



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

METODOLOGÍA DE AGENDAMIENTO DE LA PRODUCCIÓN CONSIDERANDO
CREACIÓN DE POLÍGONOS Y RESTRICCIONES GEOMETALÚRGICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA DE MINAS

GONZALO IGNACIO NELIS SUAZO

PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY

PROFESOR CO-GUÍA:
NELSON MORALES VARELA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOSÉ MUNIZAGA ROSAS
EDUARDO MORENO ARAYA

SANTIAGO DE CHILE
2021

Resumen

La complejidad de los problemas abordados en planificación minera ha generado la necesidad de dividirlos en etapas secuenciales, donde los resultados de cada etapa son usados como insumo y condicionan las posibilidades de las etapas sucesivas. Esto conlleva a que existan oportunidades de capturar valor y generar mejores planes si se optara por la integración de algunas de estas problemáticas.

La suposición del largo plazo que los bloques del modelo se pueden extraer de forma independiente es infactible operacionalmente en el corto plazo, por lo que es necesario pasar de la noción de bloques individuales a la noción de cortes de producción o polígonos. La generación de estos polígonos debe considerar las sinergias potenciales en el agendamiento en conjunto con zonas diferentes de la mina, y que puedan cumplir las restricciones geometalúrgicas para maximizar el valor de la operación.

En este contexto, esta tesis se enfoca en ligar tres problemas que en la literatura y en la operación se realizan de forma secuencial: el agendamiento de la producción, la creación de cortes de producción, y la consideración de variables geometalúrgicas en el procesamiento.

El primer resultado relevante es la creación de un modelo de optimización novedoso que define cortes de producción y un plan de producción simultáneamente, considerando espacios operacionales, restricciones de tamaño, capacidad mina y planta, mezcla y forma. Este enfoque se basa en la ubicación de bloques representantes que señalan la ubicación de los posibles cortes de producción. El modelo genera agendamientos operacionalmente factibles en el corto plazo para casos de estudio reales. Los resultados muestran que el modelo logra capturar una gran parte del valor de cada banco, y obtiene mejores resultados que la consideración secuencial tradicional de estas etapas tanto en factibilidad como en valor.

El segundo resultado es un modelo que genera un plan factible al agendar cortes de producción precalculados en base a un conjunto de formas operacionalmente factibles. El modelo es resuelto de forma eficiente para casos de estudio reales utilizando un algoritmo de generación de columnas. Este modelo presenta la ventaja de que permite incorporar cualquier función geometalúrgica (no necesariamente lineal o aditivas) para obtener los atributos de los cortes y poder decidir el destino de procesamiento en base a dichas características. Los resultados muestran que el modelo genera formas factibles, y que la incorporación de interacciones no lineales modifica la política de destinos tradicional. Extensiones de este trabajo pueden lidiar con el problema multiperiodo, la definición de factibilidad operacional y el escalamiento del algoritmo a instancias de mayor tamaño.

Abstract

The complexity of the mine planning process has forced a divide-and-conquer approach, where several sequential steps are defined, and the result of each step is used as input for the subsequent step. Therefore, the use of integrated approaches in mine planning could provide better plans in terms of value and feasibility.

The long-term planning assumption that each block can be extracted individually does not hold for short-term process. For this reason, short-term planners deal with polygons or mining cuts to obtain feasible plans. Defining these polygons should take advantage of synergies between different zones of the mine and the geometallurgical outcome in the processing facility to improve profitability in the operation.

In this context, this thesis deals with three problems that are commonly treated sequentially both on the literature and on real applications: production scheduling, mining cut definition, and the incorporation of geometallurgical variables in the processing.

The first result of this research is the proposal of a new optimization model that defines a mining cut configuration and a production scheduling simultaneously, considering operational restrictions and size, capacity, processing, blending and shape constraints. This approach is based on representative SMUs which defines a potential location of a mining cut. The model can define operationally feasible schedules for the short-term horizon in real case studies. The model captures most of the profit in each bench and obtains better results than a traditional sequential approach in terms of operational feasibility and profit.

The second result is a methodology to obtain short-term plans based on a large set of feasible shapes. This optimization model is solved efficiently for real case studies using a column generation algorithm. The main advantage of this model is the possibility of incorporating any geometallurgical function (not necessarily linear or additive) to calculate the mining cuts attributes and decide the best processing facility based on those characteristics. Results showed that this model achieves feasible mining cuts definition, and geometallurgical interactions modify the traditional destination policy in the short-term. Extensions of this work must deal with the multi-period problem, operational feasibility definition, and algorithm scaling to deal with even larger instances.

A mis padres, por darmelo todo y más.

Agradecimientos

A Emilia y Juan Pablo, porque verlos crecer ha sido un regalo.

A Paula y Nicolás, por el ejemplo y el cariño.

A Diego, Gonzalo y Patricio, porque no los merezco como amigos (pero lo intento). Por hacerme mejor.

A Ignacio y Oliver, por los casi veinte años de amistad ininterrumpida.

A Delphos, por ser una familia. Por hacerme crecer.

A Enrique, Máx, Valeria, Javier, Gerson, Fabián y al señor Espejo. Por el compañerismo de todos estos años.

A Nelson, por los desafíos. Por la colaboración. Por las enseñanzas. Por la amistad.

Al profesor Xavier, por la confianza y las oportunidades.

A Ayleen, por crecer conmigo. Por aguantarme. Por el amor. Por el futuro.

A Mónica y Nicolás. Por el amor. Por las risas. Por el hogar. Por ser los mejores.

A todos ustedes,

Muchas gracias.

Este trabajo fue parcialmente financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID) a través de los proyectos PIA AFB180004, PIA Anillo ACT1407 y Beca Doctorado Nacional 2018 - 2118155.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Organización de la tesis	4
2. Antecedentes	5
2.1. Planificación tradicional en minería a cielo abierto	6
2.1.1. Generación de pits anidados	6
2.1.2. Determinación de pit final y selección de fases	7
2.1.3. Diseño minero	8
2.1.4. Planificación de corto plazo	9
2.2. Investigación de operaciones en planificación de largo plazo en minas a cielo abierto	10
2.2.1. Planificación estratégica y pit final	10
2.2.2. Secuenciamiento de bloques	11
2.3. Investigación de operaciones en planificación de corto plazo en minas a cielo abierto	14
2.3.1. Modelos de agendamiento de corto plazo generales	14
2.3.2. Agendamiento con actividades operacionales	23
2.3.3. Análisis de Investigación de Operaciones en Planificación de corto plazo	25
2.4. Agrupamiento en agendamiento de la producción	26
2.4.1. Agrupamiento operacional	26
2.4.2. Política de leyes de corte	36
2.4.3. Análisis de agrupamiento en agendamiento de la producción	39
2.5. Geometalurgia	40
2.5.1. Geometalurgia en planificación minera	42
2.5.2. Análisis de geometalurgia en planificación minera	50
2.6. Discusión	50
3. A mathematical model for the scheduling and definition of mining cuts in short-term mine planning	54
3.1. Introduction	55
3.2. Literature Review	57
3.2.1. Operational shapes for short-term mine planning	57
3.2.2. Scheduling in short-term mining	58
3.2.3. Summary	59
3.3. Mathematical Model	59

3.3.1.	Modeling mining cuts	60
3.3.2.	Optimization Model	62
3.3.3.	Comments	65
3.4.	Numerical Experiments	66
3.4.1.	Case Study	66
3.4.2.	Results	68
3.4.3.	Impact of the precedence arcs to model mining cut shapes	72
3.4.4.	Impact of the initial selection of representatives	73
3.4.5.	Computational aspects	74
3.5.	Conclusions	75
4.	An algorithm for the operational short-term mine planning problem with geometallurgical interactions based on column generation	76
4.1.	Introduction	77
4.1.1.	Contribution	78
4.2.	Literature Review	78
4.2.1.	Mining cut definition and geometallurgy in short-term mine planning	78
4.3.	Problem formulation	81
4.3.1.	Optimization model	81
4.4.	Method	82
4.4.1.	Pricing problem	82
4.4.2.	Column generation algorithm	83
4.4.3.	Integer solution	83
4.4.4.	Free selection policy	84
4.5.	Experiments	85
4.5.1.	Case Study	85
4.5.2.	Numerical Results	87
4.5.3.	Discussion	90
4.6.	Limitations	94
4.7.	Conclusions	94
4.8.	Appendix	95
4.8.1.	Cluster shape generation	95
4.8.2.	Practical Heuristic	96
5.	Conclusiones	99
	Bibliografía	102

