



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**PROPAGACIÓN DE ONDA PEQUEÑA EN UN MEDIO NO LINEAL
MODELADO CON UNA NUEVA ECUACIÓN CONSTITUTIVA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

RICARDO SEBASTIÁN IBARRA CÁCERES

PROFESOR GUÍA:
ROGER BUSTAMANTE PLAZA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
ALEJANDRO ORTIZ BERNARDÍN

SANTIAGO DE CHILE

2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: **RICARDO SEBASTIÁN IBARRA CÁCERES**
FECHA: 2020
PROF. GUÍA: ROGER BUSTAMANTE PLAZA

PROPAGACIÓN DE ONDA PEQUEÑA EN UN MEDIO NO LINEAL MODELADO CON UNA NUEVA ECUACIÓN CONSTITUTIVA

En los últimos años se han propuesto nuevas relaciones constitutivas implícitas para modelar el comportamiento de los cuerpos elásticos. Como subclase de estas relaciones constitutivas se desprende un caso, cuando se consideran deformaciones pequeñas, de la forma $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{h}(\mathbf{T})$ (ver [1, 2, 3]), donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde al tensor de deformación infinitesimal y \mathbf{T} corresponde al tensor de esfuerzos de Cauchy.

El tema de esta memoria se enfoca en estudiar el fenómeno de propagación de ondas de pequeña amplitud en materiales que están sometidos a grandes cargas estáticas sobre las que se superpone una excitación de esfuerzo externa, pequeña y dependiente del tiempo. Los modelos de materiales a considerar son no lineales y modelados mediante la nueva ecuación constitutiva mencionada en el párrafo anterior.

Los problemas a estudiar en la presente memoria son unidimensionales y de alta simetría. Se resuelven numéricamente las EDPs de onda lineales (para los desplazamientos) asociadas a cada caso. Estos son: una cavidad esférica bajo inflación, un tubo cilíndrico con inflación, un tubo con inflación y corte telescópico, un tubo con inflación y corte circunferencial y una placa infinita sometida a compresión en ambas caras. Los modelos a estudiar corresponden a: un material que muestra límite de deformación, un modelo para roca y otro para hormigón, en donde se tiene pulsos de tipo sinusoidal y rectangular. Además se estudia el efecto de distintas presiones estáticas y distintos tamaños para cada geometría.

Al resolver numéricamente las EDPs de onda lineales para cada caso mencionado en los párrafos anteriores, se concluye que las presiones estáticas aplicadas, en general, tienen un efecto importante en la forma, amplitud y velocidad de la onda según sea su magnitud. Lo anterior se debe a la no linealidad de los modelos. Por otro lado, se aprecia, que para mayor rigidez del material se tiene una mayor velocidad de las ondas y una amplitud menor. La geometría tiene un efecto considerable, pues cuando es muy pequeña es difícil visualizar las ondulaciones debido a la velocidad muy elevada de la onda.

Dedicado a mis padres y mis abuelitos, con cariño.

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi mamá por su entrega, apoyo incondicional, amor e infinita disposición. A ella es a quien debo todo y quien siempre ha estado pendiente de mí; de mi salud, de mi ánimo, de que todo vaya bien. Ha sido el pilar fundamental de mi vida y le agradezco por siempre haber creído en mí.

Quisiera agradecer de manera muy especial a dos personas que ya partieron y que me entregaron todo su amor, cariño, comprensión, atención, cuidados, recursos y cuánto pudieron mientras estuvieron conmigo: mi papá y mi abuelita María. Sin ellos tampoco hubiese sido posible todo el camino realizado. Los llevo en mi recuerdo siempre.

A mi abuelo Juan por sus consejos, apoyo, compañía, regaños y mucho más. Ha sido muy importante en mi vida y ha estado de forma permanente en todos los procesos.

A mis familiares, al tío Marcelo, mis tíos y primos por ser parte de mi vida. Especialmente agradezco a mi tío Gilberto y mi tía Mireya por su inmenso cariño y haberme recibido en su casa por tanto tiempo mientras estuve en la universidad.

A mis amigos y amigas de las distintas etapas que me ha tocado vivir. A los del colegio, plan común, la especialidad y a los de la vida en general; les agradezco inmensamente por su apoyo, apañe, contención, por los momentos divertidos, los carretes, los momentos duros y muchas más cosas. Prefiero no nombrarlos uno a uno porque más de alguno se me puede pasar y son todos importantes para mí. Ser hijo único hace que uno valore muchísimo más la amistad y de todos rescato lo mejor.

Al profesor Roger Bustamante y la profesora Viviana Meruane por sus buenos consejos, disposición y permitirme realizar la memoria con ustedes.

Agradezco al proyecto FONDECYT No. 1160030 por aportar el financiamiento para la realización de la presente memoria.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo General	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Alcances	2
2. Antecedentes	3
2.1. Ecuaciones básicas	3
2.1.1. Cinemática y ecuación de movimiento	3
2.1.2. Relaciones constitutivas	4
2.1.3. Problema de valor de frontera	5
2.2. Ecuaciones incrementales	5
3. Metodología	7
4. Modelos constitutivos	8
4.1. Modelo con comportamiento límite de deformación	8
4.2. Modelo no lineal para roca	10
4.3. Modelo no lineal de hormigón	12
4.3.1. Fitting Modelo no lineal de Hormigón	13
5. Solución de algunos problemas unidimensionales de valor de frontera	15
5.1. Esfera bajo inflación	15
5.1.1. Modelo con comportamiento límite de deformación	20
5.1.1.1. Solución numérica de la ecuación de onda	21
5.1.2. Modelo no lineal de roca	23
5.1.2.1. Solución numérica de la ecuación de onda	24

5.1.3.	Modelo no lineal de hormigón	27
5.2.	Tubo cilíndrico bajo inflación	29
5.2.1.	Modelo con comportamiento límite de deformación	32
5.2.1.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	34
5.2.2.	Modelo no lineal de roca	37
5.2.2.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	38
5.2.3.	Modelo no lineal de hormigón	39
5.3.	Tubo cilíndrico bajo corte telescópico e inflación	42
5.3.1.	Modelo con comportamiento límite de deformación	47
5.3.1.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	49
5.3.2.	Modelo no lineal de roca	50
5.3.2.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	53
5.3.3.	Modelo no lineal de hormigón	54
5.4.	Tubo cilíndrico bajo corte circunferencial e inflación	55
5.4.1.	Modelo con comportamiento límite de deformación	60
5.4.1.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	62
5.4.2.	Modelo no lineal de roca	63
5.4.2.1.	Solución numérica de la ecuación de onda	65
5.4.3.	Modelo no lineal de hormigón	67
5.5.	Placa infinita sujeta a compresión en sus dos caras	67
5.5.1.	Modelo con comportamiento límite de deformación	70
5.5.2.	Modelo no lineal de roca	71
6.	Análisis de resultados	73
7.	Conclusiones	79
	Bibliografía	80
Anexo A.	Coefficientes \mathcal{C}_{ijkl}	83
A.1.	Coefficientes caso esférico con inflación	83
A.A.1.	Modelo con Comportamiento límite de deformación	83
A.A.1.1.	Modelo no lineal de roca y de hormigón	84
A.A.2.	Coefficientes caso cilíndrico con inflación	85
A.A.2.1.	Modelo con Comportamiento límite de deformación	85
A.A.2.2.	Modelo no lineal de roca y de hormigón	86

A.A.3. Coeficientes caso cilíndrico: corte telescópico e inflación	87
A.A.3.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación	87
A.A.3.2. Modelo no lineal de roca y de hormigón	88
A.A.4. Coeficientes caso cilíndrico: corte circunferencial e inflación	89
A.A.4.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación	89
A.A.4.2. Modelo no lineal de roca y hormigón	90
A.A.5. Coeficientes caso placa semi-infinita	91
A.A.5.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación	92
A.A.5.2. Modelo no lineal de roca y de hormigón	92

Índice de Ilustraciones

4.1.	Gráficos de la deformación radial ε_r y la deformación circunferencial ε_θ versus el esfuerzo axial σ_z en [MPa] para cilindro en compresión axial sin restricción lateral	14
5.1.	Cavidad esférica sometida a presión interna	15
5.2.	Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos. . .	22
5.3.	Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos. . .	23
5.4.	Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.	25
5.5.	Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.	26
5.6.	Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.	27
5.7.	Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.	28
5.8.	Casquete cilíndrico sometida a presión interna	29
5.9.	Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos. . .	35

5.10.	Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos. . .	36
5.11.	Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.	38
5.12.	Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.	39
5.13.	Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.	40
5.14.	Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.	41
5.15.	Casquete cilíndrico sometido a presión interna y corte telescópico en el radio interior.	42
5.16.	Resultados caso cilíndrico con corte telescópico para excitaciones sinusoidales para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.3. El tiempo t está en segundos.	50
5.17.	Resultados caso cilíndrico con corte telescópico con excitaciones sinusoidales para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.3. El tiempo t está en segundos. . .	54
5.18.	Casquete cilíndrico sometido a presión interna y corte circunferencial en su radio interior	55
5.19.	Resultados caso cilíndrico con corte circunferencial con excitaciones sinusoidales para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.4. El tiempo t está en segundos.	63
5.20.	Resultados caso cilíndrico con corte circunferencial con excitaciones sinusoidales para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.5. El tiempo t está en segundos. . .	66
5.21.	Placa Infinita sometida a carga en sus dos caras	67

5.22. Gráfico velocidad versus esfuerzo de compresión axial para la placa infinita considerando el modelo con comportamiento límite de deformación. 71

5.23. Gráfico velocidad versus esfuerzo axial para la placa infinita considerando el modelo no lineal de roca. 72

Índice de Tablas

4.1.	Valores para las constantes de $\Pi(\mathbf{T})$ (4.4)	9
4.2.	Constantes para el Modelo no lineal de Roca	11
4.3.	Constantes para el Modelo no lineal de Hormigón	12
4.4.	Valores para el modelo no lineal de roca modificado	13
5.1.	Presiones estáticas en el radio interior de la cavidad esférica	21
5.2.	Presiones estáticas en el radio interior del tubo	35
5.3.	Presiones estáticas en el cilindro sometido a inflación y corte telescópico.	49
5.4.	Presiones estáticas en el radio interior del tubo sometido a inflación y corte circunferencial.	62
5.5.	Presiones estáticas en el radio interior del tubo sometido a inflación y corte circunferencial modelo no lineal de roca.	66

Capítulo 1

Introducción

Los fenómenos ondulatorios que se producen en cuerpos bajo cargas grandes estáticas son muy comunes en estructuras de hormigón y de roca. En las primeras normalmente se deben a sismos y en las estructuras de roca tanto a sismos como a tronaduras. Por la relevancia que tiene estudiar cómo se propagan ondas pequeñas en estos materiales, se realiza un estudio teórico para diferentes geometrías y regímenes de carga en modelos teóricos para éstos.

Algunos materiales frágiles como el hormigón y la roca pueden exhibir un comportamiento no lineal entre la deformación y el esfuerzo.

Recientemente se han propuesto relaciones constitutivas nuevas, de las cuales se desprende un caso de mucho interés, que de manera reciente ha sido estudiado, que consiste de ecuaciones en que el tensor de deformación es función del tensor de esfuerzos. Se han modelado materiales como los mencionados en los párrafos anteriores con este tipo de ecuación constitutiva nueva.

En la presente memoria se estudia cómo se propagan ondas pequeñas en materiales modelados con esta ecuación constitutiva en que la deformación es función del esfuerzo. Para distintas geometrías se suponen esfuerzos grandes y estáticos a los que se añade una excitación pequeña (en comparación con la carga estática inicial) y dependiente del tiempo, que genera la propagación de una onda de pequeña amplitud en el material. Se estudia el efecto de distintos tipos de excitaciones, así como el efecto de la geometría, el material estudiado y la magnitud del esfuerzo estático.

1.1. Motivación

El presente estudio, tiene como fin ser de utilidad en la modelación de estructuras de hormigón o roca sometidas a grandes cargas estáticas, en las que se propagan ondas de pequeña amplitud; producto de actividad sísmica, tronaduras u otra excitación exterior.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Resolver mediante métodos numéricos problemas de valor de frontera con el fin de estudiar la propagación de onda pequeña en medios que son no lineales, modelados con una nueva ecuación constitutiva para diferentes geometrías sencillas y regímenes de carga en el tiempo.

1.2.2. Objetivos específicos

- Comprender la relevancia, y aplicaciones que pueden llegar a tener las ecuaciones constitutivas nuevas, en que la deformación es función del esfuerzo.
- Utilizar herramientas computacionales con el método de elementos finitos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, como es el programa Comsol 5.3a, que es el empleado para la obtención de resultados numéricos en la memoria.
- Realizar ajustes de curvas, desplegando habilidades aprendidas en cursos anteriores.

1.3. Alcances

- Se tratan solo problemas de frontera con geometrías sencillas (esfera, anillo cilíndrico y placa delgada infinita). Todos los problemas son unidimensionales.
- Se suponen regímenes de cargas dinámicas sencillos para estudiar la propagación de ondas en cada caso.
- Solo se estudia la propagación de ondas en 3 tipos de modelos de materiales frágiles, en que la deformación es función del esfuerzo.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se presentan los antecedentes teóricos mínimos para una comprensión básica del estudio de propagación de onda pequeña en un medio no lineal modelado con una nueva ecuación constitutiva. Se presenta un resumen básico de cinemática, la nueva ecuación constitutiva (donde la deformación es función del esfuerzo), un resumen del problema de valor de frontera y la deducción de ecuaciones incrementales.

2.1. Ecuaciones básicas

2.1.1. Cinemática y ecuación de movimiento

En un cuerpo \mathcal{B} denotamos una partícula por X , y en el sistema de referencia ésta ocupa la posición $\mathbf{X} = \mathbf{k}_R(X)$. La configuración de referencia se denota como $\mathbf{k}_R(\mathcal{B})$. Para denotar la posición en la configuración actual del punto se usa la notación \mathbf{x} . Se supone que existe un mapeo (uno a uno) χ tal que $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$. La configuración actual se denota por $\mathbf{k}_t(\mathcal{B})$ (que corresponde a la configuración tras un tiempo t). El gradiente de deformación, el tensor izquierdo de Cauchy-Green, el vector desplazamiento y el tensor de deformación linealizado son definidos como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right). \quad (2.1)$$

El tensor de esfuerzos de Cauchy se denota por \mathbf{T} y la forma local del balance del momento lineal es la siguiente:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo, \mathbf{b} representa la fuerza de cuerpo específica en la configuración actual y $\dot{}$ representa dos veces la derivada en el tiempo.

2.1.2. Relaciones constitutivas

Una relación constitutiva, en mecánica de medios continuos, relaciona una medida del esfuerzo con una medida de la deformación. Los casos más típicos de estudio han sido aquellos en que se considera algún tensor de esfuerzos como función de un tensor de deformación.

En los últimos años se han propuesto nuevas relaciones constitutivas para modelar los cuerpos elásticos. Dentro de estos nuevos tipos de relaciones encontramos la relación implícita [1, 2]:

$$\mathfrak{F}(\mathbf{B}, \mathbf{T}) = 0, \quad (2.3)$$

De la ecuación (2.3) se desprende el siguiente caso:

$$\mathbf{B} = \mathfrak{f}(\mathbf{T}). \quad (2.4)$$

El caso anterior es de interés pues no corresponde ni a un cuerpo elástico de Cauchy ni de Green. Al considerar el caso de pequeñas deformaciones (ver [3]), $|\nabla \mathbf{u}| \sim O(\delta)$ con $\delta \ll 1$, se tiene la aproximación $\mathbf{B} \approx 2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}$ (donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ corresponde al tensor de deformación linealizado) la ecuación (2.3) puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{h}(\mathbf{T}). \quad (2.5)$$

En [4] se ha supuesto, además, considerar la existencia de una función escalar Π que permite escribir el tensor de deformación linealizado $\boldsymbol{\varepsilon}$ de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}. \quad (2.6)$$

2.1.3. Problema de valor de frontera

A fin de resolver problemas de valor de frontera, en el contexto de las nuevas ecuaciones constitutivas de la forma (2.5), es necesario encontrar \mathbf{T} y \mathbf{u} que satisfagan las ecuaciones (2.2), (2.4)₄ y (2.5):

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho\mathbf{b}, \quad \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathfrak{h}(\mathbf{T}), \quad (2.7)$$

considerando las condiciones de borde:

$$\mathbf{u} = \check{\mathbf{u}} \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbf{k}_t^u(\mathcal{B}), \quad \mathbf{T}\mathbf{n} = \check{\mathbf{t}} \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbf{k}_t^t(\mathcal{B}), \quad (2.8)$$

donde $\partial\mathbf{k}_t(\mathcal{B})$ es la frontera del cuerpo \mathcal{B} en la configuración actual $\mathbf{k}_t(\mathcal{B})$. Se tiene que $\partial\mathbf{k}_t^u(\mathcal{B}) \cup \partial\mathbf{k}_t^t(\mathcal{B}) = \partial\mathbf{k}_t(\mathcal{B})$ y $\partial\mathbf{k}_t^u(\mathcal{B}) \cap \partial\mathbf{k}_t^t(\mathcal{B}) = \emptyset$. El vector \mathbf{n} corresponde al vector exterior unitario normal a la parte de la frontera del cuerpo $\partial\mathbf{k}_t^t(\mathcal{B})$. Por otro lado, $\check{\mathbf{u}}$ y $\check{\mathbf{T}}$ corresponden a un campo de desplazamiento y esfuerzo, respectivamente, que son conocidos en la frontera del cuerpo \mathcal{B} .

En la presente memoria se plantean ecuaciones en términos del desplazamiento \mathbf{u} para el problema (2.7), pero ello no siempre es posible pues la ecuación (2.7)₃ no siempre es invertible y por tanto la ecuación (2.7)₁ en algunos casos no puede quedar expresada únicamente en términos del desplazamiento \mathbf{u} .

En el problema (2.7) no es necesario agregar ecuaciones de compatibilidad para la deformación, pues Rajagopal y Srinavasa en [5] han demostrado que al tomar como variables principales del problema el desplazamiento \mathbf{u} y el tensor de esfuerzos de Cauchy \mathbf{T} el problema puede ser resuelto sin la necesidad de considerar dichas ecuaciones.

2.2. Ecuaciones incrementales

Esta subsección está basada en la publicación de ecuaciones incrementales de P. Arrue, R. Bustamante y D. Sfyris [6]. Para la obtención de ecuaciones incrementales se supondrá un tensor de esfuerzos de Cauchy \mathbf{T} compuesto de dos partes: un esfuerzo inicial estático y grande \mathbf{T}_0 generado por una tracción externa $\check{\mathbf{t}}_0$ que se aplica en la frontera del cuerpo $\partial\mathbf{k}_t^t(\mathcal{B})$ y un esfuerzo pequeño y dinámico $\Delta\mathbf{T}$ tal que $\frac{\|\Delta\mathbf{T}\|}{\|\mathbf{T}_0\|} \sim O(\delta)$ con $\delta \ll 1$ quedando \mathbf{T} con la forma siguiente:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \Delta\mathbf{T}. \quad (2.9)$$

Al reemplazar la ecuación (2.9) en (2.7)₃, se tiene la aproximación:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) : \Delta\mathbf{T}. \quad (2.10)$$

Suponiendo la existencia de una función escalar $\Pi(\mathbf{T})$ ([4]) que permite expresar $\boldsymbol{\varepsilon}$ como en la ecuación (2.6). La ecuación (2.10) se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}) \approx \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) : \Delta\mathbf{T}, \quad (2.11)$$

donde se denota:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0), \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) : \Delta\mathbf{T}. \quad (2.12)$$

Se supondrá que \mathbf{T}_0 genera un desplazamiento \mathbf{u}_0 al que se agrega un pequeño desplazamiento dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{u}$ producido por el incremento $\Delta\mathbf{T}$. Quedando el desplazamiento \mathbf{u} de la forma: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$. Por otro lado, se supone que el desplazamiento \mathbf{u} genera una deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ la que se puede suponer compuesta por dos partes: $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ producida por \mathbf{u}_0 y una parte pequeña y dependiente del tiempo $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ asociada a $\Delta\mathbf{u}$. Se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \frac{1}{2}[\nabla(\Delta\mathbf{u}) + \nabla(\Delta\mathbf{u})^T] = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.13)$$

Al suponer \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 como soluciones de (2.7) y reemplazando (2.9), (2.10), (2.12) y (2.13) en el problema de valor de frontera (2.7) se obtiene el conjunto de ecuaciones incrementales siguiente:

$$\rho\Delta\ddot{\mathbf{u}} = \text{div}(\Delta\mathbf{T}), \quad \frac{1}{2}[\nabla(\Delta\mathbf{u}) + \nabla(\Delta\mathbf{u})^T] = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{T}} : \Delta\mathbf{T}. \quad (2.14)$$

Se define el tensor de cuarto orden \mathcal{C} como:

$$\mathcal{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0). \quad (2.15)$$

Es relevante destacar que \mathcal{C} depende exclusivamente de la parte estática \mathbf{T}_0 del tensor de esfuerzos \mathbf{T} . Al estudiar el problema de propagación de onda pequeña se tiene que los coeficientes de las EDPs de onda lineales para $\Delta\mathbf{u}$ dependen de componentes de \mathcal{C} , por lo que es necesario resolver (2.7) para obtener la forma de la EDP.

Capítulo 3

Metodología

La metodología empleada para la realización de esta memoria consta fundamentalmente de cuatro partes, que se detallan a continuación:

- Estudio en detalle de la bibliografía pertinente a ecuaciones constitutivas implícitas, junto con el estudio de los modelos no lineales a emplear para la propagación de ondas y ecuaciones incrementales.
- Obtención de las ecuaciones incrementales de onda para el desplazamiento para cada una de las geometrías y materiales en estudio. Se obtienen, también, las expresiones para sus coeficientes.
- Se resuelven las ecuaciones de onda para el desplazamiento para cada uno de los casos, siendo resueltas en primera instancia las ecuaciones quasi-estáticas relacionadas a las cargas estáticas iniciales y luego estas soluciones se emplean para la resolución numérica de la EDP de onda.
- Se obtienen los distintos gráficos para los desplazamientos y esfuerzos. Se analizan y discuten los resultados.

