



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

**INCORPORACIÓN DE INCERTIDUMBRE ACERCA DEL PRECIO DE LA
PULPA DE MADERA EN LA TOMA DE DECISIONES PRODUCTIVAS DE
LA INTEGRACIÓN VERTICAL BOSQUE-ASERRADERO EN LA
INDUSTRIA FORESTAL CHILENA.**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

LUIS SEBASTIÁN ENRIQUE MUÑOZ MÁRQUEZ

PROFESOR GUÍA:
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO
JUAN PABLO CAVADA HERRERA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería

SANTIAGO DE CHILE

2020

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: LUIS SEBASTIÁN ENRIQUE MUÑOZ MÁRQUEZ
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

INCORPORACIÓN DE INCERTIDUMBRE ACERCA DEL PRECIO DE LA PULPA DE MADERA EN LA TOMA DE DECISIONES PRODUCTIVAS DE LA INTEGRACIÓN VERTICAL BOSQUE-ASERRADERO EN LA INDUSTRIA FORESTAL CHILENA.

En este trabajo de tesis se investiga la incorporación de estocasticidad en el precio de la pulpa de madera a un problema de planificación forestal integrado con decisiones de tala de bosques y producción de sus derivados.

A partir del problema de negocio y su modelamiento planteado por Troncoso et al. [23], se propone una metodología para la incorporación de dicha incertidumbre en forma de árbol de escenarios, resultando en un modelo de Programación Estocástica. Esta metodología incluye la estimación de la distribución de probabilidad en el tiempo del precio de la pulpa, a partir de una serie de tiempo histórica y un algoritmo de discretización basado en simulaciones a partir de la distribución obtenida. La metodología planteada es flexible en cuanto se puede utilizar para toda serie de tiempo de variable continua en un problema estocástico con cualquier número de etapas y cantidad de escenarios que se requiera.

Se estudian modelos heterocedásticos (volatilidad variable en el tiempo) para modelar la serie de precios de pulpa y se comparan con un modelo de volatilidad constante. A partir de uno de estos modelos, escogido en base a métricas de predicción y ajuste, se generan 115 árboles de escenarios con distintas características como la cantidad total de estos y distintas posibilidades de precio por año. Se analiza bajo qué condiciones la solución del problema estocástico es mejor que la del modelo que solo conoce el valor esperado del precio en cada año, llamado determinista, y por cuánto. Finalmente se analiza cómo cambian las decisiones óptimas del modelo estocástico en cada escenario.

La principal conclusión es que la incorporación de incertidumbre en este caso resulta en una mejora significativa entre 13% y 15% de utilidad esperada con respecto a la solución determinista. También se concluye que el efecto en la toma de decisiones al variar el precio de la pulpa es suficientemente sencillo y el problema lo suficientemente flexible, para que con una pequeña cantidad de escenarios, 24, se alcance gran parte del beneficio de incorporar incertidumbre.

No podemos ser sin los otros.

Agradecimientos

En primer lugar, a cada uno de los cabros que les hice clases durante todos estos años. De todas las actividades que tuve en la U, ninguna me dio tanta satisfacción, ni extrañé tanto al dejar la universidad hace unos años, como enseñar. Es lejos lo que más voy a echar de menos.

También a la comunidad de Beauchef y en especial del depto. de ingeniería industrial, donde conocí personas increíbles, cada una más admirable que la anterior, llenas de ideas y ganas de realizarlas! Gente curiosa, muy capaz y con un montón de energía e iniciativa. Me siento infinitamente agradecido de haber convivido con ellos y haber aprendido tanto de los que llegué a conocer :)

Gracias también a los profesores guía y coguía por su paciencia y permitirme avanzar esta tesis entre otros proyectos que ocupaban mi tiempo.

Finalmente a mis amigos, a mis padres y a mis hermanitos que siempre me han apoyado en los malos momentos y son uno de los mayores soportes de mi vida.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	2
1.1.1. Planificación forestal integrada e incertidumbre	2
1.1.2. Programación estocástica	2
1.1.3. Simulación de precios	3
1.2. Organización del contenido	4
2. Modelo de producción forestal	5
2.1. Flujo de fibra de madera	5
3. Formulación del problema estocástico	8
3.1. Formulación general de un SP	8
3.2. Árboles de escenarios	9
3.3. Formulación matemática	9
3.3.1. Conjuntos de índices	10
3.4. Variables de decisión	10
3.4.1. Parámetros	11
3.4.2. Restricciones	13
4. Construcción de árboles de escenarios	18
4.1. Estimación de la distribución de probabilidad de precios de pulpa en el tiempo	18
4.1.1. Modelo Browniano Geométrico (GBM)	19
4.1.2. Incorporando heterocedasticidad mediante el modelo GARCH	21
4.1.3. Beta-t-Exponential GARCH (EGARCH)	21
4.1.4. Muestreo	22
4.1.5. Selección de modelo de precios	24
4.2. Algoritmo de discretización	25
4.2.1. Fundamentos de la discretización para un solo período	25
4.2.2. Generalización a múltiples períodos	26
5. Experimentos y resultados	31
5.1. Bosque de prueba	31
5.2. Resultados	33
5.2.1. Resultados generales del SP	34
5.2.2. Análisis de la toma de decisiones bajo incertidumbre	35

6. Conclusiones	39
Bibliografía	41

Índice de Tablas

4.1. Comparación de predicción de modelos:	24
4.2. Comparación en métricas de ajuste:	24

Índice de Ilustraciones

2.1.	Cadena de producción forestal: (1) cosecha, (2) los troncos son clasificados según destino a venta externa o interna, (3) transporte desde rodales al mercado interno, (4) procesamiento de productos finales (madera aserrada, pulpa de celulosa y electricidad), (5) los productos finales entran a mercados terciarios (mercado de madera, mercado de papelería y transmisión eléctrica). . . .	5
2.2.	Ejemplo de un BP para un árbol cosechado, en el cual los troncos tipo <i>saw log</i> , <i>board log</i> y <i>pulp or fuel</i> son cortados según diámetro, mientras la madera restante es transformada en astillas.	6
2.3.	Descripción de los periodos incluidos en el problema, junto a las decisiones que toma el planificador en cada uno de los horizontes.	7
3.1.	Ejemplo de árbol escenarios con no-anticipatividad	9
4.1.	Precios mensuales de pulpa de celulosa tomados de IndexMundi (2017) [16], obtenidos originalmente de GEM Commodities, World Bank Group, disponible en https://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=wood-pulp&months=360	19
4.2.	Serie de retornos logarítmicos mensuales	19
4.3.	Muestreo de 200 trayectorias generadas con modelo EGARCH, comparadas con la serie de entrenamiento (línea sólida) y la serie de prueba (línea punteada).	23
4.4.	Una trayectoria de precios y el área que contiene las m trayectorias muestreadas. La posición vertical de cada punto imita la escala de precios como en la figura 4.3.	27
4.5.	Ejemplo de una segmentación por cuantiles para cada etapa, codificado como $\Omega_{4,3,3,2}$	27
4.6.	Ejemplo de un escenario, definido como el camino entre los precios esperados contenidos en la tupla $\{B2_2, B3_2, B4_2, B5_1\}$	28
4.7.	Subconjunto de cinco trayectorias de precios, sus <i>bins</i> y escenarios que determinan.	29
4.8.	Ejemplo gráfico de un escenario que contiene dos trayectorias de un total de cinco, obtenido al ejecutar el algoritmo [A] cinco veces.	29
4.9.	Trayectorias transformadas en escenarios mediante Ω del ejemplo.	30
4.10.	Árbol de escenarios (forma comprimida), obtenido de Ω del ejemplo.	30
5.1.	Mapa del bosque simulado. Con C_i representando una zona de clase i de edad.	32
5.2.	<i>Bucking patterns</i> permitidos en rodales, para cada clase de edad.	32

5.3. Mejora Porcentual de la Utilidad Esperada (PUI) en el horizonte de negocio para distintos árboles de escenarios. Color gris indica árboles con 2 o menos <i>bins</i> en alguna de las primeras 2 etapas, color rojo lo contrario, 3 o más <i>bins</i> en ambas etapas.	34
5.4. Utilidad de los escenarios durante todo el horizonte, comparados con la utilidad esperada de las decisiones deterministas. Los 299 escenarios aparecen contiguos, representados cada uno por una barra de ancho 1 unidad. Se ordenan de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocios.	35
5.5. Utilidad de los escenarios durante todo el horizonte de negocios, comparados con la utilidad esperada de las decisiones deterministas. Los 299 escenarios aparecen contiguos, representados cada uno por una barra de ancho 1 unidad. Se ordenan de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocios.	36
5.6. Asignación de volumen cosechado, según tipo de troza durante el horizonte de negocios para cada escenario. Los escenarios del árbol están ordenados de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocio. . .	36
5.7. BSPUI vs distancia d_w al caso determinista. El tamaño indica la probabilidad del escenario.	38
5.8. SPUI vs distancia d_w al caso determinista. El tamaño indica la probabilidad del escenario.	38

Capítulo 1

Introducción

El trabajo desarrollado en esta tesis estudia una metodología de incorporación de incertidumbre, y sus resultados, a un problema de planificación forestal en el caso que la cadena de producción se encuentra integrada verticalmente, tomando como inspiración bosques y aserraderos de las empresas forestales chilenas Arauco y CMPC. Se decide incorporar incertidumbre en forma de múltiples escenarios de evolución del precio de la pulpa de celulosa, debido a la importancia de este producto en los resultados económicos de ambas empresas.

Según el Instituto Forestal (INFOR) (2020) [22], al año 2019 Chile poseía 2,29 millones de hectáreas de bosques comerciales, cuyo volumen cosechado fue destinado en un 36,8 % a trozas pulpables directamente y en un 11 % en forma de astillas para la producción de pulpa de celulosa. De acuerdo a Lima (2017) [19], la industria forestal en Chile se encuentra altamente concentrada, observando el año 2014 una participación conjunta del 77 % del mercado forestal para las empresas Arauco y CMPC y prácticamente un 100 % de participación en la exportación de productos aserrables y pulpa de celulosa. Además, estas empresas reportaron celulosa como un 43,4 % y 34,6 % de sus ventas, respectivamente, y de acuerdo a la misma fuente.

El objetivo de este trabajo es expandir el conocimiento en gestión de operaciones forestales, introduciendo la metodología para generar escenarios de incertidumbre, incorporándolos en el problema de planificación forestal integrada propuesto por Troncoso et al. (2015) [23], resolviéndolo y analizando sus resultados. Los escenarios de incertidumbre son obtenidos a través de modelos probabilísticos de series de tiempo que representan la evolución del precio de la pulpa.

Los modelos probabilísticos de series de tiempo parametrizan los precios como procesos de weinter, los que incluyen al modelo de Movimiento Browniano Geométrico, usado ampliamente en el ámbito de inversiones para estimar movimientos futuros de precios de acciones y derivados, junto a los modelos GARCH y EGARCH que incorporan volatilidad variable en el tiempo, observada en el comportamiento de precios de pulpa por Work et al. (2016) [31].

La pregunta principal a resolver es si acaso la incorporación de mayor información, es decir, múltiples posibilidades de evolución del precio, resulta en una mejora significativa del

valor presente del negocio integrado, con respecto a lo obtenido cuando la única información disponible en la toma de decisiones es el valor esperado. Se investiga también cómo afecta a esta mejora el número de escenarios de precio, puesto que una mayor cantidad debería aproximar mejor la información, pero aumentar el costo computacional de la resolución del problema.

1.1. Estado del Arte

1.1.1. Planificación forestal integrada e incertidumbre

Dentro de los trabajos de planificación forestal que involucran integración vertical de unidades de negocio se encuentra lo realizado por Troncoso et al. (2015) [23], quienes, basados en la descripción de la cadena forestal de D'Amours et al. (2008) [5], plantean un modelo de optimización, dentro la categoría de programación entera mixta, que maximiza el valor presente de la integración vertical conformada por dos unidades de negocio: el bosque y el aserradero. Su conclusión principal es que esta integración mejora un 5% en valor presente, con respecto a la situación alternativa en que bosque y aserradero toman decisiones de forma independientes y transan sus productos a través de precios de transferencia. Fernández (2020) [10], investiga la resolución, mediante la heurística Progressive Hedging, de la extensión estocástica al problema de Troncoso et al., trabajada en conjunto al presente trabajo y presentada en el capítulo 3. El presente trabajo estudia la resolución sin heurísticas para variaciones en el modelamiento de los escenarios de incertidumbre.

Pais (2014) [21], plantea una versión estocástica del problema de planificación forestal acotado al bosque, incorporando incertidumbre en tasas de crecimiento en el volumen de los árboles y estudiando exhaustivamente múltiples configuraciones de la heurística Progressive Hedging para su resolución.

Entre otros trabajos que involucran incertidumbre en la planificación forestal se encuentra Badilla et al. (2015) [26] quienes resuelven un problema entero mixto para la planificación de cosecha, construcción y mantenimiento de caminos, con incertidumbre en precios y niveles de demanda de trozas. También, García-Gonzalo et al. (2016) [11] incorporan a un problema de planificación de cosecha parámetros de incertidumbre en las tasas de crecimiento del volumen de madera en el bosque, producto de 32 escenarios de cambio climático.

1.1.2. Programación estocástica

Programación estocástica es una categoría dentro del área de Optimización estocástica. Este trabajo se enfoca en programación estocástica aplicada a problemas de programación lineal y entera mixta, que es la incorporación de incertidumbre en estos modelos y metodologías de resolución.

Dentro de este marco, Hart et al. (2012) [13] reconocen en la programación estocástica el beneficio de obtener una mejor representación de la realidad a través de modelos de incertidumbre, pero también dos dificultades para la proliferación de aplicaciones fuera del ambiente académico. Una es la falta de implementaciones en los *solvers* tradicionales y la otra es la complejidad en resolución que crece con la cantidad de escenarios de incertidumbre incorpo-

rados. Para reducir estas dificultades, proponen un *framework* (PySP) de modelamiento en el lenguaje de programación Python para facilitar el desarrollo de modelos estocásticos que sean soportados por *solvers* de programación lineal y entera mixta. Además implementan la heurística Progressive Hedging, propuesta por Watson et al. (2011) [28], que aproxima la solución del problema estocástico mediante descomposición de escenarios. Esta heurística es utilizada en los trabajos mencionados en el apartado anterior: Pais (2014) [21], Badilla et al. (2015) [26] y Fernández (2020) [10]. En el caso de este trabajo de tesis no fue necesario utilizar la heurística, aunque se investiga en [10] para el mismo modelo de integración; pues se logró resolver el problema completo con un número de escenarios suficiente para esta investigación

1.1.3. Simulación de precios

Basado en las metodologías descritas en los capítulos 14 y 23 de Hull (2003) [15], se estudian modelos de riesgo y precio en series de tiempo, GBM y GARCH. Estos métodos son ampliamente usados para comparar y valorar instrumentos de renta variable y sus derivados, transados en los mercados bursátiles. Wennström (2014) [?] aplica estos modelos a índices bursátiles de los países nórdicos (símiles del IPSA chileno) y muestra que modelos de este tipo que modelen colas pesadas en su distribución de incertidumbre tienen mejor ajuste que modelos que usan normal estándar. También se pueden aplicar a commodities, como lo hacen Wets et al. (2015) [30], al aplicar un GBM con regresión a la media para el modelamiento de la evolución del precio del cobre.

En este trabajo se estudia modelo GARCH (en inglés *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), propuesto por Engle y Bollerslev (1986) [9], que es ampliamente utilizado por inversionistas para estimar la volatilidad implícita de instrumentos de inversión, comparar estimaciones de retornos futuros y estimar riesgo de activos y portafolios de inversión. GARCH es construido en base al modelo estadístico Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH), propuesto en Engle (1982) [8]. ARCH introduce una herramienta capaz de estimar procesos estocásticos con varianza no constante, la cual es estimada mediante el método de máxima verosimilitud de observaciones pasadas. A la vez que, GARCH es un modelo ARCH generalizado, que amplía la definición para estimar la varianza en base a dos promedios ponderados: de las varianzas y desviaciones estándar observadas previamente.

