



UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**SOLUCIÓN ANALÍTICA DE DOS PROBLEMAS DE FLUJOS
BIDIMENSIONALES DE FLUIDOS OSTWALD-DE WAELE: i)
CARACTERIZACIÓN DEL FLUJO DEBIDO A UN GRADIENTE PULSANTE
DE PRESIONES, y ii) CELERIDAD DE ONDAS EN FLUJOS SOBRE LECHO
MÓVIL**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

RODRIGO JAVIER GONZALEZ HERRERA

PROFESOR GUÍA:

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

CARLOS CONCA ROSENDE

YARKO NIÑO CAMPOS

Este trabajo ha sido financiado por FONDECYT a través del proyecto de investigación
N°1161751

SANTIAGO DE CHILE

2020

**RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
INGENIERO CIVIL Y GRADO DE MAGISTER EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO
POR: RODRIGO GONZALEZ HERRERA
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: ALDO TAMBURRINO T.**

**SOLUCIÓN ANALÍTICA DE DOS PROBLEMAS DE FLUJOS
BIDIMENSIONALES DE FLUIDOS OSTWALD-DE WAELE: i)
CARACTERIZACIÓN DEL FLUJO DEBIDO A UN GRADIENTE PULSANTE DE
PRESIONES, y ii) CELERIDAD DE ONDAS EN FLUJOS SOBRE LECHO
MÓVIL**

El presente trabajo se enmarca en el estudio de fluidos con reología no newtoniana. Se analizan de manera teórica dos problemas que consideran fluidos con este tipo de reologías.

El primer problema consiste en el análisis de un flujo bidimensional entre dos placas paralelas, el cual se encuentra sometido a un gradiente de presiones pulsantes. Este problema ha sido ampliamente estudiado para el caso newtoniano y aplicando en distintos campos. Debido a la complejidad que implica abordar este problema considerando un reología no newtoniana, se emplea una aproximación por series, la que permite determinar una expresión analítica para el campo de velocidades del fluido, bajo la condición de tener pulsaciones pequeñas. Al tener una expresión analítica para la velocidad del fluido, es posible determinar el caudal, esfuerzos de corte y coeficiente de dispersión de Taylor, analizando los parámetros adimensionales que afectan estas componentes derivadas de la velocidad y el efecto de los parámetros adimensionales cuando estos presentan valores extremos.

El segundo problema consiste en un análisis de la celeridad de las ondas cuando se tiene un lecho móvil sometido a un flujo bidimensional, donde el fluido tiene una reología no newtoniana. Este problema ha sido estudiado para el caso de flujos turbulentos y laminares de fluidos newtonianos como el agua, debido a la gran cantidad de aplicaciones prácticas y situaciones en la naturaleza donde se observa el arrastre de sedimentos en estas condiciones. Si bien existen estudios en el marco de fluidos no newtonianos estos se ven limitados por la complejidad de la reología del fluido. Debido a que el enfoque del análisis que se realiza es analítico, se emplea teoría de perturbaciones para poder determinar la celeridad de las ondas. Agregando una relación para el gasto sólido, es posible determinar que parámetros o componentes del flujo afectan la celeridad de las ondas y como es el comportamiento de éstas.

A mi familia

“Those who cannot remember the past are condemned to repeat it”- George Santayana

"μή μου τούς κύκλους τάραττε!"

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por darme la oportunidad de estudiar esta carrera, apoyarme y entregarme los medios para hacerlo. Sin ellos nada de esto sería posible.

Agradezco a mis profesores y maestros. A mi profesor guía Aldo Tamburrino por la oportunidad que me dio con esta tesis de “lápiz y papel” que es lo que más disfruto haciendo. Agradezco también su paciencia, excelente disposición para guiar y ayudarme a desarrollar esta tesis al igual que poder realizar mi primera publicación. Agradezco a mis profesores miembros de la comisión, Yarko Niño y Carlos Conca por sus comentarios y correcciones. Agradezco también a los profesores Andrea Vacca y Michele Ierlovino por la oportunidad de trabajar con ellos, por la labor en la parte numérica, sus comentarios y correcciones.

Gracias a la Jacqui por toda su ayuda en las gestiones y apoyo, ya que hizo todo y más para ayudarme con el proceso de titulación a nivel de facultad, además de todas las conversaciones arreglando el mundo.

A mis amigos y compañeros en la facultad con lo que compartí este recorrido, desde mis compañeros de sección en los primeros años, a mi compañeros de especialidad y amigos de otros departamentos, ellos formaron mi segunda familia en la facultad.

Agradezco también al financiamiento entregado por FONDECYT a través del proyecto de investigación N°1161751.

Y no puedo dejar de agradecer a los múltiples músicos cuyas creaciones me acompañaron en este recorrido, haciéndolo más llevadero.

TABLA DE CONTENIDO

1	CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN GENERAL	1
1.1	INTRODUCCIÓN	1
1.2	OBJETIVOS	3
1.2.1	<i>Objetivo general</i>	3
1.2.2	<i>Objetivos específicos</i>	3
1.3	ORGANIZACIÓN DE ESTE INFORME	4
2	CAPÍTULO 2: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	5
2.1	FLUJO PULSANTE NO-NEWTONIANO	5
2.1.1	<i>Presentación del problema</i>	5
2.1.2	<i>Enfoque teórico</i>	6
2.1.3	<i>Enfoque numérico</i>	7
2.1.4	<i>Enfoque Experimental</i>	7
2.1.5	<i>Dispersión</i>	8
2.2	INESTABILIDAD DEL LECHO Y CELERIDAD DE ONDAS SEDIMENTARIAS EN FLUJOS EN CANALES ABIERTOS	10
2.2.1	<i>Presentación del problema</i>	10
2.2.2	<i>Deformación del lecho como un problema de estabilidad</i>	11
2.2.3	<i>Celeridad de las formas de fondo y su relación con el gasto sólido</i>	11
2.2.4	<i>Verificación experimental</i>	13
3	CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO	14
3.1	CARACTERIZACIÓN DEL FLUIDO	14
3.1.1	<i>Fluidos newtonianos</i>	14
3.1.2	<i>Fluidos no newtonianos</i>	15
3.1.3	<i>Modelo reológico ley de potencia</i>	16
3.2	DISPERSIÓN DE TAYLOR	18
3.3	TRANSPORTE DE PARTÍCULAS	26
3.3.1	<i>Gasto sólido de fondo</i>	26
3.3.2	<i>Cálculo del gasto sólido de fondo y determinación del arrastre incipiente</i>	27

3.3.3	<i>Ecuación de Exner</i>	32
4	CAPÍTULO 4: FLUJO PULSANTE	34
4.1	DESARROLLO TEÓRICO PARA EL FLUJO PULSANTE UNIFORME BIDIMENSIONAL ENTRE DOS PLACAS PARALELAS DE UN FLUIDO PSEUDOPLÁSTICO	34
4.1.1	<i>Ecuaciones fundamentales</i>	34
4.1.2	<i>Condiciones de Borde y simetría</i>	36
4.1.3	<i>Números adimensionales asociados y ecuaciones adimensionales</i>	36
4.2	DETERMINACIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES PARA UN PULSO PEQUEÑO	39
4.2.1	<i>Ecuación de orden cero</i>	40
4.2.2	<i>Ecuación de primer orden</i>	42
4.2.3	<i>Ecuación de segundo orden</i>	48
4.2.4	<i>Caudal o velocidad media</i>	73
4.2.5	<i>Esfuerzo de corte y esfuerzo de corte en el fondo</i>	78
4.2.6	<i>Dispersión de Taylor</i>	80
5	CAPÍTULO 5: RESULTADOS PARA EL FLUJO PULSANTE	96
5.1.1	<i>Perfiles de velocidad</i>	96
5.1.2	<i>Caudal o velocidad media</i>	106
5.1.3	<i>Incremento del caudal</i>	112
5.1.4	<i>Esfuerzo de corte en el fondo</i>	116
5.1.5	<i>Coefficiente de Dispersión</i>	122
5.2	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	130
6	CAPÍTULO 6: CELERIDAD DE FORMAS DE FONDO	133
6.1	DESARROLLO TEÓRICO PARA LA CELERIDAD DE LAS ONDAS DE FORMAS DE FONDO BAJO FLUJOS DE UN FLUIDO PSEUDOPLÁSTICO.....	133
6.1.1	<i>Ecuaciones Fundamentales</i>	133
6.1.2	<i>Ecuaciones y números adimensionales asociados</i>	134
6.1.3	<i>Representación matricial y ecuación para la celeridad de las ondas</i>	136
6.1.4	<i>Celeridad de ondas por medio de una expansión a primer orden</i>	137
6.1.5	<i>Expresión para la celeridad de ondas por medio de una expansión a segundo orden</i>	150

6.2	LIMITACIÓN DE LA EXPRESIÓN PARA LA CELERIDAD	152
6.3	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	153
7	CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES GENERALES.....	155
7.1	CONCLUSIONES GENERALES	155
8	BIBLIOGRAFÍA.....	157
9	ANEXOS.....	168

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 5.1: ERRORES MÁXIMOS, PROMEDIOS Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE PERFILES DE VELOCIDAD.....	105
---	-----

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 5.1: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.125$ CON $RE=1$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0.1$	99
FIGURA 5.2: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.875$ CON $RE=1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 1$	99
FIGURA 5.3: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.5$, $RE=0.1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 0.1$	100
FIGURA 5.4: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.5$, $RE=0.1$, $\Omega = 100$ Y $\varepsilon = 0.1$	101
FIGURA 5.5: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.75$, $RE=0.1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 0.1$	101
FIGURA 5.6: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.75$, $RE=0.1$, $\Omega = 100$ Y $\varepsilon = 0.1$	101
FIGURA 5.7: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.5$, $RE=10$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0,1$	102
FIGURA 5.8: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.5$ CON $N=0.75$, $RE=10$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0,1$	102
FIGURA 5.9: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=0.125$ CON $N=0.5$, $RE=1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 1$	103
FIGURA 5.10: PERFILES DE VELOCIDAD ADIMENSIONALES, ANALÍTICO Y NUMÉRICO PARA $T=1$ CON $N=0.75$, $RE=1$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 1$	103
FIGURA 5.11: CAUDAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=1$, $\Omega = 100$ Y $\varepsilon = 0.1$	107
FIGURA 5.12: CAUDAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 0.1$	109
FIGURA 5.13: CAUDAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=100$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0.1$	111
FIGURA 5.14: CAUDAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=0.1$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0.1$	112
FIGURA 5.15: INCREMENTO DE CAUDAL PARA $RE=0.1$ Y $\varepsilon = 0.1$	114
FIGURA 5.16: INCREMENTO DE CAUDAL PARA $RE=1$ Y $\varepsilon = 0.1$	114
FIGURA 5.17: INCREMENTO DE CAUDAL PARA $RE=10$ Y $\varepsilon = 0.1$	115
FIGURA 5.18: INCREMENTO DE CAUDAL PARA $RE=100$ Y $\varepsilon = 0.1$	115
FIGURA 5.19: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=1$, $\Omega = 100$ Y $\varepsilon = 0.1$	117
FIGURA 5.20: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=1$, $\Omega = 0.1$ Y $\varepsilon = 0.1$	118
FIGURA 5.21: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=100$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0.1$	119
FIGURA 5.22: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=100$, $\Omega = 1$, $N=0.75$ Y $\varepsilon = 0.1$	120
FIGURA 5.23: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=100$, $\Omega = 1$, $N=0.5$ Y $\varepsilon = 0.1$	120
FIGURA 5.24: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=0.1$, $\Omega = 1$ Y $\varepsilon = 0.1$	121
FIGURA 5.25: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=0.1$, $\Omega = 1$, $N=0.75$ Y $\varepsilon = 0.1$	121
FIGURA 5.26: ESFUERZO DE CORTE EN EL FONDO, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO PARA $RE=0.1$, $\Omega = 1$, $N=0.5$ Y $\varepsilon = 0.1$	122
FIGURA 5.27: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA $RE=1$, $\varepsilon = 0.1$ Y $N=0.5$	123
FIGURA 5.28: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA $RE=1$, $\varepsilon = 0.1$ Y $N=0.75$	123
FIGURA 5.29: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA $RE=1$, $\varepsilon = 0.1$ Y $N=1$	124
FIGURA 5.30: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS, CON $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$ Y $N=0.5$	125
FIGURA 5.31: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS, CON $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$ Y $N=0.75$	125
FIGURA 5.32: COEFICIENTE DE DISPERSIÓN PARA DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS, CON $\Omega = 1$ Y $N=1$	126
FIGURA 5.33: INCREMENTO DE LA DISPERSIÓN PARA DISTINTOS N Y Ω CON $\varepsilon = 0.1$ Y $RE=0.1$	127
FIGURA 5.34: INCREMENTO DE LA DISPERSIÓN PARA DISTINTOS N Y Ω CON $\varepsilon = 0.1$ Y $RE=1$	128
FIGURA 5.35: INCREMENTO DE LA DISPERSIÓN PARA DISTINTOS N Y Ω CON $\varepsilon = 0.1$ Y $RE=10$	128
FIGURA 5.36: INCREMENTO DE LA DISPERSIÓN PARA DISTINTOS N Y Ω CON $\varepsilon = 0.1$ Y $RE=100$	129

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN GENERAL

1.1 Introducción

G. Stokes presentó su deducción de las ecuaciones que hoy en día se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes (Stokes, 1845), dando una descripción analítica a través del sistema de ecuaciones que corresponde a la aplicación de la segunda ley de Newton para los fluidos, validando de manera analítica resultados experimentales tales como el Hagen y Poiseuille, para el flujo laminar en una tubería (Sutera & Skalak, 1993), (siendo más tarde Reynolds (1883) quien identificaría el concepto del régimen laminar y turbulento). Con las ecuaciones determinadas por Stokes, múltiples autores (incluido Stokes) abordaron de manera analítica variados problemas de la mecánica de fluidos. Si bien existen múltiples resultados analíticos notables en la literatura, rápidamente quedo en evidencia que el sistema de ecuaciones a resolver es altamente complejo debido a su no linealidad, agregando más complejidad si la geometría del problema no posee simetrías o invarianzas.

En este ámbito, abordar problemas de mecánica de fluidos buscando soluciones analíticas puede ser una tarea simplemente imposible, por lo que es normal recurrir a resoluciones numéricas o experimentales para resolver estos problemas. No se puede negar que una solución analítica es siempre lo deseable, pero muchas veces inalcanzable en estos problemas, ya sea por la complejidad de las ecuaciones o porque aún no se tiene claridad de todos los mecanismos involucrados (la turbulencia es el mejor ejemplo de esto) en distintos fenómenos de la mecánica de fluidos.

Un problema a analizar de manera analítica corresponde a una extensión del flujo de Poiseuille, donde se busca determinar cómo es el campo de velocidades si en vez de tener un gradiente de presiones constante en el tiempo, este presenta un comportamiento pulsante, de manera de tener una dirección preferente para todo tiempo, pero con fluctuaciones periódicas en la magnitud del gradiente de presión. Este problema fue abordado de manera analítica en el caso de un fluido newtoniano y régimen laminar en una tubería por quien fuera alumno de Stokes, H. Lamb en 1895, obteniendo una solución analítica para el problema. Posteriormente Womersley (1955), debido a la aplicación práctica que tiene el flujo pulsante en lo que corresponde al flujo sanguíneo, recuperaría el resultado de Lamb (1895) de manera teórica y lo compararía con mediciones experimentales del flujo sanguíneo.

El análisis de Womersley (1955), si bien tiene supuestos que no aplican en el problema real del flujo sanguíneo (como la reología o el comportamiento de las paredes), es el inicio del estudio del flujo pulsante aplicado al flujo sanguíneo, sobre el cual se han publicado múltiples estudios tomando en consideración diversas reologías, efectos de paredes y procesos de transporte involucrados. También existen procesos industriales donde las reologías no newtonianas y flujos pulsantes, hacen el estudio de este problema algo importante.

La gran mayoría de los estudios que se realizan en este ámbito no son de carácter analítico debido a geometrías complejas, procesos involucrados y la misma reología no newtoniana, la que agrega más complejidad a las ecuaciones de momentum. Existen estudios como el de Daprà & Scarpi (2004) que son de carácter analítico, empleando una reología tipo ley de potencia en una tubería cilíndrica en condiciones de flujo pulsante,

cuando la pulsación es pequeña, donde obtienen una expresión para el perfil de velocidad empleado una expansión en series. Con este resultado nace el interés de buscar soluciones para otra geometría, en este caso, para el caso de placas paralelas, empleando las mismas condiciones de presión pulsante y reología para el fluido. Con la distribución de velocidades es posible analizar el caudal, esfuerzo de corte o el coeficiente de dispersión.

El segundo problema por analizar corresponde a determinar la celeridad para las ondas del lecho en un canal. El estudio de las ondas es algo presente desde los inicios del desarrollo de la mecánica clásica, ya que son múltiples sus aplicaciones en diversas áreas. En mecánica de fluidos, existen variadas ondas apreciables según las fuerzas que actúan sobre el fluido. Al estudiar las ondas que se producen en estos sistemas, un enfoque analítico es factible si se tienen las ecuaciones asociadas al fenómeno y geometrías simples.

En este contexto, es de interés analizar las ondas sedimentarias que se forman debido al fenómeno de arrastre que genera el movimiento de un fluido sobre un medio de partículas sólidas, debido a las interacciones entre ambos. El estudio de las ondas sedimentarias y el arrastre de sedimentos es algo sobre lo cual existen bastantes estudios de distintas áreas, sin embargo, aún no se tiene claridad de todos los procesos que genera este fenómeno, debido a la complejidad que es la interacción entre los dos medios. En el caso de fluidos, la gran mayoría de los estudios se centran en la interacción de agua con el lecho, en régimen turbulento, debido a la importancia que tiene esto en las múltiples actividades humanas y el uso del recurso hídrico. Es importante enfatizar que el transporte de sedimentos se separa en dos mecanismos principales, siendo estos el transporte en el lecho y otro en suspensión.

Las ondas que se forman en el lecho y sus características han sido ampliamente estudiadas como se menciona anteriormente, destacando el trabajo Callander (1968) y Gradowczyk (1968) en lo que respecta a la celeridad. Sin embargo, para realizar un análisis adecuado, conocer el valor umbral donde se inicia el transporte de sedimentos en el lecho es algo que hasta el día de hoy es bastante subjetivo ya que no es posible dar un valor preciso cuando se tiene el inicio del arrastre.

A pesar de las limitaciones que se mencionan anteriormente, con el objetivo de estudiar qué ocurre con las ondas, especialmente su celeridad, para un fluido con reología no newtoniana (en este caso particular tipo ley de potencia) se busca tener una expresión analítica general que pueda ser aplicada al fluido y su reología.

Estudios de la celeridad para fluidos no newtonianos son escasos, siendo los pocos existentes del tipo experimental, tales como el de Negrete (2014).

1.2 Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

1.2.1 Objetivo general

Obtener soluciones analíticas para ambos problemas de flujos de fluidos tipo ley de potencia, correspondientes al flujo bidimensional de Poiseuille debido a un gradiente pulsante de presiones y la celeridad de las ondas del lecho, donde existe transporte de sedimentos en el fondo.

1.2.2 Objetivos específicos

Los objetivos específicos para cada problema:

1.- Flujo pulsante entre dos placas planas paralelas

- Determinar el perfil de velocidades por medio de una expansión entorno a la razón del gradiente de presión constante y la pulsación.
- En base a los resultados obtenidos del punto anterior, determinar el caudal, esfuerzo de corte en el fondo y coeficiente de dispersión en función del tiempo, determinando los efectos que tienen los distintos adimensionales que afectan el problema para valores extremos de estos.
- Comparar los resultados del perfil de velocidad con resultados numéricos con el fin de validar la solución analítica obtenida.

2.- Celeridad de ondas en canal con transporte de sedimentos

- Determinar una expresión general para la celeridad de las ondas asociadas al sistema en forma adimensional.
- Aplicar la expresión de la celeridad obtenida para el caso de un fluido tipo ley de potencia, en régimen laminar.
- Realizar un análisis respecto a la importancia que tiene el número de Froude y posibles limitaciones de la expresión para la celeridad obtenida.

1.3 Organización de este informe

El presente informe se compone de 5 capítulos, donde cada uno tratará un tema específico del trabajo de tesis.

En el capítulo 2 se realiza una revisión bibliográfica con una previa presentación de cada problema, donde se mencionan los principales enfoques que han tenido múltiples autores para abordar problemas similares al primer problema que se busca estudiar en el ámbito teórico, numérico y experimental. Se incluye una revisión a los estudios que se han realizado sobre la dispersión en fluidos newtonianos y no newtonianos, especialmente en condiciones de presión pulsante. Dentro de este capítulo también se incluye una presentación del segundo problema, como los procesos de arrastre de sedimentos se relacionan con las ondas y el estudio de la celeridad de estas al igual que los estudios que han realizado autores de manera experimental.

El capítulo 3 corresponde al marco teórico asociado a cada problema a resolver, abordando primero la diferenciación entre fluidos newtonianos y no newtonianos, lo que implica esto en términos de las ecuaciones de momentum que se van a resolver, para luego presentar la teoría de la dispersión desarrollada por Taylor (1953, 1954a y 1954b) y Aris (1956, 1959 y 1960). En este mismo capítulo se presenta el marco teórico asociado al segundo problema, donde se expone la caracterización del transporte de partículas, enfocándose en el transporte que se produce en el lecho, mostrando múltiples relaciones de cálculo para el gasto sólido y dos enfoques para abordar el arrastre incipiente, además de la ecuación de continuidad aplicada al lecho de un canal.

El capítulo 4 corresponde a la resolución del analítica del problema del flujo pulsante, obteniendo la velocidad del fluido desde las ecuaciones adimensionales y expresiones analíticas para el caudal, esfuerzo de corte y dispersión.

El capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos en el capítulo anterior, incluyendo el caudal, esfuerzo de corte de fondo, el coeficiente de dispersión, incremento de caudal e incremento de dispersión. Este análisis se centra en la dependencia y los efectos de los números adimensionales que se generan sobre estos parámetros del flujo. Se cierra el capítulo y el primer problema con una discusión de los resultados y las conclusiones respecto a la solución obtenida para el primer problema.

El capítulo 6 corresponde al desarrollo para obtener una expresión para la celeridad de las formas de fondo, obteniendo una expresión a partir de las ecuaciones adimensionales, expandiendo en series de Taylor y despejar la celeridad. Se aplica a la expresión obtenida para la celeridad, las relaciones asociadas a tener un fluido tipo ley de potencias para el flujo sobre el lecho y una relación para el gasto sólido, obteniendo una expresión final para la celeridad. Igualmente, se presenta una relación para un orden superior en la expansión en series de Taylor empleadas para determinar la celeridad. Posteriormente se muestra la dependencia con el número de Froude que tiene la relación para la celeridad, para finalizar con una discusión y las conclusiones sobre la relación obtenida para la celeridad y su aplicación al fluido tipo ley de potencias.

CAPÍTULO 2: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Se presenta a continuación una revisión de la información disponible en la literatura con respecto a los dos problemas a resolver en este trabajo de tesis, el flujo pulsante de un fluido no newtoniano y la celeridad de ondas e inestabilidad del lecho debido al flujo de fluidos no newtonianos en canales abiertos. Además, para el problema del flujo pulsante se incluye una revisión sobre el fenómeno de dispersión para el caso de estudio.

2.1 Flujo Pulsante No-Newtoniano

2.1.1 Presentación del problema

Determinar el campo de velocidades de un fluido es la cuestión fundamental que se desea resolver en cualquier problema de dinámica de fluidos.

El problema del flujo pulsante en un flujo incompresible, donde se tiene un gradiente de presiones estacionario y se agrega una componente pulsante, se representa como muestra la ecuación (2.1):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_0}{L} + \frac{\Delta P}{L} \sin \omega t \quad (2.1)$$

Para tener el flujo pulsante es necesario que la componente impermanente del gradiente de presión sea menor a la componente estacionaria del gradiente de presiones.

El flujo en estas condiciones de gradiente de presión fue presentando para un fluido newtoniano de manera teórica por Lamb (1895) en su libro, el que compila múltiples resultados de hidrodinámica. Para estas condiciones es posible determinar una solución analítica del campo de velocidades, para geometrías simples como placas planas o tuberías cilíndricas o rectangulares.

Posteriormente Crandall (1926) analiza el mismo problema de manera teórica en el ámbito de sistemas con vibraciones y efectos del sonido. Womersley (1955), considera el mismo problema para una tubería cilíndrica, en condiciones de presión pulsante para poder estudiar el flujo en arterias, llevándolo a aplicaciones médicas, al comparar sus resultados teóricos con resultados experimentales.

Debido a que múltiples fluidos no presentan un comportamiento reológico newtoniano, entre los cuales es importante mencionar el flujo sanguíneo, además de procesos industriales, existe la necesidad de analizar qué ocurre para el caso de tener estas reologías no newtonianas. Debido a que, en la gran mayoría de las reologías no newtonianas, el comportamiento de los esfuerzos es no lineal respecto a los gradientes de velocidad del fluido, es posible observar diferencias en lo que respecta al caudal, dado las condiciones de tener reologías newtonianas y no newtonianas, debido a que esta no linealidad aparece en la dependencia de los esfuerzos de corte respecto al gradiente de la velocidad. En condiciones pulsantes newtonianas, el caudal promedio no se ve afectado por la pulsación, no siendo así el caso para el fluido no newtoniano con características no lineales, donde se aprecia un aumento en el caudal promedio.

El problema del flujo pulsante ha sido estudiado mayormente para geometrías cilíndricas como lo plantea Womersley (1955) para el caso newtoniano, o considerando la reología no newtoniana tipo ley de potencia con distintas metodologías, ya sean teóricas, numéricas y experimentales, las cuales se detallan más adelante.

Para el problema del flujo pulsante también se vuelve relevante el régimen laminar o turbulento que tenga el fluido. En el caso de fluidos no newtonianos, se han determinado rangos para el cual un fluido no newtoniano, acorde a su reología cambia de régimen laminar a turbulento (Ryan & Johnson, 1959; Hanks, 1963). Existen estudios del comportamiento de un fluido no newtoniano en régimen turbulento como el de Rudman & Blackburn (2006), quienes emplean métodos numéricos para una reología tipo Carreau-Yasuda para el flujo sanguíneo. Para la reología tipo ley de potencia, Malin (1997), estudia el flujo en tuberías de este tipo de fluidos, por medio de métodos numéricos y comparando con resultados experimentales.

Para el problema a analizar del flujo pulsante con reología ley de potencia se considerará que el fluido se encuentra en régimen laminar, por lo que la revisión bibliográfica se centra en estudios que consideran este régimen.

2.1.2 Enfoque teórico

Como se ha mencionado anteriormente, el problema del flujo pulsante para geometrías simples como cilíndricas o planas, en el caso newtoniano por medio de enfoques teóricos fue resuelto a poco tiempo de determinarse las ecuaciones de Navier-Stokes y ha sido presentado por múltiples autores (Lamb, 1895; Crandall, 1922), algunos aplicando los resultados teóricos a aplicaciones prácticas (Womersley, 1955).

En el caso de reologías no newtonianas, debido a la complejidad de los modelos reológicos, las soluciones analíticas están limitadas por la geometría y las simplificaciones que se puedan hacer sobre el tensor de tensiones.

En este ámbito, el problema de un flujo no newtoniano pulsante ha sido estudiado de manera teórica para geometrías cilíndricas en reologías tipo ley de potencia donde la componente pulsante del gradiente de presión es pequeña (Daprà & Scarpi, 2004). De igual forma se han resuelto problemas clásicos, como el primer problema de Stokes para un flujo con reología tipo ley de potencia (Pascal, 1992) o el flujo de Poiseuille, además de otras reologías simples como plástico de Bingham o Hershel-Bulkley (Chhabra & Richardson, 1999).

Se han aplicado otras reologías a flujo transientes en geometrías cilíndricas con reología tipo Oldroyd-B (Fetecau, 2004) o en geometrías planas con placas oscilantes con la misma reología (Fetecau et al. 2005). A esto se agrega el estudio del comportamiento de fluidos no newtonianos de segundo grado sometidos a velocidades angulares (Rajagopal, 1982).

2.1.3 Enfoque numérico

El problema de un flujo pulsante ha sido analizando ampliamente con métodos numéricos, tanto para el caso newtoniano como el no newtoniano, incluido el uso de reologías tipo ley de potencia.

Se han agregado el efecto de diversas geometrías y bordes rígidos o móviles, debido a la relevancia que tiene el flujo pulsante en el estudio del flujo sanguíneo, especialmente en el caso de arterias y la estenosis (reducción de la sección de flujo).

Los estudios numéricos se concentran en resolver flujos no newtonianos, especialmente en el caso de flujo pulsante o flujo en geometrías cilíndricas o rectangulares, ya que las soluciones analíticas para estas condiciones y geometrías en el caso newtonianas son conocidas.

Para el caso no newtoniano se tiene soluciones para el flujo impermanente en tuberías de un fluido tipo ley de potencia, incluido el caso del flujo pulsante (Edwards et al., 1972; Balmer & Fiorina, 1980; Warsi, 1994; Adusumilli & Hill, 1984; Yao et al., 2013). Otros autores han resuelto el problema del flujo pulsante en tuberías para otras reologías como el modelo newtoniano generalizado y reologías viscoelásticas tipo Oldroyd-B, Oldroyd-B generalizado (Pontrelli, 1998) o fluido tipo Casson modificado (Razavi et al., 2011).

Varios estudios agregan variaciones sobre la geometría cilíndrica, por ejemplo, se agregan deformaciones en la sección de flujo cilíndrica para simular arterias con estenosis considerando reologías para representar el flujo sanguíneo con modelos Hershel-Bulkley (Tu & Deville, 1996) o ley de potencia (Mandal, 2005). Existen variaciones que consideran cambios de la curvatura en la tubería en el flujo cilíndrico pulsante para una reología Carreau-Yasuda (Gijzen et al., 1999). Se considera también la presencia de elementos porosos con un modelo reológico de Cross (Zaman et al., 2017) o borde oscilatorio en las tuberías (Shupti et al., 2017).

En el caso de geometrías planas o rectangulares, existe una menor cantidad de estudios para fluidos no newtonianos, encontrándose soluciones para el flujo en una tubería rectangular de un fluido tipo Ellis (Matsuhisa & Bird, 1965) o entre dos placas paralelas con viscosidad dependiente de concentraciones (Hatami & Ganji, 2014), todas estas para régimen permanente.

2.1.4 Enfoque Experimental

En el marco del estudio experimental de los fluidos newtonianos, existen estudios que consideran la reología newtoniana y flujo pulsante (Choi et al., 1979; Huo & Kassab, 2006).

Existen pocos estudios experimentales que consideren la geometría rectangular para un fluido no newtoniano. Cabe destacar el realizado por Haldenwnag et al. (2010) para régimen permanente. La gran mayoría se concentra en el estudio del flujo en geometrías

cilíndricas para reologías no newtonianas tipo ley de potencia en condiciones permanentes (Pinho & Whitelaw, 1991; Gupta & Agarwal, 1993).

De igual manera existen estudios experimentales que consideran efecto pulsante en un flujo ley de potencia (Sundstrom & Kaufman, 1977; El-Sayed, 1984) o que consideran otras reologías como Bingham (Kajiuchi & Saito, 1984), Oldroyd-B (Barnes et al., 1971), Hershel-Bulkley (Havlik & Vycital, 1998; Anastasiou et al. 2010) o comportamiento viscoelástico (Mann et al., 1967; Khabakhpasheva et al., 1989).

2.1.5 Dispersión

Desde que G. Taylor publicó en 1953 el primer artículo sobre el fenómeno de dispersión en un tubería en flujo laminar, dando un tratamiento tanto teórico como experimental, el estudio de este fenómeno se masificó rápidamente, por lo que la literatura existente es extensa. El mismo Taylor publica en 1954 dos artículos más abordando la ocurrencia del fenómeno en el caso turbulento (Taylor, 1954a) y las limitaciones de su análisis respecto a los número adimensionales asociados al fenómeno (Taylor, 1954b).

Debido a la importancia que tiene el concepto de dispersión y los efectos sobre los procesos de transportes, Elder (1959) aplicó la teoría de dispersión de Taylor a un canal en dos dimensiones, lo que posteriormente sería también analizado para ríos (Fischer, et al., 1979)

Aris (1956, 1959) abordó la dispersión con un enfoque similar al de Taylor, pero logró eliminar algunas de las restricciones impuestas sobre los adimensionales asociados para el rango de validez de la teoría de Taylor, logrando extender dicho rango, por lo que actualmente es común ver en la literatura el nombre de teoría de la dispersión de Aris-Taylor.

El análisis de Aris y Taylor no es válido para tiempos adimensionales pequeños (donde el tiempo adimensional t^* se define como $t^* = tD/R^2$ para el caso de una tubería, donde D es el coeficiente de difusión y R el radio de esta), tanto para el caso laminar como el turbulento, pero la solución presentada por Lighthill (1966) permite calcular el transporte en la tubería para tiempos pequeños en el caso laminar. Posteriormente Ananthakrishnan et al. (1965), también para el caso de régimen laminar, presenta una solución para otra región dadas por los valores de los adimensionales del problema, identificando los procesos de transporte predominantes asociados en estas regiones.

Aris (1960) analizó la dispersión de un flujo pulsante laminar newtoniano en una tubería de manera teórica, concluyendo que los efectos de las pulsaciones del gradiente de presión que genera una variación de las dispersiones son muy pequeñas respecto a la componente permanente de la dispersión. Gill & Sankarasubramanian (1970) realizaron un análisis teórico de la difusión en condiciones impermanentes, determinando cómo varía el coeficiente de dispersión para un rango de valores del tiempo adimensional más extensos que los permitidos por la teoría de Taylor y Aris, debido a los supuestos empleados. Barton (1983) modifica el método de Aris (1956) para considerar tiempos pequeños.

Otros autores han abordado el efecto sobre la dispersión al tener flujos pulsantes u oscilatorios. Harris & Goren (1967) por medio de un análisis teórico como experimental, analizan el transporte de masa, verificando la existencia de la dispersión para un flujo entre dos reservorios conectados por una tubería cilíndrica con caudales pulsantes. Holley et al. (1970) estudiaron los efectos de la dispersión en estuarios con flujos oscilatorios (como las mareas), realizando correcciones a la dispersión para estas condiciones para encontrar las diferencias entre la teoría y las observaciones.

Chatwin (1975) estudió la dispersión en una tubería en condiciones de presión pulsante y flujo laminar de manera teórica, analizando los casos de altas y bajas frecuencias, además del efecto que tiene el número de Schmidt, concluyendo que, dadas las condiciones, los efectos de las pulsaciones en el gradiente de presión pueden ser notorios en la dispersión que se produce. Smith (1982) modifica la ecuación de difusión, para analizar los efectos de la dispersión cuando se tienen tiempos cortos en condiciones de flujos oscilatorios laminares, analizando los efectos en estuarios.

Watson (1983) extiende los resultados teóricos de Chatwin (1975), para la dispersión en un flujo oscilatorio o pulsante laminar, verificando su resultados con los resultados experimentales para estas condiciones obtenidos por Joshi et al. (1983) y resultados numéricos obtenidos por Stairmand (1983).

Ng(2004) realiza un análisis del transporte difusivo, incluyendo la dispersión para un canal en condiciones de presión oscilatoria y flujo turbulento, comparando los resultados teóricos, con modelaciones numéricas.

Para fluidos no newtonianos, Fan & Hwang (1965), determinaron el coeficiente de dispersión para un fluido tipo ley de potencia en una tubería cilíndrica, para régimen laminar y permanente. Posteriormente Fan & Wang (1966), realizaron un análisis similar al anterior en las mismas condiciones, pero cambiando la reología, obteniendo el coeficiente de dispersión para reologías tipo Bingham y Ellis en una tubería. Este análisis y cálculo de la dispersión también se ha realizado para otras reologías como fluido tipo Eyring (Shah & Cox, 1974) y Casson (Sharp, 1993). El coeficiente de dispersión para el flujo entre placas paralelas también ha sido determinado para reologías como ley de potencia, Bingham y Casson (Sharp, 1993).

Krantz & Wazan (1974) estudiaron la dispersión para fluidos tipo ley de potencia, en régimen turbulento, para tuberías cilíndricas, determinando el efecto que tiene sobre la dispersión los números de Reynolds altos debido a la turbulencia.

Booras & Krantz (1976), empleando la extensión a la teoría de la dispersión analizada por Gill & Sankarasubramanian (1970), estudiaron la dispersión para un fluido tipo ley de potencia, recuperando los resultados de Fan & Hwang (1965) para tiempos adimensionales grandes y obteniendo el comportamiento de la dispersión para tiempos anteriores a alcanzar el tiempo adimensional grande, donde es válida la teoría de Aris y Taylor.

Existen estudios experimentales para la dispersión en fluidos newtonianos en condiciones oscilatorias (Howes & Mackley, 1990) y pulsantes (Mackley & Ni, 1991) en régimen laminar en tuberías. De igual manera, se han realizado simulaciones numéricas

para determinar la dispersión en tuberías, considerando curvas en fluidos newtonianos (Agrawal & Jayaraman, 1994). También se han realizado estudios numéricos para la dispersión entre placas paralelas para régimen permanente y condiciones oscilatorias (Chu, et al., 2019). Para el caso turbulento se ha estudiado la dispersión de partículas pesadas en condiciones oscilatorias de manera numérica con validación experimental en una sección rectangular (Kirca et al. 2016) y teórica con validación experimental para secciones cilíndricas (Song et al. 2014).

Para fluidos no newtonianos en condiciones de presión pulsante, existen soluciones numéricas para algunas reologías tipo Casson (Nagarani & Sebastian, 2012; Rana & Murthy, 2016).

2.2 Inestabilidad del lecho y celeridad de ondas sedimentarias en flujos en canales abiertos

2.2.1 Presentación del problema

Un proceso de alta relevancia en flujos abiertos con lecho móvil es el transporte de sedimentos. Este se produce debido a la interacción entre el flujo del fluido y el lecho sobre el cual se produce el escurrimiento, pudiendo producirse cambios en la estructura del lecho debido a la interacción con el flujo, ya que este ejerce fuerzas sobre las partículas que conforman el lecho.

Como se tiene dos medios que están interactuando, se requieren las ecuaciones que representan el comportamiento e interacciones entre estos. Para el flujo con superficie libre, las ecuaciones son continuidad y momentum en una dimensión, determinada por Barré de Saint-Venant (1871) y por Boussinesq (1872), independientemente. Actualmente estas dos ecuaciones se conocen como las ecuaciones de aguas someras y se han extendido a dos dimensiones.

Para el comportamiento del lecho es usual emplear la ecuación determinada por Exner (1925), la cual se obtiene de realizar el balance de masa de partículas de sedimentos en el lecho por efecto del flujo que escurre sobre este. Sin embargo, requiere representar la variación del flujo de masa de partículas de sedimentos que se tiene sobre el lecho, lo que se conoce como el gasto sólido de fondo.

El estudio del transporte de sedimentos no se ha limitado solamente a cauces naturales o canales, también se ha estudiado para el flujo en tuberías o en las costas.

En el marco de este proceso donde interactúan tanto el fluido como el lecho de sedimentos, se busca determinar la celeridad de las ondas que se producen. Para esto es necesario acoplar las ecuaciones que representan tanto el flujo del fluido y el comportamiento del lecho. Sobre este sistema de ecuaciones empleando metodologías analíticas es posible determinar la celeridad de las ondas asociadas al sistema considerando un factor que relacione las escalas de los flujos involucrados, el cual para este caso corresponde a una razón entre el gasto sólido de fondo por unidad de ancho respecto al caudal por unidad de ancho en el flujo. Con las expresiones para la celeridad

de las ondas, es posible determinar la relación con los parámetros que las controlan y cómo se produce la relación entre parámetros del flujo del fluido y los parámetros asociados directamente al lecho.

2.2.2 Deformación del lecho como un problema de estabilidad

Debido a la interacción del lecho con el flujo, la interfaz entre el lecho y el fluido se puede volver inestable. Debido a esta inestabilidad se pueden tener diferentes formas de fondo las cuales se encuentran ligadas a las características del flujo (Vanoni & Brooks, 1957; Gradowczyk, 1968). Varios estudios indican que la generación de las formas de fondo, como ondas sedimentarias, son producidas por la inestabilidad de la interfaz entre el fluido y el lecho (Grass, 1970; Williams & Kemp, 1971), lo que provoca pequeñas ondas sedimentarias, las cuales llevan a la generación de las formas de fondo, por ende es relevante el estudio del problema como un análisis de estabilidad para determinar cuándo se generan las formas de fondo, como el realizado por Kennedy (1963) con flujo potencial y una perturbación sinusoidal sobre el lecho, para determinar las posibles formas de fondo. Callander (1968) y Gradowczyk (1968) determinan la celeridad de ondas para el lecho, analizando la estabilidad de estas a partir de los parámetros que afectan la celeridad. Aziz & Prasad (1985) empleando soluciones de onda como los autores anteriores, determina una relación de estabilidad a partir de los parámetros involucrados en la interacción entre el fluido y el lecho.

Existen múltiples estudios que documentan las formas de fondo que se observan debido a la deformación del lecho indicando las características asociadas del flujo que se tiene sobre este para flujos turbulentos newtonianos. Kennedy (1963) analiza de forma analítica por medio de flujo potencial, agregando una perturbación a la ubicación donde actúa esfuerzo de corte para estudiar la estabilidad del lecho, determinando las relaciones entre parámetros del flujo y lecho, obteniendo las configuraciones en el lecho asociadas a cada rango. Vanoni (1974) compila resultados experimentales sobre la dinámica de los ríos, donde se presentan las formas de fondo posibles, cuando estas se producen y como se forman, además de cuando se inicia el proceso del transporte de sedimentos. Andreotti et al. (2012) realiza un trabajo similar, presentando resultados sobre las posibles formas de fondo en flujos turbulentos, qué condiciones deben existir para que estas se den, observando diferencias con las predicciones hechas con modelos invíscidos del fluido.

Para el caso de tener reologías no newtonianas en el fluido, existen pocos estudios, sin embargo, es relevante el de Wan & Song (1987), donde se corrobora la aparición de las mismas formas de fondo que para el caso de fluidos Newtonianos.

2.2.3 Celeridad de las formas de fondo y su relación con el gasto sólido

La generación de formas de fondo, por efecto de la interacción del fluido con el lecho, provoca la aparición de una resistencia adicional (Einstein, 1950), por lo que múltiples autores se han enfocado en analizar la aparición de las formas de fondo y las expresiones para determinar cuánto gasto sólido en el fondo se provoca por efecto del flujo de fluido que se produce sobre éste, además de cuando se inicia el proceso de arrastre en el lecho.

En este ámbito es relevante la forma en cómo se representa el gasto sólido ya que la celeridad de las ondas sedimentarias depende de éste. Esto se debe a que la relación entre el comportamiento de la interfaz está relacionada con variaciones en el gasto sólido, lo que fue presentando por Exner (1925). Por ende, expresiones que buscan determinar la celeridad de las ondas requieren conocer cómo se relaciona el gasto sólido con los parámetros del lecho y del fluido.

En el marco de fluidos newtonianos y turbulentos, múltiples autores han presentado expresiones matemáticas para representar el gasto sólido en el lecho. DuBuat (1786) es uno de los primeros en discutir sobre la importancia del esfuerzo sobre el lecho, además de dar algunas nociones sobre la estabilidad de las formas de fondo. Duboys (1879) presenta una de las primeras relaciones para determinar el transporte de fondo, considerando una fuerza por efecto del fluido y un valor umbral para el inicio del movimiento. Posteriormente Schoklitsch (1914) realiza experimentos, haciendo aportes a la relación para determinar el gasto de fondo planteada por Duboys. De igual manera Gilbert (1914) realiza amplios experimentos en lo que respecta a la medición gasto sólido.

Bagnold (1973), empleando principios físicos, deduce una relación general para calcular el transporte en el fondo. Otros estudios presentan relaciones semi-empíricas como las de Einstein (1942), Meyer-Peter & Muller (1948), Ashida & Michiue (1972), Engelund & Fredsøe (1976), Fernandez Luque & van Beek, (1976) y van Rijn (1984). Las relaciones planteadas por los autores anteriores muestran una dependencia con el esfuerzo de corte que ejerce el fluido sobre el lecho, pero además agregan un esfuerzo crítico para representar el umbral para el cual se inicial el arrastre en el lecho. Entre los estudios sobre el esfuerzo de corte crítico para el cual se tiene gasto sólido destaca el de Shields (1936), y los posteriores trabajos sobre los resultados presentados por este, realizados por Rouse (1939) y Brownlie (1981), donde se muestra que el valor umbral para el inicio del arrastre incipiente depende de las características del lecho.

Es relevante también el estudio probabilístico de Einstein (1950), ya que analiza el gasto sólido en el fondo como el que se encuentra en suspensión, sin seguir las hipótesis del comportamiento del esfuerzo crítico empleadas por Bagnold, para el gasto de fondo. Las relaciones de Meyer-Peter & Muller (1948) y Einstein (1950), son las más populares y muestran resultados similares a los datos experimentales obtenidos por Gilbert (1914) y Chien (1954), sin embargo, Engelund & Hansen (1972) indican que estas relaciones presentan gran diferencia con los datos experimentales para valores de gasto sólido grandes.

Parker et al. (2003) desarrolla un modelo distinto para determinar el gasto sólido de fondo, llegando a una expresión similar a la de Bagnold pero sin emplear las hipótesis que este plantea. Niño & García (1998), indican que la hipótesis empleada por Bagnold falla al no representar de manera correcta como actúa el esfuerzo de corte sobre las capas en el lecho.

En el marco de fluidos newtonianos en régimen laminar, Valance y Langlois (2005), observaron que el gasto sólido no solo puede depender del esfuerzo de corte sobre el lecho, sino que también de las características del lecho, como lo es la existencia de un esfuerzo de corte crítico, similar a lo que ocurre en el régimen turbulento.

2.2.4 Verificación experimental

Como se ha mencionado anteriormente, existen múltiples publicaciones de diversos autores sobre el comportamiento del lecho y la celeridad de las ondas para el caso newtoniano, pero a pesar del esfuerzo realizado por múltiples autores en dar expresiones adecuadas para el comportamiento del gasto sólido, existen deficiencias en lo que respecta al fenómeno del arrastre en el lecho, lo que se traduce en que expresiones para el gasto sólido no se corroboran con resultados experimentales (Charru et al, 2004). Además, se ha observado que no se ha logrado acoplar de manera adecuada el lecho con el flujo para el caso laminar (Ouriemi et al. 2009). Por ende, existen limitaciones en los resultados que se pueden tener en un enfoque netamente teórico para un estudio de las ondas, aun empleando relaciones semi-analíticas.

En el caso de analizar otras reologías que no sean Newtonianas, existen muy poca literatura sobre el comportamiento de las ondas para estas reologías, específicamente para ley de potencia. Algunos estudios experimentales donde se considera el arrastre en el lecho es el de Negrete (2014), este último con mediciones respecto a la celeridad de las ondas en el lecho.

CAPÍTULO 3: MARCO TEÓRICO

3.1 Caracterización del fluido

3.1.1 Fluidos newtonianos

Un fluido incompresible, se define como newtoniano cuando presenta una relación entre el tensor de esfuerzo de corte τ directamente proporcional al tensor de tasa de deformación angular $\dot{\gamma}$. El coeficiente de proporcionalidad asociado se conoce como viscosidad dinámica del fluido y es una propiedad del fluido:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (3.1)$$

El tensor de deformación angular se relaciona con el gradiente del campo de velocidades u como:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (3.2)$$

O según sus componentes como $\dot{\gamma}_{ij}$:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

Por ende, los componentes del tensor de esfuerzo de corte τ_{ij} quedan como:

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

En caso de tener escurrimiento uniforme en la dirección x y flujo bidimensional, el esfuerzo de corte longitudinal se reduce a la ecuación de Newton-Navier:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.5)$$

Una característica importante de los fluidos newtonianos que se obtiene de la relación lineal entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación angular es que basta con tener un esfuerzo de corte distinto de cero para producir movimiento del fluido.

3.1.2 Fluidos no newtonianos

En fluidos incompresibles, se define un fluido no newtoniano como el que presenta una relación tal que el esfuerzo de corte τ no es directamente proporcional a la tasa de deformación angular $\dot{\gamma}$. Esto incluye el caso donde se requiere un valor de esfuerzo de corte mínimo para observar movimiento en el fluido. Si consideramos el caso donde no se requiere un esfuerzo de corte mínimo, entonces la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación angular está dada por una función no lineal $f(\dot{\gamma})$:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (3.6)$$

Si se mantiene la estructura de (3.1), se puede definir una viscosidad aparente, la cual es una función de la tasa de deformación angular:

$$\tau = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (3.7)$$

Donde $\mu(\dot{\gamma})$ es la viscosidad aparente del fluido.

Los fluidos no newtonianos se suelen dividir en si existe o no una dependencia de la viscosidad aparente respecto al tiempo. Si se tiene una dependencia temporal en la viscosidad aparente, estos fluidos se subdividen en tixotrópicos (presentan una disminución de su viscosidad aparente en el tiempo) o reopécticos (presentan un aumento en su viscosidad aparente en el tiempo).

Si no hay dependencia del tiempo, pero sí de la tasa de deformación angular, estos fluidos se clasifican en dilatantes (“shear thickening”) donde la viscosidad aparente aumenta a mayor tasa de deformación angular y pseudoplásticos (“shear thinning”) donde la viscosidad aparente disminuye a mayor tasa de deformación).

Como se menciona anteriormente, puede darse la condición de que exista un esfuerzo de corte mínimo para tener movimiento en el fluido, además de una de las condiciones anteriores. En ese caso existe un esfuerzo mínimo para tener movimiento en el fluido el que se conoce como esfuerzo de fluencia τ_f . Este comportamiento es presentando por un fluido conocido como plástico de Bingham, donde se tiene un comportamiento lineal entre el esfuerzo de corte y la tasa de deformación angular sumado a el esfuerzo de fluencia. En caso de tener una relación no lineal y el esfuerzo de fluencia, sumado al esfuerzo de fluencia, el fluido se conoce como plástico.

Si se tiene un esfuerzo de fluencia:

$$\tau = \tau_f + f(\dot{\gamma}) \quad (3.8)$$

Existen múltiples comportamientos observados para la reología de los fluidos, por ende, existe la necesidad de generar modelos para representar el comportamiento observado a través de relaciones matemáticas entre el esfuerzo de corte y la tasa de

deformación angular de un fluido no newtoniano. Más aún, estos modelos que representa la reología de un fluido no tienen por qué ser únicos para el fluido, teniéndose que para un fluido se representa su reología como varios modelos reológicos según rangos del valor que presentan su tasa de deformación angular.

De igual forma, existen otros factores que pueden variar la viscosidad de un fluido, aparte de la deformación angular, tanto en el caso newtoniano y no newtoniano. Cambios en la temperatura del fluido afectan su viscosidad y en el caso de suspensiones la viscosidad depende de las concentraciones del material sólido suspendido.

Para esta tesis se utiliza el modelo reológico conocido como ley de potencia que se utiliza tanto para fluidos pseudoplásticos (“shear thinning”).

3.1.3 Modelo reológico ley de potencia

El modelo reológico ley de potencia es también conocido como Ostwald- de Waele en honor a los químicos Friedrich Ostwald y Armand de Waele (Blair et al.,1939). Este modelo reológico se puede emplear para representar la reología de fluidos no newtonianos que actualmente conocemos como dilatantes o pseudoplásticos, además de incluir el caso newtoniano. Como indica su nombre, este modelo emplea una función de potencia para la viscosidad efectiva del fluido. Para este modelo el tensor de esfuerzos de corte en función del tensor de deformación angular queda como:

$$\tau_{ij} = K(\Pi_{\dot{\gamma}})^{n-1} \dot{\gamma}_{ij} \quad (3.9)$$

Donde K es el índice de consistencia en [Pa sⁿ], n el índice de flujo y $\Pi_{\dot{\gamma}}$ es el segundo invariante del tensor de tasa de deformación. Este último se calcula como:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}} \quad (3.10)$$

Debido a la simetría del tensor de tasa de deformación angular, el segundo invariante se reduce a:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{11}^2 + \dot{\gamma}_{22}^2 + \dot{\gamma}_{33}^2) + \dot{\gamma}_{12}^2 + \dot{\gamma}_{13}^2 + \dot{\gamma}_{23}^2} \quad (3.11)$$

Para fluidos pseudoplásticos el valor del índice de flujo n se encuentra entre 0 y 1, mientras que en fluidos dilatantes, el valor de n es mayor que 1. Para el caso de n igual a 1, se recupera la relación para fluidos newtonianos, donde el índice de consistencia pasa a ser la viscosidad del fluido. En el modelo ley de potencia la viscosidad efectiva del fluido corresponde a:

$$\mu_{eff} = K(\Pi_{\dot{\gamma}})^{n-1} \quad (3.12)$$

Para un flujo bidimensional, uniforme o gradualmente variado en la dirección x , el segundo invariante se simplifica, quedando de la forma:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \left|\frac{du}{dy}\right| \quad (3.13)$$

Luego el esfuerzo de corte en la dirección longitudinal para el modelo ley de potencia se reduce a:

$$\tau_{xy} = K \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.14)$$

Este modelo reológico presenta limitaciones para valores de $\Pi_{\dot{\gamma}}$ cercanos a cero o cuando son muy altos, ya que en esos casos la viscosidad del fluido tiende a valores constantes (lo que corresponde a un comportamiento Newtoniano) lo que no logra representar la ley de potencia (Chhabra, 2010). Existen otros problemas asociados a la suavidad del modelo cuando se tienen $\Pi_{\dot{\gamma}}$ iguales a cero, al igual que su diferenciabilidad para estos puntos, lo que limita su aplicación para flujos donde se tienen estas condiciones, ya sean soluciones analíticas o numéricas.

