



**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA DE POSTGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA**

**TÉCNICAS DE MEDICION Y CONTROL PARA EL ESTUDIO DE FLUJOS
TÉRMICOS**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN
FLUIDODINÁMICA**

MANUEL ANDRÉS VIAL SALAMOVICH

**PROFESOR GUÍA:
RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAÚL LABBÉ MORALES
MATHIEU GIBERT
JUAN CARLOS ELICER CORTÉS
ÁLVARO VALENCIA MUSALEM**

**SANTIAGO DE CHILE
2021**

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN FLUIDODINÁMICA
POR: MANUEL ANDRÉS VIAL SALAMOVICH
FECHA: ENERO 2021
PROF. GUÍA: RODRIGO HERNÁNDEZ PELLICER

TÉCNICAS DE MEDICION Y CONTROL PARA EL ESTUDIO DE FLUJOS TÉRMICOS

Este trabajo trata sobre el desarrollo de técnicas experimentales para el estudio de flujos térmicos. El primer sistema en estudio es convección de Rayleigh-Bénard en una solución agua-glicerina con un elevado número de Prandtl. La inestabilidad se desarrolla al interior de una celda de convección, con razones de aspecto moderadas, sujeta a dos controladores de temperatura en lazo cerrado. Estos controladores son del tipo Proporcional Integral Derivativo (PID) y en cascada, los cuales proporcionan una estabilidad en temperatura del orden de 10^{-3} K. El dispositivo experimental desarrollado permitió determinar el umbral de la inestabilidad y caracterizar la transferencia de calor, en términos del número de Nusselt, para valores del número de Rayleigh $Ra < 10^4$. Se observó que el patrón de convección, compuesto por seis rollos transversales, permanece constante bajo las condiciones de estabilidad que proporciona el sistema de control. Luego, se aborda el problema de convección de Rayleigh-Bénard inclinada con respecto al vector de gravedad. En este caso se caracterizó la transferencia de calor para un barrido del ángulo de inclinación entre los regímenes de conducción y convección. En este rango fue posible identificar patrones de convección compuestos por rollos transversales, rollos longitudinales y un régimen dependiente del tiempo.

La segunda parte del presente trabajo trata sobre la implementación de la técnica óptica Synthetic Schlieren para la reconstrucción del campo de temperatura de plumas térmicas. En esta técnica se mide la deformación de un patrón de referencia que se observa a través del medio fluido. Esta medición permite obtener el gradiente de la variable asociada a las variaciones del índice de refracción del medio. La técnica se implementó mediante el desarrollo de diversas rutinas de procesamiento de imágenes, entre las que cabe destacar un algoritmo de correlación iterativo con deformación de imágenes. El fenómeno de plumas térmicas se generó experimentalmente al interior de una cavidad mediante un elemento calefactor, que se mantiene a temperatura constante por la acción de un controlador Proporcional Integral (PI). La técnica óptica y el sistema de control permitieron obtener la evolución temporal del campo de temperatura y de potencia durante la formación y ascensión del fenómeno térmico.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a quienes me ayudaron y contribuyeron de una u otra forma a la realización del presente trabajo de Tesis:

A mi madre por su gran apoyo.

A los miembros de la comisión Raúl Labbé, Mathieu Gibert, Juan Carlos Elicer, Álvaro Valencia y mi profesor guía Rodrigo Hernández por su tiempo y dedicación.

A Ricardo y Andrés del taller de Física.

A Miguel Patiño de Ingeniería Eléctrica.

A Victor Moral, Simón Casassus, Marian Salamovich, Renato Orellana, Rigomer Mora, Natalia Bustamante y Gabriel Arévalo.

Se agradece el apoyo financiero del Proyecto Fondecyt 1085020 y de la beca Mecesup UCH0310.

Tabla de Contenido

I	Introducción y objetivos	1
<hr/>		
1	Introducción	3
2	Objetivos	5
2.1	Objetivos generales	5
2.2	Objetivos específicos	5
<hr/>		
II	Transferencia de calor en convección de Rayleigh-Bénard	7
<hr/>		
3	Convección de Rayleigh-Bénard	9
3.1	Descripción del fenómeno	9
3.1.1	Mecanismo de inestabilidad	10
3.1.2	Ecuaciones del sistema	11
3.1.3	Diferentes regímenes de convección	12
3.2	Convección confinada	14
3.3	Transferencia de calor	16
3.3.1	Comportamiento para $Ra \sim Ra_c$	17
3.3.2	Comportamiento para $Ra \gg Ra_c$	18
3.4	Convección en condiciones no-Boussinesq	19
3.5	Convección en celdas inclinadas	21
4	Dispositivo experimental de convección de Rayleigh-Bénard	25
4.1	Dispositivo experimental	26
4.1.1	Celda de convección	26
4.1.2	Fluido de trabajo	30
4.2	Métodos de medición	33
4.2.1	Medición del flujo de calor	33
4.2.2	Medición de temperatura	38
4.3	Sistema de control de la celda de convección	44
4.3.1	Control orientado a potencias elevadas	44

4.3.2	Control orientado a potencias pequeñas	50
5	Resultados	57
5.1	Respuesta temporal del sistema de control	58
5.1.1	Respuesta a escalones de temperatura	58
5.1.2	Respuesta a rampas de temperatura	61
5.2	Transferencia de calor en régimen de conducción	63
5.2.1	Respuesta transiente ante un escalón de temperatura	63
5.2.2	Potencia en régimen de conducción estacionario	71
5.3	Transferencia de calor en régimen de convección	75
5.3.1	Convección horizontal	75
5.3.2	Convección inclinada	83
5.4	Visualización de flujo	90
6	Publicación: Feedback control and heat transfer measurements in a Rayleigh-Bénard convection cell	95
7	Conclusiones	107
<hr/>		
III	Reconstrucción del campo de temperatura de plumas térmicas	109
<hr/>		
8	Métodos ópticos basados en patrones de referencia	111
8.1	Métodos ópticos basados en la deflexión de la luz	111
8.1.1	Descripción de la propagación de la luz en arreglos ópticos	112
8.1.2	Métodos ópticos clásicos	116
8.2	Técnicas Synthetic Schlieren y Background Oriented Schlieren . . .	120
8.2.1	Arreglos ópticos de las técnicas BOS y Synthetic Schlieren	120
8.2.2	Metodología de procesamiento de imágenes	124
8.3	Descripción del fenómeno de plumas térmicas	128
8.3.1	Ecuaciones del sistema	128
8.3.2	Características del campo de temperatura	129
9	Implementación de Synthetic Schlieren orientado a plumas térmicas . .	133
9.1	Synthetic Schlieren aplicado a plumas térmicas	134
9.1.1	Adquisición y procesamiento de imágenes	134
9.1.2	Requerimientos para la implementación de algoritmos	136
9.2	Descripción de los algoritmos de correlación	138
9.2.1	Algoritmos de correlación directos	138

9.2.2	Algoritmos de correlación iterativos	142
9.3	Implementación de un algoritmo de correlación	144
9.3.1	Descripción del algoritmo	144
9.3.2	Ensayos del algoritmo	146
9.4	Estudio experimental de una pluma térmica en una cavidad	154
9.4.1	Dispositivo experimental para la generación de plumas térmicas	154
9.4.2	Sistema de control del elemento calefactor	156
9.4.3	Implementación de Synthetic Schlieren	162
9.4.4	Medición de potencia y del campo de temperatura	166
9.5	Conclusiones	171
<hr/>		
IV	Conclusiones y perspectivas	173
<hr/>		
10	Conclusiones generales	175
<hr/>		
V	Apéndices	177
<hr/>		
A	Planos de la celda de convección	179
B	Propiedades de los fluidos de trabajo	181
B.1	Propiedades del agua y glicerina	181
B.2	Propiedades de una solución agua-glicerina	182
C	Soluciones a la ecuación de calor unidimensional transiente	185
C.1	Respuesta ante un escalón ideal de temperatura	185
C.2	Respuesta ante una función temporal	189
C.3	Extensión a un modelo transiente de la celda de convección	193
D	Detalles de interpretación de un arreglo óptico de Synthetic Schlieren	195
D.1	Trayectoria de rayos entre el patrón y el lente	195
D.2	Incidencia de rayos en el sensor	197
E	Desarrollo de una pluma térmica en una cavidad (simulación numérica)	199
E.1	Métodos numéricos	199
E.2	Resultados del análisis numérico	203
E.2.1	Transferencia de calor	203
E.2.2	Formación de la pluma térmica	204
E.2.3	Evolución del campo de temperatura	205

F	Detalles de implementación de un algoritmo de correlación	209
F.1	Desarrollo del código computacional	209
F.1.1	Estructura general del código	209
F.1.2	Descripción del código principal	211
F.2	Estabilidad y resolución espacial del algoritmo	212
F.3	Generación de secuencias de imágenes artificiales	214
G	Circuitos eléctricos de drenaje de corriente y medición de temperatura .	217
G.1	Circuito de drenaje de corriente	217
G.2	Circuito de medición de temperatura	219
	Bibliografía	221

Parte I

Introducción y objetivos

Capítulo 1

Introducción

La formación de estructuras organizadas o patrones abarca una gran cantidad de fenómenos, siendo ampliamente observada en la naturaleza. En general, al inyectar energía a un sistema dinámico, un estado inicial de equilibrio se torna inestable sobre un cierto umbral. Como resultado de esta inestabilidad surgen estructuras espacio-temporales bien definidas [1]. Lo anterior permite describir dos fenómenos de convección térmica que son objeto de estudio en el presente trabajo de Tesis: convección de Rayleigh-Bénard [2] y plumas térmicas [3, 4]. En el primero, el patrón se compone de estructuras con un nivel más bajo de organización, llamadas células de Bénard. Ésto en reconocimiento de Henri Bénard, quien realizó los primeros trabajos experimentales sobre esta inestabilidad en 1900. La formulación teórica del problema considera una capa de fluido extendida infinita e indica que las células pueden tomar diversas formas: circular, cuadrada, hexagonal, triangular, etc. En condiciones experimentales el fluido se encuentra confinado, lo que reduce el número de patrones observados y afecta el umbral de la inestabilidad [5]. En cambio, las plumas térmicas se pueden considerar bajo la categoría de flujos abiertos donde éstas se desarrollan espacialmente. Dichos flujos se comportan como amplificadores de ruido u osciladores y responden a un forzamiento externo [6]. Esto ha sido observado experimentalmente en plumas térmicas [7] y en otra forma de flujos abiertos conocidas como estelas [8, 9].

Las técnicas de forzamiento externo también han sido aplicadas a convección de Rayleigh-Bénard variando la formulación tradicional del problema. Entre ellas se encuentran: forzamiento horizontal [10] y vertical [11, 12] de la capa de fluido; rampas de calentamiento [13]; modulación de la temperatura de las paredes [14]; del calor impuesto en el fluido [15] y convección inclinada con respecto a la gravedad. Esta última variante, estudiada inicialmente por Hart (1971) [16], ha vuelto a acaparar el interés de trabajos recientes [17, 18]. En este caso, una nueva componente de aceleración permite generar distintas rutas de transición entre estados y bifurcaciones [19]. En forma similar al comienzo de la inestabilidad, estas transiciones se reflejan en la capacidad transferencia de calor del fluido, caracterizada por el número de Nusselt.

En el presente trabajo se aborda en forma experimental el problema de convección de Rayleigh-Bénard inclinada a moderados números de Rayleigh ($Ra < 10^4$). Esto se realiza en términos de transferencia de calor, donde la potencia suministrada al fluido se determina con un sistema de control de temperatura Proporcional Integral Derivativo (PID) [20]. El fluido de trabajo consiste en una solución agua-glicerina (95 % en peso de glicerina) y se encuentra

contenido en una celda de convección de sección rectangular. Para este tipo de soluciones es común observar efectos Non-Oberbeck-Boussinesq (NOB) debido a la variación fuerte de su viscosidad con la temperatura [21]. La solución utilizada se caracteriza además por un elevado número de Prandtl, en forma similar a fluidos encontrados en fenómenos geofísicos [22].

Parte importante del trabajo se dedicó a la puesta en marcha del montaje experimental de convección de Rayleigh-Bénard. Las condiciones experimentales, rango de temperatura y propiedades del fluido, resultan en pequeñas potencias de trabajo ($p < 1$ W). Para obtener una señal-ruido (SNR) adecuada en este rango se evaluaron distintas alternativas de control. Finalmente se logró obtener una estabilidad en potencia y temperatura del orden de 1 mW y 0.1 mK, respectivamente. De esta manera se pudo observar en términos de la transferencia de calor el comienzo de la inestabilidad y la transición del flujo al variar el ángulo de inclinación de la celda.

En una segunda parte del presente trabajo se desarrolla un método óptico de medición para obtener la distribución espacio-temporal de temperatura en problemas de convección térmica. El método se basa en la observación de un patrón de referencia a través del medio fluido, que se distorsiona por las variaciones del índice de refracción debidas a cambios de densidad y temperatura. El concepto es similar al caso de óptica adaptativa [23–26], donde se compensan los efectos de la turbulencia atmosférica mediante espejos deformables para obtener una imagen nítida de un objeto estelar. En el presente caso, se cuantifican las distorsiones del objeto observado a través del medio fluido para recuperar el campo de índice de refracción y temperatura. Para cuantificar la deformación del patrón de referencia se utilizó un algoritmo de correlación cruzada, del tipo iterativo con deformación de imágenes, basado en [27]. Una vez implementado el método, este se utilizó para observar el desarrollo del campo de temperatura de una pluma térmica al interior de una cavidad. El fenómeno se generó utilizando nuevamente técnicas de control en lazo cerrado, en este caso mediante un controlador de temperatura Proporcional Integral (PI). El sistema de control se elaboró mediante circuitos eléctricos, que permitieron la medición temperatura del elemento calefactor y de la evolución temporal de potencia durante el desarrollo del fenómeno térmico.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivos generales

El presente trabajo de Tesis tiene como objetivo general estudiar el fenómeno de convección térmica en flujos confinados y en flujos abiertos, convección de Rayleigh-Bénard y plumas térmicas, respectivamente.

2.2. Objetivos específicos

El cumplimiento de los objetivos generales requiere de los siguientes objetivos específicos:

- Implementación y puesta en marcha de un montaje experimental para el estudio de la convección de Rayleigh-Bénard.
- Implementación de un sistema de control automático de temperatura en la celda de convección de Rayleigh-Bénard.
- Caracterización del transporte de calor en la celda de convección en función del ángulo formado entre el vector de gravedad y el gradiente térmico.
- Implementación teórica y numérica de un método óptico para el estudio de flujos térmicos.
- Ensayos experimentales para evaluar el método óptico de medición en el caso de flujos abiertos.

Parte II

Transferencia de calor en convección de Rayleigh-Bénard

Capítulo 3

Convección de Rayleigh-Bénard

Contenido

3.1 Descripción del fenómeno	9
3.1.1 Mecanismo de inestabilidad	10
3.1.2 Ecuaciones del sistema	11
3.1.3 Diferentes regímenes de convección	12
3.2 Convección confinada	14
3.3 Transferencia de calor	16
3.3.1 Comportamiento para $Ra \sim Ra_c$	17
3.3.2 Comportamiento para $Ra \gg Ra_c$	18
3.4 Convección en condiciones no-Boussinesq	19
3.5 Convección en celdas inclinadas	21

En este primer capítulo dedicado a la convección de Rayleigh-Bénard se encuentra una recopilación de antecedentes que serán de utilidad para comprender el trabajo experimental que se presenta en los próximos dos capítulos.

3.1. Descripción del fenómeno

Antes de discutir en más detalle la convección de Rayleigh-Bénard cabe mencionar la siguiente reseña histórica sobre problema.

El fenómeno de inestabilidad térmica fue reconocido por el conde Rumford en 1797 y James Thomson en 1882 [2]. En 1900 Bénard realizó el primer experimento para demostrar el comienzo de una inestabilidad térmica. El montaje experimental utilizado por Bénard consistió en una capa delgada de fluido viscoso, con su superficie superior libre en contacto con el aire y calentada en forma uniforme por una placa metálica. Este montaje experimental le permitió estudiar, visualizando el flujo con polvos en suspensión, la formación de celdas hexagonales. Lord Rayleigh atribuyó la formación de estas estructuras a los efectos de la fuerza de empuje [28] y Block en 1956 descubrió que el mecanismo se debe a la acción de la tensión superficial [29]. Los análisis de Block le indicaron que la variación de la tensión superficial con la temperatura es, por sí sola, un mecanismo suficiente para establecer las celdas

de Bénard. Dada la influencia de este mecanismo, el problema estudiado por Bénard recibe el nombre de inestabilidad de Bénard-Maragoni. En cambio, en el problema de convección o inestabilidad de Rayleigh-Bénard se reconoce la contribución de Lord Rayleigh, quien en 1916 trató problema de estabilidad considerando ambas fronteras libres [29].

3.1.1. Mecanismo de inestabilidad

En la figura 3.1 se indica el mecanismo de inestabilidad en convección de Rayleigh-Bénard y consiste en lo siguiente. Una capa de fluido de espesor d se somete a un gradiente de temperatura:

$$\frac{\Delta T}{d} = \frac{T_1 - T_2}{d} \quad (3.1)$$

manteniendo las superficies superior e inferior a temperaturas T_2 y $T_1 > T_2$, respectivamente. Este gradiente de temperatura se denomina adverso y es potencialmente inestable, debido a que el fluido en el fondo es más liviano que en la parte superior. Esta condición genera una tendencia en el fluido a reorganizarse y mejorar la debilidad de su organización [2]. Si ocurre una perturbación de temperatura en una cierta región caliente (fría), su volumen aumenta (disminuye) y su densidad ρ disminuye (aumenta). La fuerza de empuje induce entonces sobre ella un movimiento ascendente (descendente). Por otra parte, Los fenómenos disipativos asociados a la viscosidad cinemática ν y difusividad térmica κ del fluido tratarán de inhibir este movimiento.

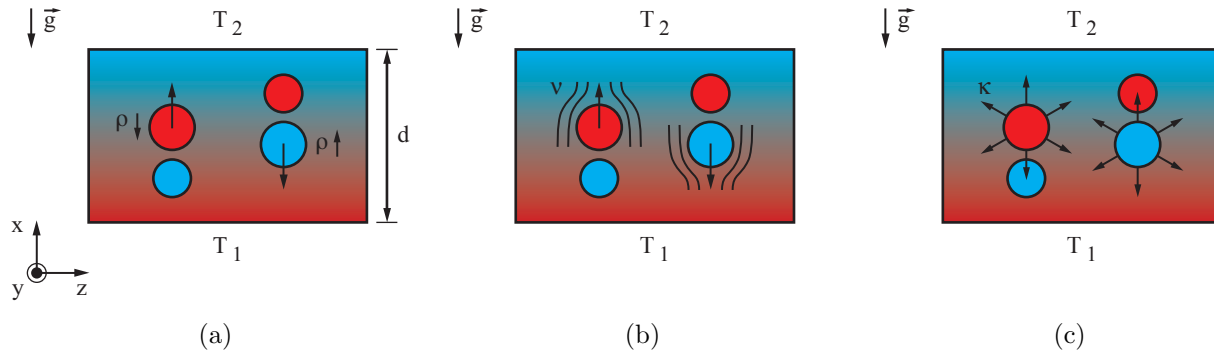


Figura 3.1: Mecanismo de inestabilidad en convección de Rayleigh-Bénard. Una capa de fluido de espesor d se somete a un gradiente de temperatura inestable $(T_1 - T_2)/d$, donde $T_1 > T_2$. (a) Si ocurre una perturbación de temperatura en una cierta región caliente (fría), su volumen aumenta (disminuye) y su densidad ρ disminuye (aumenta). Como resultado la fuerza de empuje induce sobre ella un movimiento ascendente (descendente). Los fenómenos disipativos asociados a la viscosidad cinemática ν y difusividad térmica κ del fluido tratarán de inhibir este movimiento.

El primer parámetro de control de la inestabilidad es el número de Rayleigh Ra y representa el balance entre los mecanismos anteriores. Éste se encuentra dado por:

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T d^3}{\nu \kappa} \quad (3.2)$$

con g la magnitud de la aceleración de gravedad y α el coeficiente de expansión térmica

del fluido. El número de Rayleigh debe sobrepasar un cierto umbral $Ra > Ra_c$ para que la inestabilidad se pueda manifestar dado por el número de Rayleigh crítico Ra_c . Éste toma el conocido valor teórico de $Ra_c = 1708$ considerando una capa de fluido de una extensión infinita.

3.1.2. Ecuaciones del sistema

Las ecuaciones que rigen el sistema son las de conservación de masa, moméntum y energía, y la ecuación de estado del fluido [5].

La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.3)$$

con t el tiempo y \vec{u} la velocidad. La ecuación de Navier-Stokes es:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.4)$$

donde p es la presión, \vec{g} la aceleración de gravedad y μ la viscosidad dinámica. La ecuación de conducción térmica, despreciando la contribución de disipación en el fluido viscoso, es [5]:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (3.5)$$

con T la temperatura. La ecuación de estado es:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3.6)$$

donde ρ_0 es la densidad a una temperatura media T_0 elegida adecuadamente y donde el coeficiente de expansión térmica α del fluido se define:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.7)$$

donde la derivada parcial entre temperatura T y densidad ρ es a presión p constante. De acuerdo a la aproximación de Boussinesq, si las variaciones en la densidad y en los varios coeficientes utilizados se debe a cambios de temperatura moderados, estos se pueden considerar constantes. Si embargo el término que contiene a la densidad en el lado izquierdo de la ecuación de Navier-Stokes, puede ser amplio y se debe mantener. Existen distintas formas de adimensionalizar las ecuaciones anteriores, las siguientes corresponden a [5]:

$$\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{d} \quad t' = \frac{\kappa t}{d^2} \quad u' = \frac{u d}{\kappa} \quad \theta' = \frac{\alpha g d^3 \theta}{\nu \kappa} \quad p = \frac{p' d^2}{\rho_0 \kappa^2} \quad (3.8)$$

donde θ es una variación pequeña de la temperatura con respecto a la distribución lineal original de la temperatura. Si se considera que las variables anteriores corresponde a

perturbaciones con respecto a un estado base, se obtienen las ecuaciones linearizadas:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{u}' &= 0 \\
\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} &= -\nabla p' + Pr \theta' \hat{y} + Pr \nabla^2 \vec{u}' \\
\frac{\partial \theta'}{\partial t'} &= \nabla^2 \theta' + Ra w'
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde w es la componente vertical de la velocidad y \hat{z} el vector unitario en la dirección vertical. En el sistema de ecuaciones (3.9) aparece el segundo parámetro de control de la inestabilidad, el número de Prandtl Pr :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \tag{3.10}$$

y que representa la razón entre la difusión de momento y calor molecular.

Un análisis en modos normales del sistema de ecuaciones (3.9) permite obtener la curva de estabilidad marginal entre el número de Rayleigh crítico y el número de onda q [2]. El modo más inestable ocurre a los valores críticos del número de onda $q_c = 3.117$ y longitud de onda $\lambda_c = 2\pi/3.117$. Por sobre la curva de estabilidad marginal un continuo de valores de onda son inestables y el flujo se organiza típicamente en un patrón de rollos de convección. Al valor de Ra_c ocurre una bifurcación, donde los rollos de convección pueden tomar dos sentidos de rotación posibles [5].

En el análisis mencionado anteriormente, se obtiene la ecuación de onda en dos dimensiones o ecuación de una membrana y su solución corresponde a un número infinito de patrones con el mismo número de onda a_c . Entre ellos se encuentran patrones de rollos paralelos, celdas triangulares equiláteras, cuadradas, rectangulares, hexagonales o en forma de anillos axisimétricos, siendo la solución más sencilla a la ecuación de ondas la de rollos de convección. Debido a que para $Ra > Ra_c$ existe un rango de posibles número de onda. Parte este rango de números de onda posibles es inestable y da origen a una variedad de inestabilidad secundarias [1]. Estas se ilustran en el diagrama de estabilidad llamado globo de Busse, cuyos ejes son los número de Rayleigh Ra , Prandtl Pr y de onda q . Una de las distintas posibilidades es, por ejemplo, la de rollos cruzados.

3.1.3. Diferentes regímenes de convección

La influencia del número de Prandtl en transiciones de flujo fue estudiado experimentalmente por Krishnamurti (1973) [30], quien obtuvo el diagrama que se muestra en la figura 3.2. En él se identifican los regímenes de conducción, estacionario bidimensional, estacionario tridimensional, tridimensional dependiente del tiempo y turbulento. El diagrama indica que a un mismo Ra el flujo para un fluido con valor elevado del número de Prandtl, como por ejemplo glicerina, es muy diferente al observado en agua. Para el primero, con aproximadamente $Pr \sim 2500$, el rango de transición entre el comienzo de convección en Ra_c y la pérdida de coherencia espacial en el flujo es mucho más extendida que para agua o aire, cuyos números de Prandtl son del orden de 1. Mientras en aire y agua este rango de transición se extiende hasta

$\sim 5 \cdot 10^7 < Ra < 10^8$, en glicerina se extiende hasta $Ra < 10^{12}$ [31]. Es interesante notar en la figura las líneas trazadas sobre puntos de transición, con cambios de pendiente en la curva de flujo térmico, encontrados por Krishnamurti. De acuerdo a Koschmieder [5], existen dudas sobre el carácter discreto o la existencia de ciertos puntos de transición en estas curvas.

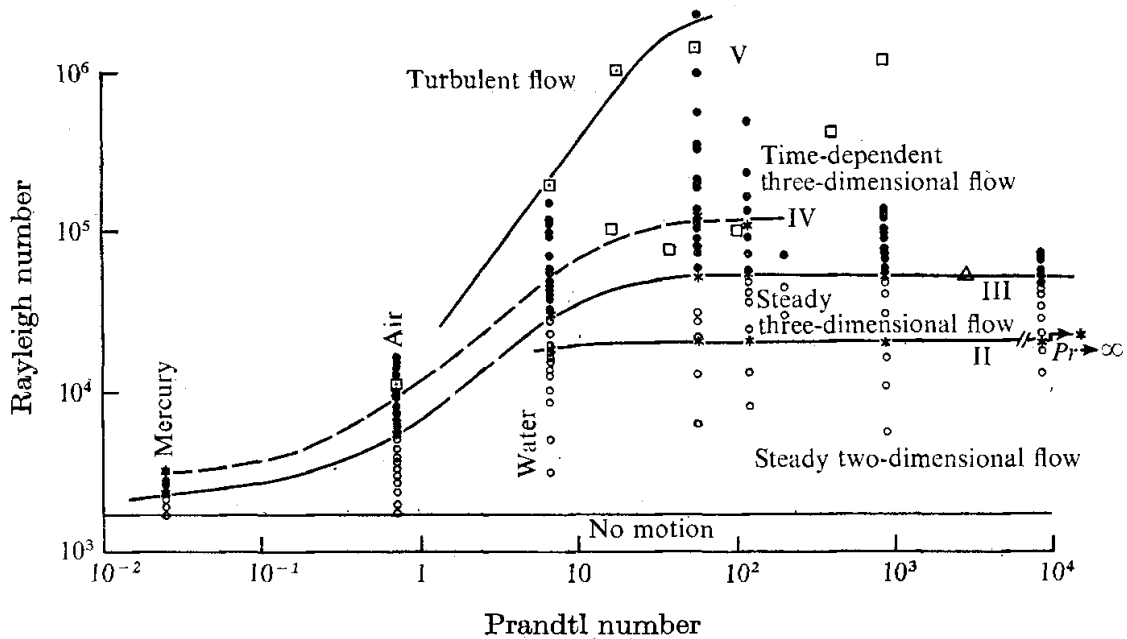


Figura 3.2: Diferentes regímenes en convección de Rayleigh-Bénard en función de los números de Rayleigh y Prandtl, obtenidos experimentalmente por Krishnamurti (1973) [30]. Los distintos tipos flujos son: estacionario (o); dependientes del tiempo, obtenidos por Krishnamurti (●) y Rossby (□); puntos de transición con cambios de pendiente en la curva de flujo térmico (*), sobre los cuales se encuentran trazadas las líneas (II), (III) y (IV); flujo turbulento, obtenidos por Willis y Deardorff (□); puntos de transición para flujos dependientes del tiempo, obtenidos por Silverston (Δ).

El comportamiento para $Pr \geq 60$, de acuerdo a trabajos experimentales de Busse y Whitehead, Krishnamurti, y Richter y Parsons en aceites de silicona, según se menciona en [22] es el siguiente: un patrón de rollos bidimensionales es estable hasta $Ra < 13 Ra_c$, luego crece un segundo grupo de rollos perpendiculares a los iniciales, creando un patrón bi-modal. Para $Ra \sim 100 Ra_c$ aparece un régimen que depende del tiempo, con un patrón de *spokes*. En el caso de fluidos con valores bajos e intermedios de Pr , que cumple la aproximación de Oberbeck-Boussinesq, el patrón consiste en rollos derechos para valores de Ra sobre, pero cercanos al inicio de la inestabilidad. Luego, la transición a un flujo estacionario bi-modal observada en fluidos con $Pr \geq 60$ se reemplaza por una inestabilidad oscilatoria secundaria, y posteriormente se observan rápidamente los regímenes caóticos y de turbulencia con el aumento de Ra .

3.2. Convección confinada

Aún cuando el problema teórico de convección de Rayleigh-Bénard considera una capa infinita de fluido, en los trabajos experimentales el fluido se encuentra al interior de una celda de convección y confinado por paredes laterales. Estas últimas tienen un efecto importante en el flujo debido a que los bordes rompen la simetría continua de traslaciones y rotaciones presentes en el sistema sin fronteras [1]. Las celdas de convección son en general de geometría cilíndrica, con razón de aspecto $\Gamma = D/d$ donde D el diámetro de la celda, o en la forma de cajas rectangulares. Para estas últimas se tienen las razones de aspecto $\Gamma_x = l_x/d$ y $\Gamma_z = l_z/d$ según las dimensiones indicadas en la figura 3.3 (a).

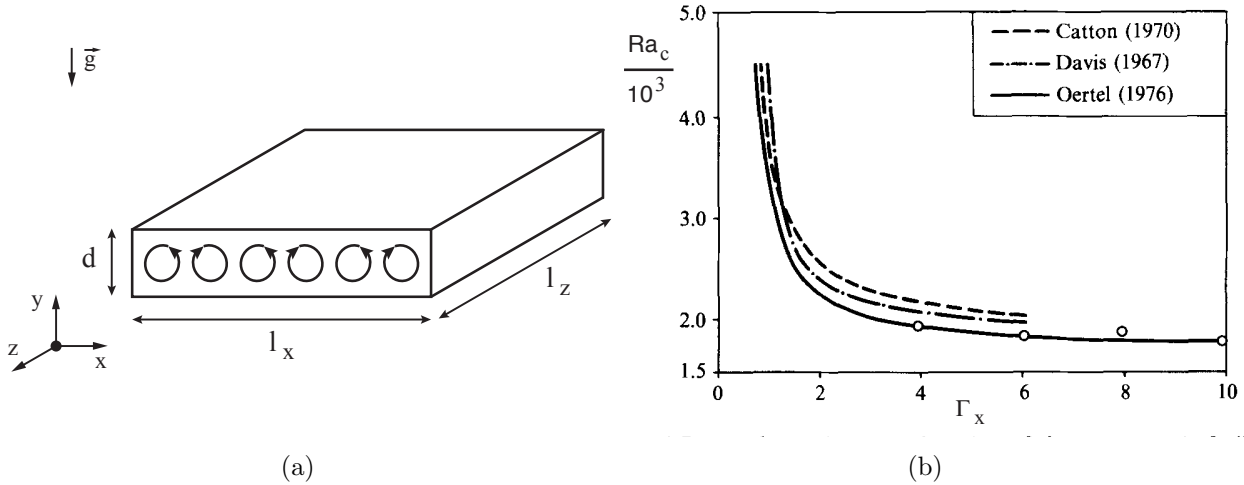


Figura 3.3: Estabilidad en convección de Rayleigh-Bénard confinada. (a) Dimensiones de la celda de convección. (b) Número de Rayleigh crítico Ra_c para una celda rectangular en función de la razón de aspecto $\Gamma_x \equiv l_x/d$, con $\Gamma_z \equiv l_z/d = 4$ constante. Figura adaptada de Kirchartz y Oertel (1988) [32].

Los efectos de paredes laterales en celdas rectangulares y cilíndricas son notorios al disminuir las razones de aspecto, siendo uno de ellos el aumento de Ra_c con respecto a su valor teórico. Esto fue estudiado para celdas rectangulares mediante el método Galerkin por Davis (1967) [33] y Catton (1970) [34], suponiendo paredes perfectamente conductoras y aislantes, respectivamente. Existen pequeñas diferencias entre los trabajos anteriores y también al compararlos con los resultados numéricos y experimentales de Kirchartz y Oertel (1988) [32]. La pequeña sobrestimación de las curvas de Davis y Catton se encuentra en gran parte de los datos experimentales de Stork y Müller (1972) [35], obtenidos para distintas razones de aspecto y utilizando paredes con conductividad térmica similar a la del fluido de trabajo (aceite de silicona). En la tabla 3.1 se muestra una comparación de números de Rayleigh críticos para una celda de razón de aspecto 6:3:1, recopilado por Walden *et. al.* [36]. En esta se encuentra el resultado de Edwards (1986) obtenido utilizando la mismas funciones de expansión que Catton y un flujo totalmente tridimensional.

Un resultado interesante mencionado por Davis es que al aumentar el lado horizontal más largo a más del doble del otro lado horizontal, no se observan cambios apreciables de Ra_c . De

	Paredes Conductoras Davis (1967)	Paredes aislantes Catton (1972) Edwards (1986)		Experimental Stork y Müller (1972)
Ra_c	2101	1879	1793	1913

Tabla 3.1: Comparación de números de Rayleigh críticos Ra_c para una celda de razón de aspecto 6:3:1 recopilada por Walden *et. al.* [36].

acuerdo a Catton la curva $\Gamma_x = 6$ prácticamente el límite para Γ_y alto y equivale a un canal infinito. Los estudios teóricos mencionados anteriormente consideran paredes perfectamente conductoras o aislantes, sin embargo el parámetro de admitancia C introducido por Buell y Catton [37] para el estudio de estabilidad en celdas de convección cilíndricas permite una clasificación intermedia entre ambos casos. La expresión para este parámetro en la forma usada por Kirchartz [32] para celdas rectangulares es $C = (k d)/(k_p l_p)$, con k y k_p las conductividades térmicas del fluido y las paredes, respectivamente, y l_p espesor de las paredes laterales.

Los trabajos experimentales, por ejemplo [32], indican que la inestabilidad en celdas rectangulares para un número de Rayleigh supercrítico $Ra > Ra_c$ moderado consiste en un patrón de rollos transversales. La razón de por qué se orientan paralelos al lado más corto de la celda, y no en forma transversal, se debe probablemente a la diferencia de la energía disipada en las paredes y el fluido elige la configuración donde esta es menor [5].

Selección de patrón

En una celda rectangular las ecuaciones del sistema tienen más de una solución y se pueden catalogar en dos grupos principales [1]: patrones prácticamente bidimensionales en la forma de rollos derechos de convección y flujos totalmente tridimensionales. En el primer grupo se distinguen los rollos de acuerdo a la dirección de sus ejes con respecto al lado más largo de la celda, si son perpendiculares se denominan *rollos transversales*, mientras que si estos son paralelos se denominan *rollos longitudinales*. En el segundo grupo, donde el flujo es totalmente tridimensional, se encuentran patrones correspondientes a la superposición de rollos, por ejemplo los denominados bimodales o en forma de L .

Una forma interesante de transición se ha observado en celdas cerradas y consiste en la disminución del número de rollos al aumentar el número de Rayleigh. Esto corresponde a cambios discretos en el número de onda y algunas observaciones experimentales de este fenómeno se mencionan en [19]. Por ejemplo, en los experimentos de Kirchartz y Oertel [32] en una celda rectangular de razones de aspecto 10:4:1, utilizando aceite de silicona con $Pr = 1780$, se encontró la transición de 10 a 9 rollos a $Ra = 2300$, luego a 8 para $Ra = 5650$ y 7 para $Ra = 8900$.

3.3. Transferencia de calor

El calor transferencia a través de una capa de fluido en convección se mide típicamente en términos de la cantidad integral dada por el número de Nusselt Nu :

$$Nu = \frac{Q_{f,cd} + Q_{f,cv}}{Q_{f,cd}} \quad (3.11)$$

donde $Q_{f,cd}$ es la cantidad de calor transferido por conducción y $Q_{f,cv}$ el calor transferido adicionalmente por el movimiento convectivo del fluido. Las primeras mediciones de la dependencia del número de Nusselt en función de Ra fue realizada por Schmidt y Milverton (1935), confirmando el valor teórico $Ra_c = 1708$ con una precisión mejor al 10%. Las mediciones de Silveston [2] en 1958 que se encuentran en la figura 3.4 (a), se extendieron a un rango mayor de fluidos y comprobaron que Ra_c es independiente de Pr . Koschmieder y Pallas (1974) (cf. figura 3.4 (b)), realizaron mediciones con aceites de silicona de $70 < Pr < 1800$ en una celda de $\Gamma = 26$, obteniendo un excelente acuerdo con los resultados de Silveston [38]. De acuerdo a Koschmieder [5], existe una gran cantidad de datos sobre las mediciones de transporte de calor, estos permanecen inconsistentes. En parte debido a que estos no solo son función del número de Rayleigh, sino también del número de Prandtl y la razón de aspecto de la celda.

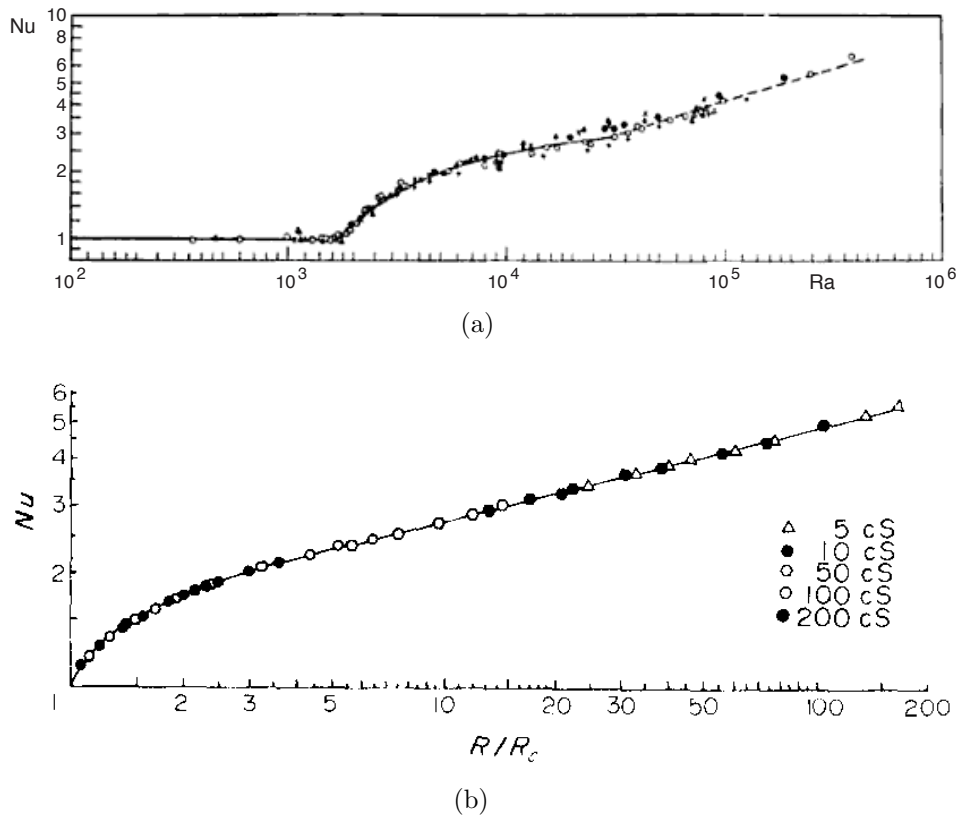


Figura 3.4: Transferencia de calor en términos del número de Nusselt Nu de acuerdo a los resultados obtenidos por: (a) Silveston, en función del número de Rayleigh. Adaptado de [2]. (b) Koschmieder y Pallas, en función del número de Rayleigh sobre el número de Rayleigh crítico. Adaptado de [38].

3.3.1. Comportamiento para $Ra \sim Ra_c$

El comportamiento de la curva Nu versus Ra cerca del comienzo de la inestabilidad fue estudiado mediante un análisis no-lineal por Schlüter, Lortz y Busse [39]. De acuerdo a esta referencia, en esta región el número de Nusselt se puede expandir como:

$$Nu = 1 + S_1 \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra} \right) + \dots \quad \text{con } Ra \rightarrow Ra_c^+ \quad (3.12)$$

donde el coeficiente S_1 corresponde a la pendiente inicial de la transferencia de calor dada por:

$$S_1 = \lim_{Ra \rightarrow Ra_c^+} \frac{Ra(Nu - 1)}{Ra - Ra_c} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \epsilon)(Nu - 1)}{\epsilon} \quad (3.13)$$

donde la última expresión se encuentra en términos del número de Rayleigh reducido, ϵ , dado por:

$$\epsilon = \frac{Ra}{Ra_c} - 1 \quad (3.14)$$

En el análisis de Schlüter *et. al.* se obtuvieron las siguientes expresiones para la pendiente inicial, S_1 , considerando patrones en forma de rollos derechos, celdas cuadradas y hexágonos:

$$S_1 = \begin{cases} (0.699 - 0.0047/Pr + 0.00832/Pr^{-2})^{-1} \approx 1.43 & \text{rollos} \\ (0.779 + 0.0400/Pr + 0.06363/Pr^{-2})^{-1} \approx 1.28 & \text{celdas cuadradas} \\ (0.894 - 0.0496/Pr + 0.06787/Pr^{-2})^{-1} \approx 1.12 & \text{hexágonos} \end{cases}$$

las cuales son funciones débiles de Pr , especialmente si $Pr \gg 1$, y en ellas se indican los valores aproximados que se obtienen al omitir estos términos. En relación a las expresiones anteriores, Schlüter *et. al.* en mencionan la hipótesis de Malkus, esta establece que si existen distintas posibilidades de movimientos convectivos, el fluido prefiere el movimiento con el valor absoluto mayor de transporte de calor. Este movimiento corresponde al de rollos derechos, patrón que se observa típicamente en una celda rectangular al comienzo de la inestabilidad. Ciertos trabajos experimentales concuerdan bien con el valor de la pendiente inicial dado por estas expresiones, como por ejemplo Koschmieder y Pallas (1974) [38], aún cuando utilizaron una celda cilíndrica observando rollos concéntricos y no derechos. Otros trabajos, entre ellos [13] y referencias citadas ahí, encuentran diferencias de $\sim 19\%$ atribuidas al tamaño finito del sistema y efectos de las paredes laterales.

De acuerdo a Koschmieder [5], en el rango moderadamente supercrítico, $Ra \lesssim 10 Ra_c$, se espera una dependencia de la parte convectiva de la transferencia de calor con ϵ . Esto debido a que la componente vertical de velocidad y de la perturbación de temperatura son proporcionales cada una a $\sqrt{\epsilon}$. A Ra es más elevados se observa una proporcionalidad a ϵ y órdenes mayores de este término.

3.3.2. Comportamiento para $Ra \gg Ra_c$

A números de Rayleigh elevados, i.e. en régimen turbulento, el número de Nusselt es proporcional a Ra^n . A su vez, éste puede depender del número de Prandtl y las razones de aspecto [5]. Antiguamente, ciertos argumentos se utilizaron para predecir este exponente, entre los cuales cabe mencionar dos que soportan el escalamiento $Nu \sim Ra^{1/3}$ propuesto por Malkus (1958) y otros autores. Según se mencionan en [40], en el problema se observa que prácticamente toda la caída de temperatura ocurre en las capas límite térmicas, cuyo espesor λ se puede definir aproximadamente como el espesor de la capa donde la caída de temperatura equivale a $\Delta T/2$. Una relación importante $Nu \sim d/\lambda$ permite relacionar λ con Nu . Esta relación es rigurosamente cierta al definir λ como:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\Delta T} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.15)$$

donde $\langle \rangle$ representa un promedio espacial y temporal. El primer argumento asume que la capa límite térmica es marginalmente estable, lo que significa que el número de Rayleigh efectivo $Ra(\lambda)$ calculado en el espesor de capa límite λ equivale a Ra_c , independiente de Ra , es decir $Ra = Ra_c(d/\lambda)^3$. Entonces, usando $Nu \sim d/\lambda$ se obtiene $Nu \sim Ra^{1/3}$. Otra manera de obtener el resultado anterior es suponer que el flujo de calor Q a través de la celda es independiente de la altura, entonces de la expresión $Nu = Qd/k\Delta T \sim Ra^n$ se obtiene que para cumplir esta condición se necesita $n = 1/3$ dado que $Ra \sim d^3$.

Al final de la década de 1980, los experimentos de Libchaber *et. al.* realizados con helio, $Pr \approx 1$, en la universidad de Chicago, entregaron el nuevo escalamiento $Nu \sim Ra^{0.282}$. Numerosos trabajos reprodujeron y extendieron este resultado, $n = 0.282 \pm 0.006 \approx 2/7$, indicando que es muy robusto [41]. Posteriormente Cioni *et. al.* (1997) agregaron la dependencia de Pr , obteniendo $Nu \sim Ra^{2/7}Pr^{2/7}$, cuya validez se espera para $Pr < 1$. Por otra parte, el modelo de Shraiman-Siggia entrega una dependencia de $Pr^{-1/7}$ para Pr suficientemente elevado.

Recientemente, Grossman y Lohse [41] dividieron el transporte de calor en términos que representan la disipación cinética y viscosa, y subsecuentemente en contribuciones del *bulk* y de la capa límite. Su contribución relativa, a diferentes valores de Ra y Pr , entrega diferentes leyes de potencia en diferentes rangos de parámetros, donde términos distintos dominan la transferencia de calor. Este modelo explica en parte las diferentes leyes de potencia encontradas anteriormente por diferentes modelos, debido a que se encontraban generalmente en distintos rangos de los parámetros. En cuanto al escalamiento $n = 2/7$, Grossman y Lohse encontraron que este se encuentra bien representado por la unión de regímenes con $n = 1/4$ y $n = 1/3$, con coeficientes de ponderación apropiados. A números de Rayleigh muy elevados, como mencionan estos autores, se ha observado recientemente una caída del escalamiento $n = 2/7$ posiblemente hacía una ley $Nu \sim Ra^{1/2}$, la cual corresponde al régimen último de convección turbulenta precedida por Kreichnan en 1962.

3.4. Convección en condiciones no-Boussinesq

En general, los experimentos en Rayleigh-Bénard se realizan con diferencias de temperaturas pequeñas ΔT , de manera de cumplir la aproximación de Oberbeck-Boussinesq (OB). En ella se asume que las propiedades viscosidad cinemática ν , difusividad térmica κ , conductividad térmica k , calor específico isobárico c_p y coeficiente de expansión térmica isobárico α son independientes de la temperatura [42]. Sin embargo, para ciertos fluidos como por ejemplo en glicerina, etano o agua esta condición no siempre se cumple, especialmente a diferencias ΔT altas. Típicamente, las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura media entre placas:

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (3.16)$$

por lo que los parámetros de control Ra y Pr se calculan como:

$$Ra_m = \frac{\alpha_m g \Delta T d^3}{\nu_m \kappa_m} \equiv Ra \quad Pr_m = \frac{\nu_m}{\kappa_m} \equiv Pr \quad (3.17)$$

donde el subíndice m indica las propiedades evaluadas a T_m .

Número de Rayleigh crítico

El valor número de Rayleigh crítico Ra_c a su vez puede ser afectado por según la función que describe la viscosidad $\nu(T)$, como fue estudiado por Stengel *et. al.* [43] en forma numérica y experimentalmente en una celda de razón de aspecto $\Gamma = 22$. Sus resultados indican que si esta función es exponencial, el número de Rayleigh crítico Ra_c es aproximadamente constante para una razón pequeña entre la viscosidad, ν_{max}/ν_{min} , en las superficies superior e inferior. Para razones moderadas Ra_c crece, alcanzando un máximo a una razón de aproximadamente 3000 y luego decrece.

Número de Nusselt

El número de Nusselt en condiciones NOB puede cambiar con respecto al caso OB debido a dos efectos [42], los cuales se muestran en el esquema de la figura 3.5. Estos son:

- (i) Diferencias entre la caída de temperatura en la capa límite inferior $\Delta_b = T_c - T_2$ y en la capa límite superior $\Delta_t = T_1 - T_c$.
- (ii) Desplazamiento de la temperatura T_c del flujo central de la celda o *bulk* con respecto a la temperatura media entre placas T_m .

La razón entre los números de Nusselt para ambos casos, Nu_{NOB} y Nu_{OB} , según esta referencia es:

$$\frac{Nu_{NOB}}{Nu_{OB}} = \underbrace{\frac{2\lambda_{OB}^{sl}}{\lambda_t^{sl} + \lambda_b^{sl}}}_{F_\lambda} \underbrace{\frac{\kappa_t \Delta_t + \kappa_b \Delta_b}{\kappa_m (T_1 - T_2)}}_{F_\Delta} \quad (3.18)$$

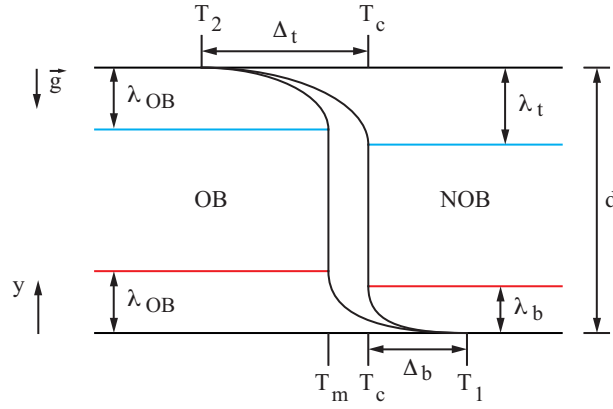


Figura 3.5: Esquema del perfil de temperatura en condiciones NOB, en función de la altura y y promediado en el tiempo. Se muestran dos efectos: (i) diferencia entre la caída de temperatura $\Delta_b = T_c - T_2$ en la capa límite inferior y $\Delta_t = T_1 - T_c$ en la capa límite superior, con espesores en condiciones NOB λ_t y λ_b , respectivamente, y λ_{OB} en condiciones OB; (ii) desplazamiento de la temperatura T_c del flujo central de la celda con respecto a la temperatura media entre placas T_m .

donde los factores F_λ y F_Δ se asocian a los efectos (i) y (ii), respectivamente. En el caso de la glicerina, los efectos NOB se deben principalmente a la fuerte variación de su viscosidad con la temperatura y, en particular, el segundo efecto que corresponde a la desviación de T_c con respecto a T_m fue estudiada experimentalmente por Zhang [44]. Sin embargo, mientras este último efecto es importante en agua, en glicerina lo son las variaciones asociadas al factor F_λ [31]. Para números de Ra moderados, el número de Nusselt es bastante robusto a los efectos NOB como indican por ejemplo Ahlers [42] o los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas de Sugiyama [31], considerando este último una celda bidimensional cuadrada y glicerina como fluido. De acuerdo a esta última referencia, la mayor influencia de los efectos NOB corresponde a un cambio notorio en la transferencia de calor entorno a $Ra \sim 10^5$, el cual no ha sido estudiado experimentalmente.

Selección de patrón

Entre los patrones observados por Stengel *et. al.* mencionado previamente se encuentran hexágonos a pequeñas razones de viscosidad entre ambas superficies, y también rollos, polígonos irregulares y celdas cuadradas dependiendo de esta razón y del número de Rayleigh. A números de Rayleigh más elevados $Ra \sim 20000$ se observa una forma de convección bimodal o en forma de *spokes*, dependiendo de la razón de viscosidades. Esta ocurre en forma bastante más temprana que en el caso de viscosidad constante, cuya transición se encuentra para $Ra \sim 10^5$.

Un aspecto de los efectos NOB en convección de Rayleigh-Bénard consiste en su influencia en el patrón observado al inicio de la inestabilidad, siendo posible encontrar una forma de organización distinta al de rollos observado en condiciones OB. Una de estas formas corresponde a celdas hexagonales, estudiadas teóricamente por Busse y posteriormente otros autores, suponiendo una variación de viscosidad con temperatura $d\nu/dT$ leve [45]. El resultado encontrado es el siguiente: para $Ra_c < Ra < Ra_1$ solo celdas hexagonales son estables, para $Ra_1 < Ra < Ra_2$ celdas hexagonales y rollos bidimensionales son estables, y para

$Ra > Ra_2$ solo rollos son estables, donde los valores Ra_1 y Ra_2 son cercanos a Ra_c . A su vez, ocurre una bifurcación sub-crítica observada experimentalmente por Ciliberto [46], en la cual las celdas hexagonales son estables en un rango $Ra_{-1} < Ra < Ra_c$, donde $Ra_c - Ra_{-1}$ es una función proporcional a $d\nu/dT$.

Las transiciones entre rollos y hexágonos se ven reflejadas en las mediciones del transporte de calor, dado que estas últimas son sensibles a las variaciones de simetría, como indica el análisis de Schüter *et. al.* mencionado anteriormente. Las celdas hexagonales han sido observadas experimentalmente también para variaciones importantes de viscosidad con temperatura, como en el trabajo realizado por White (1988) [47] utilizado como fluido *golden syrup* y una celda rectangular de alta razón de aspecto. Algunos de los patrones obtenidos por White celdas hexagonales, celdas cuadradas e inestabilidad en forma de mosaico. Según menciona Koschmieder [5], los patrones obtenidos por White, a excepción de los de celdas hexagonales, pueden llevar a conclusiones erróneas debido a que son impuestos en el fluido mediante condiciones iniciales controladas, técnica que permite crear cualquier patrón. Sin embargo, patrones de rollos, hexágonos y cuadrados han sido observados experimentalmente para distintas magnitudes de $d\nu/dT$ sin imponer condiciones iniciales controladas, como por ejemplo por Stengel *et. al.* [43] y Oliver (1983).

3.5. Convección en celdas inclinadas

El fenómeno de convección con inclinación respecto a la gravedad corresponde a una variante del problema clásico de Rayleigh-Bénard y se puede encontrar en distintos ámbitos, por ejemplo, en la atmósfera, océano o en colectores solares [48]. Esta variante corresponde a la configuración que se muestra en la figura 3.6 (a), donde la celda de convección se encuentra en un ángulo γ con la horizontal. De acuerdo a los ejes de la figura 3.6 (a), la gravedad se descompone en:

$$\vec{g} = g(\hat{x} \sin \gamma - \hat{y} \cos \gamma) = \vec{g}_{\parallel} + \vec{g}_{\perp} \quad (3.19)$$

donde solamente la componente \vec{g}_{\perp} contribuye a la fuerza de empuje en la dirección y , por lo que se define un nuevo número de Rayleigh:

$$Ra^I = \frac{\alpha g \cos \gamma \Delta T d^3}{\nu \kappa} = Ra \cos \gamma \quad (3.20)$$

Como resultado, para $\gamma \rightarrow 90^\circ$ ocurre que $Ra_c^I \rightarrow 0$ y no ocurre una inestabilidad asociada a fuerzas de empuje, incluso para altos valores de ΔT . Las ecuaciones de Oberbeck-Boussinesq para convección de una capa inclinada de acuerdo a Clever y Busse [49] son:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \theta(\hat{y} + \hat{x} \tan \gamma) + \nabla^2 \vec{u} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta + Ra^I \vec{u} \cdot \hat{y} \quad (3.23)$$

Según esta última referencia, la solución estacionaria consiste en un perfil de temperatura

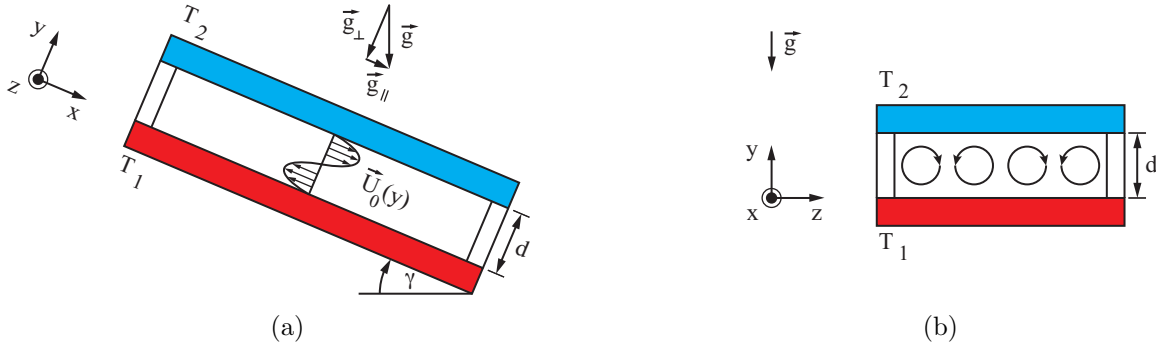


Figura 3.6: Esquema de convección al interior de una celda inclinada. (a) Vista del lado más largo de la celda, en la cual se indica el perfil de velocidad $\vec{U}_0(y)$. (b) Vista del lado más corto de la celda, en la cual se observan típicamente rollos longitudinales alineados con \vec{g}_{\parallel} .

Θ_0 y un flujo base $\vec{U}_0(y)$ en la dirección x :

$$\Theta_0 = Ra^I \left(\frac{T_m}{\Delta T} - y \right) \quad (3.24)$$

$$\vec{U}_0(y) = Ra^I \tan \gamma \frac{1}{6} \left(y^3 - \frac{1}{4}y \right) \hat{x} \equiv U_0(y) \hat{x} \quad (3.25)$$

Entonces para un número $Ra^I \neq 0$ La componente de gravedad causa que el fluido suba por la superficie caliente y baje por la superficie fría [18]. A diferencia del problema tradicional, el estado base consiste un flujo base con un perfil de velocidad cúbico. Para ángulos $\gamma < 90^\circ$ el fluido es calentado por debajo donde la fuerza de empuje y el flujo base desestabilizan, mientras que para ángulos $\gamma > 90^\circ$ el empuje estabiliza y el flujo base desestabiliza [17].

Desde los primeros trabajos de Hart (1971) [16] en celdas inclinadas se han encontrado distintas estructuras de flujo: rollos longitudinales, transversales, oblicuos y rollos transversales que viajan. En el caso de rollos longitudinales, estos son perpendiculares a los rollos transversales y sus ejes se encuentran alineados con el flujo base. Existen distintos parámetros presentes como son los números de Rayleigh y Prandtl o las razones de aspecto de la celda de convección, por lo que es difícil determinar un comportamiento general. Otro factor que puede influir es variación de la viscosidad con la temperatura, según los análisis de estabilidad de [50]. Para ciertos ángulos γ se encuentran distintas transiciones en el flujo y a su vez pueden ocurrir superposiciones como por ejemplo entre rollos longitudinales y transversales [51]. Para números de Rayleigh moderados el comportamiento es aproximadamente el que se indica en la figura 3.7 y que se describe a continuación:

$$\text{comportamiento según } \gamma = \begin{cases} 0^\circ < \gamma < \gamma_1 & \text{rollos transversales} \\ \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 & \text{rollos longitudinales} \\ \gamma_2 < \gamma < 180^\circ & \text{rollo (s) transversal (es)} \\ \gamma = 180^\circ & \text{Conducción} \end{cases}$$

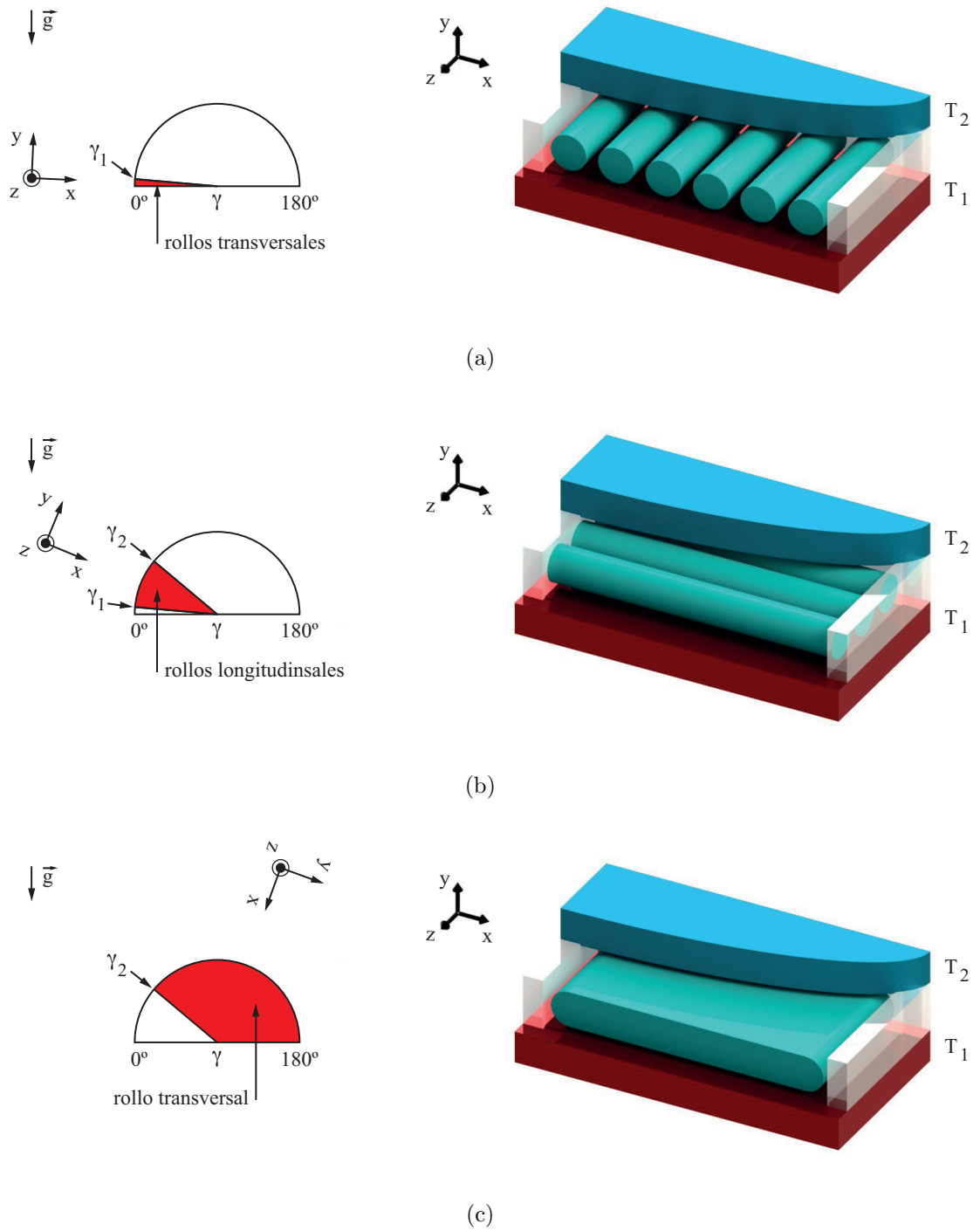


Figura 3.7: Esquema de los patrones de convección para celdas inclinada. Se muestra el patrón y el rango del ángulo de inclinación γ , limitado por γ_1 y γ_2 , en que se observan: (a) rollos transversales, (b) rollos longitudinales y (c) un único rollo transversal.

donde γ_1 y γ_2 son ángulos de transición. Para los resultados de [32] el primer ángulo de transición es aproximadamente $\gamma_1 = 12^\circ$, por debajo del cual los rollos transversales son la solución preferida al tener un menor valor propio y son superpuestos al flujo básico.

Para ángulos de inclinación mayores $\gamma > \gamma_1$, el creciente efecto de esfuerzo de corte fuerza a los rollos transversales a reorientarse hacia rollos longitudinales. De acuerdo a [17], la inestabilidad del estado base con respecto a los rollos longitudinales es al número de Rayleigh crítico Ra_c^L :

$$Ra_c^L = \frac{Ra_c}{\cos \gamma} \quad (3.26)$$

Estos rollos longitudinales se pueden volver inestables al aumentar el número de Rayleigh, lo cual ha sido estudiado mediante análisis de estabilidad [49, 52] y en forma experimental [53]. Para mayores ángulos de inclinación los rollos longitudinales pasan posteriormente a un un modo con uno o más rollos transversales. Este ángulo es $\gamma_2 \sim 35^\circ$ para una razón de aspecto $\Gamma_x = 6$ y $\Gamma_y = 20$, de acuerdo a [51], quien estudió este ángulo de transición para distintas razones de aspecto.

Como se ha mencionado, se observan distintas transiciones en celdas inclinadas y algunos aspectos son discutidos en [19]. En el estudio de celdas inclinadas se han utilizado distintas técnica de visualización como interferogramas diferenciales [32], Shadowgraph [18], o visualización utilizando humo y una fuente de luz, para el caso de rollos en aire [54]. Para celdas sin inclinación resulta interesante el uso de reconstrucción tomográfica [55]. En algunos casos se ha estudiado la transferencia de calor para distintos ángulos de inclinación γ . Al variar el ángulo de inclinación γ , se observan cambios en el número de Nusselt, como se encuentra en [56], donde se obtuvo la curva $Nu(\gamma)$ para distintas razones de aspecto. Esta también ha sido obtenida por [57]. En la curva $Nu(\gamma)$ se observa un mínimo local donde ocurre el cambio de patrón de rollos [56], quienes obtuvieron este ángulo para diferentes razones de aspecto.

Capítulo 4

Dispositivo experimental de convección de Rayleigh-Bénard

Contenido

4.1	Dispositivo experimental	26
4.1.1	Celda de convección	26
4.1.2	Fluido de trabajo	30
4.2	Métodos de medición	33
4.2.1	Medición del flujo de calor	33
4.2.2	Medición de temperatura	38
4.3	Sistema de control de la celda de convección	44
4.3.1	Control orientado a potencias elevadas	44
4.3.2	Control orientado a potencias pequeñas	50

En el presente capítulo se describe el dispositivo experimental dedicado al estudio de convección de Rayleigh-Bénard en una celda de razón de aspecto moderada, capaz de variar su inclinación con respecto al vector de gravedad. El dispositivo experimental, ubicado en el Laboratorio LEAF-NL, lo desarrolló inicialmente Ludovic Bellon y en el que trabajaron Mathieu Gibert y Loïc Vaugier. Los dos primeros estudiaron el envejecimiento de las propiedades viscoelásticas de una solución con Laponita [58, 59], mientras que el último estudió el fenómeno de convección en agua y en una solución agua-glicerina de 94 % en peso de glicerina [60]. En el presente trabajo se utilizó un fluido similar, una solución agua-glicerina de 95 % de concentración en peso, sin embargo el interés recae sobre la convección a números de Rayleigh moderados. En este rango, la potencia suministrada al sistema es considerablemente menor en comparación con los trabajos anteriores y su medición requirió de una adaptación del sistema de control. Específicamente, en este rango se buscó un control estable y el aumentó de la razón señal-ruido en la medición de potencia. Para ello se implementaron nuevos métodos de medición de temperatura basados en un elemento calefactor que actúa solamente como sensor y termistores. La evaluación de estos métodos indica que estos últimos, junto con una nueva estrategia de control permiten obtener un control adecuado en experiencias a potencias pequeñas de trabajo.

4.1. Dispositivo experimental

En la presente sección se describe el dispositivo experimental compuesto por una celda de convección y distintos elementos que permiten mantener en ella un gradiente térmico controlado y, a su vez, variar su ángulo con respecto al vector de gravedad. Luego, se describe el fluido de trabajo y el comportamiento de sus propiedades en función de la temperatura.

4.1.1. Celda de convección

Para realizar las experiencias se utilizó una celda de convección cuya representación se muestra de la figura 4.1. El fluido se encuentra confinado en un volumen de $23.5 \times 144.2 \times 68.1$ mm³ (alto $d \times$ ancho $l_x \times$ largo l_z), por lo que sus razones de aspecto son:

$$\Gamma_x \equiv \frac{l_x}{d} = 6.14 \quad y \quad \Gamma_z \equiv \frac{l_z}{d} = 2.90 \quad (4.1)$$

Dos placas de acero inoxidable y espesor 16 mm proporcionan la condición de temperatura homogénea a las superficies del fluido. La sección horizontal de la placa inferior coincide con el exterior de las paredes laterales, mientras que la placa superior abarca una área mayor de 184×108 mm². Ambas placas cuentan con perforaciones a media altura y un espaciado $l_x/4$ para el posicionamiento de sensores de temperatura. Las paredes laterales son de acrílico, de espesor 10 mm y en ella dos conductos permiten el llenado y vaciado de la celda. Durante las experiencias uno de los conductos se comunica a un recipiente externo expandible para dar cuenta de la expansión térmica del volumen de fluido.

Generación de un gradiente térmico en la celda de convección

Para elevar la temperatura de la placa inferior o *placa caliente* se suministra calor por efecto Joule desde un elemento calefactor delgado de 18 W. Este elemento se encuentra adherido a la parte inferior de la placa con pasta conductiva térmica y se alimenta con una potencia $p(t)$ por una fuente DC HP E3632A. El calor fluye a través de la celda y se remueve posteriormente desde placa superior o *placa fría* por agua de enfriamiento, distribuida por un difusor, y que circula en ella en 8 canales a contraflujo. Ésta proviene de un baño térmico Neslab RTE-210 con controlador digital cuya temperatura de trabajo, $T_b(t)$, se ajusta mediante un generador de función HP33120A con una estabilidad nominal de ± 0.01 °C. De esta manera se imponen las temperaturas en la placa caliente y placa fría, T_1 y T_2 , respectivamente, cuya diferencia genera el gradiente adverso de temperatura:

$$\frac{\Delta T}{d} = \frac{T_1 - T_2}{d} \quad (4.2)$$

que genera los movimientos convectivos en la capa de fluido. La operación los equipos mencionados anteriormente se controla en forma remota mediante el sistema de control del experimento que se describe en la sección 4.3. Por otra parte, los detalles constructivos de los elementos mencionados previamente: placas, paredes laterales y difusor se encuentran en el Anexo A.

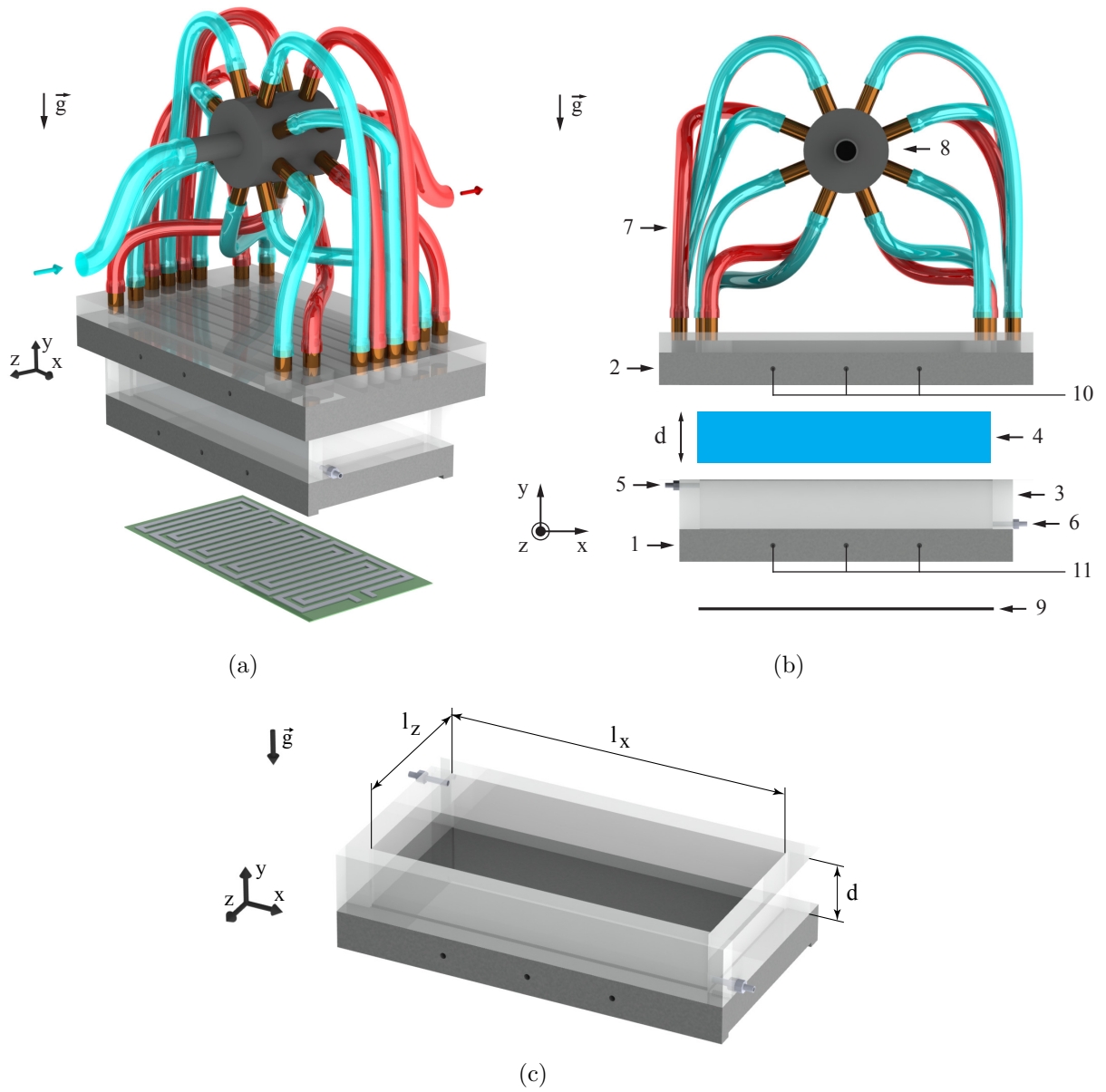


Figura 4.1: Representación de la celda de convección. (a) Vista isométrica. (b) Vista frontal. La celda de convección se compone de (1) una placa a mayor temperatura, (2) una a menor temperatura y (3) paredes laterales de acrílico que contienen a la (4) capa de fluido de alto d . En las paredes laterales se encuentran dos (5-6) ductos, para el llenado y vaciado de la celda o dar cuenta de la expansión volumétrica del fluido. Un sistema de (7) mangueras y (8) difusor distribuye agua de enfriamiento a la placa a menor temperatura y que circula en ella en 8 canales a contraflujo. Un (9) elemento calefactor delgado suministra calor a la placa a mayor temperatura. En ambas placas se encuentran (10-11) perforaciones para ubicar sensores de temperatura. En las figuras (a-b) el color de las mangueras indica el ingreso y salida del agua de enfriamiento a menor y mayor temperatura, respectivamente. (c) Detalle en vista isométrica de la placa caliente y paredes laterales. Se indican las dimensiones interiores de la cavidad: alto d , ancho l_x y largo l_z .

Aislación térmica de la celda de convección

Con el objetivo de aislar térmicamente el sistema, la celda de convección y difusor se encuentran ubicados al interior de una caja de acrílico y unidos a ella mediante 4 soportes, según se indica en la figura 4.2. El montaje se encuentra a su vez en una sala separada del baño térmico y otros equipos del laboratorio. El espacio libre interior de la caja de acrílico en la región cercana a la placa caliente contiene aislante térmico de espuma Aeroflex, un elastómero de celda cerrada de conductividad térmica $0.039 \text{ W}/(\text{m K})$. La región interior restante de la caja se contiene poliestireno expandido de conductividad térmica $\sim 0.04 \text{ W}/(\text{m K})$. Debajo de la placa caliente y el elemento calefactor se encuentra una cámara de acrílico, similar a la que contiene el fluido, con aislante Aeroflex en su interior. Esta cámara reduce las pérdidas de calor hacia un sistema fabricado en acero que comprime ambas placas. Las mangueras que comunican al baño térmico con el difusor también se encuentran aisladas con Aeroflex.

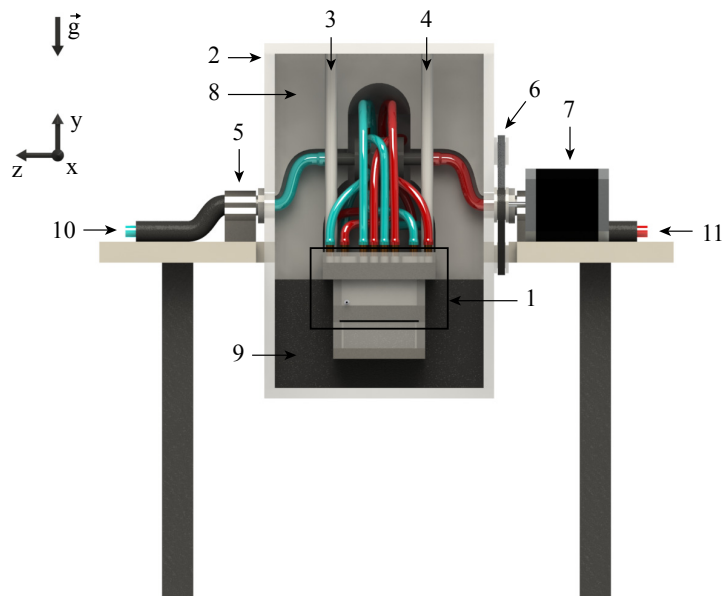


Figura 4.2: Mecanismo de rotación y aislación en la celda de convección. La celda de convección (1) se encuentra al interior de una caja de acrílico (2), sujeta mediante 4 soportes (3-4). La caja se encuentra montada sobre 2 rodamientos (5) que permiten su movimiento de rotación en el plano $x - y$. El movimiento se transmite mediante un sistema de engranajes y polea (6), con un engranaje mayor adherido a un costado de la caja y un engranaje más pequeño girado por un motor paso a paso (7). El interior de la caja se encuentra aislado con poliuretano expandido (8) y Aeroflex (9). El agua de enfriamiento ingresa y abandona la caja en mangueras aisladas térmicamente (10-11) a través del centro de los rodamientos.

Sistema de rotación de la celda de convección

El presente montaje cuenta con un sistema controlado de rotación que permite inclinar la celda de convección con respecto a la gravedad y recorrer 360° en el plano $x - y$ (cf. fig. 4.2). Para ello, la caja de acrílico que contiene a la celda se encuentra montada sobre 2 rodamientos que se encuentran sobre una mesa nivelada y gira mediante un sistema de engranajes y polea. Este sistema consiste en un engranaje mayor de 1600 dientes adherido a uno de los

costados de la caja y un engranaje más pequeño que gira por la acción de un motor paso a paso. El motor se controla por un circuito *stepper motor driver*, construido durante el presente trabajo, y recibe la señal desde el puerto paralelo de un PC. Para amplificar esta señal se utilizó un circuito que consiste en un arreglo de transistores construido por Gabriel Arévalo.

En la figura 4.3 se muestran dos configuraciones importantes utilizadas durante el presente trabajo. En la primera la placa caliente se ubica por sobre la placa fría y dado que el fluido se encuentra bajo un gradiente de temperatura estable, la transferencia de calor es posible sólo por conducción. En la segunda, la celda se encuentra invertida, lo que genera un gradiente de temperatura adverso y la posibilidad de observar el fenómeno de convección en el fluido.

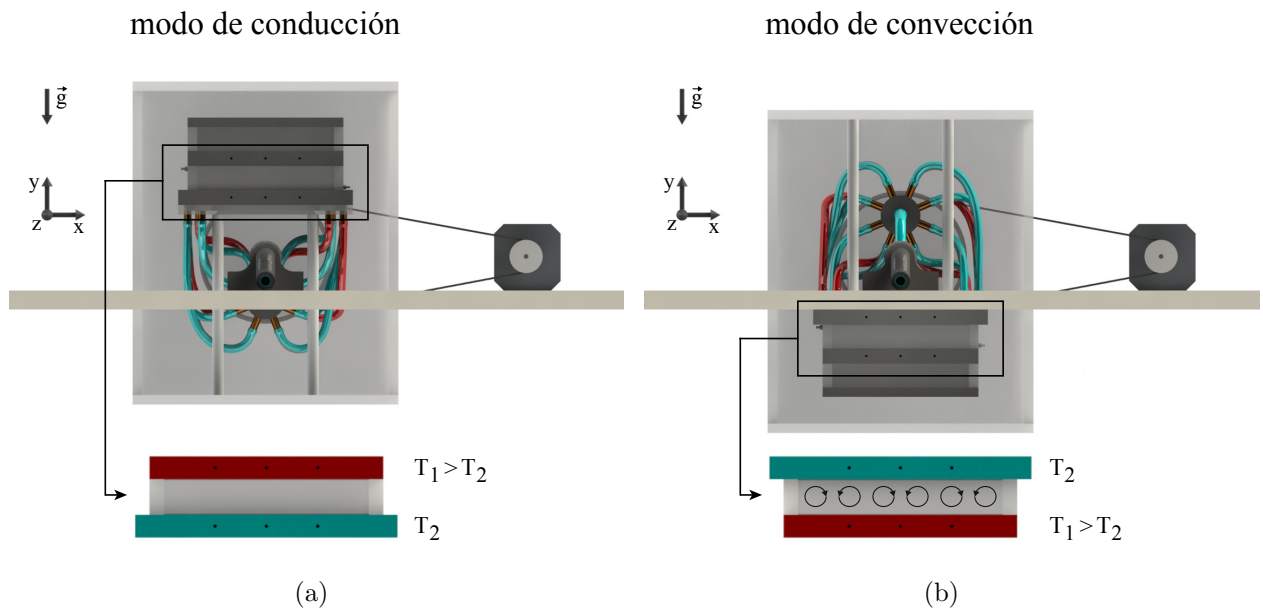


Figura 4.3: Configuraciones de la celda de convección. (a) Configuración estable donde sólo un estado conductivo es posible. (b) Configuración inestable que permite observar el fenómeno de convección en la capa de fluido.

4.1.2. Fluido de trabajo

El fluido de trabajo en una solución agua - 95 % m/m de glicerina que posee propiedades térmicas favorables para la realización de las presentes experiencias. La solución se preparó a partir de glicerina ($C_3H_8O_3$) con 99.5 % de pureza (Global Chemicals) y agua destilada. La masa de los componentes se determinó utilizando una balanza de precisión y se calentó en un recipiente cerrado para eliminar la presencia de burbujas de aire en la solución.

Estimación de las propiedades de la solución

Un aspecto importante para la realización de las experiencias es la estimación de las propiedades del fluido y su variación con la temperatura, la que puede generar efectos asociados al no cumplimiento de la aproximación de Oberbeck Boussinesq (NOB). Las soluciones acuosas de glicerina se caracterizan por una fuerte variación de la viscosidad, comportamiento que se estimó para la concentración de la presente solución mediante la fórmula propuesta por [50]:

$$\mu = a e^{bT^{-3}} + cT + dT^{-1} \quad (4.3)$$

donde μ la viscosidad dinámica y a , b , c y d son coeficientes que se ajustaron a la base de datos de Segur y Oberstar [61], según se describe en el Anexo B. En él se encuentra además la estimación, mediante leyes de mezcla entre los componentes de la solución, del comportamiento de las propiedades restantes: coeficiente de expansión térmica α , calor específico C_p , difusividad térmica κ , conductividad térmica k y densidad ρ . En la figura 4.4 se muestra la

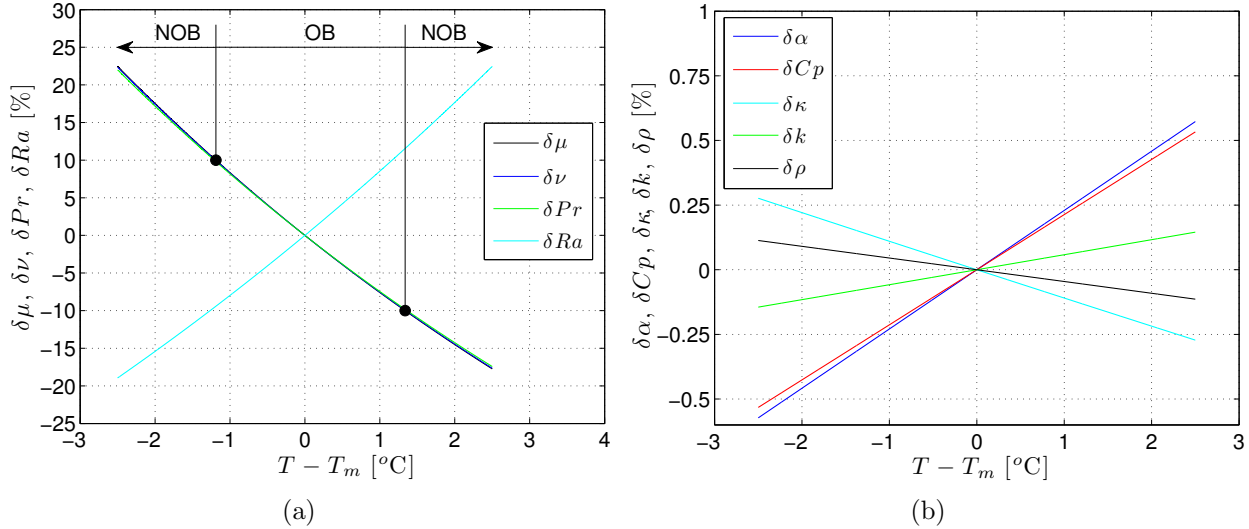


Figura 4.4: Variación porcentual de las propiedades del fluido de trabajo con la temperatura. Se muestra la variación $\delta\chi(T) = (\chi(T) - \chi(T_m))/\chi(T_m)$, con χ la propiedad, T la temperatura y $T_m = 23.5$ °C una temperatura de referencia. (a) Propiedades con mayor variación: viscosidad dinámica μ y cinemática ν y números de Rayleigh Ra y Prandtl Pr . Se indican los rangos OB ($|\delta\mu(T)| < 10\%$) y NOB ($|\delta\mu(T)| > 10\%$). (b) Propiedades con menor variación: coeficiente de expansión térmica α , calor específico C_p , difusividad térmica κ , conductividad térmica k y densidad ρ .

variación porcentual de las distintas propiedades con la temperatura, dada por:

$$\delta\chi(T) = \frac{\chi(T) - \chi(T_m)}{\chi(T_m)} \quad (4.4)$$

con χ el valor de la propiedad, T la temperatura y $T_m = 23.5$ °C una temperatura de referencia. Las propiedades con una fuerte dependencia de la temperatura son las viscosidades dinámica μ , cinemática ν y los números adimensionales asociados Prandtl Pr y Rayleigh Ra . Las propiedades restantes α , C_p , κ , k y ρ varían levemente con la temperatura. En la tabla E.2 se encuentran los valores estimados para las distintas propiedades, evaluados a temperaturas de referencia relevantes a las experiencias realizadas.

Propiedad	Unidades	T [°C]			
		20.0	22.86	23.5	25.0
ρ	Kg/m ³	1246.390	1244.782	1244.421	1243.572
$\alpha \cdot 10^4$	1/K	4.4953	4.5309	4.5388	4.5575
μ	Pa s	0.51687	0.40870	0.38830	0.345061
$\nu \cdot 10^4$	m ² / s	4.1469	3.2833	3.1204	2.7748
k	W/(m K)	0.2953	0.2958	0.2959	0.2961
C_p	J/ Kg K	2486.7	2501.9	2505.3	2513.4
$\kappa \cdot 10^8$	m ² / s	9.5267	9.4965	9.4898	9.4743
Pr	. . .	4353.0	3457.3	3288.1	2928.7

Tabla 4.1: Propiedades del fluido de trabajo estimadas a distintas temperaturas.

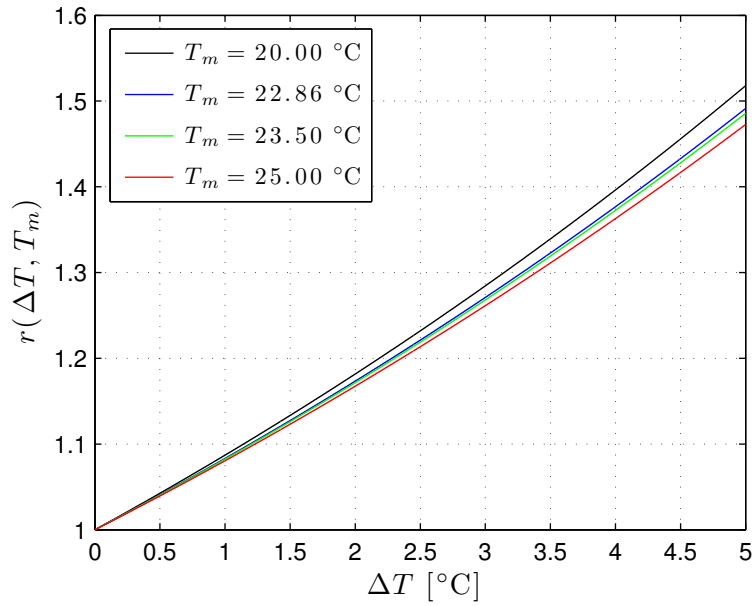
En las experiencias, la diferencia de temperatura impuesta en el fluido abarca un rango $\Delta T \leq 5$ °C. En él, las variaciones de viscosidad superan el límite del 10% que se utiliza comúnmente para validar la aproximación de Oberbeck-Boussinesq (cf. fig 4.4 (a)). Los fluidos con un comportamiento exponencial de la viscosidad se pueden caracterizar por la razón $r = \nu_{max}/\nu_{min}$, entre viscosidad máxima ν_{max} y mínima ν_{min} . Esta razón se muestra para la presente solución en la figura 4.5 y es baja considerando el límite $r \leq 5$ propuesto por Stengel [43]. Esto indica (cf. 3.4) que el número de Rayleigh crítico, Ra_c , no debería ser afectado por efectos NOB.

Variación de temperatura de referencia

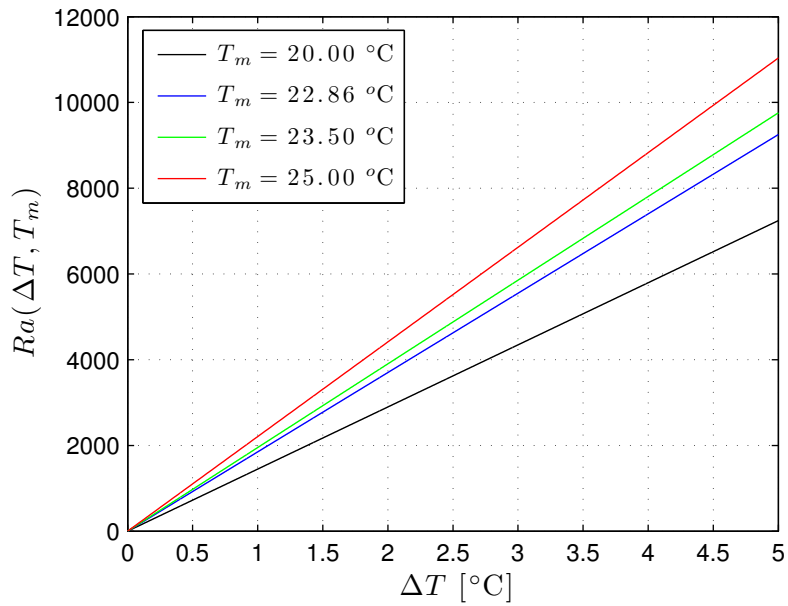
La variación de la temperatura de referencia a la que se evalúan las propiedades del fluido pueden influir significativamente en los números adimensionales Ra y Pr . Esta referencia es típicamente a la temperatura media entre placas, T_m , dada por:

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (4.5)$$

con T_1 y T_2 las temperaturas de la placa caliente y fría, respectivamente. En la figura 4.5 (b) se muestra el número de Ra en función de la diferencia de temperatura impuesta en el fluido $\Delta T = T_1 - T_2$. En ella observa que, para la presente solución, un desplazamiento de la temperatura media a ΔT constante entrega distintos valores de este número adimensional.



(a)



(b)

Figura 4.5: Razón entre viscosidades $r = \nu_{max}/\nu_{min}$ y número de Rayleigh Ra , en función de diferencias de temperatura ΔT y para distintas temperaturas de referencia T_m . (a) Razón entre viscosidades $r = \nu_{max}/\nu_{min}$. (b) Número de Rayleigh Ra .

4.2. Métodos de medición

El objetivo de las mediciones realizadas durante el presente trabajo consiste en caracterizar el fenómeno de convección en la celda de convección en términos de los números de Nusselt Nu (ec. 3.11) y Rayleigh Ra (ec. 3.2). Estos últimos se obtienen, respectivamente, de la medición de las siguientes cantidades en la capa de fluido [62]:

- El flujo de calor.
- El gradiente de temperatura.

La metodología de medición de estas cantidades tiene estrecha relación con un sistema de control con que cuenta el experimento. Por una parte, este sistema permite mantener en forma controlada un gradiente de temperatura deseado en la capa de fluido. Por otra, el sistema de control permite determinar la potencia suministrada al sistema para mantener dicho gradiente de temperatura. En la presente sección se describe este sistema luego de revisar la metodología de medición del flujo de calor y temperatura en las experiencias.

4.2.1. Medición del flujo de calor

La cantidad que finalmente se desea obtener de las mediciones del flujo de calor es el número de Nusselt. Para ello resulta de gran importancia la estimación de pérdidas, i.e. la componente de potencia suministrada que no fluye a través del fluido, sino que se disipa a través de otros elementos del montaje. De acuerdo a lo anterior, en la medición del flujo de calor se encuentran dos pasos principales:

- Medición de potencia suministrada al sistema.
- Estimación de la componente útil de esta potencia.

Estos pasos se describen en mayor detalle a continuación.

Medición de potencia suministrada al sistema

Como se mencionó en la descripción de la celda de convección (cf.4.1.1), el suministro de potencia al sistema se realiza mediante un elemento calefactor de resistencia $R_h \sim 9 \Omega$ ubicado debajo de la placa caliente. Este elemento consiste en una pista de un material conductor eléctrico sobre Kapton, una cinta eléctricamente aislante y resistente al calor. El elemento se encuentra conectado a la fuente DC HP E3632A en una configuración de 4 hilos, según se indica en la figura 4.6. Esta configuración permite a la fuente medir el voltaje en la carga (el elemento calefactor) y compensar automáticamente la caída de voltaje en los cables de alimentación. Para mantener una cierta diferencia de temperatura ΔT en la capa de fluido, el elemento calefactor disipa una potencia $p = u \cdot i$, con u el voltaje e i la corriente impuestos por la fuente. La potencia p suministrada al sistema se determina mediante un algoritmo de control Proporcional Integral Derivativo (PID) implementado en el sistema de control del experimento (cf. 4.3).

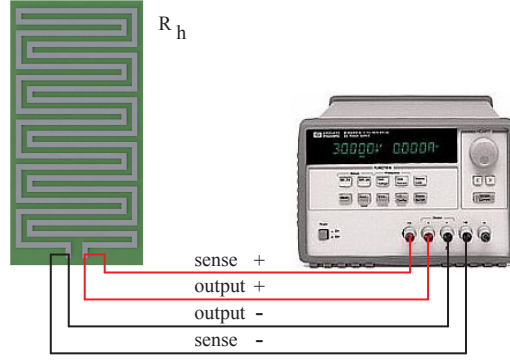


Figura 4.6: Conexión entre el elemento calefactor y fuente DC HP E3632A en configuración de 4 hilos. En esta configuración la fuente puede medir el voltaje en la carga (el elemento calefactor) mediante los cables *sense* en vez de los terminales de alimentación *output*. Esto permite a la fuente compensar automáticamente la caída de voltaje en los cables de alimentación.

Estimación de la potencia útil

Una particularidad del montaje experimental que facilita la estimación de la potencia útil consiste en el sistema de rotación de la celda de convección (cf. fig. 4.2). Este sistema permite medir la potencia suministrada al sistema, en una configuración de convección o conducción, invirtiendo la dirección del vector de gravedad sobre el gradiente de temperatura impuesto en la capa de fluido. De esta manera es posible generar un estado conductivo por sobre la diferencia de temperatura crítica $\Delta T > \Delta T_c$. Las mediciones de potencia en estas configuraciones se denominarán:

$$p = \begin{cases} p_{cd} & \text{celda en modo de conducción} \\ p_{cv} & \text{celda en modo de convección} \end{cases}$$

y de ellas se desea obtener las componentes del flujo de calor a través del fluido por conducción $Q_{f,cd}$ y por convección $Q_{f,cv}$.