En este trabajo se explora la simulación de trayectorias de precio de pulpa de celulosa, los cuales presentan heterocedasticidad según Work (2016) [31], donde se recomienda utilizar el modelo GARCH para estudiar el comportamiento de la distribución de probabilidad en una serie de precios de pulpa.

El modelo GARCH ha sido modificado mediante la introducción de variantes al sistema de ecuaciones propuesto originalmente para modelar el proceso de Weiner. Se escoge ajustar un modelo GARCH y una variante moderna, Beta- t -EGARCH, presentada por Harvey et al. (2008) [14] y que incorpora una transformación exponencial de la varianza para facilitar su estimación por máxima verosimilitud y modifica la distribución de la aleatoriedad por una t -Student en vez de normal estándar para ajustar distribuciones con mayor peso en sus colas.

Lama (2015) [18] muestra que EGARCH entrega una mejor estimación para precios de los commodities “aceite de cocina” y “algodón” en el mercado doméstico de India y mercados internacionales al ser comparado con GARCH y ARCH. Siguiendo esta metodología, este

trabajo compara los ajustes mediante las métricas APE (absolute prediction error) y MAPE (mean absolute prediction error), análogas a las utilizadas por Lama.

1.2. Organización del contenido

El resto del documento se ordena como sigue: en el capítulo 2 se presenta una descripción completa de la cadena de producción forestal utilizada. En el capítulo 3 se introduce el marco teórico de la programación estocástica, se presenta el modelo de cadena de producción utilizado y se presenta la formulación matemática completa del problema estocástico. En el capítulo 4 se presentan los modelos de la evolución del precio de la pulpa y un algoritmo para obtener simulaciones de posibles trayectorias, utilizadas en la construcción de los escenarios de precio. En el capítulo 5 se presentan los experimentos realizados para estudiar el impacto de la incorporación de incertidumbre al problema de planificación, junto a sus resultados. Finalmente el capítulo 6 es dedicado a las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo de producción forestal

El problema de planificación forestal integrada se basa en un modelo de producción forestal en el cual existe un bosque, aserraderos, plantas de pulpa y de electricidad. Cada nodo de la cadena de producción pertenece a la misma compañía. El planificador forestal toma decisiones de cosecha, transporte y producción en cada período contenido en el horizonte de planificación. Este capítulo describe la cadena de producción utilizada en este trabajo, basada en el modelo estudiado en Troncoso et al. (2015) [23]. La figura 1 muestra la cadena de producción en forma de un diagrama de flujo de fibra de madera.

2.1. Flujo de fibra de madera

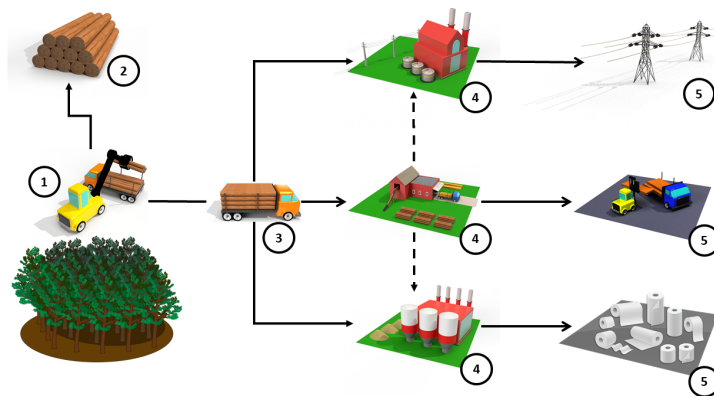


Figura 2.1: Cadena de producción forestal: (1) cosecha, (2) los troncos son clasificados según destino a venta externa o interna, (3) transporte desde rodales al mercado interno, (4) procesamiento de productos finales (madera aserrada, pulpa de celulosa y electricidad), (5) los productos finales entran a mercados terciarios (mercado de madera, mercado de papelería y transmisión eléctrica).

El bosque está compuesto por un set de áreas de cosecha llamadas rodales, cada uno está definido por su área y la edad de los árboles que contiene. Para calcular la cantidad de madera contenida en cada rodal se modela el volumen total en cada período mediante una curva de crecimiento basada en la densidad por edad para cada especie plantada. La curva

de crecimiento permite obtener el volumen de madera para cada especie en el rodal en cada periodo, estimar el volumen futuro en caso de ser cosechado y reforestado en un periodo determinado. El bosque está representado en el punto (1) en la figura 1. Al cosechar un rodal cada árbol es podado completamente (obteniendo astillas) y trozado, luego el planificador asigna un destino a cada troza y astillas. Se modela esta decisión mediante patrones de corte (en inglés Bucking Pattern o BP), cada BP indica, el porcentaje del volumen cosechado que es asignado a trozas aserrables, pulpables o combustible. Cada BP en el modelo es un set de porcentajes diseñado por el modelador. La decisión en el modelo es si un BP dado se ocupa o no en una porción de rodal. Además el planificador, en vez de enviar el volumen a aserraderos y plantas pertenecientes a la compañía, puede vender las trozas a externos. Punto (2) en la figura 2.1.

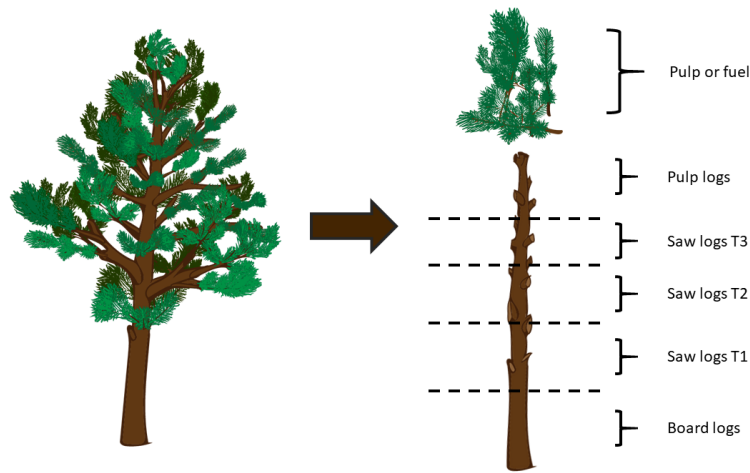


Figura 2.2: Ejemplo de un BP para un árbol cosechado, en el cual los troncos tipo *saw log*, *board log* y *pulp or fuel* son cortados según diámetro, mientras la madera restante es transformada en astillas.

Los trabajadores procesan cada árbol cosechado con un BP, clasificando los troncos resultantes en madera aserrable, pulpable o combustible, de acuerdo a su destino. Tal como muestra la figura 2.2, el diámetro del árbol determina el tipo de troza que se puede extraer. Las trozas aserrables requieren un mayor diámetro de árbol por lo que existe un máximo porcentaje de volumen que puede ser enviado a aserraderos, mientras que la madera restante puede ser enviada a plantas de pulpa o de electricidad como astillas. El planificador forestal puede decidir enviar cualquier porcentaje del árbol a plantas de pulpa como trozas o astillas. Este modelo de cadena usa BP como factores que asignan un porcentaje de cada rodal a distintos tipos de troza, esta decisión define el volumen que puede ser enviado a aserraderos o plantas, directamente desde el bosque.

El volumen trozado según tipo de tronco puede ser vendido directamente a clientes externos, mientras el resto es transportado a aserraderos y plantas de la compañía integrada verticalmente. El volumen de madera procesado en aserraderos es transformado en tablas, listones, tableros y co-productos mediante patrones de corte. Los co-productos son residuos de los aserraderos enviados a plantas de pulpa o electricidad en forma de astillas o corteza, con el objetivo de sacar el mayor provecho de cada árbol. El costo de producción es modelado como directamente proporcional al volumen procesado, es decir, un parámetro para cada producto final representa el costo por unidad de volumen procesado.

Este problema considera un horizonte total de una rotación completa de pinus radiata (25 años), dividida en dos sub-horizontes. El primer sub-horizonte de 5 años toma decisiones de negocio anuales importantes en el corto plazo, mientras el segundo sub-horizonte anticipa las decisiones al largo plazo, en periodos de cinco años cada uno. Estos periodos y sus decisiones son presentados en la figura 2.3

Horizonte de Negocio					Horizonte de Anticipación																				
Periodo	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$					$t = 7$					$t = 8$					$t = 9$				
Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Modelo de cadena forestal																									
Decisiones	Cada periodo es un año. Bosque: Cosecha, venta de trozas Bucking: Distribución de trozas Transporte: Rodales a aserraderos y plantas Transporte de Co-productos: Hacia plantas Producción: Nivel de ocupación, Venta de productos finales					Cada periodo contiene 5 años. Bosque: Cosecha, venta de trozas Bucking: Tipo de trozas producidas Venta durante anticipación: Cada tipo de tronco es modelado usando el ingreso esperado, representando la utilidad de $1m^3$ de cada tipo de troza, bajo un escenario promedio.																			

Figura 2.3: Descripción de los periodos incluidos en el problema, junto a las decisiones que toma el planificador en cada uno de los horizontes.

En el horizonte de negocio (T_B) el problema abarca la cadena forestal en su completud, incluyendo las fuentes de incertidumbre. Este horizonte abarca las siguientes decisiones: cosecha, asignación de BP, venta desde rodales, transporte a aserraderos y plantas, producción en aserraderos y plantas, niveles de producción, transporte de co-productos y venta.

En el horizonte de anticipación (T_A) se toman decisiones con el propósito de preservar la estructura del bosque. Este periodo modela la cadena como un bosque que vende trozas como producto interno a precios que reflejan la utilidad esperada de cada tipo de troza en la cadena forestal integrada completa. Modelar la segunda parte del horizonte de esta forma permite evaluar las decisiones a largo plazo asumiendo un equilibrio en la industria, desacoplando en cierta medida las consecuencias de las decisiones a corto plazo de las decisiones a largo plazo, este diseño permite reducir la miopía a largo plazo del modelo.

Capítulo 3

Formulación del problema estocástico

Un programa estocástico (en inglés Stochastic Program, SP) es un modelo de optimización que explícitamente incorpora incertidumbre a través de un conjunto de variables aleatorias. En este trabajo se utiliza una formulación basada en escenarios, donde la incertidumbre es representada mediante un conjunto finito de posibles estados y su probabilidad de ocurrencia. En este capítulo se introduce la formulación matemática general de un SP y luego se presenta el modelo matemático completo utilizado en esta tesis, que es el caso específico de un SP construido en base al modelo del capítulo anterior.

3.1. Formulación general de un SP

Este trabajo considera un SP en múltiples etapas que modela decisiones bajo incertidumbre, en el cual el estado de las variables inciertas evoluciona en etapas sucesivas: se observa un estado de la incertidumbre, se toman decisiones para la primera etapa; en la etapa siguiente se observa el resultado de las decisiones junto al nuevo estado de las variables y una nueva decisión es tomada, así de forma sucesiva hasta llegar a la última etapa. Se considera S el conjunto de las etapas y Ω un conjunto finito de posibles estados en todas ellas, es decir, cada escenario $\omega \in \Omega$ es representado por un vector que es una combinación de los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias en sucesión con las etapas. Una formulación general de un SP en su forma extendida es:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} (c_{\omega} \cdot x_{\omega}) \\ \text{st.} \quad & (x_{\omega}) \in A_{\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega \\ & x_{\omega, s} = x_{\omega', s}, \quad \forall \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s} \end{aligned} \tag{3.1}$$

La función objetivo en la ecuación 3.1 corresponde al valor esperado del objetivo entre todos los escenarios, con p_{ω} la probabilidad del escenario ω y $c_{\omega} \cdot x_{\omega}$ su utilidad lineal correspondiente. El vector de decisión x_{ω} debe cumplir con restricciones específicas al problema que se desea modelar, incorporadas a través de A_{ω} . Además, de forma general en todo SP,

debe cumplir con las restricciones de no-anticipatividad descritas en Wets (1975) [29]. El principio de no-anticipatividad establece que si dos escenarios son idénticos hasta la etapa $s \in S$, entonces las decisiones deben ser idénticas hasta esa misma etapa, ya que comparten la misma información. El conjunto $\Omega_{\omega,s}$ de la formulación en 3.1 contiene todos los escenarios que comparten la misma información que ω hasta la etapa s . Dado que el modelo posee toda la información al momento de la toma de decisiones, esta restricción es necesaria para proveer la estructura temporal del problema.

3.2. Árboles de escenarios

Este trabajo considera incertidumbre en un solo parámetro por etapa, el precio de la pulpa en cada año del horizonte de negocios a lo largo de 5 etapas. Sea $P = P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ el vector de variables aleatorias, donde P_s es el precio de pulpa en cada etapa $s \in 1, 2, 3, 4, 5$. Un escenario ω es definido por una realización de este vector.

Un árbol de escenarios es una representación de todos los escenarios en el set Ω , utilizando una estructura de árbol. Cada nodo representa un precio de pulpa en una etapa determinada, empezando de un nodo raíz o precio común. Una trayectoria entre el nodo raíz en la etapa $s = 1$ y algún nodo en la etapa $s = 5$ identifica un escenario. La figura 3.1 contiene un ejemplo gráfico, dónde los nodos P_1, P_2 y P_3 representan la no-anticipatividad hasta la etapa $s = 3$ de los escenarios ω_1, ω_2 y ω_3 .

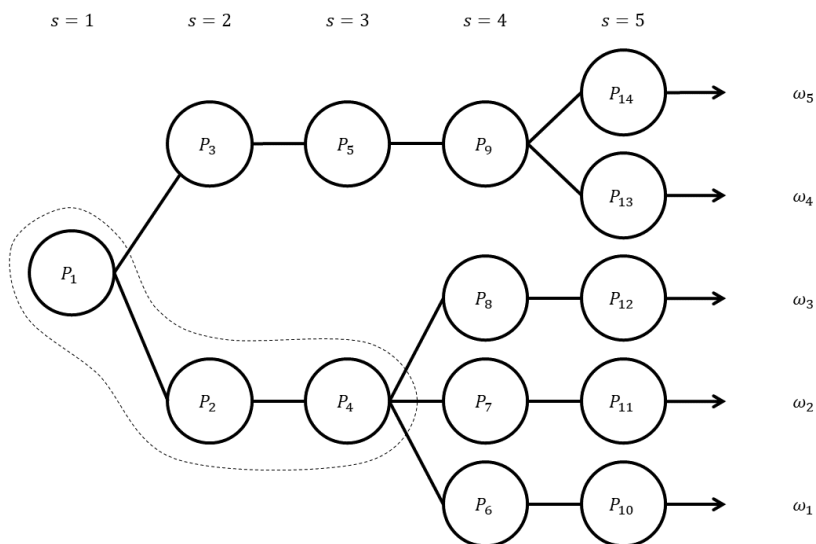


Figura 3.1: Ejemplo de árbol escenarios con no-anticipatividad

3.3. Formulación matemática

En esta sección se presenta las componentes del problema matemático modificado. Esta formulación está basado en el problema continuo presentado por Fernandez (2020) [10], simplificado para una especie (*pinus radiata*), bajo un único nivel de precios, esta modificación es equivalente a optimizar el problema original en una instancia que contiene sólo una especie y un único nivel de precios.