Capítulo 4

Modelos constitutivos

4.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

En esta sección se presenta una ecuación constitutiva en que la deformación del cuerpo está limitada a un cierto valor independiente del valor del esfuerzo. En este material se supone que $\mathbf{h}(\mathbf{T})$ es una función isotrópica por lo que el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ tiene la forma (ver [7]):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{T} + \beta_2 \mathbf{T}^2, \quad (4.1)$$

donde β_0 , β_1 y β_2 dependen de los invariantes:

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{T}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^2), \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}^3). \quad (4.2)$$

Considerando la subclase (4.1) se supone la existencia de una función escalar $\Pi(\mathbf{T})$ tal que $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}$ ([4]). La función Π a considerar es isotrópica por lo que:

$$\Pi(\mathbf{T}) = \Pi(I_1, I_2, I_3) \implies \boldsymbol{\varepsilon} = \Pi_1 \mathbf{I} + \Pi_2 \mathbf{T} + \Pi_3 \mathbf{T}^2, \quad (4.3)$$

donde $\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial I_i}$ con $i = 1, 2, 3$. La expresión a considerar para $\Pi(\mathbf{T})$, ver [8], es la siguiente:

$$\Pi(\mathbf{T}) = -\frac{\alpha}{\beta} \ln [\cosh(\beta I_1)] + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota I_2}, \quad (4.4)$$

donde α , β , γ y ι son constantes cuyos valores se muestran en la tabla 4.1:

Tabla 4.1: Valores para las constantes de $\Pi(\mathbf{T})$ (4.4)

α	β	γ	ι	E	ν
	$1/Pa$	$1/Pa$	$1/Pa^2$	Pa	
0.01	9.27681×10^{-8}	4.01995×10^{-9}	10^{-14}	323387085	0.3

Reemplazando (4.4) en (4.3) se obtiene la siguiente expresión para $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\alpha \tanh(\beta I_1) \mathbf{I} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \mathbf{T}. \quad (4.5)$$

El modelo con comportamiento límite de deformación (4.5) para esfuerzos cercanos a $\mathbf{0}$ se aproxima al modelo lineal de Hooke $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} I_1 \mathbf{I} + \frac{(\nu+1)}{E} \mathbf{T}$, donde E es el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson. Al realizar la aproximación de (4.5) considerando $\mathbf{T} \approx \mathbf{0}$ se tiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx -\alpha \beta I_1 \mathbf{I} + \gamma \mathbf{T}. \quad (4.6)$$

Al igualar (4.6) con el modelo de Hooke se tienen las relaciones que permiten obtener el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν con los valores de las constantes de la tabla 4.1:

$$\frac{\nu}{E} = \alpha \beta, \quad \frac{1}{E} = \gamma - \alpha \beta. \quad (4.7)$$

Por otro lado, en notación indicial la ecuación (4.5) queda:

$$\varepsilon_{ij} = -\alpha \tanh(\beta I_1) \delta_{ij} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} T_{ij}. \quad (4.8)$$

A continuación se obtiene la expresión indicial para \mathbf{C} (ecuación (2.15)) para el material con comportamiento límite de deformación. Para ello se utiliza la expresión indicial de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ecuación (4.8)). Calculando la derivada respecto a \mathbf{T} se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ijkl} &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T_{kl}} = -\alpha \frac{\partial(\tanh(\beta I_1))}{\partial T_{kl}} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial T_{kl}} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right) T_{ij} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}} \\ &= -\alpha \frac{\partial(\tanh(\beta I_1))}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial T_{kl}} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \right) \frac{\partial I_2}{\partial T_{kl}} T_{ij} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}} \\ &= -\alpha \beta \operatorname{sech}^2(\beta I_1) \delta_{kl} \delta_{ij} - \frac{\iota \gamma}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} T_{kl} T_{ij} + \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + 2\iota I_2}} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.2. Modelo no lineal para roca

Para modelar la roca Rajagopal y Bustamante, ver [9], han propuesto un modelo no lineal e isotrópico que depende de los esfuerzos principales σ_p del tensor de esfuerzos \mathbf{T} . La función $\Pi(\mathbf{T}) = \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ satisface las siguientes condiciones de simetría dada la isotropía del modelo:

$$\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \Pi(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = \Pi(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2). \quad (4.10)$$

Al expresar la deformación como $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}$ se tiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)}, \quad (4.11)$$

donde $\mathbf{a}^{(p)}$ son los vectores propios de \mathbf{T} . Denotando las deformaciones principales como ε_p , $p = 1, 2, 3$ es posible mostrar que:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}. \quad (4.12)$$

La forma siguiente para Π (ver [9]), cumple con las condiciones (4.10):

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = & \mathbf{f}_1(\sigma_1) + \mathbf{f}_1(\sigma_2) + \mathbf{f}_1(\sigma_3) + \mathbf{f}_2(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \mathbf{f}_2(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) \\ & + \mathbf{f}_2(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \mathbf{f}_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde las funciones \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 y \mathbf{f}_3 sus derivadas y sus segundas derivadas tienen la forma:

$$\mathbf{f}_1(x) = \alpha_1 [d_1^{c_1 x} - c_1 \ln(d_1)x], \quad \mathbf{f}_2(x) = \alpha_2 [d_2^{c_2 x} - 1], \quad \mathbf{f}_3(x) = 3\alpha_3 [d_3^{c_3 x} - c_3 \ln(d_3)x], \quad (4.14)$$

$$\mathbf{f}'_1(x) = \alpha_1 c_1 \ln d_1 (d_1^{c_1 x} - 1), \quad \mathbf{f}'_2(x) = \alpha_2 c_2 \ln(d_2) d_2^{c_2 x}, \quad \mathbf{f}'_3(x) = 3\alpha_3 c_3 \ln d_3 (d_3^{c_3 x} - 1), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{f}''_1(x) = \alpha_1 c_1^2 (\ln d_1)^2 d_1^{c_1 x}, \quad \mathbf{f}''_3(x) = 3\alpha_3 c_3^2 (\ln d_3)^2 d_3^{c_3 x}, \quad (4.16)$$

donde α_i , c_i y d_i son constantes. Las funciones anteriores aseguran que el cuerpo presenta un comportamiento distinto en tracción y compresión:

$$\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{f}(-x). \quad (4.17)$$

El modelo no lineal para roca no presenta deformación residual, es decir, no existe defor-

mación cuando el esfuerzo es cero:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}(0, 0, 0) = 0, \quad p = 1, 2, 3. \quad (4.18)$$

En [9] se realiza la aproximación para el modelo de roca considerando esfuerzos cercanos a $\mathbf{0}$. Se tiene que el modelo se aproxima de manera muy precisa al modelo lineal de Hooke. Los valores obtenidos para el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν al igualar con el modelo de Hooke para esfuerzos bajos (considerando las constantes de la tabla 4.2) son los siguientes:

$$E \approx 2600 \text{ MPa}, \quad \nu \approx 0.138. \quad (4.19)$$

Los valores para las constantes del modelo no lineal de roca se muestran en la tabla 4.2:

Tabla 4.2: Constantes para el Modelo no lineal de Roca

α_1	α_2	α_3	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
MPa		MPa	1/MPa	1/MPa	1/MPa			
0.011	-0.0004	0.001	-0.08	-0.05	-0.08	0.1	0.2	0.1

La expresión siguiente permite calcular las componentes de $\mathbf{C} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{T} \partial \mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)$ ([9]):

$$\mathbf{C} = \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_p \partial \sigma_q} \left(\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p} \frac{\partial (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)})}{\partial \mathbf{T}}, \quad (4.20)$$

donde:

$$\frac{\partial (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)})}{\partial \mathbf{T}} = \frac{1}{\sigma_p - \sigma_q} \mathbf{B}^{(pq)} + \frac{1}{\sigma_p - \sigma_r} \mathbf{B}^{(pr)}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{B}^{(pq)} = \mathbf{B}^{(qp)} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} + \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} + \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)} \otimes \mathbf{a}^{(q)} \otimes \mathbf{a}^{(p)}). \quad (4.22)$$

4.3. Modelo no lineal de hormigón

En [10] Grasley et al. propusieron un modelo no lineal isotrópico para el hormigón tras la realización de un experimento de compresión de un cilindro de hormigón sin restricción lateral. El modelo obtenido propuesto corresponde a uno del tipo de la subclase (4.1):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{T} + \beta_2 \mathbf{T}^2, \quad (4.23)$$

donde $\beta_0 = \gamma_1 \operatorname{tr}(\mathbf{T}) + \sinh \left[\frac{\operatorname{tr}(\mathbf{T})^{\gamma_2}}{\gamma_3} \right]$, $\beta_1 = \gamma_4$ y $\beta_2 = 0$. Los valores para las constantes del modelo (4.23) se muestran en la tabla 4.3:

Tabla 4.3: Constantes para el Modelo no lineal de Hormigón

γ_1 1/MPa	γ_2	γ_3 MPa $^{\gamma_2}$	γ_4 1/MPa
4.4796	1.8975	562.01	18.7353

Para obtener los coeficientes \mathcal{C}_{ijkl} (ecuación (2.15)). El tensor de deformación (4.23) en notación indicial queda como sigue (tomando en consideración que $\beta_2 = 0$) y su derivada respecto a \mathbf{T} :

$$\varepsilon_{ij} = \beta_0 \delta_{ij} + \beta_1 T_{ij}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T_{kl}} = \frac{\partial \beta_0}{\partial T_{kl}} \delta_{ij} + \beta_1 \frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}}, \quad (4.25)$$

donde por regla de la cadena y considerando la dependencia de β_0 solamente del invariante $I_1 = \operatorname{tr}(\mathbf{T})$:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial T_{kl}} = \frac{\partial \beta_0}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial T_{kl}} \delta_{ij} + \beta_1 \frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}}. \quad (4.26)$$

Las derivadas $\frac{\partial \beta_0}{\partial I_1}$ y $\frac{\partial I_1}{\partial T_{kl}}$ son las siguientes:

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial I_1} = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} I_1^{\gamma_2-1} \cosh \left(\frac{I_1^{\gamma_2}}{\gamma_3} \right), \quad \frac{\partial I_1}{\partial T_{kl}} = \delta_{kl}. \quad (4.27)$$

La derivada $\frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}}$ tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.28)$$

La expresión para \mathcal{C}_{ijkl} finalmente queda:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_3} I_1^{\gamma_2-1} \cosh \left(\frac{I_1^{\gamma_2}}{\gamma_3} \right) \right) \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{\beta_1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.29)$$

A partir de la expresión anterior es posible observar las siguientes simetrías $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$, $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{jilk} = \mathcal{C}_{ijlk}$.

4.3.1. Fitting Modelo no lineal de Hormigón

La expresión para \mathcal{C} (ecuación (4.29)) presenta problemas en 0 por lo que no se puede usar para analizar la propagación de ondas. Para solucionar dicho problema se ha realizado un ajuste al modelo no lineal para roca [9] de tal forma de aproximar las curvas en el caso del cilindro en compresión sin restricciones laterales para ambos modelos, ofreciendo una aproximación razonable en el tramo $0 - 60 [MPa]$.

Las constantes obtenidas para el modelo no lineal de roca modificado que permiten aproximar al de hormigón (4.23) son las siguientes:

Tabla 4.4: Valores para el modelo no lineal de roca modificado

α_1 <i>MPa</i>	α_2	α_3 <i>MPa</i>	c_1 <i>1/MPa</i>	c_2 <i>1/MPa</i>	c_3 <i>1/MPa</i>	d_1	d_2	d_3
0.12	-0.00021	0.0009	-0.18	-0.038	-0.04	1.07	0.655	0.248

Al realizar el proceso análogo de linealización del modelo, como en [9] se obtiene el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν con los valores de las constantes de la tabla 4.4:

$$E \approx 53387 \text{ MPa}, \quad \nu \approx 0.3107. \quad (4.30)$$

En la figura 4.1 están graficadas las curvas para la deformación axial ε_r y la deformación circunferencial ε_θ versus el esfuerzo axial de compresión σ_z para el caso de un cilindro en compresión sin restricción lateral. En azul están las curvas del modelo no lineal de hormigón de Grasley (ecuación (4.23)) y en rojo el modelo no lineal de roca ([9]) con las constantes de la tabla 4.4. A los valores para el esfuerzo compresión σ_z por un tema de visualización se les asigna un signo positivo así como a ε_z :

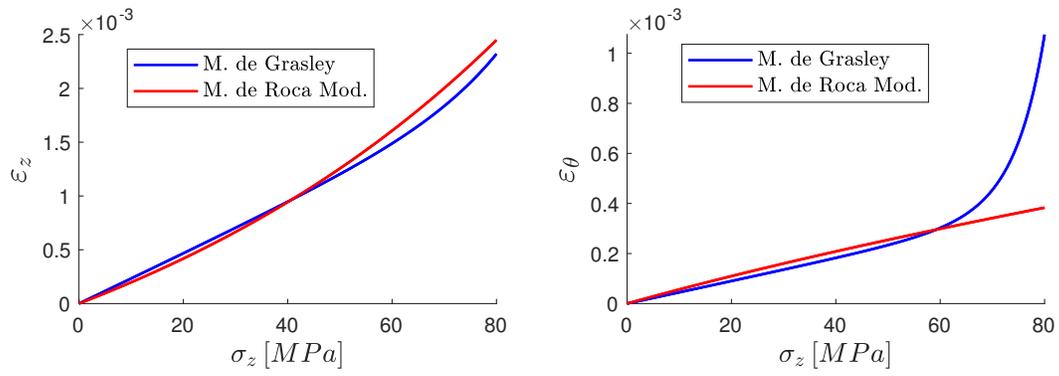


Figura 4.1: Gráficos de la deformación radial ε_r y la deformación circunferencial ε_θ versus el esfuerzo axial σ_z en $[MPa]$ para cilindro en compresión axial sin restricción lateral

Capítulo 5

Solución de algunos problemas unidimensionales de valor de frontera

En la presente sección se estudian numéricamente problemas de propagación de onda pequeña para diversas geometrías y regímenes de carga en los tres modelos de materiales mencionados en la sección anterior. Se compara el efecto de distintos esfuerzos estáticos.

5.1. Esfera bajo inflación

Se estudia el comportamiento de una cavidad esférica definida por $r_i \leq r \leq r_f$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ bajo inflación en su interior y sometida a un esfuerzo pequeño y dependiente del tiempo en su radio interior.

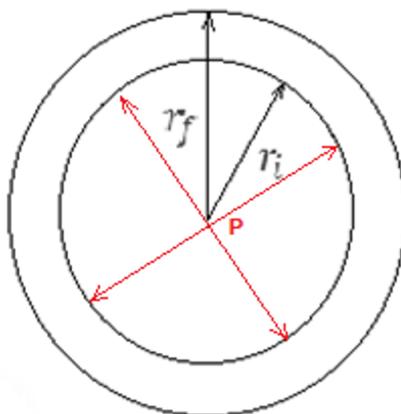


Figura 5.1: Cavidad esférica sometida a presión interna

Se supondrá un tensor de esfuerzos \mathbf{T} compuesto por la suma de un tensor de esfuerzos

grande $\mathbf{T}_0(r) = T_{rr}(r)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + T_{\theta\theta}(r)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + T_{\phi\phi}(r)\hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_\phi$ al cual se superpone uno mucho más pequeño en magnitud y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{T} = \Delta T_{rr}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + \Delta T_{\theta\theta}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + \Delta T_{\phi\phi}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_\phi \otimes \hat{\mathbf{e}}_\phi$:

$$\mathbf{T}(r, t) = \mathbf{T}_0(r) + \Delta\mathbf{T}(r, t). \quad (5.1)$$

Se supone un desplazamiento quasi-estático $\mathbf{u}_0(r) = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ y se añade, debido a la superposición de un esfuerzo pequeño, la superposición de un pequeño desplazamiento radial y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{u}_r(r, t) = \Delta u_r(r, t)\hat{\mathbf{e}}_r$ tal que:

$$\mathbf{u}(r, t) = \mathbf{u}_0(r) + \Delta\mathbf{u}_r(r, t). \quad (5.2)$$

Se suponen \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 , así como \mathbf{T} y \mathbf{u} , como soluciones del problema de valor de frontera (2.7). Se tiene una ecuación quasi-estática para la parte grande del tensor de esfuerzos (ecuación (2.7)₁) y una incremental para la parte pequeña y dependiente del tiempo (ecuación (2.14)₁). La ecuación quasi-estática es la siguiente:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_0 = 0. \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) en coordenadas esféricas, tomando en consideración la simetría esférica de \mathbf{T}_0 , es:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(2T_{rr} - T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\cos \phi}{r \sin \phi}(T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) = 0. \quad (5.5)$$

Al reemplazar (5.5) en (5.4) se obtiene:

$$T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = \frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr}. \quad (5.6)$$

De la ecuación (2.13)₁ se tienen las componentes, en coordenadas esféricas, del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0)$:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\phi} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\phi} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0. \quad (5.7)$$

A partir de la ecuación (5.6), (5.7) y la ecuación constitutiva para cada modelo no lineal se resuelven numéricamente para obtener T_{rr} y $T_{\theta\theta}$. En la respectiva subsección de cada modelo se especifica el método y las condiciones de borde.

Por otro lado, la ecuación incremental asociada a la parte dinámica de \mathbf{T} y \mathbf{u} es la siguiente:

$$\rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \text{div}(\Delta \mathbf{T}). \quad (5.8)$$

En coordenadas esféricas, y tomando en consideración la dependencia solamente radial del incremento del esfuerzo y el campo de desplazamiento, se obtienen las ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\Delta T_{rr} - \Delta T_{\phi\phi} - \Delta T_{\theta\theta}), \quad (5.9)$$

$$0 = \frac{\cos \phi}{r \sin \phi} (\Delta T_{\phi\phi} - \Delta T_{\theta\theta}). \quad (5.10)$$

La tercera ecuación da cero a ambos lados. Respecto a la ecuación (5.10), ésta implica que $\Delta T_{\phi\phi} = \Delta T_{\theta\theta}$. Por tanto, se pueden comprimir las ecuaciones (5.9) y (5.10) en una:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rr})}{\partial r} + \frac{2}{r} (\Delta T_{rr} - \Delta T_{\theta\theta}). \quad (5.11)$$

De la ecuación (2.13)₂ se tiene para las componentes del tensor $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Delta \varepsilon_{rr} = \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r}, \quad \Delta \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta u_r}{r}, \quad \Delta \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{\Delta u_r}{r}, \quad \Delta \varepsilon_{r\phi} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{\theta\phi} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{r\theta} = 0. \quad (5.12)$$

En notación indicial, tomando en consideración la ecuación (2.14)₃ y (2.15), las componentes de $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ se pueden expresar en términos de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ y $\Delta \mathbf{T}$ como:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \Delta T_{kl}. \quad (5.13)$$

Denotando la coordenada r por un 1, la coordenada θ por un 2 y la coordenada ϕ por un 3, al expandir la expresión anterior de manera matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} \\ \mathcal{C}_{2211} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} \\ \mathcal{C}_{3311} & \mathcal{C}_{3322} & \mathcal{C}_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Aprovechando las simetrías $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$ la ecuación matricial anterior se puede escribir de la siguiente manera simétrica:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

La matriz de la ecuación (5.15) se supone invertible (su determinante distinto de 0). Por lo que se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Al reemplazar (5.12) en (5.16) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Delta T_{11} = N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\Delta u_r}{r}, \quad (5.17)$$

$$\Delta T_{22} = N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r}, \quad (5.18)$$

$$\Delta T_{33} = N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\Delta u_r}{r}. \quad (5.19)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.17)-(5.19) en la ecuación (5.11) se obtiene la siguiente EDP de onda lineal en términos de Δu_r :

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\Delta u_r}{r} \right] + \frac{2}{r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\Delta u_r}{r} - N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} - N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} - N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} \right]. \quad (5.20)$$

Luego de algunas manipulaciones la ecuación anterior queda finalmente como:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} - \frac{N_{12}}{r} + \frac{N_{13}}{r} + \frac{2}{r} N_{11} \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} + \frac{N_{12}}{r^2} + \frac{\partial N_{13}}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{N_{13}}{r^2} - \frac{2}{r^2} N_{22} - \frac{2}{r^2} N_{23} \right] \Delta u_r. \quad (5.21)$$

Reordenando la ecuación (5.21) de una manera más compacta queda:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2N_{11} - N_{12} + N_{13}) \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(N_{12} + N_{13})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} (N_{12} + N_{13} - 2N_{22} - 2N_{23}) \right] \Delta u_r. \quad (5.22)$$

De la ecuación (5.5) se tiene que $T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi}$. Lo anterior implica que $\mathcal{C}_{1122} = \mathcal{C}_{1133}$ y que $\mathcal{C}_{2222} = \mathcal{C}_{3333}$. Por lo tanto, $N_{12} = N_{13}$ y $N_{22} = N_{33}$. Esto simplifica la ecuación (5.22) obteniéndose:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{2}{r} N_{11} \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + \left[\frac{2}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} (N_{12} - N_{22} - N_{23}) \right] \Delta u_r. \quad (5.23)$$

Denotando por \mathbf{N} la matriz de términos N_{ij} con $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$. La expresión de \mathbf{N} , suponiendo que $(\mathcal{C}_{1111}(\mathcal{C}_{2233} + \mathcal{C}_{2222}) - 2\mathcal{C}_{1122}^2)(\mathcal{C}_{2233} - \mathcal{C}_{2222}) \neq 0$, es la siguiente:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\mathcal{C}_{1111}(\mathcal{C}_{2233} + \mathcal{C}_{2222}) - 2\mathcal{C}_{1122}^2} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{2233} + \mathcal{C}_{2222} & -\mathcal{C}_{1122} & -\mathcal{C}_{1122} \\ -\mathcal{C}_{1122} & \frac{\mathcal{C}_{1122}^2 - \mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2222}}{\mathcal{C}_{2233} - \mathcal{C}_{2222}} & -\frac{\mathcal{C}_{1122}^2 - \mathcal{C}_{2233}\mathcal{C}_{1111}}{\mathcal{C}_{2233} - \mathcal{C}_{2222}} \\ -\mathcal{C}_{1122} & -\frac{\mathcal{C}_{1122}^2 - \mathcal{C}_{2233}\mathcal{C}_{1111}}{\mathcal{C}_{2233} - \mathcal{C}_{2222}} & \frac{\mathcal{C}_{1122}^2 - \mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2222}}{\mathcal{C}_{2233} - \mathcal{C}_{2222}} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Al obtener, numéricamente, T_{rr} y $T_{\theta\theta}$ estos se reemplazan en las expresiones de \mathcal{C}_{ijkl} del Anexo A para el caso esférico, lo que permite calcular N_{ij} .

Para la resolución de la EDP de onda lineal de segundo orden (5.23) se emplea el método de elementos finitos, mediante el uso del programa Comsol 5.3a. Para resolver dicha ecuación se requiere manipular ésta para quede de la siguiente forma:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f, \quad (5.25)$$

donde u corresponde a Δu_r , en metros [m], e_a corresponde a la densidad ρ (igual a 2700 [kg/m³]) para cada material y d_a es igual a 0. Las expresiones para Γ y f se pueden escribir a partir de la forma de la ecuación (5.20), siendo respectivamente:

$$\Gamma = - \left(N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\Delta u_r}{r} \right), \quad (5.26)$$

$$f = \frac{2}{r} \left(N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\Delta u_r}{r} - N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} - N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} - N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} \right) \quad (5.27)$$

5.1.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

Este caso quasi-estático ha sido resuelto por R. Bustamante y K. Rajagopal en [11]. Los invariantes del tensor \mathbf{T}_0 , de la ecuación (4.2), se pueden escribir en términos de T_{rr} a partir de la ecuación (5.6). Las expresiones para los invariantes quedan:

$$I_1 = r \frac{dT_{rr}}{dr} + 3T_{rr}, \quad (5.28)$$

$$I_2 = \frac{3}{2}T_{rr}^2 + \frac{r^2}{4} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + rT_{rr} \frac{dT_{rr}}{dr}, \quad (5.29)$$

$$I_3 = T_{rr}^3 + \frac{r^3}{12} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^3 + \frac{r^2}{4} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + rT_{rr}^2 \frac{dT_{rr}}{dr}. \quad (5.30)$$

A partir de la ecuación (5.7) que relaciona la deformación con el desplazamiento en conjunto con la ecuación constitutiva (4.3) que relaciona el tensor de deformación con el de esfuerzo se desprenden las relaciones:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2, \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{\theta\theta} + \Pi_3 T_{\theta\theta}^2. \quad (5.32)$$

A partir de las ecuaciones (5.31) y (5.32) se obtiene:

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2 = \frac{d}{dr} \left[r \left(\Pi_1 + \Pi_2 T_{\theta\theta} + \Pi_3 T_{\theta\theta}^2 \right) \right]. \quad (5.33)$$

Reemplazando la ecuación (5.6) en la ecuación (5.33) se obtiene una EDO en términos de T_{rr} :

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2 = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right) + \Pi_3 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.34)$$

Para la ecuación (5.34) se consideran las condiciones de borde:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0. \quad (5.35)$$

La ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden (5.35) se resuelve numéricamente. Para su resolución se emplea el método de elementos finitos. Se usa el programa

Comsol 5.3a, para lo cual definimos:

$$\Gamma = r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right) + \Pi_3 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right)^2 \right], \quad f = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2. \quad (5.36)$$

Lo anterior permite reescribir la ecuación diferencial de una manera tal que pueda ser resuelta mediante el uso del software como:

$$\frac{d\Gamma}{dr} = f. \quad (5.37)$$

5.1.1.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuación (5.34), tomando en consideración las condiciones de borde (5.35), permite obtener T_{rr} y $T_{\theta\theta}$ que al ser reemplazados en las expresiones de \mathcal{C} para el material con comportamiento límite de deformación en el caso esférico (que se encuentran en el anexo A) permiten tener una expresión definida para la EDP de onda lineal (5.23).

Se consideran dos tipos de excitaciones en el radio interior de la cavidad esférica. La primera corresponde a una de tipo sinusoidal considerando la cavidad en reposo en un tiempo inicial:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Se consideran las mismas condiciones (5.38) para dos geometrías distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s} \right]$. Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad.