3.2 Dispersión de Taylor

La existencia de la viscosidad en los fluidos reales produce los esfuerzos viscosos tanto entre el fluido como las paredes (u otro tipo de frontera) del medio por el cual se mueve el fluido. Las paredes u otras condiciones de borde condicionan el flujo del fluido, al igual que el equilibrio de las fuerzas, donde aparece el esfuerzo viscoso. El fluido adopta un perfil de velocidad consistente con las condiciones de borde y los esfuerzos de corte, por lo que el campo de velocidad no es igual en todo el fluido.

Considerando un flujo bidimensional, en régimen permanente y laminar, entre dos paredes, la solución para el campo de velocidades o perfil corresponde al flujo de Poiseulle, situación similar ocurre para el flujo en tuberías. En las paredes el fluido presenta velocidad nula, mientras que en la zona media se alcanza el máximo de velocidad, situación que se repite en el caso de tener flujo turbulento. Esta diferencia de la velocidad el perfil se traduce en una diferencia en el transporte que puede provocar el flujo. Considerando la ecuación de transporte advección-difusión en dos dimensiones para un compuesto conservativo, donde la ley de Fick es válida, isotrópico y con un flujo en la dirección x :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x, y) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (3.15)$$

Donde $C(x, y, t)$ es la concentración del compuesto y D el coeficiente de difusión molecular.

Se agregan las condiciones de borde adecuadas a las paredes, tales como flujo nulo sobre éstas.

Con el fin de analizar los efectos que tiene la variación del perfil de velocidad Taylor (1953, 1954a, b) plantea el concepto de dispersión, que corresponde al efecto en términos del transporte del compuesto debido a la existencia de las variaciones en el perfil de velocidad, por lo que el transporte no es uniforme transversalmente al flujo mientras se tenga el tiempo suficiente para que el transporte difusivo logre que las concentraciones sean homogéneas en la transversal al flujo.

Trabajando la velocidad como:

$$u(x, y) = \bar{u}(x) + u'(x, y) \quad (3.16)$$

Donde $\bar{u}(x)$ es la velocidad media en la vertical

Realizando el mismo procedimiento con la concentración:

$$C(x, y, t) = \bar{C}(x, t) + C'(x, y, t) \quad (3.17)$$

Donde $\bar{C}(x, t)$ es la concentración media en la vertical.

Haciendo un cambio de variable Lagrangiano para la variable espacial longitudinal y temporal:

$$\xi = x - \bar{u}t \quad , \quad \tau = t \quad (3.18)$$

Con las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18), aplicadas a (3.15):

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} = D \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

Promediando la ecuación anterior en la vertical, regla de Leibnitz y que no existe transporte en los bordes:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{h} \int_0^h \bar{C} dy + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{h} \int_0^h C' dy + \frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy + \frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} dy = D \left(\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} dy \right) \quad (3.20)$$

Luego:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} dy = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.21)$$

Llamando:

$$\frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} dy = \overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} \quad (3.22)$$

Queda:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.23)$$

Al restar la ec. (3.23) a (3.19):

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} - \overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = D \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right) - D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} + u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} - \overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = D \left(\frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \right) \quad (3.19)$$

Como la difusión en la longitudinal de C' es menor que la difusión de C' en la vertical:

$$\frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} \ll \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

Taylor señala que los términos $u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}$ y $\overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}}$ son fluctuaciones pequeñas comparadas con el efecto que tiene $u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi}$, luego:

$$\frac{\partial C'}{\partial \tau} + u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

Notar que, al alcanzarse un tiempo suficiente, la difusión molecular en el vertical logra equilibrarse con la advección, teniéndose:

$$u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial y^2} \quad (3.24)$$

Como en los bordes no existe transporte, es decir:

$$\left. \frac{\partial C'}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial C'}{\partial y} \right|_{h=0} = 0 \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) se puede integrar directamente:

$$C' = C'(y = 0) + \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy \quad (3.26)$$

Promediando en la vertical:

$$\frac{1}{h} \int_0^h C' dy = C'(y = 0) + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy \quad (3.27)$$

El promedio de C' en la vertical es nulo, luego:

$$0 = C'(y = 0) + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy \quad (3.28)$$

$$C'(y = 0) = -\frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy \quad (3.29)$$

Remplazando en (3.26):

$$C' = -\frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy + \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy \quad (3.30)$$

Derivando en ξ :

$$\frac{\partial C'}{\partial \xi} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy + \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy dy \quad (3.31)$$

Multiplicando por u' :

$$u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} = -u' \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy + \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy dy \quad (3.32)$$

Promediando en la vertical:

$$\frac{1}{h} \int_0^h u' \frac{\partial C'}{\partial \xi} dy = -\frac{1}{h} \left(\int_0^h u' dy \right) \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy dy dy \quad (3.33)$$

Quedando:

$$\overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = -\frac{1}{h} \left(\int_0^h u' dy \right) \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{1}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} dy dy dy + \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy dy dy \quad (3.34)$$

Como la primera integral es nula:

$$\overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} dy dy dy \quad (3.35)$$

$$\overline{u' \frac{\partial C'}{\partial \xi}} = \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.36)$$

Remplazando en (3.23) con (3.36):

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.37)$$

Reordenando:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} = \left(D - \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy \right) \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} \quad (3.38)$$

Donde se obtiene el coeficiente de dispersión \mathcal{K} :

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'}{D} \int_0^y \int_0^y u' dy dy dy \quad (3.39)$$

Taylor (1953) determinó de manera teórica el coeficiente de dispersión para una tubería cilíndrica de radio a y velocidad máxima U_o , para flujo laminar, obteniendo:

$$\mathcal{K} = \frac{a^2 U_o^2}{192D} \quad (3.40)$$

O llevado a la velocidad media \bar{U} :

$$\mathcal{K} = \frac{a^2 \bar{U}^2}{48D} \quad (3.41)$$

Con los supuestos mencionados anteriormente en la deducción de la ecuación para K , con la restricción (Taylor la llama “condición limite”) de que la escala de tiempo dada por $\frac{L}{U_o}$ sea lo suficientemente grande para que sea apreciable un cambio de en la concentración debido a la advección:

$$t \sim \frac{L}{U_o} \gg \frac{a^2}{192D} \quad (3.42)$$

Taylor validó sus resultados teóricos con mediciones experimentales, corroborando de manera satisfactoria lo obtenido teóricamente. Posteriormente Taylor (1954a) aplicó la misma teoría al flujo turbulento en una tubería, determinando el coeficiente de dispersión para este caso:

$$\mathcal{K} = 10.1aU_* \quad (3.43)$$

Donde U_* es la velocidad de corte (notar que esta velocidad no es un velocidad observable):

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (3.44)$$

Donde la velocidad de corte se puede ligar con el factor de fricción f de Darcy y la velocidad media como:

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (3.45)$$

Taylor argumenta en una publicación posterior (Taylor, 1954b), sobre la validez de sus resultados, señalando que, debido a los supuestos empleados para determinar el coeficiente de dispersión en tuberías, que se debe tener:

$$\frac{4L}{a} \gg \frac{\bar{U}a}{D} \gg \sqrt{48} \approx 6.9 \quad (3.46)$$

La que se obtiene debido a los supuestos de tener difusión molecular despreciable frente al efecto de la dispersión longitudinal $D \ll \frac{a^2 \bar{U}}{48D}$ o bien $\sqrt{48} \ll \frac{\bar{U}a}{D}$ (notar que esto corresponde a una cota inferior para el número de Péclet ya que este número adimensional se define como $\frac{\bar{U}a}{D}$) y que $\frac{a^2}{4D} \ll L$ o bien $\frac{\bar{U}a^2}{4D} \ll \frac{L}{\bar{U}}$, que corresponde a la condición de tiempo suficiente para tener cambios en la concentración debido a la advección.

Posteriormente Aris (1956), extendió la teoría planteada por Taylor, mejorando el tratamiento analítico y aumentando el rango de validez dado por Taylor, que permite extender la teoría a todo el rango del número de Péclet, considerando también los efectos de la difusión trasversal en la tubería. Es en base a estas modificaciones que se obtiene la ecuación (3.39).

Ananthakrishnan, Gill y Bardun (1965) determinaron soluciones para el efecto de la dispersión fuera del rango de validez de los resultados de Taylor con las modificaciones de Aris. Los resultados obtenidos les permitieron identificar regiones según el tiempo adimensional y el número de Péclet en la tubería, indicando que soluciones son válidas para cada una de estas regiones y que proceso de transporte predomina.

Elder (1959) y posteriormente, Fischer et al. (1979) llevan la teoría de la dispersión de Taylor a cuerpos de aguas superficiales, agregando los efectos de tener más dimensiones. Para el caso más simple en superficie libre, un flujo bidimensional con altura constante, el coeficiente de dispersión aplicando la ecuación (3.39):

$$\mathcal{K} = \frac{8}{945} \frac{U_o^2 a^2}{D} \quad (3.47)$$

Donde es U_o la velocidad superficial y a la altura del escurrimiento.

Para el caso turbulento de un flujo en superficie libre, el coeficiente de dispersión longitudinal

$$\mathcal{K}_L = 0.0066 \frac{B^2 U_o^2}{\varepsilon_T} \quad (3.48)$$

Donde B es el ancho del cauce, U_o la velocidad media y ε_T es un coeficiente de difusión transversal medio, el cual depende de las curvas del cauce, cumpliendo la relación:

$$\frac{\varepsilon_T}{u_* h} = 0.3 \sim 0.7 \quad (3.49)$$

Para flujos pulsantes en fluidos newtonianos, Aris (1960) obtiene resultados para la dispersión en condiciones de presión pulsante y flujo laminar en una tubería, concluyendo que los efectos sobre la dispersión que genera la pulsación son menores a $\frac{1}{100}$ del orden de magnitud de la razón entre el valor medio gradiente de presiones y la pulsación del gradiente de presiones. Pero indica que eso puede variar si la reología del fluido es distinta a la Newtoniana.

Para fluidos no-Newtonianos, Fan & Hwang (1965) y posteriormente Fan & Wang (1966), determinaron el coeficiente de dispersión en una tubería para varias reologías (Ostwald-de Waele, Bingham y Ellis). En el caso de un fluido tipo ley de potencias, para una tubería cilíndrica, el coeficiente de dispersión, obtenido por Fan & Hwang (1965)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2(n+3)(n+5)} \frac{R^2 \bar{U}^2}{D} \quad (3.50)$$

Donde R es el radio de la tubería, \bar{U} la velocidad media y D el coeficiente de difusión molecular.

3.3 Transporte de partículas

El flujo de un fluido sobre un lecho de partículas sólidas puede provocar que estas se muevan, debido a las fuerzas que ejerce el fluido sobre el lecho, perturbando el equilibrio en cual se encuentran las partículas sólidas. Esto se conoce como transporte de sedimentos. Se ha observado que el transporte de sedimentos incluye dos fases, una parte del transporte es en suspensión, donde se tiene un flujo que transporta a las partículas más finas, mientras que en la cercanía del lecho se produce un arrastre de partículas más gruesas las cuales dan lugar a estructuras bien identificadas (formas de fondo) de acuerdo a las condiciones del flujo, ya que los mecanismo de transporte en el fondo están ligados a la características del flujo y a las características de las partículas que componen el lecho.

Esto se traduce en que existen dos componentes del transporte de partículas por efecto del fluido. Sin embargo, se puede observar que el arrastre de sedimentos no es instantáneo. Existe un valor umbral para el cual se inicia el arrastre sobre el lecho, el que se conoce como arrastre incipiente, una vez sobrepasado este umbral, se produce un transporte generalizado de sedimentos.

3.3.1 Gasto sólido de fondo

Para regímenes turbulentos se han identificado tres modos principales con los cuales las partículas del lecho se mueven. El primer modo consiste en deslizamiento de las partículas sin que estas roten. Las partículas deslizan manteniéndose aledañas al lecho, sin presentar algún tipo de rotación. El segundo corresponde a un deslizamiento con rotación, el que es más común que el primer modo, debido a las irregularidades del fondo lo que se traducen en fuerzas rotacionales entre el lecho y el fluido lo que lleva a rotar a las partículas. El tercer modo y el principal responsable del arrastre de fondo es la saltación, donde las partículas se separan del lecho rebotando con otras partículas del lecho (Niño & García, 1998).

Este proceso está condicionado por las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre las partículas, agregándose el peso de estas y las colisiones producidas con otras partículas del lecho.

Debido al movimiento de estas partículas, una vez superado el umbral establecido por el arrastre incipiente, es posible observar distintas estructuras en los lechos. Estas estructuras se conocen como rizos, dunas o antidunas, las cuales están asociadas al número de Froude que tiene el fluido que escurre sobre el lecho (Vanoni, 1974).

Al considerar régimen laminar, algunos autores argumentaron que no es posible tener formación de risos, dunas y barras en el lecho por que el proceso está ligado a la turbulencia (Yalin, 1972; Raudkivi, 1997), sin embargo, otros autores han cuestionado esta postura presentando resultados experimentales de que es posible tener formas de fondo en condiciones de régimen laminar (Coleman & Eling, 2000). Considerando modelos analíticos para un flujo de Couette se tiene la formación de risos en el lecho (Valance & Langlois, 2005), corroborando que es posible tener formas de fondo en condiciones

laminares. Para el caso laminar tanto las fuerzas gravitacionales como las viscosas son importantes.

3.3.2 Cálculo del gasto sólido de fondo y determinación del arrastre incipiente

Existen múltiples formulas en la literatura para calcular el gasto sólido de fondo generadas, por flujos de agua. Antes de plantear estas relaciones es necesario identificar los parámetros adimensionales asociados al transporte de sedimentos.

Como el efecto gravitacional es importante para el flujo, el gasto sólido se escala con respecto a la gravedad. En este caso, escribiendo el gasto sólido por unidad de ancho q_s a una forma adimensional q_s^* :

$$q_s^* = \frac{q_s}{\sqrt{g R d_s^3}} \quad (3.51)$$

Donde $R = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$ es la densidad específica y d_s , el diámetro característico de las partículas del lecho.

La fuerza tractiva sobre la partícula debido al esfuerzo de corte se escala con el peso de la partícula, generándose el esfuerzo de corte adimensional o número de Shields:

$$\tau_* = \frac{u_*^2}{g R d_s} \quad (3.52)$$

Donde u_* es la velocidad friccional o de corte definido a partir del esfuerzo de corte en el fondo τ_o como:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (3.53)$$

Se define el número de Reynolds de la partícula como:

$$\text{Re}_{*p} = \rho \frac{u_* d_s}{\mu} = \frac{u_* d_s}{\nu} \quad (3.54)$$

Una forma de abordar el problema es definir un esfuerzo crítico τ_{*c} asociado al umbral para el cual se inicial el movimiento de las partículas.

El análisis también puede hacerse considerando una velocidad crítica de arrastre, en la literatura relaciones las que se discuten más adelante.

Se presentan a continuación algunas fórmulas clásicas empleadas para calcular el gasto sólido por unidad de ancho, las cuales emplean el esfuerzo adimensional y un esfuerzo crítico umbral a partir del cual se tiene arrastre de sedimentos, considerando flujo turbulento y comportamiento hidrodinámicamente rugoso para las paredes del cauce. Todas estas relaciones suponen un lecho con granulometría uniforme. También es importante mencionar que estas relaciones fueron deducidas con agua como el fluido, siendo cuestionable su uso directo para un análisis de gasto sólido en fluidos no newtonianos.

Engelund y Fredsøe (1976):

$$q_s^* = 18,74(\tau_* - \tau_{*c})(\tau_*^{1/2} - 0,7\tau_{*c}^{1/2}) \quad (3.55)$$

Con $\tau_{*c} = 0,48$

Meyer-Peter y Müller (1948):

$$q_s^* = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad (3.56)$$

Con $\tau_{*c} = 0,05$

Ashida y Michiue (1972):

$$q_s^* = 17(\tau_* - \tau_{*c})(\tau_*^{1/2} - \tau_{*c}^{1/2}) \quad (3.57)$$

Con $\tau_{*c} = 0,05$

Fernandez-Luque y van Beek (1976):

$$q_s^* = 5,7(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad (3.58)$$

Con $\tau_{*c} = 0,058$

Podemos notar que existen dos estructuras en las ecuaciones anteriores para determinar el gasto sólido:

$$q_s^* = \alpha(\tau_* - \tau_{*c})(\tau_*^{1/2} - \beta\tau_{*c}^{1/2}) \quad (3.59)$$

$$q_s^* = \zeta(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad (3.60)$$

Siendo la ecuación (3.23) similar a que obtienen Niño y García (1998).

Un método alternativo para calcular el gasto sólido de un lecho uniforme es el planteado por Einstein, el que se basa en la probabilidad de movimiento de las partículas sólidas, sin considerar la existencia de una condición de arrastre.

Einstein (1950):

$$\frac{43,5q_s^*}{1 + 43,5q_s^*} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-t^2} dt \quad (3.61)$$

$$\text{Con } \alpha_0 = -\frac{0,143}{\tau_*} - 2 \text{ y } \alpha_1 = \frac{0,143}{\tau_*} - 2$$

Notar que esta relación es para el cálculo del gasto sólido de fondo.

Las relaciones anteriores para el gasto sólido no siempre presentan resultados similares entre sí. De igual forma no siempre se corroboran con las observaciones experimentales. Es importante mencionar que la condición de arrastre crítico es subjetiva, lo que se traduce en que valores de τ_* difieren entre distintos autores, influyendo en la dispersión de los valores para el gasto sólido.

Respecto a la determinación del esfuerzo crítico, uno de los resultados experimentales más conocidos es el diagrama de Shields (1936) que presenta una banda de valores de τ_{*c} en función de $\mathbb{R}e_{*p}$ para los cuales se observa el inicio del arrastre. Posteriormente Rouse (1939), es quien traza usando este diagrama la llamada curva de Shields, separando la zona donde se observa movimiento con la donde no se aprecia movimiento de las partículas.

El diagrama de Shields no permite calcular de manera directa el esfuerzo de corte crítico τ_c , ya que éste se encuentra tanto en τ_{*c} como en $\mathbb{R}e_{*p}$. Los experimentos realizados por Shields son para el rango $1 \leq \mathbb{R}e_{*p} \leq 1000$ para el Reynolds de la partícula

Brownlie (1981), empleando los datos de Shields y otra combinación de adimensionales, propone un ajuste a la curva donde se tiene el arrastre incipiente, lo que

permite calcular τ_{*c} de manera explícita en términos de las propiedades del sedimento y del fluido, usando un número de Reynolds de la partícula R_p :

$$\tau_{*c} = 0.22 R_p^{-0.6} + 0.06 \exp(-17.77 R_p^{-0.6}) \quad (3.62)$$

$$\text{Con } R_p = \frac{\mathbb{R}e_{*p}}{\sqrt{\tau_*}} = \frac{d\sqrt{Rgd}}{\nu}$$

Como el diagrama de Shields no presenta valores menores a 1 para el Reynolds de la partícula, una opción es realizar un interpolación, la cual se puede realizar con la curva trazada por Rouse y el ajuste de Brownlie, sin embargo, autores posteriores como Mantz (1977) realizaron experimentos para determinar el inicio del arrastre para valores de Reynolds de la partícula menores a la unidad. Mantz (1977) propone para $0.03 \leq \mathbb{R}e_{*p} \leq 1$:

$$\tau_{*c} = 0.10 \mathbb{R}e_{*p}^{-0.3} \quad (3.63)$$

Una forma alternativa de abordar el problema del inicio del arrastre incipiente del lecho, que menciono anteriormente, es considerar una velocidad crítica media donde se tiene el umbral de arrastre de los sedimentos gruesos. En este ámbito existen estudios experimentales (Isbash, 1935; Neill, 1967) y teóricos (Straub, 1953; Maza & García, 1978). Estos se basan en un análisis de fuerzas que actúan sobre una partícula en el lecho del canal. Considerando lecho hidrodinámicamente rugoso y alguna ley para la distribución de velocidades (como logarítmica o “1/6”), las relaciones teóricas obtenidas son de la forma:

$$Fr_c = \frac{U_c}{\sqrt{gh}} = k\sqrt{R} (\cos \alpha)^m \left(\frac{h}{d_s}\right)^{-n} \quad (3.64)$$

Donde Fr_c es el número de Froude asociado de la velocidad media crítica de arrastre U_c , k es una constante relacionada con los coeficientes de arrastre y sustentación de la partícula la cual varía según cada autor, al igual que el valor considerando para el ángulo de fricción interna ϕ , el exponente m también varía según el autor ya que depende de la distribución de velocidades empleada. α es el ángulo de la pendiente del canal (el que se supone pequeño) y d_s diámetro representativo de las partículas del lecho. El parámetro n depende de la ley empleada para la distribución de velocidades.

Para el caso laminar las fuerzas viscosas se vuelven relevantes, por lo que el gasto sólido adimensional por unidad de ancho está dado por (Ouriemi, et al, 2009):

$$q_s^* = \frac{q_s \mu}{(\rho_s - \rho) g d_s^3} \quad (3.65)$$

Donde aparece la viscosidad dinámica del fluido μ , la aceleración gravitacional g , la diferencia de densidades de las partículas y el fluido y d_s , el diámetro característico de las partículas del lecho.

Cuando el comportamiento de la pared no es hidrodinámicamente rugoso, los valores de τ_{*c} no son constantes y deben ser obtenidos a partir del diagrama de Shields u otra relación para ser utilizada en las relaciones de gasto sólido.

Se presentan a continuación varias fórmulas empleadas para calcular el gasto sólido por unidad de ancho, para el régimen laminar. Estas son de carácter semi-empírico, excepto la de Charru et al. (2004) es empírica:

Charru & Mouilleron-Arnould (2002):

$$q_s^* = 0,42(\tau_* - \tau_{*c})^3 \quad (3.66)$$

Cheng (2004):

$$q_s^* = \frac{\mu}{\sqrt{(\rho_s - \rho) g d_s^3 \rho}} 41 \tau_*^{0,5} \text{Re}_{*p} [\sinh(0,139 \tau_*^{1,181} \text{Re}_{*p}^{0,39})]^2 \quad (3.67)$$

Donde $\text{Re}_{*p} = \rho \frac{u_* d_s}{\mu}$

Charru et al. (2004):

$$q_s^* = 0,025 \tau_* (\tau_* - \tau_{*c}) \quad (3.68)$$

Charru & Hinch (2006):

$$q_s^* = 0,096 N \frac{\tau_*}{\tau_{*c}} \quad (3.69)$$

Donde N es la densidad de partículas móviles por unidad de área, que se calcula a partir de parámetros del lecho y el fluido.

Otra forma de abordar el gasto sólido de manera adimensional, específicamente para el caso de fluidos no Newtonianos, es la desarrollada por Tamburrino et al. (2020) empleando una adaptación del número de Galileo que incorpora los parámetros reológicos del fluido y ajustada experimentalmente por Vásquez (2020). Donde se define el gasto sólido adimensional por unidad de ancho q_{sK} como:

$$q_{sK} = q_s \left[\frac{K}{d_s^{2n+1} (\rho_s - \rho) g} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (3.70)$$

De manera de que el gasto sólido queda adimensionalizado solamente por parámetros del sedimentos y del fluido tipo ley de potencias, además de la gravedad.

Vásquez (2020) plantea y ajusta experimentalmente los coeficiente para la ecuación que permite determinar el gasto sólido, obteniendo:

$$q_{sK} = 0.15 \mathbb{G}al_K^{-0.75} (\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (3.71)$$

Donde $\mathbb{G}al_K$ es el número de Galileo adaptado al fluido ley de potencia obtenido por Tamburrino et al. (2020), definido como:

$$\mathbb{G}al_K = \frac{(\rho_s - \rho) g \rho^{n/(2-n)} d_s^{(2+n)/(2-n)}}{K^{2/(2-n)}} \quad (3.72)$$

3.3.3 Ecuación de Exner

La importancia de las relaciones para el cálculo del gasto sólido radica en que la variación del lecho depende de ella, esto fue determinando por Exner (1925) quien obtuvo la ecuación que liga la variación del lecho y el gasto sólido, aplicando la ecuación de continuidad para el sedimento, la que en una dimensión tiene la forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (3.73)$$

Donde $\eta(x, t)$ es la altura del sedimento en el lecho, ζ es la porosidad del sedimento y q_s el gasto sólido de fondo.

Para esta forma de la ecuación de Exner, dada por ec. (3.73) no existe transporte en suspensión. Si existe se deben agregar términos al lado derecho de la ecuación para representan la erosión de sedimento hacia la fase en suspensión o la depositación de partículas desde esta al lecho:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1 - \zeta} \frac{\partial q_s}{\partial x} = C_{ref} w_s - E_s \quad (3.74)$$

Donde C_{ref} es un coeficiente de la condición de borde del lecho de la concentración de sedimento en suspensión, w_s es la velocidad de sedimentación y E_s es el flujo de incorporación de sedimento de suspensión.

Acoplado las ecuaciones del fluido (continuidad y momentum) a la ecuación de Exner, es posible representar la interacción entre el lecho y el fluido.

CAPÍTULO 4: Flujo Pulsante

4.1 Desarrollo teórico para el flujo pulsante uniforme bidimensional entre dos placas paralelas de un fluido pseudoplástico

4.1.1 Ecuaciones fundamentales

Para un flujo bidimensional entre dos placas planas paralelas a una distancia $2h$ entre ellas, con un fluido incompresible se tienen las ecuaciones de continuidad y momentum.

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Momentum en la dirección x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g_x \quad (4.2)$$

Momentum en la dirección y :

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \rho g_y \quad (4.3)$$

Donde u es la componente del campo de velocidades en la dirección x , v es la componente del campo de velocidades en la dirección y , P es el campo escalar de presión, τ_{ij} es la componente del tensor de tensiones en la dirección i respecto al plano con normal en j y ρ es la densidad del fluido.

Si el flujo es uniforme en la dirección x , con este eje perpendicular a la gravedad, el sistema se reduce a:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4.4)$$

$$\rho g = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.5)$$

Considerando un gradiente de presión con una componente pulsante de la forma:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_o}{L} - \frac{\Delta P}{L} \sin(\omega t) \quad (4.6)$$

donde $\frac{P_o}{L}$ es un gradiente de presión impuesta en una distancia característica L a lo largo del flujo, ΔP es la amplitud de la pulsación de la presión y ω la frecuencia de la pulsación.

Para un flujo pulsante sin inversión en la dirección del flujo, debe tenerse que $(P_o + \Delta P) > 0$.

La ecuación de momentum en x , (4.4) queda como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{P_o}{L} + \frac{\Delta P}{L} \sin(\omega t) \right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4.7)$$

Empleando el modelo ley de potencia para la reología de un fluido pseudoplástico, en condiciones de flujo uniforme, se obtuvo en (3.14) que el esfuerzo de corte longitudinal se simplifica, teniéndose la ecuación de momentum en x para el flujo:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{P_o}{L} + \frac{\Delta P}{L} \sin(\omega t) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.8)$$

Como el flujo es pulsante y no oscilatorio, para esta reología, podemos asegurar que $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$, por lo que se puede omitir el valor absoluto en la ecuación anterior. Considerando que el índice de consistencia es constante para un fluido de reología pseudoplástica:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{P_o}{L} + \frac{\Delta P}{L} \sin(\omega t) \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right] \quad (4.9)$$

4.1.2 Condiciones de Borde y simetría

Como se tiene un flujo entre dos placas planas paralelas, las cuales se encuentra a una distancia $2h$, en las placas se debe tener condición de no resbalamiento. Si el valor 0 para el eje vertical se ubica en la placa inferior, se debe tener que la velocidad del fluido en $y = 0$ y en $y = 2h$ debe ser 0.

El problema además presenta una simetría entre ambas placas por lo que basta con resolver el flujo entre 0 y h . La condición de simetría implica que se debe tener $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ para esta altura.

Luego las condiciones de borde del problema:

Condición de borde tipo Dirichlet en $y = 0$

$$u(y = 0, t) = 0 \quad \forall t \quad (4.10)$$

Condición de borde tipo Neumann en $y = h$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad \forall t \quad (4.11)$$

4.1.3 Números adimensionales asociados y ecuaciones adimensionales

Es necesario determinar las escalas asociadas a las variables del problema, para luego construir las variables en forma adimensional y así obtener las ecuaciones adimensionales.

Como la escala vertical está asociada a la separación entre las placas, se tiene que:

$$y^* = \frac{y}{h} \quad (4.12)$$

Donde y^* corresponde a la distancia vertical adimensional y $2h$ la distancia entre las placas.

Debido a que la frecuencia de las pulsaciones determina la magnitud de éstas, la escala de tiempo del problema corresponde al inverso de la frecuencia de las pulsaciones:

$$t^* = \omega t \quad (4.13)$$

Definiendo la velocidad adimensional con una escala de velocidad U_o , para la cual se justificará su valor más adelante:

$$u^* = u U_o^{-1} \quad (4.14)$$

Reescribiendo el gradiente de presión como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mathcal{P} p^* \quad (4.15)$$

Con:

$$p^* = (1 + \varepsilon \sin(\omega t)) \quad (4.16)$$

Con $\mathcal{P} = \frac{P_o}{L}$ y $\varepsilon = \frac{\Delta P}{P_o}$.

La ecuación (4.9) queda:

$$\rho U_o \omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \mathcal{P}(1 + \varepsilon \sin(t^*)) + K \frac{U_o^n}{h^{n+1}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n \right) \quad (4.17)$$

Reordenando términos:

$$\frac{\rho U_o \omega}{\mathcal{P}} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = (1 + \varepsilon \sin(t^*)) + \frac{K U_o^n}{\mathcal{P} h^{n+1}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n \right) \quad (4.18)$$

Llamando a los términos adimensionales:

$$\frac{\rho U_o \omega}{\mathcal{P}} = \Omega \quad (4.19)$$

$$\frac{KU_o^n}{\mathcal{P}h^{n+1}} = \lambda \quad (4.20)$$

La expresión adimensional de la ecuación (4.9) con los adimensionales queda de la forma:

$$\Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = (1 + \varepsilon \sin(t^*)) + \lambda \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n \right) \quad (4.21)$$

Definiendo el número de Reynolds del flujo asociado a un fluido tipo Oswald-de Waele como:

$$\frac{\rho h^n U_o^{2-n}}{K} = \mathbb{R}e_n \quad (4.22)$$

Y el número de Euler:

$$\frac{\mathcal{P}h}{\rho U_o^2} = \mathbb{E}u \quad (4.23)$$

Por lo que el adimensional λ se puede reescribir en función del número de Euler y el número de Reynolds adimensionales:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{R}e_n \mathbb{E}u} \quad (4.24)$$

Como la dinámica del problema implica que el flujo se produce por el gradiente de presiones impuesto, el orden del número de Euler debe ser igual a uno:

$$\frac{\mathcal{P}h}{\rho U_o^2} = \mathbb{E}u = 1 \quad (4.25)$$

Luego la escala de velocidades del problema corresponde a:

$$U_o = \sqrt{\frac{\mathcal{P}h}{\rho}} \quad (4.26)$$

Y los adimensionales λ y Ω de la forma:

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{R}e_n} \quad (4.27)$$

$$\Omega = \frac{\rho\omega}{\mathcal{P}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}h}{\rho}} = \omega \sqrt{\frac{h\rho}{\mathcal{P}}} \quad (4.28)$$

Quedando la ecuación de momentum para el flujo pulsante de la forma:

$$\Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = (1 + \varepsilon \sin(t^*)) + \frac{1}{\mathbb{R}e_n} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n \right) \quad (4.29)$$

4.2 Determinación del campo de velocidades para un pulso pequeño

Por simplicidad se omitirán los asteriscos para indicar las variables adimensionales en el desarrollo, al igual que el subíndice del número de Reynolds para el fluido tipo ley de potencias, por lo que la ec. (4.29) queda de la forma:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin(t)) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (4.30)$$

Se busca resolver de manera analítica la ecuación anterior dadas las condiciones de borde y que el problema posee simetría, por lo que se analiza en la zona inferior del flujo:

$$u(y = 0, t) = 0 \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (4.32)$$

Considerando que ε es pequeño, debido a que las pulsaciones del gradiente de presiones son pequeñas, se expande la velocidad del fluido en una serie de potencias de ε , de orden 2:

$$u(y, t) = u_o(y) + \varepsilon u_1(y, t) + \varepsilon^2 u_2(y, t) + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (4.33)$$

Considerando la expansión anterior ésta se puede usar para expandir el término asociado al esfuerzo de corte en la ecuación de momentum, también como una serie de Taylor de orden 2, de la forma:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n = \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^n + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \varepsilon + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \right] \varepsilon^2 + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (4.34)$$

Empleando las expansiones en series de las ecuaciones (4.33) y (4.34), en la ecuación de momentum (4.30), es posible separar la ecuación de momentum en tres ecuaciones para cada orden de ε .

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial}{\partial t} (u_o(y) + \varepsilon u_1(y, t) + \varepsilon^2 u_2(y, t) + \vartheta(\varepsilon^3)) \\ = 1 + \varepsilon \sin(t) \\ + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^n + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \varepsilon + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \right] \varepsilon^2 + \vartheta(\varepsilon^3) \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Reordenando términos:

$$\varepsilon \Omega \frac{\partial u_1(y, t)}{\partial t} + \varepsilon^2 \Omega \frac{\partial u_2(y, t)}{\partial t} = 1 + \varepsilon \sin(t) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^n + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \varepsilon + \left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right)^{n-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \right] \varepsilon^2 \right) \quad (4.36)$$

4.2.1 Ecuación de orden cero

Para los términos de orden cero en ε , se obtiene la ecuación del fluido tipo ley de potencias bajo un gradiente constante de presión en régimen permanente:

$$0 = 1 + \frac{1}{\mathbb{R}e} \left(\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^n \right) \quad (4.37)$$

Con las condiciones de borde:

$$u_o(y = 0) = 0 \quad (4.38)$$

$$\left. \frac{\partial u_o}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (4.39)$$

Reordenando términos en la ecuación (4.37):

$$-\mathbb{R}e = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^n \right) \quad (4.40)$$

Integrando en y :

$$C_1 - \mathbb{R}e y = \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^n \quad (4.41)$$

$$(C_1 - \mathbb{R}e y)^{\frac{1}{n}} = \frac{\partial u_o}{\partial y} \quad (4.42)$$

Aplicando la condición de borde en $y = 1$, se obtiene el valor de la constante de integración C_1 , luego $C_1 = \mathbb{R}e$

Remplazando en (4.41):

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} (1 - y)^{\frac{1}{n}} \quad (4.43)$$

Integrando en y nuevamente:

$$-(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (1-y)^{\frac{1}{n}+1} + C_2 = u_o(y) \quad (4.44)$$

Aplicando la condición de borde en $y = 0$:

$$C_2 = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \quad (4.45)$$

Con lo que se obtiene la solución de orden cero para la velocidad:

$$u_o(y) = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \quad (4.46)$$

4.2.2 Ecuación de primer orden

Para la ecuación de primer orden, se agregan términos impermanentes debido a las pulsaciones del gradiente de presión:

$$\varepsilon \Omega \frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon \sin(t) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[n \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \right) \varepsilon \quad (4.47)$$

La solución de primer orden debe cumplir las mismas condiciones de borde dadas en las ecuaciones (4.31) y (4.32). De la solución de orden cero en (4.43), se obtuvo el gradiente de la velocidad de orden cero:

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} (1-y)^{\frac{1}{n}} \quad (4.48)$$

Remplazando en (4.47):

$$\Omega \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sin(t) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[n (\mathbb{R}e)^{\frac{n-1}{n}} \left((1-y)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \right) \quad (4.49)$$

Usando la metodología empleada por Daprà y Scarpi (2006), se propone una solución en número complejos de la forma:

$$u_1(y, t) = \mathcal{R}e[W_1(y)e^{it}] \quad (4.50)$$

Esto permite transformar la ecuación en derivadas parciales a una ecuación diferencial para $W_1(y)$. De igual forma, se puede transformar la función $\sin(t)$ como la parte real de la exponencial compleja:

$$\sin(t) = \mathcal{R}e[-ie^{it}] \quad (4.51)$$

Remplazando en la ecuación (4.49) con (4.50) y (4.51), considerando la forma compleja:

$$\Omega i W_1(y) e^{it} = -ie^{it} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{d}{dy} \left(\left[n(\mathcal{R}e)^{\frac{n-1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right] \right) e^{it} \quad (4.52)$$

Simplificando los términos exponenciales:

$$\Omega i W_1(y) = -i + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{d}{dy} \left(\left[n(\mathcal{R}e)^{\frac{n-1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right] \right) \quad (4.53)$$

Reordenando términos:

$$\Omega i W_1(y) = -i + n \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{d}{dy} \left((1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right) \quad (4.54)$$

$$i = n \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left((1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_1}{dy^2} - \left(\frac{n-1}{n} \right) (1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right) (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_1}{dy^2} - \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} (n-1) (1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_1}{dy} - i \Omega W_1 \quad (4.55)$$

Como la ecuación (4.55) es una ecuación diferencial no homogénea se propone que la solución tenga dos partes:

$$W_1 = W_{11} + W_{10} \quad (4.56)$$

Con

$$W_{10} = -\frac{1}{\Omega} \quad (4.57)$$

Remplazando con las ecuaciones (4.56) y (4.57) en (4.55):

$$i = n \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_{11}}{dy^2} - \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} (n-1)(1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_{11}}{dy} - i\Omega W_{11} + i \quad (4.58)$$

Eliminando las unidades imaginarias a ambos lados:

$$0 = n \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_{11}}{dy^2} - \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} (n-1)(1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_{11}}{dy} - i\Omega W_{11} \quad (4.59)$$

Haciendo el cambio de variable:

$$1-y = \eta \quad (4.60)$$

Y por regla de la cadena:

$$\frac{d\eta}{dy} = -1 \quad (4.61)$$

Empleando la nueva variable en la ecuación (4.59):

$$0 = n \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \eta^{1-\frac{1}{n}} \frac{d^2 W_{11}}{d\eta^2} + (n-1) \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \eta^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_{11}}{d\eta} - i\Omega W_{11}(\eta) \quad (4.62)$$

Reordenando términos:

$$0 = \eta \frac{d^2 W_{11}}{d\eta^2} + \frac{(n-1)}{n} \frac{dW_{11}}{d\eta} + \left(-\frac{i\Omega}{n} (\Re e)^{\frac{1}{n}} \right) \eta^{\frac{1}{n}} W_{11}(\eta) \quad (4.63)$$

Llamando a los términos:

$$a_1 = \frac{(n-1)}{n} \quad (4.64)$$

$$a_2 = \left(-\frac{i\Omega}{n} (\text{Re})^{\frac{1}{n}} \right) \quad (4.65)$$

Remplazando en la ecuación (4.63):

$$0 = \eta \frac{d^2 W_{11}}{d\eta^2} + a_1 \frac{dW_{11}}{d\eta} + a_2 \eta^{\frac{1}{n}} W_{11}(\eta) \quad (4.66)$$

Quedando una ecuación del tipo Emden-Fowler (Zwillinger, 1997), la que tiene como solución:

$$W_{11}(\eta) = C_1 \left(\eta^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n(1-a)}{2}} J_{\frac{(a-1)n}{n+1}} \left(\frac{2\sqrt{bn}}{n+1} \left(\eta^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right) + C_2 \left(\eta^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n(1-a)}{2}} J_{-\frac{(a-1)n}{n+1}} \left(\frac{2\sqrt{bn}}{n+1} \left(\eta^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right) \quad (4.67)$$

Donde $J_m(x)$ es la función de Bessel de primera especie y orden m .

Usando las definiciones para a y b :

$$W_{11}(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\frac{-1}{n+1}} \left(\frac{2\sqrt{-i\Omega n} (\text{Re})^{\frac{1}{2n}}}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2\sqrt{-i\Omega n} (\text{Re})^{\frac{1}{2n}}}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.68)$$

La raíz compleja se puede escribir como:

$$\sqrt{-i} = \frac{(1-i)}{2} \sqrt{2} \quad (4.69)$$

Por lo que la ecuación (4.68) queda como:

$$W_{11}(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\frac{-1}{n+1}} \left(\frac{\sqrt{2\Omega n} (\text{Re})^{\frac{1}{2n}} (1-i)}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\sqrt{2\Omega n} (\text{Re})^{\frac{1}{2n}} (1-i)}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.70)$$

Llamando σ a la parte constante del argumento de las funciones de Bessel:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\Omega n}(\operatorname{Re})^{\frac{1}{2n}}(1-i)}{n+1} \quad (4.71)$$

Usando la definición de σ en (4.70):

$$W_{11}(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{-1}{n+1}\right)} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.72)$$

Que corresponde a la solución homogénea de la ecuación. Agregando la solución para la parte no homogénea, se obtiene la solución para $W_1(\eta)$:

$$W_1(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{-1}{n+1}\right)} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - \frac{1}{\Omega} \quad (4.73)$$

Llamando:

$$v = \frac{1}{n+1} \quad (4.74)$$

$$W_1(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-v} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_v \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - \frac{1}{\Omega} \quad (4.75)$$

Remplazando en (4.50):

$$u_1(y, t) = \operatorname{Re} \left[\left(C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-v} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_v \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - \frac{1}{\Omega} \right) e^{it} \right] \quad (4.76)$$

Falta determinar el valor de las constantes de integración, por lo que se aplican las condiciones de borde:

$$u_1(\eta = 1) = u_1(y = 0) = 0 \quad \left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=1} = - \left. \frac{du_1}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4.77)$$

Como la componente de la exponencial compleja no afecta el valor de la condición de borde, éstas se aplican a la función $W_1(\eta)$. Para la primera condición de borde (4.77):

$$\left(C_1 \frac{1}{2n} J_{-v} \left(\sigma \frac{n+1}{2n} \right) + C_2 \frac{1}{2n} J_v \left(\sigma \frac{n+1}{2n} \right) - \frac{1}{\Omega} \right) = 0 \quad (4.78)$$

Quedando:

$$C_1 J_{-v}(\sigma) + C_2 J_v(\sigma) = \frac{1}{\Omega} \quad (4.79)$$

Para la segunda condición de borde:

$$\left. \frac{dW_1}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4.80)$$

Para cumplir esta condición se debe tener que $C_2=0$ ya que no existe el límite para la derivada de la función de Bessel con orden positivo, quedando:

$$C_2 = 0 \quad \wedge \quad C_1 = \frac{1}{\Omega J_{-v}(\sigma)} \quad (4.81)$$

Luego la solución para $W_1(\eta)$:

$$W_1(\eta) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-v}(\sigma)} \eta \frac{1}{2n} J_{-v} \left(\sigma \eta \frac{n+1}{2n} \right) - 1 \right] \quad (4.82)$$

Volviendo a la variable original para el eje vertical, se tiene la solución de primer orden para la velocidad:

$$u_1(y, t) = \text{Re} \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-v}(\sigma)} J_{-v} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \quad (4.83)$$

Con:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\Omega n} (\text{Re})^{\frac{1}{2n}} (1-i)}{n+1} \quad (4.84)$$

4.2.3 Ecuación de segundo orden

Para la ecuación de segundo orden se emplean los gradientes de la velocidad tanto de orden cero como de primer orden:

$$\varepsilon^2 \Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = \left(\frac{n}{\mathbb{R}e} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)^{n-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right] \varepsilon^2 \quad (4.85)$$

La solución de primer orden debe cumplir las mismas condiciones de borde dadas en las ecuaciones (4.31) y (4.32).

De la solución de orden cero se calcula el gradiente de esta solución:

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} (1-y)^{\frac{1}{n}} \quad (4.86)$$

Para el caso del gradiente de la velocidad de primer orden, como se requiere calcular $\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2$, pero la forma de la solución obtenida considera la parte real de una función compleja, por lo que este término queda de la forma:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 = \left(\mathcal{R}e \left[\frac{\partial W_1}{\partial y} e^{it} \right] \right)^2 \quad (4.87)$$

Usando la relación compleja:

$$\mathcal{R}e^2[z] = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(z^2) + \frac{1}{2} |z|^2 \quad (4.88)$$

Dado que en este caso el número complejo incluye una componente exponencial:

$$|z e^{it}|^2 = |z|^2 \quad (4.89)$$

Usando las ecuaciones (4.88) y (4.89) en (4.87):

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2} \left|\frac{dW_1}{dy}\right|^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left[\left(\frac{dW_1}{dy}\right)^2 e^{2it} \right] \quad (4.90)$$

Volviendo a la ecuación de segundo orden y remplazando con las ecuaciones (4.86) y (4.90)

$$\Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = \left(\frac{n}{\mathbb{R}e}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mathbb{R}e)^{\frac{n-1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{(n-1)}{4} (\mathbb{R}e)^{\frac{n-2}{n}} (1-y)^{\frac{n-2}{n}} \left\{ \left|\frac{dW_1}{dy}\right|^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left[\left(\frac{dW_1}{dy}\right)^2 e^{2it} \right] \right\} \right] \quad (4.91)$$

Empleando el cambio de variable en la ecuación de segundo orden:

$$1 - y = \eta \quad \wedge \quad \frac{d\eta}{dy} = -1 \quad (4.92)$$

Se obtiene:

$$\Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = -n \left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left\{ \left|\frac{dW_1}{d\eta}\right|^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left[\left(\frac{dW_1}{d\eta}\right)^2 e^{2it} \right] \right\} \right] \quad (4.93)$$

La solución de segundo orden se divide en dos componentes, una componente permanente y otra impermanente:

$$u_2(\eta, t) = u_{20}(\eta) + u_{21}(\eta, t) \quad (4.94)$$

Considerando la siguiente estructura para la solución de la componente impermanente:

$$u_{21}(\eta, t) = \mathcal{R}e[W_{21}(\eta)e^{2it}] \quad (4.95)$$

Se requiere calcular la derivada de la función $W_1(\eta)$ para completar las componentes a remplazar en la ecuación (4.93) con términos conocidos, luego:

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \quad (4.96)$$

Usando dos resultados clásicos para las funciones de Bessel (Spiegel, 1968):

$$\frac{dJ_m(z)}{dz} = \frac{1}{2} [J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)] \quad (4.97)$$

$$J_{m-1}(z) = \frac{2m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z) \quad (4.98)$$

Empleando estas relaciones en el cálculo de la derivada:

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \frac{\eta^{\frac{1}{2n}-1}}{4n} \left((n+1) \sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \left[J_{-\nu-1} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] + 2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right) \quad (4.99)$$

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \frac{\eta^{\frac{1}{2n}-1}}{4n} \left((n+1) \sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \left[J_{-\nu-1} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] + 2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right) \quad (4.100)$$

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \frac{\eta^{\frac{1}{2n}-1}}{4n} \left\{ (n+1) \sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \left[-\frac{2\nu}{\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}} J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] + 2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right\} \quad (4.101)$$

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \frac{\eta^{\frac{1}{2n}-1}}{4n} \left\{ (n+1) \sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \left[-\frac{2\nu}{\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}} J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] + 2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right\} \quad (4.102)$$

Reordenando términos:

$$\frac{dW_1}{d\eta} = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \frac{\eta^{\frac{1}{2n}-1}}{4n} \left\{ \left[-2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 2(n+1)\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] + 2J_{-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right\} \quad (4.103)$$

$$\frac{dW_1}{d\eta} = -\frac{(n+1)\sigma}{2n\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \eta^{\frac{1}{2n}-1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.104)$$

$$\frac{dW_1}{d\eta} = -\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.105)$$

Remplazando con la derivada en (4.93):

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = & -\left(\frac{1}{\Re e} \right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right. \\ & + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left\{ \left| \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right|^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \Re e \left[\left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right)^2 e^{2it} \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.106)$$

La ecuación (4.106) puede separarse en dos componentes usando la relación planteada en (4.94) y (4.95),

$$0 = -\left(\frac{1}{\Re e} \right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left| \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right|^2 \right] \quad (4.107)$$

Para la componente impermanente:

$$\Omega \frac{\partial u_{21}}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\Re e} \right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{21}}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \frac{1}{2} \Re e \left[\left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right)^2 e^{2it} \right] \right] \quad (4.108)$$

Usando la forma planteada para la solución de la componente impermanente en (4.95), la ecuación en derivadas parciales en (4.108) se convierte una ecuación diferencial ordinaria en la variable espacial:

$$\Omega W_{21}(\eta) 2ie^{2it} = -\left(\frac{1}{\Re e}\right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} W_{21}(\eta) e^{2it} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right]^2 e^{2it} \quad (4.109)$$

Simplificando los términos exponenciales:

$$W_{21}(\eta) \Omega 2i = -\left(\frac{1}{\Re e}\right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} W_{21}(\eta) + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right]^2 \quad (4.110)$$

Luego se tienen dos ecuaciones diferenciales, una para $u_{20}(\eta)$ y otra para $W_{21}(\eta)$

4.2.3.1 Solución para la componente permanente de la ecuación de segundo orden

Se tiene la ecuación de la componente permanente de segundo orden:

$$0 = -\left(\frac{1}{\Re e}\right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left| \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right|^2 \right] \quad (4.111)$$

Usando la propiedad del módulo de un número complejo:

$$|z|^2 = z \bar{z} \quad (4.112)$$

El término en valor absoluto al cuadrado en (4.111) puede reescribirse usando la relación anterior:

$$\left| \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right|^2 = \left(\left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right) \overline{\left(\left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right)} \quad (4.113)$$

Como solo algunos parámetros de la ecuación anterior son complejos, los que son reales pueden salir del conjugado:

$$\left| \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right|^2 = \left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right) \left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \overline{\left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right)} \eta^{\frac{2-n}{2n}} \overline{J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)} \right) \quad (4.114)$$

Para el conjugado de la función de Bessel, este se puede aplicar directamente al argumento:

$$\left| \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right|^2 = \left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right) \left(\left(\frac{n+1}{2n} \right) \overline{\left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right)} \eta^{\frac{2-n}{2n}} \overline{J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)} \right) \quad (4.115)$$

Reordenando términos y usando la relación en (4.112):

$$\left| \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right|^2 = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right|^2 \eta^{\frac{2-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\overline{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.116)$$

Remplazando en la ecuación (4.111) con el resultado obtenido en (4.116):

$$0 = -\left(\frac{1}{\Re e} \right) n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right|^2 \eta^{\frac{2-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\overline{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \quad (4.117)$$

Simplificando y reordenando términos en (4.117):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right|^2 J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\overline{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \quad (4.118)$$

Llamando:

$$a = \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J_{-\nu}(\sigma)}} \right|^2 \quad (4.119)$$

Remplazando en (4.118) con (4.119):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - a J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\overline{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \quad (4.120)$$

Esta ecuación puede integrarse directamente:

$$C_1 = \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - a J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\overline{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.121)$$

Donde C_1 es una de las constantes de integración. Despejando $\frac{\partial u_{20}}{\partial \eta}$:

$$\frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} = C_1 \eta^{\frac{1-n}{n}} + a \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.122)$$

De igual forma esta ecuación puede integrarse directamente:

$$u_{20}(\eta) = C_1 n \eta^{\frac{1}{n}} + C_2 + a \int \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) d\eta \quad (4.123)$$

Para determinar las constantes de integración se aplican las condiciones de borde, las que son las mismas para la solución permanente e impermanente:

$$u_{20}(y = 0) = u_{20}(\eta = 1) = 0 \quad (4.124)$$

$$\left. \frac{du_{20}}{dy} \right|_{y=1} = - \left. \frac{du_{20}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4.125)$$

Aplicando la segunda condición de borde:

$$\left. \frac{du_{20}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = C_1 \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} + \lim_{\eta \rightarrow 0} a \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.126)$$

Con $0 < n < 1$.

Notar que el primer límite del lado derecho de la ecuación (4.126) se hace cero debido al rango de valores para n . Para el segundo término es necesario analizar las funciones de Bessel ponderadas por $\eta^{\frac{1-n}{n}}$, para esto se emplean las expansiones en series para las funciones de Bessel de primera especie, teniéndose:

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{\frac{n}{n+1}} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{\frac{n}{n+1}} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} \left\{ \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \left\{ \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{\frac{n}{n+1}} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{\frac{n}{n+1}} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} \eta^1 \left\{ \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \left\{ \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{\frac{n}{n+1}} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{\frac{n}{n+1}} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1}{n}} \left\{ \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \left\{ \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m}}{m! \Gamma \left(m + \frac{1}{n+1} + 1 \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.129)$$

Notar que el primer término de cada serie es una constante y los posteriores presentan términos con η elevados a números positivos, luego no existen η elevados a valores negativos en este límite por lo que tiene valor igual a cero.

Con lo anterior se tiene que la condición de borde en $\eta = 0$ se cumple independiente del valor de C_1 lo que es un problema, ya que no permite determinar la solución para la componente de permanente de la velocidad. De igual forma, en la solución aparece la integral de la forma:

$$I = \int \eta^{\frac{1-n}{n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) d\eta \quad (4.130)$$

Haciendo un cambio de variable es posible reducir levemente la complejidad de esta integral:

$$x = \eta^{\frac{n+1}{2n}}, dx = \left(\frac{n+1}{2n} \right) \eta^{\frac{1-n}{2n}} d\eta \quad (4.131)$$

Quedando la integral I de la forma:

$$I = \left(\frac{2n}{n+1} \right) \int x^{\frac{1-n}{n+1}} J_{1-\nu}(\sigma x) J_{1-\nu}(\bar{\sigma} x) dx \quad (4.132)$$

El problema radica en encontrar una primitiva para una integral de forma:

$$I = \int x^p J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx \quad (4.133)$$

Donde p, m son números reales, racionales agregando que α y β son complejos.