Índice de tablas

2.1. Resumen de aportes principales	51
2.2. Aportes de el trabajo de investigación	52
3.2. Economical and Scheduling parameters for each destination	68
3.3. Mining Cut definition parameters	69
3.4. Total tonnage by destination policy	72
3.5. Optimization results	75
4.1. Economic parameters	86
4.2. Root relaxation	88
4.3. Integer Solution	89
4.4. Practical heuristic	97

Índice de ilustraciones

1.1.	Contribución de la tesis	3
2.1.	Secuencias de <i>Best Case</i> y <i>Worst Case</i>	8
2.2.	Diagrama de materiales y destinos en corto plazo. <i>De Goodfellow y Dimitrakopoulos (2016)</i>	15
2.3.	Resultado de agendamientos en corto plazo. <i>De Villalba y Dimitrakopoulos (2016)</i>	15
2.4.	Resultado de algoritmo de agrupamiento para polígonos en corto plazo. <i>De Tabesh y Askari-Nasab (2013)</i>	27
2.5.	Aplicación de un algoritmo de optimización para el límite entre mineral y estéril. <i>De Sari y Kumral (2017)</i>	32
2.6.	Definición de destinos basado en agrupamiento por <i>k-means</i> . <i>De Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016)</i>	36
2.7.	Esquema que ejemplifica distintas variables primarias y de respuesta. <i>De Co-ward et al. (2009)</i>	41
2.8.	Ejemplo de curvas de recuperación no lineales según la ley de alimentación y el proceso escogido. <i>De Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016)</i>	47
3.1.	Stages from long to short-term plans	56
3.2.	Mining cuts definition based on the optimization model	60
3.3.	Horizontal precedence types	61
3.4.	Copper grade	67
3.5.	Best destination based on cut-off grade	68
3.6.	Representative SMUs and resulting mining cuts	69
3.7.	Extraction period of the SMUs in both benches	70
3.8.	Production Plan	70
3.9.	SMUs destination policy comparison	71
3.10.	Effect of the scheduling constraints on the destination policy - Bench B	72
3.11.	Effect of the precedence definition	73
3.12.	Effect of representative SMUs location on the mining cut definition and destination policy - Bench B	74
4.1.	Recovery Curves	86
4.2.	Mining cut definition for BM432 - S33	87
4.3.	Total runtimes for Problem (OPCP)	89
4.4.	Time per task in each iteration for different values of N_{max}	91
4.5.	Algorithm runtime for different values of N_{max}	92

4.6. Destination Policy Comparison - BM720 - S33	93
4.7. Shape generation parameters	95

Capítulo 1

Introducción

La industria minera es una de las áreas más relevantes para la economía del país, representando un aporte del 10 % del total del Producto Interno Bruto de Chile y un 7.8 % de los ingresos fiscales totales durante las últimas dos décadas. La relevancia minera de Chile también se ve reflejada en el contexto mundial, siendo el principal productor de cobre mina con una participación del 28.1 % al año 2018, correspondientes a 5,83 millones de toneladas métricas de cobre fino. Proyecciones de Cochilco (2018b), indican que esta producción aumentaría en la próxima década, con una producción anual esperada del orden de 7 millones de toneladas métricas de cobre fino, sustentadas en una inversión total de 65,747 MUSD en dicho periodo (Cochilco, 2018a).

La magnitud de esta industria exige la constante revisión y actualización de sus procesos, desde la exploración hasta la comercialización, con el fin de obtener la mayor rentabilidad posible de la explotación de un yacimiento. Esto involucra la incorporación de nuevas técnicas y metodologías sobre toda la cadena de valor, que permitan optimizar cada etapa productiva. Más aún, la alta suma de inversiones requiere que el negocio sea robusto frente a distintos escenarios económicos y geológicos que se puedan presentar en el futuro.

Dado este escenario, la planificación del negocio minero toma una importancia relevante, donde las diversas decisiones hechas en el proyecto impactan de gran manera a la rentabilidad obtenida por los dueños. Estas decisiones son de diversa naturaleza, como la definición de métodos de explotación y flota de equipos afines, tasas de producción y diseño minero, definición de mercados y productos finales, rutas de procesamiento, asignación de equipos a frentes de trabajo, definición de polígonos y control de leyes, etc. Cada una de estas decisiones ha sido objeto de estudio e investigación, donde se han utilizado diversas técnicas para asistir al planificador a tomar las mejores decisiones en cada una de ellas. Uno de los ejemplos más relevantes es la aplicación de programación lineal para definir las reservas mineras y el agendamiento de la producción en planificación a largo plazo mediante la metodología de Lerchs y Grossmann (1965), utilizada ampliamente en la industria para evaluación de minas a cielo abierto. Sin embargo, otras técnicas han empezado a formar parte de la planificación minera en sus distintos horizontes, como la simulación de eventos discretos, el agendamiento directo de bloques, heurísticas y metaheurísticas de agendamiento y técnicas de optimización estocástica, con el fin de proveer al planificador de distintos puntos de vistas a la hora de

tomar las distintas decisiones consideradas (Newman et al., 2010).

Una de las mayores dificultades presentes en la planificación recae en ser un problema multifactorial y de gran magnitud, por lo que los avances de la última década se han centrado en generar herramientas más eficientes que permitan resolver problemas cada vez más complejos, a mayores horizontes temporales y con yacimientos de mayor envergadura. Además, por la necesidad de utilizar estimaciones en el proceso de planificación, el estudio de técnicas de evaluación e incorporación de escenarios ha sido frecuente en la investigación reciente, con el fin de generar planes y decisiones que respondan bien frente a las perturbaciones del mercado y el conocimiento limitado del yacimiento y el sistema minero.

Dado que este problema multifactorial se torna muy complejo, típicamente se ha dividido según diferentes horizontes temporales -conocidas como planificación de largo, mediano y corto plazo- o sus diversos objetivos -planificación estratégica, táctica y operacional-. A pesar de que todos son componentes del mismo problema, sus objetivos, alcances e información disponible pueden variar de manera considerable. Esto genera que exista una diferencia entre los planes realizados en el largo plazo, con respecto a los ejecutados en el corto plazo, lo que conlleva a pérdida de valor para el negocio. Más aún, el desalineamiento de los objetivos puede llevar a que los planes de largo o mediano plazo puedan ser infactibles al considerar restricciones adicionales en el corto, tales como mezcla, espacios operacionales y requerimientos de la planta de procesamiento. Esto obliga a modificar la planificación original y a usar diversos stocks para cumplir con las metas productivas.

Las metodologías actuales de planificación a cielo abierto incorporan restricciones de cumplimiento de mezcla y contaminantes en su formulación, pero en periodos temporales de nivel anual, en donde el promedio de todo el material agendado en cada periodo debe cumplir los distintos requerimientos metalúrgicos y operacionales impuestos. Sin embargo, el procesamiento requiere que estas restricciones se cumplan en horizontes temporales más acotados, pues el flujo continuo de mineral debe ser adecuado para obtener la recuperación proyectada.

Además, las consideraciones operacionales de los equipos de extracción impiden la extracción individual de los bloques -suposición de gran relevancia en la planificación de largo plazo- durante la operación, en favor de la extracción de polígonos, los cuales deben cumplir requerimientos geométricos, metalúrgicos, geológicos y económicos. Esto tiene un efecto adicional en el corto plazo: típicamente las características geometalúrgicas de procesamiento de los polígonos -como dureza, recuperación o consumo de energía- no son una función lineal de las características de cada bloque que los compone, sino de la mezcla de estos polígonos en cada periodo del agendamiento. Por este motivo, los rendimientos estimados en el largo plazo no son equivalentes a los de la operación, y la decisión de los bloques que componen cada polígono, y los polígonos que serán extraídos en cada periodo en zonas diferentes de la mina debe considerar este efecto en el procesamiento, para maximizar el beneficio de la operación.

