcal{S}_{d,e}$  posee sólo un elemento,  $(\Delta_{d,e}^{mtr}, 0)$ , donde la primera coordenada corresponde al tiempo de viaje en metro desde la estación de descenso  $d$  a la estación de destino  $e$  y la segunda al costo de este traslado, que resulta ser cero dado que no contempla uso de taxi y el uso de trenes es asumido como un costo marginal para Metro.

Consideremos ahora el caso de un móvil con dos pasajeros. Para cada tripleta de estaciones  $(d, e_1, e_2)$  se puede también determinar el conjunto  $\mathcal{S}_{d,e_1,e_2}$  de tripletas  $(\delta_1, \delta_2, C)$  tales que dos personas que estén en un móvil en la estación  $d$ , la primera con destino  $e_1$  y la segunda con destino  $e_2$ , requieren tiempos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  para llegar a sus destinos y lo pueden hacer a un costo  $C$  si al menos uno de los pasajeros desciende en la estación  $d$ . El conjunto  $\mathcal{S}_{d,e_1,e_2}$  contiene todas las opciones de viaje factibles siempre que éstas correspondan a tuplas *no dominadas*, es decir, que no exista otra tupla en el conjunto con coordenadas de tiempo y costo menores. Lo anterior es también aplicable cuando el conjunto de estaciones de destino es de tamaño 3 o 4, donde de igual manera serán ignoradas las tuplas dominadas dentro de los conjuntos Pareto correspondientes.

En la siguiente sección veremos una definición que se presta mejor para la determinación algorítmica de los conjuntos Pareto.

### 3.2.1. Cálculo de Conjuntos Pareto

El conjunto de tuplas de pasajeros, donde la posición dentro del vector indica el orden de recogida del trabajador, se define como

$$\vec{\mathcal{P}} := \{\vec{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r \mid p_j \neq p_k \text{ si } j \neq k, r \in [4]\},$$

donde hemos usado la convención  $[m] = \{1, \dots, m\}$ .

Para el cálculo de los conjuntos Pareto, iremos introduciendo algunas notaciones a medida que avancemos en el desarrollo. Comenzamos con las siguientes:

- $\Delta_{\ell, \ell'}^{taxi}$  Tiempo en ir desde la localización  $\ell$  a la  $\ell'$  utilizando sólo taxi y sin toma o descenso de pasajeros durante el tramo. En particular, notar que  $\Delta_{\ell, \ell'}^{taxi} = 0$  si y sólo si  $\ell = \ell'$ .
- $\Delta_{\ell, \vec{\ell}}^{taxi}$  Vector cuya  $k$ -ésima coordenada es el tiempo que le toma a un taxi ir desde la localización  $\ell$  a la  $(\vec{\ell})_k$  sin que haya descenso o toma de pasajeros durante el tramo.
- $\Delta_{\ell, \ell'}^{mtr}$  Tiempo en ir desde la localización  $\ell$  a la  $\ell'$  utilizando sólo metro. Notar que  $\Delta_{\ell, \ell'}^{mtr} = 0$  si y sólo si  $\ell = \ell'$ .
- $\Delta_{\ell, \vec{\ell}}^{mtr}$  Vector cuya  $k$ -ésima coordenada es el tiempo que le toma al pasajero ir desde la localización  $\ell$  a la  $(\vec{\ell})_k$  utilizando sólo metro.
- $C_{\ell, \ell'}$  Costo del trayecto en móvil de ir desde la localización  $\ell$  a la  $\ell'$  sin toma o descenso de pasajeros durante el tramo. Notar que  $C_{\ell, \ell'} = 0$  si y sólo si  $\ell = \ell'$ .

Para una tupla de pasajeros  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$  con vector de estaciones de destino  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_r) \subseteq \mathcal{E}^r$ , donde  $e_j$  es la estación de trabajo del pasajero  $p_j$ , y una estación  $d \in \mathcal{E}$  cualquiera, queremos determinar el conjunto  $\mathcal{S}_{d; e_1, \dots, e_r}$  de todas las tuplas  $(\delta_1, \dots, \delta_r, C)$ , donde  $\delta_j$  es el tiempo de viaje del pasajero  $p_j$  desde la estación  $d$  hasta su destino  $e_j$ , y  $C$  es el costo total del traslado de los pasajeros.

Veremos que el conjunto  $\mathcal{S}_{d; e_1, \dots, e_r}$  se puede expresar de manera recursiva, y para hacerlo introducimos nuevamente notación. Para una tupla  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$  decimos que  $\vec{y}$  es una *subtupla* si existe un conjunto de índices  $I \subseteq [r]$ , tal que  $(\vec{x})_I := (x_i : i \in I)$  es igual a  $\vec{y}$ . En otras palabras,  $\vec{y}$  es subtupla de  $\vec{x}$  si existe un subconjunto de índices  $I$  de coordenadas de  $\vec{x}$  tales que  $\vec{y}$  es la proyección de  $\vec{x}$  en las coordenadas en  $I$ .

Ahora, dada una tupla de pasajeros  $\vec{p}$  las opciones de viaje se definen según qué pasajeros descienden en  $d$  y cuáles continúan a bordo del vehículo, es decir, si desciende la subtupla  $\vec{q} = (\vec{p})_I$ ,  $I \subseteq [r]$ , en la estación  $d$ , los tiempos de viajes de los pasajeros que descienden

quedan determinados únicamente por la duración del trayecto en metro hacia sus lugares de trabajo, mientras que los pasajeros restantes  $\vec{q}' = (\vec{p})_{[r]\setminus I}$  que siguieron en el vehículo hacia una estación  $d'$  tendrán tiempos determinados por las opciones de ruta que nos entregue  $\mathcal{S}_{d';\vec{e}'}$  donde  $\vec{e}' = (\vec{e})_{[r]\setminus I}$ .

Recordando que cada vez que el móvil se detiene en una estación debe descender al menos un pasajero, para el caso  $r = 1$  definimos los conjuntos Pareto por:

$$\mathcal{S}_{d;e} = \{(\Delta_{d,e}^{mtr}, 0)\}.$$

Para abordar el caso general, necesitamos notación extra. Específicamente, si  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$  y  $k \in [r]$ , denotamos por  $(\vec{x})_{-k}$  a la tupla en  $\mathbb{R}^{r-1}$  que se obtiene a partir de  $\vec{x}$  eliminando su coordenada  $k$ , es decir,  $(\vec{x})_{-k} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_r)$ . Además, para  $x_0 \in \mathbb{R}$  definimos  $x_0 + \vec{x}$  como la tupla en  $\mathbb{R}^r$  cuya  $j$ -ésima coordenada es  $x_0 + x_j$  para  $j \in [r]$ . Luego, para  $r > 1$  y  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{E}^r$ , definimos

$$\mathcal{S}_{d;\vec{e}} = \text{Pareto}\left(\bigcup_{d' \in \mathcal{E}} \mathcal{S}_{d';\vec{e}}^d\right) \quad (3.1)$$

donde la función Pareto toma un conjunto y retorna los puntos no-dominados de éste, y  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}^d$  corresponde al conjunto de tuplas de la forma  $(\vec{\delta}, C)$  tales que existe un  $k \in [r]$  y  $(\vec{\delta}', C') \in \mathcal{S}_{d';(\vec{e})_{-k}}$  para los cuales  $(\vec{\delta}, C)$  es un  $k$ -levantamiento de  $(\vec{\delta}', C')$ , es decir, se cumple lo siguiente:

1. el pasajero  $k$  desciende en la estación  $d$  y el tiempo  $(\vec{\delta})_k$  que le toma llegar a su estación de destino  $e_k$  está dado por el tiempo que requiere el metro en ir de la estación  $d$  a la estación  $e_k$  (o sea,  $(\vec{\delta})_k = \Delta_{d,e_k}^{mtr}$ ),
2. el tiempo de viaje  $(\vec{\delta})_j$  del pasajero  $j \neq k$  es el tiempo que le toma al taxi ir de la estación  $d$  a la  $d'$  más el tiempo de viaje dado por  $(\vec{\delta}')_j$  requerido para ir de la estación  $d'$  a la  $e_j$  (o sea,  $(\vec{\delta})_j = \Delta_{d,d'}^{taxi} + (\vec{\delta}')_j$ ), y
3. el costo  $C$  es el costo para el taxi de ir de la estación  $d$  a la  $d'$  más el costo asociado a la ruta dada por  $\vec{\delta}'$  (o sea,  $C = C_{d,d'} + C'$ ).

Equivalentemente,

$$\mathcal{S}_{d;\vec{e}}^d = \bigcup_{k \in [r]} \left\{ (\vec{\delta}, C) \in \mathbb{R}^{r+1} : \begin{array}{l} (\vec{\delta})_k = \Delta_{d,e_k}^{mtr}, \quad (\vec{\delta})_{-k} = \Delta_{d,d'}^{taxi} + \vec{\delta}', \quad C = C_{d,d'} + C', \\ (\vec{\delta}', C') \in \mathcal{S}_{d';(\vec{e})_{-k}} \end{array} \right\}.$$

Por ejemplo, para  $d, e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{S}_{d;e_1,e_2} = \text{Pareto} \left( \begin{aligned} & \bigcup_{d' \in \mathcal{E}} \{(\Delta_{d,e_1}^{mtr}, \Delta_{d,d'}^{txi} + \Delta, C_{d,d'} + C) : (\Delta, C) \in \mathcal{S}_{d';e_2}\} \\ & \cup \{(\Delta_{d,d'}^{txi} + \Delta, \Delta_{d,e_2}^{mtr}, C_{d,d'} + C) : (\Delta, C) \in \mathcal{S}_{d';e_1}\} \end{aligned} \right).$$

Notemos que la definición del caso general (implícitamente) contempla la posibilidad de que en una parada descienda más de un pasajero, ya que si consideramos como siguiente parada a la estación actual, i.e.  $d' = d$ , permitimos que el taxi permanezca detenido pero “forzamos” a otro pasajero a descender del vehículo (dado nuestro supuesto que al menos un pasajero desciende de un taxi cuando este último visita una estación y por nuestra convención  $\Delta_{d,d'}^{txi} = 0$ ).

Más adelante discutiremos algoritmos para determinar  $\text{Pareto}(\cdot)$ . Primero, observemos que la anterior definición recursiva de  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  da lugar, de manera natural, a un procedimiento recursivo para su cálculo. Lamentablemente, el procedimiento resulta potencialmente ineficiente, en particular si el conjunto de estaciones  $\mathcal{E}$  es grande. El resultado que presentamos a continuación da lugar a un pre-proceso que dados  $d$  y  $\vec{e}$  permite pre-calcular eficientemente un subconjunto de estaciones  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(d, \vec{e})$  necesarias a considerar en la unión en (3.1) el cual será especialmente útil cuando las estaciones de destinos finales  $\vec{e}$  sean cercanas entre sí.

**Nota.** Para que la fórmula recursiva (3.1) sea válida inclusive para el caso  $r = 1$  adoptamos la siguiente convención:

$$\mathcal{S}_{d;e}^{d'} = \begin{cases} \{(\Delta_{d,e}^{mtr}, 0)\} & \text{si } d = d', \\ \emptyset & \text{si } d \neq d'. \end{cases} \quad (3.2)$$

Antes de enunciar nuestro próximo resultado necesitamos fijar un orden entre las estaciones de trenes. Para ello consideremos un sentido (cualquiera de los dos posibles) del recorrido del tren de una de las estaciones terminales a la otra. El orden en que el tren recorre dichas estaciones define un orden total en  $\mathcal{E}$  que en adelante denotaremos  $\preceq$ . Notar que

$$\Delta_{d,e}^{mtr} \leq \Delta_{d',e}^{mtr} \quad \text{para todo } d' \preceq d \preceq e \quad \text{ó} \quad e \preceq d \preceq d' \quad (\text{Monotonía de } \Delta_{\star,e}^{mtr})$$

y

$$\Delta_{d,e}^{mtr} \leq \Delta_{d,e'}^{mtr} \quad \text{para todo } d \preceq e \preceq e' \quad \text{ó} \quad e' \preceq e \preceq d \quad (\text{Monotonía de } \Delta_{d,\star}^{mtr})$$

**Proposición 3.** Sea  $d \in \mathcal{E}$  y  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{E}^r$  con  $r \geq 1$ . Sean,  $e_{izq} = \min\{d, e_1, \dots, e_r\}$  y  $e_{der} = \max\{d, e_1, \dots, e_r\}$  donde el mínimo y máximo es con respecto al orden  $\preceq$ . Definimos:

- $e^{(i)}$  como la menor (con respecto a  $\preceq$ ) estación  $e' \in \mathcal{E}$  tal que  $\Delta_{e',e_{izq}}^{mtr} \leq \Delta_{d,e_{izq}}^{mtr}$ .

- $e^{(f)}$  como la mayor (con respecto a  $\preceq$ ) estación  $e' \in \mathcal{E}$  tal que  $\Delta_{e',e_{der}}^{mtr} \leq \Delta_{d,e_{der}}^{mtr}$ .

Se tiene que

$$\mathcal{S}_{d;\vec{e}} = \text{Pareto} \left( \bigcup_{e^{(i)} \preceq d' \preceq e^{(f)}} \mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'} \right).$$

*Demostración.* Probaremos que  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}} \subseteq \text{Pareto} \left( \bigcup_{e^{(i)} \preceq d' \preceq e^{(f)}} \mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'} \right)$ . La otra inclusión es obvia.

Veamos primero que,  $e^{(i)} \preceq e_{izq} \preceq d$ . En efecto, como  $\Delta_{d,e_{izq}}^{mtr} \leq \Delta_{d,e_{der}}^{mtr}$ , por definición de  $e^{(i)}$ , sigue que  $e^{(i)} \preceq e_{izq}$ . Trivialmente  $e_{izq} \preceq d$  así que se tiene lo afirmado. Análogamente, se verifica que  $d \preceq e_{der} \preceq e^{(f)}$ .