Para este tipo de integrales no se tienen primitivas conocidas a partir de funciones analíticas y especiales, por lo que agregado a problema de la condición de borde al determinar la constante C_1 , se plantea resolver el problema empleando un enfoque con soluciones en series para la componente permanente.

4.2.3.2 Solución en Series para la componente permanente

Dado que las funciones de Bessel tienen expresiones en forma de series y además existen relaciones en series para multiplicaciones de funciones de Bessel, se resuelve la componente permanente con una solución en forma de series. Primero se debe emplear en forma de series la multiplicación de dos funciones de Bessel de primera especie. Usando la relación presentada por Watson (1922) y también por Abramowitz & Stegun (1965) para la multiplicación de dos funciones de Bessel de la forma:

$$J_\mu(\alpha z) J_\nu(\beta z) = \frac{\left(\frac{\alpha z}{2}\right)^\mu \left(\frac{\beta z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\alpha z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(m + \mu + 1)} {}_2F_1\left(-m, -\mu - m; \nu + 1, \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \quad (4.134)$$

Donde ${}_2F_1(x, y; w, z)$ es la función hipergeométrica. Para este caso, el término $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ corresponde a:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\operatorname{Re})^{\frac{1}{2n}}(1-i)}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\operatorname{Re})^{\frac{1}{2n}}(1-i)}{n+1}\right)^2} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)^2} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = -1 \quad (4.135)$$

Luego para la multiplicación de las dos funciones de Bessel en (4.118), aplicando la relación en (4.134) y el resultado de (4.135):

$$\begin{aligned}
& J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\
&= \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{\bar{\sigma}}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma(2-\nu)} {}_2F_1(-m, \nu-1-m; 2-\nu, -1) \eta^{\frac{(n+1)}{n}m} \quad (4.136)
\end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\begin{aligned}
& J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\
&= \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \eta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma(2-\nu)} {}_2F_1(-m, \nu-1-m; 2-\nu, -1) \eta^{\frac{(n+1)}{n}m} \quad (4.137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \\
&= \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma(2-\nu)} {}_2F_1(-m, \nu-1-m; 2-\nu, -1) \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+1} \quad (4.138)
\end{aligned}$$

Usando la identidad de Kummer (1836) y la fórmula de duplicación para la función Gamma es posible dar una expresión más simple para la función hipergeométrica involucrada.

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha - \beta + 1, -1) = \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - \beta + 1\right)} \quad (4.139)$$

Usando un resultado clásico para la función gamma y los parámetros de la serie en (4.138):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (4.140)$$

$${}_2F_1(-m, \nu-1-m; 2-\nu, -1) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2-\nu)}{2^{-m} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right)} \quad (4.141)$$

Remplazando con (4.141) en (4.138):

$$J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) J_{1-\nu} \left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} (-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{m! \Gamma(m+2-\nu) 2^{-m} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right)} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+1} \quad (4.142)$$

Luego el producto de las funciones de Bessel puede expresarse de la forma:

$$J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) J_{1-\nu}\left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+1} \quad (4.143)$$

Con:

$$C_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2m}}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right)} \quad (4.144)$$

Con el resultado en (4.143), reemplazando en la ecuación diferencial para u_{20} en (4.118):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+1} \right] \quad (4.145)$$

Llamando:

$$b = \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \quad (4.146)$$

La expresión en (4.145) queda:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+1} \right] \quad (4.147)$$

Para esta ecuación se propone una solución en forma de serie de la forma:

$$u_{20}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^{\frac{(n+1)}{n}m+r} + C_o \quad (4.148)$$

Con el objetivo de determinar el coeficiente a_m , las constantes C_o y r , y de manera que la expresión anterior cumpla la ecuación (4.147) y las condiciones de borde asociadas, se reemplaza con (4.148) en (4.147):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^{\frac{(n+1)m+r}{n}} + C_o \right) - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)m+1}{n}} \right] \quad (4.149)$$

Desarrollando los términos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + r \right] \eta^{\frac{(n+1)m+r-1}{n}} - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)m+1}{n}} \right] \quad (4.150)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + r \right] \eta^{\frac{(n+1)m+r-1+\frac{n-1}{n}}{n}} - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)m+1}{n}} \right] \quad (4.151)$$

$$0 = \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + r \right] \left[\frac{(n+1)}{n} m + r - 1 + \frac{n-1}{n} \right] \eta^{\frac{(n+1)m+r-2+\frac{n-1}{n}}{n}} - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right] \eta^{\frac{(n+1)m}{n}} \right] \quad (4.152)$$

Haciendo $r = 2 - \frac{n-1}{n}$, se puede reducir a una sola serie la expresión en (4.152):

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right] - b C_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right] \right\} \eta^{\frac{(n+1)m}{n}} \quad (4.153)$$

Considerando que la serie converge para el rango de valores que tiene η , si la serie es igual a cero, la sucesión interna debe ser cero para cada término, luego:

$$\left\{ a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right] - b C_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right] \right\} = 0 \quad (4.154)$$

Para todo $m \geq 0$.

Por lo tanto, se despeja cómo es el coeficiente a_m :

$$a_m = C_m \frac{b \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right]}{\left[\frac{(n+1)}{n} m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 \right]} \quad (4.155)$$

$$a_m = C_m \frac{b}{\left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 + \frac{1}{n} \right]} \quad (4.156)$$

Usando la expresión para C_m planteada en (4.144) y el valor de b dado en (4.146), se tiene la expresión para a_m :

$$a_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right) \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 + \frac{1}{n} \right]} \quad (4.157)$$

Remplazando el valor de r y la forma del coeficiente a_m , la solución en serie queda de la forma:

$$u_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^{\frac{(n+1)}{n} m + 1 + \frac{1}{n}} + C_o \quad (4.158)$$

Se deben verificar las condiciones de borde y determinar el valor de la constante C_o :

$$u_{20}(\eta = 1) = 0 \quad (4.159)$$

$$\left. \frac{du_{20}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4.160)$$

Aplicando la derivada a la solución obtenida en (4.158):

$$\frac{du_{20}}{d\eta} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 + \frac{1}{n} \right] \eta^{\frac{(n+1)}{n} m + \frac{1}{n}} \quad (4.161)$$

Tomando límite, se puede observar que la condición de borde se cumple ya que η está elevado a potencias positivas para todos los términos de la serie por lo que no se provocan singularidades en cero.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{(n+1)}{n} m + 1 + \frac{1}{n} \right] \eta^{\frac{(n+1)}{n} m} = 0 \quad (4.162)$$

Aplicando la otra condición de borde, se determina el valor de C_o .

$$u_{20}(\eta = 1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m + C_o = 0 \quad (4.163)$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} a_m = C_o \quad (4.164)$$

Remplazando con el valor determinado para C_o en (4.158):

$$u_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^{\frac{(n+1)}{n} m + \frac{1}{n}} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m \quad (4.165)$$

$$u_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\eta^{\frac{(n+1)}{n} m + \frac{1+n}{n}} - 1 \right) \quad (4.166)$$

Con esto, la solución de la componente permanente para segundo orden queda completamente determinada:

$$u_{20}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left((1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} - 1 \right) \quad (4.167)$$

Con:

$$a_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right) \left[\frac{(n+1)}{n} (m+1) \right]} \quad (4.168)$$

Falta aplicar la parte real al resultado obtenido en (4.167) y (4.168), ya que σ es un número complejo. Aplicando la función parte real y reordenando el término dependiente de y en la serie en (4.167)

$$u_{20}(y) = \Re e \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left((1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} - 1 \right) \right] = u_{20}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \Re e[-a_m] \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} \right) \quad (4.169)$$

Ya que a_m es el único término complejo. Analizando $\Re e[-a_m]$, con la ecuación (4.168):

$$\Re e[-a_m] = \Re e \left[-\sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right) \left[\frac{(n+1)}{n} (m+1) \right]} \right] \quad (4.170)$$

$$\Re e[-a_m] = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega_{J-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right) \left[\frac{(n+1)}{n} (m+1) \right]} \Re e \left[\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m} \right] \quad (4.171)$$

Analizando $\mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m} \right]$ con σ :

$$\mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m} \right] = \mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}(1-i)}{2(n+1)} \right)^{2m} \right] = \left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{2m} \mathcal{R}e \left[\left(\frac{(1-i)}{2} \right)^{2m} \right] = \left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{2m} \mathcal{R}e \left[\left(\frac{-i}{2} \right)^m \right] \quad (4.172)$$

Luego si m es impar, el término $\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}$ es imaginario, por el contrario, al ser par, es real, luego solo quedan los términos pares en la serie. Para representar lo anterior se realiza un cambio de índices para la serie, de forma de tener solo los casos pares como $m = 2j$:

$$\mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m} \right] = \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{4j} = \left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4j} \left(\frac{-i}{2} \right)^{2j} = \left(\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4j} \left(\frac{1}{2} \right)^{2j} (-1)^j \quad (4.173)$$

Remplazando en $\mathcal{R}e[-a_{m=2j}]$:

$$\mathcal{R}e[-a_{m=2j}] = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4j} (-1)^j}{(2j)! \Gamma(2j+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right) \Gamma(j+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n} (2j+1) \right]} \quad (4.174)$$

Luego $u_{20}(y)$ queda:

$$u_{20}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4j} (-1)^j}{(2j)! \Gamma(2j+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right) \Gamma(j+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n} (2j+1) \right]} \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2j+1)} \right) \quad (4.175)$$

Cambiando el índice a m :

$$u_{20}(y) = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m} \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right)}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n} (2m+1) \right]} \quad (4.176)$$

O bien:

$$u_{20}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)}\right) \quad (4.177)$$

Con:

$$\bar{a}_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \left|\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\Re e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)}\right)^{4m} (-1)^m}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n}(2m+1)\right]} \quad (4.178)$$

4.2.3.3 Solución para la componente impermanente de segundo orden

La ecuación diferencial para la componente impermanente dada por la ecuación (4.110):

$$W_{21}(\eta)\Omega 2i = -\left(\frac{1}{\Re e}\right)^n n \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} W_{21}(\eta) + \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}^2\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right]^2 \quad (4.179)$$

Donde se obtiene la componente impermanente como:

$$u_{21}(\eta, t) = \Re e[W_{21}(\eta)e^{2it}] \quad (4.180)$$

Expandiendo y reordenando términos en (4.179):

$$\frac{2i\Omega}{n} (\Re e)^{\frac{1}{n}} W_{21}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n}\right)\right]^2 J_{1-\nu}^2\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right] \quad (4.181)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} \right] + \left(-\frac{2i\Omega}{n} (\Re e)^{\frac{1}{n}}\right) W_{21}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{\Re e}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n}\right)\right]^2 J_{1-\nu}^2\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right] \quad (4.182)$$

Llamando:

$$c = \left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \right]^2 \quad (4.183)$$

Remplazando:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} \right] + \left(-\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \right) W_{21}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[c J_{\nu-1}^2 \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \quad (4.184)$$

Para la ecuación diferencial anterior se resuelve primero la parte homogénea:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}^{(H)}}{\partial \eta} \right] + \left(-\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \right) W_{21}^{(H)} = 0 \quad (4.185)$$

Expandiendo:

$$\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial^2 W_{21}^{(H)}}{\partial \eta^2} + \left(\frac{n-1}{n} \right) \eta^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial W_{21}^{(H)}}{\partial \eta} + \left(-\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \right) W_{21}^{(H)}(\eta) = 0 \quad (4.186)$$

Llamando:

$$d = -\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \quad (4.187)$$

$$\eta \frac{\partial^2 W_{21}^{(H)}}{\partial \eta^2} + \left(\frac{n-1}{n} \right) \frac{\partial W_{21}^{(H)}}{\partial \eta} + \eta^{\frac{1}{n}} a W_{21}^{(H)}(\eta) = 0 \quad (4.188)$$

La ecuación anterior es del tipo Emden-Fowler (Zwillinger, 1997), que tiene solución de la forma:

$$W_{21}^{(H)}(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{2n\sqrt{d}}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\left(\frac{-1}{n+1}\right)} \left(\frac{2n\sqrt{d}}{n+1} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.189)$$

Llamando:

$$\mu = \frac{2n\sqrt{d}}{n+1} \quad (4.190)$$

Usando la definición de σ en la ecuación (4.187) para determinar a qué corresponde μ :

$$\mu = \frac{2n\sqrt{d}}{n+1} = \frac{2n\sqrt{-\frac{2i\Omega}{n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}}{n+1} = \frac{2\sqrt{2n\Omega(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}}{n+1}\sqrt{-i} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}(1-i)}{n+1} = \sqrt{2}\sigma \quad (4.191)$$

Quedando la solución para la parte homogénea:

$$W_{21}^{(H)}(\eta) = C_1\eta^{\frac{1}{2n}}J_{\left(\frac{1}{n+1}\right)}\left(\sqrt{2}\sigma\eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) + C_2\eta^{\frac{1}{2n}}J_{\left(\frac{-1}{n+1}\right)}\left(\sqrt{2}\sigma\eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \quad (4.192)$$

La solución para la componente impermanente tiene una solución homogénea y otro particular:

$$W_{21}^{(H)}(\eta) + W_{21}^{(p)}(\eta) = W_{21}(\eta) \quad (4.193)$$

Debido a la complejidad de la ecuación diferencial no homogénea por tener funciones de Bessel al cuadrado con argumentos complejos, se propone una solución en forma de series para la solución particular. Para esto se requiere primero tener una expresión en forma de series para la función de Bessel al cuadrado en la ecuación (4.184). Watson (1922) presenta una relación útil para el cuadrado de una función de Bessel en forma de serie:

$$J_\nu^2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(2\nu + 2m + 1)}{m! \Gamma(2\nu + m + 1) \Gamma^2(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2\nu} \quad (4.194)$$

Esta relación se aplica a la función de Bessel en la ecuación (4.174).

$$J_{1-\nu}^2 \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(2 - 2\nu + 2m + 1)}{m! \Gamma(2 - 2\nu + m + 1) \Gamma^2(1 - \nu + m + 1)} \left(\frac{\sigma}{2} \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m+2(1-\nu)} \quad (4.195)$$

Desarrollando los términos y usando que $1 - \nu = \frac{n}{1+n}$:

$$J_{1-\nu}^2 \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(2 - 2\nu + 2m + 1)}{m! \Gamma(2 - 2\nu + m + 1) \Gamma^2(1 - \nu + m + 1)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m+2-2\nu} \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)m+1} \quad (4.196)$$

Llamando

$$S_m = \frac{(-1)^m \Gamma(2 - 2\nu + 2m + 1)}{m! \Gamma(2 - 2\nu + m + 1) \Gamma^2(1 - \nu + m + 1)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m+2-2\nu} \quad (4.197)$$

Quedando:

$$J_{1-\nu}^2 \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)m+1} \quad (4.198)$$

Remplazando en la ecuación (4.171) con (4.184):

$$\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} W_{21}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} - \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)m+1} \right] \quad (4.199)$$

Llamando:

$$c = \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \quad (4.200)$$

Quedando la ecuación diferencial:

$$\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} W_{21}(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} - c \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)m+1} \right] \quad (4.201)$$

Debido a la estructura de la serie involucrada se propone una solución en serie para la componente particular de la solución:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} = W_{21}^{(p)}(\eta) \quad (4.202)$$

Luego queda la solución para $W_{21}(\eta)$:

$$W_{21}^{(H)}(\eta) + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} = W_{21}(\eta) \quad (4.203)$$

Remplazando con (4.203) en (4.179):

$$\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} W_{21}^{(H)}(\eta) + \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}^{(H)}(\eta)}{\partial \eta} + \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \right] - c \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+1}} \right\} \quad (4.204)$$

Reordenando términos:

$$\frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} W_{21}^{(H)}(\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}^{(H)}(\eta)}{\partial \eta} \right\} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \right] - c \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+1}} \right\} - \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \quad (4.205)$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.205) es igual a cero ya que corresponde a la ecuación diferencial con la solución homogénea, quedando solo la solución particular:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \right] - c \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+1}} \right\} - \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \quad (4.206)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \right] - c \sum_{m=0}^{\infty} S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+1}} \right\} = \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)_{m+r}} \quad (4.207)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + r \right] \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + r - 1 + \frac{n-1}{n}} - \sum_{m=0}^{\infty} c S_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1} \right\} = \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + r} \quad (4.208)$$

Usando la definición de $r = 2 - \frac{n-1}{n}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} - \sum_{m=0}^{\infty} c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + r} \quad (4.209)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] - c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n}} \quad (4.210)$$

Desarrollando en los términos exponenciales del lado derecho:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] - c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 + \frac{1}{n}} \quad (4.211)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] - c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m + \left(\frac{n+1}{n} \right)} \quad (4.212)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] - c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} \quad (4.213)$$

Extrayendo el primer término de la serie de lado derecho:

$$\left\{ \beta_0 \left[1 + \frac{1}{n} \right] - b S_0 \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 2 - \frac{n-1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] - c S_m \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) m + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} \quad (4.214)$$

Para encontrar el primer término de la relación de recurrencia se hace cero el primer término:

$$\left\{ \beta_0 \left[1 + \frac{1}{n} \right] - c S_0 \right\} = 0 \quad (4.215)$$

Remplazando con la definición de S_0 se determina β_0 :

$$\beta_0 = \frac{c n S_0}{1 + n} = \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \frac{1}{(1+n)\Gamma^2(2-\nu)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2-2\nu} \quad (4.216)$$

Volviendo a la ecuación (4.210) considerando lo impuesto en la ecuación (4.211):

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 + \frac{1}{n} \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - c S_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} \quad (4.217)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - c S_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} \quad (4.218)$$

Es posible reducir las dos series a una sola:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - c S_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \right\} \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} = 0 \quad (4.219)$$

Para que la serie sea igual a cero para cualquier valor de η , los valores de la sucesión interna deben ser nulos:

$$\beta_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - c S_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] - \frac{2i\Omega}{n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \beta_m = 0 \quad (4.220)$$

$$\beta_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] = c S_{m+1} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right] + \frac{2i\Omega}{n} (\Re e)^{\frac{1}{n}} \beta_m \quad (4.221)$$

Con esto se puede despejar la relación de recurrencia para la sucesión β_m :

$$\beta_{m+1} = \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \frac{S_{m+1}}{\left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right]} + \frac{2i}{\left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right]} \beta_m \quad (4.222)$$

Con el primer término de la sucesión:

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \frac{1}{(1+n)\Gamma^2(2-\nu)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2-2\nu} \quad (4.223)$$

Y la sucesión S_m :

$$S_m = \frac{(-1)^m \Gamma(3-2\nu+2m)}{m! \Gamma(3-2\nu+m) \Gamma^2(2-\nu+m)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m+2-2\nu} \quad (4.224)$$

Con esto se obtiene la solución para $W_{21}(\eta)$ en la componente impermanente, faltando aplicar las condiciones de borde para determinar las constantes de integración:

$$W_{21}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1)} + C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \quad (4.225)$$

Las condiciones de borde a aplicar:

$$W_{21}(\eta = 1) = 0 \quad (4.226)$$

$$\left. \frac{dW_{21}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (4.227)$$

Aplicando la primera condición de borde en (4.226):

$$W_{21}(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m + C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\nu}(\mu) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\mu) = 0 \quad (4.228)$$

$$C_1 J_{\nu}(\mu) + C_2 J_{-\nu}(\mu) = - \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \quad (4.229)$$

Aplicando la segunda condición de borde, aplicando límite a la derivada:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{dW_{21}}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(m+1)-1} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d}{d\eta} \left\{ C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right\} \quad (4.230)$$

Como η siempre tiene exponentes positivos, la serie no presenta singularidades en cero, luego la serie se hace cero en el límite. Para las derivadas de las funciones de Bessel, la función de orden positivo y la componente que la acompaña, $\eta^{\frac{1}{2n}} J_{\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)$ posee una singularidad en cero, por lo que es necesario que C_1 sea cero para que el límite exista. La otra función de Bessel no posee problemas en cero, por lo que el límite se vuelve cero.

Como $C_1 = 0$, se puede despejar C_2 :

$$C_2 = - \frac{1}{J_{-\nu}(\mu)} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \quad (4.231)$$

Luego la solución para $W_{21}(\eta)$ queda de la forma:

$$W_{21}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(m+1)} - \frac{\eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\mu)} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \quad (4.232)$$

$$(4.233)$$

$$W_{21}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left\{ \eta^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(m+1)} - \eta \frac{1}{2n} \frac{J_{-\nu} \left(\mu \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\mu)} \right\}$$

Remplazando en (4.180) con $W_{21}(\eta)$, la componente impermanente de la solución de segundo orden, remplazando el cambio de variable y el valor de μ :

$$u_{21}(y, t) = \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1-y)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(m+1)} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma\sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right] \right\} \quad (4.234)$$

4.2.3.4 Solución de segundo orden

Combinando los resultados de (4.177) y (4.234) se obtiene la solución de segundo orden para la velocidad:

$$u_2(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right) + \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1-y)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)(m+1)} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma\sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right] \right\} \quad (4.235)$$

4.2.4 Caudal o velocidad media

Como se tienen expresiones analíticas para el campo de velocidades, es posible calcular el caudal existente integrando. Notar que, al tener una sección de tamaño unitario por ser adimensional, el caudal es equivalente a la velocidad media en la sección.

4.2.4.1 Caudal orden cero

Integrando sobre la expresión obtenida en (4.46):

$$Q_o = \int_0^1 (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+1}} \right] dy \quad (4.236)$$

$$Q_o = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \int_0^1 \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] dy = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{n+1}{2n+1} \right) \quad (4.237)$$

4.2.4.2 Caudal orden uno

Integrando sobre la expresión obtenida en (4.82):

$$Q_1(t) = \int_0^1 \frac{e^{it}}{\Omega} \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \right] dy \quad (4.238)$$

La integral correspondiente al caudal del término de primer orden no es directa debido a tener una función de Bessel de primera especie y el término del argumento de esta función tiene exponentes dependientes de n. Si bien existe primitiva para esta integral:

$$\begin{aligned} \int (1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) dy &= - \int z^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma z^{\frac{n+1}{2n}} \right) dz \\ &= - \frac{2^\nu n z^{\frac{1}{2n}+1}}{n+1} \Gamma \left(-\frac{n(\nu-2)+\nu-1}{2(n+1)} \right) \left(\sigma z^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{-\nu} {}_1\tilde{F}_2 \left(-\frac{n(\nu-2)+\nu-1}{2(n+1)}; 1 \right. \\ &\quad \left. -\nu, -\frac{n(\nu-4)+\nu-3}{2(n+1)}; -\frac{1}{4} \sigma^2 z^{1+\frac{1}{n}} \right) + Cte \end{aligned} \quad (4.239)$$

Donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma y ${}_1\tilde{F}_2(x; z; y; w)$ es la función hipergeométrica regularizada.

La expresión anterior es poco manejable ya que depende de funciones especiales como la función hipergeométrica. Debido a lo anterior, para resolver la segunda integral se emplea la expansión en series de la función de Bessel de primer orden:

$$(1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) = (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right)^{2m-\frac{1}{n+1}}}{m! \Gamma \left(m+1-\frac{1}{n+1} \right)} \right\} \quad (4.240)$$

$$(1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}}}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m (1-y)^{\frac{2m(n+1)-1}{2n}}}{m! \Gamma \left(m+1-\frac{1}{n+1} \right)} \right\} \quad (4.241)$$

$$(1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} \right\} \quad (4.242)$$

Luego la segunda integral de la velocidad media se puede calcular:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \right] dy \\ = \int_0^1 \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} \right\} - 1 \right] dy \end{aligned} \quad (4.243)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \right] dy \\ = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} \int_0^1 (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} dy \right\} - \int_0^1 dy \end{aligned} \quad (4.244)$$

$$\int_0^1 \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \right] dy = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} \frac{n}{m(n+1) + n} \right\} - 1 \quad (4.245)$$

Con lo que se obtiene el caudal para el término de primer orden de forma compleja.

$$Q_1(t) = \frac{e^{it}}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} \frac{n}{m(n+1) + n} \right\} - 1 \right] \quad (4.246)$$

Aplicando la función parte real, para tener el caudal de primer orden.

$$Q_1(t) = \Re \left(\frac{e^{it}}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} \frac{n}{m(n+1) + n} \right\} - 1 \right] \right) \quad (4.247)$$

4.2.4.3 Caudal orden dos

Integrando sobre la expresión obtenida en (4.235):

$$Q_2(t) = \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\alpha}_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)(2m+1)}{n}} \right) dy + \int_0^1 e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1-y)^{\frac{(n+1)(m+1)}{n}} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sigma \sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\sigma \sqrt{2})} \right] dy \quad (4.248)$$

Como se tienen dos componentes, una permanente y otra impermanente, estas se analizan por separado. Para la componente permanente:

$$Q_{20} = \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right) dy \quad (4.249)$$

$$Q_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \int_0^1 \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right) dy \quad (4.250)$$

$$Q_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(1+n)(1+2m)}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \quad (4.251)$$

Empleando la expresión obtenida en (4.178) para \bar{a}_m , se obtiene la expresión para la componente permanente.

$$Q_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\Re e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n} (\Re e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m} (-1)^m}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu)} \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \quad (4.252)$$

Para la componente impermanente:

$$Q_{21}(t) = \int_0^1 e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}})}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right] dy \quad (4.253)$$

$$Q_{21}(t) = e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \int_0^1 \left[(1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}})}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right] dy \quad (4.254)$$

$$Q_{21}(t) = e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\int_0^1 (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} dy - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}) dy \right] \quad (4.255)$$

$$Q_{21}(t) = e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn + m + 2n + 1} - \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}})}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} dy \right] \quad (4.256)$$

El término con funciones de Bessel se puede reescribir como una serie e integrar incluyendo al término que lo multiplica, siguiendo el mismo procedimiento empleando en el cálculo del caudal de primer orden en la ec. (4.242), cambiando σ por $\sigma\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} (1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}) = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} \right\} \quad (4.257)$$

Integrando la expresión anterior:

$$\int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}) dy = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \int_0^1 (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} dy \right\} \quad (4.258)$$

$$\int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2}(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}) dy = \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{m(n+1)+n}\right) \right\} \quad (4.259)$$

Remplazando en (4.256) con (4.259) y aplicando parte real, se obtiene la componente impermanente:

$$Q_{21}(t) = \mathcal{R}e \left(e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn + m + 2n + 1} - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2j(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma\left(j+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{j(n+1)+n}\right) \right\} \right] \right) \quad (4.260)$$

Quedando el caudal de orden dos:

$$Q_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n} (\mathcal{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m} (-1)^m}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu)} \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \\ + \mathcal{R}e \left(e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn + m + 2n + 1} - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2j(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma\left(j+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{j(n+1)+n}\right) \right\} \right] \right) \quad (4.261)$$

Por ende, se tienen expresiones analíticas para el caudal hasta segundo orden con las ecuaciones (4.237), (4.247), (4.252) y (4.260):

$$Q(t) = Q_0 + \varepsilon Q_1(t) + \varepsilon^2 (Q_{20} + Q_{21}(t)) + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (4.262)$$

4.2.5 Esfuerzo de corte y esfuerzo de corte en el fondo

De la ecuación (4.29), para la ecuación de momentum:

$$\Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = (1 + \varepsilon \sin(t^*)) + \frac{1}{\mathbb{R}e_n} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^n \right) \quad (4.263)$$

Remplazando por el esfuerzo de corte:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin(t)) + \frac{1}{\mathbb{R}e_n} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4.264)$$

Donde el esfuerzo de corte para esta reología dada la geometría y el tipo de flujo:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\mathbb{R}e_n} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (4.265)$$

Empleando la expansión para la velocidad:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\mathbb{R}e} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \vartheta(\varepsilon^3) \right)^n \quad (4.266)$$

Se calculan las derivadas para cada velocidad según su orden.

Orden cero:

$$\frac{\partial u_o}{\partial y} = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} (1 - y)^{\frac{1}{n}} \quad (4.267)$$

Orden uno:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \mathcal{R}e \left[\frac{\partial W_1}{\partial y} e^{it} \right] = \mathcal{R}e \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) (1-y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) e^{it} \right] \quad (4.268)$$

Orden dos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial y} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(\frac{(n+1)}{n} (2m+1) (1-y)^{\frac{(n+1)(2m+1)-1}{n}} \right) \\
&+ \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[- \left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) (1-y)^{\frac{mn+m+1}{n}} \right. \right. \\
&\left. \left. + \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right) (1-y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma\sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.269}$$

Quedando el esfuerzo de corte para el fluido:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{1}{\mathbb{R}e} \left((\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} (1-y)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \mathcal{R}e \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) (1-y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) e^{it} \right] \right. \\
&+ \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(\frac{(n+1)}{n} (2m+1) (1-y)^{\frac{(n+1)(2m+1)-1}{n}} \right) \right. \\
&+ \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[- \left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) (1-y)^{\frac{mn+m+1}{n}} \right. \right. \\
&\left. \left. + \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right) (1-y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma\sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \right\} \left. \right]^n + \vartheta(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.270}$$

Evaluando en $y = 0$, se obtiene el esfuerzo de corte en el fondo.

$$\begin{aligned}
\tau_o(t) &= \frac{1}{\mathbb{R}e} \left((\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \mathcal{R}e \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) J_{1-\nu}(\sigma) e^{it} \right] \right. \\
&+ \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(\frac{(n+1)}{n} (2m+1) \right) \right. \\
&\left. + \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \right) J_{1-\nu}(\sigma\sqrt{2}) - \left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) \right] \right\} \right]^n + \vartheta(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{4.271}$$

4.2.6 Dispersión de Taylor

4.2.6.1 Dispersión a primer orden

Para determinar el coeficiente de dispersión de Taylor se requiere calcular la velocidad media para obtener como varía el campo de velocidad sobre el valor medio. Considerando la solución de la velocidad obtenida a primer orden como una primera aproximación debido a la complejidad que implica considerar una expansión a segundo orden:

$$u(y, t) = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+1}} \right] + \varepsilon \mathcal{R}e \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \quad (4.272)$$

Como los caudales determinados anteriormente son equivalentes a la velocidad media por ser una sección unitaria:

$$\bar{u} = Q_0 + \varepsilon Q_1(t) = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) + \varepsilon \frac{e^{it}}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\sigma}{2}^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma \left(m+1 - \frac{1}{n+1} \right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} - 1 \right] \quad (4.273)$$

Llamando a los términos de la velocidad media en la vertical:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1(t) \quad (4.274)$$

Expresando la velocidad como:

$$u(y, t) = \bar{u}(t) + u'(y, t) \quad (4.275)$$

Despejando $u'(y, t)$:

$$u'(y, t) = u(y, t) - \bar{u}(t) = -[\bar{u}(t) - u(y, t)] \quad (4.276)$$

Considerando solo términos hasta primer orden:

$$u'(y, t) = - \left(\bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1(t) - (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+1}} \right] + \varepsilon \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu} \left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \right) \quad (4.277)$$

$$u'(y, t) = -[\bar{u}_o + \varepsilon \bar{u}_1(t) - u_o(y) - \varepsilon u_1(y, t)] \quad (4.278)$$

Para determinar el coeficiente de dispersión de Taylor se debe calcular la integral triple sobre u' (Wang, 2012):

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{h} \int_0^h \frac{u'(y)}{D} \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.279)$$

Donde \mathcal{K} es el coeficiente de dispersión y D el coeficiente de difusión molecular.

Notar que la expresión anterior tiene dimensiones, por lo que es necesario llevar la ecuación (4.279) a una forma adimensional. Considerando que la velocidad se escaló con la escala U_o y la altura con la escala h , la forma adimensional de la ecuación de la dispersión queda:

$$\mathcal{K} \left(\frac{D}{U_o^2 h^2} \right) = - \int_0^1 u'(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.280)$$

Donde u' también se encuentra en su forma adimensional.

Llamando \mathcal{K}^* a la dispersión adimensional, la ecuación queda:

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 u'(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.281)$$

Como existe una multiplicación de las velocidades, esto genera términos de orden mayor a uno, reemplazando con (4.278) en (4.281) para eliminar los términos de orden mayor a uno:

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 ((\bar{u}_o - u_o(y)) + \varepsilon(\bar{u}_1(t) - u_1(y, t))) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} ((\bar{u}_o - u_o(y)) + \varepsilon(\bar{u}_1(t) - u_1(y, t))) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.282)$$

Reordenando términos y empleando la definición de u' :

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 (u'_o(y) + \varepsilon u'_1(y)) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} (u'_o(\hat{y}) + \varepsilon u'_1(\hat{y})) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.283)$$

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(y)(u'_o(\tilde{y}) + \varepsilon u'_1(\tilde{y})) + \varepsilon u'_1(y)(u'_o(\tilde{y}) + \varepsilon u'_1(\tilde{y})) d\tilde{y} \right) dy \right] dy \quad (4.284)$$

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} (u'_o(y)u'_o(\tilde{y}) + \varepsilon u'_o(y)u'_1(\tilde{y})) + (\varepsilon u'_1(y)u'_o(\tilde{y}) + \varepsilon^2 u'_1(y)u'_1(\tilde{y})) d\tilde{y} \right) dy \right] dy \quad (4.285)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* = & - \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy - \varepsilon \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_1(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \\ & - \varepsilon \int_0^1 u'_1(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy - \varepsilon^2 \int_0^1 u'_1(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_1(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \end{aligned} \quad (4.286)$$

La cuarta integral es de orden ε^2 , luego se desprecia del análisis, quedando la dispersión:

$$\mathcal{K}^* = - \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy - \varepsilon \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_1(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy - \varepsilon \int_0^1 u'_1(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.287)$$

Llamando a las integrales:

$$\mathcal{K}^* = -I_0 - \varepsilon I_1 - \varepsilon I_2 \quad (4.288)$$

$$\mathcal{K}^* = -I_0 - \varepsilon(I_1 + I_2) \quad (4.289)$$

Con el fin de calcular cada una por separado.

Para I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.290)$$

Se calcula la primera integral anidada:

$$\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} = - \int_0^{\tilde{y}} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left[1 - (1 - \tilde{y})^{\frac{1}{n+1}} \right] d\tilde{y} \quad (4.291)$$

$$\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} = -(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\tilde{y}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) d\tilde{y} - \left(\frac{n}{n+1} \right) \int_0^{\tilde{y}} \left[1 - (1 - \tilde{y})^{\frac{1}{n+1}} \right] d\tilde{y} \right) \quad (4.292)$$

$$\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} = -(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\frac{n}{2n+1} \right) \tilde{y} - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \tilde{y} - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[1 - (1 - \tilde{y})^{\frac{1}{n+2}} \right] \right\} \right) \quad (4.293)$$

Integrando de 0 a y en la variable \tilde{y} :

$$\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} = - \left(\int_0^y (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \tilde{y} d\tilde{y} - \int_0^y (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \tilde{y} - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[1 - (1 - \tilde{y})^{\frac{1}{n+2}} \right] \right\} d\tilde{y} \right) \quad (4.294)$$

$$\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} = - \left((\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \frac{y^2}{2} - (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left\{ \frac{y^2}{2} - \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left[y - \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] \right\} \right) \quad (4.295)$$

$$\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} = -(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \left[y - \frac{y^2}{2} - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] \quad (4.296)$$

Multiplicando por $u'_o(y)$ e integrando:

$$\int_0^1 u'_o \int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} dy = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+1}} \right] \right] \left[\left(\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \right) \left[y - \frac{y^2}{2} - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] \right] dy \quad (4.297)$$

$$\int_0^1 u'_o \int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_o(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} dy = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \left(\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \right) \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right) - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+1}} \right] \right] \left[\left(y - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1 - y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] dy \quad (4.298)$$

$$\int_0^1 u'_o \int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'_o(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} dy = -(\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \quad (4.299)$$

Quedando I_0 :

$$I_0 = -(\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \quad (4.300)$$

Para I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.301)$$

Se calcula la primera integral anidada:

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \int_0^{\hat{y}} \left[\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right) J_{-\nu}(\sigma)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} - 1 \right] - \left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu}\left(\sigma(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) - 1 \right) d\hat{y} \quad (4.302)$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \int_0^{\hat{y}} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right) J_{-\nu}(\sigma)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right] d\hat{y} + \frac{e^{it}}{\Omega} \int_0^{\hat{y}} (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu}\left(\sigma(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) d\hat{y} \quad (4.303)$$

Usando la forma en serie de la función de Bessel, mostrada en (4.241), para calcular la segunda integral:

$$(4.304)$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right) J_{-\nu}(\sigma)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} \hat{y} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \int_0^{\hat{y}} (1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu}\left(\sigma(1-y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) d\hat{y}$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right) J_{-\nu}(\sigma)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} \hat{y} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \int_0^{\hat{y}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} (1-\hat{y})^{\frac{m(n+1)}{n}} \right\} d\hat{y} \quad (4.305)$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right) J_{-\nu}(\sigma)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} \hat{y} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \int_0^{\hat{y}} (1-\hat{y})^{\frac{m(n+1)}{n}} d\hat{y} \right\} d\hat{y} \quad (4.306)$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} \hat{y} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left(1 - (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}+1}\right) \right\} d\hat{y} \quad (4.307)$$

$$\int_0^{\hat{y}} u'_1(\hat{y}) d\hat{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} \hat{y} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left(1 - (1-\hat{y})^{\frac{m(n+1)}{n}+1}\right) \right\} \quad (4.308)$$

$$(4.309)$$

$$\int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \tilde{y} \right\} \\ + \frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left(1 - (1-\tilde{y})^{\frac{m(n+1)+1}{n}}\right) \right\}$$

$$\int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left(\tilde{y} - 1 + (1-\tilde{y})^{\frac{m(n+1)+1}{n}}\right) \quad (4.310)$$

Integrando de 0 a y en la variable \tilde{y} :

$$\int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} d\tilde{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \int_0^y \left(\tilde{y} - 1 + (1-\tilde{y})^{\frac{m(n+1)+1}{n}}\right) d\tilde{y} \quad (4.311)$$

$$\int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} d\tilde{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{m(n+1)+n}\right) \int_0^y \left(\tilde{y} - 1 + (1-\tilde{y})^{\frac{m(n+1)+1}{n}}\right) d\tilde{y} \quad (4.312)$$

$$\int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} d\tilde{y} = -\frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left[\left(\frac{y^2}{2} - y\right) + \left(\frac{n}{m(n+1)+2n}\right) \left(1 - (1-y)^{\frac{m(n+1)+2}{n}}\right) \right] \quad (4.313)$$

Multiplicando por $u_0'(y)$ e integrando

$$\int_0^1 u_0'(y) \left(\int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u_1'(\tilde{y}) d\tilde{y} d\tilde{y} \right) dy \\ = \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{2n+1}\right) \right. \\ \left. - \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+1}}\right] \right] (\Re e)^{\frac{1}{n}} \frac{e^{it}}{\Omega} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \left[\left(\frac{y^2}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - y\right) + \frac{n}{m(n+1)+2n} \left(1 - (1-y)^{\frac{m(n+1)+2}{n}}\right) \right] dy \quad (4.314)$$

$$(4.315)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_0(y) \left(\int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u'_1(\tilde{y}) d\tilde{y} dy \right) dy \\
&= \frac{e^{it} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{n}{2n+1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \right\} \left[\left(\frac{y^2}{2} - y \right) + \frac{n}{m(n+1)+2n} \left(1 - (1-y)^{\frac{m(n+1)+2}{n}} \right) \right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_0 \int_0^y \int_0^{\tilde{y}} u'_1(\tilde{y}) dy d\tilde{y} \\
&= \varepsilon \frac{e^{it} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{m(n+1)+n} \right) \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \right] \left[\frac{y^2}{2} - y + \left(\frac{n}{m(n+1)+2n} \right) \left(1 - (1-y)^{\frac{m(n+1)+2}{n}} \right) \right] dy \tag{4.316}
\end{aligned}$$

Quedando I_1 :

$$I_1 = \varepsilon \frac{e^{it} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n^2}{m(n+1)+n} \right) \left[\frac{m(n+1)(m(n+1)+7n+1)}{3(4n+1)(m(n+1)+3n)(m(n+1)+4n+1)} \right] \tag{4.317}$$

Para I_2 :

$$I_2 = \int_0^1 u'_1(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_0(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) dy \right] dy \tag{4.318}$$

Las dos integrales anidadas ya se calcularon en la ec. (4.299)

$$\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_0(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) dy = -(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \left[\left(y - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+3} \right] \right] \tag{4.319}$$

Multiplicando por u'_1 e integrando entre 0 y 1:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_1(y) \int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_0(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) dy dy \\
&= \int_0^1 \frac{(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} e^{it}}{J_{-\nu}(\sigma) \Omega} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \left[\left(\frac{n}{m(n+1)+n} \right) - (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} \right] \left[\left(y - \frac{y^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+3} \right] \right] dy \tag{4.320}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_1(y) \int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_0(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} dy \\
&= \frac{(\Re e)^{\frac{1}{n}} e^{it}}{J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{m(n+1)+n} \right) - (1-y)^{\frac{m(n+1)}{n}} \right] \left[\left(y - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] dy
\end{aligned} \tag{4.321}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_1(y) \int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'_0(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) d\tilde{y} dy \\
&= \frac{e^{it} (\Re e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left(\frac{n^2}{m(n+1)+n} \right) \left[\left(\frac{m(n+1)(m(n+1)+7n+1)}{3(4n+1)(m(n+1)+3n)(m(n+1)+4n+1)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.322}$$

Quedando I_2 :

$$I_2 = \frac{e^{it} (\Re e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n^2}{m(n+1)+n} \right) \left[\left(\frac{m(n+1)(m(n+1)+7n+1)}{3(4n+1)(m(n+1)+3n)(m(n+1)+4n+1)} \right) \right] \tag{4.323}$$

Remplazando en (4.289) con (4.300), (4.317) y (4.323), se obtiene la dispersión adimensional:

$$\mathcal{K}^* = (\Re e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} - \varepsilon \mathcal{R}e \left(\frac{e^{it} (\Re e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} T_{m,n} \right) + \vartheta(\varepsilon^2) \tag{4.324}$$

Con

$$T_{m,n} = \left(\frac{n^2}{m(n+1)+n} \right) \left[\frac{m(n+1)(m(n+1)+7n+1)}{3(4n+1)(m(n+1)+3n)(m(n+1)+4n+1)} \right] \tag{4.325}$$

Tomando $\varepsilon = 0$, se recupera la dispersión para el caso no-newtoniano (ley de potencia) con gradiente de presión constante:

$$\mathcal{K}^* = (\Re e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \tag{4.326}$$

Tomando $n = 1$, se recupera la dispersión para el caso newtoniano con gradiente de presión constante:

$$\mathcal{K}^* = (\mathbb{R}e)^2 \frac{2}{945} \approx (\mathbb{R}e)^2 0.00212 \quad (4.327)$$

4.2.6.2 Dispersión media en el tiempo a segundo orden

Calculando la dispersión adimensional media en el tiempo para una pulsación considerando la expansión a primer orden para la velocidad:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}^* dt \quad (4.328)$$

Remplazando con la ecuación obtenida en (4.324):

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{K}^*} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} dt \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon \Omega J_{-\nu}(\sigma)} \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} T_{m,n} dt \end{aligned} \quad (4.329)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{K}^*} = & (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}}}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \left(\frac{2n}{2n+1} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} T_{m,n} \int_0^{2\pi} e^{it} dt \end{aligned} \quad (4.330)$$

Como la integral sobre la exponencial compleja es nula, se obtiene que la dispersión adimensional media es igual a la dispersión asociada a la componente de la velocidad de orden cero:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \quad (4.331)$$

Sin embargo, analizando la solución para la velocidad del fluido hasta orden dos, es posible observar que al considerar una expansión a primer orden para calcular la

dispersión implica perder el efecto que tiene la componente permanente de la velocidad de segundo orden, la que cambiar el valor medio de la dispersión para una oscilación.

Empleando la expresión para calcular el coeficiente de dispersión adimensional mostrada en la ecuación (4.281), integrando en una oscilación para obtener la dispersión media:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 u'(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \right\} dt \quad (4.332)$$

Reordenando la velocidad y las integrales en virtud del teorema de Fubini (Thomas & Finney, 1996):

$$\overline{\mathcal{K}^*} = -\int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y) u'(\hat{y}) dt \right\} d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \quad (4.333)$$

Analizando la integral en el tiempo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y) u'(\hat{y}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_o(y) - \bar{u}_o) [(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) + \varepsilon(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t)) \\ &+ \varepsilon^2(u_2(\hat{y}, t) - \bar{u}_2(t))] dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(u_1(y, t) - \bar{u}_1(t)) [(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) + \varepsilon(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t)) \\ &+ \varepsilon^2(u_2(\hat{y}, t) - \bar{u}_2(t))] dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2(u_2(y, t) - \bar{u}_2(t)) [(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) + \varepsilon(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t)) \\ &+ \varepsilon^2(u_2(\hat{y}, t) - \bar{u}_2(t))] dt \end{aligned} \quad (4.334)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y)u'(\hat{y}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)(u_o(y) - \bar{u}_o) \\
&+ \varepsilon(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t)) \\
&+ \varepsilon^2(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_2(\hat{y}, t) - \bar{u}_2(t))] dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varepsilon(u_1(y, t) - \bar{u}_1(t))(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) \\
&+ \varepsilon^2(u_1(y, t) - \bar{u}_1(t))(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t))] dt \\
&+ \varepsilon^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(u_2(y, t) - \bar{u}_2(t))(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)] dt
\end{aligned} \tag{4.335}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y)u'(\hat{y}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)(u_o(y) - \bar{u}_o) \\
&+ \varepsilon(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t)) \\
&+ \varepsilon^2(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_2(\hat{y}, t) - \bar{u}_2(t))] dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varepsilon(u_1(y, t) - \bar{u}_1(t))(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) \\
&+ \varepsilon^2(u_1(y, t) - \bar{u}_1(t))(u_1(\hat{y}, t) - \bar{u}_1(t))] dt \\
&+ \varepsilon^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(u_2(y, t) - \bar{u}_2(t))(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)] dt
\end{aligned} \tag{4.336}$$

Como la solución de orden uno es de la forma $u_1(y, t) = e^{it}u_1(y)$, mientras que $u_2(y, t) = u_{20}(y) + e^{2it}u_{21}(y)$, las integrales sobre los términos con exponenciales son nulas, por lo que la integral en el tiempo queda:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y)u'(\hat{y}) dt = (u_o(y) - \bar{u}_o)(u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o) + \varepsilon^2[(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) + (u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)(u_{20}(y) - \bar{u}_{20})] \tag{4.337}$$

Al aplicar las restantes integrales en el espacio, se recupera la dispersión asociada al término de primer orden y aparece un término de segundo orden, debido a la componente permanente de la velocidad de ese orden, situación que ocurre con el incremento del caudal, discutida anteriormente. Esta componente de segundo orden solo aparece en el caso de que el fluido no es newtoniano, ya que al ser newtoniano la componente

permanente de la velocidad de segundo orden se hace nula. La dispersión media (a segundo orden) tiene la forma:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = \overline{\mathcal{K}_0^*} + \varepsilon^2 \overline{\mathcal{K}_{20}^*} + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (4.338)$$

Con:

$$\overline{\mathcal{K}_0^*} = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \quad (4.339)$$

$$\overline{\mathcal{K}_{20}^*} = - \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} [(u_o(y) - \bar{u}_o)(u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) + (u_o(\hat{y}) - \bar{u}_o)(u_{20}(y) - \bar{u}_{20})] d\hat{y} \right) dy \right] dy \quad (4.340)$$

$$\overline{\mathcal{K}_{20}^*} = - \int_0^1 u_o'(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} \right) dy \right] dy - \int_0^1 (u_{20}(y) - \bar{u}_{20}) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u_o'(\hat{y}) d\hat{y} \right) dy \right] dy \quad (4.341)$$

Llamando:

$$\overline{\mathcal{K}_{20}^*} = -I_{20} - I_{21} \quad (4.342)$$

El valor de \bar{u}_{20} corresponde a la velocidad media para el término permanente de la velocidad de segundo orden, el cual se obtuvo al determinar la expresión para el caudal en la ecuación (4.251):

$$\bar{u}_{20} = Q_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(1+n)(1+2m)}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \quad (4.343)$$

Las dos integrales anidadas de la segunda integral en la ecuación (4.341), se determinaron anteriormente, obteniéndose en la ecuación (4.296), resultado reescrito de la forma:

$$\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u_o'(\hat{y}) d\hat{y} \right) dy = \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \left[\left(\frac{1}{2} y^2 - y \right) + \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left(1 - (1-y)^{\frac{1}{n+3}} \right) \right] \quad (4.344)$$

Por lo que es necesario calcular las integrales I_{20} e I_{21} , para la integral anidada en I_{20} :

$$\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} = \int_0^{\hat{y}} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(\left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] - (1-\hat{y})^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right) d\hat{y} \quad (4.345)$$

$$\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(1+2m+2n+2mn)} \right] \left(\hat{y} - 1 + (1-\hat{y})^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)+1} \right) \quad (4.346)$$

Integrando para obtener la segunda integral aplicada en I_{20} :

$$\int_0^y \int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} d\bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(2mn+2m+2n+1)} \right] \int_0^y \left(\bar{y} - 1 + (1-\bar{y})^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)+1} \right) d\bar{y} \quad (4.347)$$

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} d\bar{y} \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(2mn+2m+2n+1)} \right] \left[\left(\frac{1}{2} y^2 - y \right) + \frac{n}{(2mn+2m+3n+1)} \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)+2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.348)$$

Integrando para obtener la tercera integral aplicada en I_{20} :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} \right) dy \right] \\ = \int_0^1 \left(\frac{n}{n+1} \right) (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right) - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(2mn+2m+2n+1)} \right] \left[\left(\frac{1}{2} y^2 - y \right) \right. \\ \left. + \frac{n}{(2mn+2m+3n+1)} \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)+2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.349)$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} \right) d\bar{y} \right] dy \\ = \left(\frac{n}{n+1} \right) (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \int_0^1 \left[\left(\frac{n}{2n+1} \right) - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \left[\left(\frac{y^2}{2} - y \right) \right. \\ \left. + \frac{n}{(2m+1)(n+1)+2n} \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)+2} \right) \right] dy \end{aligned} \quad (4.350)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u'_o(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} (u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) d\hat{y} \right) d\hat{y} \right] dy \\
&= - \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{n}{(2mn+2m+2n+1)} \right] \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(2n+1)} \left[\frac{(1+2m)(1+n)(2+2m+8n+2mn)}{3(4n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \quad (4.351)
\end{aligned}$$

Luego I_{20} queda:

$$I_{20} = -\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^3(1+n)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(1+2m)(2+2m+8n+2mn)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \quad (4.352)$$

Para la integral I_{21} , se calcula a partir del resultado mostrado en la ecuación (4.344):

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_0^1 (u_{20}(y) - \bar{u}_{20}) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\hat{y}} u'_o(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\hat{y} \right] dy \\
&= - \int_0^1 (u_{20}(y) - \bar{u}_{20}) \left[(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \left[y - \frac{y^2}{2} - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] \right] dy \quad (4.353)
\end{aligned}$$

Remplazando con $(u_{20}(y) - \bar{u}_{20})$:

$$I_{21} = -(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \int_0^1 \left(\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} - (1-y)^{\frac{(n+1)(2m+1)}{n}} \right) \left[y - \frac{y^2}{2} - \frac{n}{(3n+1)} \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+3}} \right] \right] dy \quad (4.354)$$

Integrando:

$$I_{21} = -\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(2m+1)(2mn+2m+8n+2)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \quad (4.355)$$

Remplazando con las expresiones de I_{20} y I_{21} , se obtiene el coeficiente de segundo orden para la dispersión media:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{K}_{20}^*} &= \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^3(1+n)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(1+2m)(2+2m+8n+2mn)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \\
&+ \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left[\frac{(2m+1)(2mn+2m+8n+2)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \quad (4.356)
\end{aligned}$$

Reordenando términos:

$$\overline{\mathcal{K}_{20}^*} = \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{2n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_m \left[\frac{(m+1)(mn+m+8n+2)}{(mn+m+2n+1)(mn+m+4n+1)(mn+m+5n+2)} \right] \quad (4.357)$$

Con:

$$\overline{a}_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m} (-1)^m}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n} (2m+1) \right]} \quad (4.358)$$

Notar que para $n = 1$, $a_m = 0$.

Definiendo:

$$A_{m,n} = \overline{a}_m \left[\frac{(2m+1)(2mn+2m+8n+2)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \quad (4.359)$$

Se reescribe la dispersión media de segundo orden:

$$\overline{\mathcal{K}_{20}^*} = \mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{2n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (4.360)$$

Luego la dispersión media en el tiempo queda:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} + \varepsilon^2 \left(\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{2n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right) + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (4.361)$$

Luego en un ciclo existe un aporte a la dispersión por efecto del término permanente de la velocidad de orden dos debido a la reología no newtoniana del fluido. Para el caso newtoniano ($n = 1$) se recupera que:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{R}e)^2 \frac{2}{945} \quad (4.362)$$

CAPÍTULO 5: Resultados para el flujo pulsante

5.1.1 Perfiles de velocidad

En función de los resultados anteriores es posible analizar funciones que caracterizan el flujo. A partir de los resultados obtenidos para las componentes de la expansión en serie de la velocidad presentados en las ecuaciones (4.46), (4.82) y (4.235), es posible calcular de manera analítica el perfil de velocidad hasta segundo orden. Con el objetivo de validar el resultado analítico, se comparan los perfiles de velocidad con resultados numéricos para la ecuación (4.21).