Por estos motivos, buscar una metodología de agendamiento que integre algunas consideraciones típicas del corto plazo se vuelve un problema relevante, con el fin de aumentar el cumplimiento y generar planes factibles en la operación. Los problemas de espacio operacional y mezcla no lineal presentan desafíos relevantes en términos de modelamiento y resolución.

En base a esta problemática, el objetivo de esta tesis es abordar tres problemas de pla-

nificación a cielo abierto de corto plazo que en la literatura se han considerado de forma separada:

- **Creación de polígonos:** Definición de unidades de extracción que consideren información de pozos de tronadura, y tengan características geométricas adecuadas para la operación.
- **Respuesta geometalúrgica:** Que la definición de polígonos considere la respuesta que poseen los polígonos en el destino de procesamiento relevante en base a sus características geometalúrgicas.
- **Agendamiento de la Producción:** La mezcla del material enviado en cada periodo a cada destino -el cual puede venir de varios polígonos a la vez- define la respuesta metalúrgica en la planta y el valor percibido por la operación, por lo cual se debe considerar la determinación simultánea de cada polígono y su periodo de extracción para maximizar el beneficio y cumplir las restricciones geometalúrgicas del proceso.

A pesar de que los tres problemas se han abordado de forma independiente en la literatura (como se verá en detalle en la Sec. 2), la consideración simultánea de ellos es un problema aún no resuelto en el ámbito de la planificación minera. La Fig. 1.1 presenta un esquema de la relación de las tres problemáticas y algunos trabajos relevantes en algunas de ellas, los que se explicarán en detalle en la sección de Antecedentes.

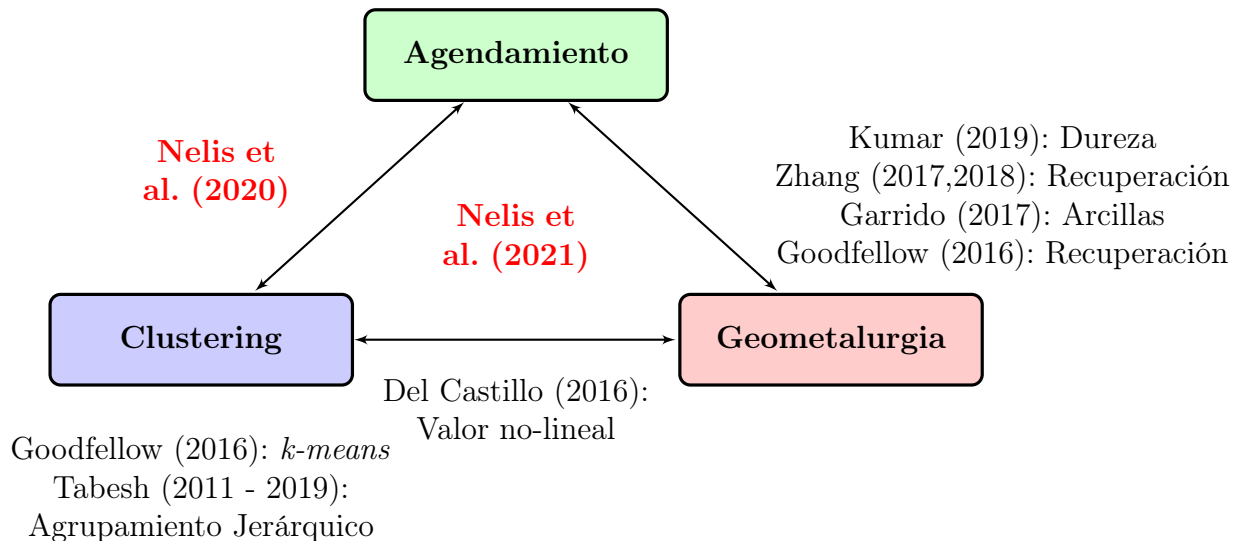


Figura 1.1: Contribución de la tesis

El aporte de esta tesis se divide en dos partes de acuerdo a los problemas que se buscan resolver. El primer problema está centrado en la creación de polígonos considerando el periodo de extracción y el destino al cual serán enviados, usando funciones de valorización y mezcla lineales. La literatura actualmente considera el agrupamiento tanto como un pre-proceso del agendamiento (para reducir variables, por ejemplo), como un post-proceso de un banco ya agendado en cierto periodo para definir tamaños operacionales (Sec. 2.4.1 - Definición de polígonos y fases operativas) o para definir destinos de cierto tipo de material (Sec. 2.4.2 - Política de Leyes de Corte). Sin embargo, la consideración simultánea de la forma de los

polígonos, su periodo de extracción y su destino no ha sido abordada. Las ventajas de la consideración simultánea de estas dos problemáticas radica en que es posible generar polígonos que por si solos pueden no cumplir las restricciones de mezcla (*blending*), pero que, en su conjunto, enviados al mismo destino en el mismo periodo, sí lo pueden hacer, aprovechando oportunidades de valor y factibilidad operacional que no son consideradas al resolver los problemas de forma independiente. La ventaja de considerar procesos de mezcla y valor lineales, es la posibilidad de abordar este problema con un modelo de optimización lineal.

Sin embargo, la linealidad en el beneficio y en la mezcla de los bloques es una suposición no válida al considerar variables geometalúrgicas del proceso, como la recuperación o la dureza, por ejemplo. La mezcla de los bloques que forman cada polígono determinan una respuesta particular en la planta de procesamiento, la cual típicamente no cumple con la aditividad (lo cual será descrito en más detalle en la Sec. 2.5), y son de especial cuidado en el corto plazo para mantener el buen funcionamiento del proceso. Por este motivo, es necesario incorporar estas relaciones en el proceso de definición de polígonos y agendamiento, lo que implica modificar el problema lineal presentado y utilizar técnicas de resolución que permitan lidiar con estas funciones no lineales. Este es el segundo aporte de este trabajo, donde en la actualidad no existen metodologías que decidan en un modelo de optimización la definición de polígonos considerando una mezcla no lineal o no aditiva.

1.1. Organización de la tesis

El capítulo 2 de la tesis muestra los antecedentes de este trabajo. Está dividido en tres secciones principales: Investigación de operaciones aplicada a agendamiento de la producción, técnicas de agrupamiento en planificación minera, y geometalurgia. Se presentan los trabajos más relevantes y se describe el estado del arte en dichas áreas.

Los siguientes dos capítulos fueron publicados o serán enviados a revistas científicas. Cada capítulo contiene un breve resumen de los trabajos más relevantes del área para entender las limitantes en las metodologías y el estado del arte actual.

El capítulo 3 presenta el primer resultado de esta tesis. Se desarrolló un modelo de optimización entera para agendamiento de la producción de corto plazo que define polígonos considerando restricciones operativas, de capacidad y de mezcla. El modelo responde a distintas geometrías basado en restricciones de precedencia y en la definición de *SMUs representantes*. Este capítulo fue publicado en *Optimization and Engineering* (Nelis y Morales, 2021).

El capítulo 4 presenta el segundo resultado de esta tesis. Se generó un algoritmo basado en generación de columnas que permite obtener la mejor definición de polígonos operacionales considerando restricciones de agendamiento y cualquier función geometalúrgica para evaluar el valor de cada polígono. Está basado en la enumeración del conjunto de posibles polígonos y en técnicas eficientes de resolución para abordar la gran cantidad de variables, lo que permite resolver problemas no abordados en el estado del arte actual. Este capítulo se presenta en estado de borrador y será enviado a otra revista científica.