La demostración la haremos por inducción en  $r$ . Si  $r = 1$  la igualdad es trivial (independiente de los valores que tomen  $e^{(i)}$  y  $e^{(f)}$ ) dado que por un lado  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}} = \{(\Delta_{d,e_1}^{mtr}, 0)\}$  (por definición) y por otro lado  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'} = \{(\Delta_{d,e_1}^{mtr}, 0)\}$  si  $d = d'$  y  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'} = \emptyset$  si  $d \neq d'$  (por convención).

Supongamos ahora que  $r > 1$ . Sea  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$ . Por la formulación recursiva de  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  (ver (3.1)), existe  $d' \in \mathcal{E}$  tal que  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'}$ . Basta verificar que  $e^{(i)} \preceq d' \preceq e^{(f)}$ . Veamos que  $e^{(i)} \preceq d'$  (la demostración de  $d' \preceq e^{(f)}$  es análoga). Por definición de  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'}$  sabemos que  $(\vec{\delta}, C)$  es un  $k$ -levantamiento de  $(\vec{\delta}', C') \in \mathcal{S}_{d';(\vec{e})_{-k}}$  para algún  $k \in [r]$ . Para efectos de obtener una contradicción, supongamos que  $d' \preceq e^{(i)}$ ,  $d' \neq e^{(i)}$ . Afirmamos que  $(\vec{\delta}, C)$  esta dominado por otro elemento en  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$ . En efecto, sea  $k' \in [r]$ ,  $k' \neq k$ , el índice del pasajero que desciende en la estación  $d'$ . Sean  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^r$  y  $B \in \mathbb{R}$  los tiempos de traslado y el costo para el móvil del siguiente conjunto de rutas:

- el móvil mantiene el recorrido determinado por  $(\vec{\delta}, C)$ ,
- el  $j$ -ésimo pasajero,  $j \neq k'$ , sigue la misma ruta que la determinada por  $(\vec{\delta}, C)$ ,
- el  $k'$ -ésimo pasajero, en vez de descender del móvil en la estación  $d'$ , se apea en la estación  $d$  junto con el  $k$ -ésimo pasajero.<sup>MK</sup>

Claramente,  $B = C$  y para todo  $j \neq k'$  se tiene que  $(\vec{\beta})_j = (\vec{\delta})_j$ . Consideremos dos casos:

- Caso  $d \preceq e_{k'}$ : Luego,  $d' \preceq e^{(i)} \preceq e_{izq} \preceq d \preceq e_{k'}$  y

$$(\vec{\beta})_{k'} = \Delta_{d,e_{k'}}^{mtr} \leq \Delta_{d',e_{k'}}^{mtr} < \Delta_{d,d'}^{taxi} + \Delta_{d',e_{k'}}^{mtr} = (\vec{\delta})_{k'},$$

donde la primera desigualdad se tiene por Monotonía de  $\Delta_{*,e}^{mtr}$  y la segunda porque  $\Delta_{e,e'}^{taxi} \neq 0$  si  $e \neq e'$ .



- Caso  $e_{k'} \preceq d$ : Luego, por definición de  $e_{izq}$  tenemos que  $d' \preceq e^{(i)} \preceq e_{izq} \preceq e_{k'} \preceq d$  y

$$(\vec{\beta})_{k'} = \Delta_{d,e_{k'}}^{mtr} \leq \Delta_{d,e_{izq}}^{mtr} \leq \Delta_{d',e_{izq}}^{mtr} \leq \Delta_{d',e_{k'}}^{mtr} < \Delta_{d,d'}^{txi} + \Delta_{d',e_{k'}}^{mtr} = (\vec{\delta})_{k'},$$

donde la primera y tercera desigualdad se tienen por monotonía, la segunda por definición de  $e^i$  y la última desigualdad porque  $\Delta_{e,e'}^{txi} \neq 0$  si  $e \neq e'$ .

Observando que o  $(\vec{\beta}, B) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  o esta a su vez esta dominada por otro elemento en  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$ , sigue que  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  esta dominada (porque dominancia es una relación transitiva), obteniéndose una contradicción. Luego,  $e^{(i)} \preceq d$ , como queríamos establecer, concluyendo así la demostración del paso inductivo y el resultado.  $\square$

Como consecuencia directa de la Proposición 3 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario.** Sea  $d \in \mathcal{E}$  y  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{E}^r$  con  $r \geq 1$ . Sean,  $e^{(i)}$  y  $e^{(f)}$  como en la Proposición 3. Se tiene que

$$\mathcal{S}_{d;\vec{e}} = \text{Pareto} \left( \bigcup_{e^{(i)} \preceq d' \preceq e^{(f)}} \mathcal{S}_{d;\vec{e}}^{d'} \right).$$

Consideremos ahora un elemento  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$ . El resultado anterior también da lugar a un procedimiento para determinar una ruta de costo  $C$  para un móvil que primero visita la estación  $d$  con pasajeros a bordo cuyos destinos están dados por  $\vec{e} \in (\mathcal{E})^r$ , donde al  $j$ -ésimo pasajero le toma tiempo  $(\vec{\delta})_j$  ir desde la estación  $d$  a su estación de destino. En efecto, si al determinar recursivamente los elementos en  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  nos preocupamos de mantener, para cada uno de ellos, registro de un  $k \in [r]$  y un  $(\vec{\beta}, B) \in \mathcal{S}_{d';(\vec{e})_{-k}}$  del cual  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  es un  $k$ -levantamiento, y procediendo de igual forma para  $(\vec{\beta}, B)$ , podemos recursivamente determinar un trayecto del móvil que visita (en orden) las estaciones  $d =: d_1, \dots, d_{r'} \in \mathcal{E}$ ,  $r' \leq r$ , y las respectivas estaciones en que cada uno de los pasajeros del móvil descende (al menos un pasajero por estación visitada). Por esto decimos que cada elemento  $(\vec{\delta}, C) \in \mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  esta asociado (o determina) una ruta de costo  $C$  para un móvil localizado en  $d$  y sus pasajeros con destinos  $\vec{e}$ .

El procedimiento algorítmico que usaremos para calcular los conjuntos Pareto se basa en la formulación recursiva de la Proposición 3.2.1. Sólo nos falta especificar como implementar algorítmicamente la función Pareto( $\cdot$ ). En la siguiente subsección trataremos algunos algoritmos que permiten realizar esta tarea, siendo uno de estos el escogido para ser puesto en práctica en la resolución de nuestro problema.

### 3.2.1.1. Métodos para Encontrar un Conjunto No-dominado

El problema de encontrar el conjunto de puntos no dominados también es conocido como *maximal vector problem* (problema del vector maximal) y ha sido estudiado ampliamente debido a su utilidad en múltiples aplicaciones. Los algoritmos propuestos inicialmente utilizan la técnica de “dividir y conquistar”, basada en la resolución recursiva de un problema dividiéndolo en dos o más subproblemas de igual tipo o similar, donde el proceso continúa hasta que éstos lleguen a ser lo suficientemente sencillos como para ser resueltos directamente y así obtener una solución del problema inicial a partir de las obtenidas en cada uno de los subproblemas. Los primeros trabajos que abordaron el problema del vector maximal [5], suponían que todos los datos a utilizar durante el proceso de cálculo residían en la memoria principal. Sin embargo, hoy en día es común enfrentarse a grandes conjuntos de datos que son almacenados en la memoria secundaria. Debido a esto, el problema del vector maximal ha sido redescubierto en el contexto de bases de datos donde se denomina *skyline problem* [4], que contempla la posibilidad de que el conjunto de datos sobrepase la capacidad de la memoria principal para ser procesado. Este es el caso más probable en los sistemas de bases de datos modernos, en los que el conjunto de datos se recupera de una memoria externa.

Formalmente, decimos que una tupla  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  domina a la tupla  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  (o que  $\vec{y}$  esta dominada por  $\vec{x}$ ) si  $y_j \leq x_j$  para todo  $j \in [m]$ . Para trabajar con los conjuntos  $\mathcal{S}_{d;e_1,\dots,e_r}$  la idea es que estos sólo contengan tuplas no dominadas, ya que carece de sentido utilizar rutas para las cuales existen alternativas más económicas y con menores tiempos de viaje para todos los pasajeros transportados.

Para eliminar los puntos dominados de un conjunto revisaremos tres métodos, donde los primeros dos corresponden a un enfoque más simple basado en la comparación de cada tupla con el resto del conjunto, mientras que el tercero es del tipo división y conquista, que posee la ventaja de ser más eficiente al trabajar con grandes cantidades de datos.

**Método 1 (Fuerza Bruta):** En este procedimiento cada tupla  $s$  en  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^m$  es comparada con el resto de las tuplas del conjunto  $\mathcal{I}$  para chequear si corresponde o no a un punto no-dominado. Marcaremos la tupla  $s$  si no existe otra en  $\mathcal{I}$  que la domine. El pseudocódigo se muestra a continuación:

**Algorithm 1**

---

```
1: procedure FUERZABRUTA( $\mathcal{I}$ )
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   while  $\mathcal{I} \neq \emptyset$  do
4:     Elegir  $s' \in \mathcal{I}$  cualquiera.
5:     if  $s'$  no esta dominado por  $s, \forall s \in \mathcal{I}$  then  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{s'\}$ 
6:      $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \setminus \{s'\}$ 
7:   return ( $\mathcal{S}$ )
```

---

El paso 5 del algoritmo anterior requiere  $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|)$  comparaciones de tuplas de tamaño  $r$ , por lo que toma  $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|r)$  pasos. Como la verificación es parte de un loop que se realiza  $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|)$  veces, en total FUERZABRUTA toma tiempo  $\mathcal{O}(r|\mathcal{I}|^2)$ .

**Método 2 (Criba):** En esta estrategia, para una tupla  $s$  en  $\mathcal{I}$  se examina si existen elementos en el conjunto que estén dominados por  $s$ , y de ser así, éstos son eliminados de  $\mathcal{I}$ . Luego, se escoge una nueva tupla en el conjunto resultante, distinta a la anterior, y se repite el proceso. De un análisis similar al aplicado al algoritmo FUERZABRUTA pero aplicado ahora al Algoritmo 2 podemos ver que en el peor de los casos el proceso completo también toma tiempo  $\mathcal{O}(r|\mathcal{I}|^2)$ . Sin embargo, haciendo un análisis superficial de tipo promedio da indicios de una reducción (en factores constantes) en la cantidad de pasos esperados respecto del método basado en fuerza bruta. En éste último, para  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^r$ , tenemos que el número de comparaciones está dado por

$$\#Comp = r \sum_{i=1}^{|\mathcal{I}|} (|\mathcal{I}| - i) = \frac{r|\mathcal{I}|^2}{2} - \frac{r|\mathcal{I}|}{2}$$

---

**Algorithm 2**

---

```
1: procedure CRIBA( $\mathcal{I}$ )
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $\mathcal{I}' \leftarrow \mathcal{I}$ 
4:   while  $\mathcal{S} \neq \mathcal{I}'$  do
5:     Elegir  $s \in \mathcal{I}' \setminus \mathcal{S}$ 
6:      $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$ 
7:     for  $s' \in \mathcal{I}'$  do
8:       if  $s'$  dominado por  $s$  then  $\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D} \cup \{s'\}$ 
9:      $\mathcal{I}' \leftarrow \mathcal{I}' \setminus \mathcal{D}$ 
10:     $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{s\}$ 
11:  return ( $\mathcal{I}'$ )
```

---

el cual es independiente de la cantidad de puntos no-dominados presentes en el conjunto. Para CRIBA, el número de comparaciones sí depende de esta cantidad y también del orden en que es revisada cada una de las tuplas. Por ejemplo, si hay un sólo punto no dominado en el conjunto y este es revisado en la  $j$ -ésima iteración del bucle del paso 4, entonces hay a lo más  $j$  iteraciones, por lo tanto el número máximo de comparaciones es  $r \sum_{i=1}^j (|\mathcal{I}| - i)$ . Luego, asumiendo que el elemento contra el cual hacer las comparaciones se elige uniformemente entre los elementos de  $\mathcal{I}'$  en el paso 5, dada la probabilidad  $\frac{1}{|\mathcal{I}'|}$  de que esté en la posición  $j$  tenemos que el número esperado de comparaciones para un conjunto con 1 punto no dominado es a lo más

$$\#Comp = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} \frac{1}{|\mathcal{I}'|} r \sum_{i=1}^j (|\mathcal{I}| - i) = \frac{r|\mathcal{I}|^2}{3} - \frac{r}{3}.$$

Si bien hay un factor constante de reducción en el número de comparaciones de CRIBA con respecto a FUERZABRUTA, bajo ciertos supuestos sobre el conjunto de puntos inicial y la cantidad de elementos no dominados es de esperar que CRIBA sea en la práctica inclusive un orden de magnitud más rápido que FUERZABRUTA.