5.1.1.1 Solución numérica y solución analítica

La solución numérica fue realizada por el profesor Andrea Vacca, de la universidad de Nápoles Federico II. El método empleado para resolver de manera numérica la ecuación (4.30), con las condiciones de borde mostradas anteriormente (ec. 4.31 y 4.32) se emplea una discretización espacial basada en polinomios de Chesbychev para definir los puntos en el intervalo espacial y cuadratura tipo Gauss-Lobatto- Chesbychev para integrar en el espacio (Orszag, 1980). Esta metodología ha mostrado resolver de manera efectiva problemas que implican resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (Manna & Vacca, 1999).

Discretizando el espacio según los nodos Gauss-Lobatto-Chesbychev como $y_i = \cos\left(\frac{i}{N}\pi\right)$, aplicando la transformación para llevar puntos desde el intervalo $[1,-1]$ al intervalo $[0,1]$, quedando la velocidad discretizada espacialmente como $u_i = u(y_i)$ para cada uno de estos nodos. Esto permite discretizar en el espacio la ecuación (4.30), donde se llevan las derivadas espaciales del problema al espacio dado por los nodos, lo que corresponde al cálculo de la derivadas en el espacio dado por los polinomios de Chesbychev (Canuto et al, 2012) agregando la dependencia que existe de la viscosidad aparente con el gradiente de velocidad por ser reología tipo ley de potencia.

Para completar el esquema numérico, se emplea una discretización tipo Crank-Nicholson de segundo orden para la discretización temporal. Con esto se resuelve un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas para cada discretización del tiempo, obteniendo los perfiles de velocidad. La resolución numérica de la ecuación se realizó para distintos valores de n , para el rango de un fluido pseudoplástico ($0 < n < 1$) y para el caso newtoniano ($n = 1$).

También se emplearon varios valores para los números adimensionales Ω y $\mathbb{R}e$, presentado en las ecuaciones (4.28) y (4.22). Otro parámetro que se probó para varios valores es \mathcal{E} , en este caso se emplearon valores menores o iguales a uno, con el fin de observar la validez de la aproximación debido a estricta dependencia que existe entre la expansión en series y el valor de ε .

Para los mismos valores de n , ε , Ω y $\mathbb{R}e$, se calcularon los perfiles empleando la solución analítica determinada en el capítulo anterior, con el fin de comparar los perfiles obtenidos.

5.1.1.2 El caso Newtoniano

Para el caso newtoniano $n = 1$, la validez de solución analítica del problema no está restringida a tener valores de ε menores que 1, por lo que se verifica que al tomar este valor para n , las ecuaciones (4.46), (4.82) y (4.235) se reduzcan a solución analítica del caso newtoniano presentada por Lamb (1895) y posteriormente por Womersley (1955), para el caso de geometría cilíndrica.

Para un fluido newtoniano en condiciones de gradientes de presión pulsante queda:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin(t)) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

De forma compleja:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = 1 + \varepsilon [-ie^{it}] + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2)$$

Siendo la solución de la ecuación (5.2), aplicando las condiciones de borde mencionadas en el capítulo anterior:

$$u(y) = \frac{\mathbb{R}e}{2} [1 - (1 - y)^2] + \varepsilon \mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sqrt{(1 - y)}}{J_{-\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{\sqrt{2\Omega \mathbb{R}e}(1 - i)}{2} \right] \right)} J_{-\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{\sqrt{2\Omega \mathbb{R}e}(1 - i)}{2} \right] (1 - y) \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \quad (5.3)$$

Esta solución para el caso newtoniano no está restringida para un rango de valores de ε , como se mencionó anteriormente. Analizando ahora las soluciones obtenidas para orden cero, uno y dos, cuando $n = 1$.

Para orden cero, cuando $n = 1$:

$$u_o(y) = \frac{1}{2} \mathbb{R}e [1 - (1 - y)^2] \quad (5.4)$$

Para orden uno, cuando $n = 1$:

$$u_1(y, t) = \mathcal{R}e \left[\left(\frac{\sqrt{(1-y)}}{J_{-\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{\sqrt{2\Omega \mathbb{R}e}(1-i)}{2} \right] \right)} J_{-\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{\sqrt{2\Omega \mathbb{R}e}(1-i)}{2} \right] (1-y) \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \quad (5.5)$$

Para orden dos, cuando $n = 1$:

$$u_2(y, t) = 0 \quad (5.6)$$

Por lo que se recupera la solución del caso newtoniano cuando $n = 1$.

Comparando la solución analítica con la solución numérica en el caso newtoniano se corrobora gráficamente que la expansión en series concuerda con los resultados numéricos obtenidos por el profesor Vacca, cuando se cumplen las condiciones que permiten emplear la expansión en series de tener ε pequeño y $n < 1$.

Para observar esto se calculó el campo de velocidades para varias combinaciones de $\mathbb{R}e$, Ω , ε , n . Todos los perfiles del caso newtoniano calculados se encuentran en una oscilación de la componente pulsante de la presión para distintos tiempos con el objeto cubrir una oscilación completa de la componente pulsante del gradiente de presiones (cada un octavo del periodo de oscilación), todo en variables adimensionales. Las figuras 5.1 y 5.2 muestran la comparación entre el perfil de velocidades determinado analítica y numéricamente para el caso Newtoniano.

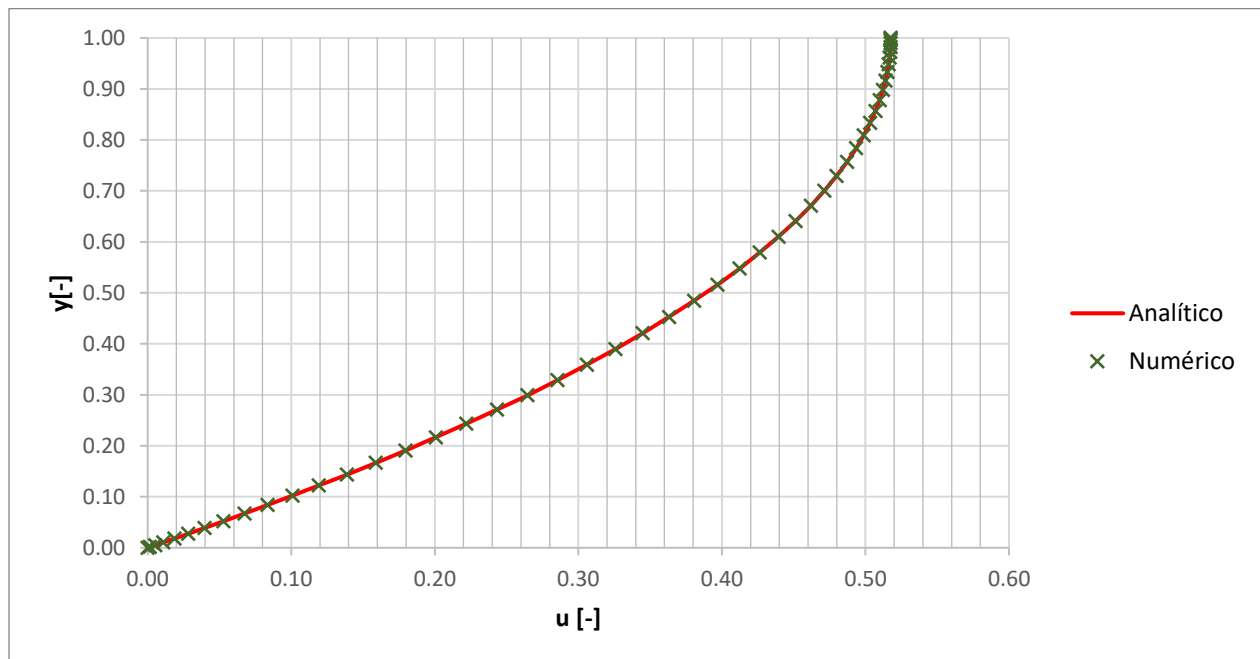


Figura 5.1: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.125$ con $Re=1$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0.1$

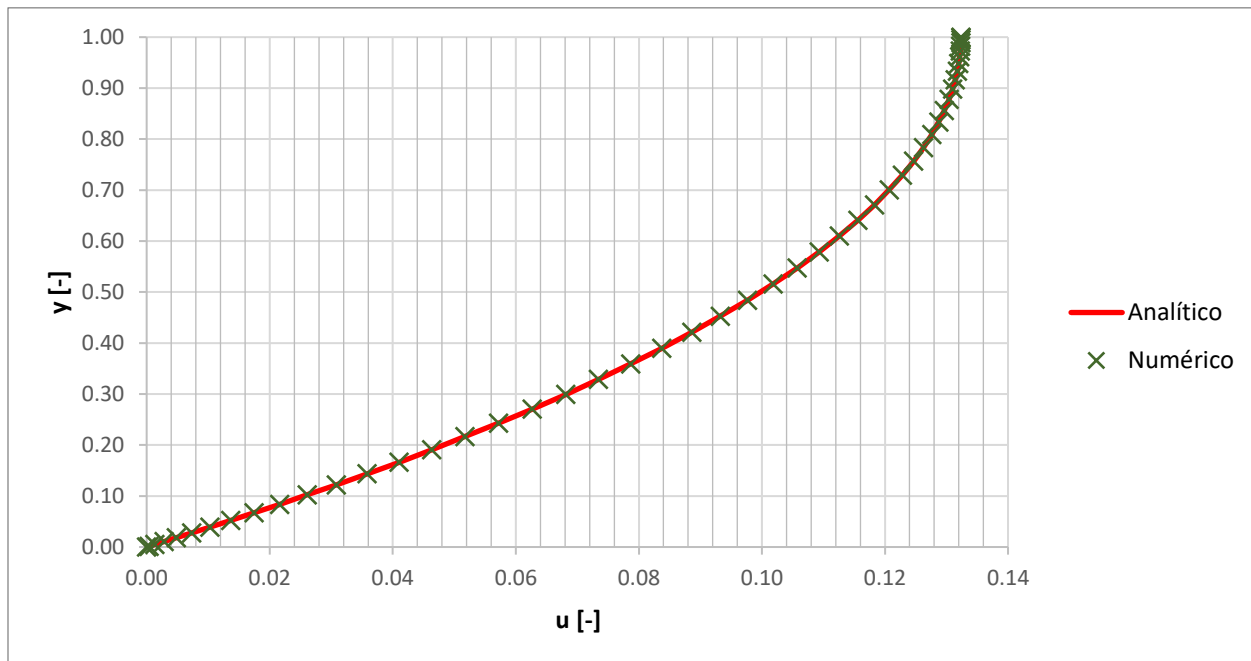


Figura 5.2: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.875$ con $Re=1$, $\Omega = 0.1$ y $\varepsilon = 1$.

5.1.1.3 Fluido tipo ley de potencias

El objetivo de la expansión en series es tener una expresión para la velocidad. Las componentes de la velocidad determinadas para orden cero, uno y dos, permiten tener una expresión analítica adecuada para la distribución de velocidades siempre que se cumplan los supuestos iniciales tanto para el rango de valores de $\varepsilon < 1$ y $0 < n < 1$.

Esto se corrobora con las soluciones numéricas realizadas por el profesor Vacca, ya que la solución analítica obtenida por medio de la expansión en series entrega resultados casi idénticos a las soluciones numéricas.

También se puede comprobar que los valores de Re y Ω no provocan discrepancias entre la solución analítica y la solución numérica (Fig. 5.3 a 5.8). Para esto se calculó el campo de velocidades para varias combinaciones de Re y Ω . Variando desde 0.1 a 10 para el número de Reynolds y de 0.1 a 100 para Ω .

El número de Reynolds muestra la razón entre la inercia del fluido y las fuerzas viscosas, mientras que el número Ω está relacionado con la frecuencia de las pulsaciones de la presión, con lo que corrobora que estos adimensionales no afectan la convergencia de la solución analítica y a su vez permiten analizar los efectos de alta y baja viscosidad, al igual que tener altas y bajas frecuencias en las pulsaciones.

Para los valores de ε se probaron valores menores a uno para visualizar el efecto de tener una pulsación que alcance el mismo orden de magnitud que el gradiente de

presiones constante. En el caso de los valores para n se emplearon los valores de 0.5 y 0.75.

Todos los perfiles calculados se encuentran en un periodo de oscilación de la componente pulsante del gradiente de presión, tomando distintos tiempos para cubrir la oscilación completa, tomando un octavo del periodo de oscilación.

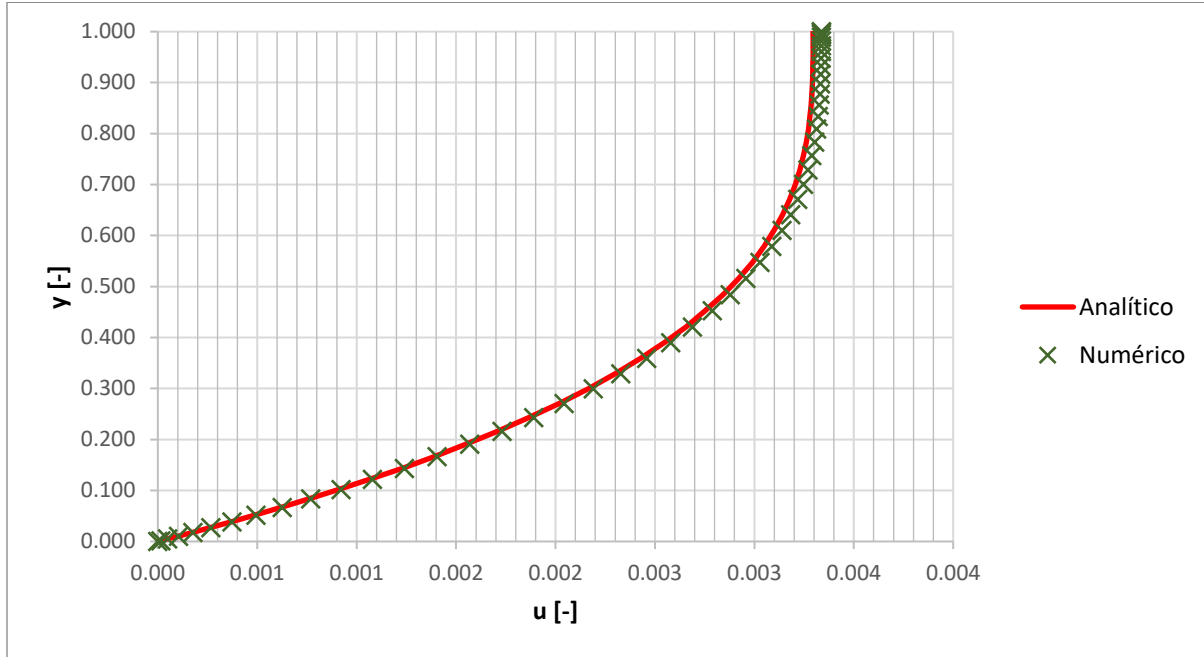


Figura 5.3: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.5$, $Re=0.1$, $\Omega = 0.1$ y $\varepsilon = 0.1$.

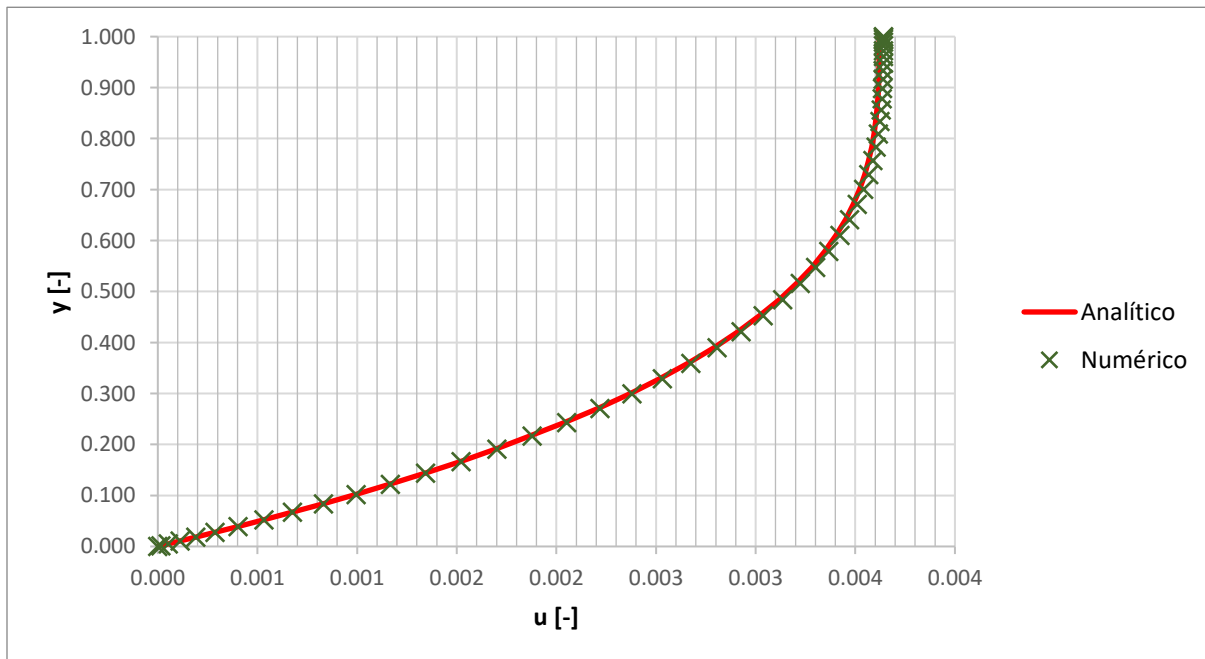


Figura 5.4: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.5$, $Re=0.1$, $\Omega = 100$ y $\varepsilon = 0.1$.

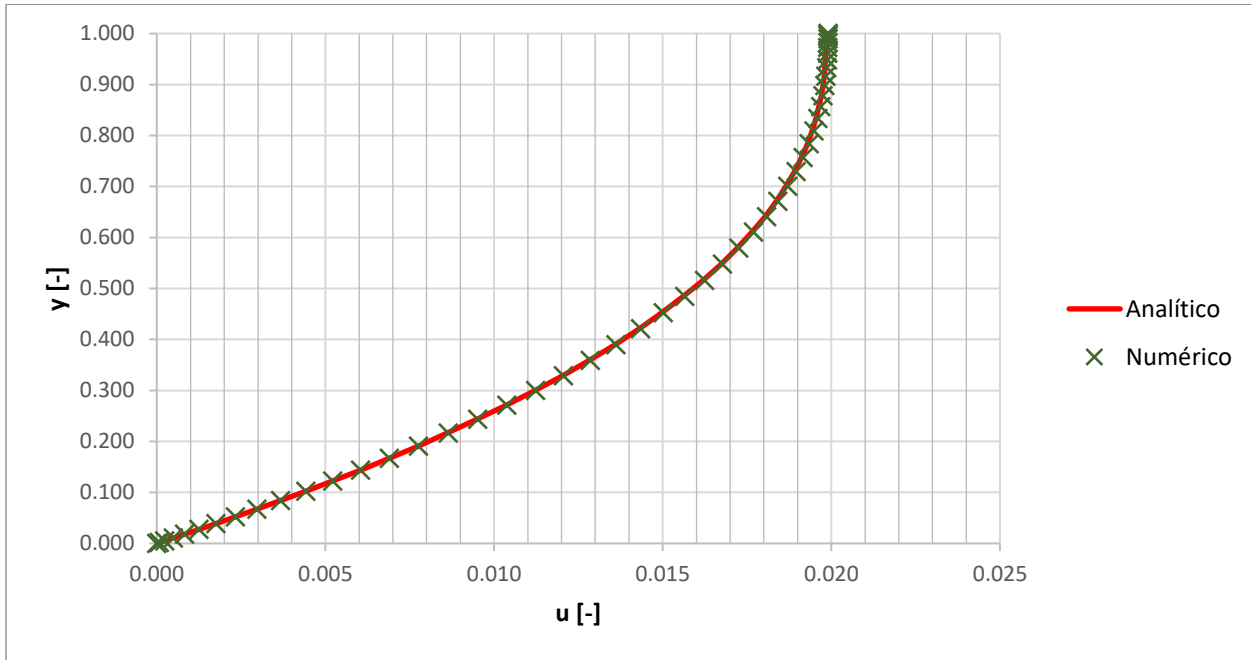


Figura 5.5: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.75$, $Re=0.1$, $\Omega = 0.1$ y $\varepsilon = 0.1$.

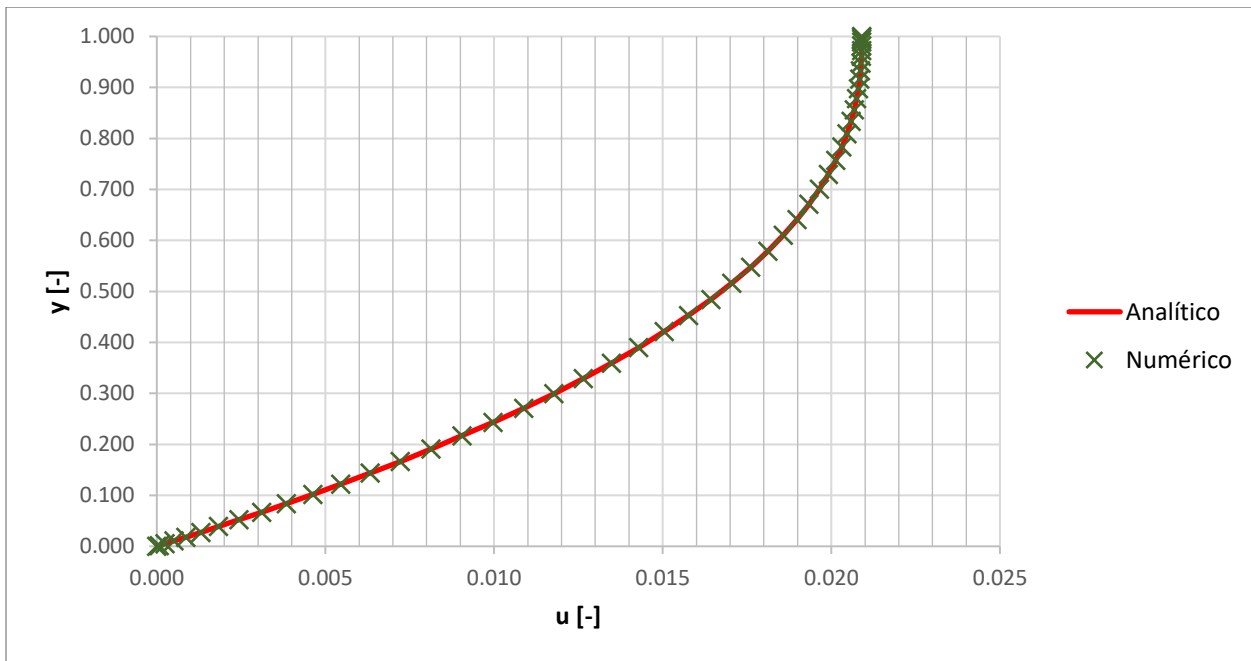


Figura 5.6: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.75$, $Re=0.1$, $\Omega = 100$ y $\varepsilon = 0.1$.

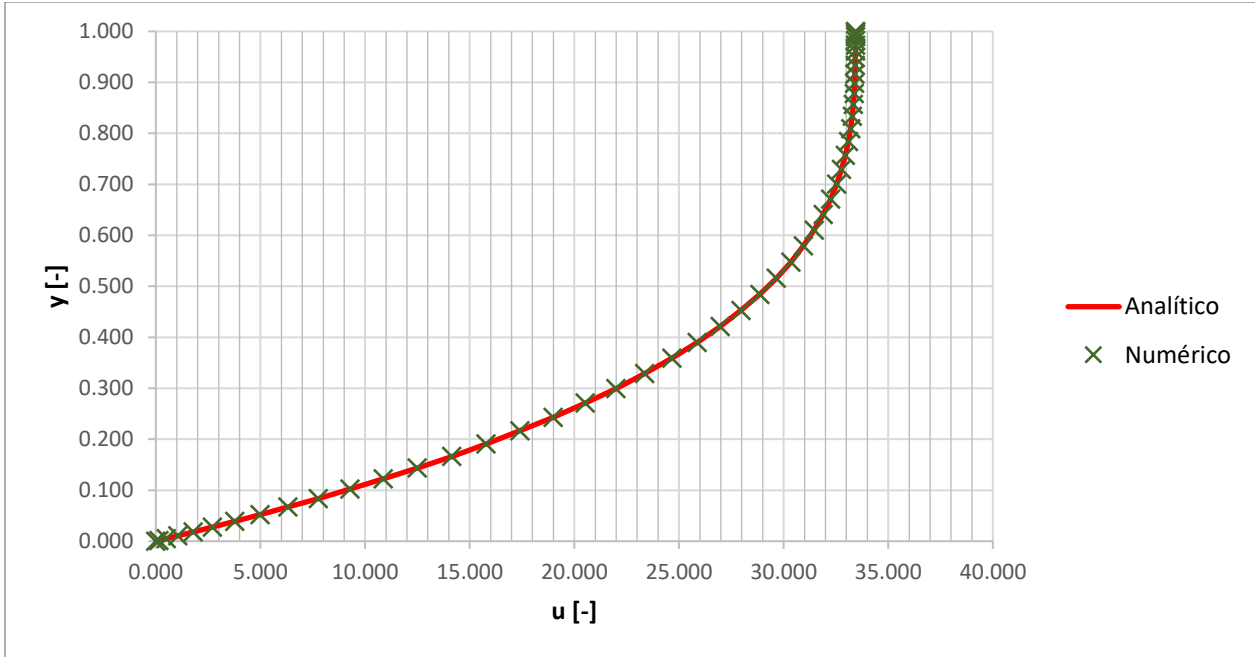


Figura 5.7: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.5$, $Re=10$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0,1$.

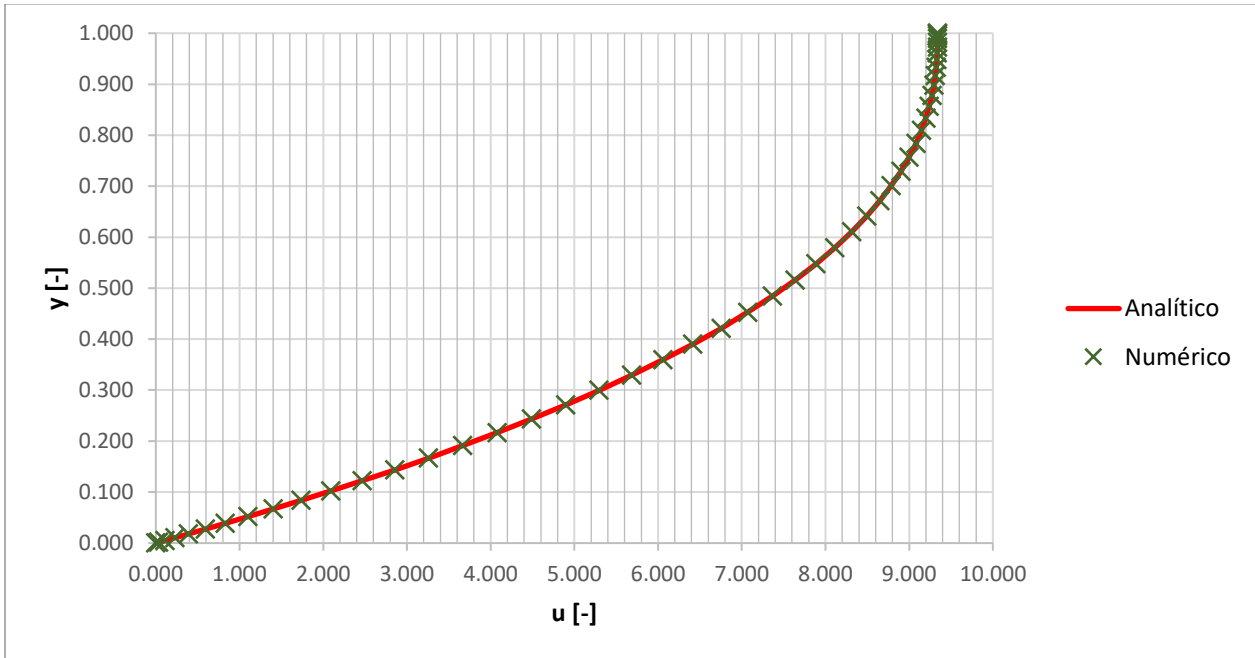


Figura 5.8: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.5$ con $n=0.75$, $Re=10$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0,1$.

Utilizando $\varepsilon = 1$ se puede apreciar claramente en las Fig. 5.9 y 5.10, que la solución analítica falla para el caso de un fluido pseudoplástico ya que las diferencias con la solución numérica son grandes.

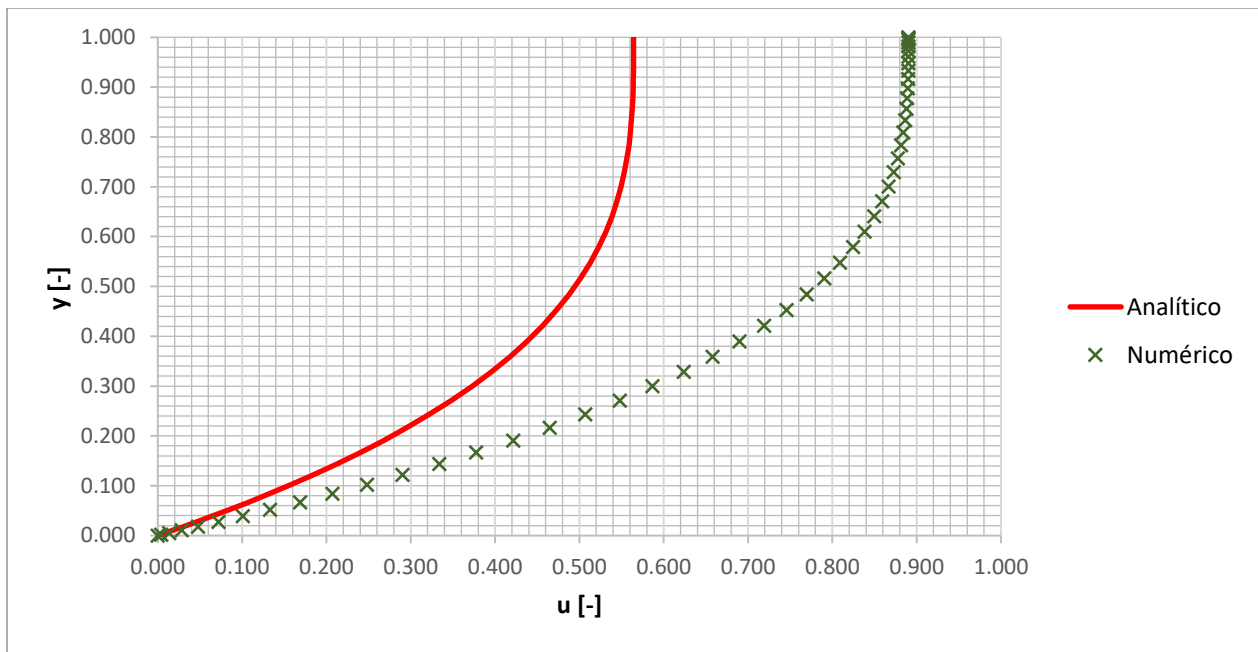


Figura 5.9: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=0.125$ con $n=0.5$, $Re=1$, $\Omega = 0.1$ y $\varepsilon = 1$.

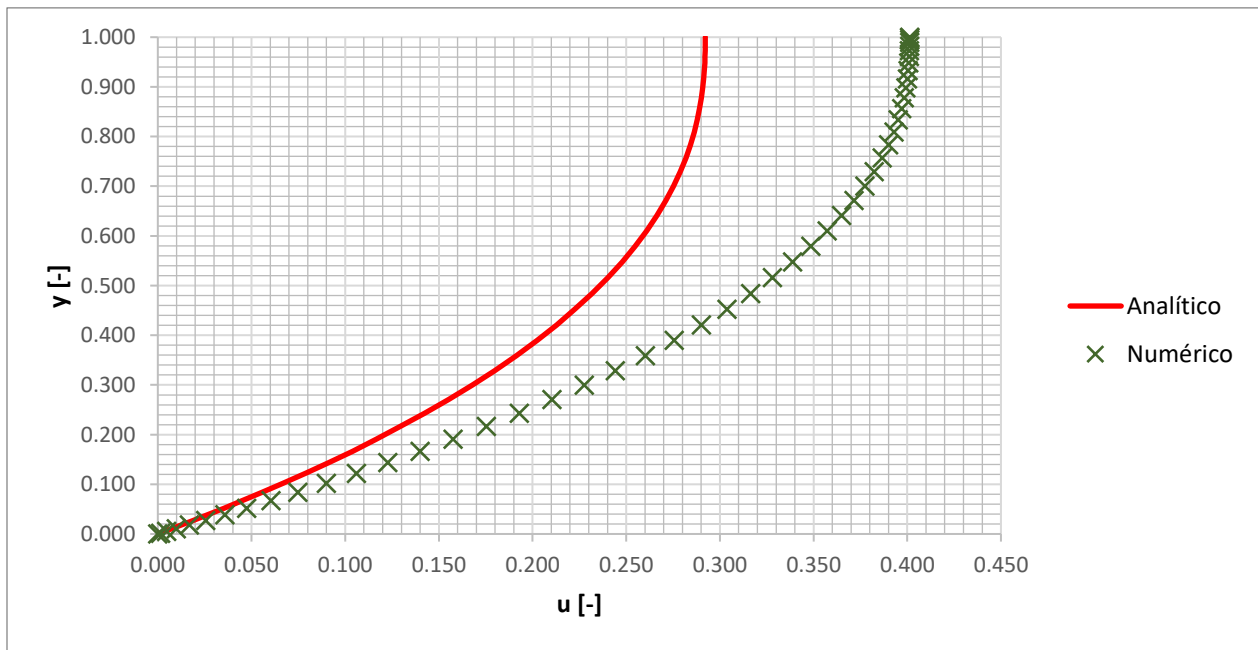


Figura 5.10: Perfiles de velocidad adimensionales, analítico y numérico para $t=1$ con $n=0.75$, $Re=1$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 1$.

Para poder apreciar en totalidad las diferencias entre la solución numérica y analítica se calcularon los errores asociados a las combinaciones de parámetros del flujo, en términos de ε , Ω , Re y n , para todos los perfiles analizados. El error porcentual se calcula como:

$$Error_{ij} = \frac{|u_{numérico}(y_i, t_j) - u_{analítico}(y_i, t_j)|}{|u_{numérico}(y_i, t_j)|} \times 100 \quad (5.7)$$

Con lo que se tiene el error para cada altura del perfil de velocidades, en los tiempos de la pulsación calculada.

Con este cálculo del error para cada punto de los perfiles se determina el error máximo asociado a cada combinación de los parámetros al igual que un error promedio y la desviación estándar de los errores para cada combinación. Los resultados se presentan en la Tabla 5.1

Tabla 5.1: Errores máximos, promedios y desviación estándar de perfiles de velocidad

n	ε	\Re	Ω	Error Máximo (%)	Error Promedio (%)	Desviación(%)
0.01	0.5	1	0.1	0.245	0.045	0.059
	0.75	1	0.1	0.250	0.045	0.064
	1	1	0.1	0.258	0.046	0.065
0.1	0.5	0,1	0.1	1.441	0.992	0.233
			1	1.448	0.992	0.234
			10	1.512	0.989	0.238
			100	1.491	0.748	0.228
		1	0.1	1.465	0.988	0.235
			1	1.466	0.747	0.221
			10	0.306	0.061	0.056
			100	0.236	0.041	0.062
		10	0.1	0.506	0.072	0.081
			1	0.236	0.041	0.062
			10	0.249	0.045	0.061
			100	0.270	0.057	0.060
0.1	0.75	0,1	0.1	0.487	0.218	0.085
			1	0.493	0.218	0.085
			10	0.520	0.209	0.085
			100	0.297	0.051	0.064
		1	0.1	0.490	0.218	0.085
			1	0.510	0.182	0.079
			10	0.253	0.049	0.061
			100	2.999	1.580	0.817
		10	0.1	0.397	0.120	0.060
			1	0.248	0.045	0.063
			10	0.251	0.044	0.064
			100	0.557	0.325	0.094
0.1	1	0,1	0.1	0.323	0.048	0.073
			1	0.258	0.046	0.065
			10	0.258	0.046	0.065
			100	0.259	0.046	0.065
		1	0.1	0.258	0.047	0.066
			1	0.258	0.046	0.065
			10	0.259	0.046	0.065
			100	0.259	0.046	0.065
		10	0.1	0.258	0.046	0.065
			1	0.259	0.046	0.065
			10	0.267	0.048	0.065
			100	0.258	0.046	0.065
1	0.5	1	0.1	1670886695705.240	128704083412.702	362848060600.019
	0.75	1	0.1	92364524.327	10930528.663	29301216.303
	1	1	0.1	0.274	0.047	0.066

Con los resultados de la Tabla anterior es posible verificar que las diferencias entre la solución numérica y analítica, en su mayoría, no superan el 1% de error y solo en un caso superan el 2%, siempre que ε sea menor a 1. Considerando el caso de $\varepsilon = 0.01$ comparado con $\varepsilon = 0.1$, se aprecia una diferencia menor entre ambas soluciones, lo que es consistente con el uso de la expansión en series empleando un parámetro ε que debe ser pequeño.

En el caso de $\varepsilon = 1$, es evidente la gran diferencia entre la solución numérica y la analítica. También se aprecia la concordancia entre las soluciones numéricas y analíticas para el caso newtoniano ($n = 1$), independiente del valor de ε .

5.1.2 Caudal o velocidad media

En la sección 4.2.4 se determinaron expresiones analíticas para las componentes del caudal según el orden de la componente del campo de velocidad:

$$Q(t) = Q_o + \varepsilon Q_1(t) + \varepsilon^2 [Q_{20} + Q_{21}(t)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.8)$$

Con

$$Q_o = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \quad (5.9)$$

$$Q_1(t) = \mathcal{R}e \left(\frac{e^{it}}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(m+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} - 1 \right] \right) \quad (5.10)$$

$$Q_{20} = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m}}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu)} \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \quad (5.11)$$

$$Q_{21} = \mathcal{R}e \left(e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn+m+2n+1} - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{2j(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma\left(j+1 - \frac{1}{n+1}\right)} \left(\frac{n}{j(n+1)+n} \right) \right\} \right] \right) \quad (5.12)$$

Debido a la dependencia que existe en el perfil de velocidades con el número de Reynolds, Ω y n , el comportamiento del caudal en el tiempo también depende de estos parámetros por lo que se tienen distintos resultados según los valores de estos parámetros.

Si bien en todos los casos el caudal presenta oscilaciones en el tiempo, estas se ven fuertemente afectadas por el valor Ω , ya que este adimensional está relacionado con la frecuencia de las pulsaciones.

5.1.2.1 Caudal con un valor de Ω alto y Reynolds orden uno

Para valores altos de Ω , lo que se puede atribuir a una alta frecuencia o inercia, el caudal muestra muy poca variación en el tiempo y la oscilación producida por el efecto pulsante a pesar de ser pequeña no logra provocar un comportamiento sinusoidal completo, ya que el caudal solo presenta una leve variación durante periodo de la pulsación. Esto es tanto valido para el caso pseudoplástico como para el caso newtoniano como puede apreciarse en la Fig. 5.11:

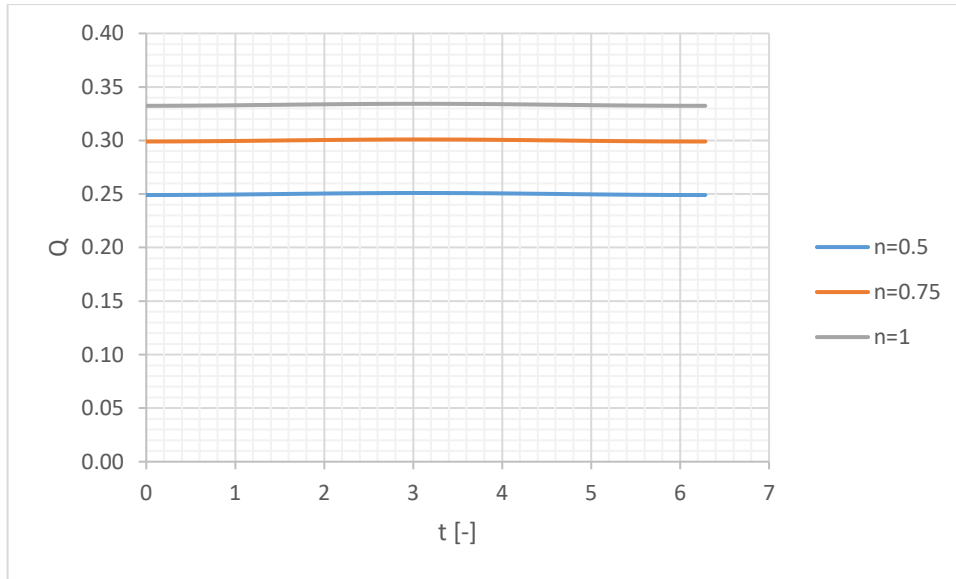


Figura 5.11: Caudal en función del tiempo para $Re=1$, $\Omega = 100$ y $\varepsilon = 0.1$.

Si bien la oscilación existe, es prácticamente despreciable respecto al valor medio del caudal, lo que es consistente con la ecuación de momentum, ya que un valor grande de Ω implica que el término inercial de la ecuación de momentum es mucho mayor al término asociado a la presión pulsante y los esfuerzos de corte:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin(t)) + \frac{1}{\mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (5.13)$$

Dividiendo por Ω :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} + \frac{\varepsilon}{\Omega} \sin(t) + \frac{1}{\Omega \mathbb{R}e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (5.14)$$

Como ε es pequeño y $\mathbb{R}e$ es de orden uno, $\frac{1}{\Omega} \ll 1$, $\frac{\varepsilon}{\Omega} \ll 1$, $\frac{1}{\Omega \mathbb{R}e} \ll 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx 0 \quad (5.15)$$

Luego el campo de velocidades no cambia, lo que se traduce en que el caudal tampoco cambie en el tiempo, lo que es consistente con lo mostrado en la fig. 5.11, donde la pulsación se vuelve despreciable. A pesar de que Ω considera el efecto de la frecuencia, este no se ve reflejado directamente en el término pulsante ya que el término sinusoidal tiene amplitud acotada en la restricción de tener un valor de ε pequeño.

Lo anterior también puede concluirse directamente desde las soluciones de orden cero y uno. La solución de orden cero no depende del valor de Ω , solo del número de Reynolds:

Orden cero:

$$u_o(y) = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n+1}} \right] \quad (5.16)$$

Orden uno:

$$u_1(y, t) = \mathcal{R}e \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{2\Omega n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}} (1-i)}{n+1} \right)} J_{-\nu} \left(\left(\frac{\sqrt{2\Omega n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}} (1-i)}{n+1} \right) (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \quad (5.17)$$

Cuando Ω es grande, los términos en las funciones de Bessel son del mismo orden ya que el número de Reynolds no cambia, la variable y se encuentra en el rango 0 a 1, pero el término exponencial está dividido por Ω , lo que hace la solución de orden más pequeña, agregado a que la solución de orden uno va multiplicada por ε , que es pequeño también por lo que los términos de la expansión se vuelven despreciables respecto a la solución de orden cero, lo que es consistente con los resultados gráficos para el caudal o velocidad media para altos valores de Ω , el perfil de velocidad es netamente la solución permanente.

5.1.2.2 Caudal con un valor de Ω pequeño y Reynolds orden uno

Para valores pequeños de Ω el termino pulsante no es despreciable, por lo que es posible apreciar un comportamiento sinusoidal notorio en el caudal o en la velocidad media del fluido. Esto se debe a que el balance en la ecuación de momentum puede interpretarse como los términos viscosos haciendo equilibrio a la componente permanente del gradiente de presión, mientras que la componente pulsante se equilibra con la inercia del fluido:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin(t)) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (5.18)$$

Como $\Omega \sim \varepsilon \ll 1$:

$$0 \approx 1 + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (5.19)$$

Que corresponde a la solución en régimen permanente, luego los otros términos

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \approx \varepsilon \sin(t) \quad (5.20)$$

Gráficamente es posible apreciar el comportamiento sinusoidal del caudal sobre el valor medio en el tiempo que corresponde al régimen permanente (fig. 5.12):

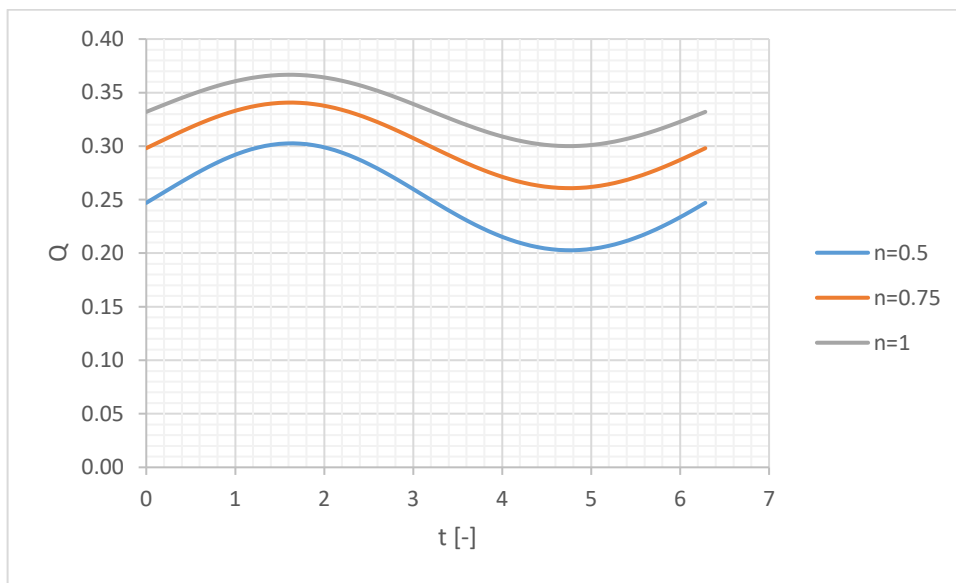


Figura 5.12: Caudal en función del tiempo para $Re=1$, $\Omega = 0.1$ y $\varepsilon = 0.1$.

Analizando las soluciones de orden cero y orden uno, se puede concluir el mismo comportamiento, la solución de orden cero no depende de Ω , pero si la de primer orden,

más aún al ser un Ω pequeño, como la solución de orden uno incluye un término de la forma $\frac{1}{\Omega}$, esto compensa el ε que multiplica a la solución de orden uno, haciendo que la pulsación se vea reflejada en el perfil de velocidad, lo que es consistente con los resultados presentados gráficamente.

5.1.2.3 Caudal para alto número de Reynolds con Ω orden uno.

A diferencia de los casos con alto o bajo número Ω , que no afectan la solución de orden cero, el tener un alto o bajo número de Reynolds afecta directamente la solución de orden cero. Si el número de Reynolds es grande, la solución de orden cero que depende del número de Reynolds como $\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}}$, va a aumentar aún más su valor, ya que $0 < n < 1$, por lo que a menor valor n , con un Reynolds alto, la solución en régimen permanente se vuelve más grande.

Orden cero:

$$Q_o = (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) \quad (5.21)$$

Orden uno:

$$Q_1(t) = \mathcal{R}e \left(\frac{e^{it}}{\Omega} \left[\frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{\frac{2m(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1 - \frac{1}{n+1})} \frac{n}{m(n+1)+n} \right\} - 1 \right] \right) \quad (5.22)$$

Orden dos:

$$Q_2(t) = \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sqrt{\Omega n} (\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)} \right)^{4m}}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma(\frac{1}{2}-m) \Gamma(m+2-\nu)} \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \right. \\ \left. + \mathcal{R}e \left(e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn+m+2n+1} - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{2j(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+1 - \frac{1}{n+1})} \left(\frac{n}{j(n+1)+n} \right) \right\} \right] \right) \right] \quad (5.23)$$

Al tener una solución permanente más grande el término de orden uno se vuelve más pequeño respecto a la solución de orden cero ya que el número de Reynolds si bien afecta los argumentos en las funciones de Bessel, al encontrarse ambas divididas entre sí, el

término sigue manteniéndose del mismo orden, por lo que los efectos del Reynolds no afectan el orden de la solución de orden uno.

La solución de orden uno al estar multiplicada por ε y al ser el término de orden cero aún más grande, provoca que la parte pulsante de la solución se vuelva despreciable frente a la solución permanente o de orden cero.

A diferencia de lo que ocurre cuando Ω es grande, la solución de orden cero cambia y depende del valor de n , haciéndose más grande con el número de Reynolds y menor valor de n . Esto es consistente con los resultados obtenidos para el caudal, la solución tiene una variación despreciable en el tiempo y a menor valor de n , más caudal fluye por la sección. Esto se debe a que el número Reynolds grande, implica que la presión motriz que genera el flujo sea mayor, aumentando el flujo de orden cero y amortiguando el efecto pulsante, ya que la variación del gradiente de presiones por el efecto pulsante es mucho menor al gradiente constante, presentando un comportamiento de la velocidad similar al régimen permanente.

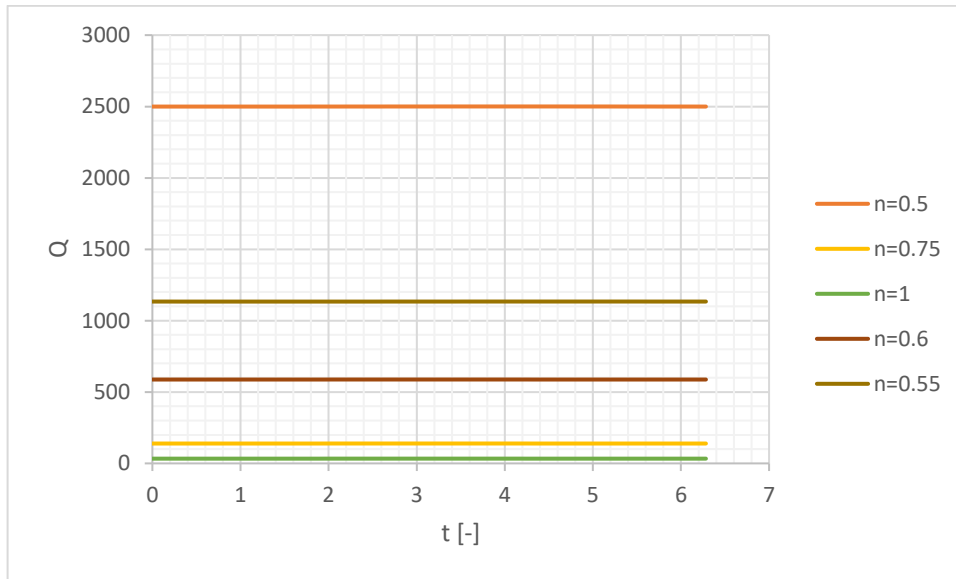


Figura 5.13: Caudal en función del tiempo para $Re=100$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.1.2.4 Caudal para bajo número de Reynolds con Ω orden uno.

Al tener un valor pequeño para el número de Reynolds, se produce el efecto inverso al caso con número de Reynolds alto. Un número de Reynolds pequeño reduce la magnitud de la solución de orden cero y esta se ve reducida aún más por el efecto del valor de n , ya que al tener un Reynolds menor a uno y $n < 1$, la solución de orden cero por ser proporcional a $\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}}$ se verá reducida en su velocidad media o caudal mientras más pequeño sea el Reynolds y menor valor de n tenga.

Al tener una solución de orden cero de menor magnitud, la solución de orden uno no es despreciable frente a la solución de orden cero, por lo que es posible visualizar el efecto

de la pulsación sobre el caudal o velocidad media en el tiempo, al igual que al tener un mayor valor para n , se observa que el caudal del flujo es mayor.

Al tener un número de Reynolds pequeño, las fuerzas viscosas son más pequeñas, lo que permite que el fluido tenga un comportamiento pulsante en su velocidad media o caudal por efecto de la pulsación en el gradiente de presiones, a diferencia del caso de tener un número de Reynolds elevado, el cual implica fuerzas viscosas grandes, las que amortiguan la pulsación.

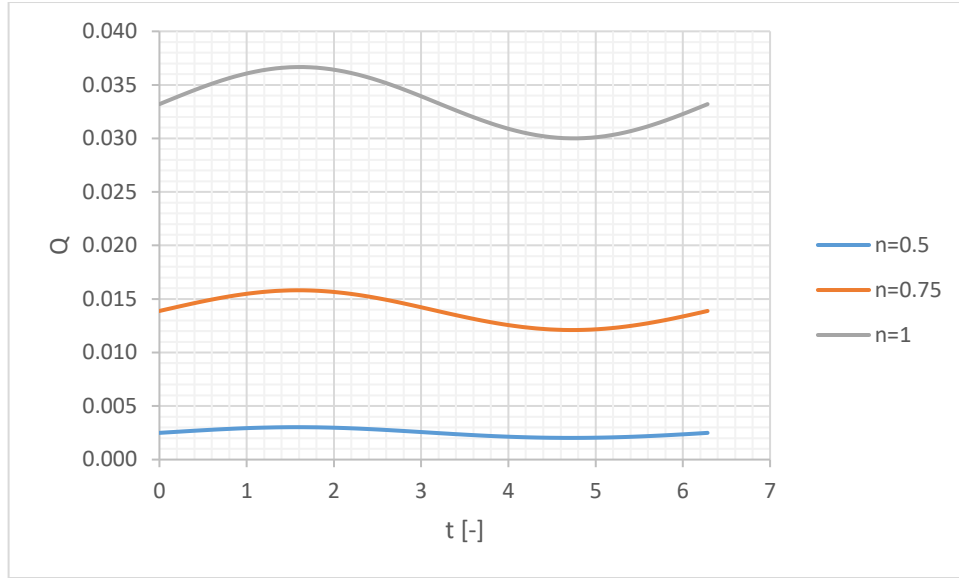


Figura 5.14: Caudal en función del tiempo para $Re=0.1$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.1.3 Incremento del caudal

Analizando las componentes del caudal, es posible notar que el término de caudal asociado al término de segundo orden del campo de velocidad presenta dos partes, siendo una independiente del tiempo. El caudal para segundo orden:

$$Q_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sqrt{\Omega n (Re)} \frac{1}{2n} \right)^{4m}}{(n+1)} \left[\frac{n}{(1+n)(1+2m+n)} \right]}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu)} + \text{Re} \left(e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\frac{n}{mn+m+2n+1} - \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma\sqrt{2})} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{2j(n+1)-1}{n+1}} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma\left(j+1-\frac{1}{n+1}\right)} \binom{n}{j(n+1)+n} \right\} \right] \right) \quad (5.24)$$

Siendo el término independiente del tiempo, el que genera un incremento del caudal. Definiendo el incremento del caudal normalizado en un periodo:

$$I_Q = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Q_o + \varepsilon Q_1(t) + \varepsilon^2 Q_{20} + \varepsilon^2 Q_{21}(t)] dt}{Q_o} - \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_o dt}{Q_o} = \varepsilon^2 \frac{Q_{20}}{Q_o} \quad (5.25)$$

Ya que $Q_1(t)$ y $Q_{21}(t)$ tienen un componente e^{it} y e^{2it} lo que genera un aporte nulo de caudal en un periodo.