Como se indica en el esquema de la figura 4.7 (a), sólo parte de la potencia p suministrada al sistema por elemento calefactor fluye como una componente útil Q_f a través del fluido. La potencia restante se reparte entre las componentes Q_a a través de paredes laterales y pérdidas Q_p . De esta manera el balance térmico es:

$$p = Q_f + Q_a + Q_p \quad (4.6)$$

El método utilizado en [13] para modelar estos flujos de calor consiste en expresar la potencia medida en régimen conductivo estacionario p_{cd} en términos las conductancias térmicas del fluido g_f , paredes laterales g_a y aislación g_p :

$$p_{cd} = \underbrace{g_f \Delta T}_{Q_{f,cd}} + \underbrace{g_a \Delta T}_{Q_a} + \underbrace{g_p \Delta T}_{Q_p} \quad (4.7)$$

Las conductancias del fluido g_f y paredes laterales g_a corresponden a las constantes de la

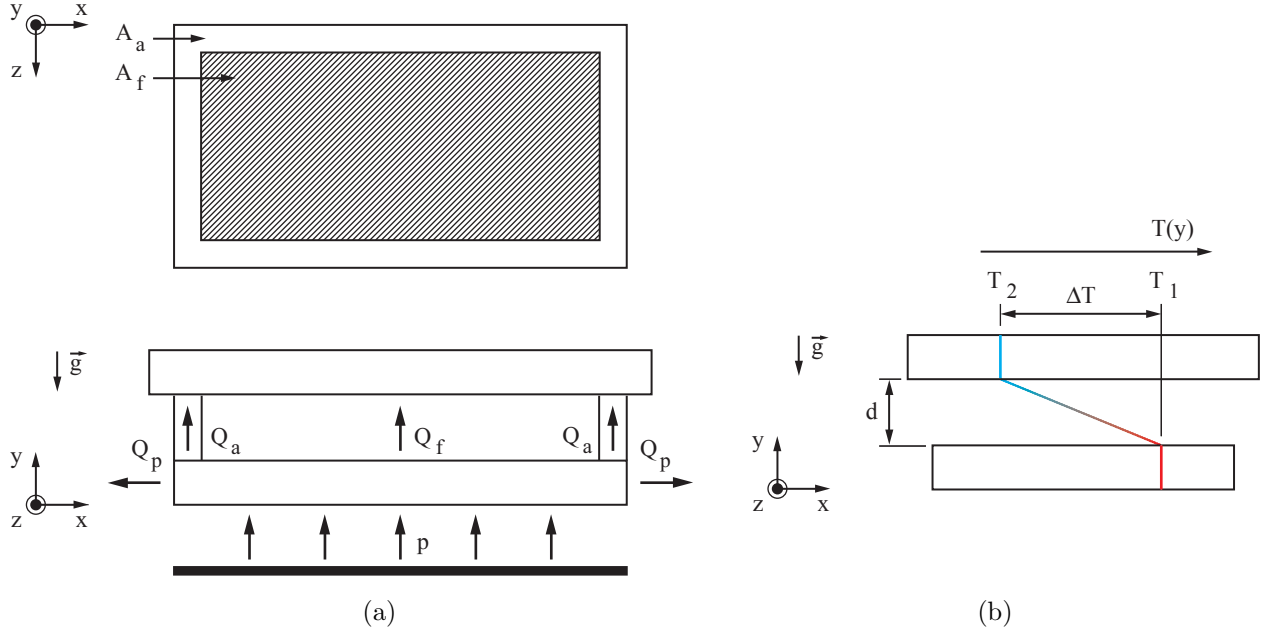


Figura 4.7: Transferencia de calor en la celda de convección. (a) Flujo de calor en la celda. La potencia p que suministra el elemento calefactor al sistema se disipa en los flujos de calor en el fluido Q_f , en paredes laterales Q_a y en pérdidas de calor Q_p . En la parte superior de la figura se indican las áreas transversales A_f y A_a del fluido y paredes de acrílico. (b) Perfil de temperatura vertical $T(y)$ en la celda. La capa de fluido de espesor d se encuentra a una diferencia de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$. En las placas se supone un perfil de temperatura uniforme.

ley de Fourier:

$$g_f = \frac{k A_f}{d} \quad y \quad g_a = \frac{k_a A_a}{d} \quad (4.8)$$

con A_f y A_a las áreas transversales del fluido y paredes de acrílico, respectivamente, según se indica en la figura 4.7 (a). Las conductancias se obtienen en dicha referencia de las propiedades tabuladas para ambos elementos y junto con la expresión (4.7) se determina el término g_p . La componente $Q_{f,cv}$ se obtiene entonces de la diferencia:

$$Q_{f,cv} = p_{cv} - p_{cd} \quad (4.9)$$

donde $Q_{f,cv}$ $Q_{f,cd}$ se relacionan con el número de Nusselt Nu por:

$$Q_f \equiv Q_{f,cd} + Q_{f,cv} \equiv Nu g_f \Delta T \quad (4.10)$$

En el método anterior se encuentran los siguientes supuestos:

- Las pérdidas de calor son idénticas en regímenes conductivo y convectivo.
- La distribución de temperatura en las placas es uniforme.

El primer supuesto se puede descartar si, para efectos prácticos, el flujo de calor es solamente a través del fluido y paredes laterales. Otra condición que permite asumir este supuesto

es si las temperaturas en las distintas zonas de la celda de convección se mantienen constantes en ambos regímenes. El segundo punto se discute en más detalle a continuación.

Perfil de temperatura en placas

En ciertos trabajos, como [13] discutido en el punto anterior, la temperatura en las placas se registra mediante sensores y este valor se mantiene para la interface entre ellas y el fluido. En otros trabajos, la diferencia de temperatura medida se corrige restando la caída en las placas estimada de los perfiles de temperatura en estado conductivo. Para evaluar si se debe efectuar esta corrección para el presente montaje experimental se discute en esta sección el modelo térmico de una celda de convección propuesto por [63].

Un esquema del modelo térmico similar al mencionado anteriormente se muestra en la figura 4.7 (a). En el presente caso se representan los elementos por sus conductancias térmicas y se define la diferencia ΔT con respecto a la altura media de las placas, la cual se mantiene constante mediante el sistema de control de la experiencia (cf. 4.3). El modelo considera un acoplamiento térmico débil entre fluido y paredes laterales, y por lo tanto, en forma independiente el flujo de calor a través de estos elementos. En la figura 4.7 (b) se indican las caídas de temperatura de la placa caliente ΔT_{hp} y placa fría ΔT_{cp} . En ausencia de pérdidas éstas son:

$$\Delta T_{hp} = \frac{p}{g_{hp}} \quad \Delta T_{cp} = \frac{p}{g_{cp}} \quad (4.11)$$

con g_{hp} y g_{cp} las conductancias térmicas de las placas respectivas. La diferencia de temperatura ΔT se puede escribir entonces como:

$$\Delta T = \left(\frac{1}{Nu g_f + g_a} + \frac{1}{2g_{hp}} + \frac{1}{2g_{cp}} \right) p \quad (4.12)$$

De esta expresión se observa que, independiente de la propiedades de las placas, para un comportamiento creciente de $Nu(Ra)$ eventualmente se tendrá $Nu \gg 1$ y las conductancias térmicas de las placas dominaran el sistema [63].

	Conductividad térmica [W/(m K)]		Área transversal [10 ⁻² ·m ²]		Separación vertical [10 ⁻² ·m]		Conductancia térmica [W/°C]	
Fluido	k	0.296	A_f	0.9820	d	2.35	g_f	0.1237
Paredes laterales	k_a	0.193	A_a	0.4646	d	2.35	g_a	0.0382
Placa caliente	k_s	16.27	A_{hp}	1.4466	e_p	1.6	g_{hp}	14.710
Placa fría	k_s	16.27	A_{cp}	1.9872	e_p	1.6	g_{cp}	20.207

Tabla 4.2: Conductancias térmicas y propiedades relacionadas de distintos elementos de la celda de convección.

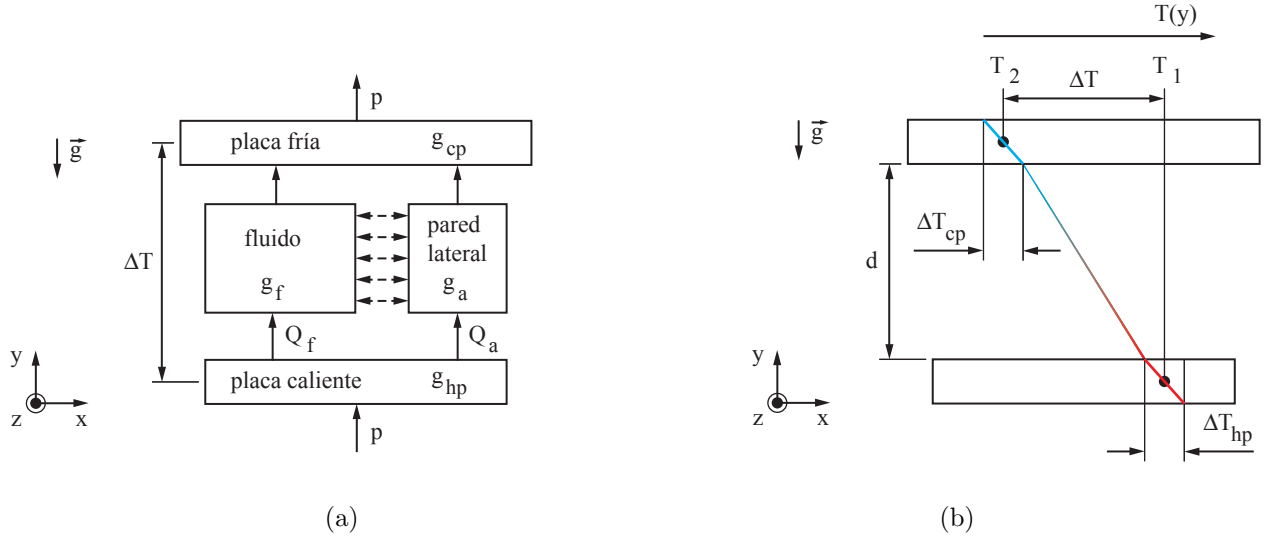


Figura 4.8: Transferencia de calor en la celda de convección considerando el perfil de temperatura en placas. (a) Modelo térmico propuesto por [63]. Las conductancias térmicas para los elementos son: g_f fluido, g_a pared lateral, g_{hp} placa caliente y g_{cp} placa fría. El modelo considera una interacción débil entre fluido y paredes laterales, por lo que la potencia p disipada por el elemento calefactor se disipa como flujos de calor independientes a través del fluido Q_f y paredes laterales Q_a . (b) Perfil de temperatura vertical $T(y)$ a través de la celda. Se indican las caídas de temperatura en la placa fría ΔT_{cp} y placa caliente ΔT_{hp} y la diferencia de temperatura entre placas ΔT .

En el presente trabajo, aún cuando las placas son de acero inoxidable, la caída de temperatura en ellas no es significativa. La conductividad térmica del acero inoxidable es ~ 25 veces menor al cobre, típicamente utilizado para estos fines, sin embargo las conductancias térmicas de las placas son bastante mayores a las del fluido y paredes laterales. Ésto se observa en la tabla 4.2, donde las placas se consideraron como bloques de espesor 16 mm. El rango de estudio del presente trabajo recae en números de Ra moderados, con una potencia máximo de trabajo $p \sim 2$ W y $Nu \sim 2.5$. Para estas condiciones, los términos en la ec. (4.12) asociados a la caída de temperatura en las placas representan un $\sim 2 - 3\%$ de la diferencia de temperatura ΔT .

Otro aspecto que cabe considerar es si las superficies de las placas barridas por el fluido se encuentran a una temperatura uniforme. Para las propiedades del presente montaje se debe cumplir [63]:

$$C_u \equiv \frac{\rho_s C_{p,s} k_s}{\rho C_p Nu k} \gg 1 \quad (4.13)$$

con $\rho_s = 7710$ Kg/m³ la densidad y $C_{p,s} = 502$ J/(Kg K) el calor específico de las placas. Considerando que para el presente trabajo $Nu < 2.5$ se obtiene $C_u \gtrsim 28$ por lo que se asumirá válida esta condición.

4.2.2. Medición de temperatura

La medición de temperatura en la celda de convección se realiza con el objetivo principal de obtener la diferencia o gradiente de temperatura en la capa de fluido para luego determinar el número de Rayleigh. Esta medición no sólo se encuentra asociada a este número, sino además sistema de control de la experiencia. Durante el presente trabajo se observó que el método de medición de temperatura de los trabajos previos [58–60] generaba una componente de ruido que afecta al sistema de control y la medición de la potencia suministrada al sistema (cf. 4.3). Esto motivó la búsqueda de métodos alternativos de medición de temperatura que se describen a continuación.

En los trabajos previos se contaba con dos tipos de sensores:

- **Sensores RTD-100.** Los sensores RTD-100 son de platino y se caracterizan generalmente por su valor de resistencia a 0 °C, en este caso 100 Ω . Su variación de resistencia R_R es prácticamente lineal y sigue la relación:

$$R_R = R_0[1 + aT + bT^2] \quad (4.14)$$

donde a y b son constantes, y R_0 es la resistencia a 0 °C. Los sensores RTD-100 entregan una gran estabilidad y una señal más cerca a una respuesta lineal que el resto de los sensores eléctricos de temperatura. Se caracterizan también por un tiempo de respuesta lento y baja sensibilidad. Estos sensores permitían registrar la temperatura de ambas placas y ambiente T_{amb} al exterior de la celda de convección (cf. 4.1.1), según se indica en la figura 4.9 (a). La medición de su resistencia se realizaba en configuración de 4 hilos con un multímetro digital Keithley 2000 de 6 1/2 dígitos y tarjeta de 9 canales 2001-TCSCAN.

- **Elemento calefactor.** Este elemento ubicado debajo de la placa caliente (cf. fig. 4.9 (a)) permite simultáneamente suministrar potencia al sistema y ser utilizado como sensor de temperatura de esta placa. Su temperatura T_h y resistencia R_h siguen una ley prácticamente lineal ajustada por constantes m_h y b_h :

$$T_h(R_h) = m_h R_h + b_h \quad (4.15)$$

Su resistencia se obtiene de la ley de Ohm $R_h = u/i$, con u e i el voltaje y corriente impuestos por la fuente DC HP E3632A. La lectura de su resistencia, y por lo tanto de su temperatura, sólo se puede determinar mediante este método para potencias $p > p_{min}$, con $p_{min} = 0.4$ W la potencia mínima de lectura. Esto debido a la resolución de la fuente HP E3632A. Aún cuando la medición de su resistencia se realiza en configuración de 4 hilos, se observa en ella una cierta componente de ruido. Este se reduce mediante un promedio móvil con parámetro de memoria τ dado por:

$$\langle R_h(t_i) \rangle_\tau = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \langle R_h(t_{i-1}) \rangle_\tau + \frac{R_h(t_i)}{\tau} \quad (4.16)$$

donde t_i es el instante de muestreo.

Durante el presente trabajo se implementaron los siguientes sensores:

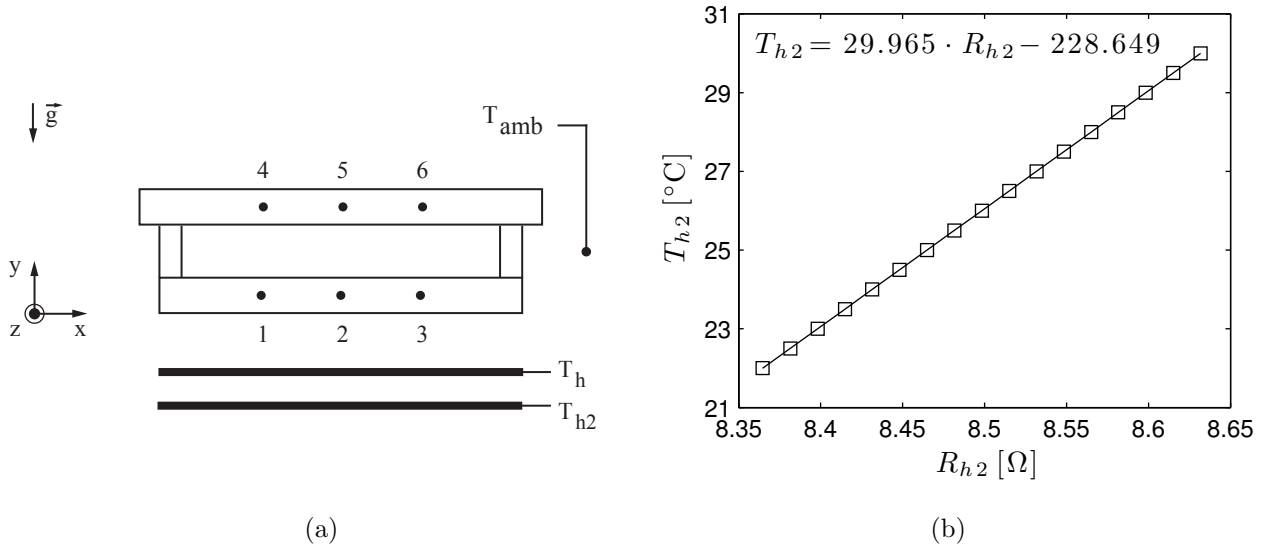


Figura 4.9: Medición de temperatura en la celda de convección. (a) Disposición de sensores de temperatura. En los trabajos previos se registraba mediante sensores RTD-100 la temperatura ambiente T_{amb} y de las placas en las posiciones (1-6). El elemento calefactor suministra potencia y actúa como sensor de temperatura, dado que su temperatura T_h es una función lineal de su resistencia R_h . En una etapa de prueba del presente trabajo se utilizó un segundo elemento calefactor T_{h2} solo como sensor de temperatura y luego se reemplazaron los sensores RTD-100 por termistores. (b) Curva de calibración del segundo elemento calefactor, de su temperatura T_{h2} en función de su resistencia R_{h2} . Datos experimentales (\square) y ajuste $T_{h2}=29.965 \cdot R_{h2} - 228.649$.

- **Un segundo elemento calefactor.** Este elemento se implementó en una etapa de prueba como alternativa a un sensor RTD-100 para el control de temperatura de la placa caliente (cf. 4.3). El elemento, ubicado debajo del primer elemento calefactor (cf. fig. 4.9 (a)), es utilizado sólo como sensor de temperatura, la cual se obtiene a partir de una calibración previa $T_{h2}(R_{h2})$ realizada *in situ* que se muestra en la figura 4.9 (b). Al medir su resistencia R_{h2} con el multímetro Keithley 2000 se obtiene una mayor precisión que en el caso del primer elemento calefactor y se elimina la restricción de una potencia mínima p_{min} de trabajo.
- **Termistores.** Estos sensores conocidos como *thermally sensitive resistors* se caracterizan por un valor de resistencia bastante mayor al de los sensores RTD-100. Esta característica permitió medir su resistencia en una configuración de 2 hilos y por lo tanto la utilización simultánea de un mayor número de canales del multímetro Keithley. Se ubicaron 3 de estos sensores en la placa caliente, 2 en la placa fría y uno al exterior de la celda de convección e aislamiento para registrar la temperatura ambiente T_{amb} (cf. fig. 4.9 (a)).

Como se discute más adelante (cf. 4.3), el método principal de medición se realizó mediante termistores, los cuales se discuten a continuación en mayor detalle.

Calibración de termistores

Los termistores presentan otras características, además de su elevado valor de resistencia: alta sensibilidad, baja masa térmica y un tiempo de respuesta rápido. Además, sus propiedades pueden variar durante un cierto período de tiempo, sin embargo esto último no se observó durante las mediciones realizadas. A diferencia de los sensores RTD, los termistores no tienen una respuesta lineal, descrita generalmente por la ecuación *Steinhart-Hart*:

$$\frac{1}{T_t} = a + b \ln(R_t) + c \ln^3(R_t) \quad (4.17)$$

donde a , b , c son constantes, T_t la temperatura en grados Kelvin y R_t la resistencia del termistor. En las experiencias se utilizaron termistores del tipo Negative Temperature Coefficient (NTC), i.e. disminuyen su valor de resistencia al aumentar la temperatura. Se utilizaron 4 termistores de 10 k Ω con encapsulado epóxico (código RS 151-237) y 2 termistores sumergibles de 4.7 k Ω con encapsulado de vidrio (código RS GM 472). Los primeros de 2.4 mm y los segundos de 1.5 mm de diámetro. Los termistores se ubicaron dentro de un tubo de bronce como soporte según se indica en la figura 4.10 (a). En sus conexiones se utilizó cable blindado y trenzado, soldado a los terminales con alambre de bobina y aislado eléctricamente con barniz.



Figura 4.10: Calibración de termistores. (a) Esquema de los termistores fabricados. (b) Método de calibración. Los termistores se ubicaron al interior de un cilindro perforado de cobre y este último al interior del baño térmico Neslab RTE-210, cuya temperatura T_b se ajusta mediante controlador digital de este equipo. La calibración se realizó imponiendo la temperatura de trabajo del baño térmico en rango $T_b \in [14, 30]$ °C.

El método utilizado para la calibración de los termistores se indica en la figura 4.10 (b). Este consistió en ubicar los sensores en las perforaciones de un cilindro de cobre, con pasta conductiva térmica en el espacio libre. El cilindro se sumergió en el baño térmico Neslab RTE-210, cuya temperatura de trabajo T_b es la referencia de calibración y se ajusta con una estabilidad ± 0.01 °C mediante el controlador digital de este equipo. El objetivo del cilindro es termalizar los sensores y filtrar las fluctuaciones de temperatura en el baño térmico. La temperatura del baño térmico impuso en forma de escalones, en intervalos de 0.25 °C, duración 1 h y que abarcaron un rango de [14, 30] °C. Durante el proceso se adquirió a 0.1 Hz la resistencia de los termistores mediante el multímetro Keithley 2000.

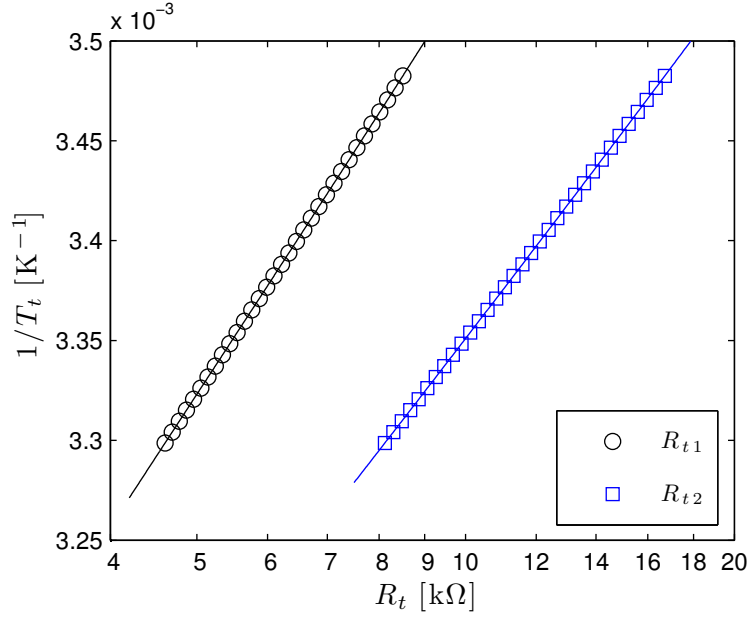


Figura 4.11: Curvas de calibración de dos termistores. Datos experimentales para termistores de resistencias (\circ) $R_{t1} \sim 4.7$ y (\square) $R_{t2} \sim 10$ k Ω y ajustes (—) según la ecuación (ec. 4.19).

Para cada termistor $i \in 1..5$ se calculó su valor de resistencia promedio $\overline{R_{ti}}$ en cada escalón como:

$$\overline{R_{ti}} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} R_{ti}(t_j) \quad (4.18)$$

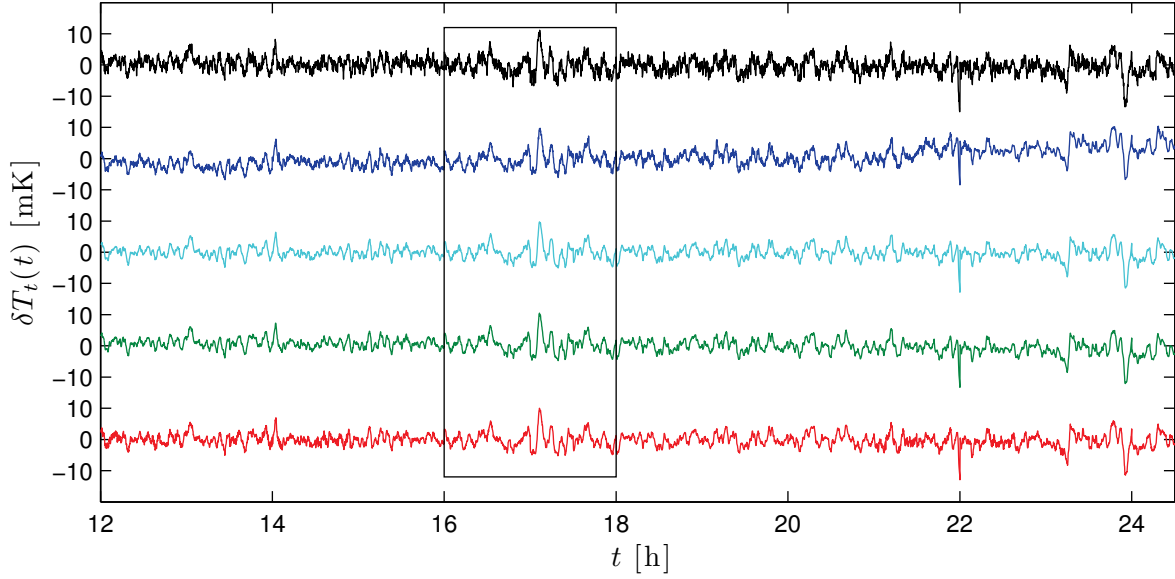
con t_j el instante de muestreo y N_p el número de puntos adquiridos en el último intervalo de 0.5 h en cada escalón donde la temperatura del baño térmico se encuentra estabilizada. Los valores de resistencia se ajustaron a una relación con coeficientes a , b , c y d similar a la ec. (4.17):

$$\frac{1}{\overline{T_t}} = a + b \ln(R_t) + c \ln^2(R_t) + d \ln^3(R_t) \quad (4.19)$$

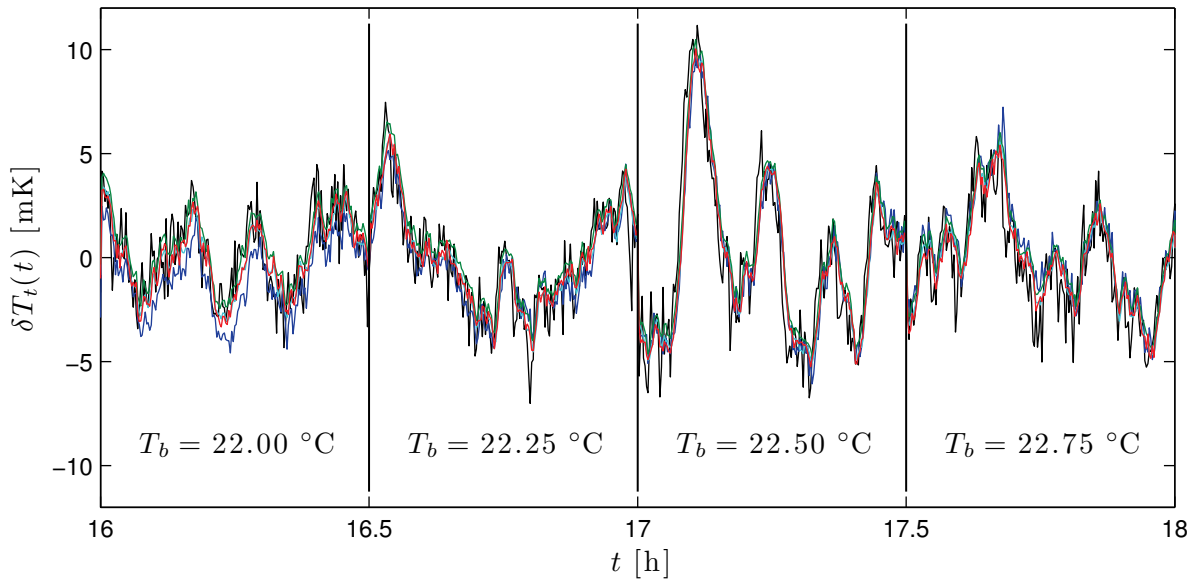
Los ajustes obtenidos para dos termistores de resistencias $R_{t1} \sim 4.7$ k Ω y $R_{t2} \sim 10$ k Ω se muestran en la figura 4.11, donde se observa que su comportamiento se describe correctamente por la ec. (4.19). La evolución temporal de los sensores en términos de la diferencia $\delta T_{ti}(t)$ entre la temperatura $T_{ti}(t)$ de cada termistor y la temperatura promedio $\langle \overline{T_t} \rangle_t$ del grupo de termistores se muestra en la figura 4.12 (a). Las series corresponden al total de datos adquiridos en los intervalos de promedio durante la prueba, en el rango de temperatura de trabajo del baño térmico $T_b \in [20, 26]$ °C. Las series se encuentra dada por la diferencia $\delta T_{ti}(t)$:

$$\delta T_{ti}(t) = T_{ti}(t) - \langle \overline{T_t} \rangle_t \quad \text{con} \quad \langle \overline{T_t} \rangle_t = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \overline{T_{ti}} \quad (4.20)$$

con $N_s = 5$ el número de termistores y $\overline{T_{ti}}$ su temperatura promedio en cada escalón. En



(a)



(b)

Figura 4.12: Fluctuación de la temperatura de termistores al interior del baño térmico. (a) Evolución temporal de la diferencia $\delta T_{ti}(t)$ entre la temperatura $T_{ti}(t)$ de cada termistor y la temperatura promedio $\langle \bar{T}_t \rangle_t$ del grupo de termistores. Las series corresponden a distintas temperaturas de trabajo del baño térmico en el rango $T_b \in [20, 26]$ °C. (b) Detalle que muestra la correlación temporal de las series de los 5 termistores indicadas por el recuadro en la figura (a).

	σ_{t1}	σ_{t2}	σ_{t3}	σ_{t4}	σ_{t5}
$T_b \in [20, 26] \text{ }^\circ\text{C}$	2.1	2.2	2.1	2.9	2.4
$T_b \in [14, 30] \text{ }^\circ\text{C}$	2.3	2.6	2.2	3.2	2.5

Tabla 4.3: Desviación estándar en [mK] para cada termistor con respecto al grupo de termistores de acuerdo a la expresión (4.21).

el detalle de la figura 4.12 (b) muestra la sensibilidad de los sensores implementados, donde se observa que las series se encuentran correladas en el tiempo y siguen las fluctuaciones de temperatura que impone el baño térmico sobre el bloque de cobre perforado. Para caracterizar cada termistor con respecto al grupo de termistores se calculó la desviación estándar de su parámetro δT_{ti} :

$$\sigma_{ti} = \left(\frac{1}{N_p - 1} \sum_{j=1}^{N_p} (\delta T_{ti}(t_j) - \delta \bar{T}_{ti})^2 \right)^{1/2} \quad (4.21)$$

donde $\delta \bar{T}_{ti}$ es el promedio de δT_{ti} sobre el intervalo de temperatura considerado y con un número de puntos N_p . Los valores obtenidos se encuentran en la tabla 4.3, donde los sensores $i = 1..5$ corresponden a las series de la figura 4.12 (a) en orden ascendente. Los rango de temperatura indicados en la tabla son los abarcados en las experiencias $T_b \in [20, 26] \text{ }^\circ\text{C}$ y en la calibración $T_b \in [14, 30] \text{ }^\circ\text{C}$.

El proceso de selección de sensores de temperatura descrito en la presente sección permitió contar con sensores de alta precisión $\sim 10^{-3} \text{ K}$ (cf. tabla 4.3). Éstos fueron de gran importancia para la realización de las experiencias, dado que permitieron mejorar notablemente la resolución en la potencia útil suministrada al sistema, según se discute en la próxima sección.

4.3. Sistema de control de la celda de convección

El sistema de control tiene como objetivo imponer un gradiente de temperatura deseado en la capa de fluido y medir el flujo de calor en la celda de convección. Para ello comanda la cadena de medición del experimento que se muestra en la figura 4.13 y que consiste básicamente en un sistema de control de temperatura independiente para cada placa. El control de la placa fría realiza la extracción de calor (cf. 4.1.1), mientras que el control de la placa caliente realiza el suministro y medición de potencia (cf. 4.1.1, 4.2.1). Ambos controladores requieren de la medición de temperatura, que se realiza en las placas y en el ambiente (cf. 4.2.2). Esta última medición permite ajustar las temperaturas de trabajo para reducir las pérdidas de calor del sistema. Para el desarrollo de las experiencias el sistema de control cuenta con las siguientes funciones:

- **Automatización.** Las realizaciones de las experiencias se encuentran automatizadas y se comanda desde un PC de acuerdo a las instrucciones de un programa de adquisición escrito en Ansi C. Esto obedece a un requerimiento práctico, dado que los tiempos de adquisición son elevados, del orden de varios días o semanas.
- **Interrogación y comando de equipos.** El PC con el programa de adquisición se comunica mediante interface GPIB con los equipos a una frecuencia de muestreo de 0.1 Hz. Esto se realiza para la adquisición de datos, determinar estado de los equipos e imponer en el próximo paso de tiempo la potencia y temperatura del baño térmico determinada por el programa de adquisición.
- **Seguridad.** El sistema cuenta con medidas de seguridad que permiten el funcionamiento autónomo de la experiencia. Estas medidas consideran el rango de trabajo de los equipos, la falla de alguno de ellos o posibles cortes en el suministro de luz eléctrica.

El sistema de control se desarrolló inicialmente para el estudio de convección en laponita y otros fluidos por [58–60]. La potencia de trabajo en la implementación inicial fue del orden de $2 < p < 16$ W, considerablemente mayor al rango $p < 2$ W de las presentes experiencias. Esta diferencia motivó la búsqueda de nuevas alternativas de control, orientadas a un control estable y con una razón señal-ruido adecuada a potencias bajas. En la próxima sección se describe la implementación inicial del sistema de control y luego se discuten las alternativas propuestas.

4.3.1. Control orientado a potencias elevadas

En el sistema de control que se orienta a potencias elevadas, la temperatura de las placas que confinan al fluido se ajusta mediante los siguientes controladores:

- **Controlador de temperatura de la placa caliente.** El control de temperatura de esta placa se realiza de acuerdo al diagrama de bloques en la figura 4.14. La planta o elemento a controlar es la placa caliente y la variable de control es la temperatura del elemento calefactor T_h , la cual se desea mantener a una señal de referencia r_h . Para ello se utiliza un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) [20] implementado en el programa de adquisición. El controlador calcula el error:

$$e(t) = r_h(t) - T_h(t) \quad (4.22)$$

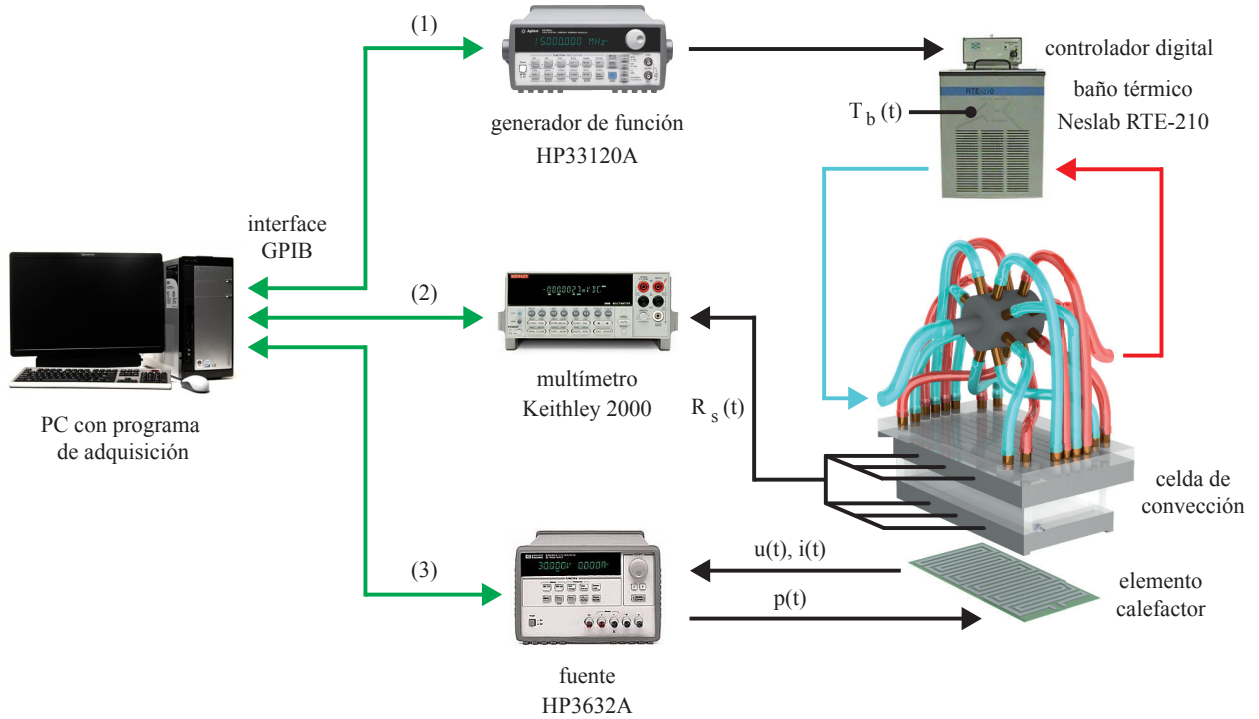


Figura 4.13: Cadena de medición del experimento. El sistema de control comanda de esta cadena para realiza las tareas: (1) Extracción de calor de la placa fría. El generador de función HP33120A ajusta la temperatura de trabajo $T_b(t)$ del baño térmico Neslab RTE-210 a través del controlador digital de este equipo que provee el agua de enfriamiento a la placa fría. (2) Medición de temperatura. El multímetro Keithley 2000 registra la resistencia $R_s(t)$ de sensores de temperatura ubicados en la celda y el ambiente. (3) Suministro y medición de potencia en la placa caliente. La fuente HP3632A impone el voltaje $u(t)$ y corriente $i(t)$ en el elemento calefactor y este disipa una potencia $p(t)$.

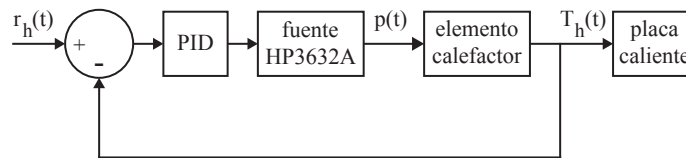


Figura 4.14: Diagrama de bloques para el control de temperatura de la placa caliente. La variable de control temperatura del elemento calefactor, T_h , que se ajusta a la señal de referencia, $r_h(t)$, mediante la potencia $p(t)$ que determina el controlador y suministra la fuente HP3632A.

y lo utiliza para determinar la potencia $p(t)$ que suministra la fuente HP3632A, dada por:

$$p(t) = P e(t) + I \int_0^t e(t) dt + D \frac{de(t)}{dt} \quad (4.23)$$

con $P = 10$, $I = 0.6$ y $D = 2$ los coeficientes del controlador ajustados por [58, 59].

- **Controlador de temperatura de la placa fría.** El control de temperatura de esta placa se realiza de acuerdo al diagrama de bloques en la figura 4.15. La variable de control es la temperatura del baño térmico T_b y se ajusta a la señal de referencia r_b utilizando el control de temperatura de este equipo. Éste consiste en un controlador digital y, en el presente caso, un generador de función HP33120A que convierte la señal de referencia r_b a una señal de voltaje.

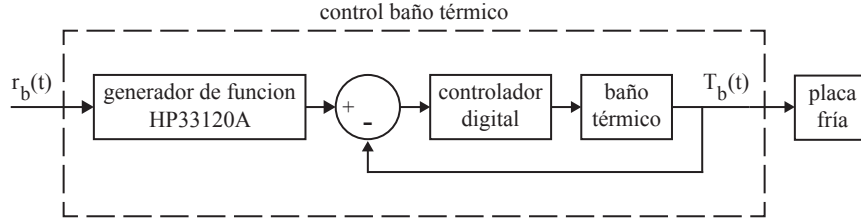


Figura 4.15: Diagrama de bloques para el control de temperatura de la placa fría. La variable de control es la temperatura del baño térmico, T_b , que se ajusta al valor de referencia, r_b , mediante el control de temperatura del baño térmico. Este último consiste en un controlador digital y un generador de función convierte la señal de referencia r_b a una señal de voltaje.

Estrategia de control

Las señales de referencia de los controladores de las placas caliente y fría, r_h y r_b , respectivamente se obtienen de la estrategia de control que se indican en la figura 4.16. La estrategia consiste en los siguientes puntos:

- **Perfil de temperatura en placas.** Se consideran la variaciones de temperatura en las placas caliente y fría, ΔT_{hp} y ΔT_{cp} , respectivamente. Estas variaciones, cuya magnitud no es despreciable a potencias de trabajo elevadas (cf. 4.2.1), se estiman por:

$$\Delta T_{hp} = c_h \langle p \rangle_\tau \quad \text{y} \quad \Delta T_{cp} = c_c \langle p \rangle_\tau \quad (4.24)$$

con p la potencia suministrada y $\langle \rangle_\tau$ el promedio móvil de potencia con parámetro de memoria τ mencionado previamente (cf. ec. (4.16)). Las constantes c_h y c_b relacionan las variaciones en las placas con la temperatura del elemento calefactor, T_h , y del agua de enfriamiento, T_b , respectivamente. Las constantes provienen de una calibración previa y consideran las pérdidas de calor del agua de enfriamiento y en la celda de convección.

- **Seguimiento de la temperatura ambiente.** Este seguimiento se realiza con el objetivo de minimizar y mantener constantes las pérdidas de calor. Para ello, la temperatura media del fluido, T_m , se equipara a un promedio móvil de la temperatura ambiente, T_{amb} , es decir:

$$T_m = \langle T_{amb} \rangle_\tau \quad \text{con} \quad T_m = \frac{T_{1s} + T_{2s}}{2} \quad (4.25)$$

donde T_{1s} y T_{2s} son las temperaturas del fluido en contacto con las placas caliente y fría, respectivamente. El seguimiento se ilustra para señal arbitraria en la figura 4.16 (b), donde se observa la reducción de sus fluctuaciones rápidas mediante el promedio móvil.

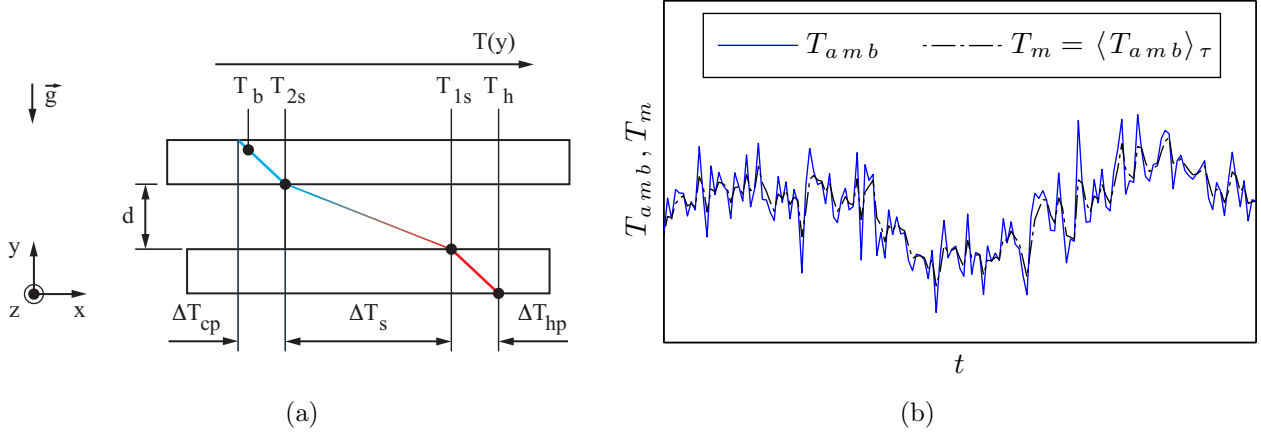


Figura 4.16: Estrategia de control para potencias elevadas. (a) El sistema de control mantiene una diferencia de temperatura en la capa de fluido, $\Delta T_s \equiv T_{1s} - T_{2s}$ considerando las variaciones en las placas caliente y fría, ΔT_{hp} y ΔT_{cp} , respectivamente. Estas variaciones se relacionan con la temperatura del elemento calefactor, T_h , y del agua de enfriamiento, T_b . (b) Se realiza un seguimiento de la temperatura ambiente para minimizar las pérdidas de calor. Para ello la temperatura media del fluido, $T_m = (T_{1s} + T_{2s})/2$, sigue al promedio móvil de la temperatura ambiente $\langle T_{amb} \rangle_\tau$.

De los puntos anteriores se obtienen las señales de referencia de los controladores del sistema, dados por:

$$r_h = \langle T_{amb} \rangle_\tau + \frac{\Delta T_s}{2} + c_h \langle p \rangle_\tau \quad \text{referencia para } T_h \quad (4.26)$$

$$r_b = \langle T_{amb} \rangle_\tau - \frac{\Delta T_s}{2} - c_b \langle p \rangle_\tau \quad \text{referencia para } T_b \quad (4.27)$$

que permiten imponer una diferencia de temperatura $\Delta T_s = T_{1s} - T_{2s}$ en la capa de fluido.

Desempeño de la estrategia de control

La estabilidad del control de temperatura de la placa caliente es una característica de gran importancia para la realización de las experiencias y se encuentra asociada principalmente a los coeficientes de su controlador PID (cf. ec. (4.23)). Como se mencionó previamente, estos coeficientes se ajustaron a los valores $P = 10$, $I = 0.6$ y $D = 2$ por [58, 59] para realizar experiencias en agua y en laponita en el rango de potencia $2 < p < 16$ W. Posteriormente, en las experiencias realizadas en agua por [60] se observó que el control de temperatura de esta placa se vuelve inestable para $p < 1$ W, rango en el cual la variable de control y la potencia oscilan, esta última con una amplitud elevada. La solución propuesta por dicha referencia para solucionar la inestabilidad del control a baja potencia consistió en el aumento de la amortiguación del control mediante los coeficientes $P = 5$, $I = 0.3$ y $D = 4$.

El desempeño del control de la placa caliente con los coeficientes propuestos por [60] se puede apreciar en la evolución temporal de potencia que se muestra en la figura 4.17. Esta adquisición se realizó por dicha referencia, utilizando una solución agua-glicerina con de 94 % en peso de glicerina, en régimen de convección. La serie consiste en una serie de eventos en

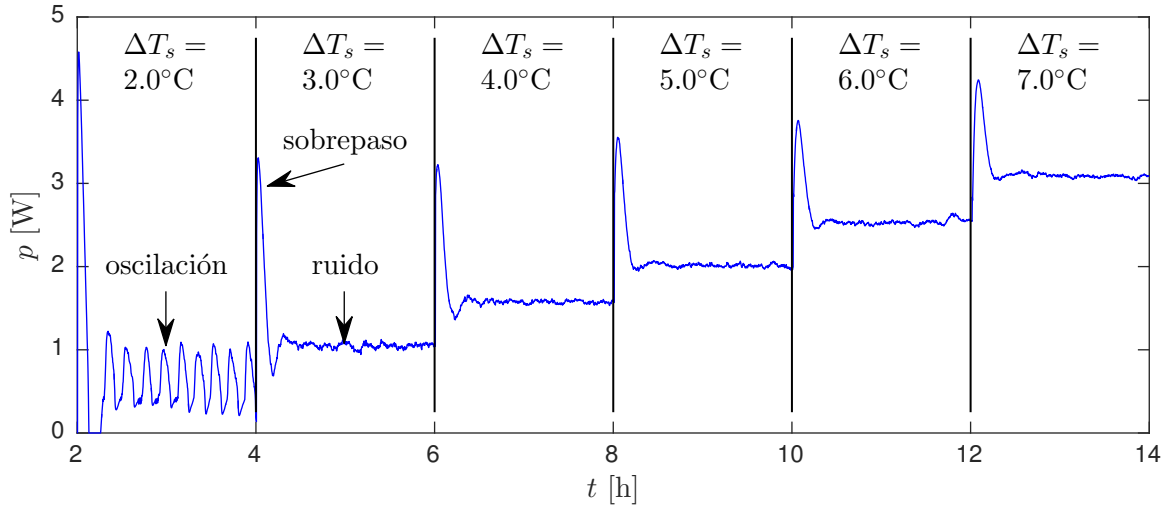


Figura 4.17: Evolución temporal de potencia en una experiencia con una solución agua-glicerina en régimen convección con coeficientes $P = 5$, $I = 0.3$ y $D = 4$ realizada por [60]. La serie corresponde a distintos eventos de duración 2 h en los que se imponen escalones de diferencia de temperatura ΔT_s en el fluido. Al inicio de cada evento se observa un sobrepaso, luego del cual la potencia debería alcanzar un valor estacionario. Se observa una componente de ruido en la serie y una oscilación de potencia de amplitud elevada para el evento $\Delta T_s = 2.0$ °C.

los que se imponen escalones de diferencia de temperatura, ΔT_s , en la capa de fluido. Al inicio de cada evento se observa un sobrepaso de potencia que suministra el calor requerido por la placa caliente para elevar en forma impulsiva su temperatura (cf. discusión sobre la fig. 5.3). Luego del sobrepaso, la celda de convección evoluciona idealmente hacia un equilibrio térmico y la potencia alcanza un valor estacionario. Esto no ocurre para el evento $\Delta T_s = 2.0$ °C y, en cambio, se observa la oscilación de potencia con amplitud ~ 0.8 W y período ~ 6 min. Las oscilaciones se observan en regímenes de conducción y convección para $p < 1$ W de acuerdo a esta y otras experiencias realizadas por [60]. Un segundo inconveniente que se observa en la serie consiste en la presencia de ruido y que afecta la resolución de los datos. En este caso el deterioro de la señal es bajo, debido a que la magnitud de potencia es elevada con respecto al ruido, sin embargo puede ser notorio a potencias menores en ausencia de oscilaciones. La evolución temporal del error para el controlador de la placa caliente en esta adquisición, que se muestra en la figura 4.18, confirma que ambos inconvenientes se encuentran asociados al sistema de control.

En la figura 4.18 (b) se muestra el error en el control de la placa fría, dado por la diferencia entre la temperatura registrada al centro de esta placa y su valor deseado, estimado del perfil de temperatura. De acuerdo a esta figura se observa lo siguiente:

- El error oscila con una pequeña amplitud ~ 0.03 °C para $\Delta T_s = 2.0$ °C, debido a la presencia de un término de potencia en la referencia para el baño térmico (cf. ec. (4.27)).
- Se genera un error estacionario u *offset* que aumenta con ΔT_s , pero que genera un mayor error relativo a menor ΔT_s . Este error se debe a que la constante c_b en las ecs.

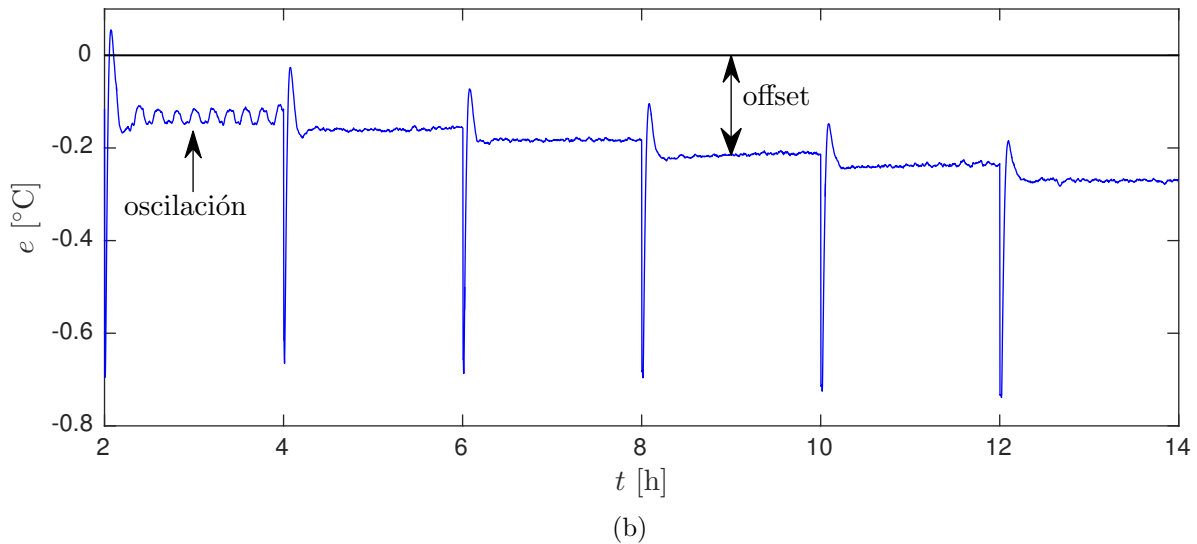
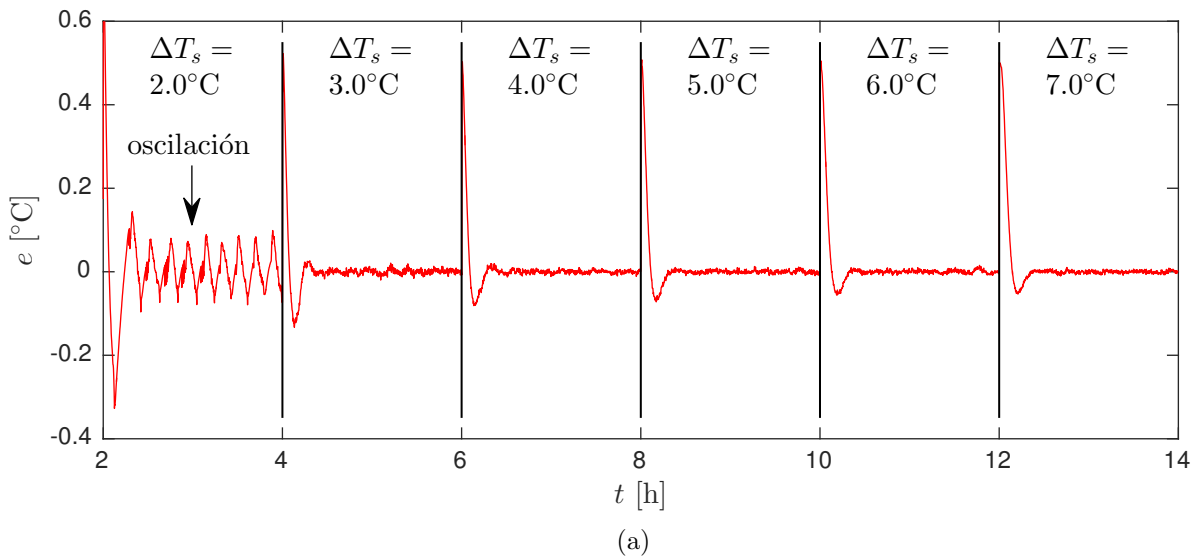


Figura 4.18: Evolución temporal de errores para la adquisición de la figura 4.17. (a) Error en el control de la placa caliente. Se observa la oscilación del error al imponer un escalón de diferencia de temperatura de $\Delta T_s = 2.0^\circ\text{C}$. (b) Error en el control de la placa fría. Se observa una oscilación del error de pequeña amplitud en el evento $\Delta T_s = 2.0^\circ\text{C}$ y un error de *offset* que aumenta con ΔT_s .

(4.24) y (4.27) debe compensar las pérdidas de calor del agua de enfriamiento y de la placa fría. Sin embargo, estas pérdidas de calor están asociadas a distintas variables: potencia, temperatura ambiente y diferencia de temperatura en la capa de fluido.

Aún cuando ambos controladores presentan inconvenientes, estos no fueron significativos para los trabajos previos. La presencia de ruido y oscilación del control de la placa caliente se encuentran fuera de su rango de trabajo de $2 < p < 16\text{ W}$. A su vez, el error estacionario en el control de la placa fría se corrigió luego de la adquisición de datos mediante la temperatura registrada por el sensor ubicado en dicha placa.

4.3.2. Control orientado a potencias pequeñas

De acuerdo a la discusión en la sección anterior, el sistema de control presenta los siguientes inconvenientes en el rango de trabajo de las presentes experiencias:

- Oscilación del control de temperatura de la placa caliente.
- Presencia de ruido en los datos de potencia.
- Presencia de un error estacionario en el control de temperatura de la placa fría.

El primer punto es el de mayor importancia, debido a que la oscilación de potencia observada en los trabajos previos imposibilita la realización de las presentes experiencias. Como se discutió en la sección anterior, este inconveniente se intentó solucionar previamente variando los coeficientes del control PID de la placa caliente. En el presente trabajo se partió del supuesto que el problema podría estar asociado al método de medición de temperatura y posiblemente a la presencia de ruido en el sistema. Esto último debido a que el ruido puede tener efectos adversos en un sistema de control [20]. Para abordar los problemas de oscilación y ruido se incorporaron en el control de la experiencia los métodos de medición de temperatura desarrollados durante el presente trabajo (cf. 4.2.2). Estos métodos permitieron además la implementación de un nuevo control de temperatura para placa fría que busca solucionar el tercer punto. A continuación se discuten éstas y otras modificaciones realizadas al sistema de control.

Una primera modificación al sistema de control consistió en cambiar la estrategia utilizada en los trabajos previos y para ello se evaluaron los siguientes puntos:

- **Perfil de temperatura en las placas.** Para las condiciones de las presentes experiencias, la variación de temperatura en cada placa es bastante pequeña (cf. 4.2.1). Por este motivo se decidió asumir en ellas una temperatura uniforme y realizar su corrección luego de la adquisición de datos.
- **Seguimiento de la temperatura ambiente.** El seguimiento se realiza para contrarrestar los efectos de esta variable no controlada en las pérdidas de calor. Este punto en la estrategia de control presenta los siguientes inconvenientes:
 - La dificultad para encontrar una función correcta de seguimiento, debido a que los distintos elementos del montaje filtran los efectos temperatura ambiente en forma desconocida.
 - Aún cuando se encuentre una función correcta de seguimiento, la estrategia requiere variar constantemente la temperatura media entre placas T_m . Para el fluido utilizado en el presente trabajo esto implica una variación importante de sus propiedades y produce una modulación temporal de los números de Rayleigh y Prandtl (cf. 4.1.2).
 - Al realizar el seguimiento se agrega un nueva componente a la potencia disipada por el elemento calefactor, necesaria para aumentar o disminuir la temperatura de la placa caliente y otros elementos del montaje.

Por los puntos anteriores se decidió no realizar un seguimiento de la temperatura ambiente, sino mantener la temperatura media entre placas a un valor constante durante una experiencia. En trabajos recientes que adoptan este último enfoque se cuenta con

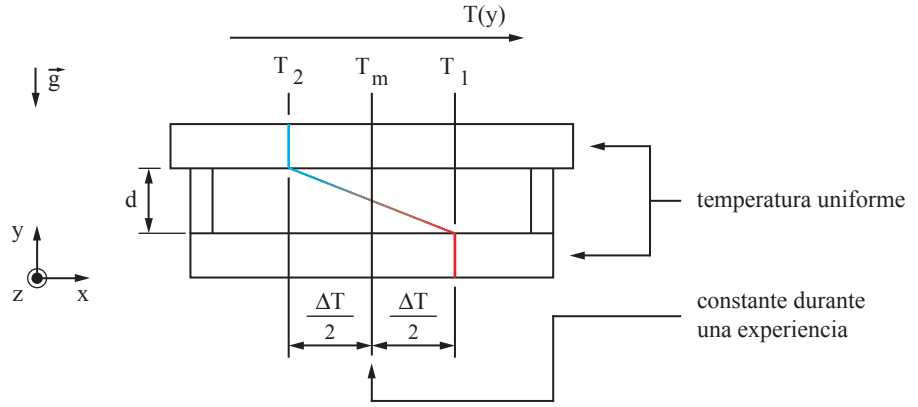


Figura 4.19: Estrategia de control del presente trabajo. Se asume que las placas caliente y fría se encuentran a temperaturas uniformes T_1 y T_2 , respectivamente. Es decir, la variación de la temperatura vertical $T(y)$ en la celda ocurre solo en la capa de fluido, que se encuentra a una diferencia de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$. La temperatura media $T_m = (T_1 + T_2)/2$ se fija a un valor constante.

un recipiente termalizado que contiene a la celda de convección [62, 64]. Aún cuando el presente montaje no cuenta con dicho sistema, se estabilizó la temperatura ambiente aumentando la aislación de la celda y sala donde ésta se encuentra.

De acuerdo a los puntos anteriores, las señales de referencia para los controladores de temperatura de ambas placas se fijan de manera de mantener las temperaturas:

$$T_1 = T_m + \frac{\Delta T}{2} \quad \text{y} \quad T_2 = T_m - \frac{\Delta T}{2} \quad \text{con} \quad T_m = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (4.28)$$

donde la temperatura media del fluido, T_m , se mantiene constante durante una experiencia. Por lo tanto, T_1 y T_2 son constante para un ΔT impuesto, según se indica en la figura 4.19.

Alternativas de control para la placa caliente

El uso de la temperatura del primer elemento calefactor, T_h , como variable de control para la placa caliente presenta ruido en la lectura de su resistencia y la imposibilidad realizar esta medición para $p < 0.4$ W (cf. 4.2.2). Por lo tanto, se consideraron las siguientes alternativas discutidas previamente:

- **Control con un segundo elemento calefactor.** Este elemento calefactor no se utiliza con el objetivo de proporcionar calor al sistema, sino que cumple la función de sensor. Su temperatura, T_{h2} , corresponde a una medida global al estar promediada sobre su superficie y es la variable de control, según se indica en la figuras 4.20 (a-b)).
- **Control con termistores.** La variable de control es una medida representativa de la temperatura de la placa caliente, T_1 , obtenida del promedio de tres termistores, T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} , distribuidos a media altura en dicha placa, según se indica en la figuras 4.20 (c-d).

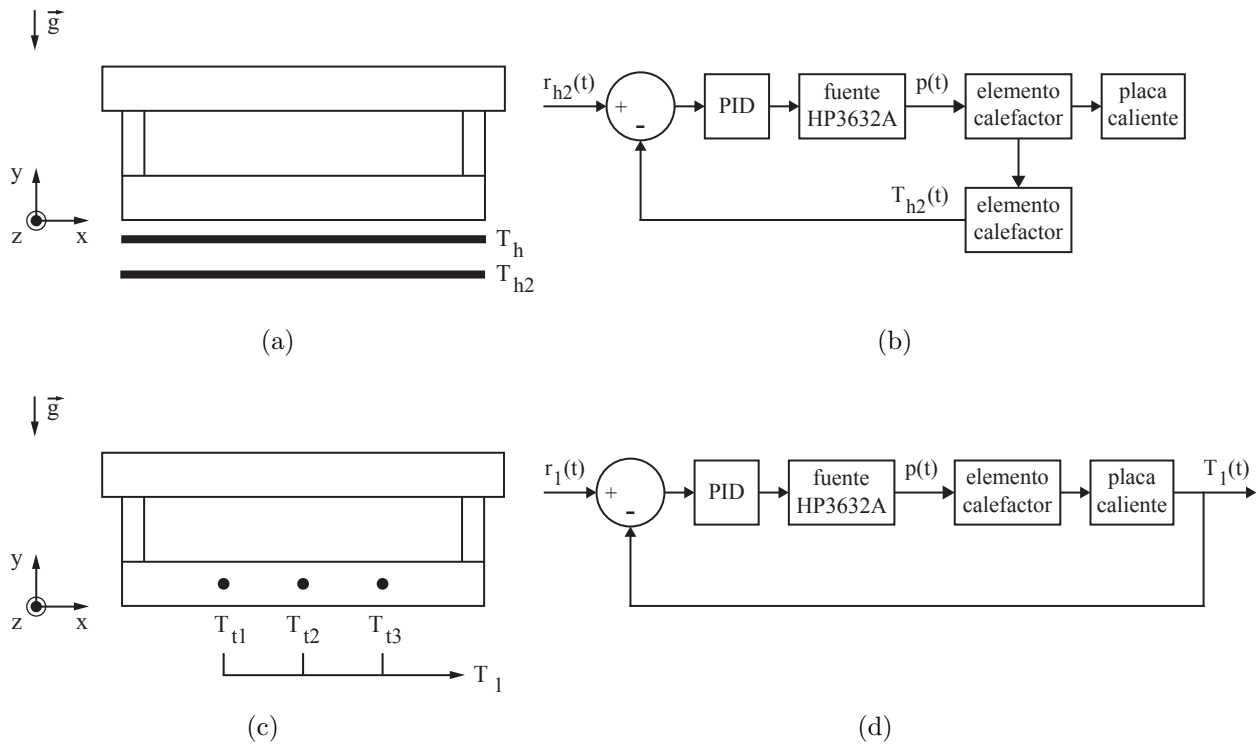


Figura 4.20: Alternativas de control para la placa caliente. (a-b) Control con un segundo elemento calefactor. La variable de control es la temperatura T_{h2} de este elemento ubicado debajo del primer elemento calefactor y r_{h2} su señal de referencia. (c-d). Control con termistores. La variable de control es la temperatura de placa caliente, T_1 , obtenida del promedio de los termistores T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} , y r_1 su señal de referencia.

En ambos casos, la potencia se suministra al sistema mediante el primer elemento calefactor. Su valor se determina mediante el algoritmo PID (cf. ec. (4.23)), utilizando los coeficientes $P = 10$, $I = 0.6$ y $D = 2$ obtenidos por [58, 59].

Controlador de temperatura en cascada para la placa fría

El método de control de temperatura propuesto para la placa fría, con el objetivo de eliminar la componente estacionaria del error, consistió en dos controladores en configuración de cascada. El controlador maestro es un controlador Proporcional Integral (PI), implementado en el programa de adquisición, que comanda al controlador digital del baño térmico. La variable de control del controlador maestro es la temperatura, T_2 , que registra un termistor ubicado al centro de la placa fría (cf. fig. 4.21 (a)). Por otra parte, la variable de control del controlador secundario es la temperatura del baño térmico T_b . De acuerdo al diagrama de bloques en la figura 4.21 (b), el controlador PI calcula el error con respecto a la señal de referencia, $r_2(t)$, dado por:

$$e(t) = r_2(t) - T_2(t) \quad (4.29)$$

y lo utiliza para ajustar la referencia del controlador digital del baño térmico, $r_b(t)$, a:

$$r_b(t) = r_2(t) + P_b e(t) + I_b \int_0^t e(t) dt \quad (4.30)$$

donde $P_b = 0.5$ y $I_b = 0.01$ son los coeficientes del controlador PI, los cuales se ajustaron experimentalmente. El término $r_2(t)$ en la ec. (4.30) mejora la respuesta transiente del control, al entregar instantáneamente una primera aproximación para la referencia $r_b(t)$, y que luego afina el controlador PI. Esta estrategia permitió obtener un control estable para la placa fría y eliminar la componente estacionaria del error. Esto se puede apreciar en el siguiente capítulo, en la sección dedicada a la respuesta transiente del control de temperatura de ambas placas.

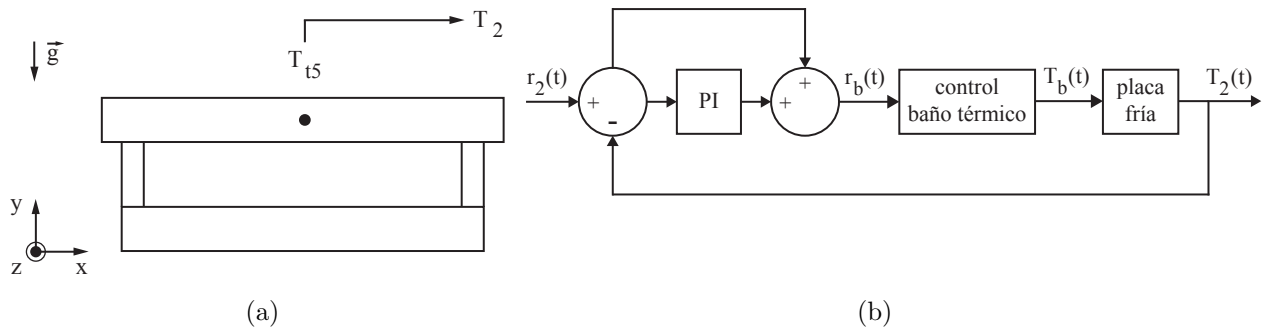


Figura 4.21: Control de temperatura en cascada para la placa fría. (a) La variable de control del controlador maestro es la temperatura, T_2 , que registra el termistor, T_{t5} , al centro de la placa fría. (b) Diagrama de bloques del control. El controlador maestro, un controlador PI implementado en el programa de adquisición, comanda al controlador digital del baño térmico ajustando la señal de referencia de este último $r_b(t)$. De esta manera, la temperatura del baño térmico, $T_b(t)$, se ajusta para equiparar la temperatura de la placa fría, T_2 , con la señal de referencia del controlador maestro $r_2(t)$.

Evaluación de las alternativas de control para la placa caliente

Para determinar la variable de control a utilizar para la placa caliente, se evaluaron las alternativas discutidas previamente y que se enumeran a continuación:

- T_h : temperatura del primer elemento calefactor.
- T_{h2} : temperatura del segundo elemento calefactor.
- T_1 : temperatura promedio de termistores distribuidos en la placa caliente.

El desempeño de estas alternativas se puede apreciar en las series de potencia y error que se muestran en la figura 4.22. La adquisición para T_h corresponde a una de las primeras experiencias realizadas durante el presente trabajo y en ella se utilizó la estrategia de control de los trabajos previos. En esta adquisición, en particular, se utilizó glicerina pura como fluido de trabajo. En las adquisiciones con las variables T_{h2} y T_1 se utiliza la estrategia propuesta en el presente trabajo, i.e. se omite el seguimiento de la temperatura ambiente y las correcciones

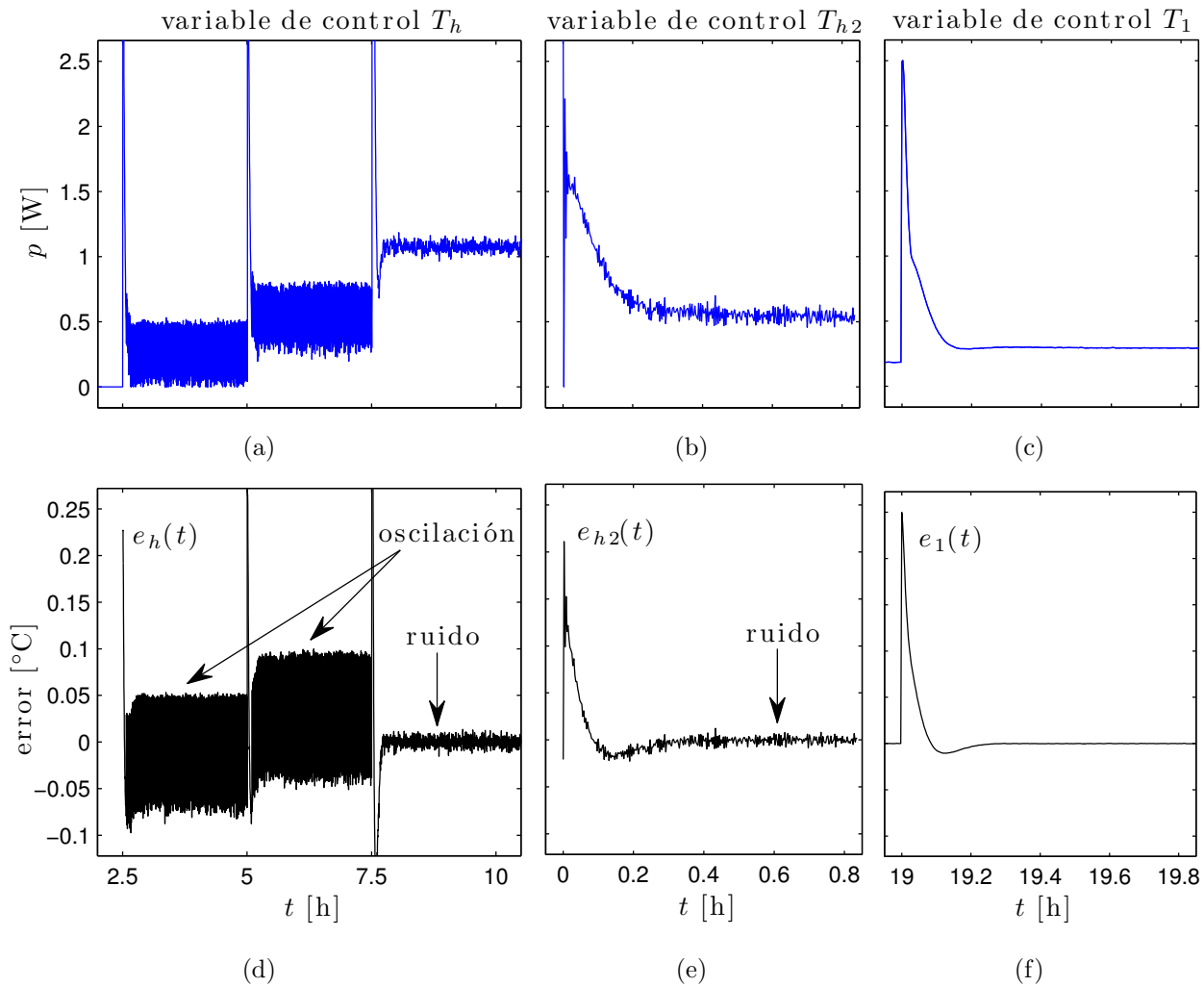


Figura 4.22: Comparación de estrategias de control de temperatura para la placa caliente. (a-c) Evolución temporal de potencia p para la variable de control: (a) temperatura T_h del elemento calefactor; (b) temperatura T_{h2} de un segundo elemento calefactor; (c) temperatura de la placa caliente T_1 obtenida del promedio de 3 termistores. (d-f) Evolución temporal del error para la variable de control respectiva.

por caída de temperatura en placas. Estas alternativas se discuten a continuación en términos de los inconvenientes mencionados previamente para el sistema de control.

Respuesta oscilatoria del sistema. La adquisición con T_h como variable de control permitió constatar la oscilación del control a baja potencia mencionada previamente, según se observa en la figura 4.22. La estrategia asociada a T_{h2} logra un control estable, lo que descarta que la causa de las oscilaciones sea el retardo en la acción de elemento calefactor, que debe ser similar para T_h y T_{h2} . Una causa posible de las oscilaciones es que T_h , a diferencia de T_{h2} , sigue una referencia que contiene ruido. Este ruido es generado en parte por las fluctuaciones de la temperatura ambiente que no logra filtrar el promedio móvil y puede desestabilizar el control. Una segunda causa posible es que T_h se obtiene de dos métodos distintos: de la lectura de la fuente para $p \geq 0.4$ W y de la estimación de un sensor en la

placa en caso contrario. Si estos métodos entregan estimaciones distintas de T_h , se genera una alternancia en los valores de potencia que calcula el algoritmo PID y el control no alcanza un equilibrio.

Presencia de ruido. La presencia de ruido que puede afectar la resolución de los datos a adquirir, particularmente de potencia, y al sistema de control. En el presente caso se cuantifica el ruido en las series de potencia en términos de la razón señal-ruido (SNR) definida por:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{p}}{\sigma(p)} \right) \quad [\text{dB}] \quad (4.31)$$

donde \bar{p} es el promedio y $\sigma(p)$ la desviación estándar de potencia en régimen estacionario. Las series en la figura 4.22 se comparan en la tabla 4.4 en términos de la razón SNR y las cantidades \bar{p} y $\sigma(p)$. De acuerdo a dicha tabla, para la estrategia asociada a T_h , la razón SNR se deteriora a $p < 1$ W debido a las oscilaciones y a $p \gtrsim 1$ W debido a la presencia de ruido. En la adquisición con T_{h2} la razón SNR mejora levemente con respecto al caso anterior a una potencia similar (~ 540 mW), sin embargo no logra resolver completamente el problema.

La alternativa de control asociada a T_1 , logra superar ambos inconvenientes, generando una señal limpia aún a potencias bajas ($p < 1$ W). La reducción de ruido que se logró con esta estrategia es considerable, entrega una desviación estándar de potencia de ~ 1.1 mW que permite obtener una adecuada razón SNR en el rango de trabajo. Esta reducción se asoció a que la nueva estrategia de control entrega señales de referencia libres de ruido, a la alta precisión de los termistores y su elevada resistencia. Esta última característica minimiza el ruido generado por la fluctuación de resistencia en cables y conexiones. Como la estrategia de control asociada a T_1 logra estabilidad y una considerable reducción de ruido, esta se eligió finalmente en el presente trabajo.

variable de control	\bar{p} [mW]	$\sigma(p)$ [mW]	SNR [dB]	$\sigma(\text{error})$ [mK]
T_h	281.1	173.4	2.10	53.7
	529.6	171.1	4.91	57.0
	1080.0	31.3	15.37	4.58
T_{h2}	544.1	41.7	11.16	3.88
T_1	295.1	1.6	22.67	0.11
	(287.6)	(1.1)	(24.11)	(0.10)

Tabla 4.4: Comparación de la magnitud de oscilación y ruido para las series mostradas en la figura 4.22. Los valores corresponden al intervalo $0.4 < t < 0.8$ h, excepto los que se encuentran en paréntesis y que se obtuvieron para $5 < t < 5.5$ h.

Capítulo 5

Resultados

Contenido

5.1	Respuesta temporal del sistema de control	58
5.1.1	Respuesta a escalones de temperatura	58
5.1.2	Respuesta a rampas de temperatura	61
5.2	Transferencia de calor en régimen de conducción	63
5.2.1	Respuesta transiente ante un escalón de temperatura	63
5.2.2	Potencia en régimen de conducción estacionario	71
5.3	Transferencia de calor en régimen de convección	75
5.3.1	Convección horizontal	75
5.3.2	Convección inclinada	83
5.4	Visualización de flujo	90

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos para el sistema de control del experimento y la transferencia de calor en la celda de convección. El control de temperatura de las placas que confinan al fluido se caracteriza en términos de su respuesta transiente ante señales compuestas por escalones y rampas de temperatura. El estudio de la transferencia de calor, en los regímenes de conducción transiente y estacionario, permite caracterizar los tiempos característicos de la celda de convección y la potencia útil a través del fluido. La transferencia de calor en régimen de convección se estudia para dos casos en los que es posible observar el fenómeno de transiciones de flujo. El primero corresponde al inicio de la inestabilidad clásica de Rayleigh-Bénard con la celda perpendicular al vector de gravedad. En este caso, se caracteriza la transferencia de calor en términos de la curva entre los números de Nusselt y Rayleigh a valores moderados de este último ($Ra < 10^4$). A su vez, se determina el número de Rayleigh crítico de la celda de convección para el comienzo de la inestabilidad. Luego, se estudian la transiciones de flujo generadas por la inclinación de la celda de convección con respecto al vector gravedad. En este caso, la transferencia de calor se caracteriza en términos del número de Nusselt en función del ángulo de inclinación para un número de Rayleigh moderadamente supercrítico $Ra \sim 3570$. Los sensores de temperatura, ubicados en las placas que confinan al fluido, permiten obtener información sobre la circulación de flujo que genera la inclinación de la celda de convección. Finalmente, se determinan los patrones de convección horizontal a números de Rayleigh moderados mediante la visualización del flujo con partículas trazadoras.

5.1. Respuesta temporal del sistema de control

En la presente sección se caracteriza la respuesta temporal del sistema de control, el cual se compone por dos controladores de temperatura independientes de lazo cerrado. La respuesta temporal de un controlador se evalúa típicamente estudiando su comportamiento ante señales de referencia compuestas por escalones, rampas u otras señales [20]. En las siguientes pruebas se utilizan los dos primeros tipos de señales mencionadas, los que corresponden a su vez a los dos métodos de tránsito de la diferencia de temperatura en el fluido usados en las experiencias.

5.1.1. Respuesta a escalones de temperatura

El tránsito en escalones de temperatura se realiza variando impulsiva y simultáneamente las temperaturas de ambas placas, manteniendo su temperatura media, T_m , constante. Por lo tanto, este método permite obtener la respuesta temporal de ambos controladores a una prueba de escalón de temperatura. En la figura 5.1 se muestra la evolución temporal de las temperaturas de ambas placas ante un escalón de la diferencia de temperatura en el fluido, ΔT , de $1\text{ }^\circ\text{C}$ a $1.5\text{ }^\circ\text{C}$. En ella se observa que sus tiempos de subida, t_r , son distintos, así como sus respectivos sobrepasos M_p . En la figura 5.2 se muestra la respuesta de ambos controladores

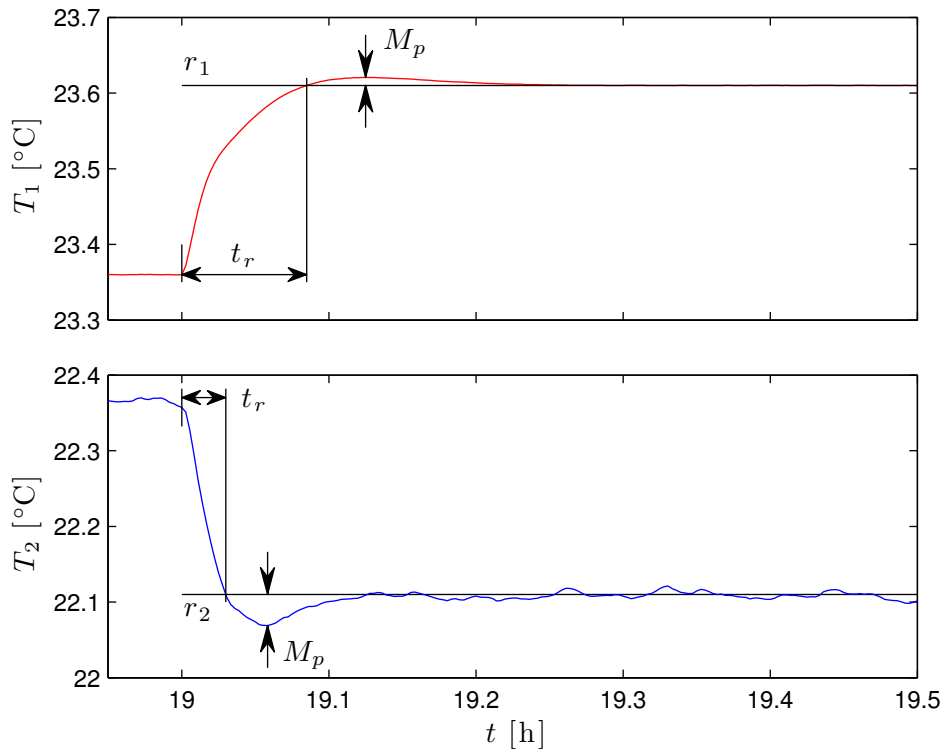


Figura 5.1: Respuesta a un escalón de temperatura impuesto simultáneamente en ambas placas. Se muestra la evolución temporal de las temperaturas de la placa caliente T_1 y fría T_2 , para una variación de ΔT de 1 a $1.5\text{ }^\circ\text{C}$, con $T_m = 22.86\text{ }^\circ\text{C}$ constante y el fluido en régimen de conducción. Se indican en ambas figuras las señales de referencia, r_1 y r_2 , tiempos de subida, t_r , y sobrepasos M_p .

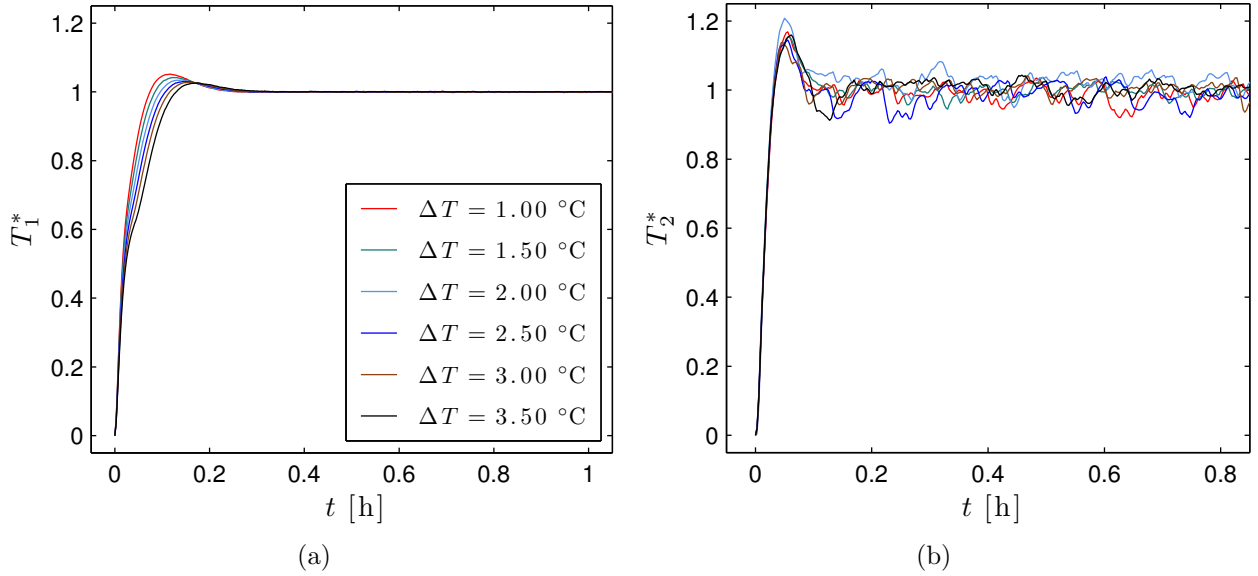


Figura 5.2: Respuesta a un escalón de temperatura impuesto simultáneamente en ambas placas. (a) Evolución temporal de la temperatura adimensional $T_1^*(t)$ de la placa caliente. (b) Evolución temporal de la temperatura adimensional $T_2^*(t)$ de la placa fría. Ambas figuras corresponden a los valores de ΔT indicados en (a), con el fluido en régimen conductivo y a una temperatura media $T_m = 22.86$ °C.

ante una serie de escalones, en términos de las variables adimensionales:

$$T_1^*(t) = \frac{T_1(t) - T_{1,i}}{r_1 - T_{1,i}} \quad \text{y} \quad T_2^*(t) = \frac{T_2(t) - T_{2,i}}{r_2 - T_{2,i}} \quad (5.1)$$

con $T_{1,i}$ y $T_{2,i}$ las temperaturas de la placa caliente y fría, respectivamente, al inicio de cada evento con un nuevo ΔT . En la figura se observa que la temperatura de ambas placas se controla correctamente y estas alcanzan sus valores de referencia, r_1 y r_2 , que corresponden a un valor unitario de estas variables adimensionales. Cabe destacar la elevada estabilidad obtenida para el control de la placa caliente, que es del orden de 0.1 mK, según se indica en la tabla 5.1 junto con los parámetros mencionados previamente. La temperatura de la placa fría, en cambio, presenta oscilaciones en régimen estacionario, sin embargo éstas son de pequeña magnitud según se puede apreciar en dicha tabla.

	t_r [min]	M_p [%]	\bar{e} [mK]	$\sigma(T)$ [mK]
placa caliente	7.8	5	0.04	0.12
placa fría	1.9	18	1.94	6.80

Tabla 5.1: Valores máximos de los parámetros para ambos controladores de temperatura. Se indican t_r : tiempo de subida; M_p : sobrepasos; \bar{e} : error promedio y $\sigma(T)$: desviación estándar de temperatura. Estos dos últimos obtenidos en régimen estacionario, en un intervalo de 0.4 a 1.4 h desde el inicio del evento.

Evolución temporal de potencia. En las adquisiciones en que se utiliza el método de tránsito de escalones de temperatura la evolución temporal de potencia describe una curva con ciertas características similares. Una de ellas es un cambio de pendiente que se debe a la anulación de la integral y derivada del error. Esta anulación se realiza al inicio de un evento o si el error sobrepasa cierto límite, $|e_1(t)| > 0.5 \text{ } ^\circ \text{C}$, fijando:

$$\int_0^t e_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{de_1(t)}{dt} = 0 \quad (5.2)$$

donde e_1 es el error del controlador de la placa caliente. En este caso la potencia es proporcional al error, i.e. $p(t) = P e_1(t)$, como se indica en la figura 5.3 que corresponde a la evolución temporal de potencia para la figura 5.1). Una segunda característica es un sobrepaso de considerable magnitud, durante el cual se proporciona principalmente el calor requerido para elevar la temperatura de la placa caliente. Esto se puede comprobar, en cierta medida, integrando el área bajo la curva de potencia y por sobre su valor estacionario. Este procedimiento entrega para la curva en la figura 5.3 por ejemplo un valor de 250 J, bastante similar al valor teórico [65]:

$$Q_h = M_{hp} C_{p,s} \delta T_1 \sim 224 \text{ J} \quad (5.3)$$

con $M_{hp} = 1.785 \text{ Kg}$ la masa, $C_{p,s} = 502 \text{ J}/(\text{Kg K})$ el calor específico y $\delta T_1 = 0.25 \text{ } ^\circ \text{C}$ el cambio de temperatura de la placa caliente.

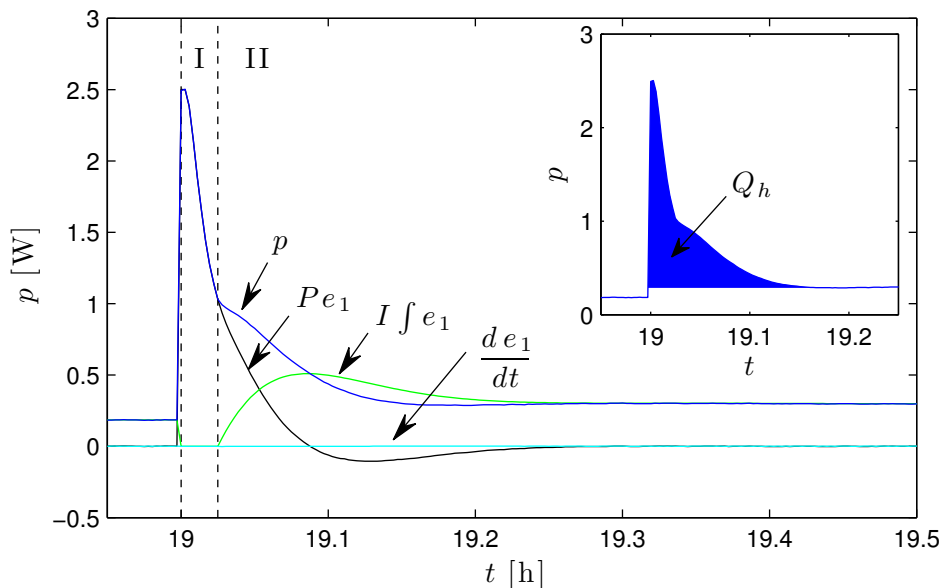


Figura 5.3: Evolución temporal de potencia para un escalón de temperatura impuesto simultáneamente en ambas placas, correspondiente a la adquisición en la figura 5.1. Se distinguen los casos: (I) $|e_1(t)| > 0.5 \text{ } ^\circ \text{C}$, donde $p = P e_1(t)$; (II) $|e_1(t)| < 0.5 \text{ } ^\circ \text{C}$, donde $p = P e_1(t) + I \int e_1(t) + D \frac{de_1(t)}{dt}$. Como se indica en el recuadro, la integral de la curva de potencia por sobre su valor estacionario corresponde aproximadamente al calor Q_h requerido para elevar la temperatura de la placa caliente.

5.1.2. Respuesta a rampas de temperatura

En las series de adquisición que se utilizan rampas de temperatura se transita entre eventos de termalización, en los cuales ΔT permanece constante, variando ΔT de acuerdo a:

$$\Delta T(t) = \Delta T_i + \beta t \quad (5.4)$$

con ΔT_i la diferencia de temperatura inicial y donde la razón β se fija de manera que ΔT varíe en forma cuasi-estática para no perturbar el equilibrio térmico en la celda de convección. Este método permite estudiar el comportamiento de ambos controladores de temperatura ante señales de referencia dependientes del tiempo. En un intervalo de tránsito estas señales son:

$$r_1(t) = T_{1,i} + \frac{\beta}{2} t \quad \text{y} \quad r_2(t) = T_{2,i} - \frac{\beta}{2} t \quad (5.5)$$

con $T_{1,i}$ y $T_{2,i}$ las temperaturas de la placa caliente y fría, respectivamente, al inicio del evento de tránsito. En la figura 5.4 se muestra parte de una serie adquirida usando $\beta = 0.125$ °C/h y en ella se observa que las temperaturas de ambas placas siguen correctamente sus respectivas señales de referencia $r_1(t)$ y $r_2(t)$. El error máximo con respecto a estas señales es 2.5 mK y 16.2 mK para el control de placa caliente y placa fría, respectivamente.

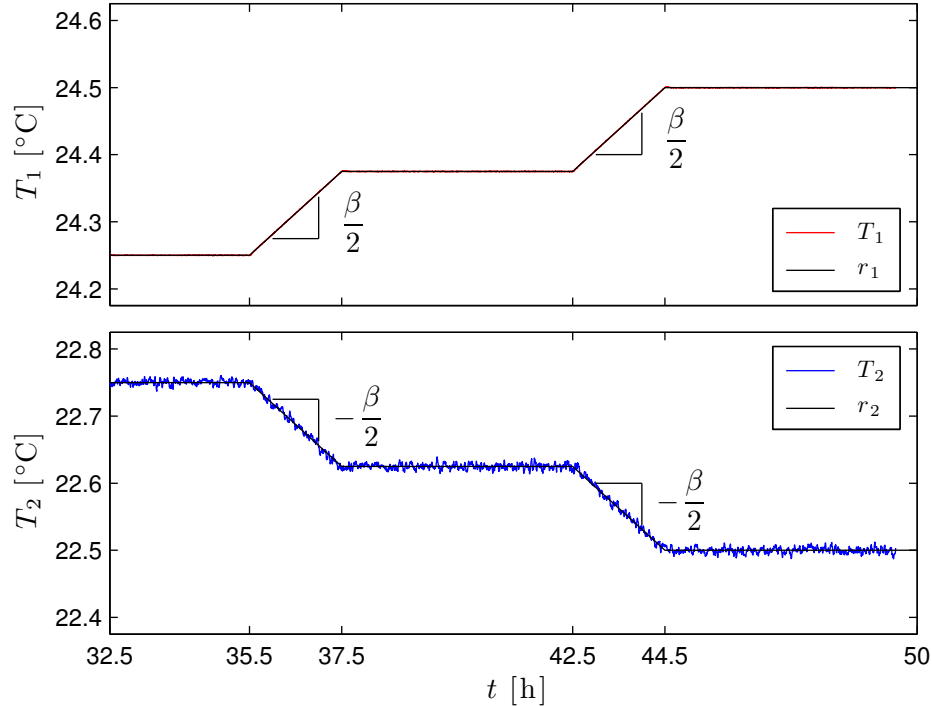


Figura 5.4: Respuesta a rampas de temperatura impuestas simultáneamente en ambas placas con el fluido en régimen de conducción a $T_m = 23.5$ °C. Se muestra la evolución temporal de las temperaturas de la placa caliente y placa fría, T_1 y T_2 , y sus señales de referencia, $r_1(t)$ y $r_2(t)$, respectivamente. Los eventos de termalización corresponden a las diferencia de temperatura $\Delta T = 1.5, 1.75$ y 2.0 °C y en los eventos de tránsito se utiliza una pendiente $\beta \equiv d(\Delta T)/dt = 0.125$ °C/h.

Evolución temporal de potencia. La evolución temporal de potencia adquirida durante la prueba se muestra en la figura 5.5. En ella se observan saltos de potencia en los eventos de tránsito, los cuales corresponden principalmente al calor requerido por la placa caliente para elevar gradualmente su temperatura. Esta cantidad se encuentra dada teóricamente por [65]:

$$\dot{Q}_h = M_{hp} C_{p,s} \frac{\beta}{2} \quad (5.6)$$

y cuyo valor de 15.6 mW es bastante cercano a 20 mW obtenido de los datos experimentales.