**Método 3 (Kung):** En este procedimiento primero se ordenan las tuplas de forma ascendente en sus coordenadas. Luego, el conjunto  $\mathcal{I}$  es recursivamente dividido en un subconjunto superior ( $\mathcal{T}$ ) y otro inferior ( $\mathcal{B}$ ). Éste último es luego examinado para ver qué tuplas están dominadas respecto del subconjunto superior, donde las que no estén dominadas serán unidas junto a  $\mathcal{T}$  formando  $\mathcal{M}$ . El pseudocódigo correspondiente se describe a continuación:

---

**Algorithm 3**

---

```

1: procedure KUNG( $\mathcal{I}$ )
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \text{SORT}(\mathcal{I})$            ▷ Ordena las tuplas respecto de la primera coordenada. Si dos o más tuplas coinciden
                                       en sus primeras coordenadas, éstas se ordenan acorde al valor de la segunda, exten-
                                       diéndose el proceso al resto de coordenadas de ser necesario.
3:   return (FRONT( $\mathcal{S}$ ))

4: procedure FRONT( $\mathcal{S}$ )
5:   if  $|\mathcal{S}| = 1$  then
6:     return ( $\mathcal{S}$ )
7:   else                               ▷  $\mathcal{S}(i : j)$  denota el conjunto de elementos de  $\mathcal{S}$  de índices  $i$  a  $j$ .
8:      $\mathcal{T} \leftarrow \text{FRONT}(\mathcal{S}(1 : \lfloor |\mathcal{S}|/2 \rfloor))$ 
9:      $\mathcal{B} \leftarrow \text{FRONT}(\mathcal{S}(\lfloor |\mathcal{S}|/2 \rfloor + 1 : |\mathcal{S}|))$ 
10:     $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{T}$ 
11:    if  $s$  en  $\mathcal{B}$  no es dominado por  $s'$ ,  $\forall s' \in \mathcal{T}$  then
12:       $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M} \cup \{s\}$ 
13:    return ( $\mathcal{M}$ )

```

---

Como se aprecia en la descripción del Algoritmo 3, la función FRONT es llamada recursiva-

mente a medida que el conjunto de entrada es dividido en un subconjunto  $\mathcal{T}$ , que va desde la primera tupla hasta la mediana del conjunto, y otro  $\mathcal{B}$ , que contiene la mitad restante. Para  $r$  pasajeros (con tuplas de dimensión  $r + 1$ ) el método de Kung [3] toma tiempo  $\mathcal{O}(|\mathcal{I}|(\log |\mathcal{I}|)^{r-1})$  para  $r \geq 2$  y  $\mathcal{O}(|\mathcal{I}| \log |\mathcal{I}|)$  para  $r = 1$ .

Si bien el algoritmo de división y conquista no es difícil de implementar, dado que el algoritmo CRIBA tiene una implementación aún más sencilla (comparativamente igual de sencilla que FUERZABRUTA pero en la práctica seguramente más eficiente) y que como veremos más adelante el cálculo de los conjuntos Pareto no es el principal cuello de botella de los esquemas de resolución del TPO, adoptaremos el método CRIBA durante la búsqueda de los conjuntos no-dominados, priorizando la sencillez del algoritmo por sobre su eficiencia.

### 3.3. Segunda Etapa

En esta sección abordaremos cómo determinar, para una secuencia de pasajeros  $\mathcal{P}^r$  y un subintervalo de tiempo  $\tau \in \mathcal{T}$ , una trayectoria factible y su costo mínimo para un móvil que recoge a los pasajeros  $\vec{p}$  (en el orden establecido por las coordenadas de la tupla), siendo el primer pasajero recogido en el subintervalo  $\tau$ . Aquí, factible quiere decir que se satisfacen todas las restricciones requeridas, en particular, en lo que se refiere a las horas de ingreso de los pasajeros, los tiempos máximos en ruta de cada pasajero, etc.

Consideremos una tupla de pasajeros  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$ , donde la posición de los elementos en la tupla indica el orden de recogida por el taxi asignado. Denotaremos por  $d^*(\vec{p}, \tau)$  a la estación óptima para la primera parada de descenso de un móvil con la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  a bordo y que inicia su viaje en el subintervalo  $\tau$ . Para la elección de esta estación se deben antes conocer los horarios de entrada de los pasajeros en la tupla, ya que el traslado debe permitir que cada trabajador alcance su lugar de trabajo dentro del horario establecido. Denotamos por  $h(q)$ ,  $o(q)$  y  $e(q)$  el horario de entrada, el punto de retiro y la estación de destino, respectivamente, de un pasajero  $q \in \mathcal{P}$ . Recordemos además que hay un límite para el tiempo total de traslado, el cual puede depender de cada trabajador. Sin embargo, por simplicidad, asumiremos que es idéntico para todos y lo denotamos  $T_{\max}$ .

Comencemos calculando el costo del viaje si la primera parada de descenso es la estación  $d$  y se inicia el traslado en  $\tau$ . En adelante, para no sobrecargar la notación, denotaremos  $h(p_j)$ ,  $o(p_j)$  y  $e(p_j)$  por  $h_j$ ,  $e_j$  y  $o_j$ , respectivamente, y por  $\vec{e}$  a la tupla  $(e_1, \dots, e_r)$ . Se puede determinar la hora de llegada a  $d$  calculando el tiempo de viaje desde que se recoge al primer pasajero,  $p_1$ , hasta que el taxi arriba en la estación  $d$ . A este tiempo lo denotaremos  $T_d(\vec{p})$  y corresponde a la suma de los tiempos de viaje entre retiro de pasajeros más el tiempo de

traslado hasta la estación  $d$  desde que se recoge al último pasajero  $p_r$ , es decir,

$$T_d(\vec{p}) = \Delta_{o_r, d}^{txi} + \sum_{j=1}^{r-1} \Delta_{o_j, o_{j+1}}^{txi}$$

Así, para un móvil que comienza su viaje en el subintervalo  $\tau = [\tau_i, \tau_f)$  consideraremos que la hora de llegada a la estación  $d$  será a lo más  $\tau_f + T_d(\vec{p})$ , lo que nos da una holgura de tiempo para el pasajero  $p_j$  de  $h_j - (\tau_f + T_d(\vec{p}))$  (es decir, el tiempo máximo restante que se puede demorar el pasajero en llegar a su destino final desde que el móvil visita la estación de metro  $d$ ). Esto se traduce en que las rutas factibles a seguir una vez que el móvil se encuentra en  $d$  se limitan a aquellas ligadas a elementos  $s$  del conjunto de Pareto  $\mathcal{S}_{d; \vec{e}}$  que satisfagan las restricciones relativas a la hora de entrada de los pasajeros del móvil y al tiempo máximo de viaje, es decir, para  $\delta_j(s)$  coordenada de tiempo de  $p_j$  en  $s$  tenemos:

$$\delta_j(s) \leq h_j - (\tau_f + T_d(\vec{p})), \quad \forall j = 1, \dots, r. \quad (3.1)$$

$$\delta_j(s) \leq T_{\max} - (\tau_f - \tau_i + \Delta_{o_r, d}^{txi} + \sum_{k=j}^{r-1} \Delta_{o_k, o_{k+1}}^{txi}), \quad \forall j = 1, \dots, r. \quad (3.2)$$

En adelante, a los  $s$  en  $\mathcal{S}_{d; \vec{e}}$  que satisfagan las restricciones anteriores los denotaremos  $\mathcal{S}_{d; \vec{e}}(\vec{p}, \tau)$ . Notar que todo punto Pareto  $s \in \mathcal{S}_{d; \vec{e}}$  tiene asociada una ruta, a saber, aquella que sigue el móvil partiendo en la estación  $d$  y trasladando a los pasajeros a las estaciones en el orden requerido de forma de que se puedan cumplir los tiempos y alcancen los costos de desplazamiento descritos por  $s$ . A dicha ruta la denotaremos  $R(s)$  y el tiempo y costo que le lleva al móvil completarla los notaremos  $\Delta^{txi}(s)$  y  $C(s)$ , respectivamente.

Tenemos ya todos los elementos para especificar cómo se determina la ruta óptima (de costo mínimo) de un móvil que recoge (en el orden especificado por) la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  buscando al primer pasajero durante el subintervalo  $\tau$ . En particular, el costo  $C^*(\vec{p}, \tau, d)$  de la mejor ruta tal que la primera parada del móvil es  $d \in \mathcal{E}$  es:

$$C^*(\vec{p}, \tau, d) = \min_{s \in \mathcal{S}_{d; \vec{e}}(\vec{p}, \tau)} \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} C_{o_j, o_{j+1}} + C_{o_r, d} + C(s) \right\}.$$

El punto  $s$  en que se alcanza el mínimo lo denotaremos  $s^*(\vec{p}, \tau, d)$ , donde empates son rotos de manera arbitraria (si el conjunto  $\mathcal{S}_{d; \vec{e}}(\vec{p}, \tau)$  fuese vacío, definimos  $C^*(\vec{p}, \tau, d)$  como  $+\infty$  y  $s^*(\vec{p}, \tau, d)$  queda indefinido). Sigue que la elección óptima de la primera parada de descenso  $d^*(\vec{p}, \tau)$  y el costo de la ruta de un móvil que transporta la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  y recoge al

primero durante el subintervalo  $\tau$  están dadas, respectivamente, por:

$$d^*(\vec{p}, \tau) = \arg \min_{d \in \mathcal{E}} C^*(\vec{p}, \tau, d),$$

$$C^*(\vec{p}, \tau) = \min_{d \in \mathcal{E}} C^*(\vec{p}, \tau, d).$$

A continuación se muestra, como pseudocódigo, la forma en que calculamos los costos  $C^*(\vec{p}, \tau)$  para  $\vec{p} \in \vec{\mathcal{P}}$  y  $\tau \in \mathcal{T}$ .

---

**Algorithm 4** Calcula costos  $C^*(\vec{p}, \tau)$  para todo  $\vec{p} \in (\mathcal{P})^k$  y  $\tau \in \mathcal{T}$

---

```

1: for  $Q \in \binom{\mathcal{P}}{k}$  do                                ▷ Itera sobre subconjuntos de  $k$  pasajeros
2:   for  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_k)$  permutación de  $Q$  do    ▷ Itera sobre permutaciones de  $Q$ 
3:      $\vec{e} \leftarrow (e_1, \dots, e_k)$  donde  $e_j = e(p_j)$ 
4:      $\vec{o} \leftarrow (o_1, \dots, o_k)$  donde  $o_j = o(p_j)$ 
5:     for  $\tau \in \mathcal{T}$  do                                ▷ Itera sobre los subintervalos de tiempo
6:       for  $d \in \mathcal{E}$  do                                ▷ Itera sobre la 1era estación visitada por el móvil
7:          $\mathcal{S}_d \leftarrow \mathcal{S}_{d;\vec{e}}(\vec{p}, \tau)$                 ▷ Calcula  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}(\vec{p}, \tau)$ 
8:          $s_d^* \leftarrow \arg \min_{s \in \mathcal{S}_d} \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} C_{o_j, o_{j+1}} + C_{o_r, d} + C(s) \right\}$     ▷ Calcula  $s^*(\vec{p}, \tau, d)$ 
9:          $C_d^* \leftarrow C_{fjo} + \sum_{j=1}^{r-1} C_{o_j, o_{j+1}} + C_{o_r, d} + C(s_d^*)$     ▷ Calcula  $C^*(\vec{p}, \tau, d)$ 
10:         $d^* \leftarrow \arg \min_{d \in \mathcal{E}} \{C_d^*\}$                 ▷ Calcula  $d^*(\vec{p}, \tau)$ 
11:         $C^*(\vec{p}, \tau) \leftarrow C_{d^*}^*$ 

```

---

Un análisis de complejidad superficial permite concluir que el algoritmo anterior requiere una cantidad elevada de pasos. En particular, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 1.** *El Algoritmo 4 determina  $C^*(\vec{p}, \tau)$  para todo  $\vec{p} \in (\mathcal{P})^k$  y  $\tau \in \mathcal{T}$  en tiempo  $\Omega(k|\mathcal{P}|^k \cdot |\mathcal{T}| \cdot |\mathcal{E}|)$ .*

En cierto sentido, la cota inferior del resultado anterior puede resultar muy optimista puesto que no toma en consideración los tamaños de los conjuntos de Pareto  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$ . Un análisis que considera dichos tamaños no resulta a priori evidente, dado que ni siquiera todos los conjuntos  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  son relevantes para el análisis. En efecto, si no existe  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_k)$  tal que  $\vec{e} = (e(p_j) : j \in [k])$ , el tamaño de  $\mathcal{S}_{d;\vec{e}}$  es irrelevante para el análisis de complejidad.

En lo que se refiere a cotas superiores, un análisis también obvio permite concluir lo siguiente.

**Lema 2.** *El Algoritmo 4 determina  $C^*(\vec{p}, \tau)$  para todo  $\vec{p} \in (\mathcal{P})^k$  y  $\tau \in \mathcal{T}$  en tiempo  $O(k|\mathcal{P}|^k \cdot |\mathcal{T}| \cdot |\mathcal{E}| \cdot \max_{d \in \mathcal{E}, \vec{e} \in \mathcal{E}^k} |\mathcal{S}_{d;\vec{e}}|)$ .*

Si bien las constantes ocultas en el Lema 1 y Lema 2 son parecidas, el factor  $\max_{d \in \mathcal{E}, \vec{e} \in \mathcal{E}^k} |\mathcal{S}_{d; \vec{e}}|$  podría ser grande (para efectos prácticos) restándole valor a la cota superior. Por esto último, en el capítulo siguiente, nos abocaremos más bien a un análisis empírico que además toma en cuenta un par de heurísticas, descritas a continuación, cuyo objetivo es mejorar la eficiencia empírica del Algoritmo 4.

1. Si los pasajeros  $Q \in \binom{P}{k}$  de un móvil están demasiado distantes entre ellos como para ser recogidos en el máximo tiempo  $T_{max}$  permitido para un trayecto, entonces es infactible que compartan un taxi. Si  $m = \binom{k}{2}$  y  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$  son los tiempos  $\Delta_{o_i, o_j}^{txi}$ ,  $i, j \in [k]$ ,  $i \neq j$ , entonces una cota inferior para el tiempo requerido por un móvil para recoger los pasajeros en  $Q$  es  $\sum_{i=1}^{k-1} t_i$ . Luego, si se cumple la siguiente condición,

$$\sum_{i=1}^{k-1} t_i \geq T_{max},$$

entonces se pueden omitir los Pasos 2 al 11 del Algoritmo 4.

2. Dado  $\vec{p} \in (\mathcal{P})^k$  se tiene el orden de recogida de los pasajeros, que permite calcular el tiempo que toma recogerlos, y también el tiempo mínimo para que el móvil recorra el trayecto desde el último domicilio visitado hasta la estación de metro más cercana. La suma de los referidos tiempos es una cota inferior en la duración del trayecto del primer pasajero en abordar el taxi, que debe ser a lo más el tiempo máximo  $T_{max}$  permitido para cualquier trayecto desde un domicilio a la estación de destino. Luego, si se cumple la siguiente condición

$$\sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{o_i, o_{i+1}}^{txi} + \min_{d \in \mathcal{E}} \Delta_{o_k, d}^{txi} \geq T_{max},$$

entonces se pueden omitir los Pasos 5 al 11 del Algoritmo 4.