Tabla 5.1: Presiones estáticas en el radio interior de la cavidad esférica

$r_i [m]$	$r_f [m]$	$P [Pa]$
0.1	0.2	1×10^6
0.1	0.2	9×10^6
10	100	1×10^6
10	100	1×10^7

En la figura 5.2 se muestran los gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$ tras resolver la EDP (5.23) considerando (5.38) y las presiones de la tabla 5.1:

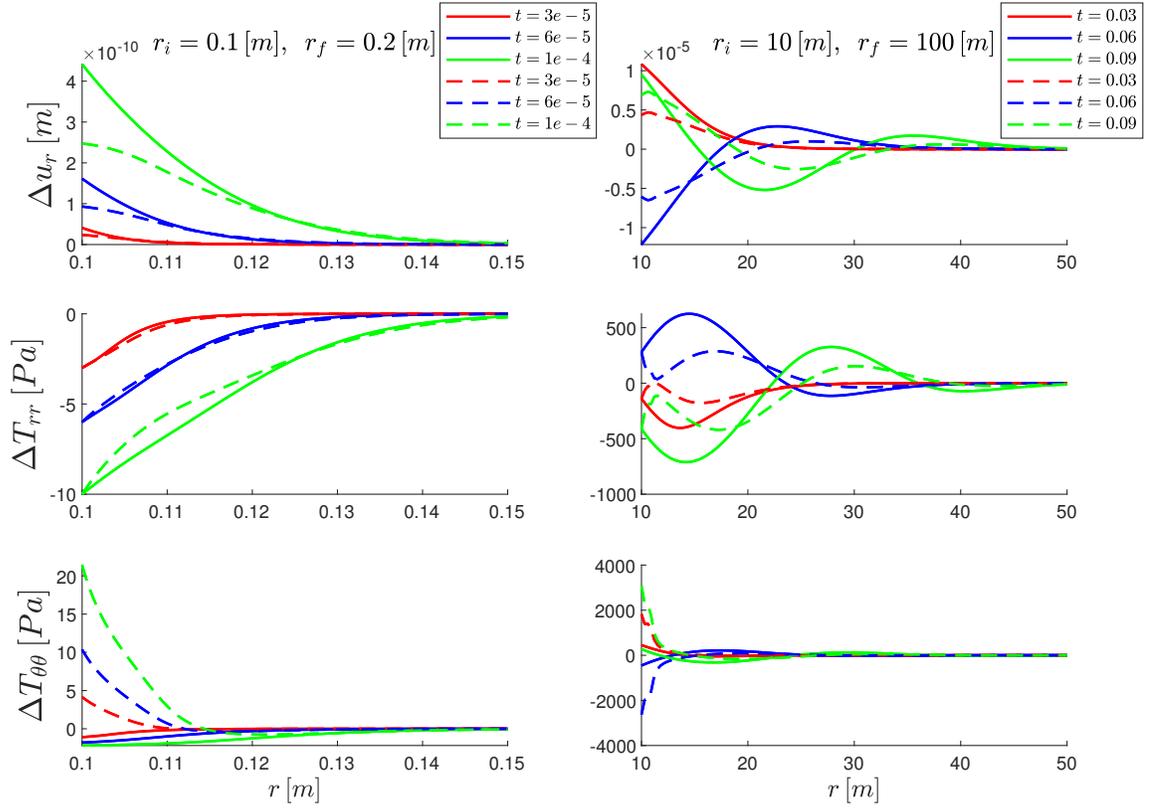


Figura 5.2: Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

La segunda excitación a considerar corresponde a un pulso rectangular correspondiente a una resta de funciones de Heaviside o escalón. La notación a utilizar es $H_a(t)$ donde a corresponde al valor, en segundos, a partir del cual la función comienza a ser igual a 1, siendo igual a 0 para valores inferiores a a .

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 0.1 [m]$ y $r_f = 0.2 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{2 \times 10^{-5}}(t) - H_{3 \times 10^{-5}}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 10[m]$ y $r_f = 100 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{0.01}(t) - H_{0.02}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$. Al resolver la EDP (5.23) considerando las condiciones (5.39) y (5.40), junto con las cargas estáticas de la tabla 5.1 se obtienen los siguientes gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$:

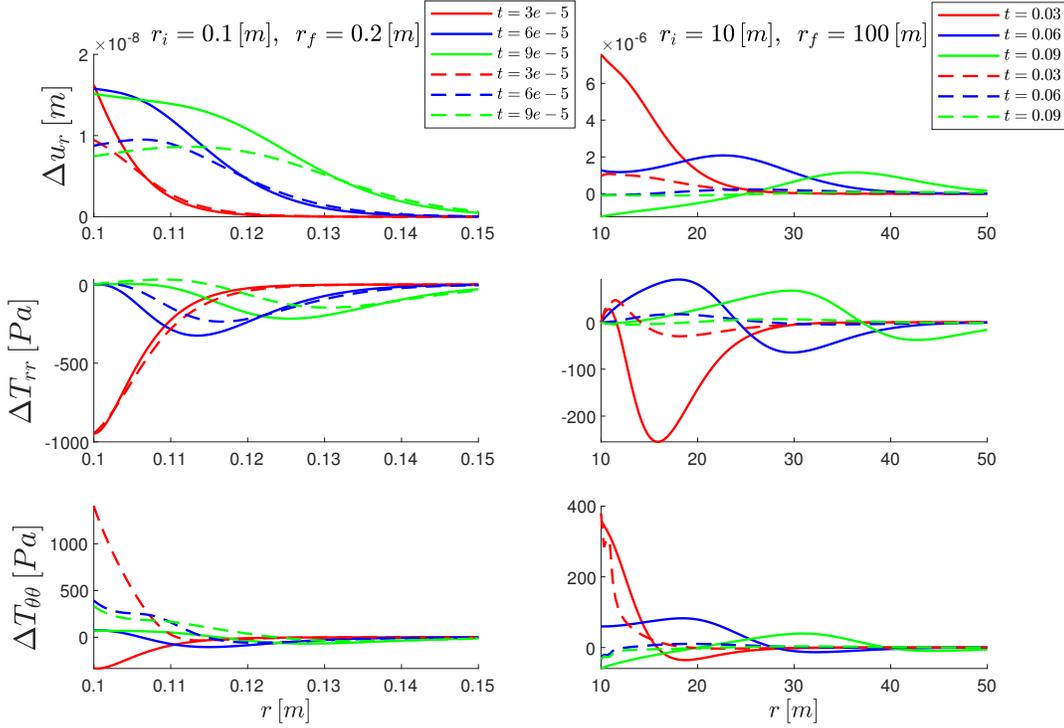


Figura 5.3: Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

5.1.2. Modelo no lineal de roca

En el caso del modelo no lineal de roca los invariantes del \mathbf{T}_0 a considerar son los esfuerzos principales, estos son: $\sigma_1 = T_{rr}, \sigma_2 = T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = \sigma_3 = \frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr}$, por lo que los esfuerzos principales son función únicamente de T_{rr} .

Las componentes de la diagonal del tensor deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ coinciden con las deformaciones principales ε_p . En términos del desplazamiento quedan como:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_1 = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_2 = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \varepsilon_3 = \frac{u_r}{r}. \quad (5.41)$$

A partir de la ecuación constitutiva (4.13) se relacionan las deformaciones principales $\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}$ con las ecuaciones (5.41):

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1}(T_{rr}, r), \quad \frac{u_r}{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}(T_{rr}, r). \quad (5.42)$$

A partir de las ecuaciones (5.42) se puede obtener la ecuación compacta:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1}, \quad (5.43)$$

la que se resuelve para $T_{rr}(r)$ y permite calcular $u_r(r)$ y $T_{\theta\theta}(r)$ mediante las fórmulas $u_r(r) = r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}(T_{rr}, r)$ y $T_{\theta\theta} = \frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr}$, respectivamente.

Para la ecuación (5.43) se consideran las condiciones de borde:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0. \quad (5.44)$$

La ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden (5.43) se resuelve numéricamente, siguiendo un procedimiento análogo al realizado en la sección anterior, debiendo escribir la ecuación en la forma $\frac{d\Gamma}{dr} = f$, se definen:

$$\Gamma = r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}, \quad f = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1}. \quad (5.45)$$

5.1.2.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuación (5.43) sujeta a las condiciones de borde (5.44) permite obtener T_{rr} y $T_{\theta\theta}$. Por medio de las expresiones para \mathcal{C}_{ijkl} del Anexo A se puede obtener la expresión para la EDP de onda lineal (5.23).

Se consideran dos tipos de excitaciones en el radio interior de la cavidad esférica. La primera corresponde a una de tipo sinusoidal considerando la cavidad en reposo en un tiempo inicial:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.46)$$

Se consideran las mismas condiciones (5.46) para dos geometrías distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 [\frac{1}{s}]$. Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad. Los casos a considerar son los de la tabla 5.1.

En la figura 5.4 se muestran los gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$ tras resolver la EDP (5.23) considerando (5.46) y las presiones de la tabla 5.1:

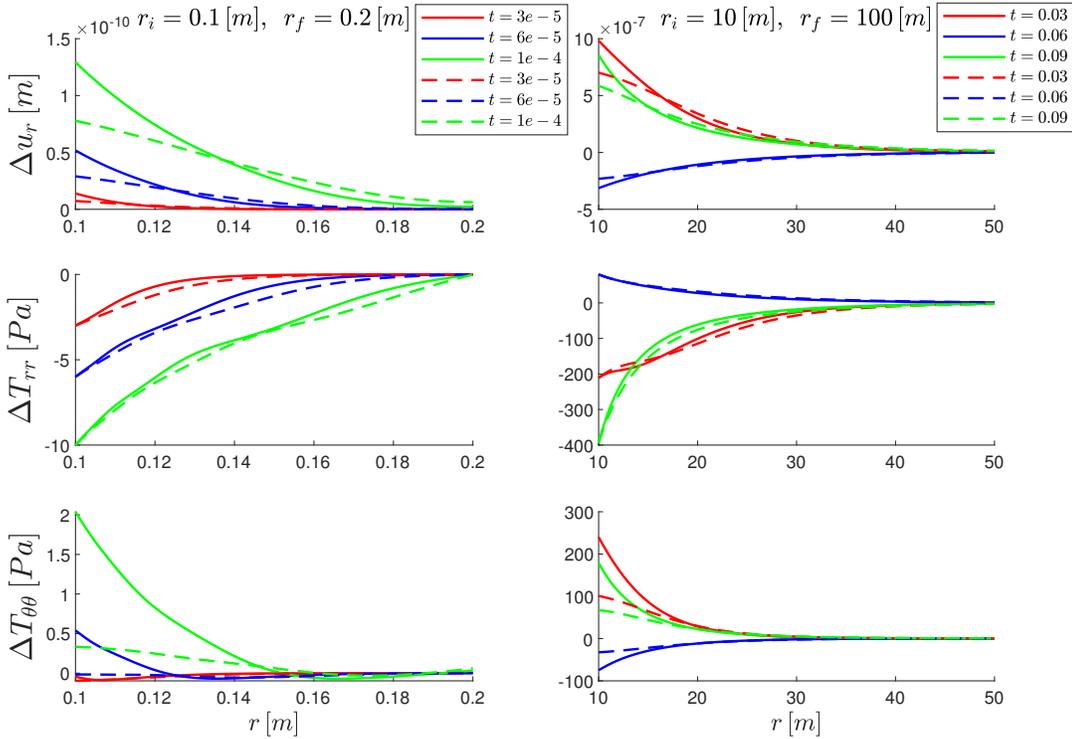


Figura 5.4: Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 0.1 [m]$ y $r_f = 0.2 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{2 \times 10^{-5}}(t) - H_{3 \times 10^{-5}}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 10[m]$ y $r_f = 100[m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{0.01}(t) - H_{0.02}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.48)$$

Con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$. Al resolver la EDP (5.23) considerando las condiciones (5.47) y (5.48), junto con las cargas estáticas de la tabla 5.1 se obtienen los siguientes gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$:

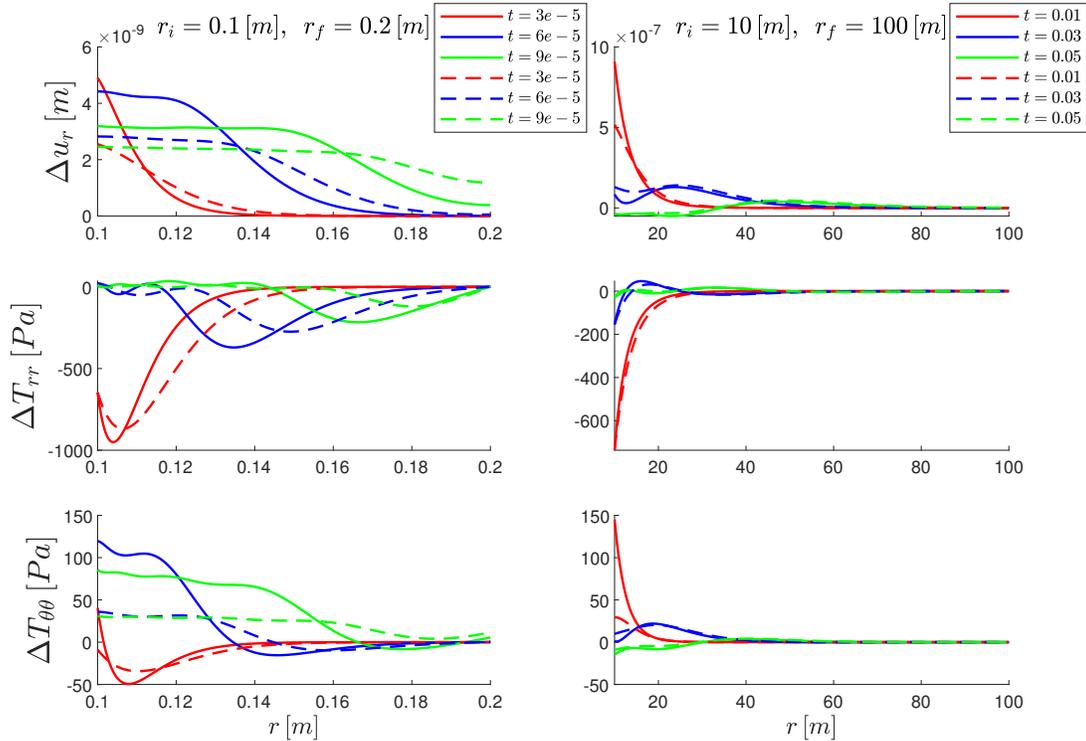


Figura 5.5: Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

5.1.3. Modelo no lineal de hormigón

El desarrollo del problema para el hormigón es completamente análogo al desarrollado para el modelo no lineal de roca cambiando las constantes del modelo (Sección 4 de Modelos, Modelo no lineal de Hormigón) y las condiciones de borde e iniciales. Se consideran las mismas presiones estáticas de las Tabla 5.1 en el radio interior de la cavidad esférica.

Se considera para ambas geometrías las condiciones de borde e iniciales de (5.46), obteniéndose al resolver la ecuación (5.23):

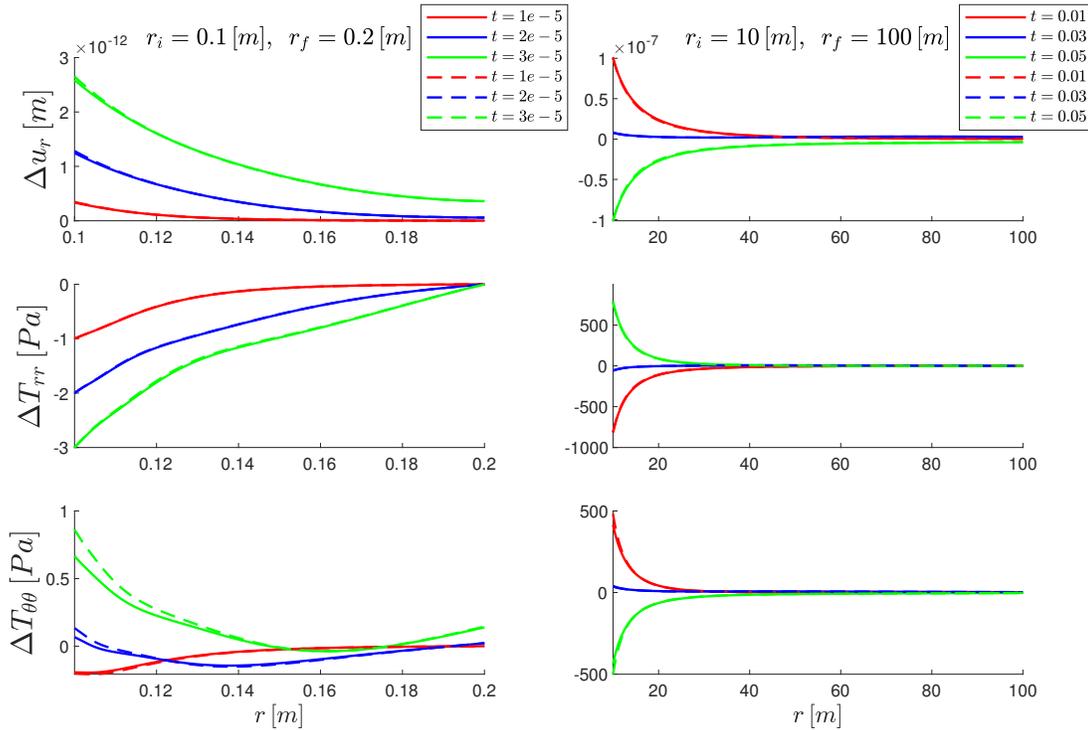


Figura 5.6: Resultados caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

El segundo caso a considerar corresponde al de pulso rectangular. Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 0.1 [m]$ y $r_f = 0.2 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{2 \times 10^{-6}}(t) - H_{3 \times 10^{-6}}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 10[m]$ y $r_f = 100[m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{0.001}(t) - H_{0.002}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$. Al resolver la EDP (5.23) considerando las condiciones (5.49) y (5.50), junto con las cargas estáticas de la tabla 5.1 se obtienen los siguientes gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$:

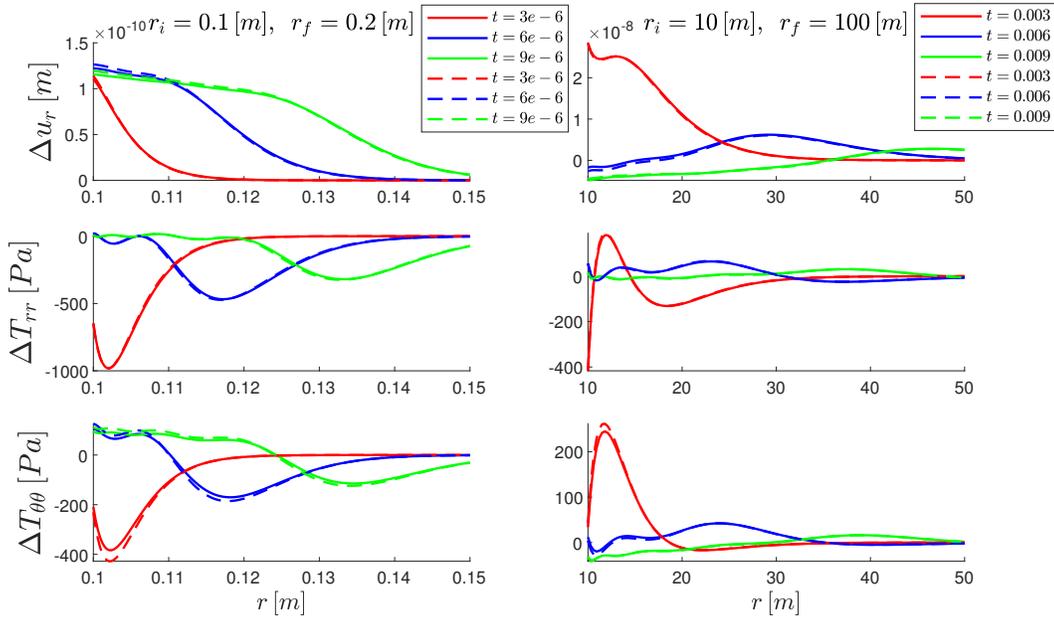


Figura 5.7: Resultados caso esférico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.1. El tiempo t está en segundos.

5.2. Tubo cilíndrico bajo inflación

Se estudia el comportamiento de un tubo definido por $r_i \leq r \leq r_f$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ bajo inflación en su interior y sometido a un esfuerzo pequeño y dependiente del tiempo en su radio interior.

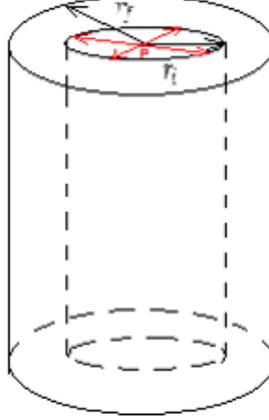


Figura 5.8: Casquete cilíndrico sometida a presión interna

Se supone un tensor de esfuerzos \mathbf{T} compuesto por la suma de un tensor de esfuerzo grande $\mathbf{T}_0(r) = T_{rr}(r)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + T_{\theta\theta}(r)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + T_{zz}(r)\hat{\mathbf{e}}_z \otimes \hat{\mathbf{e}}_z$ al cual se superpone uno mucho más pequeño en magnitud y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{T} = \Delta T_{rr}(r, t)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + \Delta T_{\theta\theta}(r, t)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + \Delta T_{zz}(r, t)\hat{\mathbf{e}}_z \otimes \hat{\mathbf{e}}_z$:

$$\mathbf{T}(r, t) = \mathbf{T}_0(r) + \Delta\mathbf{T}(r, t). \quad (5.51)$$

Se supone un desplazamiento quasi-estático $\mathbf{u}_0(r) = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ y se añade, debido a la superposición de un esfuerzo pequeño, un pequeño desplazamiento radial y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{u}_r(r, t) = \Delta u_r(r, t)\hat{\mathbf{e}}_r$, tal que:

$$\mathbf{u}(r, t) = \mathbf{u}_0(r) + \Delta\mathbf{u}_r(r, t). \quad (5.52)$$

Se suponen \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 , así como \mathbf{T} y \mathbf{u} , como soluciones del problema de valor de frontera (2.7). Se tiene una ecuación quasi-estática para la parte grande del tensor de esfuerzos (ecuación (2.7)₁) y una incremental para la parte pequeña y dependiente del tiempo (ecuación (2.14)₁). La ecuación quasi-estática es la siguiente:

$$\text{div } \mathbf{T}_0 = 0. \quad (5.53)$$

La ecuación (5.53) en coordenadas cilíndricas es, tomando en consideración la forma de \mathbf{T}_0 (dependencia solamente de la distancia radial r):

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0. \quad (5.54)$$

De la ecuación (2.13)₁ se tienen las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0)$:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0. \quad (5.55)$$

A partir de las ecuaciones (5.54), (5.55) y la ecuación constitutiva para cada modelo no lineal se resuelven numéricamente para obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . En la respectiva subsección para cada modelo se especifican las condiciones de borde.