El capítulo 5 presenta las conclusiones generales del trabajo, junto con las posibles extensiones y trabajos futuros que derivan de esta tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

La planificación minera, según Johnson (1969), es el área de la Ingeniería de Minas encargada de determinar la mejor estrategia productiva, en función de los objetivos del dueño del negocio y sujeto a las restricciones impuestas por las condiciones físicas y geológicas del yacimiento, y por el sistema operativo de la mina. Para cumplir este fin, la planificación minera da respuesta a tópicos críticos del negocio minero. De acuerdo a Lerchs y Grossmann (1965), los más relevantes son:

1. Diseño óptimo de la mina.
2. Secuenciamiento y plan de producción.
3. Definición de sistema de transporte.
4. Instalación de plantas de procesamiento.
5. Definición de mercados.

Todos los elementos de la planificación minera están relacionados entre sí, por lo que la consideración individual de cada uno de ellos no genera el mejor plan productivo posible. Sin embargo, incorporar todos los elementos simultáneamente genera un problema extremadamente complejo de resolver. Dado esto, la planificación minera se realiza en etapas secuenciales que se retroalimentan entre sí, y que definen el plan minero con distintos niveles de información y agregación.

Estas etapas, según el horizonte de planificación que abarcan y su grado de información, pueden clasificarse en:

1. **Planificación de largo plazo:** En esta etapa se define la envolvente económica del yacimiento, el método de explotación a utilizar, las inversiones de capital requeridas y se concluye con un plan de producción de largo plazo que define las reservas mineras disponibles. El nivel de información del negocio es bajo y se basa en proyecciones generales del mineral y condiciones del mercado.

2. **Planificación de mediano plazo:** Esta etapa se encarga de alinear los objetivos del plan de largo plazo con la extracción de corto plazo con el fin de lograr las metas productivas en la operación. Además, sirve como etapa de retroalimentación para el plan de largo plazo en base a la información obtenida en la operación.
3. **Planificación de corto plazo:** El objetivo principal es cumplir con las metas de producción definidas por el plan de largo y mediano plazo en base a los recursos operacionales disponibles. El nivel de detalle del plan es alto al igual que el nivel de información disponible. La información obtenida en esta etapa es utilizada por el mediano plazo para ajustar las metas productivas.

A continuación se presentarán las etapas de planificación utilizadas usualmente en la industria minera, para luego revisar el estado del arte de planificación minera, agrupamiento de bloques y geometalurgia.

2.1. Planificación tradicional en minería a cielo abierto

2.1.1. Generación de pits anidados

La planificación tradicional se basa esencialmente en el trabajo de Lerchs y Grossmann (1965), donde se detalla la estrategia y la resolución del problema de pit final. Esta etapa recibe como insumo las condiciones geológicas del yacimiento a través de un modelo de bloques. Este se define como una discretización del yacimiento en estudio en unidades llamadas bloques o unidades selectivas mineras (SMU), los cuales presentan una ubicación espacial y una lista de posibles atributos, entre los cuales podemos encontrar densidad, ley del elemento de interés, contenido de contaminantes, unidad geológica y geomecánica, etc. Además, las características geotécnicas del yacimiento se resumen en un ángulo de talud máximo permitido, el cual asegura la estabilidad de la pared del pit. Este parámetro puede ser único para todo el yacimiento, o bien depender de orientaciones espaciales o de cada bloque.

Por otra parte, se recibe una estimación de los costos de extracción y procesamiento para cada bloque, junto con parámetros económicos asociados a la comercialización de la especie de interés. Con estos parámetros económicos, es posible calcular un valor económico para cada bloque del modelo de acuerdo a la ecuación (2.1).

$$V_{bloque} = T_{bloque}[-(C_{mina} + C_{planta}) + L_{bloque} \cdot Rec \cdot (P \cdot RF - C_{RyV})] \quad (2.1)$$

Donde:

V_{bloque}	=	Beneficio económico obtenido al extraer, procesar y comercializar el bloque.
T_{bloque}	=	Tonelaje del bloque.
C_{mina}	=	Costo de extracción del bloque (arranque, carguío y transporte).
C_{planta}	=	Costo de procesamiento del bloque
L_{bloque}	=	Contenido del elemento de interés del bloque (ley).
Rec	=	Recuperación metalúrgica del elemento de interés.
P	=	Precio de venta del elemento de interés.
RF	=	Factor multiplicador del precio.
C_{RyV}	=	Costo de refinación y venta del elemento de interés.

Cabe destacar que, en caso de que haya más de un elemento con valor económico, el valor del bloque puede ser ajustado para considerarlo (mediante una ley equivalente que combina los distintos elementos de interés, por ejemplo). Lo mismo ocurre en caso de que haya más de una planta de procesamiento posible, lo cual modifica dicho costo y la recuperación metalúrgica obtenida. Además, es posible considerar que no es necesario procesar el bloque una vez extraído, enviándolo al botadero, con lo cual no se incurre en los costos de procesamiento en caso de que el contenido de interés no lo justifique. Finalmente, el valor del bloque se fija como el mayor valor entre todas las alternativas de destino posibles (distintas rutas de procesamiento o botadero).

Por otra parte, el ángulo de talud se traduce en una serie de precedencias verticales entre los bloques del modelo con lo cual se asegura que el ángulo del pit generado respete las condiciones geotécnicas impuestas.

Con este conjunto de precedencias y el valor de cada bloque, se calcula el pit óptimo en base al algoritmo de Lerchs y Grossmann (1965).

En base a la ecuación (2.1) es posible modificar el RF , para obtener una serie de pits anidados: A menor valor de RF , más pequeño será el valor de cada bloque, y por ende, de menor tamaño será el pit resultante. De esta forma se obtiene una colección de pits que inducen una posible secuencia de extracción: Los pits obtenidos con menor RF contienen los bloques con mayor valor, y por ende, debieran ser extraídos en el inicio de la explotación. Este resultado se utiliza como insumo para el siguiente proceso.

2.1.2. Determinación de pit final y selección de fases

A partir de la colección de pits anidados, se debe definir el límite de la explotación del pit y la secuencia de minado (Hustrulid et al., 2013b). Para esto, se fijan ritmos de extracción y ritmos de procesamiento, junto con una tasa de descuento, y se definen dos tipos de secuencias ficticias que representan el mejor y el peor caso posible: el mejor caso (*Best Case*) representa una secuencia de extracción *pit a pit*, en donde se obtiene el beneficio del mineral al inicio de la secuencia, mientras que el peor caso representa una secuencia de extracción *banco a banco*, en donde se extrae una gran cantidad de estéril al inicio de la operación, lo que disminuye el valor del proyecto. En la Fig. 2.1 se pueden comparar gráficamente ambas secuencias. Cabe destacar que pese a que el *Best Case* es el mejor en términos económicos, la explotación pit a pit no es viable por no ofrecer espacios suficientes para el desarrollo de las operaciones unitarias.

Con estas secuencias como referencia, se determina el pit final entre los pits anidados en función de los objetivos estratégicos de la compañía: Mayor cantidad de reservas, mayor VAN final, menor riesgo), etc.

Posteriormente, se definen las fases de explotación, las cuales son un conjunto de pits anidados que cumplen satisfactoriamente con restricciones tanto operacionales como económicas, y que serán utilizadas como base para el diseño minero (Hustrulid et al., 2013b). La geometría de estas fases debe ser acorde a los equipos que se desean utilizar (en base a los ritmos de producción definidos) y la secuencia de extracción debe cumplir con restricciones espaciales como número de bancos máximos extraídos por año, máximo y mínimo desfase

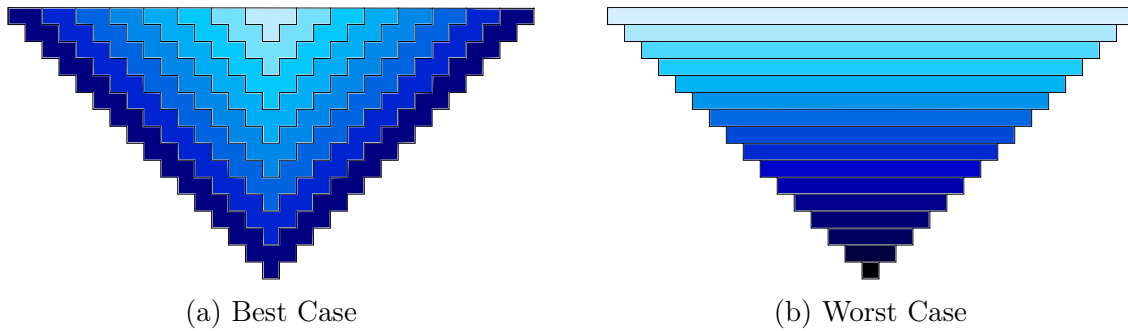


Figura 2.1: Secuencias de referencias para la elección de pit final. Las tonalidades representan el orden de extracción de las distintas secciones del pit, desde el tono más claro al inicio de la secuencia hasta el tono más oscuro al final. *Fuente: Elaboración propia.*

entre bancos de fases contiguas, etc. En base a estas condiciones, se construye el plan de producción y luego se compara entre distintos grupos de fases para determinar el mejor plan de producción en términos de VAN, producción de mineral y movimiento mina total, fluctuaciones de movimiento entre periodos, etc. Estas son las fases que se utilizan en el siguiente proceso.