3. Sea  $T_{adl}$  una cota superior en el tiempo por adelantado permitido para que un pasajero llegue a destino (por ejemplo, porque se considera que además de acotar el tiempo de trayecto es pertinente acotar el tiempo máximo entre que una persona sale de su domicilio hasta la hora en que debe llegar a destino). Entonces, basta ejecutar el ciclo del Paso 5 para los  $\tau \in \mathcal{T}$  tales que

$$\tau_f \geq \max_{j \in [k]} h_j - T_{max} - T_{adl}.$$

4. Ningún pasajero puede abordar un móvil con posterioridad a la hora de entrada a trabajar, de donde sigue que basta ejecutar el ciclo del Paso 5 para los  $\tau \in \mathcal{T}$  tales que

$$\tau_i \leq \min_{j \in [k]} h_j.$$



Las heurísticas anteriores pueden ser reforzadas a expensas de realizar más operaciones. La efectividad de este reforzamiento, y de hecho, la implementación de cada condición antes mencionada, seguramente dependerá de las instancias y parámetros a resolver. Es así como el costo versus beneficio de implementarlas seguramente recaerá en un análisis empírico, que es justamente el foco del siguiente capítulo.

# CAPÍTULO 4

---

## Evaluación Experimental

---

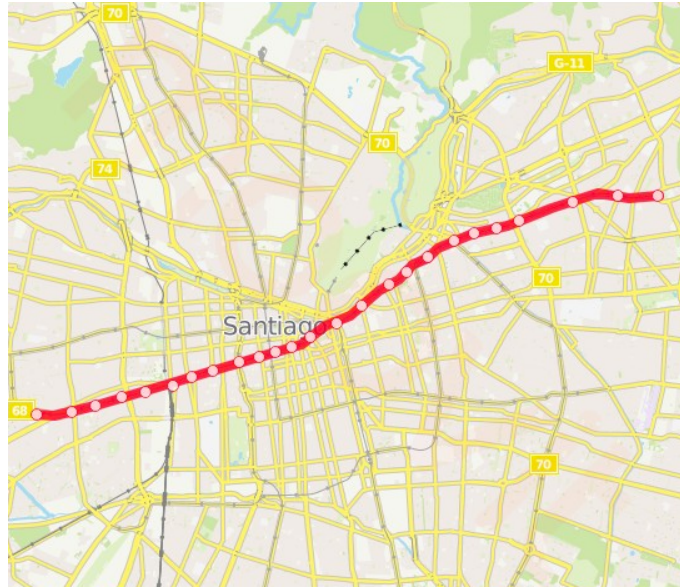
En el capítulo anterior detallamos los procesos seguidos durante el cálculo de los conjuntos Pareto y en la determinación de la ruta óptima para el traslado de pasajeros cuando se inicia el viaje en un subintervalo de tiempo dado. Para el primer proceso, presentamos tres algoritmos para la eliminación de los puntos dominados, siendo Criba el escogido por su sencilla implementación. Para el segundo proceso, describimos el cálculo de los costos asociados a los posibles trayectos a seguir por los vehículos durante el traslado del personal de Metro.

En este capítulo evaluaremos experimentalmente la solución propuesta al problema del TPO, tanto para los procesos de cálculo de conjuntos de Pareto y costos, como para la resolución del PLE formulado en la Sección 2.1, mediante la creación de diversas instancias que captarán las características esenciales del problema. Iniciamos este capítulo describiendo cómo fueron generadas para luego pasar a su resolución.

### 4.1. Generación de Instancias

En el estudio experimental nos situaremos en la ciudad de Santiago, cuyo sistema de transporte cuenta con una red de trenes subterráneos, Metro, compuesta actualmente de 7 líneas y 136 estaciones, las que cubren gran parte de la ciudad.

Las instancias que generaremos para la evaluación tendrán una red de trenes compuesta por un subconjunto de estaciones de la Línea 1 de Metro, la cual tiene una extensión de 20.4 km, 27 estaciones, y una distancia de 0.69 km en promedio entre ellas (Figura 4.1). Así, el personal a trasladar en cada una de las instancias corresponderá sólo a trabajadores de estaciones pertenecientes a esta línea. Esta simplificación se debe a que en esta primera etapa nos interesa saber cómo se comporta el PLE propuesto, en cuanto al porcentaje de traslados realizados y tiempo de resolución, además de conocer los tiempos de generación y tamaño de



**Figura 4.1:** Ubicación de la Línea 1 de Metro en el plano de Santiago.

los archivos que contienen los datos de los conjuntos Pareto y costos de traslados según sea la instancia sobre la cual se esté trabajando.

Las características comunes a cada instancia están resumidas en la Tabla 4.1. Como mencionamos anteriormente, la red de metro que consideraremos está basada en la Línea 1, la cual corresponderá a una “sublínea” de ésta, es decir, estará compuesta por un subconjunto de estaciones de la Línea 1. Este subconjunto, que llamaremos *conjunto de estaciones activas*, variará dependiendo de la instancia, y una vez seleccionado variaremos el número de trabajadores de cada estación. Luego, para cada una de las configuraciones posibles, generaremos tres instancias en que las locaciones y horarios de ingreso de los trabajadores serán distintas, lo que nos permitirá evaluar la sensibilidad del rendimiento de la solución a estas características.

Número estaciones dobles	7
Distancia mínima de locación a estación respectiva	5 km
Distancia máxima de locación a estación respectiva	12 km
Largo de los subintervalos de tiempo	5 min
Máximo tiempo de traslado permitido	40 min
Máximo tiempo de arribo anticipado	20 min
Velocidad media del vehículo	30 km/hr
Costo fijo	\$1.500
Costo variable	\$100
Capacidad del vehículo	3 asientos
Tiempo recogida de pasajero	2 min
Tiempo descenso de pasajero	1 min
Tiempo demora desde móvil a andén	3 min

**Tabla 4.1:** Características base de las instancias.



**Figura 4.2:** Representación de la Línea 1 de Metro de Santiago, donde las subetiquetas corresponden a la línea con la que realiza combinación la estación.

Respecto a los tiempos de viaje, el máximo permitido para el traslado de cada trabajador corresponderá a 40 minutos, el cual se contabiliza desde la recogida del pasajero de su domicilio hasta la llegada a la estación en que se encuentra su puesto de trabajo. El tiempo máximo de arribo anticipado respecto al horario de inicio laboral es de 20 minutos, lo cual asegura que cada trabajador no sea recogido con demasiada antelación. Para calcular los tiempos de viaje en vehículo hemos utilizado distancias Euclidianas entre los posibles puntos de parada y hemos asumido que la velocidad promedio del taxi corresponde a 30 km/hr.

Antes de pasar a la resolución de las instancias, es necesario describir las características de ellas en cuanto a la conformación de la red de metro y el personal que requiere el servicio de traslado. En las siguientes secciones detallaremos los criterios de elección del conjunto de estaciones activas y de variación del número de trabajadores por estación durante la generación de instancias.

### 4.1.1. Conjunto de Estaciones Activas

La Línea 1 del Metro de Santiago posee 27 estaciones, 6 de las cuales corresponden a estaciones de combinación con otra línea de la red (Figura 4.2). Las instancias a generar serán agrupadas según el conjunto de estaciones activas sobre el cual se trabaje, donde asignaremos una letra a cada grupo para su identificación. El primer grupo de instancias, grupo *A*, se realizará en base al conjunto de estaciones activas dado por las 6 estaciones de combinación y las 2 estaciones terminales, siendo una de éstas de ambos tipos. La razón de esta elección se debe a la distribución de éstas dentro de la línea, lo que nos permite con un número reducido de estaciones representar las características del trazado de la Línea 1 dentro del plano de Santiago. El segundo grupo de instancias (grupo *B*) tendrá como conjunto de estaciones activas a las 7 anteriores más una adicional de no combinación, y así sucesivamente se irá adicionando una nueva estación al conjunto a medida que avancemos en los grupos de generación.

### 4.1.2. Personal por Estación

Como mencionamos en la subsección anterior, 6 de las 27 estaciones de la Línea 1 corresponden a estaciones de combinación, y dado que cada una de ellas pertenece a dos líneas de la red, es que dotaremos de doble personal a estas estaciones respecto de las que no son de combinación, ya que consideraremos que los puestos de trabajo están ligados tanto a la estación como a la línea a la que pertenece ésta. También dotaremos de doble personal a las estaciones terminales, ya que asumimos que éstas son de mayor tamaño. Como mencionamos en la subsección anterior, una de estas es común a ambas categorías. Luego, a estas 7 estaciones las llamaremos *dobles* y al resto estaciones *simples*.

Dentro de cada grupo de instancias, existirán subgrupos acorde al número de trabajadores por estación. El primer subgrupo contendrá instancias donde el personal por estación será de 4 trabajadores por estación doble y 2 por estación *simple*. A dicho subgrupo lo denotaremos por *s02*, donde la letra hace alusión a la calidad de subgrupo y el número a la cantidad de pasajeros por estación simple. El segundo subgrupo, subgrupo *s03*, tendrá 6 trabajadores por estación doble y 3 por estación simple, y así sucesivamente iremos aumentando en 1 trabajador el personal por estación simple hasta un máximo de 12 personas por estación doble y 6 por estación simple. En la Tabla 4.2 se resumen las características de cada grupo y subgrupo de instancias antes descritas. En cuanto al tamaño de la flota, para todos los conjuntos *s02* el número de vehículos corresponderá a la mitad del número de pasajeros y luego se aumentará en 7 al avanzar en el índice del subgrupo (ver Tabla 4.3). Esto se debe a que con el incremento del personal se hace necesario aumentar el tamaño de la flota, ya que de lo contrario obtendríamos a partir de cierto valor en  $|\mathcal{P}|$  problemas infactibles.

Grupo	Est. Simples	Número de trabajadores				
		s02	s03	s04	s05	s06
A	0	28	42	56	70	84
B	1	30	45	60	75	90
C	2	32	48	64	80	96
D	3	34	51	68	85	102
E	4	36	54	72	90	108
F	5	38	57	76	95	114
G	6	40	60	80	100	120
H	7	42	63	84	105	126
I	8	44	66	88	110	132

**Tabla 4.2:** Número de estaciones simples y total de trabajadores a trasladar según grupo y subgrupo de instancias, respectivamente.

Grupo	Taxis Disponibles				
	s02	s03	s04	s05	s06
A	14	21	28	35	42
B	15	22	29	36	43
C	16	23	30	37	44
D	17	24	31	38	45
E	18	25	32	39	46
F	19	26	33	40	47
G	20	27	34	41	48
H	21	28	35	42	49
I	22	29	36	43	50

**Tabla 4.3:** Tamaño de la flota según subgrupo de instancias.

#### 4.1.2.1. Domicilios y Horarios de Ingreso

Una vez que conocemos el número de trabajadores por estación, procedemos a generar los domicilios del personal. La idea es que la locación de cada trabajador se encuentre dentro de un radio cercano a su estación de trabajo, ya que debe ser posible su traslado dentro del tiempo máximo de viaje establecido en el problema del TPO. Además, es razonable asumir que hay cierto grado de correlación entre el domicilio de un trabajador y su lugar de trabajo. Luego, fijaremos una distancia mínima,  $d_{\min}$ , y una máxima,  $d_{\max}$ , entre las cuales escogeremos para cada uno de los trabajadores la distancia a la que estará su domicilio de la respectiva estación de trabajo. Hecho esto, procedemos a generar las locaciones de la siguiente manera: para una persona que trabaja en una estación de metro de coordenadas  $(x, y)$  en el plano, seleccionamos de manera aleatoria una distancia  $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$  y un ángulo  $\phi \in [0, 2\pi)$ , las cuales indican la distancia a la estación en la que se encuentra el domicilio y hacia qué dirección, respectivamente, de donde obtenemos que su ubicación en el plano corresponderá al punto  $(x + r \cos \phi, y + r \sin \phi)$ .

Una vez seleccionados todos los domicilios del personal, debemos escoger los horarios de inicio de jornada de cada trabajador. Aquí, nos interesa que su distribución se asemeje a un escenario real, en el cual existen horarios de ingreso diferenciados según la labor que desempeña el trabajador dentro de la empresa. Dado esto, la asignación de horarios para el inicio de jornada será de la siguiente manera: aleatoriamente, escogemos a un tercio del total de trabajadores para los cuales su ingreso será 5 minutos antes del horario de apertura de la estación en que se desempeñen; otro tercio, seleccionado también al azar, ingresará a su jornada 5 minutos antes del horario de apertura de boleterías de su estación de trabajo; finalmente, el resto de los empleados iniciará su jornada entre 5 minutos antes de la apertura de la estación en que trabajan y 10 minutos después de la apertura de la boletería, horario que será seleccionado uniformemente al azar para cada uno de estos trabajadores.

Los datos de los horarios de apertura de estaciones y boleterías requeridos se obtuvieron en <https://www.metro.cl/tu-viaje/horarios> <sup>1</sup>.

Notemos que debido a los horarios de apertura de las estaciones, existirán empleados para los cuales la opción de traslado en metro no estará disponible debido al horario en que se inician sus jornadas, lo cual es incorporado dentro del problema al momento del cálculo de la ruta óptima.

Es importante mencionar que, debido a las diferencias en los horarios de inicio laboral entre las instancias generadas, el número de subintervalos variará a través de ellas, ya que éste corresponde al cuociente (redondeado al largo de los subintervalos, que en nuestro caso es de 5 minutos) de la división entre el largo del intervalo  $[T_i, T_f]$  y el largo de los subintervalos, donde  $T_f$  corresponde al último horario de entrada y  $T_i$  al primer horario de entrada menos la suma del tiempo máximo de trayecto permitido y el tiempo máximo de arribo anticipado.