Por otro lado, la ecuación incremental asociada a la parte dinámica de \mathbf{T} y \mathbf{u} es la siguiente:

$$\rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \text{div}(\Delta \mathbf{T}). \quad (5.56)$$

En coordenadas cilíndricas, y tomando en consideración la dependencia solamente radial del incremento del esfuerzo y el campo de desplazamiento, se tiene obtiene la siguiente EDP:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Delta T_{rr} - \Delta T_{\theta\theta}). \quad (5.57)$$

De la ecuación (2.13)₂ se tienen para las componentes del tensor $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Delta \varepsilon_{rr} = \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r}, \quad \Delta \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta u_r}{r}, \quad \Delta \varepsilon_{zz} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{rz} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{\theta z} = 0. \quad (5.58)$$

En notación indicial las componentes de $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ se pueden expresar en términos de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ y $\Delta \mathbf{T}$:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \Delta T_{kl}. \quad (5.59)$$

Denotando la coordenada r por un 1, la coordenada θ por un 2 y la coordenada z por un 3, al expandir la expresión anterior de manera matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} \\ \mathcal{C}_{2211} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} \\ \mathcal{C}_{3311} & \mathcal{C}_{3322} & \mathcal{C}_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Aprovechando las simetrías $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$ y que $\Delta\varepsilon_{33} = 0$. Expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

de donde se puede despejar ΔT_{33} como función de ΔT_{11} y ΔT_{22} :

$$\Delta T_{33} = -\frac{\mathcal{C}_{1133}}{\mathcal{C}_{3333}}\Delta T_{11} - \frac{\mathcal{C}_{2233}}{\mathcal{C}_{3333}}\Delta T_{22}, \quad (5.62)$$

así la ecuación matricial (5.61) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

donde:

$$D_{11} = \mathcal{C}_{1111} - \frac{\mathcal{C}_{1133}^2}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad D_{12} = D_{21} = \mathcal{C}_{1122} - \frac{\mathcal{C}_{1133}\mathcal{C}_{2233}}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad D_{22} = \mathcal{C}_{2222} - \frac{\mathcal{C}_{2233}^2}{\mathcal{C}_{3333}}. \quad (5.64)$$

Suponiendo como invertible la matriz de la ecuación (5.63) (determinante distinto de cero) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Al reemplazar las expresiones de (5.58) en (5.65) se obtiene:

$$\Delta T_{11} = N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r}, \quad (5.66)$$

$$\Delta T_{22} = N_{21} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r}. \quad (5.67)$$

Al reemplazar (5.66) y (5.67) en la EDP (5.57) se obtiene la siguiente EDP lineal de onda para Δu_r :

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} \right] + \frac{1}{r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} \right] - \frac{1}{r} \left[N_{21} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} \right]. \quad (5.68)$$

Manipulando (5.68) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (N_{11} + N_{12} - N_{21}) \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} \\ + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} N_{22} \right] \Delta u_r. \end{aligned} \quad (5.69)$$

A partir de la simetría $N_{12} = N_{21}$ la ecuación (5.69) se puede escribir como:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{11} \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} N_{22} \right] \Delta u_r. \quad (5.70)$$

Las expresiones para los coeficientes N_{ij} son las siguientes en términos de D_{mn} suponiendo $D_{11}D_{22} - D_{12}^2 \neq 0$:

$$N_{11} = \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, \quad N_{12} = N_{21} = -\frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, \quad N_{22} = \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}. \quad (5.71)$$

Para la resolución de la EDP de onda lineal de segundo orden (5.70) se emplea el método de elementos finitos. Al igual que en la subsección del caso esférico la ecuación debe ser escrita de la forma:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f, \quad (5.72)$$

donde u corresponde a Δu_r en metros [m], e_a corresponde a la densidad ρ (en $[kg/m^3]$) que para cada material de estudio es igual a $2700 [kg/m^3]$ y d_a es igual a cero. A partir de la ecuación (5.68) se definen Γ y f como:

$$\Gamma = - \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} \right], \quad (5.73)$$

$$f = \frac{1}{r} \left\{ N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} - \left[N_{21} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} \right] \right\}. \quad (5.74)$$

5.2.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

Los invariantes del tensor \mathbf{T}_0 , de la ecuación (4.2), se pueden escribir en términos de T_{rr} y T_{zz} , ya que $T_{\theta\theta}$ es función de T_{rr} (ecuación (5.54)). Las expresiones para los invariantes

quedan:

$$I_1 = r \frac{dT_{rr}}{dr} + 2T_{rr} + T_{zz}, \quad (5.75)$$

$$I_2 = T_{rr}^2 + rT_{rr} \frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{r^2}{2} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + \frac{T_{zz}^2}{2}. \quad (5.76)$$

Al emplear las relaciones entre la deformaciones y el vector desplazamiento (5.55) y la ecuación constitutiva del material con comportamiento límite de deformación (4.3) se obtiene:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2, \quad (5.77)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{\theta\theta} + \Pi_3 T_{\theta\theta}^2, \quad (5.78)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2. \quad (5.79)$$

A partir de las ecuaciones (5.77) y (5.78) se obtiene la ecuación compacta:

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2 = \frac{d}{dr} \left[r \left(\Pi_1 + \Pi_2 T_{\theta\theta} + \Pi_3 T_{\theta\theta}^2 \right) \right]. \quad (5.80)$$

A partir de la ecuación (5.54) se puede escribir la ecuación (5.80) como una EDO no lineal en términos de T_{rr} . Junto con la ecuación (5.79) para T_{zz} queda el sistema de EDOs:

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2 = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(r \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right) + \Pi_3 \left(r \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.81)$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2 = 0. \quad (5.82)$$

Para poder resolver la ecuación (5.82) mediante el método de elementos finitos se requiere manipularla y convertirla en una EDO, considerando $\Gamma = \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2$, para ello se toma la derivada en r :

$$\frac{d}{dr} \left(\Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2 \right) = 0. \quad (5.83)$$

Se define la variable auxiliar $\tau_{zz}(r)$ tal que:

$$T_{zz}(r) = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r). \quad (5.84)$$

Se consideran las condiciones de borde para las EDOs (5.81) y (5.83):

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad \tau_{zz}(r_i) = 0, \quad \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2 \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (5.85)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (5.81) y (5.83) sujetas a las condiciones (5.85) se resuelve numéricamente mediante el método de elementos finitos (usando Comsol 5.3a). Dada la forma requerida por el método, $\frac{d\Gamma}{dr} = f$, se definen Γ y f para la ec. (5.81):

$$\Gamma = r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right) + \Pi_3 \left(\frac{r}{2} \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr} \right)^2 \right], \quad f = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 T_{rr}^2. \quad (5.86)$$

Para la ecuación (5.83) Γ y f se definen como:

$$\Gamma = \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2, \quad f = 0. \quad (5.87)$$

5.2.1.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuaciones (5.81) y (5.83) sujeta a las condiciones de borde (5.85) permite obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . Por medio de las expresiones para \mathcal{C}_{ijkl} del anexo A para el caso cilíndrico se puede obtener la expresión para la EDP de onda lineal (5.70).

Se consideran las mismas condiciones (5.88) para dos geometrías distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s} \right]$.

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.88)$$

Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad (tabla 5.2).

En la figura 5.9 se muestran los gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} tras resolver la EDP (5.70) considerando (5.88) y las presiones de la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Presiones estáticas en el radio interior del tubo

r_i [m]	r_f [m]	P [Pa]
0.1	0.2	1×10^6
0.1	0.2	1×10^7
10	100	1×10^6
10	100	1×10^7

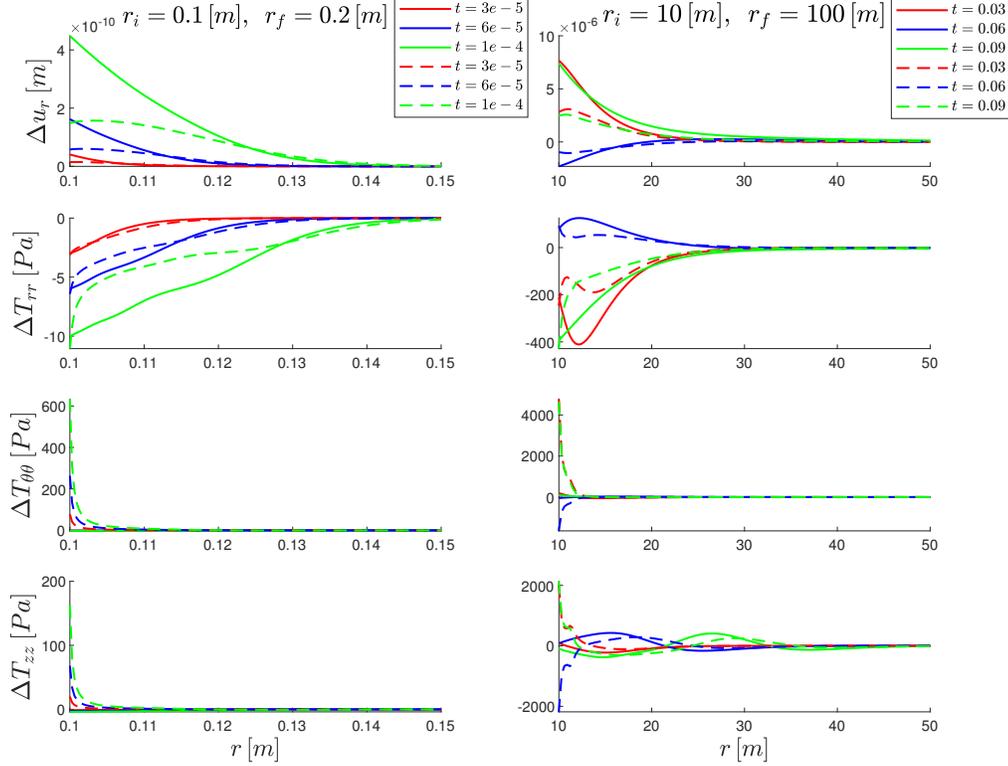


Figura 5.9: Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

Las C.B. y las C.I para el tubo definido por $r_i = 0.1$ [m] y $r_f = 0.2$ [m] son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{2 \times 10^{-5}}(t) - H_{3 \times 10^{-5}}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.89)$$

Las C.B. y las C.I para el tubo definido por $r_i = 10$ [m] y $r_f = 100$ [m] son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{0.01}(t) - H_{0.02}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.90)$$

Con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$. Al resolver la EDP (5.70) considerando las condiciones (5.89) y (5.90), junto con las cargas estáticas de la tabla 5.2 se obtienen los siguientes gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} :

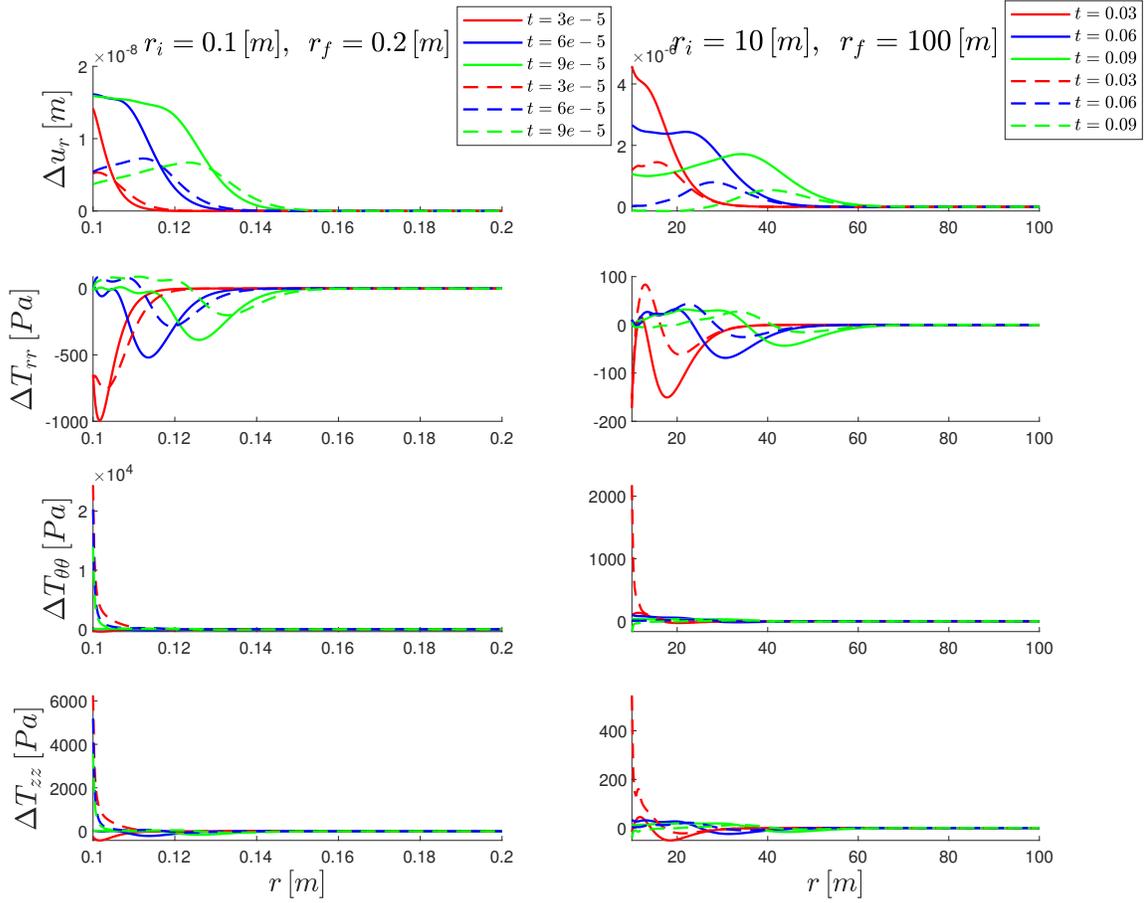


Figura 5.10: Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

5.2.2. Modelo no lineal de roca

Este caso quasi-estático ha sido resuelto por R. Bustamante y K. Rajagopal en [9]. En el caso del modelo no lineal de roca los invariantes del tensor de esfuerzos estático \mathbf{T}_0 a considerar son los esfuerzos principales, estos son: $\sigma_1 = T_{rr}$, $\sigma_2 = T_{\theta\theta}$ y $\sigma_3 = T_{zz}$, Considerando la ecuación (5.54) se tiene que los tres esfuerzos principales son funciones de T_{rr} y T_{zz} .

Las componentes de la diagonal del tensor deformación ε_0 coinciden con las deformaciones principales ε_p . En términos del desplazamiento son de la forma:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_1 = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_2 = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_3 = 0. \quad (5.91)$$

A partir de la ecuación constitutiva (4.13) se relacionan las deformaciones principales $\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}$ con las ecuaciones (5.91):

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1}(T_{rr}, T_{\theta\theta}, T_{zz}, r), \quad \frac{u_r}{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}(T_{rr}, T_{\theta\theta}, T_{zz}, r), \quad 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3}(T_{rr}, T_{\theta\theta}, T_{zz}, r). \quad (5.92)$$

Las ecuaciones (5.92)₁ y (5.92)₂ se pueden reducir a una sola. Quedando un sistema de dos EDOs no lineales:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} = 0. \quad (5.93)$$

El sistema de ecuaciones (5.93) se resuelve numéricamente mediante elementos finitos (usando Comsol 5.3a). La ecuación (5.93)₂ se deriva dada la forma que exige el método del programa. Definiendo, como en subsecciones anteriores, $\Gamma = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3}$, la ecuación (5.93)₂ queda:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right) = 0. \quad (5.94)$$

Se define la variable auxiliar $\tau_{zz}(r)$ como sigue:

$$T_{zz} = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r). \quad (5.95)$$

Se tienen las C.B. para las EDOs:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad \tau_{zz}(r_i) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right|_{r=r_f} = 0. \quad (5.96)$$

Como se menciona en secciones anteriores, el método del software exige la forma $\frac{d\Gamma}{dr} = f$ por lo que se definen Γ y f para la ecuación (5.93)₁:

$$\Gamma = r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}, \quad f = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1}. \quad (5.97)$$

5.2.2.1. Solución numérica de la ecuación de onda

Se resuelve la ecuación de ondas (5.70) considerando como condiciones de borde e iniciales el pulso sinusoidal con reposo en un tiempo inicial (ecuación (5.88)) y dos geometrías diferentes con $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, junto con las condiciones estáticas de la tabla 5.2 para las presiones internas. Los resultados obtenidos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} se presentan en la figura 5.11:

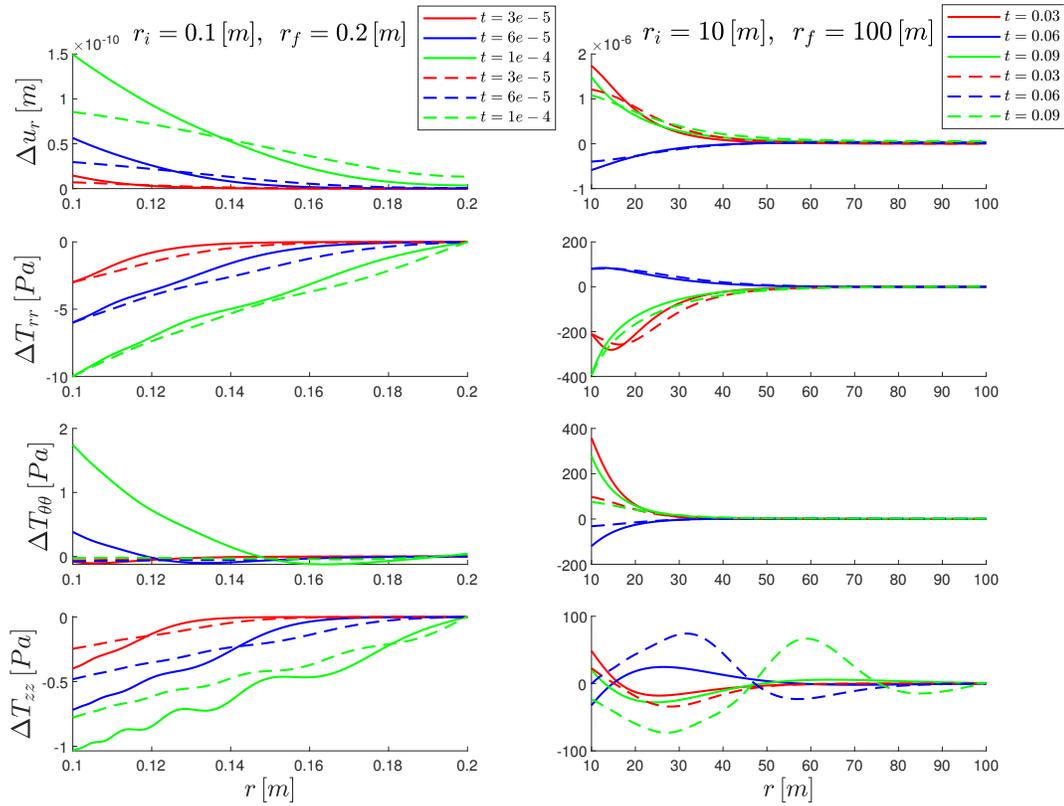


Figura 5.11: Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

El segundo tipo de pulso a considerar corresponde a dos pulsos rectangulares con condiciones de reposo en un tiempo inicial. El primer pulso para la geometría $r_i = 0.1$, $r_f = 0.2 [m]$

corresponde al de la ecuación (5.89), mientras que el de la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ corresponde al de la ecuación (5.90).

Al resolver la ecuación (5.70) para las condiciones de borde e iniciales mencionadas en el párrafo anterior se obtienen los siguientes resultados para Δu_r , ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} mostrados en la figura 5.12:

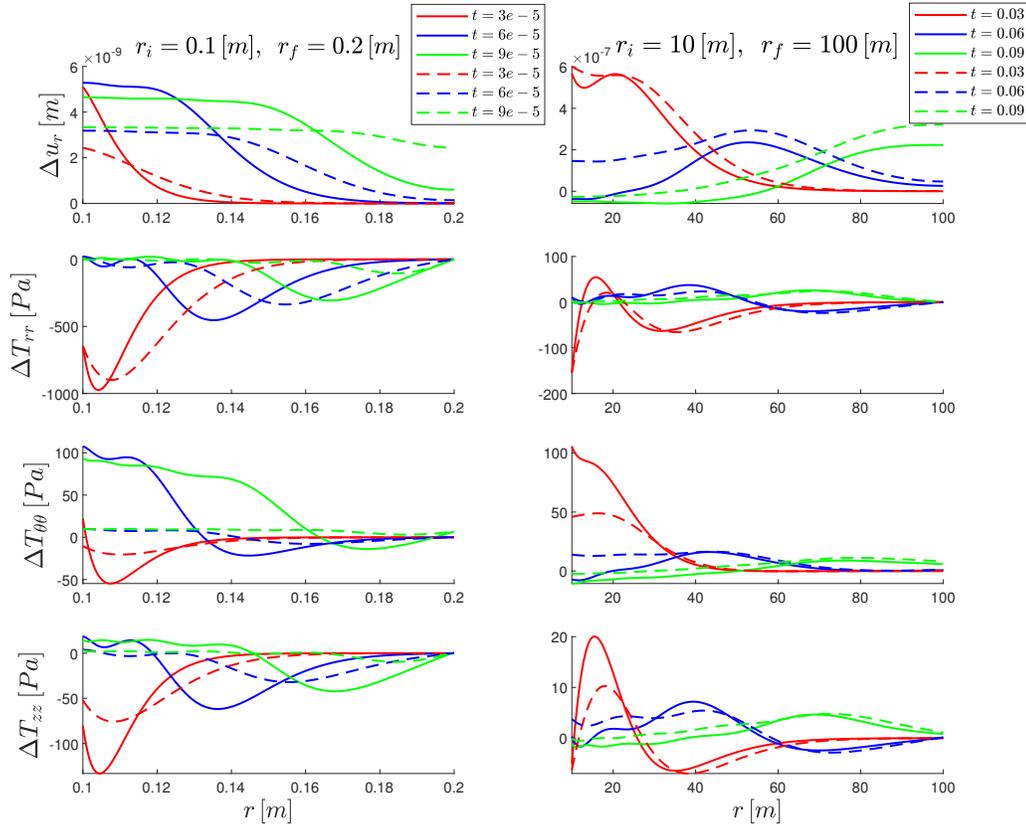


Figura 5.12: Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

5.2.3. Modelo no lineal de hormigón

El desarrollo del problema para el hormigón es completamente análogo al desarrollado para el modelo no lineal de roca cambiando las constantes del modelo (Sección 4 de Modelos, Modelo no lineal de Hormigón) y las condiciones de borde e iniciales. Se consideran las mismas

presiones estáticas de las Tabla 5.2 en el radio interior del tubo.

Se considera para ambas geometrías las condiciones de borde e iniciales de (5.88), obteniéndose al resolver la ecuación (5.70):

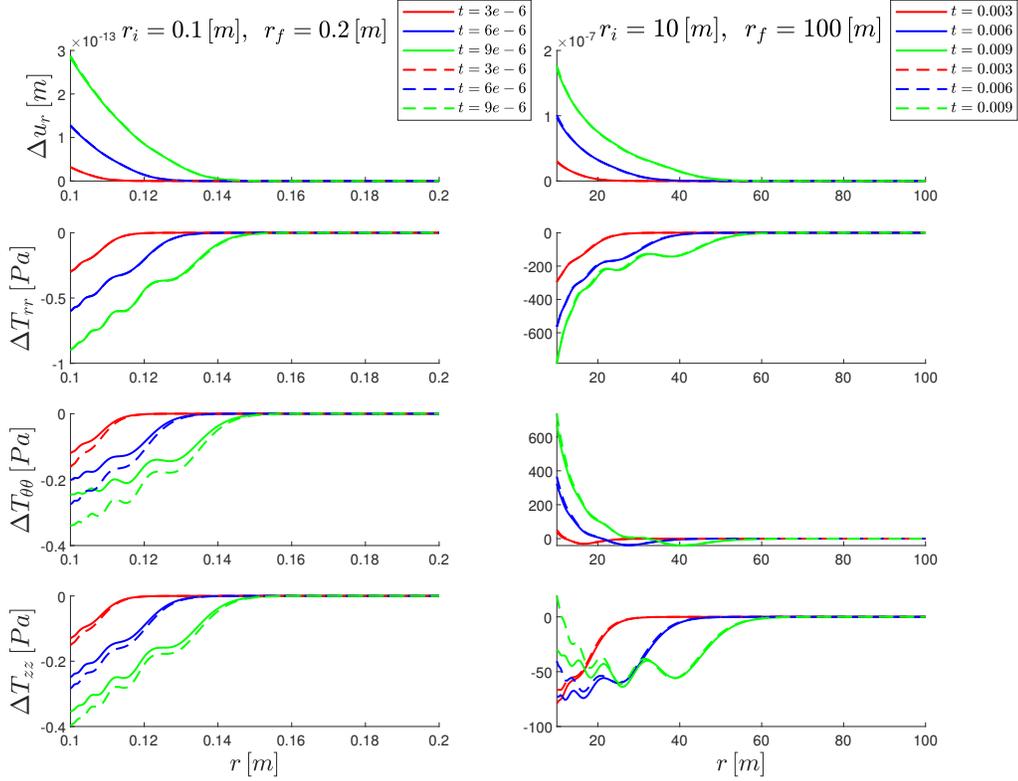


Figura 5.13: Resultados caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

El segundo caso a considerar corresponde al de pulso rectangular. Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 0.1 [m]$ y $r_f = 0.2 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{2 \times 10^{-6}}(t) - H_{3 \times 10^{-6}}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.98)$$

Las C.B. y las C.I para la cavidad esférica definida por $r_i = 10[m]$ y $r_f = 100 [m]$ son:

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 [H_{0.001}(t) - H_{0.002}(t)], \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.99)$$

Con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$. Al resolver la EDP (5.70) considerando las condiciones (5.98) y (5.99), junto con las cargas estáticas de la tabla 5.2 se obtienen los siguientes gráficos para el desplazamiento Δu_r y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} :

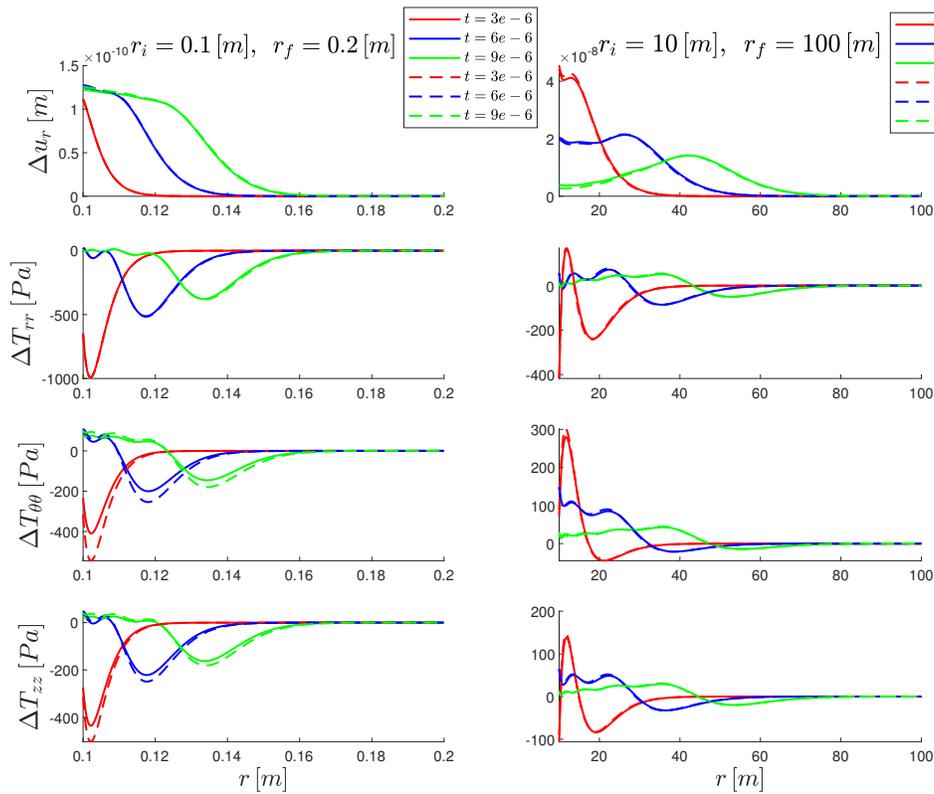


Figura 5.14: Resultados caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de hormigón. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.2. El tiempo t está en segundos.