2.1.3. Diseño minero

Luego de seleccionar las fases, se procede con el diseño minero final. En esta etapa se define la ubicación de las rampas y caminos de la mina, teniendo en consideración las características de la operación futura. Según Hustrulid et al. (2013c), el proceso de diseño puede resumirse en cuatro etapas principales:

1. Decisión preliminar de parámetros de diseño y operación:
 - Las tasas máximas de extracción tanto de mineral como de estéril requeridas en cada fase
 - El tamaño y tipo de los equipos a utilizar. Esto determina el ancho de la rampa, su inclinación, el ancho mínimo de operación en cada banco, y los radios de giro permitidos.
 - Definición de ángulos de operación, íter-rampa y pit final apropiados.
2. Dadas las restricciones del paso 1, se procede al diseño de las fases incluyendo las rampas de operación. Es necesario asegurar que cada banco posea un acceso, y que la transición entre las distintas fases sea factible dadas las rampas de acceso propuestas.
3. Una vez completado el diseño de las fases, se realiza la cubicación de cada fase-banco con los tonelajes de mineral, estéril, la ley del elemento de interés, el contenido de contaminantes y sus características geológicas, para obtener un inventario de reservas.
4. Finalmente, se realiza un plan de producción con las fases-banco definidas anteriormente, sujeto a restricciones operacionales de desfase máximo y mínimo entre fases, tasa de avance, accesibilidad, y tasas de producción de mineral y movimiento de estéril por

año, el cual se resume en el plan de producción de largo plazo. En caso de no obtener un plan de producción satisfactorio (en términos de saturación de capacidades mina y planta, secuencia de apertura de fases, fases activas por periodo, etc.) se modifican los diseño de fases y se repite el proceso.

2.1.4. Planificación de corto plazo

El plan de corto plazo se realiza en base a las fases-banco definidas en la planificación de largo plazo y el estado de avance actual de la mina. Además, se consideran los accesos disponibles a cada sector de la mina y los rendimientos reales de los equipos para el periodo de planificación actual. (Blom et al., 2019)

En el corto plazo, además, el objetivo es el cumplimiento de los tonelajes de mineral y estéril definidos por el largo plazo, la saturación de la planta de procesamiento, y el cumplimiento de las condiciones geometalúrgicas requeridas por los distintos procesos aguas abajo. Estas restricciones deben cumplirse en periodos considerablemente más acotados que los utilizados en el plan de largo plazo, por lo cual el cumplimiento de todas ellas se hace altamente complejo.

Este procedimiento se realiza bajo una metodología de ensayo y error, en el que el planificador de corto plazo define volúmenes de extracción para cada periodo a partir del estado de avance actual de la mina y los equipos de producción disponibles. Estas unidades deben cumplir con una forma adecuada en base al tamaño de los equipos de carguío, los cuales definen la selectividad que se posee en el corto plazo (Tabesh y Askari-Nasab, 2013). Esto implica que la suposición de extraer bloques de forma individual hecha en el largo plazo no siempre se puede concretar en el corto, lo que genera diferencias entre lo planificado y lo cumplido en la operación.

Luego, ocurre el agendamiento manual de las unidades mineras, que son agrupadas por características geológicas y metalúrgicas, las cuales son enviadas a diferentes destinos en base a una política de leyes de corte definida previamente (Del Castillo y Dimitrakopoulos, 2016). Además, el planificador debe considerar las reglas de mezcla de variables geometalúrgicas (contenido de arcillas, ley de contaminantes, etc.), la ley de alimentación óptima dada por cada proceso, los tonelajes de saturación de cada planta, y el manejo de material estéril que asegure la producción en los periodos siguientes. También se deben considerar los stocks de largo y corto plazo disponibles, que ayudan a cumplir las restricciones del corto plazo y le dan una mayor flexibilidad a la operación, con la desventaja de incluir un costo de remanejo, el cual puede ser considerable según las decisiones del planificador en cada periodo. Como se verá en la Sec. 2.3, se han estudiado diferentes técnicas de investigación de operaciones para asistir al planificador en su labor en el corto plazo, con distintos enfoques.

Por otro lado, como se verá en la Sec. 2.5, la decisión de los destinos de cada polígono no necesariamente consideran que el funcionamiento de la planta de procesamiento obedece a la mezcla efectiva de material que se envía en cada periodo, por lo que variables como la recuperación, costo de procesamiento, dureza, etc. que se obtienen en la planta no son una función lineal de las características de cada bloque individual. Más aún, la definición de los polígonos hechas de forma manual no necesariamente asegura que ésta sea la configuración óptima para maximizar el valor o minimizar los costos, pues el procedimiento manual es

complejo y toma un tiempo considerable, por lo que en la sección 2.4 se mostrarán los trabajos que lidian con la creación automática o semi-automática de polígonos y definición de zonas de mineral y estéril.

A continuación se presenta la revisión bibliográfica, que es una recopilación de los diversos trabajos que han abordado los problemas que se declaran en la tesis. Se distinguen cuatro áreas principales que se enumeran a continuación:

1. Investigación de operaciones en planificación minera a cielo abierto de largo plazo.
2. Investigación de operaciones en planificación minera a cielo abierto de corto plazo
3. Agrupamiento en agendamiento de la producción
4. Geometalurgia en agendamiento de la producción

El límite entre estas áreas no siempre es claro, por lo que la clasificación de los distintos trabajos se realiza en base a su contribución principal. No obstante su clasificación, un mismo trabajo puede abordar diversos tópicos de forma simultánea.

Dado que la temática del trabajo está relacionada con corto plazo, agrupamiento de bloques y geometalurgia, la revisión en éstas áreas es de mayor extensión.

2.2. Investigación de operaciones en planificación de largo plazo en minas a cielo abierto

La investigación de operaciones aplicada a minería ha sido utilizada ampliamente en las últimas décadas, principalmente en el desarrollo y explotación de faenas tanto subterráneas como de cielo abierto. La aplicación de esta ciencia a planificación minera es directa: La labor del planificador se sustenta en decidir qué extraer, cuándo hacerlo, dónde procesarlo, y qué equipamiento utilizar para ello de la forma más eficiente posible, mientras que la investigación de operaciones, según INFORMS (2015), es la disciplina que estudia la aplicación de métodos analíticos y matemáticos avanzados para asistir en la toma de mejores decisiones. Dado que en general los problemas de decisiones asociados a minería son altamente complejos, diversos modelos de investigación de operaciones han sido aplicados en distintas etapas del proceso por separado. A continuación se revisarán diferentes problemas en los que se ha aplicado investigación de operaciones a cielo abierto. Para mayor detalle, Newman et al. (2010) proveen un completa revisión de las técnicas de investigación de operaciones en minería.