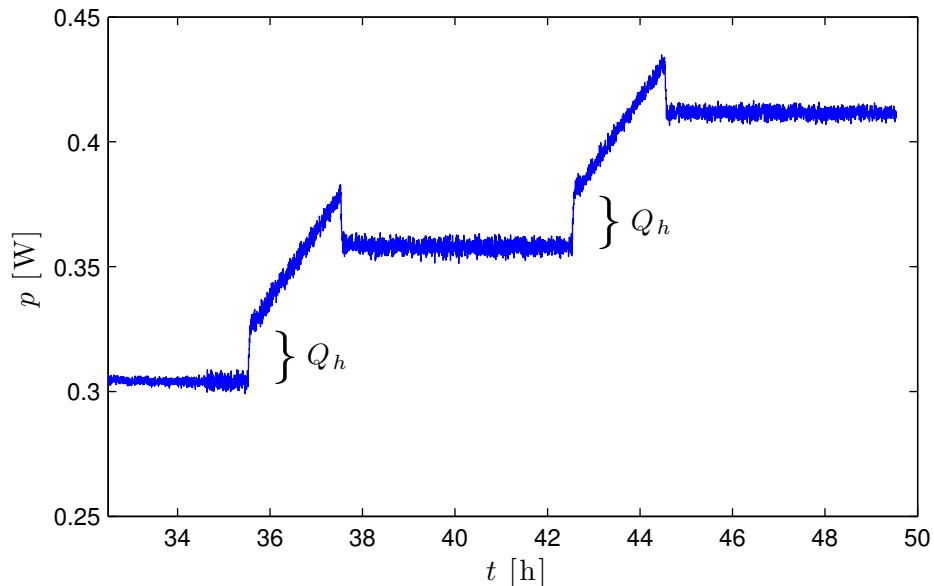


Figura 5.5: Evolución temporal de potencia para rampas de temperatura impuestas simultáneamente en ambas placas, correspondiente a la adquisición en la figura 5.4. En los eventos de tránsito se observan saltos de calor $\dot{Q}_h \sim 20$ mW requeridos por la placa caliente para elevar gradualmente su temperatura.

Discusión de resultados

En la presente sección se estudió la respuesta temporal del sistema de control ante señales de referencia compuestas por escalones y rampas de temperatura. Estas señales permiten evaluar el comportamiento del sistema de control ante perturbaciones rápidas y lentas, respectivamente. Las pruebas realizadas indican que en régimen transiente ambos controladores actúan rápidamente, en comparación con los tiempos característicos de la celda de convección que se discuten en la sección 5.2.1. En régimen estacionario, los controladores presentan gran estabilidad en el control de temperatura, del orden de 0.1 mK y de 6.8 mK, para las placas caliente y fría, respectivamente. En las mediciones de potencia se obtuvo una alta resolución, con desviación estándar del orden de 1 mW, que permite detectar en ambas pruebas la pequeña cantidad de calor requerido para variar la temperatura de la placa caliente. Estas características permiten concluir que el sistema de control funciona correctamente y fueron de gran utilidad para el estudio de la transferencia de calor en la celda de convección que se describe en las próximas secciones.

5.2. Transferencia de calor en régimen de conducción

En esta primera parte dedicada al estudio de la transferencia de calor en la celda de convección, se caracterizan los regímenes de conducción transiente y estacionario. Para ello se posicionó la celda en una configuración estable, según se muestra en la figura 5.6. En régimen transiente, el interés principal consistió en estudiar las distintas escalas temporales presentes en la celda. En el régimen estacionario, en cambio, se buscó una estimación de las contribuciones de los elementos de la celda a la curva de potencia en función de la temperatura.

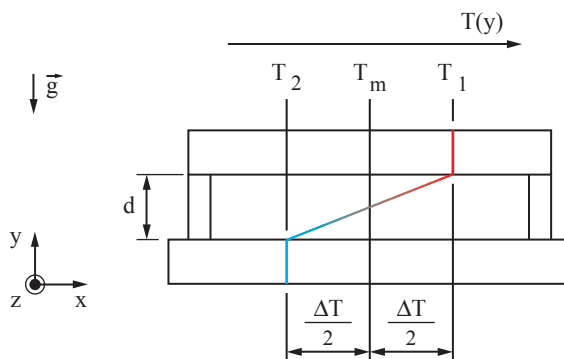


Figura 5.6: Celda en modo de conducción. Se indica en la celda un gradiente de temperatura estable $dT/dy = \Delta T/d$, con $\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$ y temperatura media $T_m = (T_1 + T_2)/2$.

5.2.1. Respuesta transiente ante un escalón de temperatura

El objetivo de la presente sección consiste en estudiar las distintas escalas temporales asociadas a la transferencia de calor en la celda de convección y para ello se realizó una prueba de escalón de temperatura. Ésta difiere de la prueba realizada para estudiar la estabilidad y respuesta transiente del sistema de control (cf. 5.1), en la que se impusieron simultáneamente escalones de temperatura en ambas placas. En esta prueba anterior se observó lo siguiente:

- (i) Se requiere de una cierta cantidad de potencia para elevar la temperatura de la placa caliente.
- (ii) Se requiere de un cierto tiempo para que el controlador PID de la placa caliente logre anular el error.

Ambos puntos dificultan la interpretación cuantitativa de la curva de potencia en régimen transiente. Una alternativa utilizada por [66], para medir la difusividad térmica del fluido, consiste en imponer un escalón de temperatura en la placa fría y medir la relajación térmica de la placa caliente. Esta propiedad se estima entonces de un ajuste de los datos a la solución teórica de la ecuación del calor unidimensional. En el presente trabajo se utiliza un método similar, se impone un escalón de temperatura en la placa fría, sin embargo se estudia la evolución de potencia manteniendo la temperatura de la placa caliente constante. De esta manera se evita suministrar una cantidad adicional de calor para variar la temperatura de esta placa. En la interpretación de los datos se utiliza como condición de borde la temperatura

impuesta en la placa fría. Esto se realiza de acuerdo a [67], quienes indican que la solución de la ecuación del calor se ve afectada por la discrepancia entre condiciones de bordes ideales y reales.

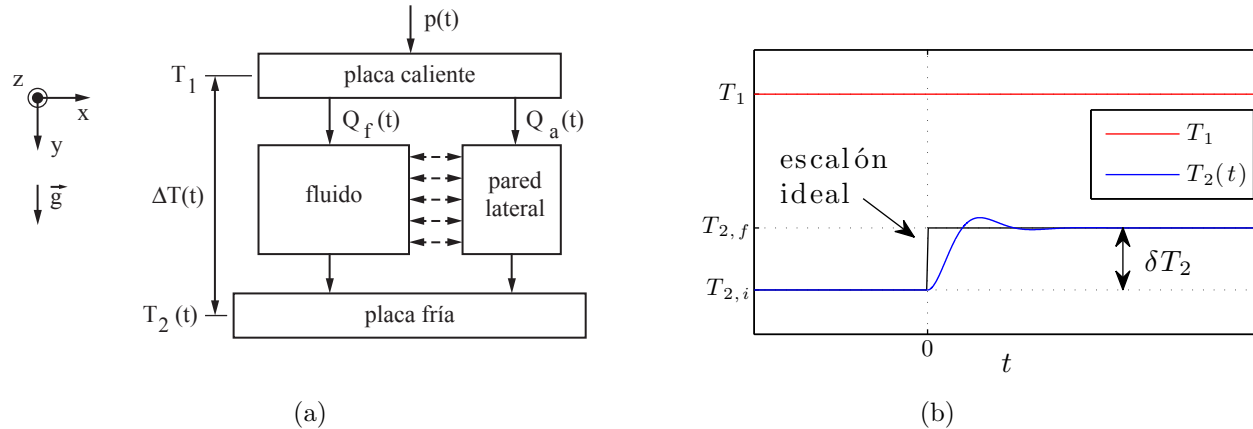


Figura 5.7: Prueba de escalón de temperatura impuesto en la placa fría. (a) Modelo transiente de la celda de convección. El elemento calefactor disipa una potencia $p(t)$ para mantener una diferencia de temperatura $\Delta T(t) = T_1 - T_2(t)$ en la celda de convección. Esta potencia se distribuye en los flujos de calor a través del fluido $Q_f(t)$, paredes laterales $Q_a(t)$ y una cantidad restante no indicada en forma de pérdidas de calor $Q_p(t)$. (b) Condiciones de borde. La placa caliente se mantiene a una temperatura T_1 constante y en la placa fría se impone en $t = 0$ un escalón de temperatura. Este escalón se asemeja a un escalón ideal y es de magnitud $\delta T_2 = T_{2,f} - T_{2,i}$, con $T_{2,i}$ y $T_{2,f}$ los valores iniciales y finales para $T_2(t)$, respectivamente.

Modelo teórico

Para interpretar la curva de potencia registrada durante la prueba se estableció el modelo para la celda de convección en régimen de conducción transiente que se muestra en la figura 5.7 (a). En el modelo se eligió una orientación invertida del eje vertical y por conveniencia y se supone que los flujos a través del fluido $Q_f(t)$, paredes laterales $Q_a(t)$ y pérdidas de calor $Q_p(t)$ se pueden considerar en forma independiente. Estos flujos cumplen el balance térmico:

$$p(t) = Q_f(t) + Q_a(t) + Q_p(t) \quad (5.7)$$

donde $p(t)$ es la potencia disipada por el elemento calefactor. Las condiciones de borde para la prueba se muestran en la figura 5.7 (b) y son las siguientes:

$$T(y = 0, t) = T_1 \quad \text{y} \quad T(y = d, t) = T_2(t) \quad (5.8)$$

Es decir, la temperatura de placa caliente T_1 se mantiene constante, mientras que la temperatura de la placa fría evoluciona de acuerdo a una función $T_2(t)$. Esta función toma un valor $T_{2,i}$ hasta el instante inicial $t = 0$ y luego evoluciona rápidamente a un valor final

$T_{2,f} = T_{2,i} + \delta T_2$. Se supone que la distribución de temperatura $T(y, t)$ en el fluido y paredes laterales obedece a la ecuación del calor unidimensional, que resulta conveniente expresar usando las variables adimensionales:

$$\tilde{T}(t) = \frac{T(t) - T_1}{T_{2,f} - T_1} \quad , \quad \tilde{T}_2(t) = \frac{T_2(t) - T_1}{T_{2,f} - T_1} \quad , \quad y^* = \frac{y}{d} \quad , \quad t^* = \frac{t}{\tau_\kappa} \quad \text{y} \quad \frac{t_a^*}{\tau_{\kappa a}} \quad (5.9)$$

donde los tiempos adimensionales del fluido t^* y paredes laterales t_a^* se encuentran adimensionalizados por los tiempos característicos basados en sus difusividades térmicas $\tau_\kappa = d^2/\kappa$ y $\tau_{\kappa a} = d^2/\kappa_a$, respectivamente. Usando las variables anteriores, las ecuaciones del calor unidimensional para estos elementos son:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^{*2}} \quad \text{en el fluido} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a^*} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^{*2}} \quad \text{en paredes laterales} \quad (5.10)$$

en las cuales se supuso que las propiedades de los elementos son constantes y la ausencia de fuentes de calor. Las ecs. (5.7 -5.10) definen el problema que se desea resolver, cuya solución debe ser similar para el fluido y paredes laterales (cf. ec. (5.10)) y, por lo tanto, basta resolverlas para uno de estos elementos. Esto se realiza para el fluido en el Anexo C, donde se resuelven los casos en que $T_2(t)$ representa:

- **Un escalón ideal de temperatura.** En este caso se obtiene que la potencia disipada en el extremo a temperatura constante es:

$$p_s^*(t^*) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-(n\pi)^2 t^*} \quad \text{con} \quad p^*(t) = \frac{p(t) - p_i}{p_f - p_i} \quad (5.11)$$

donde $p^*(t^*)$ indica la potencia adimensionalizada por su valor inicial p_i y final p_f .

- **La evolución temporal de temperatura impuesta.** En este caso se obtiene que la potencia adimensional disipada en el extremo a temperatura constante es:

$$p_{vs}^*(t^*) = \left(1 - \frac{T_{2,f} - T_1}{\delta T_2}\right) p_s^*(t^*) + \frac{T_{2,f} - T_1}{\delta T_2} \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) \frac{\partial p_s^*(t^* - \tau)}{\partial t^*} d\tau \quad (5.12)$$

donde p_s^* corresponde a la solución para el caso en que $T_2(t)$ representa un escalón ideal.

Las soluciones para ambos casos, ecs. (5.11) y (5.12), se deben extender a un modelo transiente de la celda de convección debido a que consideran la transferencia de calor sólo en el fluido. Esto se realiza en el Anexo C.3, donde se utilizan las siguientes formas adimensionales para las contribuciones de los elementos (cf. ec. (5.7)):

$$Q_f^*(t^*) = \frac{Q_f(t^*) - Q_{f,i}}{p_f - p_i} \quad , \quad Q_a^*(t^*) = \frac{Q_a(t^*) - Q_{a,i}}{p_f - p_i} \quad \text{y} \quad Q_p^*(t^*) = \frac{Q_p(t^*) - Q_{p,i}}{p_f - p_i} \quad (5.13)$$

donde el subíndice i indica el valor inicial de las variables, las cuales se encuentran adimensionalizadas por diferencia entre la potencia inicial p_i y final p_f . Estas variables adimensionales

cumplen el balance térmico:

$$p^*(t) = Q_f^*(t^*) + Q_a^*(t^*) + Q_p^*(t^*) \quad (5.14)$$

donde las contribuciones del fluido $Q_f^*(t^*)$ y paredes laterales $Q_a^*(t^*)$ a la expresión anterior, en términos de la solución $p_{vs}(t^*)$, son:

$$Q_f^*(t^*) = \Lambda_f p_{vs}^*(t^*) \quad \text{y} \quad Q_a^*(t^*) = \Lambda_a p_{vs}^* \left(\frac{\tau_\kappa t^*}{\tau_{\kappa a}} \right) \quad (5.15)$$

donde $Q_a^*(t^*)$ se encuentra escalada al tiempo adimensional del fluido, t^* , usando la razón entre los tiempos característicos de estos elementos. Las magnitudes de estas contribuciones, Λ_f y Λ_a , y de pérdidas, Λ_p , son:

$$\Lambda_f = \frac{g_f}{g_f + g_a + g_p} \quad \text{y} \quad \Lambda_a = \frac{g_a}{g_f + g_a + g_p} \quad \text{y} \quad \Lambda_p = 1 - \Lambda_f - \Lambda_a \quad (5.16)$$

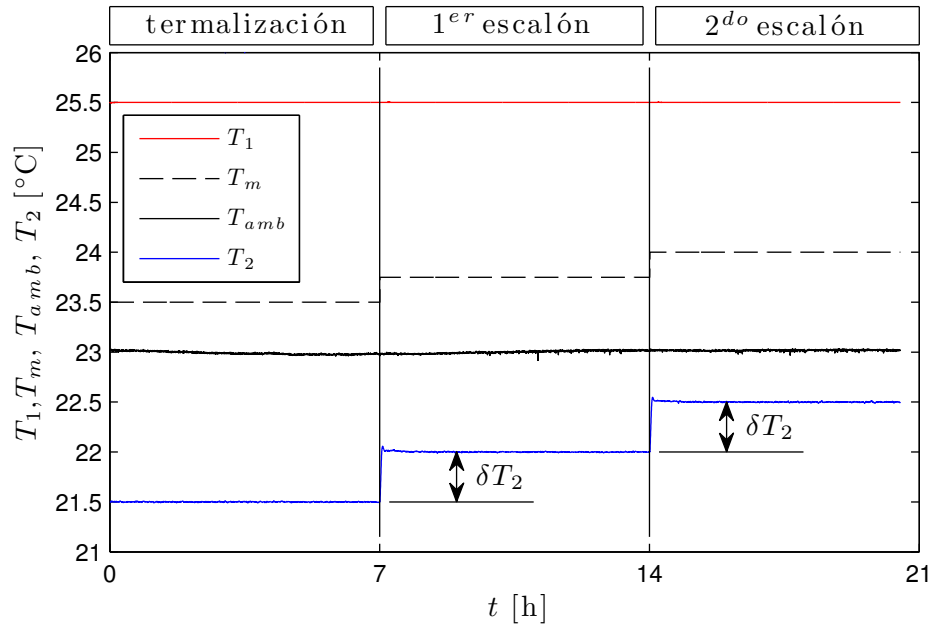
Estas relaciones entre las conductancias térmicas de los elementos corresponden a la fracción de calor disipado en cada uno de ellos, en régimen estacionario y normalizada por el calor total suministrado. La evolución temporal de pérdidas de calor, $Q_p^*(t^*)$, se determinada del balance térmico dado por la ec. (5.14) usando las contribuciones estimadas del fluido y paredes laterales.

Procedimiento experimental

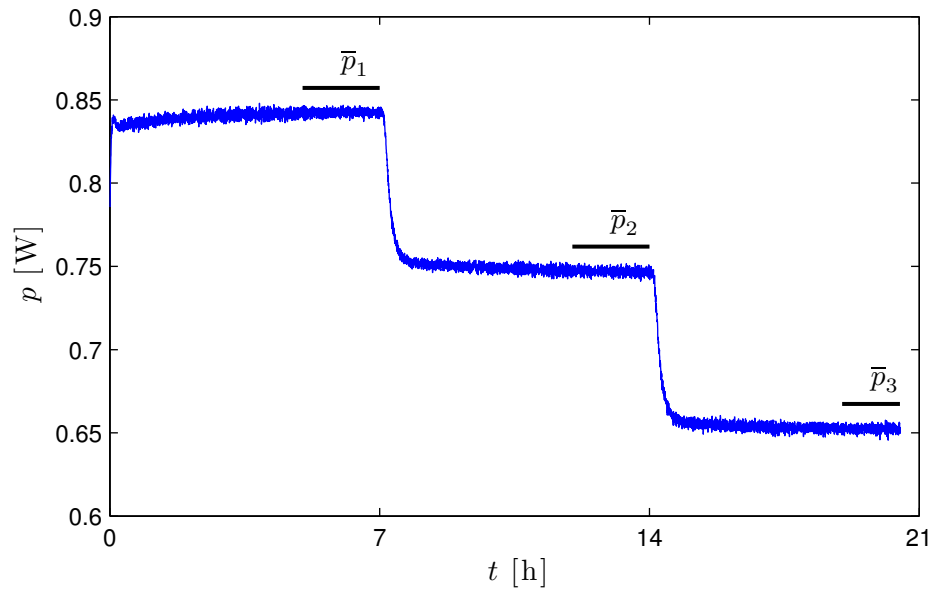
La experiencia se realizó con la celda en modo de conducción y consistió de tres eventos: el primero de termalización durante 7 h a una diferencia de temperatura $\Delta T = 4$ °C. En los eventos siguientes, de duración 7 h y 6.5 h, se imponen escalones en la placa fría de magnitud $\delta T_2 = 0.5$ °C, manteniendo la temperatura de la placa caliente $T_1 = 25.5$ °C constante. Las series de temperatura y potencia adquiridas durante la prueba se muestran en la figura 5.8. En ella se observa que al imponer cada escalón ΔT disminuye, por lo que la potencia decrece y alcanza eventualmente un valor estacionario. Este valor estacionario \bar{p} se obtiene del promedio de potencia, luego 5 h desde inicio hasta el final del evento, según se indica en la figura. Los parámetros de la adquisición se resumen en la tabla 5.2, entre los que se indica: temperatura final de la placa fría $T_{2,f}$; diferencia de temperatura final ΔT_f ; temperatura media T_m y diferencia de potencia final e inicial, $\delta p = p_f - p_i$ para ambos escalones. Otra variable de interés es la temperatura ambiente, que tomó un valor $T_{amb} = 23.00$ °C con una desviación estándar $\sigma_s(T_{amb}) = 0.016$ °C, i.e. prácticamente constante.

evento	T_1 [°C]	$T_{2,f}$ [°C]	ΔT_f [°C]	T_m [°C]	\bar{p} [mW]	δp [mW]
termalización	25.5	21.5	4.0	23.50	842.3	—
1 ^{er} escalón	25.5	22.0	3.5	23.75	746.8	-95.4
2 ^{do} escalón	25.5	22.5	3.0	24.00	652.4	-94.4

Tabla 5.2: Parámetros de adquisición para la presente prueba de escalón de temperatura.



(a)



(b)

Figura 5.8: Series de temperatura y potencia adquiridas durante la prueba de escalón de temperatura. (a) Evolución temporal de las temperaturas de la placa caliente T_1 , placa fría T_2 , media T_m y ambiente T_{amb} . En el primer evento se termaliza la celda a $\Delta T = 4\text{ }^\circ\text{C}$ y en los eventos siguientes se imponen escalones en la placa fría de magnitud $\delta T_2 = 0.5\text{ }^\circ\text{C}$, manteniendo $T_1 = 25.5\text{ }^\circ\text{C}$ constante. (b) Evolución temporal de potencia p registrada durante la prueba. Se indican intervalos en los que se obtiene la potencia promedio \bar{p} , luego de 5 h desde el inicio de cada evento.

Interpretación de los datos experimentales

Previamente se propuso un modelo cuyo objetivo es el de estimar la transferencia de calor a través de los elementos de la celda durante la presente prueba. Para discutir los datos experimentales en términos de este modelo se generan las curvas que se muestran en la figura 5.9 y que se discuten a continuación.

Medidas experimentales. Estas consisten en la temperatura impuesta en la placa fría $T_2^*(t)$, adimensionalizada de acuerdo a la ec. (5.1), y potencia adimensional $p^*(t^*)$. Ambas curvas son prácticamente idénticas para ambos escalones, lo que indica la repetibilidad de la experiencia. Por otra parte, el comportamiento de $T_2^*(t)$ es similar al discutido en la prueba del sistema de control (cf. 5.1). Como su tiempo de subida es mucho menor al tiempo difusivo del fluido la temperatura impuesta en la placa fría se asemeja a un escalón ideal.

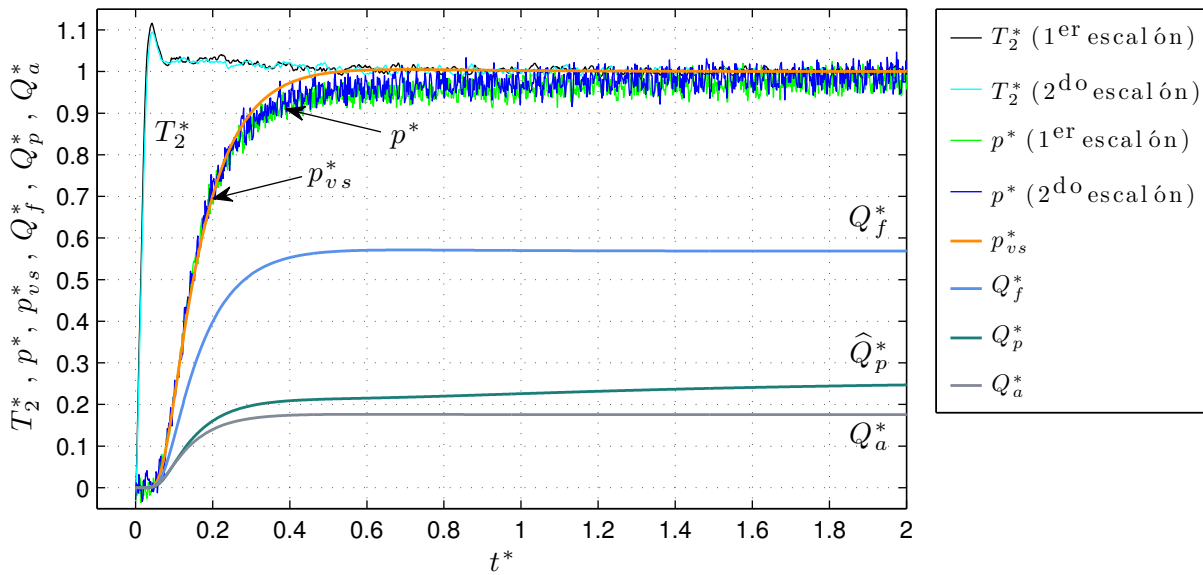


Figura 5.9: Prueba de un escalón de temperatura impuesto en la placa fría. Se muestran las series adimensionales de: $T_2^*(t^*)$ temperatura de la placa fría; $p^*(t^*)$ potencia (experimental); $p_{vs}^*(t^*)$ potencia obtenida de la solución teórica al problema con $T_2^*(t^*)$ como condición de borde. Se muestran además las contribuciones del fluido $Q_f^*(t^*)$, pérdidas de calor $\hat{Q}_p^*(t^*)$ y paredes laterales $Q_p^*(t^*)$ a la potencia experimental $p^*(t^*)$. El eje temporal es $t^* = t/\tau_\kappa$, con el tiempo característico del fluido $\tau_\kappa \sim 1.62$ h.

Potencia teórica. Consiste en la potencia $p_{vs}^*(t^*)$ obtenida de la solución a un caso unidimensional usando como condición de borde la temperatura registrada en la placa fría, $T_2^*(t)$. Esta solución es muy similar a la del caso de un escalón ideal debido a que $T_2^*(t)$ se asemeja a esta condición (cf. Anexo C.2).

Contribuciones del fluido y paredes laterales. Estas consisten en las contribuciones del fluido $Q_f^*(t^*)$ y paredes laterales $Q_a^*(t^*)$ a la curva de potencia experimental $p^*(t^*)$. La proporción del calor disipado en estos elementos en régimen estacionario, Λ_f y Λ_a , se encuentran en la Tabla 5.3. La componente temporal de estas curvas corresponde a la solución

$p_{vs}^*(t^*)$ escalada de acuerdo a los tiempos difusivos respectivos, i.e. ~ 1.62 h para el fluido y ~ 1.37 h para las paredes laterales (cf. ec. (5.15)).

evento	Λ_f [%]	Λ_a [%]	Λ_p [%]	Λ_{p1} [%]	τ_{p1} [h]	Λ_{p2} [%]	τ_{p2} [h]
termalización	58.7	18.1	23.2	—	—	—	—
1 ^{er} escalón	57.9	17.9	24.2	18.3	1.5	6.0	16.2
2 ^{do} escalón	56.9	17.6	25.6	21.2	1.5	4.4	14.1

Tabla 5.3: Contribuciones en régimen estacionario del fluido Λ_f , paredes laterales Λ_a y pérdidas Λ_p al calor suministrado. Se indican además las magnitudes, Λ_{p1} y Λ_{p2} , y tiempos característicos, τ_{p1} y τ_{p2} , para las componentes de pérdidas de evolución rápida y lenta, respectivamente.

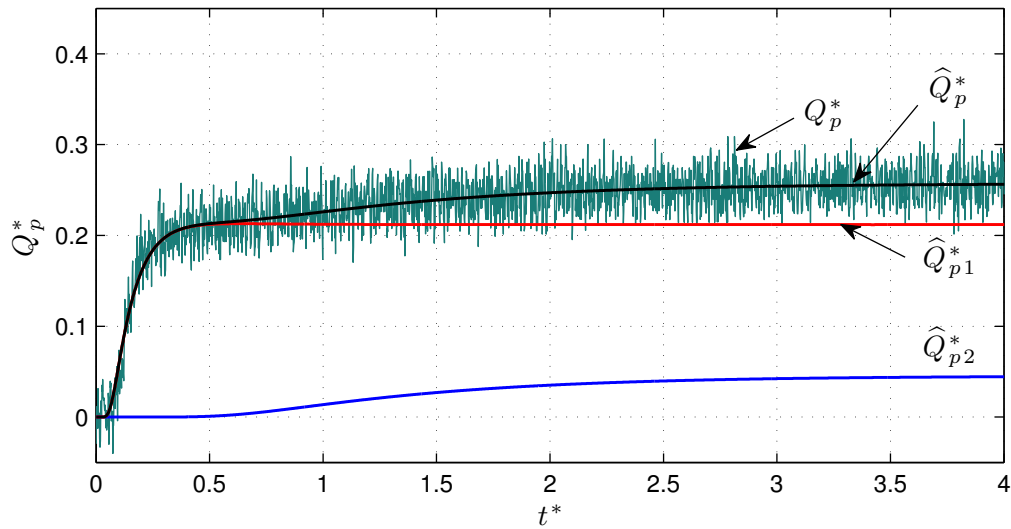


Figura 5.10: Evolución temporal de pérdidas de calor adimensional Q_p^* . Se muestra además el ajuste a las pérdidas dado por $\hat{Q}_p^* = \hat{Q}_{p1}^* + \hat{Q}_{p2}^*$, con \hat{Q}_{p1}^* y \hat{Q}_{p2}^* las estimaciones de pérdidas con evolución rápida y lenta, respectivamente.

Pérdidas de calor. La contribución de pérdidas de calor $Q_p^*(t^*)$ a la curva de potencia experimental $p^*(t^*)$ se estimó del balance térmico (cf. ec. (5.14)) y se muestra en detalle en la figura 5.10. Esta curva presenta una evolución rápida y luego más lenta, cuyos tiempos característicos se determinaron realizando el ajuste a $Q_p^*(t^*)$ dado por:

$$\hat{Q}_p^*(t^*) = \hat{Q}_{p1}^*(t^*) + \hat{Q}_{p2}^*(t^*) \quad (5.17)$$

donde $\hat{Q}_{p1}^*(t^*)$ y $\hat{Q}_{p2}^*(t^*)$ representan las componentes de pérdidas de calor rápidas y lentas, respectivamente. Para estas componentes se utilizaron los siguientes modelos de ajuste basados en la solución p_{vs}^* (cf. ec. 5.12):

$$\hat{Q}_{p1}^*(t^*) = \Lambda_{p1} p_{vs}^* \left(\frac{\tau_{p1} t^*}{\tau_{p1}} \right) \quad \text{y} \quad \hat{Q}_{p2}^*(t^*) = \Lambda_{p2} p_{vs}^* \left(\frac{\tau_{p2} t^*}{\tau_{p2}} \right) \quad (5.18)$$

con coeficientes de magnitud, Λ_{p1} y Λ_{p2} , y tiempo, τ_{p1} y τ_{p2} , que se obtuvieron mediante

el método de mínimos cuadrados.

Los coeficientes obtenidos para el ajuste de pérdidas se encuentran en la tabla 5.3 e indican que la componente de evolución rápida, \widehat{Q}_{p1}^* , representa el $\sim 20\%$ del calor total. Para ella se estima un tiempo característico ~ 1.5 h, lo que resulta coherente debido a que su tiempo característico es similar al del acrílico, $\tau_{\kappa a} \sim 1.37$ h. Es decir, esta componente representa posiblemente la pérdida de calor a través de elementos de este material, i.e. paredes laterales y la cámara ubicada sobre la placa caliente (cf. 4.1.1). A su vez, resulta razonable que la componente de evolución lenta, \widehat{Q}_{p2}^* , con una magnitud del $\sim 5\%$ del calor total, representa la pérdida de calor a través de la aislación.

Discusión de resultados

En la presente sección se estudió la transferencia de calor en la celda ante un escalón de temperatura impuesto en la placa fría. La metodología consistió en mantener la temperatura de la placa caliente constante y estudiar la evolución temporal de potencia. De esta manera se evitó el suministro adicional de calor para variar la temperatura de esta placa y que afecta la medición.

Para interpretar los resultados se obtuvo la solución teórica al problema unidimensional dada por la evolución de potencia adimensional $p_{vs}^*(t^*)$. Esta curva describe correctamente la potencia experimental adimensional, $p^*(t^*)$, comprobando el valor estimado para la viscosidad del fluido. Las contribuciones de los componentes de la celda a la potencia experimental se estimaron de un modelo transiente que utiliza la solución mencionada previamente. Los resultados indican que las pérdidas de calor representan un $\sim 25\%$ del calor total suministrado y en ellas se encuentran dos escalas temporales. El mayor porcentaje de pérdidas $\sim 20\%$ presenta una evolución rápida, con un tiempo característico similar al del acrílico y del que se componen ciertos elementos de la celda. La cantidad restante, con una evolución lenta, representa las pérdidas a través de la aislación. Los resultados permiten establecer el tiempo de espera aproximado, luego de imponer un nuevo gradiente de temperatura, para obtener un equilibrio térmico en la celda. De acuerdo a la figura 5.10, este tiempo es $\sim 2\tau_{\kappa}$ (~ 3.2 h), luego de cual la variación de potencia es mínima.

Un último aspecto que cabe mencionar es que las contribuciones de los elementos de la celda en régimen estacionario, Λ_f , Λ_a y Λ_p , difieren levemente para cada evento (cf. Tabla 5.3). Esto se debe a un cambio en las pérdidas de calor debido al desplazamiento de la temperatura media de la celda con respecto a la temperatura ambiente y se discute en la próxima sección.

5.2.2. Potencia en régimen de conducción estacionario

El objetivo de la presente sección consiste en caracterizar la transferencia de calor en celda de convección en régimen de conducción estacionario. Para ello se estiman las contribuciones del fluido Q_f , paredes laterales Q_a y pérdidas de calor Q_p a la potencia en este régimen. Como se vio previamente (cf. ec. 4.7), estas cantidades se relacionan mediante las conductancias térmicas del fluido g_f , paredes laterales g_a y pérdidas g_p por:

$$\bar{p}_{cd}(\Delta T) = \underbrace{g_f \Delta T}_{Q_f} + \underbrace{g_a \Delta T}_{Q_a} + \underbrace{g_p \Delta T + g_0}_{Q_p} \quad (5.19)$$

donde \bar{p}_{cd} es la potencia registrada en régimen estacionario y se incluye en el presente caso un término constante de pérdidas g_0 . De acuerdo a la ec. (5.19), los datos para \bar{p}_{cd} se pueden representar por el ajuste lineal:

$$\hat{p}_{cd} = g_{cd}\Delta T + g_0 \quad (5.20)$$

donde la constante g_{cd} corresponde a la conductancia térmica de la celda. El ajuste anterior permite determinar el calor por movimientos convectivos del fluido, $Q_{f,cv}$, de las mediciones de potencia con la celda en modo de convección, \bar{p}_{cv} , de acuerdo a:

$$Q_{f,cv} = \bar{p}_{cv} - \hat{p}_{cd} \quad (5.21)$$

Por otra parte, las contribuciones normalizadas por el calor total del fluido Λ_f , paredes laterales Λ_a y pérdidas Λ_p (cf. ec. (5.16)) se estiman de:

$$\Lambda_f \sim \frac{g_f}{g_{cd}}, \quad \Lambda_a \sim \frac{g_a}{g_{cd}} \quad \text{y} \quad \Lambda_p \sim \frac{g_p}{g_{cd}} \quad (5.22)$$

que son válidas mientras $g_0 \ll g_{cd}\Delta T$. Para caracterizar la celda de acuerdo a las expresiones anteriores se realizó la experiencia que se describe a continuación.

Procedimiento experimental

La experiencia consistió en adquirir series temporales de potencia para $\Delta T \in [0.4, 5] \text{ }^\circ\text{C}$ con la celda en modo de conducción. La temperatura media se mantuvo a $T_m = 23.50 \text{ }^\circ\text{C}$ constante, valor que se fijó considerando la temperatura ambiente, T_{amb} , previa al inicio de la experiencia. En esta adquisición se utilizó el método de tránsito entre eventos de rampas de temperatura (cf. 4.3) con pendiente $\beta \equiv d(\Delta T)/dt = 0.125 \text{ }^\circ\text{C/h}$. Los valores de potencia estacionaria, \bar{p}_{cd} , se obtuvieron en un intervalo de promedio de 2 h, luego de un tiempo de establecimiento > 3 h. En este mismo intervalo se obtuvo la temperatura ambiente promedio, \bar{T}_{amb} , para cada evento.

Interpretación de los datos experimentales

La curva de potencia estacionaria, \bar{p}_{cd} , para esta experiencia se muestra en la figura 5.11. Esta curva presenta el comportamiento lineal esperado (cf. ec. (5.20)) y se ajusta de acuerdo a los coeficientes que se encuentran en la tabla 5.4. En la figura se muestran además las

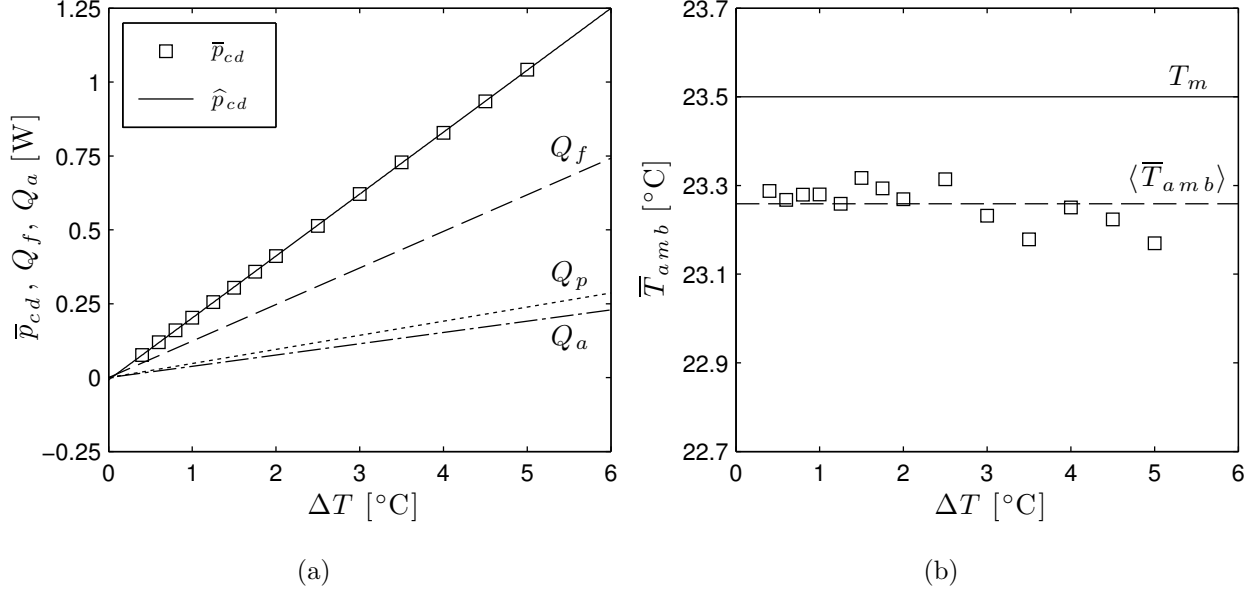


Figura 5.11: Caracterización de la celda de convección en régimen de conducción estacionario. (a) Potencia media \bar{p}_{cd} en función de ΔT : (\square) datos experimentales y (—) ajuste $\hat{p}_{cd} = g_{cd}\Delta T + g_0$ con coeficientes g_{cd} y g_0 . Se indica el calor a través del fluido Q_f , paredes laterales Q_a y pérdidas Q_p . (b) Condiciones de temperatura ambiente. Se indican las temperaturas: (\square) promedio de cada evento \bar{T}_{amb} ; media $T_m = 23.50^\circ\text{C}$ y promedio de la serie $\langle \bar{T}_{amb} \rangle = 23.26^\circ\text{C}$.

T_m [$^\circ\text{C}$]	g_{cd} [$\text{W}/^\circ\text{C}$]	g_0 [W]	σ [mW]	g_f [$\text{W}/^\circ\text{C}$]	g_a [$\text{W}/^\circ\text{C}$]	g_p [$\text{W}/^\circ\text{C}$]
23.50	0.210	-0.008	1.8	0.124	0.038	0.048

Tabla 5.4: Coeficientes del ajuste a la potencia estacionaria en conducción $\hat{p}_{cd} = g_{cd}\Delta T + g_0$ y desviación estándar de residuos σ . Se indican además las conductancias térmicas del fluido g_f , paredes laterales g_a y pérdidas de calor g_p .

contribuciones de los elementos de la celda, obtenidas de sus conductancias térmicas y que se indican en dicha tabla. Normalizando estas contribuciones por el calor total (cf. ec. (5.22)), se obtiene que el calor se distribuye como: $\Lambda_f = 59.03\%$ en el fluido, $\Lambda_a = 18.21\%$ en paredes laterales y $\Lambda_p = 22.76\%$ en pérdidas. Esta distribución difiere levemente con respecto a la obtenida previamente (cf. tabla 5.3) debido a la diferencia entre las temperaturas media T_m y ambiente T_{amb} entre ambas experiencias. Las condiciones de la presente experiencia se muestran en la figura 5.11 (b), donde se observa que la temperatura ambiente promedio de la serie se encuentra levemente debajo de la temperatura media, $T_m - \langle \bar{T}_{amb} \rangle \sim 0.24^\circ\text{C}$. Como su desviación estándar es pequeña, $\sigma(\bar{T}_{amb}) = 0.04^\circ\text{C}$, se obtiene una pequeña desviación estándar de potencia estacionaria con respecto su ajuste, $\sigma = 1.8 \text{ mW}$ (cf. Tabla 5.4). La influencia de la variación de la temperatura ambiente sobre las pérdidas de calor y, por lo tanto, en la estimación de la potencia útil a través del fluido se discute con más detalle en el próximo punto.

Efecto de la temperatura ambiente en las pérdidas de calor

Un aspecto importante consiste en estimar la variación de las pérdidas de calor generada por un cambio en la temperatura ambiente, que afecta la determinación de la potencia útil a través del fluido y, por lo tanto, a la medición del número de Nusselt. Para ello se utilizó un método similar a [62], donde se calculan los coeficientes de acoplamiento entre distintos elementos de la celda. En el presente trabajo se realizó el siguiente ajuste a las pérdidas de calor en régimen de conducción estacionario:

$$\widehat{Q}_p = g_p \Delta T + g_0 + C_{amb}(T_m - \bar{T}_{amb}) \quad (5.23)$$

que es similar a la ec. (5.19), salvo el último término que indica la variación de pérdidas mediante el coeficiente de acoplamiento C_{amb} entre las temperaturas media T_m y ambiente \bar{T}_{amb} . Para obtener los coeficientes del ajuste se utilizó regresión múltiple [62, 68] a la componente de pérdidas de calor, Q_p , de distintas series de adquisición que se muestran en la figura 5.12 (a). Estas series se describen en la Tabla 5.6 que incluyen algunas mediciones con la celda en modo de convección, pero con el fluido en régimen de conducción.

Serie	configuración de la celda	T_m [°C]	adquisición	sección
A	conducción	[23.50, 23.75, 24.00]	escalón de temperatura	5.2.1
B	conducción	23.50	conducción horizontal	5.2.2
C	convección	23.50	convección horizontal	5.3.1
E	conducción	22.60	convección inclinada	5.3.2
F	conducción	22.60	convección inclinada	5.3.2

Tabla 5.5: Descripción de las series de adquisición en la figura 5.12.

Los coeficientes obtenidos para el ajuste (cf. ec. (5.23)) se encuentran en tabla 5.6, de los cuales g_p prácticamente coincide con el valor determinado en el punto anterior, pero se encuentra una diferencia de ~ 16 mW para g_0 (cf. Tabla 5.4). Como en el presente cálculo g_0 no absorbe los efectos de temperatura ambiente, esta diferencia se puede atribuir a un leve desajuste en el método de medición de potencia. Por otra parte, la pequeña desviación estándar del ajuste (cf. tabla 5.6) indica que el ajuste representar correctamente los datos.

g_p [W/°C]	g_0 [W]	C_{amb} [W/°C]	σ [mW]
0.046	-0.016	0.048	1.2

Tabla 5.6: Coeficientes obtenidos para el ajuste a la pérdidas estacionarias de calor (cf. ec. (5.23)) y σ desviación estándar de residuos del ajuste.

Corrección de mediciones En las experiencias que se discuten más adelante, principalmente en la sección 5.3.2, fue necesario corregir los efectos de temperatura ambiente. Para ello se utilizó el ajuste de pérdidas \widehat{Q}_p con los coeficientes de la tabla 5.6. Este ajuste permite obtener el calor por movimientos convectivos del fluido, $Q_{f,cv}$, de una medición de potencia

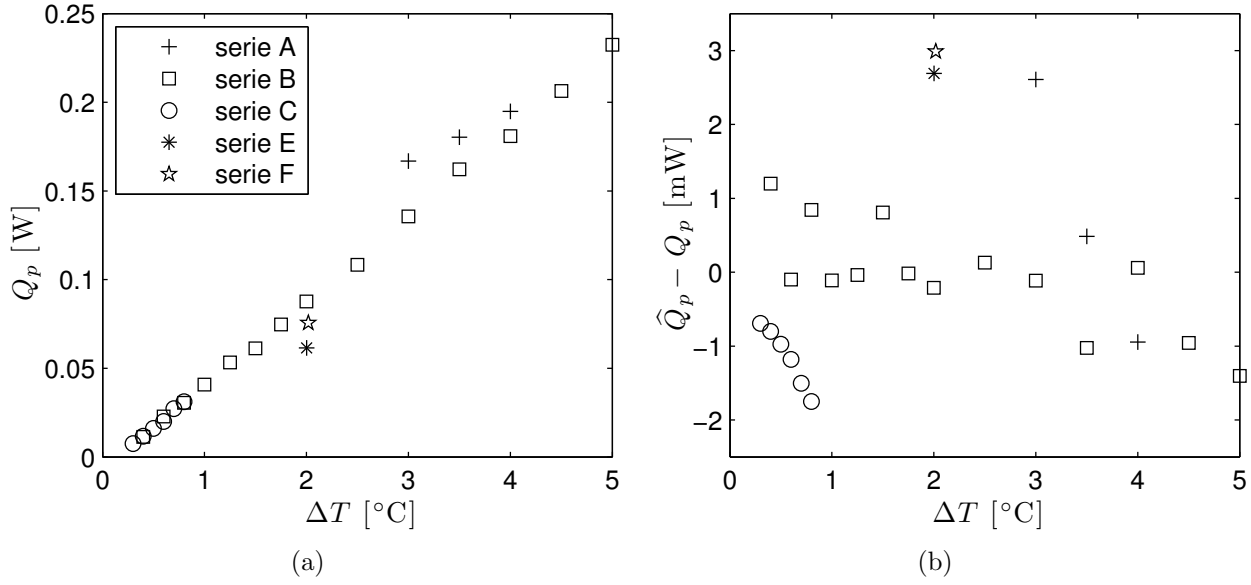


Figura 5.12: Caracterización de pérdidas de calor en régimen de conducción. (a) Componente estacionaria de pérdidas Q_p en función de ΔT para las series indicadas en la Tabla 5.6. (b) Residuos del ajuste de pérdidas dado por la ec. (5.23), $\hat{Q}_p - Q_p$, en función de ΔT .

con la celda en modo de convección, \bar{p}_{cv} , de acuerdo a:

$$Q_{f,cv} = \bar{p}_{cv} - g_f \Delta T - g_a \Delta T - \hat{Q}_p(T_{m,cv}, \bar{T}_{amb,cv}) \quad (5.24)$$

donde $T_{m,cv}$ y $\bar{T}_{amb,cv}$ son las temperaturas media y ambiente durante la medición de \bar{p}_{cv} . Para obtener el número de Nusselt se requiere además del calor a través del fluido por conducción y que se obtiene de su conductancia térmica, i.e. $Q_{f,cd} = g_f \Delta T$. Escribiendo el número de Nusselt, Nu , más un término de error, δNu , para los datos corregidos se obtiene:

$$Nu = 1 + \frac{Q_{f,cv}}{Q_{f,cd}} + \delta Nu \quad \text{con} \quad \delta Nu = \frac{\hat{Q}_p - Q_p}{g_f \Delta T} \approx \pm \frac{0.024}{\Delta T} \quad (5.25)$$

donde el error δNu se estimó de los residuos del ajuste que se muestran en la figura 5.12 (b) y que se encuentran en el rango ± 3 mW. En caso de no realizar la corrección de datos el error, δNu , es:

$$\delta Nu \approx C_{amb} \frac{\bar{T}_{amb,cv} - \bar{T}_{amb,cd}}{g_f \Delta T} \quad (5.26)$$

con $\bar{T}_{amb,cv}$ y $\bar{T}_{amb,cd}$ las temperaturas ambiente para las mediciones con la celda en modo de convección y conducción, respectivamente, y donde el error aumenta para $\Delta T \rightarrow 0$ en forma similar al caso anterior.

5.3. Transferencia de calor en régimen de convección

En la presente parte del trabajo se estudia el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard con el interés de observar posibles transiciones de flujo en términos de la transferencia de calor. En la sección 5.3.1 se estudia el fenómeno de convección para un posicionamiento horizontal de la celda (cf. fig. 5.13), configuración que corresponde a la variante tradicional de la inestabilidad. Luego, en la sección 5.3.2, se estudia el fenómeno de convección con inclinación respecto al vector de gravedad.

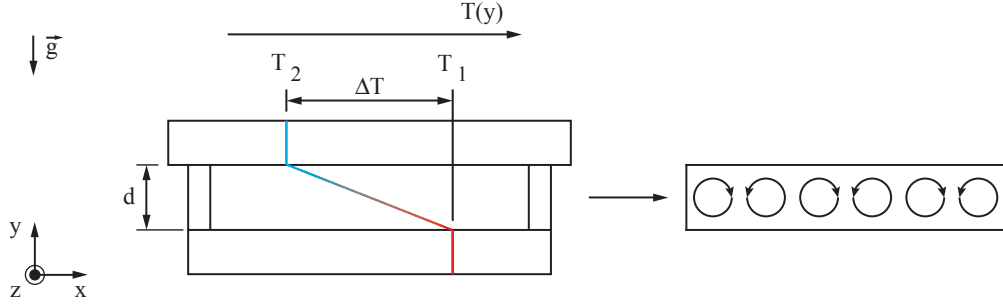


Figura 5.13: Celda en modo de convección. Se indica en la celda un gradiente de temperatura inestable $dT/dy = -\Delta T/d$, con $\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$ y a la derecha el patrón preferido de inestabilidad. Este consiste en rollos transversales, i.e. paralelos al lado más corto de la celda, que se forman a $Ra > Ra_c$.

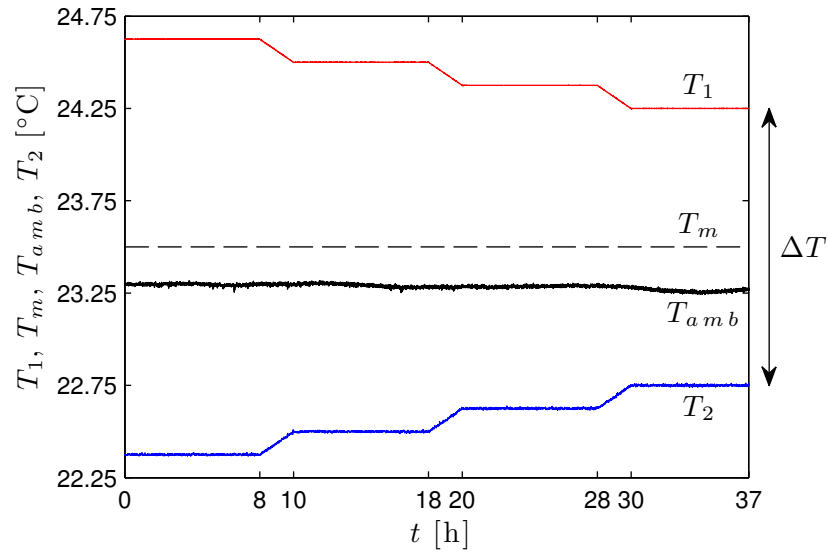
5.3.1. Convección horizontal

El estudio de la celda en una configuración horizontal (cf. fig. 5.13 (a)) se realizó con el objetivo de caracterizar la inestabilidad a números de Rayleigh moderados $Ra \lesssim 10^5$. Esta caracterización se realizó principalmente en términos del número de Rayleigh crítico Ra_c y de la curva entre los números de Nusselt Nu y Rayleigh Ra .

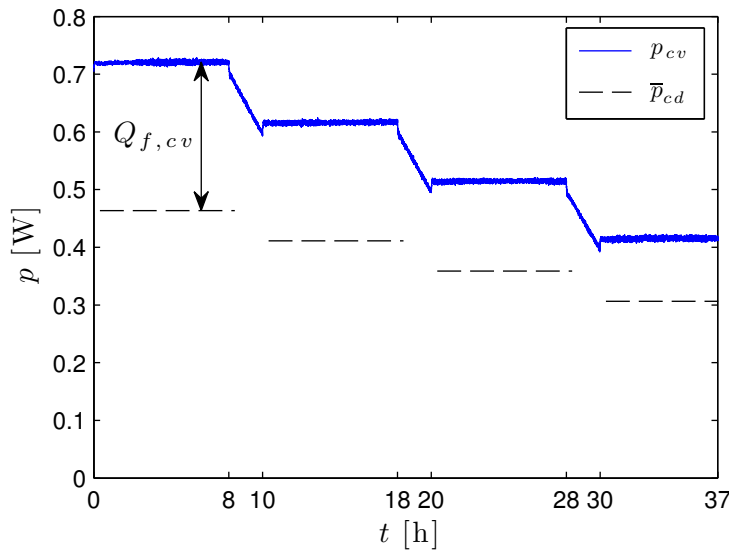
Procedimiento experimental

En la presente experiencia se realizó la adquisición de series de potencia para eventos a $\Delta T \in [0.3, 5.0]$ °C con un procedimiento similar al descrito previamente (cf. 5.2.2). La temperatura media se fijó a un valor constante $T_m = 23.5$ °C y el tránsito entre eventos se realizó mediante rampas de temperatura con pendiente $\beta \equiv d(\Delta T)/dt = \pm 0.125$ °C/h. Los valores de potencia estacionaria, \bar{p}_{cv} , se obtuvieron en un intervalo de promedio de 2 h, luego de un tiempo de establecimiento > 5 h. La temperatura ambiente promedio, \bar{T}_{amb} , se obtuvo para cada evento en este mismo intervalo de promedio.

En la figura 5.14 se muestran extractos de las series de temperatura y potencia con la celda en modo de convección, p_{cv} , para eventos con ΔT decreciente y un régimen de convección establecido previamente en la celda. En ella se indican los valores de potencia estacionarios para la celda en modo de conducción, \bar{p}_{cd} , bajo condiciones similares. La diferencia entre los valores estacionarios de potencia, \bar{p}_{cv} y \bar{p}_{cd} , corresponde al calor $Q_{f,cv}$ transferido por el movimiento convectivo del fluido.



(a)



(b)

Figura 5.14: Extractos de series en régimen convectivo a $T_m = 23.5$ °C. (a) Evolución temporal de la temperatura de la placa caliente T_1 , placa fría T_2 , media T_m y ambiente T_{amb} . Se muestran eventos de termalización a $\Delta T = [2.25, 2.00, 1.75, 1.5]$ °C constante y de tránsito a $d(\Delta T)/dt = -0.125$ °C/h. (b) Evolución temporal de potencia p_{cv} para la celda modo en convección. Se indica la potencia promedio para la celda en modo de conducción, \bar{p}_{cd} , y el calor por movimientos convectivos del fluido, $Q_{f,cv}$.

Curvas de potencia estacionaria y comienzo de la inestabilidad

Los valores estacionarios de potencia para las configuraciones de la celda en modos de conducción y convección, \bar{p}_{cd} y \bar{p}_{cv} , respectivamente, se muestran en función de ΔT en la figura 5.15. En el tramo bajo la diferencia de temperatura crítica, ΔT_c , ambas curvas colapsan debido a que el fluido se encuentra en un régimen conductivo. Luego de este umbral, se observa un quiebre en la curva $\bar{p}_{cv}(\Delta T)$ y que se debe al calor adicional $Q_{f,cv}$ generado por los movimientos convectivos del fluido. Este fenómeno que se conoce como principio de Schmidt-Milverton [2] e indica la transición del flujo desde un régimen conductivo a uno convectivo. El umbral de la inestabilidad, indicado en la figura como $\Delta T = 0.91^\circ \text{C}$, se puede determinar directamente de estas mediciones de potencia. En el presente trabajo, sin embargo, se utilizó un método basado en el comportamiento inicial de la transferencia de calor, según se describe más adelante.

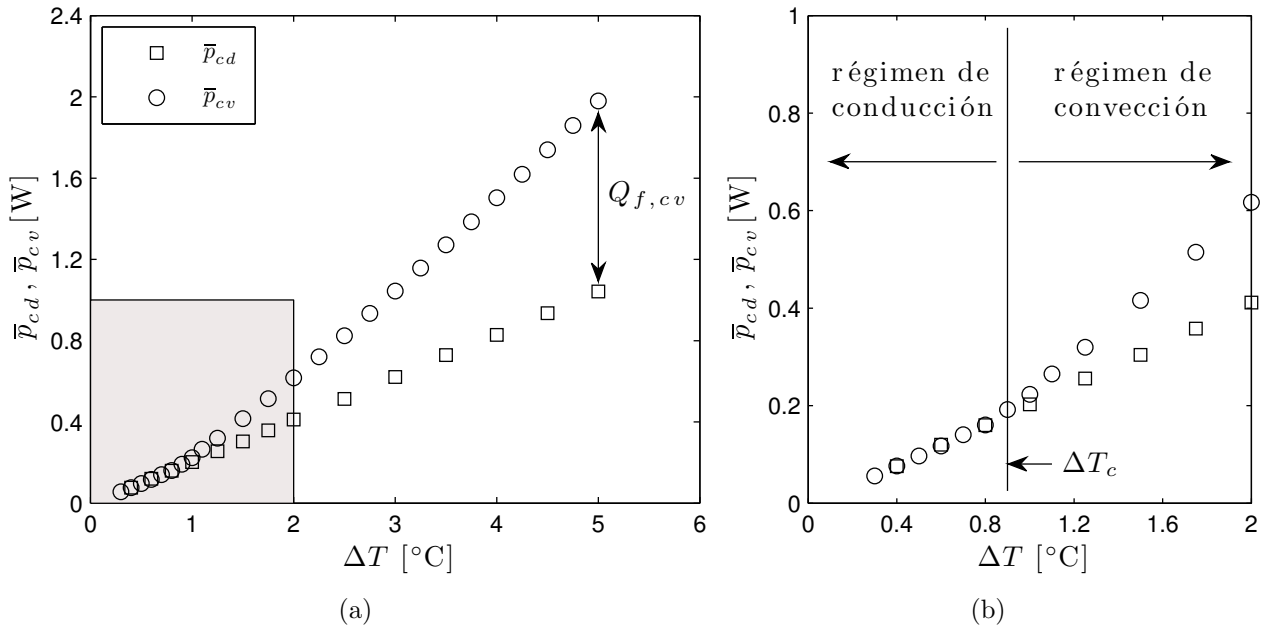


Figura 5.15: Curvas de potencia en régimen estacionario en función de ΔT . (a) Potencias en régimen estacionario para la celda en modo de conducción y convección, (\square) \bar{p}_{cd} y (\circ) \bar{p}_{cv} , respectivamente. Ambas curvas se obtuvieron para una temperatura media $T_m = 23.50^\circ\text{C}$ constante. (b) Detalle de la región indicada en (a) que muestra el comportamiento entorno a comienzo de la inestabilidad.

Cálculo de los números de Nusselt y Rayleigh

Los datos anteriores permiten obtener los parámetros de control de la experiencia dados por los números de Nusselt $Nu = (Q_{f,cd} + Q_{f,cv})/Q_{f,cd}$ y Rayleigh $Ra = g\alpha\Delta T d^3/(\nu\kappa)$ (cf. 3.3). En el cálculo de Ra las propiedades del fluido se evalúan a su temperatura media, T_m , y se corrige ΔT por la caída de temperatura en ambas placas (cf. 4.2.1). Para obtener Nu se requiere de $Q_{f,cv}$, cantidad que se estima de las series de potencia de la figura 5.15 mediante dos métodos. En el primero como la diferencia entre, \bar{p}_{cv} y el ajuste \hat{p}_{cd} (cf. ec. 5.24). En el segundo mediante el modelo de pérdidas de calor que considera las variaciones de temperatura ambiente (cf. ec. 5.24).

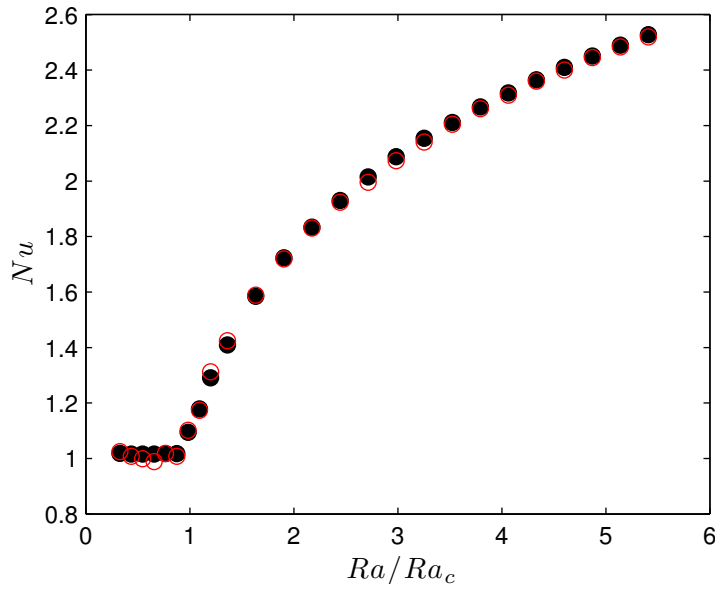


Figura 5.16: Número de Nusselt Nu en función del número de Rayleigh Ra para los datos: (○) sin y (●) con corrección por variaciones de temperatura ambiente.

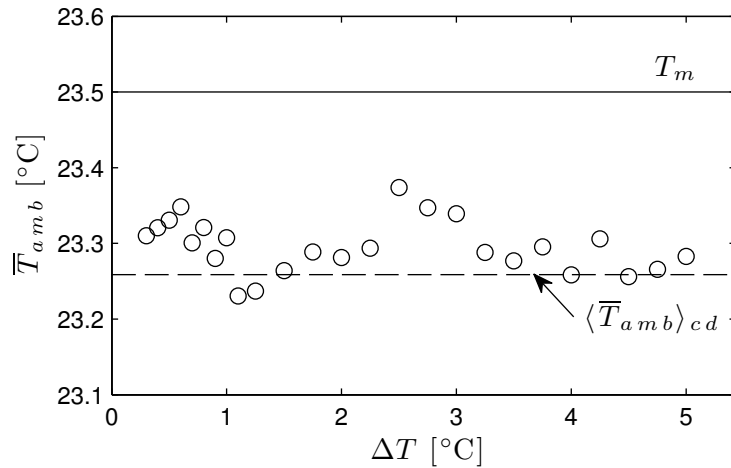


Figura 5.17: Temperatura ambiente promedio, \bar{T}_{amb} , en función de ΔT para la adquisición de potencia con la celda en modo de convección. Se indican además las temperaturas: ambiente promedio, $\langle \bar{T}_{amb} \rangle_{cd}$, sobre la serie completa con la celda en modo de conducción y media, $T_m = 23.50$ °C, de ambas series.

En la figura 5.16 se muestra la evolución de Nu con Ra obtenida de los métodos mencionados previamente, donde se observa que estos entregan resultados con diferencias bastante pequeñas. Para $Ra < Ra_c$, por ejemplo, ambos entregan el valor esperado $Nu = 1$ con un error $\sim 2\%$. Esto se debe a que las mediciones de potencia, \bar{p}_{cd} y \bar{p}_{cv} , se efectuaron bajo condiciones de temperatura ambiente similares y a una misma temperatura media, como se puede observar en la figura 5.17. En la tabla 5.7 se resumen parte de los datos obtenidos mediante ambos métodos en términos de Ra y el número de Rayleigh reducido $\epsilon = Ra/Ra_c - 1$.

Ra	ϵ	Nu	Nu^*
2,121	0.20	1.31	1.29
3,365	0.90	1.72	1.72
4,797	1.71	2.00	2.01
6,226	2.52	2.20	2.21
7,654	3.33	2.36	2.36
9,081	4.14	2.48	2.49
9,557	4.41	2.52	2.53

Tabla 5.7: Número de Nusselt Nu en función de Ra y el número de Rayleigh reducido $\epsilon = Ra/Ra_c - 1$. (*) corregido por variaciones de temperatura ambiente.

Determinación de Ra_c y comportamiento inicial de Nu

El número de Rayleigh crítico, Ra_c , se obtuvo del método utilizado por [38] para determinar la pendiente inicial de la transferencia de calor. De acuerdo a los análisis de Schüter, Lortz y Busse [39] esta pendiente se encuentra dada por:

$$S_1 = \lim_{Ra \rightarrow Ra_c^+} \frac{Ra(Nu - 1)}{Ra - Ra_c} \quad (5.27)$$

Para obtener S_1 se generó la curva $NuRa$ en función de $Ra - Ra_c$ que se muestra en la figura 5.18 y utilizaron ajustes lineales para los tramos correspondientes a los regímenes de conducción y convección. Para el último se consideró un rango $Ra < 3Ra_c$ en cual la ec. (5.27) es válida de acuerdo a las experiencias de [38]. La intersección de ambos ajustes entrega Ra_c , que se utilizó para reescalar la abscisa inicialmente en términos de Ra . La pendiente S_1 se

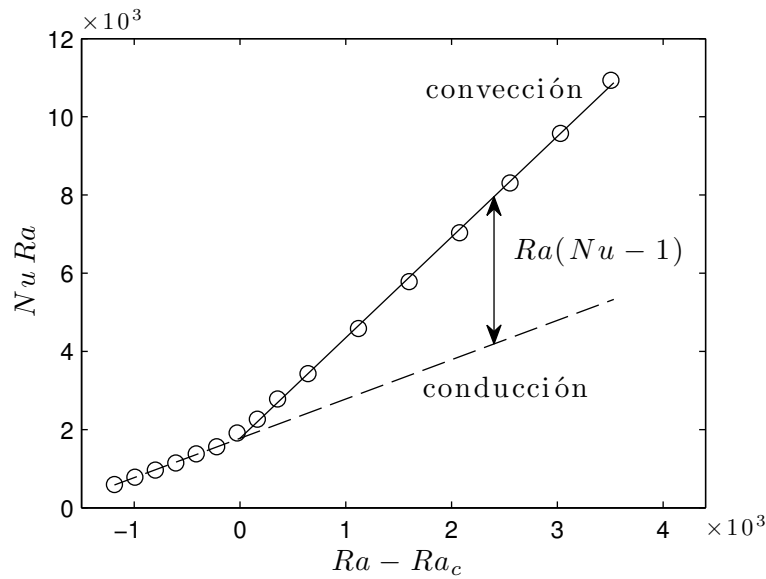


Figura 5.18: $NuRa$ en función de $Ra - Ra_c$. Se indican los ajustes para los regímenes de: (---) conducción y (—) convección, cuya intersección entrega Ra_c . La pendiente inicial S_1 corresponde al cociente entre la distancia vertical ambos ajustes, $Ra(Nu - 1)$, y a la ordenada, $Ra - Ra_c$.

determina de estos ajuste y se puede obtener gráficamente de la figura 5.18. En ella corresponde al cociente entre la distancia vertical entre ambos ajustes, $Ra(Nu - 1)$, y la ordenada, $Ra - Ra_c$, i.e. el numerador y denominador de la ec. (5.27), respectivamente.

ΔT_c [°C]	Ra_c	Γ_x	Γ_z	Pr	$\nu_{max}/\nu_{min}(\Delta T_c)$	S_1
0.91 (0.92)	1770 (1805)	6.14	2.90	3,288	1.07	1.57 (1.59)

Tabla 5.8: Parámetros de interés para el umbral de la inestabilidad. Se indican: ΔT_c diferencia de temperatura crítica; Rayleigh crítico Ra_c ; Pr número de Prandtl a 23.5 °C y razón entre viscosidades máxima y mínima, ν_{max}/ν_{min} , a ΔT_c ; Γ_x y Γ_z razones de aspecto de la celda; pendiente inicial S_1 . Los datos en paréntesis se encuentran corregidos por la variación de temperatura ambiente.

Número de Rayleigh crítico. El método anterior entrega $Ra_c = 1770$, valor que se discute a continuación en términos de los parámetros que se encuentran la tabla 5.8.

- **Geometría de la celda.** El Ra_c obtenido se puede comparar con resultados previos para celdas con razón de aspecto 6:3:1 (cf. 3.2). Davis [33] y Catton [34] entregan 2100 y 1879 para celdas con paredes conductoras y aislantes, respectivamente. Estos valores sobreestiman Ra_c debido a que se obtuvieron mediante simulación numérica bidimensional [36]. Mejores estimaciones para Ra_c son: 1793 obtenido por Edwards [36] mediante simulación numérica tridimensional con paredes aislantes; 1913 obtenido por Stork y Müller [35] en experiencias con paredes de baja conductividad. El valor de Ra_c obtenido se encuentra en acuerdo referencias anteriores, considerando la pequeña diferencia en las razones de aspecto de la celda y que sus paredes laterales son levemente aislantes. Esto último se obtiene de la razón entre las conductividades térmica de paredes laterales y fluido, $k_a/k = 0.65$.
- **Propiedades del fluido.** La propiedad del fluido de mayor variación con la temperatura es la viscosidad (cf. 4.1.2). A la diferencia de temperatura crítica, sin embargo, la razón de viscosidad entre ambas superficies, ν_{max}/ν_{min} , es baja (cf. Tabla 5.8) y se cumple la aproximación de Oberbeck-Boussinesq. Por otra parte, el número de Prandtl es bastante elevado, $Pr \sim 3290$, pero este valor no afecta considerablemente el de Ra_c .

Otro aspecto importante es el error asociado a la estimación de las propiedades del fluido. Éstas, en general, no se pueden determinar con gran precisión, sobretodo en el presente trabajo donde el fluido es una solución. El error asociado a leyes de mezcla que permiten estimar las propiedades del fluido es aproximadamente ± 80 .

Pendiente inicial. Comparando el valor obtenido $S_1 = 1.57$ con el análisis de [39], este es más cercano al de rollos transversales (1.43) y bastante mayor al de celdas cuadradas (1.28) o hexágonos (1.12). Esto resulta coherente ya que se observó la formación de rollos transversales en experiencias previas con el montaje al descubierto. El aumento con respecto al valor teórico ha sido observado y se atribuye: al tamaño finito de la celda y distorsión del patrón inicial por paredes laterales [13]; al comportamiento exponencial de la viscosidad con la temperatura [69].

Cabe mencionar que en el presente trabajo se utilizó la definición para la pendiente inicial propuesta por [38], dada por:

$$S_1 \equiv \frac{(1 + \epsilon)(Nu - 1)}{\epsilon} \quad (5.28)$$

Esto se menciona debido a que una definición alternativa de la pendiente inicial es $S_1 = (Nu - 1)$ y que entrega resultados diferentes a los mencionados previamente.

Comportamiento de Nu a Ra moderadamente supercrítico

El comportamiento esperado para la parte convectiva de la transferencia de calor, $Q_{f,cv}$, en el rango moderadamente supercrítico, $Ra \lesssim 10Ra_c$, es inicialmente proporcional a ϵ y luego a términos de mayor orden de esta cantidad (cf. 3.3.1). Este comportamiento se discute a continuación en términos de la corriente de calor adimensional, j_{cv} , definida por [13]:

$$j_{cv} = \frac{Q_{f,cv}}{g_f \Delta T_c} \quad (5.29)$$

donde el denominador representa el calor a través del fluido a la diferencia de temperatura crítica ΔT_c . La definición de la corriente de calor adimensional, j_{cv} , equivale a:

$$j_{cv} = S_1 \epsilon \quad (5.30)$$

resultado que se obtiene usando la definición de S_1 (cf. ec. (5.27)) y reconociendo que:

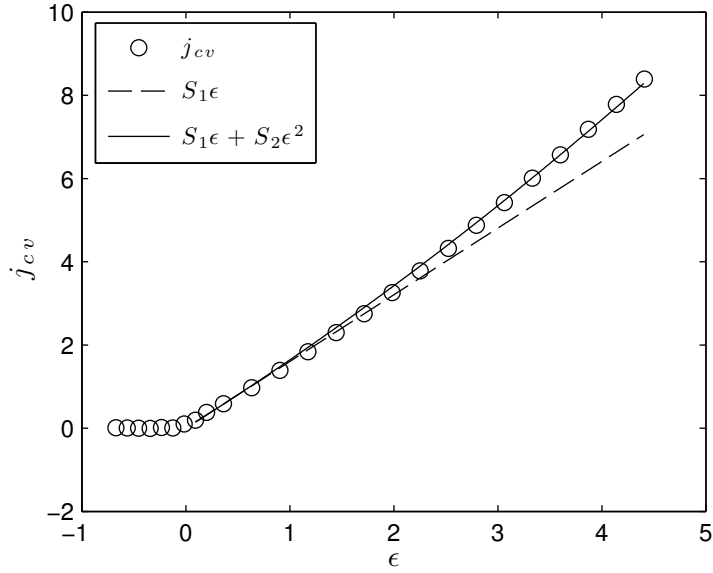
$$Q_{f,cv} = g_f(Nu - 1)\Delta T \quad \text{y} \quad \frac{\Delta T}{\Delta T_c} = \frac{Ra}{Ra_c} \quad (5.31)$$

donde la última expresión se cumple debido a que las propiedades del fluido se evalúan a su temperatura media. La relación lineal entre j_{cv} y ϵ se cumple mientras la expresión para S_1 es válida, i.e. para $\epsilon \lesssim 2$, como se puede apreciar en la figura 5.18 (a). En la figura se muestra además un ajuste para j_{cv} de segundo orden en ϵ , en el rango $\epsilon \lesssim 5$, y cuyos coeficientes se encuentran en la tabla 5.9.

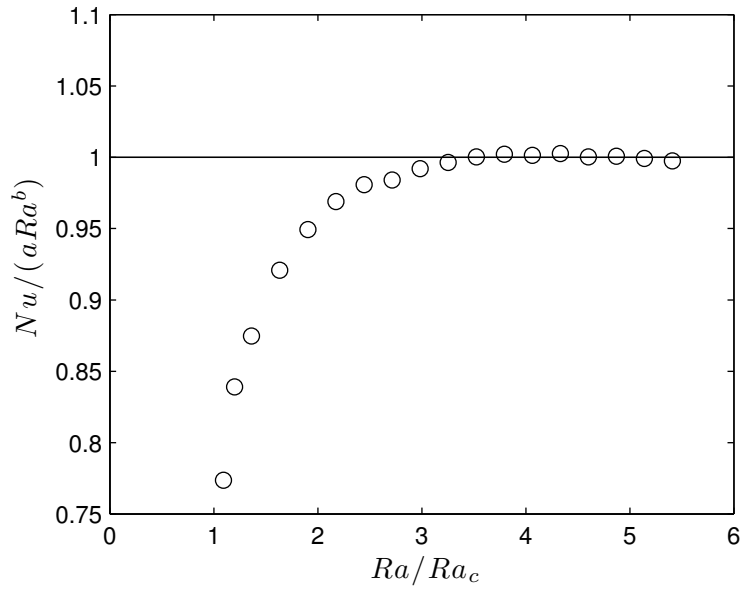
Un resultado interesante es que en el rango $3 \lesssim Ra/Ra_c \lesssim 6$ los datos se pueden describir por una ley de potencia $Nu = a \cdot Ra^b$, con coeficientes a y b que se encuentran en la tabla 5.9, según se muestra en la figura 5.18 (b). Este ajuste permite representar correctamente los datos aún cuando este tipo de comportamiento se observa típicamente a Ra más elevados.

S_1	S_2	a	b
1.57	0.071	0.136	0.319

Tabla 5.9: Parámetros de ajuste de la transferencia de calor a Ra moderadamente supercrítico para: $j_{cv} = S_1 \epsilon + S_2 \epsilon^2$ con $0 < \epsilon < 5$ y fijando S_1 ; $Nu = a \cdot Ra^b$ con $5735 < Ra < 9530$.



(a)



(b)

Figura 5.19: Caracterización de la transferencia de calor a valores de Ra moderadamente supercríticos ($Ra < 10^5$). (a) Corriente de calor adimensional, j_{cv} , en función del número de Rayleigh reducido ϵ . (b) Razón entre el número de Nusselt y la ley de potencia aRa^b en función de Ra/Ra_c . Los coeficientes del ajuste, a y b , se encuentran en la tabla 5.9).

5.3.2. Convección inclinada

En las presentes experiencias se estudian las transiciones de flujo, en términos de la transferencia de calor, que se generan en la celda de convección con inclinación con respecto al vector de gravedad. En esta variante del problema clásico de Rayleigh-Bénard, la inclinación de la celda produce un flujo base con un perfil de velocidad cúbico, $\vec{U}_0(y)$, que se superpone al flujo existente (cf. 3.5). Este flujo base (cf. fig. 5.20) afecta a los mecanismos de inestabilidad dependiendo del ángulo de inclinación γ de la celda: en la región $\gamma < 90^\circ$ la inestabilidad se genera por la fuerza de empuje y el flujo base; en la región $\gamma > 90^\circ$ la fuerza de empuje estabiliza el flujo, mientras que el flujo base lo desestabiliza. La presencia de estos mecanismos genera distintos tipos de flujo que se desean caracterizar en términos del número de Nusselt.

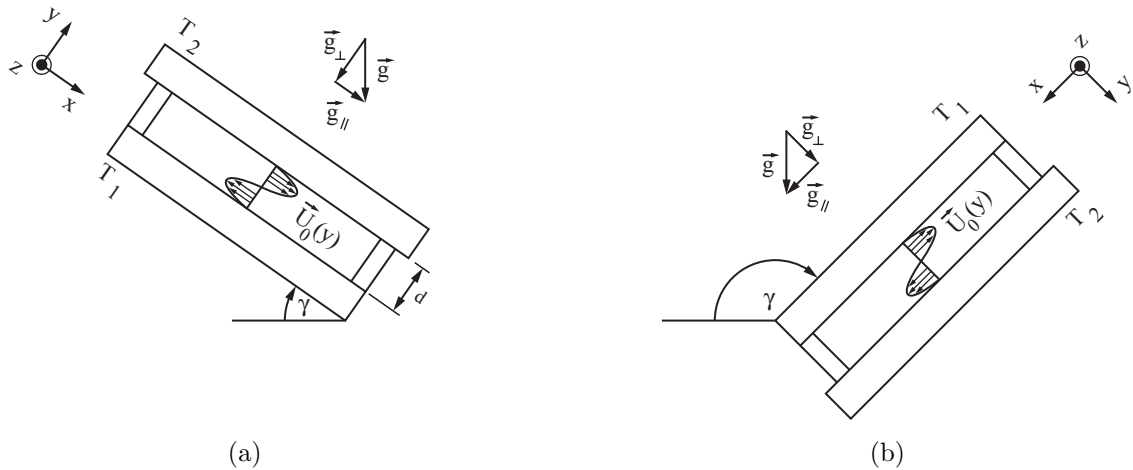


Figura 5.20: Esquema del flujo base para un ángulo de inclinación γ de la celda. (a) Calentamiento desde abajo ($\gamma < 90^\circ$). (b) Calentamiento desde arriba ($\gamma > 90^\circ$). En ambos casos se tiene: flujo base $\vec{U}_0(y)$; gradiente de temperatura $dT/dy = -\Delta T/d$, con $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$; componentes del vector de gravedad, $\vec{g}_{\parallel} = \vec{g} \sin \gamma$ y $\vec{g}_{\perp} = \vec{g} \cos \gamma$, de ellas sólo la última contribuye a la fuerza de empuje.

Celda en modos de conducción y convección

Una primera experiencia consistió en medir potencia requerida por la celda en los modos de conducción ($\gamma = 180^\circ$) y convección ($\gamma = 0^\circ$) a $\Delta T = 2^\circ\text{C}$ constante. Esta diferencia corresponde a $Ra = 3570$, evaluando las propiedades del fluido a la temperatura media de la experiencia $T_m = 22.60^\circ\text{C}$. En la figura 5.21 se encuentra la serie de potencia para esta adquisición, donde se indica el calor generado solamente por convección de $Q_{f,cv} = 170$ mW. Este cantidad, que es bastante pequeña, corresponde al rango que se dispone para estudiar el comportamiento del fluido con el ángulo de inclinación. En la figura 5.21 (b) se muestra con mayor detalle la evolución temporal potencia al giro de la celda en 180° para establecer del régimen de convección. Resulta interesante que el sistema permite estudiar el comportamiento transiente cuando se impone el ángulo en función del tiempo, $\gamma(t)$, y que puede que ser estudiado en investigaciones futuras. Durante la adquisición, la temperatura ambiente se mantuvo a $T_{amb} = 22.835^\circ\text{C}$, con una desviación estándar $\sigma(T_{amb}) = 0.02^\circ\text{C}$, condición que se refleja la estabilidad de las series de potencia.

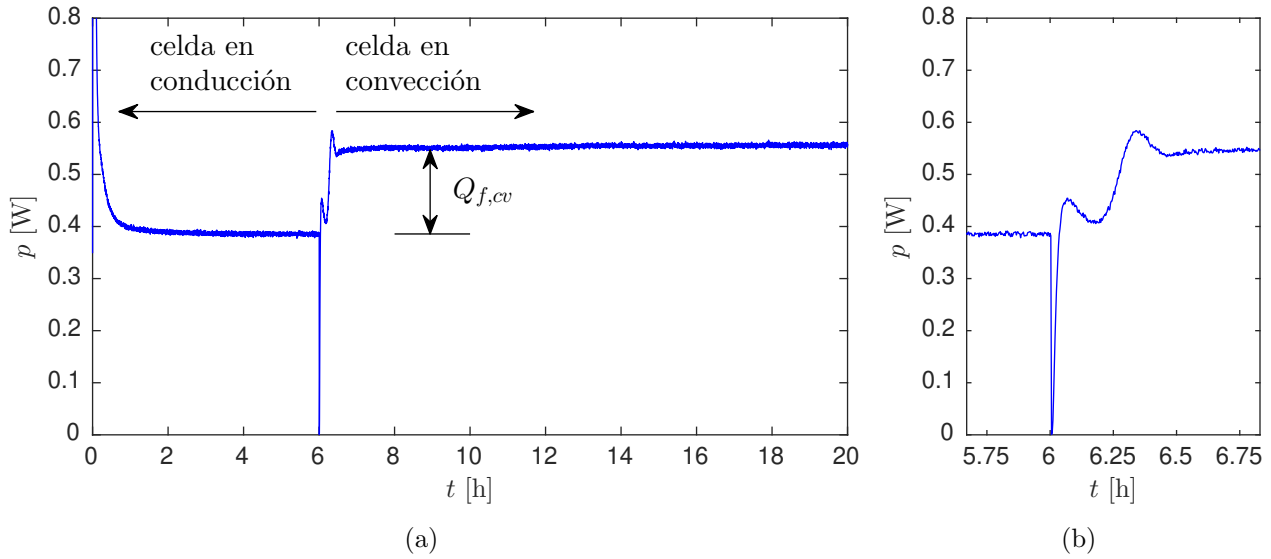
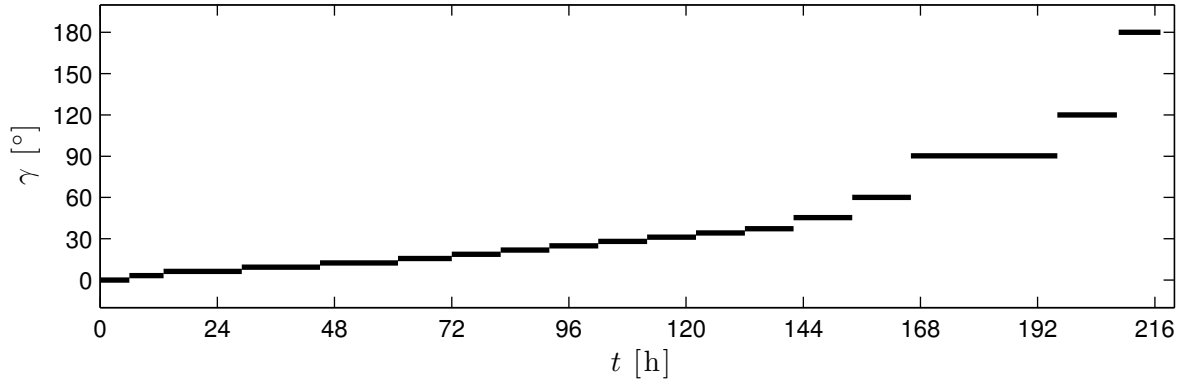


Figura 5.21: Evolución temporal de potencia con la celda en modos de conducción ($\gamma = 180^\circ$) y convección ($\gamma = 0^\circ$). (a) Serie en el rango temporal completo, donde se indica el calor $Q_{f,cv}$ debido a los movimientos convectivos del fluido. (b) Detalle del tránsito entre ambas configuraciones.

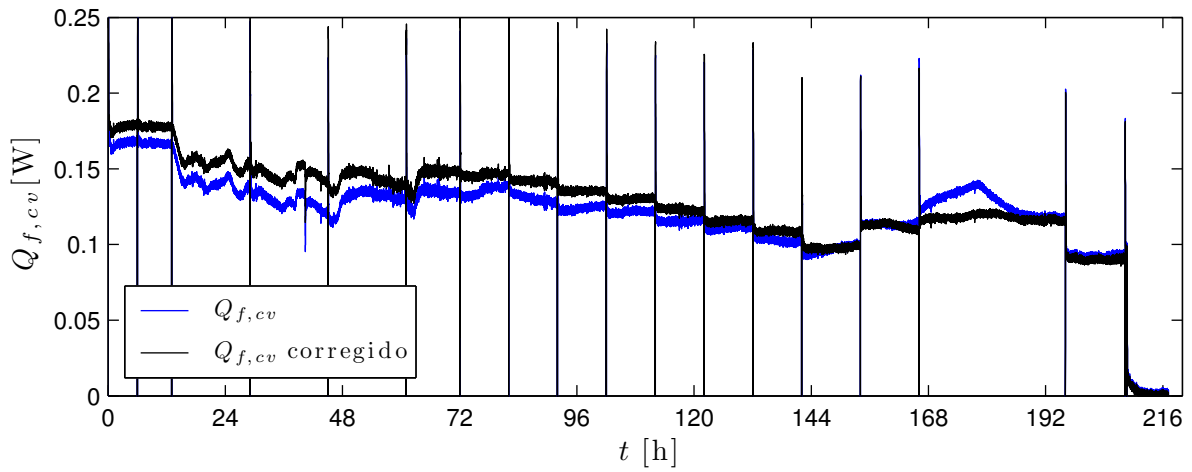
Barrido del ángulo de inclinación de la celda

En esta segunda experiencia se realizó un barrido de la inclinación de la celda desde un modo de convección ($\gamma = 0^\circ$) hasta uno de conducción ($\gamma = 180^\circ$), a $Ra = 3570$ constante y con condición inicial el régimen supercrítico establecido previamente. El giro de la celda se realizó de acuerdo a la evolución temporal del ángulo de inclinación, $\gamma(t)$, que se muestra en la figura 5.22 (a). Con el objetivo de encontrar el mínimo local de la transferencia de calor (cf. 3.5), se utilizaron pasos pequeños, de $\sim 3.11^\circ$, en la región $\gamma \leq 45.3^\circ$. El giro se completó con pasos variables, con una precisión de $1/9^\circ$ gracias al mecanismo de giro implementado (c.f. 4.1.1).

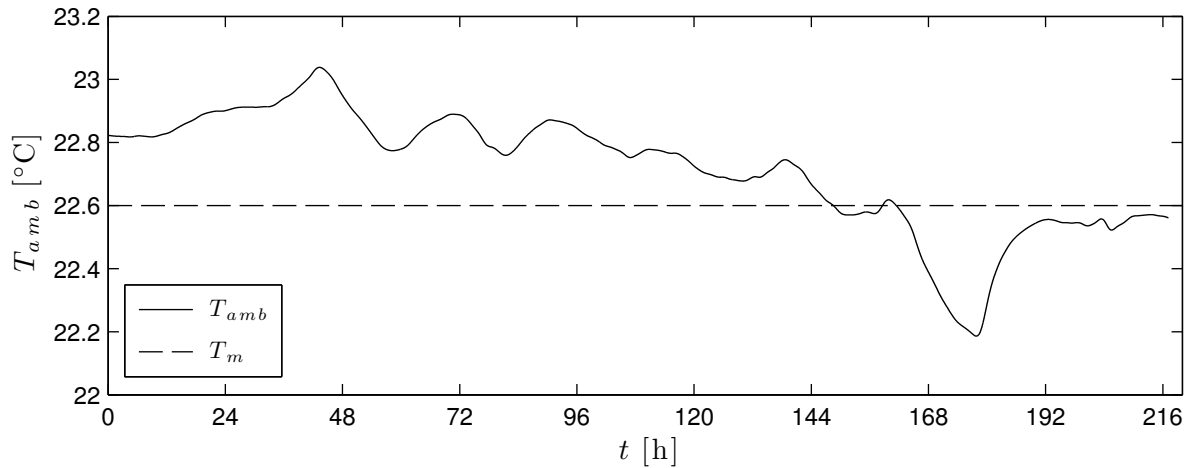
De la serie de potencia se obtuvo la evolución temporal del calor por movimientos convectivos del fluido, $Q_{f,cv}$ que se muestra en la figura 5.22 (b). Esta cantidad se vio afectada por la evolución temporal temperatura ambiente, T_{amb} , que se muestra en la figura 5.22 (c). La variación máxima de T_{amb} es de $\pm 0.4^\circ\text{C}$, que equivale a una variación máxima de ± 20 mW en las pérdidas de calor, de acuerdo a la caracterización previa de estas últimas (cf. 5.2.2). De esta caracterización se utilizó la ec. (5.24) para corregir los valores estacionarios y serie temporal de $Q_{f,cv}$. Esta última se muestra en la figura 5.22 (b), donde se aprecia entorno a $t = 180$ h que esta corrección logra eliminar los efectos de las variaciones de T_{amb} . El efecto de estas variaciones en los valores estacionarios es menor y, en términos del número de Nusselt, las correcciones representan un máximo de $\sim 6\%$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.22: Barrido del ángulo de inclinación de la celda desde el modo de convección ($\gamma = 0^\circ$) hasta el modo de conducción ($\gamma = 180^\circ$). (a) Evolución temporal del ángulo de inclinación de la celda γ . (b) Evolución temporal del calor por movimientos convectivos, $Q_{f,cv}$, bruto y corregido por variaciones de temperatura ambiente. (c) Evolución temporal de temperatura ambiente T_{amb} y temperatura media mantenida constante a $T_m = 22.60$ °C durante la adquisición.

Evolución del número de Nusselt con el ángulo de inclinación

La evolución del número de Nusselt con el ángulo de inclinación $Nu(\gamma)$, obtenida de las series corregidas por variaciones de temperatura ambiente, se muestra en la figura 5.23. En ella, los regímenes de convección y conducción horizontal corresponden a los valores máximo ($\gamma = 0^\circ$) y mínimo ($\gamma = 180^\circ$) de la curva, respectivamente. En el primer tramo que se extiende hasta el mínimo local en $\gamma_{min} \sim 41^\circ$ se observa la disminución de $Nu(\gamma)$ con γ . Este comportamiento se debe a la disminución del parámetro de control:

$$Ra^I = Ra \cos \gamma \quad (5.32)$$

basado en la componente perpendicular del vector de gravedad, $\vec{g}_\perp = \vec{g} \cos \gamma$ (cf. fig. 5.20). En la curva $Nu(\gamma)$ se encuentra un segundo punto de inflexión, un máximo local, para la celda en posición vertical ($\gamma = 90^\circ$). En ausencia de inestabilidades del tipo Rayleigh-Bénard, el comportamiento sería simétrico entorno a este punto y nulo en $\gamma = 0^\circ$ y $\gamma = 180^\circ$ [56].

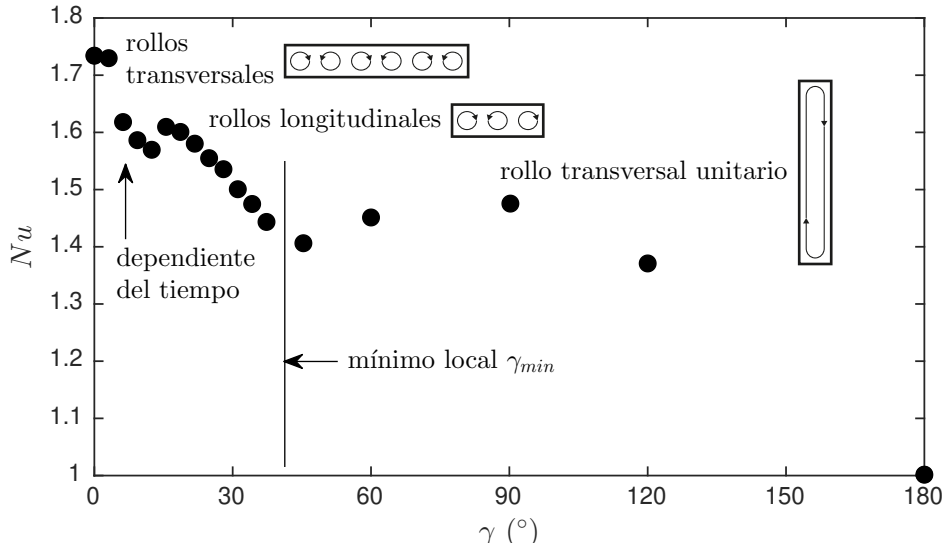


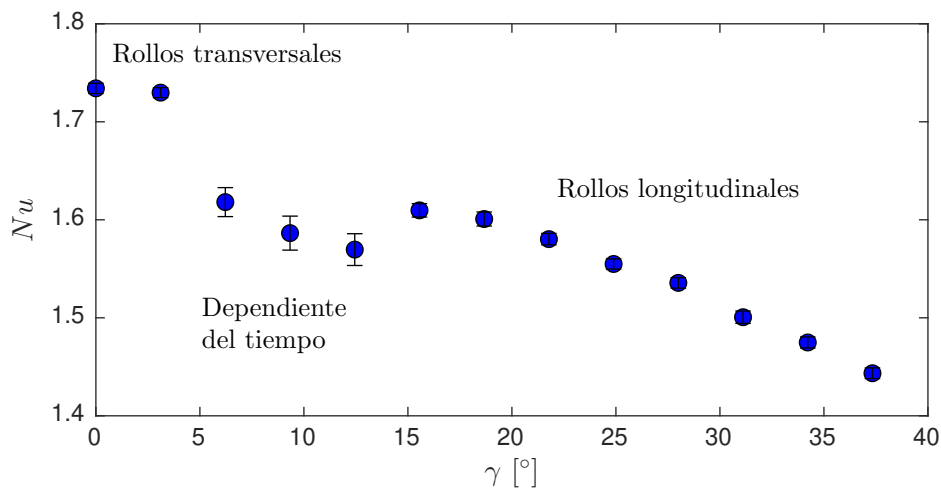
Figura 5.23: Promedio temporal del número de Nusselt $Nu(\gamma)$ en función del ángulo de inclinación de la celda, γ , a $Ra = 3570$. Se indica el ángulo $\gamma_{min} \sim 41^\circ$ para el mínimo local de transferencia de calor y el comportamiento estimado: rollos transversales; dependiente del tiempo; rollos longitudinales y rolo transversal unitario.

En la curva $Nu(\gamma)$ es posible identificar los patrones de flujo que se indican en la figura 5.23 y que son los siguientes:

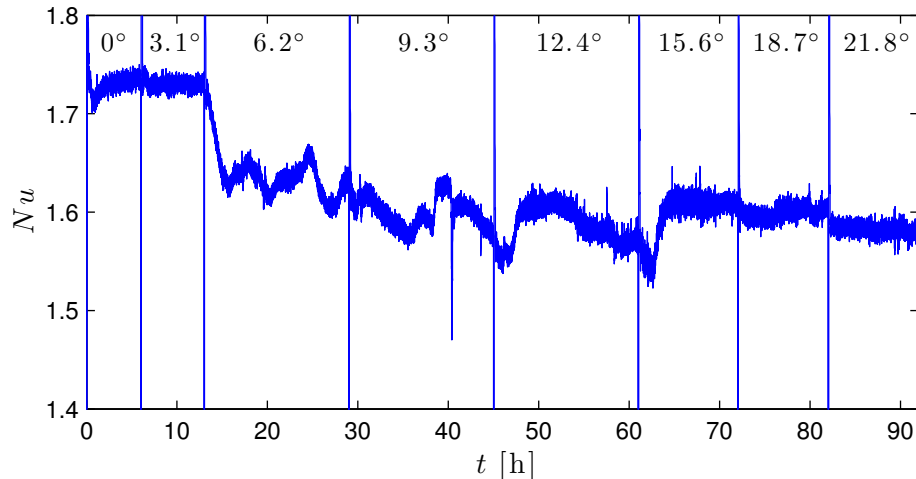
- **Rollos transversales.** Este patrón de rollos, cuyos ejes son paralelos al lado más corto de la celda, es la forma de inestabilidad preferida para convección horizontal ($\gamma = 0^\circ$). Se espera la formación de este patrón para $\gamma \in [0, 3]^\circ$, donde se obtiene $Nu = 1.73$ que coincide, dentro de un $\sim 2\%$ de error, con las mediciones discutidas en la sección anterior.
- **Patrón dependiente del tiempo.** En la curva $Nu(\gamma)$ se encuentra un segundo mínimo local, de menor magnitud y acompañado de fluctuaciones del número de Nusselt que indican la formación de un patrón dependiente del tiempo para $\gamma \in [6, 15]^\circ$.