Remplazando con los términos del caudal obtenidos anteriormente:

$$I_Q = \varepsilon^2 \frac{1}{(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} \left[\frac{(1+n)(1+2m)}{(1+n)(1+2m)+n} \right] \quad (5.26)$$

Donde el término $\overline{a_m}$, fue definido anteriormente:

$$\overline{a_m} = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-n)}{4} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 \left|\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right|^2 \frac{\left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)}\right)^{4m}}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu) \left[\frac{(n+1)}{n} (2m+1)\right]} \quad (5.27)$$

Luego el incremento de caudal queda:

$$I_Q = \varepsilon^2 \frac{(1-n)}{4n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{|\sigma|^2}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{\mathbb{R}e}\right)^{\frac{2}{n}} \left|\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}\right|^2 \frac{(-1)^m \left(\frac{\sqrt{\Omega n}(\mathbb{R}e)^{\frac{1}{2n}}}{(n+1)}\right)^{4m}}{(2m)! \Gamma(2m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right) \Gamma(m+2-\nu) \left[\frac{(2n+1)(n+1)^2}{(1+n)(1+2m)+n}\right]} \quad (5.28)$$

Puede demostrarse que cuando se desprecia la inercia para el flujo pulsante entre placas paralelas, es igual al incremento obtenido por Davies & Chakrabarti (1980):

$$I_Q = \varepsilon^2 \frac{(1-n)}{4n^2} \quad (5.29)$$

Sin embargo, la expresión obtenida en (5.28) muestra que existe dependencia con los otros parámetros asociados al fluido, por lo que al evaluar para distintas combinaciones de valores de n , ε , $\mathbb{R}e$ y Ω , se observa que la dependencia con el número de Reynolds y Ω también afecta el incremento de caudal.

Con el fin de poder observar los efectos que tienen los parámetros mencionados anteriormente sobre el incremento de caudal, se grafica para un Reynolds fijo, los valores que toma el incremento para un rango de valores de Ω y n , en las Fig. 5.15 a

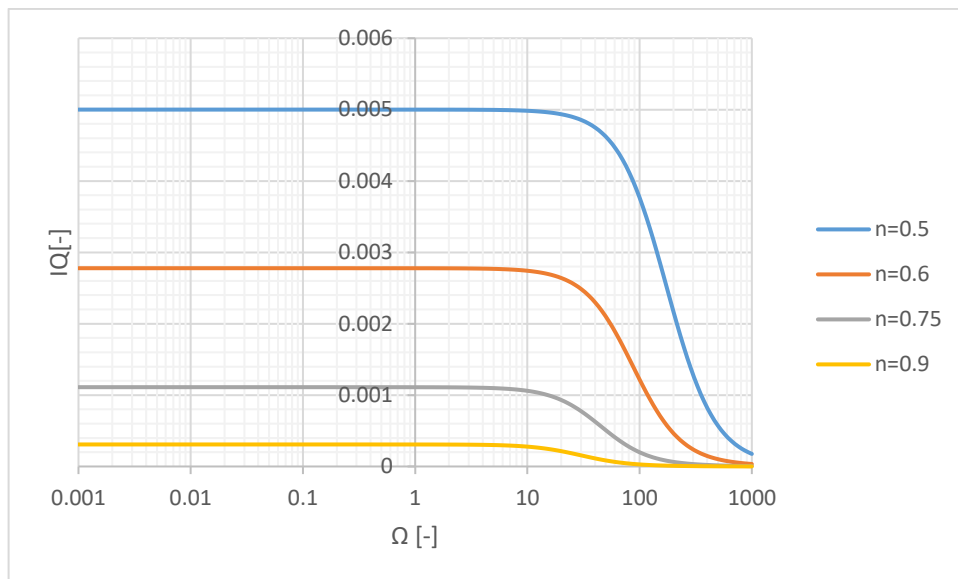


Figura 5.15: Incremento de caudal para $Re=0.1$ y $\varepsilon = 0.1$.

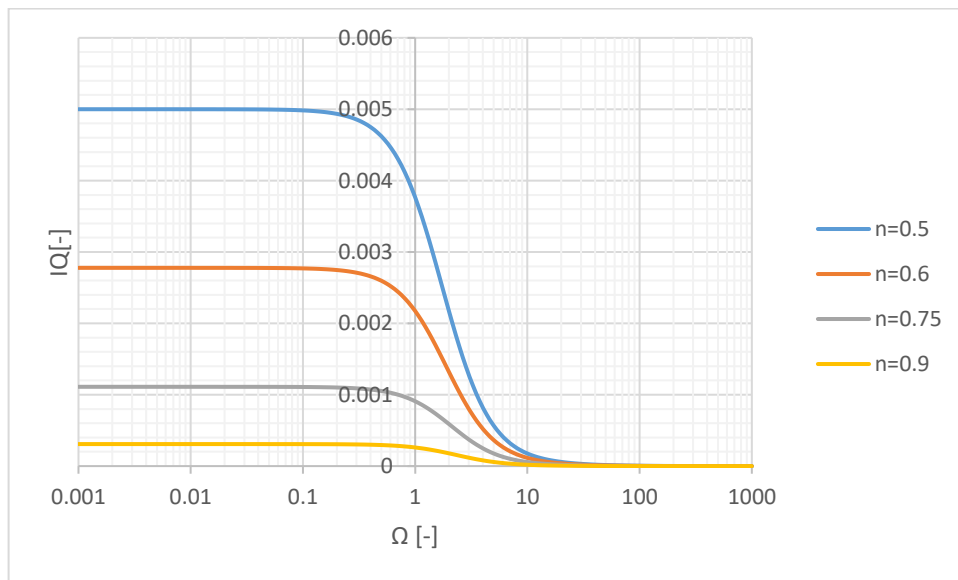


Figura 5.16: Incremento de caudal para $Re=1$ y $\varepsilon = 0.1$.

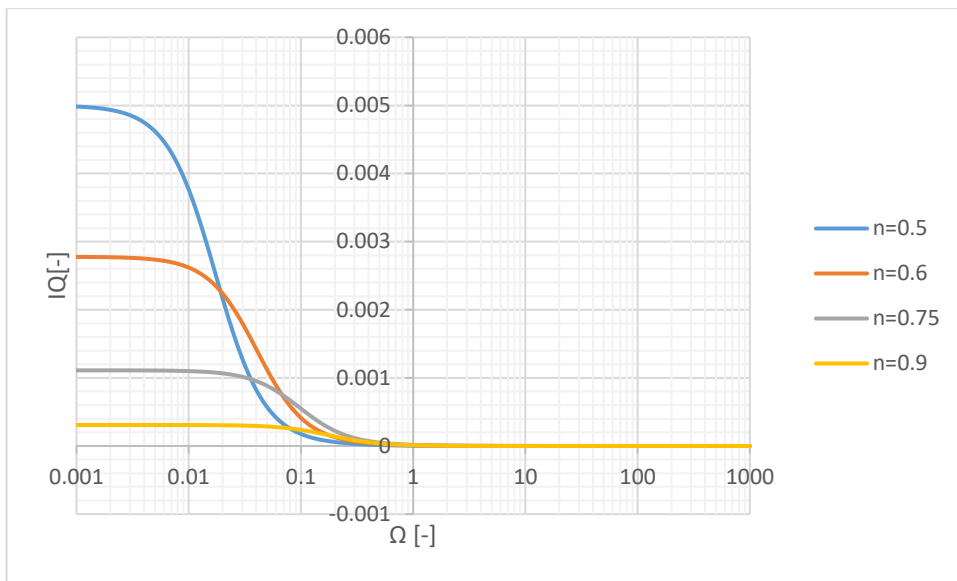


Figura 5.17: Incremento de caudal para $Re=10$ y $\varepsilon = 0.1$.

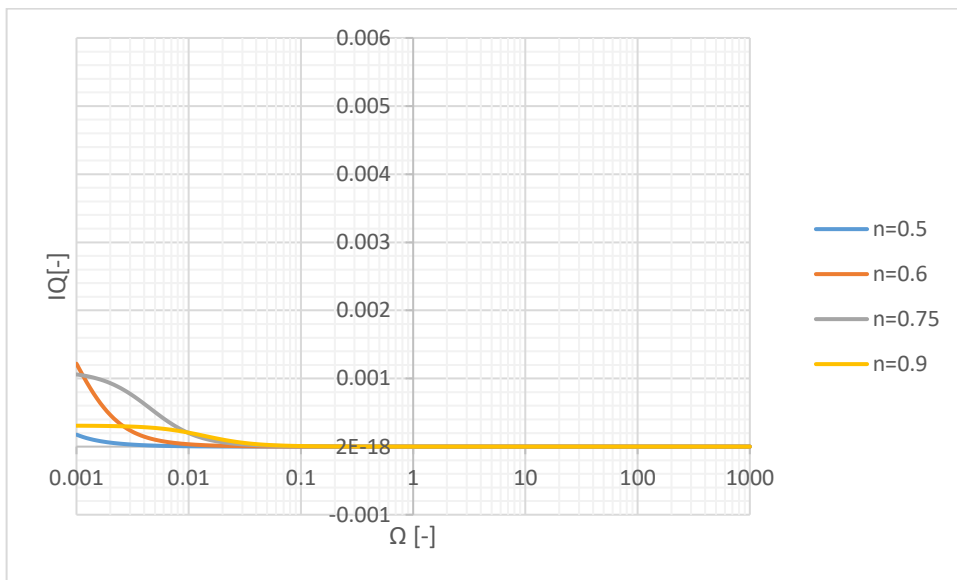


Figura 5.18: Incremento de caudal para $Re=100$ y $\varepsilon = 0.1$.

Las Fig. 5.15 a 5.18 permiten identificar dos comportamientos límites para el incremento de caudal relacionados con el valor de Ω . Cuando Ω es pequeño, es decir, la inercia del fluido es despreciable se alcanzan los mayores valores para el incremento caudal, mientras que, al tener inercia muy grande, el incremento tiende a cero.

El primer caso de tener inercia despreciable es el que obtienen Davies & Chakrabarti (1980), ya que el valor al que tiende el incremento es el mismo que obtienen estos autores, lo que es consistente con la metodología que emplean para tener este resultado, que corresponde a una perturbación sobre el flujo despreciando los efectos de la inercia.

El segundo caso, al tener Ω muy grande genera que no se observe un incremento debido a que se amortigua se vuelve despreciable y el perfil sea constante en el tiempo.

También es posible notar que a un menor valor de n se tienen mayores valores para el incremento del caudal. El efecto del número de Reynolds es notorio al observar las Fig.5.15 a 5.18, ya que un aumento de este desplaza las curvas hacia la izquierda, pero el grupo no se desplaza homogéneamente, ya que existen diferencias observables para cada n . Esto implica que un mayor número de Reynolds amortigua el incremento del caudal y la magnitud de este amortiguamiento es dependiente de n , siendo más notorio para valores pequeños de n .

5.1.4 Esfuerzo de corte en el fondo

A diferencia del caudal o velocidad media del flujo, para el cual es necesario calcular una integral, el esfuerzo de corte en el fondo requiere calcular una derivada y evaluar en un punto, lo que implica tener una expresión analítica para el esfuerzo de corte a diferencial del caudal que se calcula de manera numérica empleando la solución analítica para el campo de velocidades. La expresión para el esfuerzo de corte se determinó en el desarrollo del teórico del problema ec. (4.271):

$$\begin{aligned} \tau_o(t) = & \frac{1}{\Re e} \left((\Re e)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \mathcal{R}e \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-v}(\sigma)} \right) J_{1-v}(\sigma) e^{it} \right] \right. \\ & + \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \left(\frac{n+1}{n} (2m+1) \right) \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{J_{-v}(\sigma\sqrt{2})} \right) J_{1-v}(\sigma\sqrt{2}) - \left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) \right] \right\} \right] \right)^n + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (5.30)$$

La expresión anterior se puede evaluar directamente para analizar los efectos de los números adimensionales asociados al flujo (Ω y Reynolds), considerando que el valor de ε debe estar en el rango de validez de la expansión por lo que $\varepsilon < 1$ y considerando un fluido pseudoplástico por lo que $n < 1$.

5.1.4.1 Esfuerzo de corte en el fondo para Ω grande

De manera similar al análisis que se realizó para el caudal o velocidad media del flujo, en casos de valores extremos de Ω y Reynolds, para el caso del esfuerzo de corte en el fondo se realiza el mismo análisis. Considerando un valor para Ω grande, se determinó anteriormente que el perfil de velocidades se comporta como la solución en régimen permanente, con una variación despreciable en el tiempo, por lo que, del punto de vista del esfuerzo de corte, al tener una solución para la velocidad que no presenta variaciones en el tiempo, el esfuerzo de corte tampoco presenta variaciones en el tiempo.

Analizando la expresión para el esfuerzo de corte (ec. 5.29), el término de orden uno se encuentra dividido por Ω . Ocurriendo una situación similar a lo que ocurría con la componente de orden uno de la velocidad, por lo que, al tener un valor grande de Ω , el término de orden uno se hace pequeño y se encuentra multiplicado por ε , lo que reduce aún más su magnitud respecto al término de orden cero. Ocurre la misma situación con el término de orden dos, ambos se vuelven despreciables frente al término de orden cero.

Gráficamente (Fig. 5.19) se corrobora que el esfuerzo de corte no presenta una variación sustancial para el caso de Ω grande. Debido a la estructura del número adimensional Ω , un valor grande de este implica tener una frecuencia de la pulsación alta o mucha inercia en el fluido, por efecto de la densidad o que el gradiente de presiones constante en el tiempo es de gran magnitud. Siendo los casos anteriores los causantes de este caso límite.

Para el caso newtoniano es posible notar la presencia de la componente pulsante, debido a la que la expresión del esfuerzo de corte queda lineal para los términos de orden cero, uno y dos, mientras que en los casos pseudoplásticos, la no linealidad amortigua la ya reducida pulsación en el esfuerzo de corte por efecto del valor de Ω , cuando el valor de n se aleja de la unidad.

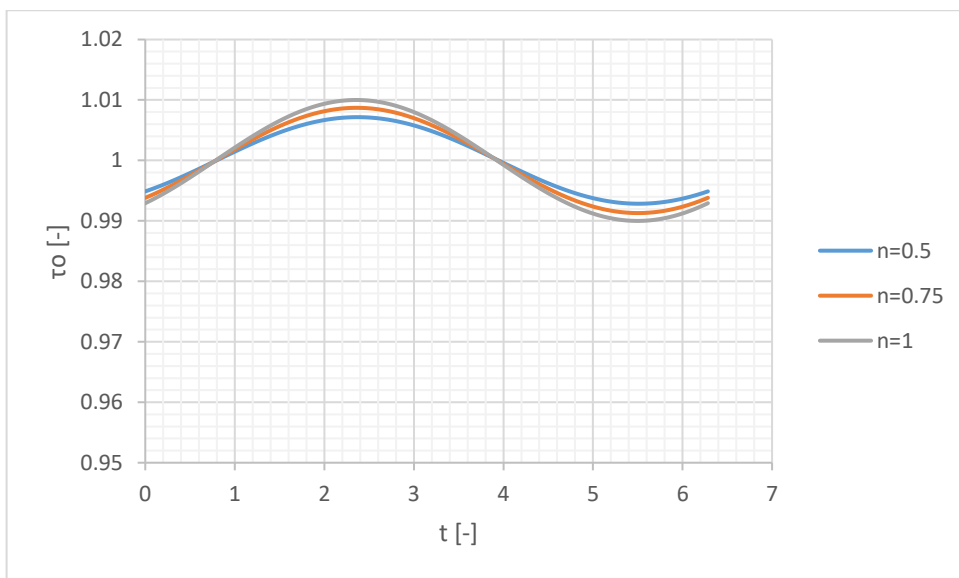


Figura 5.19: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=1$, $\Omega = 100$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.1.4.2 Esfuerzo de corte en el fondo para Ω pequeño

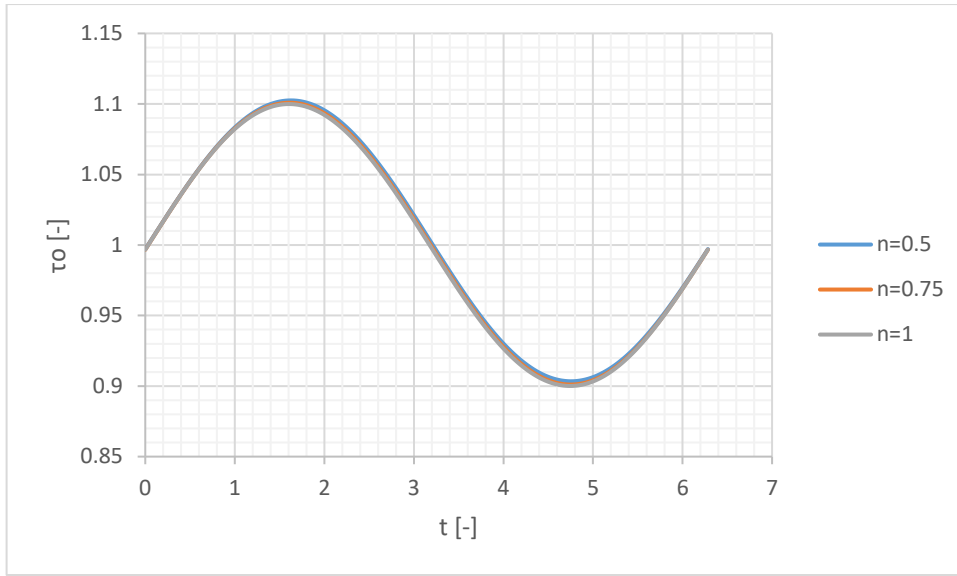


Figura 5.20: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=1$, $\Omega = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$.

De manera contraria al caso anterior y similar a lo que ocurre con la velocidad, al tener un valor de Ω pequeño, como las componentes de orden uno y dos se encuentran divididas por Ω , esto provoca que tengan un valor mayor respecto a la solución de orden cero, por lo que la pulsación se vuelve mucho más perceptible tanto en la velocidad media del flujo y el esfuerzo de corte en el fondo debido a un valor de Ω pequeño. Lo anterior se puede apreciar en la Fig.5.20.

Esto corresponde a una baja frecuencia de la pulsación o un gradiente de presiones constante más pequeño, lo que se traduce en una menor componente de inercia del fluido, representado por Ω en la ecuación de momentum.

5.1.4.3 Esfuerzo de corte en el fondo para Reynolds grande

A diferencia de lo que ocurre para la velocidad media o caudal, cuando el número de Reynolds es grande, el esfuerzo de corte no puede aumentar su magnitud debido a estar en forma adimensional, lo cual normaliza el valor del esfuerzo de corte. A pesar de esto como la componente permanente es proporcional al número de Reynolds, esta se vuelve más grande respecto a los términos de orden uno y dos de la expansión de la velocidad, por lo que el gradiente de velocidades calculado en el esfuerzo de corte pasa a depender netamente de la componente permanente:

$$\tau_o(t) \approx \frac{1}{Re} \left((Re)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)^n \approx \left[1 + \frac{n}{Re^{\frac{1}{n}}} \mathcal{O}(\epsilon) \right] \approx 1 \quad (5.31)$$

Sin embargo, en el caso newtoniano como el valor de n es igual a uno, la ecuación (4.253) cambia:

$$\tau_o(t) \approx \frac{1}{\text{Re}} (\text{Re} + \mathcal{O}(\varepsilon)) \approx \left[1 + \frac{\mathcal{O}(\varepsilon)}{\text{Re}} \right] \approx 1 \quad (5.32)$$

Si bien la solución sigue siendo cercana a uno, en el caso pseudoplástico los términos de orden uno y dos (representados por $\mathcal{O}(\varepsilon)$), se encuentran más reducidos en magnitud por el efecto de la potencia en el número de Reynolds debido al valor de $n < 1$, haciendo estos términos más pequeños para el caso pseudoplástico que en el caso newtoniano.

$$\frac{n}{\text{Re}^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{\text{Re}} \quad (5.33)$$

Esto se puede observar gráficamente (Fig.5.21 a 5.23), en el esfuerzo de corte para el caso newtoniano la pulsación es más perceptible que en los casos de fluido pseudoplástico, para los cuales el efecto de la pulsación es prácticamente despreciable.

El tener un número de Reynolds alto implica que los esfuerzos viscosos son mucho mayores que la inercia del fluido y el efecto pulsante, lo que se traduce en una amortiguación de la pulsación, teniendo un esfuerzo de corte constante en el tiempo.

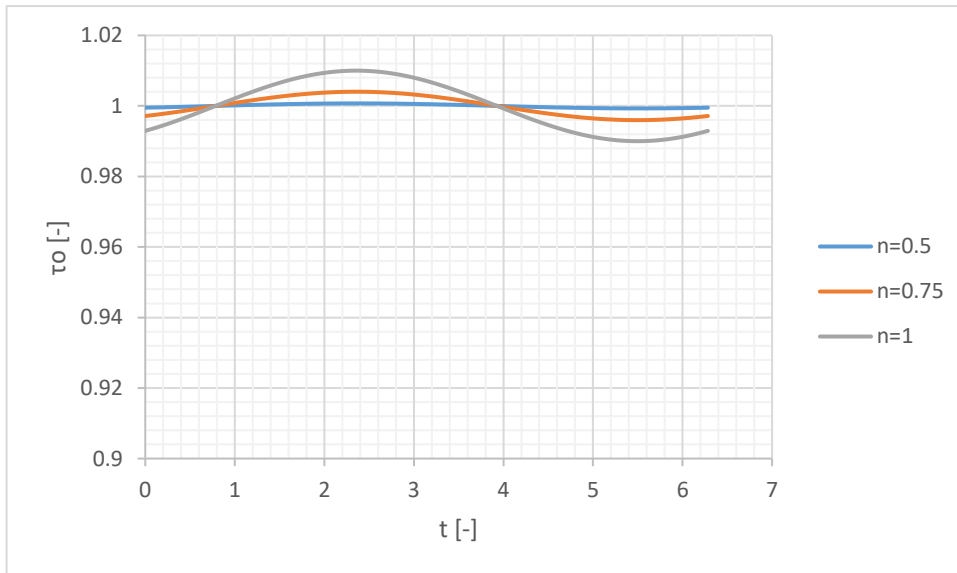


Figura 5.21: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=100$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

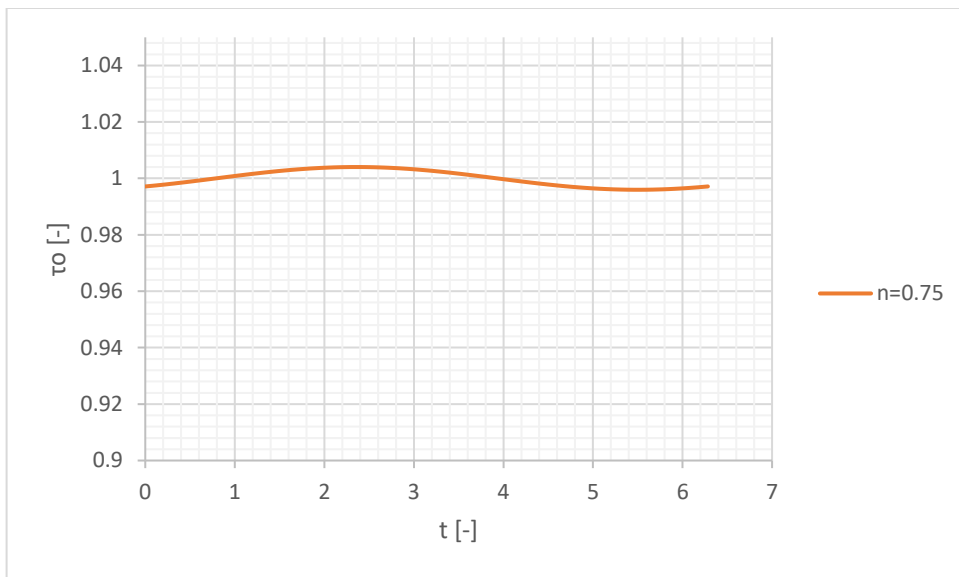


Figura 5.22: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=100$, $\Omega = 1$, $n=0.75$ y $\varepsilon = 0.1$

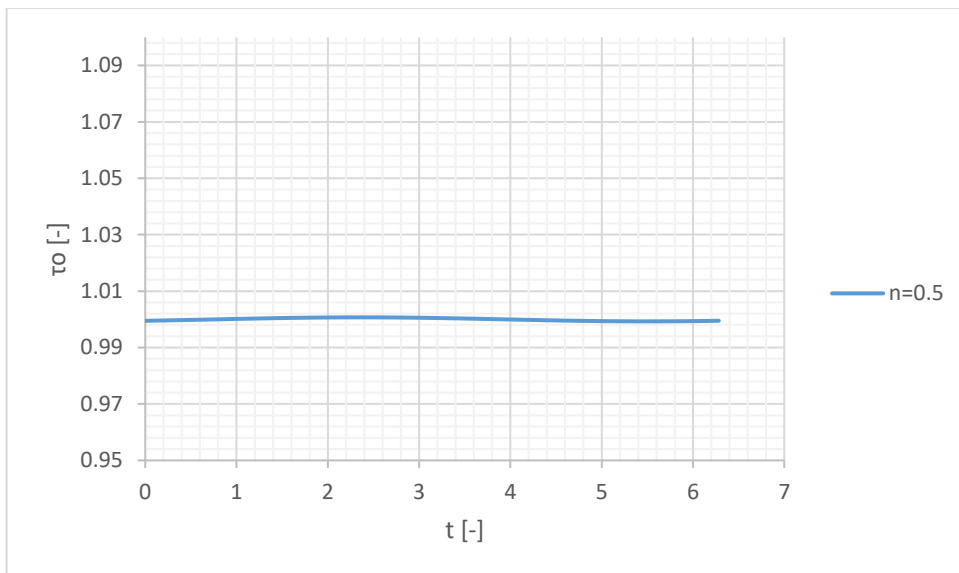


Figura 5.23: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=100$, $\Omega = 1$, $n=0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.1.4.4 Esfuerzo de corte en el fondo para Reynolds pequeño

Al tener número de Reynolds pequeño, la componente permanente del esfuerzo de corte se vuelve más pequeña, lo que hace visible la pulsación. Situación similar ocurre para la velocidad media del flujo en condiciones de número de Reynolds bajos, ya que la viscosidad del fluido permite que la pulsación provoque una oscilación visible tanto para el caso newtoniano y pseudoplástico para el esfuerzo de corte en el fondo.

$$\tau_o(t) \approx \frac{1}{\text{Re}} \left((\text{Re})^{\frac{1}{n}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)^n \approx \left[1 + \frac{n}{\text{Re}^{\frac{1}{n}}} \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \approx 1 + \frac{n}{\text{Re}^{\frac{1}{n}}} \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.34)$$

Ya que al ser Re pequeño y $n < 1$, el término que acompaña a $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\frac{n}{\text{Re}^{\frac{1}{n}}}$ no es despreciable frente a la componente permanente de orden uno, por lo que la oscilación es notoria, como se puede apreciar en la Fig.5.24 a 5.26.

Como el esfuerzo de corte se encuentra en su forma adimensional, tanto el caso newtoniano como pseudoplástico se superponen.

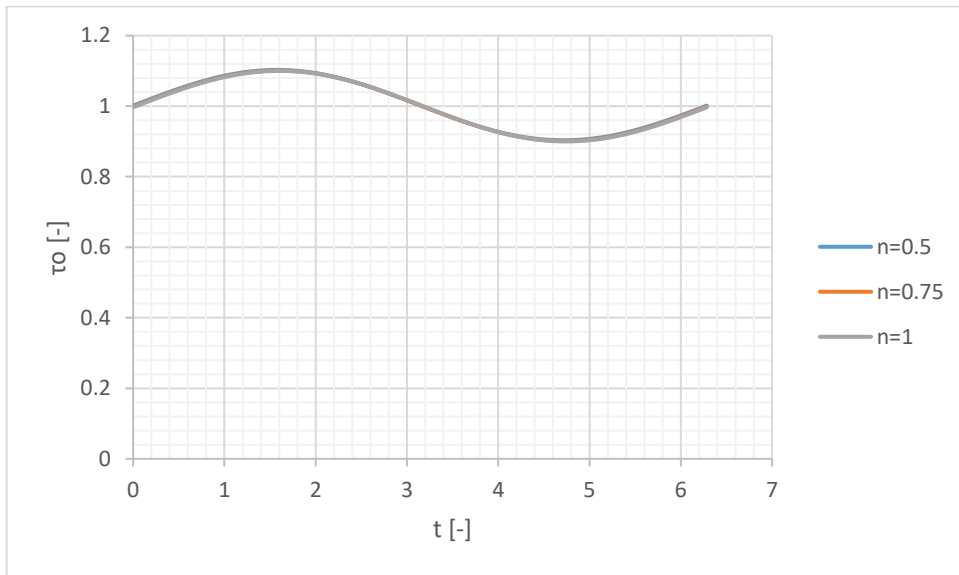


Figura 5.24: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=0.1$, $\Omega = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

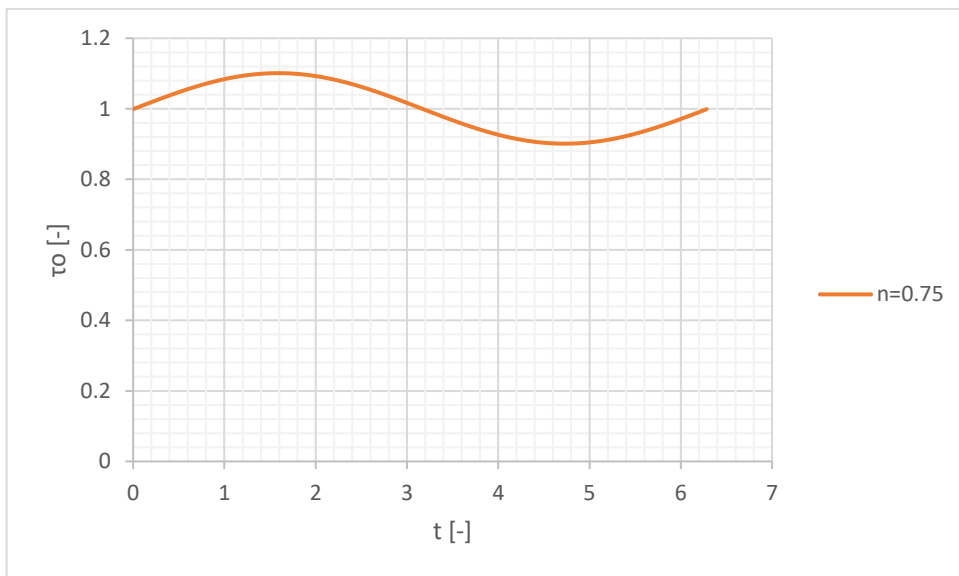


Figura 5.25: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=0.1$, $\Omega = 1$, $n=0.75$ y $\varepsilon = 0.1$.

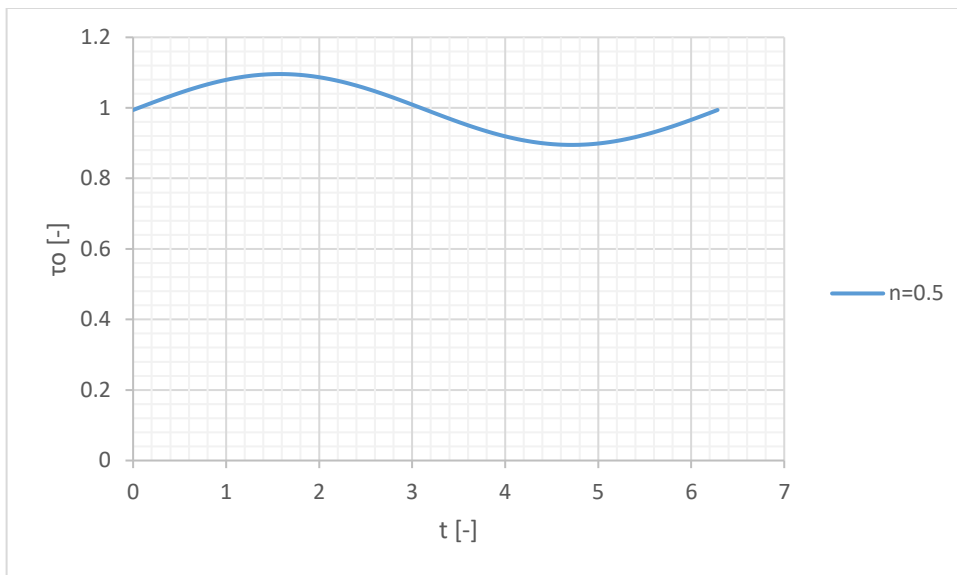


Figura 5.26: Esfuerzo de corte en el fondo, en función del tiempo para $Re=0.1$, $\Omega = 1$, $n=0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

5.1.5 Coeficiente de Dispersión

Con la ecuación obtenida en (4.324), se calcula el coeficiente de dispersión para distintos valores del número de Reynolds, Ω y n . Como la expansión en ε empleada para determinar el coeficiente de dispersión de Taylor, solo considera hasta primer orden, el valor de ε empleado para los casos es de 0.01, para asegurar que este sea pequeño y dar validez a una expansión a primer orden para la velocidad del fluido.

5.1.5.1 Efecto del número Ω

Fijando el número de Reynolds igual a uno, se presenta el coeficiente de dispersión para tres casos de n , incluyendo el caso newtoniano y cuatro valores distintos de Ω , con el fin de observar los efectos sobre el coeficiente de dispersión que tiene el número Ω .

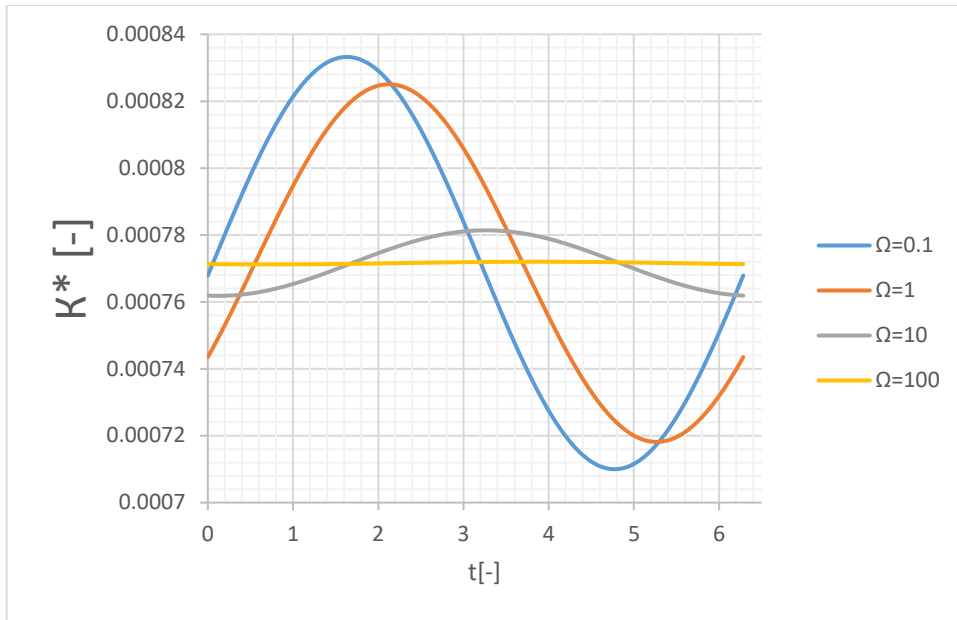


Figura 5.27: Coeficiente de Dispersión para $Re=1$, $\varepsilon = 0.1$ y $n=0.5$.

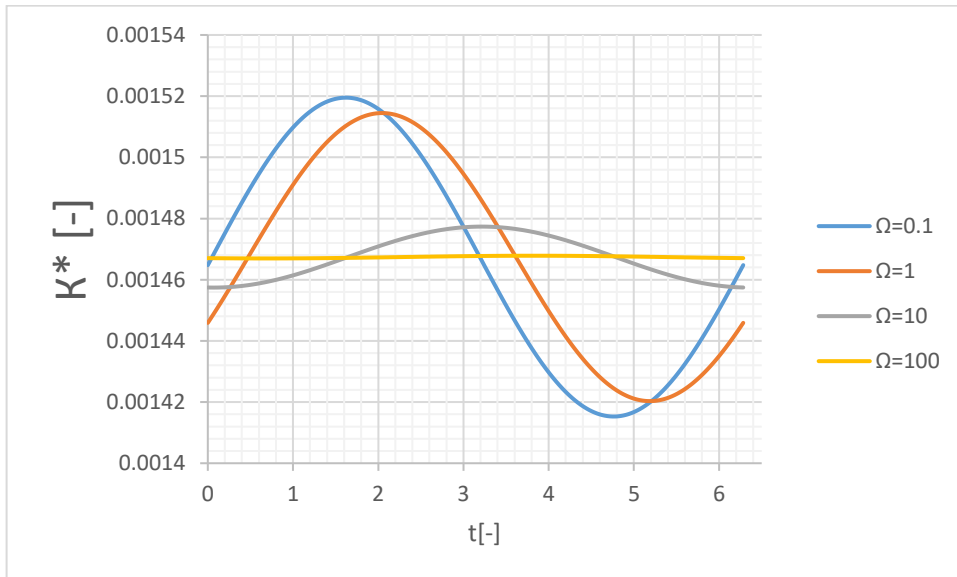


Figura 5.28: Coeficiente de Dispersión para $Re=1$, $\varepsilon = 0.1$ y $n=0.75$.

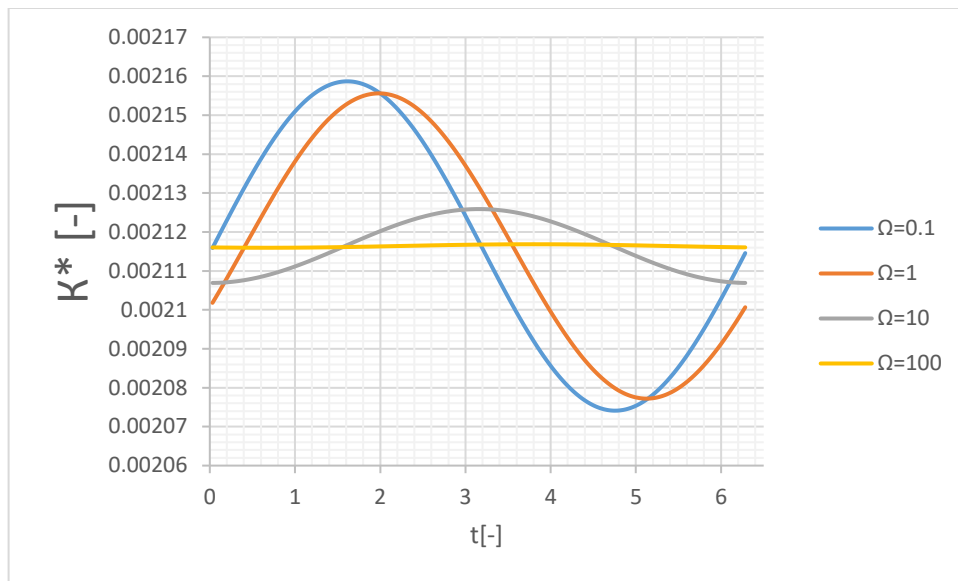


Figura 5.29: Coeficiente de Dispersión para $Re=1$, $\varepsilon = 0.1$ y $n=1$

Tanto en las Figuras 5.27, 5.28 y 5.29 se observa el mismo comportamiento para un aumento del número Ω . Como se ha mencionado anteriormente, Ω se encuentra relacionado con la componente inercial del fluido, la que al ser grande (lo que se traduce en mayores valores para Ω) amortigua los efectos de las pulsaciones, comportamiento que ya fue observada en el caso del caudal como del esfuerzo de corte en el fondo.

Como la dispersión está intrínsecamente ligada a las diferencias que presenta el perfil de velocidad con respecto a la velocidad media en la vertical, al tener un pulsación poco notoria frente a la componente permanente, esto también se traduce en un aumento menor del coeficiente de dispersión. Esto se puede notar en la expresión obtenida en la ecuación (4.324), donde la componente impermanente de la dispersión está dividida por Ω . Al igual que para el caudal (o velocidad media) y el esfuerzo de corte, un valor de Ω muy grande vuelve imperceptible la oscilación respecto a la solución en régimen permanente.

Otro efecto que provoca tener mayores valores de Ω (o mayor inercia) son apreciables en la fase de la oscilación entorno al régimen permanente, debido a la pulsación, al tener mayor Ω , la oscilación se vuelve más tardía, por tener una componente inercial mayor para el fluido. Esto aparece en la componente σ de la solución para la componente impermanente de la velocidad, lo que se transmite a la dispersión.

5.1.5.2 Efecto del número de Reynolds

De la ecuación (4.324) se obtiene que la componente permanente del coeficiente de dispersión es proporcional a $Re^{\frac{2}{n}}$, por lo que se tiene un aumento del coeficiente de dispersión si aumenta el valor del número de Reynolds, siendo importante el efecto del valor de n , como este se encuentra entre cero y uno, la potencia del número del Reynolds aumenta si n es pequeño. Esto se traduce en que el aumento de la dispersión desde un Reynolds pequeño a uno grande, es mayor mientras más pequeño es el valor de n . Esto es posible apreciarlo en las Figuras 5.30, 5.31 y 5.32. Para un $n = 0.5$, al variar el Reynolds de 0.1 a 100, la dispersión aumenta en 12 órdenes de magnitud aproximadamente, mientras que al tomar $n = 0.75$, la dispersión aumenta en 7 órdenes de magnitud.

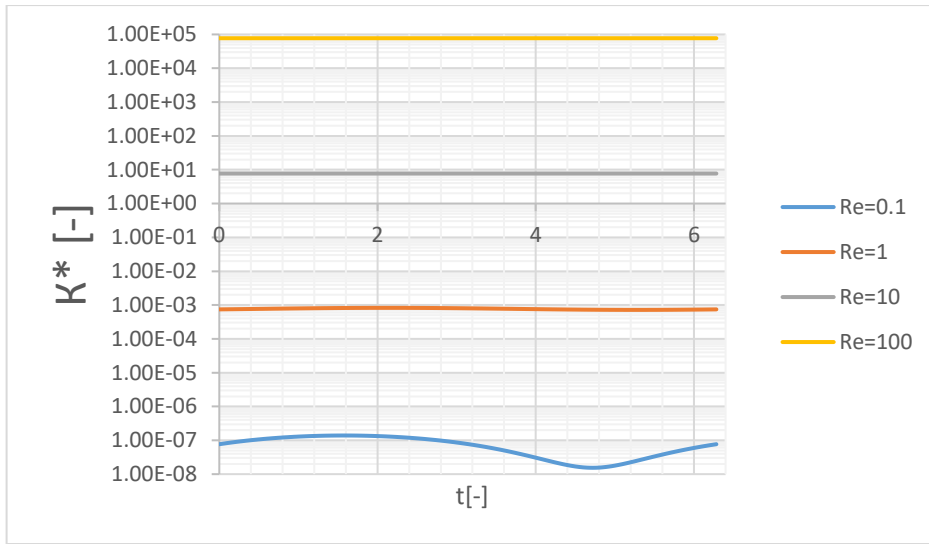


Figura 5.30: Coeficiente de Dispersión para distintos números de Reynolds, con $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$ y $n=0.5$

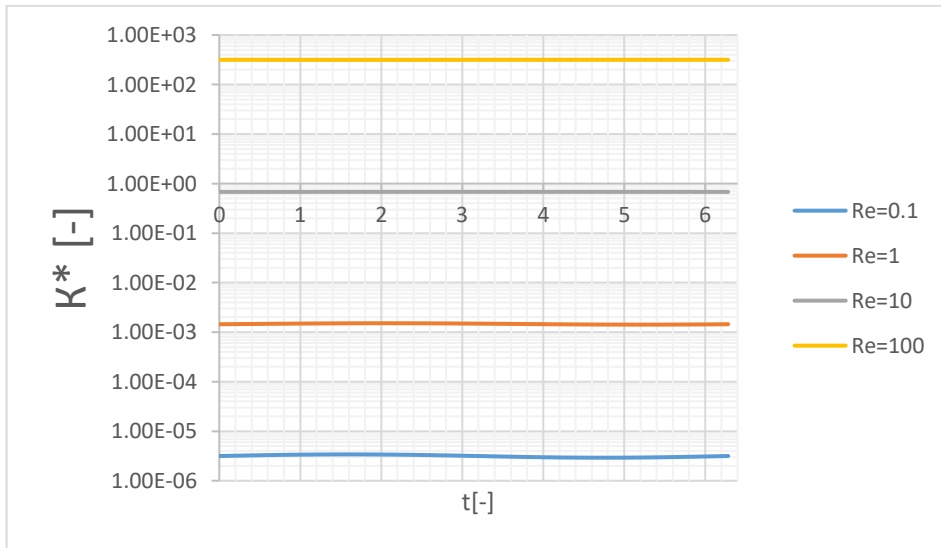


Figura 5.31: Coeficiente de Dispersión para distintos números de Reynolds, con $\Omega = 1$, $\varepsilon = 0.01$ y $n=0.75$

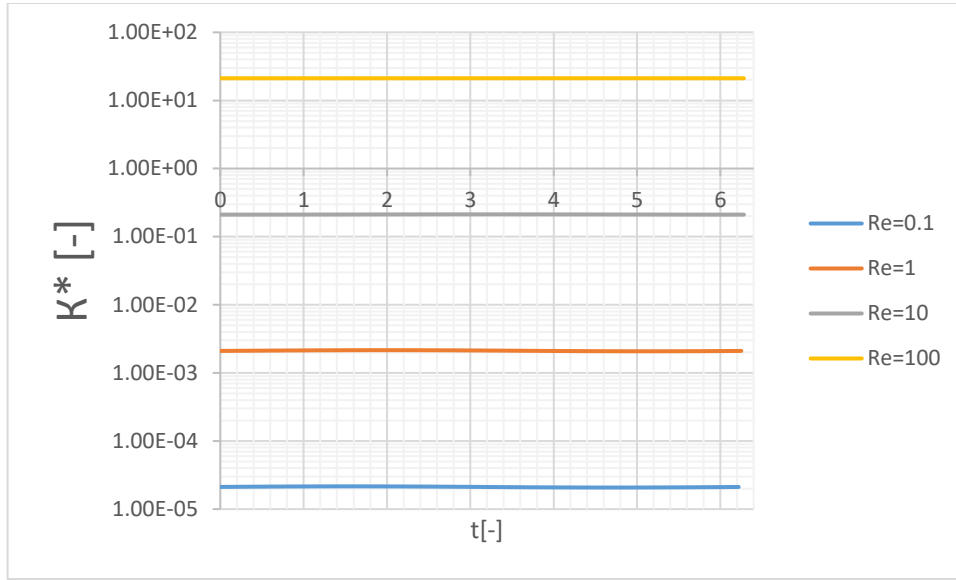


Figura 5.32: Coeficiente de Dispersión para distintos números de Reynolds, con $\Omega = 1$ y $n=1$.

Debido a los bajos valores que toma la componente permanente del coeficiente de dispersión cuando el Reynolds es pequeño, efecto que se ve incrementado si el valor de n es pequeño también, la parte oscilatoria de la dispersión se vuelve apreciable frente a la componente permanente, esto es apreciable al comparar los coeficientes para un número de Reynolds igual a 0.1, la oscilación es mucho más notoria respecto a la componente permanente en el caso de $n = 0.5$.

5.1.5.3 Incremento de la dispersión

Como se dedujo en la sección 4.2.6.2, existe un valor constante para la dispersión debido al término de segundo orden en la velocidad, al igual que la situación para el caudal, se tiene un incremento de la dispersión fijo por efecto del término de segundo orden de la velocidad, que solo se produce en el caso no-Newtoniano. De la expresión en la ec. (4.361) para la dispersión media en el tiempo:

$$\overline{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{R}e)^{\frac{2}{n}} \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} + \varepsilon^2 \left(\mathbb{R}e^{\frac{1}{n}} \frac{2n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \right) + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (5.35)$$

Separando en ordenes de ε :

$$\overline{\mathcal{K}^*} = \mathcal{K}_0^* + \varepsilon^2 \mathcal{K}_{20}^* + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (5.36)$$

Como la dispersión a orden cero:

$$\mathcal{K}_0^* = \frac{2n^4 \text{Re}^{\frac{2}{n}}}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} \quad (5.37)$$

Se define el incremento de la dispersión como:

$$I_{\mathcal{K}} = \frac{\mathcal{K}_{20}^*}{\mathcal{K}_0^*} = \varepsilon^2 \left[\frac{(n+1)(2n+1)(5n+2)}{n (\text{Re})^{\frac{1}{n}}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \quad (5.38)$$

De manera que:

$$\overline{\mathcal{K}}^* = \mathcal{K}_0^*(1 + I_{\mathcal{K}}) + \vartheta(\varepsilon^3) \quad (5.39)$$

De igual manera que en el caso del incremento del caudal, se puede ver la dependencia que existe para el incremento tanto respecto al número de Reynolds y Ω .