3.3.1. Conjuntos de índices

- T_B : Períodos en el horizonte de planificación de negocios, $T_B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- T_A : Períodos en el horizonte de planificación de anticipación, $T_A = \{6, 7, 8, 9\}$.
- T : Todos los períodos incluidos en el horizonte de planificación ($T_B \cup T_A$).
- \mathcal{T} : Etapas en el árbol de escenarios $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5\}$.
- T_τ : Períodos que abarca la etapa τ . Las etapas τ_1 a la τ_4 abarcan un periodo cada una (en las cuales se se incorpora estocasticidad), la etapa final abarca los periodos terminales, $T_{\tau_5} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Ω : Todos los escenarios incluidos en la instancia.
- S : Etapas que abarca la incertidumbre en precios de pulpa ($S = T_B$).
- $\Omega_{\omega,s}$: Escenarios que comparten información con el escenario ω hasta la etapa s .
- I : Todos los rodales que definen el bosque.
- I_t^0 : Rodales que no deben ser talados en el periodo $t \in T$, debido a que su edad es inferior a la edad de madurez durante periodo.
- J : Aserraderos junto a todas las plantas de pulpa y energía.
- K : Especies de árboles.
- L : Tipos de tronco.
- D^c : Coproductos, los cuales pueden ser usados como materia prima en plantas de pulpa y energía.
- D^f : Productos finales.
- R : Materias primas en aserraderos y plantas ($R = L \cup D^f$).
- D : Todos los tipos de producto ($D = D^c \cup D^f$).
- P^B : Patrones de podado a usar en los rodales (Bucking Patterns).
- P_j^J : Todos los procesos y patrones disponibles en aserraderos y plantas j .
- N : Niveles de precio.

3.4. Variables de decisión

Las variables descritas en esta subsección corresponden a las decisiones a tomar en el modelo original de Troncoso et al. (2015) [23], con la salvedad de que en el SP hay una para cada escenario ω

$$Z_{\omega it} \quad \begin{cases} 1 & \text{Si el rodal } i \text{ es cosechado en el periodo } t, \text{ bajo el escenario } \omega. \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

- $Z_{\omega i}^0$: $\begin{cases} 1 & \text{Si el rodal } i \text{ no es cosechado bajo el escenario } \omega. \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$
- $Y_{\omega i p t}^B$: Volumen de árboles procesado en el rodal i bajo el patrón BP p , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $Y_{\omega j p c t}^1$: Volumen de materia prima c procesada en el aserradero o planta j , bajo el patrón o proceso p , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $X_{\omega i l t}^0$: Volumen de troncos tipo l no transportados desde el rodal i , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $X_{\omega i j l t}^1$: Volumen de troncos tipo l transportados desde el rodal i hacia el aserradero o planta j , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $X_{\omega j_1 j_2 c t}^2$: Volumen de co-productos tipo c transportados desde el aserradero o planta j_1 hacia la planta j_2 , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $W_{\omega j d t}$: Unidades de producto final d obtenidas del aserradero o planta j , durante el periodo t , bajo el escenario ω
- $U_{\omega i l t}$: Venta de troncos tipo l , desde el rodal i , durante el periodo t , bajo el escenario ω

3.4.1. Parámetros

- $S_{i t}$: Volumen de árboles en el rodal i , durante el periodo t .
- $h_{i t}$: Capacidad requerida para cosechar el rodal i , durante el periodo t .
- H_t : Capacidad de cosecha total disponible durante el periodo t .
- $\alpha_{i p l t}^1$: Factor de conversión del patrón de podado p en el rodal i , para obtener troncos tipo l , durante el periodo t .
- a_t^- : Decrecimiento máximo permitido en el volumen cosechado, como porcentaje cosechado en el periodo t , para el periodo $t + 1$.
- a_t^+ : Incremento máximo permitido en el volumen cosechado, como porcentaje cosechado en el periodo t , para el periodo $t + 1$.
- a^{a-} : Volumen mínimo permitido de cosecha durante todos los periodos incluidos en el horizonte de planificación de negocio (T_B), como un porcentaje de la cosecha promedio en periodos de 5 años para todo el horizonte de planificación (T).
- a^{a+} : Volumen máximo permitido de cosecha durante todos los periodos incluidos en el horizonte de planificación de negocio (T_B), como un porcentaje de la cosecha promedio en periodos de 5 años para todo el horizonte de planificación (T).
- V_{τ}^0 : Volumen inicial de bosque perteneciente a la clase τ .
- V_i^1 : Volumen que tendrá el rodal i al final del horizonte de planificación si no es cosechado.
- $V_{i t}^2$: Volumen final de bosque que crecerá en el rodal i , tras al ser cosechado durante el periodo t .

- V^3 : Volumen inicial de bosque de edad superior a la cantidad de años incluidos en el periodo de anticipación. Este valor representa el volumen de bosque que debe ser recuperado al cosechar durante el periodo de negocio.
- α_{prd}^2 : Factor de conversión por unidad de materia prima (troncos o coproductos) tipo r a ser transformada en productos o coproductos d bajo el patrón o proceso p , durante el periodo t . Medido en porcentaje de 1 unidad de producto o coproducto resultante de procesar 1 unidad de materia prima.
- \bar{e}_{jt} : Cota superior para la producción en el aserradero o planta j .
- \underline{e}_{jt} : Cota inferior para la producción en el aserradero o planta j .
- b_{dt} : Demanda del producto final d , bajo el nivel de precio n , durante el periodo t .

Todos los costes y precios utilizados tienen la unidad US\$. Calculados como un estimado, incorporando el factor de descuento como ponderador en la función objetivo.

- v_i^0 : Valor esperado del rodal i al final de horizonte de planificación si no es cosechado.
- v_{lt}^2 : Valor esperado de una unidad de troncos tipo l en el periodo t .
- v_{it}^3 : Valor esperado del stand i al final del horizonte de planificación, si es cosechado en el periodo t .
- c_{it}^h : Coste unitario estimado de cosecha del rodal i durante el periodo t .
- c_{ijt}^1 : Coste unitario estimado de transportar madera desde el rodal i al aserradero o planta j , durante el periodo t .
- $c_{j_1j_2ct}^2$: Coste unitario estimado de transportar co-productos tipo c desde el aserradero o planta j_1 al aserradero o planta j_2 , durante el periodo t .
- c_{jpt}^3 : Coste unitario estimado para el patrón o proceso p , en el aserradero o planta j , durante el periodo t .
- $P_{\omega dt}^1$: Precio estimado de mercado del producto final d y nivel de precio n , durante el periodo t , bajo el escenario ω .
- p_ω : Probabilidad del escenario ω .

Para calcular el valor presente neto de la cadena foresta se usa el factor de descuento Δ_t , definido como:

$$\Delta_t = \frac{1}{(1 + \delta)^{\hat{t}}} \quad (3.2)$$

Con \hat{t} el punto medio en el periodo $t \in T$, medido en años y δ la tasa de descuento usada, en el caso de este trabajo, $\delta = 4\%$. La función objetivo del problema extendido toma la forma:

$$\max \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} p_{\omega} \cdot \left(\sum_{t \in T_B} \Delta_t \cdot U_B^{\omega}(t) + U_A^{\omega} \right) \right\} \quad (3.3)$$

$U_B^{\omega}(t)$ es la función de utilidad en cada año t del horizonte de negocios, para cada escenario ω .

$$\begin{aligned} U_B^{\omega}(t) = & \sum_{d \in D^f} \sum_{j \in J} P_{\omega djt}^1 \cdot W_{\omega djt}^1 + \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} U_{\omega i lt}^2 \cdot v_{lt}^2 - \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{j \in J} X_{\omega i j lt}^1 \cdot c_{ijt}^1 \\ & - \sum_{r \in R} \sum_{j_1 \in J} \sum_{j_2 \in J} X_{\omega j_1 j_2 rt}^2 \cdot c_{j_1 j_2 rt}^2 - \sum_{i \in I} c_{it}^h \cdot Z_{\omega it} - \sum_{r \in R} \sum_{j \in J} \sum_{p \in P_j^J} Y_{\omega j p rt}^1 \cdot c_{jpt}^3 \end{aligned}$$

Las dos primeras sumas representan el ingreso total por ventas de productos finales y trozas. Seguidos por los costes de transporte (uno desde rodales y otro para los co-productos provenientes de aserraderos), cosecha y producción, respectivamente.

El término $U_A^{\omega}(t)$ es la función de utilidad en el horizonte de anticipación, bajo un mismo escenario ω .

$$\begin{aligned} U_A^{\omega} = & \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \sum_{t \in T_A} \Delta_t \cdot U_{\omega i lt} \cdot v_{lt}^2 + \Delta_9 \cdot \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} Z_{\omega it} \cdot v_{it}^3 + \Delta_9 \cdot \sum_{i \in I} Z_{\omega i}^0 \cdot v_i^0 - \\ & \sum_{i \in I} \sum_{t \in T_A} \Delta_t \cdot Z_{\omega it} \cdot c_{it}^0 \end{aligned}$$

Donde el primer término corresponde a la utilidad de venta de troncos (sin considerar costos de cosecha, pues simplicidad se considera un factor proporcional a la cantidad vendida que incorpora costes e ingresos promedio por tronco). El segundo término es el valor residual del bosque que fue talado y reforestado, mientras que el tercero el valor residual del bosque que no fue talado. El último término es el costo de cosecha del período (que no había sido incorporado en el primer término).

3.4.2. Restricciones

Las restricciones del problema son presentadas siguiendo la cadena de producción presentada en el capítulo 2:

Las restricciones [1] a la [5] controlan el flujo de madera:

- [1] Cada rodal puede ser cosechado hasta completar el 100 % del volumen, de lo contrario no es cosechado:

$$\sum_{t \in T} Z_{\omega it} + Z_{\omega i}^0 = 1, \quad i \in I, \omega \in \Omega$$

- [2] La cosecha en el rodal i es dividida según algún Bucking Pattern, en el mismo periodo que es cosechado:

$$\sum_{p \in P^B} Y_{\omega ipt}^B = S_{it} \cdot Z_{\omega it}, \quad i \in I, t \in T, \omega \in \Omega$$

- [3] Balance de transporte desde rodales y venta de trozas a empresas externas con la cosecha en el rodal i :

$$\sum_{p \in P^B} Y_{\omega ipt}^B \cdot \alpha_{iplt}^1 = X_{\omega ilt}^0 + \sum_{j \in J} X_{\omega ijlt}^1, \quad i \in I, l \in L, t \in T, \omega \in \Omega$$

- [4] Sólo los troncos que no son transportados desde rodales pueden ser vendidos a clientes externos:

$$U_{\omega ilt} \leq X_{\omega ilt}^0, \quad i \in I, l \in L, t \in T, \omega \in \Omega$$

- [5] El volumen cosechado no puede exceder la capacidad instalada:

$$\sum_{i \in I} h_{it} \cdot Z_{\omega it} \leq H_t, \quad t \in T, \omega \in \Omega$$

Las restricciones [6] a la [12] controlan el flujo de madera y co-productos desde que las trozas salen del rodal hasta la producción final:

- [6] Todo el volumen enviado a aserraderos y plantas desde rodales es procesado:

$$\sum_{p \in P_j^J} Y_{\omega jplt}^1 = \sum_{i \in I} X_{\omega ijlt}^1, \quad j \in J, l \in L, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [7] Todo el volumen de co-producto entrante en una planta es usado como materia prima:

$$\sum_{p \in P_{j_2}^J} Y_{\omega j_2pct}^1 = \sum_{j_1 \neq j_2 \in J} X_{\omega j_1 j_2 ct}^2, \quad j_2 \in J, c \in D^c, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [8] Balance de flujo en producción:

$$\sum_{p \in P_j^J} \sum_{r \in R} \alpha_{prd}^2 \cdot Y_{\omega jprt}^1 = W_{\omega jdt}, \quad j \in J, d \in D^f, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [9] Las plantas pueden demandar a lo más el 100 % del volumen de co-productos saliente en aserraderos:

$$\sum_{p \in P_{j_1}^J} \sum_{r \in R} \alpha_{prc}^2 \cdot Y_{\omega j_1 p r t}^1 \geq \sum_{j_2 \neq j_1 \in J} X_{\omega j_1 j_2 c t}^2, \quad j_1 \in J, c \in D^c, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [10] La producción está acotada por capacidad máxima en aserraderos y plantas:

$$\sum_{p \in P_j^J} \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} \alpha_{prd}^2 \cdot Y_{\omega j p r t}^1 \leq \bar{e}_j, \quad j \in J, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [11] La producción está acotada por capacidad mínima en aserraderos y plantas:

$$\sum_{p \in P_j^J} \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} \alpha_{prd}^2 \cdot Y_{\omega j p r t}^1 \geq \underline{e}_j, \quad j \in J, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

- [12] Las ventas no pueden exceder la demanda:

$$\sum_{j \in J} W_{\omega j d t} \leq b_{d t}, \quad d \in D^f, t \in T_B, \omega \in \Omega$$

Las restricciones de conservación [13] a [19] permiten conservar la estructura del bosque tras el ciclo de cosecha contenido en el horizonte de planificación:

- [13a] Límite a la reducción de volumen cosechado entre periodos, excepto entre horizontes:

$$\sum_{i \in I} S_{i t} \cdot Z_{\omega i t} \geq a_t^- \cdot \sum_{i \in I} S_{i, t+1} \cdot Z_{\omega i, t+1}, \quad \omega \in \Omega, t \in T : t \neq 5, t \neq 9$$

- [13b] Límite al incremento de volumen cosechado entre periodos:

$$\sum_{i \in I} S_{i t} \cdot Z_{\omega i t} \leq a_t^+ \cdot \sum_{i \in I} S_{i, t+1} \cdot Z_{\omega i, t+1}, \quad \omega \in \Omega, t \in T : t \neq 5, t \neq 9$$

- [14a] Límite a la reducción del volumen cosechado en el primer periodo de anticipación, respecto al horizonte de negocio:

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_B} S_{i t} \cdot Z_{\omega i t} \geq a_5^- \cdot \sum_{i \in I} S_{i 6} \cdot Z_{\omega i 6}, \quad \omega \in \Omega$$

- [14b] Límite al incremento del volumen cosechado en el primer periodo de anticipación, respecto al horizonte de negocio:

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_B} S_{i t} \cdot Z_{\omega i t} \geq a_5^+ \cdot \sum_{i \in I} S_{i 6} \cdot Z_{\omega i 6}, \quad \omega \in \Omega$$

- [15a] Límite inferior al volumen cosechado durante los periodos de anticipación, basado en un porcentaje del promedio cosechado cada cinco años:

$$\sum_{i \in I} S_{it} \cdot Z_{\omega it} \geq a^{a-} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{\bar{i} \in T} \frac{S_{i\bar{i}} \cdot Z_{\omega i\bar{i}}}{|T_A|+1}, \quad t \in T_A, \omega \in \Omega$$

[15b] Límite superior al volumen cosechado durante los periodos de anticipación, basado en un porcentaje del promedio cosechado cada cinco años:

$$\sum_{i \in I} S_{it} \cdot Z_{\omega it} \leq a^{a+} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{\bar{i} \in T} \frac{S_{i\bar{i}} \cdot Z_{\omega i\bar{i}}}{|T_A|+1}, \quad t \in T_A, \omega \in \Omega$$

[16a] Límite inferior al total cosechado durante el horizonte de negocios, basado en un porcentaje del promedio cosechado cada cinco años

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_B} S_{it} \cdot Z_{\omega it} \geq a^{a-} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{\bar{i} \in T} \frac{S_{i\bar{i}} \cdot Z_{\omega i\bar{i}}}{|T_A|+1}, \quad \omega \in \Omega$$

[16b] Límite superior al total cosechado durante el horizonte de negocios, basado en un porcentaje del promedio cosechado cada cinco años

$$\sum_{i \in I} \sum_{t \in T_B} S_{it} \cdot Z_{\omega it} \leq a^{a+} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{\bar{i} \in T} \frac{S_{i\bar{i}} \cdot Z_{\omega i\bar{i}}}{|T_A|+1}, \quad \omega \in \Omega$$

[17] No cosechar rodales que no han alcanzado la madurez:

$$\sum_{t \in T} \sum_{i \in I_t^0} Z_{\omega it} = 0, \quad \omega \in \Omega$$

[18] El volumen de bosque que es recuperado al cosechar en cada periodo de anticipación debe ser al menos el volumen original de la clase de edad correspondiente:

$$\sum_{i \in I} V_{it}^2 \cdot Z_{\omega it} \geq V_t^0, \quad t \in T_A, \omega \in \Omega$$

[19] Recuperar el volumen de bosque de edad mayor a la cantidad de años incluidos en el horizonte de anticipación, al final del horizonte:

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{t \in T_B} V_{it}^2 \cdot Z_{\omega it} + V_i^1 \cdot Z_{\omega i}^0 \right) \geq V^3, \quad \omega \in \Omega$$

[20] Naturaleza de las variables:

$$\text{Todas las Variables} \geq 0, \quad 0 \leq Z_{\omega it} \leq 1, \quad Z_{\omega i} \in \{1, 0\}$$

Todas las variables que no pueden ser derivadas de otras deben cumplir con restricciones de no-anticipatividad. La variable $Z_{\omega i}^0$ depende de las decisiones $Z_{\omega it}$, de este modo, las restricciones [1] y [21], en conjunto, aseguran que $Z_{\omega i}^0$ sea no-anticipativa. También se debe notar que las restricciones [21] a la [22] usan el índice $s \in S$, el cual es intercambiable por el índice $t \in T_B$ usado en las restricciones [1] a la [20], pues cada etapa del problema estocástico coincide con un periodo en el horizonte de negocio.