- **Rollos longitudinales.** Los análisis de estabilidad [43] indican que, luego de un patrón inicial de rollos transversales a menores ángulos de inclinación, se forman rollos longitudinales, i.e. cuyos ejes son paralelos al lado más largo de la celda. Se espera la formación de este patrón hasta antes del ángulo de mínimo local [56], ie. para $\gamma \in [15, 41]^\circ$.
- **Rollo transversal unicelular.** En el tramo restante de la curva, $\gamma \in [41, 180]^\circ$, se espera un único rollo transversal, i.e. cuyo eje es paralelo al lado más corto de la celda [56]. El flujo base determina su movimiento, que es ascendente cercano a la placa caliente y descendente cercano a la placa fría.

En la figura 5.24 se muestra la evolución de $Nu(\gamma)$ promedio y su serie temporal para ángulos de inclinación de la celda pequeños. En el rango $\gamma \in [6, 15]^\circ$ se observa la fluctuación de $Nu(\gamma)$ mencionada previamente y que se puede deber al fenómeno de rollos transversales que se desplazan a través de la celda observado a ángulos $\gamma \in [25, 70]^\circ$ por [18].



(a)



(b)

Figura 5.24: Evolución del número de Nusselt $Nu(\gamma)$ para ángulos de inclinación de la celda $\gamma \leq 40^\circ$. (a). Promedio temporal de $Nu(\gamma)$ en función de γ . El rango indicado por las bandas de error es dos veces la desviación estándar de $Nu(\gamma)$. (b) Evolución temporal de $Nu(\gamma)$ para $\gamma \in [0, 18.67]^\circ$.

Estudio del flujo mediante sensores de temperatura

Un aspecto interesante que se recoge las experiencias sobre convección inclinada es que los sensores de temperatura ubicados en las placas que confinan al fluido entregan información del flujo al interior de la celda. Esto se observa en la figura 5.25 donde se muestran las variaciones de temperatura, δT_{t1} , δT_{t2} y δT_{t3} , de los sensores en la placa caliente T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} , respectivamente, dadas por:

$$\delta T_{t1} = \frac{\bar{T}_{t1} - \bar{T}_1}{\bar{T}_1} \quad \delta T_{t2} = \frac{\bar{T}_{t2} - \bar{T}_1}{\bar{T}_1} \quad \delta T_{t3} = \frac{\bar{T}_{t3} - \bar{T}_1}{\bar{T}_1} \quad (5.33)$$

donde \bar{T}_1 es la media de estos sensores y \bar{T}_{t1} su promedio temporal. En el rango $\gamma \in [6^\circ, 15^\circ]$ se observa la fluctuación en la señal de los sensores, mientras que a otros ángulos éstos alcanzan valores estacionarios. Las fluctuaciones indican, en forma similar a la señal de potencia (cf. fig. 5.24), la presencia de un régimen que depende del tiempo en la celda. La evolución temporal de las series es difícil de interpretar debido a que el sistema de control mantiene la temperatura promedio de estos sensores constante. Sin embargo, en ellas se estima un período aproximado de ~ 2 h y un desfase de ~ 1 h entre la señal de cada sensor. Por otra parte, el alejamiento entre los sensores T_{t1} y T_{t3} se puede asociar a la circulación de flujo en la celda que ocurre de acuerdo al diagrama en la figura 5.26. La inclinación de la celda genera movimiento ascendente y descendente del fluido cercano a las placas caliente y fría, respectivamente, durante el cual su temperatura cambia progresivamente. Esto genera el aumento y disminución de temperatura en las partes superior e inferior de la celda y que registran los sensores T_{t1} y T_{t3} , respectivamente. El fenómeno se observa, a su vez, en el promedio temporal de las variaciones de los sensores que se muestra en figura 5.27. En la figura, la mayor diferencia entre T_{t1} y T_{t3} ocurre para una posición vertical de la celda ($\gamma = 90^\circ$), donde se espera una mayor circulación del flujo.

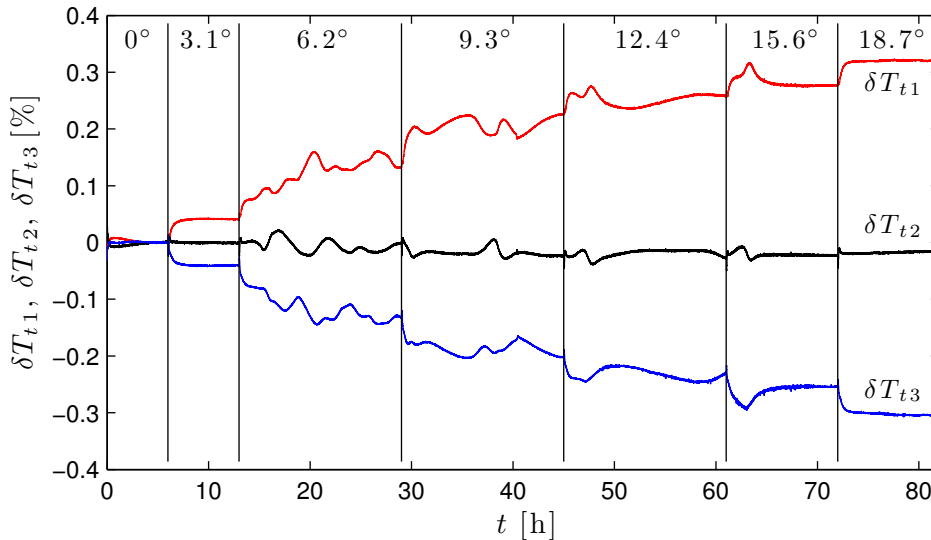


Figura 5.25: Variación porcentual δT_{t1} , δT_{t2} y δT_{t3} de los termistores T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} en función de γ . En las series se observan fluctuaciones para $\gamma \in [6^\circ, 15^\circ]$ que indican la presencia de un régimen dependiente del tiempo. El desplazamiento entre δT_{t1} y δT_{t3} se asocia a la circulación de flujo.

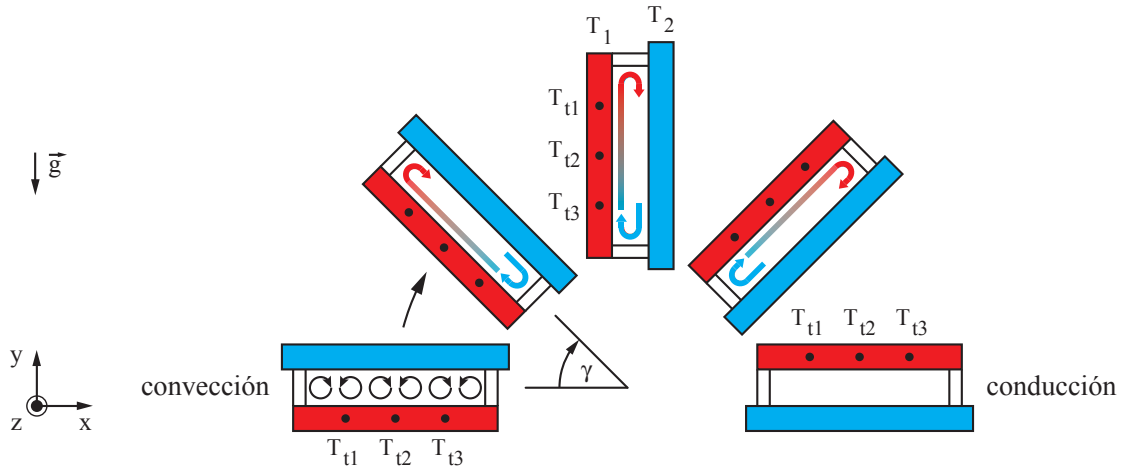


Figura 5.26: Esquema del barrido del ángulo de inclinación de la celda, γ , desde un modo convectivo ($\gamma = 0^\circ$) a un modo conductivo ($\gamma = 180^\circ$). Se indica la ubicación de los termistores T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} y la circulación del flujo que consiste en: un movimiento ascendente y descendente del fluido cercano a las placas caliente y fría, respectivamente. Este movimiento genera el aumento y disminución de temperatura en las partes superior e inferior de la celda, respectivamente.

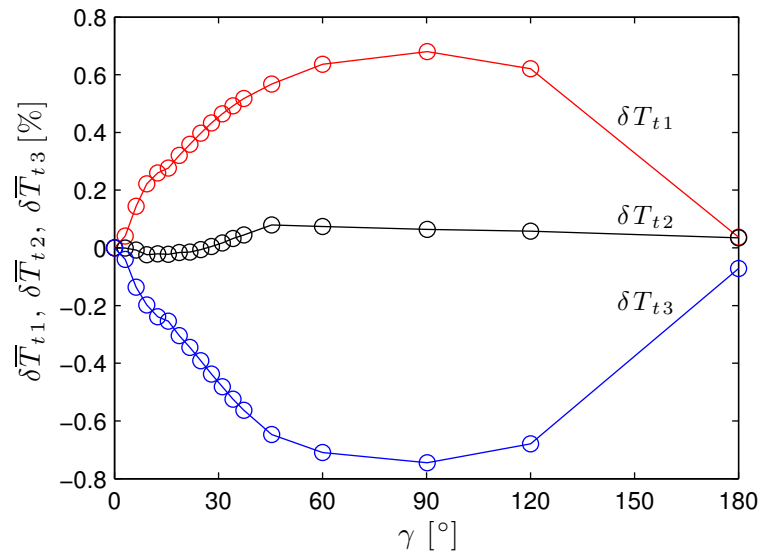


Figura 5.27: Variación porcentual promedio $\delta\bar{T}_{t1}$, $\delta\bar{T}_{t2}$ y $\delta\bar{T}_{t3}$ de los termistores T_{t1} , T_{t2} y T_{t3} en función de γ . Las variaciones de $\delta\bar{T}_{t1}$ y $\delta\bar{T}_{t3}$ corresponden al aumento y disminución de temperatura en las partes superior e inferior de la celda, respectivamente, generadas por la circulación de flujo.

5.4. Visualización de flujo

El objetivo de las presentes experiencias fue estudiar mediante visualizaciones de flujo la formación de patrones de inestabilidad en la celda de convección. Éstas se realizaron con la celda en las configuraciones de convección horizontal e inclinada, dentro del rango de números de Rayleigh que se abarcó previamente en las mediciones transferencia de calor de $Ra < 10^4$.

Procedimiento experimental

La técnica de visualización del patrón de inestabilidad consistió en el registro fotográfico de larga exposición de partículas trazadoras de Kalliroscope. Estas partículas se caracterizan por seguir las líneas de flujo y se han empleado previamente para visualizar el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard [70]. El arreglo experimental se muestra en la figura 5.28, donde plano de observación es perpendicular al lado horizontal más corto de la celda. Las partículas se iluminaron con un plano laser vertical de espesor 2 mm, generado por un lente cilíndrico y un laser de estado sólido bombeado por diodo Melles Griot 58GCS405 de 5 mW a 532 nm. La adquisición de imágenes se realizó con una cámara digital Canon Rebel EOS XTi ubicada perpendicular al plano de iluminación con tiempos de exposición entre 15 s y 30 s.

La inestabilidad se generó mediante un método similar al empleado en las mediciones de transferencia de calor. Es decir, se impuso un gradiente temperatura controlado en la celda de convección, el cual se varió cuasiestáticamente mediante rampas de temperatura desde un estado inicial subcrítico. Las imágenes se adquirieron luego de un tiempo de establecimiento por sobre 5 h, que equivale a aproximadamente dos veces el tiempo difusivo vertical del fluido.

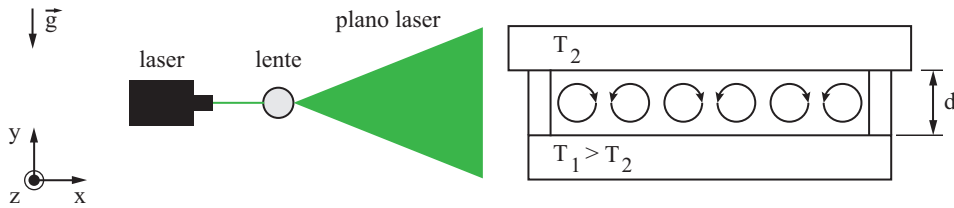


Figura 5.28: Esquema del arreglo experimental para la visualización de flujo en la celda de convección. La celda de convección se encuentra en configuración horizontal, con un gradiente de temperatura inestable $dT/dy = -\Delta T/d$, con $\Delta T \equiv T_1 - T_2 > 0$. Las partículas trazadoras inyectadas en el fluido se iluminan por un laser de estado sólido expandido por un lente cilíndrico. Una cámara digital (no indicada) adquiere imágenes de las partículas en el plano perpendicular a la celda ($x-y$).

Patrones de convección horizontal

Los patrones de convección obtenidos con la celda en posición horizontal para distintos números de Rayleigh se muestran en la Figura 5.29. Éstos se componen de 6 rollos transversales, i.e. con sus ejes paralelos al lado horizontal más corto de la celda y son la solución preferida para celda de convección de razones de aspecto moderadas [35, 71]. Cabe mencionar que no se observó el fenómeno de pérdida de rollos, que consiste en la disminución del número de éstos con el aumento del número de Rayleigh [32]. La ausencia de este fenómeno se puede

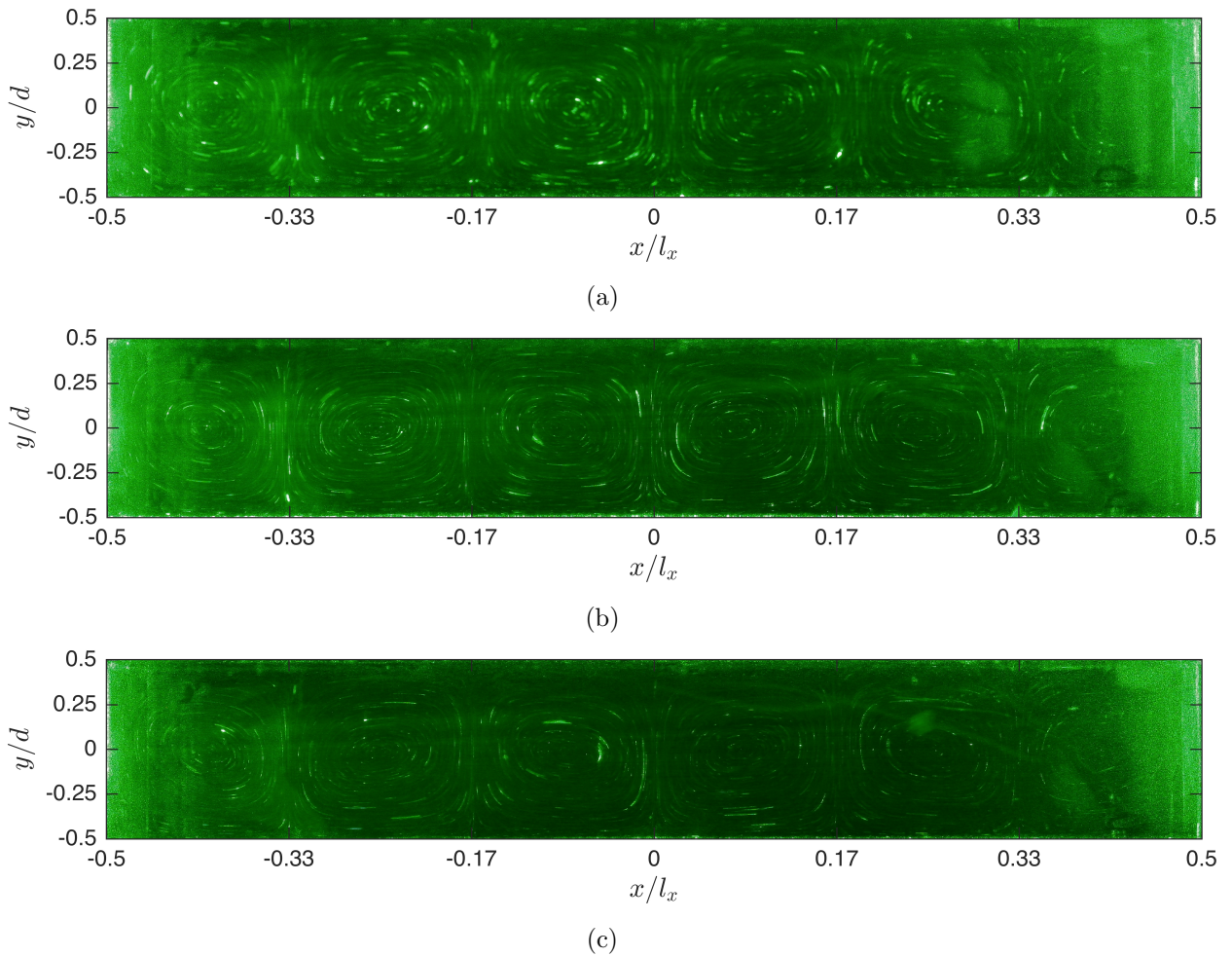


Figura 5.29: Visualización de patrones de convección. Se muestran fotografías, obtenidas con un tiempo de exposición de 25 s, de partículas trazadoras de Kalliroscope. En las fotografías se observan 6 rollos transversales de convección para los números de Rayleigh Ra : (a) 3842; (b) 6705 y (c) 9557.

atribuir posiblemente a las condiciones de bajas perturbaciones que genera el sistema de control y método de rampas de temperatura.

El sentido de rotación del par de rollos próximos a la pared izquierda de la celda se puede observar en el par de imágenes que se muestran en la figura 5.30. Estas imágenes, adquiridas con un desfase de 53 s, indican que los rollos contiguos a las paredes laterales giran contrarios al sentido del reloj. Las partículas trazadoras indicadas para este caso, donde $Ra = 3842$, tienen una velocidad angular de aproximadamente $0.6 \text{ }^\circ/\text{s}$. En las imágenes en la figura 5.31 se puede observar con más detalle la trayectoria de las partículas para $Ra = 6705$. Estas corresponden a la desviación estándar de un conjunto de 17 imágenes ajustadas a mismo nivel de iluminación. En ellas se puede observar que las partículas no siguen una trayectoria circular y su elongación varía en forma alternada de acuerdo al sentido de rotación de los rollos de convección.

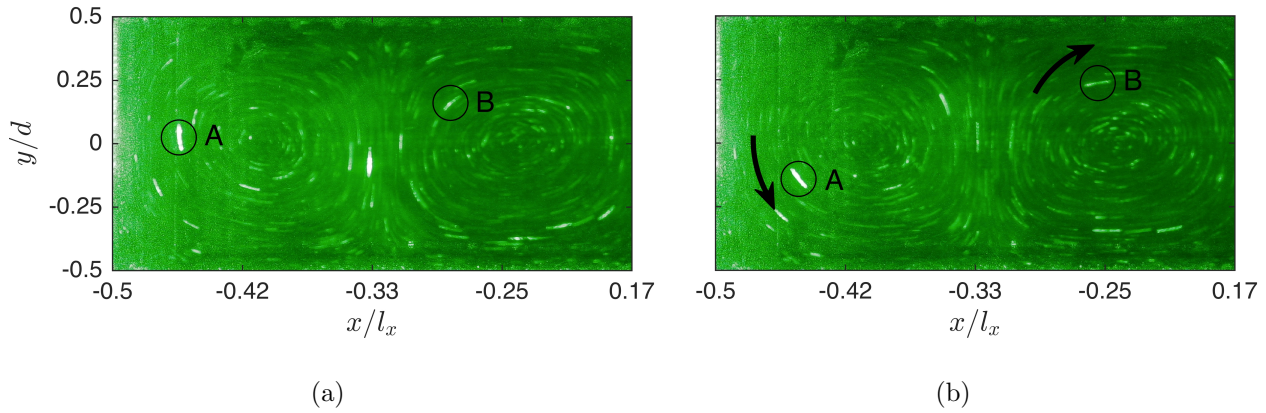


Figura 5.30: Rotación de rollos de convección. Se muestran dos imágenes, con un desfase de 53 s, de dos rollos próximos a la pared izquierda de la celda de convección. El desplazamiento de las partículas, (A) y (B), indican el sentido de giro de los rollos y éstas tienen una velocidad angular de aproximadamente $0.6^\circ/\text{s}$. En ambas fotografías el número de Rayleigh es $Ra = 3842$ y su tiempo de exposición de 25 s.

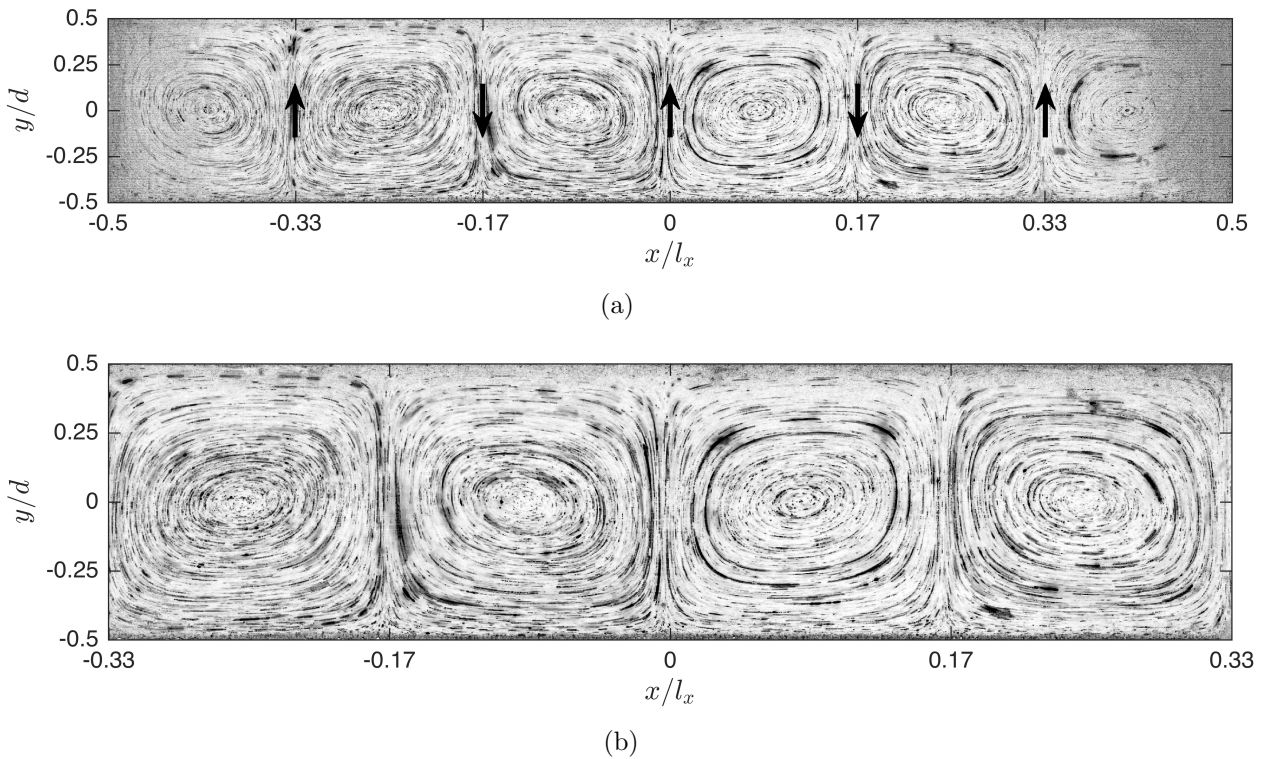


Figura 5.31: Trayectoria de las partículas trazadoras. (a) Desviación estándar de un conjunto de 17 imágenes, con tiempos de exposición de 25s y 30 s, muestra la trayectoria de partículas trazadoras para un número de Rayleigh $Ra = 6705$. Las flechas indican el sentido de rotación de los rollos de convección. (b) Detalle de la trayectoria para los 4 rollos centrales.

Patrones de convección inclinada

Las visualizaciones de flujo para convección inclinada se realizaron para un ángulo de inclinación $\gamma = 15^\circ$ y un número de Rayleigh $Ra = 7240$. Para este ángulo comienza una transición desde un régimen dependiente del tiempo a un patrón de rollos longitudinales (cf. fig. 5.24 (a)). Las visualizaciones obtenidas se muestran en la figura 5.32. En ella se puede apreciar que para esta inclinación el flujo ha transitado desde un patrón de 6 rollos transversales a uno de 3 rollos longitudinales. El flujo es de carácter tridimensional en el que se observó, a su vez, la presencia de dos rollos transversales cercanos a las paredes laterales más cortas de la celda de convección.

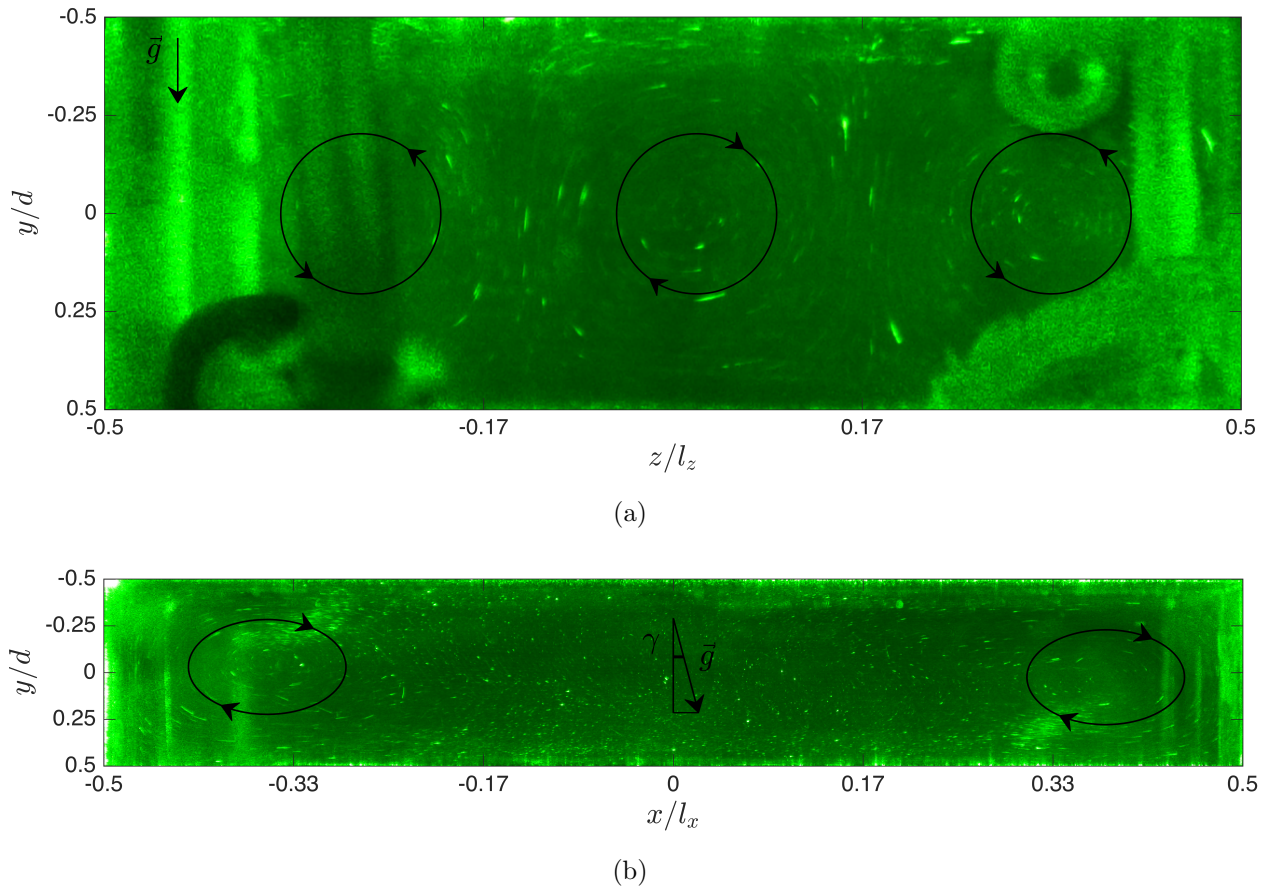


Figura 5.32: Visualización de patrones de convección para un ángulo de inclinación $\gamma = 15^\circ$ y un número de Rayleigh $Ra = 7240$. Se muestran fotografías, obtenidas con un tiempo de exposición de 25 s, de partículas trazadoras de Kalliroscope. (a) Vista lateral en la que se pueden observar 3 rollos longitudinales. (b) Vista frontal en la que se observan 2 rollos transversales cercanos a las paredes laterales más cortas de la celda de convección.

Capítulo 6

Publicación: Feedback control and heat transfer measurements in a Rayleigh-Bénard convection cell

En el presente capítulo se presenta el artículo publicado en *Physics of Fluids* que recoge algunos de los aspectos más importantes de esta parte del trabajo dedicada a convección de Rayleigh-Bénard. El artículo se encuentra dedicado al control de temperatura en lazo cerrado de la celda de convección y la medición de transferencia de calor en régimen moderadamente supercrítico ($Ra < 10^4$). Los principales resultados que se presentan son: (i) el desempeño del sistema de control ante escalones y rampas de temperatura impuestas simultáneamente en ambas placas; (ii) determinación del número de Rayleigh crítico de la celda para el inicio del fenómeno de convección; (iii) transferencia de calor en la celda caracterizada en términos de las curvas entre los números de Nusselt y Rayleigh; (iv) determinación del patrón de convección que se establece en la celda para el rango de números de Rayleigh en estudio.

Publicado en *Physics of Fluids* 29(7): 074103-074103-11.

Feedback control and heat transfer measurements in a Rayleigh-Bénard convection cell

M. Vial and R. H. Hernández^{a)}

LEAF-NL, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile, Casilla, 2777 Santiago, Chile

(Received 19 January 2017; accepted 21 June 2017; published online 14 July 2017)

We report experimental results on the heat transfer and instability onset of a Rayleigh-Bénard convection cell of aspect ratios 6:3:1 filled with a high Prandtl aqueous solution of glycerol under feedback control. We investigate the transient and stationary response of both local temperature readings and heat transfer fluxes on the Rayleigh Bénard cell in both conductive and convective states when we perform two independent feedback control actions on both hot and cold walls. We evaluate the performance of both controllers to maintain a temperature gradient independently if the system is below or above the convection threshold. As the convection cell can be rotated at 180° about the shorter axis of the cell, it was possible to perform transitions between thermal conduction and convection regimes and vice versa under a constant temperature difference maintained by both independent controllers. The experimental setup provided an accurate measurement of the critical Rayleigh number and the evolution of the Nusselt number as a function of the Rayleigh number in the moderately supercritical regime ($Ra < 10^4$). Flow visualizations show a steady cellular convection pattern formed by 6 transverse rolls throughout the range of Rayleigh numbers. *Published by AIP Publishing.* [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4991909>]

I. INTRODUCTION

This paper focuses on the feedback control of the Rayleigh-Bénard (RB) convection in a rectangular cell using independent controllers on both cold and hot plates.

In RB convection, when a fluid layer is heated from below and cooled from above, a well organised convective fluid motion driven by buoyancy effects can be observed if the system is placed above instability threshold. The problem has been investigated for decades and latest developments can be found in Ref. 1.

If the fluid layer is confined between infinite parallel plates, the conductive base state becomes unstable and a transition from a pure conductive to convective regime will occur when the Rayleigh number is greater than a threshold given by $Ra_c = 1708$.² If the plates have a limited size, as they are part of a finite size container, the threshold value increases delaying the convection onset with respect to the infinite problem.³

In order to keep the system under a precise state (conductive or convective regime), the temperature difference between both plates must be constant. One of the alternatives to keep constant temperature is to drive the heat fluxes across the fluid layer under the rules of feedback control. It is widely known that the use of feedback control may achieve an increase in the level of stabilization of RB convection⁴ keeping temperature fluctuations at the active walls as low as possible⁵ allowing better temperature uniformity on the walls.

Such a high level of stabilization can also be achieved when we use the feedback controller under unsteady forcing,

for instance, across a transition from a no-motion state into a convection state. In such situations, a sensor or pack of sensors are necessary in order to determine the actual system state to properly perform an actuator operation in order to keep the system into such state (or set-point) when fluctuations try to drive the system out of set-point.

Precise control of the thermal system state can be achieved with spatially discrete distributions of actuators⁴ or rather spatially uniform ones.⁶ Both kinds of actuators are found to work well keeping the system on a steady regime close to a steady set-point. However if accurate heat flux measurements are needed during an unsteady set-point, it is the uniform heating which delivers better accuracy provided that the overall wall temperature of both active walls is determined faster than both actuator and system time scales.

One of the most recent applications of feedback control in RB convection has been the delay of the convection onset using a feedback control strategy. Successful delay of the instability onset in RB convection can be observed using proportional controllers^{5,7} and more recently adding a derivative controller to attenuate oscillations due to step-like power inputs into the system.⁴ Proportional integral and derivative (PID) controllers have been used previously with success to improve the experimental conditions and the accuracy of the heat transfer measurements in turbulent RB convection.⁸

The most simple state to keep under feedback control in a RB experiment is the conductive or no-motion state slightly above threshold,⁹ but more challenging is to keep under control a high Rayleigh number convection state far above the threshold.⁸ When convection starts, the flow transition assigns shorter time scales for the heat fluxes reducing the required time response of both sensors and actuators in order

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed: rohernan@ing.uchile.cl. URL: <http://www.leafnl.uchile.cl>.

to react faster than both the faster eigenmode of the instability and the local temperature inhomogeneities on the active walls. A possibility, to increase the effectiveness of active control on convective states, is to operate independent controllers on the active walls and evaluate the performance of them through measurements of heat transfer and temperature fluctuations.

In this paper, we examine the transient and stationary response of the RB cell in both conductive and convective states when we perform two independent feedback control actions on both hot and cold walls. We evaluate the ability of both controllers to maintain a determined heat transfer level below and above the convection threshold. The structure of the paper is as follows. We describe the experimental setup in Sec. II. The characterization of the convection cell is presented in Sec. II C. The results for the stable steady state are presented in Sec. IV. Conclusions are finally drawn in Sec. V.

II. EXPERIMENTAL SETUP

A. Convection cell

Experiments were performed in a convection cell depicted in Fig. 1. The fluid is contained in a rectangular box of height $d = 23.5$ mm, width $l_x = 144.2$ mm, and length $l_z = 68.1$ mm giving the following box aspect ratios:

$$\Gamma_x \equiv \frac{l_x}{d} = 6.14 \quad \text{and} \quad \Gamma_z \equiv \frac{l_z}{d} = 2.90. \quad (1)$$

Two stainless steel plates of thickness 16 mm confine the fluid and provide a homogeneous temperature condition to its upper and lower surfaces. Lateral walls made of 10 mm Perspex are mounted flush to the lower plate and contain two conducts to fill and drain the cell. During the experiments, one of the conducts is connected to an external reservoir to account for the thermal expansion of the fluid. An 18 W film heater provides heat by Joule effect to raise the temperature of the lower (hot) plate. The element is attached to the lower part of the plate with thermal grease and connected to a DC power supply HP E3632A in a 4-wire configuration. The top (cold) plate is slightly larger (184×108 mm²) to harbor a heat exchanger that removes the heat flowing through the cell. The exchanger consists of a diffuser and 8 channels in the plate with a cooling fluid flowing in counterflow. The cooling fluid is provided by a thermal bath Neslab RTE-210 with a digital controller

and nominal stability of ± 0.01 K. Both plates count with 3 perforations at mid-height and a span of $l_x/4$ to place thermistor based temperature probes. The recording of the electric resistance of each sensor, including ambient temperature measurements, is performed with a 6 1/2 digits digital multimeter Keithley 2000 and 9-channel scanner card TCSCAN model 2001.

B. Thermal isolation and rotation of the convection cell

The convection cell and the cold plate heat exchanger are placed inside a thermally isolated rectangular box made of 10 mm Perspex. Free space inside the box is filled with closed cell elastomeric Aeroflex and expanded polystyrene of thermal conductivities 0.039 W/(m K) and 0.04 W/(m K), respectively. Additional heat losses associated with ambient temperature variations are reduced placing the box in an isolated room, separated from the thermal bath and other heat generating equipment.

All experiments were controlled by a PC that communicates with the equipment via a GPIB (general purpose interface bus). Feedback temperature control of both plates allows us to impose a temperature gradient in the fluid layer

$$\frac{\Delta T}{d} = \frac{T_1 - T_2}{d}, \quad (2)$$

with T_1 and $T_2 < T_1$ the temperatures of the hot and cold plates, respectively. The direction of the temperature gradient, relative to gravity, can be varied by the rotation of the box containing the convection cell. The rotation is possible at 360° in the x - y plane and is performed by a PC controlled stepper motor and a gear and belt system. The two main configurations of the cell used in the present work are shown in Fig. 2. In the first one, the hot plate (in red) is placed on top of the cold plate (in blue). The resulting temperature gradient is stable and heat transfer in the fluid is possible only by conduction. In the second configuration, the cell is inverted and an adverse temperature gradient is established. Thus it is possible to generate convection and conduction regimes for Rayleigh numbers above and below the critical Rayleigh number of the cell, respectively.

C. Working fluid properties

The working fluid is a solution of distilled water—95% mass fraction of 99.5% pure glycerine (Global Chemicals).

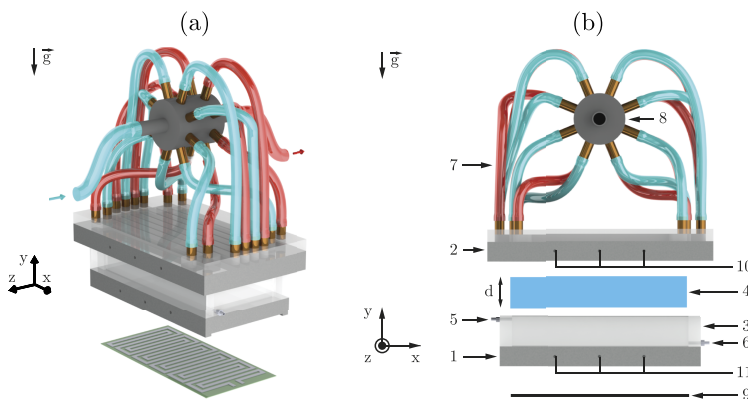


FIG. 1. Schematics of the convection cell. (a) Isometric view. (b) Front view. The cell is composed of (1) a plate at higher temperature, (2) a plate at lower temperature, and (3) Perspex lateral walls which confine the (4) fluid layer of height d . Two conducts in the lateral walls [(5) and (6)] allow the filling of the cell and account the thermal expansion of the fluid. A system of (7) hoses and (8) diffuser distributes cooling water to the plate at lower temperature, where it circulates in 8 channels in counterflow. A (9) film heater provides heat to the plate at higher temperature. Both plates have [(10) and (11)] perforations to place temperature sensors. In (a) and (b), the color of the hoses indicates the incoming and exit of cooling water at lower and higher temperatures, respectively.

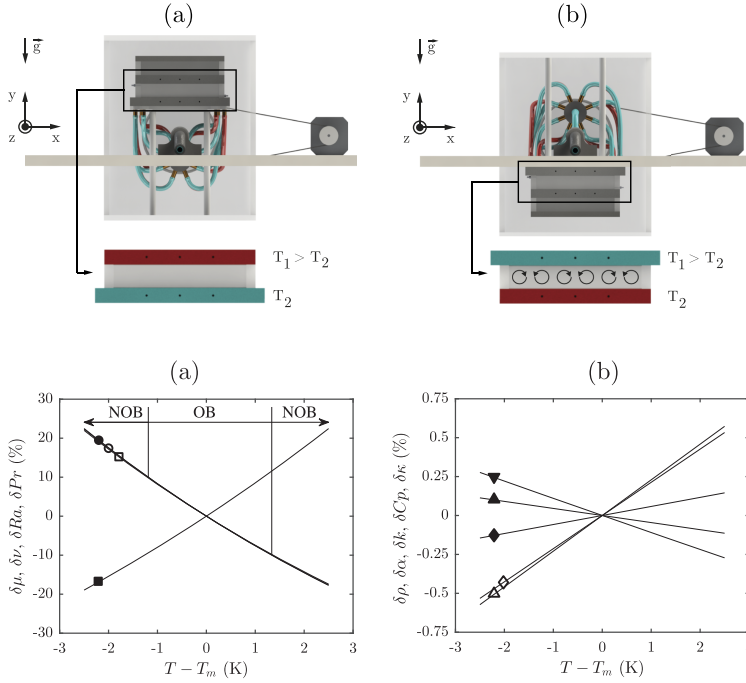


FIG. 2. Rotation and main configurations of the convection cell. (a) Stable configuration where only a conductive state in the fluid is possible. (b) Unstable configuration where the convective motions of the fluid are possible.

FIG. 3. Fluid properties' percentual variations with temperature. The figure shows the variation $\delta\chi(T) = (\chi(T) - \chi(T_m))/\chi(T_m)$, with χ the property value, T the temperature, and $T_m = 296.65$ K a reference temperature. (a) Properties with strong variations: (●) dynamic μ and (○) kinematic ν viscosities, (■) Rayleigh Ra and (□) Prandtl Pr numbers. The ranges OB ($|\delta\mu(T)| < 10\%$) and NOB ($|\delta\mu(T)| > 10\%$) are also shown. (b) Properties with small variations: (▲) density ρ , (△) thermal expansion coefficient α , (◆) thermal conductivity k , (◇) specific heat C_p , and (▼) thermal diffusivity κ .

The solution was prepared measuring the mass of the components with a precision balance Precisa 120 and was degassed in a closed recipient to eliminate air bubbles. In highly concentrated aqueous solutions of glycerine, the strong viscosity variation with temperature can lead to several effects associated with the departure of the Oberbeck Boussinesq (OB) approximation, which states that the fluid properties such as the kinematic viscosity, thermal diffusivity, heat capacity, and others can be considered independent of temperature across the Rayleigh-Bénard cell.¹⁰ Such an approximation will not be valid when high Rayleigh numbers are considered and if we want to include Non-Oberbeck Boussinesq (NOB) effects, some fluid properties will be temperature dependent and should be explicitly determined. For instance, the behaviour of the dynamic viscosity, μ , was estimated for the present concentration by the formula proposed in Ref. 11,

$$\mu = a e^{bT^{-3} + cT + dT^{-1}}, \quad (3)$$

with coefficients a , b , c , and d adjusted to the data of Segur and Oberstar.¹² The remaining properties were estimated by mixture laws between the components of the solution.^{10,13} Figure 3 shows the percentual variation of the fluid properties given by

$$\delta\chi(T) = \frac{\chi(T) - \chi(T_m)}{\chi(T_m)}, \quad (4)$$

with χ the value of each property, T the temperature, and $T_m \equiv (T_1 + T_2)/2 = 296.65$ K the mean temperature used here as a reference. In the range used in the experiments, $\Delta T \leq 5$ K, the properties with strong variations are dynamic μ and kinematic ν viscosities and the associated dimensionless numbers: Prandtl Pr and Rayleigh Ra . The remaining properties such as density ρ , thermal expansion coefficient α , thermal conductivity k , specific heat C_p , and thermal diffusivity κ present small variations with temperature. The estimated values of the fluid properties, evaluated at temperatures relevant to the conducted experiments, are given in Table I.

TABLE I. Fluid properties estimated at different temperatures.

Property	Symbol	Unit	T (K)			
			293.15	296.01	296.65	298.15
Density	ρ	kg/m ³	1246.39	1244.78	1244.42	1243.57
Thermal expansion	α	10 ⁻⁴ /K	4.4953	4.5309	4.5388	4.5575
Dynamic viscosity	μ	Pa s	0.5169	0.4087	0.3883	0.3451
Kinematic viscosity	ν	10 ⁻⁴ m ² /s	4.1469	3.2833	3.1204	2.7748
Thermal conductivity	k	W/(m K)	0.2953	0.2958	0.2959	0.2961
Specific heat	C_p	J/kg K	2486.7	2501.9	2505.3	2513.4
Thermal diffusivity	κ	10 ⁻⁸ m ² /s	9.5267	9.4965	9.4898	9.4743
Prandtl number	Pr	...	4353.0	3457.3	3288.1	2928.7

III. CHARACTERIZATION OF THE CONVECTION CELL

In the present section, we discuss the heat flux and temperature measurements in the convection cell. In addition, we present the temperature feedback control strategies for the active plates.

A. Heat flux measurement

The schematic in Fig. 4(a) shows the heat fluxes in the convection cell for a given temperature difference ΔT . The electrical power $p(t)$ supplied by the film heater flows as heat fluxes \dot{Q}_f through the fluid and \dot{Q}_a through lateral walls, while the remaining power, \dot{Q}_p , corresponds to heat losses. This gives the thermal balance of the cell

$$p(t) = \dot{Q}_f(t) + \dot{Q}_a(t) + \dot{Q}_p(t), \quad (5)$$

where the heat fluxes through the fluid due to thermal conduction $\dot{Q}_{f,cd}$ and convection $\dot{Q}_{f,cv}$ are related to the Nusselt number by

$$Nu = \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_{f,cd}} \quad \text{with} \quad \dot{Q}_f \equiv \dot{Q}_{f,cd} + \dot{Q}_{f,cv}. \quad (6)$$

In order to measure the above heat fluxes, we first characterize the cell under a purely conductive regime, a condition that is conveniently met for any ΔT placing the cell in a conduction configuration [cf. Fig. 2(a)]. The supplied power in this regime in steady state, p_{cd} , can be expressed by

$$p_{cd} = (g_f + g_a + g_p)\Delta T, \quad (7)$$

with $g_f = (kA_f)/d$ and $g_a = (k_aA_a)/d$ the thermal conductance of the fluid and lateral walls, respectively. Following the method of Ref. 14, we obtain g_f and g_a from the cell dimensions and tabulated thermal conductivities (cf. Table II). The thermal conductance of thermal losses, g_p , is determined from Eq. (7) and power measurements at varying ΔT . Power measurements under a convection configuration [cf. Fig. 2(b)] are also used provided that ΔT is below its critical value for the convection onset. The heat flux through the fluid due to pure convection, $\dot{Q}_{f,cv}$, is obtained from the power measured in the convection regime, p_{cv} , according to the following equation

$$\dot{Q}_{f,cv} = p_{cv} - p_{cd}, \quad (8)$$

while the corresponding component due to heat conduction is obtained by $\dot{Q}_{f,cd} = g_f \Delta T$ evaluated at the same ΔT .

A schematic of the vertical temperature in the cell is shown in Fig. 4(b) and indicates the temperature drops in the hot and

cold plates, ΔT_{hp} and ΔT_{cp} , respectively. In the absence of heat losses, the temperature drops are given by

$$\Delta T_{hp} = \frac{P}{g_{hp}} \quad \text{and} \quad \Delta T_{cp} = \frac{P}{g_{cp}}, \quad (9)$$

with g_{hp} and g_{cp} the thermal conductivities of respective plates. Thus, the overall temperature difference ΔT is the sum of each temperature drop [cf. Fig. 4(b)], and it can be expressed by

$$\Delta T = \left(\frac{1}{Nu g_f + g_a} + \frac{1}{2g_{hp}} + \frac{1}{2g_{cp}} \right) p, \quad (10)$$

where the numerical factors are introduced to account for the middle temperature on each plate. In the present work, the vertical temperature drop in the plates is not significant, even though these are made of stainless steel. The thermal conductivity of stainless steel is smaller than copper, commonly used for bounding plates; however, the thermal conductance of both the hot and cold plates is still considerably larger than that of the fluid and lateral walls. This can be observed in Table II, where the plates were modeled as blocks of thickness 16 mm. At moderate Rayleigh numbers ($Ra < 10^4$), the maximum working power lies below $p \sim 2$ W and the Nusselt number is close to $Nu \sim 2.5$. For these conditions, the last two terms of Eq. (10) associated with the temperature drops across each of the plates represent approximately 3% of the temperature difference ΔT . In the horizontal direction, temperature homogeneity of both plates in contact with the fluid is guaranteed by the following criteria:¹⁵

$$C_u \equiv \frac{\rho_s C_{p,s} k_s}{\rho C_p Nu k} \gg 1, \quad (11)$$

with $\rho_s = 7710$ kg/m³ the density and $C_{p,s} = 502$ J/(kg K) the specific heat of the stainless steel plates. In our experiments, $C_u \geq 28$ and the above condition is attained.

B. Temperature measurements

The main method used to measure the temperature in the convection cell was using negative temperature coefficient (NTC) thermistors. In the experiments, 4 epoxy and 2 glass encapsulated thermistors were used, the first type is of 10 k Ω and diameter 2.4 mm, while the second type is of 4.7 k Ω and diameter 1.5 mm. One thermistor placed outside the convection cell and thermal isolation (cf. Fig. 2) registers ambient temperature and the remaining thermistors register the hot and cold plate temperatures [cf. Fig. 4(b)]. Their characteristic high resistance allowed us to perform measurements in a 2-wire

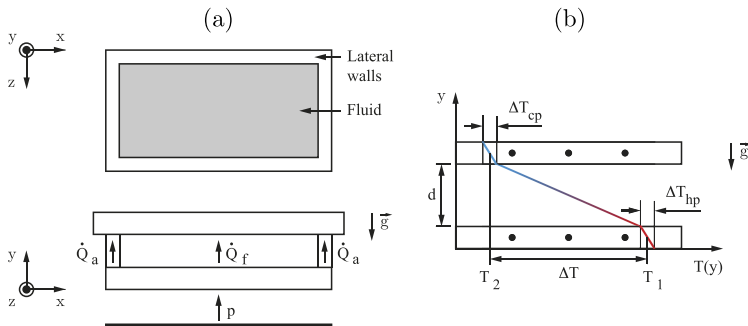


FIG. 4. Heat transfer in the convection cell. (a) Vertical heat fluxes. The power p supplied by the heater dissipates as heat fluxes across the fluid \dot{Q}_f , lateral walls \dot{Q}_a , and heat losses \dot{Q}_p (not shown). The cross section of the cell shown on top indicates the transversal areas of the hot plate in contact with the fluid (A_f) and lateral walls. (b) Vertical temperature profile $T(y)$ across the cell of height d and location of temperature sensors indicated by solid circles. The temperature drops in the cold ΔT_{cp} and hot ΔT_{hp} plates and the temperature difference between the plates, ΔT , are shown.

TABLE II. Thermal conductance and properties of the convection cell components.

	Unit	Hot plate	Cold plate	Fluid	Lateral walls
Thermal conductivity	W/(m K)	16.27	16.27	0.296	0.193
Transversal area	$10^{-2} \cdot \text{m}^2$	1.4466	1.9872	0.9820	0.4646
Vertical span	$10^{-2} \cdot \text{m}$	1.6	1.6	2.35	2.35
Thermal conductance ^a	W/K	14.710	20.207	0.1237	0.0382

^aObtained by thermal conductivity \times transversal area/vertical span.

configuration with the Keithley digital multimeter at a sampling frequency of 0.1 Hz. The thermistors were calibrated according to the Steinhart-Hart equation

$$\frac{1}{T_t} = a + b \ln(R_t) + c \ln^2(R_t) + d \ln^3(R_t), \quad (12)$$

with a , b , c , and d the constants, T_t the temperature in Kelvin, and R_t their resistance. During the calibration process, the sensors were embedded in a cylindrical copper rod immersed in the thermal bath Neslab RTE-210. The thermal bath working temperature, imposed by the bath's controller within ± 0.01 K, was varied in temperature steps of 0.25 K and 1 h duration within a range of [287.15, 303.15] K. Figure 5 shows the obtained calibration curves and correlated response of sensors to thermal bath fluctuations during the calibration procedure, and the latter in terms of the temperature difference

$$\delta T_{ii}(t) = T_{ii}(t) - \langle \bar{T}_t \rangle_t \quad \text{with} \quad \langle \bar{T}_t \rangle_t = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \bar{T}_{ii}, \quad (13)$$

where $T_{ii}(t)$ is the temperature of each thermistor and $\langle \bar{T}_t \rangle_t$ is the time average temperature of $N_s = 5$ thermistors at each temperature step. The described procedure and thermistor selection delivered an accuracy of the order of 10^{-3} K.

The film heater that supplies power to the system can be used simultaneously as a sensor of the temperature imposed at the bottom side of the hot plate. The element can operate as a temperature sensor due to the practically linear law between its temperature T_h and resistance $R_h \sim 9 \Omega$. Its resistance is obtained from Ohm's law, $R_h = u/i$, with u and i the voltage and current imposed by the DC power supply HP E3632A, respectively. Although the film heater provides a convenient average of the hot plate temperature, the use of this element as a temperature sensor presents two main drawbacks. The reading of its resistance, and therefore temperature, can only be obtained for power $p > 0.4$ W, where this threshold is associated with the resolution of the power supply HP E3632A. In addition, the

measurement of its resistance contains noise, even though it is performed in a 4-wire configuration. The following moving average:⁶

$$\langle R_h(t_i) \rangle_\tau = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \langle R_h(t_{i-1}) \rangle_\tau + \frac{R_h(t_i)}{\tau}, \quad (14)$$

with t_i the sampling time and a memory parameter $\tau = 2$ reduces noise in the temperature measurements to $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ K.

C. Feedback control of the convection cell

The goal of the feedback control system was to maintain the desired temperature gradient across the fluid layer and measure the heat flux in the convection cell. This goal is met using a dedicated feedback temperature controller for each plate. The hot plate control simultaneously provides and measures the power injected to the system, while the cold plate control performs the heat removal from the cold plate. Both controllers set the temperatures of the plates to

$$T_1 = T_m + \frac{\Delta T}{2} \quad \text{and} \quad T_2 = T_m - \frac{\Delta T}{2}, \quad (15)$$

where the mean temperature, $T_m \equiv (T_1 + T_2)/2$, is held constant during an experiment and therefore T_1 and T_2 are constant for a given temperature difference ΔT . An alternative control strategy, used commonly to reduce heat losses, is to follow the ambient temperature with the mean temperature of the plates. Due to temperature dependence of the present fluid properties, this would result in an undesired modulation of the Rayleigh number. Thus, corrections due to ambient temperature variations and temperature drops in the plates are performed after data acquisition.

1. Hot plate temperature feedback control

In order to obtain a precise temperature feedback control for the hot plate, we explored different alternatives based on the temperature measurement methods described previously. A first alternative is to use the film heater temperature as the

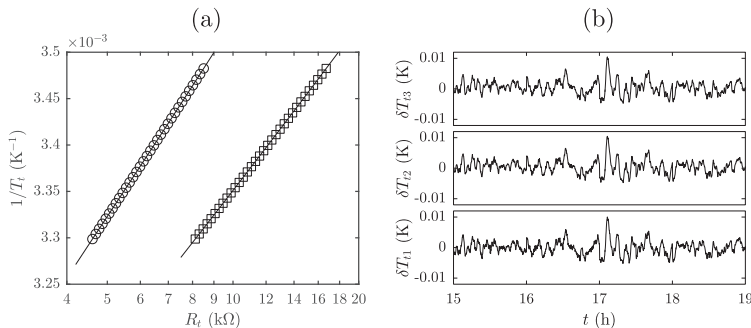


FIG. 5. Thermistor calibration. (a) Calibration curves for thermistors of resistance $R_t \sim 4.7$ k Ω and 10 k Ω . (b) Time series registered during calibration for 3 thermistors.

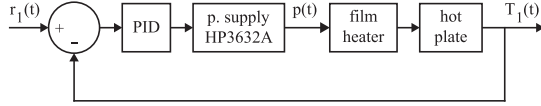


FIG. 6. Block diagram of the hot plate temperature control. The feedback loop variable is the temperature of the hot plate, T_1 , obtained from the average of three thermistors and r_1 its reference signal.

feedback loop variable, as done in our previous work.⁶ In the present case, the working power range is significantly smaller and the use of an additional temperature sensor is required due to the resolution limit of the power supply (cf. Sec. III B). Switching between two sensors is undesired because small discrepancies between them can destabilize the plate temperature control. Thus, we selected the alternative shown in Fig. 6, where the average temperature, T_1 , of three thermistors embedded in the hot plate is to be compared with a set-point or reference signal r_1 . The error $e(t)$ is used to determine the power $p(t)$ to be supplied to the heater by the power supply HP E3632A. This is done using a PID controller¹⁶ implemented in the acquisition software, according to the classical expression

$$p(t) = P e(t) + I \int_0^t e(t) dt + D \frac{d e(t)}{dt}, \quad (16)$$

with coefficients $P = 10$, $I = 0.6$, and $D = 2$ obtained in our previous work⁶ using the closed loop tuning method for PID controllers.¹⁷

2. Cold plate temperature feedback control

The control of the cold plate temperature is performed using a proportional integral (PI) controller, implemented in the data acquisition software, that commands the thermal bath digital controller.

The block diagram of the control is shown in Fig. 7, where the control variable is the temperature T_2 registered by a thermistor at the center of the cold plate [cf. Fig. 4(b)]. The PI controller calculates the error relative to the reference signal $r_2(t)$,

$$e(t) = r_2(t) - T_2(t), \quad (17)$$

which is used to adjust the reference signal $r_b(t)$ of the thermal bath digital controller to

$$r_b(t) = r_2(t) + P_b e(t) + I_b \int_0^t e(t) dt, \quad (18)$$

with $P_b = 0.5$ and $I_b = 0.01$ the PI controller coefficients adjusted experimentally.¹⁷ The term $r_2(t)$ in Eq. (18) improves the transient response of the controller as it gives a fast first

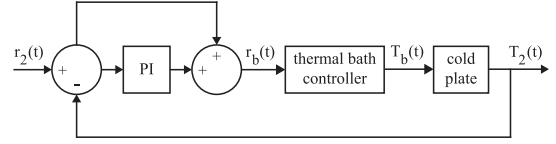


FIG. 7. Block diagram of the cold plate temperature control. The cold plate temperature registered by a thermistor at the center of the plate, T_2 , is adjusted to the reference signal $r_2(t)$. This is done through a PI controller implemented by software that adjusts the reference signal $r_b(t)$ of the thermal bath digital controller. As a result, thermal bath temperature $T_b(t)$ and therefore cold water temperature reaching the plate are varied in order to control T_2 .

approximation of the reference $r_b(t)$, which is later tuned by the PI controller. The presented strategy allowed us to obtain a stable control of the cold plate temperature which strongly reduces the steady state error of the closed loop system.

IV. RESULTS

In the present section, we present the results obtained for the feedback temperature control using test reference signals of temperature steps and ramps for both plates. Heat transfer measurements are presented and the onset of thermal convection is discussed.

A. Closed loop response to temperature steps

In the step tests, we study the response of the hot and cold plate temperature controllers when the plate temperatures are varied impulsively and simultaneously, keeping their mean temperature $T_m = (T_1 + T_2)/2$ constant. Figure 8 shows the temporal evolution of the plate temperatures during a step test performed with the fluid in the conduction regime and displays the rising time, t_r , and overshoot, M_p , of each controller.

The response of both controllers to a series of temperature steps is shown in Fig. 9 in terms of the dimensionless variables

$$T_1^*(t) = \frac{T_1(t) - T_{1,i}}{r_1 - T_{1,i}} \quad \text{and} \quad T_2^*(t) = \frac{T_2(t) - T_{2,i}}{r_2 - T_{2,i}}, \quad (19)$$

with $T_{1,i}$ and $T_{2,i}$ the temperatures of the hot and cold plates, respectively, before a new ΔT is imposed. Figure 9 shows that the temperatures of both plates are controlled correctly and that they reach their reference signals, r_1 and r_2 , equivalent to unity under these dimensionless forms. The precision obtained for the hot plate control is in the order of 0.1 mK, as indicated in Table III together with the previously mentioned parameters. The cold plate temperature instead presents small magnitude fluctuations in the stationary regime as shown in the same table.

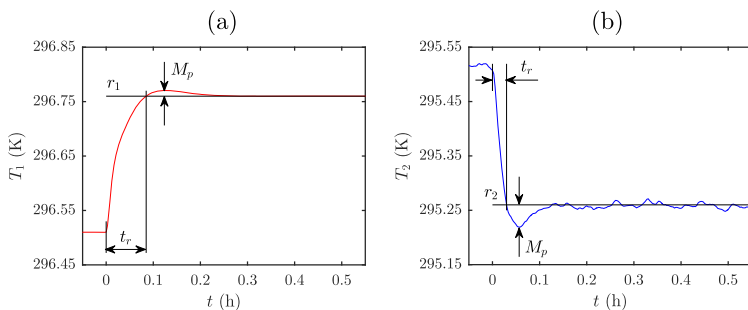


FIG. 8. Step response of hot and cold plate controllers. (a) Hot plate temperature T_1 (red) and reference signal r_1 (black). (b) Cold plate temperature T_2 (blue) and reference signal r_2 (black). In both figures, ΔT varies from 1.0 to 1.5 K, and maximum overshoot M_p and the rise time t_r of each controller are displayed.

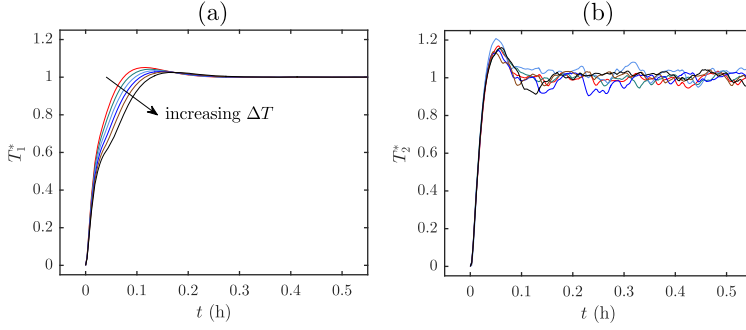


FIG. 9. Step response of hot and cold plate controllers for varying ΔT . (a) Hot plate dimensionless temperature T_1^* . (b) Cold plate dimensionless temperature T_2^* . In both figures, ΔT is varied in steps of 0.5 K.

TABLE III. Maximum values of the parameters for both temperature controllers. Both the mean error \bar{e} and the standard deviation of error $\sigma(e)$ were calculated in the steady state regime.

	t_r (min)	M_p (%)	\bar{e} (mK)	$\sigma(e)$ (mK)
Hot plate	7.8	5	0.04	0.12
Cold plate	1.9	18	1.94	6.80

The temporal evolution of the power response to temperature step inputs displays some general characteristics that can be observed in Fig. 10(a). The first is a slope change, observed between the labeled regions I and II, due to the reset of integral and derivative errors. The reset is done at the beginning of an event or if the error exceeds a certain threshold, $|e(t)| > 0.5$ K, by setting

$$\int_0^t e(t) dt = 0 \quad \text{and} \quad \frac{de(t)}{dt} = 0, \quad (20)$$

with $e(t)$ the hot plate controller error. Thus the power is initially proportional to the error, i.e., $p(t) = P e(t)$, and later includes the remaining terms. A second characteristic is a marked overshoot during which the heat required to raise the hot plate temperature is supplied. This can be checked to a certain extent integrating the area below the power curve and over its stationary value. The procedure delivers for the curve in Fig. 10 a value of 250 J, which is close to the theoretical value¹⁸

$$Q_h = M_{hp} C_{p,s} \delta T_1 \sim 224 \text{ J}, \quad (21)$$

with $M_{hp} = 1.785$ kg the mass, $C_{p,s} = 502$ J/(kg K) the specific heat, and $\delta T_1 = 0.25$ K the change in temperature of the hot plate.

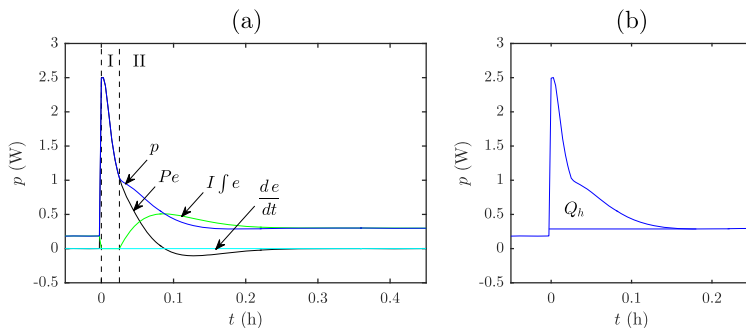


FIG. 10. Temporal evolution of power during step test. (a) Power and PID errors for (I) PI and (II) PID control. (b) Details indicating the heat Q_h required to raise the hot plate temperature, given by the area below the power curve and above stationary power.

B. Closed loop response to temperature ramps

The ramp tests allow us to study the response of both temperature controllers against time varying signals. In this method, the acquisition series is composed of thermalisation events where ΔT remains constant and transit events where $\Delta T(t)$ is varied according to

$$\Delta T(t) = \Delta T_i + \beta t, \quad (22)$$

with ΔT_i the initial temperature difference, and β fixed in order to make a quasi-static variation of ΔT and maintain the thermal balance in the convection cell. During a transition event, the reference signals are

$$r_1(t) = T_{1,i} + \frac{\beta}{2} t \quad \text{and} \quad r_2(t) = T_{2,i} - \frac{\beta}{2} t, \quad (23)$$

with $T_{1,i}$ and $T_{2,i}$ the temperatures of the hot and cold plates, respectively, at the beginning of a transition event. Figures 11(a) and 11(b) show, respectively, time series with the convection cell in conduction and convection regimes, for events with increasing and decreasing ΔT and where the mean between plates was held constant at $T_m = 296.65$ K. In both cases, $\beta = 0.125$ K/h is used and it can be observed that the temperatures of the plates follow correctly their respective reference signals. The maximum error relative to these signals is 2.5 mK and 16.2 mK in the control of the hot and cold plates, respectively.

The temporal evolution of power acquired for the previous time series is shown in Figs. 12(a) and 12(b) and corresponds to the same stationary ΔT in reverse order. The difference between the stationary values of power in conduction and convection corresponds to the heat $\dot{Q}_{f,cv}$ transferred by the convective motions of the fluid. In both cases, steep jumps can be observed for the sections of the curve with varying ΔT . The jumps correspond mainly to the heat required to raise or

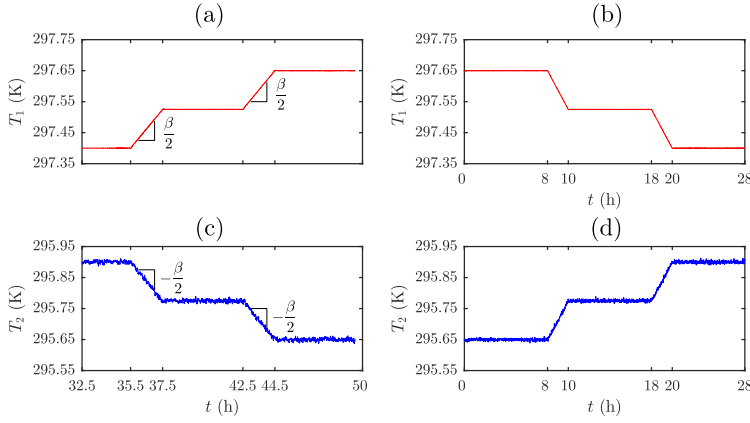


FIG. 11. Ramp test response in [(a) and (c)] conduction and [(b) and (d)] convection regimes. Hot and cold plate temperatures, T_1 and T_2 , respectively, are varied with slopes of $\pm\beta/2 = \pm 0.0625$ K/h.

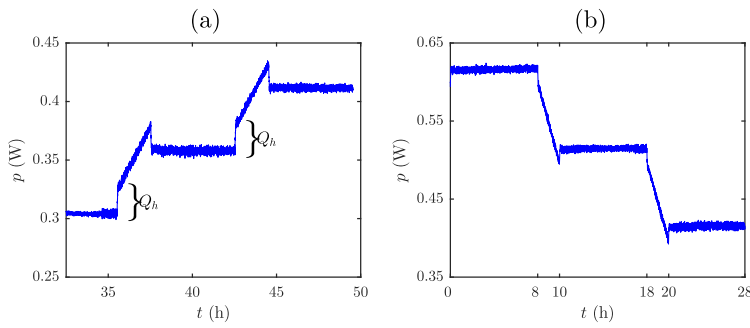


FIG. 12. Power temporal evolution during ramp test in (a) conduction and (b) convection regimes. Steep jumps of magnitude \dot{Q}_h occur when ΔT is varied.

decrease the temperature of the hot plate in a constant manner given by¹⁸

$$\dot{Q}_h = M_{hp} C_{p,s} \frac{\beta}{2}, \quad (24)$$

whose value $\dot{Q}_h = 15.6$ mW is very close to $\dot{Q}_h \sim 20$ mW estimated from the experimental data.

C. Heat transfer measurements and onset of thermal convection

The experiments of this section use the developed feedback temperature controllers to measure the heat transfer in the convection cell for Rayleigh numbers $Ra < 10^4$. The temperature difference was varied using the ramps method with slopes and mean temperature between plates mentioned in Sec. IV B. The stationary values of power were obtained over an average interval of 2 h and after a settling time above 5 h (more than twice the vertical diffusive time scale of the fluid).

The steady state convective flow pattern consisted of 6 transverse rolls, i.e., with their axes aligned with shorter side of the convection cell (z -axis) as shown in Fig. 13. This pattern

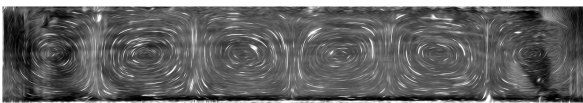


FIG. 13. Flow visualisation (the x - y plane at the middle z axis) of a steady cellular convection pattern at $Ra = 6.7 \times 10^3$. Six transverse convection rolls are observed by long exposure (30 s) photograph of tracing particles of Kallioscope illuminated with a thin laser sheet.

is the preferred solution of moderate aspect ratio convection cells.^{19,20} During the present experimental runs, the number of rolls remained constant without evidence of loss of rolls phenomena.²¹

Figure 14 shows the stationary values of power for the convection cell in conduction and convection configurations as a function of ΔT . Initially, both curves collapse as the fluid is in the conductive regime, and at the instability threshold, a slope change in the curve for the cell convection configuration is observed. To determine the instability threshold, which occurs at the critical Rayleigh number Ra_c , we used the method of Ref. 22 based on the initial slope of the heat transfer curve. According to the theoretical analysis of Schlüter *et al.*,²³ the initial slope is given by

$$S_1 = \lim_{Ra \rightarrow Ra_c^+} \frac{Ra(Nu - 1)}{Ra - Ra_c}, \quad (25)$$

which is valid for $Ra < 3Ra_c$.²² To obtain S_1 , the curve $NuRa$ versus $Ra - Ra_c$ was constructed and linear fits were used for the portions corresponding to the conduction and convection regimes [cf. Fig. 15(a)]. The intersection of both fits gives Ra_c , which is later used to rescale the abscissa initially in terms of Ra . The slope S_1 can also be determined directly from the figure as it corresponds to the ratio between the vertical distance between both fits, $Ra(Nu - 1)$, and the ordinate, $Ra - Ra_c$, i.e., the numerator and denominator of Eq. (25), respectively.

Figure 15(b) shows the evolution of Nu with Ra for raw and corrected data for ambient temperature variations using temperature corrections. It can be observed that corrections are

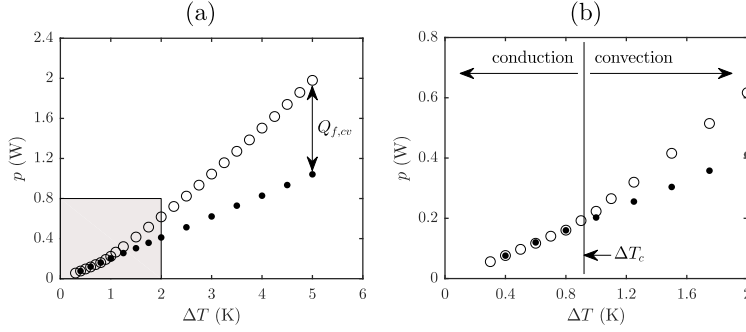


FIG. 14. Power response during the steady state regime. (a) Power acquired with the cell in (●) conduction and (○) convection configurations and heat $\dot{Q}_{f,cv}$ generated by the convective motion of the fluid. (b) Detail of the shaded area on (a) near onset of thermal convection at $\Delta T_c = 0.92$ K.

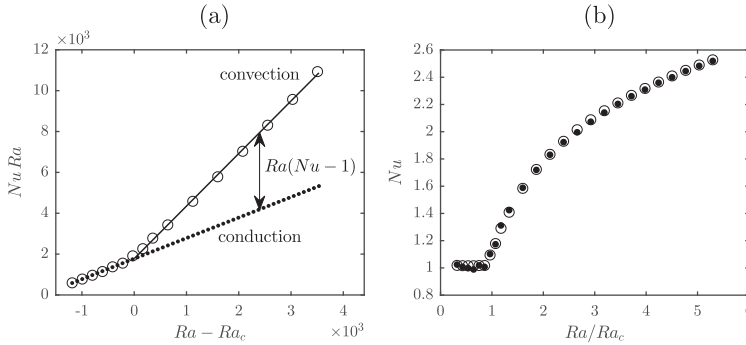


FIG. 15. Onset of thermal convection and Nusselt number versus Rayleigh number in the steady state regime. (a) Critical Rayleigh number is given by the intersection of the fits of $NuRa$ versus Ra with the fluid in (solid line) conduction and (dotted line) convection regimes. Horizontal axis is rescaled to $Ra - Ra_c$. (b) Nusselt number versus Rayleigh number: (●) uncorrected and (○) corrected data for ambient temperature variations.

small and that both methods give, for instance, the expected value $Nu = 1$ in the conduction regime ($Ra < Ra_c$) with an error of $\sim 2\%$. This is due to all power measurements performed under similar ambient temperatures and at the same mean fluid temperature. In Table IV, data obtained by both methods are given in terms of Ra and the reduced Rayleigh number $\epsilon = Ra/Ra_c - 1$.

The previous method yields $Ra_c = 1805$, where the error in the Rayleigh number according to the mixture laws used to estimate the fluid properties is approximately 4%. The obtained value Ra_c , as it can be seen in Table V, can be compared with previous results for convection cells of aspect ratios 6:3:1. Davis²⁴ and Catton²⁵ found 2100 and 1879 for cells with conductive and isolated lateral walls, respectively. These values over estimate Ra_c because they were obtained from 2D numerical simulations.²⁶ Better estimates for Ra_c are as follows: 1793 mentioned in Walden *et al.*²⁶ from three-dimensional numerical simulations with isolated walls; Stork and Möller¹⁹ obtained $Ra_c = 1913$ in experiments with lateral walls of low conductivity and very recently, for similar aspect ratios, Fukazawa²⁰ performed an interesting analysis of the

convective patterns, finding a very similar critical Rayleigh number. Our present value of Ra_c agrees with the previous works considering the small difference in the aspect ratios of the cell and the use of semi-conductive lateral walls, condition given by the ratio of thermal conductivities of lateral walls and fluid, $k_a/k = 0.65$.

It is worth to note that our working fluid presents a strong viscosity variation with temperature. At the critical temperature difference, however, the ratio of viscosities evaluated at the top and bottom surfaces, ν_{max}/ν_{min} , is low (cf. Table V) and the Oberbeck-Boussinesq approximation is valid. In addition, the fluid Prandtl number is high, $Pr \sim 3290$, but this does not affect Ra_c considerably.

The dimensionless heat current across the fluid is defined as¹⁴

$$j_{cv} = \frac{\dot{Q}_{cv}}{g_f \Delta T_c}, \quad (26)$$

which can be written as a linear function of the reduced Rayleigh number ϵ near the critical Ra_c [cf. Eq. (25)]. In Fig. 16(a), we display the dimensionless heat current as a function of the reduced Rayleigh number ϵ , written as $j_{cv} = S_1 \epsilon$, where S_1 is the slope shown in Table V. The departure of the curve from the linear behaviour becomes clear for $\epsilon > 2$, a region which can be fitted including a quadratic correction.

TABLE IV. Nusselt number Nu as a function of Rayleigh number Ra and reduced Rayleigh number ϵ .

	Ra						
	2121	3365	4797	6226	7654	9081	9557
ϵ	0.20	0.90	1.71	2.52	3.33	4.14	4.41
Nu^a	1.31	1.72	2.00	2.20	2.36	2.48	2.52
Nu^b	1.29	1.72	2.01	2.21	2.36	2.49	2.53

^aRaw data.

^bCorrected for ambient temperature variations.

TABLE V. Parameters at the onset of convection. Data in parentheses are corrected for ambient temperature variations. Pr Prandtl number at 296.65 K. Ratio of maximum and minimum viscosity, $r = \nu_{max}/\nu_{min}$, at ΔT_c , and initial slope S_1 .

ΔT_c (K)	Ra_c	Pr	r	S_1
0.91 (0.92)	1770 (1805)	3288	1.07	1.57 (1.59)

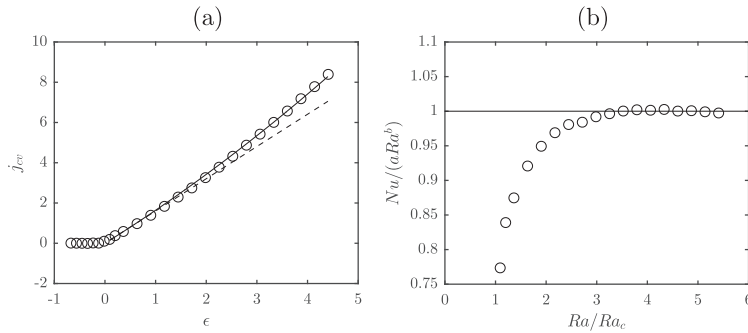


FIG. 16. Heat transfer characterization under moderate supercritical Ra values ($Ra < 10^4$). (a) Dimensionless heat current j_{cv} (\circ) as a function of the reduced Rayleigh ϵ . We display a linear fit of the form $j_{cv} = S_1 \epsilon$ (dashed line) and the quadratic correction $j_{cv} = S_1 \epsilon + S_2 \epsilon^2$ (solid line), where $S_1 = 1.57$ and $S_2 = 0.071$. (b) Ratio between Nusselt and the power law aRa^b as a function of Ra/Ra_c where the coefficients are $a = 0.136$ and $b = 0.319$.

Systematic increase of the Rayleigh number beyond $\epsilon > 2$ produces a power law behaviour on the Nusselt number as it can be seen in Fig. 16(b).

V. CONCLUSIONS

In the present work, we have studied experimentally a RB convection cell of aspect ratios 6:3:1 containing a high Prandtl aqueous solution of glycerol and subjected to closed loop feedback control. The experimental setup uses independent controllers for each plate, based on local temperature readings, and determines the power supplied to the fluid through a PID algorithm. A controlled transit between thermal conduction and convection regimes can be performed varying temperature difference across the fluid or through the rotation mechanism of the convection cell at 180° .

Step and ramp temperature tests conducted on each controller simultaneously allowed us to detect the additional power required to change the hot plate temperature. In the step test, the additional power required was given by the area under the power curve, while in the ramp tests, the additional power was associated with the thermal capacity of the plate's material. Both controllers were able to maintain the temperatures of their plates constant with steady state errors of 0.04 and 1.64 mK in the cold and hot plate, respectively.

The feedback control system improves the signal to noise ratio of the power measurements while placing the cell in conduction and convection configurations allows an accurate evaluation of the heat losses. As a result, the experimental setup provided an accurate determination method of the critical Rayleigh number Ra_c as well as the measurement of the heat transfer in the subcritical and supercritical regimes.

Flow visualizations have shown that the steady state convective pattern at the instability onset consists of 6 transverse rolls, i.e., with their axes aligned with shorter side of the convection cell, which were observed throughout the whole Rayleigh number range here studied ($Ra < 10^4$). The resulting critical Rayleigh number was in agreement with measurements in convection cells of similar aspect ratios. The evolution of the Nusselt number as a function of the Rayleigh number was obtained and expressed in terms of the dimensionless heat current, showing a linear behaviour of the heat transfer near onset in accordance with theory. At higher Rayleigh numbers, the Nusselt number displayed a power law behaviour.

Our future work will be focused on the flow and heat transfer transitions as a function of the convection cell angle.

ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Dr. G. Arévalo for fruitful discussions about the experimental setup. M. Vial acknowledges Mecetus Grant No. UCH0310. This work was partially supported by Fondecyt Grant No. 1085020.

- ¹E. Bodenschatz, W. Pesch, and G. Ahlers, "Recent developments in Rayleigh-Bénard convection," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 709 (2000).
- ²S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1981).
- ³E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices* (Cambridge University Press, 1993).
- ⁴M. C. Remillieux, H. Zhao, and H. H. Bau, "Suppression of Rayleigh-Bénard convection with proportional-derivative controller," *Phys. Fluids* **19**, 017102 (2007).
- ⁵L. E. Howle, "Active control of Rayleigh-Bénard convection," *Phys. Fluids* **9**, 1861 (1997).
- ⁶L. Bellon, M. Gibert, and R. H. Hernández, "Coupling between aging and convective motion in a colloidal glass of Laponite," *Eur. Phys. J. B* **55**, 101 (2007).
- ⁷L. E. Howle, "Control of Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio container," *Int. J. Heat Mass Transfer* **40**, 817 (1997).
- ⁸X. Chavanne, B. Castaing, B. Chabaud, F. Chillá, and B. Hébral, "Rayleigh-Bénard convection at very high Rayleigh numbers close to the ^4He critical point," *Cryogenics* **38**, 1191 (1998).
- ⁹J. Singer and H. H. Bau, "Active control of convection," *Phys. Fluids A* **3**, 2859 (1991).
- ¹⁰G. Ahlers, E. Brown, F. F. Araujo, D. Funfschilling, S. Grossmann, and D. Lohse, "Non-Oberbeck-Boussinesq effects in strongly turbulent Rayleigh-Bénard convection," *J. Fluid Mech.* **569**, 409 (2006).
- ¹¹Y.-M. Chen and A. J. Pearlstein, "Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots," *J. Fluid Mech.* **198**, 513 (1989).
- ¹²J. B. Segur and H. E. Oberstar, "Viscosity of glycerol and its aqueous solutions," *Ind. Eng. Chem.* **43**, 2117 (1951).
- ¹³Y. L. Rastorguev and Y. A. Ganiev, "Thermal conductivity of aqueous solutions of organic materials," *Russ. J. Phys. Chem.* **40**, 869 (1966).
- ¹⁴C. W. Meyer, G. Ahlers, and D. S. Cannell, "Stochastic influences on pattern formation in Rayleigh-Bénard convection: Ramping experiments," *Phys. Rev. A* **44**, 2514 (1991).
- ¹⁵R. Verzicco, "Effects of nonperfect thermal sources in turbulent thermal convection," *Phys. Fluids* **16**, 1965 (2004).
- ¹⁶K. Ogata, *Modern Control Engineering* (Prentice Hall, 2010).
- ¹⁷J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," *Trans. ASME* **64**, 759 (1942).
- ¹⁸H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Oxford University Press, 1959).
- ¹⁹K. Stork and U. Müller, "Convection in boxes: Experiments," *J. Fluid Mech.* **54**, 599 (1972).
- ²⁰Y. Fukazawa and M. Funakoshi, "Onset of thermal convection and its flow patterns in a rectangular cavity," *Fluid Dyn. Res.* **47**, 065505 (2015).

- ²¹K. R. Kirchartz and H. Oertel, Jr., "Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes," *J. Fluid Mech.* **192**, 249 (1988).
- ²²E. L. Koschmieder and S. G. Pallas, "Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer," *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 991 (1974).
- ²³A. Schlüter, D. Lortz, and F. Busse, "On the stability of steady finite amplitude convection," *J. Fluid Mech.* **23**, 129 (1965).
- ²⁴S. H. Davis, "Convection in a box: Linear theory," *J. Fluid Mech.* **30**, 465 (1967).
- ²⁵I. Catton, "Convection in a closed rectangular region: The onset of motion," *J. Heat Transfer* **92**, 186 (1970).
- ²⁶R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. Surko, "Heat transport by parallel-roll convection in a rectangular container," *J. Fluid Mech.* **185**, 205 (1987).

Capítulo 7

Conclusiones

La presente parte del trabajo tuvo por finalidad la puesta a punto y caracterización de la instrumentación de un montaje experimental orientado a estudiar el problema de convección de Rayleigh-Bénard en una celda de geometría rectangular. La primera etapa consistió en la puesta en marcha de dicho montaje experimental, de manera este fuese capaz de reproducir la inestabilidad en forma controlada. A su vez, permitir la medición temperatura en distintos puntos representativos y de potencia a través del fluido tanto en regimenes conductivo como convectivo. Durante el desarrollo de esta parte del trabajo se debieron superar diversas dificultades, entre ellas cabe mencionar:

- (i) Ruido y oscilación en las mediciones de potencia en el rango de interés ($p \lesssim 1$ W). Para solucionar este problema se probaron distintas alternativas para la variable de control de temperatura de la placa caliente y se modificó la estrategia de control de la experiencia. A su vez, se tomaron medidas para la reducción de ruido eléctrico en conexiones y línea de tierra del laboratorio.
- (ii) Desajuste en el control de temperatura de la placa fría. Este problema se solucionó implementando un controlador Proporcional Integral (PI) en el programa de adquisición que trabaja en conjunto con el controlador del baño térmico.
- (iii) Fugas del fluido desde la celda. Esto se solucionó implementando un recipiente que recibe el exceso de volumen de fluido generado por su expansión térmica.
- (iv) Variación de las pérdidas de calor por los cambios en la temperatura ambiente. Este problema fue bastante complejo, debido al carácter no controlado la temperatura ambiente, y para su solución se probaron dos estrategias. La primera consistió en seguir la temperatura ambiente T_{amb} con la temperatura media entre las placas, sin embargo en esta alternativa presenta los siguientes problemas: dificultad para identificar en forma precisa el proceso de filtrado de T_{amb} , por parte de la aislación y otros elementos del montaje; gasto adicional de potencia para elevar la temperatura de la placa caliente durante el seguimiento de T_{amb} . Considerando lo anterior se optó por mantener fijas las temperaturas de ambas placas y aminorar los efectos de las variaciones de la temperatura ambiente aislando la celda de convección y la sala donde se realizaron las experiencias.

Las modificaciones efectuadas al montaje experimental permitieron obtener una elevada resolución en las mediciones de potencia y temperatura, del orden de ~ 1 mW y ~ 0.1 mK, respectivamente. De esta manera se obtuvo un montaje experimental con una gran

sensibilidad en las cantidades de interés asociadas, los números de Nusselt y Rayleigh, respectivamente. Con el fin de probar el desempeño del montaje experimental, se efectuaron las siguientes experiencias:

- (i) Medición de los tiempos difusivos del sistema. Para ello se realizó una prueba de escalón de temperatura para la placa fría, manteniendo la temperatura de la placa caliente constante. A su vez, se obtuvo un modelo teórico unidimensional, verificado en forma numérica, que representa correctamente los resultados experimentales obtenidos. De esta prueba se obtuvo el tiempo necesario para alcanzar un régimen estacionario, respetado en las mediciones, y coherencia con el tiempo difusivo del fluido estimado de sus propiedades físicas.
- (ii) Medición de potencia en régimen conductivo estacionario. Estas mediciones permitieron caracterizar la componente de potencia asociada a las pérdidas de calor, lo que permite estimar la componente útil de potencia a través del fluido. A su vez, se propone un modelo para las variaciones de pérdidas de calor generadas por cambios en la temperatura ambiente que entrega resultados coherentes en las experiencias realizadas.
- (iii) Medición de la transferencia de calor en régimen convectivo estacionario. Estas permitieron determinar el número de Rayleigh crítico para el comienzo del régimen de convección y caracterizar el régimen convectivo a valores moderados de este parámetro de control. Los resultados comprueban el comportamiento lineal de la transferencia de calor al inicio de la inestabilidad y entregan una pendiente inicial mayor al valor teórico, lo que concuerda con experiencias realizadas por otros autores tales como [13, 69].
- (iv) Medición de la transferencia de calor para distintos ángulos de inclinación de la celda. Estas mediciones se realizaron a un número de Rayleigh fijo, desde un régimen convectivo hasta uno conductivo. Los resultados permitieron construir la curva número de Nusselt en función del ángulo de inclinación, en la que se observan un mínimo y un máximo local. El mínimo local, de acuerdo a la literatura, indican la transición de rollos longitudinales a un rollo transversal unicelular. A ángulos próximos a la configuración de convección se encuentra un régimen que depende del tiempo, con una disminución local de la transferencia de calor.

Un resultado interesante que se obtiene de esta prueba es que se logra detectar la variación de temperatura, generada por la circulación de flujo al interior de la celda, de la lectura de los sensores ubicados en las placas. Este resultado permite comprobar la gran sensibilidad lograda en la implementación en el método de medición de temperatura.

Como continuación al trabajo realizado se encuentran diversos temas interesantes de investigación. Por ejemplo, se puede estudiar el efecto de un forzamiento externo generado por una variación temporal de la temperatura entre placas o del ángulo de inclinación de la celda. El efecto de un forzamiento externo es un tema actual en el cual se han observado fenómenos interesantes entorno a un punto crítico, como lo es el mínimo local obtenido en la curva número de Nusselt en función del ángulo de inclinación. Otro tema interesante es la aplicación de las técnicas de visualización que se discuten en la próxima parte del presente trabajo, que permitirían observar las estructuras de flujo en los casos estudiados.

Parte III

Reconstrucción del campo de temperatura de plumas térmicas

Capítulo 8

Métodos ópticos basados en patrones de referencia

Contenido

8.1	Métodos ópticos basados en la deflexión de la luz	111
8.1.1	Descripción de la propagación de la luz en arreglos ópticos	112
8.1.2	Métodos ópticos clásicos	116
8.2	Técnicas Synthetic Schlieren y Background Oriented Schlieren	120
8.2.1	Arreglos ópticos de las técnicas BOS y Synthetic Schlieren	120
8.2.2	Metodología de procesamiento de imágenes	124
8.3	Descripción del fenómeno de plumas térmicas	128
8.3.1	Ecuaciones del sistema	128
8.3.2	Características del campo de temperatura	129

8.1. Métodos ópticos basados en la deflexión de la luz

Los métodos ópticos son una herramienta versátil, en general no intrusiva, que permite estudiar en forma cualitativa y cuantitativa diversos fenómenos físicos. En las aplicaciones orientadas a flujos térmicos, éstos se pueden clasificar de acuerdo a los siguientes principios [72]:

- Radiación térmica.
- Variaciones del índice de refracción.

Los métodos de radiación térmica se aplican, por ejemplo, al estudio de la dinámica de termofluidos o la termografía en infrarrojo utilizada en medicina [73]. Los métodos basados en variaciones del índice de refracción se pueden clasificar a su vez en:

- Métodos de interferencia.
- Métodos basados en la deflexión de la luz.

Los métodos de interferencia se basan en la diferencia de pasos ópticos y entre las configuraciones más importantes se encuentran los interferómetros Michelson y Mach-Zehnder [74]. Entre los métodos basados en la deflexión de la luz se encuentran técnicas clásicas, tales como Shadowgraph y Schlieren, y técnicas recientes que utilizan un patrón de referencia en conjunto con el procesamiento digital de imágenes. El interés del presente trabajos recae en estas últimas, que se discuten luego de revisar algunos aspectos sobre la propagación de luz en arreglos ópticos y de las técnicas clásicas mencionadas previamente.

8.1.1. Descripción de la propagación de la luz en arreglos ópticos

En la presente sección se discuten algunos aspectos generales que permiten comprender la interpretación de arreglos ópticos de métodos ópticos basados en la deflexión de la luz.

Relación entre índice de refracción, densidad y temperatura

Un primer aspecto de interés en la aplicación de métodos ópticos al estudio de flujos térmicos consiste en la relación entre índice de refracción y temperatura. Estas cantidades se relacionan a través de la densidad del medio de acuerdo a la fórmula de Lorentz-Lorenz [75, 76]:

$$\frac{n^2 - 1}{\rho(n^2 + 2)} = \bar{r}(\lambda) \quad (8.1)$$

con n el índice de refracción, ρ la densidad y $\bar{r}(\lambda)$ la refractividad específica que es función de la sustancia y de la longitud de onda de la luz. La fórmula de Lorentz-Lorenz permite obtener el comportamiento del índice de refracción con la temperatura de líquidos, sin embargo esto genera discrepancias significativas con las experiencias [77]. Entre las alternativas se encuentran las fórmulas propuestas por Looyenga [77] y Murphy y Alpert [75, 78], esta última dada por:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p = -\frac{3\alpha n(n^2 - 1)}{2(2n^2 + 1)} \quad (8.2)$$

con T la temperatura y α el coeficiente de expansión térmica dado por $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$.

En el caso de gases se cumple $n \approx 1$ y la fórmula de Lorentz-Lorenz se traduce en la ecuación de Gladstone-Dale [75]:

$$n = 1 + K_{GD} \rho \quad (8.3)$$

con K_{GD} la constante de Gladstone-Dale que depende levemente de la longitud de onda y temperatura y es específica para cada gas. A su vez, la densidad se relaciona con la temperatura mediante la ecuación de estado de los gases:

$$\rho = \frac{MP}{RT} \quad (8.4)$$

con M el peso molecular, P la presión, T la temperatura absoluta y $R = 8.3143$ J/ mol K la constante universal de los gases.

Modelamiento bajo la formulación de óptica geométrica

El tratamiento óptico de métodos asociados a la deflexión de la luz se realiza principalmente mediante óptica geométrica [76, 79]. Esta formulación omite los efectos asociados a la longitud de onda finita de la luz y describe su propagación de mediante la ecuación Eikonal:

$$|\nabla S(\vec{r})|^2 = n^2(\vec{r}) \quad (8.5)$$

donde S representa el tiempo requerido para que la luz alcance un cierto punto en el espacio y n es el índice de refracción del medio. Las superficies de S constante, i.e. fase constante, se denominan frentes de onda y son ortogonales a la trayectoria de los rayos de luz. Esta trayectoria se describe mediante la *ecuación de rayos de óptica geométrica* dada por [75, 76]:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (8.6)$$

donde \vec{r} es la posición del rayo y ds es un cambio infinitesimal en su longitud. La ecuación de rayos se utiliza generalmente bajo la aproximación de rayos paraxiales. Esta forma se obtiene de la equivalencia entre la ecuación Eikonal y las ecuaciones diferenciales acopladas [80, 81]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dz^2} &= \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{d\xi}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \\ \frac{d^2\zeta}{dz^2} &= \left[1 + \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{d\zeta}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (8.7)$$

donde la posición del rayo \vec{r} se encuentra dada por las coordenadas $(\xi(z), \zeta(z), z)$ en el plano (x, y, z) y donde el elemento de arco, ds , se aproxima por:

$$ds = \sqrt{1 + \xi'^2 + \zeta'^2} dz \quad \text{con} \quad \xi' = \frac{d\xi}{dz} \quad \text{y} \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{dz} \quad (8.8)$$

Bajo la aproximación paraxial, las pendientes del rayo cumplen $\xi'(z) \ll 1$ y $\zeta'(z) \ll 1$, lo que permite desacoplar el sistema de ecuaciones anterior de acuerdo a [81]:

$$\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}, \frac{d^2\zeta}{dz^2} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \right) \quad (8.9)$$

Esta forma aproximada de la ecuación de rayos permite determinar su trayectoria en una sección de prueba, según se muestra en la figura 8.1. En este caso se supone que un rayo incide normal al medio en estudio con una distribución de índice de refracción $n(x, y)$. En el plano vertical y al interior del medio el rayo se deflecta un ángulo $\theta(z)$ que se obtiene integrando la ecuación (8.9):

$$\theta(z) = \int_0^z \frac{d^2\zeta}{dz^2} dz' = \frac{1}{n_0} \int_0^z \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} dz' = \frac{z}{n_0} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} \quad (8.10)$$

donde n_0 es la componente homogénea del índice de refracción del medio. Por otra parte,

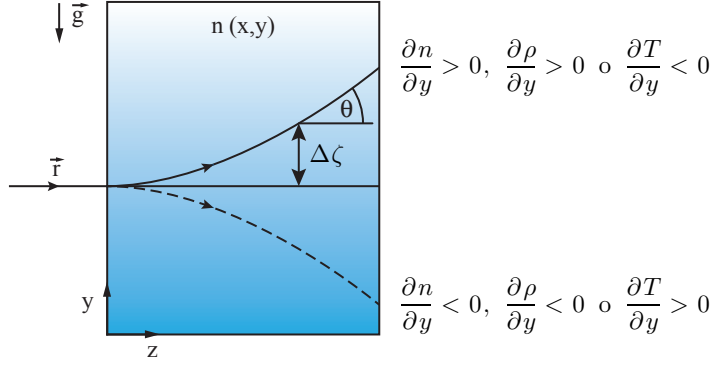


Figura 8.1: Trayectoria de un rayo \vec{r} de incidencia normal a un medio con distribución de índice de refracción bidimensional $n(x, y)$. El ángulo del rayo, $\theta(z)$, y su desplazamiento, $\Delta\zeta(z)$, son positivos para un gradiente positivo de índice de refracción y densidad o negativo de temperatura.

el desplazamiento del rayo en el plano vertical, $\Delta\zeta(z)$, se obtiene integrando su deflexión:

$$\Delta\zeta(z) = \int_0^z \theta(z') dz' = \frac{1}{n_0} \int_0^z z' \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} dz' = \frac{L_t^2}{2n_0} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} \quad (8.11)$$

Las expresiones anteriores son similares en el plano horizontal y se utilizan, en conjunto con la ley de Snell, para describir la trayectoria de rayos en arreglos ópticos. El desplazamiento de rayos tiene el signo del gradiente de índice de refracción del medio. Es decir, un desplazamiento positivo se puede asociar a un gradiente positivo de densidad o negativo de temperatura.