2.2.1. Planificación estratégica y pit final

La planificación estratégica se basa principalmente en determinar el contorno del pit que otorga el mayor beneficio económico. Dentro de este problema, uno de los principales algoritmos es el del cono flotante (Carlson et al., 1966), en el cual se considera un bloque del modelo como referencia, para luego proyectar un cono sobre él que contiene todos los bloques que deben ser extraídos antes que el bloque de referencia. Si el valor de este cono es positivo (entendido como la suma del valor de todos los bloques dentro de él), se considera que es

rentable extraer dicho bloque, por lo cual se considera todo el cono dentro de los límites del pit final. El método visita todos los bloques de mineral del modelo para poder determinar el contorno final. Las principales desventajas de este método consisten en que el resultado obtenido depende del camino en que se visite cada bloque del modelo, y que además no considera que la sobrecarga compartida de bloques puede generar que dos o más bloques no generen un cono positivo si se visitan separadamente, pero la unión de dichos conos puede ser rentable (una mejora a esta metodología basada en *simulated annealing* y conos operativos fue propuesta por Reyes (2017)). El detalle de la técnica de cono flotante puede ser visto en Hustrulid et al. (2013a).

El trabajo de Lerchs y Grossmann (1965) es el primer algoritmo exacto y computacionalmente eficiente que se conoce para el cálculo óptimo del pit final. La base del problema se puede escribir como un problema de optimización lineal: Sea $b \in B$ el conjunto de bloques, $(i, j) \in \mathcal{P}$ el conjunto de precedencias geométricas entre ellos, y v_b el beneficio de extraer el bloque b . La variable de decisión x_b es 1 si el bloque b es extraído y 0 en caso contrario. De esta forma, el problema puede ser planteado como la expresión (2.2).

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{b \in B} x_b v_b & (2.2) \\ \text{s.a.} \quad & x_i \leq x_j & \forall (i, j) \in \mathcal{P} \\ & x_b \in \{0, 1\} & \forall b \in B \end{aligned}$$

De acuerdo a Newman et al. (2010), el problema anterior tiene la ventaja de poseer estructura totalmente unimodular (toda submatriz cuadrada es entera y tiene determinante -1 o 1), por lo cual la solución a la relajación lineal del problema es entera. Lerchs y Grossmann (1965) resuelven este problema explotando la estructura en redes que éste posee. Este algoritmo ha sido implementado en software comerciales dada su eficiencia y la precisión de su solución. Diversos autores (Hochbaum (2008); Underwood y Tolwinski (1998)) han planteado mejoras a esta metodología, basándose en que el problema de pit final puede ser resuelto en base a un algoritmo de máximo flujo en redes.

2.2.2. Secuenciamiento de bloques

El problema del secuenciamiento de bloques se diferencia del problema de pit final en que no solo determina qué bloques extraer, sino cuándo hacerlo, agregando la componente temporal al problema. Esto además permite agregar restricciones de recursos operacionales, como capacidad de producción y procesamiento del material por periodo. Finalmente, se puede incluir una tasa de descuento en el beneficio de cada bloque según su periodo de extracción, con el fin de evaluar de manera más precisa el valor del proyecto según la metodología del valor presente neto. La formulación estándar de este problema, según Newman et al. (2010), se muestra en el programa lineal (2.3).

$$\begin{aligned}
& \text{máx} && \sum_{b \in B} \sum_{t \in T} v_{bt} x_{bt} && (2.3) \\
& \text{s.a.} && C^- \leq \sum_{b \in B} c_b x_{bt} \leq C^+ && \forall t \in T \\
& && x_{it} \leq \sum_{p=1}^t x_{jp} && \forall (i, j) \in \mathcal{P}, t \in T \\
& && \sum_{t \in T} x_{bt} \leq 1 && \forall b \in B \\
& && x_{bt} \in \{0, 1\} && \forall b \in B, t \in T
\end{aligned}$$

Donde:

- B = Conjunto de bloques.
- T = Conjunto de periodos.
- v_{bt} = Beneficio económico obtenido al extraer el bloque b en el periodo t .
- c_b = Recurso consumido al extraer el bloque b .
- C^+ = Límite superior del recurso C por periodo.
- C^- = Límite inferior del recurso C por periodo.
- \mathcal{P} = Conjunto de pares ordenados (i, j) de precedencias entre los bloques.
- x_{bt} = Variable de decisión: 1 si se extrae el bloque b en el periodo t , 0 si no.

El problema de planificación de largo plazo en minas reales involucra gran cantidad de bloques y periodos, por lo cual el problema (2.3) puede llegar a ser muy difícil de resolver. Por este motivo, se han buscado soluciones alternativas ya sea simplificando el problema original, utilizando heurísticas para su resolución o una combinación de ambas.

La agregación de bloques en estratos es una manera ampliamente estudiada para reducir el tamaño del problema y poder resolverlo de manera eficiente. Diversos trabajos han abordado esta alternativa, entre los que podemos destacar el trabajo de Busnach et al. (1985), que maximiza el VAN del secuenciamiento en una mina de fosfatos imponiendo restricciones sobre el tipo de extracción (superficial o profunda), y es resuelto mediante heurísticas.

Otra alternativa ha sido el agendamiento de bloques pero relajando la naturaleza binaria de las variables de decisión. Entre ellos podemos mencionar a Tan y Ramani (1992) quienes generan un plan de producción sujeto a restricciones de capacidad definiendo el movimiento total de mineral y estéril, pero no una secuencia de bloques asociada. De forma similar, Fytas et al. (1993) generan un plan de producción de largo plazo dado un pit final inicial, sujeto a restricciones de capacidad, utilizando programación lineal asumiendo extracción parcial de bloques.

La suposición de extracción parcial de bloques es problemática pues no captura de buena forma las precedencias geométricas entre ellos. Sin embargo, las variables binarias aumentan notoriamente la complejidad del problema, por lo cual otro método estudiado ha sido aprovechar su estructura. En este ámbito podemos destacar el trabajo de Dagdelen y Johnson (1986), quienes maximizan el VAN del agendamiento de bloques sujeto a restricciones de

capacidad, y utilizan un algoritmo exacto de resolución mediante la relajación Lagrangeana del problema original: las restricciones de capacidad son dualizadas con multiplicadores de Lagrange en la función objetivo, y se aprovecha la estructura de flujo en redes del problema modificado para resolverlo. Akaike y Dagdelen (1999) se basan en este desarrollo y proponen un algoritmo iterativo que modifica los valores de los multiplicadores de Lagrange hasta cumplir las restricciones de capacidad originales. Otros autores que han utilizado esta metodología son Kawahata y Dagdelen (2013), que agrega leyes de corte variables según el destino de los bloques y plantea un algoritmo que resuelve subproblemas utilizando la relajación Lagrangeana para acotar la región factible del problema de agendamiento original.

Otra vía para la resolución del problema ha sido la determinación secuencial del pit final, para luego agendar los bloques pertenecientes a dicho pit. Pese a que estas metodologías no encuentran una solución exacta al problema original, son ampliamente aceptadas pues la metodología tradicional de planificación a largo plazo se inicia con la determinación del pit final y luego el agendamiento dentro de éste (ver Sec. 2.1). La programación dinámica es una herramienta popular para estos problemas pues permite crear soluciones parciales dentro del proceso de optimización. En esta línea tenemos el trabajo de Sevim y Lei (1998), que describe cómo los límites del pit final, la ley de corte, la secuencia minera y la tasa de producción interactúan entre sí, y proponen un algoritmo de resolución en base a heurísticas y programación dinámica para obtener la secuencia minera, el plan de producción, los límites de pit final y el tiempo de vida de la mina simultáneamente. Wang y Sun (2001) resuelven un problema similar, definiendo cinco aspectos claves que controlan el VAN de un proyecto minero: ley de corte, tasas de producción, secuencia minera, pit final y vida de la mina (LOM). En base a esto proponen un algoritmo dinámico para optimizar estos cinco parámetros simultáneamente.

Caccetta e Hill (2003) proveen un enfoque exacto para el problema de agendamiento cambiando su formulación: introducen la variable “ by ”, y_{bt} , que se define como 1 si el bloque b ha sido minado en algún periodo *entre* 1 y t , a diferencia de la formulación “ at ”, x_{bt} , mostrada en el problema (2.3), que se define como 1 si el bloque fue extraído *en* el periodo t . Luego, utilizan una técnica de branch-and-cut para su resolución en base a búsquedas en amplitud y en profundidad, para obtener una variedad de posibles agendamientos.