[21] No-anticipatividad en porcentaje de cada rodal cosechado:

$$Z_{\omega is} = Z_{\omega' is}, \quad i \in I, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[22] No-anticipatividad en volumen procesado por Bucking Patterns:

$$Y_{\omega ips}^B = Y_{\omega' ips}^B, \quad i \in I, p \in P^B, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[23] No-anticipatividad en transporte desde rodales:

$$X_{\omega ijls}^1 = X_{\omega' ijls}^1, \quad i \in I, j \in J, l \in L, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[24] No-anticipatividad en nivel de producción:

$$Y_{\omega jprs}^1 = Y_{\omega' jprs}^1, \quad j \in J, p \in P_j^J, r \in R, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[25] No-anticipatividad en transporte desde aserraderos:

$$X_{\omega j_1 j_2 rs}^2 = X_{\omega' j_1 j_2 rs}^2, \quad j_1, j_2 \in J : j_1 \neq j_2, r \in R, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[26] No-anticipatividad en venta de productos finales:

$$W_{\omega jds} = Z_{\omega' jds}, \quad j \in J, d \in D^f, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

[27] No-anticipatividad en venta de trozas:

$$U_{\omega ils} = Z_{\omega' ils}, \quad i \in I, l \in L, \omega \in \Omega, s \in S, \omega' \in \Omega_{\omega, s}$$

Capítulo 4

Construcción de árboles de escenarios

Este capítulo presenta los métodos utilizados para la construcción de un conjunto de escenarios finito, que represente de forma realista las posibilidades de evolución del precio de la pulpa de madera en el horizonte de negocio. En primer lugar se presenta la serie de tiempo del precio de la pulpa en el mercado global y los modelos probabilísticos de series de tiempo: el ampliamente utilizado GBM (del inglés Geometric Brownian Motion, Hull (2009) [15]) que asume una volatilidad de la serie modelada constante en el tiempo y los más complejos GARCH e EGARCH que modelan el cambio de volatilidad en el tiempo, Nelson (1991) [20] y Lama et al. (2015) [18]. Se procede a la elección del modelo a utilizar y se presenta un algoritmo de simulación de trayectorias de precio a partir del modelo ajustado a los datos. Finalmente se propone un segundo algoritmo para agrupar estas trayectorias en escenarios, de acuerdo al número de posibilidades por año que se deseen.

4.1. Estimación de la distribución de probabilidad de precios de pulpa en el tiempo

Para estimar una distribución de probabilidad de precios de la pulpa, se considera una serie de precios mensuales observados en un mercado global y se divide en dos: un conjunto de entrenamiento para ajustar los parámetros mediante la técnica de máxima verosimilitud y un conjunto de prueba para comparar métricas libres de sobreajuste. La figura 4.1 muestra los datos utilizados en este trabajo. El conjunto de datos desde enero del 2000 hasta diciembre del 2011 es utilizado como conjunto de entrenamiento y desde enero del 2011 a diciembre del 2014 es usado como conjunto de prueba.

Sea P_t el precio en el mes t , se transforma la serie original en la serie de *retornos logarítmicos* a través de la transformación en 4.1.

$$r_t := \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (4.1)$$

El principio detrás de esta transformación es que en intervalos cortos de tiempo, la varia-

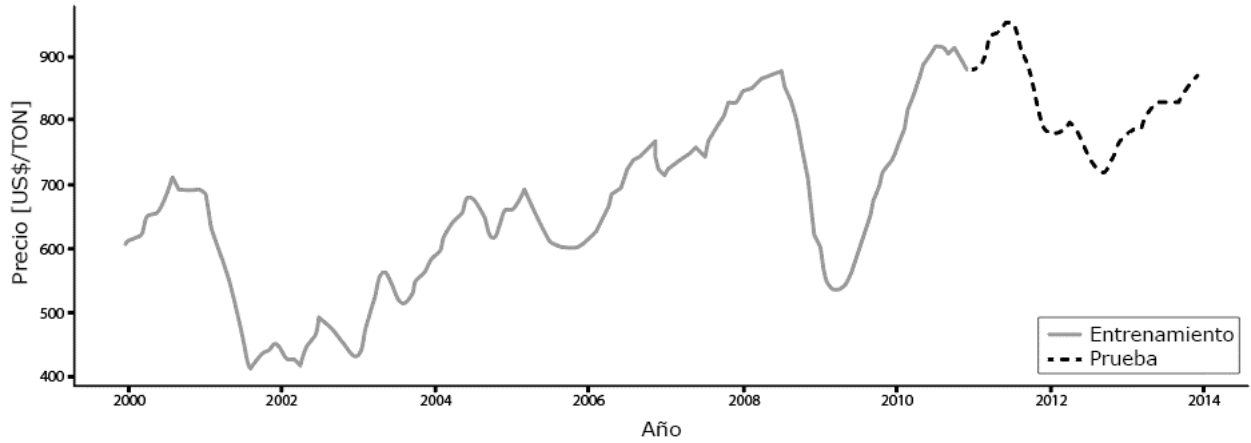


Figura 4.1: Precios mensuales de pulpa de celulosa tomados de IndexMundi (2017) [16], obtenidos originalmente de GEM Commodities, World Bank Group, disponible en <https://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=wood-pulp&months=360>

ción porcentual del precio, $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, es pequeña, y, además, se puede mostrar que $\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$, mediante una aproximación de Taylor de $\ln(x)$ en torno a $x = 1$ y considerando que para variaciones pequeñas $\frac{P_t}{P_{t-1}} \approx 1$.

Se asume que las variaciones pequeñas son aleatorias o no se dispone información certera acerca de su causa, por lo que se les modela en forma de variable aleatoria. Como se observa en la figura 4.2, esta serie, r_t , es más estable en torno a una media que la serie original de precios, P_t . Sin embargo, la volatilidad, medida como la dispersión de la serie de su media, no es constante, mostrando valores más dispersos justo antes del 2002 y el 2009. Por esta razón se estudian los modelos hétéroscedásticos GARCH y EGARCH. Además, la transformación es invertible en tanto se conozca el valor inicial de la serie de precios, P_0 .

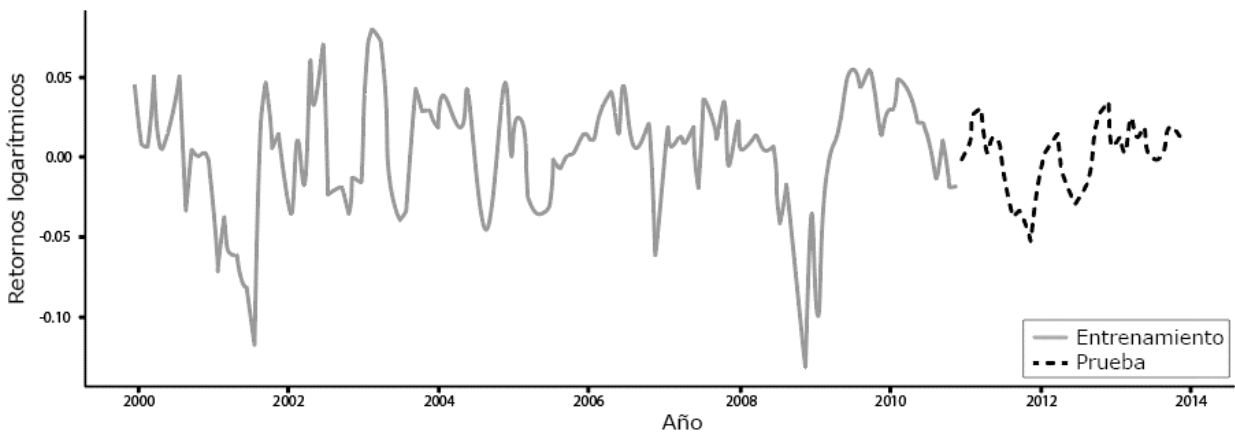


Figura 4.2: Serie de retornos logarítmicos mensuales

4.1.1. Modelo Browniano Geométrico (GBM)

El modelo de Movimiento Browniano debe su nombre a Robert Brown quien en 1828 [4] observó el movimiento del polen suspendido en agua y se preguntó acerca de la naturaleza de

este fenómeno. En 1905 Albert Einstein [7] lo formularía matemáticamente y utilizaría para explicar y predecir la emergencia de movimientos aparentemente aleatorios (irreversibles en el sentido termodinámico), a partir de un sistema subatómico determinista, y así refutar ciertos argumentos en contra de la existencia del átomo que en esa época se debatía. Desde entonces se ha utilizado ampliamente en ciencias y específicamente en finanzas, donde la aplicación más notable se debe a Black y Scholes (1973) [3], quienes modelaron el precio de acciones como un movimiento browniano, permitiéndoles encontrar un método de valorización de derivados basado en un portafolio que anula la estocasticidad del precio y por lo tanto es libre de riesgo. Por esta metodología Scholes recibió en 1997 el Nobel de Economía.

En este capítulo se utiliza como benchmark el Modelo Browniano Geométrico (GBM) en su forma moderna presentada en el libro de Hull (2009) [15]. Wets et al. (2015) [30] ha utilizado el modelo GBM para modelar el precio del cobre, un *commodity* como la pulpa. Se escoge como benchmark por su amplia aplicación en finanzas y por su simpleza, ya que posee volatilidad constante.

La evolución de precios bajo el modelo GBM está dada por la ecuación diferencial estocástica 4.2

$$dP_t = \phi P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad (4.2)$$

Dónde W_t sigue un proceso de Wiener, un proceso estocástico a tiempo continuo que cumple las siguientes propiedades:

- $W_0 = 0$ casi seguramente.
- $(W_{t+u} - W_t) \perp W_s \forall u, t > 0, s < t$ (incrementos independientes).
- $(W_{t+u} - W_t) \sim N(0, u) \forall u, t > 0$ (incrementos gaussianos).
- W_t es continuo en t .

Estas propiedades implican que $W_t \sim N(0, t)$. La solución de la ecuación 4.2 en un período entre t_0 y un momento t , partiendo de un precio arbitrario P_{t_0} , se puede expresar en forma cerrada mediante la ecuación 4.3

$$\ln \left(\frac{P_t}{P_{t_0}} \right) = (\phi - \sigma^2/2)(t - t_0) + \sigma W_{t-t_0} \quad (4.3)$$

Este resultado se podría usar para modelar la distribución del precio después de cualquier intervalo de tiempo arbitrario $t - t_0$, partiendo de $t_0 < t$. Sin embargo, en este trabajo se consideran intervalos constantes de largo 1 mes. Notando que $W_1 \sim N(0, 1)$, al ser proceso de Wiener, y aplicando los cambios de variable pertinentes: $t_0 = t - 1$, $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, $\mu = (\phi - \sigma^2/2)$ y $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ en la ecuación 4.3, se obtiene la ecuación 4.4:

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t \quad (4.4)$$

El reemplazo $\mu = (\phi - \sigma^2/2)$ no tiene una justificación funcional, solo se hace para simplificar la ecuación y asimilarla a la estructura de los modelos GARCH y EGARCH presentados posteriormente. El parámetro ϕ , en finanzas conocido como *percentage drift*, sí tiene una interpretación con respecto a la media del precio y es que $\mathbb{E}(P_t) = P_{t_0}e^\phi$, es decir, ϕ es la tasa de retorno, a composición continua, del valor esperado.

ε_t , denominado *random shock* del período t , corresponde a una instancia de $W_1 \sim N(0, 1)$ para ese período. El conjunto de *random shocks* de periodos sucesivos (en este caso 1 mes) es un conjunto de variables aleatorias i.i.d., en virtud de la propiedad de incrementos independientes del proceso de Wiener. El modelo resultante en 4.4 implica que los retornos logarítmicos son independientes entre sí a lo largo del tiempo. Sin embargo, esto no implica que los precios sean independientes, pues cada uno depende del anterior a través de la relación $r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$.

4.1.2. Incorporando heterocedasticidad mediante el modelo GARCH

El concepto de heterocedasticidad se refiere que la volatilidad no es constante en el tiempo. La volatilidad, definida como la desviación estándar de la distribución, es interpretada como una cuantificación de la incertidumbre que se aprecia acerca del precio futuro. Hull (2009) [15] presenta hipótesis acerca de la naturaleza de la volatilidad en los precios de activos, concluyendo que se debe principalmente a la actividad de *trading* en sí misma. Es importante considerar entonces si la volatilidad puede cambiar en el tiempo. El modelo GBM asume que la volatilidad es constante, sin embargo se puede apreciar en la figura 4.2 que la volatilidad, parece cambiar a lo largo de un plazo de 14 años. Para capturar este tipo de incertidumbre se utilizan modelos autorregresivos que incorporen heterocedasticidad condicional, es decir, cuya volatilidad dependa de valores anteriores del precio o la volatilidad misma. Tal como se muestra en Work et al. (2016) [31] GARCH entrega una mejor caracterización de los retornos en el precio de pulpa que un modelo con varianza constante.

El primer modelo de varianza condicional a explorar es el GARCH(p,q) (del inglés *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Este modelo es descrito mediante el sistema de ecuaciones 4.5, donde la primera ecuación modela el retorno logarítmico de cada tiempo t , r_t , como una media más un *random shock* amplificado por la volatilidad correspondiente a ese período σ_t . Esta volatilidad es modelada, a su vez, en la segunda ecuación como una función de las p volatilidades y q *random shocks* anteriores. Los parámetros μ , α_0 , $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^q$ se pueden estimar mediante el método de máxima verosimilitud, restringiendo α_0 , $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^q$ todos positivos, para garantizar $\sigma_t^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.1.3. Beta-t-Exponential GARCH (EGARCH)

El modelo EGARCH fue introducido por primera vez por Nelson (1991) [20] como una mejora al modelo GARCH, anteriormente descrito, a partir de una transformación logarítmica

de la volatilidad $\lambda_t = \ln(\sigma_t^2)$, cuya inversa siempre entrega un valor positivo. Este cambio facilita la estimación de parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud, al eliminar la necesidad de restringir explícitamente la naturaleza no negativa de las variables.

En este trabajo se estudia la versión Beta- t -EGARCH, propuesta por Harvey y Chakravaty (2008) [14], una versión modificada del modelo EGARCH, donde los *random shocks* distribuyen t -student, a diferencia de EGARCH, donde distribuyen normal estándar. Esta construcción permite ajustar mejor a valores extremos.