Modelamiento bajo la formulación de óptica de Fourier

La óptica de Fourier [79] describe la luz propagación de la luz como una superposición de ondas planas cuya descomposición se realiza mediante la transformada de Fourier. Esta formulación permite una descripción completa de sistemas ópticos al considerar las propiedades de la luz como onda. De esta manera es posible describir los fenómenos de difracción, interferencia o la formación de regiones de concentración de luz conocidas como *caustics*. La interpretación de *caustics* mediante óptica geométrica predice la divergencia de intensidad de luz, lo que carecen de un sentido físico ya que se encuentra limitada por el fenómeno de difracción. Esto se discute en [82], donde se comparan imágenes artificiales obtenidas mediante ambas formulaciones de un arreglo Shadowgraph con patrones predeterminados de convección de Rayleigh-Bénard.

En los métodos de propagación de óptica de Fourier se considera la acumulación de fase, ϕ , en el paso de luz a través de un medio con índice de refracción inhomogéneo, $n(\vec{r})$, dada por:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} \int n(\vec{r}) ds \quad (8.12)$$

con λ la longitud de onda. En un sistema óptico, el frente de luz puede provenir de un

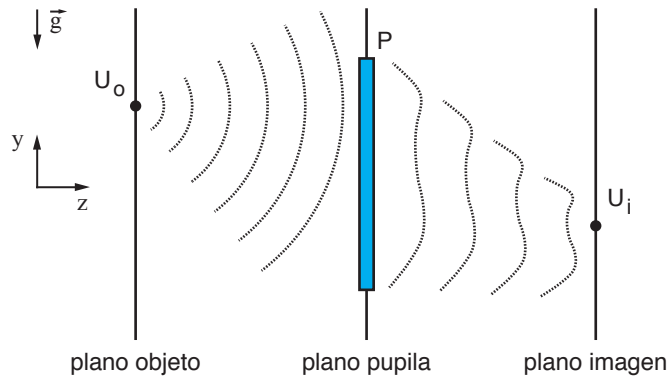


Figura 8.2: Modelo de un sistema óptico bajo óptica de Fourier. Una onda monocromática, U_0 , proviene de un objeto y forma una imagen, U_i , en un arreglo de receptores. El sistema se caracteriza por la función pupila generalizada, $\mathcal{P}(x, y)$, que combina los efectos de apodización y aberraciones.

objeto extendido y formar una imagen en un arreglo de receptores, según se indica en el modelo en la figura 8.2. La aberración de fase y los efectos de apodización generados por el medio se representan por la función pupila generalizada, $\mathcal{P}(x, y)$, dada por [79, 83]:

$$\mathcal{P}(x, y) = P(x, y) e^{i\phi(x, y)} \quad (8.13)$$

donde $P(x, y)$ toma un valor unitario adentro de la pupila y nulo en caso contrario. El método basado en las aberraciones de fase que permite determinar la formación de imagen de la función anterior depende de la coherencia espacial de la luz. En el caso de luz espacialmente coherente, se determina el campo óptico de la imagen, U_i , del producto de convolución:

$$U_i = h(u, v) \otimes U_0(u, v) \quad (8.14)$$

donde la función $h(u, v)$ se denomina Amplitud Spread Function (ASF) y se obtiene de la transformada de Fourier de la función pupila generalizada. En el caso de luz espacialmente incoherente, se obtiene la intensidad de la imagen, I_i , de la intensidad del objeto, I_0 , de:

$$I_i = |h(u, v)|^2 \otimes I_0(u, v) \quad (8.15)$$

donde el término $|h(u, v)|^2$ se denomina Point Spread Function (PSF) y corresponde a la distribución de intensidad resultante de una fuente puntual.

Las expresiones anteriores permiten determinar la formación de imagen a partir de la aberración de fase generada por un medio. La fase de la onda perturbada, sin embargo, se pierde si la luz incide directamente en un arreglo de receptores. Esto debido a que los sensores miden intensidad de luz, i.e. miden el modulo del campo óptico $I_i = |U_i|^2$. El problema de recuperación de fase es del tipo inverso y se conoce como *phase retrieval*. Su solución sólo se ha obtenido mediante los algoritmos recientes y complejos de Gerchberg y Saxton [84]. Por lo tanto, si se desea recuperar la fase resulta más conveniente utilizar métodos de interferencia, o sensores especializados tales como Shack-Hartmann [85]. La técnica de transporte de intensidad de luz es una alternativa más sencilla, pero involucra el desplazamiento del medio de registro [86].

8.1.2. Métodos ópticos clásicos

En la presente sección se describen brevemente algunos métodos ópticos clásicos basados en la deflexión de la luz. Estos métodos se aplican a fenómenos de densidad variable, y por lo tanto, son de gran utilidad para el estudio de fenómenos térmicos.

Shadowgraph

La técnica Shadowgraph se aplica comúnmente a la observación de fenómenos como plumas térmicas [3, 4, 87] o convección de Rayleigh-Bénard [13, 18, 44, 82, 88]. Esta técnica utiliza un arreglo que es, en principio, bastante sencillo y se indica en la figura 8.3. En él, un haz de luz colimada incide un medio en estudio y posteriormente en una pantalla. Los gradientes de densidad en el medio desvían los rayos de luz y en la pantalla se observan la intensidad de luz resultante.

El patrón de intensidad que se observa en la pantalla se puede interpretar mediante óptica geométrica y los supuestos que se discuten en [81, 89]. El procedimiento consiste en relacionar las coordenadas de entrada al medio e incidencia en la pantalla mediante la ecuación de rayos bajo la aproximación paraxial (cf. ec. (8.9)). Las intensidades de luz en estas coordenadas se relacionan mediante el Jacobiano, i.e. una función de mapeo, según se indica en la figura 8.3 (c). De esta manera se obtiene que, para un medio con distribución de índice de refracción $n(x, y)$, los cambios de intensidad de luz observados en la pantalla se encuentran dada por:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_0 - I_s}{I_s} = L_t L_s \nabla^2 \ln n(x, y) \quad (8.16)$$

con I_s e I_0 las intensidades de luz en presencia y ausencia de perturbaciones, respectivamente, en el medio de espesor L_t y ubicado a una distancia L_s del medio de registro.

Schlieren

Una segunda técnica que permite la visualización de fenómenos de densidad variable es Schlieren [90]. El montaje experimental típico de esta técnica se muestra en la figura 8.4, donde un primer lente colima la luz incidente en el medio en estudio y que se enfoca en un elemento afilado o *knife edge*. El gradiente de densidad en el medio, con componente perpendicular al elemento afilado, desvía la luz de la región que se observa en una pantalla o un medio digital de registro. Si el elemento intercepta la luz se produce una zona oscura y en caso contrario una zona brillante. Estos cambios de intensidad de luz siguen la relación [89]:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{f_2 L_t}{a_k} \nabla n(x, y) \quad (8.17)$$

con f_2 la distancia focal del segundo lente, L_t el espesor del medio y a_k la altura interceptada del rayo no perturbado que incide en el *knife edge* (cf. fig. 8.4 (b)). La resolución de la técnica se puede mejorar utilizando un segundo elemento afilado en el primer foco del sistema. A su vez, se pueden reemplazar los lentes por espejos parabólicos para ampliar la región de estudio. Entre otras variantes de la técnica se encuentra el uso de la codificación y decodificación del color o el registro de imágenes mediante un medio digital [91–93].

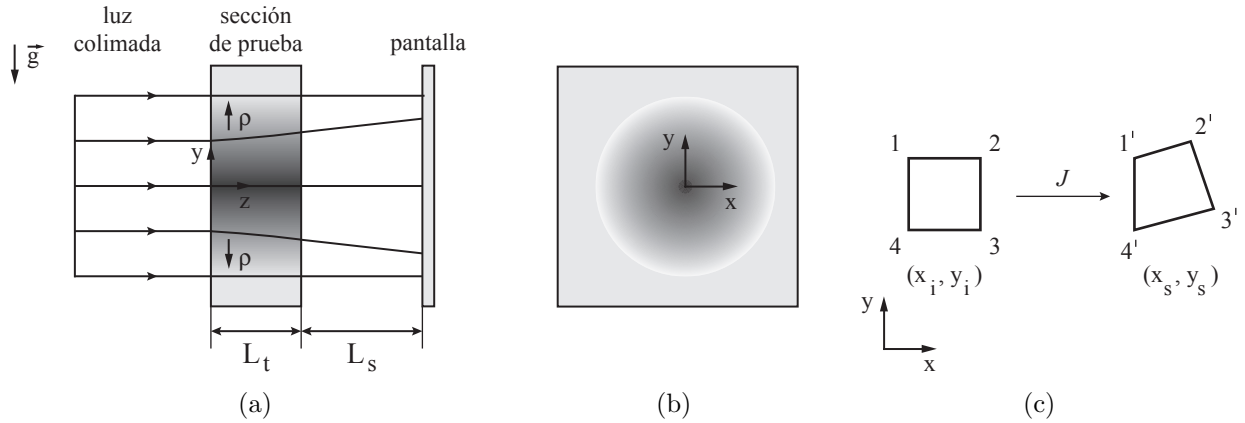


Figura 8.3: Técnica Shadowgraph. (a) Esquema del arreglo óptico. Un haz de luz colimada incide en la sección de prueba de espesor L_t y luego en una pantalla ubicada a una distancia L_s . Los rayos se desvían hacia arriba (abajo) en las regiones con gradientes de densidad positivos (negativos). (b) En la pantalla se observan zonas de alta o baja intensidad de luz generadas por la convergencia o divergencia de rayos, respectivamente. (c) La intensidad de luz en las coordenadas de entrada al medio, (x_i, y_i) , e incidencia en la pantalla, (x_s, y_s) , se relacionan mediante el Jacobiano $J(x_i, y_i; x_s, y_s)$.

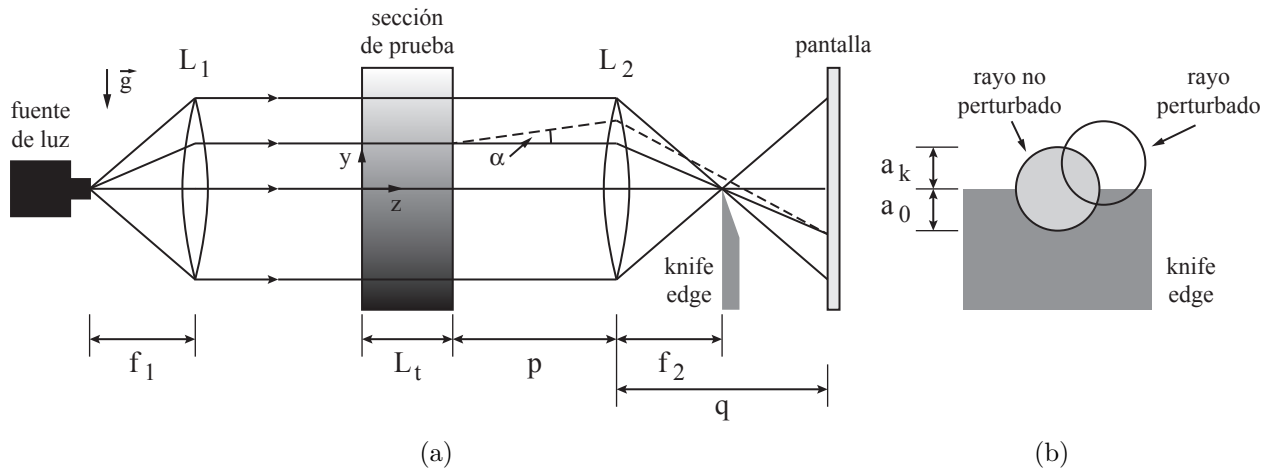


Figura 8.4: Técnica Schlieren. (a) Esquema del arreglo óptico. El lente L_1 colima la luz que incide en la sección de prueba y se enfoca mediante el lente L_2 en un *knife edge*. Si este elemento intercepta la luz, que se desvía en un ángulo α por el gradiente de densidad en el medio, se observa en la pantalla una zona oscura y en caso contrario una zona brillante. Los elementos se disponen de acuerdo a la relación $1/p + 1/q = 1/f_2$, de manera que los cambios de intensidad corresponden a la deflexión de los rayos de luz y no a su desplazamiento como en el caso de Shadowgraph. (b) Detalle de la incidencia de luz en el *knife edge*. Se indican: a_0 el tamaño del rayo no perturbado y a_k su altura interceptada.

Método de franjas de moiré y técnicas relacionadas

El método de visualización de franjas de moiré debe su nombre al patrón secundario que se observa al superponer dos o más estructuras periódicas. Este patrón se puede crear traslapando dos rejillas paralelas con espaciados de malla ligeramente diferentes, d y $d + \delta d$, o inclinadas en un cierto ángulo θ y con mismo espaciado d (cf. figs. 8.5 (a-b)). En estos casos, el espaciado del patrón de moiré, d_m , se encuentra dado por [85]:

$$d_m = \frac{d^2}{\delta d} \quad \text{rejillas paralelas} \qquad d_m = \frac{d}{2 \sin(\theta/2)} \approx \frac{1}{\theta} \quad \text{rejillas oblicuas} \quad (8.18)$$

Una las primeras aplicaciones experimentales del método de franjas de moiré fue realizada por Nishijima en 1964 [94], quien utilizó rejillas oblicuas para visualizar de curvas difusión entre soluciones acuosas de glicerina (cf. fig. 8.5 (c)). El montaje experimental consiste en dos rejillas ubicadas a los costados del medio e iluminadas por luz difusa, según se muestra en la figura 8.6. El gradiente del índice de refracción del medio perturbado deflecta los rayos de luz y genera el desplazamiento aparente de su origen en la rejilla próxima a la fuente. La perturbación se amplifica por la presencia de la segunda rejilla, permitiendo así la visualización del fenómeno.

La técnica *moiré deflectometry* permite la reconstrucción de fenómenos de densidad variable y frentes de onda aberrados. Entre sus aplicaciones se encuentran, por ejemplo, la reconstrucción de campos de temperatura axisimétricos [95] o el estudio de turbulencia atmosférica [85, 96]. El arreglo óptico de esta técnica tiene ciertas diferencia respecto al método de franjas de moiré, el medio en estudio se ubica en frente de dos rejillas y se ilumina por una fuente de luz laser. La incidencia de luz espacialmente coherente en la primera rejilla genera una serie de imágenes exactas, fenómeno que se denomina efecto Talbot. La superposición de una segunda rejilla con una de estas auto imágenes, que se forman en los planos de Talbot, genera un patrón de moiré. El patrón se registra, mediante un sensor CCD, en una secuencia de imágenes donde se observa la distorsión de la fase espacial de las franjas producto de la perturbación del medio. Bajo la aproximación paraxial, esta variación de fase, φ , se relaciona con el gradiente de índice de refracción del medio por:

$$\varphi = \frac{2\pi D}{dn_0} \int_0^{L_t} \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (8.19)$$

con D la distancia entre las dos rejillas de espaciado d , L_t el ancho del medio y n_0 el valor base de su índice de refracción. Para la reconstrucción de la perturbación del medio se requiere de la demodulación de franjas y un proceso posterior de *unwrap* o corrección de fase. Existen diversos algoritmos posibles, entre los que caben destacar los que utilizan la transformada de Fourier y que se han desarrollado para la técnica tomográfica Fourier Transform Profilometry (FTP) [97]. Dicha técnica ha sido aplicada, por ejemplo, a la reconstrucción de la superficie libre de una represa que se libera repentinamente [98]. En este caso se proyecta un patrón de franjas que evoluciona en el tiempo con un cierto desfase espacial lo que facilita el proceso de corrección de fase. Por otra parte, la proyección de franjas con intensidad sinusoidal permite aumentar la calidad del proceso de reconstrucción, como ha sido observado en el estudio de ondas superficie tridimensionales [99, 100].

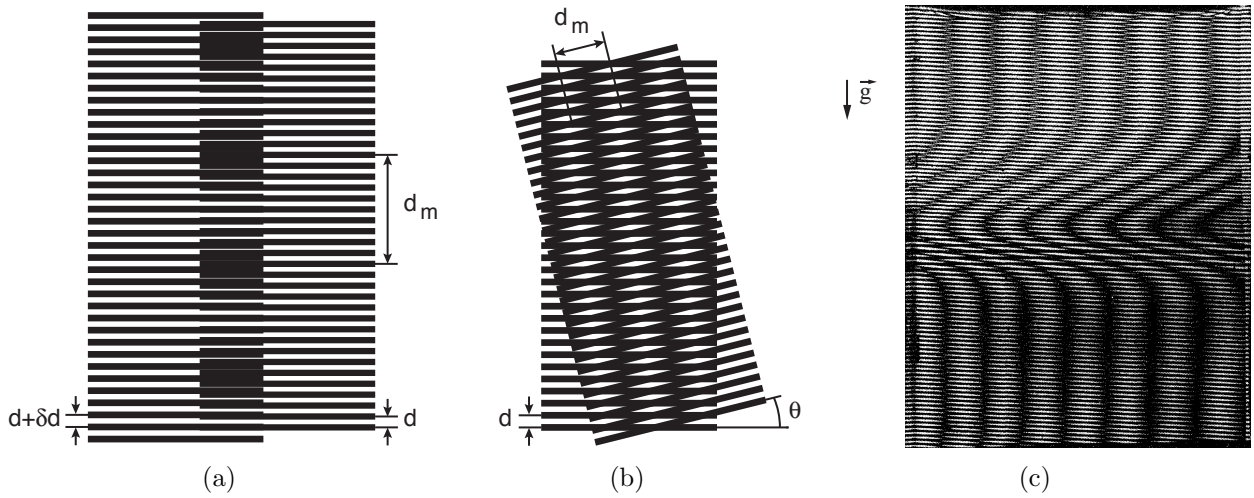


Figura 8.5: Franjas de moiré. Este patrón, con un espaciado d_m , se genera al superponer dos rejillas: (a) paralelas con espaciados de malla d y $d + \delta d$; (b) inclinadas en un ángulo θ y con un mismo espaciado de malla d . (c) Visualización mediante franjas de moiré de las curvas de difusión entre dos soluciones acuosas con concentraciones de 60% y 50% de glicerina, adaptado de [94].

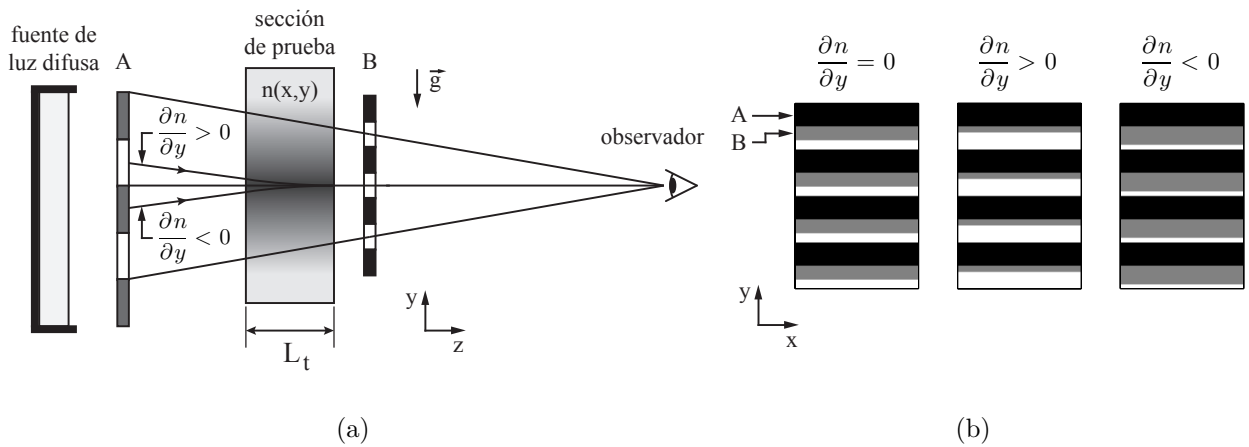


Figura 8.6: Método de franjas de moiré. (a) Arreglo óptico. Dos rejillas, A y B, se ubican a los costados de un medio de ancho L_t y se iluminan por luz difusa. Para una perturbación del campo de índice de refracción del medio, $n'(x, y)$, sobre su valor homogéneo, n_0 , se observa un desplazamiento aparente del origen de las líneas en la pantalla A. (b) Intensidad de luz observada para los distintos tipos de perturbaciones del medio.

8.2. Técnicas Synthetic Schlieren y Background oriented Schlieren

El desarrollo reciente de cámaras digitales y tratamiento de imágenes ha dado paso a nuevas técnicas ópticas de medición tales como Background Oriented Schlieren (BOS) [101, 102] y Synthetic Schlieren [103]. Las técnicas BOS y Synthetic Schlieren permiten la reconstrucción de fenómenos de densidad variable a partir del registro de la deformación aparente de un patrón de referencia observado a través del medio en estudio. Este procedimiento se realiza principalmente mediante el procesamiento de imágenes, lo que permite prescindir de elementos ópticos tales como espejos y lentes utilizados en técnicas clásicas como Schlieren.

Entre las aplicaciones de BOS se encuentran la medición de la concentración de gas en plumas [101] o de temperatura en una capa de fluido [104]. La técnica Synthetic Schlieren ha sido aplicada al estudio de flujos con densidad variable, principalmente a ondas internas de fluidos estratificados por densidad [103, 105–110], estudio de gradientes de densidad en fluidos compresibles [93, 111] y topografía de la superficie libre de fluidos [112]. Medición de frentes de onda.

Las técnicas BOS y Synthetic Schlieren se orientan a flujos bidimensionales, cuya reconstrucción se obtiene de la adquisición de imágenes desde un punto de observación. Esta configuración permite, a su vez, reconstruir flujos de carácter axisimétrico mediante la transformada inversa de Abel. Un ejemplo de este último método se encuentra en [113], donde se obtuvieron los perfiles radiales de concentración de CO_2 transportada por anillos de vorticidad. En flujos de carácter tridimensional, un sólo punto de observación entrega el promedio espacial del campo de perturbación [111]. Para reconstruir espacialmente este tipo de flujos se requiere del registro del patrón de referencia a través del medio desde distintos puntos de observación. Esto se realizó por [114], quienes obtuvieron la distribución tridimensional de temperatura de una pluma térmica utilizando un arreglo de 16 cámaras y un algoritmo de reconstrucción tomográfica.

8.2.1. Arreglos ópticos de las técnicas BOS y Synthetic Schlieren

Los arreglos ópticos de las técnicas BOS y Synthetic Schlieren consisten básicamente en una cámara digital que observa un patrón de referencia a través de un medio fluido, según se muestra en la figura 8.7. La cámara digital se encuentra enfocada en el patrón de referencia que se ilumina por una fuente difusa. La luz se refracta de acuerdo a las distancias axiales que se indican en dicha figura y a los índices de refracción del aire, paredes laterales de la sección de prueba y del medio, n_a , n_w y $n(x, y, t)$, respectivamente.

Cuando ocurren cambios en el índice de refracción del medio, se observarán variaciones de intensidad en las imágenes registradas por la cámara digital. Los valores de intensidad en las imágenes corresponden a la información recibida por el sensor de la cámara, compuesto por un arreglo rectangular de pixels. Éste entrega para cada pixel una señal de intensidad $I(x_i, y_j, t)$, con (x_i, y_j) las coordenadas en pixels, proporcional al promedio espacial de la

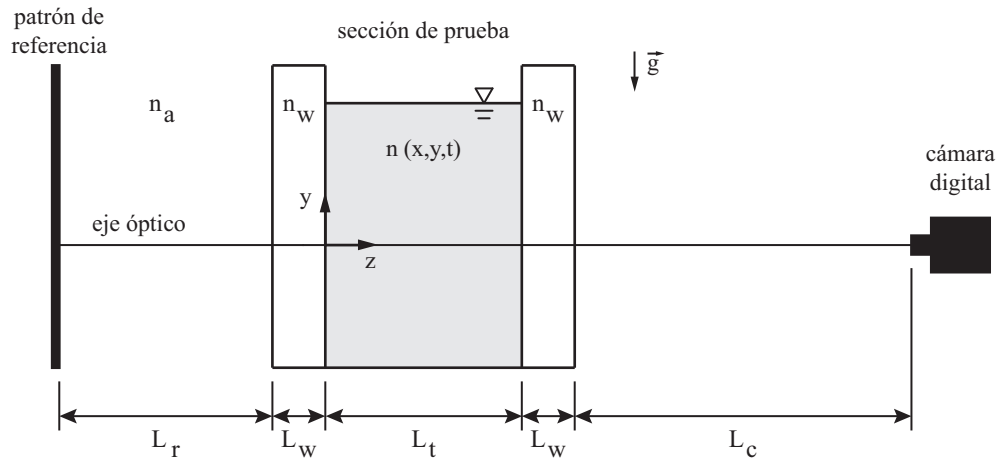


Figura 8.7: Arreglo óptico de métodos basados en un patrón de referencia. Una cámara digital registra la distorsión aparente de un patrón de referencia generada por las variaciones del índice de refracción, $n(x, y, t)$, del medio de espesor L_t . Se indican los índices de refracción del aire y paredes de la sección de prueba, n_a y n_w , respectivamente, y las distancias axiales del medio con el patrón de referencia y cámara digital, L_r y L_c , respectivamente y espesor de pared L_w .

intensidad de luz, $p(x, y, t)$, recibida por él, dada por:

$$I(x_i, y_j, t) = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x_i - L_x/2}^{x_i + L_x/2} \left[\int_{y_j - L_y/2}^{y_j + L_y/2} p(x, y, t) dy \right] dx \quad (8.20)$$

donde un pixel abarca una área $L_x \times L_y = 1$ pixel². Se abreviará $I_t = I(x_i, y_j, t)$.

Durante el transcurso de una experiencia, la cámara digital adquiere los siguientes grupos de imágenes:

- **Imagen de referencia.** Esta imagen entrega una referencia de la trayectoria de la luz a través del medio en ausencia de perturbaciones, i.e. con una distribución homogénea del índice de refracción $n(x, y, t = 0) = n_0$.
- **Imágenes a través del medio perturbado.** En esta imágenes, la presencia de un fenómeno de densidad variable en el medio desvía la trayectoria inicial de la luz generando la distorsión aparente del patrón de referencia $n(x, y, t) = n_0 + n'(x, y, t)$.

El campo de deformación entre ambos grupos de imágenes se relaciona con los gradientes de índice de refracción del medio, según se discute en el próximo punto.

Interpretación de los arreglos ópticos de la técnicas BOS y Synthetic Schlieren

La interpretación de los arreglos ópticos de la técnicas BOS y Synthetic Schlieren permite relacionar la deformación aparente del patrón de referencia con las variaciones de índice de refracción del medio. En ambas técnicas, la interpretación se realiza mediante óptica geométrica bajo la aproximación paraxial, sin embargo sus métodos de interpretación son diferentes. En

BOS se considera sólo la desviación de los rayos de luz en el medio y se determina su desplazamiento en el plano del sensor [102]. En Synthetic Schlieren, en cambio, se considera la refracción de luz en las paredes de la sección de prueba y se calcula el desplazamiento de rayos en el plano del patrón de referencia [106, 111].

En la presente interpretación del arreglo óptico se combinan los aspectos favorables de ambos métodos de interpretación mencionados previamente. Se considera la refracción de luz en las paredes de la sección de prueba y se utiliza un modelo para la cámara digital compuesto por un lente delgado y un sensor. Esto último permite determinar las condiciones de formación de imagen y evitar los supuestos que se utilizan en interpretaciones previas. El desarrollo se encuentra en el Anexo D y en él se determina la trayectoria de rayos en las distintas interfaces del arreglo óptico mediante el método de matrices de propagación [79, 115].

En la figura 8.8 se muestra la trayectoria de rayos en el arreglo óptico obtenida mediante simulación numérica usando el método de matrices de propagación. En ella se encuentran los casos de una distribución homogénea del índice de refracción del medio, n_0 , y bajo una perturbación lineal, $n'(y) = ay$, con $a > 0$ constante. En la figura se observa un desplazamiento de las coordenadas de convergencia de los rayos en el sensor producto de la perturbación del medio. La formación de imagen en ambos casos se discuten a continuación.

Medio no perturbado. En este estado del medio se adquiere una imagen inicial con la cámara digital está enfocada en el patrón de referencia. Bajo esta condición, las coordenadas del rayo en el sensor, (ξ_s^o, ζ_s^o) , y en el patrón de referencia, (ξ_r, ζ_r) , se relacionan por:

$$(\xi_s^o, \zeta_s^o) = M(\xi_r, \zeta_r) \quad (8.21)$$

con M el aumento con el que se observa el patrón de referencia en el sensor. El aumento se relaciona con la distancia del lente al sensor, S_i , y la distancia focal del lente, f , de acuerdo a:

$$M = \frac{f}{f - S'_o} \quad , \quad M = -\frac{S_i}{S'_o} \quad \text{y} \quad \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{S'_o} \quad (8.22)$$

donde el término S'_o representa la posición aparente del objeto, i.e. del patrón de referencia, dada la similitud de las expresiones anteriores con las leyes de lentes delgados [79].

Medio perturbado. La intensidad de luz en las imágenes adquiridas bajo esta condición, I_t , se relaciona con la intensidad de la imagen de referencia, I_0 , de acuerdo a:

$$I_t(x, y) = I_0(x - s_x, y - s_y) \quad (8.23)$$

donde s_x y s_y son las componentes del campo de deformación del patrón de referencia, $\vec{s}(x, y, t)$, observado las imágenes. Estas componentes corresponden a la extensión en ambas direcciones del desplazamiento de rayos en el sensor, $(\delta\xi_s, \delta\zeta_s)$, es decir:

$$s_x = -\delta\xi_s(x, y, t) \quad \text{y} \quad s_y = -\delta\zeta_s(x, y, t) \quad (8.24)$$

donde el signo negativo se debe a que el sensor forma una imagen invertida del patrón de

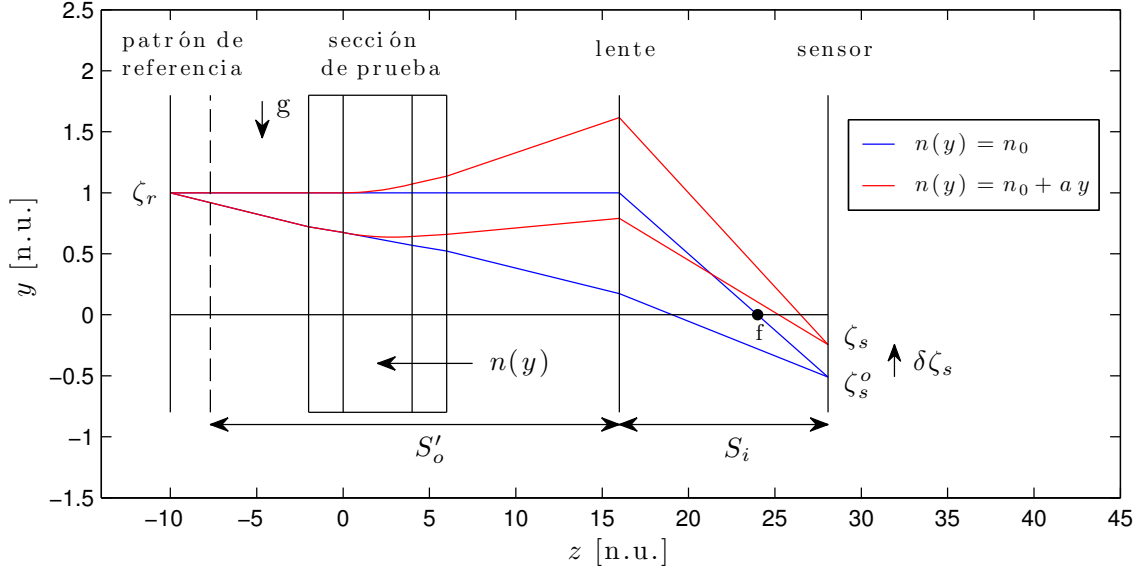


Figura 8.8: Simulación numérica de rayos en un arreglo con un patrón de referencia. Se muestra el trazado de rayos para los estados del medio: no perturbado $n(y) = n_0$; perturbado $n(y) = n_0 + a y$ con $a > 0$ constante. En el estado no perturbado el patrón de referencia se encuentra enfocado en el sistema óptico. Los rayos provienen del patrón de referencia en la coordenada ζ_r e inciden en el sensor en las coordenadas ζ_s^o y ζ_s para el medio no perturbado y perturbado, respectivamente. Se indica: $\delta\zeta_s \equiv \zeta_s - \zeta_s^o$ desplazamiento aparente del rayo en el sensor, f distancia focal del lente, S_i distancia del lente al sensor y S'_o posición aparente del patrón de referencia.

referencia. Por otra parte, el desplazamiento de rayos en el sensor se define como:

$$(\delta\xi_s, \delta\zeta_s) \equiv (\xi_s, \zeta_s) - (\xi_s^o, \zeta_s^o) \quad (8.25)$$

con (ξ_s^o, ζ_s^o) y (ξ_s, ζ_s) las coordenadas de incidencia del rayo para los estados no perturbado y perturbado del medio, respectivamente. De acuerdo al desarrollo en el Anexo D, el campo de deformación del patrón de referencia se relaciona con la perturbación del gradiente de índice de refracción del medio por:

$$\vec{s}(x, y, t) = C \left(\frac{\partial n'}{\partial x}, \frac{\partial n'}{\partial y} \right) \quad \text{con} \quad C = M L_t \left(\frac{L_w}{n_w} + \frac{L_t}{2n_0} + \frac{L_r}{n_a} \right) \quad (8.26)$$

donde la constante C es negativa ya que los parámetros del arreglo son definidos positivos y el aumento, M , es negativo en la formación de imágenes reales.

8.2.2. Metodología de procesamiento de imágenes

Las técnicas Synthetic Schlieren y BOS utilizan una metodología de procesamiento de imágenes similar para reconstruir la distribución espacio temporal de la variable que genera la perturbación del medio. Esta metodología consta de los siguientes pasos:

1. Se calcula el campo de deformación, $\vec{s}(x, y, t)$, entre las imágenes adquiridas con el medio no perturbado y perturbado, I_0 e I_t , respectivamente.
2. Se calcula el campo de perturbación del índice de refracción del medio, $n'(x, y, t)$, resolviendo la ec. (8.26) mediante un algoritmo de integración de gradientes.
3. Se calcula el campo de perturbación de la variable de interés, $\chi'(x, y, t)$, del campo de perturbación del índice de refracción del medio.

Para realizar la metodología anterior se dispone de distintos métodos de cálculo del campo de deformación y de integración del campo de gradientes que se discuten a continuación.

Métodos de medición del campo de deformación

En las técnicas Synthetic Schlieren y BOS se encuentran distintos métodos de medición del campo de deformación y análisis de imágenes que se asocian al motivo del patrón de referencia. El uso de un patrón compuesto por líneas horizontales claras y oscuras, similar a las rejillas del método de franjas de moiré (cf. 8.1.2), da paso a los siguientes métodos.

- **Método cualitativo.** Este método permite la visualización o medición cualitativa del campo de perturbación mediante la resta de imágenes (cf. fig. 8.9). El procedimiento consiste en construir la matriz [103, 110]:

$$P_{i,j;t} = |I_{i,j;t} - I_{i,j;0}| \quad (8.27)$$

donde los subíndices i, j indican las coordenadas (x_i, y_j) en pixeles. Se considera que la intensidad de luz incidente en el sensor (cf. ec. 8.20) puede ser perfectamente blanca u oscura, i.e. $p = 1$ o $p = 0$, respectivamente. De esta manera se obtiene [103]:

$$\left| \frac{\partial n}{\partial y} \right| \propto \begin{cases} P_{i,j;t} & \text{en pixeles que contienen un borde de una línea} \\ \text{desconocido} & \text{en otros pixeles} \end{cases}$$

donde las condiciones para que un pixel se encuentre en el borde de una línea se debe cumplir en ambas imágenes y son las siguientes:

$$I_{i,j-1} < I_{i,j} < I_{i,j+1} \quad \text{o} \quad I_{i,j-1} > I_{i,j} > I_{i,j+1} \quad \text{y} \quad |I_{i,j-1} - I_{i,j+1}| > I_{min} \quad (8.28)$$

con I_{min} un valor umbral de intensidad. Si se omite el valor absoluto en la ec. (8.27) se puede establecer la dirección del gradiente del índice de refracción del medio. En este caso se observan dos líneas, una clara y una oscura, por cada línea en la imagen inicial, donde

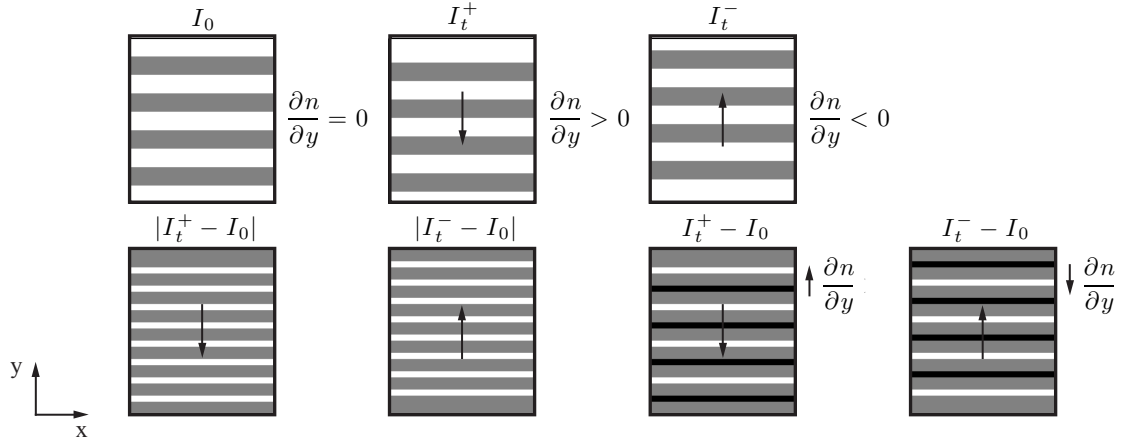


Figura 8.9: Método cualitativo de análisis de imágenes para un patrón de líneas. (arriba) Imagen inicial I_0 e imágenes I_t^+ y I_t^- con perturbaciones de índice de refracción $\partial n/\partial y > 0$ y < 0 , respectivamente. (abajo) Resta de imágenes $|I_t - I_0|$ e $I_t - I_0$. Las flechas indican el desplazamiento de líneas y en las últimas dos figuras se observan pares de líneas, claras y oscuras, que indican la dirección de $\partial n/\partial y$.

la dirección de $\partial n/\partial y$ va desde la línea oscura hacia la línea clara. Una segunda alternativa consiste en construir la matriz:

$$P'_{i,j;t} = S_{i,j} (I_{i,j;t} - I_{i,j;0}) \quad \text{con} \quad S_{i,j} = \text{signo} \left(\frac{\partial I_{i,j;0}}{\partial y} \right) \quad (8.29)$$

La matriz $P'_{i,j;t}$ es en todas partes proporcional a $\partial n/\partial y$, sin embargo la constante de proporcionalidad varía espacialmente debido al modelo discreto de intensidad de luz.

- **Refractometría de línea.** En este método se utiliza un modelo cuadrático de intensidad de luz para determinar el desplazamiento vertical de líneas (cf. fig. 8.10). El procedimiento consiste en resolver $I_{j;t} = \hat{I}_{j-\delta\zeta;0}$, con \hat{I}_0 un interpolador cuadrático de

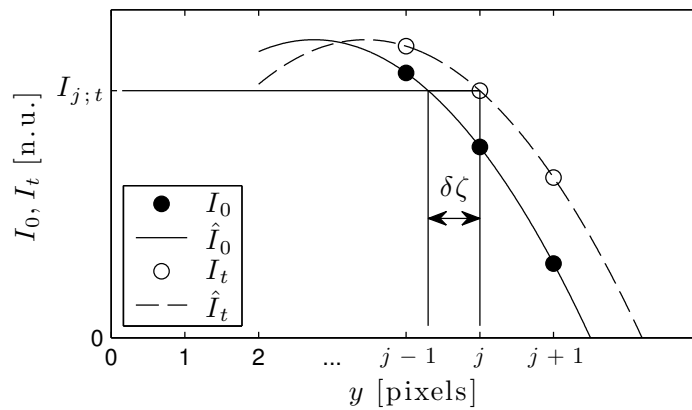


Figura 8.10: Refractometría de línea. El desplazamiento vertical de líneas, $\delta\zeta$, se determina en los píxeles j que se encuentran en el borde de línea. Para ello se resuelve $I_{j;t} = \hat{I}_{j-\delta\zeta;0}$, con \hat{I}_0 un ajuste cuadrático a la intensidad de la imagen inicial e I_t la intensidad de imagen perturbada.

intensidad en la imagen inicial y $\delta\zeta$ el desplazamiento vertical. Este último se determina de la raíz de [103]:

$$I_{i,j;0} - I_{i,j;t} + \frac{1}{2}(I_{i,j+1;0} - I_{i,j-1;0})\delta\zeta + \frac{1}{2}(I_{i,j+1;0} - 2I_{i,j;0} + I_{i,j-1;0})\delta\zeta^2 = 0 \quad (8.30)$$

de menor magnitud. Una alternativa consiste en obtener $\delta\zeta$ de la expansión binomial [106]:

$$\delta\zeta = \frac{(y_{j-1} - y_j)(I_{j;t} - I_{j;0})(I_{j;t} - I_{j+1;0})}{(I_{j-1;0} - I_{j;0})(I_{j-1;0} - I_{j+1;0})} + \frac{(y_{j+1} - y_j)(I_{j;t} - I_{j;0})(I_{j;t} - I_{j-1;0})}{(I_{j+1;0} - I_{j;0})(I_{j+1;0} - I_{j-1;0})} \quad (8.31)$$

donde se omitió el subíndice i para más claridad. En ambos casos se calcula $\delta\zeta$ para los pixeles que se encuentran en el borde de una línea, dados por la ec. (8.28), y los valores restantes pueden ser obtenidos del promedio ponderado de puntos vecinos.

En un segundo grupo de métodos se utiliza un patrón de referencia compuesto por puntos para determinar ambas componentes del campo de deformación. Éstos son los siguientes.

- **Refractometría con seguimiento de puntos.** En este método se determinan las coordenadas de los puntos dispuestos en forma regular en el patrón de referencia (cf. fig. 8.12). Esto se realiza calculando sus centroides de valores de intensidad relativos a un valor umbral local [103]. El desplazamiento de cada punto, $(\delta\xi, \delta\zeta)$, entre las imágenes con el medio no perturbado y perturbado entrega entonces el muestreo del campo de deformación.

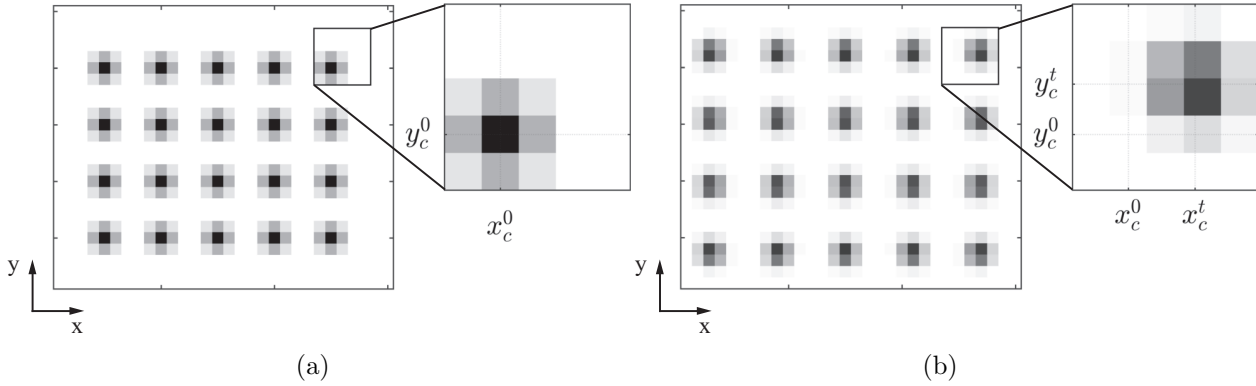


Figura 8.11: Refractometría con seguimiento de puntos. Se calculan los centroides (x_c^0, y_c^0) y (x_c^t, y_c^t) en las imágenes (a) I_0 y (b) I_t , con el medio no perturbado y perturbado, respectivamente. (c) El desplazamiento de cada punto $(\delta\xi, \delta\zeta) = (x_c^t, y_c^t) - (x_c^0, y_c^0)$ entrega el muestreo del campo de deformación.

- **Refractometría con reconocimiento de patrones.** Este método se basa en la técnica Particle Image Velocimetry (PIV) [102] que se utiliza en la medición de campos de velocidad de flujos alimentados por partículas trazadoras. En el presente caso, las partículas corresponden a una distribución aleatoria de puntos en el patrón de referencia

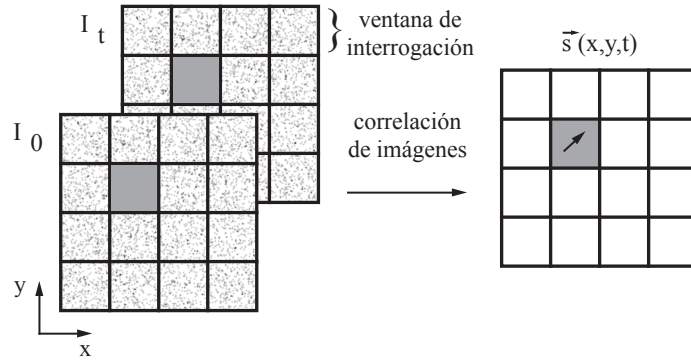


Figura 8.12: Método de reconocimiento de patrones. Se seleccionan ventanas de interrogación en las imágenes con el medio no perturbado y perturbado, I_0 y I_t , respectivamente. Un algoritmo de correlación entrega el desplazamiento entre ventanas y el muestreo del campo de deformación $\vec{s}(x, y, t)$.

que se desplazan por las variaciones de índice de refracción del medio. El procesamiento de imágenes en ambos métodos es similar, las imágenes se dividen en ventanas de interrogación y se determina su desplazamiento mediante un algoritmo de correlación.

Cada uno de los métodos mencionados posee sus ventajas y pueden ser útiles para una cierto tipo de aplicación. El método cualitativo entrega la visualización del fenómeno mediante un análisis rápido de la secuencia de imágenes. La refractometría de línea permite medir pequeños pequeños desplazamientos y obtener una resolución de ~ 0.02 pixels [103]. De acuerdo a esta referencia, la resolución espacial de la refractometría con seguimiento de puntos es menor, sin embargo permite medir ambas componentes del gradiente y registrar desplazamientos mayores. En refractometría con reconocimiento de patrones se encuentran las ventajas anteriores y la posibilidad de obtener una mayor resolución espacial. Su montaje experimental es más sencillo, ya que no requiere la alineación del patrón de referencia y para este último se pueden utilizar otros motivos aleatorios, por ejemplo, de *wavelet noise* que aumenta la resolución espacial [116].

Integración numérica de un campo de gradientes

Una vez determinado el campo de deformación del patrón de referencia se realiza la integración del campo de gradientes y el cálculo de la variable de interés. El problema de integración de gradientes en dos dimensiones se expresa comúnmente como un problema de algebra lineal dado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \quad (8.32)$$

donde (G_x, G_y) son las componentes del gradiente de temperatura $\nabla T = (G_x, G_y)$. Los métodos iterativos, a menos que sean extremadamente sofisticados, tienen problemas de convergencia y algoritmos alternativos encuentran en [117, 118]. El problema se encuentra sobre determinado y se resuelve minimizando el residuo mediante mínimos cuadrados [112].

8.3. Descripción del fenómeno de plumas térmicas

El fenómeno de plumas térmicas consiste en una región localizada de fluido con una distribución de temperatura mayor que la temperatura del medio que la rodea. Esta diferencia de temperatura implica que una pluma térmica posee una menor densidad y es más liviana que el fluido ambiente, por lo que presenta un movimiento ascendente impulsado por la fuerza de empuje. Las plumas térmicas se generan típicamente mediante una fuente de calor y se puede realizar una primera distinción en términos de la dependencia temporal de este suministro:

thermals: calor es inyectado en forma de un pulso corto.

starting plume: suministro repentino y luego sostenido.

steady plume: suministro constante.

Dentro de los primeros trabajos se encuentran los de Shlien, quien utilizó un pequeño electrodo como fuente de calor para estudiar distintos aspectos de *thermals* y plumas térmicas. Dentro de los aspectos abordados en los experimentos realizados por Shlien sobre estos flujos se encuentran: observación en ellos de anillos de vorticidad y desplazamiento en función del tiempo [3], medición de perfiles de temperatura [119] y velocidad [120], y transición desde un régimen laminar a uno turbulento [121]. En forma similar a convección de Rayleigh-Bénard, el transporte de calor por convección o advección es más eficiente que conducción sin flujo.

8.3.1. Ecuaciones del sistema

Las ecuaciones para este sistema, según las aproximaciones de Oberbeck-Boussinesq [4] son:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + g\alpha T \hat{z} \quad (8.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (8.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8.35)$$

con aceleración de gravedad g , viscosidad cinemática ν y vector unitario apuntando en la dirección vertical hacia arriba \hat{z} . Las condiciones de borde considerando un elemento calefactor que entrega una potencia P son:

$$\vec{u} = 0, \quad T = 0 \quad \text{en infinito.} \quad (8.36)$$

$$\vec{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{P}{4\pi r_{cs}^2 \kappa \rho C_p} \quad \text{en la superficie del calefactor} \quad (8.37)$$

donde C_p es calor específico del fluido.

Considerando un elemento calefactor cilíndrico de radio r_c y largo L , las escalas naturales para longitud, tiempo y temperatura son:

$$\text{longitud: } r_{cs} = \sqrt{\frac{r_c L}{2}} \quad \text{tiempo: } \tau = \frac{r_{cs}^2}{\kappa} \quad \text{temperatura: } \chi = \frac{P}{r_{cs} \kappa \rho C_p} \quad (8.38)$$

donde r_{cs} es el radio efectivo de una esfera de la misma área que el cilindro de radio r_c . Utilizando las variables anteriores se obtienen las ecuaciones del sistema [4]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + R_f T \hat{z} \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (8.40)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (8.41)$$

En la ecuación (8.39) $Pr = \nu/k$ es el número de Prandtl y R_f es un parámetro de control que se puede pensar como un número de Rayleigh de flujo, dado por:

$$R_f = \frac{g \alpha Pr_{cs}^2}{\kappa^3 \rho C_p} \quad (8.42)$$

La condición de borde en la superficie del calefactor:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \quad (8.43)$$

Otros parámetro de control importantes en la dinámica de plumas térmicas son el número de Grashof Gr_y y el número Rayleigh $Ra = Gr$ dados por:

$$Gr_y = \frac{g \alpha (T_w - T_\infty) y^3}{\nu^2} \quad Ra = Gr \cdot Pr \quad (8.44)$$

con T_w y T_∞ las temperatura de pared y del medio que la rodea, respectivamente.

8.3.2. Características del campo de temperatura

El patrón de convección típico de una pluma térmica, para el caso en que éstas se generan mediante un elemento calefactor cilíndrico, se encuentra constituido por las partes que se indican en el esquema en la figura 8.13. La zona en la parte superior de la pluma se denomina *cap* y en ella se forman dos estructuras denominadas lóbulos. Un tallo o corredor se extiende desde el *cap*, hasta la zona entorno al elemento calefactor cilíndrico, donde se forma una capa límite térmica. Esta capa límite térmica es de un espesor $\delta_T(\gamma)$, el cual varía según el ángulo γ definido desde la posición inferior del cilindro, como se indica en la figura 8.13 (b). Este espesor de capa límite es más delgado en la parte inferior del cilindro, zona en la cual ocurre una transferencia de calor máxima, como se menciona en [122] y en los artículos citados por dicha referencia.

Leyes de escalamiento

De acuerdo a Moses [4] las plumas térmicas siguen las leyes de escalamiento. De acuerdo a esta referencia, las plumas se mueven a una velocidad constante, que depende de la potencia suministrada P y los parámetros del fluido, pero que es independiente del tamaño del elemento calefactor. En cuanto a la forma de la pluma térmica, Batchelor propone un perfil parabólico para el tamaño del tallo. Mientras que de acuerdo a Moses, la forma del *cap* puede ser descrita por un perfil de Rankine.

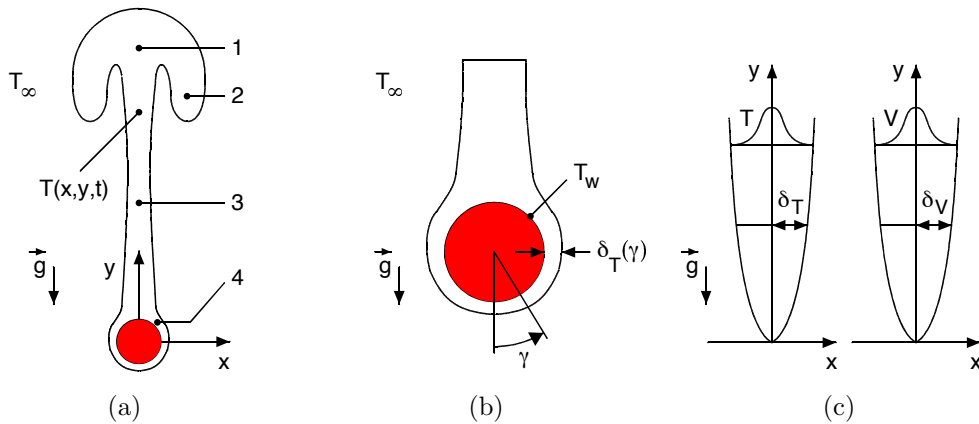


Figura 8.13: Esquema de una pluma térmica generada por un elemento calefactor cilíndrico. (a) La distribución de temperatura de la pluma, $T(x, y, t)$, es mayor a la temperatura del fluido T_∞ y se desplaza verticalmente. La zona que superior de la pluma se denomina *cap* y en ella se encuentran dos lóbulos. Un tallo o corredor se extiende desde el *cap* hasta la zona entorno al elemento calefactor, donde se forma una capa límite térmica. (b) Capa límite entorno a un elemento calefactor cilíndrico. Esta capa límite térmica posee un espesor δ_T , el cual varía según el ángulo γ , siendo más delgado en la parte inferior del cilindro, zona en la cual ocurre una transferencia de calor máxima. (c) Esquema del desarrollo de la capa límite térmica δ_T y de velocidad δ_V a lo largo del tallo de una pluma térmica.

Regímenes de flujo

Los parámetros de control Ra y Pr permiten caracterizar distintos regímenes de flujo para plumas térmicas. De acuerdo a las simulaciones numéricas realizadas por Hier [123], éstos se pueden catalogar en 4 grupos que se indican en la tabla 8.3.2. Los espesores de capa límite, δ_T y δ_V para ellos. En el caso no difusivo no viscoso, por ejemplo, los términos difusivos y viscosos son pequeños, resultando en ecuaciones tipo euler, por lo que se esperan capas límite térmica y de velocidad delgadas. En la figura 8.14.

régimen	δ_T	régimen	δ_V
Difusivo	gruesa	viscoso	gruesa
No difusivo	delgada	no viscoso	delgada

Tabla 8.1: Caracterización de capas límites de temperatura δ_T y velocidad δ_V

Estabilidad y transición

El fenómeno de transición en plumas térmicas ha sido estudiado por distintos autores para el caso de una fuente de calor en forma de línea. Pera y Gebhart [7] obtuvieron curvas de estabilidad en términos del número de Grashof modificado G_y , considerando aire como fluido. Estas curvas corresponden al modo asimétrico, el cual es el modo más inestable para el flujo base. A su vez consideraron perturbaciones bidimensionales, las cuales se amplifican, para flujos de capa límite, en forma más temprana que las perturbaciones tridimensionales. La

predominancia del asimétrico fue comprobada experimentalmente, observando en visualizaciones de flujo, la respuesta ante perturbaciones sinusoidales introducidas mediante una cinta vibrante. Una de las visualización realizadas por Pera y Gebhart mediante un interferómetro Mach-Zender se muestra en la figura 8.15 (b). En esta figura se observa que el flujo responde ante las perturbaciones introducidas y que estas son amplificadas aguas abajo, lo cual ocurre de acuerdo a los autores, en un cierto rango de frecuencias de forzamiento. Este fenómeno se puede observar en estelas [8, 9], las cuales son también flujos de abiertos se desarrollan espacialmente y en las cuales se pueden encontrar efectos no-lineales. Al introducir frecuencias externas en plumas térmicas es posible encontrar también otros modos de inestabilidad, por ejemplo el modo axisimétrico (*varicose*) observado por Elicer-Cortés, utilizando *scattering* de ultrasonido [124] y visualizaciones mediante Schlieren, registrando las imágenes mediante una cámara digital [125].

En el caso de plumas térmicas sin perturbaciones externas ocurre, en un rango del número de Grashof suficientemente alto, la transición a un régimen turbulento, la cual fue observada por Bill y Gebhart [126] en aire para $6.4 \cdot 10^6 < Gr_y < 2.95 \cdot 10^7$. Al terminar esta transición se encuentra una cambio en la dependencia de la temperatura central con respecto al número de Grashof Gr_y . Cabe mencionar que en el régimen anterior a la transición se ha observado experimentalmente una deficiencia casi uniforme de 15 % en la temperatura central con respecto a la teoría laminar [126], sin embargo esta no fue observada por Fujii [127], en agua y *spindle oil*, para $Gr_y < 2.3 \cdot 10^4$.

Efectos del confinamiento

En los trabajos mencionados anteriormente con respecto a la obtención de soluciones autosimilares se considera un dominio infinito, sin embargo esta condición no siempre se cumple

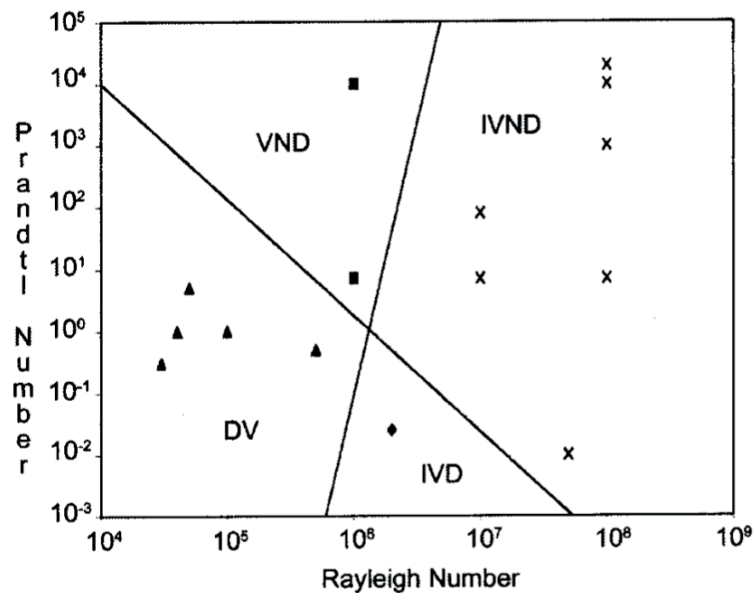


Figura 8.14: Regímenes de flujo en plumas térmicas de acuerdo a las simulaciones numéricas de Hier [123]: Difusivo viscoso (DV); Difusivo no viscoso (DNDV); No difusivo viscoso (NDV) y No difusivo no viscoso (NDNDV).

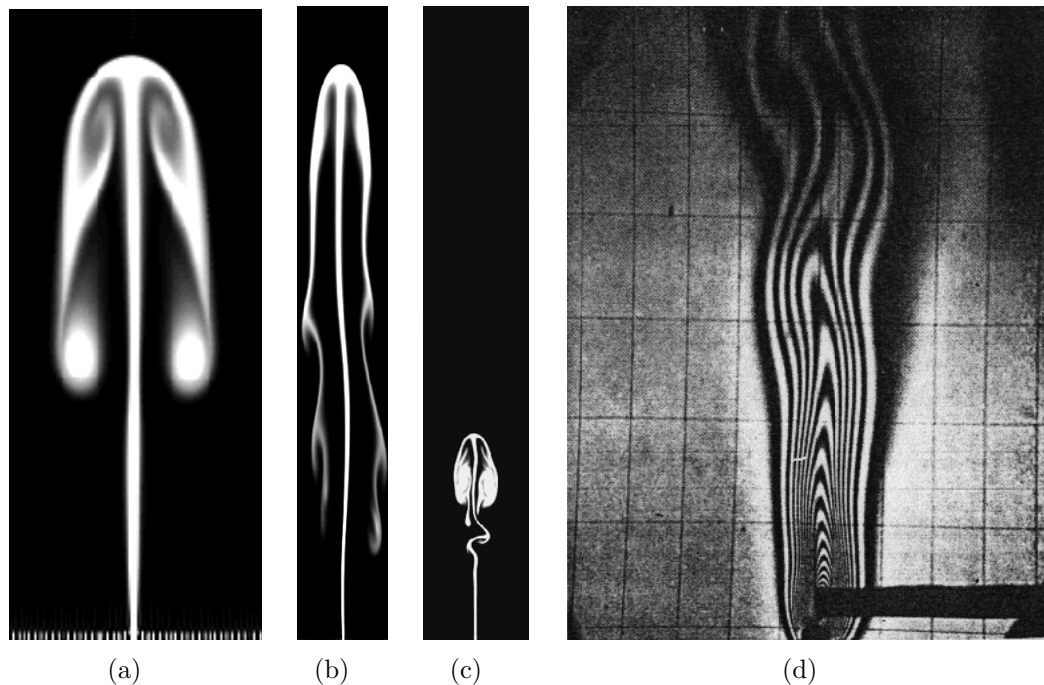


Figura 8.15: Inestabilidades en plumas térmicas. (a-c) Simulaciones numéricas de plumas térmicas en régimen NDI. Adaptado de Hier [123]. (d) Visualización de una pluma térmica en aire ($Pr = 0.7$) mediante un interferómetro Mach-Zender. La pluma se perturbada sinusoidalmente con una lámina vibradora. Se observa que el flujo responde ante perturbaciones asimétricas introducidas y que estas son amplificadas aguas abajo. Adaptado de Pera y Gebhart [7]

en condiciones experimentales. De acuerdo a Lauriat [128], cuando el fluido se encuentra en un recipiente cerrado se induce un flujo de recirculación a lo largo de las paredes laterales y *entrainment* del fluido que se encuentra debajo de la fuente de calor. Según sus simulaciones numéricas, para fuentes lineales de calor y cilindros, para un dominio cerrado se pueden encontrar distintas rutas al caos de acuerdo a la razón de aspecto del recipiente y la profundidad a la que se encuentra la fuente de calor. En dominios angostos, las capas de fluido que suben y bajan producen esfuerzos de corte, los cuales pueden tener un efecto desestabilizante. La presencia de esfuerzos de corte también se observa en convección de Rayleigh-Bénard con inclinación.

Capítulo 9

Implementación de Synthetic Schlieren orientado a plumas térmicas

Contenido

9.1 Synthetic Schlieren aplicado a plumas térmicas	134
9.1.1 Adquisición y procesamiento de imágenes	134
9.1.2 Requerimientos para la implementación de algoritmos	136
9.2 Descripción de los algoritmos de correlación	138
9.2.1 Algoritmos de correlación directos	138
9.2.2 Algoritmos de correlación iterativos	142
9.3 Implementación de un algoritmo de correlación	144
9.3.1 Descripción del algoritmo	144
9.3.2 Ensayos del algoritmo	146
9.4 Estudio experimental de una pluma térmica en una cavidad	154
9.4.1 Dispositivo experimental para la generación de plumas térmicas .	154
9.4.2 Sistema de control del elemento calefactor	156
9.4.3 Implementación de Synthetic Schlieren	162
9.4.4 Medición de potencia y del campo de temperatura	166
9.5 Conclusiones	171

El presente capítulo trata sobre la implementación de la técnica óptica Synthetic Schlieren orientada al estudio de plumas térmicas. El objetivo consiste en reconstruir la evolución espacio-temporal del campo de temperatura del fenómeno generado por una fuente extendida. Esta configuración proporciona un campo de temperatura bidimensional cuya reconstrucción es posible del registro de imágenes desde un punto de observación. El paso principal consiste en la medición de la deformación de un patrón de referencia generada por la evolución de la pluma térmica. Para medir esta deformación se requiere de una elevada resolución espacial lo que motiva la implementación un algoritmo de correlación iterativo con deformación de imágenes. Luego de discutir la implementación de dicho algoritmo, se presenta una aplicación experimental de la técnica pluma térmica en una cavidad generada bajo control retroalimentado de temperatura.

9.1. Synthetic Schlieren aplicado a plumas térmicas

En la presente sección se revisan los conceptos involucrados en la aplicación de la técnica Synthetic Schlieren al fenómeno de plumas térmicas. Primero se discute la adquisición y procesamiento de imágenes y luego los requerimientos para la implementación de los algoritmos involucrados en dicho procesamiento.

9.1.1. Adquisición y procesamiento de imágenes

La adquisición de imágenes se realiza mediante un arreglo óptico de Synthetic Schlieren (cf. 8.2.1) que se muestra en la figura 9.1. Este consiste en una cámara digital que observa un patrón de referencia a través de una sección de prueba que contiene al medio fluido. Una fuente de calor extendida genera el fenómeno térmico cuya evolución perturba el campo de índice de refracción, $n(x, y, t)$, del medio. La evolución genera la deformación aparente del patrón de referencia que se registra en una secuencia de imágenes donde se distinguen los siguientes estados del medio:

- **Estado no perturbado.** En este estado inicial, el medio tiene distribuciones homogéneas del índice de refracción y temperatura dadas, respectivamente, por:

$$n(x, y, t = 0) = n_0 \quad \text{y} \quad T(x, y, t = 0) = T_0 \quad (9.1)$$

- **Estado perturbado.** Estado en el que las distribuciones de índice de refracción y temperatura del medio evolucionan, respectivamente, de acuerdo a:

$$n(x, y, t) = n_0 + n'(x, y, t) \quad \text{y} \quad T(x, y, t) = T_0 + T'(x, y, t) \quad (9.2)$$

con $n'(x, y, t)$ y $T'(x, y, t)$ las perturbaciones de índice de refracción y temperatura, respectivamente.

En la secuencia, la primera imagen, I_0 , y las imágenes siguientes, I_t con $t = 1, \dots, N$, corresponden a los estados no perturbado y perturbado del medio, respectivamente.

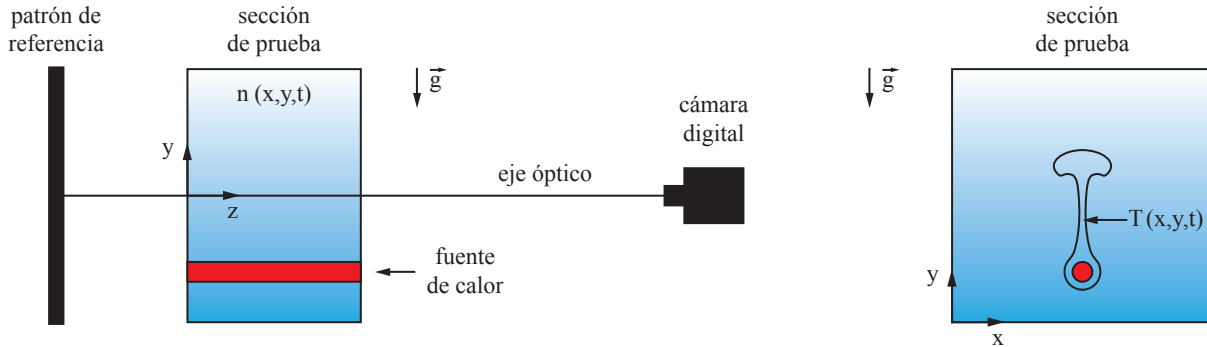


Figura 9.1: Arreglo óptico para el estudio de plumas térmicas. Una cámara digital observa el patrón de referencia a través de la sección de prueba. Una fuente de calor cilíndrica genera una pluma térmica con distribución de temperatura bidimensional $T(x, y, t)$. Su evolución perturba la distribución de índice de refracción del medio, $n(x, y, t)$, y genera la distorsión aparente del patrón.

Relación entre la deformación de imágenes y gradiente de temperatura

La interpretación del arreglo óptico permite relacionar la deformación del patrón de referencia con el gradiente del índice de refracción del medio (cf. 8.2.1, ec. (8.26)). En el presente caso se utiliza esta relación escrita en términos del gradiente de la perturbación de temperatura:

$$\nabla T'(x, y, t) = \frac{1}{C} \left(\frac{dn}{dT} \right)^{-1} \vec{s}(x, y, t) \quad (9.3)$$

con C una constante que depende de los parámetros del arreglo, dn/dT la variación del índice de refracción de medio con la temperatura y $\vec{s} = (s_x, s_y, t)$ el campo de deformación entre las imágenes adquiridas con el medio no perturbado y perturbado, I_0 e I_t , respectivamente.

Metodología de procesamiento de imágenes

Para recuperar la perturbación del campo de temperatura se resuelve la ec. (9.3) mediante los pasos que se indican en la figura 9.2 y que son los siguientes:

1. **Cálculo del campo de deformación $\vec{s}(x, y, t)$.** Se calcula mediante un algoritmo de correlación la deformación entre las imágenes con el medio no perturbado y perturbado.
2. **Cálculo de la perturbación del campo de temperatura $T'(x, y, t)$.** Este campo se calcula integrando las componentes espaciales del campo de deformación. El campo obtenido se multiplica por las constantes asociadas al arreglo óptico y a la variación entre el índice de refracción y temperatura del medio.

El proceso de integración entrega un término constante que se ajusta en toda la secuencia tomando como referencia una región de las imágenes no perturbada por el fenómeno. Si se cuenta con la medición de la temperatura del medio no perturbado, T_0 , entonces es posible reconstruir el campo completo de temperatura, $T(x, y, t)$, del medio.

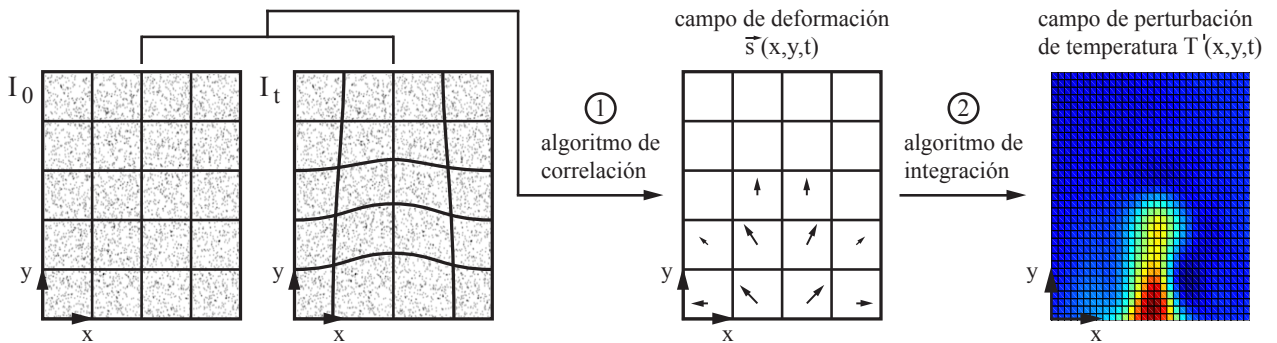


Figura 9.2: Metodología de procesamiento de imágenes. (1) Se calcula mediante un algoritmo de correlación el campo de deformación, $\vec{s}(x, y, t)$, entre imágenes adquiridas con el medio no perturbado y perturbado, I_0 y I_t , respectivamente. (2) Se obtiene el campo de perturbación de temperatura, $T'(x, y, t)$, integrando el campo de deformación.

9.1.2. Requerimientos para la implementación de algoritmos

En la implementación de los algoritmos de procesamiento de imágenes se deben considerar los requerimientos que presenta el fenómeno de plumas térmicas y que son los siguientes.

Resolución espacial del algoritmo de correlación

El principal requerimiento para el algoritmo de correlación consiste en que este debe ser capaz de medir la deformación del patrón de referencia con una elevada resolución espacial. Esto se debe a:

- La baja resolución de las imágenes en la aplicación experimental de la técnica (cf. 9.4).
- Las características del campo de deformación que genera una pluma térmica.

Para determinar las características de la deformación se realizó la simulación numérica de una pluma térmica laminar en agua, bajo condiciones similares a las de la experiencia, según se describe en el Anexo E. En la simulación, el fenómeno se genera en una cavidad de dimensiones $17.5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ (alto \times ancho) mediante un elemento calefactor cilíndrico de diámetro 0.5 cm . En la figura 9.3 se muestra la evolución del campo de temperatura del fenómeno que se extiende en una pequeña región de la cavidad. Sus escalas espaciales más pequeñas corresponden a los espesores de la capa límite térmica debajo del calefactor y en el tallo que son del orden de 2.5 mm .

El gradiente del campo de temperatura corresponde, salvo una constante de proporcionalidad, a la deformación que genera el fenómeno (cf. ec. (9.3)). Las componentes del gradiente, proporcionales a la deformación en cada dirección, se muestran en la figura 9.4. Éstas indican que, en forma similar al campo de temperatura, la deformación se encuentra localizada en una pequeña región y que presenta cambios abruptos en ambas direcciones. La aplicación de

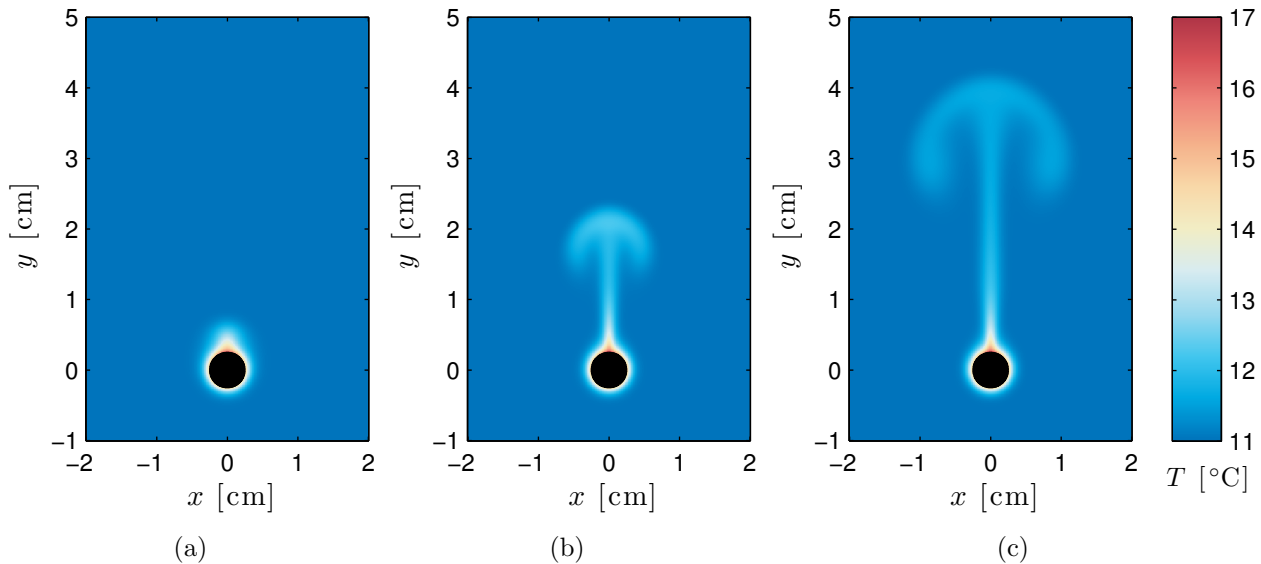


Figura 9.3: Simulación numérica de la evolución de una pluma térmica laminar en una cavidad. Se muestra el campo de temperatura, $T(x, y, t)$, para los instantes: (a) 19 s (b) 37 s y (c) 55 s.

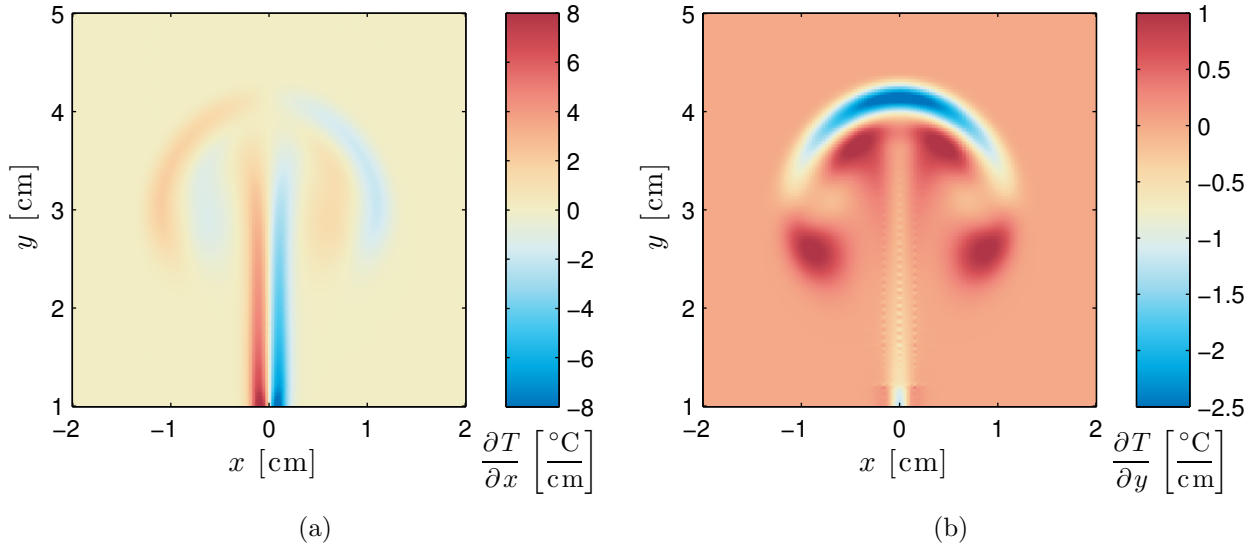


Figura 9.4: Gradiente del campo de temperatura una pluma térmica. Se muestran las componentes (a) $\partial T(x, y)/\partial x$ y (b) $\partial T(x, y)/\partial y$, las cuales son proporcionales a la deformación en la dirección horizontal y vertical, respectivamente. Ambas figuras corresponden a la región sobre el elemento calefactor en la figura 9.3 (c).

un algoritmo de correlación tradicional bajo estas condiciones entrega un pobre desempeño. Los gradientes de deformación elevados generan errores considerables y la deformación en zonas reducidas se pierde debido al comportamiento de filtro pasa baja de estos algoritmos [129]. Por estos motivos, en el presente trabajo se implementó de un algoritmo de correlación más elaborado, del tipo iterativo con deformación de imágenes (cf. 9.2, 9.3).

Condiciones de borde del algoritmo de integración

El uso de un algoritmo de integración de gradientes permite la reconstrucción del campo de temperatura de una pluma térmica a partir de ambas componentes del campo de deformación. Estos algoritmos requieren generalmente que las condiciones de borde sean de los tipos Dirichlet o Neumann. Ambas condiciones se cumplen en una configuración donde el elemento calefactor se encuentra separado de las paredes del recipiente, i.e. similar a la figura 9.3. En este caso la presencia del elemento calefactor puede generar problemas al algoritmo de correlación. Estos se deben a que la presencia de objetos requiere de un tratamiento especial y a la gran magnitud del gradiente de deformación que se genera en la capa límite térmica entorno a este elemento.

Para evitar los problemas anteriores resulta conveniente estudiar una región sobre el calefactor similar a la figura 9.4. En este último caso las condiciones de Dirichlet o Neumann no se cumplen en la región pequeña del borde inferior que intersecta el tallo de la pluma. Esto no presenta problemas para el algoritmo de integración utilizado en el presente trabajo, según se comprobó mediante la simulación numérica discutida previamente (cf. Anexo E).

9.2. Descripción de los algoritmos de correlación

Los algoritmos de correlación se basan en el producto de correlación cruzada, un método estadístico que permite determinar la similitud entre dos señales en función de un retardo espacial o temporal. Estos algoritmos tienen diversas aplicaciones en el tratamiento de señales y en el ámbito de la técnica Synthetic Schlieren son el método preferido de medición de la deformación del patrón de referencia. El método de medición se adopta de la técnica de visualización Particle Image Velocimetry (PIV) [102] en la cual se determina el campo de velocidad de un flujo que contiene partículas trazadoras. En forma similar, en Synthetic Schlieren se realiza en muestro de la deformación mediante una distribución aleatoria de partículas que constituyen el motivo del patrón de referencia.

En PIV se encuentran diversos tipos de algoritmos correlación que, en principio, se pueden aplicar a la técnica Synthetic Schlieren. De acuerdo con el requerimiento de una elevada resolución espacial que presenta el fenómeno de plumas térmicas, el interés recae sobre los algoritmos de correlación iterativos. En ellos se utilizan los conceptos que se aplican en los algoritmos directos y que se discuten a continuación.

9.2.1. Algoritmos de correlación directos

Los algoritmos de correlación directos, i.e. no iterativos, permiten evaluar la deformación en una secuencia de imágenes de Synthetic Schlieren mediante los pasos que se indican en la figura 9.5. Estos pasos son los siguientes.

1. Se seleccionan de una misma ubicación en el par imágenes con el medio no perturbado y perturbado, I_0 e I_t , las ventanas de interrogación f y g , respectivamente.
2. Se calcula la matriz de producto de correlación, R_{fg} , entre ambas ventanas de interrogación dada por:

$$R_{fg}(x, y) = f \star g = \sum_{i=-W_f}^{W_f} \sum_{j=-W_g}^{W_g} f(i-x, j-y)g(i, j) \quad (9.4)$$

con W_f y W_g las dimensiones lineales de las matrices f y g , respectivamente.

3. Se calcula el desfase entre ambas ventanas, $(\delta x, \delta y)$, dado por:

$$(\delta x, \delta y) = (x_m, y_m) - (x_0, y_0) \quad (9.5)$$

con (x_m, y_m) y (x_0, y_0) las coordenadas de los máximos de la matriz de correlación, R_{fg} , en presencia y ausencia del desplazamiento, respectivamente. Este último se determina sólo una vez a partir de producto de autocorrelación de una de las ventanas, R_{ff} o R_{gg} .

Cabe mencionar que en la técnica PIV, de la cual se adapta la metodología anterior, las ventanas de interrogación f y g se encuentran en dos cuadros consecutivos. Esto permite determinar su desplazamiento y posteriormente el campo de velocidad.

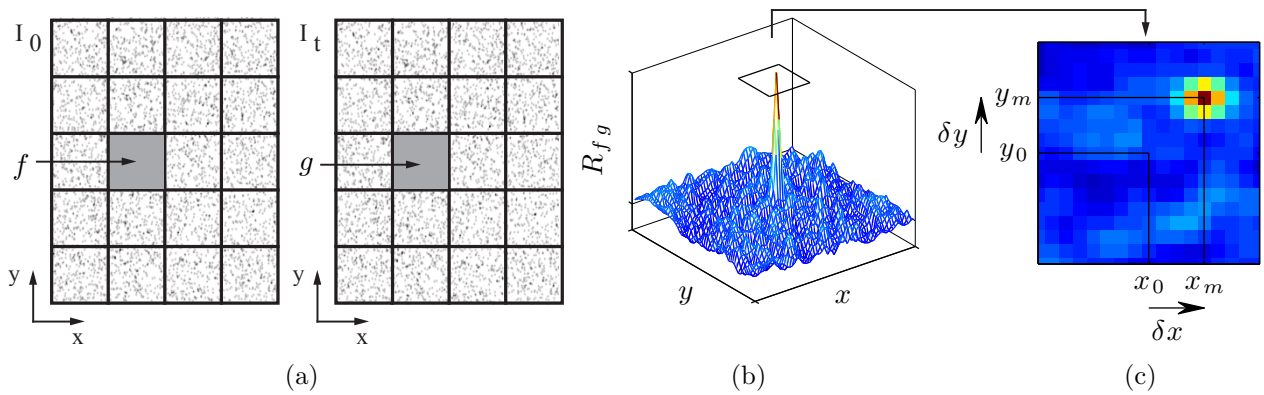


Figura 9.5: Cálculo del correlación mediante un algoritmo de correlación directo. (a) Ventanas de interrogación f y g en las imágenes I_0 e I_t , respectivamente. (b) Matriz del producto de correlación R_{fg} . (c) Desplazamiento medido $(\delta x, \delta y) = (x_m, y_m) - (x_0, y_0)$, con (x_m, y_m) y (x_0, y_0) las coordenadas del máximo de la matriz de correlación, R_{fg} , en presencia y ausencia del desplazamiento, respectivamente.

Evaluación del producto de correlación en el espacio de Fourier

El cálculo del producto de correlación mediante la ec. (9.4) involucra un alto costo computacional, por lo que este se realiza típicamente en el espacio de Fourier de acuerdo al teorema de correlación [102]. En este caso, el producto de correlación entre dos funciones equivale a la multiplicación compleja conjugada de sus transformadas de Fourier, es decir:

$$R_{fg}(x, y) = |\mathcal{F}^{-1}\{(\mathcal{F}\{f\})^* \cdot \mathcal{F}\{g\}\}| \quad (9.6)$$

con \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} la transformada y transformada inversa de Fourier, respectivamente, y el asterisco indica el complejo conjugado. La transformada de Fourier es, por definición, una integral sobre un dominio infinito, sin embargo la imágenes tienen dimensiones finitas. El cálculo se realiza bajo el supuesto de que los datos son periódicos, lo que genera errores sistemáticos o el posible aumento de la razón señal ruido en la medición del desplazamiento [102]. Para tratar estos problemas se calcula el producto de correlación, $R_{f'g'}$, con las ventanas de peso f' y g' acondicionadas según los métodos que se indican en la figura 9.6 y que son los siguientes:

- **Zero padding.** Consiste en la extensión con ceros de ambas ventanas de interrogación a un tamaño cuatro veces mayor al original. De esta manera, la correlación cruzada en el espacio de Fourier equivale a la correlación directa.
- **Ventanas de peso.** Consiste en ponderar las ventanas de interrogación por una función de peso lo que permite remover los efectos asociados a la discontinuidad en los bordes.

La desventaja del uso de *zero padding* es que la señal de fondo es típicamente no nula, lo que genera una discontinuidad en la imágenes y contamina el espectro de los datos con ruido. El método de ventanas de peso es ampliamente utilizado en algoritmos de correlación, sin embargo presenta las desventajas de una ponderación no uniforme de los datos y errores de sistemáticos en el cálculo del vector de desplazamiento. Para aminorar los errores sistemáticos se utiliza un límite conservador de máximo desplazamiento de $1/4$ de ancho de la ventana de interrogación.

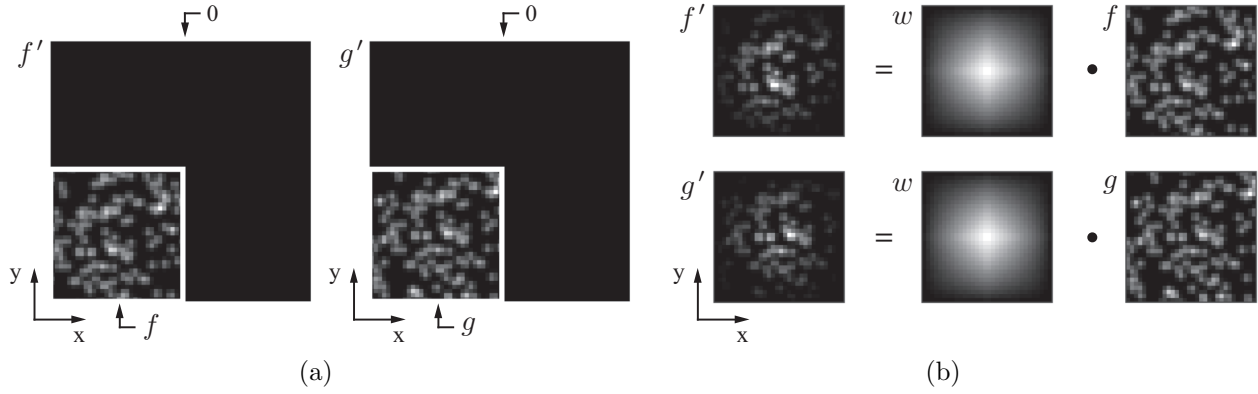


Figura 9.6: Acondicionamiento de ventanas de interrogación, f y g , para el cálculo del producto de correlación, $R_{f'g'}$, en el espacio de Fourier. Se muestran las ventanas acondicionadas, f' y g' , mediante: (a) extensión con ceros y (b) ponderación por una ventana de peso w .

Coefficiente de correlación

El producto de correlación se ve generalmente afectado por variaciones en la concentración e intensidad de luz de las partículas o de la intensidad de fondo, por lo que se resulta conveniente su normalización. Existen distintos métodos de normalización, entre ellos el coeficiente de correlación que se puede utilizar en algoritmos directos e iterativos, dado por [130]:

$$\phi_{fg}(l, m) = \frac{\sum_{i,j}^W w^2(i, j)(f(i, j) - \mu_f)(g(i + l, j + m) - \mu_g)}{\left(\sum_{i,j}^W w^2(i, j)(f(i, j) - \mu_f)^2 \sum_{i,j}^W w^2(i, j)(g(i + l, j + m) - \mu_g)^2\right)^{1/2}} \quad (9.7)$$

con μ_f y μ_g la media en las ventanas de interrogación, f y g , respectivamente, W la dimensión lineal de ambas ventanas de interrogación y w^2 una ventana de peso. El coeficiente de correlación se puede calcular con la ayuda de la transformada rápida de Fourier (FFT) de acuerdo a:

$$\phi_{fg}(l, m) = \frac{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[w^2 f_m]\mathcal{F}[g_m]]}{\sqrt{S_f \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[w^2]\mathcal{F}[g_m]]}} \quad \text{con} \quad S_f = \sum_{i,j}^{2W} w^2(i, j) f_m^2(i, j) \quad (9.8)$$

donde f_m y g_m son las ventanas de interrogación f y g , menos sus respectivas medias, μ_f y μ_g , y luego extendidas con ceros. En ambos métodos, si la ventana de peso no es constante el coeficiente de correlación no es simétrico, i.e. $\phi_{fg} \neq \phi_{gf}$, lo que afecta el desempeño de algoritmos iterativos. En este caso, el coeficiente se calcular como el promedio entre ϕ_{fg} y ϕ_{gf} , procedimiento que permite reducir los errores y aumentar la razón señal-ruido [130, 131].

Estimadores subpixel

Los estimadores subpixel permiten mejorar la resolución del sensor de medición que se encuentra discretizada en unidades de pixel. Entre las alternativas más comunes se encuentran: Levenberg-Marquardt, cálculo de centroides e interpolación Gaussiana [102]. Esta última es

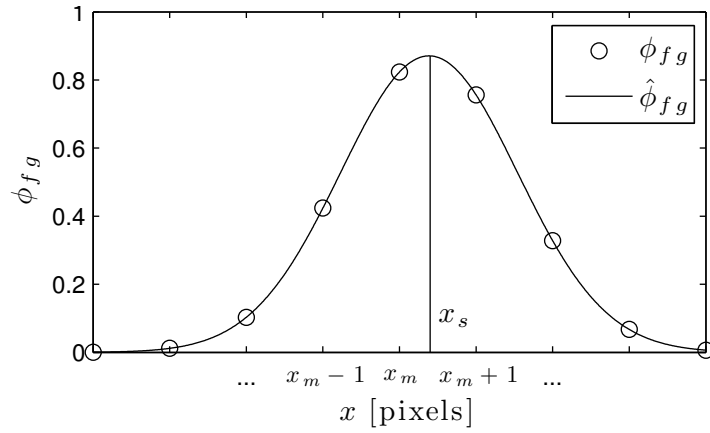


Figura 9.7: Cálculo de la ubicación del máximo de correlación mediante un estimador Gaussiano. Se muestran las coordenadas x_s y x_m del máximo del coeficiente de correlación, ϕ_{fg} , en unidades discretas y subpixel, respectivamente, y el ajuste de la forma $\hat{\phi}_{fg} = A \exp(-(x_m - x)^2/B)$.

la más utilizada y se basa en que tanto la intensidad de luz emitida por una partícula como su correlación se asemejan a una curva Gaussiana. En el método de interpolación Gaussiana (cf. fig. 9.5) las coordenadas del máximo de correlación, (x_s, y_s) , se obtienen de acuerdo a:

$$x_s = x_m + \frac{\ln \phi_{fg}(x_m - 1, y_m) - \ln \phi_{fg}(x_m + 1, y_m)}{2 \ln \phi_{fg}(x_m - 1, y_m) - 4 \ln \phi_{fg}(x_m, y_m) + 2 \ln \phi_{fg}(x_m + 1, y_m)}$$

$$y_s = y_m + \frac{\ln \phi_{fg}(x_m, y_m - 1) - \ln \phi_{fg}(x_m, y_m + 1)}{2 \ln \phi_{fg}(x_m, y_m - 1) - 4 \ln \phi_{fg}(x_m, y_m) + 2 \ln \phi_{fg}(x_m, y_m + 1)} \quad (9.9)$$

con (x_m, y_m) la posición discreta del máximo de correlación y donde el coeficiente de correlación, ϕ_{fg} , se puede reemplazar otras formas del producto de correlación.

Límites de resolución espacial

El procedimiento descrito hasta el momento permite obtener una resolución subpixel, sin embargo ésta se encuentra limitada por el muestreo del campo de deformación que realizan: las partículas distribuidas aleatoriamente en el patrón de referencia y las ventanas de interrogación. El teorema de muestreo establece que no se puede reconstruir la información a frecuencias mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo [79]. Por lo tanto, ambos tipos de muestreo tienen asociada una longitud de onda mínima que es posible reconstruir, λ_{min} , dada por [132]:

- Muestreo por parte de las partículas. En este caso se tiene $\lambda_{min} > 2\delta_p$, con $\delta_p \sim 2\sqrt{1/(\pi c_p)}$ la distancia media entre las partículas y c_p el número de partículas por pixel.
- Muestreo por parte de las ventanas de interrogación. En este caso se tiene $\lambda_{min} > 2\Delta$, con Δ el espaciado de malla en la que se evalúa el campo de deformación.

Si los límites no se cumplen ocurre el fenómeno de *aliasing* y para aproximarse a ellos se requiere en la práctica de algoritmos iterativos, los cuales se discuten en la próxima sección.

9.2.2. Algoritmos de correlación iterativos

En los presentes algoritmos, el proceso de correlación se realiza en forma iterativa con el objetivo de aumentar la precisión y resolución espacial en la medición de un campo de deformación. Las variantes principales de estos algoritmos se discuten a continuación.