## 4.2. Resultados de Experimentos

Una vez generadas las instancias procedemos a su resolución, la cual comienza con la determinación de los conjuntos Pareto y el cálculo de costos utilizando los algoritmos propuestos en el Capítulo 3, para luego resolver el PLE con los datos obtenidos de éstos. Es importante en este proceso, dados los parámetros del problema, conocer además de los resultados relativos al PLE el tiempo que tarda el programa en cada una de las etapas de la resolución como los resultados que se obtengan, ya que esto permitirá detectar los cuellos de botella más relevantes que impactan en el tiempo y memoria requeridos para resolver los tipos de instancias considerados. Tal análisis permite, con posterioridad, concentrar el esfuerzo de mejoramiento de los algoritmos utilizados en la reducción de los efectos de los cuellos de botella detectados, principalmente mediante el diseño de heurísticas especialmente adaptadas según sea el caso.

Para esta evaluación los algoritmos fueron desarrollados en Julia v1.3.1 y Python v3.6.9. El programa lineal fue implementado en JuMP v0.21.2 y la versión académica de Gurobi 9.0.0 fue el solver utilizado para la optimización. Todos los archivos fueron ejecutados en un computador con procesador i7-7500U Quad-core (2 núcleos a 2.70 GHz cada uno) con 8Gb de memoria RAM bajo Ubuntu SO 18.04 .

---

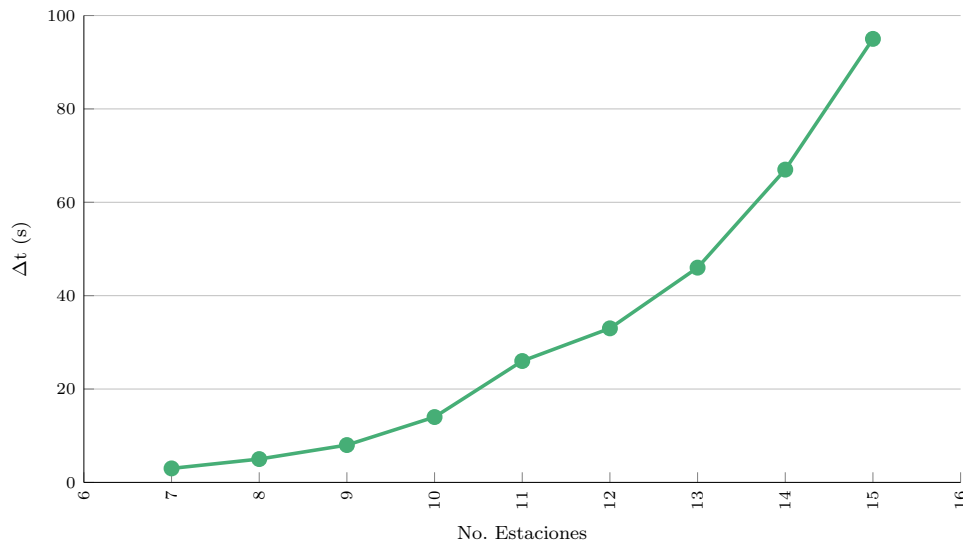
<sup>1</sup> Consulta realizada en Agosto de 2019.

### 4.2.1. Utilización de Recursos Computacionales

En esta sección evaluaremos el tiempo requerido para resolver las instancias generadas y además mediremos la memoria en disco ocupada por los archivos obtenidos del cálculo de Paretos y costos, junto con las características de la solución del PLE en cada una de ellas.

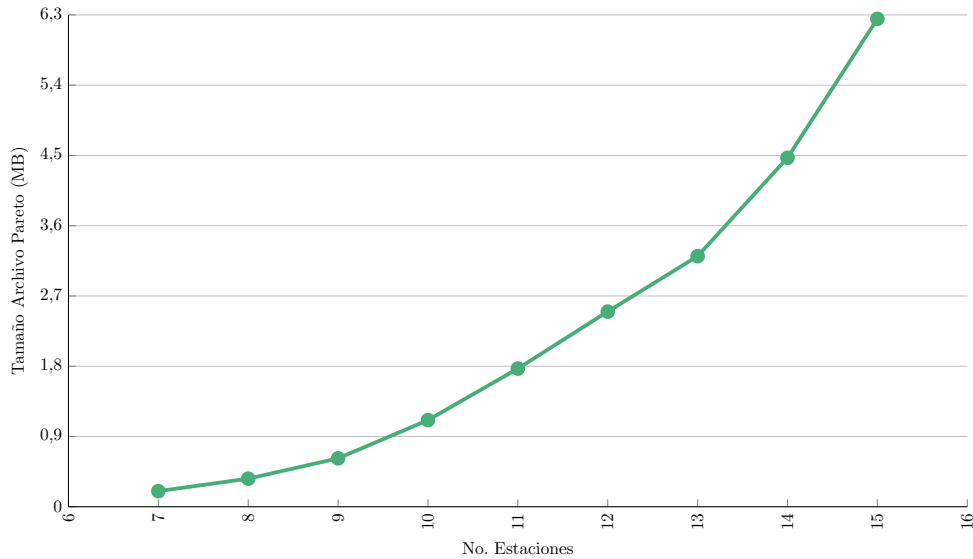
En nuestro estudio, la cantidad de conjuntos Pareto  $\mathcal{S}_{d,\vec{e}}$  en cada una de las instancias es función del número de estaciones que conforman la línea de metro, es decir, depende de  $|\mathcal{E}|$ , y es independiente de la cantidad de pasajeros, ya que el número de estos conjuntos queda dado por las posibles estaciones de primera parada  $d$  y por los posibles destinos de los pasajeros a bordo de un vehículo,  $\vec{e}$ . Luego, la determinación de los conjuntos Pareto se realiza sólo una vez por grupo de instancias, ya que el tamaño de la red de trenes no varía para los subgrupos en ellos. En la Figura 4.3 se muestran los tiempos de cálculo para la obtención de los conjuntos Pareto según el número de estaciones, donde se observa una relación positiva entre las variables, alcanzando un tiempo de 95 segundos para el grupo de instancias con 15 estaciones.

Respecto al espacio en disco utilizado por los archivos que contienen los conjuntos Pareto, la Figura 4.4 muestra una correlación positiva entre éste y el número de estaciones que conforman la línea, donde para 15 estaciones el tamaño del archivo es de 6.3 MB. El aumento del espacio en disco refleja que la cantidad de puntos Pareto aumenta considerablemente con la adición de estaciones a la línea, lo que se verá reflejado en el tiempo de cálculo de costos al aumentar el número de trabajadores a trasladar.



**Figura 4.3:** Tiempo de cálculo de los puntos de Pareto ( $\Delta t$ ) según el número de estaciones de la línea de metro.

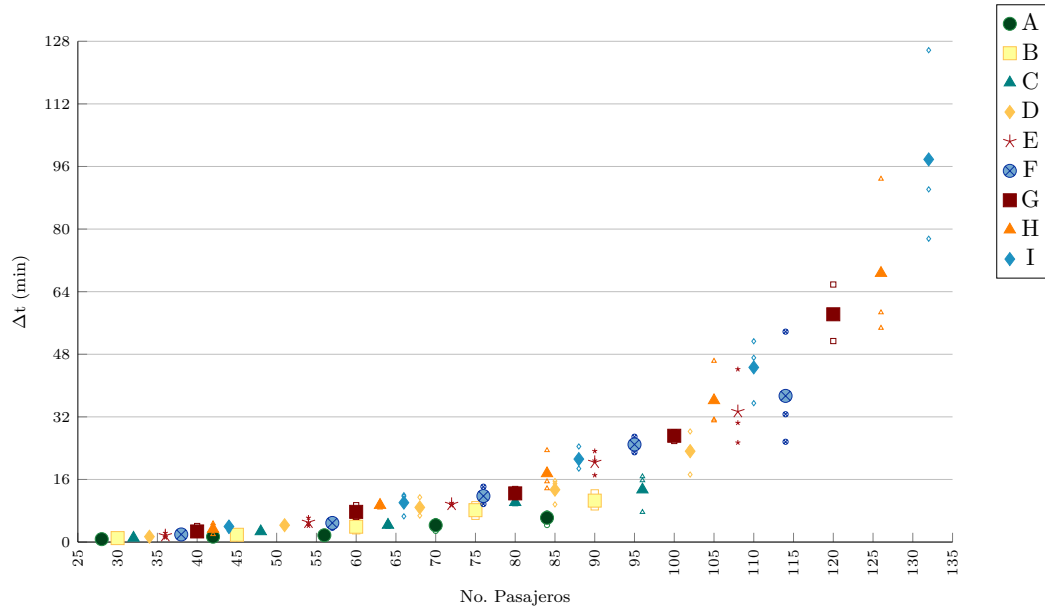




**Figura 4.4:** Tamaño de archivo de Pareto vs número de estaciones de la línea de metro.

En el cálculo de los costos asociados a las variables del PLE, el número de estaciones  $|\mathcal{E}|$ , la cantidad de trabajadores  $|\mathcal{P}|$  y el número de subintervalos  $|\mathcal{T}|$  inciden en el tiempo total de ejecución, ya que el pseudocódigo en el Algoritmo 4 muestra que se itera sobre todos los posibles subconjuntos de pasajeros, los posibles destinos de cada uno de ellos y los subintervalos en que los traslados podrían iniciarse. Luego, recopilamos los datos de tiempo para cada subgrupo de instancias, donde en cada uno el valor obtenido corresponde al promedio de las 3 instancias pertenecientes a él. En la Figura 4.5 se muestran los tiempos de cálculo de los costos según el tamaño del personal a trasladar, donde se ve que las variables están positivamente correlacionadas, alcanzando un tiempo promedio de 1 hora y 38 minutos para las instancias con 132 trabajadores y 15 estaciones activas. A diferencia de los conjuntos Pareto, los valores obtenidos son significativos dentro del tiempo de ejecución previo a la resolución del PLE, de donde se deduce que las instancias cuyo número de estaciones de metro se asemeje al de la red de Santiago y el total de personas a trasladar sea similar al personal de Metro, será necesario implementar heurísticas que permitan reducir de manera considerable el tiempo de cálculo de los costos asociados a las variables del PLE. Sin embargo, dado que los desktops modernos cuentan con CPU quad-core u octa-core y que el proceso utilizado en el cálculo de costos es trivialmente y eficientemente paralelizable, debiese ser posible obtener reducciones en los tiempos de ejecución en un factor entre 4 y 8 veces más rápido (asumiendo que los accesos a discos no generan problemas). Por ejemplo, en tiempos de aproximadamente 15 a 30 minutos podrían ser resueltas instancias de alrededor de 20 estaciones (7 simples y 13 dobles) y 162 pasajeros.

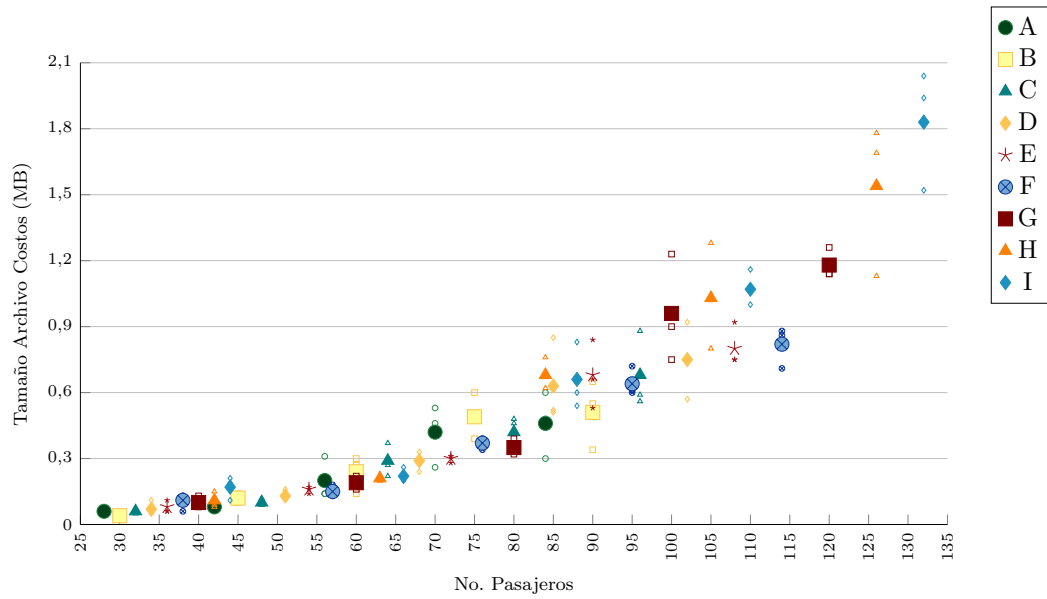
Continuando con el análisis relativo al cálculo de costos, el tamaño de los archivos gene-