Además, esta extensión del modelo permite un efecto *leverage*, observado por primera vez por Black (1976) [2], donde *malas noticias* suelen ser seguidas de periodos con alta volatilidad, en comparación a la volatilidad tras *buenas noticias*. Las ecuaciones mostradas en 4.6 siguen la misma estructura que en 4.5, modificando los parámetros antes mencionados:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \exp\left(\frac{\lambda_t}{2}\right) \varepsilon_t \\ \lambda_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \left(\frac{(\nu + 1) r_{t-j}^2}{\nu \exp(\lambda_{t-j}) + r_{t-j}^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Donde ε_t sigue una distribución t -student con ν grados de libertad. Los parámetros μ , ν , α_0 , $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^q$ se estiman mediante el método de máxima verosimilitud. λ_t es la transformación logarítmica de la varianza, $\lambda_t = \ln(\sigma_t^2)$. El nombre Beta se debe a que el término que acompaña al coeficiente β_j se puede expresar como una transformación lineal de una variable aleatoria con distribución Beta($\frac{1}{2}$, $\frac{\nu}{2}$).

4.1.4. Muestreo

El proceso de muestreo consiste en la generación de data sintética a partir de una distribución de probabilidad. En la metodología de generación de escenarios propuesta, el muestreo cumple el rol de develar la distribución conjunta de los precios en un rango definido de períodos. La devela pues no se cuenta con una forma analítica de la distribución conjunta, sino con la distribución condicional de cada precio en los valores anteriores. Es decir, la distribución conjunta de los precios está implícita, pero se pueden obtener muestras sintéticas distribuidas de acuerdo a ella, a partir de las distribuciones condicionales.

$$f(P_1, P_2, \dots, P_\tau) = f(P_1) \cdot f(P_2|P_1) \cdot \dots \cdot f(P_\tau|\{P_i\}_{i=1}^{\tau-1}) \quad (4.7)$$

En la identidad 4.7 se ha factorizado la probabilidad conjunta (lado izquierdo) en probabilidades condicionales de forma conveniente. La validez de esta factorización viene de la propia definición de probabilidad condicional, $f(X, Y) = f(X)f(Y|X)$, y su conveniencia es que cada factor se puede obtener a partir de los retornos logarítmicos entregados por los modelos probabilísticos propuestos anteriormente y los precios anteriores. Por simplicidad se ha omitido el condicionamiento en los datos anteriores a P_1 , pero el razonamiento es análogo. También por simplicidad se ha omitido un subíndice para cada f indicando que son funciones

distintas dependiendo de la variable aleatoria e información condicionada, lo que se puede inferir de sus argumentos.

El método de muestreo consiste entonces, en palabras simples, en obtener una realización de $(P_1, P_2, \dots, P_\tau)$ partiendo por P_1 y de forma sucesiva, donde cada paso consiste en obtener la distribución y una realización del retorno logarítmico del período, que junto al precio del período anterior determinan completamente una muestra del nuevo precio. Al vector de precios sucesivos resultante se le llamará trayectoria de precios.

El pseudocódigo presentado a continuación describe este procedimiento, utilizando como punto de partida el último precio observado en la serie de entrenamiento P_0 .

En primer lugar se define la cantidad de períodos, τ , que se deseen en la trayectoria.

Algoritmo [A] - Repetir para $t \in \{1, \dots, \tau\}$:

1. Obtener un *random shock* ε_t de acuerdo al modelo escogido.
2. Calcular σ_t^2 usando las observaciones pasadas mediante la ecuación de volatilidad del modelo correspondiente.
3. Calcular $r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$, con el parámetro μ estimado previamente.
4. Calcular $P_t = P_{t-1} e^{r_t}$
5. Considerar P_t como parte de los datos.
6. Actualizar $t = t + 1$, si $t = \tau$: parar. Otro caso: volver a 1.

Cada iteración de [A] produce una sola trayectoria de precios. Para construir los escenarios se requieren múltiples trayectorias. La Figura 4.3 muestra 200 trayectorias generadas aplicando el algoritmo [A] para un modelo EGARCH.

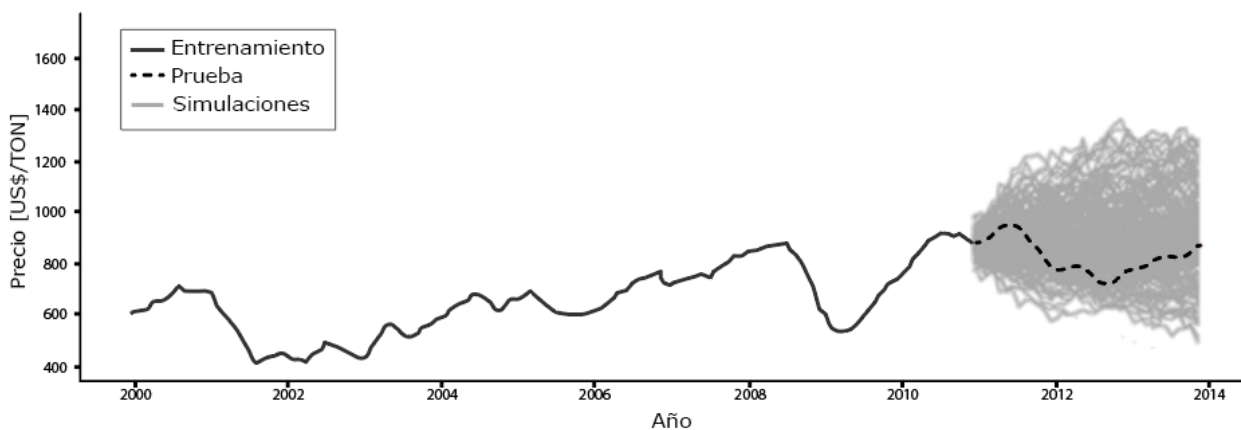


Figura 4.3: Muestreo de 200 trayectorias generadas con modelo EGARCH, comparadas con la serie de entrenamiento (línea sólida) y la serie de prueba (línea punteada).

4.1.5. Selección de modelo de precios

Como se mencionó anteriormente, el modelo GBM es utilizado como *benchmark* pues modela la volatilidad de forma constante. Se estudian las siguientes combinaciones de parámetros (p, q) para los modelos GARCH y EGARCH: $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

La tabla 4.1 muestra el error porcentual absoluto (APE, del inglés *Absolute Percentage Error*) para cada diciembre en el conjunto de prueba (2011 a 2014). Esto permite medir la precisión de predicción de cada modelo en el horizonte de interés. Además se muestra el promedio de estas métricas, MAPE por sus siglas en inglés. Para los modelos

$$APE_t = \frac{P_t^{\text{pred}} - P_t^{\text{real}}}{P_t^{\text{real}}} \quad (4.8)$$

Los resultados muestran que ambos modelos GARCH y EGARCH obtienen mayor precisión al compararlos con GBM, reduciendo entre un 30 % y 50 % el APE consistentemente. Entre GARCH y EGARCH la diferencia no es tan significativa como la anterior, pero se observa que EGARCH obtiene una mejor métrica que GARCH en todos los casos. Solo se muestran los modelos (1, 1) favoreciendo la claridad de la tabla, pues no hay variaciones significativas en cuanto a predicción para un mismo tipo de modelo al cambiar estos parámetros.

Tabla 4.1: Comparación de predicción de modelos:

Modelo	APE (2011)	APE (2012)	APE (2013)	APE (2014)	MAPE
GBM	17.56 %	9.63 %	7.42 %	18.60 %	13.30 %
GARCH(1,1)	10.02 %	5.99 %	2.79 %	12.18 %	7.75 %
EGARCH(1,1)	9.81 %	5.25 %	1.19 %	11.78 %	7.01 %

Tabla 4.2: Comparación en métricas de ajuste:

Modelo	G(0,1)	G(1,0)	G(1,1)	G(2,2)	G(3,3)	E(0,1)	E(1,0)	E(1,1)	E(2,2)	E(3,3)
Parám.										
μ	0.0111	0.0028	0.0106	0.0106	0.0105	0.0107	0.0062	0.0111	0.0108	0.0106
α_0	0.0005	0.0002	0.0004	0.0005	0.0005	-7.2474	-0.2727	-2.7065	-2.9398	-2.9022
α_1		0.841	0.0841	0	0		0.961	0.6237	0.5891	0.5934
β_1	0.7302		0.6737	0.6317	0.6458	0.4663		0.4827	0.5366	0.5412
α_2				0	0				0.0035	0.0023
β_2				0.0781	0.0836				0.0141	0.0138
α_3					0					0.0028
β_3					0					0.0082
ν						4.3164	5.3975	6.2656	5.8447	5.7197
Métrica										
LL	258.5	244.0	261.0	261.9	259.7	255.8	247.1	264.7	258.8	256.1
AIC	-511.0	-482.0	-514.0	-511.9	-503.4	-503.6	-486.2	-519.4	-503.6	-494.3
BIC	-502.4	-473.4	-502.5	-494.7	-480.5	-492.1	-474.7	-505.0	-483.5	-468.6

Sin embargo, medir la capacidad de predicción no es suficientemente informativo para la elección del modelo, pues en este trabajo el interés es modelar la distribución de los

precios para crear escenarios de precios verosímiles. En base a esto, se compararán además las métricas de ajuste log-verosimilitud (LL), AIC y BIC. La primera es una transformación monótona de la verosimilitud de los datos, que es la probabilidad de que los datos hayan sido observados bajo la distribución propuesta por un modelo. Mayor log-verosimilitud implica que la probabilidad de los datos es mayor bajo el modelo. Las otras dos métricas están estrechamente relacionadas con la log-verosimilitud e incorporan un factor de penalización por el número de parámetros del modelo. Esto introduce una preferencia por modelos más simples cuando la verosimilitud es similar. En la siguiente definición 4.9, k es la cantidad de parámetros del modelo y N_{obs} el número de observaciones de entrenamiento.

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= 2k - 2 \ln(LL) \\ \text{BIC} &= \ln(N_{obs})k - 2 \ln(LL) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Se escoge el modelo EGARCH(1,1), destacado en la tabla 4.2, pues es el que posee mejores métricas de ajuste. Además, dentro de todos los modelos con p o q mayores a 1, se observa que el valor asociado a los coeficientes que cumplen esa condición es cercano a 0. Es decir, el efecto de períodos anteriores a lo más es relevante en un solo período hacia atrás. Este resultado junto a lo discutido en términos de predicción validan la elección del modelo EGARCH para el resto de este trabajo.

4.2. Algoritmo de discretización

El SP descrito en esta tesis requiere un número finito de escenarios. Para lograr esto y al mismo tiempo representar de forma fidedigna la evolución de los precios, se propone una metodología de discretización basada en los modelos continuos estimados en la sección anterior, pues capturan esta información. Estos escenarios finitos aproximan la distribución conjunta de los precios, implícita en las distribuciones condicionales. Es importante notar que el proceso de discretización finita conlleva una pérdida de información, pues una distribución continua representa infinitos escenarios. Esta pérdida puede ser mitigada a través del diseño de la metodología, pero al mismo tiempo esta mitigación puede encontrar limitantes en la implementación.

4.2.1. Fundamentos de la discretización para un solo período

Para un año de interés en particular, se podría obtener la función de densidad del precio de la pulpa ese año a través de marginalización. Por ejemplo, para dos años consecutivos se puede obtener la densidad del segundo como muestra la relación 4.10.

$$f(P_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(P_2|P_1)f(P_1)dP_1 = \mathbb{E}_{P_1}[f(P_2|P_1)] \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(P_2|p_1^i) \tag{4.10}$$

La aproximación al final de 4.10 se debe a la Ley de los Grandes Números, siempre y cuando $\{p_1^i\}_{i=1}^m$ sean muestreos independientes y de acuerdo a la ley de P_1 . La precisión de la aproximación mejora con el tamaño de m .

Esto se puede generalizar a más de dos períodos, por ejemplo, para $P3$ bastaría con muestrear pares $\{(p_1^i, p_2^i)\}_{i=1}^m$ independientes de acuerdo a la ley conjunta de (P_1, P_2) . Este resultado es clave, pues en la sección anterior se mostró un método que permite precisamente muestrear a partir de la distribución conjunta de precios consecutivos.

Considerando que la densidad para un año en específico se puede aproximar en cualquier punto mediante este método, se propone como base para la discretización el concepto de n -cuantiles, definidos como los $n-1$ puntos que dividen la distribución en n intervalos contiguos de igual probabilidad, $1/n$. Es decir, si $\{q_i\}_{i=1}^{n-1}$ son los $n-1$ cuantiles indexados de menor a mayor, se cumple para un período t cualquiera que:

$$\mathbb{P}(P_t \leq q_i) = \frac{i}{n} \quad \forall i \in \{1..n-1\} \quad (4.11)$$

Utilizando nuevamente la Ley de los Grandes Números y definiendo $\mathbb{1}_{\{p \leq q_i\}}$ la variable indicatriz que toma el valor 1 si su argumento es cierto y 0 en caso contrario, se obtiene una aproximación asintótica del cuantil q_i a través de:

$$\mathbb{P}(P_t \leq q_i) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{P_t \leq q_i\}}] \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{\{p_j \leq q_i\}} \quad (4.12)$$

De dónde se deduce la aproximación $\hat{q}_i = \frac{m \cdot i}{n}$. En palabras, este resultado indica que para encontrar el cuantil i -ésimo se deben dividir las m muestras generadas en n grupos y el valor del cuantil estará entre el mayor valor del i -ésimo grupo y el menor del siguiente.

Habiendo encontrado los cuantiles aproximados $\{\hat{q}_i\}_{i=1}^{n-1}$, se definen n intervalos $Q_i = (\hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i)$, con $i \in \{1..n\}$, $\hat{q}_0 = -\infty$, $\hat{q}_n = \infty$. Por construcción $\mathbb{P}(P_t \in Q_i) \approx 1/n$, $\forall i \in \{1..n\}$. A estos intervalos se les llamará *bins*.

Para finalizar se define la aproximación discreta de $f(P_t)$ como el conjunto de valores esperados dentro de cada *bin*, asignándole a cada uno la probabilidad del *bin*, es decir $\{X_i/X_i = \mathbb{E}[P_t | P_t \in Q_i], \forall i \in \{1..n\}\}$ y $\mathbb{P}(X_i) = \mathbb{P}(P_t \in Q_i)$. Para calcular la esperanza se puede usar nuevamente la Ley de los Grandes Números, aproximando con el promedio de las muestras dentro del *bin*.

4.2.2. Generalización a múltiples períodos

En el caso de múltiples períodos se definen los *bins* de cada período de forma independiente y como se plantea en la subsección anterior 4.2.1. Además, se introduce el concepto de escenario, que es alguna combinación de *bins*, considerando uno en cada año, que representa una posible evolución del precio de la pulpa. Es una discretización de las trayectorias y su probabilidad está dada por el porcentaje de trayectorias simuladas que pasan por los *bins* que conforman el escenario.

Este proceso se realiza a través del algoritmo [B], consistente en los siguientes 6 puntos:

1. **Ejecutar el algoritmo [A] m veces para obtener m trayectorias (muestreos de la probabilidad conjunta):**

En este trabajo $m = 50,000$ iteraciones de [A], independientes entre sí, obteniendo un conjunto de trayectorias posibles. Estas trayectorias se pueden visualizar como el área gris de la figura 4.3. La figura 4.4 que acompaña este paso del algoritmo muestra una simplificación gráfica de este conjunto, que ayudará al lector a seguir de manera didáctica cada paso del algoritmo.