Algoritmos con desplazamiento de ventanas de interrogación

El desplazamiento de las ventanas de interrogación se realiza, en forma discreta o continua, para que se éstas se encuentren próximas a la ubicación real de las partículas [133]. Para obtener una mayor reducción de los errores asociados al proceso de correlación, el desplazamiento se realiza en un esquema de diferencias centrales. En este método (cf. fig. 9.8), la nueva ubicación de un par de ventanas f y g en las imágenes I_0 e I_t , respectivamente, está dada por:

$$f^k = f(\vec{x} - \delta\vec{x}^{k-1}/2) \quad \text{y} \quad g^k = g(\vec{x} + \delta\vec{x}^{k-1}/2) \quad (9.10)$$

con $\delta\vec{x}^{k-1}$ el desplazamiento medido en la iteración anterior ($k-1$). El desplazamiento en cada iteración, $\delta\vec{x}^k$, se determina mediante un método estimador corrector calculando:

$$\delta\vec{x}^k = \delta\vec{x}^{k-1} + \delta\vec{x}_c^k \quad (9.11)$$

donde el estimador corresponde al desplazamiento medido previamente, $\delta\vec{x}^{k-1}$, y se corrige por el resultado de proceso de correlación, $\delta\vec{x}_c^k$, de la presente iteración. El corrector disminuye progresivamente, mientras que el estimador se aproxima al desplazamiento real de las partículas. El procedimiento anterior reduce el error de medición en forma significativa cuando éste es menor a 0.5 pixel y donde escala proporcional al desplazamiento [102].

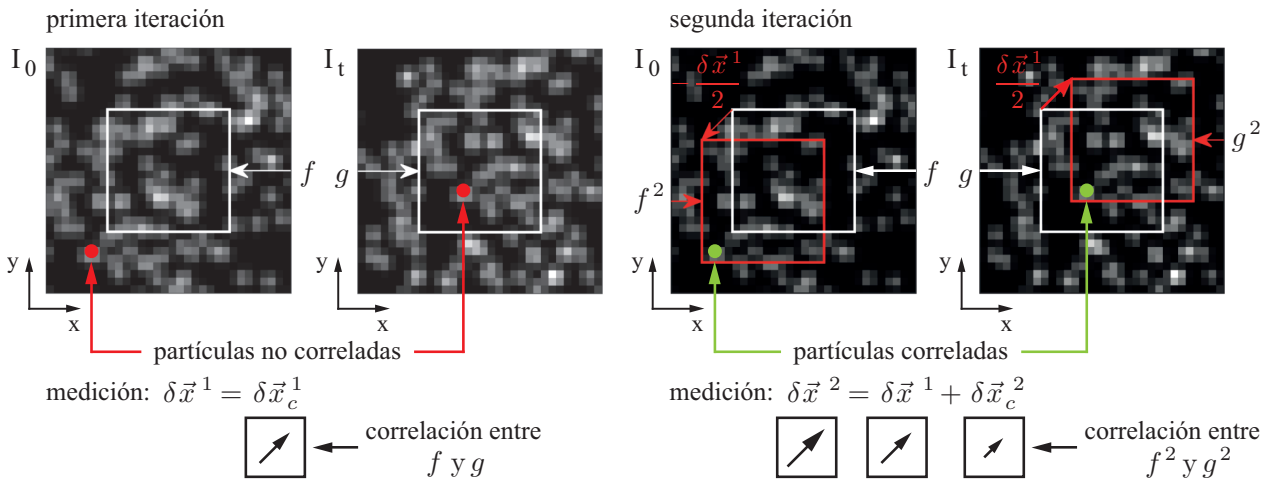


Figura 9.8: Principio de un algoritmo de correlación con desplazamiento de ventanas de interrogación. En la primera iteración, se mide un desplazamiento $\delta\vec{x}^1$ de la correlación entre las ventanas f y g . En la segunda iteración, las ventanas f y g se desplazan en un esquema de diferencias centrales en $\pm\delta\vec{x}^1/2$. El desplazamiento medido es $\delta\vec{x}^2 = \delta\vec{x}^1 + \delta\vec{x}_c^2$, con $\delta\vec{x}_c^2$ el desfase entre las ventanas desplazadas.

Algoritmos con deformación de imágenes

En los algoritmos discutidos previamente se encuentra el supuesto de que las partículas se desplazan de manera uniforme en las ventanas de interrogación. Esto genera la pérdida de correlación y una alta incerteza en la medición de desplazamientos con gradientes elevados [102]. En los presentes algoritmos se realiza la deformación de imágenes, lo que corrige este supuesto y permite obtener una medición más robusta y exacta en imágenes con gradientes de deformación.

A diferencia de los algoritmos iterativos anteriores, las ventanas de interrogación se disponen en una malla regular sobre las imágenes que se deforman en cada iteración (cf. fig. 9.9). El esquema preferido para realizar esta deformación es el de diferencias centrales. En este método, la deformación de un par de imágenes, I_0 e I_t , está dada por:

$$I_0^k = I_0 \left(\vec{x} - \vec{s}_p^{k-1}/2 \right) \quad \text{y} \quad I_t^k = I_t \left(\vec{x} + \vec{s}_p^{k-1}/2 \right) \quad (9.12)$$

donde \vec{s}_p^{k-1} es el campo de deformación medido en la iteración anterior ($k-1$) e interpolado a la dimensión de las imágenes. Para obtener el campo de deformación en cada iteración, \vec{s}^k , se utiliza un método estimador corrector similar al descrito previamente. En él se calcula:

$$\vec{s}^k = \vec{s}^{k-1} + \vec{s}_c^k \quad (9.13)$$

con \vec{s}^{k-1} el campo de deformación estimado en la iteración anterior y que se corrige por el campo obtenido en el proceso de correlación, \vec{s}_c^k , de la presente iteración. El proceso iterativo tiende a ser inestable y se puede estabilizar mediante un filtro pasa bajos [134, 135]. El uso de ventanas de peso en el proceso de correlación y en la actualización del desplazamiento (cf. ec. (9.13)) permite estabilizar el algoritmo y mejorar la resolución espacial.

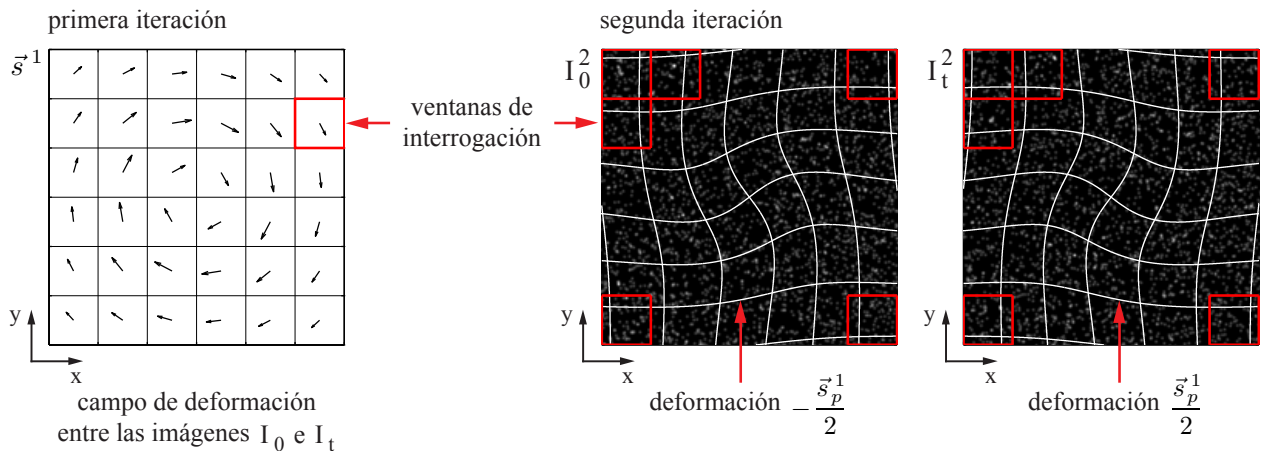


Figura 9.9: Principio de un algoritmo de correlación con deformación de imágenes. Las ventanas de interrogación se disponen en una malla regular y en la primera iteración se mide un campo de deformación, \vec{s}^1 , entre las imágenes I_0 e I_t . En la segunda iteración, las imágenes se deforman en un esquema de diferencias centrales por $\pm \vec{s}_p^1/2$, con \vec{s}_p^1 la interpolación de \vec{s}^1 al tamaño de las imágenes.

9.3. Implementación de un algoritmo de correlación

En la presente sección se describe la implementación de un algoritmo de correlación cuyo objetivo es medir la deformación de un patrón de referencia con una elevada resolución espacial. Esta característica permite a la presente implementación de la técnica Synthetic Schlieren la reconstrucción de plumas térmicas y los detalles de su campo de temperatura. El algoritmo se implementó como un software independiente y se caracterizó, en términos de errores y respuesta en frecuencia, mediante ensayos con imágenes artificiales.

9.3.1. Descripción del algoritmo

El algoritmo es del tipo iterativo con deformación de imágenes (cf. 9.2.2) y uno de los pocos capaces de resolver estructuras menores al tamaño de las ventanas de interrogación. Éste fue desarrollado para la técnica Particle Image Velocimetry (PIV) por Astarita et. al. [27, 130, 136, 137]. El procedimiento utiliza ventanas de peso que permiten: (i) estabilizar el proceso iterativo y (ii) controlar la respuesta en frecuencia espacial del algoritmo.

Pasos del algoritmo

Para medir un campo de deformación, el algoritmo utiliza un método estimador corrector que se indica en la figura 9.10 y consiste en los siguientes pasos:

1. **Estimador.** En cada iteración k el campo de deformación, \vec{s}^k , se estima calculando el coeficiente de correlación entre cada par de ventanas de interrogación f y g .
2. **Estimador denso.** Se construye el estimador denso, \vec{s}_p^k , interpolando el estimador en cada pixel de las imágenes en estudio.
3. **Deformación de imágenes.** Se obtienen las imágenes deformadas, I_0^k y I_t^k , de acuerdo al estimador denso de la iteración anterior, \vec{s}_p^{k-1} , en un esquema de diferencias centrales.
4. **Correlación de imágenes.** Se calcula el campo corrector, \vec{s}_c^k , aplicando el método de estimación descrito en el paso 1.
5. **Evaluación del desplazamiento.** El desplazamiento, \vec{s}^k , se obtiene con el método *Top Hat Moving average* (THMA) evaluando:

$$\vec{s}^k = \overline{\vec{s}_p^{k-1}} + \vec{s}_c^k \quad (9.14)$$

con $\overline{\vec{s}_p^{k-1}}$ el desplazamiento obtenido del promedio del estimador denso, \vec{s}_p^{k-1} , luego de ponderarlo por una ventana de peso Top-Hat, i.e. con un perfil de sombrero de copa.

En el paso del estimador, el coeficiente de correlación no es simétrico debido a que en su cálculo se utiliza una ventana de peso (cf. 9.2.1). Por lo tanto, éste se obtiene del promedio de las matrices resultantes al intercambiar las ventanas de interrogación f y g . Para reducir el tiempo computacional asociado a este paso, el coeficiente se calcula en la primera iteración mediante la transformada rápida de Fourier (cf. ec 9.8). En las siguientes iteraciones, el coeficiente se calcula en forma directa (cf. ec 9.4), solamente para los valores próximos al máximo de correlación. En ambos casos se aplica el estimador Gaussiano (cf. ec. (9.9)) para obtener el máximo de correlación en coordenadas subpixel.

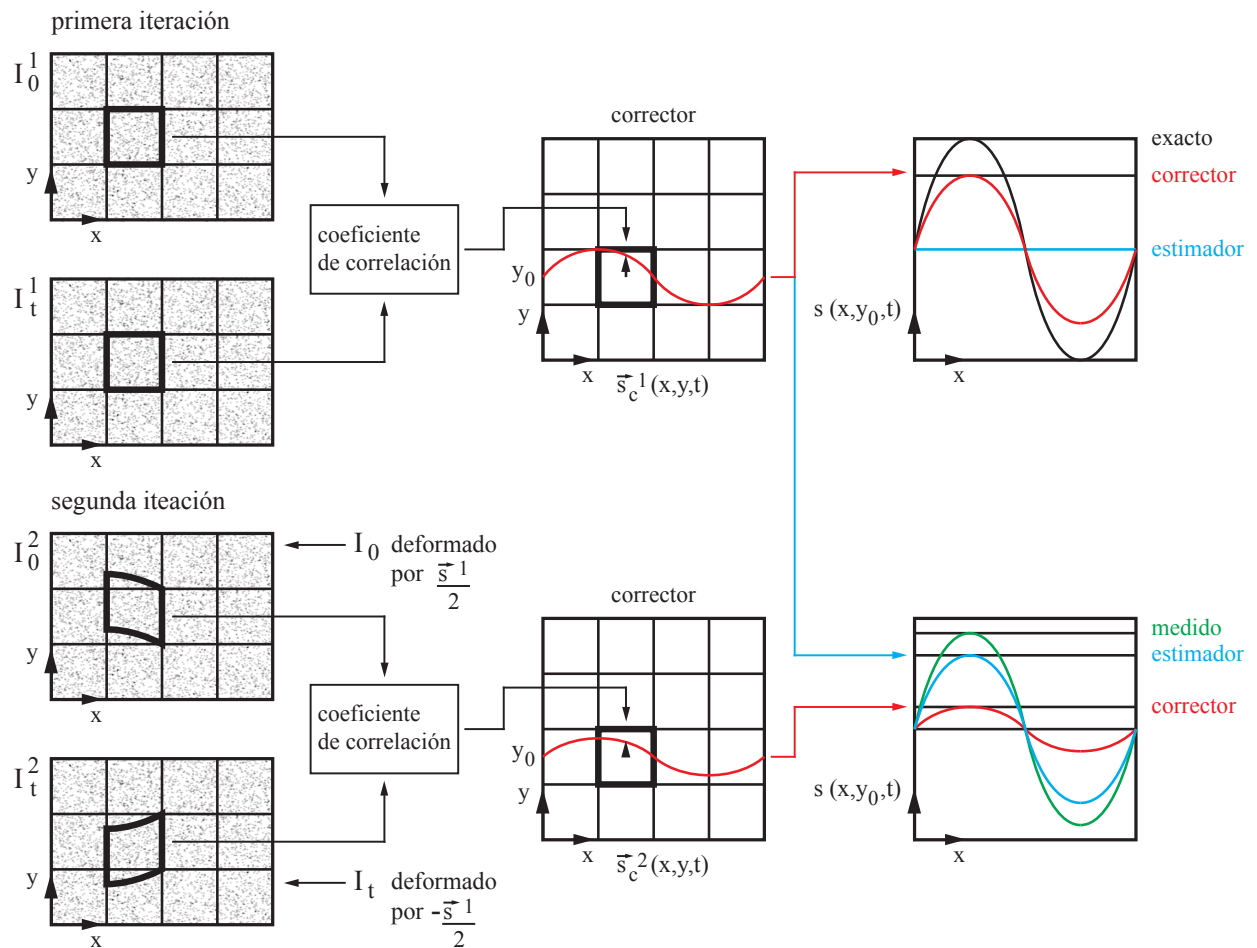


Figura 9.10: Esquema de las dos primeras iteraciones del algoritmo de correlación para recuperar un campo de deformación sinusoidal entre las imágenes I_0 e I_t . En la primera iteración, el estimador es nulo y el campo de deformación, \vec{s}^1 , equivale al corrector \vec{s}_c^1 . En la segunda iteración, se calcula el campo de deformación, \vec{s}^2 , sumando el estimador obtenido de la iteración anterior y el corrector, \vec{s}_c^2 , calculado a partir de las imágenes I_0^2 e I_t^2 deformadas por el campo de deformación anterior.

El algoritmo se implementó en un código computacional escrito en Ansi C en conjunto con diversas librerías de procesamiento de imágenes. En el código, cuya estructura se describe en el Anexo F.1, se define un caso de estudio mediante un archivo de parámetros y entrega archivos de registro del cálculo de cantidades relevantes en cada iteración. Las librerías desarrolladas permiten la lectura y escritura de archivos en formato binario, interpolación de imágenes para realizar su resamplado (paso 2) y deformación (paso 3) y cálculo del coeficiente de correlación directa y en el espacio de Fourier.

9.3.2. Ensayos del algoritmo

Los ensayos que se presentan a continuación se realizaron con el fin de evaluar el desempeño del algoritmo de correlación en términos de su exactitud y resolución espacial. Estos ensayos se realizaron mediante secuencias de imágenes generadas artificialmente, en forma similar a la evaluación de este tipo de algoritmos en el ámbito de la técnica PIV. En estas secuencias el campo de deformación impuesto es conocido, lo que permite determinar el error en su medición.

Simulación de secuencias de imágenes artificiales

Una secuencia de imágenes artificiales se genera a partir de una distribución espacial aleatoria de partículas como se muestra en la figura 9.11. En ella, la intensidad de luz de cada partícula tiene una distribución Gaussiana dada por [102]:

$$p(x, y) = I_0 \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{(d_\tau / \sqrt{8})^2} \right] \quad (9.15)$$

con (x_0, y_0) las coordenadas de su centro, I_0 su intensidad máxima y d_τ su diámetro que corresponde a una intensidad I_0/e^2 y contiene el 95% de la luz difuminada. En cada cuadro de una secuencia, las partículas se desplazan de acuerdo al campo de deformación impuesto. El procedimiento numérico para generar las secuencias consiste en integrar sobre cada pixel la intensidad del conjunto de partículas, sin embargo la evaluación directa de la ec. (9.15) tiene un alto costo computacional. En el Anexo F.3 se desarrolla una expresión más conveniente y se incluye un código computacional escrito en Matlab para la generación de imágenes artificiales.

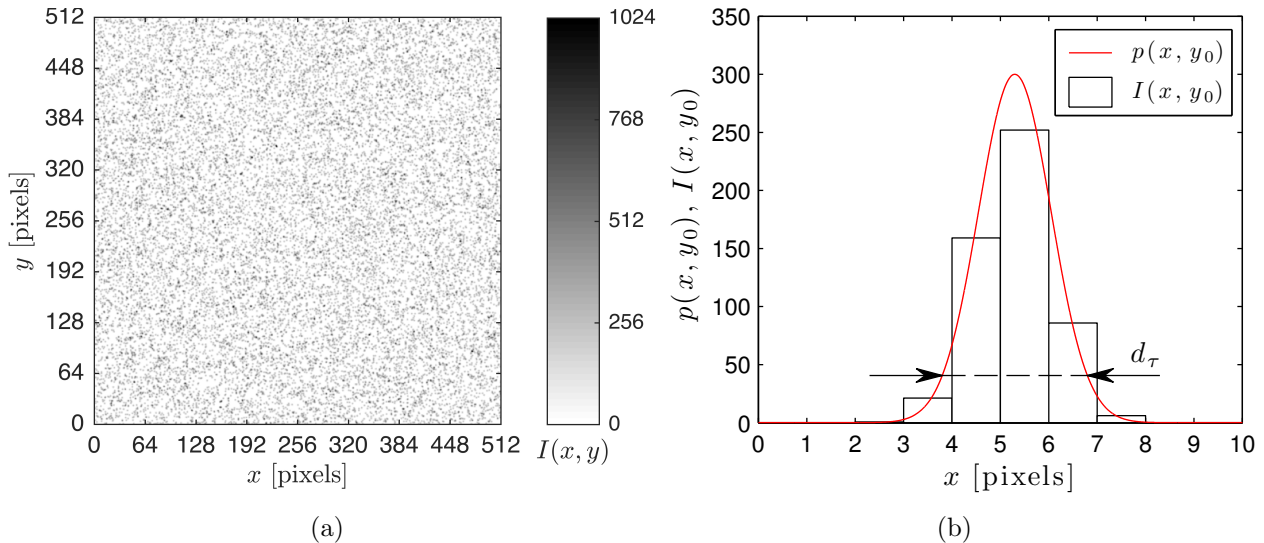


Figura 9.11: Descripción de una imagen artificial. (a) Primer cuadro de una secuencia de tamaño 512×512 pixels. (b) Perfiles de intensidad continua, $p(x, y_0)$, y discreta, $I(x, y_0)$, de una partícula de diámetro $d_\tau = 3$ pixels, ubicada en (x_0, y_0) con $x_0 = 5.3$ pixels e y_0 en el centro de un pixel.

Para los ensayos se generaron secuencias de imágenes artificiales con un tamaño de 512×512 pixels² y las características que se indican en la Tabla 9.1. sin ruido. pixeles de la cámara

digital factor unitario. Éstas son similares a las utilizadas por Astarita [27], a excepción de I_0 dado que en el presente caso la intensidad está discretizada en 10 Bits. El tamaño de partículas, $d_\tau = 3.0$ pixels, es próximo al óptimo para el presente algoritmo con deformación de imágenes.

I_0 [n.u.]	d_τ [pixels]	N_p [partículas]	c_p [partículas/pixel ²]	δ_p [pixels]
300	3.0	19922	0.076	4.09

Tabla 9.1: Características de las imágenes artificiales. Se indican: I_0 intensidad máxima, d_τ diámetro, N_p número, c_p densidad y $\delta_p \sim 2/\sqrt{\pi N_p}$ distancia media entre partículas.

Parámetros del algoritmo

El algoritmo depende de diversos parámetros, entre ellos el tipo de ventanas de peso, parámetros de malla, método de interpolación y número de iteraciones. La selección de las ventanas de peso determina la estabilidad y resolución espacial del algoritmo, según se discute en el Anexo cf. F.2. En los presentes ensayos, la ventana de peso para el estimador es la propuesta por Nogueira (Nog32) de ancho 32 pixeles y para la evaluación del desplazamiento una ventana Top-Hat (TH2) de lado 2 pixeles. El tamaño de la primera concuerda con el tamaño de las ventanas de interrogación, de 32×32 pixeles², según se indica en la Tabla 9.2 junto con los parámetros principales del algoritmo. El método de interpolación utilizado en la construcción del estimador denso y en la deformación de imágenes es Spline de quinto grado, el cual permite obtener una mayor resolución espacial, según se discute en el Anexo mencionado previamente. El campo de deformación se evalúa en una malla fina con un espaciado, $\Delta = 2$ pixeles, en forma iterativa durante de 40 iteraciones.

W_a	W_b	Δ [pixels]	s_{d1}	s_{d2}	n_{it}
NOG32	TH2	2	5	5	40

Tabla 9.2: Parámetros del algoritmo de correlación. Se indica: W_a y W_b ventanas de peso para el estimador y evaluación del desplazamiento, respectivamente; Δ espaciado de malla; s_{d1} y s_{d2} grados Spline para el estimador denso y deformación de imágenes, respectivamente y n_{it} número de iteraciones.

Medición de la exactitud del algoritmo

Una primera característica del algoritmo que se desea evaluar es la exactitud de la medición del campo de deformación. Esto se realiza generalmente en términos de los errores de Bias ϵ_β , aleatorio ϵ_σ y total ϵ_δ , dados por [27, 129]:

$$\epsilon_\beta = \bar{u}_m - u \quad \epsilon_\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_m - \bar{u}_m)^2} \quad \epsilon_\delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_m - u)^2} \quad (9.16)$$

donde u es el valor exacto impuesto, u_m el desplazamiento medido, \bar{u}_m la media del valor medido y N el número de muestras. El error de bias, ϵ_β , indica la exactitud, mientras que el

error aleatorio, ϵ_σ , indica la precisión del algoritmo. Estos errores se relacionan con el error total, ϵ_δ , de acuerdo a:

$$\epsilon_\delta^2 = \epsilon_\sigma^2 + \epsilon_\beta^2 \quad (9.17)$$

que se cumple bajo la condición de un desplazamiento uniforme de las partículas. Para evaluar los errores mencionados previamente se utilizó una secuencia, cuyo detalle se muestra en la figura 9.12, compuesta por 31 imágenes en las que se impone un desplazamiento uniforme de $u = 0.1$ pixel/cuadro.

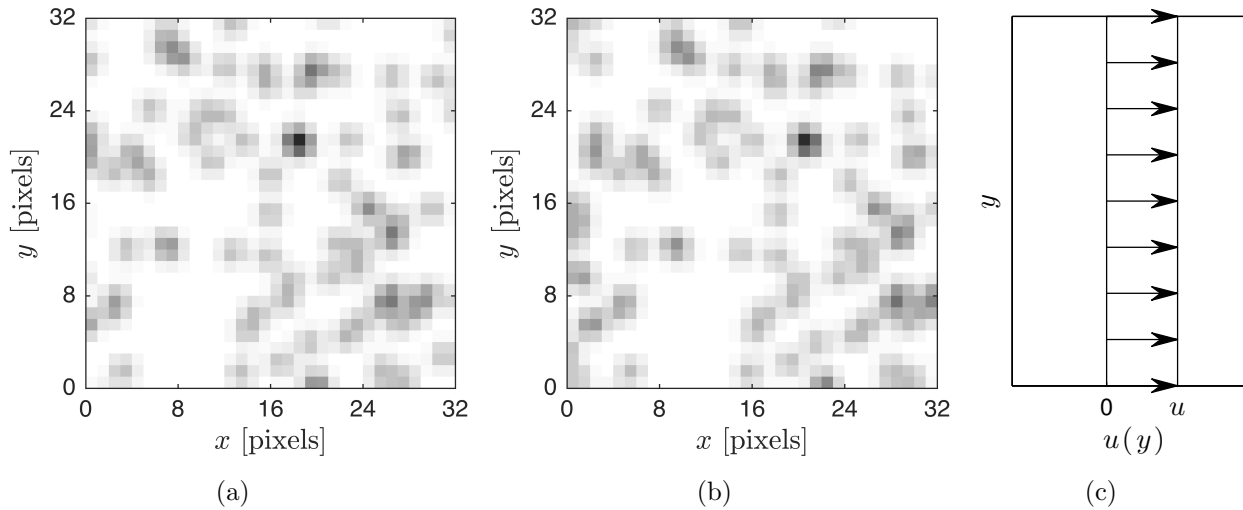
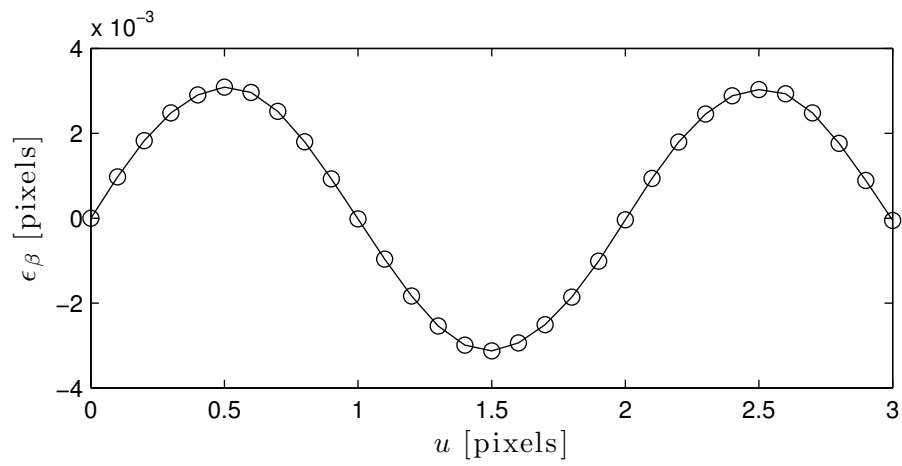
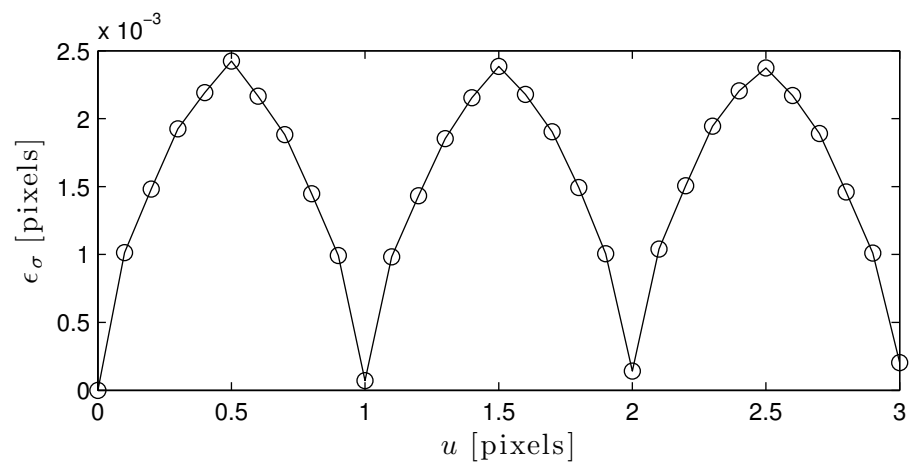


Figura 9.12: Secuencia artificial con un desplazamiento uniforme $u(y) = u$. Se muestra una región de 32×32 pixel² de los cuadros: (a) inicial; (b) con un desplazamiento de $u = 2.3$ pixel. (c) Detalle del perfil del desplazamiento impuesto $u(y)$.

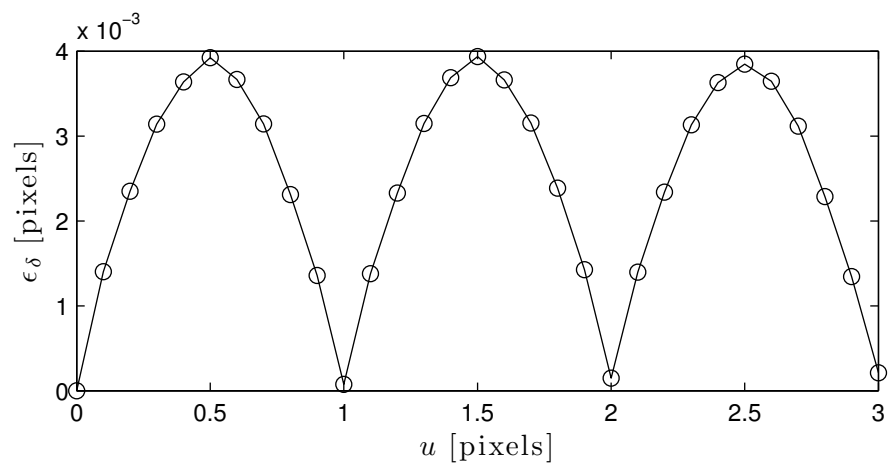
La evolución de los errores del algoritmo en función del desplazamiento impuesto se muestra en la figura 9.13. En ella se puede observar una oscilación característica de los algoritmos de correlación con deformación de imágenes. El período de oscilación del error de Bias es de 1.5 pixeles, mientras que los errores aleatorio y total tienen un período de 1 pixel. El valor máximos del error total es $3.9 \cdot 10^{-3}$ y para sus componentes, los errores de Bias y aleatorio, tienen un valor de $3.1 \cdot 10^{-3}$ pixels y $2.4 \cdot 10^{-3}$ pixels, respectivamente. Esta pequeña magnitud de los errores indica la gran exactitud del algoritmo implementado y es similar a la obtenida en [27].



(a)



(b)



(c)

Figura 9.13: Errores del algoritmo iterativo ante un campo de desplazamiento uniforme. Se muestran los errores de: (a) bias ϵ_β , (b) aleatorio ϵ_σ y (c) total ϵ_δ en función del desplazamiento impuesto u .

Medición de la resolución espacial del algoritmo

La resolución espacial de un algoritmo de correlación es una medida del tamaño de las estructuras más pequeñas que puede resolver. El espaciado de malla se utiliza típicamente para indicar esta medida, sin embargo una descripción obtiene mediante la función Modulation Transfer Function (MTF) definida por [130, 136]:

$$\text{MTF}(\lambda) = \frac{u_m(\lambda)}{u(\lambda)} \quad (9.18)$$

con $u_m(\lambda)$ la medición del campo de deformación sinusoidal impuesto, $u(\lambda)$, con longitud de onda λ .

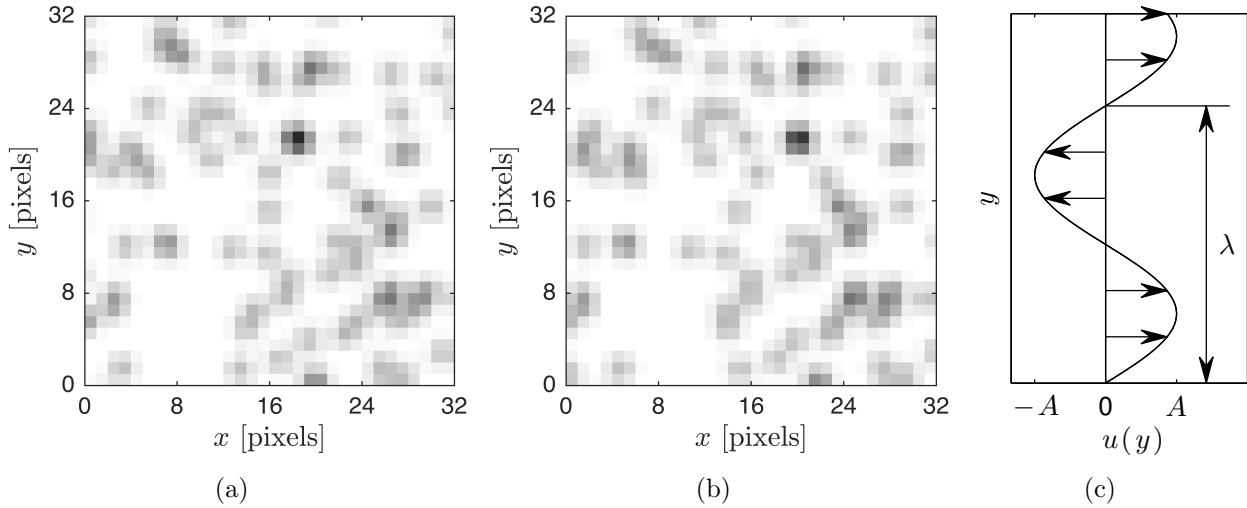


Figura 9.14: Secuencia artificial con un desplazamiento sinusoidal $u(y) = A \sin(2\pi y/\lambda)$. Se muestra una región de $32 \times 32 \text{ pixel}^2$ de los cuadros: (a) inicial; (b) deformado con una amplitud $A = 2 \text{ pixel}$ y longitud de onda $\lambda = 24.6 \text{ pixels}$. (c) Detalle del perfil del desplazamiento impuesto $u(y)$.

La resolución espacial del algoritmo se estimó mediante una secuencia de imágenes artificiales cuyo detalle se muestra en la figura 9.14. En ella se impone un desplazamiento sinusoidal unidimensional de las partículas, u , dado por:

$$u(y) = A \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \quad (9.19)$$

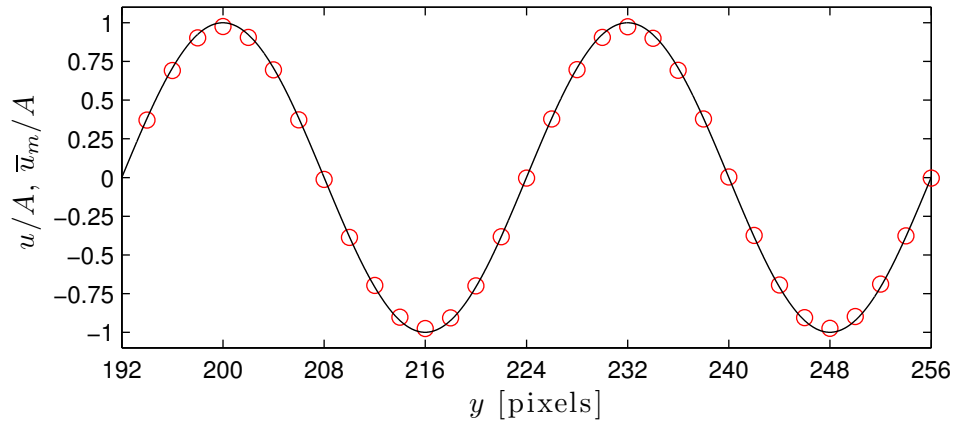
con una amplitud $A = 2 \text{ pixel}$ y una longitud de onda en la vertical λ que varía entre 16 y 320 píxeles. Esta secuencia permite estimar la MTF de acuerdo a [137]:

$$\text{MTF}(\lambda) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_m - u)^2}{\sum_{i=1}^N (A \sin(2\pi y/\lambda))^2}} \quad (9.20)$$

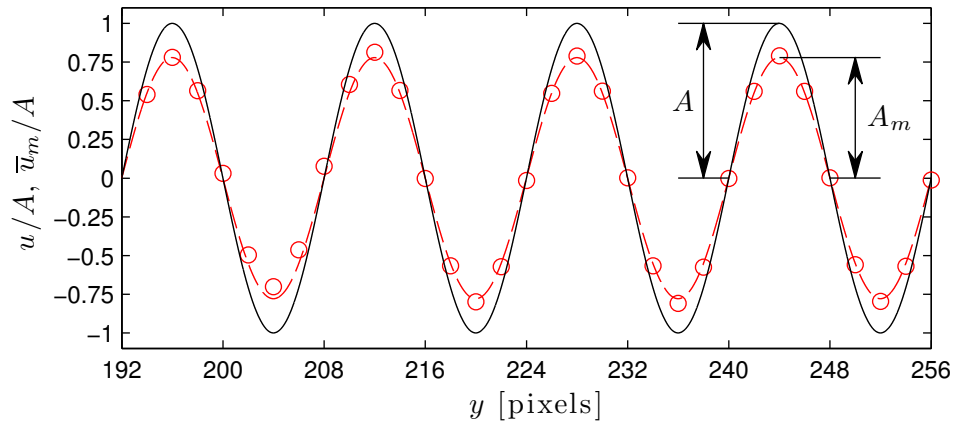
donde u_m y u son los desplazamientos medidos e impuestos para las N muestras.

Los perfiles del desplazamiento impuesto y medido promedio se comparan en la figura

9.16 (a) para un desplazamiento impuesto con una longitud de onda $\lambda = 32$ píxeles. En este caso, donde la frecuencia espacial normalizada es $\omega \equiv W/\lambda = 1$, prácticamente no se observa el efecto de modulación. La modulación del campo de deformación medido se puede apreciar para una longitud de onda $\lambda = 16$ píxeles, cuyo perfil medido se muestran en la figura 9.16 (b). La magnitud de la modulación corresponde a la razón entre las amplitudes de los desplazamiento medido e impuesto, A_m y A , respectivamente, indicadas en la figura mencionada previamente.



(a)



(b)

Figura 9.15: Medición de un campo de deformación sinusoidal. Se muestra el desplazamiento impuesto, u , y medido promedio, \bar{u}_m para una longitud de onda del desplazamiento: (a) $\lambda=32$ píxeles ($\omega=1$); (b) $\lambda=16$ píxeles ($\omega=2$). En ambas figuras: (—) desplazamiento impuesto; (o) desplazamiento medido (indicada a una tasa de muestreo reducida) y (—.) ajuste.

La modulación que realiza el algoritmo se puede apreciar en la figura 9.16, donde se muestra la evolución de la función MTF con la frecuencia espacial normalizada ω . La curva indica que el desempeño del algoritmo implementado es considerablemente mejor que el de algoritmos con desplazamiento discreto de las ventanas de interrogación, cuya función MTF coincide prácticamente con función de seno cardinal $\text{sinc}(W/\lambda)$ que se muestra como

referencia. La modulación del algoritmo implementado es prácticamente inexistente para un campo de deformación con una baja frecuencia espacial, por ejemplo a $\omega = 0.1$ donde la función MTF equivale a 0.99. La función MTF decrece con la frecuencia espacial del campo de deformación y toma valores los de 0.96 para $\omega = 1$ y 0.68 para $\omega = 2$. El comportamiento anterior concuerda con los resultados de [129, 136, 137] e indica la elevada resolución espacial que permite obtener el algoritmo implementado.

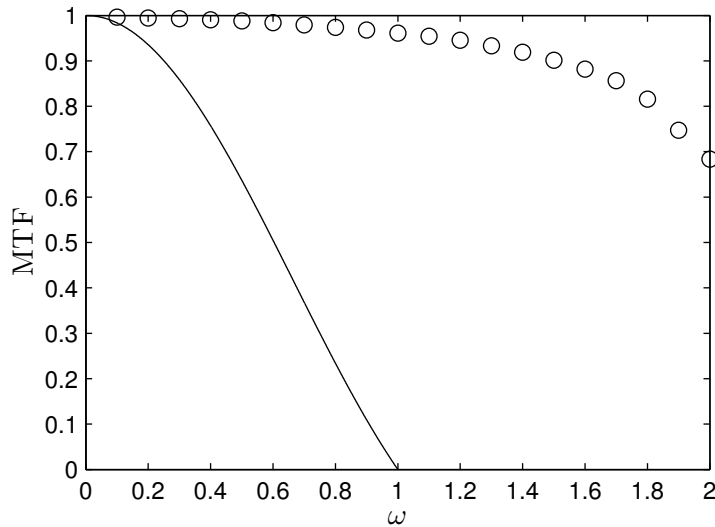
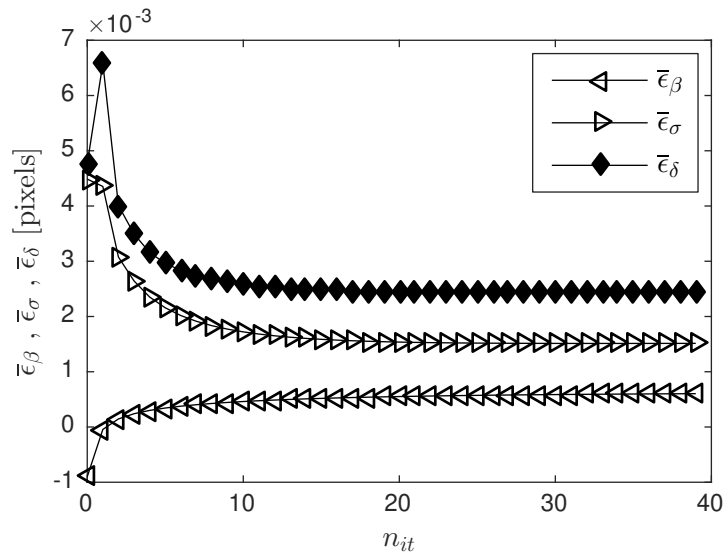


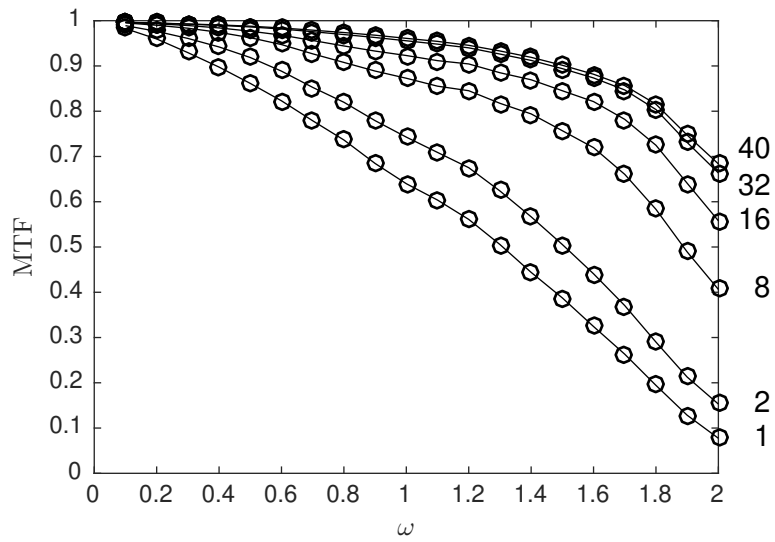
Figura 9.16: Modulation Transfer Function (MTF) en función de la frecuencia espacial normalizada ω . Se muestra la función MTF: para (o) $W = 32$ píxeles; (—) Respuesta de algoritmos con desplazamiento discreto de las ventanas de interrogación dada por $\sin(\pi\omega)/(W \sin(\pi\omega/W))$.

Convergencia del algoritmo

Un último aspecto de interés consiste en que requiere el algoritmo para su convergencia. En la figura 9.17 (a) se muestra la evolución de los errores de bias, aleatorio y total obtenidos en el ensayo de un desplazamiento uniforme. Los errores decrecen rápidamente en las primeras iteraciones y luego con en menor grado. El error total requiere de aproximadamente de 8 y 20 iteraciones para alcanzar el 10% y 1% de su de valor final, respectivamente. En la figura 9.17 (b) se muestra la evolución de la función MTF para distintas de iteraciones en función de la frecuencia normalizada. De acuerdo a esta figura, para el caso de campo de deformación con una longitud de onda de 32 píxeles, es decir $\omega = 1$, el algoritmo requiere entorno a 32 iteraciones para alcanzar el 1% de su valor final.



(a)



(b)

Figura 9.17: Convergencia del algoritmo de correlación. (a) Evolución de los errores promedios de bias ϵ_β , aleatorio ϵ_σ y total ϵ_δ con el número de iteraciones n_{it} . (b) Evolución de la función MTF en función de la frecuencia espacial normalizada ω para las iteraciones indicadas al costado de la figura.

9.4. Estudio experimental de una pluma térmica en una cavidad

La presente sección trata sobre la aplicación experimental de la técnica de medición óptica Synthetic Schlieren a una pluma térmica laminar que se desarrolla al interior de una cavidad. El interés consiste en la reconstrucción del campo de temperatura del fenómeno térmico que se genera por un elemento calefactor delgado de geometría rectangular. El elemento calefactor cuenta un controlador de temperatura PID implementado mediante circuitos eléctricos de drenaje de corriente y un puente de Wheatstone. El campo de temperatura del fenómeno bajo la presente configuración es aproximadamente bidimensional, lo que permite su reconstrucción a partir del registro de imágenes adquiridas desde un solo punto de observación. En el arreglo óptico de Synthetic Schlieren se utiliza un monitor LED para mostrar el patrón de referencia y variar en forma conveniente sus características. La reconstrucción se realiza mediante el algoritmo de correlación de imágenes desarrollado (cf. 9.2) y un algoritmo de integración de un campo de gradientes. El post-procesamiento de los datos obtenidos indica que la dinámica del desarrollo de plumas térmicas se relaciona con la potencia requerida por el elemento calefactor para mantener este último a temperatura constante.

9.4.1. Dispositivo experimental para la generación de plumas térmicas

El presente dispositivo experimental se encuentra dedicado al estudio de plumas térmicas bajo la configuración que se indica en la figura 9.18. El fenómeno se desarrolla en una cavidad de sección rectangular y dimensiones interiores $21.0 \times 14.2 \times 12.2 \text{ cm}^3$ (alto $H_t \times$ largo $L_t \times$ ancho W_t). Ésta se encuentra fabricada en vidrio, con paredes de espesor $L_w = 4.8 \text{ mm}$ y cubierta por altura $H = 18.0 \text{ cm}$ de agua destilada. El fondo de la cavidad se encuentra aislado térmicamente y a mitad del largo se encuentra un elemento calefactor que genera el fenómeno térmico mediante la disipación de calor por efecto Joule. El fenómeno tiene una distribución de temperatura $T(x, y, t)$ y evoluciona en el medio inicialmente a una temperatura T_0 .

Elemento calefactor

Un esquema del elemento calefactor fabricado para generar plumas térmicas se muestra en la figura 9.19. Este consiste en una lamina de cobre delgada de dimensiones en mm de $0.15 \times 10.08 \times 121.25$ (alto $H_h \times$ ancho $W_h \times$ largo L_h). En su cara inferior se encuentra una capa de aislante eléctrico Kapton de espesor 0.02 mm y luego un alambre resistivo de nickel cromo AWG 34 de diámetro 0.16 mm , resistencia $R_h = 35.0 \Omega$ y con terminales de 4 hilos para mediciones tipo Kelvin.

La temperatura se registra por un termistor NTC Semitec 223Fu5183-15U004 ubicado al centro del elemento calefactor, en su superficie en contacto con el fluido. El termistor es de diámetro 0.5 mm , largo 2 mm y un tiempo de respuesta rápido de 50 ms . Para el fondo de la cavidad en contacto con el fluido se entrega una condición adiabática aproximada mediante una lámina de corcho usada como aislante térmico y luego sucesivas capas de Kapton hasta alcanzar la altura del elemento calefactor.

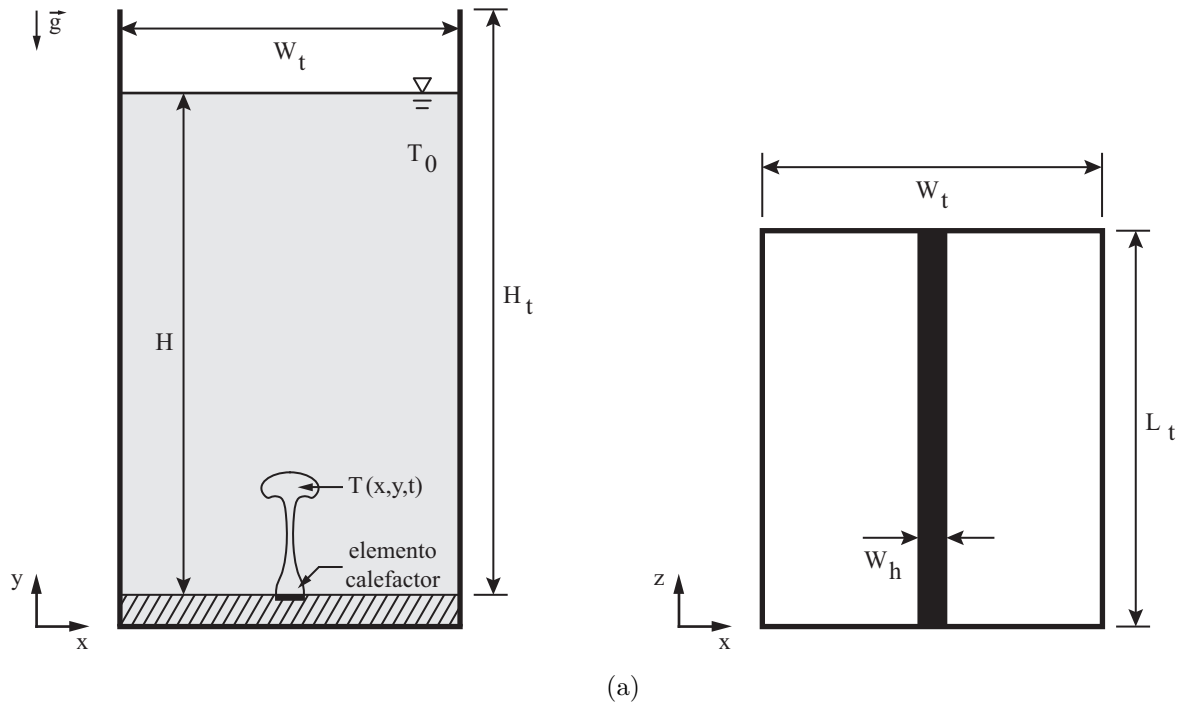


Figura 9.18: Configuración en estudio. (a) Vista frontal. (b) Vista superior. Una pluma térmica con distribución de temperatura $T(x, y, t)$ se desarrolla al interior de una cavidad de ancho W_t y alto H_t con una columna de agua de altura H a una temperatura inicial T_0 . El elemento calefactor de ancho W_h se encuentra en el fondo, a mitad de ancho de la cavidad.

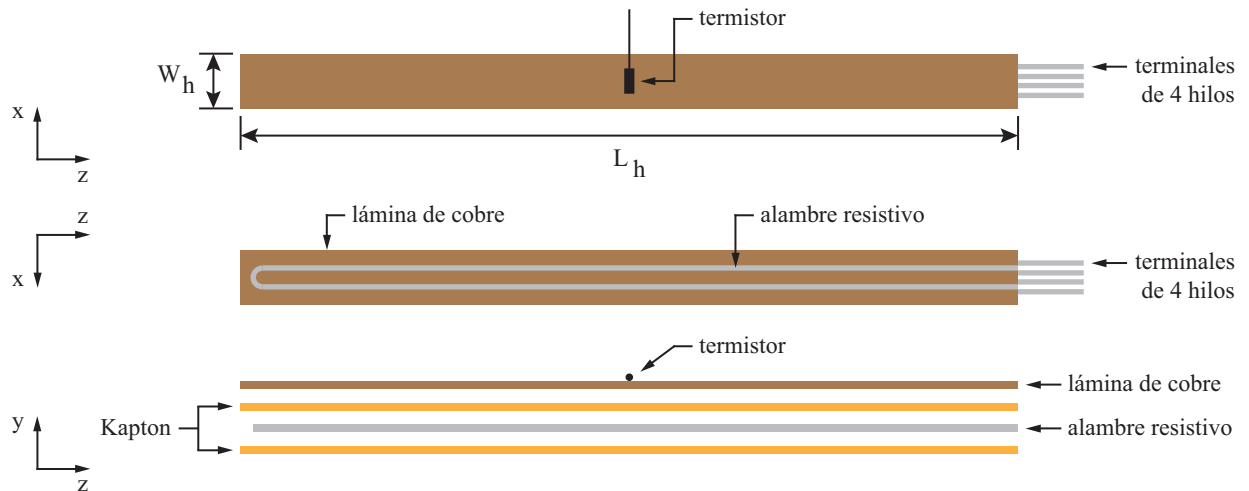


Figura 9.19: Esquema de la vista inferior y detalle del elemento calefactor. El elemento calefactor consiste en una lámina delgada de cobre de largo L_h y ancho W_h . Un alambre resistivo, aislado eléctricamente por Kapton y con terminales de 4 hilos, disipa calor por efecto Joule a la lámina de cobre. Un termistor de respuesta rápida registra la temperatura en la superficie superior del calefactor.

Parámetros de control

Los parámetros de control para el fenómeno de plumas térmicas son principalmente los números adimensionales de Rayleigh y Prandtl, dados por:

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TW^3}{\nu\kappa} \quad \text{y} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (9.21)$$

con α el coeficiente de expansión térmica, ν la viscosidad cinemática, κ la difusividad térmica y $\Delta T \equiv T_w - T_\infty$ la diferencia entre las temperaturas de pared T_w y del fluido no perturbado T_∞ . Como se discutió previamente (cf. Anexo B, Anexo E), las propiedades con mayor variación con la temperatura son el coeficiente de expansión térmica y, en menor grado, la viscosidad dinámica μ . En la figura 9.20 se muestra Ra en función de ΔT con sus propiedades evaluadas a distintas temperaturas del fluido no perturbado.

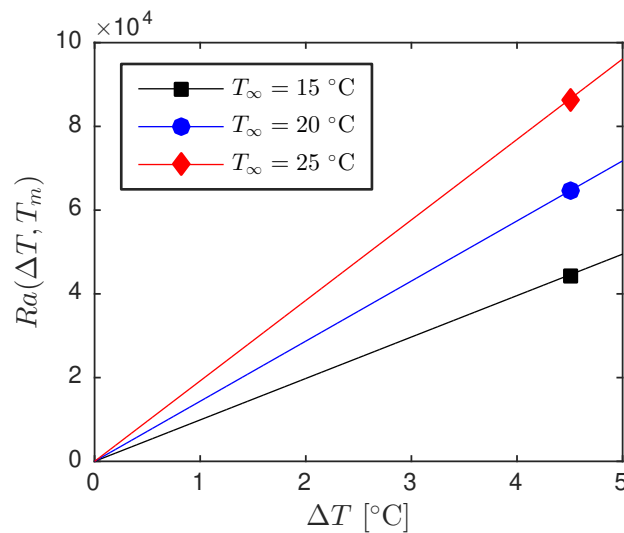


Figura 9.20: Número de Rayleigh en función de la diferencia de temperatura ΔT para distintas temperaturas del fluido T_∞ .

9.4.2. Sistema de control del elemento calefactor

Para el elemento calefactor se desarrolló un sistema de control con objetivos de imponer en él una temperatura deseada y determinar la potencia que éste debe disipar en el proceso. La metodología de control de temperatura es similar a la utilizada en las experiencias de Rayleigh-Bénard (cf. 4.3). Su implementación, sin embargo, es diferente dado que el fenómeno de plumas térmicas en agua evoluciona a una escala de tiempo considerablemente más rápida y del orden de pocos minutos. Lo anterior presenta el requerimiento de un tiempo de respuesta del sistema de control al que se orienta la cadena de medición del presente experimento que se muestra en la figura 9.21. En ella, una placa de desarrollo Arduino Mega 2560 contiene al algoritmo de control y se comunica con circuitos eléctricos para realizar las tareas de medición de temperatura y retiro de corriente del elemento calefactor. Estos circuitos se describen con más detalle en el Anexo G y son los siguientes:

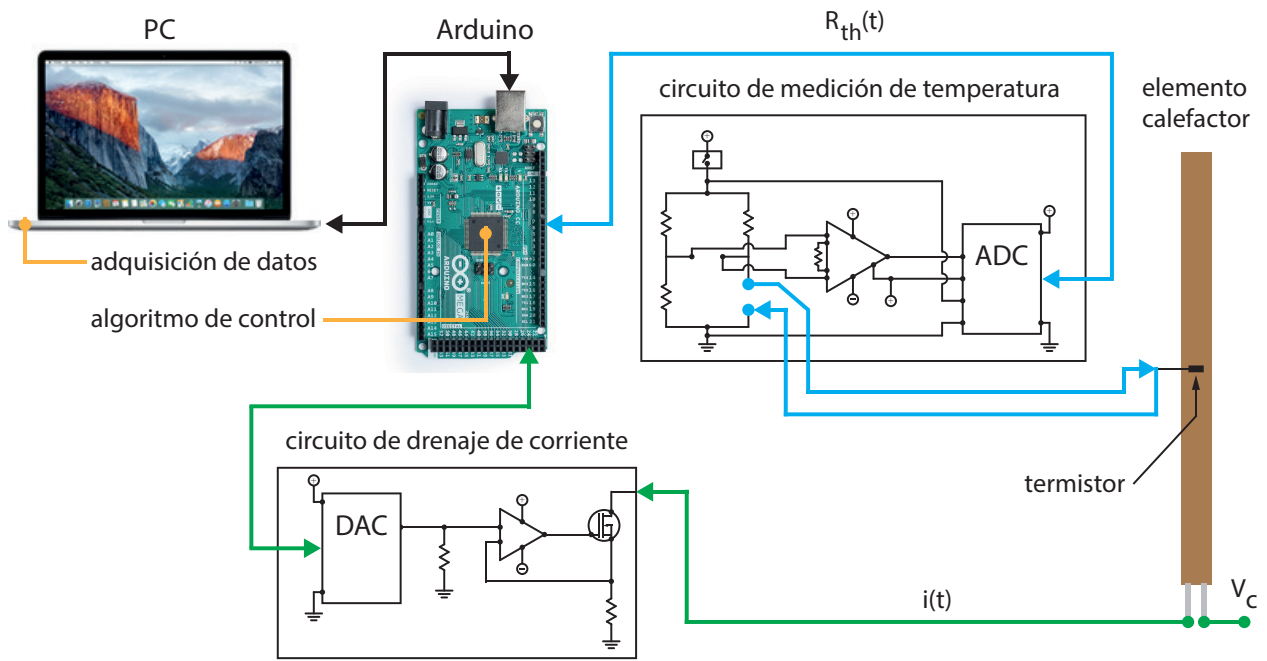


Figura 9.21: Cadena de medición. El circuito de medición de temperatura convierte a una señal digital la variación de resistencia, $R_{th}(t)$, del termistor ubicado en el elemento calefactor. La placa Arduino determina de esta señal su temperatura y calcula mediante un algoritmo de control la potencia y corriente deseada en el elemento calefactor. La placa Arduino envía una señal digital al circuito de drenaje de corriente para que retire esta cantidad, $i(t)$, del elemento calefactor alimentado por un voltaje V_c . Un PC adquiere en tiempo real los datos determinados por la placa arduino.

- (ii) **Circuito de medición de temperatura:** Contiene en una de las ramas de un puente de Wheatstone al termistor ubicado en el elemento calefactor. Los cambios de resistencia del termistor, asociadas a su variación de temperatura, generan un voltaje en el puente que mide un amplificador instrumental. Este voltaje se mide y convierte a una señal digital mediante un conversor análogo digital (ADC) de 16 bit.
- (i) **Circuito de drenaje de corriente:** Un transistor MOSFET retira corriente a través una resistencia de medición y del elemento calefactor que se alimenta por un voltaje V_c . El valor de corriente deseada se convierte a una señal de voltaje mediante un conversor digital análogo (DAC) de 16 bit. Un amplificador operacional equipara esta señal con el voltaje en la resistencia de medición para ajustar la corriente que retira el transistor.

Ambos circuitos se comunican con la placa Arduino a una frecuencia de muestreo de 25 Hz mediante rutinas desarrolladas con el protocolo Serial Peripheral Interface (SPI). Un PC realiza a esta frecuencia la adquisición de datos del control de temperatura del elemento calefactor que recibe de la placa Arduino.

Controlador de temperatura

El controlador de temperatura del elemento calefactor es del tipo proporcional integral (PI) y su diagrama de bloques se muestra en la figura 9.22. La variable de control es la temperatura de pared de la lámina de cobre, T_w , que registra el termistor y r su señal de referencia. El controlador calcula el error:

$$e(t) = r(t) - T_w(t) \quad (9.22)$$

y lo utiliza para determinar la potencia $p(t)$ que debe disipar el elemento calefactor por:

$$p(t) = P e(t) + I \int_0^t e(t) dt + D \frac{de(t)}{dt} \quad (9.23)$$

con P , I y D los coeficientes del controlador. La corriente i que debe imponer la fuente se determina por:

$$i = \sqrt{\frac{p}{R_h}} \quad (9.24)$$

donde la resistencia del alambre resistivo varía levemente de acuerdo a:

$$R_h = R_{h0} [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (9.25)$$

con R_{h0} su resistencia a la temperatura de referencia T_0 y $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \Omega/^\circ\text{C}$ el coeficiente de temperatura para el alambre de Niquel Cromo. El algoritmo de control no considera estas variaciones con la temperatura y utiliza el valor nominal $R_H \equiv R_{h0} = 35.0 \Omega$. Por otra parte, el algoritmo de control calcula la potencia suministrada, es decir, no realiza correcciones pérdidas de calor.

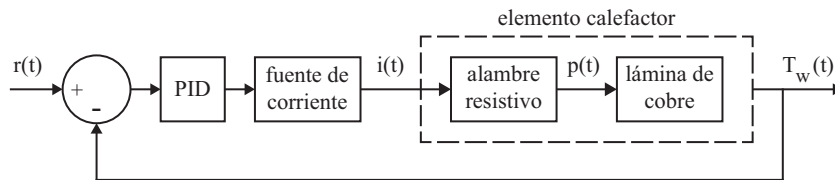


Figura 9.22: Diagrama de bloques de control del elemento calefactor. La variable de control es la temperatura T_w de pared de este elemento registrada por un termistor y r su señal de referencia. El elemento calefactor está modelado por un alambre resistivo que se alimenta por una corriente i y que disipa una potencia p en forma de calor a una lámina de cobre.

Los elementos del circuito de medición de temperatura se escogieron de manera que la medición de esta cantidad es posible en el rango $T \in [14,32] ^\circ\text{C}$. El rango de operación del circuito de drenaje de corriente es $i \in [0, 400] \text{ mA}$, el cual se limitó en las pruebas a una corriente máxima de $i_{max} = 350 \text{ mA}$ con el objeto de proteger el alambre resistivo del elemento calefactor. Lo anterior corresponde a un rango de suministro de potencia de $p \in [0,4.29] \text{ W}$.

Ajuste de los coeficientes del controlador

En la presente sección se discute el ajuste de los coeficientes del controlador que determinan en gran parte la estabilidad y desempeño del algoritmo de control. Para ello se emplearon los métodos de Ziegler-Nichols [20] y de ensayo y error mediante pruebas de escalón de temperatura.

El primer método de Ziegler-Nichols consiste en estudiar la respuesta del sistema ante de escalón de entrada. El método se aplica la curva de respuesta tiene la forma de “S” y se caracteriza por dos constantes: tiempo de retardo y constante de tiempo. Esta prueba se realizó imponiendo escalones de potencia de magnitud variable y la respuesta se expresó como la diferencia entre las temperaturas de pared y el fluido no perturbado, $\Delta T(t) = T_w(t) - T_\infty$. Las curvas de respuesta se muestran en la figura 9.23 (b), en las que no se aprecia una forma de “S” por lo que aplicación del método no es posible. Resulta interesante que su forma similar a la obtenida en la simulación numérica de pluma térmica a potencia constante (cf. Anexo E, figura E.8). Las curvas obtenidas en la simulación y experiencias presentan un sobrepaso y estas últimas indican que el tiempo de subida decrece con la potencia suministrada. Luego del sobrepaso, las curvas se aproximan a un valor estacionario, con una variación de $\pm 0.1^\circ\text{C}$ en el lapso de 1 min. Esta pequeña variación puede ser generada por la evolución de la pluma térmica, pérdidas de calor o por cambios leves de la resistencia del elemento calefactor.

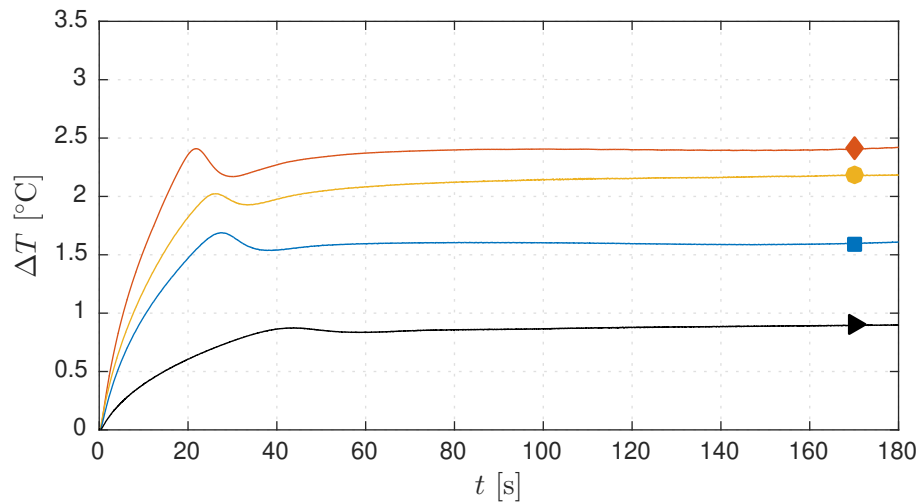


Figura 9.23: Respuesta en temperatura ante un escalón de potencia impuesto en el elemento calefactor. Se muestra la evolución temporal de la diferencia de temperatura ΔT para escalones de: (►) 0.5 W; (■) 1.0 W; (●) 1.5 W y (◆) 2.0 W.

En el segundo método de Ziegler-Nichols se estudia la respuesta del sistema bajo un control netamente proporcional, es decir con coeficientes $I = 0$ y $D = 0$, mientras que el coeficiente P se aumenta hasta alcanzar la oscilación de la salida del sistema. Los coeficientes se obtienen de este valor crítico de P y del período de las oscilaciones. Esta prueba se realizó en una primera etapa con aire como fluido de trabajo y se observó la oscilación del sistema. En los ensayos en agua, sin embargo, no se observaron oscilaciones con el aumento considerable del coeficiente proporcional, $P \leq 25$, para $\Delta T = 0.5^\circ\text{C}$ y $\Delta T = 1.0^\circ\text{C}$, por lo que no se empleó este método.

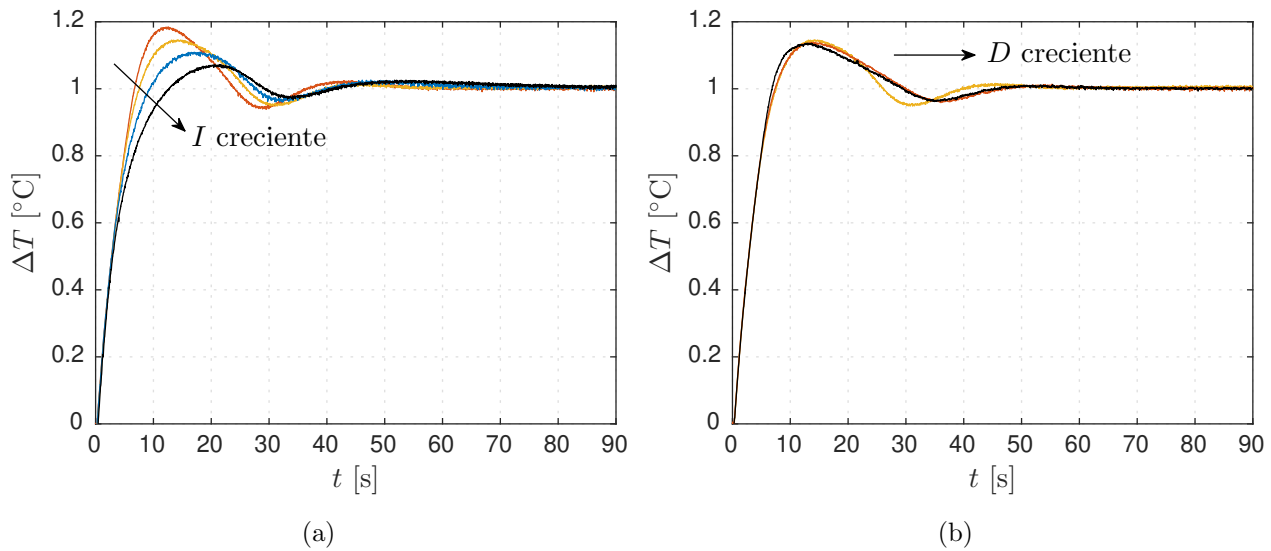


Figura 9.24: Respuesta a un escalón de temperatura. Se muestra la evolución temporal de la diferencia de temperatura, ΔT , ante un escalón de $1.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ para un control: (a) PI con $P = 2$ fijo e I variable de 0.2 a 0.5 en pasos de 0.1 ; (b) PID con $P = 2$, $I = 0.4$ fijos y D variable con valores de: 0 , 0.5 y 2 .

Luego de descartar los métodos de Ziegler-Nichols se procedió a estudiar la respuesta del sistema de control ante escalones de temperatura para distintos valores de sus coeficientes. En la figura 9.24 se comparan controles del tipo PI y PID manteniendo un coeficiente proporcional $P = 2$ fijo y la magnitud de los escalones en $1.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. En la figura 9.24 (a) se puede apreciar que valores más pequeños del coeficiente integral disminuyen el sobrepaso, pero aumentan el tiempo de subida. En la figura 9.24 (b) se pueden observar los efectos del término derivativo, para el cual se implementó en la placa Arduino un filtro Butterworth de segundo orden con una frecuencia de corte de 5 Hz . El término derivativo prácticamente no afecta al sobrepaso y aumenta tiempo de respuesta del controlador. La respuesta de los controles PI y PID se comparan en la figura 9.25, en términos de la serie de potencia y la contribución de los términos de error, para escalones de magnitud $1.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. El control PI evoluciona levemente más rápido que el control PID, de acuerdo con sus coeficientes del integrador, $I = 0.5$ e $I = 0.4$, respectivamente. Por otra parte, el término derivativo influye principalmente en la etapa inicial del control PID.

Los casos anteriores proporcionan un control estable y que logra la anulación del error estacionario, sin embargo la respuesta es lenta. Un aumento de coeficiente proporcional puede aumentar tiempo de respuesta, pero genera mayor sobrepaso. Por lo anterior, se fijó $P = 2$ y se definió una etapa de saturación para un error $e(t) > e_{th} \equiv 0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$, según se indica en la figura 9.26 (a). En ella se suministra una potencia máxima $p_{max} = 2\text{ W}$ y se anula el error integral $e_i = 0$. Luego, el control es del tipo PI con un coeficiente integral elevado, $I = 1.8$, para disminuir el tiempo de respuesta del controlador. El resultado se puede apreciar en la evolución temporal de potencia que se muestra en la figura 9.26 (b). La curva del error integral se acerca a la curva de potencia y logra reducir el error. Esta estrategia permite un funcionamiento correcto del sistema de control y se utilizó en las experiencias que se discuten en las siguientes secciones.

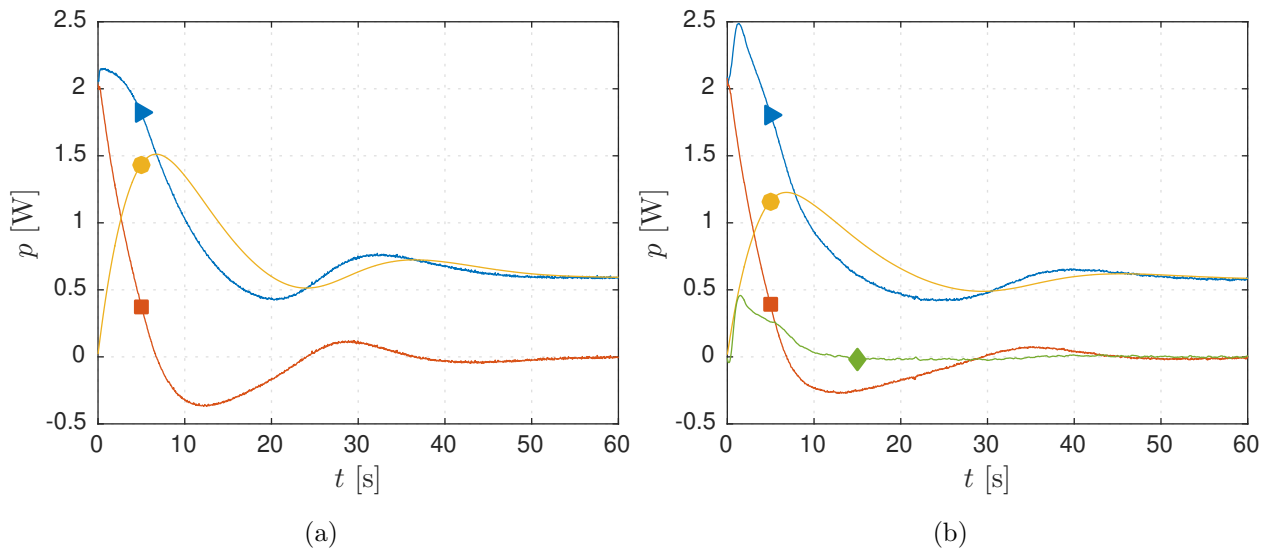


Figura 9.25: Evolución temporal de potencia, p , para un escalón temperatura de $1.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y un control: (a) PI con $P = 2$ e $I = 0.5$. (b) PID con $P = 2$, $I = 0.4$ y $D = 2$. Se muestra la curva de \blacktriangleright potencia y los términos: \blacksquare proporcional $P e(t)$; \bullet integral $I \int e(t)$ y \blacklozenge derivativo $D de(t)/dt$.

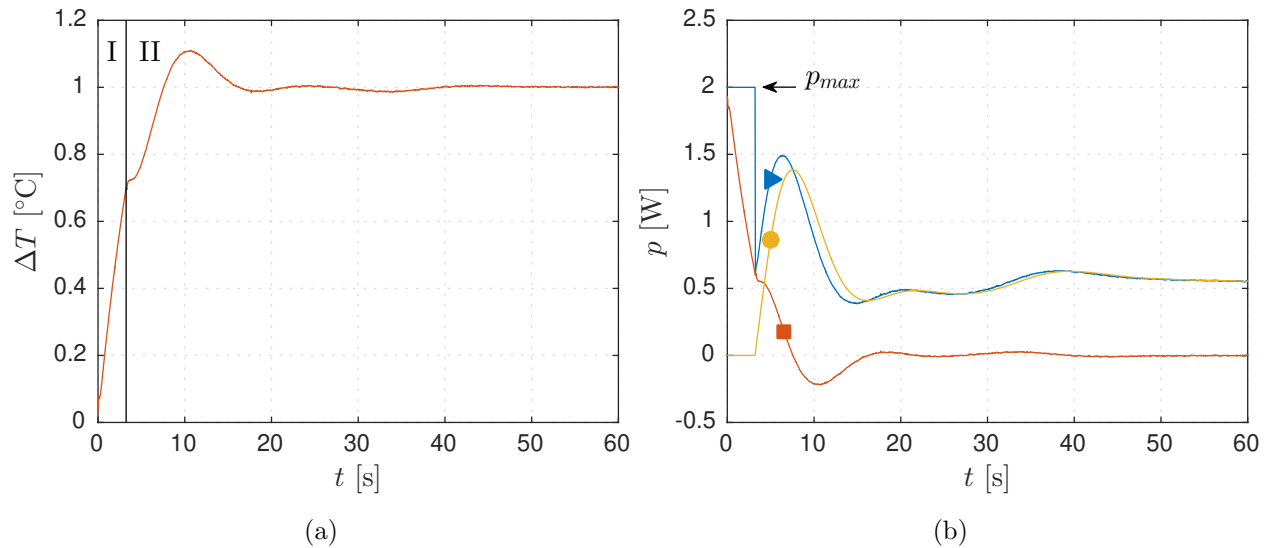


Figura 9.26: Respuesta a un escalón de temperatura de $1.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ para un control PI con anulación del integrador en saturación. (a) Evolución temporal de la diferencia de temperatura ΔT . Se indican las regiones de: (I) saturación, donde $e(t) > e_{th} \equiv 0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $p(t) = p_{max} \equiv 2\text{ W}$ y (II) control PI con coeficientes $P = 2$ e $I = 1.8$. (b) Evolución temporal de \blacktriangleright potencia p . Se indica la potencia en saturación p_{max} y la contribución de los términos: \blacksquare proporcional $P e(t)$ e \bullet integral $I \int e(t)$.

9.4.3. Implementación de Synthetic Schlieren

En la presente sección se discute la implementación de la técnica Synthetic Schlieren para el estudio de plumas térmicas, que se destaca principalmente por el uso de un monitor LED para mostrar el patrón de referencia. Esto presenta diversos beneficios, tales como facilitar la alineación del montaje o modificar en forma conveniente el tipo patrón y sus características.

Configuración y resolución del arreglo óptico

Los elementos del arreglo óptico se dispusieron de acuerdo al esquema que se muestra en la figura 9.27. La adquisición de imágenes se realiza mediante una cámara digital Nikon D5200 DSLR, ajustada con un lente Nikkor AF-S DX 18-140mm, f/3.5-5.6G ED VR y es controlada por un PC. La cámara adquiere imágenes del patrón de referencia, que observa a través de la sección de prueba y que se exhibe un monitor LED. El monitor es un Ipad de 9.7" (Apple products) y es controlado, a una tasa de refresco de 60 Hz, por un segundo PC que maneja el sistema de control de temperatura de la pluma térmica.

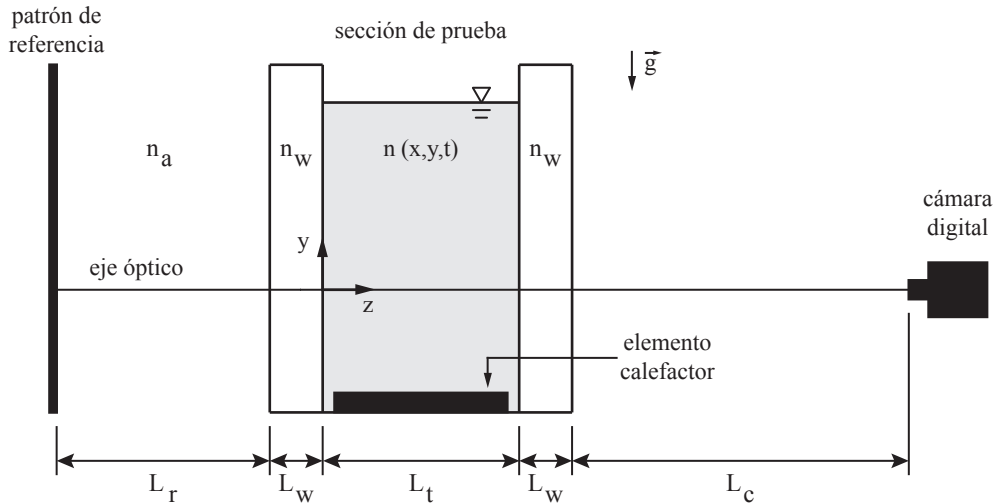


Figura 9.27: Arreglo óptico para el estudio de plumas térmicas. La cámara digital observa el patrón de referencia a través de la sección de prueba. Una fuente de calor genera una pluma térmica cuya evolución crea la distorsión aparente del patrón de referencia. En la figura se indican: distancias axiales L_r , L_w , L_t y L_c e índices de refracción del aire n_a , paredes laterales n_w y fluido $n(x, y, t)$.

La interpretación del arreglo óptico (cf. sec. 8.2.1, Anexo D), entrega la siguiente relación entre el campo de deformación de las imágenes, \vec{s} , y el gradiente de temperatura en el medio:

$$\vec{s} = C' \nabla T(x, y, t) \quad \text{con} \quad C' = -M L_t \left(\frac{L_w}{n_w} + \frac{L_t}{2n_0} + \frac{L_r}{n_a} \right) \frac{dn}{dT} \quad (9.26)$$

donde M es el aumento de sistema óptico, dn/dT la variación del índice de refracción del medio con la temperatura y se asume que la cámara está enfocada en el patrón de referencia. Los términos correspondientes a las distancias axiales entre los elementos usadas en las experiencias y los índices de refracción de los distintos medios se encuentran en la tabla

L_r [cm]	L_w [cm]	L_t [cm]	L_c [cm]	n_a	n_w	n_0	dn/dT [K ⁻¹]
22.8	0.48	12.2	54.5	1.000	1.52	1.333	$-1.5862 \cdot 10^{-4}$

Tabla 9.3: Distancias axiales, Índices de refracción del aire n_a , paredes laterales de vidrio n_w , agua n_0 y variación de este último con la temperatura dn/dT

9.3. La variación del índice de refracción del agua con la temperatura se determinó mediante la expresión de Murphy y Alpert [78]:

$$\frac{dn}{dT} = -\frac{3 \alpha n_0(\lambda)(n_0^2(\lambda) - 1)}{2 (2 n_0^2(\lambda) + 1)} \quad (9.27)$$

donde el término base del índice de refracción del medio que se obtuvo de la ecuación de dispersión de Cauchy [76]: $n_0(\lambda) = A + B/\lambda^2$, con constantes $A = 1.324166 \pm 1.3 \cdot 10^{-5}$ y $B = 3063.799 \pm 0.031$ de acuerdo a las experiencias de [138]. Para evaluar la ec. (9.27) se utilizó el valor del coeficiente de expansión térmica de $\alpha = 4.65 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ tomado de esta última referencia para agua a 20 °C. En la tabla 9.3 se indica la variación del índice de refracción del agua con la temperatura para una longitud de onda de la luz $\lambda = 589 \text{ nm}$ y una temperatura de $T = 16 \text{ °C}$.

El aumento de sistema óptico, M , se relaciona con la distancia focal y la posición aparente del objeto, S'_o (cf. Anexo D, ec D.18). Resulta conveniente, sin embargo, evaluar M de la razón entre distancias específicas en el sensor $\Delta \vec{x}_s$ y en el patrón de referencia $\Delta \vec{x}_r$, de acuerdo a:

$$M = \frac{\Delta \vec{x}_s}{\Delta \vec{x}_r} \quad (9.28)$$

considerando que la pantalla del monitor tiene dimensiones $19.704 \times 14.778 \text{ cm}^2$ y una resolución de $2048 \times 1536 \text{ pixeles}^2$, mientras que el sensor de la cámara digital tiene un tamaño de $23.5 \times 15.6 \text{ mm}^2$ y una resolución de $2564.102 \text{ pixeles/cm}$. En la tabla 9.4 se indica el aumento óptico M y la constante de proporcionalidad C' para los casos en que se adquirieron imágenes en los formatos RAW, i.e. los datos que son captados por el sensor de la cámara digital sin procesamiento, y de video. En dicha tabla se encuentra además la resolución del gradiente de temperatura para un desplazamiento medido en unidades de pixeles dada por $R_T = 1/(C' h_p)$, con h_p el tamaño de un pixel del sensor.

Formato	resolución [pixeles ²]	M	C' [cm ² /K]	R_T [°C/(cm pixel)]
RAW	6000×4000	$-7.11 \cdot 10^{-2}$	$-3.808 \cdot 10^{-3}$	-0.102
Video	1920×1080	$-2.30 \cdot 10^{-2}$	$-1.234 \cdot 10^{-3}$	-0.316

Tabla 9.4: Resolución para los formatos de imagen nativo (RAW) y de video de la cámara digital, aumento óptico M y constante C' del arreglo óptico

Características del patrón de referencia aleatorio

El patrón de referencia que muestra el monitor LED para el uso del algoritmo de correlación consiste en una distribución aleatoria de partículas generada por un código computacional. El patrón empleado en las experiencias se generó mediante el uso para crear las imágenes artificiales de los ensayos del algoritmo de correlación (cf. 9.3.2, Anexo F.3). El patrón es de tamaño 1536×1792 píxeles², cuyo ancho coincide con el del monitor LED y cuyas características que se indican en la tabla 9.5. El tamaño de las partículas, de 1.5 píxeles en la imagen generada por código, en las imágenes depende del formato de adquisición de la cámara digital. Estas siguen la relación de un pixel en el monitor corresponde a 1.753 píxeles en imagen RAW y 0.568 píxeles en video. En RAW diámetro aproximado 2.63 píxeles. En la figura 9.28 se compara un área seleccionada del patrón generado por código y registrado por la cámara digital en formato RAW y video.

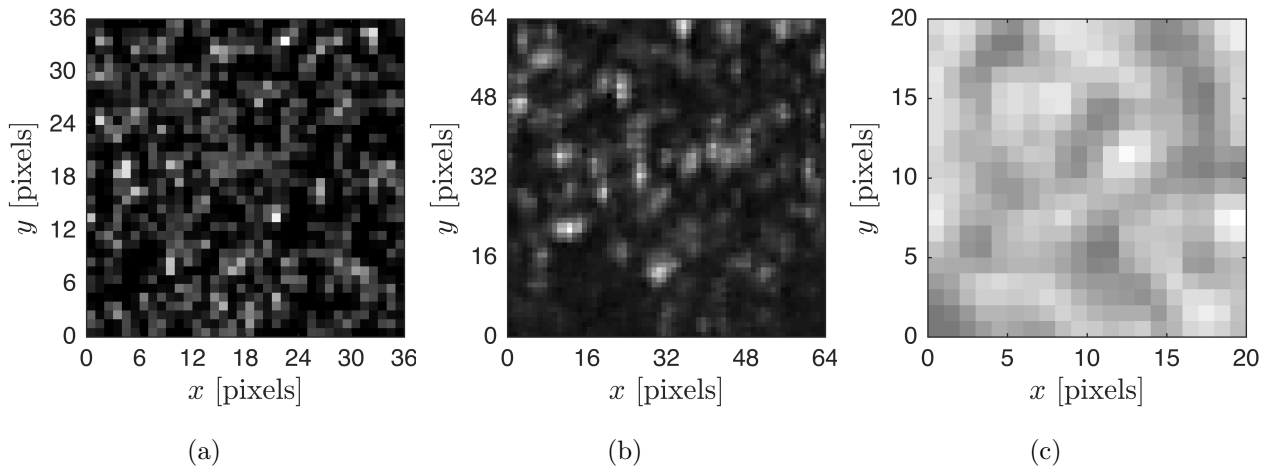


Figura 9.28: Patrón referencia con un motivo aleatorio de partículas. Se muestran las imágenes del patrón: (a) generada por código y adquirida en formatos (b) RAW de 14 Bits y (c) de video de 8 Bits.

I_0 [n.u.]	d_τ [pixels]	N_p [partículas]	c_p [partículas/pixel ²]	δ_p [pixels]
300	1.5	836764	0.304	2.05

Tabla 9.5: Características del patrón de referencia generado por código. Se indican: I_0 intensidad máxima, d_τ diámetro, N_p número, c_p densidad y $\delta_p \sim 2/\sqrt{\pi N_p}$ distancia media entre partículas.

Visualización cualitativa del fenómeno térmico

Una primera experiencia consistió en realizar una visualización cualitativa con el objetivo de verificar la resolución del arreglo óptico y la generación del fenómeno térmico. Para ello se empleó el método de franjas (cf. 8.2.2) y un patrón compuesto por líneas horizontales claras y oscuras, cada una de espesor en el monitor LED de 6 píxeles. Las imágenes se adquirieron

en formato nativo de la cámara digital (RAW), con un f-number 5.6, ISO 400 y un tiempo de exposición de 1/30 s. La distancia focal se varió levemente para evitar un efecto adverso a la medición de franjas de moiré y que genera el muestro del monitor LED por parte de la cámara, ambos con un mallado de píxeles de tamaño similar.

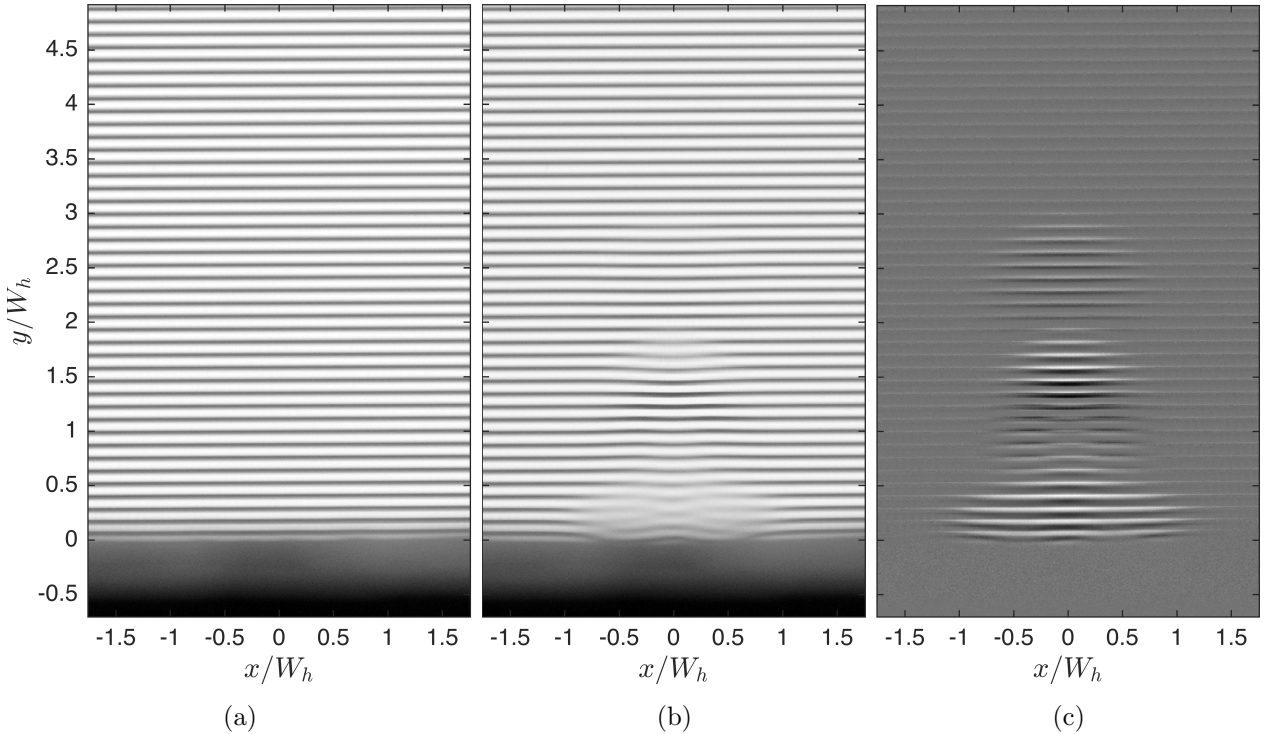


Figura 9.29: Visualización cualitativa de una pluma térmica para $\Delta T = 1.25 \text{ }^\circ \text{C}$. Se muestran las imágenes (a) I_0 del instante inicial y (b) I_t luego de 33.3 s. (c) Resta de intensidad, $I(t) - I(t_0)$, entre ambas imágenes. Las coordenadas están adimensionalizadas por el ancho del calefactor $W_h = 1.08 \text{ cm}$.

En las figuras 9.29 (a) y (b) se muestran imágenes del patrón de referencia no perturbado y perturbado por una pluma térmica, I_0 e I_t , respectivamente. Esta última corresponde a 33.3 s de evolución del fenómeno generado bajo control PI de temperatura con $\Delta T = 1.25 \text{ }^\circ \text{C}$. En la figura 9.29 (c) se muestra la resta de la intensidad de ambas imágenes, $I_t - I_0$, que indica las zonas con una componente vertical del gradiente de índice de refracción, $\partial n / \partial y$, no nula. Al mantener el signo en la resta (cf. 8.2.2), se generan pares de franjas claras y oscuras, donde el signo del gradiente de temperatura es positivo desde una franja oscura hacia una clara.

9.4.4. Medición de potencia y del campo de temperatura

En esta sección se discuten los resultados obtenidos para la evolución de una pluma térmica al interior de la cavidad bajo control de temperatura. Primero se presenta la medición de potencia requerida para la formación del fenómeno y luego la evolución de su campo de temperatura.

Evolución temporal de temperatura y potencia

En cada experiencia, la temperatura de pared del elemento calefactor, T_w , se encuentra inicialmente a la temperatura del fluido no perturbado $T_\infty = 15.86 \pm 0.05 \text{ }^\circ\text{C}$, donde esta variación considera el total de experiencias. Luego se genera una pluma térmica mediante un escalón de temperatura que impone el controlador PI en este elemento. En la figura 9.30 se muestra la evolución temporal de la diferencia de temperatura $\Delta T \equiv T_w - T_\infty$ para escalones de magnitud $1.00 \text{ }^\circ\text{C}$, $1.25 \text{ }^\circ\text{C}$ y $1.50 \text{ }^\circ\text{C}$. El tiempo de subida de las curvas es menor a 10 s, su sobrepaso es del orden de 10% y su tiempo de establecimiento es menor a 18.5 s para una banda de error del 2%. La evolución temporal del error del controlador para estas series se muestra en la 9.31. Luego del tiempo de establecimiento, el error es menor a 0.03°C y después de 50 s su valor promedio es de $7.2 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$ y su desviación estándar es de $1.6 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$.

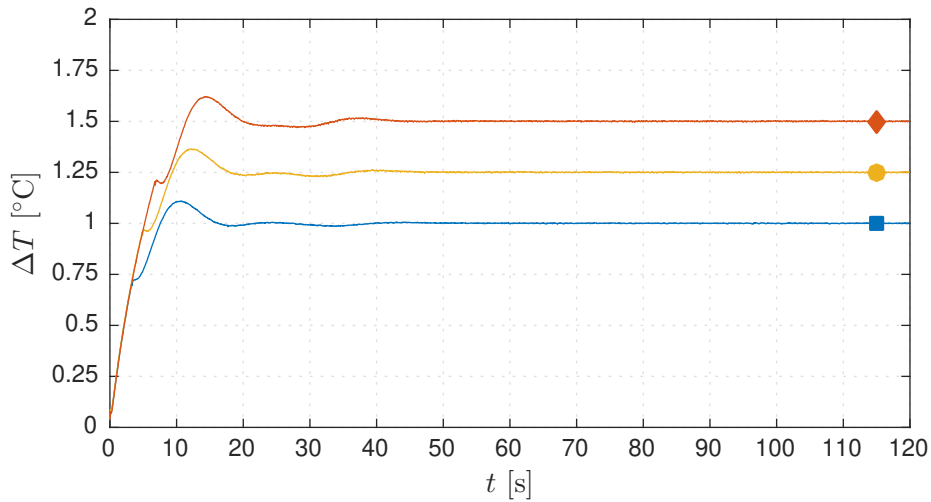


Figura 9.30: Evolución temporal de la diferencia de temperatura, ΔT , durante la evolución de una pluma térmica generada por un escalón de magnitud: (■) $1.0 \text{ }^\circ\text{C}$; (●) $1.25 \text{ }^\circ\text{C}$ y (◆) $1.5 \text{ }^\circ\text{C}$.

La potencia registrada en las experiencias anteriores para el sistema bajo control, es decir, luego del tiempo de establecimiento del controlador, se muestra en la figura 9.32. Para cada curva se puede observar entorno a los 30 s un máximo cuya magnitud aumenta con ΔT . Como se discute en el próximo punto, la presencia de estos máximos se puede asociar a la formación de la pluma térmica. Luego de aproximadamente 50 s la potencia disminuye levemente, pero en forma sostenida hasta el término de cada adquisición. Un monitoreo del voltaje en el elemento calefactor permitió descartar que este comportamiento se debe al cambio en el valor de su resistencia, la cual permanece prácticamente constante.