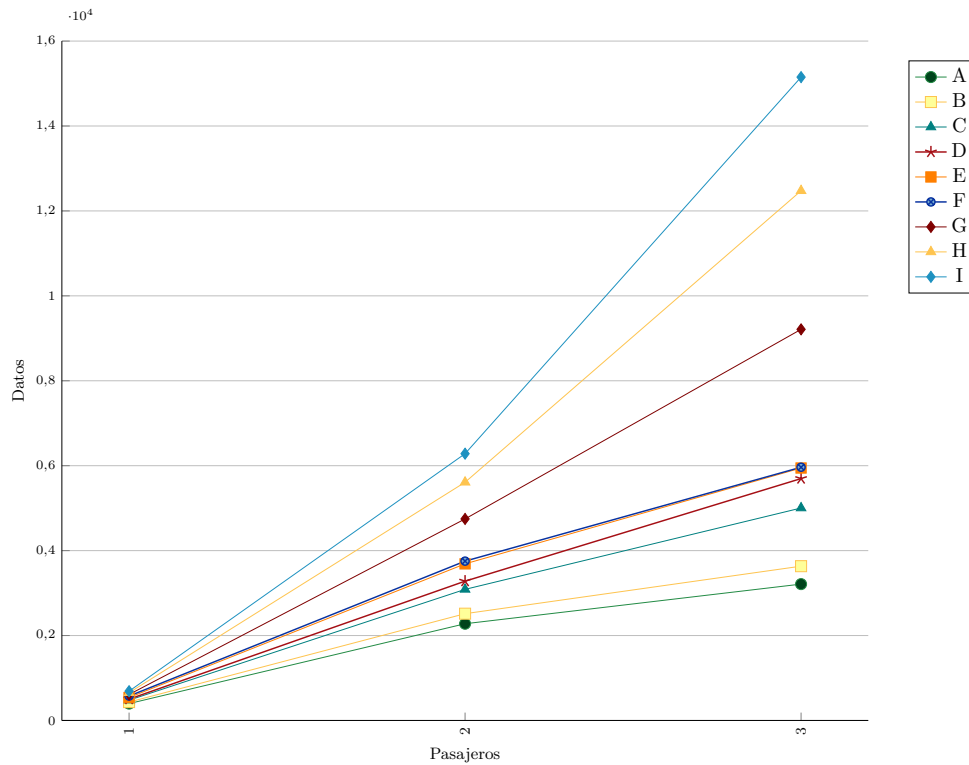
**Figura 4.5:** Tiempo de cálculo de costos ( $\Delta t$ ) vs número de personal. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en cada subgrupo (marcadores pequeños), obteniendo una curva por cada grupo a partir del promedio éstos (marcador mayor).

rados conteniendo estos datos tiene directa relación con el número de variables del PLE, ya que aquellos pares  $(\vec{p}, \tau) \in \vec{\mathcal{P}} \times \mathcal{T}$  en que ninguna trayectoria sea factible para el traslado de los pasajeros en  $\vec{p}$  si el viaje se inicia en  $\tau$ , no tendrán asociado costo alguno, por lo cual no será incluido en tales archivos. Por la indexación de las variables del PLE, tenemos que el número máximo de ellas es  $|\vec{\mathcal{P}}| \times |\mathcal{T}|$ . En la Figura 4.6 se muestran los tamaños de los archivos según el número de pasajeros, donde los valores para cada subgrupo fueron calculados de la misma forma que en el análisis anterior. Se observa que existe una relación positiva entre el número de pasajeros y el tamaño de los archivos de costos, donde el máximo espacio ocupado en disco es de 2 MB, el que se alcanza en una de las instancias del grupo mayor. Si llevamos estas cifras al número de datos (es decir, variables del PLE) que contienen estos archivos y los diferenciamos según la cantidad de pasajeros del traslado asociado al costo, se obtienen las cifras de la Figura 4.7, las cuales corresponden al promedio de los datos de las instancias con mayor personal en cada uno de los grupos. Las curvas obtenidas permiten estimar la cantidad de variables para traslados en que la capacidad máxima permitida sea de 4 pasajeros, dándonos una noción además del tiempo de cálculo que conllevaría esto.

Siguiendo el orden dado por la etapas del problema del TPO, discutiremos a continuación lo relativo a la resolución del PLE asociado. Como mencionamos en el párrafo anterior, la presencia de una variable  $x_{\vec{p}, \tau}$  en el programa queda determinada por la existencia de alguna ruta factible para el traslado de la tupla de pasajeros  $\vec{p}$  iniciando el viaje dentro del subintervalo  $\tau$ . La cantidad máxima de variables es  $|\vec{\mathcal{P}}| \times |\mathcal{T}|$ , donde el número de subintervalos



**Figura 4.6:** Tamaño de archivo de costos vs número de trabajadores. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en cada subgrupo (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).



**Figura 4.7:** Curvas de número de datos de costos según la cantidad de pasajeros del traslado asociado. Los datos corresponden al subgrupo mayor en cada uno de los grupos de instancias.

a través de las instancias generadas es aproximadamente el mismo (ver Tabla 4.4). La Figura 4.8 muestra la cantidad de variables según el número de pasajeros, donde el valor para

cada subgrupo corresponde al promedio de los obtenidos en las 3 instancias. Al igual que en el análisis sobre el tamaño de archivos de costos, la cantidad de variables aumenta con el número de trabajadores, donde se obtiene una cantidad promedio de  $2 \cdot 10^4$  variables para el subgrupo de instancias con 15 estaciones y 132 trabajadores. La variación en los números obtenidos dentro de un mismo subgrupo de instancias tiene relación con la distribución de las locaciones de recogida de los pasajeros y sus respectivos horarios de ingreso, los cuales pueden beneficiar o desfavorecer la existencia de trayectorias factibles de traslado asociadas a los pares en  $\vec{P} \times \mathcal{T}$ .

Grupo	s02	s03	s04	s05	s06
A	20.00	20.00	20.00	20.00	19.67
B	19.67	20.00	20.00	20.00	20.00
C	20.00	20.00	20.00	19.67	20.00
D	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
E	19.67	20.00	20.00	20.00	20.00
F	19.67	20.00	20.00	20.00	20.00
G	20.00	19.33	20.00	20.00	20.00
H	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
I	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00

Tabla 4.4: Promedio de número de subintervalos según subgrupo de instancias

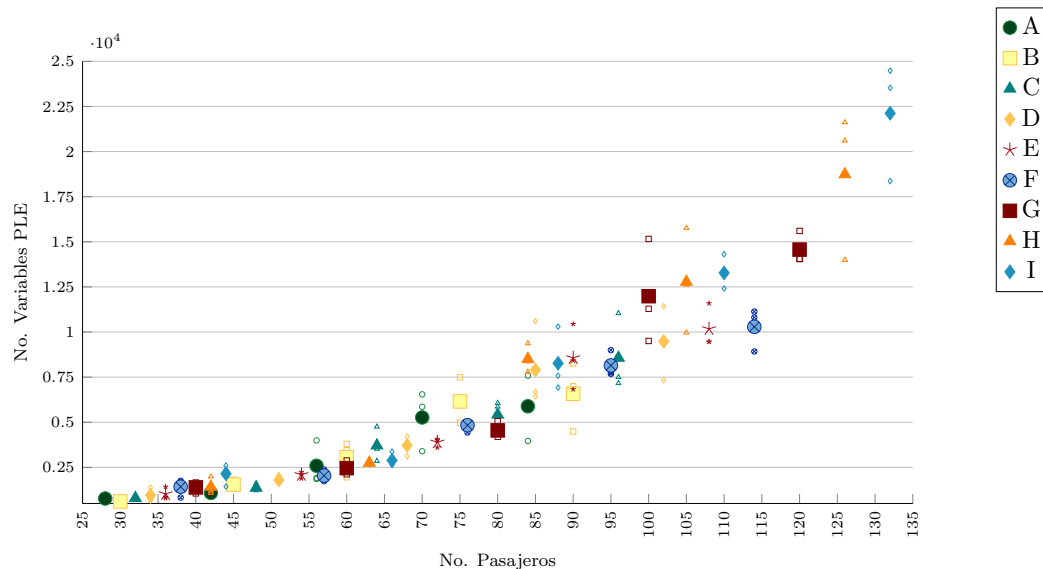
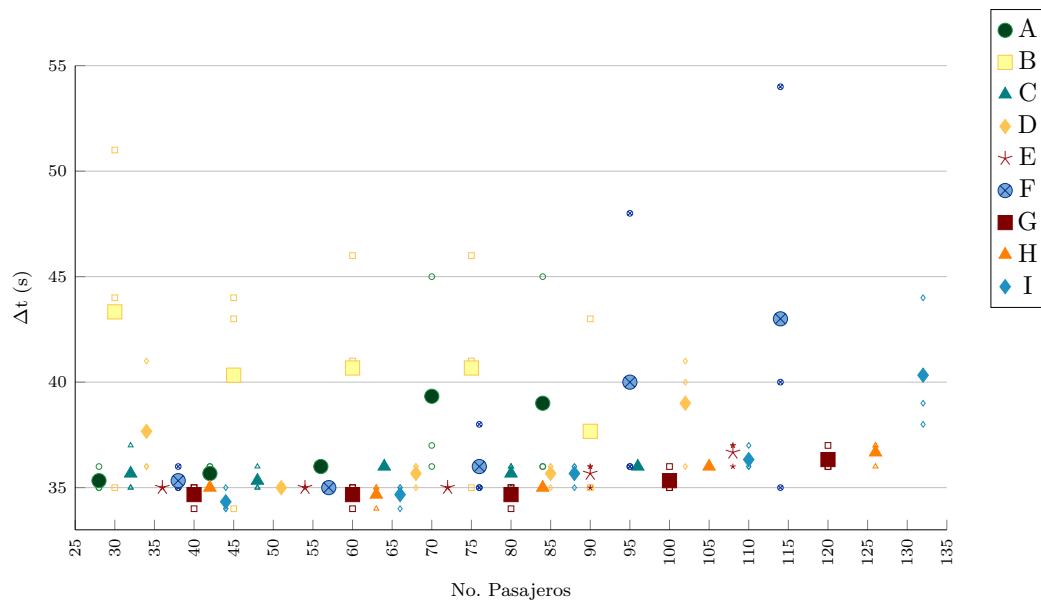


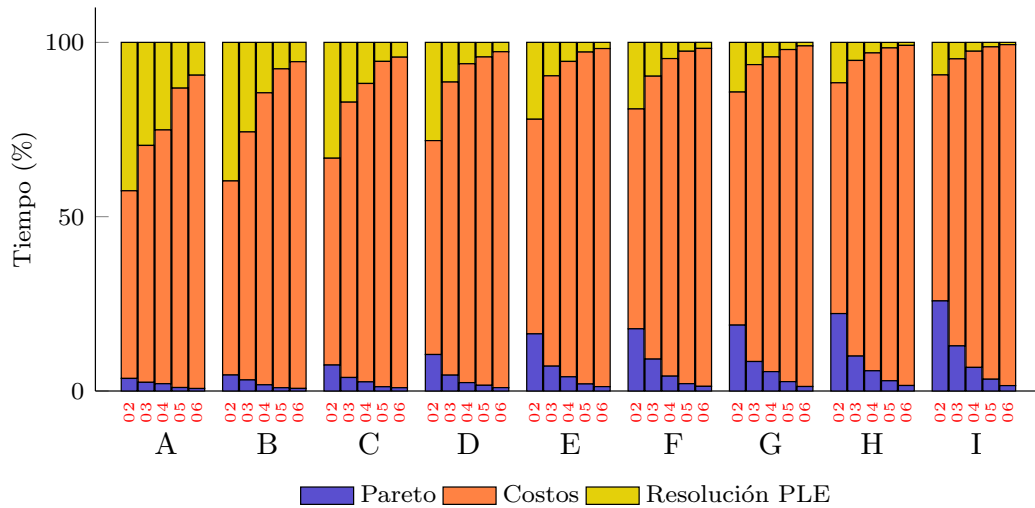
Figura 4.8: Número de variables del PLE vs número de personas. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en cada subgrupo (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).

Otra evaluación relativa al PLE que podemos obtener para cada subgrupo de instancias es el tiempo de resolución de éste. Aquí, además del número de variables presentes en el problema, debemos considerar la cantidad de restricciones y el tamaño de la flota de vehículos para el traslado de pasajeros. Como el número de variables y la cantidad de restricciones del programa aumentan con la cantidad de pasajeros, el gráfico en la Figura 4.9 es consistente con lo esperado, ya que el tiempo de resolución crece con el valor de  $|\mathcal{P}|$  en todos los grupos de instancias. En cuanto al tamaño de la flota, no es posible obtener una relación ya que la proporción de vehículos respecto del total de pasajeros no es la misma para todas las instancias.

Si bien el tiempo de resolución crece con el número de pasajeros, este aumento no es significativo respecto del tiempo que demora el proceso completo, el cual queda prácticamente determinado por el tiempo de cálculo de costos. Para apreciar esto, observemos el gráfico de la Figura 4.10, el cual muestra el porcentaje que cada uno de los 3 procesos ocupa dentro del tiempo total, correspondiendo en más del 50% en todos los subgrupos el asociado a los costos, llegando a ser en promedio al menos el 90% en las instancias con la mayor cantidad de pasajeros en cada uno de los grupos, lo que reafirma la necesidad de implementar heurísticas que permitan reducir sus tiempos de cálculo.



**Figura 4.9:** Tiempo de resolución del PLE ( $\Delta t$ ) vs número de personas. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en subgrupo (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).



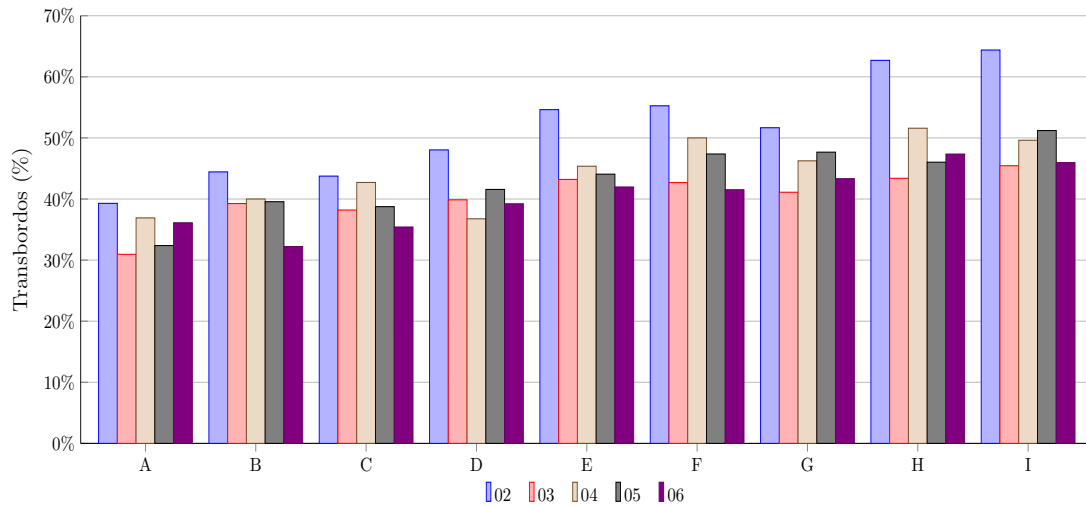
**Figura 4.10:** Porcentaje de tiempo para la determinación de los puntos de Pareto, cálculo de costos y resolución del PLE según subgrupo de instancias.