5.3. Tubo cilíndrico bajo corte telescópico e inflación

Se supondrá un tensor de esfuerzos \mathbf{T} compuesto por la suma de un tensor de esfuerzo grande $\mathbf{T}_0(r) = T_{rr}(r)\hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + T_{\theta\theta}(r)\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + T_{zz}(r)\hat{e}_z \otimes \hat{e}_z + \frac{C_0}{r}(\hat{e}_r \otimes \hat{e}_z + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_r)$ sobre el cual se superpone uno mucho más pequeño en magnitud y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{T} = \Delta T_{rr}(r,t)\hat{e}_r \otimes \hat{e}_r + \Delta T_{\theta\theta}(r,t)\hat{e}_\theta \otimes \hat{e}_\theta + \Delta T_{zz}(r,t)\hat{e}_z \otimes \hat{e}_z + \Delta T_{rz}(\hat{e}_r \otimes \hat{e}_z + \hat{e}_z \otimes \hat{e}_r)$:

$$\mathbf{T}(r,t) = \mathbf{T}_0(r) + \Delta\mathbf{T}(r,t). \quad (5.100)$$

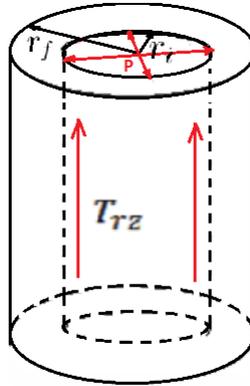


Figura 5.15: Casquete cilíndrico sometido a presión interna y corte telescópico en el radio interior.

También se supondrá, debido a la superposición de un esfuerzo pequeño, la superposición de un pequeño desplazamiento radial y uno en la coordenada z , ambos dependientes del radio y del tiempo:

$$\mathbf{u}(r,t) = \mathbf{u}_r(r) + \mathbf{u}_z(r) + \Delta\mathbf{u}_r(r,t) + \Delta\mathbf{u}_z(r,t). \quad (5.101)$$

Se suponen \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 , así como \mathbf{T} y \mathbf{u} , como soluciones del problema de valor de frontera (2.7). Se tiene una ecuación quasi-estática para la parte grande del tensor de esfuerzos (ecuación (2.7)₁) y una incremental para la parte pequeña y dependiente del tiempo (ecuación (2.14)₁). La ecuación quasi-estática es la siguiente:

$$\text{div } \mathbf{T}_0 = 0. \quad (5.102)$$

La ecuación (5.102) en coordenadas cilíndricas, tomando en consideración la dependencia

radial de \mathbf{T}_0 , queda:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad (5.103)$$

$$\frac{dT_{rz}}{dr} + \frac{1}{r}T_{rz} = 0. \quad (5.104)$$

De las ecuaciones (5.103) y (5.104) se tiene que:

$$T_{\theta\theta} = r \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr}, \quad T_{rz} = \frac{C_0}{r}. \quad (5.105)$$

De la ecuación (2.13)₁ se tienen las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0)$ en coordenadas cilíndricas:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (5.106)$$

A partir de las ecuaciones (5.105), (5.106) y la ecuación constitutiva para cada material no lineal se resuelve numéricamente para obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . En la respectiva subsección de cada modelo se especifican las condiciones de borde y el método.

Por otro lado, la ecuación incremental asociada a la parte dinámica de \mathbf{T} y \mathbf{u} es la siguiente:

$$\rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \text{div}(\Delta \mathbf{T}). \quad (5.107)$$

En coordenadas cilíndricas, y tomando en consideración la dependencia solamente radial del incremento del esfuerzo y el campo de desplazamiento, se obtienen las ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Delta T_{rr} - \Delta T_{\theta\theta}), \quad (5.108)$$

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_z)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Delta T_{rz}). \quad (5.109)$$

De la ecuación (2.13)₂ se tienen los siguientes valores para las componentes del tensor deformación $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ en coordenadas cilíndricas:

$$\Delta \varepsilon_{rr} = \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r}, \quad \Delta \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\Delta u_r}{r}, \quad \Delta \varepsilon_{zz} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \Delta \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r}, \quad \Delta \varepsilon_{\theta z} = 0. \quad (5.110)$$

En notación indicial las componentes de $\Delta\varepsilon$ se pueden expresar en términos de \mathcal{C} y $\Delta\mathbf{T}$:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl}\Delta T_{kl}. \quad (5.111)$$

Denotando la coordenada r por un 1, la coordenada θ por un 2 y la coordenada z por un 3, al expandir la expresión anterior de manera matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 2\mathcal{C}_{1113} \\ \mathcal{C}_{2211} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & 2\mathcal{C}_{2213} \\ \mathcal{C}_{3311} & \mathcal{C}_{3322} & \mathcal{C}_{3333} & 2\mathcal{C}_{3313} \\ \mathcal{C}_{1311} & \mathcal{C}_{1322} & \mathcal{C}_{1333} & 2\mathcal{C}_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \\ \Delta T_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.112)$$

al tomar en cuenta la simetría $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$ la ecuación (5.112) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 2\mathcal{C}_{1113} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & 2\mathcal{C}_{2213} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & 2\mathcal{C}_{3313} \\ \mathcal{C}_{1113} & \mathcal{C}_{2213} & \mathcal{C}_{3313} & 2\mathcal{C}_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \\ \Delta T_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.113)$$

A partir de (5.110)₃ se tiene que $\Delta\varepsilon_{33} = 0$, por lo que se puede despejar ΔT_{33} de (5.113), quedando la siguiente expresión:

$$\Delta T_{33} = \frac{-1}{\mathcal{C}_{3333}} [\mathcal{C}_{1133} \Delta T_{11} + \mathcal{C}_{2233} \Delta T_{22} + 2\mathcal{C}_{3313} \Delta T_{13}]. \quad (5.114)$$

Tomando en consideración la ecuación (5.114), el sistema (5.113) puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.115)$$

siendo:

$$D_{11} = \mathcal{C}_{1111} - \frac{\mathcal{C}_{1133}^2}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.116)$$

$$D_{12} = \mathcal{C}_{1122} - \frac{\mathcal{C}_{1133}\mathcal{C}_{2233}}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.117)$$

$$D_{13} = 2 \left(\mathcal{C}_{1113} - \frac{\mathcal{C}_{1133}\mathcal{C}_{3313}}{\mathcal{C}_{3333}} \right), \quad (5.118)$$

$$D_{22} = \mathcal{C}_{2222} - \frac{\mathcal{C}_{2233}^2}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.119)$$

$$D_{23} = 2 \left(\mathcal{C}_{2213} - \frac{\mathcal{C}_{2233}\mathcal{C}_{3313}}{\mathcal{C}_{3333}} \right), \quad (5.120)$$

$$D_{33} = 2 \left(\mathcal{C}_{1313} - \frac{\mathcal{C}_{3313}^2}{\mathcal{C}_{3333}} \right). \quad (5.121)$$

Se define la matriz M con los coeficientes D_{ij} como:

$$M = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{23} \\ 2D_{13} & 2D_{23} & 4D_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.122)$$

Suponiendo que el determinante de la matriz M es distinto de 0, la ecuación (5.115) es invertible, se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 2N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & 2N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & 2N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.123)$$

donde N_{mn} , $m, n = 1, 2, 3$ son las componentes de M^{-1} . Usando la expresión para las componentes del tensor de deformación $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ en términos de las componentes del vector desplazamiento $\Delta \mathbf{u}$ (5.110) se reemplazan en la ecuación (5.123) quedando como:

$$\Delta T_{11} = N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r}, \quad (5.124)$$

$$\Delta T_{22} = N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r}, \quad (5.125)$$

$$\Delta T_{13} = N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r}. \quad (5.126)$$

Al reemplazar (5.124)-(5.126) en (5.108) y (5.109) se obtienen las EDPs de onda lineales acopladas para Δu_r y Δu_z :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} \right. \\ & \left. + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} - \left(N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right) \right], \quad (5.127) \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_z)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right]. \quad (5.128)$$

Al manipular las ecuaciones se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + N_{13} \frac{\partial^2(\Delta u_z)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{N_{11}}{r} \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + \left[\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}(N_{13} - N_{23}) \right] \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} - \frac{N_{22}}{r^2} \right] \Delta u_r, \quad (5.129)$$

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_z)}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}(N_{23} + N_{13}) \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{13} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial r} (\Delta u_r) + N_{33} \frac{\partial^2(\Delta u_z)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{33}}{\partial r} + \frac{N_{33}}{r} \right] \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r}. \quad (5.130)$$

Para el cálculo de los N_{mn} en términos de D_{ij} (función de las componentes de \mathbf{C}), se tiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{D}} \begin{bmatrix} 2(D_{22}D_{33} - D_{23}^2) & -2(D_{33}D_{12} - D_{13}D_{23}) & D_{12}D_{23} - D_{22}D_{13} \\ -2(D_{33}D_{12} - D_{13}D_{23}) & 2(D_{11}D_{33} - D_{13}^2) & D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23} \\ D_{12}D_{23} - D_{22}D_{13} & D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23} & \frac{1}{2}(D_{11}D_{22} - D_{12}^2) \end{bmatrix}, \quad (5.131)$$

donde \hat{D} es de la forma y se supone distinto de cero:

$$\hat{D} = 2D_{11}D_{22}D_{33} - 2D_{11}D_{23}^2 - 2D_{22}D_{13}^2 - 2D_{33}D_{12}^2 + 4D_{12}D_{13}D_{23}. \quad (5.132)$$

Para la resolución de las EDPs de onda lineales (5.129) y (5.130) se emplea el método de elementos finitos. Al igual que en las subsecciones anteriores las ecuaciones deben ser escritas en la forma:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f, \quad (5.133)$$

donde u corresponde a Δu_r y Δu_z en metros [m], e_a corresponde a la densidad ρ (en $[kg/m^3]$) que para cada material de estudio es igual a $2700 [kg/m^3]$ y d_a es igual a cero. A partir de la

ecuaciones (5.127) y (5.128) se definen Γ y f respectivamente:

$$\Gamma = - \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right], \quad (5.134)$$

$$f = \frac{1}{r} \left\{ N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} - \left[N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right] \right\}, \quad (5.135)$$

$$\Gamma = - \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right], \quad (5.136)$$

$$f = \frac{1}{r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \frac{\partial(\Delta u_z)}{\partial r} \right]. \quad (5.137)$$

5.3.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

Este caso quasi-estático ha sido resuelto por R. Bustamante y K. Rajagopal en [12]. Los invariantes del tensor \mathbf{T}_0 , de la ecuación (4.2), se pueden escribir en términos de T_{rr} , T_{zz} y T_{rz} :

$$I_1 = r \frac{dT_{rr}}{dr} + 2T_{rr} + T_{zz}, \quad (5.138)$$

$$I_2 = T_{rr}^2 + rT_{rr} \frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{r^2}{2} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + \frac{T_{zz}^2}{2} + \frac{C_0^2}{r^2}. \quad (5.139)$$

Se usan las relaciones entre la deformaciones y el vector desplazamiento (5.106) como la ecuación constitutiva (4.3):

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 \left(T_{rr}^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right), \quad (5.140)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \Pi_1 + \Pi_2 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right) + \Pi_3 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2, \quad (5.141)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 \left(T_{zz}^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right), \quad (5.142)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr} = \Pi_2 \frac{C_0}{r} + \Pi_3 \frac{C_0}{r} (T_{rr} + T_{zz}). \quad (5.143)$$

De (5.139) y (5.140) se obtiene:

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 \left(T_{rr}^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right) = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right) + \Pi_3 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.144)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden (ecuaciones (5.144), (5.142) y (5.143)) se emplea el método de elementos finitos. Para las ecuaciones (5.142) y (5.143) se definen, respectivamente, las variables τ_{zz} y h tales que:

$$T_{zz}(r) = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r), \quad u_z = \frac{dh}{dr}. \quad (5.145)$$

Se toma primera derivada de la ecuación (5.142) y se reemplazan (5.145) en (5.142) y (5.143):

$$\frac{d}{dr} \left\{ \Pi_1 + \Pi_2 \frac{d\tau_{zz}}{dr} + \Pi_3 \left[\left(\frac{d\tau_{zz}}{dr} \right)^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right] \right\} = 0, \quad (5.146)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dr^2} = \Pi_2 \frac{C_0}{r} + \Pi_3 \frac{C_0}{r} (T_{rr} + T_{zz}). \quad (5.147)$$

Las condiciones de borde para el sistema de EDOs son:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad (5.148)$$

$$\tau_{zz}(r_i) = 0, \quad \left\{ \Pi_1 + \Pi_2 \frac{d\tau_{zz}}{dr} + \Pi_3 \left[\left(\frac{d\tau_{zz}}{dr} \right)^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right] \right\}_{r=r_f} = 0, \quad (5.149)$$

$$h(r_i) = 0, \quad \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=r_f} = 0. \quad (5.150)$$

5.3.1.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de las ecuaciones (5.144), (5.142) y (5.143) sujetas a las condiciones de borde (5.148), (5.149) y (5.150), respectivamente, permite obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . Por medio de las expresiones para C_{ijkl} del Anexo A para el caso cilíndrico con inflación y corte telescópico se puede obtener la expresión para las EDPs de onda lineales (5.129) y (5.130).

Se consideran las mismas condiciones (5.151) y (5.152) para dos geometrías cilíndricas distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s}\right]$.

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.151)$$

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rz}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta u_z(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_z(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.152)$$

Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad (tabla 5.3).

Tabla 5.3: Presiones estáticas en el cilindro sometido a inflación y corte telescópico.

$r_i [m]$	$r_f [m]$	$P [Pa]$	$C_0 [N/m]$
0.1	0.2	6×10^6	-2×10^8
0.1	0.2	1×10^7	-2×10^8
10	100	1×10^6	-1×10^6
10	100	1×10^7	-1×10^6

En la figura 5.16 se muestran los gráficos para los desplazamientos Δu_r y Δu_z y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$, ΔT_{zz} y ΔT_{rz} tras resolver las EDPs (5.129) y (5.130) considerando (5.151) y (5.152) y las presiones de la tabla 5.3:

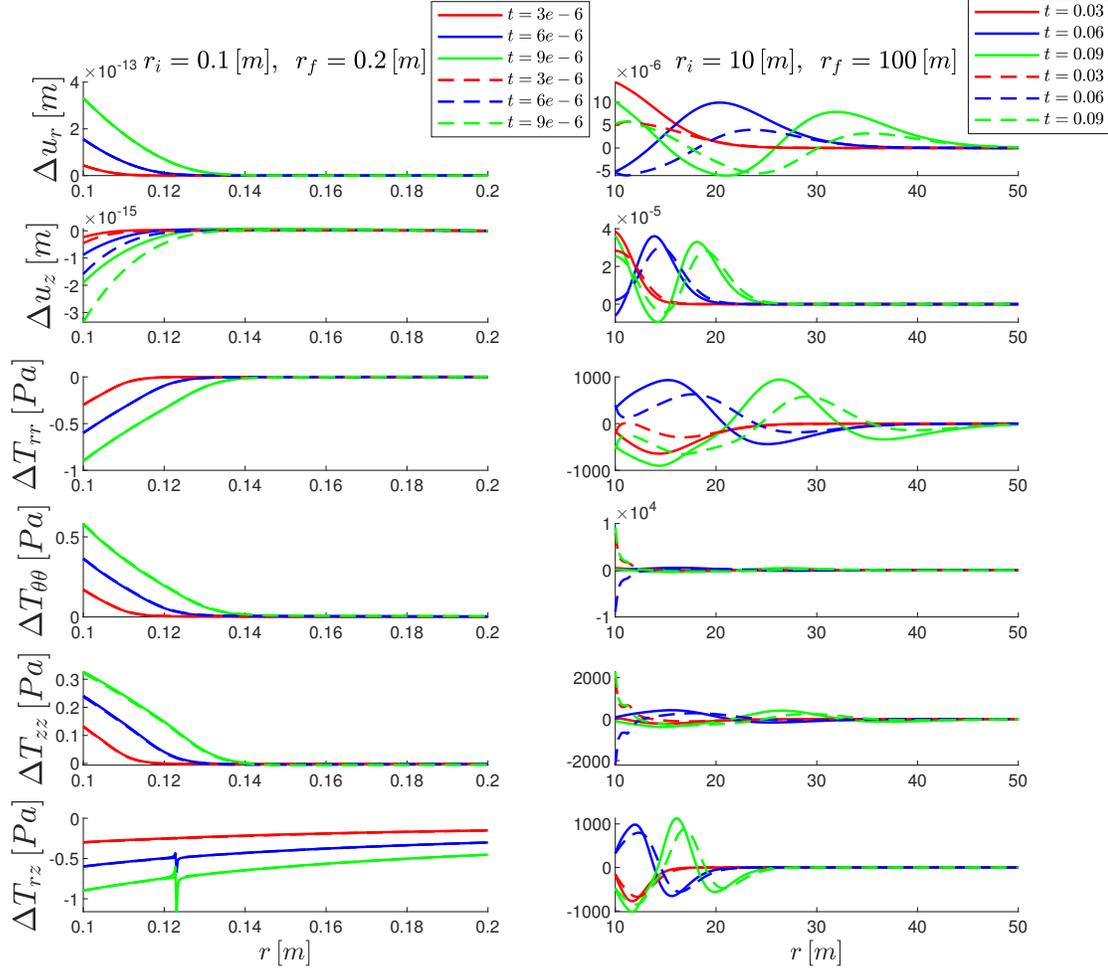


Figura 5.16: Resultados caso cilíndrico con corte telescópico para excitaciones sinusoidales para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la continua al menor de la tabla 5.3. El tiempo t está en segundos.

5.3.2. Modelo no lineal de roca

Para el caso del modelo no lineal de roca se tienen como invariantes a utilizar los esfuerzos principales σ_p del tensor de esfuerzos \mathbf{T}_0 . Los valores principales σ_1 , σ_2 y σ_3 de \mathbf{T}_0 son los siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(T_{rr} + T_{zz} + \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{zz} + T_{zz}^2 + 4T_{rz}^2}), & \sigma_2 &= T_{\theta\theta}, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}(T_{rr} + T_{zz} - \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{zz} + T_{zz}^2 + 4T_{rz}^2}).\end{aligned}\quad (5.153)$$

Las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ en términos del desplazamiento son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr}. \quad (5.154)$$

Las deformaciones principales ε_p en términos de las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son las siguientes:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{rr} + \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 + 4\varepsilon_{rz}^2} \right), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{rr} - \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 + 4\varepsilon_{rz}^2} \right). \quad (5.155)$$

Por otro lado, los vectores propios normalizados del tensor \mathbf{T}_0 son los siguientes:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + 1}} (\lambda_1 \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_z), \quad \mathbf{a}^{(2)} = \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + 1}} (\lambda_2 \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_z). \quad (5.156)$$

donde λ_1 y λ_2 se definen como:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{T_{rz}}{\frac{1}{2} \left(T_{zz} - T_{rr} + \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{zz} + 4T_{rz}^2 + T_{zz}^2} \right)}, \\ \lambda_2 &= \frac{T_{rz}}{\frac{1}{2} \left(T_{zz} - T_{rr} - \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{zz} + 4T_{rz}^2 + T_{zz}^2} \right)}.\end{aligned}\quad (5.157)$$

Desarrollando en extensión la expresión para $\boldsymbol{\varepsilon}_0$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1 \mathbf{a}^{(1)} \otimes \mathbf{a}^{(1)} + \varepsilon_2 \mathbf{a}^{(2)} \otimes \mathbf{a}^{(2)} + \varepsilon_3 \mathbf{a}^{(3)} \otimes \mathbf{a}^{(3)}. \quad (5.158)$$

Escrita matricialmente la ecuación anterior queda:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1 \frac{1}{\lambda_1^2 + 1} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_3 \frac{1}{\lambda_2^2 + 1} \begin{bmatrix} \lambda_2^2 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.159)$$

Reduciendo la ecuación (5.159) se obtiene la siguiente expresión para $\boldsymbol{\varepsilon}_0$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+1} + \varepsilon_3 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2+1} & 0 & \varepsilon_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+1} + \varepsilon_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+1} \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+1} + \varepsilon_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+1} & 0 & \varepsilon_1 \frac{1}{\lambda_1^2+1} + \varepsilon_3 \frac{1}{\lambda_2^2+1} \end{bmatrix}. \quad (5.160)$$

A partir de las ecuaciones en (5.154), tomando en consideración la ecuación de las deformaciones principales $\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}$ y la ecuación (5.160), se tiene que:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2+1}, \quad (5.161)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2}, \quad (5.162)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{1}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{1}{\lambda_2^2+1}, \quad (5.163)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{du_z}{dr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+1}. \quad (5.164)$$

Las ecuaciones (5.161) y (5.162) se pueden reducir a:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2+1} = \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right). \quad (5.165)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas no lineales de segundo orden se emplea el método de elementos finitos. Para las ecuaciones (5.163) y (5.164) se definen, respectivamente, las variables τ_{zz} y h tales que:

$$T_{zz}(r) = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r), \quad u_z = \frac{dh}{dr}. \quad (5.166)$$

Se toma primera derivada de la ecuación (5.163) y se reemplaza (5.166)₂ en la ecuación (5.164):

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{1}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{1}{\lambda_2^2+1} \right), \quad (5.167)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 h}{dr^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+1}. \quad (5.168)$$

Las condiciones de borde a considerar son:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad (5.169)$$

$$\tau_{zz}(r_i) = 0, \quad , \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{1}{\lambda_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \frac{1}{\lambda_2^2 + 1} \right]_{r=r_f} = 0, \quad (5.170)$$

$$h(r_i) = 0, \quad \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=r_f} = 0. \quad (5.171)$$

5.3.2.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuaciones (5.165), (5.163) y (5.164) sujeta a las condiciones de borde (5.169), (5.170) y (5.171), respectivamente, permite obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . Por medio de las expresiones para C_{ijkl} del Anexo A para el caso cilíndrico se puede obtener la expresión para las EDPs de onda lineales (5.129) y (5.130).

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.172)$$

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rz}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta u_z(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_z(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.173)$$

Se consideran las mismas condiciones (5.172) y (5.173) para dos geometrías distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s} \right]$. Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad.

Al resolver la ecuaciones (5.129) y (5.130) para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ no muestra resultados de interés y problemas de convergencia, mientras que para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se grafican en la figura 5.17 los resultados obtenidos.

En la figura 5.17 se muestran los gráficos para los desplazamientos Δu_r y Δu_z y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$, ΔT_{zz} y ΔT_{rz} tras resolver la EDPs (5.129) y (5.130) considerando (5.172) y (5.173) y las presiones de la tabla 5.3.

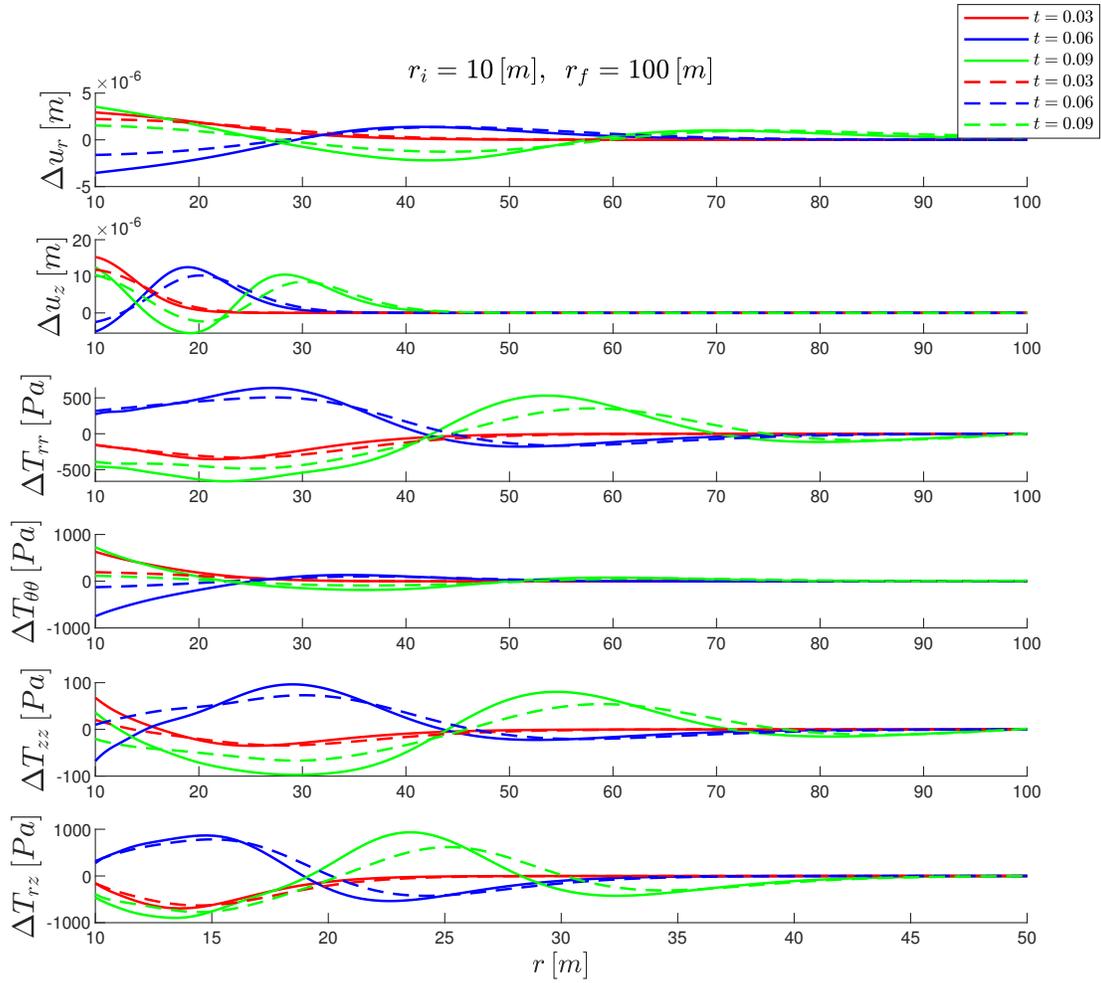


Figura 5.17: Resultados caso cilíndrico con corte telescópico con excitaciones sinusoidales para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.3. El tiempo t está en segundos.