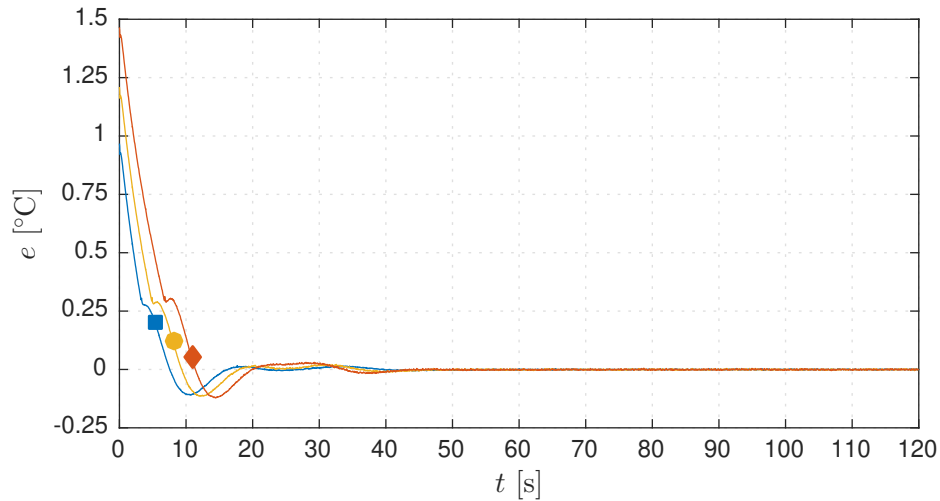


Figura 9.31: Evolución temporal del error, e , del controlador PI de temperatura durante la evolución de una pluma térmica generada por un escalón de magnitud: (■) 1.0 °C; (●) 1.25 °C y (◆) 1.5 °C.

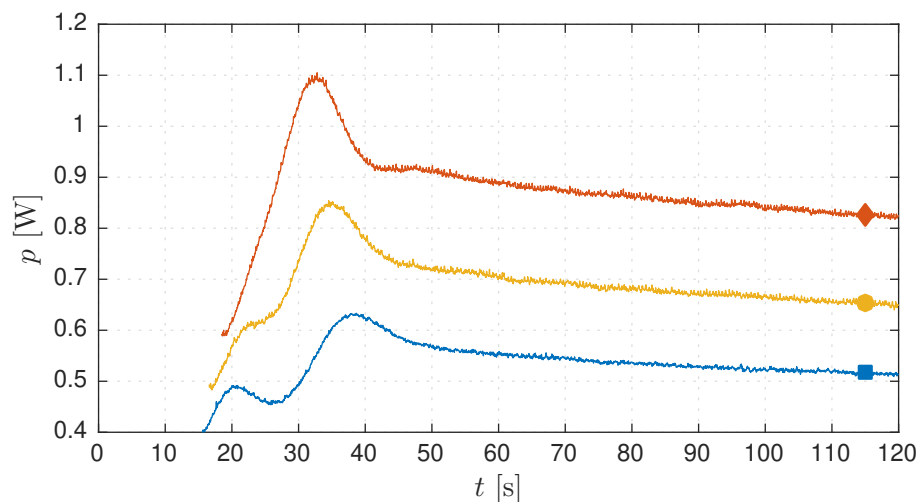


Figura 9.32: Evolución temporal de potencia, p , durante la evolución de una pluma térmica generada por un escalón de magnitud: (■) 1.0 °C; (●) 1.25 °C y (◆) 1.5 °C.

Evolución de los campos de temperatura

En las experiencias descritas en el punto anterior se adquirieron imágenes del patrón de referencia en formato de video para la reconstrucción del campo de temperatura de la pluma térmica. La aplicación de algoritmos para la reconstrucción del campo de temperatura se realizó de acuerdo metodología de procesamiento de imágenes discutida previamente (cf. 8.2.2,9.1.1). En las experiencias se realizó la adquisición de imágenes en los formatos nativo de la cámara digital (RAW) y de video de 8 Bits. El formato RAW entrega una mayor resolución, sin embargo genera un mayor desajuste entre imágenes producto de la vibración que genera el disparo de la cámara digital. Por este motivo, se trabajó principalmente con

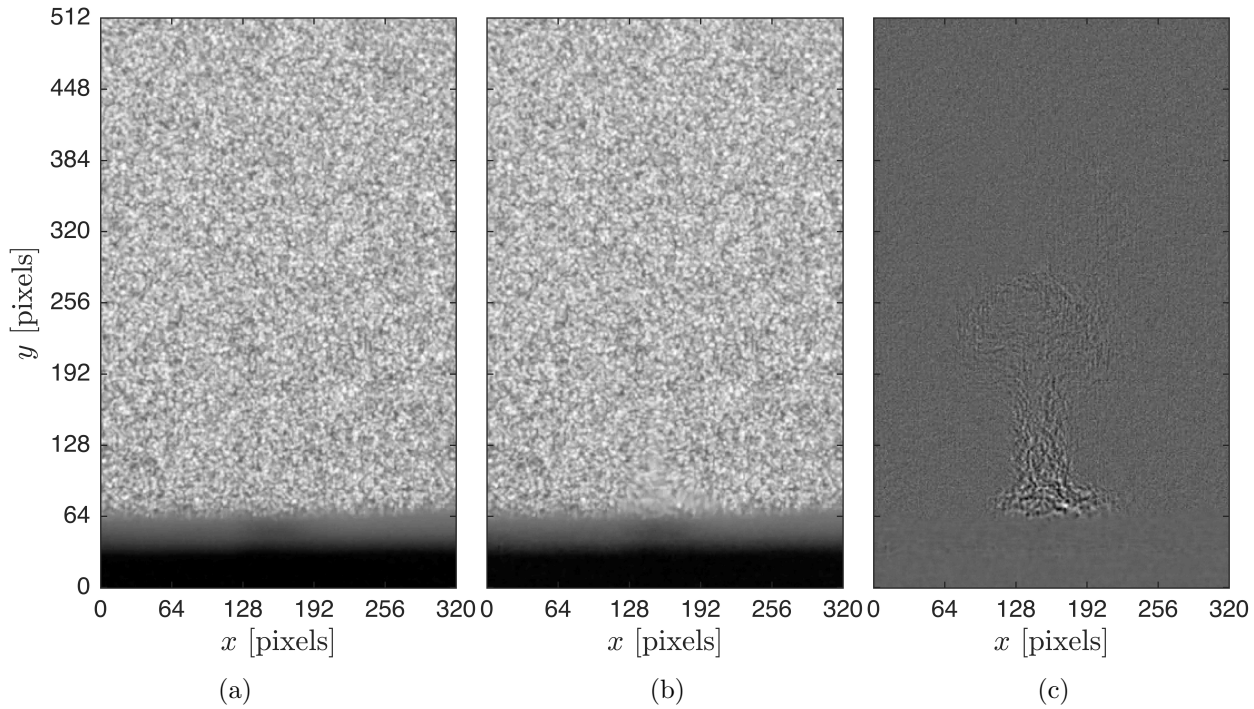


Figura 9.33: Imágenes del patrón de referencia en formato de video para $\Delta T = 1.00$ °C. (a) Imagen I_0 del instante inicial medio no perturbado. (b) Imagen I_t para 43.35 s de evolución. (c) Visualización cualitativa de la pluma térmica mediante la resta de intensidad, $I_t - I_0$, entre ambas imágenes.

imágenes en formato de video, que se procesaron según se describe a continuación:

Preprocesamiento de imágenes. Las imágenes en formato de video contienen una cierta componente de ruido, que se redujo promediando 15 cuadros para la imagen del estado inicial y 3 cuadros para las imágenes del medio perturbado. En la figura 9.33 se muestran imágenes promedio para el estado inicial y luego 43.35 s de evolución de una pluma térmica generada por un escalón de $\Delta T = 1.00$ °C. La distorsión aparente del patrón de referencia es prácticamente imperceptible, sin embargo la resta ambas imágenes en dicha figura permite apreciar la formación de una pluma térmica.

Medición del campo deformación. El campo deformación entre las imágenes se determinó mediante el algoritmo de correlación con ventanas de interrogación de tamaño 32×32 píxeles², distribuidas en una malla fija con un espaciado de 1 píxel. En forma similar a los ensayos del algoritmo (cf. 9.3.2), las ventanas de peso para el estimador y empleada en la evaluación del desplazamiento son la propuesta por Nogueira y Top-Hat de lado 2 píxeles, respectivamente. A su vez, el método interpolación para la construcción del estimador denso y en la deformación de imágenes es Spline de quinto grado.

Cálculo del campo de temperatura. El cálculo del campo de temperatura se realizó mediante el algoritmo de integración `intgrad2` [139] usando la condición de borde de Dirichlet.

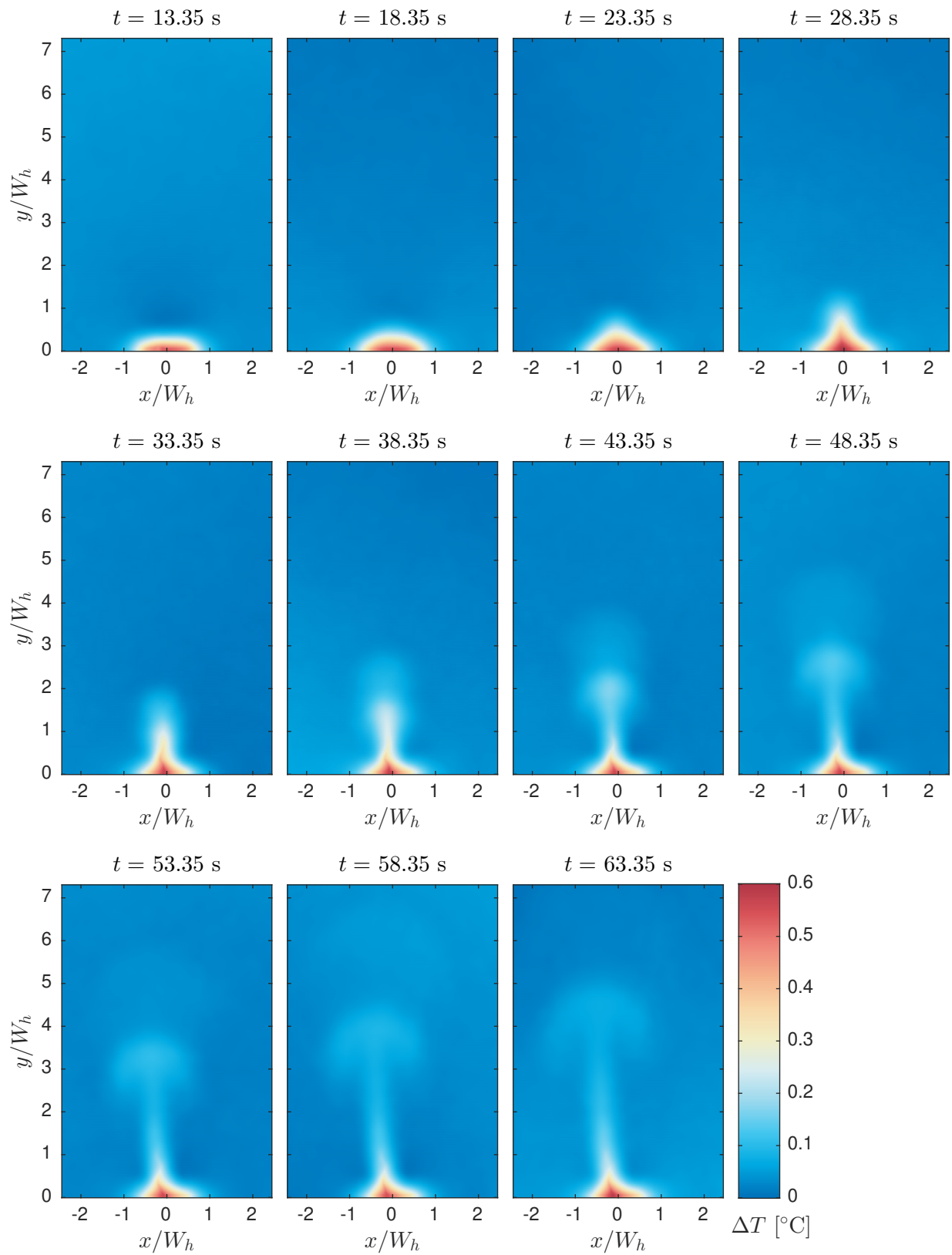


Figura 9.34: Evolución temporal del campo de temperatura de una pluma térmica entre los instantes $t = 13.35$ s y $t = 63.35$ s, con un intervalo de 5 s. La pluma se generó por un escalón de temperatura de magnitud de 1.00 $^{\circ}\text{C}$, que corresponde a un número de Rayleigh $Ra = 1.05 \cdot 10^4$.

En las experiencias se ajustó el número de Rayleigh por debajo del umbral de inestabilidad de una pluma térmica bajo una configuración similar. Este umbral toma un valor de $Ra \sim 6 \cdot 10^5$ para $Pr = 7$ de acuerdo a las simulaciones numéricas realizadas por Hattori *et. al.* [140]. En la figura 9.34 se muestra la evolución del campo de temperatura obtenido para $\Delta T = 1.0 \text{ }^\circ\text{C}$ y que corresponde a un número de Rayleigh $Ra = 1.06 \cdot 10^4$. En ella se puede apreciar, en una primera etapa, la formación de la capa límite térmica entorno al elemento calefactor y luego el desarrollo inicial de la pluma térmica. Este proceso sucede hasta que la potencia alcanza un valor máximo, en aproximadamente $t = 38 \text{ s}$, de acuerdo a la figura 9.32. A partir de este instante se observa, a su vez, un quiebre en la altura recorrida por la pluma térmica, h , obtenida de los campos de temperatura y que se muestra en la figura 9.35. Luego del quiebre, pluma se asciende a una velocidad aproximadamente constante de 0.12 cm/s , la cual se puede contrastar con el valor teórico [141, 142]:

$$v = (0.57 \pm 0.02) \frac{\ln \epsilon^{-2}}{2\pi} \left(\frac{\alpha g P}{\rho C_p \nu} \right)^{1/2} \quad (9.29)$$

donde ϵ satisface la ecuación $\epsilon^4 \ln \epsilon^{-2} = Pr^{-1}$ y el número de Prandtl cumple $Pr > 7$. Para la potencia se utilizó su valor promedio, $P = 0.58 \text{ W}$, obtenido en el intervalo $38 \text{ s} < t < 60 \text{ s}$ y que entrega una velocidad de 0.14 cm/s , es decir con un 14% de error.

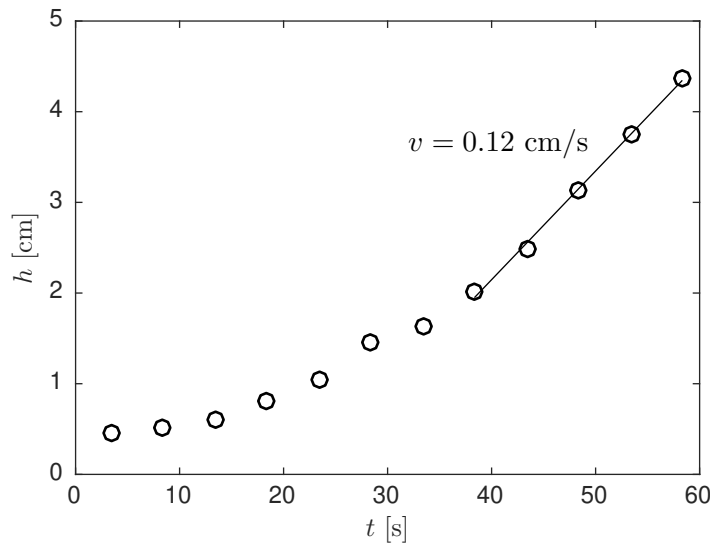


Figura 9.35: Altura recorrida por la pluma térmica h , en función del tiempo para un escalón de temperatura de magnitud $1.0 \text{ }^\circ\text{C}$, es decir, con un número de Rayleigh $Ra = 1.06 \cdot 10^4$. Se indica la velocidad de ascenso de la pluma $v = 0.12 \text{ cm/s}$ a partir del instante $t = 38 \text{ s}$.

9.5. Conclusiones

En el presente capítulo se dedicó al desarrollo de la técnica óptica de medición Synthetic Schlieren y su aplicación a la reconstrucción del campo de temperatura de plumas térmicas. Una primera etapa del trabajo se dedicó a la investigación sobre los temas involucrados e implementación de algoritmos. En ella se realizaron las siguientes tareas:

- (i) Interpretación del arreglo óptico de la técnica Synthetic Schlieren realizada con el objetivo de determinar el desplazamiento aparente del patrón de referencia que genera el medio en estudio. En ella se utiliza el método de matrices de propagación, un modelo para la cámara digital compuesto por un lente y un sensor CCD y se presenta en el Anexo D.
- (ii) Simulación numérica de una pluma térmica en una cavidad que permitió caracterizar el fenómeno térmico en términos de la transferencia de calor, formación inicial de una pluma térmica y la posterior evolución de su campo de temperatura.
- (iii) Implementación de un algoritmo de correlación para cuantificar la deformación del patrón de referencia propio de la técnica Synthetic Schlieren. El algoritmo es del tipo iterativo con deformación de imágenes y busca cumplir con los requerimientos de resolución espacial elevados que presenta el campo de temperatura característico de plumas térmicas. El algoritmo se implementó en un código computacional escrito en Ansi C y requirió de la elaboración de una serie de rutinas de procesamiento de imágenes.
- (iv) Ensayo del algoritmo de correlación mediante imágenes generadas artificialmente. Una prueba de desplazamiento uniforme impuesto a las partículas permitió constatar la alta precisión que entrega el algoritmo. La modulación espacial que realiza el algoritmo, descrita por la función MTF, se estimó mediante un campo de deformación sinusoidal impuesto en las partículas. Esta prueba indica que el algoritmo permite recuperar un elevado rango de frecuencias espaciales y que es robusto ante elevados gradientes de deformación.

En una segunda etapa se aplicó el método óptico desarrollado al estudio experimental de una pluma térmica al interior de una cavidad. En ella cabe destacar:

- (i) Implementación de un dispositivo experimental para generar plumas térmicas. Para ello se desarrolló un sistema de control Proporcional Integral Derivativo (PID) de temperatura para el elemento calefactor que genera el fenómeno térmico. El sistema de control se basó en los circuitos eléctricos de drenaje de corriente y medición de temperatura. El uso de conversores análogo digital, digital análogo y una placa de desarrollo Arduino para la comunicación con los circuitos permito la adquisición de datos en un PC.
- (ii) Ensayos del controlador de temperatura. Se estudió la respuesta del sistema ante un escalón de potencia en términos de la temperatura del elemento calefactor. Las curvas de potencia experimentales presentan un comportamiento similar a la curva de temperatura que se obtuvo mediante simulación numérica. Se ajustaron experimentalmente los coeficientes del controlador y se observó mediante ensayos de escalones de temperatura la estabilidad y tiempo de respuesta adecuado del sistema de control.
- (iii) Implementación de un arreglo óptico de Synthetic Schlieren. En la presente implementación se utilizó un monitor LED controlado por computador que permite conveniente para mostrar distintos tipos de patrones de referencia y variar sus características.

- (iv) Observación cualitativa del fenómeno térmico mediante un patrón de referencia compuesto por franjas horizontales. Este método de medición que no requiere mayores recursos computacionales permitió la alineación del montaje experimental y verificar que este funciona del correctamente.
- (iii) Reconstrucción del campo de temperatura de una pluma térmica bajo control PID de temperatura. El método óptico implementado permite observar el desarrollo espacio temporal de plumas en la cavidad. En las experiencias se observa que la erupción de la pluma que ocurre entorno un máximo de potencia requerida para mantener la temperatura del elemento calefactor constante. En este instante se observa, a su vez, la transición a un desplazamiento a velocidad constante de la pluma térmica.

El método óptico implementado constituye un método conveniente de medición dado su carácter no intrusivo. Sus aplicaciones son diversas, entre ellas el estudio de diversos tipos flujos térmicos o fenómenos donde la variable de interés se relaciona con el índice de refracción del medio como lo son flujos de superficie o dinámica de anillos de vorticidad. Las herramientas desarrolladas durante esta etapa del trabajo tienen, a su vez, distintas aplicaciones. El algoritmo de correlación de imágenes, por ejemplo, se puede emplear en una implementación de la técnica de medición Particle Image Velocimetry (PIV). Por otra parte, el sistema de adquisición y control de temperatura basado en circuitos eléctricos puede reducir los costos en la implementación de un montaje experimental.

Parte IV

Conclusiones y perspectivas

Capítulo 10

Conclusiones generales

El presente trabajo tuvo como objetivo general desarrollar de técnicas experimentales de medición para el estudio de fenómenos térmicos. El trabajo consistió de las siguientes partes principales:

Estudio experimental sobre la convección de Rayleigh-Bénard

El objetivo principal de esta parte del trabajo consistió en observar transiciones de flujo en la inestabilidad en términos de la transferencia de calor. Este tema surge de posibilidad de aplicar esta técnica de medición al estudio de convección inclinada, donde una nueva componente del vector de gravedad permite transitar entre distintos regímenes de flujo.

Para cumplir con el objetivo propuesto fue necesario contar con un montaje experimental capaz de medir pequeñas variaciones de la transferencia de calor generadas por transiciones de flujo. Esto motivó una extensa etapa de puesta en marcha del montaje experimental implementado inicialmente por [58–60]. En ella, el desarrollo de un nuevo método de medición de temperatura y modificaciones al sistema de control de la experiencia permitieron alcanzar la resolución en temperatura y potencia requerida. Luego se estudió el comportamiento transiente y estacionario del sistema en el régimen de conducción. Esto permitió caracterizar el comportamiento de las pérdidas de calor y escalas temporales del sistema.

En la última etapa del trabajo se estudió la transferencia de calor en régimen de convección. Para una configuración horizontal de la celda se caracterizó la transferencia de calor del fluido y se obtuvo el número de Rayleigh crítico que indica la transición entre los regímenes conductivo y convectivo. Finalmente se caracterizó el fenómeno de convección para un barrido de ángulo de inclinación de la celda. En esta experiencia se lograron observar cambios en la transferencia de calor generadas por transiciones de flujo. El comportamiento general observado concuerda con experiencias similares y se encontró un régimen dependiente del tiempo a leves ángulos de inclinación. Otro aspecto interesante que se recoge de las experiencias es que la precisión del sistema de medición de temperatura permite detectar cambios en el fluido de la lectura de sensores ubicados en las placas que lo confinan.

Reconstrucción del campo de temperatura de plumas térmicas

Esta segunda parte del trabajo tuvo como objetivo principal implementar un método óptico capaz de reconstruir la distribución espacio temporal del campo de temperatura de plumas

térmicas. El método desarrollado se basa en la cuantificación de la deformación aparente de un patrón de referencia observado a través del medio fluido y su relación con los gradientes del índice de refracción del medio. El desarrollo del método requirió de la implementación de diversos algoritmos de procesamiento digital de imágenes, entre los que se destaca un algoritmo de correlación del tipo iterativo con deformación de imágenes. Este algoritmo permite cuantificar la deformación de imágenes generadas por el desarrollo de plumas térmicas y que requieren de una elevada resolución espacial.

Una vez implementado el método, este se aplicó al estudio del desarrollo de una pluma térmica al interior de una cavidad. Control de temperatura que emplea circuitos eléctricos para suministrar calor y medir temperatura. El método permitió reconstruir su distribución espacio temporal de temperatura y estudiar sus características.

Perspectivas

Los métodos de medición desarrollados durante el presente trabajo se pueden utilizar en distintas variantes de las experiencias realizadas y en diversas aplicaciones. En el caso de Rayleigh-Bénard, resulta interesante explorar con mayor el comportamiento de convección en función del número de Rayleigh. A su vez, el montaje desarrollado permite introducir frecuencias externas al sistema variando el ángulo de inclinación de la celda de acuerdo a una función temporal. Este es un posible método para generar nuevos regímenes de flujo y transiciones al interior de la celda. Por otra parte, se discutió detalladamente la prueba de escalón de temperatura impuesta en la placa fría. La metodología y desarrollo teórico realizado pueden ser utilizados como un método preciso para la medición de viscosidad en una sistema con bajas pérdidas de calor.

El método óptico desarrollado se puede extender al estudio de plumas térmicas a distintos valores de sus parámetros de control u otras configuraciones. Por ejemplo, resulta interesante estudiar el efecto de paredes laterales en el régimen de flujo como ha sido observado en las simulaciones numéricas realizadas por [123]. El método se puede extender al estudio de otros fenómenos térmicos utilizando una metodología similar si éstos son de carácter bidimensional. La reconstrucción de flujos tridimensionales también es posible, pero requiere de un desarrollo de métodos computacionales. Otro desarrollo interesante consiste en aplicar la metodología de control de la experiencia de Rayleigh-Bénard al montaje de plumas térmicas. Esto permitiría medir simultáneamente el campo de temperatura y el calor transferido al fluido por el elemento calefactor. Por último, cabe mencionar que se podría implementar la técnica de medición Particle Image Velocimetry (PIV) mediante el algoritmo de correlación desarrollado para el método óptico.

Parte V
Apéndices

Apéndice A

Planos de la celda de convección

En el presente Anexo se encuentran los planos de fabricación de los elementos que componen la celda de convección. En la figura A.1 se encuentran las dimensiones de paredes laterales, placa caliente y elemento calefactor. En la figura A.2 se encuentran las dimensiones de la placa fría y difusor y se indica el orden de conexión de las mangueras que comunican ambos elementos.

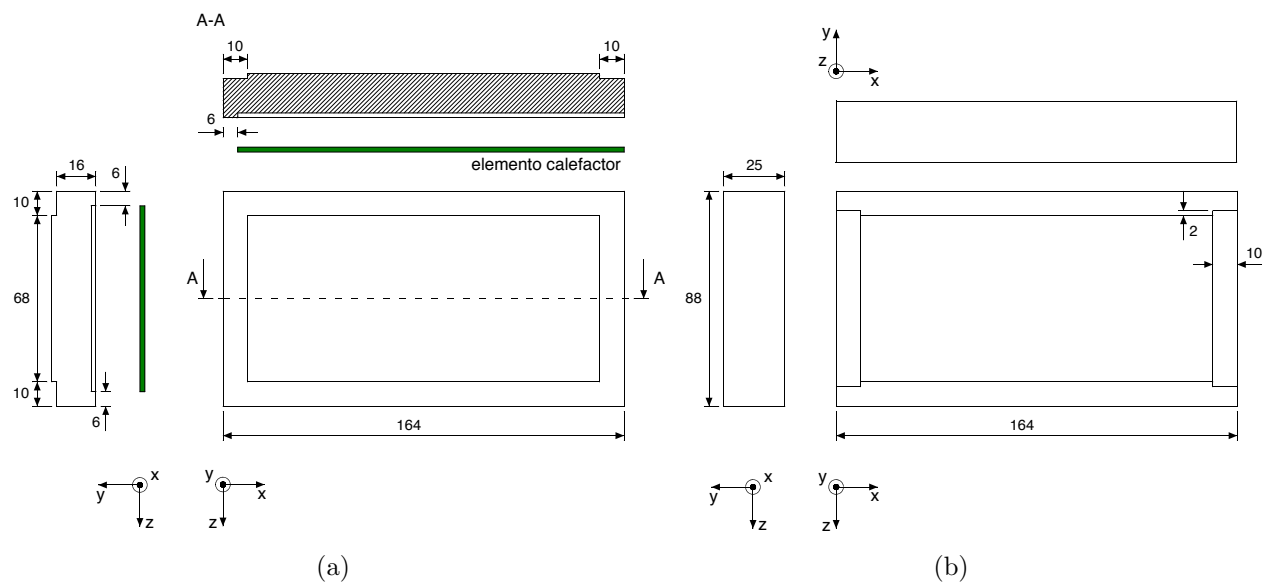


Figura A.1: Dimensiones principales de (a) placa caliente y elemento calefactor y (b) paredes laterales.

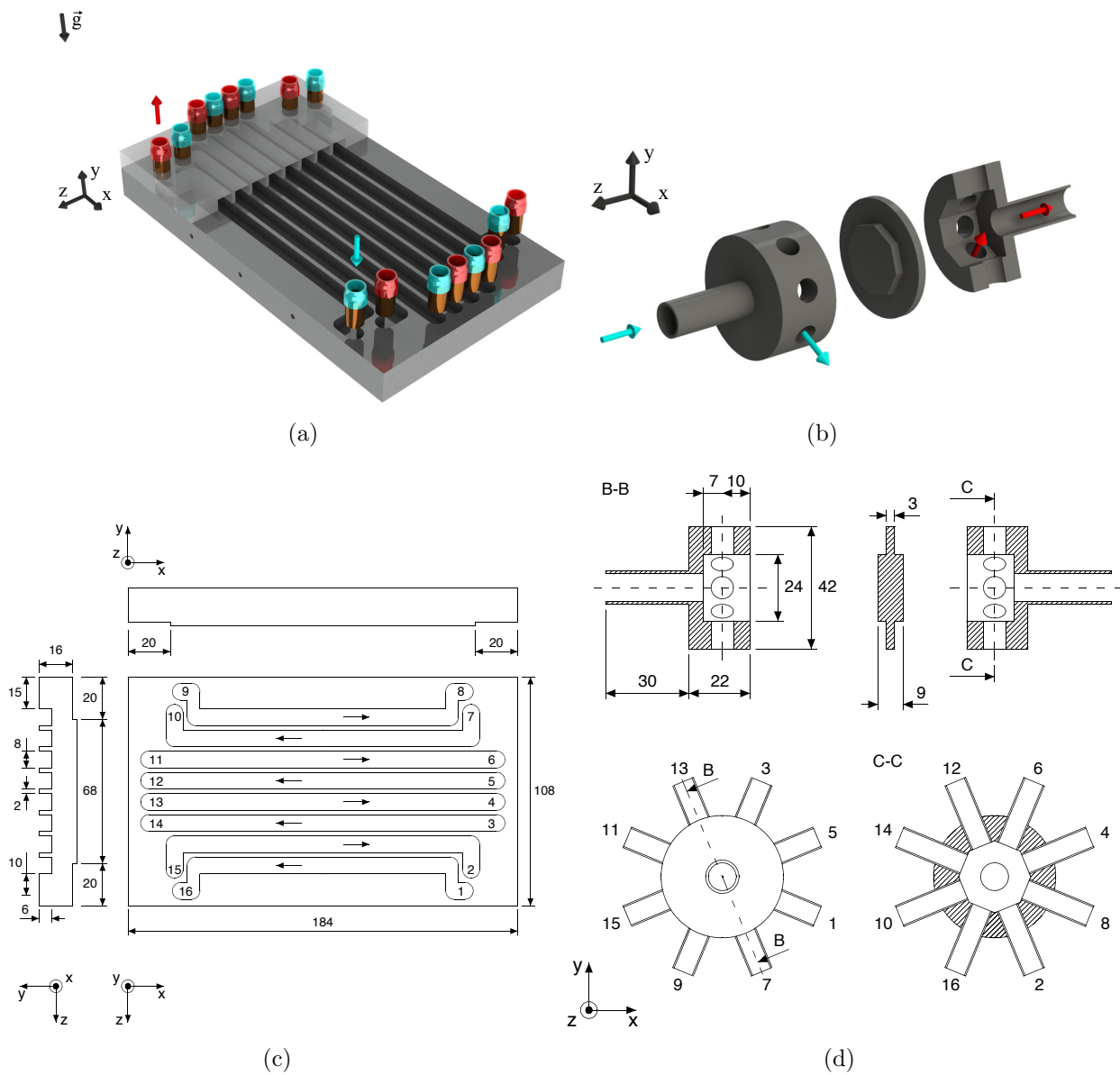


Figura A.2: Esquemas de la placa fría y difusor. (a) Vista isométrica de la placa fría. Se muestra su cubierta de acrílico y conectores a las mangueras provenientes del difusor. (b) Vista explosionada del difusor. Este elemento inicialmente divide el agua de enfriamiento que ingresa a los 8 canales de la placa fría, que luego recolecta una vez que ha circulado por dicha placa. (c) Dimensiones principales de la placa fría. (d) Dimensiones principales del difusor. Los números en las figuras (b) y (c) indican el orden de conexión de las mangueras que comunican a la placa fría y difusor.

Apéndice B

Propiedades de los fluidos de trabajo

En el presente anexo se estiman las propiedades, en función de la temperatura, de los fluidos utilizados en el presente trabajo. En la sección B.1 se encuentran las fórmulas para agua y glicerina, la primera utilizada en las experiencias sobre plumas térmicas. En la sección B.2 se encuentran las fórmulas para una solución entre ambos componentes utilizada en el estudio sobre convección de Rayleigh-Bénard.

B.1. Propiedades del agua y glicerina

Para evaluar las propiedades de agua y glicerina se cuenta con los ajustes polinomiales de grado N de [42]:

$$\frac{\chi - \chi_m}{\chi_m} = \sum_{k=1}^N a_k (T - T_m)^k \quad (\text{B.1})$$

donde χ indica la propiedad, χ_m su valor a una temperatura de referencia $T_m = 40$ °C y a_k los coeficientes. Estos coeficientes se encuentran en la tablas B.1 y B.2 para agua y glicerina, respectivamente. Las propiedades de ambos fluidos se estimaron de estos polinomios, excepto:

- **Conductividad térmica de la glicerina.** El ajuste propuesto por [42] entrega resultados incoherentes con [143, 144], por lo que se reemplazó por la expresión [144]:

$$k_g = a_{kg} + b_{kg}T \quad [\text{W}/(\text{m K})] \quad (\text{B.2})$$

con $a_{kg} = 0.2484397$, $b_{kg} = 1.318422 \cdot 10^{-4}$ y T en Kelvin.

- **Viscosidad dinámica del agua.** Se utilizó la expresión propuesta por [145], que reproduce las bases de datos que ahí se mencionan con un error de 0.4 – 0.5 %, dada por:

$$\mu_w = 1.790 \cdot 10^{-3} \exp\left(-\frac{(1230 + T)T}{36100 + 360T}\right) \quad [\text{Pa s}] \quad (\text{B.3})$$

con T en °C.

Propiedad	Unidades	χ_m	a_1 [10 ⁻⁴ K ⁻¹]	a_2 [10 ⁻⁶ K ⁻²]	a_3 [10 ⁻⁸ K ⁻³]
$\nu_w/10^{-6}$	m ² /s	0.6690	-175.9	295.8	-460
$\rho_w/10^3$	Kg/m ³	0.9922	-3.736	-3.98	—
$C_{p,w}/10^3$	J/(Kg K)	4.1690	0.084	4.60	—
k_w	W/(m K)	0.6297	21.99	-17.8	—

Tabla B.1: Coeficientes a_k para evaluar propiedades del agua propuestos por Ahlers [42]. Las propiedades son: ν_w viscosidad cinemática; ρ_w densidad; $C_{p,w}$ calor específico y k_w conductividad térmica. Se indica por χ_m el valor de la propiedad a una temperatura de referencia $T_m = 40$ °C.

Propiedad	Unidades	χ_m	a_1 [10 ⁻⁴ K ⁻¹]	a_2 [10 ⁻⁶ K ⁻²]	a_3 [10 ⁻⁸ K ⁻³]	a_4 [10 ⁻¹⁰ K ⁻⁴]	a_5 [10 ⁻¹² K ⁻⁵]
$\nu_g/10^{-6}$	m ² /s	238.71	-702.83	2393.1	-6923.0	33131.3	-71517.5
$\rho_g/10^3$	Kg/m ³	1.2477	-4.789	-0.3795	—	—	—
$C_{p,g}/10^3$	J/(Kg K)	2.5108	22.511	—	—	—	—

Tabla B.2: Coeficientes a_k para evaluar propiedades de la glicerina propuestos por Ahlers [42]. Las propiedades son: ν_g viscosidad cinemática; ρ_g densidad y $C_{p,g}$ calor específico. Se indica por χ_m el valor de la propiedad a una temperatura de referencia $T_m = 40$ °C.

Las propiedades restantes, difusividad térmica κ , viscosidad cinemática ν y coeficiente de expansión térmica α , se obtuvieron de las propiedades anteriores usando sus definiciones:

$$\kappa = \frac{k}{\rho C_p} \quad \mu = \rho \nu \quad \alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (\text{B.4})$$

donde ρ_0 es la densidad a una temperatura de referencia. Estas propiedades se distinguen usando los subíndices w para agua y g para glicerina, en forma similar a las tablas anteriores.

B.2. Propiedades de una solución agua-glicerina

En la presente sección se estiman las propiedades de una solución agua y glicerina, con una concentración $\gamma_{pg} = 95$ % m/m de glicerina, utilizada en el estudio sobre convección de Rayleigh-Bénard. Para ello se utilizaron leyes de mezcla entre sus componentes, cuyas propiedades se estiman de las fórmulas entregadas en la sección anterior. Esto a excepción de la viscosidad que se estimó mediante el método que se discute a continuación.

Viscosidad dinámica. En las soluciones agua-glicerina, los efectos no-Boussinesq se deben principalmente a la gran variación de la viscosidad con la temperatura T . La viscosidad dinámica μ se desvía considerablemente de las expresiones comúnmente usadas: Litovitz, Arrhenius o modelo exponencial [50]. Entre las alternativas a estas expresiones se encuentran

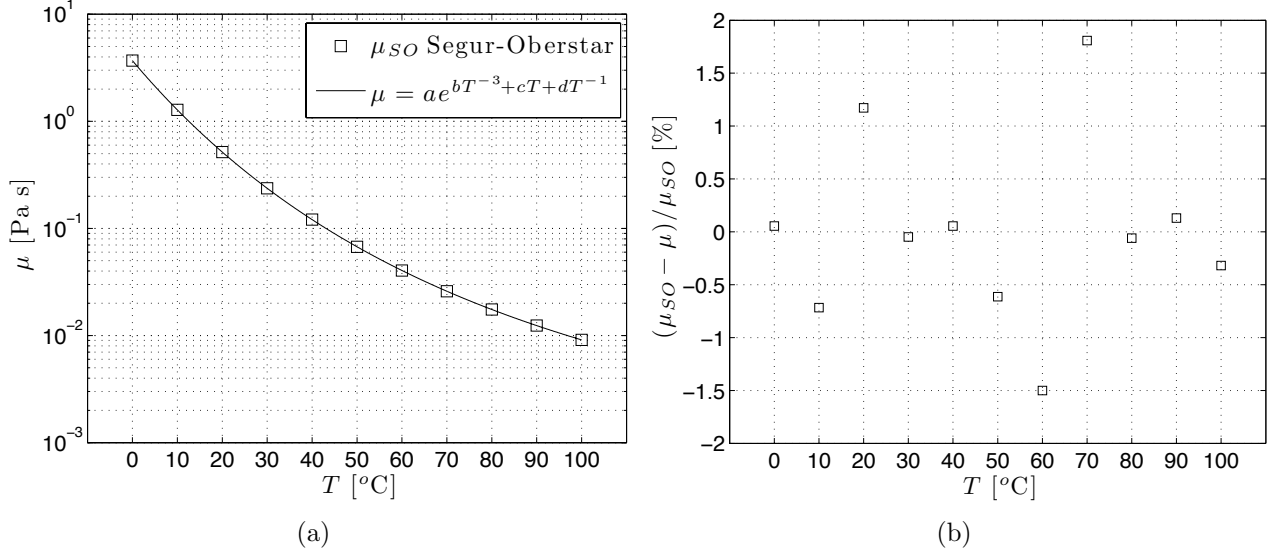


Figura B.1: (a) Viscosidad dinámica μ en función de la temperatura para una solución agua - 95 % m/m glicerina: (\square) μ_{SO} datos de Segur y Oberstar [61]; (-) Ajuste $\mu = a e^{bT^{-3} + cT + dT^{-1}}$. (b) Error relativo $(\mu_{SO} - \mu)/\mu_{SO}$ para distintas temperaturas.

γ_{pg} [%]	a [Pa s]	b [K ³]	c [K ⁻¹]	d [K]
90	$1.01266 \cdot 10^9$	$3.31214 \cdot 10^8$	$-3.08786 \cdot 10^{-2}$	$-7.72577 \cdot 10^3$
95	2.12114	$2.69286 \cdot 10^8$	$-7.88607 \cdot 10^{-3}$	$-2.86973 \cdot 10^3$

Tabla B.3: Coeficientes del ajuste $\mu = a e^{bT^{-3} + cT + dT^{-1}}$, con T en K y μ en Pa s para una solución agua-glicerina. Se muestran coeficientes para $\gamma_{pg} = 90\%$ obtenidos por [146] y utilizados para obtener los coeficientes del presente trabajo a $\gamma_{pg} = 95\%$.

diferentes leyes de mezcla [145, 147, 148] y un ajuste de cuatro parámetros dado por [50]:

$$\mu = a e^{bT^{-3} + cT + dT^{-1}} \quad (\text{B.5})$$

con coeficientes a , b , c y d . En el presente trabajo se ajustaron los coeficientes de la ec. (B.5) a los datos de Segur y Oberstar [61]. Esto se realizó con el método de mínimos cuadrados, utilizando como punto de partida los coeficientes para $\gamma_{pg} = 90\%$ de [146]. Los coeficientes para el punto de partida y obtenidos para $\gamma_{pg} = 95\%$ se encuentran en la tabla B.3. En la figura B.1 se muestra el ajuste obtenido y el error relativo a los datos. El máximo error relativo obtenido 1.81 % es menor al reportado en [146] para $\gamma_{pg} = 90\%$ con otras expresiones: 7.26 % (Litovitz), 29.47 % (Arrhenius) y 47.25 % (exponencial). Por otra parte, la precisión de los datos utilizados se estima $\pm 1\%$ para $T < 60\text{ }^\circ\text{C}$ y de $\pm 3.0\%$ para temperaturas mayores [61].

Densidad. La densidad de la solución agua-glicerina, ρ , se estimó usando una ley de mezcla lineal entre sus componentes, dada por:

$$\rho(\gamma_{pg}) = \gamma_{pg}\rho_g + (1 - \gamma_{pg})\rho_w \quad (\text{B.6})$$

con ρ_w y ρ_g la densidad del agua y glicerina, respectivamente. Esta fórmula es teóricamente inexacta debido a que descarta la posible interacción entre ambos componentes, sin embargo el error inducido es generalmente muy pequeño [145]. Según se menciona en esta referencia, el error varía entre $\pm 0.8\%$ para los datos de Adamenko *et. al.* [149], adquiridos en un rango $17 < T < 83$ °C y $60 < \gamma_{pg} < 86\%$. Para la concentración de interés del presente trabajo, $\gamma_{pg} = 95\%$, el error es menor y del orden de 0.1% [150].

Calor específico. En forma similar a la densidad, el calor específico de la solución agua-glicerina, C_p , se estimó mediante la ley de mezcla lineal entre sus componentes, dada por [50]:

$$C_p(\gamma_{pg}) = \gamma_{pg}C_{p,g} + (1 - \gamma_{pg})C_{p,w} \quad (\text{B.7})$$

con $C_{p,w}$ y $C_{p,g}$ el calor específico del agua y glicerina, respectivamente. Esta ley de mezcla puede ser inexacta, según se discute en [151], y para la concentración utilizada en el presente trabajo el error es del orden de 3% .

Conductividad térmica. Para estimar la conductividad térmica k de la solución agua-glicerina $k(\gamma_{pg})$ se utilizó la expresión propuesta por Rastorguev (1966) [152]:

$$k(\gamma_{pg}) = \gamma_{pg}k_g + (1 - \gamma_{pg})k_w - 1.4\gamma_{pg}(1 - \gamma_{pg})(k_w - k_g - 0.2) + 0.0014\gamma_{pg}(1 - \gamma_{pg})(T - 20) \quad (\text{B.8})$$

con k en W/(m K) y T en °C. Como se menciona en el trabajo de Valvano [153], la incerteza asociada a esta ley de mezcla es del orden de 2% .

Propiedades derivadas. La difusividad térmica κ , viscosidad cinemática ν y coeficiente de expansión térmica α de la solución agua-glicerina se obtuvo de las propiedades anteriores usando sus definiciones dadas por la ec B.4.

Apéndice C

Soluciones a la ecuación de calor unidimensional transiente

En el presente Anexo se resuelve la ecuación de calor unidimensional transiente, con el objetivo de modelar el flujo de calor en la celda de convección ante una prueba de escalón de temperatura impuesto en la placa fría (cf. 5.2.1). El interés consiste en obtener la respuesta a esta prueba en términos de la potencia disipada en la placa caliente. En una representación unidimensional del problema, esto corresponde al determinar la potencia a suministrar en el borde a temperatura constante. En la sección C.1 se resuelve el problema para un escalón ideal, y luego, en la sección C.2 para un escalón descrito por una función variable en el tiempo. En ambos casos se resolvió la ecuación de calor unidimensional dada por:

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{C.1})$$

con T la temperatura, y la coordenada vertical, t el tiempo y κ la difusividad térmica del material, esta última se supone que no depende de la temperatura. En la sección C.3 se utilizan los resultados obtenidos para expresar la potencia disipada durante la prueba experimental mencionada previamente. La solución a los problemas anteriores se obtuvo usando los métodos que se encuentran en [65, 154].

C.1. Respuesta ante un escalón ideal de temperatura

El problema de un escalón de temperatura ideal considerado en la presente sección se indica en la figura C.1. La temperatura se mantiene a un valor T_1 constante en el extremo y en el extremo opuesto corresponde a la función escalón $T_2(t)$. Esta función toma un valor inicial $T_{2,i}$ hasta $t = 0$, momento en que cambia a un valor final $T_{2,f} = T_{2,i} + \delta T_2$. Se supone que en los estados inicial ($t = 0$) y final ($t \rightarrow \infty$) se tiene una distribución lineal de temperatura (cf. fig. C.1 (b)). Como se mencionó previamente, se desea determinar la potencia $p(t)$ a suministrar en el extremo a temperatura constante.

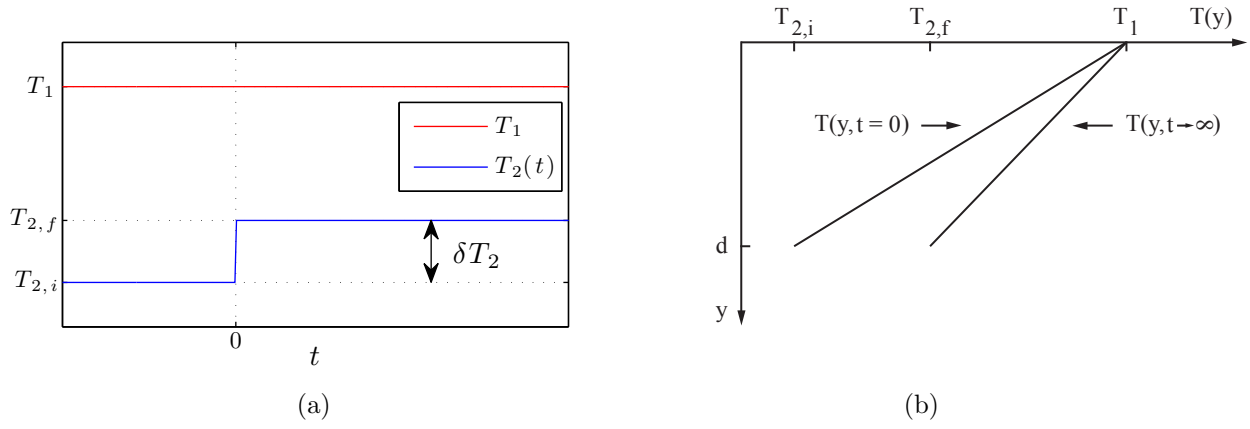


Figura C.1: Problema de un escalón ideal de temperatura. (a) Condiciones de borde. La temperatura en un extremo se mantiene a T_1 constante y en el extremo opuesto evoluciona de acuerdo a $T_2(t)$. Esta función corresponde a un escalón ideal, impuesto en $t = 0$ y con magnitud $\delta T_2 = T_{2,f} - T_{2,i}$, con $T_{2,i}$ y $T_{2,f}$ los valores iniciales y finales para $T_2(t)$. (b) Perfil de temperatura $T(y, t)$. Se supone una distribución lineal de temperatura para los estados inicial ($t = 0$) y final ($t \rightarrow \infty$).

De acuerdo a lo anterior, las condiciones de borde e inicial son:

$$T(y = 0, t) = T_1 \quad (\text{C.2})$$

$$T(y = d, t) = T_{2,f} \quad (\text{C.3})$$

$$T(y, t = 0) = T_1 - \frac{T_1 - T_{2,i}}{d} y \quad (\text{C.4})$$

con d la longitud vertical. Resulta conveniente utilizar las variables adimensionales:

$$\tilde{T} = \frac{T - T_1}{T_{2,f} - T_1} \quad y^* = y/d \quad t^* = t/\tau_\kappa \quad (\text{C.5})$$

donde $\tau_\kappa = d^2/\kappa$ es el tiempo característico. Para las variables anteriores la ecuación de calor (cf. ec. C.1) se escribe:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^{*2}} \quad (\text{C.6})$$

y cuyas condiciones de borde e inicial, en términos de las variables adimensionales, son:

$$\tilde{T}(y^* = 0, t^*) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{T}(y^* = 1, t^*) = 1 \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{T}(y^*, t^* = 0) = (1 + C) y^* \quad \text{con} \quad C \equiv \frac{\delta T_2}{T_1 - T_{2,f}} \quad (\text{C.9})$$

La distribución de temperatura evoluciona a un perfil lineal (cf. fig. C.1 (b)) dado por:

$$\tilde{T}(y^*, t^* \rightarrow \infty) = s(y^*) \equiv y^* \quad (\text{C.10})$$

Por lo tanto, la solución al problema se puede descomponer en una parte transiente $w(y^*, t^*)$ y una parte estacionaria $s(y^*)$, es decir:

$$\tilde{T}(y^*, t^*) = s(y^*) + w(y^*, t^*) \quad (\text{C.11})$$

Reemplazando las funciones estas funciones en (C.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(y^*, t^*)}{\partial t^*} + \underbrace{\frac{\partial s(y^*)}{\partial t^*}}_{=0} &= \frac{\partial^2 w(y^*, t^*)}{\partial y^{*2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 s(y^*)}{\partial y^{*2}}}_{=0} \\ \Rightarrow \frac{\partial w(y^*, t^*)}{\partial t^*} &= \frac{\partial^2 w(y^*, t^*)}{\partial y^{*2}} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Usando la ec. (C.11) se obtienen las condiciones de borde e inicial para $w(y^*, t^*)$:

$$w(y^* = 0, t^*) = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$w(y^* = 1, t^*) = 1 \quad (\text{C.14})$$

$$w(y^*, t^* = 0) = C y^* \quad (\text{C.15})$$

Utilizando el método de separación de variables:

$$w(y^*, t^*) = u(y^*) \cdot v(t^*) \quad (\text{C.16})$$

se obtiene:

$$\frac{v'(t^*)}{v(t^*)} = \frac{u''(y^*)}{u(y^*)} = -\lambda^2 \quad (\text{C.17})$$

Al imponer las condiciones de borde para $w(y^*, t^*)$ se obtienen las soluciones [154]:

$$v(t^*) = e^{-\lambda_n^2 t^*} \quad , \quad u(y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\lambda_n y^*) \quad , \quad \text{con } \lambda_n = n\pi \quad \text{y } n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.18})$$

Como $v(t^* = 0) = 1$, se debe cumplir $u(y^*) = C y^*$. Esta condición permite determinar los coeficientes A_n usando la ortogonalidad de las autofunciones:

$$A_n = \frac{C \int_0^1 y^* \sin(\lambda_n y^*) dy}{\int_0^1 \sin^2(\lambda_n y^*) dy} = \frac{\frac{-(-1)^n C}{\lambda_n}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2(-1)^n C}{\lambda_n} \quad (\text{C.19})$$

De las expresiones anteriores se obtiene finalmente:

$$\tilde{T}(y^*, t^*) = y^* - 2C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n y^*) e^{-\lambda_n^2 t^*} \quad , \quad \text{para } t^* \geq 0 \quad (\text{C.20})$$

con $C = \delta T_2 / (T_1 - T_{2,f})$ y $\lambda_n = n\pi$ definidos previamente. Resulta conveniente evaluar la expresión anterior para $t^* = 0$ usando la condición inicial (cf. ec. (C.9)), debido a que para este instante la serie presenta el fenómeno conocido como oscilación de Gibbs.

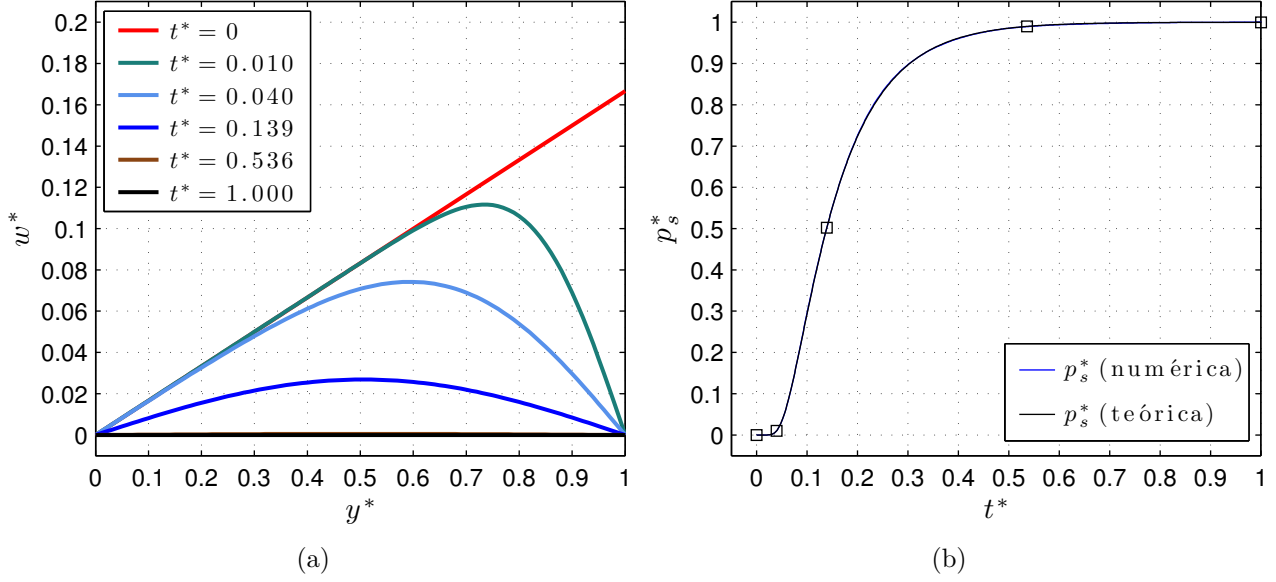


Figura C.2: Respuesta ante un escalón ideal de temperatura, con los parámetros $\delta T_2 = 0.5 \text{ }^\circ\text{C}$ y $T_1 - T_2 = 3 \text{ }^\circ\text{C}$. (a) Componente transiente $w(t^*, y^*)$ del perfil de temperatura adimensional $\tilde{T}(y^*, t^*) = y^* + w(t^*, y^*)$ para distintos tiempos adimensionales t^* . (b) Evolución temporal de la potencia adimensional p_s^* , que registra en el extremo a temperatura constante ($y = 0$). Se muestran las soluciones teórica (ec. C.24) y numérica al problema. (\square) indica los tiempos adimensionales de los perfiles $w(t^*, y^*)$ mostrados en (a), excepto $t^* = 0.010$.

Flujo de calor

La expresión para la distribución de temperatura (ec. (C.20)) permite obtener la potencia disipada en la coordenada de interés, $y = 0$, dada por:

$$p_s = -kA \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = kA \frac{T_1 - T_{2,f}}{d} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (\text{C.21})$$

$$\Rightarrow p_s = \frac{kA}{d} \left(T_1 - T_{2,f} - 2\delta T_2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t^*} \right) \quad (\text{C.22})$$

donde k es la conductividad térmica, A es el área transversal y se usa el subíndice s para distinguir que es la respuesta ante un escalón ideal. Si se considera que los valores de potencia inicial p_i y final p_f son:

$$p_i = \frac{kA}{d} (T_1 - T_{2,i}) \quad \text{y} \quad p_f = \frac{kA}{d} (T_1 - T_{2,f}) \quad (\text{C.23})$$

se obtiene que su diferencia es $\delta p \equiv p_f - p_i = -kA\delta T_2/d$ y una manera conveniente de expresar la potencia en forma adimensional, la cual solo depende del tiempo adimensional t^* :

$$p_s^*(t^*) = \frac{p_s - p_i}{p_f - p_i} = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t^*} & , \text{ si } t^* > 0 \\ 0 & , \text{ si } t^* = 0 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

En la figura C.2 (a) se muestran algunos perfiles para la componente transiente $w(t^*, y^*)$ de los perfiles de temperatura (cf. ecs (C.11),(C.15) y (C.20)). Estos perfiles corresponden a los parámetros $\delta T_2 = 0.5$ °C, $T_1 - T_{2,f} = 3$ °C y 200 términos en la suma sobre n . En la figura C.2 (b) se muestra la curva obtenida para la potencia adimensional p_s^* , sumando la ec. (C.24) sobre el mismo número de términos. En dicha figura se muestra una segunda curva para p_s^* , obtenida resolviendo numéricamente el problema mediante la función *pdepe* de Matlab y que colapsa con la curva anterior.

C.2. Respuesta ante una función temporal

En la presente sección se estudia la respuesta, en términos de potencia, ante un escalón de temperatura descrito por una función temporal. De acuerdo a la figura C.3, la temperatura en un extremo se mantiene a T_1 constante y en el opuesto evoluciona de acuerdo a $T_2(t)$. Esta función se asemeja a un escalón ideal, toma un valor inicial $T_{2,i}$ hasta $t = 0$ y luego evoluciona a un valor final $T_{2,f} = T_{2,i} + \delta T_2$. En forma similar al problema anterior, se desea determinar la potencia a suministrar en el extremo a temperatura constante.

De acuerdo a lo anterior, las condiciones de borde e inicial son:

$$T(y = 0, t) = T_1 \quad (\text{C.25})$$

$$T(y = d, t) = T_2(t) \quad (\text{C.26})$$

$$T(y, t = 0) = T_1 - \frac{T_1 - T_{2,i}}{d} y \quad (\text{C.27})$$

donde d es la longitud vertical. En forma similar al problema anterior se utilizan las variables adimensionales:

$$\tilde{T} = \frac{T - T_1}{T_{2,f} - T_1} \quad y^* = y/d \quad t^* = t/\tau_\kappa \quad (\text{C.28})$$

donde $\tau_\kappa = d^2/\kappa$ es el tiempo característico. Estas variables entregan la ecuación del calor adimensional:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^{*2}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t^*} \quad (\text{C.29})$$

Las condiciones de borde e inicial usando las variables adimensionales son:

$$\tilde{T}(y^* = 0, t^*) = 0 \quad (\text{C.30})$$

$$\tilde{T}(y^* = 1, t^*) = \frac{T_2(t) - T_1}{T_{2,f} - T_1} \equiv \tilde{T}_2(t^*) \quad (\text{C.31})$$

$$\tilde{T}(y^*, t^* = 0) = (1 + C) y^* \quad \text{con} \quad C \equiv \frac{\delta T_2}{T_1 - T_{2,f}} \quad (\text{C.32})$$

donde se definió la temperatura adimensional $\tilde{T}_2(t^*)$. El método que se utilizará se denomina de variación de parámetros [154], en el que la solución se expresa como la siguiente

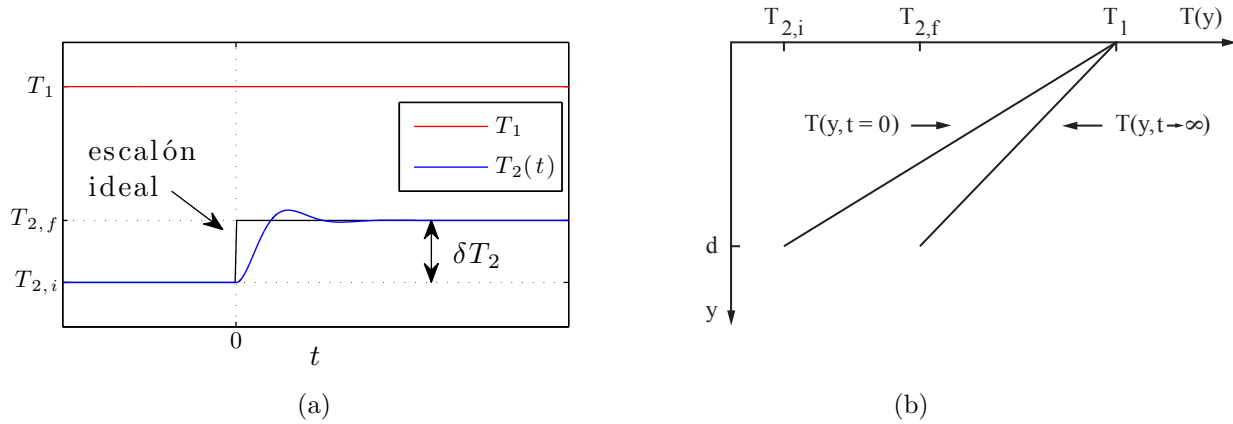


Figura C.3: Problema de un escalón de temperatura descrito por una función temporal. (a) Condiciones de borde. La temperatura en un extremo se mantiene a T_1 constante y en el extremo opuesto evoluciona de acuerdo a $T_2(t)$, función que se asemeja a una escalón ideal. La función toma un valor inicial $T_{2,i}$ hasta $t = 0$ y luego evoluciona a $T_{2,f} = T_{2,i} + \delta T_2$. (b) Perfil de temperatura $T(y, t)$. Se supone una distribución lineal de temperatura para los estados inicial ($t = 0$) y final ($t \rightarrow \infty$).

expansión:

$$\tilde{T}(y^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t^*) \phi_n(y^*) \quad (\text{C.33})$$

donde $\phi(y^*)$ son las autofunciones para el problema bajo condiciones homogéneas y $A_n(t^*)$ son funciones desconocidas del tiempo adimensional t^* . Para determinar las autofunciones se reemplazan las condiciones de borde inhomogéneas por condiciones homogéneas, lo que entrega las siguientes autofunciones que cumplen la condición de temperatura nula en los extremos:

$$\phi_n(y^*) = \sin(\lambda_n y^*) \quad \text{con} \quad \lambda_n = n\pi \quad \text{y} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.34})$$

El paso siguiente consiste en usar la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones ϕ_n para obtener los coeficientes $A_n(t^*)$:

$$A_n(t^*) = \frac{\int_0^1 \tilde{T}(y^*, t^*) dy^*}{\int_0^1 \phi_n^2(y^*) dy^*} = 2 \int_0^1 \tilde{T}(y^*, t^*) \phi_n(y^*) dy^* \quad (\text{C.35})$$

Derivando con respecto al tiempo:

$$A'_n(t^*) = 2 \int_0^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t^*} \phi_n(y^*) dy^* = 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^{*2}} \phi_n(y^*) dy^* \quad (\text{C.36})$$

donde se utilizó la ec. (C.29) para eliminar la derivada parcial con respecto a t^* . Integrando

por partes dos veces y desarrollando:

$$\begin{aligned}
A'_n(t^*) &= 2 \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \phi_n \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \phi'_n(y^*) dy^* \right) \\
A'_n(t^*) &= 2 \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \phi_n \Big|_0^1 - \tilde{T} \phi'_n(y^*) \Big|_0^1 + \int_0^1 \tilde{T}(y^*, t^*) \phi''_n(y^*) dy^* \right) \\
A'_n(t^*) &= 2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \phi_n \Big|_0^1 - 2T \phi'_n(y^*) \Big|_0^1 - 2\lambda_n^2 \int_0^1 \tilde{T}(y^*, t^*) \phi_n(y^*) dy^* \\
A'_n(t^*) &= 2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \phi_n \Big|_0^1 - 2T \phi'_n(y^*) \Big|_0^1 - \lambda_n^2 A_n(t^*)
\end{aligned}$$

donde se utilizó la ec. (C.35) en el último paso. Las condiciones de borde en la expresión anterior se evalúan usando las ecs. (C.30), (C.31) y (C.34), lo que entrega:

$$\begin{aligned}
A'_n(t^*) &= -2\lambda_n \cos(\lambda_n) \tilde{T}_2(t^*) - \lambda_n^2 A_n(t^*) \\
A'_n(t^*) &= -2(-1)^n \lambda_n \tilde{T}_2(t^*) - \lambda_n^2 A_n(t^*)
\end{aligned} \tag{C.37}$$

La última expresión se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt^*} \left(A_n(t^*) e^{\lambda_n^2 t^*} \right) = -2(-1)^n \lambda_n \tilde{T}_2(t^*) e^{\lambda_n^2 t^*} \tag{C.38}$$

Integrando entre 0 y t^* y ordenando se obtiene:

$$\begin{aligned}
A_n(t^*) e^{\lambda_n^2 t^*} - A_n(0) &= -2(-1)^n \lambda_n \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) e^{\lambda_n^2 \tau} d\tau \\
\Rightarrow A_n(t^*) &= A_n(0) e^{-\lambda_n^2 t^*} - 2(-1)^n \lambda_n \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) e^{\lambda_n^2(\tau-t^*)} d\tau
\end{aligned} \tag{C.39}$$

El término $A_n(0)$ se calcula a partir de las ecs. (C.32), (C.34) y (C.35):

$$\begin{aligned}
A_n(0) &= 2 \int_0^1 \tilde{T}(y^*, 0) \phi_n dy^* = 2(1+C) \int_0^1 y^* \sin(\lambda_n y^*) dy^* = \\
\Rightarrow A_n(0) &= \frac{-2(-1)^n}{\lambda_n} (1+C)
\end{aligned} \tag{C.40}$$

Por lo que los coeficientes $A_n(t^*)$ son:

$$A_n(t^*) = \frac{-2(-1)^n}{\lambda_n} \left((1+C) e^{-\lambda_n^2 t^*} + \lambda_n^2 \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) e^{\lambda_n^2(\tau-t^*)} d\tau \right) \tag{C.41}$$

Reemplazando estos coeficientes en la ec. (C.33) se obtiene finalmente la expresión para la distribución de temperatura:

$$\tilde{T}(y^*, t^*) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \left((1+C) e^{-\lambda_n^2 t^*} + \lambda_n^2 \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) e^{\lambda_n^2(\tau-t^*)} d\tau \right) \sin(\lambda_n y^*) \tag{C.42}$$

con $C = \delta T_2 / (T_1 - T_{2,f})$ y $\lambda_n = n\pi$ definidos previamente.

Flujo de calor

En forma similar al problema anterior se evalúa la potencia a suministrar en el extremo a temperatura constante, i.e. en $y = 0$, dada por:

$$\begin{aligned} p_{vs} &= -kA \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{kA}{d} (T_1 - T_{2,f}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \\ \Rightarrow p_{vs} &= -\frac{kA}{d} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left((T_1 - T_{2,i}) e^{-\lambda_n^2 t^*} + (T_1 - T_{2,f}) \lambda_n^2 \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) e^{\lambda_n^2 (\tau - t^*)} d\tau \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

donde k es la conductividad térmica, A es el área transversal y se usa el subíndice vs para distinguir que es la respuesta ante un escalón descrito por una función temporal. El interés consisten en obtener la potencia p_{vs} la forma adimensional:

$$p_{vs}^*(t^*) = \frac{p_{vs} - p_i}{\delta p} \quad (\text{C.44})$$

con $p_i = (kA/d)(T_1 - T_{1,i})$ y $\delta p \equiv p_f - p_i = -(kA/d)\delta T_2$ obtenidos previamente. Usando la ec. (C.44) y momentáneamente la constante C se obtiene:

$$p_{vs}^* = \left(1 + \frac{1}{C} \right) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 t^*} \right] - \frac{1}{C} \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) (-2) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{\lambda_n^2 (\tau - t^*)} d\tau \quad (\text{C.45})$$

Reconociendo en la ecuación anterior los términos (cf. ec. (C.24)):

$$p_s^*(t^*) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n^2 t^*} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p_s^*(t^* - \tau)}{\partial t^*} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{\lambda_n^2 (\tau - t^*)} \quad (\text{C.46})$$

Se obtiene finalmente:

$$p_{vs}^* = \left(1 + \frac{T_1 - T_{2,f}}{\delta T_2} \right) p_s^*(t^*) - \frac{T_1 - T_{2,f}}{\delta T_2} \int_0^{t^*} \tilde{T}_2(\tau) \frac{\partial p_s^*(t^* - \tau)}{\partial t^*} d\tau \quad (\text{C.47})$$

La figura C.4 resume los resultados obtenidos para un escalón de temperatura descrito por una función temporal. En (a) se muestra la temperatura $\tilde{T}_2(t^*)$ obtenida experimentalmente (cf. (5.2.1)) y un ajuste exponencial que elimina las fluctuaciones de la curva luego del sobrepaso. En (b) se comparan las potencia adimensionales $p_s^*(t^*)$ y $p_{vs}^*(t^*)$ para un escalón ideal y descrito por una función temporal, respectivamente. La curva $p_{vs}^*(t^*)$ se obtuvo mediante la ec. (C.47) y de una simulación numérica del problema, basada en la función *pdepe* de Matlab. En ambos métodos se utilizó la versión filtrada de $T_2^*(t^*)$ y sus resultados coinciden prácticamente, validando la ec. (C.47).

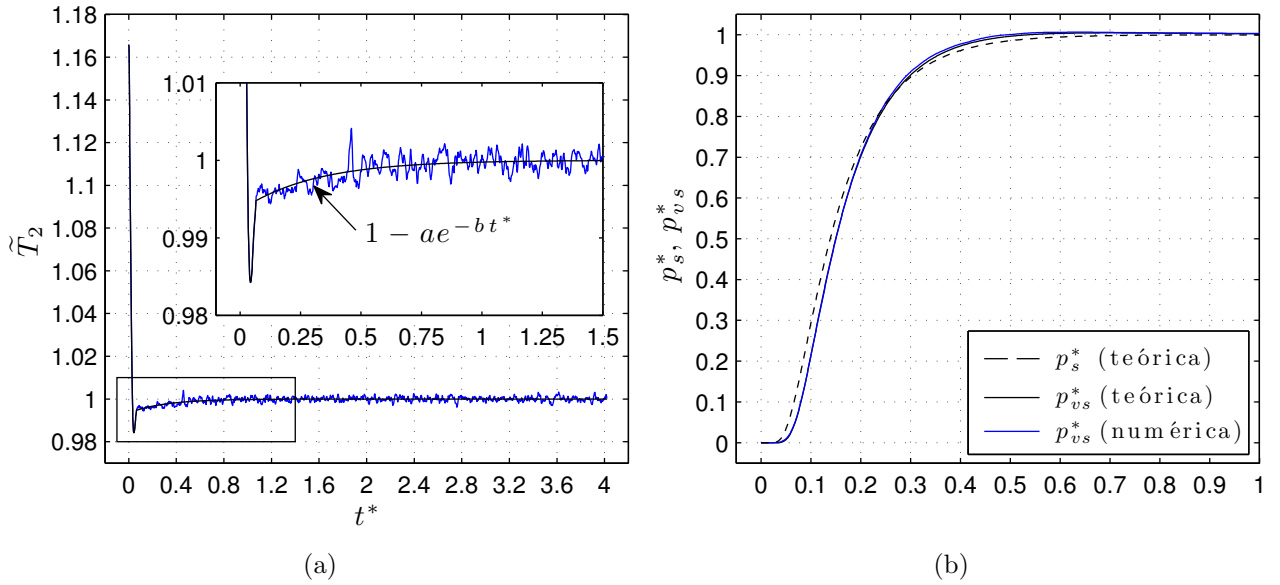


Figura C.4: Resultados obtenidos para el problema de un escalón de temperatura descrito por una función temporal. (a) Temperatura adimensional $\tilde{T}_2(t^*)$ del escalón impuesto en forma experimental. La línea negra indica un ajuste de la forma $1 - ae^{-bt^*}$ para eliminar las fluctuaciones luego del sobrepaso. (b) Comparación entre la potencia adimensionales $p_s^*(t^*)$ y $p_{vs}^*(t^*)$ para un escalón ideal y descrito por una función temporal, respectivamente. Para $p_{vs}^*(t^*)$ se muestran las curvas teórica (cf. ec(C.47)) y obtenida resolviendo en forma numérica el problema, las cuales coinciden prácticamente. En ambos métodos se utilizó la versión filtrada del escalón $\tilde{T}_2(t^*)$ mostrado en (a).

C.3. Extensión de resultados a un modelo transiente de la celda de convección

En la presente sección se propone un modelo de la transferencia de calor transiente en la celda de convección ante un escalón de temperatura impuesto en la placa fría. Este modelo se utiliza en la sección 5.2.1 para estimar las contribuciones de los elementos de la celda a la evolución temporal de potencia durante esta prueba. En la figura C.5 se muestra el modelo de la celda utilizado. La temperatura de placa caliente se mantiene a T_1 constante y en la placa fría evoluciona de acuerdo a una función $T_2(t)$ que se asemeja a un escalón ideal. La potencia $p(t)$ suministrada a la placa caliente se reparte en los flujos de calor a través del fluido $Q_f(t)$, paredes laterales $Q_a(t)$ y pérdidas $Q_p(t)$. Estos flujos cumple el balance térmico:

$$p(t) = Q_f(t) + Q_a(t) + Q_p(t) \quad (\text{C.48})$$

Los flujos anteriores se suponen independientes y para ellos resulta conveniente utilizar las formas adimensionales:

$$Q_f^*(t^*) = \frac{Q_f(t^*) - Q_{f,i}}{p_f - p_i} \quad , \quad Q_a^*(t^*) = \frac{Q_a(t^*) - Q_{a,i}}{p_f - p_i} \quad \text{y} \quad Q_p^*(t^*) = \frac{Q_p(t^*) - Q_{p,i}}{p_f - p_i} \quad (\text{C.49})$$

donde los subíndices indican los valores (i) iniciales y (f) finales de las variables. Por otra parte, el tiempo $t^* = t/\tau_\kappa$ se encuentra adimensionalizado por el tiempo característico del

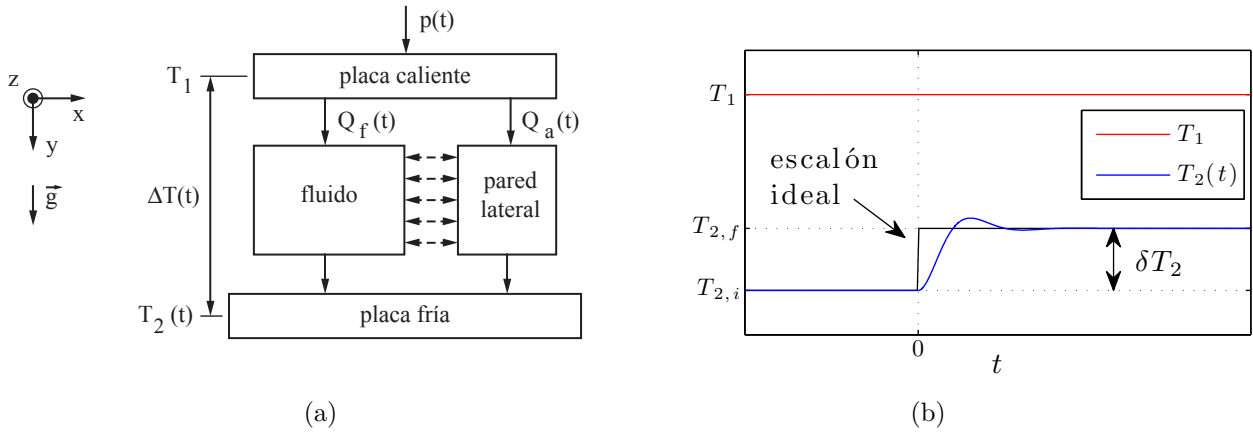


Figura C.5: Modelo transiente de la celda de convección. (a) Flujo de calor en la celda. El elemento calefactor disipa una potencia $p(t)$ para mantener una diferencia de temperatura $\Delta T(t) = T_1 - T_2(t)$ en la celda. La potencia se reparte en los flujos de calor a través del fluido $Q_f(t)$, paredes laterales $Q_a(t)$ y pérdidas $Q_p(t)$, los que se suponen independientes. (b) Condiciones de borde. La placa caliente se mantiene a una temperatura T_1 constante y en la placa fría se impone en $t = 0$ un escalón de temperatura. Este escalón se asemeja a un escalón ideal y es de magnitud $\delta T_2 = T_{2,f} - T_{2,i}$, con $T_{2,i}$ y $T_{2,f}$ los valores iniciales y finales para $T_2(t)$, respectivamente.

fluido $\tau_\kappa = d^2/\kappa$. Usando las variables anteriores el balance térmico toma la forma:

$$p^*(t) = Q_f^*(t^*) + Q_a^*(t^*) + Q_p^*(t^*) \quad (\text{C.50})$$

Se supone que los flujos a través del fluido y paredes laterales evolucionan de acuerdo a la expresión de potencia, $p_{vs}^*(t^*)$, para un escalón de temperatura descrito por una función temporal $T_2(t^*)$ (cf. ec (C.47)). Escalando esta solución en magnitud y tiempo para ambos elementos se obtiene:

$$Q_f^*(t^*) = \Lambda_f p_{vs}^*(t^*) \quad \text{y} \quad Q_a^*(t^*) = \Lambda_a p_{vs}^* \left(\frac{\tau_\kappa t^*}{\tau_{\kappa a}} \right) \quad (\text{C.51})$$

con $\tau_{\kappa a} = d^2/\kappa a$ el tiempo característico de paredes laterales. Las magnitudes, Λ_f y Λ_a , indican la proporción del calor a través del fluido y paredes laterales sobre la potencia suministrada en régimen estacionario. Estas se obtienen de las relaciones entre conductancias térmicas (cf. tabla 4.2):

$$\Lambda_f = \frac{g_f}{g_f + g_a + g_p} \quad \text{y} \quad \Lambda_a = \frac{g_a}{g_f + g_a + g_p} \quad (\text{C.52})$$

La evolución de la cantidad restante asociada a pérdidas de calor, $Q_p^*(t^*)$, se obtiene del balance térmico (cf. ec. C.50).

Apéndice D

Detalles de interpretación de un arreglo óptico de Synthetic Schlieren

En el presente Anexo se encuentran los detalles de la interpretación de un arreglo óptico de Synthetic Schlieren que se discute en el capítulo 8. En ella se supone que la cámara digital está enfocada en el patrón de referencia y se considera la refracción de luz en las paredes de la sección de prueba. En forma similar a la interpretación de un arreglo BOS, se utiliza un modelo para la cámara digital compuesto por un lente delgado y un sensor. Esto permite determinar las condiciones para la formación de imágenes y evitar los supuestos de interpretaciones previas.

D.1. Trayectoria de rayos entre el patrón y el lente

La incidencia de rayos en el lente y su deflexión generada por la perturbación del medio se determina del trazado de rayos en la figura D.1. El rayo \vec{r} con origen en el patrón de referencia y coordenadas $(\xi(z), \zeta(z), z)$ se asume que cumple la aproximación paraxial [79]. Su trayectoria entre el patrón de referencia y el lente se describe por las expresiones que se entregan a continuación para el plano vertical y que son similares en el plano horizontal.

- **Deflexión en el medio.** El cambio de dirección del rayo en el medio, $\Delta\theta_m$, se obtiene integrando la ecuación eikonal (cf. ec. (8.9)) en la sección de prueba de ancho L_t :

$$\Delta\theta_m \equiv \theta_{em} - \theta_{im} = \int_0^{L_t} \frac{d^2\zeta}{dz^2} dz = \frac{1}{n_0} \int_0^{L_t} \frac{\partial n'}{\partial y} dz = \frac{L_t}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial y} \quad (\text{D.1})$$

con θ_{im} y θ_{em} los ángulos de entrada y salida del medio, respectivamente, y $n'(x, y)$ la perturbación del índice de refracción del medio sobre su componente homogénea n_0 .

- **Desplazamiento en el medio.** El desplazamiento del rayo en el medio, $\Delta\zeta_m$, se obtiene integrando su deflexión al interior de la sección de prueba:

$$\Delta\zeta_m \equiv \zeta_{em} - \zeta_{im} = \int_0^{L_t} \left(\theta_{im} + \frac{z}{n_0} \frac{\partial n'}{\partial y} \right) dz = L_t \theta_{im} + \frac{L_t^2}{2n_0} \frac{\partial n'}{\partial y} \quad (\text{D.2})$$

con ζ_{em} y ζ_{im} las coordenadas entrada y salida del medio, respectivamente.

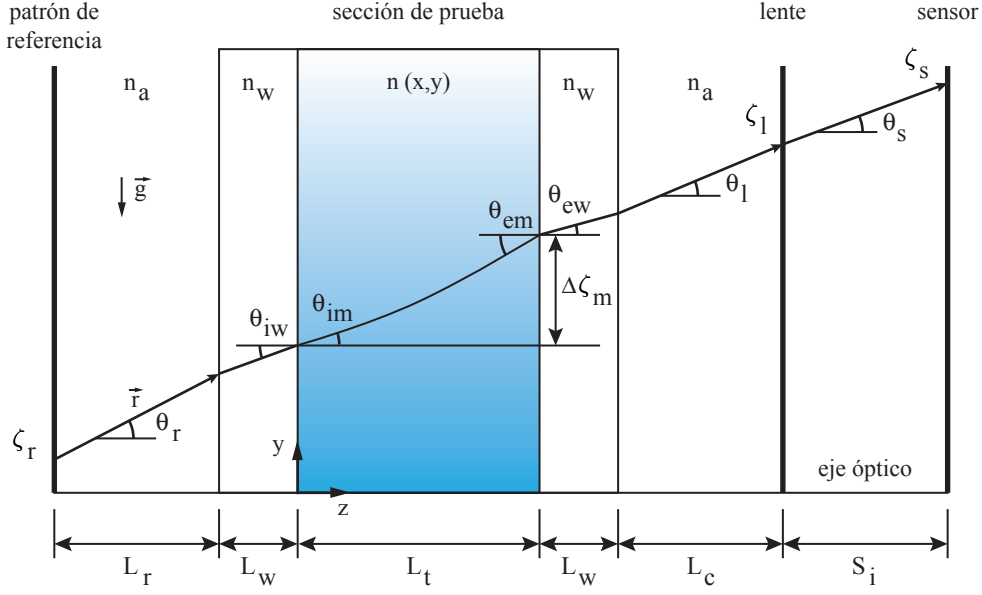


Figura D.1: Trazado de rayos para un arreglo óptico de Synthetic Schlieren. El rayo \vec{r} con origen en el patrón de referencia se refracta de acuerdo a los índices de refracción del aire n_a , paredes de la sección de prueba n_w y medio fluido $n(x,y)$. Se indican las distancias axiales, ángulos en cada interface y la coordenada vertical ζ en los planos del patrón de referencia (r), lente (l) y sensor (s).

- **Deflección en cada interface.** Se obtienen escribiendo la ley de Snell en cada interface usando la definición de ángulos en la figura D.1:

$$\theta_{iw} = \frac{n_a}{n_w} \theta_r \quad , \quad \theta_{im} = \frac{n_w}{n_0} \theta_{iw} \quad , \quad \theta_{ew} = \frac{n_0}{n_w} \theta_{em} \quad \text{y} \quad \theta_l = \frac{n_w}{n_a} \theta_{ew} \quad (\text{D.3})$$

con n_a y n_w los índices de refracción del aire y paredes laterales, respectivamente.

- **Desplazamiento vertical.** Se obtiene de los desplazamientos del rayo en cada interface:

$$\zeta_c = \zeta_r + L_r \theta_r + L_w \theta_{iw} + \Delta \zeta_m + L_w \theta_{ew} + L_c \theta_l \quad (\text{D.4})$$

con L_r y L_c las distancias de la sección de prueba con el patrón de referencia y la cámara digital, respectivamente, y L_w el ancho de las paredes de la sección de prueba.

Resolviendo el sistema de ecs. (D.1-D.4) se obtiene:

$$\zeta_l = \zeta_r + \underbrace{\left(L_r + 2 L_w \frac{n_a}{n_w} + L_t \frac{n_a}{n_0} + L_c \right)}_{S'_o} \theta_r + \underbrace{L_t \left(\frac{L_w}{n_w} + \frac{L_t}{2 n_0} + \frac{L_c}{n_a} \right)}_{\delta \zeta_l} \frac{\partial n'}{\partial y} \quad (\text{D.5})$$

$$\theta_l = \theta_r + \underbrace{\frac{L_t}{n_a} \frac{\partial n'}{\partial y}}_{\delta \theta_l} \quad (\text{D.6})$$

donde ζ_l y θ_l son la coordenada y ángulo de incidencia del rayo en el lente, con variaciones

respectivas $\delta\zeta_l$ y $\delta\theta_l$ generadas por la perturbación del medio. Por otra parte, el término S'_o representa la posición aparente del patrón de referencia, según se discute en la próxima sección.

D.2. Incidencia de rayos en el sensor

El método de matrices de propagación de rayos [79, 115] permite determinar la incidencia y desplazamiento de rayos en el sensor del desarrollo en la sección anterior. El sensor se encuentra a una distancia S_i del lente de distancia focal f , según se indica en la figura D.1. La coordenada ζ_s y ángulo de incidencia θ_s en el sensor están dadas por:

$$\begin{pmatrix} \zeta_s \\ \theta_s \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & S_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_p} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_r} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & S'_o & \delta\zeta_l \\ 0 & 1 & \delta\theta_l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_{rl}} \begin{pmatrix} \zeta_r \\ \theta_r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

donde la matriz \mathcal{M}_{rl} relaciona las coordenadas y ángulos de los planos del patrón de referencia y del lente. Las matrices \mathcal{M}_r y \mathcal{M}_p describen, respectivamente, la refracción en un lente delgado y la propagación desde el lente hasta el sensor. Desarrollando la ec. (D.7) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \zeta_s \\ \theta_s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - S_i/f & S_i + S'_o(1 - S_i/f) & \delta\zeta_s \\ -1/f & 1 - S'_o/f & \delta\theta_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_r \\ \theta_r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

donde $\delta\zeta_s$ y $\delta\theta_s$ son, respectivamente, los desplazamientos generados por la perturbación del medio de la posición y del ángulo del rayo en el plano del sensor y están dados por:

$$\delta\zeta_s = (1 - S_i/f)\delta\zeta_l + S_i\delta\theta_l \quad \text{y} \quad \delta\theta_s = -\delta\zeta_l/f + \delta\theta_l \quad (\text{D.9})$$

Para determinar los términos anteriores se deben considerar las condiciones para la formación de imágenes en ambos estados del medio según se discute a continuación.

- **Estado no perturbado.** En él se tiene $\delta\zeta_s = \delta\theta_s = 0$ y la ec. (D.8) se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \zeta_s^o \\ \theta_s^o \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - S_i/f & \boxed{S_i + S'_o(1 - S_i/f)} \\ -1/f & 1 - S'_o/f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_r \\ \theta_r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

con ζ_s^o y θ_s^o la coordenada y ángulo de incidencia del rayo en el sensor, respectivamente, para este estado del medio. En él se supone que la cámara digital está enfocada en el patrón de referencia, lo implica que el elemento indicado en la matriz debe ser nulo [115]. De esta manera se obtiene que la distancia entre el lente y la imagen, S_i , está dada por:

$$S_i = \frac{S'_o f}{S'_o - f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{S'_o} \quad (\text{D.11})$$

cuya similitud con la ley de lentes delgados permite identificar el término S'_o como la

posición aparente del objeto, i.e. del patrón de referencia. Por otra parte, en la ec. (D.10) se identifica el aumento del patrón de referencia, M , dado por:

$$M \equiv \frac{\zeta_s^o}{\zeta_r} = 1 - \frac{S_i}{f} = -\frac{S_i}{S'_o} \quad (\text{D.12})$$

para la condición de medio no perturbado.

- **Estado perturbado.** La incidencia del rayo en el sensor para esta condición del medio se obtiene reemplazando $M \equiv 1 - S_i/f$ y $1/M \equiv 1 - S'_o/f$ en la ec. (D.8), lo que entrega:

$$\begin{pmatrix} \zeta_s \\ \theta_s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & \delta\zeta_s \\ -1/f & 1/M & \delta\theta_s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_r \\ \theta_r \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.13})$$

donde los términos asociados a la perturbación del medio, $\delta\zeta_s$ y $\delta\theta_s$, están dados por la ec. (D.9). Escribiendo estos términos función de los parámetros del arreglo se obtiene:

$$\delta\zeta_s = -M L_t \left(\frac{L_w}{n_w} + \frac{L_t}{2n_0} + \frac{L_r}{n_a} \right) \frac{\partial n'}{\partial y} \quad (\text{D.14})$$

$$\delta\theta_s = \left[1 - \frac{1}{f} \left(L_w \frac{n_a}{n_w} + L_t \frac{n_a}{2n_0} + L_c \right) \right] \frac{L_t}{n_a} \frac{\partial n'}{\partial y} \quad (\text{D.15})$$

Dado que el sensor forma una imagen invertida del patrón de referencia, el desplazamiento de rayos en el sensor ocurre en direcciones opuestas en los sistemas de coordenadas del arreglo óptico y de las imágenes. Extendiendo lo anterior a ambas coordenadas se tiene:

$$(\delta\xi, \delta\zeta) = -(\delta\xi_s, \delta\zeta_s) \quad (\text{D.16})$$

donde $(\delta\xi_s, \delta\zeta_s)$ y $(\delta\xi, \delta\zeta)$ son los desplazamientos del rayo en los sistema de referencia del sensor y de las imágenes, respectivamente. El desplazamiento observado en las imágenes esta dado entonces por:

$$(\delta\xi, \delta\zeta) = C \left(\frac{\partial n'}{\partial x}, \frac{\partial n'}{\partial y} \right) \quad \text{con} \quad C = M L_t \left(\frac{L_w}{n_w} + \frac{L_t}{2n_0} + \frac{L_r}{n_a} \right) \quad (\text{D.17})$$

El aumento, M , se puede determinar de su relación con la distancia focal f y la posición aparente del objeto, S'_o , de acuerdo a las ecs. (D.5) y (D.11):

$$M = \frac{f}{f - S'_o} \quad \text{con} \quad S'_o = L_r + 2 L_w \frac{n_a}{n_w} + L_t \frac{n_a}{n_0} + L_c \quad (\text{D.18})$$

Para la formación de un imagen real en el sensor, el aumento debe ser negativo y, por lo tanto, $C < 0$ dado que los parámetros restantes en la ec. (D.17) son definidos positivos.

Apéndice E

Desarrollo de una pluma térmica en una cavidad (simulación numérica)

En el presente Anexo se describe la simulación numérica de una pluma térmica laminar que se desarrolla en agua al interior de una cavidad rectangular. La simulación se realizó mediante el software CFD comercial basado en elementos finitos Fluent con los siguientes objetivos:

- Caracterizar el campo de temperatura del fenómeno para el desarrollo del método óptico orientado a plumas térmicas.
- Obtener un análisis de las escalas temporales y espaciales del fenómeno.
- Estudiar los distintos tipos de velocidad de propagación de una pluma térmica.

A su vez, la simulación permitió obtener resultados interesantes transferencia de calor y dinámica de la pluma.

E.1. Métodos numéricos

El fenómeno de plumas térmicas se genera mediante un elemento calefactor cilíndrico de diámetro $D = 5$ mm ubicado interior de una cavidad rectangular bidimensional, según se muestra en la figura E.1 (a). El elemento calefactor se encuentra a la distancia media horizontal de la cavidad, de alto $H = 17.5$ cm y ancho $W = 10$ cm, a una distancia $H_0 = 2.5$ cm de su pared inferior. Las condiciones iniciales y de borde del dominio son las siguientes:

- Fluido a una temperatura inicial uniforme T_∞ .
- Disipación de una potencia constante P en la superficie del elemento calefactor.
- Paredes laterales e inferior adiabáticas.

Se utilizó la condición velocidad nula en las paredes, mientras que para la pared superior se consideraron los casos de condición adiabática y de *pressure outlet*. Ambas condiciones no presentaron diferencias significativas y se eligió finalmente la condición *pressure outlet*.

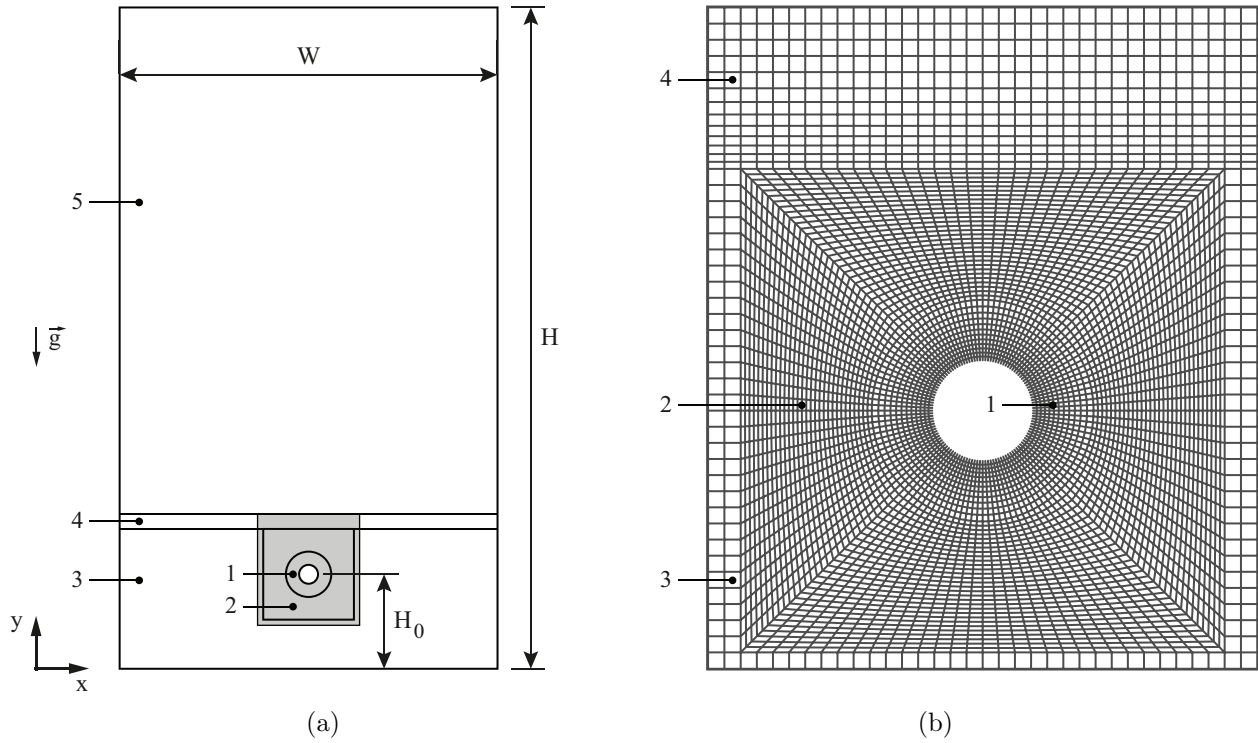


Figura E.1: Esquema del dominio y malla de cálculo. (a) La cavidad es rectangular de alto $H = 17.5$ cm y ancho $W = 10$ cm con (1-5) zonas de malla. El elemento calefactor de diámetro $D = 0.5$ cm, indicado por el círculo blanco, se encuentra en la distancia media horizontal y a una distancia $H_0 = 2.5$ cm de la pared inferior. (b) Detalle de las zonas de malla (1-4) indicadas en (a) por la zona sombreada.

Malla de cálculo

La malla se generó mediante el software comercial Gambit y se encuentra dividida en las regiones que se enumeran en la figura E.1. Las características de estas regiones son las siguientes:

1. Región adyacente al elemento calefactor con 120 nodos a lo largo del perímetro del cilindro y 12 nodos en la dirección radial.
2. Región donde los elementos de malla cambian progresivamente hasta alcanzar una geometría rectangular. Su frontera exterior es de 2.4×2.4 cm² con 30 nodos por lado.
3. Región con elementos cuadrados de lado $\delta_x = \delta_y = 2.4/29 \sim 0.828$ cm.
4. Región de alto 0.4 cm donde los elementos aumentan progresivamente su altura con la vertical hasta alcanzar el valor $\delta_y \sim 0.828$ cm.
5. Región elementos cuadrados de lado $\delta_x = \delta_y = 2.4/29 \sim 0.828$ cm.

Las simulaciones se realizaron utilizando el modelo laminar de Fluent y los parámetros que se indican en la tabla E.1. SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations).

Parámetro	Valor
Precisión	double
Solver	Basado en presión, implícito 2° orden
Gradiente	Green-Gauss basado en nodos
Acoplamiento presión-velocidad	SIMPLE, 2° orden en presión, densidad y momentum
Residuos	10^{-5} en continuidad y velocidad, 10^{-8} en energía

Tabla E.1: Parámetros de la simulación numérica.

En las simulaciones se utilizó un paso de tiempo $\delta_t = 0.01$ s que representa el 2% del tiempo difusivo de menor escala dado por $\tau \equiv r^2/\kappa = 44.699$ s y permite resolver las escalas temporales del fenómeno. A su vez, el paso de tiempo cumple la condición necesaria para la convergencia del sistema de ecuaciones al ser menor al tiempo una onda para viajar por nodos adyacentes. Esta condición se expresa en términos del número Courant, C , como $C \equiv |U|\delta_t/\delta x \leq 1$ con $|U|$ la magnitud de la velocidad de una onda que cruza una malla de nodos separados una distancia δx . El paso de tiempo de las simulaciones entrega un valor $C \lesssim 0.2$ y el cumplimiento del criterio anterior.