Para determinar el efecto del número de Reynolds sobre el coeficiente de dispersión se calcula el valor de este para un serie de valores de Ω y n con Reynolds fijo en cada caso, como se muestra en las Fig. 5.33 a 5.36:

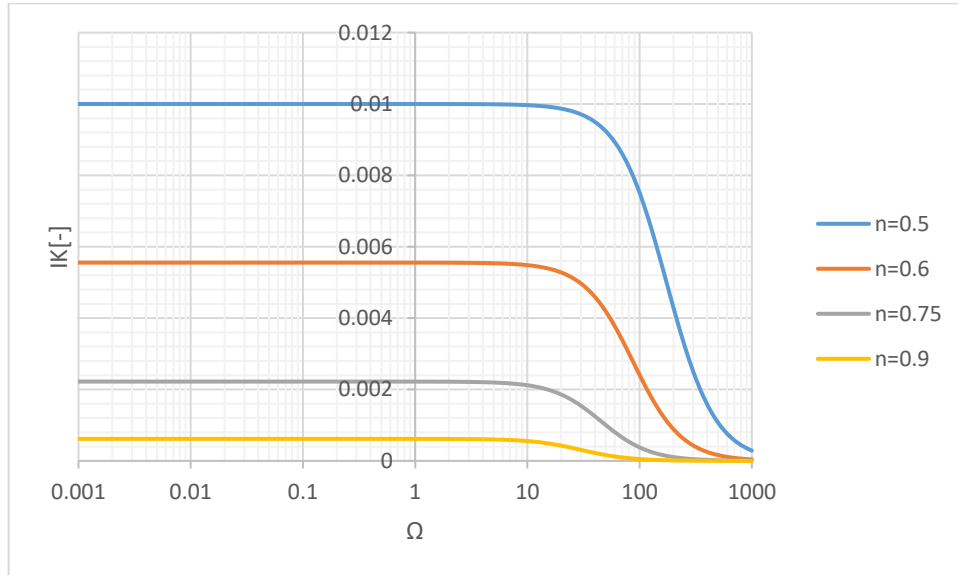


Figura 5.33: Incremento de la dispersión para distintos n y Ω con $\varepsilon = 0.1$ y $Re=0.1$

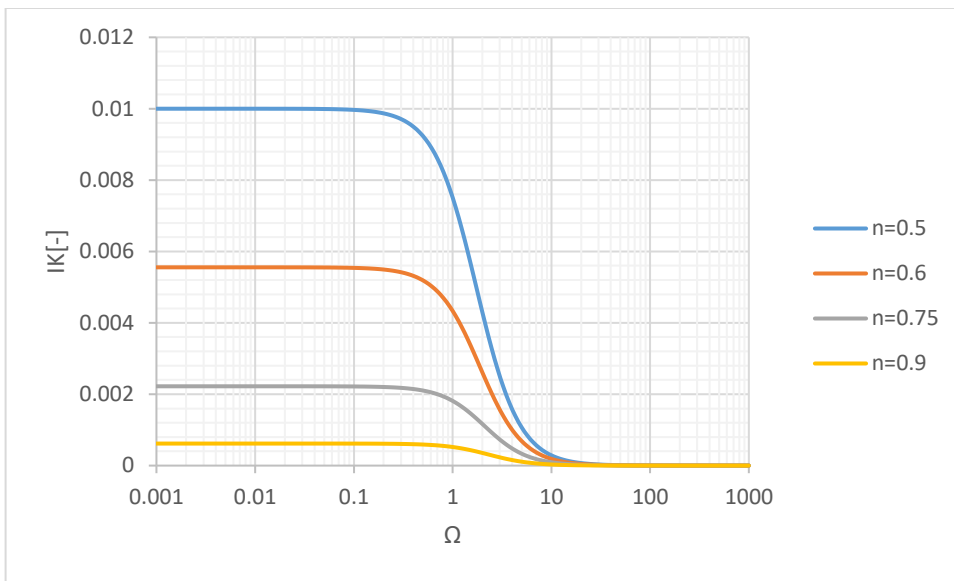


Figura 5.34: Incremento de la dispersión para distintos n y Ω con $\varepsilon = 0.1$ y $Re=1$

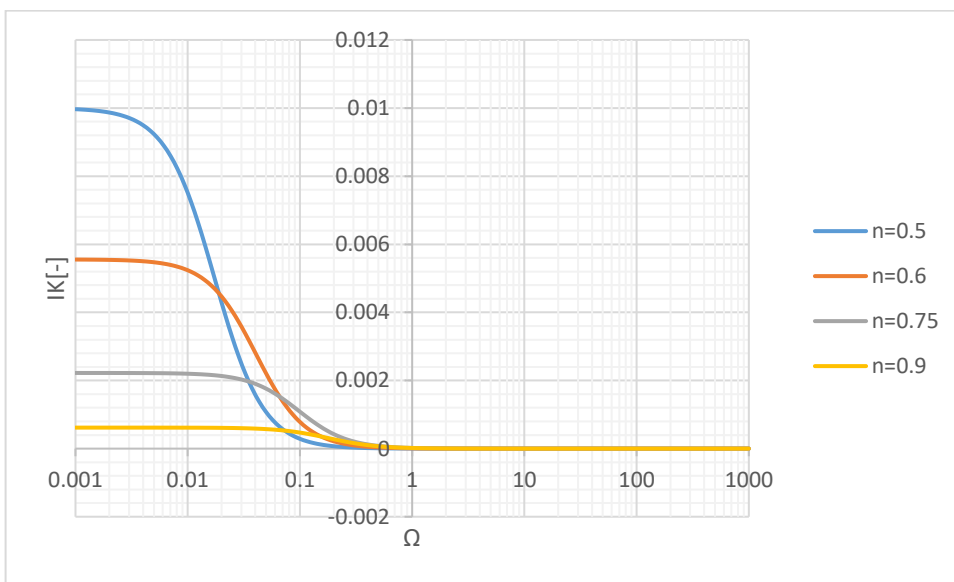


Figura 5.35: Incremento de la dispersión para distintos n y Ω con $\varepsilon = 0.1$ y $Re=10$

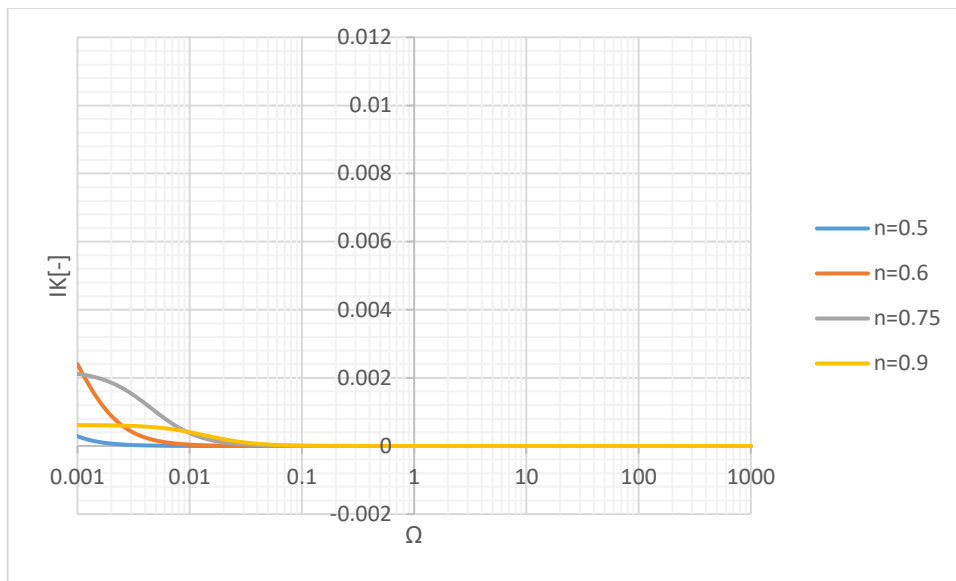


Figura 5.36: Incremento de la dispersión para distintos n y Ω con $\varepsilon = 0.1$ y $Re=100$.

La Fig. 5.34 muestra que los valores mayores para el incremento se obtienen para n que se alejan de la unidad, es decir, $n = 0.5$ presenta un incremento mayor que $n = 0.9$ y estos se ubican en el lado izquierdo, que corresponde al caso donde Ω se vuelve pequeño.

Es posible observar dos comportamientos límites para el valor del incremento respecto a Ω independientes del valor de n . Cuando Ω es pequeño, que equivale a tener inercia despreciable, se alcanzan los valores mayores para el incremento, mientras que al tener valores grandes de Ω , debido a la inercia del fluido, se pierde el incremento de la dispersión y las curvas tienden a cero. El número de Reynolds amplifica o amortigua donde se observan estos casos límites.

Con los resultados presentados en las Fig. 5.33 a 5.36, se puede notar que el aumento del número de Reynolds desplaza las curvas hacia la izquierda, es decir, amortigua el incremento de la dispersión para un Ω fijo.

Este desplazamiento por efecto de variar el número de Reynolds, si bien mantiene la estructura de la curva para el incremento de la dispersión, también tiene relación con el valor de n . De las Fig. 5.34 y 5.35, es posible notar que el desplazamiento hacia la izquierda de las curvas es mayor para los valores de n más pequeños al aumentar el número de Reynolds, por lo que ambos parámetros controlan este comportamiento de la curva asociada al incremento de la dispersión.

5.2 Discusión y conclusiones

Para el problema de determinar el campo de velocidades adimensional para un flujo pulsante, dada la reología tipo ley de potencia, los resultados son satisfactorios, ya que no solo fue posible aplicar la metodología empleada por Daprà & Scarpi (2006) para determinar el campo de velocidades por medio una expansión a primer orden, para el caso de placas paralelas, agregando un método para obtener una solución de segundo orden, que permite tener una solución aún más refinada.

La solución analítica presenta resultados muy similares a los numéricos para el rango de validez de la solución analítica respecto a ε , si este parámetro no corresponde a un valor pequeño, la solución analítica entrega resultados inconsistentes con los resultados numéricos por lo que es importante tener en consideración esta restricción al momento de emplear la solución analítica. Esto presenta como futuro trabajo, obtener soluciones analíticas para otras geometrías o para la condición de un gradiente de presión oscilatorio.

Al tener una expresión analítica para la velocidad con buena concordancia con los resultados numéricos para el orden de la expansión empleada, es posible obtener tanto el esfuerzo de corte tanto en el fluido como en el borde de forma analítica, lo que permite realizar una análisis del comportamiento de ambas variables y dependencia con los parámetros del fluido que presentan.

En el caso del caudal, si bien se tienen expresiones para las componentes de la velocidad desde orden cero a orden dos, calcular el caudal analíticamente para orden dos, en la componente impermanente se vuelve complejo debido a la forma de la solución obtenida, por lo que fue necesario obtener el caudal por medio de una integración numérica. Sin embargo, para la componente permanente de orden dos de la velocidad, es posible calcular el caudal asociado y por ende el incremento que se genera debido a la reología del fluido, entregando una expresión que mejora el resultado presentando por Davies y Chakrabarthy (1980), ya que en este caso se toman en consideración los efectos que tiene la inercia del fluido debido a la pulsación, donde es posible identificar dos comportamientos extremos según el valor de Ω .

Cuando Ω es pequeño se recupera el resultado de los autores mencionados anteriormente debido a tener inercia despreciable en el fluido. Al tener valores grandes de Ω el incremento tiende a cero ya que esto implica perder el efecto pulsante en el fluido que es lo que genera el incremento para el caso no-Newtoniano. El número de Reynolds afecta el incremento de caudal, amortiguando el incremento de caudal cuando Reynolds es grande. De igual forma el valor de n controla la magnitud del incremento, obteniéndose los valores máximos de este al tener valores menores de n . El amortiguamiento que genera el aumento en el número de Reynolds también se relaciona con n , obteniéndose un amortiguamiento mayor al tener valores más pequeños de n .

Debido a la complejidad de integrar la parte impermanente de la componente de segundo orden de la velocidad, determinar el coeficiente de dispersión de Taylor para segundo orden se vuelve complejo, sin embargo, es posible tener una expresión a primer orden, donde es posible notar los efectos que tienen los parámetros del fluidos, además de la pulsación, sobre la dispersión.

Es relevante el factor que juegan los adimensionales Ω y el número de Reynolds, afectando el comportamiento tanto del esfuerzo de corte en el fondo, el caudal y la dispersión.

Valores elevados de Ω , lo que se atribuye a gran inercia del fluido o bien, frecuencia elevadas, generan que las pulsaciones se vean atenuadas frente a los valores medios tanto de la velocidad media, caudal, esfuerzo de corte y dispersión. A su vez, valores pequeños de Ω permiten que las pulsaciones se vuelvan notorias frente a los valores medios de la velocidad, esfuerzo de corte y dispersión, ya que la inercia del fluido es menor o una frecuencia de las pulsaciones más pequeña permite a la reología del fluido ajustarse de manera más suave y lenta al cambio en el gradiente de presiones. Es importante notar que el adimensional Ω no afecta la solución de orden cero de la velocidad.

A diferencia de Ω , el número de Reynolds (para la reología ley de potencias) tiene efectos distintos entre el caudal, el esfuerzo de corte y dispersión, debido a como estos parámetros del flujo dependen de este adimensional. Además, número de Reynolds afecta la solución de orden cero.

En el caso del caudal, valores grandes del número de Reynolds (poca viscosidad) afectan tanto la solución de orden cero, haciendo que su valor crezca con especial dependencia del índice n , donde menores valores de n entregan caudal mayor. Debido a la dependencia de las soluciones de orden cero, uno y dos con respecto al número de Reynolds, al ser este grande, la componente de orden cero se vuelve mucho más grande que las componentes de orden superior que muestran los efectos de las pulsaciones de presión ya que el elevado número de Reynolds está asociado a la presión motriz que genera el flujo, la que al ser más grande implica que los efectos de las pulsaciones se vean reducidos.

Para un número de Reynolds pequeño, se tiene el efecto inverso, la componente de orden cero reduce su magnitud, haciendo las componentes de orden uno y dos apreciables (y por ende las pulsaciones), apreciables frente a esta. De igual forma, el índice n juega un rol importante ya que amortigua la amplitud de las oscilaciones por el efecto no lineal de la reología, teniéndose pulsaciones de mayor amplitud en el caudal cuando el índice n es cercano a uno, que corresponde al caso newtoniano.

Para el esfuerzo de corte de fondo, cuando se tienen valores del número de Reynolds altos, como la componente de orden cero se vuelve mucho más grande, el esfuerzo que se observa no presenta variaciones en el tiempo debido a la importancia de la componente permanente de orden cero. Al tener valores del número de Reynolds pequeños, el efecto de las pulsaciones se vuelve apreciable frente a la solución de orden cero, debido a la reducción en la magnitud de la solución de orden cero.

A diferencia del caudal, el esfuerzo de corte se equilibra con otras componentes de en la ecuación de momentum, las cuales no dependen de la reología del fluido (para la forma adimensional), por lo que no existe un efecto del índice n como en el caudal, por lo que los resultados adimensionales para distinto n no son distinguibles entre sí para el esfuerzo de corte adimensional.

Debido a la forma adimensional de la dispersión y los promedios en la vertical que implica el cálculo del coeficiente de dispersión sobre la velocidad, el coeficiente de

dispersión, que consta de una componente de orden cero y de primer orden, puede tenerse que la solución de primer orden supere a la solución de orden cero, haciendo la dispersión negativa cuando Ω es muy pequeño y Reynolds pequeño, situación que no se ve reflejada en el perfil de velocidad. Esto se debe a que Ω solo afecta la componente de primer orden, teniendo para valores pequeños de Ω , una pulsación perceptible frente a la componente permanente, mientras que valores muy grandes Ω amortiguan el efecto de la pulsación, teniéndose los mismo efectos que se han mencionado anteriormente para el caudal o el esfuerzo de corte de fondo.

Los efectos del valor del número de Reynolds y el índice n son aún más notorios para el coeficiente de dispersión ya que se está multiplicando la velocidad por sí misma y promediando en la vertical de manera sucesiva, con lo que se tiene el efecto de la magnitud del número de Reynolds, sobre todo en el término de primer orden ya que el número de Reynolds se eleva a $2/n$. Se tienen valores muy pequeños del coeficiente dispersión para Reynolds bajo y valores altos del coeficiente para Reynolds alto, afectado por el valor de n de manera inversa por la potencia $2/n$.

Los efectos anteriores del número Ω y Reynolds tienen que ver con la curvatura del perfil de velocidad y su velocidad máxima, ya que el fenómeno de dispersión corresponde a la deformación que provoca el perfil de velocidad sobre la sustancia que se va a transportar. Es importante recalcar que el coeficiente de dispersión tiene forma adimensional y no se usó la velocidad media del fluido para realizar el análisis, por lo que tanto el efecto del valor de la velocidad media no aparece en el coeficiente de dispersión (algo que es común para los valores del coeficiente de dispersión con dimensiones presentado en la literatura), de igual manera, tampoco aparece la difusión molecular asociada a la sustancia que se encuentra sometida al transporte.

El análisis anterior realizado para la dispersión a primer orden muestra que durante una pulsación, el coeficiente de dispersión tiene un valor medio en el tiempo igual que al no tener la pulsación en el gradiente de presiones, sin embargo, un análisis empleando la solución de segundo orden para la velocidad en el cálculo del coeficiente de dispersión para el valor medio en el tiempo, muestra que debido al término permanente en la solución de segundo orden, el valor medio de la dispersión en el tiempo es mayor que el coeficiente de dispersión en régimen permanente (se tiene un incremento, al igual que en el caudal), debido a la reología del fluido, ya que la dispersión esta intrínsecamente ligada con el gradiente del campo de velocidades para producir transporte.

Debido a este resultado para segundo orden, se tiene una limitación para la validez del resultado a primer orden del coeficiente de dispersión, ya que se desprecia el efecto de segundo orden sobre la dispersión neta en un ciclo.

Es posible analizar el efecto que tiene el término de segundo orden sobre la dispersión, donde se obtiene una situación similar a lo que ocurre en el caudal. Existe un incremento de la dispersión por efecto del término de segundo orden y este valor es constante en el tiempo. El comportamiento de este incremento para la dispersión es el mismo que para el incremento de caudal, teniéndose dos comportamientos límites según el valor de Ω , mayores magnitudes del incremento de la dispersión a menores valores de n y el efecto de amortiguación que genera tener valores más grandes del número de Reynolds, efecto que también esta se ve acentuado a valores menores de n , siguiendo el mismo comportamiento que el incremento de caudal.

CAPÍTULO 6: Celeridad de formas de fondo

6.1 Desarrollo teórico para la celeridad de las ondas de formas de fondo bajo flujos de un fluido pseudoplástico

6.1.1 Ecuaciones Fundamentales

Para un flujo bidimensional en un canal con superficie libre con altura $h(x, t)$ y velocidad media $u(x, t)$, con un lecho en el canal de altura $\eta(x, t)$, donde el flujo de fluido se produce en la dirección del eje x , pudiendo producir transporte de sedimentos en la misma dirección, se tiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

Ecuación de continuidad del fluido:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

Ecuación de momentum del fluido (Ec. de Saint-Venant en una dimensión):

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta u^2 h)}{\partial x} = -gh \frac{\partial(h + \eta)}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \quad (6.2)$$

Donde β es el coeficiente de Boussinesq, ρ la densidad del fluido y τ es el esfuerzo de corte sobre el lecho, el cual es una función de la velocidad $u(x, t)$ y la altura $h(x, t)$ y depende de la reología del fluido, $\eta(x, t)$ corresponde a la cota del lecho.

Ecuación de continuidad en el lecho (Ec. de Exner sin depositación ni resuspensión)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1 - \lambda_p} \frac{\partial q_s(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (6.3)$$

Donde $q_s(x, t)$ es el gasto sólido por unidad de ancho del lecho y λ_p es la porosidad del lecho, la cual se supone constante.

Llamando al término $\frac{q_s(x, t)}{1 - \lambda_p} = g_s(x, t)$, la ecuación de Exner (ec. 6.3) se puede reducir:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial g_s(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

6.1.2 Ecuaciones y números dimensionales asociados

Definiendo las escalas asociadas a la vertical H , velocidad U , esfuerzo de corte S y gasto sólido G , además de las escalas asociadas a la variable espacial L y temporal como T , se forman las variables adimensionales identificadas con primas ($'$):

$$h = Hh' ; u = Uu' ; x = Lx' ; t = T t' ; g_s = g'_s G ; \eta = H\eta' , \frac{\tau}{\rho} = S \frac{\tau'}{\rho'} \quad (6.5)$$

La cota del fondo η , se escala con la escala de altura del fluido H :

$$\eta = H\eta' \quad (6.6)$$

Remplazando (6.5) y (6.6) en el sistema de ecuaciones dado por (6.7), (6.8) y (6.9):

$$\frac{L}{TU} \frac{\partial h'}{\partial t'} + h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + u' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{L}{TU} \frac{U^2}{gH} \left(h' \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial h'}{\partial t'} \right) + \frac{U^2}{gH} \left(2\beta u' h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta u'^2 \frac{\partial h'}{\partial x'} \right) + h' \frac{\partial h'}{\partial x'} + h' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = - \frac{SL}{gH^2} \frac{\tau'}{\rho'} \quad (6.8)$$

$$\frac{L}{TU} \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{G}{UH} g'_{su} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{G}{UH} g'_{sh} \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (6.9)$$

Con $g'_{su} = \frac{\partial g_s'}{\partial u}$ y $g'_{sh} = \frac{\partial g_s'}{\partial h}$.

Con las ecuaciones anteriores se definen los adimensionales del sistema de ecuaciones:

$$\frac{L}{TU} = \Pi_1 \quad (6.10)$$

$$\frac{U^2}{gH} = \Pi_2 \quad (6.11)$$

$$\frac{G}{UH} = \Pi_3 \quad (6.12)$$

$$\frac{SL}{gH^2} = \Pi_4 \quad (6.13)$$

El primer adimensional corresponde a la relación entre la escala de distancia longitudinal, con las escalas de tiempo y velocidad del flujo.

El segundo número adimensional corresponde al cuadrado del número de Froude, que relaciona la inercia del flujo con la fuerza motriz debido a la gravedad:

$$\frac{U^2}{gH} = \text{Fr}^2 \quad (6.14)$$

El tercer número adimensional corresponde a la razón entre los dos caudales presentes en el sistema, el sólido y el caudal líquido.

$$\frac{G}{UH} = \Pi_3 = \mathbb{M} \quad (6.15)$$

Utilizando la definición del factor de fricción de Darcy:

$$\frac{f}{8} = \frac{\tau}{\rho u^2} \quad (6.16)$$

El cuarto adimensional es la razón entre la fuerza resistiva que se opone al movimiento del fluido y la fuerza motriz debido a la gravedad. Luego, Π_4 puede expresarse en términos del factor de fricción, el número de Froude y la razón de aspecto de las escalas geométricas, definidas como $\mathbb{D} = \frac{H}{L}$.

$$\frac{SL}{gH^2} = \frac{S}{U^2} \frac{U^2}{gH} \frac{L}{H} = \frac{f}{8} \frac{\text{Fr}^2}{\mathbb{D}} = \Pi_4 \quad (6.17)$$

El sistema de ecuaciones de manera adimensional queda:

Ec. de Momentum:

$$\Pi_1 \text{Fr}^2 h' \frac{\partial u'}{\partial t'} + \Pi_1 \text{Fr}^2 u' \frac{\partial h'}{\partial t'} + \text{Fr}^2 2\beta u' h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + (\text{Fr}^2 \beta u'^2 + h') \frac{\partial h'}{\partial x'} + h' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = -\frac{f}{8} \frac{\text{Fr}^2}{\mathbb{D}} \frac{\tau'}{\rho'} \quad (6.18)$$

Ec. de continuidad del fluido:

$$\Pi_1 \frac{\partial h'}{\partial t'} + h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + u' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (6.19)$$

Ec. de continuidad del lecho:

$$\Pi_1 \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \mathbb{M} g'_{su} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \mathbb{M} g'_{sh} \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (6.20)$$

6.1.3 Representación matricial y ecuación para la celeridad de las ondas

Para representar las ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.20) como un sistema matricial, se definen las matrices:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u' \\ h' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{f \text{Fr}^2 \tau'}{8 \mathbb{D} \rho'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{Fr}^2 2\beta u' h' & \text{Fr}^2 \beta u'^2 + h' & h' \\ h' & u' & 0 \\ \mathbb{M} g'_{su} & \mathbb{M} g'_{sh} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$$B = \begin{pmatrix} \Pi_1 \text{Fr}^2 h' & \Pi_1 \text{Fr}^2 u' & 0 \\ 0 & \Pi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Luego el sistema de ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.20) se representa de manera matricial como:

$$A \frac{\partial \vec{V}}{\partial x'} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t'} = \vec{E} \quad (6.25)$$

Para obtener la celeridad de las ondas asociadas a cada variable del sistema de ecuaciones se emplea el método de los valores propios sobre una representación matricial del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, método que emplean Gradowczyk (1967) para deducir las ondas a primer orden y Chaudhry (1979) para determinar la celeridad de las ondas para el flujo turbulento en presión en condiciones de fluido compresible y tubería deformable.

Para esto, se calculan los valores propios de la representación matricial como:

$$\det|A - sB| = 0 \quad (6.26)$$

Donde s es la celeridad adimensional de la onda asociada a cada variable del sistema. Como el sistema es de 3x3, deben existir tres valores propios, donde cada uno es la celeridad de la perturbación respectiva a cada una de las variables. Desarrollando el determinante se obtiene un polinomio de orden tres para s :

$$0 = s^3 \Pi_1^3 \text{Fr}^2 - s^2 \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' - s \left(\mathbb{M} \Pi_1 g'_{su} + \Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2) \right) - \mathbb{M} (g'_{sh} h' - g'_{su} u') \quad (6.27)$$

Si bien la fórmula para la solución de una ecuación cúbica existe, debido a su complejidad, aplicarla directamente a este problema resulta complejo. Usando una aproximación por medio de una expansión en series es posible si se tienen las condiciones adecuadas.

6.1.4 Celeridad de ondas por medio de una expansión a primer orden

Considerando el adimensional \mathbb{M} , es posible suponer que este número es pequeño, lo que equivale a que el caudal de fluido es mucho más grande en magnitud que el gasto sólido (ajustado por la porosidad), situación que se presenta en la práctica.

Si \mathbb{M} es pequeño, de manera que $\mathbb{M} \ll 1$, es posible expandir la celeridad adimensional de las ondas en función de \mathbb{M} , siendo la expansión a primer orden de s :

$$s = s_0 + \mathbb{M} s_1 + \vartheta(\mathbb{M}^2) \quad (6.28)$$

Usando esta expansión en la ecuación (6.28) y ordenando los términos según el orden de \mathbb{M} . Usando expansiones de Taylor en los términos polinomiales de s con la expansión de primer orden:

$$s^3 = (s_o + M s_1 + \vartheta(M^2))^3 = s_o^3 + 3s_o^2 s_1 M + \vartheta(M^2) \quad (6.29)$$

$$s^2 = (s_o + M s_1 + \vartheta(M^2))^2 = s_o^2 + 2s_o s_1 M + \vartheta(M^2) \quad (6.30)$$

Remplazando en (6.28):

$$\begin{aligned} 0 = & s_o^3 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 + 3s_o^2 s_1 M \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - s_o^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - 2s_o s_1 M \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' \\ & - s_o \left(M \Pi_1 g'_{su} + \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) \right) \\ & - s_1 M \left(M \Pi_1 g'_{su} + \Pi_1 (h - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) \right) - M (g'_{sh} h' - g'_{su} u') \end{aligned} \quad (6.31)$$

Separando según el orden de M:

$$\begin{aligned} 0 = & [s_o^3 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - s_o^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 (h - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)] \\ & + M [3s_o^2 s_1 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - 2s_o s_1 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 g'_{su} \\ & - s_1 \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) - (g'_{sh} h' - g'_{su} u')] + \vartheta(M^2) \end{aligned} \quad (6.32)$$

6.1.4.1 Celeridad de orden cero

Como la ecuación anterior es igual a cero, para cada orden de M sus coeficientes, también debe ser cero. Luego para orden cero:

$$0 = s_o^3 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - s_o^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 (h - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) \quad (6.33)$$

Siendo las soluciones para esta ecuación cubica:

$$s_o^{(1,2)} = \beta \frac{u'}{\Pi_1} \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta) \frac{u'^2}{\Pi_1^2} + \frac{h}{\mathbb{F}r^2 \Pi_1}} \quad (6.34)$$

$$s_o^{(3)} = 0 \quad (6.35)$$

Remplazando con los números adimensionales en (6.34) y (6.35), se obtiene la celeridad de orden cero con dimensiones $c_o^{(1,2)}$ y $c_o^{(3)}$:

$$c_o^{(1,2)} = \beta u \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta) u^2 + gh} \quad (6.36)$$

$$c_o^{(3)} = 0 \quad (6.37)$$

Notar que la ecuación (6.36) corresponde al resultado clásico para la celeridad de una onda gravitacional superficial en un canal para una distribución uniforme de velocidad ($\beta = 1$), se obtiene la expresión clásica para el flujo en un canal (Chow, 1959):

$$c_o^{(1,2)} = u \pm \sqrt{gh} \quad (6.38)$$

Como la tercera celeridad para orden cero es nula, se tiene que la expansión a orden cero corresponde a la situación cuando el lecho no se ve afectado, donde no se produce transporte de fondo.

6.1.4.2 Celeridad de orden uno

Volviendo a la ecuación (6.32) y analizando los coeficientes de la componente de orden uno para \mathbb{M} , la que debe ser nula:

$$0 = [3s_o^2 s_1 \Pi_1^3 \text{Fr}^2 - 2s_o s_1 \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 g'_{su} - s_1 \Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2) - (g'_{sh} h' - g'_{su} u')] \quad (6.39)$$

Despejando s_1 :

$$s_1 = \frac{(g'_{sh} h' - g'_{su} u')}{3s_o^2 \Pi_1^3 \text{Fr}^2 - 2s_o \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 g'_{su} - \Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2)} \quad (6.40)$$

Remplazando con el valor de s_o según la celeridad asociada a la componente se determina la componente de orden uno de la celeridad. Para el caso del lecho $s_o^{(3)}$ es igual a cero, luego:

$$s_1^{(3)} = - \frac{(g'_{sh} h' - g'_{su} u')}{\Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2)} \quad (6.41)$$

$$s_1^{(3)} = \frac{(g'_{su} u' - g'_{sh} h')}{\Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2)} \quad (6.42)$$

Luego la celeridad adimensional para el lecho de orden uno:

$$s^{(3)} = \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{\Pi_1(h' - \text{Fr}^2\beta u'^2)} \text{M} + \vartheta(\text{M}^2) \quad (6.43)$$

Volviendo a la celeridad con dimensiones queda:

$$c^{(3)} = \frac{1}{h\left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} (ug_{su} - hg_{sh}) \quad (6.44)$$

$$c^{(3)} = \frac{1}{h\left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} \left(u \frac{\partial g_s}{\partial u} - h \frac{\partial g_s}{\partial h}\right) \quad (6.45)$$

Con lo que obtiene la celeridad de la onda para el lecho a primer orden, considerando la definición original del gasto sólido por unidad de ancho en la ec. de Exner:

$$c^{(3)} = \frac{(1 - \lambda_p)}{h\left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} \left(u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h}\right) \quad (6.46)$$

Ya que $\frac{q_s(x,t)}{1-\lambda_p} = g_s(x,t)$.

6.1.4.3 Celeridad de onda del lecho a primer orden para un fluido tipo ley de potencia adaptando un relación de gasto sólido

Para aplicar la relación de celeridad obtenida en (6.46) es necesario tener más relaciones para poder aplicarla a un flujo. En este caso el objetivo es aplicarla al flujo laminar de un fluido no newtoniano, con reología ley de potencia. Primero se requiere una relación para el gasto sólido de fondo. Considerando la expresión dada por Charru et al. (2004), para gasto sólido por unidad de ancho en flujos laminares:

$$q_s^* = 0.025\tau_*(\tau_* - \tau_{*c}) \quad (6.47)$$

Donde q_s^* es el gasto sólido adimensional, τ_* el esfuerzo de corte de fondo adimensional y τ_{*c} el esfuerzo crítico de fondo adimensional.

El gasto sólido de fondo se encuentra adimensionalizado acorde a la relación dada por Ouriemi et al. (2009) para el caso de fluidos newtonianos:

$$q_s^* = \frac{q_s \mu}{(\rho_s - \rho) g d_s^3} \quad (6.48)$$

Donde q_s es el gasto sólido, μ es la viscosidad dinámica del fluido newtoniano, ρ_s la densidad de las partículas y d_s el diámetro de característico de las partículas.

Para adaptar la relación anterior para el caso de un fluido con reología tipo ley de potencia, se emplea la forma que tiene la viscosidad efectiva en un fluido tipo de ley de potencia:

$$\mu_{eff} = K(\Pi_{\dot{\gamma}})^{n-1} \quad (6.49)$$

Para un flujo bidimensional el segundo invariante se reduce a:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} = \left|\frac{du}{dy}\right| \quad (6.50)$$

Luego la viscosidad efectiva queda:

$$\mu_{eff} = K \left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} \quad (6.51)$$

Aproximando la deformación angular con la velocidad media en la vertical $u(x, t)$ y la altura del flujo $h(x, t)$:

$$\mu_{eff} \approx K \left(\frac{u}{h}\right)^{n-1} \quad (6.52)$$

Remplazando en (6.48) con la viscosidad efectiva:

$$q_s^* = \frac{q_s}{(\rho_s - \rho) g d_s^3} K \left(\frac{u}{h}\right)^{n-1} \quad (6.53)$$

Remplazando con forma dimensional del esfuerzo de corte en (5.51) y empleando (5.54) quedando la relación para el gasto sólido:

$$q_s = \left(\frac{u}{h}\right)^{1-n} \frac{0.025(\rho_s - \rho)gd_s^3}{K} \frac{\tau_o}{\rho g R d_s} \left(\frac{\tau_o}{\rho g R d_s} - \tau_{*c}\right) \quad (6.54)$$

Se requiere ligar el esfuerzo de corte de fondo τ_o con la velocidad media del flujo y la altura de este. Empleando una relación con la estructura clásica para ligar el esfuerzo sobre la pared con la velocidad media al cuadrado por medio de un coeficiente de fricción:

$$\tau_o = C_f \rho u^2 \quad (6.55)$$

La ecuación de momentum para un flujo permanente, laminar, bidimensional uniforme, con superficie libre y altura constante h , debido a un gradiente de presión motriz, donde el fluido es incompresible y tiene reología ley de potencia:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} + K \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dy}\right) = 0 \quad (6.56)$$

Donde se obtiene la velocidad:

$$u(y) = \left[-\frac{1}{K} \frac{d\hat{p}}{dx}\right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) h^{\frac{1}{n}+1} \left(1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right) \quad (6.57)$$

Con velocidad media:

$$\bar{u} = \left[-\frac{1}{K} \frac{d\hat{p}}{dx}\right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1}\right) h^{\frac{1}{n}+1} \quad (6.58)$$

Y esfuerzo de corte:

$$\tau(y) = \left[-\frac{d\hat{p}}{dx}\right] (h - y) \quad (6.59)$$

Donde se obtiene el esfuerzo de corte en el fondo:

$$\tau_o = \left[-\frac{1}{K} \frac{d\hat{p}}{dx} \right] h \quad (6.60)$$

Remplazando con (6.58) con (6.60):

$$\bar{u} = \left[\frac{\tau_o}{K} \right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2n+1} \right) h \quad (6.61)$$

$$\bar{u}^n = \left[\frac{\tau_o}{K} \right] \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n h^n \quad (6.62)$$

$$\left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \bar{u}^n h^{-n} K = \tau_o \quad (6.63)$$

$$\left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{K}{\rho \bar{u}^{2-n} h^n} \rho \bar{u}^2 = \tau_o \quad (6.64)$$

Luego:

$$C_f \rho \bar{u}^2 = \tau_o \quad (6.65)$$

Con:

$$C_f = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{1}{\text{Re}_K} , \quad \text{Re}_K = \rho \frac{\bar{u}^{2-n} h^n}{K} \quad (6.66)$$

Suponiendo que la velocidad del fluido en el caso del canal donde se está analizando la celeridad, presenta perfiles de velocidad autosimilares, se puede calcular el esfuerzo de corte de fondo con la relación obtenida en (6.65) y (6.66).

$$\tau_o = K \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} \quad (6.67)$$

Remplazando en el gasto sólido en (6.54) con (6.67):

$$q_s = 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u}{h} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} - \tau_{*c} \right) \quad (6.68)$$

$$q_s = 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} - \frac{u}{h} \tau_{*c} \right) \quad (6.69)$$

Se requiere emplear una relación para τ_{*c} , para esto se considera una relación como que plantea Mantz (1977), donde τ_{*c} es una función de $\mathbb{R}e_{*p}$

$$\tau_{*c} = \varepsilon \mathbb{R}e_{*p}^{-\delta} \quad (6.70)$$

Llevando el $\mathbb{R}e_{*p}$ a la reología tipo ley de potencia:

$$\mathbb{R}e_{*p} = \frac{\rho u_*^{2-n} d_s^n}{K} \quad (6.71)$$

Donde u_* se obtiene de la ecuación (6.67):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u_*^n}{h^n}} \quad (6.72)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = u_*^{\frac{n}{2}} h^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{K}{\rho} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n} \quad (6.73)$$

Luego $\mathbb{R}e_{*p}$ queda:

$$\text{Re}_{*p} = d_s^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}(2-n)} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{-\frac{n}{2}} u^{\frac{n(2-n)}{2}} h^{-\frac{n(2-n)}{2}} \quad (6.74)$$

Remplazando en (6.70), se obtiene τ_{*c} :

$$\tau_{*c} = \varepsilon \left(d_s^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}(2-n)} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{-\frac{n}{2}} \right)^{-\delta} u^{-\delta \frac{n(2-n)}{2}} h^{\delta \frac{n(2-n)}{2}} \quad (6.75)$$

Renombrando términos:

$$\tau_{*c} = \xi u^{-\varsigma} h^{\varsigma} \quad (6.76)$$

Remplazando en (6.69), se calculan derivadas parciales respecto a la velocidad media del fluido y la altura:

$$q_s = 0.025 d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} - \xi u^{1-\varsigma} h^{\varsigma-1} \right) \quad (6.77)$$

$$q_{su} = 0.025 d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n (n+1) \frac{u^n}{h^{n+1}} - (1-\varsigma) \xi u^{-\varsigma} h^{\varsigma-1} \right) \quad (6.78)$$

$$q_{sh} = 0.025 d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(-\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n (n+1) \frac{u^{n+1}}{h^{n+2}} - (\varsigma-1) \xi u^{1-\varsigma} h^{\varsigma-2} \right) \quad (6.79)$$

(6.80)

$$uq_{su} = 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (n+1) \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} - (1-\zeta)\xi u^{1-\zeta} h^{\zeta-1}\right)$$

Calculando uq_{su} y hq_{sh} :

$$hq_{sh} = 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(-\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (n+1) \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} + (1-\zeta)\xi u^{1-\zeta} h^{\zeta-1}\right) \quad (6.81)$$

Remplazando en (6.46):

$$c^{(3)} = \frac{(1-\lambda_p)}{h(1-\beta\text{Fr}^2)} 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (n+1) \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} - (1-\zeta)\xi u^{1-\zeta} h^{\zeta-1}\right) \quad (6.82)$$

Recuperando los términos para ζ y ξ de (6.75) y (6.76):

$$c^{(3)} = \frac{(1-\lambda_p)}{h(1-\beta\text{Fr}^2)} 0.025d_s^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n (n+1) \frac{u^{n+1}}{h^{n+1}} - \varepsilon \left[d_s^n \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}(2-n)} \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-\frac{n}{2}} \right]^{-\delta} \left(1 - \delta \frac{n(2-n)}{2}\right) \left(\frac{u}{h}\right)^{1-\delta \frac{n(2-n)}{2}}\right) \quad (6.83)$$

Para tener una expresión del coeficiente de Boussinesq (β), se emplea el supuesto de tener soluciones autosimilares para el perfil de velocidad, luego el coeficiente de Boussinesq se obtiene con la solución mostrada en (6.57):

$$\beta = \frac{4n+2}{3n+1} \quad (6.84)$$

Al tener perfiles autosimilares, β es constante.

6.1.4.4 *Celeridad de la onda del lecho a primer orden para un fluido tipo ley de potencia con una relación para el gasto sólido obtenida experimentalmente para reología tipo ley de potencias*

Si bien es posible obtener una expresión para la celeridad adaptando la relación para el caso laminar y fluido Newtoniano para el gasto sólido obtenida por Charru et al. (2004) y de igual manera adaptando la forma de adimensionalizar el gasto sólido que plantea Ouriemi et al. (2009) para fluido newtoniano (que solo depende de parámetros del fluido en el caso newtoniano) a una forma no Newtoniana donde pasa a depender de las características del flujo como la velocidad y altura, el procedimiento anterior es cuestionable.

Esto debido a que no es lo ideal para trabajar con adimensionales escalados de manera que quedan dependientes de otras características del flujo como lo son la velocidad y la altura. Es mejor tener que él adimensional se forme escalando con parámetros fijos del sedimento y el fluido. Respecto a la relación obtenida por Charru et al. (2004), está no se determinó para fluidos no Newtonianos, luego también es cuestionable su validez.

Para evitar estos problemas, se emplea la relación para el gasto sólido de fondo obtenida por Vásquez (2020) y la forma adimensional planteada por Tamburrino et al. (2020), por lo que el gasto sólido se calcula como:

$$q_s^* = 0.15 \left(\frac{(\rho_s - \rho)g\rho^{n/(2-n)}d_s^{(2+n)/(2-n)}}{K^{2/(2-n)}} \right)^{-0.75} (\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (6.85)$$

Con el gasto sólido adimensional definido como:

$$q_s^* = q_s \left[\frac{K}{d_s^{2n+1}(\rho_s - \rho)g} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (6.86)$$

Luego la expresión para el gasto sólido queda:

$$q_s = 0.15 \left[\frac{K}{d_s^{2n+1}(\rho_s - \rho)g} \right]^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{(\rho_s - \rho)g\rho^{n/(2-n)}d_s^{(2+n)/(2-n)}}{K^{2/(2-n)}} \right)^{-0.75} (\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (6.87)$$

Llamando a la componente que incluye los parámetros del fluido y del lecho:

$$\mathbb{T} = 0.15 \left[\frac{K}{d_s^{2n+1}(\rho_s - \rho)g} \right]^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{(\rho_s - \rho)g\rho^{n/(2-n)}d_s^{(2+n)/(2-n)}}{K^{2/(2-n)}} \right)^{-0.75} \quad (6.88)$$

Quedando el gasto sólido:

$$q_s = \mathbb{T}(\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (6.89)$$

Empleando la definición de τ_* y el resultado obtenido en (6.67) y la relación que sigue la estructura planteada por Mantz (1977) presentada en (6.70) para τ_{*c} :

$$q_s = \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\zeta} h^\zeta \right)^{0.45} \quad (6.90)$$

Con la expresión anterior se calculan las derivadas respecto a la velocidad y altura para el gasto sólido:

$$q_{su} = \frac{\partial q_s}{\partial u} = 0.45 \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\zeta} h^\zeta \right)^{-0.55} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^{n-1} h^{-n} + \xi \zeta u^{-\zeta-1} h^\zeta \right) \quad (6.92)$$

$$q_{sh} = \frac{\partial q_s}{\partial h} = -0.45 \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\zeta} h^\zeta \right)^{-0.55} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n-1} + \xi \zeta u^{-\zeta} h^{\zeta-1} \right) \quad (6.93)$$

Luego:

$$uq_{su} = 0.45 \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\zeta} h^\zeta \right)^{-0.55} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} + \xi \zeta u^{-\zeta} h^\zeta \right) \quad (6.94)$$

$$hq_{sh} = -0.45\mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\varsigma} h^\varsigma \right)^{-0.55} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} + \xi \varsigma u^{-\varsigma} h^\varsigma \right) \quad (6.95)$$

Remplazando en (6.46) con (6.949 y (6.95):

$$c^{(3)} = \frac{(1 - \lambda_p) 0.9 \mathbb{T} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} + \xi \varsigma u^{-\varsigma} h^\varsigma \right)}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh} \right) \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\varsigma} h^\varsigma \right)^{0.55}} \quad (6.96)$$

Recuperando los términos para ς y ξ de (6.75) y (6.76):

$$c^{(3)} = \frac{(1 - \lambda_p) 0.9 \mathbb{T} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} + \xi \varsigma u^{-\varsigma} h^\varsigma \right)}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh} \right) \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n u^n h^{-n} - \xi u^{-\varsigma} h^\varsigma \right)^{0.55}} \quad (6.97)$$

Con:

$$\mathbb{T} = 0.15 \left[\frac{K}{d_s^{2n+1} (\rho_s - \rho) g} \right]^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{(\rho_s - \rho) g \rho^{n/(2-n)} d_s^{(2+n)/(2-n)}}{K^{2/(2-n)}} \right)^{-0.75} \quad (6.98)$$

$$\xi = \varepsilon \left(d_s^n \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}(2-n)} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{-\frac{n}{2}} \right)^{-\delta} \quad (6.99)$$

$$\varsigma = \delta \frac{n(2-n)}{2} \quad (6.100)$$

Es evidente que ambas celeridades no son iguales debido a la forma de las ecuaciones para el gasto sólido empleadas en cada caso y como se define el gasto sólido adimensional.

La ventaja de esta expresión es que existe una base experimental en las expresiones empleadas.

6.1.5 Expresión para la celeridad de ondas por medio de una expansión a segundo orden

A forma de extender el resultado anterior se analiza el efecto de considerar un orden superior Considerando una expansión de orden dos para s en función de M :

$$s = s_0 + M s_1 + M^2 s_2 + \vartheta(M^3) \quad (6.101)$$

Usando esta expansión en la ecuación (6.85) y ordenando los términos según el orden de M . Usando expansiones de Taylor en los términos polinomiales de s con la expansión de segundo orden:

$$s^3 = (s_0 + M s_1 + M^2 s_2 + \vartheta(M^2))^3 = s_0^3 + 3 s_0^2 s_1 M + 3 s_0^2 s_2 M^2 + 3 s_0 s_1^2 M^2 + \vartheta(M^2) \quad (6.102)$$

$$s^2 = (s_0 + M s_1 + M^2 s_2 + \vartheta(M^2))^2 = s_0^2 + 2 s_0 s_1 M + 2 s_0 s_2 M^2 + s_1^2 M^2 + \vartheta(M^3) \quad (6.103)$$

Remplazando en la ecuación obtenida en (6.27):

$$\begin{aligned} 0 = & (s_0^3 + 3 s_0 s_1 M + 3(s_0^2 s_2 + s_0 s_1^2) M^2) \Pi_1^3 \text{Fr}^2 \\ & - (s_0^2 + 2 s_0 s_1 M + (2 s_0 s_2 + s_1^2) M^2) \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' \\ & - (s_0 M + M^2 s_1 + M^3 s_2) (\Pi_1 g'_{su}) \\ & - (s_0 + M s_1 + M^2 s_2) \Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2) - M (g'_{sh} h' - g'_{su} u') \end{aligned} \quad (6.104)$$

Se recupera la solución para orden cero determinada anteriormente:

$$0 = s_0^3 \Pi_1^3 \text{Fr}^2 - s_0^2 \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' - s_0 \Pi_1 (h - \text{Fr}^2 \beta u'^2) \quad (6.105)$$

$$s_0^{(1,2)} = \beta \frac{u'}{\Pi_1} \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta) \frac{u'^2}{\Pi_1^2} + \frac{h}{\text{Fr}^2 \Pi_1}} \quad (6.106)$$

$$\mathcal{s}_o^{(3)} = 0 \quad (6.107)$$

Volviendo a la ecuación (6.33) y analizando los coeficientes de la componente de orden uno para \mathbb{M} la que debe ser nula:

$$0 = [3\mathcal{s}_o^2 \mathcal{s}_1 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - 2\mathcal{s}_o \mathcal{s}_1 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - \mathcal{s}_o \Pi_1 g'_{su} - \mathcal{s}_1 \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) - (g'_{sh} h' - g'_{su} u')] \quad (6.108)$$

Despejando \mathcal{s}_1 :

$$\mathcal{s}_1 = \frac{(g'_{sh} h' - g'_{su} u')}{3\mathcal{s}_o^2 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - 2\mathcal{s}_o \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - \mathcal{s}_o \Pi_1 g'_{su} - \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \quad (6.109)$$

Se recupera la celeridad de orden uno determinada anteriormente:

$$\mathcal{s}_1^{(3)} = \frac{(g'_{su} u' - g'_{sh} h')}{\Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \quad (6.110)$$

La ecuación para segundo orden de \mathbb{M} , de la ecuación (6.104) resulta:

$$3(\mathcal{s}_o^2 \mathcal{s}_2 + \mathcal{s}_o \mathcal{s}_1^2) \mathbb{M}^2 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - (2\mathcal{s}_o \mathcal{s}_2 + \mathcal{s}_1^2) \mathbb{M}^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - \mathbb{M}^2 \mathcal{s}_1 \Pi_1 g'_{su} - \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) \mathbb{M}^2 \mathcal{s}_2 = 0 \quad (6.111)$$

Despejando \mathcal{s}_2 y empleando que $\mathcal{s}_o = 0$:

$$\mathcal{s}_2 = -\mathbb{F}r^2 \frac{2\beta u' (g'_{su} u' - g'_{sh} h')^2}{h'^3 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}r^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^3} - g'_{su} \frac{(g'_{su} u' - g'_{sh} h')}{h'^2 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}r^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^2} \quad (6.112)$$

Luego la expansión para la celeridad de la onda del lecho:

$$\mathcal{s}^{(3)} = \frac{(g'_{su} u' - g'_{sh} h')}{\Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \mathbb{M} - \mathbb{F}r^2 \frac{2\beta u' (g'_{su} u' - g'_{sh} h')^2}{h'^3 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}r^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^3} \mathbb{M}^2 - g'_{su} \frac{(g'_{su} u' - g'_{sh} h')}{h'^2 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}r^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^2} \mathbb{M}^2 \quad (6.113)$$

Remplazando con las variables con dimensiones y la porosidad, se obtiene la celeridad a segundo orden:

$$c^{(3)} = (1 - \lambda_p) \frac{(q_{su}u - q_{sh}h)}{h(1 - \beta \mathbb{F}r^2)} - 2\beta(1 - \lambda_p)^2 \frac{u(q_{su}u - q_{sh}h)^2}{g h^3 (1 - \beta \mathbb{F}r^2)^3} - (1 - \lambda_p)^2 \frac{g_{su}(uq_{su} - hq_{sh})}{h^2(1 - \beta \mathbb{F}r^2)^2} \quad (6.114)$$

6.2 Limitación de la expresión para la celeridad

Se obtuvo expresiones para la celeridad de las ondas asociadas al lecho para un caso general, dada por la expresión obtenida en (5.50):

$$c^{(3)} = \frac{(1 - \lambda_p)}{h(1 - \beta \mathbb{F}r^2)} \left(u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h} \right) \quad (6.115)$$

La cual se puede aplicar tanto para régimen laminar o turbulento, reologías newtonianas y no newtonianas y distintas relaciones para el gasto sólido.

Analizando los términos de la expresión de la celeridad es posible notar que la componente en el denominador dada por $(1 - \beta \mathbb{F}r^2)$ es positiva para régimen subcrítico $(\frac{1}{\beta} > \mathbb{F}r^2)$ y negativa para supercrítico $(\frac{1}{\beta} < \mathbb{F}r^2)$, además de indefinir la celeridad para el caso de régimen crítico, donde no se observan ondas sedimentarias. El término $(u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h})$ puede ser reescrito empleando regla de la cadena como:

$$u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h} = u \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial h} = \left(u \frac{\partial \tau_o}{\partial u} - h \frac{\partial \tau_o}{\partial h} \right) \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \quad (6.116)$$

Las relaciones de gasto sólido muestran que $\frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} > 0$, ya que al tener mayor esfuerzo de corte sobre el lecho (y superado el umbral para tener arrastre en el lecho), el gasto debería ser mayor. Para $\frac{\partial \tau_o}{\partial u}$, se tiene que este término es positivo, mientras que $\frac{\partial \tau_o}{\partial h}$ es negativo, lo anterior sale de las fuerzas que actúan para el flujo. Con esto se concluye que la única componente que afecta el signo de la celeridad obtenida es el termino en el denominador asociado al número de Froude, lo que implica tener celeridades positivas en régimen subcrítico y negativas en régimen supercríticos.

Al tener flujo subcrítico las ondas sedimentarias asociadas a este régimen son las dunas y rizos (Simmons & Richardson, 1966), las que se propagan en la misma dirección del flujo, lo que se si se ve reflejado en la expresión para la celeridad, ya que la celeridad es positiva.

Al analizar el caso de tener régimen supercrítico la expresión no logra representar lo que ocurre en la realidad ya que solo se tiene como resultado una celeridad negativa, es decir opuesta a la dirección del flujo. Pero en régimen supercrítico las ondas sedimentarias que se observan son las antidunas, las cuales pueden propagarse aguas arriba y aguas

abajo (Simmons & Richardson, 1966). Además, el mecanismo de propagación de las antidunas no está caracterizado en las ecuaciones ya que se están tratando las ondas como una perturbación infinitesimal del lecho. Las antidunas se forman por aporte de sedimento hacia aguas arriba del flujo en las formas de fondo, este mecanismo que ocurre en la dinámica del sedimento no está considerado en el análisis. Otra componente que no se está considerando es que las antidunas se observan cuando existe mayor grado de deformación en el lecho, cosa que tampoco se está considerando en el análisis.

Aun cuando se tiene una expresión para la celeridad considerando segundo orden, esta no permite eliminar la limitación que tiene la celeridad para régimen supercrítico, debido a las razones expuestas anteriormente, por lo que las expresiones, aun cuando sean de orden superior, siguen estando limitadas al régimen subcrítico.

6.3 Discusión y conclusiones

Si bien se logró cumplir el objetivo de obtener una expresión para la celeridad de la onda para el lecho, esta expresión está sujeta a limitaciones. Se debe tener una expresión para el gasto sólido y tomar en consideración el inicio del arrastre, en estos dos ámbitos, para el primero existen múltiples expresiones que dependen del tipo de régimen de flujo (laminar o turbulento), composición del lecho (cohesivo, no cohesivo, granulometría uniforme o extendida) y el fluido. Debido a la complejidad del proceso, la mayoría de estas expresiones son de carácter experimental, por lo que un buen análisis de la celeridad de las ondas requiere identificar de manera experimental la relación adecuada para el gasto sólido.

La condición de arrastre incipiente no da un valor preciso en la práctica, si bien existen expresiones presentadas en la literatura que entregan valores empleando algún criterio como el del esfuerzo de corte o velocidad críticos, los resultados en la práctica muestran que el arrastre se produce entorno a estos valores generando intervalos donde se observa el inicio del arrastre, como muestra el diagrama de Shields.

La dificultad de tener un valor preciso para la condición de arrastre incipiente y conocer la relación de gasto sólido, implican que la relación para la celeridad puede ser compleja de aplicar y verificar en condiciones experimentales, más aún cuando se está trabajando con fluidos no newtonianos y en régimen laminar, lo que agrega más complejidad a determinar la celeridad de las ondas del lecho.

La expresión obtenida para la celeridad, si bien es bastante general, presenta limitación importante, que es solo tener validez en el régimen subcrítico. Esto se debe a que no están considerados los mecanismos que generan las ondas sedimentarias en el régimen supercrítico (antidunas). Esto también implica que el resultado de orden superior no permite corregir esta limitación para la expresión de la celeridad. Además, el resultado para régimen supercrítico es inconsistente con la realidad, ya que se obtiene una celeridad negativa cuando en la realidad se tienen celeridades tanto positivas como negativas para las antidunas que se dan en régimen supercrítico.

En vista de la limitación anterior, es recomendable buscar una expresión para la condición de régimen supercrítico por medio de otras herramientas en teoría de perturbaciones u otro, que permita obtener la celeridades para el régimen supercrítico.

Si bien se aplicó la relación de celeridad para un fluido no newtoniano adaptando una relación pensada para flujo laminar y fluido newtoniano, este ajuste basado en la definición de la viscosidad efectiva y las escalas del problemas es cuestionable y es recomendable verificar experimentalmente el resultado. Es por esto que se empleó una segunda relación para la determinación del gasto sólido, la cual fue obtenida de manera experimental para la reología tipo ley de potencias y régimen laminar. Además, la forma adimensional para el gasto sólido empleada para el segundo caso no presenta el problema de depender de las características del flujo (velocidad y altura). Es por esto que la segunda expresión obtenida para la celeridad aplicando una relación de gasto sólido tiene una validez muy superior a la primera.

Respecto al esfuerzo de corte crítico como criterio para inicio del arrastre, siguiendo la estructura presentada por Mantz (1977), existen múltiples otras expresiones para esta condición, siendo, nuevamente, recomendable emplear una para las condiciones específicas del caso de estudio, que sería el fluido no newtoniano y flujo laminar.