El uso de heurísticas para obtener soluciones a problemas de mayor tamaño también ha sido estudiada. Denby y Schofield (1994) definen el agendamiento como una combinación del pit final y un agendamiento de la extracción. Para obtener el mejor agendamiento de estas posibles combinaciones recurren a un algoritmo genético. Zhang (2006) también propone un algoritmo genético, pero utilizando la agregación de bloques a priori para reducir el tamaño del problema con búsqueda topológica.

En la última década, el enfoque ha sido encontrar metodologías de resolución eficientes para casos de estudios reales. Entre los trabajos más importantes podemos destacar a Bienstock y Zuckerberg (2010) que presentan una metodología eficiente para resolver de forma óptima la relajación lineal del problema de secuenciamiento de bloques. Lamghari et al. (2015) combinan algoritmos de búsqueda en la vecindad de las soluciones factibles para mejorar una solución inicial. Jélvez et al. (2016) presentan una heurística eficiente basada en agregación del modelo de bloques para disminuir el tamaño del problema. Samavati et al. (2018), por

su parte, presentan un algoritmo que utiliza la relajación lineal para generar una solución entera factible. Finalmente, el trabajo presentado por Jelvez et al. (2020) utiliza una pre-selección de bloques y un algoritmo de ventana móvil para resolver el problema de forma eficiente.

Las formulaciones generales de secuenciamiento y agendamiento de bloques en el largo plazo han servido de base para el desarrollo de modelos de corto plazo. Los modelos de corto plazo heredan la estructura y técnicas de resoluciones de los trabajos de largo plazo, pero haciendo énfasis en problemáticas afines a la operación mediante otras funciones objetivo y variadas restricciones. La siguiente sección muestra una revisión exhaustiva de los modelos de investigación de operaciones aplicados a corto plazo.

2.3. Investigación de operaciones en planificación de corto plazo en minas a cielo abierto

Las herramientas de investigación de operaciones aplicadas al corto plazo han sido variadas, pues dependen fuertemente del tipo de operación, el objetivo buscado en el corto plazo, y las distintas condiciones geometalúrgicas y de procesamiento que se deben cumplir en este horizonte temporal. Dada esta variedad, los trabajos se presentan agrupados según su contribución principal, diferenciando entre modelos generales de agendamiento en corto plazo y modelos con actividades operacionales.

2.3.1. Modelos de agendamiento de corto plazo generales

Los modelos generales de agendamiento de corto plazo se caracterizan por hacer énfasis en el cumplimiento de restricciones de mezcla para distintos destinos y elementos de interés, respetar las capacidades máximas y mínimas, considerar la mineralogía, y alinearse con los bancos y usualmente utilizar stocks de corto plazo en su formulación. Las funciones objetivo son variadas, pero típicamente se intenta minimizar costos, maximizar beneficio, o minimizar las desviaciones con respecto a un objetivo de producción definido por la operación. También se introducen precedencias entre bloques del mismo banco, para respetar las condiciones de accesibilidad necesarias en el corto plazo. Un diagrama típico de las distintas rutas de procesamiento y tipos de materiales considerados en agendamiento de la producción de corto plazo se puede apreciar en la Fig. 2.2, mientras que la Fig. 2.3 se presenta el agendamiento de bancos en corto plazo.

Gershon (1987) se enfoca en proponer heurísticas para resolver los problemas de agendamiento, con el fin de ofrecer una alternativa intermedia entre los enfoques manuales y la programación lineal. Gershon se centra en el problema de mezcla, donde declara que los enfoques que resuelven el agendamiento periodo a periodo para satisfacer los requerimientos de mezcla inmediatos sufren de no considerar las decisiones futuras y los objetivos de largo plazo de la empresa. La heurística propuesta toma como base la decisión periodo a periodo, pero destaca que la función objetivo debe estar alineada con algún objetivo de largo plazo (maximización del valor, cumplimiento de metas productivas, etc.). Es decir, con el fin de evitar el problema de una heurística *greedy* para cumplir con la mezcla, la función objetivo debe estar alineada con un objetivo estratégico. No se muestran implementaciones ni casos

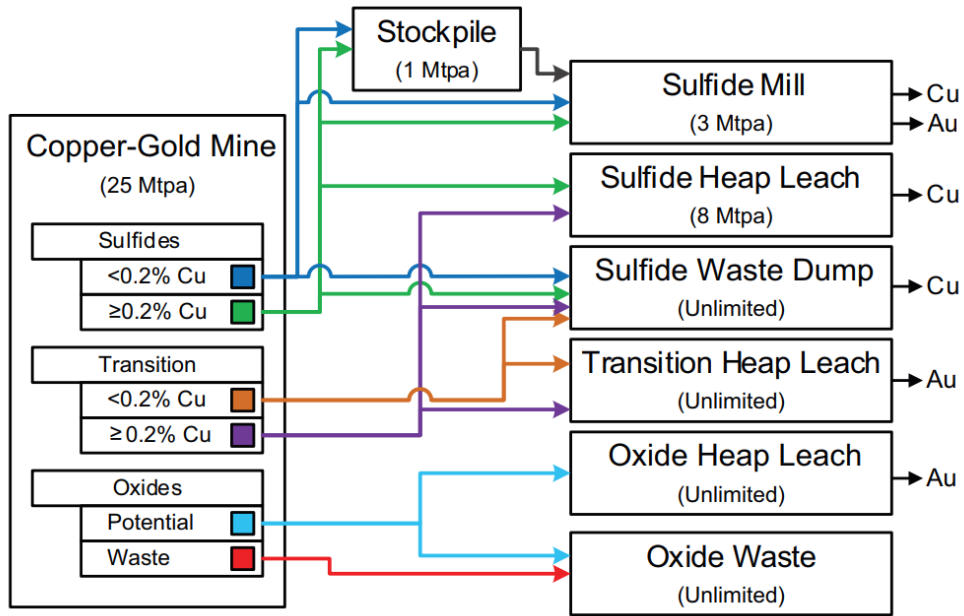


Figura 2.2: Diagrama de materiales y destinos en corto plazo. De Goodfellow y Dimitrakopoulos (2016)

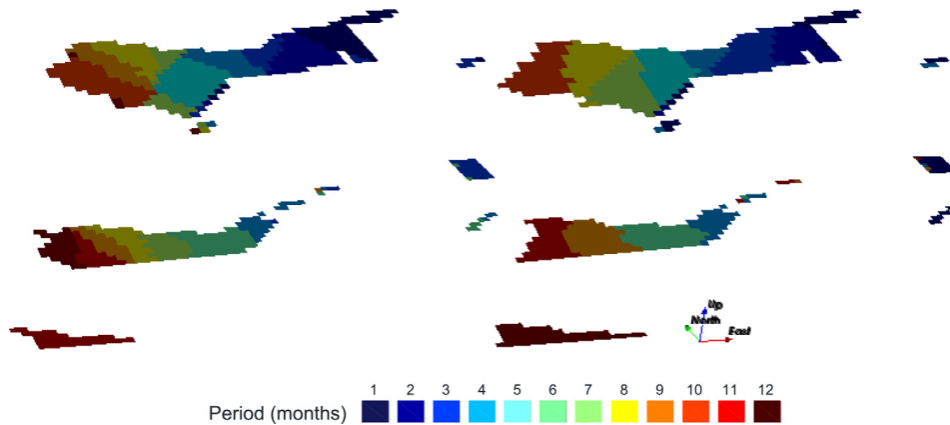


Figura 2.3: Resultado de agendamientos en corto plazo. De Villalba y Dimitrakopoulos (2016)

de estudio de esta heurística. Una segunda idea de heurística propone un ranking de bloques según su calidad, posición, factor de descuento y bloques sucesores. De esta forma, es posible decidir periodo a periodo los mejores bloques a extraer según este ranking, pero considerando objetivos de largo plazo según los bloques sucesores que pueden ofrecer buen valor. No se presentan implementaciones de esta heurística en este trabajo.