## 4.2.2. Calidad de la Solución

En esta sección estudiaremos la calidad de las soluciones, tanto desde la perspectiva del planificador del servicio de traslado como de la satisfacción de los pasajeros. Por ejemplo, la evolución del valor óptimo en la función objetivo al aumentar el número de estaciones de metro y la cantidad de trabajadores de cada una de ellas, nos entregará información para estimar el costo operacional de traslado en un escenario real, el cual no es fácil de simular debido al alto costo computacional que significa.

Los viajes obtenidos para cada uno de los trabajadores en la solución del PLE pueden o no contener un transbordo durante su trayecto. En la Figura 4.11 se muestra el porcentaje de trabajadores que utilizan el metro durante su traslado, siendo en promedio al menos el 30% de ellos en todos los subgrupos de instancias resueltas. Si bien se observa que la tendencia al avanzar en los grupos de instancias es a aumentar la cantidad de transbordos, no hay una tendencia clara entre los subgrupos de cada uno, teniendo sólo en común que el mayor promedio obtenido en cada grupo se alcanza en el subgrupo con menor cantidad de pasajeros. Lo anterior puede explicarse por la incompatibilidad de horarios y destinos entre algunos pasajeros al momento de planificar los traslados, afectando mayormente a las instancias de menor personal en cada grupo, lo que se traduce en bajos índices de ocupación (ver Tabla 4.5) y por tanto en un mayor número de transbordos, con el fin de minimizar los costos del traslado.

En cuanto al tiempo total de traslado, la Figura 4.12 muestra que el tiempo promedio que le toma a un trabajador llegar a su destino aumenta levemente al avanzar en los grupos de



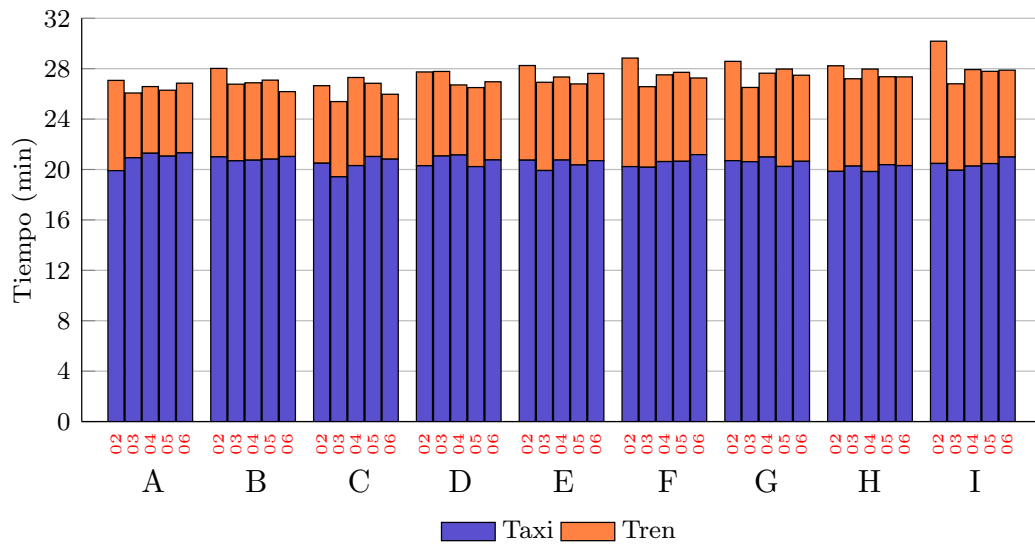
**Figura 4.11:** Porcentaje de viajes con transbordo según subgrupo de instancias.

Grupo	s02	s03	s04	s05	s06
A	1.91	2.10	2.40	2.50	2.58
B	1.96	2.15	2.35	2.47	2.50
C	2.01	2.03	2.31	2.47	2.55
D	2.00	2.16	2.29	2.50	2.55
E	2.17	2.08	2.35	2.57	2.50
F	2.33	2.06	2.38	2.55	2.56
G	2.36	2.22	2.40	2.57	2.61
H	2.18	2.25	2.53	2.58	2.67
I	2.20	2.03	2.47	2.56	2.69

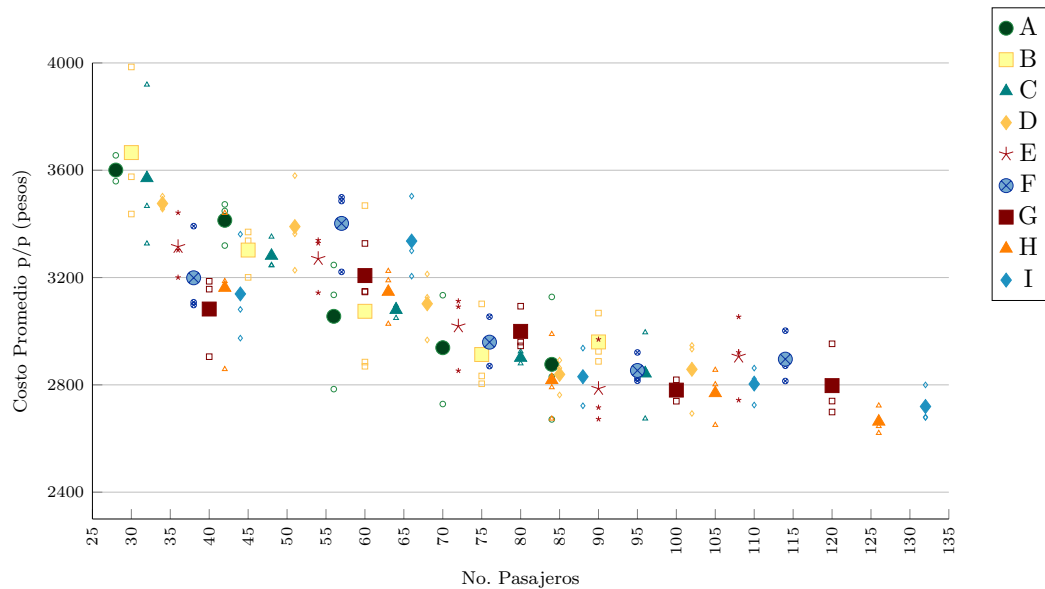
**Tabla 4.5:** Promedio de ocupación de vehículos según subgrupo de instancias

instancias. Sin embargo, para subgrupos con igual número de estaciones no hay una tendencia clara presente. Como se observa, el incremento en el tiempo de traslado se debe al aumento del tiempo de viaje en metro, lo que concuerda con la tendencia en el porcentaje de transbordos de la Figura 4.11. Pero, dado que con el aumento de estaciones activas dentro de la línea el promedio de tiempo de viaje en tren entre ellas disminuye, el incremento obtenido en el tiempo de traslado es menor.

Desde la perspectiva del planificador, un buen indicador de la calidad de la solución es el costo promedio de viaje por persona. En la Figura 4.13 se muestran los costos obtenidos según el número de trabajadores a trasladar, donde se observa en general una disminución en cada grupo al avanzar en los primeros subgrupos de instancias. Dado que este costo es menor a mayor ocupación promedio de los vehículos, este descenso concuerda con los datos presentados



**Figura 4.12:** Tiempo promedio de traslado por trabajador según subgrupo de instancias, identificando el traslado en taxi y en metro. El valor por subgrupo corresponde al promedio de los valores obtenidos para las instancias en él.



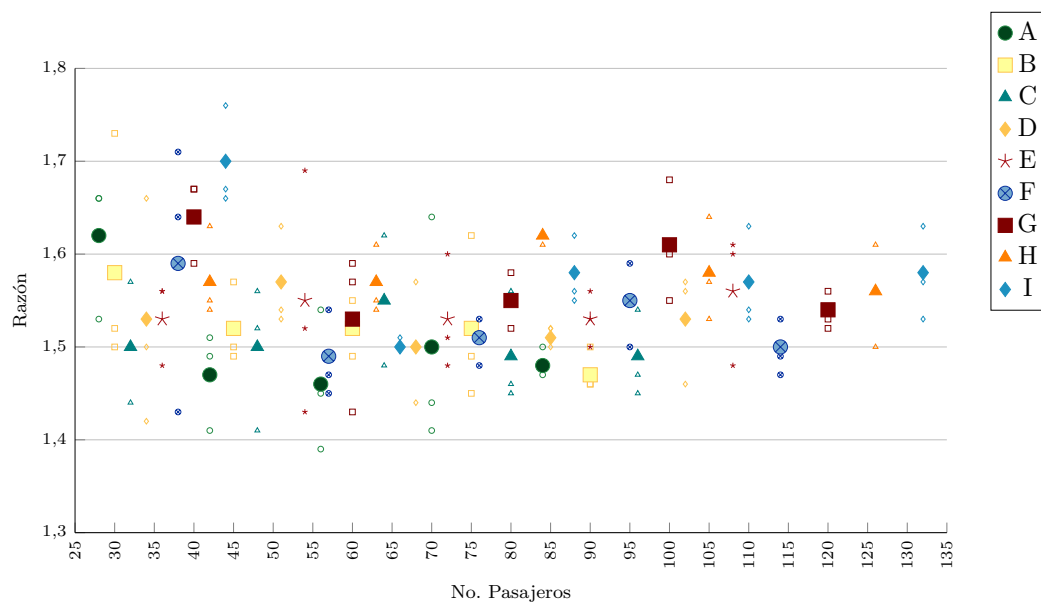
**Figura 4.13:** Costo promedio de traslado por pasajero vs número de trabajadores. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en cada subgrupo (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).

en la Tabla 4.5, donde la ocupación aumenta junto con el número de personas dentro de cada grupo. Sin embargo, dado que los subgrupos de mayor índice poseen ocupaciones cercanas a la capacidad máxima de los vehículos (3 en nuestro problema), la tasa de crecimiento de la ocupación disminuye y a su vez la variación en el costo promedio.

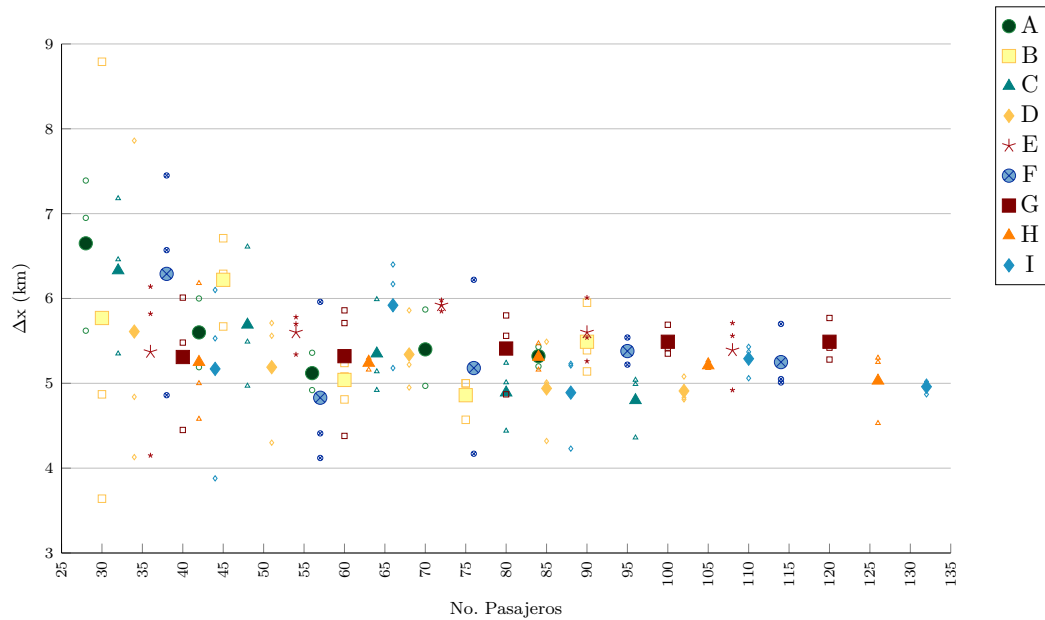
Un indicador sobre la calidad del servicio experimentado por el pasajero es la razón



del tiempo de traslado dada por la solución y el del viaje más corto hasta su destino. Es razonable asumir que los pasajeros prefieren dejar su residencia lo más tarde posible, por lo que la cantidad de tiempo extra que pierden viajando respecto de la ruta más corta en un servicio personalizado es un buen indicador sobre la satisfacción del pasajero. En el gráfico de la Figura 4.14 se observa que en promedio el tiempo extra de viaje para la mayor parte de los subgrupos es entre un 50 % y un 60 %. Si asumimos en base a la Figura 4.12 que en promedio un traslado demora 28 minutos para instancias de 132 pasajeros y 15 estaciones, el tiempo extra es aproximadamente de 10 minutos, el cual podemos considerar aceptable si se tiene en cuenta que en promedio un vehículo se detiene en 2.69 locaciones (ver Tabla 4.5) antes de dirigirse a alguna estación de metro. Los valores obtenidos para esta relación podrían explicarse por las distancias entre las locaciones de los pasajeros de un vehículo, es decir, las soluciones podrían corresponder a traslados que agrupan a pasajeros cuyos puntos de retiro se encuentran cercanos, lo que genera que este tiempo extra sea pequeño. En la Figura 4.15 se muestra la distancia máxima entre locaciones de retiro para traslados en que 3 pasajeros comparten un vehículo. Se observa que a medida que aumenta el número de trabajadores la tendencia general es a disminuir esta distancia, siendo menor a 6 km en aquellas instancias con 80 o más trabajadores a trasladar y alcanzando los 5 km para instancias con 132 pasajeros y 15 estaciones. Una evaluación mediante la implementación de heurísticas permitiría conocer para un pasajero dado el radio aproximado en el cual se encuentran las locaciones de los trabajadores que posiblemente compartirán el viaje en vehículo, lo que sería beneficioso para el tiempo total de resolución ya que al reducir el tamaño del conjunto de tuplas de pasajeros