Es altamente recomendable validar las expresiones para la celeridad de manera experimental cuando se busque aplicarla, tomando en consideración las limitaciones comentadas anteriormente, aun cuando la segunda expresión obtenida tiene base experimental, debido a la complejidad de los mecanismos involucrados, esto no es suficiente para asegurar resultados coherentes de manera inmediata.

CAPÍTULO 7: Conclusiones Generales

7.1 Conclusiones Generales

Respecto al primer problema estudiado, se logró analizar de manera detallada las soluciones analíticas para un flujo pulsante con reología no newtoniana tipo Ley de potencia por medio de una expansión en series a segundo orden para la velocidad del fluido, basándose en el trabajo realizado por Daprà & Scarpi (2006).

La expresión analítica obtenida permitió expandir el análisis no solo a la velocidad, incluyendo además el caudal o velocidad media del fluido, esfuerzo de corte, esfuerzo de corte de fondo y la dispersión. Además, la solución analítica permitió identificar los efectos que tienen los números adimensionales asociados al problema planteado para todos las caracterizaciones y derivaciones obtenidas del flujo mencionadas anteriormente.

Al contar con expresiones analíticas para el caudal y dispersión media en el tiempo fue posible dar expresiones para los incrementos que se dan en estos, debido a estar trabajando con un fluido que presenta reología no Newtoniana en condiciones de presión pulsante. Además, fue posible identificar como varían estos incrementos y cuáles son sus dependencias con los números adimensionales relevantes en el problema. También se recuperó el resultado de Davies & Chkrabarti (1980) para el incremento de caudal para el caso de inercia despreciable.

Las soluciones numéricas permitieron comparar los perfiles de velocidad con los obtenidos analíticamente, verificando que al cumplirse las condiciones para emplear la expansión en series ($\varepsilon \ll 1$) se tiene un error muy pequeño entre ambas soluciones, validando la metodología y la solución obtenida para el problema del flujo pulsante con el fluido no Newtoniano empleado.

Si bien el resultado es satisfactorio, no es posible extender la metodología directamente al caso oscilatorio o con una pulsación que genere un inversión en la dirección del flujo, debido a la limitación que impone la expansión en series para la velocidad. Se recomienda buscar otra metodología para poder abordar el problema de tener una pulsación que genere una inversión en el dirección del flujo.

Para el segundo problema, se obtuvo una expresión general para la celeridad de las ondas en el lecho siguiendo una metodología similar a la planteada por Gradowczyk (1968), ya que la expresión obtenida no asume inmediatamente una expresión para el gasto sólido de fondo por unidad de ancho ni una forma para determinar el esfuerzo de corte para el cual se tiene el arrastre incipiente.

Debido a las componentes que tiene la expresión para la celeridad de las formas de fondo, se detectó que esta solo tiene validez en el régimen subcrítico del flujo, ya que no están considerados los mecanismos que generan las ondas sedimentarias en régimen supercrítico (antidunas), además de obtenerse como resultado que las ondas en el régimen supercrítico solo viajan en sentido contrario a la dirección del flujo, algo que no se observa en la realidad. Para régimen subcrítico los mecanismos de formación de ondas sedimentarias para pequeñas perturbaciones si están considerados y el resultado es

consistente con lo que se observa naturalmente, las ondas sedimentarias en régimen subcrítico viajan en la misma dirección que el flujo.

Para determinar una expresión para la celeridad de la forma de fondo cuando el fluido es ley de potencia se adaptó la expresión para el gasto sólido laminar de Charru et al. (2004) con el escalamiento del gasto sólido planteado por Ouriemi et al. (2009) para un fluido Newtoniano, llevando la viscosidad a la viscosidad efectiva en un fluido no Newtoniano. Para determinar el esfuerzo de corte para el umbral donde se inicia el arrastre incipiente se emplea la relación propuesta por Mantz (1977). Con lo anterior se determina una primera expresión para la celeridad para las formas de fondo para un fluido tipo ley de potencia. Debido a que es cuestionable el adaptar relaciones pensadas para fluido newtoniano, se determinó una segunda expresión para la celeridad empleando la relación de gasto sólida determinada por Vásquez (2020) y la forma adimensional por Tamburrino et al. (2020), las que si tienen validez experimental y fueron determinadas para fluido tipo ley de potencia.

Sin embargo, es recomendable validar experimentalmente la expresión determinada para la celeridad en fluidos no Newtonianos con reología tipo ley de potencia con mediciones experimentales específicamente de la celeridad de las formas de fondo para esta reología del fluido, ya que la complejidad del fenómeno que es el arrastre de fondo implica mucha incertidumbre y dispersiones en los valores observados, más aún cuando se trata de fluidos no Newtonianos.

Bibliografía

1. Abramowitz, R.M. & Stegun I.A. (1956). Handbook of mathematic functions. Dover, New York.
2. Adusumilli, R. S., & Hill, G. A. (1984). Transient laminar flows of truncated power law fluids in pipes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 62(5), 594–601.
3. Agrawal, S. & Jayaraman, G. (1994). Numerical simulation of dispersion in the Flow of power law fluids in curved tubes. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 18, Issue 9, pp. 504-512.
4. Ananthakrishnan, W., Gill, N. & Barduhn, A. (1965). Laminar Dispersion in capillaries. Part I. Mathematical Analysis. *AIChE Journal*, Vol.11, pp.1065-1072.
5. Anastasiou, A., Spyrogianni & Paras, S. (2010). Experimental study of pulsatile blood flow in micro channels. 19th international congress of chemical and process engineering, Prague, Czech Republic, 2010.
6. Andreotti, B., Claudin, P., Devauchelle, O., Durán, O., & Fourrière, A. (2012). Bedforms in a turbulent stream: Ripples, chevrons and antidunes. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 690, pp. 94-128.
7. Aris, R. (1956). On the dispersion of the solute in a fluid flowing through a tube. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 235, pp. 67-77.
8. Aris, R. (1959). On dispersion of a solute by diffusion, convection and exchange between phases. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 252, pp. 538-550.
9. Aris, R. (1960). On the dispersion of solute in pulsating flow through a tube. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 259, pp. 370-376.
10. Ashida, K. & Michiue, M. (1972) Study on hydraulic resistance and bedload transport rate in alluvial streams. *Proc. Japan Soc. Civ. Engng.*, Vol. 206, pp. 59-69.
11. Aziz, N, & Prasad, S. (1985). Sediment Transport in Shallow Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 111, No.10, pp. 1327–1342.
12. Bagnold, R. A. (1973), The nature of saltation and of bed-load transport in water, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 332, 473-504.

13. Balmer T, Fiorina MA. (1980). Unsteady flow of an inelastic Power-law fluid in a circular tube. *J Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.7, pp. 189–198.
14. Barnes, H., Townsend, P., & Walters, K. (1971). On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheologica Acta*, Vol.10, No.4, pp. 517–527.
15. Barré de Saint-Venant, A. (1871). Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 73 (1871).
16. Barton, N. (1983). On the method of moments for solute dispersion. *Journal Fluid Mechanics*, Vol.126, pp.205-218.
17. Blair, G., Hening, J. & Wagstaff, A. (1939). The Flow of Cream through Narrow Glass Tubes. *The Journal of Physical Chemistry*, Vol. 43, No.7, pp. 853–864.
18. Booras, G. & Krantz, W. (1976). Dispersion in the laminar flow of power-law fluids through straight tubes. *Industrial & Engineering Chemistry fundamentales*, 15(4), pp.249-254.
19. Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Pp. 55-108.
20. Brownlie, W.R. (1981). Prediction of the flow depth and sediment discharge in open channels. Rep. N-KH-R-43A, Keck Lab. Of hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California.
21. Callander, R. (1968). Instability and river meanders. *Journal Fluid Mech.* (1969). Vol. 36, pp. 465-480.
22. Canuto, C., Hussaini, M., Quateroni, A. & Zang, T. (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag 1st Ed. New York.
23. Chaudhry, M.H. (1979). *Applied hydraulic transients*. Springer, 1st Ed. New York. Pp. 46.
24. Charru, F. & Mouilleron-Arnould, H. (2002) Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid. Mech.* 452, pp. 303-323.
25. Charru, F., Mouilleron-Arnould, H., & Eiff, O. (2004). Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 519, pp.55–80.
26. Charru, F. & Hinch, E. (2006). Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid. Mech.* 550, pp. 111-121.

27. Chatwin, P. (1975). On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillatory flows in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 71, pp.513–527.
28. Cheng, N. (2004). Analysis of bed load transport in laminar flows. *Adv. Water Resour.* 27, pp.937-942.
29. Chhabra, R. P. & Richardson, J. F. (1999). *Non-Newtonian flow in the process industries: fundamentals and engineering applications*. Butterworth-Heinemann
30. Chhabra, R.P. (2010). *Non-Newtonian Fluids: An introduction*. In *Rheology of complex Fluids*; Deshpande, A. P., Sunil Kumer, P. B., Krishnan, J. M., Eds; Springer Science+Business Media: New York.
31. Chien, N. (1954). Meyer-Peter formula for bed-load transport and Einstein bed-load function. M.R.D. Sediment Series No. 7, Univ. of California-Berkeley, and The Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, Berkeley, Calif.
32. Choi, U. S., Talbot, L., & Cornet, I. (1979). Experimental study of wall shear rates in the entry region of a curved tube. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 93, No.3, pp. 465-489.
33. Chow, V.T. (1959). *Open Channel hydraulics*. McGraw-Hill Book Company, Inc; New York.
34. Chu, H., Garoff, S., Przybycien, T., Tilton, R., & Khair, A. (2019). Dispersion in steady and time_oscillayory two dimensional flows through a parallel-plane channel. *Phys. Fluids*, Vol. 31, 022007.
35. Coleman, S. & Eling, B. (2000). Sand wavelets in laminar open channels flows. *Journal of Hydraulic Research*, 38(5), 331-38.
36. Crandall, I.B. (1926). *Theory of vibrating systems and sound*. D. van Nostrand. 1st Ed. New York.
37. Davies, J.M., Chakrabarti A. (1980). A modified pulsatile flow apparatus for measuring flow enhancement in combined steady and oscillatory shear flow. In: Astarita G., Marruci G., Nicolais L. (eds) *Rheology*. Springer Boston, MA.
38. Daprà, I., Scarpi, G. (2006). Pulsatile pipe flow of pseudoplastic fluids. *Meccanica*, Vol.41, pp.501-508.
39. Duboys, M.P. (1879): *Le Rhone et les rivieres a lit affouillable*, Mem.et Doc., anna des Pont et chausses, ser.5, vol. XVIII.
40. DuBuat, P. (1786): “Principles d’Hydraulique,” 1era ed. 6, 2 libros de L’Imprimerie de Monsieur, Paris.

41. Edwards, M.F., Nellist, D.A. & Wilkinson, W.L. (1972). Pulsating flow of non-Newtonian fluids in pipes. *Chemical Engineering Science*, Vol.27, pp. 545-553.
42. Elder, J. (1959). The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal Fluid. Mech.* Vol. 5, pp.544-560.
43. Einstein, H.A., (1942). Formulas for the transportation of bedload. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.* Vol.107, pp. 561–597.
44. Einstein, H. A. (1950). The bedload function for sediment transportation in open channel flow. U.S. Dept. Agric., Tech. Bull. No 1026. US Dept. Agriculture, Washington, D.C
45. El-Sayed, E., 1984. Pulsating Flow of Non-Newtonian Fluids in Pipes, Ph.D. Thesis. McMaster University, Hamilton, Canada.
46. Engelund, F. & Fredsøe, J. (1976). A sediment transport model for straight alluvial channels. *Nord. Hydrol.*, Vol. 7, pp.127-144.
47. Engelund, F. & Hansen, E. (1972). A Monograph on sediment transport, 3rd ed., pp. 62, teknisk forlag, Copenhagen, Denmark.
48. Exner, F. (1925) *Über die Wechselwirkung Zwischen Wasser und Geschiebe. Flüssen*, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, pt. IIa, Bd. 134, pp. 199.
49. Fan, L. & Hwang, W. (1965). *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 283, pp.576.
50. Fan, L & Wang, C. (1966). *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 292, pp.203-208.
51. Fetecau, C. (2004). Analytical solutions for non-Newtonian fluid flows in pipe-like domains. *Int J Non-Linear Mech* Vol.39, pp.225–231
52. Fetecau, C., Fetecau, C. (2005) Starting solution for some unsteady unidirectional flows of a second order fluid. *Int. J.Non-Linear Mech.* Vol.43, pp. 781–789
53. Fernandez-Luque, R. & Van Beek, R. (1976) Erosion and transport of bed sediment. *J. Hydrol. Res.*, Vol: 14, pp. 127-144.
54. Fischer, H., List, R., Imberger, J. & Brooks, N. (1979). *Mixing in island and coastal waters.* Academic press.

55. Gijssen, F., Allanic, E., van de Vosse, F., & Janssen, J. (1999). The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: unsteady flow in a 90° curved tube. *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, No.7, pp. 705–713.
56. Gilbert, G. K. (1914), Transport of debris by running water, U.S. Geol. Sure. Prof Pap. 86.
57. Gill, W. & Sankarasubramanian R. (1970). Proceedings of the royal society A: mathematical, physical & engineering sciences, 316, pp.341-350.
58. Gradowczyk, M. (1968). Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.33, No.1, pp. 93-112.
59. Grass, A. (1970). Initial Instability of Fine Bed Sand. *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 96, No. 3, pp. 619-632
60. Gupta, R., & Agarwal, R. P. (1993). Non-Newtonian fluid flow development in a circular pipe. *Fluid Dynamics Research*, Vol.12, No.4, pp. 203–213.
61. Haldenwang, R., Slatter, P. & Chhabra, R. (2010). An experimental study of non-Newtonian fluid flow in rectangular flumes in laminar, transition and turbulent flow regimes. *Journal of the south African institution of civil engineering*, Vol. 52, No.1, pp. 11-19.
62. Hanks, R.W. (1963). The Laminar-turbulent transition for flow in pipes, concentric annuli and parallel plates. *AIChE Journal* Vol. 9, No. 1, 45-48.
63. Harris, H.& Goren, S. (1967). Axial diffusion in a cylinder with pulsed flow. *Chemical Engineering Society*, 22, pp.1571-1576.
64. Hatami, M., & Ganji, D. (2014). Natural convection of sodium alginate (SA) non-Newtonian nanofluid flow between two vertical flat plates by analytical and numerical methods. *Case Studies in Thermal Engineering*, Vol.2, pp.14–22.
65. Havlik, V. & Vycital, J. (1998). Flow of dense non-Newtonian slurries in pipes. Experiments and modelling. *Transactions on Engineering Sciences* Vol. 18, pp 251-260.
66. Holley, E., Harleman, D. & Fischer, H. (1970). Dispersion in homogenous estuary flow. *J. of the Hydraulics Division*, Vol.96, Issue 8, pp.1691-1709.
67. Howes, T. & Mackley, M. (1990). Experimental axial dispersion for oscillatory Flow through a battled tube. *Chemical Engineering Science*, Vol. 45, No.5, pp.1349-1358.

68. Huo, Y., & Kassab, G. (2006). Pulsatile blood flow in the entire coronary arterial tree: theory and experiment. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, Vol. 291, No.3, H1074–H1087.
69. Isbach, S.V. (1935). Construction of dams by dumping stones in flowing water. Translated by A.Dorijikov, US Army Engineer District, Eastport, MR.
70. Joshi, C., Kamm, R., Drazen, J. & Slutsky, A. (1983). An experimental study of exchange in laminar oscillatory flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 133, pp.245–254.
71. Kajiuchi, T., & Saito, A. (1984). Flow enhancement of laminar pulsating flow of Bingham plastic fluids. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, Vol. 17, No.1, pp. 34–38.
72. Kennedy, J. F. (1963). The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.16, No. 4, 521-544.
73. Khabakhpasheva, E., Popov, V., Kekalov, A., & Mikhailova, E. (1989). Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 33, No.3, pp. 289–304.
74. Kirca, V., Sumer, B., Steffensen, M., Jensen, K. & Fuhrman, D. (2016). Longitudinal dispersion of heavy particles in an oscillating tunnel and application to wave boundary layers. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2(1), pp. 59-83.
75. Krantz, W. & Wasan, D. (1974). Axial dispersion in the turbulent flow of power-law fluid in straight tubes. *Industrial & Engineering Chemistry fundamentals*, 13(1), pp.56-62.
76. Kummer, E.E. (1836). “Ueber die hypergeometrische Reihe”. *J.fur Math.* Vol. 15, pp.39-83.
77. Lamb, H. (1895). *Hydrodynamics*. Cambridge University Press. 1st Ed, Cambridge. Art. 300. P. 300.
78. Lighthill, M. (1966). Initial development of diffusion in Poiseuille flow. *IMA Journal of applied mathematics*, Vol.2, Issue 1, pp.97-108.
79. Mackley, M. & Ni, X. (1991). Mixing and dispersion in baffled tube for steady laminar and pulsatile flow. *Chemical Engineering Science*, Vol. 46, No.12, pp.3139-3151.
80. Malin, M. R. (1997). Turbulent pipe flow of power-law fluids. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol.24, No.7, pp. 977–988.

81. Mandal, P. (2005). An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 40, pp.151–164.
82. Mann, K., Deutsch, S., Tarbell, J., Geselowitz, D. & Pierce, W. (1967). An Experimental Study of Newtonian and Non-Newtonian Flow Dynamics in a Ventricular Assist Device. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 109, No. 2, pp.139-147.
83. Manna, M. & Vacca, A. (1999). An efficient Method for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations in cylindrical geometries. *J. Computational Physics*, Vol.151, Issue 2, pp.563-584.
84. Mantz, P. (1977). Incipient transport of fine grains and flakes by fluids-extended Shields diagram. *ASCE, Journal of Hydraulics Division* 103(Hy6), pp. 601-615.
85. Matsuhisa, S., & Bird, R. B. (1965). Analytical and numerical solutions for laminar flow of the non-Newtonian Ellis fluid. *AIChE Journal*, Vol. 11, No.4, pp.588–595.
86. Maza, J.A. & García, M. (1978). Velocidades medias para el inicio del movimiento de partículas. VIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Quito, Ecuador.
87. Meyer-Peter, E. & Muller, R. (1948). Formulas for bedload transport. Proc. 2nd Congress IAHR, Stockholm.
88. Nagarani, P. & Sebastian, B. (2012). Dispersion of a solute in pulsatile non-Newtonian fluid flow through a tube. *Acta Mechanica*, Vol.224, Issue 3, pp.571-585.
89. Negrete, F. (2014). Estudio Experimental de formas de fondo en flujos laminares con superficie libre de fluidos pseudoplásticos. Memoria de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
90. Neill, C.R. (1967). Mean Velocity criterion for scour of coarse uniform bed material. *International Association of Hydraulic Research. 12th Congress. Proceedings* 13, pp.61-69. Fort Collins, Colorado. USA.
91. Ng, C. (2004). A time varying diffusivity model for shear flow dispersion in oscillatory channel flow. *Fluid dynamics research*, 34, pp.335-355.
92. Niño, Y. & García, M. (1998). Using lagrangian particle saltation observations for bedload sediment transport modelling. *Hydrological Processes*, Vol.12, No.8, pp.1197–1218.
93. Ouriemi, M., Aussillous, P., & Guazzelli, E. (2009). Sediment dynamics. Part 1. Bed Load transport by laminar shearing flows. *Journal of fluid mechanics*, 636. Pp. 295-319.
94. Orszag, S.A. (1980). Spectral methods for problems in complex geometries, *J. Computational Physics*. Vol 37, pp.70-92.

95. Pascal, H. (1992). Similarity solutions to some unsteady flows of non-Newtonian fluids of power law behaviour. *Int. J. Non-Linear Mech* Vol.27, pp.759–771.
96. Parker, G., Seminara, G. and Solari, L. (2003). Bed load at low Shields stress on arbitrarily sloping beds: Alternative entrainment formulation. *Water Resour. Res.*, Vol. 39, No. 7, 1183.
97. Pinho, F., & Whitelaw, J. (1991). Flow of non-Newtonian fluids over a confined baffle. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 226, No. 1, 475-496.
98. Pontrelli G. (1998) Pulsatile blood flow in a pipe. *Comput Fluids* Vol. 27, pp. 367–380
99. Rajagopal KR (1982) A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid. *Int. J. Non-Linear Mech* 17:369–373
100. Rana, J. & Murthy, P. (2016). Solute dispersion in pulsatile Casson fluid flow in a tube with wall absorption. *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 793, pp. 877-914.
101. Raudkivi, A.J. (1997). Ripples on stream bed. *J. Hyd. Engrg., ASCE*, 123(1), 58-64.
102. Razavi, A., Shirani, E., Sadeghi, M. (2011). Numerical simulation of blood pulsatile flow in a stenosed carotid artery using different rheological models. *Journal of biomechanics*. Vol. 44, No.11, pp. 2021-2030.
103. Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance un parallel channels. *Philosophical Transactions of the royal society*. 174, pp.935-982.
104. Ryan, N.W., Johnson, M.M. (1959). Transition from laminar to turbulent flow in pipes. *AlChE Journal*, Vol. 5, No.4, 433-435.
105. Rouse, H. 1939. An analysis of sediment transportation in the light of fluid turbulence. *Soil Conservation Services Report No.SCS-Tp-25*.
106. Rudman, M., Blackburn, H. M. (2006). Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method. *Applied Mathematical Modelling*, Vol.30, No. 11, pp. 1229–1248.

107. Schoklitsch, A., 1914. "Über Schleppkraft und Geschibebewegung". Englemann, Leipzig, Germany.
108. Shah, S. & Cox, K. (1974). Dispersion of solutes in non-Newtonian laminar flow through a circular tube-Eyring model fluid. *Chemical Engineering Science*, Vol.29, pp.1282-1286.
109. Sharp, M. (1993). Shear-augmented dispersion in non-newtonian fluids. *Annals of Biomedical Engineering*, Vol.21, pp.407-415.
110. Shields, A., 1936. Application of Similarity Principles and Turbulence Research to Bedload Movement (Traducción al ingles del documento original en alemán), Hydrodynamics Laboratory. California Institute of Technology, Publication No. 167.
111. Shupti, S., Molla, M., & Mia, M. (2017). Pulsatile Non-Newtonian Fluid Flows in a Model Aneurysm with Oscillating Wall. *Frontiers in Mechanical Engineering*, Vol. 3.
112. Simons, D., & Richardson, E. (1966). Resistance to flow in alluvial channels, *Geological Surv. Prof. Paper*.
113. Smith, R. (1982). Contaminant dispersion in oscillatory flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 114, pp.379–398.
114. Song, J., & Law, A. (2014). Longitudinal dispersion of turbulent oscillatory pipe flows. *Environmental fluid mechanics*, 15(3), pp.563-593.
115. Spiegel, M. (1968). *Mathematical Handbook of formulas and tables*. McGraw Hill, 1st Ed. New York.
116. Stairmand, J. (1983). Dispersion in oscillatory flows (PhD thesis). University of Oxford.
117. Stokes, G. (1845). On the theories of the internal friccion of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trasanctions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp.287-341.
118. Straub, L.G. (1953). Dredge fill crosure of Missouri River at Fort Randall. *Proceedings of Minnesota International Hydraulics Convention*, Minneapolis, Minn., pp. 61-75.
119. Sundstrom, D. & Kaufman, A. (1977). Pulsating flow of polymer solutions. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.* 16, No.3, pp. 320–325.
120. Sutura, S & Skalak, R. (1993). The history of Poiseuille's Law. *Annu.Rev. Fluid Mech.* 25, pp.1-19.

121. Tamburrino, A. & Traslaviña, C. (2020). Condition for the incipient motion of non-cohesive particles due to laminar flows of power-law fluids in closed conduits. *Water*, 12 (5) , 1295.
122. Taylor, G. (1953). Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 219, pp. 186-203.
123. Taylor, G.(1954a). The dispersion of matter in a turbulent flow through a pipe. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 223, pp. 446-468.
124. Taylor, G.(1954b). Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 225, pp. 473-477.
125. Thomas, G. & Finney, R. (1996). *Calculus and Analytic Geometry*. Addison-Wesley, 9th Ed. Reading, Massachusetts. p.1006
126. Tu, C., Deville, M. (1996). Pulsatile Flow of non-newtonian fluids through arterial stenoses. *Journal of biomechanics*. Vol. 29, No. 7, pp.899-908.
127. Valance, A. & Langlois, V. (2005). Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Vol. 43, pp.283–294.
128. Vanoni, V. (1974). Factors Determining Bed Forms of Alluvial Streams. *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 100, No.3, pp. 363-377
129. Vanoni, V. & Brooks, N. (1957) *Laboratory studies of the roughness and suspended load of alluvial streams*. Sedimentation laboratory Rep. No. E68. California Institute of Technology, Pasadena, CA.
130. Van Rijn, L. C. (1984) Sediment transport. Part I: bed load transport. *J. Hydraul. Engng*, 110, pp. 1431-1456.
131. Vásquez, C. (2020). Caracterización de las formas de fondo generadas en un lecho granular por el flujo de un fluido pseudoplástico en canales. Memoria de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
132. Wan, Z. & Song, T. (1987). The effect of fine particles on vertical concentration distribution and transport rate of coarse particles. *Proc. 22nd IAHR Congress, Laussane, Switzerland*, pp. 80-85.

133. Wang, L., Bayani, M., Wen, D. & Bennet, C. (2012). Theory for dynamic longitudinal dispersion in fractures and rivers with Poiseuille flow. *Geophysical research letters*, Vol.39, Issue 5.
134. Warsi, ZUA. (1994). Unsteady flow of power-law fluids through circular pipes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* Vol. 55, pp.197–202
135. Watson, E. (1983). Diffusion in oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 133, pp.233–244.
136. Watson, G.N. (1922). *A Treatise on the theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1st Ed. Cambridge.
137. Williams, P. & Kemp, P. (1971). Initiation of Ripples on Flat Sediment Beds. *Journal of the Hydraulics Division*, 1971, Vol. 97, No 4, pp. 502-522.
138. Womersley, J.H. (1955). Method of the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. of Physiology* 127, pp. 553-563.
139. Yalin, M.S. (1972). *Mechanics of sediment transport*. Pergamon Press, Inc., New York, New York, USA.
140. Yao, L., Mamun M., Ghosh, S. (2013). Fully developed circular-pipe flow of a non-Newtonian pseudoplastic fluid. *Universal Journal of Mechanical Engineering* Vol.1, No 2, pp. 23-31
141. Zaman, A. Ali, N. & Sajid, M. (2017). Numerical simulation of pulsatile flow of blood in a porous-saturated overlapping stenosed artery. *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 134, pp. 1-16.
142. Zwillinger, D. (1997). *Handbook of differential equations*. MA: academic press ,3rd ed., Boston, p. 122.

Anexos

Anexo A: publicación de resultados del flujo pulsante como artículo en Journal

Article

Pulsating Flow of an Ostwald—De Waele Fluid between Parallel Plates

Rodrigo González ¹, Aldo Tamburrino ^{1,2,*} , Andrea Vacca ³  and Michele Iervolino ⁴ 

¹ Department of Civil Engineering, Faculty of Physics and Mathematical Sciences, University of Chile, Santiago 8370448, Chile; rodrigojgonzalez@hotmail.com

² Department of Civil Engineering, Faculty of Physics and Mathematical Sciences, and Advanced Mining Technology Center, Faculty of Physics and Mathematical Sciences, University of Chile, Santiago 8370448, Chile

³ Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile e Ambientale, Università degli Studi di Napoli Federico II, 80138 Naples, Italy; vacca@unina.it

⁴ Dipartimento di Ingegneria, Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli, 81031 Aversa, Italy; michele.iervolino@unicampania.it

* Correspondence: atamburr@ing.uchile.cl

Received: 4 February 2020; Accepted: 17 March 2020; Published: 25 March 2020



Abstract: The flow between two parallel plates driven by a pulsatile pressure gradient was studied analytically with a second-order velocity expansion. The resulting velocity distribution was compared with a numerical solution of the momentum equation to validate the analytical solution, with excellent agreement between the two approaches. From the velocity distribution, the analytical computation of the discharge, wall shear stress, discharge, and dispersion enhancements were also computed. The influence on the solution of the dimensionless governing parameters and of the value of the rheological index was discussed.

Keywords: pulsating flow; non-Newtonian fluid; velocity distribution; wall shear stress; discharge enhancement; dispersion enhancement

1. Introduction

The laminar, oscillating flow, driven by a harmonic pressure gradient in Newtonian fluids in pipes has been studied theoretically at least since the work by Sexl in 1930 [1], who obtained the classical velocity profile in the radial direction in terms of the Bessel function of the first kind and order 0. In his paper, Sexl analyzed the behavior of the solution for some limit values of the dimensionless parameter $a\sqrt{\omega/\nu}$, where a is the radius of the tube, ω the angular frequency of the pressure gradient, and ν the kinematic viscosity of the fluid. In 1952, Lambossy [2] re-analyzed the problem and explicitly concluded that the shape of the velocity profile depended on the dimensionless parameter $\sqrt{\omega/\nu}$. Later, Womersley [3,4] published a paper focusing on flows in arteries, in which it is stressed the importance of the dimensionless parameter used by Sexl and Lambossy, and that became known as Womersley number. The oscillatory flow of non-Newtonian fluids has been studied theoretically by Pipkin [5], Etter and Schowalter [6], and Rahaman and Ramkissoon [7] for viscoelastic fluids, among others. Uchida [8] studied the flow of a Newtonian fluid due to pulsatile pressure gradient (i.e., superposition of oscillatory and constant pressure gradients). Among the analytical studies on pulsatile flows of non-Newtonian fluids, the following works can be mentioned: Barnes et al. [9] for some kind of Oldroyd fluids; Phan-Thien [10,11] and Steller [12] for generalized Maxwell fluids; Davies et al. [13] for the Goddard-Miller model, power-law, and Segalman viscosity functions; Mai and Davis [14] for Bingham plastics; Daprà and Scarpi [15] for power-law fluids. Recognizing the non-Newtonian behavior of the blood [16], an important amount of work has been done addressing the circulation of

blood in veins and arteries, stimulating the study of the pulsatile flow of non-Newtonian fluids (for example, references [17–19] among others). The most used approach to get the analytical solution of the non-Newtonian pulsatile flow is by means of power expansions, truncated at the first- or second-order, depending on the author. However, the increment of the flow rate with respect to the constant gradient pressure condition can be computed only with a second-order expansion [9–11,15]. Because most of the studies have been motivated by the transport of non-Newtonian fluids in the industry or by the blood motion in arteries and veins, the most used configuration corresponds to the flow in a cylinder, or with axial symmetry. Among the few analytical studies in non-cylindrical geometries, the works by Siginer [20] and Steller [12] can be mentioned. The first analyzed the pulsatile plane Pouseille flow of viscoelastic liquids of the memory integral type, and the second the flow of a generalized Maxwell fluid through a slit. Mc Ginty et al. [21] presented solutions of pulsatile flows of Newtonian, Maxwell, and Oldroyd B fluids in a cylinder and in the gap between two cylinders. Daprà and Scarpi [22] analyzed the later configuration for a Bingham fluid. Letelier et al. [23] solved the pulsating flow of a linearly viscoelastic fluid in straight tubes of arbitrary cross-sections, presenting results of the flow for square and hexagonal ducts with rounded corners. Analytical solutions for two-dimensional configurations are rather scarce when compared with their cylindrical counterpart. In addition to the paper by Steller [12], we can mention those by Daprà and Scarpi [24], who got a perturbation solution to the second-order of the pulsatile flow of a pseudoplastic Williamson fluid, and that by Nandakumar et al. [25] for a shear-thinning fluid in a two-dimensional stenosed channel.

Analytical solutions of pulsatile flows of non-Newtonian fluids are limited to very specific geometries, and they demand long algebraic developments. Thus, numerical approaches have been profusely used. The most used numerical approach to solve the equation of motions is the finite difference method. Among the articles that use this method for solving the pulsating and/or oscillatory flow of non-Newtonian fluids in cylindrical geometry, the following can be mentioned: Edwards et al. (1972, power-law fluid [26]); Balmer and Fiorina (1980, power-law [27]); Adusumilli and Hill (1984, truncated power-law [28]); Nakamura and Sawada (1987, a bi-viscosity model of a Bingham plastic [29]); Warsi (1994, power-law [30]); Mai and Davis (1996, Newtonian, power-law and a modified Bingham plastic [14]); Daprà and Scarpi (2006, power law [15]). Axisymmetric occluded pipes have been studied, for example, by Javadzadegan et al. (2009, Oldroyd-B and Cross model [31]). Rectangular or two-dimensional geometries have been studied by Yakhot et al. (1999, Newtonian fluid [32]) and Daprà and Scarpi (2007, Williamson fluid [24]). Flow in the gap of coaxial cylinders of a Bingham fluid under periodic pressure gradient and periodic oscillation of the inner cylinder has been studied by Daprà and Scarpi [22]. The work by Tu and Deville [33] is among the exceptions in which the finite element method is used to solve the pulsatile flow of power-law and Herschel-Bulkley fluids in a cylindrical pipe with an occlusion. Pontrelli [34] complemented an implicit finite difference method in time with a spectral collocation method in space in order to solve the pulsatile flows of fluids modeled as Oldroyd-B and an ad hoc blood model.

Most of the experimental studies concerning pulsating flows of non-Newtonian fluids are oriented to determine the enhancement of the temporal mean discharge when compared with the constant pressure gradient driven flow. Some of them also deal with the effect that pressure pulsation has on energy consumption. The motivation of most of the papers comes from studies on blood circulation. Barnes et al. [9] got experimental relationships between the flow enhancement, the frequency of the fluctuation, pressure gradient, and amplitude of the oscillation for Newtonian and shear-thinning fluids generated by an aqueous solution of polyacrylamide. Harris and Maheshwari [35], also with solutions of polyacrylamide, compared the predicted and measured velocity profiles. Their work did not use specific rheological models, but they were within the general class up to second-order viscoelastic fluids.

Thurston [36], in 1975, performed measurements of pressure and volume flow of blood considering steady, oscillatory, and pulsatile flows. The blood is considered a viscoelastic fluid, and the comparison with measurements on a Newtonian glycerol solution helped the authors to specify the special features

of the blood flow. Davies and Chakrabarti [37] worked with solutions of polyacrylamide in order to experimentally obtain the enhanced discharge and energy consumption and compared them with the corresponding values for Newtonian fluids. Along the same line, Phan-Thien and Dudek [10] from their experiments with aqueous solutions of Separan AP-30 found that the enhancement decreased with the frequency. Kajiuchi and Saito [38] performed experiments with clay slurries that behaved as Bingham plastics, finding that the flow enhancement could be expressed as a function of the Stokes number for a Bingham plastic fluid, the Bingham number, and the ratio between the pressure oscillation amplitude and the gradient of the base pressure. Lin et al. [39] studied non-colloidal suspensions modeled as Newtonian fluids for a shear rate below a cut value and as power-law fluids for shear rates greater than that value. Among other conclusions, they determined that particle migration might significantly affect flow enhancement.

Most of the researches involving pulsating flows deal with cylindrical or distorted cylindrical geometries because they have been motivated by studies of blood flows in veins and arteries. However, the flow in fractured rocks entails fluid motion through slender gaps that can properly be considered as the flow between parallel plates. The pulsatile flow of shear-thinning fluids through fractured rocks is found in enhanced oil recovery operations [24].

The goal of the present study was to determine analytical solutions for the two-dimensional flow of an Ostwald-de Waele type fluid driven by a pulsating pressure gradient. To accomplish this goal, a perturbation method was used to obtain the velocity distribution up to a second-order term, from which the instantaneous discharge, wall shear stress, cycle-average discharge, and dispersion coefficient were also analytically obtained and computed. A numerical solution using a spectral method was computed in order to check the analytical solution of the velocity distribution. As far as the authors are aware, no solution for the two-dimensional pulsatile flow of an Ostwald—de Waele fluid has been previously published. Daprà and Scarpi [15,24] solved this problem in cylindrical coordinates and used a two-dimensional geometry for a Williamson fluid. The solution presented in this article includes more details of the algebra than reported previously [15,24].

2. Analytical Solution

The laminar, incompressible, two-dimensional, pulsatile flow between two parallel plates of a power-law fluid is governed by the continuity and momentum equations, which are reduced to:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

where p is the pressure, u is the velocity component in the x direction, parallel to the plates. The axis y is normal to the plates, with the origin located at the inferior plate. t is the time. ρ , K , and n are the density, consistency coefficient, and flow behaviour index of the fluid, respectively. In pulsatile flow, the pressure gradient is given by:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -P(1 + \varepsilon \sin \omega t) \quad (3)$$

where ω and ε are the frequency and the relative amplitude of the oscillating part of the pressure gradient, respectively. For infinitely long plates, the velocity is independent of the variable x . Two parallel plates separated at a distance $2H$ have a symmetry plane along $y = H$ and non-slip conditions at the plates. Thus, the boundary conditions are

$$u(y = 0, t) = 0 \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(y=H,t)} = 0 \quad (5)$$

Assuming $P > 0$ and $\varepsilon \ll 1$, the velocity derivative satisfies $\partial u / \partial y \geq 0$ for $0 \leq y \leq H$, and Equation (2) becomes:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = P(1 + \varepsilon \sin \omega t) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \tag{6}$$

Denoting with an upper asterisk the dimensionless variables:

$$u^* = \frac{u}{U_0}, \quad y^* = \frac{y}{H}, \quad t^* = \omega t, \quad p^* = \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial x} = 1 + \varepsilon \sin(\omega t) \tag{7}$$

The velocity scale U_0 is not arbitrary and has been defined later. Dropping the asterisks of the dimensionless variables, the momentum equation is written as:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin t) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \tag{8}$$

where Ω and λ are dimensionless parameters defined as:

$$\Omega = \frac{\rho U_0 \omega}{P} \tag{9}$$

$$\lambda = \frac{K U_0^n}{P H^{n+1}} \tag{10}$$

As there is not a velocity scale imposed externally to the problem, U_0 should depend on the other parameters, i.e., ρ , P , and H , resulting $U_0 = \sqrt{PH/\rho}$. Thus, the dimensionless frequency becomes

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho H}{P}} \tag{11}$$

Replacing P in terms of U_0 , it is easy to recognize that λ corresponds to the inverse of a Reynolds number associated with power-law fluids, $\lambda = 1/Re = \rho U_0^{2-n} H^n / K$. In terms of P :

$$\lambda = \frac{1}{Re} = \frac{K}{P H^{n+1}} \left(\frac{PH}{\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \tag{12}$$

Equation (8) becomes:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin t) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{app} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{13}$$

where v_{app} denotes the apparent viscosity: $v_{app} = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$, with the boundary conditions:

$$u(y = 0, t) = 0 \tag{14}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(y=1,t)} = 0 \tag{15}$$

The above differential equation will be solved expanding it in a series of ε up to the second-order:

$$u(y, t) = u_0(y) + \varepsilon u_1(y, t) + \varepsilon^2 u_2(y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{16}$$

Replacing the expansion given by Equation (16) in Equation (13) yields to:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Omega \frac{\partial u_1(y,t)}{\partial t} + \varepsilon^2 \Omega \frac{\partial u_2(y,t)}{\partial t} &= 1 + \varepsilon \sin(t) \\ &+ \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^n + \left[n \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \varepsilon \right. \\ &\left. + \left[n \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{n-2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right] \varepsilon^2 \right) \end{aligned} \tag{17}$$

The solution at the zero-order is the classical result for a power-law fluid, and it is obtained after integrating the following equation

$$0 = 1 + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^n \tag{18}$$

with the boundary conditions:

$$u_0(y = 0) = 0 \tag{19}$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \tag{20}$$

resulting the zero order velocity distribution:

$$u_0(y) = Re^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left[1 - (1-y)^{\frac{1}{n}+1} \right] \tag{21}$$

The unsteady characteristic of the flow is considered from the first-order onwards. Using the solution for u_0 , the differential equation for order ε is

$$\Omega \frac{\partial u_1}{\partial t} = \sin(t) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(n Re^{\frac{n-1}{n}} \left((1-y)^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \tag{22}$$

Considering that the first-order solution of the velocity has the form:

$$u_1(y, t) = \mathcal{R}e[W_1(y)e^{it}] \tag{23}$$

where $\mathcal{R}e[z]$ is the real part of the complex z , and replacing u_1 in Equation (22), the differential equation becomes

$$\Omega i W_1 e^{it} = -i e^{it} + \frac{1}{Re} \frac{d}{dy} \left(n Re^{\frac{n-1}{n}} (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right) e^{it} \tag{24}$$

Expanding the derivative and rearranging terms, the above equation is written as:

$$i = n \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} \left((1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_1}{dy^2} - \left(\frac{n-1}{n} \right) (1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_1}{dy} \right) (1-y)^{\frac{n-1}{n}} \frac{d^2 W_1}{dy^2} - \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} (n-1) (1-y)^{-\frac{1}{n}} \frac{dW_1}{dy} - i \Omega W_1 \tag{25}$$

Equation (25) is a non-homogeneous differential equation. The function W_1 is split into two components, $W_1 = W_{11} + W_{10}$, where W_{11} is the solution of the homogeneous part, and $W_{10} = -1/\Omega$ the solution of the non-homogeneous one. The differential equation for W_{11} is given by:

$$\eta \frac{d^2 W_{11}}{d\eta^2} + \frac{n-1}{n} \frac{dW_{11}}{d\eta} - \frac{i\Omega}{n} Re^{\frac{1}{n}} \eta^{\frac{1}{n}} W_{11}(\eta) = 0 \tag{26}$$

where the new variable η is defined as:

$$\eta = 1 - y \tag{27}$$

Equation (26) is an Emden–Fowler type differential equation, with solution

$$W_{11}(\eta) = C_1 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{(-\nu)}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) + C_2 \eta^{\frac{1}{2n}} J_{(\nu)}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \tag{28}$$

where $J_{(\nu)}$ is the Bessel function of the first kind and order ν . C_1 and C_2 are the integration constants. σ and ν are defined as

$$\sigma = \frac{\sqrt{2\Omega n Re} \frac{1}{2n} (1-i)}{n+1}, \quad \nu = \frac{1}{n+1} \tag{29}$$

Imposing the boundary conditions (Equations (19) and (20)), the values of C_1 and C_2 are obtained:

$$C_1 = \frac{1}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)}, \quad C_2 = 0 \tag{30}$$

Thus, the first-order term of the velocity is:

$$u_1(y, t) = \Re \left[\left((1-y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu}\left(\sigma (1-y)^{\frac{n+1}{2n}}\right) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] \tag{31}$$

The second-order involves the solutions of zero and first-order. Using the complex identity $(\Re(z))^2 = \frac{1}{2} (\Re(z^2) + |z|^2)$ and $|z e^{it}|^2 = |z|^2$, the differential equation for $u_2(y, t)$ is written in terms of η as

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = & -n \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left\{ \left| \frac{dW_1}{d\eta} \right|^2 + \Re \left[\left(\frac{dW_1}{d\eta} \right)^2 e^{2it} \right] \right\} \right] \end{aligned} \tag{32}$$

After some algebra with the Bessel functions, the equation for u_2 can be written as

$$\begin{aligned} \Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} = & -n \frac{1}{Re} \left[-\left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left\{ \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right\}^2 \right. \\ & \left. + \Re \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right]^2 e^{2it} \right] \end{aligned} \tag{33}$$

The velocity u_2 is assumed to be composed by a steady and an unsteady component:

$$u_2(\eta, t) = u_{20}(\eta) + u_{21}(\eta, t) \tag{34}$$

Thus, the steady-state component is obtained from

$$-n \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{Re}\right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right]^2 = 0 \tag{35}$$

Using $|z|^2 = z\bar{z}$, $J_{\mu}(z) = J_{\mu}(\bar{z})$, the expression for the series expansion of the product of Bessel functions (reference [40], page 148), the term $\left| J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) \right|^2$, can be written as

$$J_{1-\nu}\left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) J_{1-\nu}\left(\bar{\sigma} \eta^{\frac{n+1}{2n}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)}{n} m+1} \tag{36}$$

with

$$C_m = \sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{(-1)^m \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2m}}{2^{-m} m! \Gamma(m+2-\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} - \nu + 2\right)} \tag{37}$$

Thus, the differential equation for u_{20} is given by

$$0 = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{20}}{\partial \eta} - b \sum_{m=0}^{\infty} C_m \eta^{\frac{(n+1)m+1}{n}} \right] \tag{38}$$

where

$$b = \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \tag{39}$$

Given the structure of Equation (38), a series solution for u_{20} is feasible, resulting:

$$u_{20}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)(2m+1)}{n}} \right) \tag{40}$$

where the coefficients a_m are given by:

$$a_m = \frac{n(1-n)}{4(1+n)} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{|\sigma|^2}{4} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 \left| \frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right|^2 \left(\frac{\sqrt{\Omega n Re} \frac{1}{2n}}{1+n} \right)^{4m} (-1)^m}{(2m)!(2m+1)\Gamma(2m+2-\nu) \left(\frac{1}{2} - m \right) \Gamma(m+2-\nu)} \tag{41}$$

Obviously, the solution given by Equation (40) satisfies the boundary conditions.

The differential equation for the unsteady part of the second-order solution is:

$$\begin{aligned} & \Omega \frac{\partial u_{21}}{\partial t} \\ &= -n \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[- \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1-n}{n}} \eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial u_{21}}{\partial \eta} \right. \\ & \left. + \frac{(n-1)}{4} \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{2-n}{n}} \eta^{\frac{n-2}{n}} Re \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) \eta^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu} \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right]^2 e^{2it} \right] \end{aligned} \tag{42}$$

The structure of u_{21} is similar to that for the unsteady part of the first-order solution, i.e.,

$$u_{21}(\eta, t) = Re [W_{21}(\eta) e^{2it}] \tag{43}$$

W_{21} is obtained from:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\partial W_{21}}{\partial \eta} \right] + \left(-\frac{2i\Omega}{n} Re^{\frac{1}{n}} \right) W_{21} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[b J_{\nu-1}^2 \left(\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right) \right] \tag{44}$$

After a rather cumbersome algebra:

$$W_{21}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left\{ \eta^{\frac{(n+1)(m+1)}{n}} - \frac{\eta^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu} \left(\sqrt{2}\sigma \eta^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{J_{-\nu}(\sqrt{2}\sigma)} \right\} \tag{45}$$

with β_m given by the recurrence equation:

$$\beta_{m+1} = \frac{b S_{m+1}}{\left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right]} + \frac{2i}{\left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+2) \right] \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) (m+1) + 1 \right]} \beta_m \tag{46}$$

where

$$\beta_0 = \left(\frac{1}{Re} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n(n-1)}{4} \left[\frac{\sigma}{J_{-\nu}(\sigma)\Omega} \left(\frac{n+1}{2n} \right) \right]^2 \frac{1}{(1+n)\Gamma^2(2-\nu)} \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2-2\nu} \tag{47}$$

and

$$S_{m+1} = \frac{(-1)^m \Gamma(5 - 2\nu + 2m)}{m! \Gamma(4 - 2\nu + m) \Gamma^2(2 - \nu + m + 1)} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{2m+4-2\nu} \tag{48}$$

Finally, the second-order term of the velocity is:

$$u_2(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(1 - (1 - y)^{\frac{(n+1)(2m+1)}{n}}\right) + \mathcal{Re} \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1 - y)^{\frac{(n+1)(m+1)}{n}} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} J_{-\nu}(\sigma \sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}})}{J_{-\nu}(\sigma \sqrt{2})} \right] \right\} \tag{49}$$

Thus, inserting the solutions given by Equations (21), (31), and (49) into Equation (16), the velocity distribution up to the second-order is obtained. The shear stress is made dimensionless with ρU_0^2 , and it is computed directly from

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \tag{50}$$

After some algebra, the second-order approximation of τ_{xy} is found to be:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(Re^{\frac{1}{n}} (1 - y)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \mathcal{Re} \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) (1 - y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}(\sigma (1 - y)^{\frac{n+1}{2n}}) e^{it} \right] + \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{(n+1)(2m+1)}{n} (1 - y)^{\frac{2mn+2m+1}{n}} \right) + \mathcal{Re} \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[-\left(\frac{n+1}{n} \right) (m + 1) (1 - y)^{\frac{mn+m+1}{n}} + \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma \sqrt{2}}{J_{-\nu}(\sigma \sqrt{2})} \right) (1 - y)^{\frac{2-n}{2n}} J_{1-\nu}(\sigma \sqrt{2} (1 - y)^{\frac{n+1}{2n}}) \right] \right\} \right] \right)^n \tag{51}$$

from where the shear stress acting on the bottom ($y = 0$) is determined:

$$\tau_o(t) = \frac{1}{Re} \left((Re)^{\frac{1}{n}} + \varepsilon \mathcal{Re} \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma}{\Omega J_{-\nu}(\sigma)} \right) J_{1-\nu}(\sigma) e^{it} \right] + \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(n+1)(2m+1)}{n} + \mathcal{Re} \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[\left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(\frac{\sigma \sqrt{2}}{J_{-\nu}(\sigma \sqrt{2})} \right) J_{1-\nu}(\sigma \sqrt{2}) - \frac{(n+1)(m+1)}{n} \right] \right\} \right] \right)^n \tag{52}$$

It is easy to show that the bottom shear stress averaged on a cycle is equal to the value associated with the steady flow, i.e., $\langle \tau_o \rangle = 1$, where the angular bracket denotes cycle average.

2.1. Flow Enhancement

The instantaneous dimensionless discharge can be expressed as

$$q(t) = q_0 + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) \tag{53}$$

where

$$q_0 = \int_0^1 u_0(y) dy = \frac{n}{2n + 1} Re^{\frac{1}{n}} \tag{54}$$

$$q_1(t) = \varepsilon \int_0^1 \mathcal{Re} \left[\left((1 - y)^{\frac{1}{2n}} \frac{1}{J_{-\nu}(\sigma)} J_{-\nu}(\sigma (1 - y)^{\frac{n+1}{2n}}) - 1 \right) \frac{e^{it}}{\Omega} \right] dy \tag{55}$$

$$q_2(t) = \varepsilon^2 \int_0^1 \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(1 - (1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(2m+1)} \right) + \mathcal{R}e \left\{ e^{2it} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \left[(1-y)^{\frac{(n+1)}{n}(m+1)} - \frac{(1-y)^{\frac{1}{2n}} I_{-\nu} \left(\sigma \sqrt{2} (1-y)^{\frac{n+1}{2n}} \right)}{I_{-\nu}(\sigma \sqrt{2})} \right] \right\} \right] dy \tag{56}$$

The flow enhancement is defined as $I_q = (\langle q \rangle - q_S) / q_S$, where $\langle q \rangle$ is the average discharge of the pulsatile flow along a period of fluctuation, and q_S is the discharge associated with the steady component of the pressure gradient. In this problem, $q_S = q_0$. Contribution of q_1 is nil, resulting in that the flow enhancement is only due to q_2 . The second-order discharge (Equation (56)) has two addends, but as the second one depends on e^{2it} , it does not contribute to the increment of discharge in a period. Thus, the flow enhancement is given by:

$$I_q = \varepsilon^2 \frac{1}{Re^{\frac{1}{n}}} \frac{2n+1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(2m+1)(n+1)}{(2m+1)(n+1)+n} \tag{57}$$

In the above equation, a_m is obtained from Equation (41).

The analytical expression for the flow enhancement when inertia is negligible can be obtained, making zero the left-hand-side of Equation (8) and integrating along y , resulting $I_q = \varepsilon^2 \frac{1-n}{4n^2}$. This is the same discharge increment than for a pulsating flow in a cylindrical pipe [37]. The dimensionless cycle-averaged cross-section-mean-velocity is easily computed from Equation (53), resulting $\langle U \rangle = (2n / (2n + 1)) Re^{\frac{1}{n}} (1 + \varepsilon^2(1 - n) / (4n^2))$.

2.2. Dispersion Coefficient

The dimensionless coefficient of longitudinal dispersion, \mathcal{K}^* , is defined as ([41], p.86)

$$\mathcal{K}^* = \frac{\mathcal{K}D}{U_0^2 h^2} = - \int_0^1 u'(y) \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} u'(\hat{y}) d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \tag{58}$$

where \mathcal{K} is the dispersion coefficient, D is the coefficient of molecular diffusion, and u' is the dimensionless velocity deviation from the vertical average (\bar{u}). The structure of the triple integral given by Equation (58) precludes us to look for a second-order analytical solution for \mathcal{K}^* , but it is possible to compute its cycle-average value. The dimensionless dispersion coefficient averaged in a period of oscillation is $\langle \mathcal{K}^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}^* dt$. The order of integration can be changed using the Fubini theorem [42], and the cycle average is computed from $\langle \mathcal{K}^* \rangle = - \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y) u'(\hat{y}) dt \right\} d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy$. The velocity deviation contains terms involving e^{it} and e^{i2t} , whose integrals in a period are nil. Thus, it is not necessary to carry out the triple integrals in y for many of the terms that appear in Equation (58). Then, the inner integral is:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(y) u'(\hat{y}) dt \\ &= (u_0(y) - \bar{u}_0)(u_0(\hat{y}) - \bar{u}_0) \\ &+ \varepsilon^2 [(u_0(y) - \bar{u}_0)(u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) + (u_0(\hat{y}) - \bar{u}_0)(u_{20}(y) - \bar{u}_{20})] \end{aligned} \tag{59}$$

From the above result, it is easy to see that the cycle averaged dispersion coefficient has the structure

$$\langle \mathcal{K}^* \rangle = \langle \mathcal{K}^* \rangle_0 + \varepsilon^2 \langle \mathcal{K}^* \rangle_{20} \tag{60}$$

with

$$\langle \mathcal{K}^* \rangle_0 = \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} Re^{\frac{2}{n}} \tag{61}$$

and

$$\langle \mathcal{K}^* \rangle_{20} = - \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{\tilde{y}} [(u_0(y) - \bar{u}_0)(u_{20}(\hat{y}) - \bar{u}_{20}) + (u_0(\hat{y}) - \bar{u}_0)(u_{20}(y) - \bar{u}_{20})] d\hat{y} \right) d\tilde{y} \right] dy \tag{62}$$

After some rather boring algebra, the term accompanying ε^2 can be computed, and the cycle averaged dispersion coefficient is found to be:

$$\langle \mathcal{K}^* \rangle = \frac{2n^4}{3(2n+1)^2(4n+1)(5n+2)} Re^{\frac{2}{n}} + \varepsilon^2 Re^{\frac{1}{n}} \frac{2n^3(n+1)}{3(2n+1)(4n+1)} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} \tag{63}$$

where

$$A_{m,n} = a_m \left[\frac{(2m+1)(2mn+2m+8n+2)}{(2mn+2m+2n+1)(2mn+2m+4n+1)(2mn+2m+5n+2)} \right] \tag{64}$$

The dispersion enhancement is given by $I_{\mathcal{K}^*} = (\langle \mathcal{K}^* \rangle - \langle \mathcal{K}^* \rangle_0) / \langle \mathcal{K}^* \rangle_0$. Because the intricacy of the coefficient of second-order, it is not possible to get a simpler expression like that obtained for the discharge (Equation (57)).