Transferencia de calor del elemento calefactor

El modelo del elemento calefactor consiste en un cilindro de aluminio de densidad $\rho_{al} = 2700$ Kg/m³, calor específico $Cp_{al} = 902$ j/(Kg K) y conductividad térmica $k = 237$ W/(m K). La potencia P disipada por la superficie del elemento cumple el balance térmico:

$$P = Q_{cd} + Q_{cv} + Q_{rad} \quad (\text{E.1})$$

con los flujos de calor Q_{cd} por conducción, Q_{cv} por convección y Q_{rad} por radiación. En el presente caso no se considera la componente de radiación dado que la temperatura de superficie del elemento calefactor, T_w , no alcanza una temperatura elevada. La razón entre la transferencia de calor convectivo y conductivo está dada por el número de Nusselt, definido por:

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad \text{con} \quad h = \frac{q'}{T_w - T_\infty} \quad (\text{E.2})$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor convectivo, D el diámetro del cilindro, q' la potencia disipada por unidad de área en la superficie del cilindro, T_w la temperatura de pared y T_∞ la temperatura del fluido no perturbado.

Parámetros de control y propiedades del fluido de trabajo

El fenómeno se rige por los números adimensionales de Rayleigh y Prandtl dados por:

$$Ra_D = \frac{g\alpha(T_w - T_\infty)D^3}{\nu\kappa} \quad \text{y} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{E.3})$$

con α el coeficiente de expansión térmica, ν la viscosidad cinemática y κ la difusividad térmica. En la figura E.2 se muestra la variación con la temperatura de las propiedades del

fluido de trabajo tabuladas en la Tabla E.2 en el rango de las simulaciones $T \in [11, 20]$ °C. Las variaciones de α , viscosidad dinámica μ y Pr son considerables, mientras que el calor específico C_p es prácticamente constante. En Fluent se especificaron las propiedades densidad ρ , k y μ en función de la temperatura mediante Funciones Definidas por el Usuario (UDF) usando las expresiones del Anexo B. Las propiedades α y κ se derivan de las propiedades anteriores, mientras que C_p , de variación menor a 0.5 %, se especificó como constante.

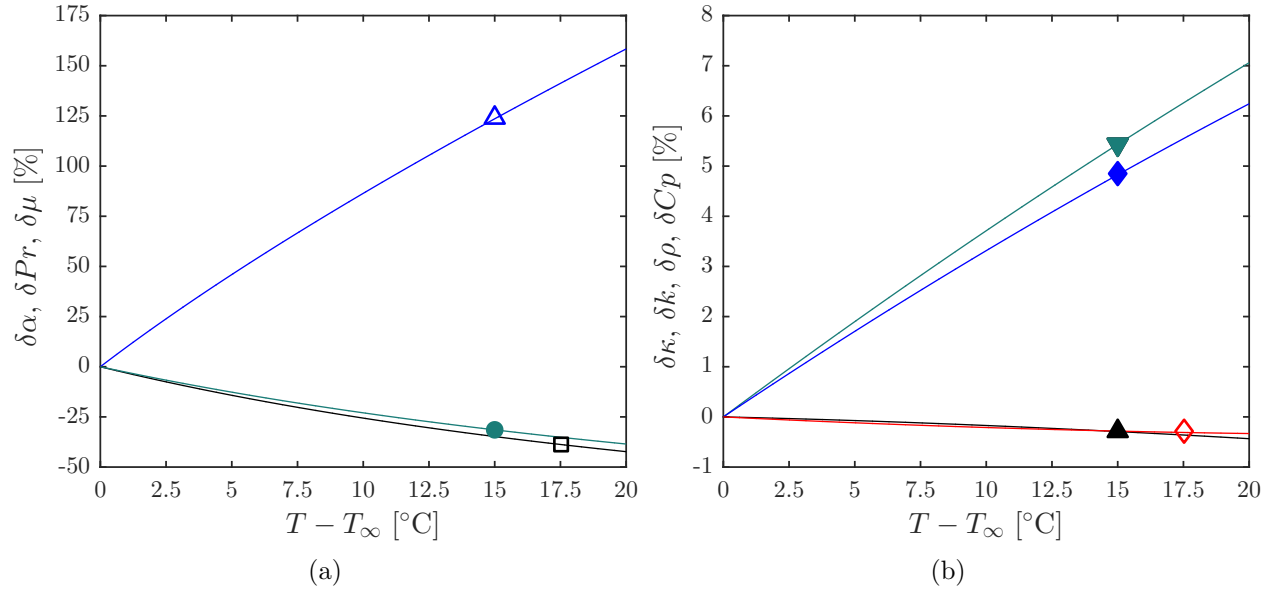


Figura E.2: Variación porcentual de las propiedades del agua con respecto a $T_\infty = 11$ °C en función de la temperatura. (a) Propiedades con variaciones importantes: (Δ) coeficiente de expansión térmica α , (\square) número de Prandtl Pr y (\bullet) viscosidad dinámica μ . (b) Propiedades con menor variación: (\blacktriangledown) difusividad térmica κ , (\blacklozenge) conductividad térmica k , (\blacktriangle) densidad ρ y (\diamond) calor específico C_p .

Propiedad	Unidades	T [°C]		
		11	15	20
ρ	Kg/m ³	999.513	998.951	998.016
$\alpha \cdot 10^4$	1/K	1.1825	1.6234	2.1123
$\mu \cdot 10^3$	Pa s	1.2731	1.1414	1.0049
$\nu \cdot 10^6$	m ² / s	1.2737	1.1426	1.0069
k	W/(m K)	0.5801	0.5881	0.5975
C_p	J/ Kg K	4184.1	4180.1	4176.0
$\kappa \cdot 10^7$	m ² / s	1.3872	1.4083	1.4337
Pr	. . .	9.182	8.113	7.023

Tabla E.2: Propiedades del agua estimadas a distintas temperaturas.

E.2. Resultados del análisis numérico

En la presente sección se discuten los resultados obtenidos para la evolución de una pluma térmica al interior de la cavidad para un suministro al elemento calefactor de potencia constante, en términos de la transferencia de calor y la evolución de los campos de temperatura y velocidad.

E.2.1. Transferencia de calor

En las simulaciones se especificó un suministro de potencia por unidad de área constante en la superficie del elemento calefactor $q' = 2376.714 \text{ w/m}^2$, de esta manera la potencia disipada por unidad de longitud $q = P/L = 37.333 \text{ w/m}$. Los perfiles del número de Nusselt local en función del ángulo γ se muestran en la figura E.3 (a) para distintos instantes del tiempo adimensional t/τ . En ella se puede observar un mínimo local en la parte superior del cilindro, donde se forma la pluma térmica, el cual se vuelve más pronunciado conforme aumenta el tiempo adimensional. La máxima transferencia de calor ocurre en la parte inferior del cilindro, donde la capa límite térmica, $\delta_T(\gamma)$, tiene el menor espesor, según se discute en [122].

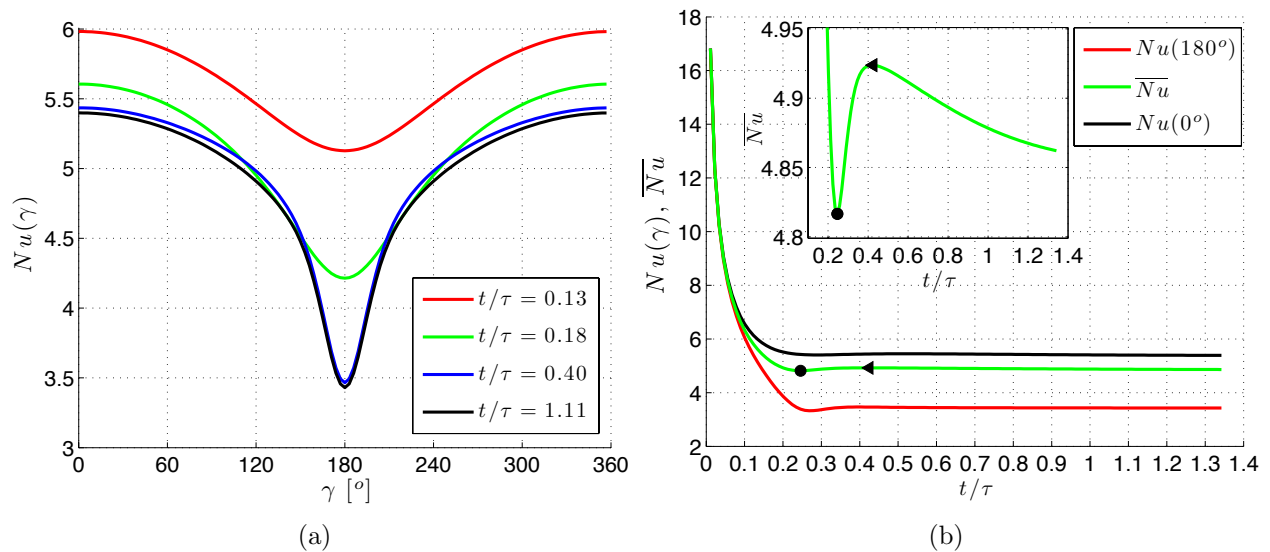


Figura E.3: Transferencia de calor en la superficie del cilindro. (a) Perfiles del número de Nusselt $Nu(\gamma)$ en función del ángulo barrido sobre la superficie del cilindro para distintos tiempos adimensionales t/τ . (b) Evolución temporal del número de Nusselt Nu en el punto inferior ($\gamma = 0^\circ$) y superior ($\gamma = 180^\circ$) del cilindro, y promedio sobre su superficie \overline{Nu} . Se indica el mínimo y máximo local de \overline{Nu} en los instantes (\bullet) $t/\tau = 0.25$ y (\blacktriangleleft) $t/\tau = 0.43$, respectivamente.

La evolución temporal del número de Nusselt en el punto inferior y superior del cilindro y promedio, \overline{Nu} , sobre su superficie se muestra en la figura E.3 (b). Para \overline{Nu} se observa un mínimo y un máximo local en los tiempos adimensionales $t/\tau = 0.25$ y $t/\tau = 0.43$, respectivamente, donde $\tau = r^2/\kappa$ es el tiempo característico. Estos puntos de inflexión se observan además para el número de Nusselt en la parte superior del cilindro ($\gamma = 180^\circ$), pero no es posible detectarlos en la pared inferior ($\gamma = 0^\circ$).

E.2.2. Formación de la pluma térmica

La formación de la pluma térmica se puede apreciar en las figuras E.4 (a-c) en términos de iso-contornos de temperatura adimensional $\theta^* = k(T - T_\infty)/(q'D)$. En las figuras E.4 (d-f) se muestran los iso-contornos de magnitud de velocidad $v'_c = v_c/v_{esc}$, con $v_{esc} = \sqrt{(g\alpha P)/(\nu\rho C_p)}$, que abarcan una región más amplia que el campo de temperatura, como es de esperar para el número de Prandtl del fluido $Pr > 1$. En las figuras se muestran además las líneas de corriente, las cuales indican la presencia de estructuras de vorticidad a ambos costados de la pluma.

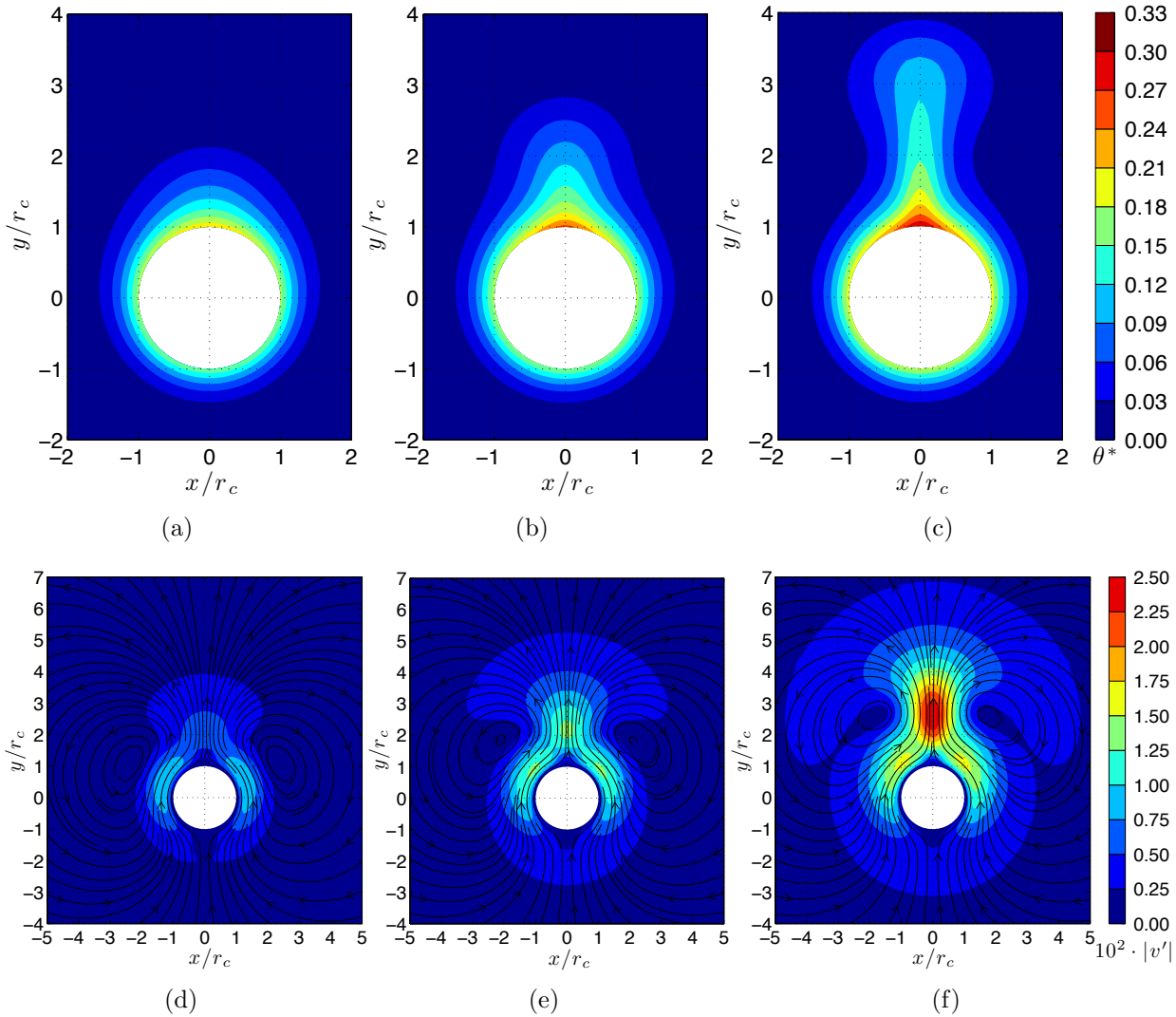


Figura E.4: Formación de una pluma térmica. (a-c) Isocontornos de campos de temperatura adimensional, θ^* , para los instantes $t/\tau =$ (a) 0.18; (b) 0.22 y (c) 0.27. (d-f) Isocontornos respectivos de la magnitud del campo de velocidad adimensional $|v'|$ y líneas de corriente.

En la figura E.5 (a) se comparan las evoluciones temporales de los perfiles de temperatura central ($x/r_c = 0$) adimensional por sobre y debajo del cilindro. Los perfiles colapsan inicialmente, pero difieren en forma significativa después de $t/\tau = 0.25$, instante en que se observa el mínimo local de \overline{Nu} en la figura E.3 (b). Este comportamiento se observa además para

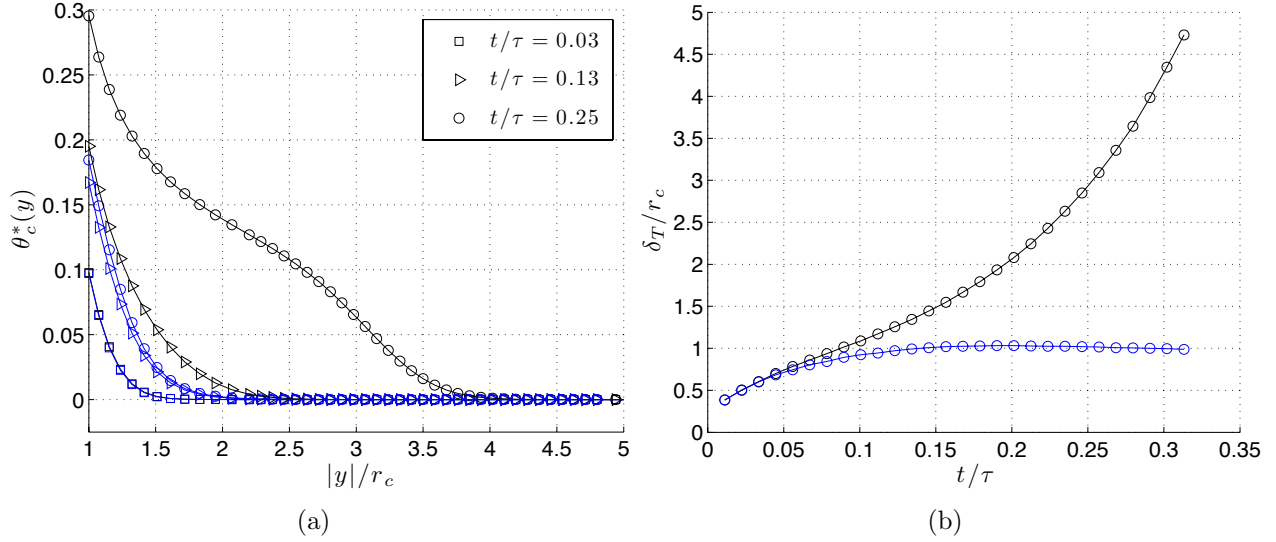


Figura E.5: (a) Temperatura central adimensional θ_c^* en función del módulo de la coordenada vertical adimensional $|y|/r_c$ evaluada: (líneas azules) debajo ($y < 0$) y (líneas negras) sobre el cilindro ($y > 0$). (b) Espesor de capa límite térmica δ_T versus el tiempo adimensional, t/τ , para los puntos: (línea azul) inferior ($\gamma = 0^\circ$) y (línea negra) superior ($\gamma = 180^\circ$) del cilindro.

el espesor de capa límite térmica δ_T (definida como la variación bajo el 1% de θ_c^*), que se mantiene constante en la parte inferior del cilindro y que coincide prácticamente con el radio del cilindro r_c . En la parte superior del cilindro, δ_T se extiende a lo largo de la pluma que se está desarrollando de acuerdo a los iso-contornos de temperatura constante en las figuras E.4 (a-c).

E.2.3. Evolución del campo de temperatura

Luego de la formación de la pluma térmica, su campo de temperatura evoluciona de acuerdo a los campos de temperatura que se muestran en la figura E.6. Una primera cantidad de interés es la diferencia temperatura central con respecto al fluido ambiente $T_c(y) - T_\infty$, que de acuerdo a Batchelor, escala con $P/(\kappa\rho C_p y)$. El escalamiento de la temperatura central con y^{-1} ha sido verificado experimentalmente, realizando una corrección por el tamaño finito del elemento calefactor, por [4, 142]. La corrección consiste en reemplazar en la expresión anterior y^{-1} por $(y - y_0)^{-1}$, donde y_0 toma el papel de una fuente puntual virtual y que se puede asociar a un origen equivalente para una fuente real. De acuerdo a lo anterior, para la temperatura adimensional sigue el escalamiento:

$$\theta_c^* \sim \left(\frac{\pi k L}{\kappa \rho C_p} \right) (y - y_0)^{-1} \quad (\text{E.4})$$

Los perfiles de la temperatura central adimensional $\theta_c^*(t/\tau)$ se muestran en la figura E.7 (a), donde se puede observar su disminución con la altura descrita previamente. Para ellos se indica la posición más alta, y_{cap} , que alcanza la pluma térmica determinada por $\theta_c^*(y/r) > 0.5 \cdot 10^{-4}$. Los perfiles de velocidad central adimensional, v'_c , se muestran para distintos instantes

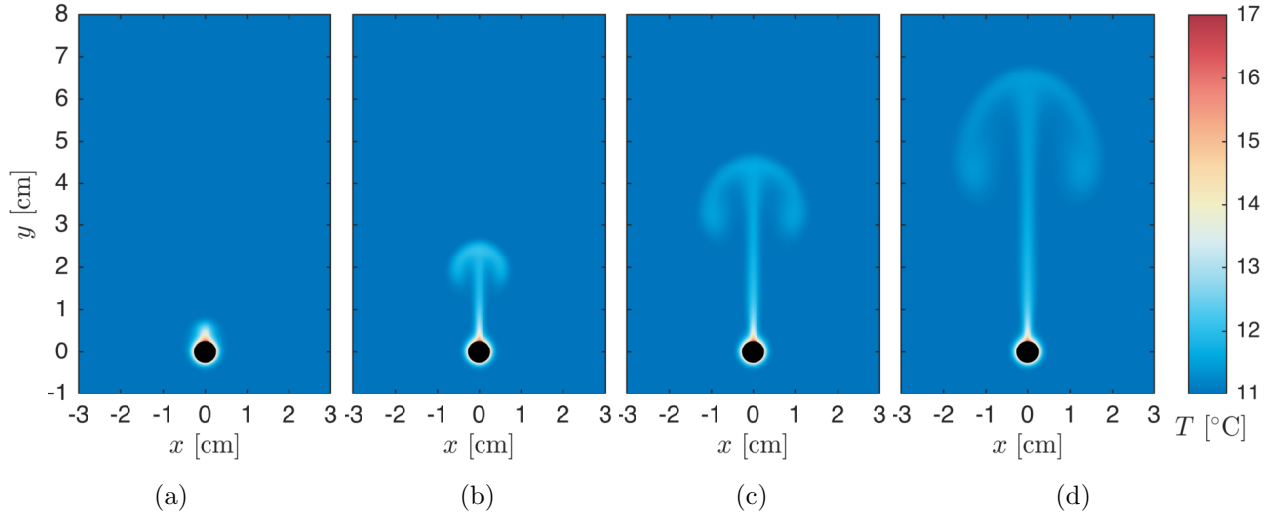


Figura E.6: Evolución temporal del campo de temperatura para los instantes: (a) $t = 10$ s ($t/\tau=0.22$); (b) $t = 20$ s ($t/\tau=0.45$), (c) $t = 30$ s ($t/\tau=0.67$) y (d) $t = 40$ s ($t/\tau=0.89$).

en la figura E.7 (b). En la figura se indica la velocidad de desplazamiento adimensional, $v'_{cap} = v_{cap}/v_{esc}$, de la temperatura en el punto más alto de la pluma térmica ubicado en y_{cap} . La velocidad v'_{cap} es mayor que el perfil de velocidad central evaluado en dicha coordenada $v'_c(y_{cap}/r_c)$. Para cada perfil de velocidad central se indica su velocidad máxima, v'_{mv} , cuya magnitud aumenta con el transcurso del tiempo.

Desplazamiento del cap y de la velocidad máxima

Un resultado interesante consiste en que la dinámica de la pluma térmica está relacionada con la transferencia de calor en la superficie del cilindro. En la figura E.3 (a) se muestra la evolución temporal de la temperatura adimensional de pared, $\theta_w^* \equiv k(T_w - T_\infty)/(q'D)$, en distintos puntos del cilindro. De acuerdo con su definición, esta temperatura corresponde al inverso del número de Nusselt que se mostró previamente en la figura E.3 (b). La evolución temporal de la altura adimensional de la pluma térmica, medida desde el punto superior del cilindro $h'_{cap} = y_{cap}/r - 1$, y de la posición de la velocidad instantánea máxima, $h'_{mv}(t/\tau)$, se muestran en la figura E.8 (b). Para el máximo de la temperatura adimensional, es decir para el mínimo local del número de Nusselt en $t/\tau \sim 0.27$, ocurre un quiebre en el desplazamiento de la posición de la velocidad máxima y el punto más alto de la pluma se desplaza una velocidad v'_{cap} constante.

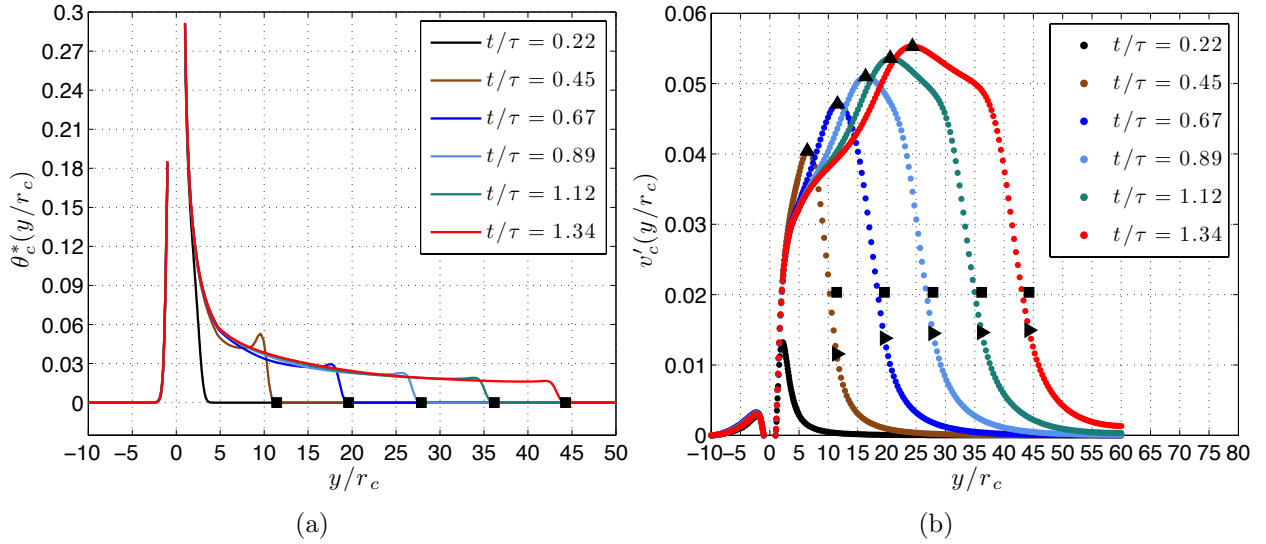


Figura E.7: Perfiles de temperatura y velocidad central para distintos tiempos adimensionales t/τ . (a) Evolución de la temperatura central adimensional, θ_c^* , en función de la coordenada vertical adimensional y/r_c . Se indica con (■) la temperatura $\theta_c^*(y_{cap}/r_c)$ en la coordenada más alta y_{cap} de la pluma. (b) Perfiles de velocidad central adimensional v_c' . Se indica: (■) velocidad $v_{cap}' = v_{cap}/v_{esc}$ a la que se desplaza la temperatura en el punto más alto, ubicado en y_{cap} , e indicado en (a); (►) velocidad instantánea $v_c'(y_{cap}/r_c)$ evaluada en la posición y_{cap} ; (▲) velocidad máxima v_{mv}' en cada perfil $v_c'(y/r_c)$.

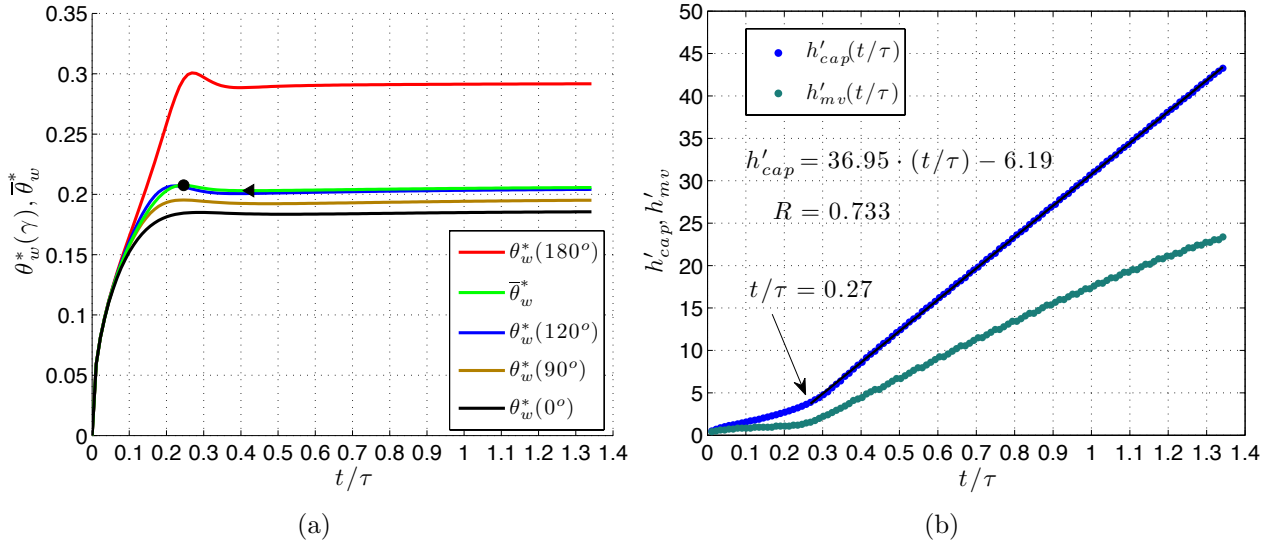


Figura E.8: Evolución temporal de la temperatura de pared y del desplazamiento de la pluma térmica. (a) Temperatura de pared adimensional, θ_w^* , para distintos ángulos γ y promedio, $\bar{\theta}_w^*$, sobre la superficie del cilindro. (b) Altura de la pluma térmica, h'_{cap} , medida desde el punto superior en la superficie del cilindro y la posición de velocidad máxima h'_{mv} . Para $t/\tau \sim 0.27$ se observa un máximo de la temperatura adimensional θ_w^* , un quiebre en el desplazamiento de la posición de la velocidad máxima h'_{mv} y el comienzo del desplazamiento a velocidad constante de la pluma térmica.

Apéndice F

Detalles de implementación de un algoritmo de correlación

En el presente Anexo se describen los detalles de implementación del algoritmo de correlación con deformación de imágenes que forma parte del método óptico discutido en el Capítulo 9.

F.1. Desarrollo del código computacional

El código se desarrolló en Ansi C en el sistema operativo Mac OS y se compila como una aplicación ejecutable que no requiere de *software* adicional. Éste requirió del desarrollo de rutinas eficientes procesamiento de imágenes dado el alto costo computacional del algoritmo.

F.1.1. Estructura general del código

El código se desarrolló de acuerdo a la estructura que se muestra en la figura F.1. En ella, el código principal realiza los pasos del algoritmo y tiene los siguientes archivos de entrada:

- **Secuencia de imágenes en estudio.** Estas pueden ser generadas artificialmente o registradas en una experiencia y se encuentran en formato binario.
- **Archivo de parámetros.** Archivo de texto con los parámetros del caso en estudio.
- **Librerías.** Librerías con rutinas de procesamiento de imágenes.

El código principal entrega los siguientes archivos de salida:

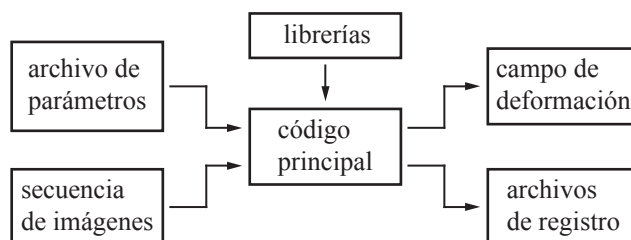


Figura F.1: Estructura general del código de correlación de imágenes.

- **Campo de deformación.** Contiene el resultado de la evaluación de la secuencia de imágenes.
- **Archivos de registro.** Contiene los resultados de los pasos intermedios del algoritmo que son útiles para la evaluación del código.

Librerías de procesamiento de imágenes

Las librerías procesamiento de imágenes se programaron en Ansi C y son del tipo dinámicas, i.e. se cargan al momento de la ejecución del programa. Éstas son las siguientes:

- **Librería de lectura y escritura de archivos.** Realiza el manejo de datos en formato binario para reducir el volumen de almacenamiento y los tiempos de lectura y escritura.
- **Librería de correlación de imágenes.** Calcula el coeficiente de correlación en forma directa y en el espacio de Fourier mediante la librería FTTW [155]. Contiene además rutinas para la búsqueda del máximo de correlación y el estimador subpixel Gaussiano.
- **Librería de cálculo de media por bloques.** Calcula la intensidad media de imágenes por bloques y se utiliza para evaluar el desplazamiento.
- **Librería de interpolación de imágenes.** Realiza interpolación Spline y consiste en una adaptación de las rutinas escritas en Ansi C por Thévenaz [156, 157].

En la figura F.2 se muestra una aplicación del método de interpolación implementado para la construcción del estimador denso de un campo de deformación. El método utiliza la condición de borde de espejo para extrapolar los puntos que están fuera de la malla de muestreo.

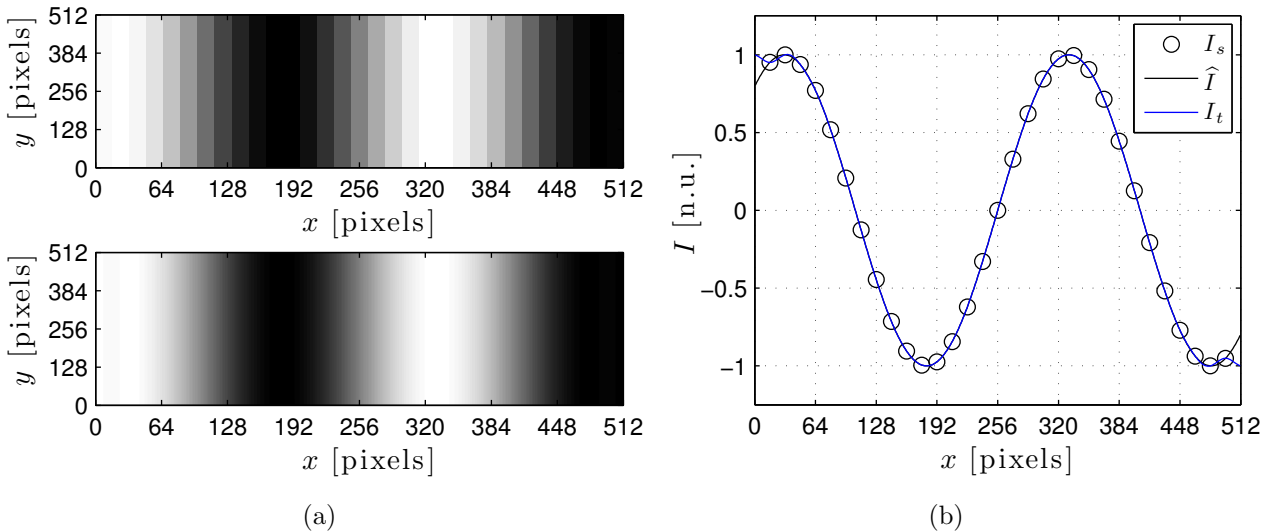


Figura F.2: Interpolación de una imagen con intensidad sinusoidal $I(x, y) = I_0 \sin(2\pi(x - x_0)/\lambda)$, con amplitud $I_0 = 1$ n.u. y $x_0 = 256$ pixel. (a) Imagen inicial (arriba) e interpolada (abajo). (b) Perfiles de intensidad: inicial $I_s(x, y)$, interpolada $\hat{I}(x, y)$ en cada pixel y teórica $I_t(x, y)$ para $y = 256$ pixeles.

F.1.2. Descripción del código principal

El código principal se realizó de acuerdo a la estructura que muestra en la figura F.3. En una etapa inicial se realizan los pasos:

- **Inicialización.** Se realiza la lectura de archivos de parámetros, el manejo de directorios y la inicialización de variables.
- **Cálculo de coeficientes Spline.** Se calculan los coeficientes para realizar la deformación de imágenes de cada cuadro de la secuencia.

Luego se entra a un ciclo sobre un número determinado de iteraciones donde se realizan los pasos del algoritmo. Éstos son los siguientes:

1. **Estimador.** En la primera iteración el estimador es nulo y posteriormente corresponde al desplazamiento obtenido en la iteración anterior.
2. **Estimador denso.** Se interpola el estimador a las dimensiones de las imágenes.
3. **Deformación de imágenes.** Se deforman las imágenes de acuerdo al estimador denso.
4. **Correlación de imágenes.** Se calcula el corrector mediante el coeficiente de correlación entre las ventanas de interrogación. Requiere de la búsqueda del máximo de correlación y del estimador subpixel Gaussiano.
5. **Evaluación del desplazamiento.** Se calcula la suma entre el estimador denso promediado de acuerdo a una ventana de peso y corrector dado por el proceso de correlación.

Una vez que se completan las iteraciones se realiza la escritura de los archivos de salida y la liberación de memoria. En los pasos 4 y 5 se encuentra el uso de ventanas de peso, las cuales se encuentran asociadas a la estabilidad del algoritmo, según se discute en la próxima sección.

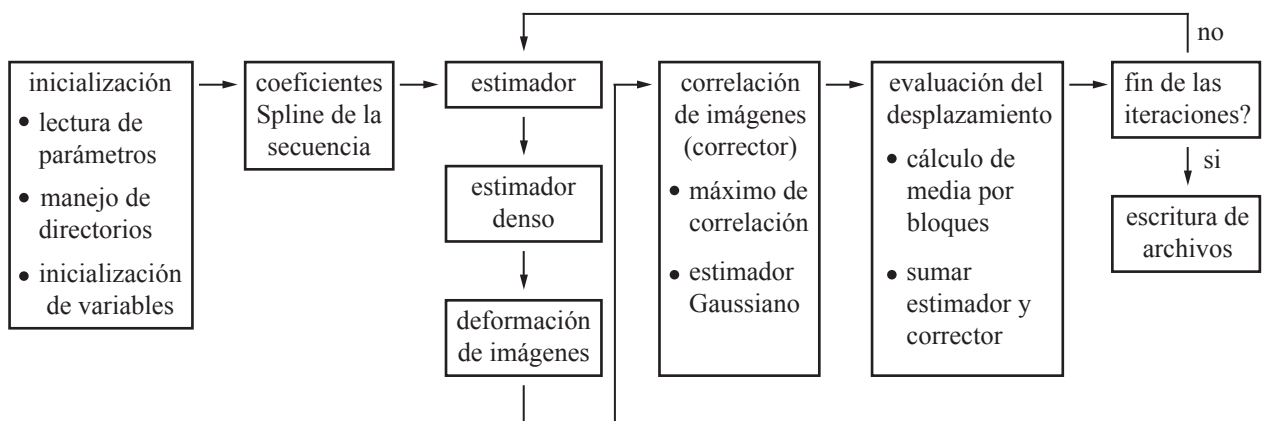


Figura F.3: Estructura del código principal del algoritmo de correlación.

F.2. Estabilidad y resolución espacial del algoritmo

En la presente sección se discute el rol de los parámetros del algoritmo, principalmente las ventanas de peso y el método de interpolación, en su estabilidad y resolución espacial.

Criterio de estabilidad del algoritmo

El algoritmo se considera estable sí, luego del proceso iterativo, la medición del campo de deformación toma un valor finito cada frecuencia espacial. La Modulation Transfer Function (MTF) caracteriza la respuesta en frecuencia del algoritmo (cf. 9.3.2). Ésta corresponde, en el presente caso, a una progresión geométrica que está dada, para una iteración k , por [136]:

$$\text{MTF}^k = a \sum_{i=0}^k (c(b-a))^i \quad (\text{F.1})$$

donde a , b y c indican las modulaciones asociadas al estimador, a la ventana de peso en la evaluación del desplazamiento y a la interpolación del estimador denso, respectivamente. La condición para la convergencia de la serie, y estabilidad del algoritmo, está dada por [136]:

$$-1 < c(b-a) < 1 \quad (\text{F.2})$$

Si el algoritmo es estable, la MTF aumenta con cada iteración y eventualmente converge a:

$$\text{MTF}^\infty = \frac{a}{1 - c(b-a)} \quad (\text{F.3})$$

El análisis se puede simplificar considerando que no existe modulación asociada al método de interpolación, i.e. $c \approx 1$. Bajo este supuesto, el algoritmo es estable si: (i) la ventana del estimador es definida positiva, i.e. $a > 0$; (ii) la ventana de peso del estimador no es definida positiva y se utiliza una ventana adecuada para promediar el estimador denso.

Resolución espacial del algoritmo

Los parámetros del algoritmo se eligen de acuerdo al criterio de estabilidad anterior y su efecto en la resolución espacial del algoritmo que es el siguiente:

- **Ventana de peso para el estimador.** Resulta conveniente que ésta tenga una respuesta en frecuencia definida positiva, lo que teóricamente permite reconstruir todas las frecuencias espaciales muestreadas correctamente [132]. Entre las ventanas con esta característica se encuentran la de forma triangular y la diseñada por Nogueira para su uso en algoritmos de correlación iterativos [136]. Esta última está dada por [158]:

$$w_n(x, y) = 3 \sqrt{\left(4 \left| \frac{x - x_c}{W} \right|^2 - 4 \left| \frac{x - x_c}{W} \right| + 1\right) \left(4 \left| \frac{y - y_c}{W} \right|^2 - 4 \left| \frac{y - y_c}{W} \right| + 1\right)} \quad (\text{F.4})$$

donde x_c e y_c son las coordenadas al centro de la ventana de ancho W . La respuesta en frecuencia unidimensional de la ventana de Nogueira se muestra en la figura F.4 y está

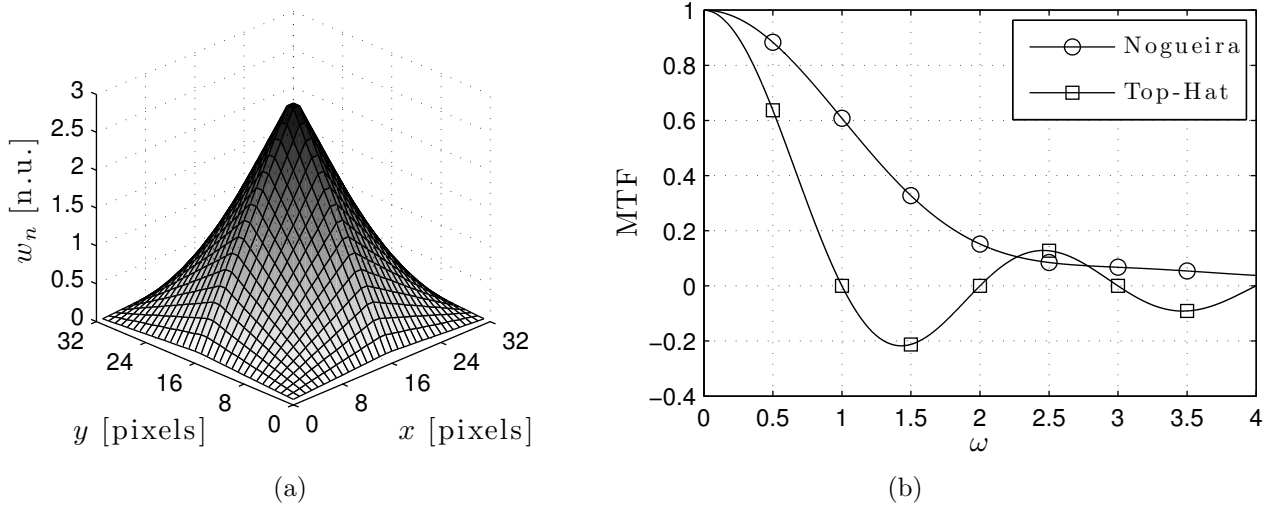


Figura F.4: Comparación de ventanas de peso. (a) Ventana de Nogueira, w_n , de lado $W = 32$ pixeles. (b) Modulation Transfer Function (MTF) unidimensional de las ventanas de Nogueira y Top-Hat en función de la frecuencia espacial normalizada, $\omega = W/\lambda$, con λ la longitud de onda.

dada por [158]:

$$\text{MTF} = \frac{6}{\pi\omega^2}(1 - \text{sinc}(\omega)) \quad (\text{F.5})$$

con $\omega = W/\lambda$ la frecuencia espacial normalizada. La ventana de Nogueira induce desafortunadamente un filtrado de frecuencias erróneo cuando el tamaño de las ventanas de interrogación es menor a 32 pixels y no se recomienda en este caso [159].

- **Ventana de peso para el estimador denso.** Ésta es típicamente una ventana Top-Hat, aún cuando su respuesta en frecuencia dada por la función seno cardinal $\text{sinc}(\omega)$ contiene valores negativos (cf. fig F.4). El aumento del ancho de esta ventana da mayor estabilidad al algoritmo, sin embargo puede reducir su resolución espacial.
- **Método de interpolación.** El método de interpolación lineal permite reducir el tiempo computacional, sin embargo disminuye la precisión a altas frecuencias [137]. Los métodos más precisos y que entregan una mejor resolución espacial son: interpolación Spline o las que se basan en las funciones de seno cardinal y transformada de Fourier. [27, 129, 130, 137].

Entre otros factores que pueden entregar una mayor resolución espacial se encuentran el uso de una malla de espaciado pequeño y ventanas de interrogación de mayor tamaño [129, 136, 137]. Éstos requieren de un tiempo computacional considerable, sobretodo si se realiza un alto número de iteraciones. Otro método que permite aumentar la resolución espacial consiste en disponer las partículas en una malla regular [136]. Este último método es difícil de implementar en PIV, pero se puede utilizar sin problemas en la técnica Synthetic Schlieren.

F.3. Generación de secuencias de imágenes artificiales

En la presente sección se describe la generación de las secuencias de imágenes artificiales que se utilizaron en las pruebas del algoritmo de correlación (cf. 9.3.2). Las secuencias representan el muestro de la intensidad de luz de un grupo de partículas que incide en sensor CCD, según se muestra en la figura F.5. Para construir las secuencias se supone que el área foto sensible abarca las dimensiones del sensor, i.e. un *fill factor* unitario, y se utiliza un procedimiento similar a [160].

En una secuencia de imágenes se encuentra un conjunto de $k = 1 \dots N_p$ partículas cuyas coordenadas evolucionan de acuerdo a:

$$(x_k(t), y_k(t)) = (x_k(t_0), y_k(t_0)) + \vec{u}(x, y, t) \quad (\text{F.6})$$

donde $(x_k(t_0), y_k(t_0))$ son las coordenadas iniciales que tienen una distribución aleatoria y $\vec{u}(x, y, t)$ es el desplazamiento impuesto. Para cada partícula se supone una distribución de intensidad de luz Gaussiana dada por [102]:

$$p_k(x, y, t) = I_0 \exp \left[\frac{-(x - x_k(t))^2 - (y - y_k(t))^2}{(d_\tau / \sqrt{8})^2} \right] \quad (\text{F.7})$$

con I_0 la intensidad máxima y d_τ el ancho característico de cada partícula. La intensidad de luz de una secuencia, $I(x_i, y_j, t)$, corresponde a la integral sobre cada pixel de la suma de las distribuciones de intensidad de cada partícula, dada por:

$$I(x_i, y_j, t) = \frac{1}{L_x L_y} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \sum_{k=1}^{N_p} p_k(x, y, t) dy dx \quad (\text{F.8})$$

donde (x_i, y_j) son las coordenadas discretas de cada pixel de tamaño $L_x \times L_y$. Combinando las ecs. (F.7) y (F.8) se obtiene:

$$I(x_i, y_j, t) = I_0 \sum_{k=1}^{N_p} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \exp \left[\frac{-(x - x_k(t))^2 - (y - y_k(t))^2}{(d_\tau / \sqrt{8})^2} \right] dy dx \quad (\text{F.9})$$

donde se reemplazó $L_x = L_y = 1$ pixel, por lo que d_τ debe estar en unidades de pixeles. Para simplificar la expresión anterior se utiliza el cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= (x - x_k(t)) / (d_\tau / \sqrt{8}) & \Leftrightarrow & \quad du = (\sqrt{8} / d_\tau) dx \\ v &= (y - y_k(t)) / (d_\tau / \sqrt{8}) & & \quad dv = (\sqrt{8} / d_\tau) dy \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Con ellas se obtiene:

$$I(x_i, y_j, t) = \frac{d_\tau^2 I_0}{8} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{u_{k-}}^{u_{k+}} \int_{v_{k-}}^{v_{k+}} \exp(-u^2) \exp(-v^2) dv du \quad (\text{F.11})$$

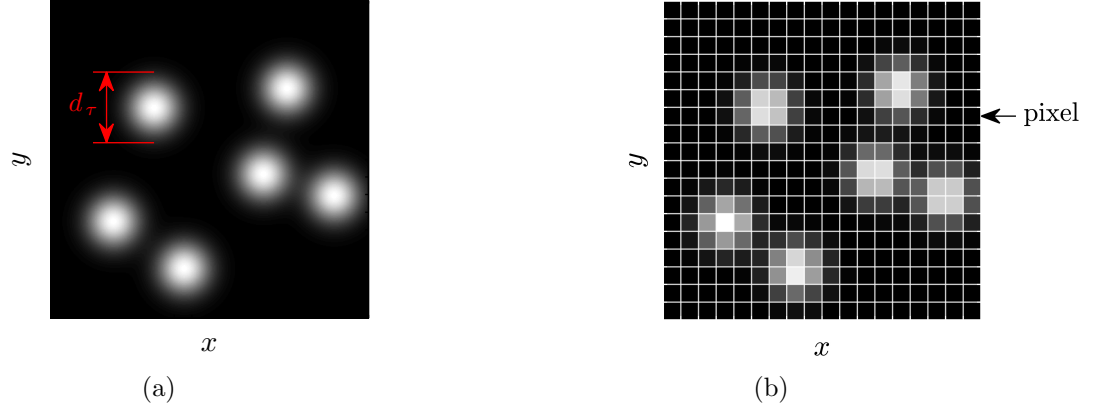


Figura F.5: Modelo de un sensor CCD. (a) Distribución de intensidad de luz, $p(x, y)$, de un conjunto de partículas de diámetro $d_\tau = 4$ pixeles. (b) Intensidad registrada por el sensor $I(x, y)$.

donde los límites de integración están dados por:

$$\begin{aligned} u_{k-} &= (\sqrt{8}/d_\tau)(x_i - x_k(t) - 1) & u_{k+} &= (\sqrt{8}/d_\tau)(x_i - x_k(t)) \\ v_{k-} &= (\sqrt{8}/d_\tau)(y_j - y_k(t) - 1) & v_{k+} &= (\sqrt{8}/d_\tau)(y_j - y_k(t)) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Reconociendo en la ec. (F.11) la función error dada por:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (\text{F.13})$$

se obtiene finalmente que la intensidad de la secuencia está dada por:

$$I(x_i, y_j, t) = \frac{d_\tau^2 \pi I_0}{32} \sum_{k=1}^{N_p} (\text{erf}(u_{k+}) - \text{erf}(u_{k-})) \cdot (\text{erf}(v_{k+}) - \text{erf}(v_{k-})) \quad (\text{F.14})$$

Esta esta ecuación se puede evaluar en forma eficiente considerando que los términos sobre los cuales se realiza la sumatoria son no nulos en una región pequeña entorno a cada partícula. El siguiente código escrito en Matlab se basa en el desarrolló anterior y genera una secuencia con un desplazamiento uniforme de partículas.

```

% Parámetros de la secuencia.
X=512; Y=512; % Tamaño de un cuadro [pixeles].
n_cuadros=31; % Número de cuadros.
% Parámetros de las partículas.
Io=300; % Intensidad máxima.
d_tau=3.0; % Diámetro de una partícula [pixeles].
N_pp=0.076; % Densidad de partículas [ppp].
N_p=round(N_pp*X*Y); % Número de partículas (19922).
dist_media_part=2/sqrt(pi*N_pp); % Distancia media (4.09 pixels).
dxx=6;dyy=6; % Región con intensidad no nula [pixeles].
b=(sqrt(1/8).*d_tau); % Constante para evaluar los límites de erf.
fact_const=Io*(pi/4)*(b^2); % Prefactor en cálculo de intensidad.
eje_x=0.5:1:(X-0.5); % Eje x con valores al centro de cada pixel.
eje_y=0.5:1:(Y-0.5); % Eje y con valores al centro de cada pixel.
% Generación de una distribución aleatoria de partículas.
ini_rang_x=0; fin_rang_x = X;
ini_rang_y=0; fin_rang_y = Y;
rand('twister',123);
xo = ini_rang_x + (fin_rang_x-ini_rang_x)*rand(1,N_p);
rand('twister',34);
yo = ini_rang_y + (fin_rang_y-ini_rang_y)*rand(1,N_p);
% Definición del desplazamiento horizontal (0.1 pixel/cuadro).
offset_x=0:0.1:3; offset_y=0*ones(1,n_cuadros);
% Inicialización de matrices.
secuencia=zeros(Y,X,n_cuadros);xd=zeros(1,N_p);yd=zeros(1,N_p);
% Ciclo sobre el número de cuadros.
for iter=1:n_cuadros
    xd=xo+offset_x(iter); % Coordenada x de las partículas desplazadas.
    yd=yo+offset_y(iter); % Coordenada y de las partículas desplazadas.
    I_cuadro=zeros(Y,X);
    % Ciclo sobre el número de partículas.
    for k=1:N_p
        y_me=round(yd(k))-dyy; y_ma=round(yd(k))+dyy;
        x_me=round(xd(k))-dxx; x_ma=round(xd(k))+dxx;
        ind_y=y_me:y_ma; ind_x=x_me:x_ma; % Rango entorno a una partícula.
        u_menos=(ind_y -1 -yd(k))/b; u_mas=(ind_y -yd(k))/b;
        v_menos=(ind_x -1 -xd(k))/b; v_mas=(ind_x -xd(k))/b;
        aux=(erf(u_mas) -erf(u_menos))'*(erf(v_mas) -erf(v_menos));
        cond_1_y=ind_y>0; cond_1_x=ind_x>0; % Rango positivo.
        cond_2_y=(Y+1-ind_y)>0; cond_2_x=(X+1-ind_x)>0; % Rango en del cuadro.
        c_y=cond_1_y&cond_2_y; c_x=cond_1_x&cond_2_x; % Índices de ambas cond.
        % Suma de la intensidad de una partícula.
        I_cuadro(ind_y(c_y),ind_x(c_x))=I_cuadro(ind_y(c_y),ind_x(c_x))+...
        aux(c_y,c_x);
    end
    secuencia(:, :, iter)=fact_const*I_cuadro;
end
% Mostrar la secuencia.
I_min=min(secuencia(:)); I_max=max(secuencia(:));
for fr=1:n_cuadros;
    imagesc(eje_x,eje_y,secuencia(:, :, fr), [I_min I_max]);
    colormap gray; xlabel(fr); pause(0.5);
end

```

Apéndice G

Circuitos eléctricos de drenaje de corriente y medición de temperatura

El presente Anexo trata sobre la implementación de una fuente controlada de potencia para un elemento calefactor que genera plumas térmicas (cf. 9.4.1). En la implementación de la fuente se diseñaron y construyeron los circuitos eléctricos que realizan las tareas de suministro de potencia al elemento calefactor la medición de su temperatura del elemento calefactor. Ambos circuitos se comunican con una placa de desarrollo Arduino Mega 2560 para la adquisición de datos y el control de temperatura del elemento calefactor.

G.1. Circuito de drenaje de corriente

Para alimentar al elemento calefactor de resistencia $R_H \sim 35 \Omega$ se utilizó el circuito de drenaje de corriente basado en las referencias [161–163] que se muestra en la figura G.1. En el circuito, un transistor MOSFET IRF740 retira desde el terminal de drenaje una corriente i de la resistencia R_H , que se alimenta por un voltaje V_c . Como la corriente a través de la resistencia R_H es prácticamente la misma que abandona el surtidor del transistor, se cumple:

$$V_{sense} \approx iR_{sense} \quad (\text{G.1})$$

donde $R_{sense} = 10 \Omega$ una resistencia de precisión. El amplificador operacional OP07 ajusta su salida que alimenta al gradador del transistor para equiparar el voltaje en la resistencia de medición V_{sense} al voltaje de entrada V_{in} . Este último se obtiene de la corriente $i_{out} \in [0, 20]$ mA que proporciona el conversor análogo digital AD420 de 16 Bit y que se convierte a la señal de voltaje V_{in} mediante la resistencia $R_d = 200 \Omega$. De esta manera, la corriente que se retira del elemento calefactor y la potencia p que disipa están dadas por:

$$i = \frac{R_d}{R_{sense}} i_{out} \quad \text{y} \quad p = R_L \left(\frac{R_d}{R_{sense}} \right)^2 i_{out}^2 \quad (\text{G.2})$$

El voltaje de alimentación V_c debe suplir las caídas de voltaje en el elemento calefactor, el transistor y la resistencia de medición, condición dada por $V_c \geq i(R_H + R_{DS(on)} + R_s)$ con $R_{DS(on)} \sim 0.5 \Omega$ la resistencia encendido del transistor.

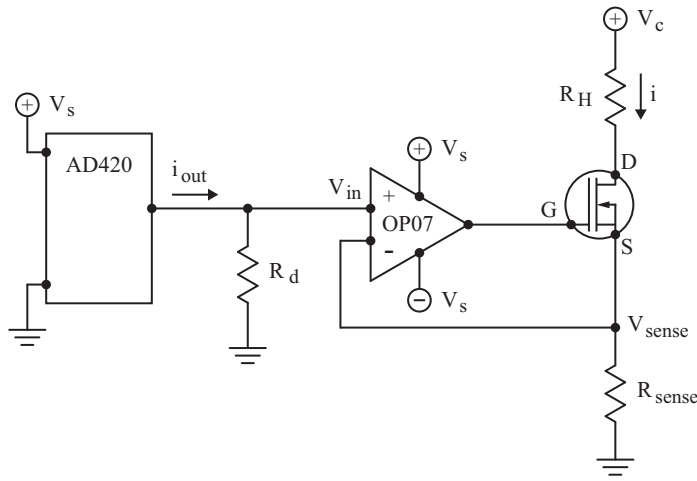


Figura G.1: Circuito de drenaje de corriente. El drenador (D) del transistor retira una corriente i del elemento calefactor de resistencia R_H alimentado por un voltaje V_c . La corriente fluye por la resistencia de medición, R_s , conectada al surtidor (S) del transistor y genera un voltaje V_{sense} . El amplificador operacional OP07 ajusta el gradador del transistor (G) equiparando V_{sense} con el voltaje de entrada V_{in} . Este último se obtiene de la corriente de salida i_{out} del conversor D/A AD420 y la resistencia R_d .

En la figura G.2 (a) se muestra la potencia que disipa un elemento calefactor, conectado a la fuente de corriente, para distintos valores de su resistencia y voltajes de alimentación. En ella se indica un límite de corriente $i_{max} = 0.35$ A para no dañar este elemento. En la figura G.2 (b) se muestra la potencia que disipa un calefactor de resistencia $R_H = 35 \Omega$.

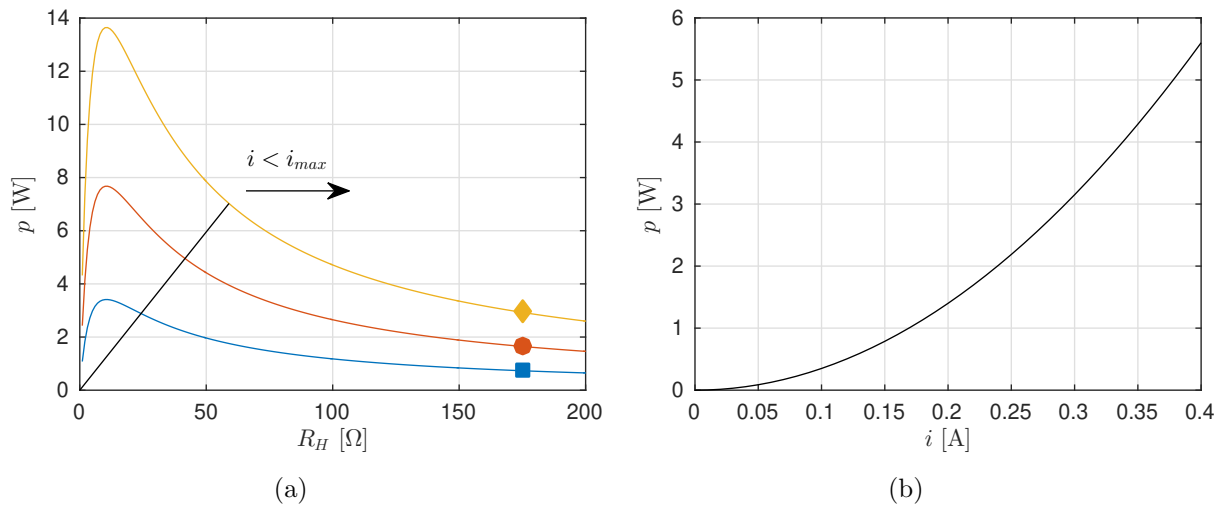


Figura G.2: Curvas de operación del circuito de drenaje de corriente. (a) Potencia p en función de la resistencia del elemento calefactor R_H y voltajes de alimentación V_c : (■) 12 V; (●) 18 V y (◆) 24 V. Se indica el límite dado por un valor de corriente $i_{max} = 0.350$ A. (b) Potencia p en función de la corriente de drenaje, i , para un valor de resistencia del elemento calefactor $R_H = 35 \Omega$.

G.2. Circuito de medición de temperatura

La temperatura del elemento calefactor se registra mediante un termistor NTC 223Fu5183-15U004 fabricado por Semitec, de respuesta rápida dada por una constante tiempo de 50 ms. Su resistencia en función de su temperatura, T , se describe por:

$$R_{Th} = R_0 e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (\text{G.3})$$

con $R_0 = 14.015 \pm 0.5\% \text{ k}\Omega$ su valor de resistencia a una temperatura $T_0 = 37 \pm 0.02^\circ\text{C}$ y constante $B = 3454 \pm 1\% \text{ K}$. Para medir la variación de la resistencia del termistor con la temperatura se utilizó el circuito que se muestra en la figura G.3. El termistor se encuentra en una de las ramas de un puente de Wheatstone con resistencias $R_b = 24.9 \text{ k}\Omega$ y que se alimenta con una tensión V_b . La tensión de alimentación proviene de una referencia de voltage AD780 de voltaje $V_{ref} = 2.5 \text{ V}$ que se interrumpe luego de cada medición para evitar el sobrecalentamiento del sensor. La resistencia variable del termistor genera una diferencia de voltaje en el puente, ΔV , dada por:

$$\Delta V \equiv V_1 - V_2 = V_b \left(0.5 - \frac{R_{th}}{R_b + R_{th}} \right) \quad (\text{G.4})$$

El amplificador instrumental AD620, que posee una alta impedancia de entrada de $10 \text{ G}\Omega$, amplifica el voltaje en el puente. La señal de voltaje que entrega, V_{out} , con respecto a su voltaje de referencia, V_{ref} , dado por:

$$V_{out} - V_{ref} = G_I \Delta V \quad (\text{G.5})$$

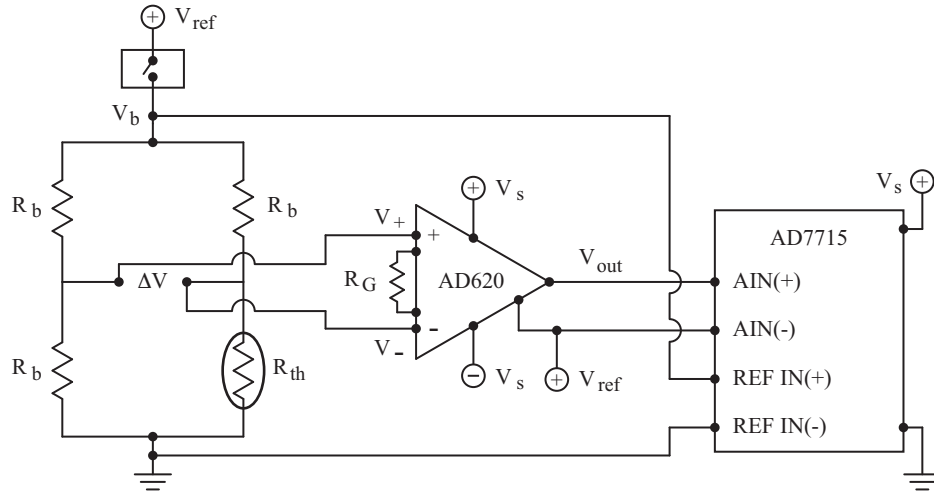


Figura G.3: Circuito de medición de temperatura. El termistor de resistencia R_{th} se encuentra en un puente de Wheatstone, con resistencias restantes R_b y que se alimenta a una tensión V_b por una referencia de voltaje. El amplificador de instrumentación AD620 amplifica la diferencia de voltaje en el puente, ΔV , con una ganancia dada por la resistencia R_G y entrega voltaje de salida V_{out} . El conversor A/D AD7715 mide la señal de voltaje V_{out} con respecto al voltaje de referencia $V_{ref} = V_b$.

donde su ganancia G_I se ajusta entre 1 y 10^4 mediante una resistencia R_G de acuerdo a:

$$G_I = \frac{49.4 \text{ k}\Omega}{R_G} + 1 \quad (\text{G.6})$$

El conversor análogo digital de 16 bit AD7715 mide la señal de salida del amplificador instrumental, V_{out} , en modo bipolar con respecto al voltaje de referencia V_{ref} . para $V_{ref} = V_b$, el voltaje del conversor V_{ADC} está dado por:

$$V_{ADC} = G_I G_{II} \Delta V; \quad (\text{G.7})$$

donde la ganancia G_{II} del conversor análogo digital puede tomar los valores 1, 2, 32 o 128. Esta diferencia de voltaje permite obtener la resistencia del termistor de acuerdo a:

$$R_{th} = R_b \left(\frac{V_{ref} + 2\Delta V}{V_{ref} - 2\Delta V} \right) \quad (\text{G.8})$$

En la figura G.4 se muestran las curvas de operación del circuito de medición de temperatura. La resistencia del termistor en una función de su temperatura está dada por la ec. (G.3). La diferencia de voltage en el puente, ΔV , se muestra en función de la temperatura del termistor y distintos valores de ganancia impuestos por la resistencia R_G del amplificador instrumental.

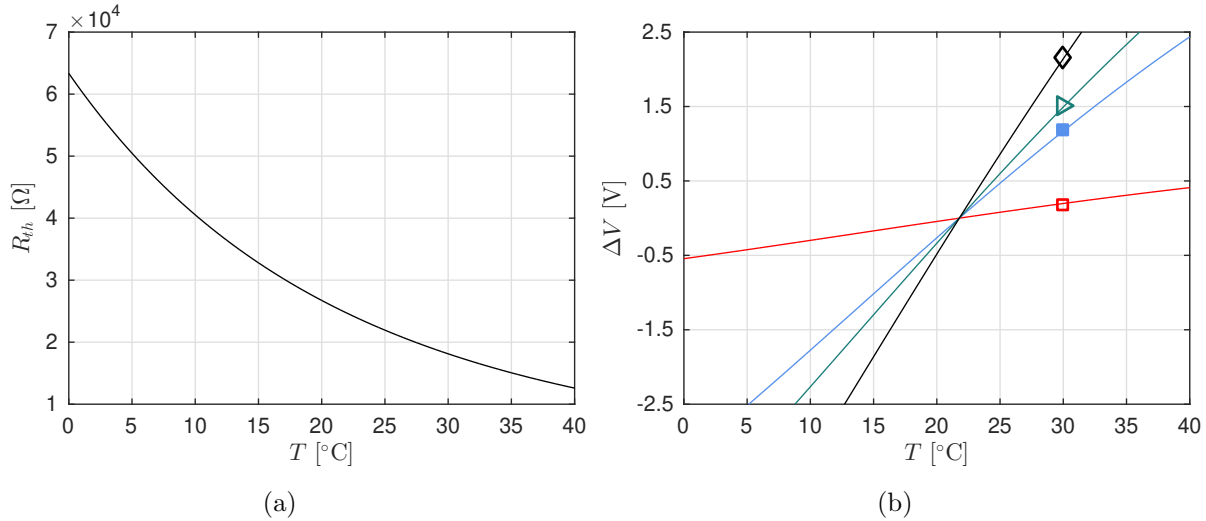


Figura G.4: Curvas de operación del circuito de medición de temperatura. (a) Resistancia del termistor, R_{th} , en función de la temperatura T . (b) Diferencia de voltage ΔV en el puente de Wheatstone para distintas ganancias del circuito, G , impuestas por la resistencia R_G del amplificador instrumental: (□) 1 (sin R_G); (■) 5.940 ($R_G = 10 \text{ k}\Omega$); (▷) 7.587 ($R_G = 7.5 \text{ k}\Omega$); (◇) 10.880 ($R_G = 5 \text{ k}\Omega$).

Bibliografía

- [1] M. Lappa, *Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability*. John Wiley & sons, 2009.
- [2] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. New York: Dover, 1981.
- [3] D. J. Shlien, “Some laminar thermal and plume experiments,” *Physics of Fluids*, vol. 19, pp. 1089–1098, 1976.
- [4] E. Moses, G. Zocchi, and A. Libchaber, “An experimental study of laminar plumes,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 251, pp. 581–601, 1993.
- [5] E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices*. Cambridge University Press, 1993.
- [6] J.-M. Chomaz, “Global instabilities in spatially developing flows: Non-normality and nonlinearity,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 92, 2005.
- [7] L. Pera and B. Gebhart, “On the stability of laminar plumes: Some numerical solutions and experiments,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 14, no. 7, pp. 975–982, 1971.
- [8] M. Vial, L. Bellon, and R. H. Hernández, “Mechanical forcing of the wake of a flat plate,” *Experiments in Fluids*, vol. 37, no. 2, pp. 168–176, 2004.
- [9] R. H. Hernández and M. Vial, “Frequency response of the wake of a flat plate,” *Europhysics Letters*, vol. 81, no. 6, 2008.
- [10] G. Z. Gershuni, I. O. Keller, and B. L. Smorodin, “Vibrational and convective instability of a plane horizontal fluid layer at finite vibration frequencies,” *Fluid Dynamics*, vol. 31, no. 5, 1996.
- [11] J. L. Rogers, W. Pesch, O. Brausch, and M. F. Schatz, “Complex-ordered patterns in shaken convection complex-ordered patterns in shaken convection,” *Physical Review E*, vol. 71, 2005.
- [12] J. L. Rogers, W. Pesch, and M. F. Schatz, “Pattern formation in vertically oscillated convection,” *Nonlinearity*, vol. 16, no. 1, pp. c1–c10, 2003.
- [13] C. W. Meyer, G. Ahlers, and D. S. Cannell, “Stochastic influences on pattern formation in Rayleigh-Bénard convection: Ramping experiments,” *Physical Review A*, vol. 44, no. 4, pp. 2514–2537, 1991.

- [14] B. S. Bhadauria and L. Debnath, “Effects of modulation on Rayleigh-Bénard convection. part I,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2004, no. 19, pp. 991–1001, 2004.
- [15] G. Ahlers, P. C. Hohenberg, and M. Lücke, “Externally modulated Rayleigh-Bénard convection: experiment and theory,” *Physical Review Letters*, vol. 53, no. 1, 1984.
- [16] John E. Hart, “Stability of the flow in a differentially heated inclined box,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 47, no. 3, pp. 547–576, 1971.
- [17] E. Bodenschatz, W. Pesch, and G. Ahlers, “Recent developments in Rayleigh-Bénard convection,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 32, pp. 709–778, 2000.
- [18] K. E. Daniels, “Pattern formation in inclined layer convection,” *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 23, pp. 5320–5323, 2000.
- [19] K. T. Yang, “Transitions and bifurcations in laminar buoyant flows in confined enclosures,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 110, no. 4b, pp. 1191–1204, 1988.
- [20] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2010.
- [21] G. Ahlers, B. Dressel, J. Oh, and W. Pesch, “Strong non-boussinesq effects near the onset of convection in a fluid near its critical point,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 642, pp. 15–48, 2010.
- [22] A. Davaille and A. Limare, *Treatise of Geophysics 89-165*. Elsevier, 2007.
- [23] A. Glindemann, S. Hippler, T. Berkefeld, and W. Hackenberg, “Adaptive optics on large telescopes,” *Astronomy*, vol. 10, no. 1, 2000.
- [24] M. A. Vorontsova, E. W. Justh, and L. A. Beresnev, “Advanced phase-contrast techniques for wavefront sensing and adaptive optics,” in *High-Resolution Wavefront Control: Methods, Devices, and Applications II* (J. D. Gonglewski, M. A. Vorontsov, and M. T. Gruneisen, eds.), vol. 4124, pp. 98–109, 2000.
- [25] M. Schwertner, M. Booth, T. Tanaka, T. Wilson, and S. Kawata, “Spherical aberration correction system using an adaptive optics deformable mirror,” *Optics Communications*, 2006.
- [26] J. Starck and E. Pantin, “Deconvolution in astronomy: a review,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, pp. 1051–1069, 2002.
- [27] T. Astarita and G. Cardone, “Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV,” *Experiments in Fluids*, vol. 38, pp. 233–243, 2005.
- [28] M. F. Schatz and G. P. Neitzel, “Experiments on thermocapillary instabilities,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 33, pp. 93–127, 2001.
- [29] E. L. Koschmieder, “Bénard convection,” *Advances in Chemical Physics*, vol. 26, 1974.
- [30] R. Krishnamurti, “Some further studies on the transition to turbulent convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 60, no. 2, pp. 285–303, 1973.

- [31] K. Sugiyama, “Non–Oberbeck–Boussinesq effects in two-dimensional Rayleigh–Bénard convection in glycerol,” *Europhysics Letters*, vol. 80, no. 3, pp. 1–6, 2007.
- [32] K. R. Kirchartz and H. O. Jr, “Three-dimensional cellular convection in rectangular boxes,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 192, pp. 249–286, 1988.
- [33] S. H. Davis, “Convection in a box: linear theory,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 30, no. 3, pp. 465–478, 1967.
- [34] I. Catton, “Convection in a closed rectangular region: the onset of motion,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 92, no. 1, pp. 186–187, 1970.
- [35] K. Stork and U. Müller, “Convection in boxes: experiments,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 54, no. 4, pp. 599–611, 1972.
- [36] R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. Surko, “Heat transport by parallel-roll convection in a rectangular container,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 185, pp. 205–234, 1987.
- [37] J. C. Buell and I. Catton, “The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 105, no. 2, pp. 255–260, 1983.
- [38] E. L. Koschmieder and S. G. Pallas, “Heat transfer through a shallow horizontal convecting fluid layer,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 17, no. 9, pp. 991–1002, 1974.
- [39] A. Schlüter, D. Lortz, and F. Busse, “On the stability of steady finite amplitude convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 23, no. 1, pp. 129–144, 1965.
- [40] R. Benzi, F. Toschi, and R. Tripicciono, “On the heat transfer in Rayleigh–Bénard systems,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 93, no. 3-4, pp. 901–918, 1998.
- [41] S. Grossmann and D. Lohse, “Scaling in thermal convection: a unifying theory,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 407, no. 01, pp. 27–56, 2000.
- [42] G. Ahlers, E. Brown, F. F. Araujo, D. Funfschilling, S. Grossmann, and D. Lohse, “Non-Oberbeck–Boussinesq effects in strongly turbulent Rayleigh–Bénard convection,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 569, pp. 409–445, 2006.
- [43] K. C. Stengel, D. S. Oliver, and J. R. Booker, “Onset of convection in a variable-viscosity fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 120, pp. 411–431, 1982.
- [44] J. Zhang, S. Childress, and A. Libchaber, “Non-boussinesq effect: Thermal convection with broken symmetry,” *Physics of Fluids*, vol. 9, no. 4, pp. 1034–1042, 1997.
- [45] P. G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981, second edition 2004.
- [46] E. Pampaloni, C. Pérez-García, L. Albavetti, and S. Ciliberto, “Transition from hexagons to rolls in convection in fluids under non-boussinesq conditions,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 234, pp. 393–416, 1992.

- [47] D. B. White, “The planforms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 191, pp. 247–286, 1988.
- [48] D. Henderson, H. Junaidi, T. Muneer, and T. Grassie, “Experimental and CFD investigation of an ICSSWH at various inclinations,” *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 11, no. 6, pp. 1087–1116, 2007.
- [49] R. M. Clever and F. H. Busse, “Instability of longitudinal convection rolls in an inclined layer,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 81, no. 1, pp. 107–127, 1977.
- [50] Y.-M. Chen and A. J. Pearlstein, “Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 198, pp. 513–541, 1989.
- [51] J. N. Shadid, “Visualization of longitudinal convection roll instabilities in an inclined enclosure heated from below,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 215, pp. 61–84, 1990.
- [52] F. H. Busse and R. M. Clever, “Three-dimensional convection in an inclined layer heated from below,” *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 26, pp. 1–19, 1992.
- [53] F. H. Busse and J. A. Whitehead, “Instabilities of convection rolls in a high prandtl number fluid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 47, no. 2, pp. 305–320, 1971.
- [54] J. T. Lir and T. F. Lin, “Visualization of roll patterns in Rayleigh-Bénard convection of air in a rectangular shallow cavity,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, no. 2889-2902, 2001.
- [55] M. Ciofalo, M. Signorino, and M. Simiano, “Tomographic particle-image velocimetry and thermography in Rayleigh-Bénard convection using suspended thermochromic liquid crystals and digital image processing,” *Experiments in Fluids*, vol. 34, pp. 156–172, 2003.
- [56] J. N. Arnold, I. Catton, and D. K. Edwards, “Experimental investigation of natural convection in inclined rectangular regions of differing aspect ratios,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 98, pp. 67–71, 1976.
- [57] J. G. Symons and M. K. Peck, “Natural convection heat transfer through inclined longitudinal slot,” *Journal of Heat Transfer*, vol. 106, no. 4, pp. 824–829, 1984.
- [58] L. Bellon, M. Gibert, and R. Hernández, “Coupling between aging and convective motion in a colloidal glass of laponite,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 101–107, 2007.
- [59] M. Gibert, “Convection de Rayleigh-Bénard dans une préparation de laponite,” *École Normale Supérieure de Lyon*, 2002.
- [60] L. Vaugier, “Étude de la convection de Rayleigh-Bénard sous contrôle de température et de puissance,” *École Normale Supérieure de Lyon*, 2003-2004.
- [61] J. B. Segur and H. E. Oberstar, “Viscosity of glycerol and its aqueous solutions,” *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 43, no. 9, pp. 2117–2120, 1951.

- [62] M. Gibert, *Convection thermique turbulente: Panaches et fluctuations*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2007.
- [63] R. Verzicco, “Effects of nonperfect thermal sources in turbulent thermal convection,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 6, pp. 1965–1979, 2004.
- [64] K. Xia, S. Lam, and S.-Q. Zhou, “Heat-flux measurement in high-Prandtl-number turbulent Rayleigh-Bénard convection,” *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 6, pp. 064501 (1–4), 2002.
- [65] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1959.
- [66] R. P. Behringer and G. Ahlers, “Heat transport and temporal evolution of fluid flow near the Rayleigh-Bénard instability in cylindrical containers,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 125, no. 219-258, 1982.
- [67] N. Ukrainczyk, “Thermal diffusivity estimation using numerical inverse solution for 1d heat conduction,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp. 5675–5681, 2009.
- [68] MATLAB, *version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., 2010.
- [69] B. Zhao, S. Vanka, and B. Thomas, “Numerical study of flow and heat transfer in a molten flux layer,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 26, no. 1, 2005.
- [70] P. Matisse and M. Gorman, “Neutrally buoyant anisotropic particles for flow visualization,” *Physics of Fluids*, vol. 27, no. 4, pp. 759–760, 1984.
- [71] Y. Fukazawa and M. Funakoshi, “Onset of thermal convection and its flow patterns in a rectangular cavity,” *Fluid Dynamics Research*, vol. 47, p. 065505, 2015.
- [72] D. Ambrosini and P. K. Rastogi, “Optical methods in heat transfer and fluid flow,” *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 44, pp. 155–158, 2006.
- [73] C. Meola and G. M. Carlomagno, “Recent advances in the use of infrared thermography,” *Measurement Science and Technology*, vol. 15, no. 9, 2004.
- [74] R. Jones and C. Wykes, *Holographic and Speckle Interferometry*. Cambridge University Press, 1983.
- [75] C. M. Vest, *Holographic Interferometry*. John Wiley & sons, 1979.
- [76] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge university press, 1999, 7th edition.
- [77] W. B. Li, P. N. Segré, R. W. Gammon, J. V. Sengers, and M. Lamvik, “Determination of the temperature and concentration dependence of the refractive index of a liquid mixture,” *journal of Chemical Physics*, vol. 101, no. 5058, 1994.
- [78] C. G. Murphy and S. S. Alpert, “Dependence of refractive index temperature coefficient on the thermal expansivity of liquids,” *American Journal of Physics*, vol. 39, pp. 834–836, 1971.

- [79] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill Second edition, 1996.
- [80] F. J. Weyl, *Analysis of optical methods. In Physical measurements in gas dynamics and combustion*. Princeton University Press, 1954.
- [81] W. Merzkirch, *Flow Visualization*. Academic Press, 1987, 2nd edition.
- [82] S. P. Trainoff and D. S. Cannell, “Physical optics treatment of the shadowgraph,” *physics of fluids*, vol. 14, no. 4, pp. 1340–1363, 2002.
- [83] J. D. Schmidt, *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation*. SPIE, 2010.
- [84] D. R. Luke, J. V. Burke, and R. G. Lyon, “Optical wavefront reconstruction: theory and numerical methods,” *SIAM review*, vol. 44, no. 2, pp. 169–224, 2002.
- [85] S. Rasouli, *Atmospheric Turbulence Characterization and Wavefront Sensing by Means of the Moiré Deflectometry (Book Chapter), Topics in Adaptive Optics*, p. 23-38. In-Tech, 2012.
- [86] M. Beleggia, M. A. Schofield, V. Volkov, and Y. Zhu, “On the transport of intensity technique for phase retrieval,” *Ultramicroscopy*, vol. 102, no. 1, pp. 37–39, 2004.
- [87] G. Zocchi, P. Tabeling, and M. B. Amar, “Saffman-Taylor plumes,” *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 4, 1992.
- [88] F. Hebert, R. Hufschmid, J. Scheel, and G. Ahlers, “Onset of Rayleigh-Bénard convection in cylindrical containers,” *Physical Review E*, vol. 81, no. 4, 2010.
- [89] P. K. Panigrahi and K. Muralidhar, *Schlieren and Shadowgraph methods in heat and mass transfer*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology Thermal Engineering and Applied Science, 2012.
- [90] G. S. Settles, *Schlieren & Shadowgraph Techniques: Visualizing phenomena in transparent media*. Berlin:Springer-Verlag, 2001.
- [91] X. Zhang, D. Dabiri, and M. Gharib, “Optical mapping of fluid density interfaces: Concepts and implementations,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 67, no. 5, pp. 1858–1868, 1996.
- [92] X. Zhang, “Color tomography for 3d fluid density inversion,” in *Proceedings of SPIE, Optical Techniques in Fluid, Thermal, and Combustion Flow* (S. S. Cha and J. D. Trolinger, eds.), vol. 2546, pp. 321–330, 1995.
- [93] G. Elsinga, B. van Oudheusden, F. Scarano, and D. Watt, “Assessment and application of quantitative schlieren methods: Calibrated color schlieren and background oriented schlieren,” *Experiments in Fluids*, vol. 36, no. 2, pp. 309–325, 2004.
- [94] Y. Nishijima and G. Oster, “Moiré patterns: their application to refractive index and refractive index gradient measurements,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 54, no. 1, pp. 1–5, 1964.

- [95] M. Wang, “Fourier transform moiré tomography for high-sensitivity mapping asymmetric 3-d temperature field,” *Optics and Laser technology*, vol. 34, no. 679-685, 2002.
- [96] Y. Song, X. Zhang, and H. Zhang, “Laser moire deflectometry applicable for mini/micro-scale flow visualization,” in *Proc. SPIE 5058, Optical Technology and Image Processing for Fluids and Solids Diagnostics 2002*, pp. 322–326, 2003.
- [97] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, “Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 72, no. 1, pp. 156–160, 1982.
- [98] S. Cochard and C. Ancey, “Tracking the free surface of time-dependent flows: image processing for the dam-break problem,” *Experiments in Fluids*, vol. 44, no. 1, 2008.
- [99] P. J. Cobelli, A. Maureland, V. Pagneux, and P. Petitjeans, “Global measurement of water waves by fourier transform profilometry,” *Experiments in Fluids*, vol. 46, pp. 1037–1047, 2009.
- [100] P. J. Cobelli, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans, “Experimental study on water-wave trapped modes,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 666, no. 445-476, 2011.
- [101] G. E. A. Meier, “Computerized background-oriented schlieren,” *Experiments in Fluids*, vol. 33, no. 1, pp. 181–187, 2002.
- [102] M. Raffel, C. E. Willert, S. T. Wereley, and J. Kompenhans, *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide*. Springer 2nd edition, 2007.
- [103] S. Dalziel, G. Hughes, and B. Sutherland, “Whole field density measurements by ”synthetic schlieren” ,” *Experiments in Fluids*, vol. 28, no. 4, pp. 322–335, 2000.
- [104] S. Tokgoz, R. Geisler, L. J. A. van Bokhoven, and B. Wieneke, “Temperature and velocity measurements in a fluid layer using background-oriented schlieren and PIV methods,” *Measurement Science and Technology*, vol. 23, no. 11, 2012.
- [105] S. B. Dalziel, G. O. Hughes, and B. R. Sutherland, “Synthetic schlieren,” in *8th International Symposium on Flow Visualization*, 1998.
- [106] B. R. Sutherland, S. B. Dalziel, G. O. Hughes, and P. F. Linden, “Visualisation and measurement of internal waves by ”synthetic schlieren”. part 1: Vertically oscillating cylinder,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 390, pp. 93–126, 1999.
- [107] D. A. Aguilar, B. R. Sutherland, and D. J. Muraki, “Laboratory generation of internal waves from sinusoidal topography,” *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*, vol. 53, no. 1-2, pp. 96–115, 2006.
- [108] *Mechanics of the 21st Century, Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland, 15–21 August 2004*, Springer Netherlands, 2004.
- [109] T. Peacock and P. Weidman, “The effect of rotation on conical wave beams in a stratified fluid,” *Experiments in Fluids*, vol. 39, no. 1, pp. 32–37, 2005.

- [110] B. R. Sutherland, M. R. Flynn, and K. Onu, “Schlieren visualisation and measurement of axisymmetric disturbances,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 10, no. 3, pp. 303–309, 2003.
- [111] M. M. Scase and S. B. Dalziel, “Internal wave fields generated by a translating body in a stratified fluid: an experimental comparison,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 564, pp. 305–331, 2006.
- [112] F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac, “A synthetic schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface,” *Experiments in Fluids*, vol. 46, pp. 1021–1036, 2009.
- [113] J. Sznitman and T. Rosgen, “Whole-field density visualization and abel reconstruction of axisymmetric vortex rings,” *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 343–358, 2006.
- [114] B. Atcheson, I. Ihrke, W. Heidrich, A. Tevs, D. Bradley, M. Magnor, and H.-P. Seidel, “Time-resolved 3d capture of non-stationary gas flows,” *ACM Transactions on Graphics (Proc. SIGGRAPH Asia)*, vol. 27, no. 5, 2008.
- [115] F. Träger, ed., *Springer Handbook of Lasers and Optics, chapter 2*. Springer New York, 2007.
- [116] B. Atcheson, W. Heidrich, and I. Ihrke, “An evaluation of optical flow algorithms for background oriented schlieren imaging,” *Experiments in Fluids*, vol. 46, no. 3, pp. 467–476, 2009.
- [117] A. Agrawal, R. Chellappa, and R. Raskar, “An algebraic approach to surface reconstruction from gradient fields,” in *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision ICCV05 Volume 1*, 2005.
- [118] A. Agrawal, R. Raskar, and R. Chellappa, “What is the range of surface reconstructions from a gradient field?,” in *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2006.
- [119] D. J. Shlien and R. L. Boxman, “Temperature field measurement of an axisymmetric laminar plume,” *Physics of Fluids*, vol. 22, pp. 631–634, 1979.
- [120] D. J. Shlien and A. Brosh, “Velocity field measurements of a laminar thermal,” *Physics of Fluids*, vol. 22, pp. 1044–1053, 1979.
- [121] D. J. Shlien, “Transition of the axisymmetric starting plume cap,” *Physics of Fluids*, vol. 21, pp. 2154–2158, 1978.
- [122] O. Reymond, D. B. Murray, and T. S. O’Donovan, “Natural convection heat transfer from two horizontal cylinders,” *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 32, pp. 1702–1709, 2008.
- [123] C. A. H. Majumder, D. A. Yuen, and A. P. Vincent, “Four dynamical regimes for a starting plume model,” *Physics of Fluids*, vol. 16, no. 5, pp. 1516–1531, 2004.

- [124] J. C. Elicer-Cortés, “Experimental determination of preferred instability modes in a mechanically excited thermal plume by ultrasound scattering,” *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 30, no. 4, pp. 355–365, 2006.
- [125] J. C. Elicer-Cortés, C. Ruz, R. H. H. M. Pavageau, and D. Boyer, “Observation of preferred instability modes in a mechanically excited thermal plume using schlieren visualizations,” *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 32, no. 3-4, pp. 360–370, 2005.
- [126] R. G. Bill and B. Gebhart, “The transition of plane plumes,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 18, no. 4, pp. 513–526, 1975.
- [127] M. I. Fujii Tetsu and U. Haruo, “Buoyant plume above a horizontal line heat source,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 16, no. 4, pp. 755–768, 1973.
- [128] G. Lauriat and G. Desrayaud, “Buoyant plane plumes from heated horizontal confined wires and cylinders,” *Sadhana*, vol. 19, no. 5, pp. 671–703, 1994.
- [129] S. M. Cameron, “PIV algorithms for open-channel turbulence research: Accuracy, resolution and limitations,” *Journal of Hydro-environment Research*, vol. 5, no. 4, pp. 247–262, 2011.
- [130] T. Astarita, “Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV: effect of noise on the accuracy and spatial resolution,” *Experiments in Fluids*, vol. 40, pp. 977–987, 2006.
- [131] A. Lecuona, J. Nogueira, P. Rodríguez, and D. Santana, “Accuracy and time performance of different schemes of the local field correction PIV technique,” *Experiments in Fluids*, vol. 33, no. 6, pp. 743–751, 2002.
- [132] J. Nogueira and A. L. P. A. Rodríguez, “Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods. Fundamentals,” *Experiments in Fluids*, vol. 39, no. 2, pp. 305–313, 2005.
- [133] L. Gui and S. T. Wereley, “A correlation-based continuous window-shift technique to reduce the peak-locking effect in digital PIV image evaluation,” *Experiments in Fluids*, vol. 32, no. 4, pp. 506–517, 2002.
- [134] F. F. Schrijer and F. Scarano, “On the stabilization and spatial resolution of iterative PIV interrogation,” in *13th Int. Symp on Appl. Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, June 26 – 29, 2006-revisar*.
- [135] F. F. J. Schrijer and F. Scarano, “Effect of predictor-corrector filtering on the stability and spatial resolution of iterative PIV interrogation,” *Experiments in Fluids*, vol. 45, pp. 927–941, 2008.
- [136] T. Astarita, “Analysis of weighting windows for image deformation methods in PIV,” *Experiments in Fluids*, vol. 43, pp. 859–872, 2007.
- [137] T. Astarita, “Analysis of velocity interpolation schemes for image deformation methods in PIV,” *Experiments in Fluids*, vol. 45, pp. 257–266, 2008.

- [138] H. El-Kashef, “The necessary requirements imposed on polar dielectric laser dye solvents,” *Physica B*, vol. 279, pp. 295–301, 2000.
- [139] J. D’Errico. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/>. File 9734.
- [140] T. Hattori, S. E. Norris, M. P. Kirkpatrick, and S. W. Armfield, “Prandtl number dependence and instability mechanism of the near-field flow in a planar thermal plume,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 732, no. 105-127, 2013.
- [141] E. Kaminiski and C. Jaupart, “Laminar starting plumes in high-prandtl-number fluids,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 478, pp. 287–298, 2003.
- [142] A. Davaille, A. Limare, F. Touitou, I. Kumagai, and J. Vatteville, “Anatomy of a laminar starting thermal plume at high Prandtl number,” *Experiments in fluids*, vol. 50, no. 2, pp. 285–300, 2011.
- [143] Y. S. Touloukian, P. E. Liley, and S. C. Saxena, *The thermophysical properties of matter:the TPRC Data Series*, vol. 3. 1970.
- [144] D. M. Cuckovic-Dzodzo, M. B. Dzodzo, and M. D. Pavlovic, “Laminar natural convection in a fully partitioned enclosure containing fluid with nonlinear thermophysical properties,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 20, pp. 614–623, 1999.
- [145] N. S. Cheng, “Formula for viscosity of glycerol-water mixture,” *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 47, no. 9, pp. 3285–3288, 2008.
- [146] Y.-M. Chen and A. J. Pearlstein, “Viscosity-temperature correlation for glycerol-water solutions,” *Industrial and Engineering Chemistry Research*, vol. 26, no. 8, pp. 1670–1672, 1987.
- [147] P. N. Shankar and M. Kumar, “Experimental determination of the kinematic viscosity of glycerol-water mixtures,” *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 444, pp. 573–581, 1994.
- [148] T. T. Nguyen, Y. Biadillah, R. Mongrain, J. Brunette, J. C. Tardif, and O. F. Bertrand, “A method for matching the refractive index and kinematic viscosity of blood analog for flow visualization in hydraulic cardiovascular models,” *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 126, no. 4, pp. 529–535, 2004.
- [149] I. I. Adamenko, L. A. Bulavin, V. Ilyin, S. A. Zelinsky, and K. O. Moroz, “Anomalous behavior of glycerol–water solutions,” *Journal of Molecular Liquids*, vol. 127, pp. 90–92, 2006.
- [150] D. M. Cristancho, D. R. Delgado, F. Martínez, M. A. A. Fakhree, and A. Jouyban, “Volumetric properties of glycerol + water mixtures at several temperatures and correlation with the jouyban-acree model,” *Rev. Colomb. Cienc. Quím. Farm.*, vol. 40, no. 1, pp. 92–115, 2011.
- [151] Y. Marcus, “Some thermodynamic and structural aspects of mixtures of glycerol with water,” *Physical Chemistry Chemical Physics*, vol. 2, pp. 4891–4896, 2000.

- [152] Y. L. Rastorguev and Y. A. Ganiev, “Thermal conductivity of aqueous solutions or organic materials,” *Russian Journal of Physical Chemistry*, vol. 40, pp. 869–871, 1966.
- [153] J. W. Valvano, J. R. Cochran, and K. R. Diller, “Thermal conductivity and diffusivity of biomaterials measured with self-heated thermistors,” *International Journal of Thermophysics*, vol. 6, no. 3, 1985.
- [154] D. W. Mackoski, “Conduction Heat Transfer - Notes for MECH 7210,” tech. rep., Mechanical Engineering Department Auburn University.
- [155] M. Frigo and S. G. Johnson, “The design and implementation of FFTW3,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 93, no. 2, pp. 216–231, 2005.
- [156] P. Thévenaz, T. Blu, and M. Unser, “Interpolation revisited,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 7, pp. 739–758, 2000.
- [157] <http://bigwww.epfl.ch/thevenaz/interpolation/>.
- [158] J. Nogueira, A. Lecuona, and P. A. Rodríguez, “Local field correction PIV: on the increase of accuracy of digital PIV systems,” *Experiments in Fluids*, vol. 27, pp. 107–116, 1999.
- [159] J. Nogueira, A. Lecuona, and P. A. Rodríguez, “Local field correction PIV, implemented by means of simple algorithms, and multigrid versions,” *Measurement Science and Technology*, vol. 12, no. 11, pp. 1911–1921, 2001.
- [160] R. Theunissen, “Improvements in hybrid PIV/PTV algorithms and droplet sizing,” Master’s thesis, Delft University of Technology, Aerospace Department, 2003.
- [161] P. Horowitz and W. Hill, *The art of electronics second edition*. Cambridge University Press, 1994.
- [162] R. Pease, *Analog circuits (world class designs)*. Elsevier, 2008.
- [163] “Versatile high precision programmable current sources using DACs, Op-Amps and MOSFET transistors.” Analog Devices Circuit note CN0-151, 2010-2011.