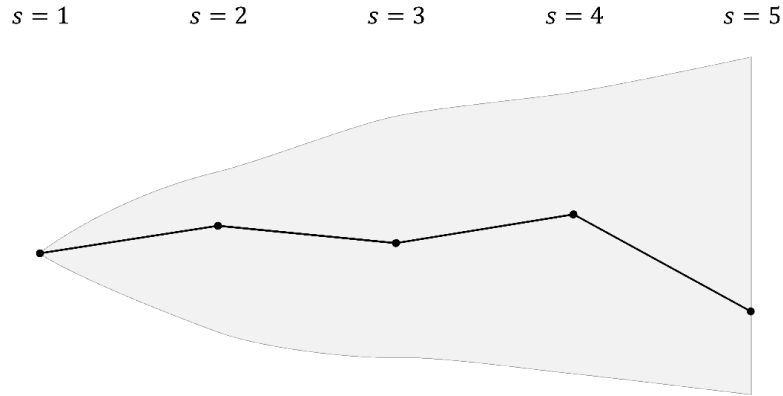


Figura 4.4: Una trayectoria de precios y el área que contiene las m trayectorias muestreadas. La posición vertical de cada punto imita la escala de precios como en la figura 4.3.

2. **Definir la cantidad de *bins* para cada etapa:**

Basado en los mismos fundamentos propuestos en 4.2.1 para el caso de un período, los precios obtenidos para cada etapa $s \in \{1..s\}$ son divididos en n_s *bins* a través de $n_s - 1$ cuantiles. Como los *bins* de una etapa forman una partición de los precios muestreados para esa etapa, una trayectoria *pasa* por un solo *bin* en cada etapa. La tupla (n_2, n_3, n_4, n_5) referida como la *forma del árbol* de escenarios determinará completamente el árbol de escenarios resultante mediante esta metodología, es decir, sus nodos y probabilidades, por lo que se identifica al árbol con el nombre $\Omega_{n_2, n_3, n_4, n_5}$.

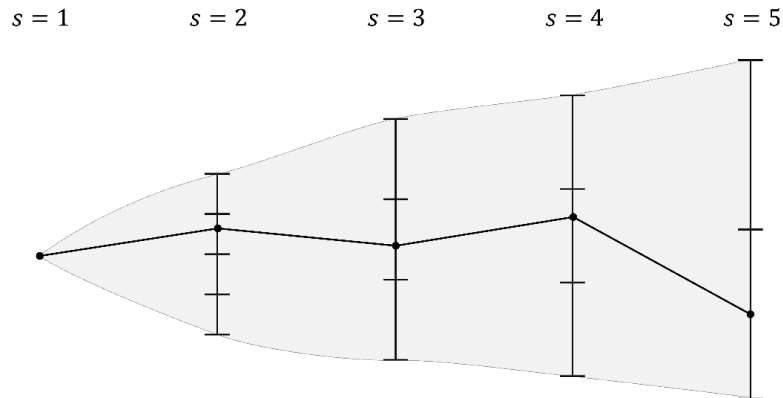


Figura 4.5: Ejemplo de una segmentación por cuantiles para cada etapa, codificado como $\Omega_{4,3,3,2}$

La figura 4.5 exhibe más de un *bin* en etapas 2, 3, 4 y 5 debido a que el árbol parte de un nodo raíz único, es decir, la primera etapa tiene un solo *bin* compuesto por todas sus muestras. En este ejemplo, los escenarios tienen $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$, $n_4 = 3$ y $n_5 = 2$ posibilidades de precio en cada etapa. El árbol resultante de este ejemplo es codificado como $\Omega_{4,3,3,2}$ según la cantidad de *bins* en las etapas que se incorpora incertidumbre.

3. Asignar el valor esperado del precio en cada *bin* como su representante de clase:

Los representantes de clase son asignados a los valores de los nodos del árbol de escenarios y con clases se refiere a la clase de equivalencia formada por todos los elementos que pertenecen a un mismo *bin*. El representante de esta clase será el valor esperado, que pertenece al *bin*, al ser este un intervalo y el valor esperado una combinación convexa de sus elementos. En palabras simples, si bien dos precios pueden ser distintos, en el caso que estos se encuentren en el mismo *bin* se considerará que ambos son el mismo precio, correspondiente al valor esperado del *bin*. Este paso genera pérdida de información, aludida en la introducción de esta sección, al eliminar la variación dentro del *bin*. Se puede mostrar, sin embargo, que a medida que la cantidad de muestras y la cantidad de *bins* aumenta la pérdida de información disminuye al mejorar la aproximación. Intuitivamente se puede pensar que al disminuir el largo del *bin* se reduce la pérdida de variación.

La figura 4.6 muestra los bins codificados como B_{s_k} , con s la etapa y k el *bin* que representa (entre 1 y n , por ejemplo, $n = 4$ para la etapa 2). Los representantes de clase están marcados con un rectángulo negro.

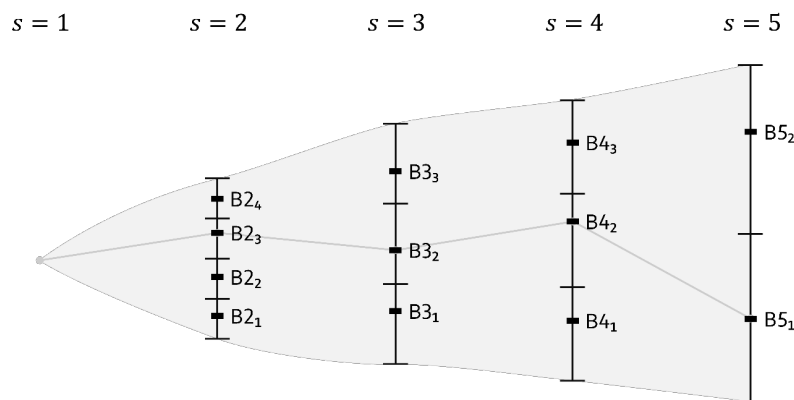


Figura 4.6: Ejemplo de un escenario, definido como el camino entre los precios esperados contenidos en la tupla $\{B_{2_2}, B_{3_2}, B_{4_2}, B_{5_1}\}$.

4. Definir un escenario por cada serie de *bins* que contenga al menos una trayectoria completa:

Se define un escenario de precios por cada serie posible de *bins*, uno para cada etapa, siempre y cuando exista una trayectoria cuyos precios de cada etapa estén contenidos en el *bin* correspondiente a ella. Es decir, pueden existir series de *bins* por los cuales no *pasa* ninguna trayectoria completa y, por conveniencia, no se considera este escenario ya que su probabilidad estimada sería 0.

La figura 4.7 muestra un ejemplo con cinco trayectorias del total generado. Las trayectorias (1), (2), (3) y (5) corresponden a escenarios distintos, mientras que la trayectorias (3) y (4) pasan por los mismos *bins*, es decir, corresponden al mismo escenario.

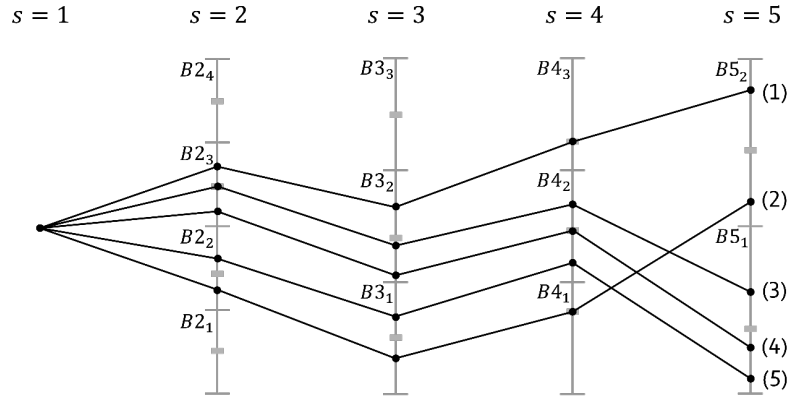


Figura 4.7: Subconjunto de cinco trayectorias de precios, sus *bins* y escenarios que determinan.

5. Calcular las probabilidades de los escenarios:

La probabilidad de cada escenario, p_ω , se estima como la cantidad de trayectorias que *pasan* por los *bins* del escenario ω dividida por la cantidad m de trayectorias muestreadas. Formalmente se trata del porcentaje de trayectorias cuyos precios se encuentran todos en las clases de equivalencia asociadas al escenario. Bajo estas clases de equivalencia se podría hablar del porcentaje de veces que sucede el escenario ω dentro del total, lo que es la definición más intuitiva de la probabilidad.

La figura 4.8 muestra 4 escenarios, donde el escenario ω' definido por $\{B_{2,3}, B_{3,2}, B_{4,2}, B_{5,1}\}$ contiene dos trayectorias, por lo que $p_{\omega'} = 2/5$, si el total de trayectorias fuera 5.

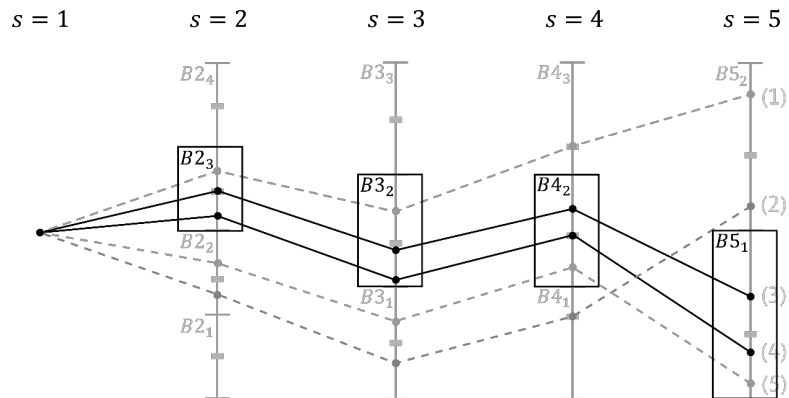


Figura 4.8: Ejemplo gráfico de un escenario que contiene dos trayectorias de un total de cinco, obtenido al ejecutar el algoritmo [A] cinco veces.

6. Crear el conjunto Ω de escenarios y probabilidades (espacio muestral):

El resultado final es el espacio muestral Ω , compuesto por los escenarios construidos

en base a *bins* y sus probabilidades estimadas en base a las trayectorias que pasan por estos. Este espacio muestral discreto aproxima la distribución conjunta implícita en los modelos probabilísticos de series de tiempo, que es continua. En adelante, se considerará este espacio muestral como la realidad o *ground truth* y al resolver el SP con este supuesto se asume que la única fuente de incertidumbre es la aleatoriedad de la variable modelada (incertidumbre aleatoria) y que no existe incertidumbre epistémica, es decir, no hay duda de que este espacio es una perfecta representación de la realidad. La figura 4.9 muestra el ejemplo de esta sección en términos de escenarios en vez de trayectorias y la figura 4.10 presenta la estructura como un árbol en forma comprimida (nodos con valores idénticos se agrupan en un solo nodo, a pesar de tener más de un padre, solo por conveniencia en la ilustración).

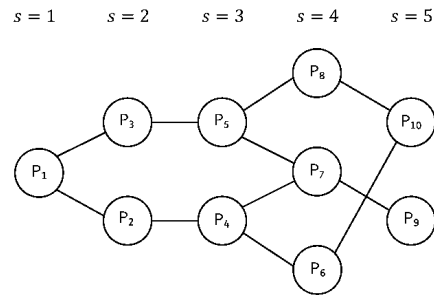
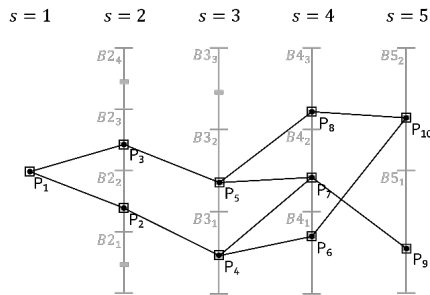


Figura 4.9: Trayectorias transformadas en escenarios mediante Ω del ejemplo.

Figura 4.10: Árbol de escenarios (forma comprimida), obtenido de Ω del ejemplo.

Capítulo 5

Experimentos y resultados

5.1. Bosque de prueba

Para experimentar con el modelo estocástico presentado en el capítulo 3 y la estrategia de generación de escenarios presentada en el capítulo 4 se utiliza el mismo bosque realista simulado por Fernández 2020 [10]. La instancia incluye los parámetros presentados en el capítulo 3 simulando una cadena de producción como la presentada en el capítulo 2, basado en data recopilada de reportes sectoriales publicados por INFOR (2020) [22] y Lima (2017) [19]. Este bosque contiene 100 rodales, árboles de la especie *pinus radiata*, construidos en un mapa dividido en cinco zonas según las clases de edad requeridas por el modelo para implementar las restricciones de conservación, además el mapa incluye tres aserraderos, una planta de pulpa y una planta de energía.

Los volúmenes de madera en cada período y los volúmenes de reforestación, junto a los costes de transporte son obtenidos en base al mapa. El volumen de cada rodal en cada período, incluido el volumen de reforestación tras la cosecha, es calculado multiplicando su área por la función de crecimiento usada en Troncoso et al. (2015) [23], basada en la función de densidad para el *pinus radiata* obtenida de Vargas y Sandoval (1998) [24]. La densidad de cada rodal $V(\tau)$ en $[m^3/ha]$, de acuerdo a su edad τ se modela mediante la función $V(\tau) = -4,97053\tau + 2,188126\tau^2 - 0,04491\tau^3 + f_\tau(\varepsilon_\nu)$, donde $f_\tau(\varepsilon_\nu)$ es una función aleatoria dependiente del resultado de la realización del parámetro ε_ν con una distribución uniforme dentro del intervalo $[-7,5, 7,5]$, y $f_\tau(\varepsilon_\nu) = 0$ si $\tau < 20$ o $\tau > 35$.

El volumen cosechado es asignado, mediante *bucking patterns* (P^B), como trozas aserrables, pulpables o combustibles, definiendo si es enviado a aserraderos, a la planta de pulpa o a la planta eléctrica, respectivamente. Estos patrones distribuyen el volumen de cada rodal entre 7 tipos de trozas, clasificadas según su destino: trozas aserrables (*pruned logs*, *board logs*, *saw logs* T1, *saw logs* T2 y *saw logs* T3), volumen pulpable y volumen combustible. Además, la distribución que asigna cada patrón dependerá de la edad del rodal, para reflejar, por ejemplo, que árboles jóvenes no poseen la madera suficiente para producir troncos de gran tamaño y dureza. Considerando 8 tipos de *bucking patterns* para 4 rangos etáreos, el modelo cuenta con 32 patrones en total, graficados en la figura 5.2 (por simpleza las trozas aserrables son agrupadas). Debido a que el programa puede asignar un porcentaje de la co-

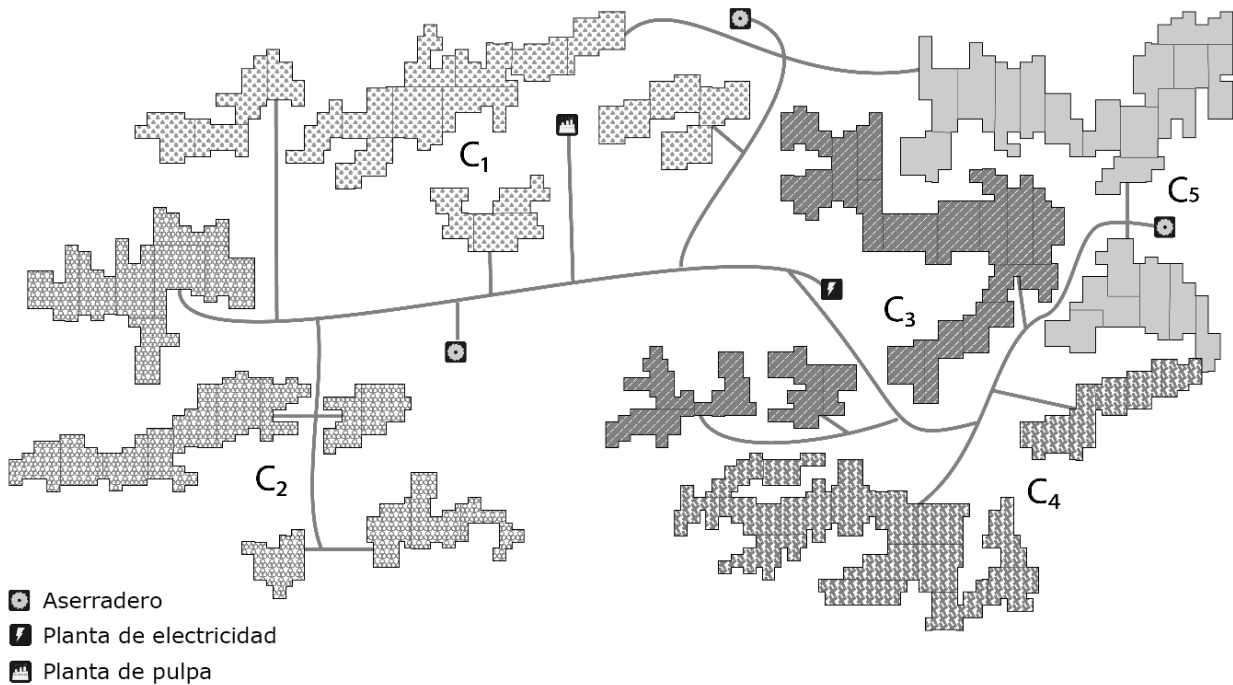


Figura 5.1: Mapa del bosque simulado. Con C_i representando una zona de clase i de edad.

secha de un rodal a cada patrón, los *bucking patterns* proporcionan flexibilidad para cumplir con la demanda de cada troza y al mismo tiempo restringen las proporciones de cada tipo de troza aserrable que cada rango de edad puede entregar, las cuales dependen del diámetro y largo del árbol.