3. Numerical Solution of the Velocity Distribution

In order to verify the correctness of the analytical expression of the velocity profiles reported in the previous section, Equation (13) has been numerically integrated with a spectral method. Spectral methods constitute the most confident approach to the solution of fluid mechanics equations for both Newtonian (see for instance [43–45]) and non-Newtonian (see for instance [46–48]) fluids, reducing at the minimum the impact of the numerical scheme on the physics of the flow under investigation. Moreover, the higher computational cost of these methods is widely compensated by their fast (exponential) rate of convergence [49]. The spatial discretization of Equation (13), along with the boundary conditions (14)–(15), has been carried out through a spectral patching collocation method based on Gauss–Lobatto–Chebyshev quadrature nodes (see for instance [50]). Denoted with y_i , with $i = 1, \dots, N$, the $N + 1$ nodes are obtained by the image of the $N + 1$ Gauss–Lobatto–Chebyshev points $x_i = \cos(\pi i / N)$ by an affine transformation mapping of $[1, -1]$ onto $[0, 1]$, and being $u_j = u(y_j)$, the semi-discretized version of Equation (13) reads

$$\Omega \frac{\partial u_i}{\partial t} = (1 + \varepsilon \sin \omega t) + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^{N+1} D_{ij} \eta_j \sum_{h=1}^{N+1} D_{jh} u_h \quad \forall i = 1, \dots, N - 1 \tag{65}$$

where D_{ij} is the ij -term of the Chebyshev collocation derivative matrix [49], and η_j the value of the apparent viscosity pertaining to the y_j grid point. In order to deal with the unbounded shear stress gradients associated with the non-Newtonian power-law model, we have adjusted the power-law model by replacing the apparent viscosity v_{app} as follows [51–53]:

$$v_{app} = \left[\delta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{66}$$

with δ an adjustment parameter for which non-negative values have to be prescribed. When $\delta = 0$, the standard power-law model is recovered. The influence of the δ value on the results has been discussed later on. The homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions (14) and (15) are enforced as follows:

$$u_0 = 0 \tag{67}$$

$$\sum_{h=1}^{N+1} D_{N+1h} u_h = 0 \tag{68}$$

The time discretization of Equation (58) has been carried out with a second-order Crank–Nicolson implicit method, iteratively solving the algebraic non-linear system at each time step.

With reference to the $n = 0.5$, case Figure 1 puts in evidence the effect of the δ value on the numerically computed velocity profile for the case $Re = 1, \Omega = 1$, and $\varepsilon = 0.1$. Four instants are shown, namely, $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$, and three different values of the adjustment parameter δ have been considered, namely, $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$.

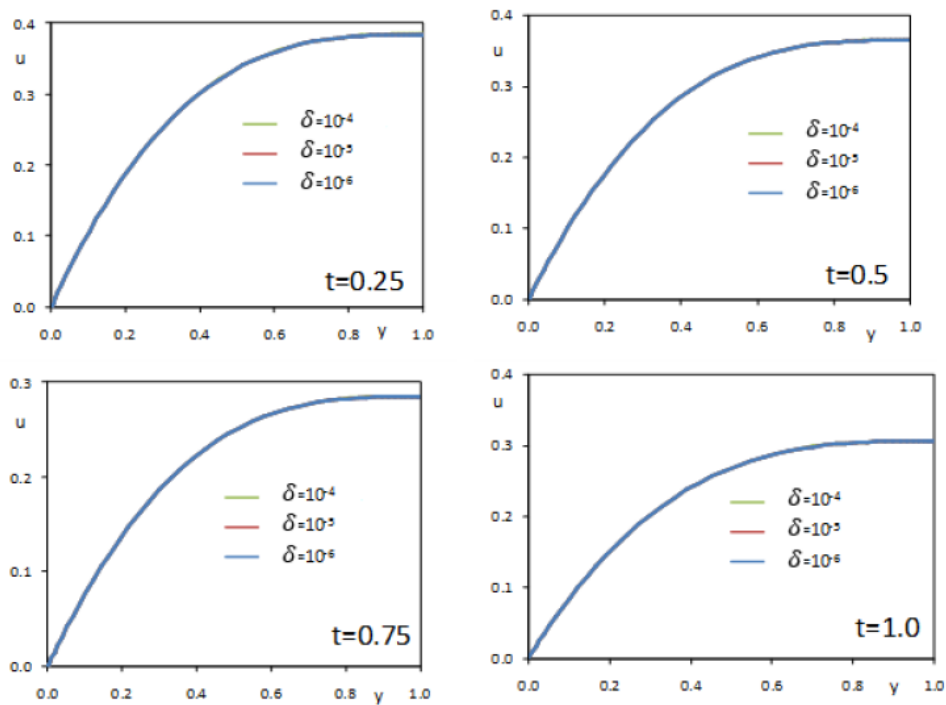


Figure 1. Effects of the adjustment parameter δ on the velocity profiles. $n = 0.5, Re = 1, \Omega = 1$, and $\varepsilon = 0.1$.

Figure 1 shows that the results are essentially independent of the δ value. Similar results (not shown herein) have been obtained, varying each parameter of the (Re, Ω) pair in the range $(1, 100)$. In what follows the value $\delta = 10^{-5}$ has been considered.

Figure 2 compares the velocity profiles analytically deduced with the corresponding ones numerically calculated. Four instants have been considered, namely, $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$. The power-law exponent n is equal to 0.5, while the Reynolds number, the pulsation Ω , and the ε coefficient are 1.0, 1.0, and 0.1, respectively. Figure 2 shows that the analytical solution is in very good agreement with the numerical one, for all instants.

With the aim of investigating the range of applicability of the deduced analytical solution, in Tables 1 and 2 the maximum percentual difference between the analytical and numerical solutions, in terms of discharge and wall shear stress, is shown. Four instants in the oscillating period, i.e., $t = 0.25, 0.50, 0.75, 1.0$, have been considered. The values of the power-law exponent and of the oscillation amplitude have been fixed equal to 0.5 and 0.1, respectively. Both the frequency and Reynolds number have been varied of two orders of magnitude.

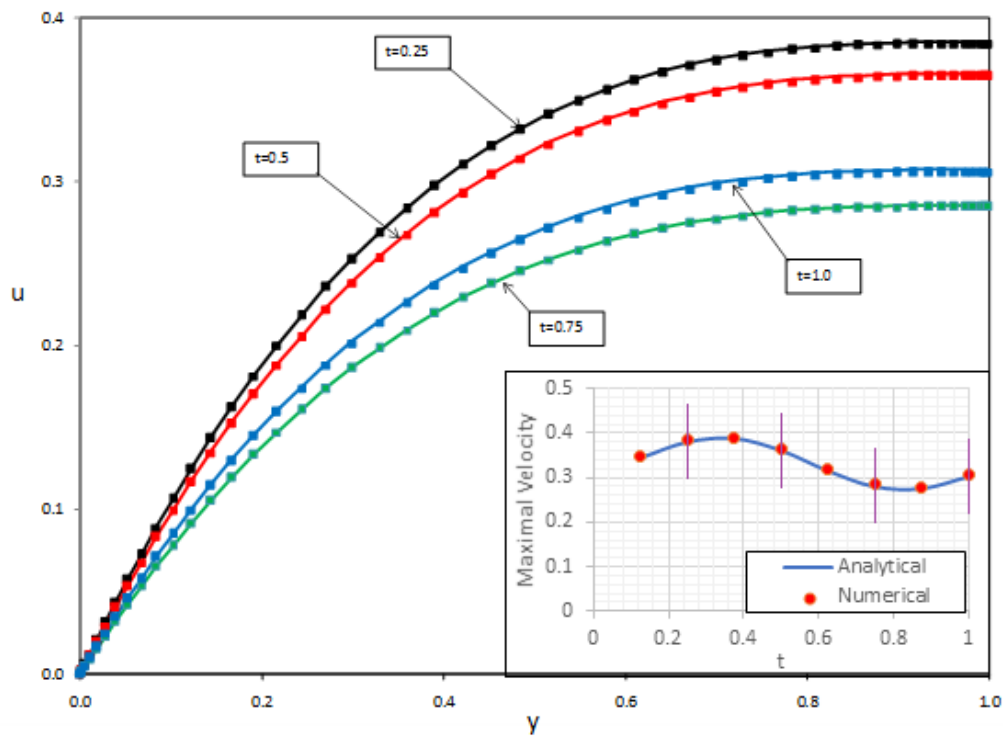


Figure 2. Comparison between analytical (lines) and numerical (symbols) velocity profiles. $n = 0.5, Re = 1, \Omega = 1,$ and $\varepsilon = 0.1$. The inset shows the pulsation of the maximum velocity (reached at $y = 1$). The vertical lines in the inset are indicative of the times at which the velocity profiles were plotted in the main figure.

Table 1. Discharge percentage error ($n = 0.5, \varepsilon = 0.1$).

	$t = 0.25$	$t = 0.50$	$t = 0.75$	$t = 1.00$
$Re = 1, \Omega = 1$	-1.6%	-1.8%	-2.0%	-1.9
$Re = 100, \Omega = 1$	-0.4%	-0.4%	-0.4%	-0.4%
$Re = 1, \Omega = 100$	-0.7%	-0.7%	-0.7%	-0.7%

Table 2. Wall shear stress percentage error ($n = 0.5, \varepsilon = 0.1$).

	$t = 0.25$	$t = 0.50$	$t = 0.75$	$t = 1.00$
$Re = 1, \Omega = 1$	0.4%	-0.1%	0.6%	-0.1%
$Re = 100, \Omega = 1$	0.6%	0.6%	-0.3%	-0.3%
$Re = 1, \Omega = 100$	Less than 0.1%	Less than 0.1%	Less than 0.1%	Less than 0.1%

Smaller values of ε lead to a reduction of both percentage errors (results not shown). It follows that, for sufficiently small values of ε , i.e., smaller than 0.1, the analytical solution may be confidently applied in a large range of Reynolds number and frequency values.

As expected, similar conclusions cannot be drawn when the oscillation amplitude is increased. Indeed, Table 3, where both the percentual errors in the case $\varepsilon = 0.5, Re = 1, \Omega = 1,$ and $n = 0.5$ are reported, shows that as the perturbation parameter is increased, the accuracy of the proposed solution, as it could be expected, significantly reduces.

Table 3. Percentage errors ($n = 0.5, \varepsilon = 0.5, Re = 1.0, \Omega = 1$).

	$t = 0.25$	$t = 0.50$	$t = 0.75$	$t = 1.00$
Discharge	-14.9%	-19.7%	-84.9%	-42.8%
Wall shear stress	6.7%	-1.9%	30.9%	-3.5%

4. Results

4.1. Wall Shear Stress

The wall shear stress is given by Equation (52). Due to the cumbersome structure of the relationship, it was not feasible to determine analytically some characteristics like the mean, maximum, and minimum values of the wall shear stress. Some limit behaviours of τ_0 were analyzed for values of the flow index $n = 0.5, 0.75$, and 1 (shown below).

4.1.1. Wall Shear Stress for $\Omega \gg 1$ and $Re \sim 1$

For large dimensionless frequency and $Re \sim 1$, Equation (13) indicates that $\Omega \partial u / \partial t \sim \partial \tau / \partial y$, i.e., the contribution of the fluctuating part was negligible, as it is corroborated in Figure 3, where the values $\Omega = 100, Re = 1$, and $\varepsilon = 0, 1$ were used. It was observed that the amplitude deviated at the most 1% from the non-pulsating condition (for $n = 1$). Also, it showed a delay of the response with respect to the pressure fluctuation. The non-linearity reduced even more the pulsation, already reduced by the effect of large Ω , with a decrease in amplitude as the flow index decreased.

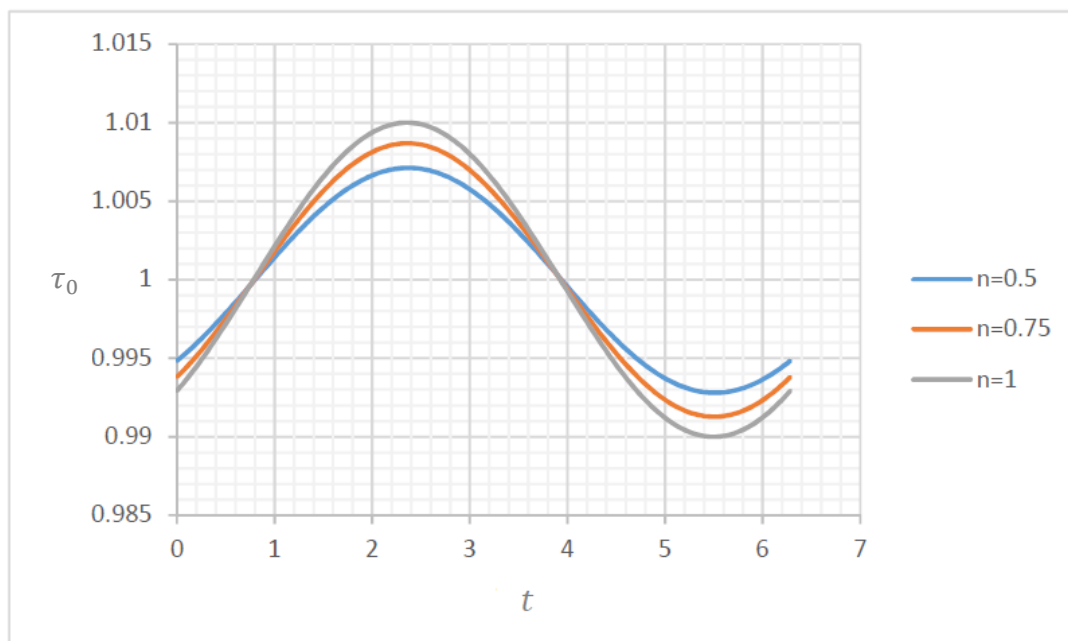


Figure 3. Wall shear stress for $\Omega = 100, Re = 1, \varepsilon = 0.1$.

4.1.2. Wall Shear Stress for $\Omega \ll 1$ and $Re \sim 1$

For small Ω and $Re \sim 1$, the terms of first- and second-order in the solution of τ_0 became important as they were divided by Ω , resulting in higher amplitude fluctuations, as it is observed in Figure 4, computed for $\Omega = 0, 1, Re = 1$, and $\varepsilon = 0.1$.

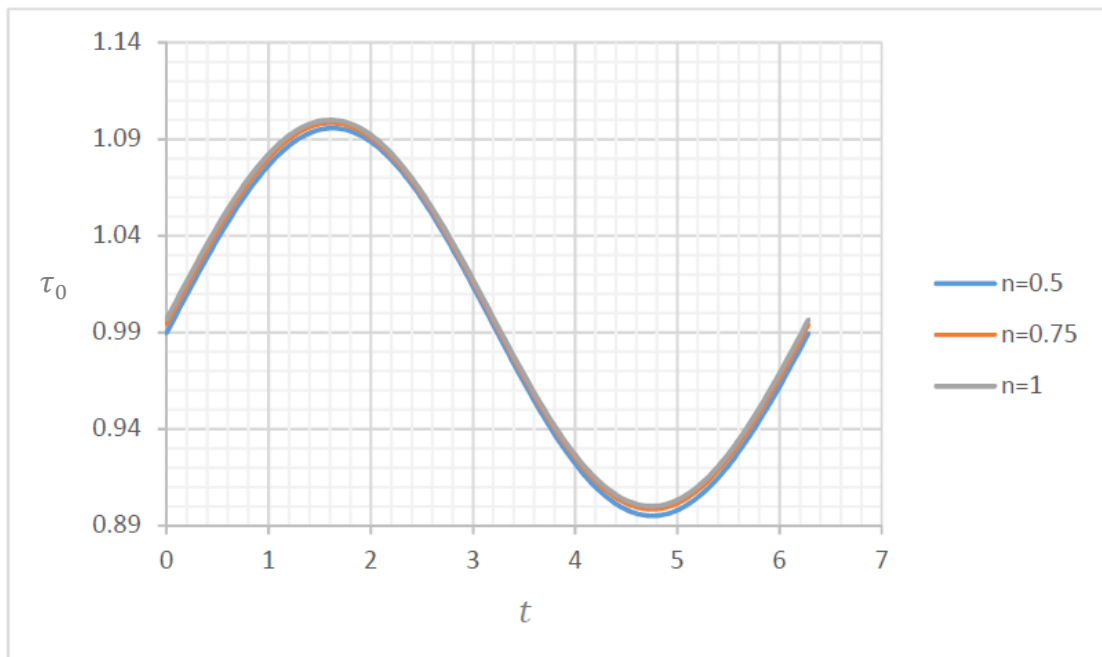


Figure 4. Wall shear stress for $\Omega = 0.1, Re = 1, \epsilon = 0.1$.

4.1.3. Wall Shear Stress for $Re \gg 1$ and $\Omega \sim 1$

For large Re , the effect of Ω was negligible, and $\tau_0 \rightarrow 1 + (n/Re^{1/n})O(\epsilon) \approx 1$, independently of the flow index, as it is shown in Figure 5, with $\Omega = 1, Re = 100$, and $\epsilon = 0.1$. The maximum difference from $\tau_0 = 1$ was obtained for a Newtonian fluid and was about 1%. When $n = 0.5$, this difference was reduced to 0.1%.

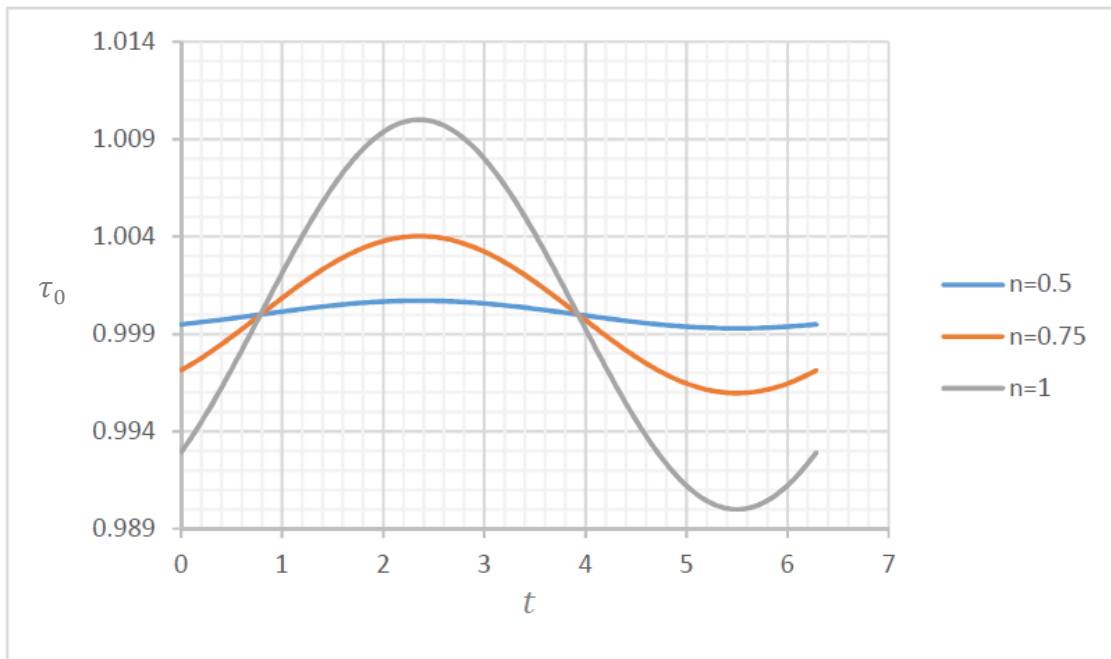


Figure 5. Wall shear stress for $\Omega = 1, Re = 100, \epsilon = 0.1$.

4.1.4. Wall Shear Stress for $Re \ll 1$ and $\Omega \sim 1$

For small Re and $\Omega \sim 1$, the term of order ε in Equation (52) could not be neglected, and the pulsation became important, with little influence of the flow index, as could be seen in Figure 6, where the three curves were practically coincident for $\Omega = 1$, $Re = 0,1$ and $\varepsilon = 0.1$.

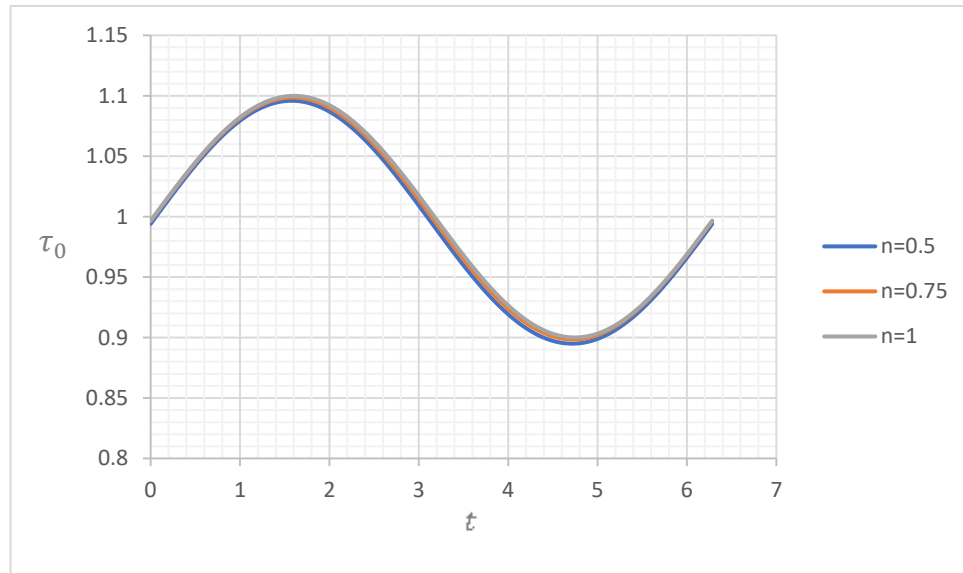


Figure 6. Wall shear stress for $\Omega = 1$, $Re = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$.

4.2. Discharge

The discharge was computed from Equations (52) to (56) and depended on Re , Ω , and n . For a given flow index, the following cases could be distinguished.

4.2.1. Discharge for $\Omega \gg 1$ and $Re \sim 1$

Equation (13) could be written as:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Omega} + \frac{\varepsilon}{\Omega} \sin(t) + \frac{1}{\Omega Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) \quad (69)$$

When Ω was large and $Re \sim 1$, then $1/\Omega \ll 1$, $\varepsilon/\Omega \ll 1$, and $1/(\Omega Re) \ll 1$, resulting

$$\frac{\partial u}{\partial t} \ll 1 \quad (70)$$

The above result indicated that the dependency of the velocity profile with time was negligible, from where no change of the discharge with time was expected. As an example, Figure 7 presents the discharge in function on time when $\Omega = 100$, $Re = 1$, $\varepsilon = 0.1$ for $n = 0.5$, 0.75 , and 1 .

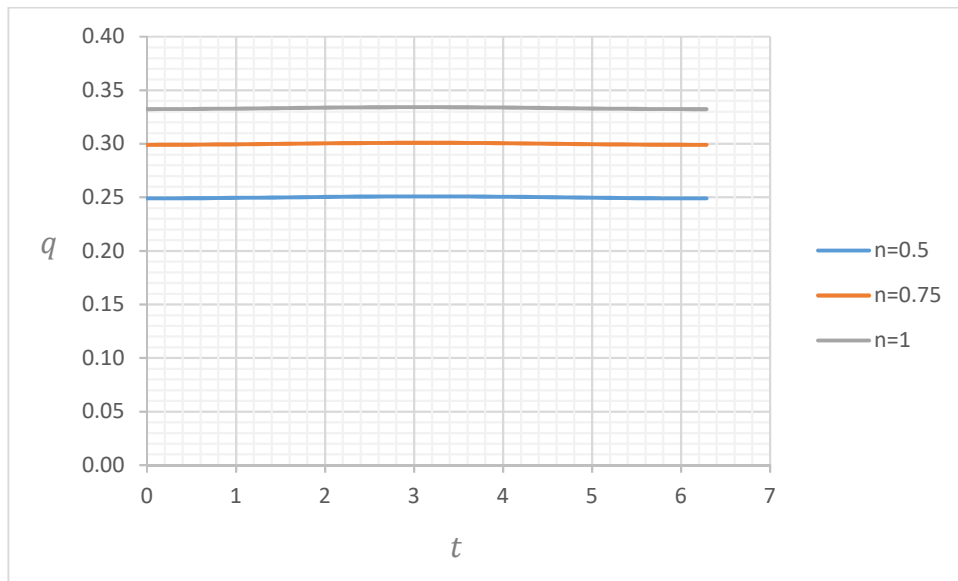


Figure 7. Discharge for $\Omega = 100, Re = 1,$ and $\epsilon = 0.1.$

4.2.2. Discharge for $\Omega \ll 1$ and $Re \sim 1$

When Ω was small, the pulsating term was not negligible, and the fluctuation in time was noted in the discharge. Considering $\Omega \sim \epsilon \ll 1$ resulted that the discharge was the superposition of the discharge for the steady-state condition with a fluctuating behaviour of the velocity given by $\Omega \partial u / \partial t \sim \epsilon \sin(t),$ resulting in a harmonic oscillation of the discharge around the steady flow. As an example, Figure 8 shows the discharge for $\Omega = 0.1, Re = 1, \epsilon = 0.1$ for $n = 0.5, 0.75,$ and $1.$

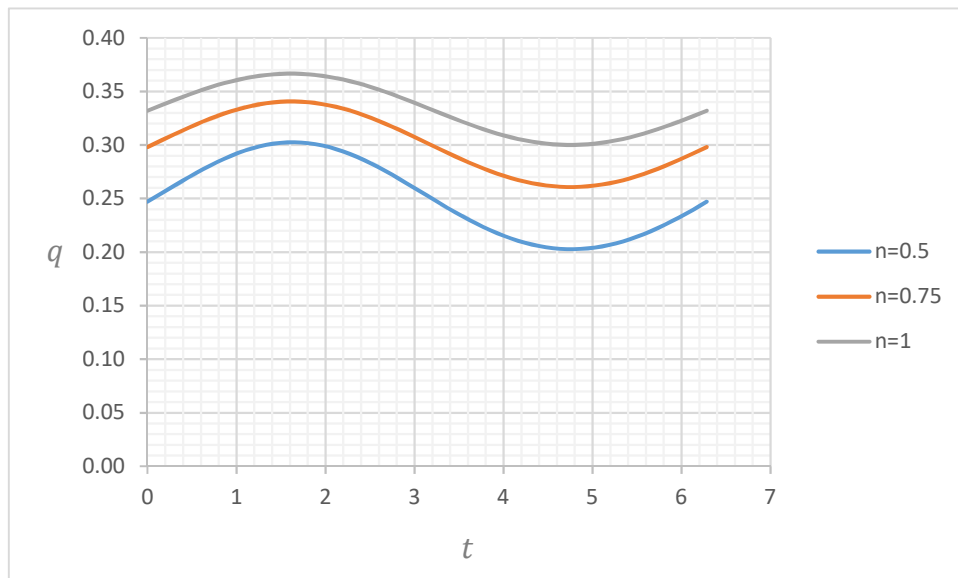


Figure 8. Discharge for $\Omega = 0.1, Re = 1,$ and $\epsilon = 0.1.$

4.2.3. Discharge for $\Omega \sim 1$ and $Re \gg 1$

Large Re and $\Omega \sim 1$ mean large $\sigma,$ and q_1 and q_2 tend to be negligible, and the discharge is defined by the steady part of the discharge, as in Equation (54). Figure 9 shows the discharge for $\Omega = 1, Re = 100, \epsilon = 0.1$ for several values of the flow index.

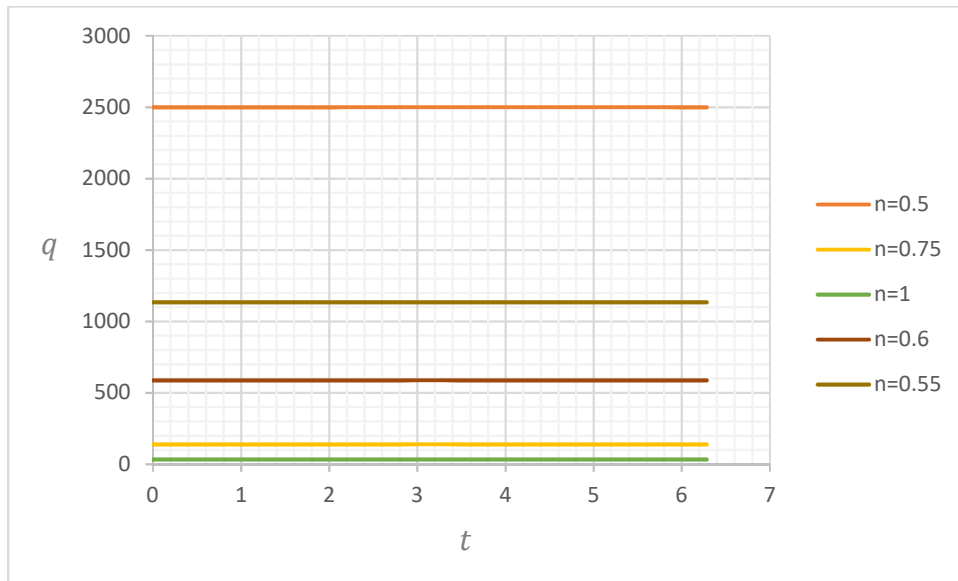


Figure 9. Discharge for $\Omega = 1, Re = 100, \varepsilon = 0.1$.

4.2.4. Discharge for $\Omega \sim 1$ and $Re \ll 1$

When $\Omega \sim 1$ and $Re \ll 1$, the contributions of the unsteady components of the discharge became important and could not be neglected as in the previous case. As an example, Figure 10 shows the discharge for $\Omega = 1, Re = 0.1, \varepsilon = 0.1$ for $n = 0.5, 0.75$.

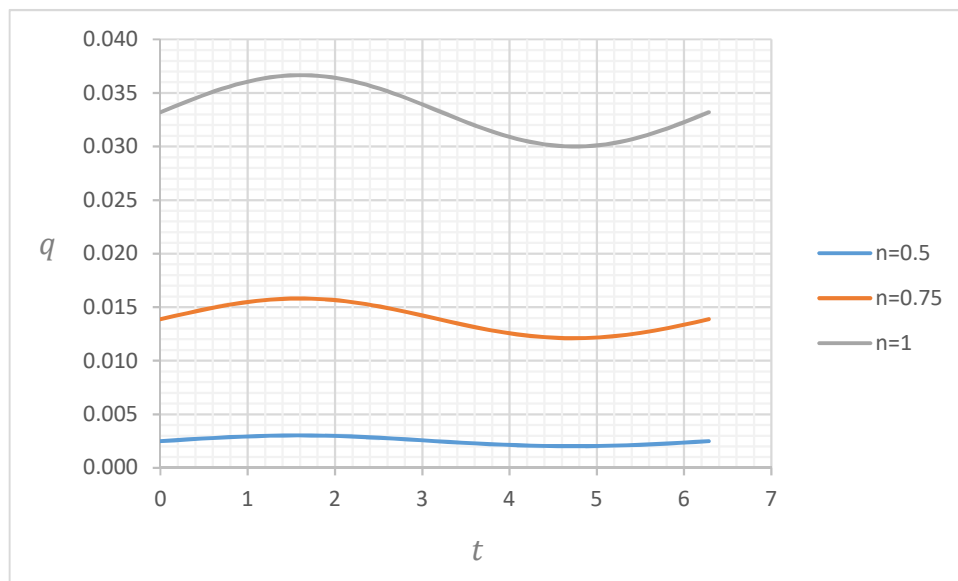


Figure 10. Discharge for $\Omega = 1, Re = 0.1, \varepsilon = 1$.

4.3. Flow Enhancement

The increment of discharge due to the non-linear behaviour of the constitutive law, summarized by I_q (Equation (57)), is exemplified in Figures 11 and 12. The first figure presents the flow enhancement for $n = 0.75$ as function of the dimensionless frequency with the Reynolds number as a parameter. In Figure 12, for $Re = 1$, the flow index was considered as a parameter. In both cases, $\varepsilon = 0.1$. As expected, at low frequencies, the discharge increment went to the value determined analytically. At large frequencies, there was no enhancement with respect to the non-pulsatile condition. Although the value of Ω , at which I_q was nearly zero, increased with Re , the product ΩRe remained nearly

constant and was equal to 100. The same happened with the value of Ω at which the enhancement reached its maximum value. It decreased with Re , but $\Omega Re \approx 0.1$. For a given Re , the Ω span, at which I_q decreased from its maximum value to zero, was about 3 decades. As expected, the closer the fluid to a Newtonian behavior, the lower the flow enhancement, ($n \rightarrow 1$, $I_q \rightarrow 0$), as shown in Figure 12.

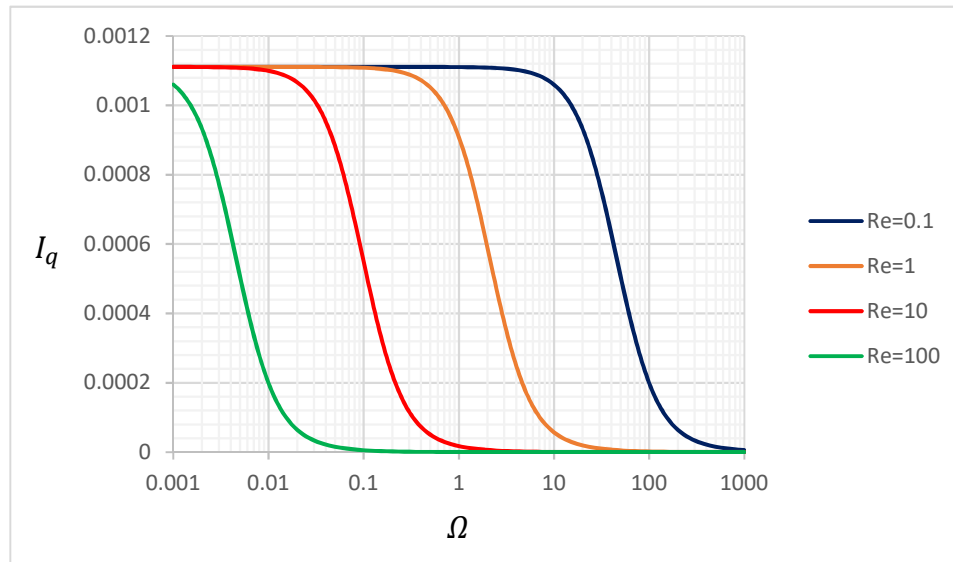


Figure 11. Dependency of the flow enhancement coefficient with dimensionless frequency and Reynolds number for $n = 0.75$ and $\varepsilon = 0.1$.

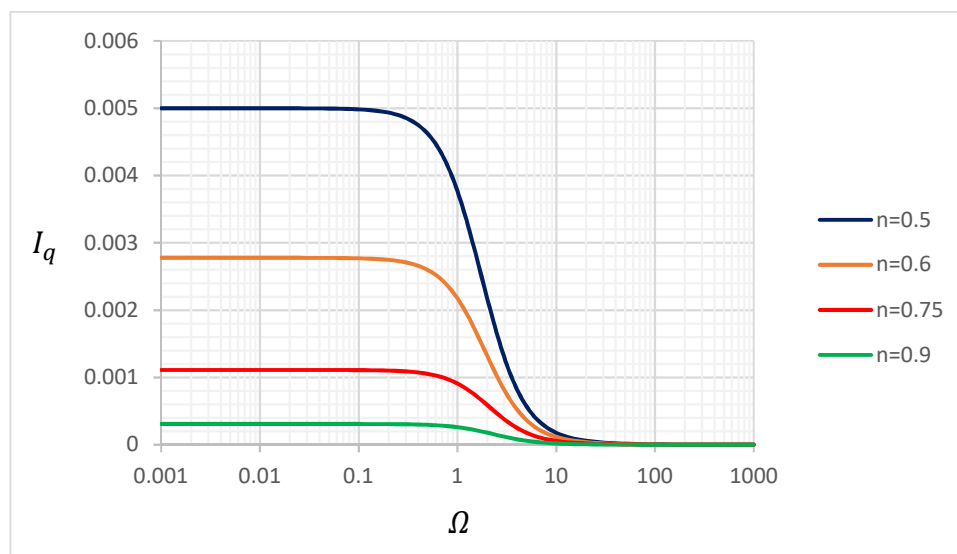


Figure 12. Dependency of the flow enhancement coefficient with dimensionless frequency and flow index for $Re = 1$ and $\varepsilon = 0.1$.

4.4. Dispersion Enhancement

The dispersion enhancement, characterized by I_K , behaved in an identical manner as I_q , as shown in Figures 13 and 14, where the plots are for the same values of Re and n compared to in Figures 11 and 12. Thus, it was observed that the dispersion enhancement goes to zero at a large dimensionless frequency as the pulsating pressure effect become negligible. For small frequencies, I_K tend to a constant value. Like I_q , the range of Ω , at which I_K decreases from its maximum value to zero, was

around 3 decades, satisfying $\Omega Re \approx 0.1$ for the maximum and $\Omega Re \approx 100$ for zero, with $I_K \rightarrow 0$ as $n \rightarrow 1$ (Figure 14).

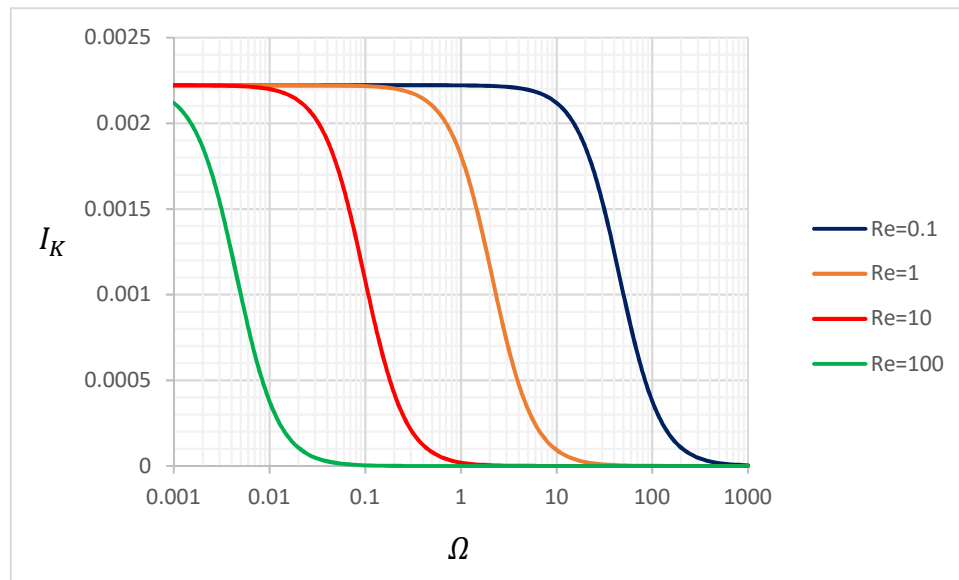


Figure 13. Dependency of the dispersion enhancement coefficient with dimensionless frequency and Reynolds numbers for $n = 0.75$ and $\varepsilon = 0.1$.

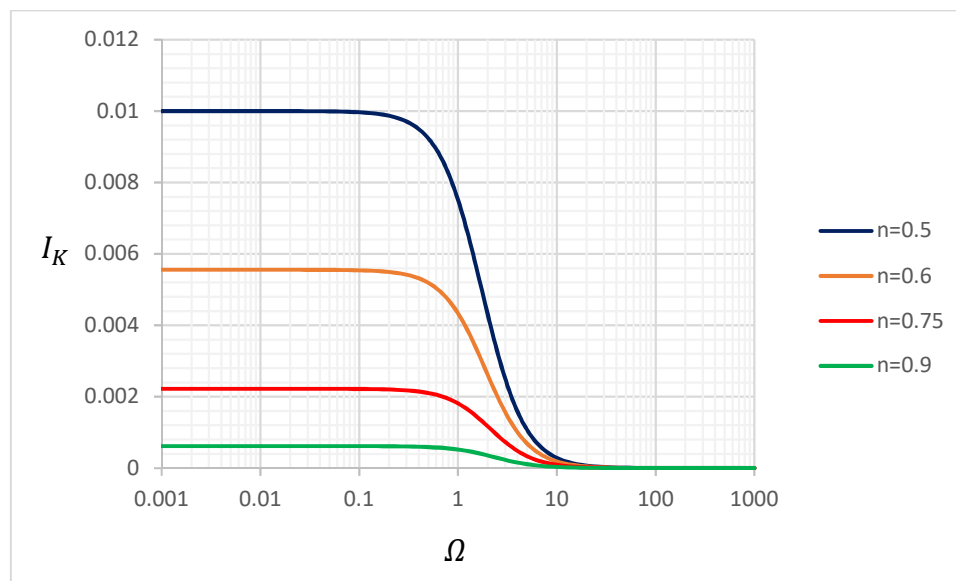


Figure 14. Dependency of the dispersion enhancement coefficient with dimensionless frequency and flow index for $Re = 1$ and $\varepsilon = 0.1$.

5. Conclusions

The pulsating two-dimensional flow of an Ostwald-de Waele fluid was solved analytically using the perturbation method up to the second-order term. Details of the analysis were presented, skipping only the more cumbersome algebra. A numerical solution based on spectral methods was also used to compute the velocity profile. Both analytical and numerical solutions showed very good agreement. From the velocity distribution, analytical expressions for the discharge and the wall shear stress were determined. The discharge and dispersion enhancements resulting from the nonlinearity of the rheology were also determined. These enhancements were noticed at the second-order. In terms of the dimensionless frequency, the enhancement coefficients behaved in a similar way for both the discharge

and the dispersion coefficients, presenting a variation along 3 decades of Ω from their maximum values (corresponding to the non-inertial limit) to zero (for the non-pulsatile condition).

Author Contributions: Funding acquisition: A.T. Conceptualization of the problem: A.T., A.V., and M.I. Development of the analytical solutions, computation of the analytical solutions and original plots: R.G. Review of the algebra: A.T. Review of the analytical solutions and computations: A.T., A.V., and M.I. Numerical solution of the velocity distribution: A.V. Original draft preparation and writing: A.T. Review: R.G., A.T., A.V., and M.I. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: The authors acknowledge the funding provided by the Chilean Fund for Scientific and Technological Research by means of the Project Fondecyt 1161751. AT also acknowledges CONICYT Project AFB180004.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Sexl, T.; Ueber den von, E.G. Richardson entdeckten Annulareffect. *Z. Phys.* **1930**, *61*, 349–362. [[CrossRef](#)]
2. Lambossy, P. Oscillations forcees d'un liquide incompressible et visqueux dans un tuve rigide et horizontal. Calcul de la force de frottement. *Helv. Phys. Acta* **1952**, *25*, 371–386.
3. Womersley, J. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.* **1955**, *127*, 553–563. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
4. Womersley, J. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube-I: The linear approximation for long waves. *Proc. R. Soc. Ser.* **1955**, *46*, 199–221. [[CrossRef](#)]
5. Pipkin, A.C. Alternating flow of non-Newtonian Fluids in tubes of arbitrary cross-section. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **1964**, *15*, 1–13. [[CrossRef](#)]
6. Etter, I.; Schowalter, W.R. Unsteady flow of an Oldroyd fluid in a circular tube. *Trans. Soc. Rheol.* **1965**, *9*, 351–369. [[CrossRef](#)]
7. Rahaman, K.D.; Ramkissoon, H. Unsteady axial viscoelastic pipe flows. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1995**, *57*, 27–38. [[CrossRef](#)]
8. Uchida, S. Pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion. *Z. Angew. Math. Phys.(ZAMP)* **1956**, *5*, 403–422. [[CrossRef](#)]
9. Barnes, H.A.; Townsend, P.; Walters, K. On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol. Acta* **1971**, *10*, 517–527. [[CrossRef](#)]
10. Phan-Thien, N.; Dudek, J. Pulsating flow revisited. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1982**, *11*, 147–161. [[CrossRef](#)]
11. Phan-Thien, N. Flow enhancement mechanisms of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. *Rheol. Acta* **1980**, *19*, 285–290. [[CrossRef](#)]
12. Steller, R. A new approach to the pulsating oscillating flows of viscoelastic liquid in channels. *Rheol. Acta* **1993**, *32*, 192–205. [[CrossRef](#)]
13. Davies, J.M.; Bhumiratana, S.; Bird, R.B. Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1978**, *3*, 237–259. [[CrossRef](#)]
14. Mai, T.-Z.; Davis, A.M.J. Laminar pulsatile two-phase non-Newtonian flow through a pipe. *Comput. Fluids* **1996**, *25*, 77–93. [[CrossRef](#)]
15. Daprà, I.; Scarpi, G. Pulsatile pipe flow of pseudoplastic fluids. *Meccanica* **2006**, *41*, 501–508. [[CrossRef](#)]
16. Merril, E.W. Rheology of blood. *Physiol. Rev.* **1969**, *49*, 863–888.
17. Prakash, J.; Ogulu, A. A study of pulsatile blood flow modelled as a power law fluid in a constricted tube. *Int. Commun. Heat Mass. Transfer.* **2007**, *34*, 762–768. [[CrossRef](#)]
18. Sankar, D.S.; Lee, U. Mathematical modelling of pulsatile flow of non-Newtonian fluid in stenosed arteries. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **2009**, *14*, 2971–2981. [[CrossRef](#)]
19. Herrera-Valencia, E.E.; Calderas, F.; Medina-Torres, L.; Pérez-Camacho, M.; Moreno, L.; Manero, O. On the pulsating flow behavior of a biological fluid: Human blood. *Rheol. Acta* **2017**, *56*, 387–407. [[CrossRef](#)]
20. Siginer, A. On the pulsating pressure gradient driven flow of viscoelastic liquids. *J. Rheol.* **1991**, *35*, 271–311. [[CrossRef](#)]
21. McGInty, S.; McKee, S.; McDermont, R. Analytic solutions of Newtonian and non-Newtonian pipe flows subject to a general time-dependent pressure gradient. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **2009**, *162*, 54–77. [[CrossRef](#)]
22. Daprà, I.; Scarpi, G. Pulsatile Poiseuille flow of a viscoplastic fluid in the gap between coaxial cylinders. *J. Fluids Eng.* **2011**, *133*, 081203. [[CrossRef](#)]

23. Letelier, M.F.; Siginer, D.A.; Caceres, C. Pulsating flow of viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary cross-section—Part I: Longitudinal Field. *Int. J. Non Linear Mech.* **2002**, *37*, 369–393. [[CrossRef](#)]
24. Daprà, I.; Scarpi, G. Perturbation solution for pulsatile flow of a non-Newtonian Williamson fluid in a rock fracture. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **2007**, *44*, 271–278. [[CrossRef](#)]
25. Nandakumar, N.; Sahu, K.C.; Anand, M. Pulsatile flow of a shear thinning model for blood through a two-dimensional stenosed channel. *Eur. J. Mech. B Fluids* **2015**, *49*, 29–35. [[CrossRef](#)]
26. Edwards, M.F.; Nellist, D.A.; Wilkinson, W.L. Unsteady, laminar flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Chem. Eng. Sci.* **1972**, *27*, 295–306. [[CrossRef](#)]
27. Balmer, R.T.; Fiorina, M.A. Unsteady flow of an inelastic power law fluid in a circular tube. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1980**, *7*, 89–198. [[CrossRef](#)]
28. Adusumilli, R.S.; Hill, G.A. Transient Laminar Flows of Truncated Power Law Fluids in Pipes. *Can. J. Chem. Eng.* **1984**, *62*, 594–601. [[CrossRef](#)]
29. Nakamura, M.; Sawada, T. Numerical study on the laminar pulsatile flow of slurries. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1987**, *22*, 191–206. [[CrossRef](#)]
30. Warsi, Z.U.A. Unsteady flow of power-law fluids through circular pipes. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **1994**, *55*, 197–202. [[CrossRef](#)]
31. Javadzadegan, A.; Esmaeili, M.; Majidi, S.; Fakhimghanbarzadeh, B. Pulsatile flow of viscous and viscoelastic fluids in constricted tubes. *J. Mech. Sci. Technol.* **2009**, *23*, 2456–2467. [[CrossRef](#)]
32. Yakhot, A.; Arad, M.; Ben-Dor, G. Numerical investigation of a laminar pulsating flow in a rectangular duct. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **1999**, *29*, 935–950. [[CrossRef](#)]
33. Tu, C.; Deville, M. Pulsatile flow of non-newtonian fluids through arterial stenoses. *J. Biomech.* **1996**, *29*, 899–908. [[CrossRef](#)]
34. Pontrelli, G. Pulsatile blood flow in a pipe. *Comput. Fluids* **1998**, *27*, 367–380. [[CrossRef](#)]
35. Harris, J.; Maheshwari, R. Oscillatory pipe flow: A comparison between predicted and observed displacement profiles. *Rheol. Acta* **1975**, *14*, 162–168. [[CrossRef](#)]
36. Thurston, G. Elastic Effects in Pulsatile Blood Flow. *Microvasc. Res.* **1975**, *9*, 145–157. [[CrossRef](#)]
37. Davies, J.; Chakrabarti, A. A modified pulsatile flow apparatus for measuring flow enhancement in combined steady and oscillatory shear flow. In *Rheology*, 1st ed.; Astarita, G., Marrucci, G., Nicolais, L., Eds.; Springer Science + Business Media: New York, NY, USA, 1980.
38. Kajiuchi, T.; Saito, A. Flow enhancement of laminar pulsating flow of Bingham plastic fluids. *J. Chem. Eng. Jpn.* **1984**, *17*, 34–38. [[CrossRef](#)]
39. Lin, Y.; Tan, G.; Phan-Thien, N.; Khoo, B. Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspensions in tubes. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **2014**, *212*, 13–17. [[CrossRef](#)]
40. Watson, G. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 1st ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1922.
41. Fischer, H.B.; List, E.J.; Koh, R.Y.; Imberger, J.; Brooks, N.H. *Mixing in Inland and Coastal Waters*; Academic Press Inc.: Cambridge, MA, USA, 1979.
42. Thomas, G.; Finney, R. *Calculus and Analytic Geometry*, 9th ed.; Addison-Wesley: Boston, MA, USA, 1996.
43. Patera, A.T. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.* **1984**, *54*, 468–488. [[CrossRef](#)]
44. Kim, J.; Moin, P.; Moser, R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **1987**, *177*, 133–166. [[CrossRef](#)]
45. Manna, M.; Vacca, A.; Deville, M. Preconditioned spectral multi-domain discretization of the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.* **2004**, *201*, 204–223. [[CrossRef](#)]
46. Huang, L.; Chen, Q. Spectral Collocation Model for Solitary Wave Attenuation and Mass Transport over Viscous Mud. *J. Eng. Mech.* **2009**, *135*, 881–891. [[CrossRef](#)]
47. Liu, R.; Liu, Q.S. Non-modal instability in plane Couette flow of a power-law fluid. *J. Fluid Mech.* **2011**, *676*, 145–171. [[CrossRef](#)]
48. Niu, J.; Zheng, L.; Yang, Y.; Shu, C.-W. Chebyshev spectral method for unsteady axisymmetric mixed convection heat transfer of power law fluid over a cylinder with variable transport properties. *Int. J. Numer. Anal. Mod.* **2014**, *11*, 525–540.
49. Canuto, C.; Hussaini, M.; Quarteroni, A.; Zang, T. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1988.

50. Manna, M.; Vacca, A. An efficient method for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations in cylindrical geometries. *J. Comput. Phys.* **1999**, *151*, 563–584. [[CrossRef](#)]
51. Pascal, J.P.; D'Alessio, J.D.; Hasan, M. Instability of gravity-driven flow of a heated power-law fluid with temperature dependent consistency. *AIP Adv.* **2018**, *8*, 105215–105226. [[CrossRef](#)]
52. Iervolino, M.; Pascal, J.P.; Vacca, A. Instabilities of a power-law film over an inclined permeable plane: A two-sided model. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **2018**, *259*, 111–124. [[CrossRef](#)]
53. Iervolino, M.; Pascal, J.P.; Vacca, A. Thermocapillary instabilities of a shear-thinning fluid falling over a porous layer. *J. Non Newton. Fluid Mech.* **2019**, *270*, 36–50. [[CrossRef](#)]



© 2020 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).