5.3.3. Modelo no lineal de hormigón

Al intentar resolver las EDPs de onda lineales (5.129) y (5.130) para geometrías y condiciones de borde e iniciales similares a los problemas de las subsecciones anteriores (modelo con comportamiento límite de deformación y no lineal de roca) se tiene que la velocidad de la onda es tan elevada que no permite realizar un análisis interesante de los resultados, pues llega muy rápidamente al radio exterior comenzando el fenómeno de reflexión. Además de ello, presenta problemas de convergencia para la presión mayor.

5.4. Tubo cilíndrico bajo corte circunferencial e inflación

Se estudia el comportamiento de un tubo definido por $r_i \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$. Se supone un tensor de esfuerzos \mathbf{T} compuesto por la suma de un tensor de esfuerzo grande $\mathbf{T}_0(r) = T_{rr}(r)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + T_{\theta\theta}(r)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + T_{zz}(r)\hat{\mathbf{e}}_z \otimes \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{C_0}{r^2}(\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_r)$ sobre el cual se superpone uno mucho más pequeño en magnitud y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{T} = \Delta T_{rr}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_r + \Delta T_{\theta\theta}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + \Delta T_{zz}(r,t)\hat{\mathbf{e}}_z \otimes \hat{\mathbf{e}}_z + \Delta T_{r\theta}(r,t)(\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{e}}_r)$:

$$\mathbf{T}(r,t) = \mathbf{T}_0(r) + \Delta\mathbf{T}(r,t). \quad (5.174)$$

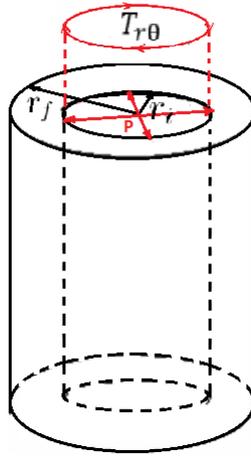


Figura 5.18: Casquete cilíndrico sometido a presión interna y corte circunferencial en su radio interior

También se supondrá, debido a la superposición de un esfuerzo pequeño, la superposición de un pequeño desplazamiento radial y circunferencial $\Delta\mathbf{u} = \Delta u_r(r,t)\hat{\mathbf{e}}_r + \Delta u_\theta(r,t)\hat{\mathbf{e}}_\theta$ dependientes del tiempo:

$$\mathbf{u}(r,t) = u_r(r)\hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta(r)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \Delta u_r(r,t)\hat{\mathbf{e}}_r + \Delta u_\theta(r,t)\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (5.175)$$

De la ecuación (2.13)₁ se tienen las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0)$ en coordenadas cilíndricas:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0. \quad (5.176)$$

Se suponen \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 , así como \mathbf{T} y \mathbf{u} , como soluciones del problema de valor de frontera

(2.7). Se tiene una ecuación quasi-estática para la parte grande del tensor de esfuerzos (ecuación (2.7)₁) y una incremental para la parte pequeña y dependiente del tiempo (ecuación (2.14)₁). La ecuación quasi-estática es la siguiente:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_0 = 0. \quad (5.177)$$

La ecuación (5.177) en coordenadas cilíndricas, tomando en consideración la dependencia radial de \mathbf{T}_0 , queda:

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad (5.178)$$

$$\frac{dT_{r\theta}}{dr} + \frac{2}{r}T_{r\theta} = 0. \quad (5.179)$$

De las ecuaciones (5.178) y (5.179) se tiene que:

$$T_{\theta\theta} = r \frac{dT_{rr}}{dr} + T_{rr}, \quad T_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (5.180)$$

A partir de las ecuaciones (5.176), (5.180) y la ecuación constitutiva para cada material no lineal se resuelve numéricamente para obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . En la respectiva subsección de cada modelo se especifican las condiciones de borde y el método.

Por otro lado, la ecuación incremental asociada a la parte dinámica de \mathbf{T} y \mathbf{u} es la siguiente:

$$\rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div}(\Delta \mathbf{T}). \quad (5.181)$$

En coordenadas cilíndricas, y tomando en consideración la dependencia solamente radial del incremento del esfuerzo y el campo de desplazamiento, se obtienen las ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}(\Delta T_{rr} - \Delta T_{\theta\theta}), \quad (5.182)$$

$$\rho \frac{\partial^2(\Delta u_\theta)}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta T_{r\theta})}{\partial r} + \frac{2}{r}(\Delta T_{r\theta}). \quad (5.183)$$

De la ecuación (2.13)₂ se tienen los siguientes valores para las componentes del tensor

deformación $\Delta\varepsilon$ en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r}, & \Delta\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\Delta u_r}{r}, & \Delta\varepsilon_{zz} &= 0, \\ \Delta\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right), & \Delta\varepsilon_{rz} &= 0, & \Delta\varepsilon_{\theta z} &= 0.\end{aligned}\quad (5.184)$$

En notación indicial las componentes de $\Delta\varepsilon$ se pueden expresar en términos de \mathbf{C} y $\Delta\mathbf{T}$:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \Delta T_{kl}. \quad (5.185)$$

Denotando la coordenada r por un 1, la coordenada θ por un 2 y la coordenada z por un 3, al expandir la expresión anterior de manera matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 2\mathcal{C}_{1112} \\ \mathcal{C}_{2211} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & 2\mathcal{C}_{2212} \\ \mathcal{C}_{3311} & \mathcal{C}_{3322} & \mathcal{C}_{3333} & 2\mathcal{C}_{3312} \\ \mathcal{C}_{1211} & \mathcal{C}_{1222} & \mathcal{C}_{1233} & 2\mathcal{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \\ \Delta T_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.186)$$

Tomando en cuenta la simetría siguiente $\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij}$:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{1111} & \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{1133} & 2\mathcal{C}_{1112} \\ \mathcal{C}_{1122} & \mathcal{C}_{2222} & \mathcal{C}_{2233} & 2\mathcal{C}_{2212} \\ \mathcal{C}_{1133} & \mathcal{C}_{2233} & \mathcal{C}_{3333} & 2\mathcal{C}_{3312} \\ \mathcal{C}_{1112} & \mathcal{C}_{2212} & \mathcal{C}_{3312} & 2\mathcal{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \\ \Delta T_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.187)$$

Se tiene que $\Delta\varepsilon_{33} = 0$, por lo que se puede despejar ΔT_{33} de (5.187), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\Delta T_{33} = \frac{-1}{\mathcal{C}_{3333}} [\mathcal{C}_{1133} \Delta T_{11} + \mathcal{C}_{2233} \Delta T_{22} + 2\mathcal{C}_{3312} \Delta T_{12}]. \quad (5.188)$$

Empleando la expresión (5.188) en (5.187) este sistema se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.189)$$

donde:

$$D_{11} = \mathcal{C}_{1111} - \frac{\mathcal{C}_{1133}^2}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.190)$$

$$D_{12} = \mathcal{C}_{1122} - \frac{\mathcal{C}_{1133}\mathcal{C}_{2233}}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.191)$$

$$D_{13} = 2 \left(\mathcal{C}_{1112} - \frac{\mathcal{C}_{1133}\mathcal{C}_{3312}}{\mathcal{C}_{3333}} \right), \quad (5.192)$$

$$D_{22} = \mathcal{C}_{2222} - \frac{\mathcal{C}_{2233}^2}{\mathcal{C}_{3333}}, \quad (5.193)$$

$$D_{23} = 2 \left(\mathcal{C}_{2212} - \frac{\mathcal{C}_{2233}\mathcal{C}_{3312}}{\mathcal{C}_{3333}} \right), \quad (5.194)$$

$$D_{33} = 2 \left(\mathcal{C}_{1212} - \frac{\mathcal{C}_{3312}^2}{\mathcal{C}_{3333}} \right). \quad (5.195)$$

Se define la matriz M con los coeficientes D_{ij} :

$$M = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{23} \\ 2D_{13} & 2D_{23} & 4D_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.196)$$

Suponiendo que el determinante de la matriz M es distinto de 0, es decir, es invertible. Se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 2N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & 2N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & 2N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.197)$$

donde N_{mn} , $m, n = 1, 2, 3$ son las componentes de M^{-1} . Usando la expresión para las componentes del tensor de deformación $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ en términos de las componentes del vector desplazamiento $\Delta \mathbf{u}$ (5.184) se reemplazan en la ecuación (5.197):

$$\Delta T_{11} = N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right), \quad (5.198)$$

$$\Delta T_{22} = N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right), \quad (5.199)$$

$$\Delta T_{12} = N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right). \quad (5.200)$$

Al reemplazar (5.198)-(5.200) en (5.182) y (5.183) se obtienen las EDPs de onda lineales

acopladas para Δu_r y Δu_θ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{r} \left\{ N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) - \left[N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.201)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_\theta)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right] \\ &+ \frac{2}{r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.202)$$

Al manipular las ecuaciones (5.201) y (5.202) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial N_{11}}{\partial r} + \frac{N_{11}}{r} \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{11} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial r} - \frac{N_{22}}{r^2} \right] \Delta u_r \\ &+ N_{13} \frac{\partial^2(\Delta u_\theta)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{13}}{\partial r} - \frac{N_{23}}{r} \right] \frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} + \left[\frac{N_{23}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{13}}{\partial r} \right] \Delta u_\theta, \end{aligned} \quad (5.203)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2(\Delta u_\theta)}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} (N_{23} + 2N_{13}) \right] \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{13} \frac{\partial^2(\Delta u_r)}{\partial r^2} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial r} \right. \\ &\left. + \frac{N_{23}}{r^2} \right] \Delta u_r + N_{33} \frac{\partial^2(\Delta u_\theta)}{\partial r^2} + \left[\frac{\partial N_{33}}{\partial r} + \frac{N_{33}}{r} \right] \frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \left[\frac{N_{33}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{33}}{\partial r} \right] \Delta u_\theta. \end{aligned} \quad (5.204)$$

Para el cálculo de los N_{mn} en términos de D_{ij} (que son funciones de las componentes de \mathcal{C}), se tiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{D}} \begin{bmatrix} 2(D_{22}D_{33} - D_{23}^2) & -2(D_{33}D_{12} - D_{13}D_{23}) & D_{12}D_{23} - D_{22}D_{13} \\ -2(D_{33}D_{12} - D_{13}D_{23}) & 2(D_{11}D_{33} - D_{13}^2) & D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23} \\ D_{12}D_{23} - D_{22}D_{13} & D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23} & \frac{1}{2}(D_{11}D_{22} - D_{12}^2) \end{bmatrix}, \quad (5.205)$$

donde \hat{D} es de la forma y se supone distinto de cero:

$$\hat{D} = 2D_{11}D_{22}D_{33} - 2D_{11}D_{23}^2 - 2D_{22}D_{13}^2 - 2D_{33}D_{12}^2 + 4D_{12}D_{13}D_{23}. \quad (5.206)$$

Para la resolución de las EDPs de onda lineales (5.203) y (5.204) se emplea el método de elementos finitos. Al igual que en las subsecciones anteriores las ecuaciones deben ser escritas en la forma:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f, \quad (5.207)$$

donde u corresponde a Δu_r y Δu_θ en metros [m], e_a corresponde a la densidad ρ (en $[kg/m^3]$) que para cada material de estudio es igual a $2700 [kg/m^3]$ y d_a es igual a cero. A partir de la ecuaciones (5.201) y (5.202) se definen Γ y f respectivamente:

$$\Gamma = - \left[N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right], \quad (5.208)$$

$$f = \frac{1}{r} \left\{ N_{11} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{12} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{13} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) - \left[N_{12} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{22} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{23} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right] \right\}, \quad (5.209)$$

$$\Gamma = - \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right], \quad (5.210)$$

$$f = \frac{2}{r} \left[N_{13} \frac{\partial(\Delta u_r)}{\partial r} + N_{23} \frac{\Delta u_r}{r} + N_{33} \left(\frac{\partial(\Delta u_\theta)}{\partial r} - \frac{\Delta u_\theta}{r} \right) \right]. \quad (5.211)$$

5.4.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

Este caso quasi-estático ha sido resuelto por R. Bustamante y K. Rajagopal en [12]. Los invariantes del tensor \mathbf{T}_0 (ver (4.2)), se pueden escribir en términos de T_{rr} , T_{zz} y T_{rz} :

$$I_1 = r \frac{dT_{rr}}{dr} + 2T_{rr} + T_{zz}, \quad (5.212)$$

$$I_2 = T_{rr}^2 + rT_{rr} \frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{r^2}{2} \left(\frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + \frac{T_{zz}^2}{2} + \frac{C_1^2}{r^4}. \quad (5.213)$$

A partir de la relación entre deformación y desplazamiento y la ecuación constitutiva que

relaciona deformación con el esfuerzo se tienen las relaciones siguientes:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 \left(T_{rr}^2 + \frac{C_1^2}{r^4} \right), \quad (5.214)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \Pi_1 + \Pi_2 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right) + \Pi_3 \left[\left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + \frac{C_1^2}{r^4} \right], \quad (5.215)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \Pi_1 + \Pi_2 T_{zz} + \Pi_3 T_{zz}^2, \quad (5.216)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \Pi_2 \frac{C_1}{r^2} + \Pi_3 \frac{C_1}{r^2} \left(2T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right). \quad (5.217)$$

Las ecuaciones (5.214) y (5.215) se pueden reducir a una sola:

$$\Pi_1 + \Pi_2 T_{rr} + \Pi_3 \left(T_{rr}^2 + \frac{C_1^2}{r^4} \right) = \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\Pi_1 + \Pi_2 \left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right) + \Pi_3 \left[\left(T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right)^2 + \frac{C_1^2}{r^4} \right] \right] \right\}. \quad (5.218)$$

Debido a la forma exigida por el software Comsol 5.3a para resolver mediante el método de elementos finitos las ecuaciones (5.214)-(5.217) se definen las variables $\tau_{zz}(r)$ y $h(r)$ con el fin de poder escribir las ecuaciones (5.216) y (5.217) en la forma $\frac{d\Gamma}{dr} = f$ y tener condiciones de borde para éstas. Las variables τ_{zz} y h se definen como:

$$T_{zz}(r) = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r), \quad u_\theta = \frac{dh}{dr}. \quad (5.219)$$

Se toma primera derivada de la ecuación (5.216) y se reemplazan (5.219) en las ecuaciones (5.216) y (5.217):

$$\frac{d}{dr} \left(\Pi_1 + \Pi_2 \frac{d\tau_{zz}}{dr} + \Pi_3 \left(\frac{d\tau_{zz}}{dr} \right)^2 \right) = 0, \quad (5.220)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right) = \Pi_2 \frac{C_1}{r^2} + \Pi_3 \frac{C_1}{r^2} \left(2T_{rr} + r \frac{dT_{rr}}{dr} \right). \quad (5.221)$$

Las condiciones de borde a considerar para el sistema de ecuaciones (5.218), (5.216) y (5.217) son respectivamente:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad (5.222)$$

$$\tau_{zz}(r_i) = 0, \quad \left\{ \Pi_1 + \Pi_2 \frac{d\tau_{zz}}{dr} + \Pi_3 \left[\left(\frac{d\tau_{zz}}{dr} \right)^2 + \frac{C_0^2}{r^2} \right] \right\}_{r=r_f} = 0, \quad (5.223)$$

$$h(r_i) = 0 \quad \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=r_f} = 0. \quad (5.224)$$

5.4.1.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuaciones (5.218), (5.220) y (5.221) sujeta a las condiciones de borde (5.222), (5.223) y (5.224), respectivamente, permite obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . Por medio de las expresiones para C_{ijkl} del Anexo A para el caso cilíndrico con inflación y corte circunferencial se puede obtener la expresión para la EDPs de onda lineales (5.203) y (5.204).

Se consideran las mismas condiciones (5.225) y (5.226) para dos geometrías cilíndricas distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s} \right]$. Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes.

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.225)$$

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{r\theta}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta u_\theta(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_\theta(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.226)$$

Tabla 5.4: Presiones estáticas en el radio interior del tubo sometido a inflación y corte circunferencial.

$r_i [m]$	$r_f [m]$	$P [Pa]$	$C_1 [N]$
0.1	0.2	1×10^6	-1×10^5
0.1	0.2	6×10^6	-1×10^5
10	100	1×10^6	-1×10^5
10	100	9×10^6	-1×10^5

En la figura 5.19 se muestran los gráficos para los desplazamientos Δu_r y Δu_θ y los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$, ΔT_{zz} y $\Delta T_{r\theta}$ tras resolver las EDPs (5.203) y (5.204):

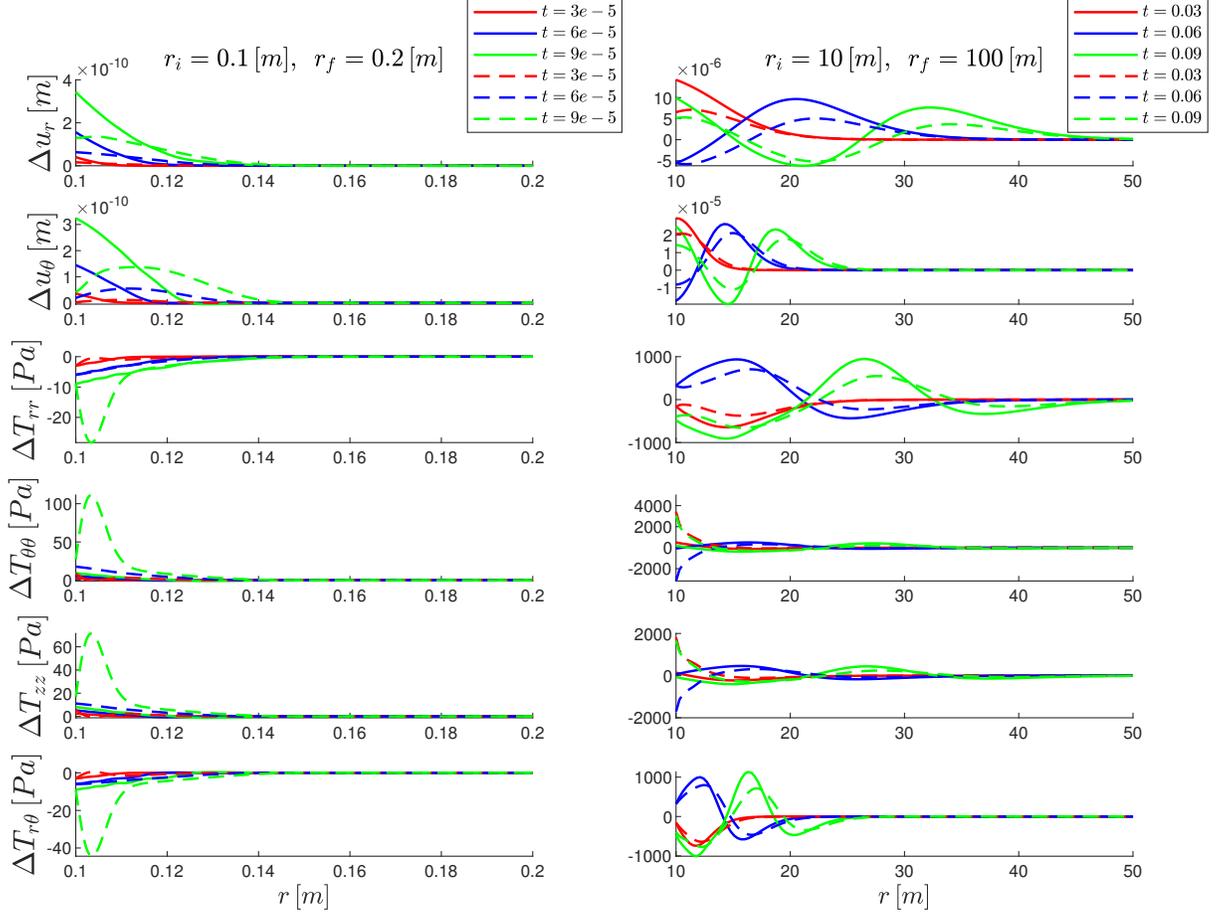


Figura 5.19: Resultados caso cilíndrico con corte circunferencial con excitaciones sinusoidales para el modelo con comportamiento límite de deformación. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.4. El tiempo t está en segundos.

5.4.2. Modelo no lineal de roca

Los invariantes a considerar para el modelo no lineal de roca del tensor \mathbf{T}_0 son los esfuerzos principales σ_p , estos son: $\sigma_1 = \frac{1}{2}(T_{rr} + T_{\theta\theta} + \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{\theta\theta} + T_{\theta\theta}^2 + 4T_{r\theta}^2})$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(T_{rr} + T_{\theta\theta} - \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{\theta\theta} + T_{\theta\theta}^2 + 4T_{r\theta}^2})$ y $\sigma_3 = T_{zz}$. Las componentes del tensor deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ son las siguientes:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0. \quad (5.227)$$

Las deformaciones principales ε_p para el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - 2\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 4\varepsilon_{r\theta}^2}), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - 2\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + 4\varepsilon_{r\theta}^2}), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}.\end{aligned}\quad (5.228)$$

Por otro lado, los vectores propios de \mathbf{T}_0 son:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 + 1}}(\mu_1 \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta), \quad \mathbf{a}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2^2 + 1}}(\mu_2 \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta), \quad \mathbf{a}^{(3)} = \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (5.229)$$

donde μ_1 y μ_2 se definen como:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{T_{r\theta}}{\frac{1}{2}(T_{\theta\theta} - T_{rr} + \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{\theta\theta} + 4T_{r\theta}^2 + T_{\theta\theta}^2})}, \\ \mu_2 &= \frac{T_{r\theta}}{\frac{1}{2}(T_{\theta\theta} - T_{rr} - \sqrt{T_{rr}^2 - 2T_{rr}T_{\theta\theta} + 4T_{r\theta}^2 + T_{\theta\theta}^2})}.\end{aligned}\quad (5.230)$$

A partir de (5.227), (5.228), (5.229), (5.230) y teniendo que $\varepsilon_p = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_p}$ se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\mu_2^2}{\mu_2^2 + 1}, \quad (5.231)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{1}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{1}{\mu_2^2 + 1}, \quad (5.232)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3}, \quad (5.233)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\mu_1}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + 1}. \quad (5.234)$$

Las ecuaciones (5.231) y (5.232) se pueden reducir a:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\mu_1^2}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\mu_2^2}{\mu_2^2 + 1} = \frac{d}{dr} \left[r \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{1}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{1}{\mu_2^2 + 1} \right) \right]. \quad (5.235)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas no lineales de segundo orden se emplea el método de elementos finitos. Para las ecuaciones (5.233) y (5.234) se definen, respectivamente, las variables τ_{zz} y h tales que:

$$T_{zz}(r) = \frac{d\tau_{zz}}{dr}(r), \quad u_\theta = \frac{dh}{dr}. \quad (5.236)$$

Se toma primera derivada de la ecuación (5.233) y se reemplaza (5.236)₂ en la ecuación (5.234):

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right), \quad (5.237)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dh}{dr} \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\mu_1}{\mu_1^2 + 1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + 1}. \quad (5.238)$$

Las condiciones de borde a considerar son:

$$T_{rr}(r_i) = -P, \quad T_{rr}(r_f) = 0, \quad (5.239)$$

$$\tau_{zz}(r_i) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right|_{r=r_f} = 0, \quad (5.240)$$

$$h(r_i) = 0, \quad \left. \frac{dh}{dr} \right|_{r=r_f} = 0. \quad (5.241)$$

5.4.2.1. Solución numérica de la ecuación de onda

La solución de la ecuaciones (5.235), (5.237) y (5.238) sujeta a las condiciones de borde (5.239), (5.240) y (5.241), respectivamente, permite obtener T_{rr} , $T_{\theta\theta}$ y T_{zz} . Por medio de las expresiones para \mathcal{C}_{ijkl} del anexo A para el caso cilíndrico con corte circunferencial se puede obtener la expresión para las EDPs de onda lineales (5.203) y (5.204).