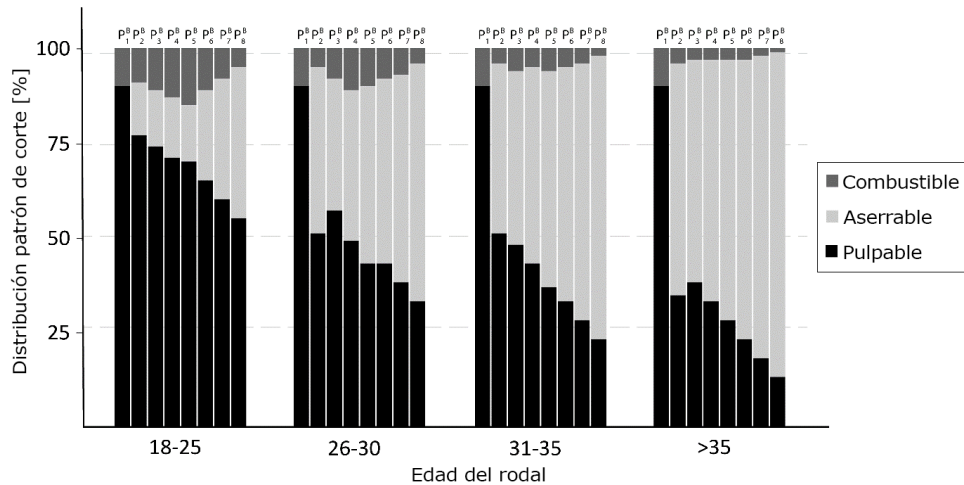


Figura 5.2: *Bucking patterns* permitidos en rodales, para cada clase de edad.

5.2. Resultados

Como se ha mencionado en este trabajo, se espera que mejor información permita tomar mejores decisiones, reflejadas en este caso en el valor de la función objetivo del problema. Esta mejora en la información es representada por la cantidad de escenarios que aproximan la distribución del precio de la pulpa. Al mismo tiempo que una gran cantidad de escenarios informa de mejor manera al SP, también lo vuelve más complejo, costoso y difícil de resolver. Tomando esto en consideración, las preguntas que se propone resolver son las siguientes: ¿acaso la incorporación de escenarios de precio permite una mejora con respecto al caso base en que solo se informa con el valor esperado?, ¿y si es así, por cuánto? ¿A partir de qué cantidad de escenarios esta mejora se estabiliza? ¿Cómo cambia la toma de decisiones en los distintos escenarios?

Como modelo *benchmark* se utiliza aquel que posee un solo escenario, correspondiente al valor esperado del precio de la pulpa en cada año del horizonte de negocio. A este modelo se le llama determinista, pues considera que el precio toma el valor esperado con probabilidad 1. Este *benchmark* es representativo de lo que sucede en la práctica cuando no se considera estocasticidad y el modelador determina sus parámetros en base al “caso promedio”. Para obtener los precios promedio basta con ejecutar el algoritmo [B] con un solo *bin* por etapa.

A la solución del modelo determinista se le llama solución determinista y corresponde a sus decisiones de tala, corte y producción.

Sea Ω el espacio muestral determinado por un árbol de escenarios cualquiera. Sea $\bar{U}(\omega)$ la utilidad obtenida por la solución determinista bajo los precios del escenario $\omega \in \Omega$. En base a esto, se define $\bar{U}(\Omega) := E[\bar{U}(\omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} \bar{U}(\omega) \cdot p_\omega$ como la utilidad esperada de la solución determinista en el espacio muestral Ω , es decir, la suma de la utilidad determinista en cada escenario, ponderada por su probabilidad.

Es preciso notar que para cada escenario $\omega \in \Omega$, $\bar{U}(\omega) = \bar{U}_B(\omega) + \bar{U}_A$, con $\bar{U}_B(\omega)$ la utilidad obtenida en el horizonte de negocio y \bar{U}_A la utilidad obtenida en el horizonte de anticipación. Esta última utilidad es constante en el tiempo, pues las decisiones del modelo determinista no cambian con el precio de la pulpa, y el precio de la pulpa no afecta directamente la utilidad de anticipación.

En forma análoga, para analizar la solución del SP, se define $U(\omega)$ como la utilidad del SP bajo los precios de un escenario ω y $U(\Omega) := E[U(\omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} U(\omega) \cdot p_\omega$ como la utilidad esperada en el espacio muestral Ω . Tal como en el caso determinista, $U_B(\omega)$ se define como la utilidad en el horizonte de negocio, pero por el contrario, la utilidad del horizonte de anticipación, $U_A(\omega)$, ahora depende del escenario, no porque se venda pulpa, sino que las decisiones cambian con ω .

Como ya se ha mencionado, la diferencia clave entre la solución del SP y la solución determinista es que la primera se puede considerar más informada, debido a una toma de decisiones bajo una distribución de probabilidad, mientras que la segunda solo considera una estimación puntual. Un resultado esperado, entonces, es que el SP obtenga una utilidad esperada $U(\Omega)$ superior a la de las decisiones deterministas, $\bar{U}(\Omega)$.

5.2.1. Resultados generales del SP

El foco del análisis estará en el horizonte de negocio, pues el horizonte de anticipación es un artificio diseñado para introducir consideraciones de largo plazo, pero que en una ejecución continua del problema jamás llegarían a realizarse. Además, como se mencionó anteriormente para el modelo determinista la utilidad del horizonte de anticipación es constante. Además, como se verá más adelante, incluso en el SP la utilidad de este horizonte no presenta variaciones significativas.

Considerando lo anterior, se define la Mejora Porcentual de Utilidad Esperada, PUI, por sus siglás en inglés (*Percentage Expected Utility Improvement*), que es la diferencia entre la utilidad esperada del SP y la solución determinista, ambas en el horizonte de negocio, como porcentaje la primera:

$$PUI(\Omega) = \frac{U_B(\Omega) - \bar{U}_B(\Omega)}{U_B(\Omega)} \quad (5.1)$$

La figura 5.3 muestra el PUI para 115 árboles de escenarios, construidos con variada cantidad de bins por etapa, combinando desde 1 a 8. Estos resultados indican que el SP supera a las decisiones deterministas, de forma consistente para distintas formas de árbol, con una mejora entre un 13% y 15%. También se responde acerca del número de escenarios que vale la pena resolver, resultando que con tan solo 2 *bins* por año, 16 escenarios en total, se logra una mejora superior al 12%. Además, se identifica una ligera diferencia entre los segmentos *árbol tipo 1*, en gris, cuyo árbol posee solo 2 *bins* en alguna de las primeras 2 etapas y *árboles tipo 2*, que contienen al menos 3 *bins* en cada una de ellas. Es decir, abrir el árbol en una etapa temprana le da flexibilidad al modelo para tomar mejores decisiones, pero es una mejora no significativa con respecto a la ganancia base.

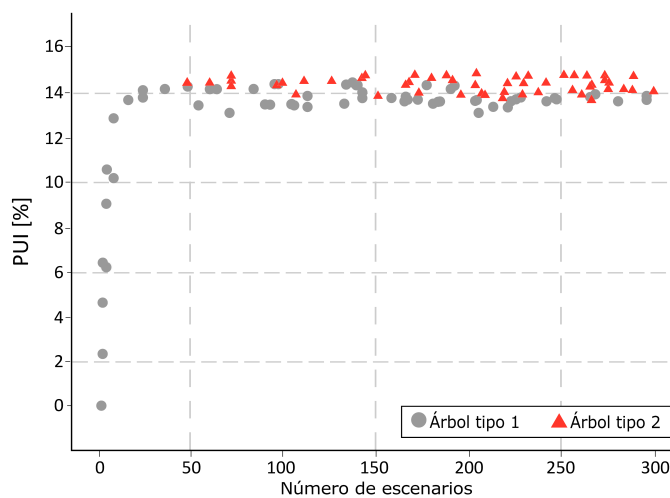


Figura 5.3: Mejora Porcentual de la Utilidad Esperada (PUI) en el horizonte de negocio para distintos árboles de escenarios. Color gris indica árboles con 2 o menos *bins* en alguna de las primeras 2 etapas, color rojo lo contrario, 3 o más *bins* en ambas etapas.

5.2.2. Análisis de la toma de decisiones bajo incertidumbre

Habiendo mostrado que el SP obtiene mejores resultados que el modelo determinista de forma consistente, se procede a estudiar las decisiones tomadas bajo un árbol de escenarios en particular. Para este análisis se escoge un árbol con cantidad de bins decreciente en el cuadrante superior derecho de la figura 5.3. Se escoge el árbol $\Omega_{6,6,3,3}$ que contiene 299 escenarios con probabilidad no nula, representando una configuración realista con información más detallada en plazos inmediatos y de menor resolución en los posteriores.

La utilidad de cada escenario, $U(\omega)$, segmentada por periodos es graficada en las figuras 5.4 y 5.5. La primera muestra el detalle para todos los periodos del horizonte de planificación y la segunda sólo el horizonte de negocios. Ambos gráficos muestran claramente que las decisiones del SP obtienen mejores resultados que el caso determinista. Se observa en la segunda figura que la decisión determinista obtiene mayor utilidad en el primer período, por lo que se infiere que el SP, al conocer las posibilidades de mejores precios en el futuro, decide vender menos pulpa en un comienzo, en anticipación a estos escenarios.

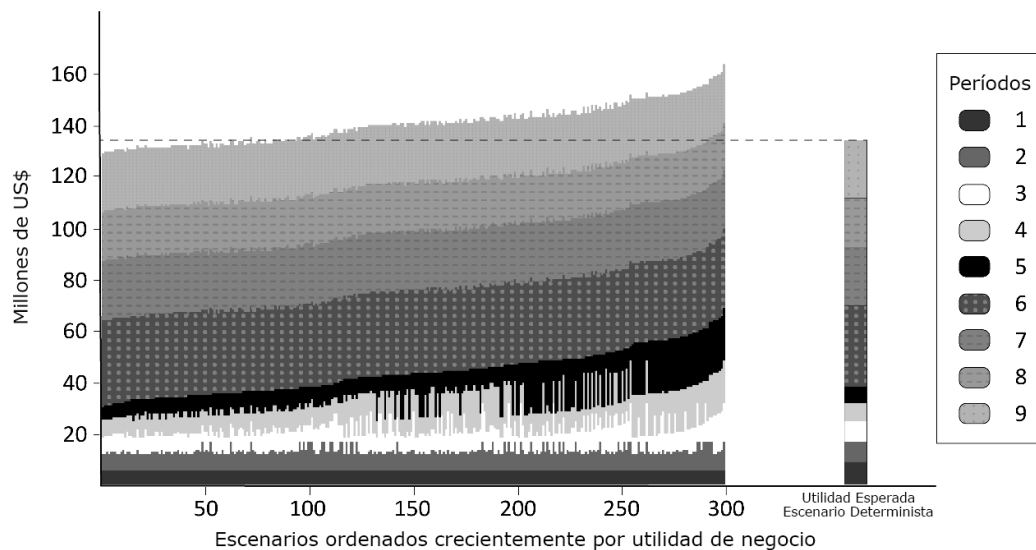


Figura 5.4: Utilidad de los escenarios durante todo el horizonte, comparados con la utilidad esperada de las decisiones deterministas. Los 299 escenarios aparecen contiguos, representados cada uno por una barra de ancho 1 unidad. Se ordenan de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocios.

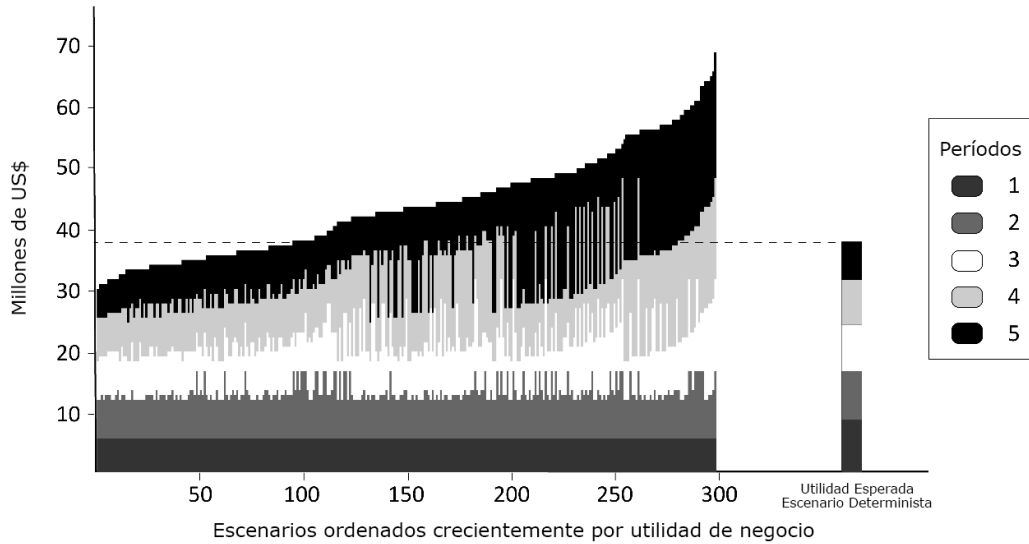


Figura 5.5: Utilidad de los escenarios durante todo el horizonte de negocios, comparados con la utilidad esperada de las decisiones deterministas. Los 299 escenarios aparecen contiguos, representados cada uno por una barra de ancho 1 unidad. Se ordenan de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocios.

Para entender mejor este comportamiento, se observa el volumen de producción para cada tipo de troza en la figura 5.6. Al comparar el volumen de trozas aserrables y pulpables en cada escenario ordenado por utilidad en el horizonte de negocio se observa una correlación positiva en la decisión de aumentar las trozas pulpables y la utilidad obtenida por el SP. Se infiere entonces que la mejora en utilidad cuando hay buenos precios de pulpa no se debe solo al aumento del ingreso por venta, sino que el SP decide producir más pulpa cuando espera estos buenos precios para aumentar también la cantidad vendida. Este efecto se observa en la figura 5.5 donde la mayor variación de utilidad se da en los períodos 3 a 5.