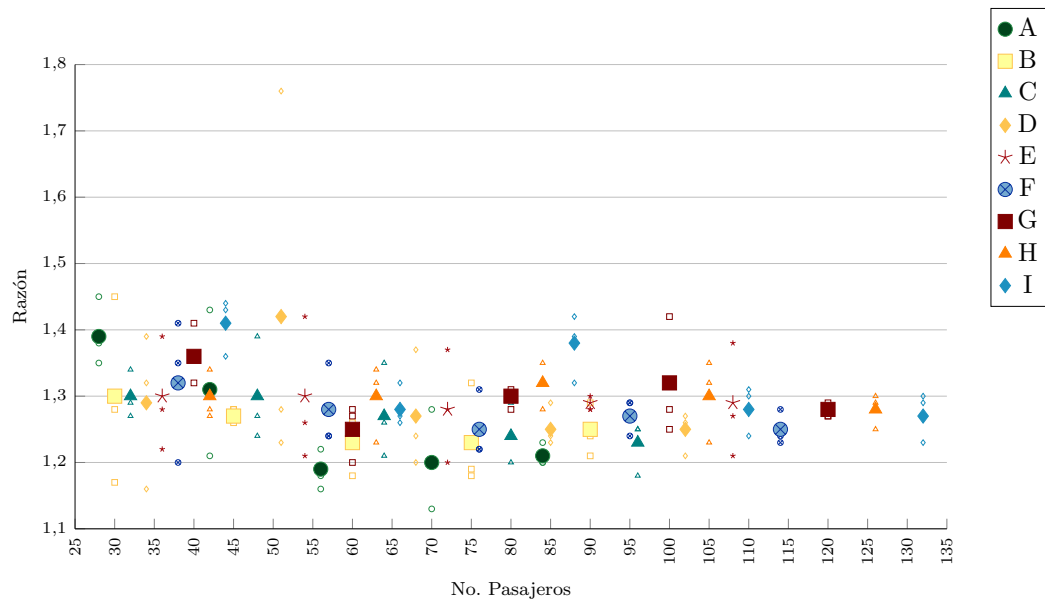
**Figura 4.14:** Relación tiempo de traslado y tiempo mejor viaje para cada grupo de instancias. En el gráfico se muestran los valores obtenidos para las 3 instancias en cada uno de los subgrupos (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).



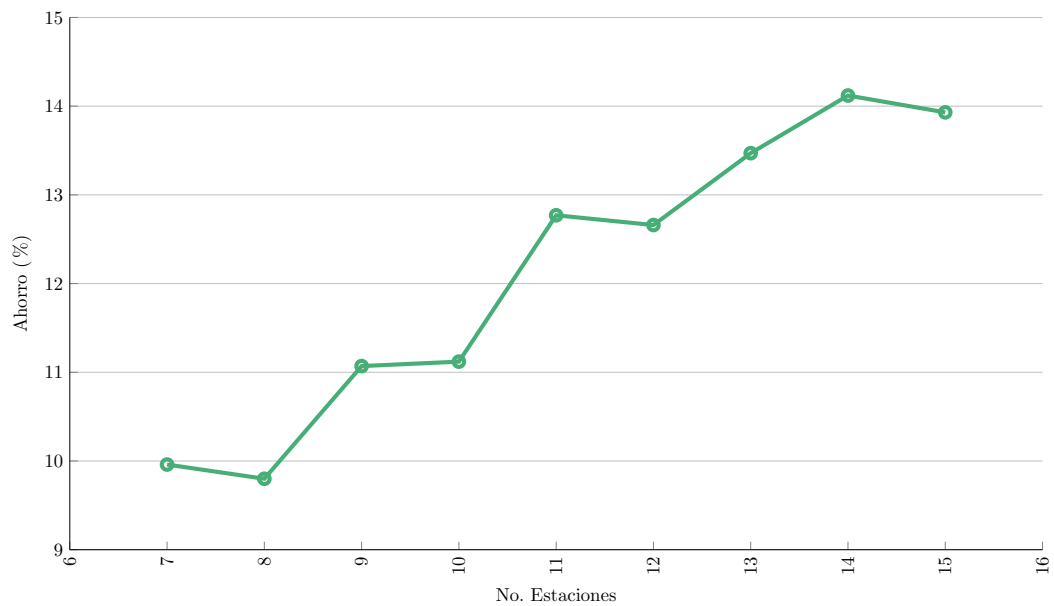
**Figura 4.15:** Distancia máxima ( $\Delta x$ ) entre domicilios para traslados en que 3 pasajeros comparten un vehículo. En el gráfico se muestran los valores obtenidos para las 3 instancias en cada uno de los subgrupos (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).

disminuirían los tiempos de cálculos de costos, que como se vió es el principal responsable del costo computacional del problema.

Otro estimador de la calidad del servicio es la relación entre el tiempo promedio de viaje por pasajero para traslados que admiten transbordo versus uno en el que sólo se utilizan vehículos. En la Figura 4.16 se observa que en promedio el tiempo extra de viaje para la mayor parte de los subgrupos es entre un 20% y un 30%. Si asumimos en base a la Figura 4.12 que un traslado demora 28 minutos para instancias de 132 y 15 estaciones, el tiempo extra es aproximadamente de 6 minutos. Además de ser menor al tiempo extra obtenido en la evaluación anterior, los beneficios que se obtienen de un sistema bimodal de transporte permiten concluir que este tiempo es aceptable. En la Figura 4.17 se observan los porcentajes de ahorro de este servicio respecto del que sólo utiliza vehículos, donde para tales cálculos fueron considerados los costos del traslado de los subgrupos con el mayor número de personal en cada grupo de instancias, en el que se asignan 6 trabajadores por estación simple y 12 por estación doble. Para instancias con 15 estaciones y 132 pasajeros, el porcentaje promedio de ahorro es del 14%, de donde se espera que para aquellas con 20 estaciones y 162 pasajeros éste supere el 15%. Si bien estas estimaciones son realizadas bajo un escenario ideal en el que no consideramos restricciones particulares de la empresa para el traslado de sus pasajeros, este análisis nos permite asegurar un ahorro por sobre el 10%, que en proporción a los montos destinados en escenarios reales para estos servicios se traduce en cantidades significativas.



**Figura 4.16:** Relación entre tiempos promedio de viaje para traslados con y sin incorporación de servicio de trenes. En el gráfico se muestran los 3 valores obtenidos para las instancias en cada subgrupo (marcadores pequeños), además del promedio de ellas en cada uno (marcador mayor).



**Figura 4.17:** Porcentaje de ahorro respecto de un traslado sin servicio de trenes. Los costos utilizados en el cálculo corresponden al del subgrupo mayor en cada uno de los grupos de instancias.

# CAPÍTULO 5

---

## Conclusiones

---

El objetivo de este trabajo era encontrar una solución al problema del Traslado de Personal Operativo (TPO), el cual consiste en trasladar a trabajadores de Metro desde sus residencias particulares a determinadas estaciones y viceversa, utilizando un sistema integrado de transporte conformado por un servicio de radiotaxis y la red de Metro de Santiago, de manera que la solución permitiera reducir los costos que actualmente esto tiene.

Para la resolución del problema se planteó un programa lineal entero cuyas variables de decisión corresponden a los posibles viajes durante el traslado del personal desde sus domicilios a las locaciones de trabajo, los cuales quedan determinados por 2 parámetros: grupo de pasajeros que comparten trayecto en vehículo y momento en que el vehículo recoge al primer pasajero. El costo asociado a cada una de estas variables corresponde al costo del trayecto en vehículo, ya que en caso de existir transbordo al metro, dicho costo es tomado como nulo por parte del proveedor.

En la evaluación de los recursos computacionales sobre las instancias generadas se obtuvo que el proceso que significa el mayor costo computacional es el cálculo de los costos asociados a las variables de decisión, correspondiendo como mínimo al 50 % del tiempo total que demora la ejecución de los procesos relativos al cálculo de Paretos, cálculo de costos y resolución del PLE. Luego, en instancias con grandes números de pasajeros ( $>150$ ) y estaciones de metro ( $>20$ ), se deberá considerar que al ser este proceso eficientemente paralelizable, si se utiliza una CPU quad-core u octa-core se podrán obtener reducciones en los tiempos de ejecución en un factor entre 4 y 8 veces más rápido (asumiendo que los accesos a discos no generan problemas).

Las soluciones obtenidas al resolver el PLE permiten trasladar al personal completo en todas las instancias generadas bajo las restricciones impuestas, con una flota disponible de

aproximadamente la mitad del número de trabajadores. En aquellas con al menos 11 estaciones activas más del 40 % de los trabajadores realiza trayectos que contemplan un transbordo, lo cual es beneficioso desde la perspectiva del planificador ya que se traduce en menores costos para la empresa respecto de un servicio en el que sólo se utilizan vehículos. Para estimar el ahorro, se realizó la resolución de las instancias con la mayor cantidad de personal en cada uno de los grupos sin la posibilidad de utilizar el servicio de trenes, de donde se obtuvo que la opción de transbordo reduce un 14 % el costo total para instancias de 132 pasajeros y línea de metro con 15 estaciones. Además, para todos los grupos de instancias se observó una correlación positiva entre el índice de ocupación y el número de personal, lo que se vio reflejado en el costo promedio por persona, el que exhibe una reducción con el incremento del número de trabajadores.

El modelo de traslado propuesto en este trabajo difiere de otras investigaciones en que se permite más de una parada de transbordo al transporte de ruta fija y que está diseñado para escenarios en que la flota de vehículos sea limitada, considerando que los taxis puedan realizar más de un viaje durante la jornada de traslado de personal. Por otra parte, al contemplar este modelo una etapa de precálculo que es independiente de los horarios y domicilios de los trabajadores, permite que parte del proceso sea realizado sólo una vez, disminuyendo el tiempo total para la obtención de una solución de traslado, lo que es beneficioso en caso de requerir realizarlo de manera diaria.

Si bien la motivación inicial era encontrar una nueva solución para el traslado de los trabajadores de Metro con el fin de reducir los costos del actual servicio, el desarrollo de este modelo de transporte bimodal permite disminuir el total de kilómetros recorridos por los taxis y, por tanto, contribuir a reducir las externalidades negativas asociadas a los viajes en vehículos, como la contaminación ambiental y la congestión vehicular. Además, la solución obtenida permite ser aplicada a cualquier transporte de ruta y horarios fijos que cuenten con paradas establecidas durante el recorrido y, en particular, para situaciones en que los traslados son hacia/desde una red de trenes, metrotrenes o metro.

El siguiente paso en nuestro trabajo es aplicar la solución propuesta a instancias con una red de metro más compleja que involucre varias líneas de tren, y donde la capacidad máxima permitida en los vehículos sea de 4 pasajeros. Todo esto debe ir acompañado de la implementación de heurísticas que permitan disminuir los tiempos de cálculo de costos — por ejemplo acotando para cada pasajero el radio donde se encuentren las posibles personas con las que compartirá su viaje — ya que la Figura 4.7 sugiere que el aumento en la capacidad máxima implicaría la suma de un gran número de datos asociados a los viajes con 4 pasajeros, lo que incrementaría de manera considerable el tiempo total de cálculo de costos, que es el

principal cuello de botella en la solución al problema de traslado.

Una modificación interesante al modelo es considerar en el conjunto de posibles traslados aquellos en que un vehículo recoge pasajeros tras visitar alguna parada de descenso, es decir, trayectos en el que un taxi con capacidad libre tome a más pasajeros una vez que hayan descendido algunos. Esto permitiría atacar el problema de incompatibilidad horaria durante la planificación de los viajes, ya que la restricción de tiempo sobre el arribo anticipado impide que se consideren grupos de pasajeros o rutas para el traslado del personal que permitan mayores reducciones de costos.

Por último, como trabajo futuro se encuentra la incorporación de la satisfacción del usuario al modelo propuesto. Por ejemplo, considerando una penalización a rutas que si bien son factibles hacen que el personal llegue a su destino con un anticipo cercano al máximo aceptable o cuyo tiempo de viaje es próximo al máximo permitido, otorgándole al modelo una perspectiva menos centrada en los costos del planificador y mejorando así la calidad del servicio de traslado.

---

# Bibliografía

---

- [1] Khaled Saeed Mohamed Ahmed. *Design of multimodal and integrated transit services toward more sustainable society*. PhD thesis, Gifu University, Japón, 03 2018.
- [2] Alberto Caprara, Paolo Toth, and Matteo Fischetti. Algorithms for the set covering problem. *Annals of Operations Research*, 98:353–371, 12 2000. doi: 10.1023/A:1019225027893.
- [3] Kalyanmoy Deb and Deb Kalyanmoy. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley Sons, Inc., USA, 2001. ISBN 047187339X.
- [4] Parke Godfrey, Ryan Shipley, and Jarek Gryz. Maximal vector computation in large data sets. *VLDB 2005 - Proceedings of 31st International Conference on Very Large Data Bases*, 1:229–240, 01 2005.
- [5] H. Kung, Fabrizio Luccio, and Franco Preparata. On finding the maxima of a set of vectors. *Journal of the ACM (JACM)*, 22:469–476, 10 1975. doi: 10.1145/321906.321910.
- [6] Alan Lee and Martin Savelsbergh. An extended demand responsive connector. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 6:1–26, 09 2014. doi: 10.1007/s13676-014-0060-6.
- [7] Mitja Stiglic, Niels Agatz, Martin Savelsbergh, and Miro Gradisar. Enhancing urban mobility: Integrating ride-sharing and public transit. *Computers & Operations Research*, 90, 09 2017. doi: 10.1016/j.cor.2017.08.016.
- [8] Bo Sun, Ming Wei, and Senlai Zhu. Optimal design of demand-responsive feeder transit services with passengers’ multiple time windows and satisfaction. *Future Internet*, 10: 30–45, 03 2018. doi: 10.3390/fi10030030.