Se consideran las mismas condiciones (5.242) y (5.243) para dos geometrías distintas: $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ y $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$, con $\sigma_0 = 1 \times 10^3 [Pa]$ y $\omega = 100 \left[\frac{1}{s} \right]$. Se consideran, para cada geometría, dos presiones estáticas $-P$ diferentes en el radio interior de la cavidad.

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rr}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta T_{rr}(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_r(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_r}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5.242)$$

$$C.B. \begin{cases} \Delta T_{rz}(r = r_i, t) = \sigma_0 \text{sen}(\omega t), \\ \Delta u_\theta(r = r_f, t) = 0, \end{cases} \quad C.I. \begin{cases} \Delta u_\theta(r, 0) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (5.243)$$

Al resolver la ecuaciones (5.203) y (5.204) para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ no muestra resultados de interés y presenta problemas de convergencia, mientras que para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se grafican en la figura 5.20 los resultados obtenidos considerando las condiciones (5.242) y (5.243), así como las presiones de la tabla 5.5 donde se muestran los casos para $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$:

Tabla 5.5: Presiones estáticas en el radio interior del tubo sometido a inflación y corte circunferencial modelo no lineal de roca.

$r_i [m]$	$r_f [m]$	$P [Pa]$	$C_1 [N]$
10	100	1×10^6	-1×10^5
10	100	1×10^7	-1×10^5

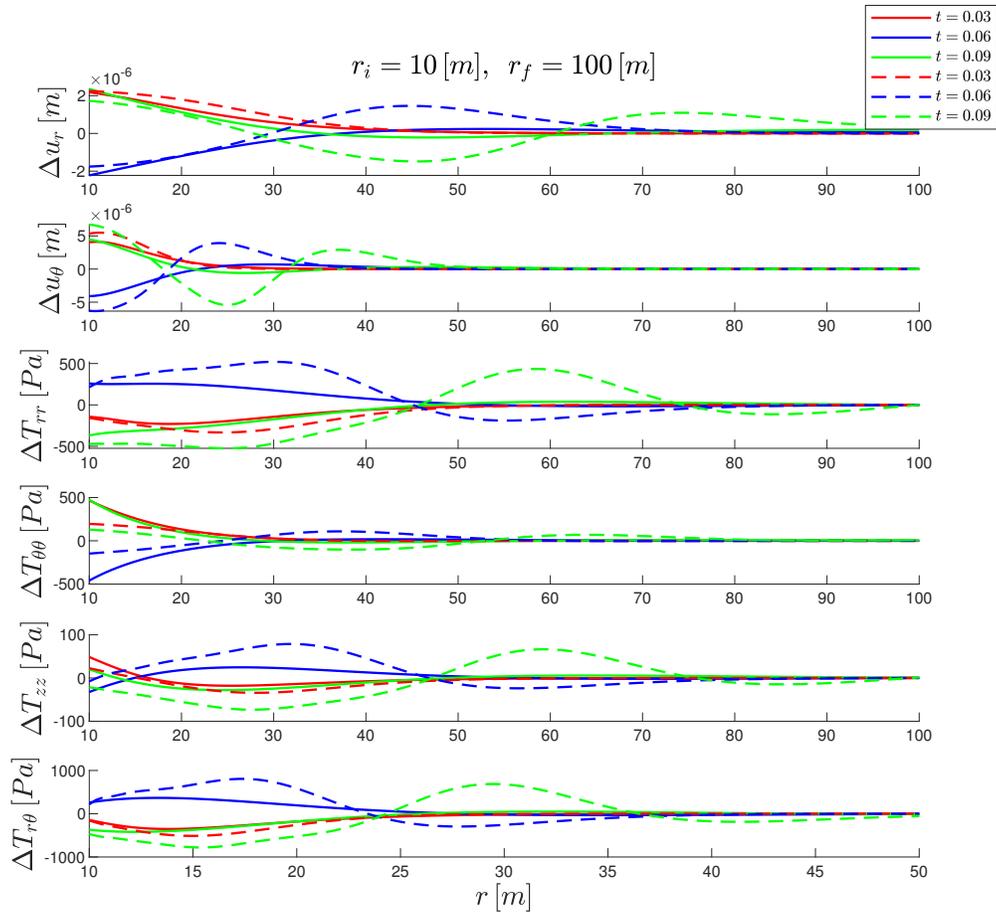


Figura 5.20: Resultados caso cilíndrico con corte circunferencial con excitaciones sinusoidales para el modelo no lineal de roca. Línea punteada corresponde al esfuerzo mayor y la línea continua al menor de la tabla 5.5. El tiempo t está en segundos.

5.4.3. Modelo no lineal de hormigón

Al intentar resolver las EDPs de onda lineales (5.203) y (5.204) para geometrías y condiciones de borde e iniciales similares a los problemas de las subsecciones anteriores (modelo con comportamiento límite de deformación y no lineal de roca) se tiene que la velocidad de la onda es tan elevada que no permite realizar un análisis de los resultados, además de problemas de convergencia para la presión mayor.

5.5. Placa infinita sujeta a compresión en sus dos caras

Este problema ha sido planteado de una manera similar por R. Bustamante y Sfyris en [13]. Se estudia la propagación de ondas en un plano definido por $0 \leq x \leq b$, $-\infty \leq y \leq +\infty$ y $-\infty \leq z \leq +\infty$. En el presente problema se usan de manera indistinta las notaciones σ_i como T_{ii} , así como para $\Delta\sigma_i$ y ΔT_{ii} , con $i = 1, 2, 3$ para los esfuerzos.

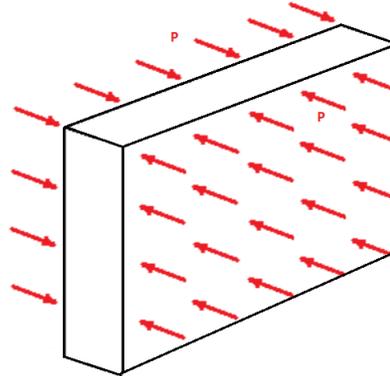


Figura 5.21: Placa Infinita sometida a carga en sus dos caras

Se supondrá un tensor de esfuerzos \mathbf{T} compuesto por la suma de un tensor de esfuerzo grande $\mathbf{T}_0 = \sigma_1(x)\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1 + \sigma_2(x)\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_2 + \sigma_3(x)\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_3$ sobre el cual se superpone uno mucho más pequeño en magnitud y dependiente del tiempo $\Delta\mathbf{T}(x, t) = \Delta\sigma_1(x, t)\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_1 + \Delta\sigma_2(x, t)\hat{e}_2 \otimes \hat{e}_2 + \Delta\sigma_3(x, t)\hat{e}_3 \otimes \hat{e}_3$:

$$\mathbf{T}(x, t) = \mathbf{T}_0(x) + \Delta\mathbf{T}(x, t). \quad (5.244)$$

También se supondrá, debido a la superposición de un esfuerzo pequeño, la superposición de un pequeño desplazamiento en el eje X , dependiente de x y del tiempo $\Delta\mathbf{u}(x, t)$:

$$\mathbf{u}(x, t) = u(x)\hat{\mathbf{e}}_1 + \Delta u(x, t)\hat{\mathbf{e}}_1. \quad (5.245)$$

De la ecuación (2.13)₁ se tienen las componentes del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{T}_0)$ en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.246)$$

Se suponen \mathbf{T}_0 y \mathbf{u}_0 , así como \mathbf{T} y \mathbf{u} , como soluciones del problema de valor de frontera (2.7). Se tiene una ecuación quasi-estática para la parte grande del tensor de esfuerzos (ecuación (2.7)₁) y una incremental para la parte pequeña y dependiente del tiempo (ecuación (2.14)₁). La ecuación quasi-estática es la siguiente:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}_0 = 0. \quad (5.247)$$

La ecuación anterior en coordenadas cartesianas es la siguiente tomando en cuenta la forma de \mathbf{T}_0 :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = 0, \quad (5.248)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0, \quad (5.249)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0 \implies \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0. \quad (5.250)$$

Por otro lado, la ecuación incremental asociada a la parte dinámica de \mathbf{T} y \mathbf{u} es la siguiente:

$$\rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} = \operatorname{div}(\Delta \mathbf{T}). \quad (5.251)$$

La ecuación anterior en coordenadas cartesianas queda de la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial(\Delta \sigma_1)}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial(\Delta \sigma_2)}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial(\Delta \sigma_3)}{\partial z}. \quad (5.252)$$

Se tienen las siguientes expresiones para las componentes del tensor deformación $\Delta\epsilon$:

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_{xx} &= \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x}, & \Delta\epsilon_{yy} &= \frac{\partial\Delta u_2}{\partial y} = 0, & \Delta\epsilon_{zz} &= \frac{\partial\Delta u_3}{\partial z} = 0, & \Delta\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_1}{\partial y} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x} \right) = 0, \\ \Delta\epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_2}{\partial z} + \frac{\partial\Delta u_3}{\partial y} \right) = 0, & \Delta\epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Delta u_1}{\partial z} + \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x} \right) = 0.\end{aligned}\quad (5.253)$$

En notación indicial las componentes de $\Delta\epsilon$ se pueden expresar en términos de \mathbf{C} y $\Delta\mathbf{T}$:

$$\Delta\epsilon_{ij} = C_{ijkl}\Delta T_{kl}. \quad (5.254)$$

Denotando la coordenada x por un 1, la coordenada y por un 2 y la coordenada z por un 3, al expandir la expresión anterior de manera matricial queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11} \\ \Delta\epsilon_{22} \\ \Delta\epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.255)$$

Tomando en cuenta la simetría siguiente ($C_{ijkl} = C_{klij}$):

$$\begin{bmatrix} \Delta\epsilon_{11} \\ \Delta\epsilon_{22} \\ \Delta\epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{11} \\ \Delta T_{22} \\ \Delta T_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.256)$$

Se tiene que $\Delta\epsilon_{22} = 0$ y $\Delta\epsilon_{33} = 0$, por lo que se puede despejar ΔT_{22} y ΔT_{33} en función de ΔT_{11} , quedando las siguientes expresiones:

$$\Delta T_{22} = \frac{C_{2233}C_{1133} - C_{1122}C_{3333}}{C_{2222}C_{3333} - C_{2233}^2} \Delta T_{11}, \quad (5.257)$$

$$\Delta T_{33} = \frac{C_{2233}C_{1122} - C_{1133}C_{2222}}{C_{2222}C_{3333} - C_{2233}^2} \Delta T_{11}. \quad (5.258)$$

Se obtiene la siguiente expresión para $\Delta\epsilon_{11}$ en términos de ΔT_{11} :

$$\Delta\epsilon_{11} = \left(\frac{C_{1111}C_{2222}C_{3333} - C_{1111}C_{2233}^2 + 2C_{1122}C_{1133}C_{2233} - C_{1122}^2C_{3333} - C_{1133}^2C_{2222}}{C_{2222}C_{3333} - C_{2233}^2} \right) \Delta T_{11} \quad (5.259)$$

Despejando ΔT_{11} en términos de $\Delta\epsilon_{11}$ y considerando que por simetría del problema $\sigma_2 = \sigma_3$

se tienen las simetrías $\mathcal{C}_{2222} = \mathcal{C}_{3333}$ y $\mathcal{C}_{1122} = \mathcal{C}_{1133}$:

$$\Delta T_{11} = \left(\frac{\mathcal{C}_{2222}^2 - \mathcal{C}_{2233}^2}{\mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2222}^2 - \mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2233}^2 + 2\mathcal{C}_{1122}^2\mathcal{C}_{2233} - 2\mathcal{C}_{1122}\mathcal{C}_{2222}^2} \right) \Delta \varepsilon_{11}. \quad (5.260)$$

Denotando por \hat{C} :

$$\hat{C} = \frac{\mathcal{C}_{2222}^2 - \mathcal{C}_{2233}^2}{\mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2222}^2 - \mathcal{C}_{1111}\mathcal{C}_{2233}^2 + 2\mathcal{C}_{1122}^2\mathcal{C}_{2233} - 2\mathcal{C}_{1122}\mathcal{C}_{2222}^2}. \quad (5.261)$$

Considerando (5.261), la ecuación (5.260) se puede escribir como:

$$\Delta T_{11} = \hat{C} \Delta \varepsilon_{11}. \quad (5.262)$$

Reemplazando (5.253)₁ en (5.262) se obtiene:

$$\Delta T_{11} = \hat{C} \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x}. \quad (5.263)$$

Al reemplazar (5.263) en (5.252)₁ se obtiene la EDP de ondas lineal en términos de Δu_x :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Delta u_x}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{\hat{C}}{\rho}}, \quad (5.264)$$

donde v tiene unidades de $[m/s]$ y corresponde a la velocidad de propagación de la onda.

5.5.1. Modelo con comportamiento límite de deformación

Por la ecuación (5.248) se tiene que el esfuerzo σ_1 es constante. La ecuación (5.249) implica que σ_2 (por simetría es idéntico a σ_3) también lo es. Se obtendrá un gráfico de velocidad ((5.264)₂) versus esfuerzo de compresión σ_1 (figura 5.22) por lo que es necesario resolver numéricamente para las componentes del tensor ε_0 , en específico la fórmula (5.266) para ε_{yy} que al ser igual a 0 permite resolver para σ_2 dando valores para σ_1 .

$$\varepsilon_{xx} = -\alpha \tanh(\beta I_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \sigma_1, \quad (5.265)$$

$$0 = -\alpha \tanh(\beta I_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \sigma_2, \quad (5.266)$$

$$0 = -\alpha \tanh(\beta I_1) + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}} \sigma_3. \quad (5.267)$$

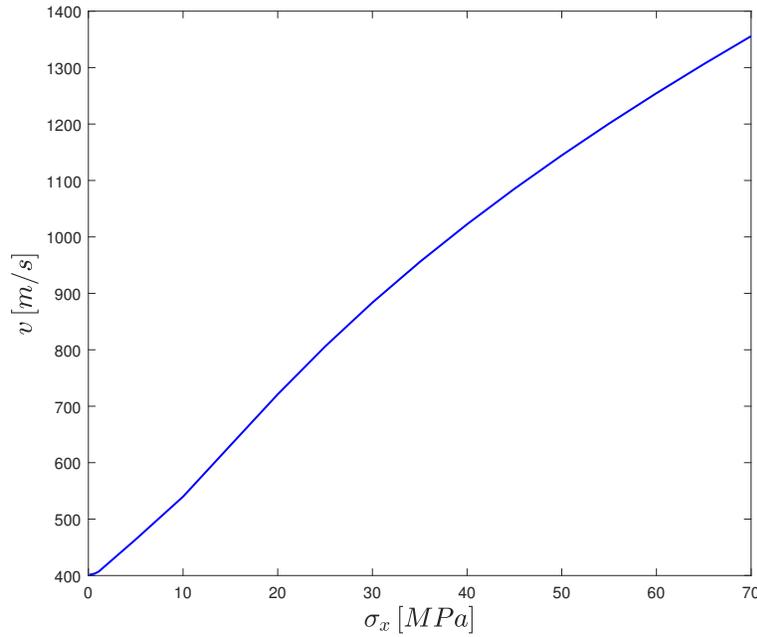


Figura 5.22: Gráfico velocidad versus esfuerzo de compresión axial para la placa infinita considerando el modelo con comportamiento límite de deformación.

5.5.2. Modelo no lineal de roca

Se realiza un procedimiento análogo a la subsección anterior. Para el modelo no lineal de roca se tienen las ecuaciones siguientes para las componentes de la diagonal del tensor deformación ε_0 en términos de los esfuerzos principales (que en este caso coinciden con los esfuerzos de la diagonal del tensor \mathbf{T}_0):

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} = \mathbf{f}'_1(\sigma_1) + \mathbf{f}'_2(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \mathbf{f}_2(\sigma_2) + \mathbf{f}_2(\sigma_3) + \frac{1}{3}\mathbf{f}'_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right), \quad (5.268)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} = \mathbf{f}'_1(\sigma_2) + \mathbf{f}'_2(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + \mathbf{f}_2(\sigma_1) + \mathbf{f}_2(\sigma_3) + \frac{1}{3}\mathbf{f}'_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right), \quad (5.269)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} = \mathbf{f}'_1(\sigma_3) + \mathbf{f}'_2(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \mathbf{f}_2(\sigma_1) + \mathbf{f}_2(\sigma_2) + \frac{1}{3}\mathbf{f}'_3\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right). \quad (5.270)$$

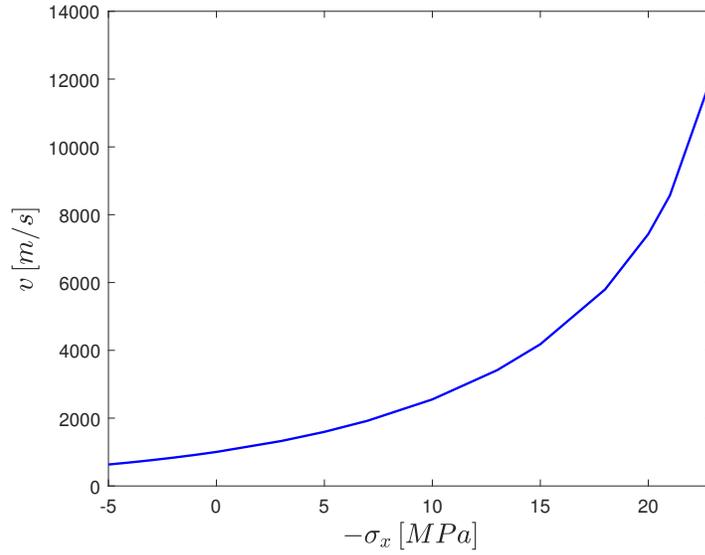


Figura 5.23: Gráfico velocidad versus esfuerzo axial para la placa infinita considerando el modelo no lineal de roca.

Capítulo 6

Análisis de resultados

Se observa para el caso esférico con excitación sinusoidal y considerando el modelo con comportamiento límite de deformación (figura 5.2) que para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ no se alcanzan a producir ondulaciones y la onda, dada su velocidad, llega al radio exterior muy rápidamente. La amplitud de la onda es mayor para la presión interna de $-1 \times 10^6 [Pa]$ que para la presión de $-9 \times 10^6 [Pa]$ en el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo radial ΔT_{rr} , mientras que para el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ es considerablemente mayor la amplitud de la onda para la presión $-9 \times 10^6 [Pa]$. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se tiene que tanto el desplazamiento radial Δu_r como el esfuerzo radial ΔT_{rr} exhibe una típica forma de onda estándar donde la amplitud para ambos es menor en el caso del esfuerzo mayor y de mayor velocidad. Se tiene, también para esta geometría, que el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ es considerablemente mayor para la presión mayor ($1 \times 10^7 [Pa]$), y si bien no exhibe una ondulación tan marcada, éste toma valores elevados en las proximidades (en torno a $10 [m]$) del radio interior.

En la figura 5.3 se observa el caso esférico con un pulso rectangular considerando el material con comportamiento límite de deformación. Para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se tiene una forma típica de pulso propagándose que va disminuyendo su amplitud en la medida que avanza hacia el radio exterior tanto para el desplazamiento radial Δu_r como para el esfuerzo radial ΔT_{rr} , con una amplitud menor en el caso de la presión mayor ($-9 \times 10^6 [Pa]$) y de mayor velocidad. Así como para la excitación sinusoidal (en el caso de esta misma geometría) el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ es de mayor amplitud para la presión $-9 \times 10^6 [Pa]$. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se tiene también para el desplazamiento radial Δu_r y esfuerzo radial ΔT_{rr} un comportamiento típico de un pulso rectangular propagándose hacia el radio exterior y con amplitudes menores para el

caso de la presión mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$) y de mayor velocidad. También, en este caso, se tiene una forma de pulso propagándose hacia el radio exterior, bien marcada, en el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ siendo similar el comportamiento con Δu_r y de considerable magnitud al compararlo con ΔT_{rr} .

En la figura 5.4 para el caso esférico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca se puede apreciar para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ un comportamiento similar para Δu_r y ΔT_{rr} en la forma del gráfico con el modelo con comportamiento límite de deformación (figura 5.2), diferenciándose de este último considerablemente en el comportamiento del esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$, siendo considerablemente mayor la amplitud de la onda para el caso con esfuerzo menor $-1 \times 10^6 [Pa]$. La onda, para esta geometría, se propaga más rápidamente para la presión mayor $-9 \times 10^6 [Pa]$. Por otro lado para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se tiene que se notan mucho menos marcadas las ondulaciones observándose un movimiento más rígido que en el caso con comportamiento límite de deformación. Para esta geometría no se observa una diferencia tan considerable para las dos cargas estáticas distintas. Junto con lo anterior se aprecia una propagación de amplitud considerable en el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$.

En la figura 5.5 se tiene el caso esférico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se observa el pulso propagándose tanto para el desplazamiento radial Δu_r como para los esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$ con la típica forma de un pulso rectangular moviéndose hacia el radio exterior. Se aprecia para las tres magnitudes una menor amplitud y mayor velocidad de propagación para el esfuerzo mayor ($-9 \times 10^6 [Pa]$). Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se observa, también, la propagación del pulso en Δu_r , ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$. No se aprecia una diferencia importante en la propagación de los pulsos para las dos presiones $-1 \times 10^6 [Pa]$ y $-1 \times 10^7 [Pa]$, Para los tres casos se presenta una amplitud ligeramente menor para la presión estática $-1 \times 10^7 [Pa]$.

A partir de las figuras 5.6 y 5.7, que corresponden al caso de estudio esférico para el modelo no lineal de hormigón para la excitación sinusoidal y el pulso rectangular, respectivamente, se tiene que no presenta diferencias relevantes para las dos presiones estáticas diferentes. Para el pulso sinusoidal (figura 5.6) en el caso de la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se observa una gran rigidez y una forma similar para los tres gráficos de desplazamiento radial Δu_r y esfuerzos ΔT_{rr} y $\Delta T_{\theta\theta}$. Para el caso del esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se aprecia una diferencia más considerable para las dos presiones diferentes, viéndose una amplitud mayor para el caso con esfuerzo mayor. En la figura 5.7

se aprecia para las dos geometrías la forma típica de pulso rectangular propagándose donde tiene relevancia también el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ siendo este último, además, para las dos geometrías el que mayor diferencia presenta para las dos presiones estáticas. Para el hormigón las ondas son mucho más rápidas que para los otros materiales, por ello los tiempos considerados son de un orden de magnitud inferiores y también un orden de magnitud más cortos los pulsos rectangulares.

El caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo con comportamiento límite de deformación se aprecia en la figura 5.9. Para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se tiene que no se alcanzan a producir ondulaciones, dada la velocidad de la onda, llegando muy rápidamente al radio exterior del tubo. Se aprecian amplitudes menores para el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo radial ΔT_{rr} y mayor velocidad para el caso con presión mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$), comparado con la presión de $-1 \times 10^6 [Pa]$. Para los esfuerzos $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} se aprecian elevadísimos valores en las proximidades del radio interior, además una mayor amplitud de la onda para el caso en que la presión estática es mayor. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se aprecian claramente ondulaciones típicas de una onda estándar para el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo radial ΔT_{rr} , viéndose para estos dos una propagación de menor amplitud para la presión estática mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$). Para esta geometría se tiene también que el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ toma valores muy altos en las proximidades del radio interior siendo la onda de mucha amplitud para la presión mayor y no presenta una marcada ondulación. Para el esfuerzo ΔT_{zz} se tiene que para la presión mayor presenta una amplitud mayor en las proximidades del radio interior, pero dicho comportamiento se invierte luego y es más rápida la onda para la presión mayor.

En la figura 5.10 se tiene el caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo con comportamiento límite de deformación. Se tiene para las dos geometrías que el desplazamiento radial Δu_r y el esfuerzo radial ΔT_{rr} tienen la típica forma de un pulso propagándose rectangular propagándose hacia el radio exterior. Además de ellos en ambos la amplitud es menor y de mayor velocidad la onda para la presión estática mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$). Por otro lado en ambas geometrías también se tiene una elevadísima amplitud en las proximidades del radio interior para el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ y el esfuerzo axial ΔT_{zz} , no percibiéndose una ondulación marcada luego de esa zona.