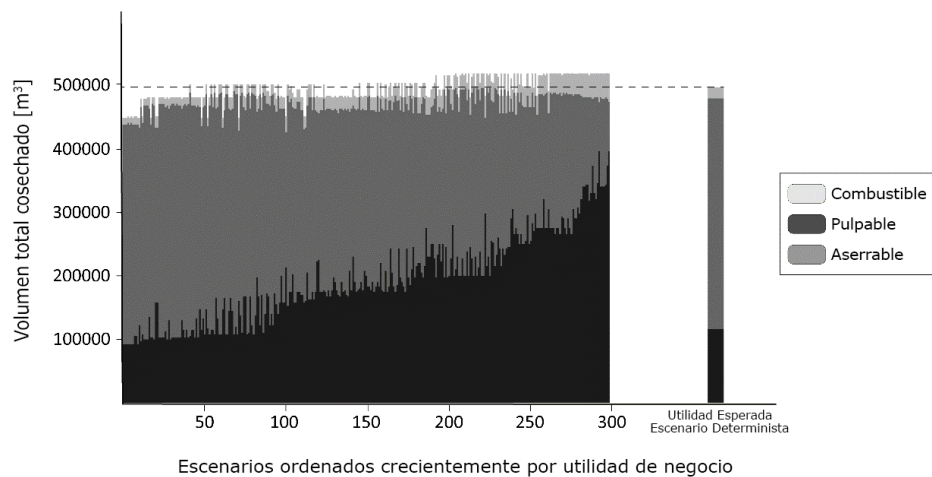


Figura 5.6: Asignación de volumen cosechado, según tipo de troza durante el horizonte de negocios para cada escenario. Los escenarios del árbol están ordenados de izquierda a derecha según la utilidad obtenida en el horizonte de negocio.

Finalmente se estudia cómo cambia la ganancia o pérdida, con respecto a la solución deter-

minista, en cada escenario resuelto por el SP para este árbol. Se definen la Mejora Porcentual de Utilidad por Escenario (SPUI) y la Mejora Porcentual de Utilidad por Escenario en el Horizonte de Negocio (BSPUI) como métricas de rendimiento de la solución del SP en cada escenario. La primera es un rendimiento en todo el horizonte de planificación y la segunda solo en el horizonte de negocio.

$$\begin{aligned} SPUI(\omega) &= \frac{U(\omega) - \bar{U}(\omega)}{U(\omega)} \\ BSPUI(\omega) &= \frac{U_B(\omega) - \bar{U}_B(\omega)}{U_B(\omega)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Estas métricas miden la diferencia de rendimiento entre las soluciones del SP y el modelo determinista. Se caracteriza además cada escenario en cuanto a la magnitud de sus precios y en cuanto a su similitud con el escenario determinista, para poder analizar cómo afectan estas características.

Como métrica de la magnitud de los precios de un escenario se propone la Media de Precios Descontados (MDP, del inglés *Mean Discounted Price*), que es simplemente el promedio de los precios multiplicados por el factor de descuento correspondiente. Se descuentan los precios, pues así cada uno refleja, en la misma escala, el aporte por tonelada de pulpa vendida a la función de utilidad. Se promedian estos precios descontados para caracterizar el precio del escenario con un solo valor en vez de cinco. Escenarios con una mayoría de precios altos tendrán un MDP alto y de forma análoga con los precios bajos. Por otro lado, un MDP medio puede representar un escenario que varíe fuertemente entre precios altos y bajos o bien uno que mantenga constantemente precios medios.

$$MDP(\omega) = \sum_{t \in T_B} \Delta_t \cdot P_{\omega t} \quad (5.3)$$

Como métrica de similitud (o diferenciación) de cada escenario con el escenario determinista, se utilizará la distancia euclidiana d_ω entre el vector de precios P_ω del escenario ω y el vector de precios del escenario determinista, \bar{P} . Como es usual con esta distancia, un valor menor corresponde a una similitud mayor y una distancia mayor, a una similitud menor.

$$d_\omega = \sqrt{\sum_{t \in T_B} (P_{\omega t} - \bar{P}_t)^2} \quad (5.4)$$

En base a estas cuatro métricas se obtienen las figuras 5.7 y 5.8. La primera muestra el BSPUI en el eje vertical, que es la diferencia porcentual de utilidad de negocio en cada escenario, y en el horizontal la distancia de cada uno al escenario determinista. El segundo muestra el caso para el SPUI, la diferencia porcentual de utilidad completa en cada escenario. En ambos se han coloreado los escenarios de acuerdo a su MDP y el tamaño relativo representa su probabilidad, para facilidad de contemplación.

Se observa en ambas figuras que los escenarios con menor distancia al determinista, es decir, los más similares, pierden contra el determinista o alcanzan una mejora no significativa. A medida que la diferenciación aumenta ($d_w > 150$) se observan mejoras por sobre el 5 % y llegando al 35 % en el caso de negocio y entre 3 % y 14 % en el caso de horizonte completo. Estas mejoras son atribuibles a la mayor información que posee el SP acerca de los precios posibles. Por definición, la solución del modelo determinista es óptima para su escenario y, por lo tanto, se espera que tenga un mejor rendimiento en escenarios cercanos a este, situación que se agrava al considerar que la solución del SP posee un conjunto factible más restringido, a casusa de la no-anticipatividad.

En la figura 5.7 se observa en los escenarios con MDP bajo (más oscuros) un BSPUI negativo, es decir, las decisiones del SP en esos escenarios obtienen menor utilidad de negocio que la solución determinista cuando los precios de la pulpa son consistentemente bajos. Esta situación se revierte en la figura 5.8, donde se observa que incluso en los escenarios de peor MDP la solución del SP obtiene mejor rendimiento que la solución determinista. Este cambio de resultados en el tiempo se explica considerando que el SP puede decidir talar y producir menos durante los períodos de bajo precio, para recuperar en el futuro. Un efecto de esto se puede observar en la figura 5.6 donde en los escenarios de menor utilidad, que coinciden con menor precio de pulpa, la solución del SP es cosechar menos volumen total en el horizonte de negocio. Es decir, al observar muy bajos precios, el SP decide postergar la tala al horizonte de anticipación, donde se espera una regresión a la media.

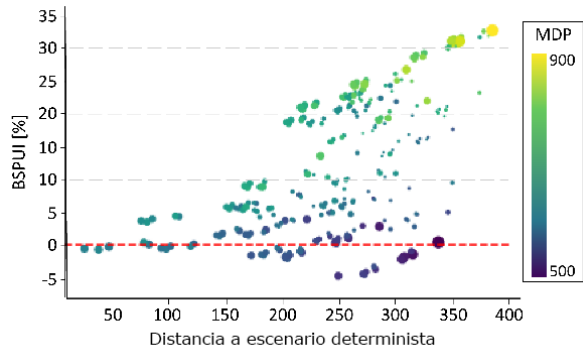


Figura 5.7: BSPUI vs distancia d_w al caso determinista. El tamaño indica la probabilidad del escenario.

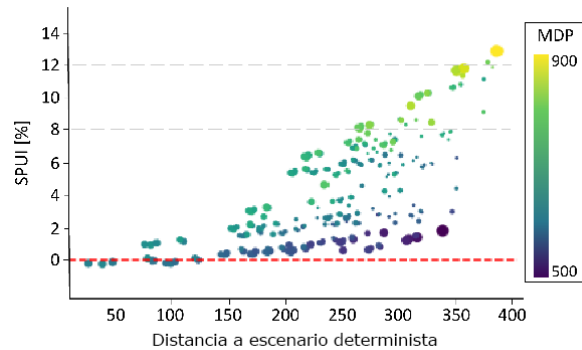


Figura 5.8: SPUI vs distancia d_w al caso determinista. El tamaño indica la probabilidad del escenario.

Capítulo 6

Conclusiones

Investigadores anteriormente (Troncoso et al [23]) habían resuelto el problema de planificación forestal integrando bosque y aserradero, en su versión determinista. El aporte de este trabajo de tesis es expandir esta línea de investigación al incorporar estocasticidad en el precio de la pulpa de madera (en varias etapas), proponer una metodología completa de generación de escenarios a partir de una serie de tiempo histórica y analizar los efectos de esta inclusión de aleatoriedad.

Al resolver el problema estocástico para 115 árboles de escenarios de distintas formas se encuentra una mejora consistente de la utilidad del negocio integrado, entre 13 % y 15 % con respecto a la versión determinista del problema, a partir de 24 escenarios de precio. Esta cantidad de escenarios es pequeña, en términos de complejidad de resolución, y corresponde aproximadamente a 2 posibilidades de precio por etapa.

Precios altos de pulpa equivalen a mayor ingreso por tonelada vendida, lo que explica, *ceteris paribus*, la mayor utilidad obtenida en escenarios en alto precio. Sin embargo, al estudiar las decisiones del modelo estocástico se observa que este aprovecha además de aumentar la producción de pulpa, y con ello la cantidad vendida, en desmedro de los productos aserrados. Cuando los precios son bajos, no solo disminuye la producción de pulpa, sino la producción en general al decidir talar menos volumen total. Este volumen es destinado al horizonte de anticipación, donde se espera que el precio se acerque a su media y la cosecha tenga un mejor rendimiento.

Aumentar la cantidad de escenarios sobre 24 no presenta mejoras significativas, lo que se explica al analizar la toma de decisiones del modelo estocástico. Una vez decidida la tala, la siguiente decisión se puede entender de forma simplificada como vender pulpa o vender productos de madera aserrada. El precio de estos últimos no varía y, por lo tanto, las condiciones aleatorias se pueden simplificar también en precio alto de pulpa o precio bajo. A esto se suma que la decisión de producción de un período no limita directamente la de los siguientes, por lo que existe flexibilidad en esta decisión ante cambios bruscos del precio de la pulpa. Se puede considerar entonces que las decisiones y los estados son binarios, se produce más pulpa cuando el precio es alto y se produce más aserrados cuando es bajo, lo que explica por qué con 2 escenarios por etapa se alcanza una gran ganancia con respecto al modelo

determinista, pero al agregar más escenarios el beneficio marginal deja de ser significativo ($< 1\%$). Es decir, basta con esa cantidad para aprovechar toda la flexibilidad del problema.

Por otro lado, se corrobora la mejora en predicción y métricas de ajuste al incorporar heterocedasticidad (volatilidad variable en el tiempo) a los modelos probabilísticos que modelan el precio de la pulpa. Sin embargo, en vista de las conclusiones anteriores, mejorar aun más la predicción o reducir la incertidumbre a través de modelos más complejos no necesariamente traerá consigo mejor rendimiento. Esto se puede concluir al ver que el beneficio de aumentar el número de escenarios, es decir, tener una mejor aproximación, disminuye rápidamente.

Finalmente, la metodología de generación de escenarios presentada es flexible en cuanto solo requiere una serie de tiempo de variable continua y puede ser utilizada en la incorporación de incertidumbre de cualquier parámetro de esta naturaleza, para cualquier número de etapas y cantidad de escenarios que se requiera.

Bibliografía

- [1] Nicolas Andalaft, Pablo Andalaft, Monique Guignard, Adrian Magendzo, Alexis Wainer, and Andres Weintraub. A problem of forest harvesting and road building solved through model strengthening and lagrangean relaxation. *Operations Research*, 51(4):613–628, 2003.
- [2] Fischer Black. Studies of stock price volatility changes, proceedings of the 1976 meetings of the business and economic statistics section. 177-191. In *American Statistical association*, pages 307–327. sn, 1976.
- [3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [4] Robert Brown. *A brief account of microscopical observations made... on the particles contained in the pollen of plants, and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. 1828.
- [5] Sophie D’Amours, Mikael Rönnqvist, and Andres Weintraub. Using operational research for supply chain planning in the forest products industry. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 46(4):265–281, 2008.
- [6] Corporación Chilena de la Madera. Aportes a la economía: Chile en el mercado mundial. Disponible en: <https://www.corma.cl/perfil-del-sector/aportes-a-la-economia/chile-en-el-mercado-mundial/> (18-08-2019).
- [7] Albert Einstein et al. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat.
- [8] Robert F Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007, 1982.
- [9] Robert F Engle and Tim Bollerslev. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 5(1):1–50, 1986.
- [10] Nicolás Fernández. Optimización estocástica bajo incertidumbre de un modelo de planificación forestal integrado usando estrategias de decomposición. 2020.
- [11] Jordi Garcia-Gonzalo, Cristóbal Pais, Joanna Bachmatiuk, and Andrés Weintraub. Ac-

- counting for climate change in a forest planning stochastic optimization model. *Canadian Journal of Forest Research*, 46(9):1111–1121, 2016.
- [12] Ana Janina Gysling Caselli, Verónica Alvarez González, Daniel Alberto Soto Aguirre, V Pardo, Pamela Poblete, et al. Anuario forestal 2018. 2017.
- [13] William E Hart, Carl D Laird, Jean-Paul Watson, David L Woodruff, Gabriel A Hackebeil, Bethany L Nicholson, and John D Sirola. *Pyomo-optimization modeling in python*, volume 67. Springer, 2017.
- [14] Andrew C Harvey and Tirthankar Chakravarty. Beta-t(e) garch. 2008.
- [15] John Hull et al. *Options, futures and other derivatives/John C. Hull*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall,, 2009.
- [16] IndexMundi. Woodpulp (sweden), softwood, sulphate, bleached, air-dry weight, c.i.f. north sea ports. Disponible en: <https://www.indexmundi.com/commodities/?commodity=wood-pulp&months=360>. (26-10-2017), 2017.
- [17] Peter Kall, Stein W Wallace, and Peter Kall. *Stochastic programming*. Springer, 1994.
- [18] Achal Lama, Girish Jha, Ranjit Paul, and Bishal Gurung. Modelling and forecasting of price volatility: An application of garch and egarch models. *Agricultural economics research review*, 28, 01 2015.
- [19] R Lima and José Luis. Caracterización de la cadena de producción y comercialización de la industria forestal: estructura, agentes y prácticas. 2017.
- [20] Daniel B Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 347–370, 1991.
- [21] Cristóbal Pais Martínez. Complete stochastic forestry planning problem using progressive hedging algorithm. 2014.
- [22] Instituto Forestal Área de Información y Economía Forestal. El sector forestal chileno 2019. 2020.
- [23] Juan Troncoso, Sophie D’Amours, Patrik Flisberg, Mikael Rönnqvist, and Andrés Weintraub. A mixed integer programming model to evaluate integrating strategies in the forest value chain — a case study in the chilean forest industry. *Canadian Journal of Forest Research*, 45(7):937–949, 2015.
- [24] Ignacio Cerda Vargas and Ricardo Núñez Sandoval. Appreciation of the chilean forest resource: Plantations of pinus radiata and eucalyptus sp. 1985–1996. *Report, Food and Agriculture Organization of the United Nations*, 1998.
- [25] Miklós Vázsonyi. Overview of scenario tree generation methods, applied in financial and economic decision making. *Periodica Polytechnica Social and Management Sciences*, 14(1):29–37, 2006.

- [26] Fernando Badilla Veliz, Jean-Paul Watson, Andres Weintraub, Roger J-B Wets, and David L Woodruff. Stochastic optimization models in forest planning: a progressive hedging solution approach. *Annals of Operations Research*, 232(1):259–274, 2015.
- [27] Jean-Paul Watson, David Woodruff, and William Hart. Pysp: Modeling and solving stochastic programs in python. *Mathematical Programming Computation*, 4, 06 2012.
- [28] Jean-Paul Watson and David L Woodruff. Progressive hedging innovations for a class of stochastic mixed-integer resource allocation problems. *Computational Management Science*, 8(4):355–370, 2011.
- [29] Roger J-B Wets. On the relation between stochastic and deterministic optimization. In *Control theory, numerical methods and computer systems modelling*, pages 350–361. Springer, 1975.
- [30] Roger J-B Wets and Ignacio Rios. Modeling and estimating commodity prices: copper prices. *Mathematics and Financial Economics*, 9(4):247–270, 2015.
- [31] J Work, Feng Qiu, and MK Luckert. Examining hardwood pulp and ethanol prices for improved poplar plantations in canada. *Forest Policy and Economics*, 70:9–15, 2016.