En la figura 5.11 se tiene el caso cilíndrico con excitación sinusoidal para el modelo no lineal de roca. Se tiene una similitud considerable con cada gráfico para el caso esférico con excitación sinusoidal en roca (figura 5.4). Se observa para la geometría $r_i = 0.1 [m]$,

$r_f = 0.2 [m]$ una diferencia en la amplitud de la onda y la rapidez para el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo radial ΔT_{rr} para las dos presiones diferentes. Además de ello, la mayor diferencia se percibe para el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ donde la amplitud de la onda es considerablemente menor para el caso con mayor presión ($-1 \times 10^7 [Pa]$). Para el esfuerzo axial ΔT_{zz} se tiene un comportamiento similar al radial ΔT_{rr} , pero con una amplitud mucho menor. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se tiene para los tres gráficos una forma relativamente similar, manifestando una más próxima a una onda estándar el esfuerzo radial ΔT_{rr} . Además de lo anterior, se puede apreciar la diferencia para las presiones siendo de propagación más rápida y menor amplitud para el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo $\Delta T_{\theta\theta}$ mientras el esfuerzo radial ΔT_{rr} con la presión mayor, se tiene mayor velocidad, pero amplitud mayor. Para el esfuerzo ΔT_{zz} se tiene que presenta marcadas ondulaciones de más baja amplitud que los otros esfuerzos y más rápida y de mayor amplitud para la presión mayor.

En la figura 5.12 se aprecia el caso cilíndrico con un pulso rectangular para el modelo no lineal de roca. Para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se aprecia un pulso típico propagándose para los tres gráficos Δu_r , ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} , donde la propagación es de menor amplitud y más rápida para la presión mayor de $-1 \times 10^7 [Pa]$. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se tienen amplitudes mayores producidas por la mayor rapidez para la presión mayor lo que genera que incluyan reflexión en el radio exterior. Se aprecian gráficos típicos de pulsos en las cuatro magnitudes graficadas, además de ello en este caso se aprecian diferencias considerables para los mismos tiempos entre las dos presiones aplicadas ($-1 \times 10^6 [Pa]$ y $-1 \times 10^7 [Pa]$).

Se tiene que para el caso esférico con el modelo no lineal de hormigón (para los dos pulsos), para el caso cilíndrico considerando el mismo material y dos pulsos de tipo sinusoidal y pulso rectangular (figuras 5.13 y 5.14) no se aprecia mayor diferencia entre los gráficos para las distintas presiones estáticas, a diferencia de las geometrías $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ en el caso del esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ y el esfuerzo axial ΔT_{zz} para ambos tipos de pulsos. Por otro lado, para los esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} en el caso de la excitación sinusoidal se empiezan a mostrar problemas de convergencia, junto con ello se propaga muy rápido el pulso comparado con los casos anteriores estudiados. Para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ en el caso de excitación sinusoidal se aprecia la extrema rigidez, no percibiéndose ondulaciones cuando la onda lleva aproximadamente $50 [m]$ de avance radial. Para los pulsos de tipos rectangular no se nota mayor diferencia entre las presiones y tampoco problemas de convergencia. Se aprecia la típica forma de pulso estándar propagándose hacia el radio exterior para todas las

variables.

El caso cilíndrico con corte telescópico para excitaciones sinusoidales con comportamiento límite de deformación se presenta en la figura 5.16. Se aprecia para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ que la onda viaja muy rápido para los dos desplazamientos y los 4 esfuerzos considerados. Solo se aprecia una diferencia notable para las dos presiones estáticas ($-6 \times 10^6 [Pa]$ y $-1 \times 10^7 [Pa]$) para el desplazamiento Δu_z . Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se aprecian muy marcadamente típicas ondas tanto para los desplazamientos Δu_r y Δu_z , como para los esfuerzos ΔT_{rr} y ΔT_{rz} , también ΔT_{zz} presenta una marcada oscilación de amplitud más pequeña que las anteriores dos. Se tiene para los esfuerzos circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ y axial ΔT_{zz} que presentan magnitudes muy elevadas en las proximidades del radio interior del tubo cilíndrico. Además de ello para los desplazamientos Δu_r y Δu_z , junto con los esfuerzos ΔT_{rr} y ΔT_{rz} se tienen velocidades mayores y amplitudes menores cuando se tiene la presión estática mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$). Para el caso del esfuerzo telescópico ΔT_{rz} se presenta una pequeña discontinuidad en las proximidades de $r = 0.12 [m]$ producida, eventualmente, por un problema numérico.

En la figura 5.17 se tiene el caso cilíndrico con corte telescópico para excitaciones sinusoidales en el modelo no lineal de roca. Se observan claramente las ondulaciones para todas las magnitudes: desplazamientos Δu_r y Δu_z , así como para los esfuerzos ΔT_{rr} , en menor medida para $\Delta T_{\theta\theta}$, ΔT_{zz} y ΔT_{rz} . Se aprecia una longitud de onda mucho mayor para el desplazamiento Δu_r que para el desplazamiento Δu_z . Se aprecia también una onda un orden de magnitud menor en amplitud, pero muy marcada en ΔT_{zz} . Para el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ se tiene que presenta un elevado valor en las proximidades del radio interior del tubo cilíndrico, para luego decaer y ondular con una amplitud más baja. Para las 5 magnitudes graficadas se aprecia que para la presión mayor ($-1 \times 10^7 [Pa]$) las ondas tienen menor amplitud y mayor velocidad.

En la figura 5.19 se presentan los resultados para el caso cilíndrico con corte circunferencial sujeto a excitaciones sinusoidales considerando el modelo con comportamiento límite de deformación. Para la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se tiene que la onda viaja más rápidamente para la presión mayor ($-6e6 [Pa]$). También se aprecia para esta geometría que para los desplazamientos radial Δu_r y circunferencial Δu_θ la amplitud es menor para la presión estática mayor en las proximidades del radio interior, mientras que para las ondas de esfuerzos ΔT_{rr} , $\Delta T_{\theta\theta}$, ΔT_{zz} y $\Delta T_{r\theta}$ la amplitud es mayor para la presión mayor. Por otro lado, para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ se aprecian ondas de forma estándar para los

desplazamientos Δu_r y Δu_θ así como para los esfuerzos radial ΔT_{rr} y de corte circunferencial $\Delta T_{r\theta}$, mientras que para $\Delta T_{\theta\theta}$ y ΔT_{zz} se aprecian ondulaciones y un elevado valor para estos esfuerzos en la proximidad del radio interior del tubo cilíndrico.

En la figura 5.20 se presentan los resultados para el caso cilíndrico con corte circunferencial considerando excitaciones sinusoidales. Se aprecian amplitudes mayores para los casos de presión estática mayor para los gráficos de Δu_r , Δu_θ , ΔT_{rr} , ΔT_{zz} y $\Delta T_{r\theta}$ y en parte de $\Delta T_{\theta\theta}$ para las ondas. Además de ellos la longitud de las ondas disminuyó con la presión mayor y presenta un movimiento más marcadamente ondulatorio. Se aprecia una onda en $\Delta T_{\theta\theta}$ de magnitud elevada, pero no tan grande como en casos anteriores. Además de los fenómenos marcadamente ondulatorios para ΔT_{rr} y $\Delta T_{r\theta}$ se aprecia para ΔT_{zz} una onda muy marcada, pero de aproximadamente un orden de magnitud inferior su amplitud comparada con $\Delta T_{r\theta}$.

El gráfico de velocidad versus esfuerzo axial de compresión para la placa infinita considerando el material con comportamiento límite de deformación (figura 5.22) presenta un comportamiento creciente en la medida que la compresión en las caras de la placa aumenta, pero crece de manera más lenta cada vez, eventualmente pudiendo llegar a cierto límite. Por otro lado, la misma placa en compresión, pero considerando el modelo no lineal de roca (figura 5.23) muestra que la velocidad aumenta de manera cada más pronunciada en la medida que aumenta el esfuerzo axial σ_x .

Capítulo 7

Conclusiones

En la presente memoria se han utilizado nuevas ecuaciones constitutivas para el estudio de ondas pequeñas propagándose en medios con un esfuerzo inicial grande presente. Al ser no lineales los modelos estudiados se han obtenido interesantes efectos para las distintas geometrías, cargas estáticas y excitaciones exteriores en estudio.

Para las cinco geometrías se ha observado, en general, que para presiones estáticas mayores se ven alteradas tanto las formas de los gráficos de desplazamiento como los esfuerzos. Lo anterior deriva del hecho que a diferencia del modelo lineal de Hooke (donde la velocidad de propagación de ondas es constante), en los modelos no lineales utilizados en la memoria ocurre que la velocidad es función, no simple, de los valores de \mathcal{C} y por tanto de los esfuerzos estáticos. La velocidad, en general, es función de la posición (a excepción de la placa infinita).

Para los casos esférico y cilíndrico, considerando la excitación sinusoidal y el pulso rectangular, se aprecia para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ en los materiales más rígidos, es decir, roca y especialmente hormigón (siendo más rígidos a mayor módulo de Young E) una amplitud cada vez menor y mayor velocidad de propagación para el desplazamiento Δu_r y el esfuerzo ΔT_{rr} , considerando la misma densidad para los tres modelos. Así también, para presiones aplicadas más altas se obtuvieron valores de esfuerzos estáticos más altos y velocidades de propagación más elevadas. El efecto que resulta interesante para los tres materiales, en especial para el material con comportamiento límite de deformación (pues la presión más alta mostró una amplitud considerablemente mayor), es la importancia de la onda en el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ que a diferencia de los otros casos exhibe valores muy elevados; hecho que eventualmente podría estar siendo ocasionado por la excitación de algún modo de vibración, como por la no linealidad misma del modelo, entre otros motivos. Para el modelo

no lineal de roca y de hormigón se aprecia que toma valores más bajos que para el otro material, pero para el hormigón toma valores más elevados pese a su mayor rigidez, lo que podría deberse a su mayor módulo de Poisson. Para las mismas variables en el caso de la geometría $r_i = 0.1 [m]$, $r_f = 0.2 [m]$ se tienen efectos similares para el corte circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ y diferencias para la propagación según la presión aplicada así como por la rigidez del material. Dada la velocidad elevada de las ondas no se logran apreciar ondulaciones como se menciona en la sección de análisis de resultados producto de la poca distancia (de $0.1 [m]$) por recorrer entre el radio interior y el exterior.

Para el caso cilíndrico con corte telescópico e inflación se tiene tanto para el modelo con comportamiento límite de deformación como para el modelo no lineal de roca formas de ondas típicas para la geometría $r_i = 10 [m]$, $r_f = 100 [m]$ en el caso de los desplazamientos radial y axial así como para los esfuerzos radiales, axial y de corte telescópico. Se aprecia para la roca una mayor rapidez, producida por la mayor rigidez de ésta y se aprecian mayores velocidades para mayores presiones, como de era de esperar. Cabe destacar que para ambos modelos el esfuerzo circunferencial $\Delta T_{\theta\theta}$ alcanza importantes valores. Para el esfuerzo circunferencial se da un caso análogo que para el corte telescópico en el caso de modelo con comportamiento límite de deformación, pero para el modelo no lineal de roca se obtiene un resultado completamente atípico respecto a los otros donde la amplitud en el caso de la presión mayor es mayor para todas las ondas (tanto en el caso de los desplazamientos como de los esfuerzos) lo que podría ser explicado por la no linealidad del modelo, la compleja forma de la velocidad en función de los esfuerzos estáticos, entre otros motivos.

Para el caso de la placa infinita la relación es muy simple y directa, a mayor esfuerzo de compresión en las caras de placas la velocidad de propagación de la onda es mayor. Especial es el caso de la roca donde la velocidad crece de una manera muy rápida en la medida que crece la compresión en las caras.

Bibliografía

- [1] Rajagopal, K.R. (2003) On implicit constitutive theories. *Appl. Math.* 48, 279–319.
- [2] Rajagopal, K.R. (2007) The elasticity of elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* 58, 309–317.
- [3] Rajagopal, K.R. (2014) On the nonlinear elastic response of bodies on the small strain range. *Acta Mech.* 225, 1545–1553.
- [4] Bustamante, R. (2009) Some topics on a new class of elastic bodies. *Proc. R. Soc. A* 465, 1377–1392.
- [5] Rajagopal, K.R., Srinivasa, A.R. (2015) On the use of compatibility conditions for the strains in linear and non-linear theories of mechanics. *Math. Mech. Solids* 20, 614–618.
- [6] Arrue, P., Bustamante, R., Sfyris, D. (2016) A note on incremental equations for a new class of constitutive relations for elastic bodies. *Wave Motion* 65, 44–54.
- [7] Bustamante, R., Rajagopal, K.R. (2010) A note on plane strain and plane stress problems for a new class of elastic bodies. *Math. Mech. Solids* 15, 229–238.
- [8] Montero, S., Bustamante, R., Ortiz-Bernardin, A. (2016) A finite element analysis of some boundary value problems for a new type of constitutive relation for elastic bodies. *ActaMech.* 227, 601–615.
- [9] Bustamante, R., Rajagopal, K.R. (2018) A nonlinear model describing the mechanical behaviour of rock. *Acta Mech.* 229, 251–272.
- [10] Grasley, Z., El-Helou, R., D’Amborsia, M., Mokarem, D., Moen, C., Rajagopal, K.R. (2015) Model of infinitesimal nonlinear elastic response of concrete subjected to uniaxial compression. *J. Engng. Mech.* 141, 04015008.
- [11] Bustamante, R., Rajagopal, K.R. (2015) Solutions of some boundary value problems for a new class of elastic bodies undergoing small strains. Comparison with the predictions of the classical theory of linearized elasticity: Part II. A problem with spherical symmetry. *Acta Mech.* 226, 1807–1813.

- [12] Bustamante, R., Rajagopal, K.R. (2015) Solutions of some boundary value problems for a new class of elastic bodies undergoing small strains. Comparison with the predictions of the classical theory of linearized elasticity: Part I. Problems with cylindrical symmetry. *Acta Mech.* 226, 1815–1838.
- [13] Bustamante, R., Sfyris, D. (2014) Direct determination of stresses from the stress equations of motion and wave propagation for a new class of elastic bodies. *Math. Mech. Solids* 20, 80–91.

Anexo A

Coeficientes \mathcal{C}_{ijkl}

A.1. Coeficientes caso esférico con inflación

A.A.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación

$$\mathcal{C}_{1111} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{\theta\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{\phi\phi}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{\phi\phi}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\phi\phi}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

A.A.1.1. Modelo no lineal de roca y de hormigón

$$\mathcal{C}_{1111} = \mathfrak{f}_1''(\sigma_1) + \mathfrak{f}_2''(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \mathfrak{f}_1''(\sigma_2) + \mathfrak{f}_2''(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \mathfrak{f}_1''(\sigma_3) + \mathfrak{f}_2''(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \mathfrak{f}_2'(\sigma_1) + \mathfrak{f}_2'(\sigma_2) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \mathfrak{f}_2'(\sigma_1) + \mathfrak{f}_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \mathfrak{f}_2'(\sigma_2) + \mathfrak{f}_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}\mathfrak{f}_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1212} = \frac{\mathfrak{f}_2(\sigma_2) - \mathfrak{f}_2(\sigma_1) + \mathfrak{f}_1'(\sigma_1) - \mathfrak{f}_1'(\sigma_2) + (\sigma_2 + \sigma_3)\mathfrak{f}_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_3)\mathfrak{f}_2'(\sigma_2)}{2(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\mathcal{C}_{1313} = \frac{\mathfrak{f}_2(\sigma_3) - \mathfrak{f}_2(\sigma_1) + \mathfrak{f}_1'(\sigma_1) - \mathfrak{f}_1'(\sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)\mathfrak{f}_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_2)\mathfrak{f}_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{2323} = \frac{f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_2) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{1112} = 0, \quad \mathcal{C}_{1113} = 0, \quad \mathcal{C}_{1123} = 0, \quad \mathcal{C}_{2212} = 0, \quad \mathcal{C}_{2213} = 0, \quad \mathcal{C}_{2223} = 0$$

$$\mathcal{C}_{3312} = 0, \quad \mathcal{C}_{3313} = 0, \quad \mathcal{C}_{3323} = 0, \quad \mathcal{C}_{1213} = 0, \quad \mathcal{C}_{1223} = 0, \quad \mathcal{C}_{1323} = 0$$

A.A.2. Coeficientes caso cilíndrico con inflación

A.A.2.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación

$$\mathcal{C}_{1111} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{\theta\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{zz}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

A.A.2.2. Modelo no lineal de roca y de hormigón

$$\mathcal{C}_{1111} = f_1''(\sigma_1) + f_2''(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2222} = f_1''(\sigma_2) + f_2''(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{3333} = f_1''(\sigma_3) + f_2''(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1122} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1133} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2233} = f_2'(\sigma_2) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1212} = \frac{f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_2) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2)}{2(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\mathcal{C}_{1313} = \frac{f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{2323} = \frac{f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_2) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{1112} = 0, \quad \mathcal{C}_{1113} = 0, \quad \mathcal{C}_{1123} = 0, \quad \mathcal{C}_{2212} = 0, \quad \mathcal{C}_{2213} = 0, \quad \mathcal{C}_{2223} = 0$$

$$\mathcal{C}_{3312} = 0 \quad \mathcal{C}_{3313} = 0, \quad \mathcal{C}_{3323} = 0, \quad \mathcal{C}_{1213} = 0 \quad \mathcal{C}_{1223} = 0, \quad \mathcal{C}_{1323} = 0$$

A.A.3. Coeficientes caso cilíndrico: corte telescópico e inflación

A.A.3.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación

$$\mathcal{C}_{1111} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{\theta\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1113} = -\frac{\gamma \iota T_{rr} T_{rz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1322} = -\frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{rz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1313} = -\frac{\gamma \iota T_{rz}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1333} = -\frac{\gamma \iota T_{rz} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{zz}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

A.A.3.2. Modelo no lineal de roca y de hormigón

Se emplea la siguiente notación para las componentes de los vectores propios: $\mathbf{a}^{(1)} = \Delta_1 \hat{e}_r + \Delta_2 \hat{e}_z$ y $\mathbf{a}^{(3)} = \Xi_1 \hat{e}_r + \Xi_2 \hat{e}_z$.

$$\mathcal{C}_{1111} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_1^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_1^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} 2\Delta_1^2 \Xi_1^2 + \frac{2\Delta_1^2 \Xi_1^2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_2^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_2^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} 2\Delta_2^2 \Xi_2^2 + \frac{2\Delta_2^2 \Xi_2^2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} \Delta_1^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Xi_1^2$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_1^2 \Xi_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} (\Delta_1^2 \Xi_2^2 + \Delta_2^2 \Xi_1^2) + \frac{2\Delta_1 \Delta_2 \Xi_1 \Xi_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} \Delta_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Xi_2^2$$

$$\mathcal{C}_{1313} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_1^2 \Delta_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_1^2 \Xi_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} 2\Delta_1 \Delta_2 \Xi_1 \Xi_2 + \frac{\Delta_1^2 \Xi_2^2 + 2\Delta_1 \Delta_2 \Xi_1 \Xi_2 + \Delta_2^2 \Xi_1^2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

$$\mathcal{C}_{1113} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_1^3 \Delta_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_1^3 \Xi_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} (\Delta_1^2 \Xi_1 \Xi_2 + \Delta_1 \Delta_2 \Xi_1^2) + \frac{\Delta_1^2 \Xi_1 \Xi_2 + \Xi_1^2 \Delta_1 \Delta_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2213} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} \Delta_1 \Delta_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Xi_1 \Xi_2$$

$$\mathcal{C}_{3313} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \Delta_1 \Delta_2^3 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2} \Xi_1 \Xi_2^3 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} (\Delta_1 \Delta_2 \Xi_2^2 + \Delta_2^2 \Xi_1 \Xi_2) + \frac{\Delta_2^2 \Xi_1 \Xi_2 + \Xi_2^2 \Delta_1 \Delta_2}{\sigma_1 - \sigma_3} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \right)$$

A.A.4. Coeficientes caso cilíndrico: corte circunferencial e inflación

A.A.4.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación

$$\mathcal{C}_{1111} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{\theta\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{rr} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1112} = -\frac{\gamma \iota T_{rr} T_{r\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1222} = -\frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{r\theta}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{\theta\theta} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1212} = -\frac{\gamma \iota T_{r\theta}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1233} = -\frac{\gamma \iota T_{r\theta} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{zz}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

A.A.4.2. Modelo no lineal de roca y hormigón

Se emplea la siguiente notación para las componentes de los vectores propios: $\mathbf{a}^{(1)} = \aleph_1 \hat{e}_r + \aleph_2 \hat{e}_\theta$ y $\mathbf{a}^{(2)} = \Gamma_1 \hat{e}_r + \Gamma_2 \hat{e}_\theta$.

$$\mathcal{C}_{1111} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_1^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_1^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} 2\aleph_1^2 \Gamma_1^2 + \frac{2\aleph_1^2 \Gamma_1^2}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_2^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_2^4 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} 2\aleph_2^2 \Gamma_2^2 + \frac{2\aleph_2^2 \Gamma_2^2}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_3^2}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_1^2 \aleph_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} (\aleph_1^2 \Gamma_2^2 + \aleph_2^2 \Gamma_1^2) + \frac{2\aleph_1 \aleph_2 \Gamma_1 \Gamma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} \aleph_1^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Gamma_1^2$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} \aleph_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Gamma_2^2$$

$$\mathcal{C}_{1212} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_1^2 \aleph_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} 2 \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \frac{\aleph_1^2 \Gamma_2^2 + 2 \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \aleph_2^2 \Gamma_1^2}{2(\sigma_1 - \sigma_2)} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{1313} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\aleph_1^2}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\Gamma_1^2}{2(\sigma_2 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \left(\frac{\aleph_1^2}{2(\sigma_3 - \sigma_1)} + \frac{\Gamma_1^2}{2(\sigma_3 - \sigma_2)} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2323} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\aleph_2^2}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\Gamma_2^2}{2(\sigma_2 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \left(\frac{\aleph_2^2}{2(\sigma_3 - \sigma_1)} + \frac{\Gamma_2^2}{2(\sigma_3 - \sigma_2)} \right)$$

$$\mathcal{C}_{1112} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_1^3 \aleph_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_1^3 \Gamma_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} (\aleph_1^2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_1^2) + \frac{\aleph_1^2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_1^2}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{2212} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1^2} \aleph_1 \aleph_2^3 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2^2} \Gamma_1 \Gamma_2^3 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} (\aleph_2^2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_2^2) + \frac{\aleph_2^2 \Gamma_1 \Gamma_2 + \aleph_1 \aleph_2 \Gamma_2^2}{\sigma_1 - \sigma_2} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \right)$$

$$\mathcal{C}_{3312} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} \aleph_1 \aleph_2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_3} \Gamma_1 \Gamma_2$$

$$\mathcal{C}_{1323} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_1} \frac{\aleph_1 \aleph_2}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2(\sigma_2 - \sigma_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_3} \left(\frac{\aleph_1 \aleph_2}{2(\sigma_3 - \sigma_1)} + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2(\sigma_3 - \sigma_2)} \right)$$

A.A.5. Coeficientes caso placa semi-infinita

A.A.5.1. Modelo con Comportamiento límite de deformación

$$\mathcal{C}_{1111} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{xx}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{1122} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{xx} T_{yy}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{1133} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{xx} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{2222} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{yy}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

$$\mathcal{C}_{2233} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{yy} T_{zz}}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{C}_{3333} = \alpha\beta [\tanh^2(\beta I_1) - 1] - \frac{\gamma \iota T_{zz}^2}{(1 + 2\iota I_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 + 2\iota I_2}}$$

A.A.5.2. Modelo no lineal de roca y de hormigón

$$\mathcal{C}_{1111} = f_1''(\sigma_1) + f_2''(\sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{9} f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2222} = f_1''(\sigma_2) + f_2''(\sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{9} f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{3333} = f_1''(\sigma_3) + f_2''(\sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{9} f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1122} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_2) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1133} = f_2'(\sigma_1) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{2233} = f_2'(\sigma_2) + f_2'(\sigma_3) + \frac{1}{9}f_3''\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$\mathcal{C}_{1212} = \frac{f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_2) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2)}{2(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\mathcal{C}_{1313} = \frac{f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_1) + f_1'(\sigma_1) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3)f_2'(\sigma_1) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{2323} = \frac{f_2(\sigma_3) - f_2(\sigma_2) + f_1'(\sigma_2) - f_1'(\sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)f_2'(\sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)f_2'(\sigma_3)}{2(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\mathcal{C}_{1112} = 0, \mathcal{C}_{1113} = 0, \mathcal{C}_{1123} = 0, \mathcal{C}_{2212} = 0, \mathcal{C}_{2213} = 0, \mathcal{C}_{2223} = 0$$

$$\mathcal{C}_{3312} = 0, \mathcal{C}_{3313} = 0, \mathcal{C}_{3323} = 0, \mathcal{C}_{1213} = 0, \mathcal{C}_{1223} = 0, \mathcal{C}_{1323} = 0$$