Fytas et al. (1993) destacan que la resolución del agendamiento de la producción es un problema complejo computacionalmente, por lo que propone un software que consiste en distintos módulos de planificación divididos según su horizonte. El módulo de corto plazo crea un agendamiento mensual, respetando capacidad mínimas y máximas de mineral y estéril, junto con cantidad de concentrado y su ley. Para esto, en cada banco el usuario define regiones donde se posicionan las palas, los cuales funcionan como sectores candidatos a ser extraídos en cada periodo, decisión que es tomada por un modelo lineal continuo que maximiza el valor sujeto a las restricciones. En caso de que el agendamiento no cumpla restricciones operativas de espacios mínimos, el usuario puede seleccionar los bloques que no cumplen estas restricciones y el modelo de optimización les asigna una prioridad menor, entregando una nueva solución de manera iterativa, hasta que el agendamiento sea satisfactorio. Como resultado, se presenta un caso de estudio con distintas alternativas de manejo de pre-stripping (parte del módulo de largo plazo) y número de bancos activos, con distintos requerimientos de equipos y costos finales.

Sundar y Acharya (1995) también destacan la complejidad del problema de agendamiento de la producción, y proponen un modelo que selecciona los bloques a ser tronados y qué fracción de estos bloques va a cada destino para cumplir los requerimientos de mezcla del procesamiento en cada turno de una operación de hierro. Al igual que el trabajo de Fytas et al. (1993), la metodología se divide en distintos módulos: el primer módulo se encarga de mejorar la estimación local de leyes usando los datos de los pozos de tronadura, pero no se entregan detalles del procedimiento. El segundo módulo es un problema de programación lineal que decide qué bloques, dentro de los bancos disponibles en la operación, deben ser tronados para satisfacer la demanda de material, tanto en cantidad como en calidad. La función objetivo maximiza el número de bloques tronados, sujeto a restricciones de capacidad de transporte, ancho de seguridad de bancos, precedencia y demanda. El tercer módulo presenta un modelo de programación probabilística, donde se decide la cantidad de mineral y estéril a extraer en cada sector tronado, maximizando la producción tanto de mineral como estéril, para un horizonte de varios turnos. Como restricciones, el modelo propone un parámetro de confianza, donde la probabilidad de cumplir cada requerimiento tiene que superar dicho nivel de confianza. Entre estos requerimientos se encuentran la calidad del material, tanto límite superior como inferior, la demanda de mineral, la capacidad máxima de molienda y carguío, y los tiempos de transporte asociados a cada sector tronado. No se mencionan los métodos de resolución de este modelo probabilístico. En el caso de estudio propuesto, el uso de estos módulos logró disminuir el número de palas requeridas, asociado a una mayor producción y a una mayor calidad del material enviado a planta.

Chanda y Dagdelen (1995) abordan el problema de agendamiento en el corto plazo enfocándose en las restricciones de mezcla, las cuales declaran son fundamentales en este horizonte de planificación. Su trabajo se centra en la aplicación de *goal programming*, en donde la función objetivo tiene diversos términos que deben ser optimizados de forma simultánea. En este

caso, el modelo propone seleccionar qué bloques extraer maximizando su valor económico, y a su vez minimizando las desviaciones entre la mezcla producida y las metas requeridas en la planta, sujeto a restricciones de capacidad de producción y material disponible en el corto plazo. Este modelo se implementa en una interfaz de usuario para asistir al planificador con la toma de decisiones, donde se pueden incorporar distintos requerimientos de mezcla y distintos pesos a las desviaciones para analizar los cambios que se generan en el plan de corto plazo. El autor comenta que el uso de *goal programming* permite violar algunas restricciones clásicas del agendamiento, como los límites de mezcla, pero que en presencia de varios productos con distintos requerimientos de mezcla simultáneos, permite obtener agendamientos prácticos en la realidad.

Hu et al. (1995) proponen el uso de redes PERT (*Program Evaluation and Review Techniques*) para el agendamiento de corto plazo. Para esto, definen como actividad básica la extracción de cada bloque, donde el tiempo que toma esta actividad está asociado al trabajo requerido por los equipos de carguío y transporte, los cuales tienen una capacidad máxima en el horizonte de planificación. La red entre actividades está construida en base a sus relaciones de precedencia, con el fin de que cada bloque tenga un acceso y un espacio operacional factible de acuerdo a los requerimientos de la operación. Para la construcción de esta red, se consideran las distintas ubicaciones de los equipos de carguío, en donde cada uno de ellos tiene asociada una red individual con su productividad y requerimientos operacionales, las cuales luego son combinadas en una red única que considera todas las palas. En base a esta red y sus capacidades, es posible calcular la ruta crítica y los periodos de *early start* y *latest start*, junto con los *early completion* y *latest completion*. Estos parámetros son luego utilizados en un modelo de *goal programming*, que definen la secuencia de extracción utilizando dichos parámetros temporales para crear restricciones sobre la extracción de los bloques. Este modelo es usado para resolver el agendamiento de dos periodos, con un total de 378 bloques.

Smith y You (1995) declaran la importancia de cumplir con los requerimientos de material en la planta de procesamiento, y lo ejemplifican con un caso de estudio de extracción de fosfatos. En este caso de estudio, las desviaciones en la alimentación a planta deben ser mínimas para asegurar un buen funcionamiento, por lo cual se ocupan diversos stocks para mantener la ley de alimentación constante en todo periodo. El uso de stocks y del material proveniente de la mina genera diversas combinaciones de extracción posibles, por lo que se plantea un modelo de manejo de inventario para decidir cómo será la gestión de dichos stocks en el tiempo. No se presenta un modelo de manera explícita, pero se menciona que la función objetivo toma elementos de *goal programming*, minimizando la varianza en las características del mineral llevado desde stock a procesamiento, y restricciones asociadas a la mezcla y las desviaciones en la calidad del producto (asociadas a la función objetivo), capacidad de minado y procesado, precedencias por talud, manejo de inventario en stocks y precedencia de extracción dentro de los stocks. Se aplica a un caso de estudio obteniendo un agendamiento de corto plazo, considerando cinco semanas de producción, pero no se compara con un agendamiento manual.

Smith (1998) mencionan la importancia de aplicar técnicas de programación lineal en el corto plazo, por sobre las metodologías de prueba y error comunes en la industria. En su trabajo, describe la metodología de prueba y error, donde se consideran los bloques disponibles para la extracción al inicio del periodo considerado, y se dibujan polígonos de distintas

formas con tal de satisfacer los requerimientos productivos y las restricciones operacionales, buscando una combinación de polígonos de distintas zonas que entreguen un buen resultado. En contraste, presenta el agendamiento basado en programación lineal, donde existen diversos modelos: objetivos únicos, donde la función objetivo está alineada con los objetivos de largo plazo, mientras las restricciones se encargan de cumplir con los requerimientos de extracción y procesamiento, o se tienen los agendamientos multi-objetivos, donde se intenta obtener un agendamiento que cumpla de buena forma varios criterios, como minimizar las desviaciones con respecto a objetivo de mezcla para varios elementos distintos, como lo propuesto en Chanda y Dagdelen (1995). En este trabajo, Smith ejemplifica el uso de la programación lineal con un modelo multi-objetivo implementando en lenguaje AMPL y resuelto con CPLEX, utilizando *goal programming*, donde el modelo decide qué bloques extraer para minimizar las desviaciones de cuatro elementos del yacimiento con respecto a sus metas productivas. Las restricciones definen dichas desviaciones, y precedencias verticales y horizontales son usadas según la ubicación de los distintos bloques. Finalmente, también se propone un modelo multi-periodo, destacando las dificultades en los tiempos de resolución que se generan al optimizar varios periodos a la vez.

Gholamnejad (2008) presenta un modelo de agendamiento en el corto plazo, enfocándose en las restricciones de accesibilidad de los bloques, pues considera que es un problema poco abordado en los modelos existentes. La accesibilidad la define por el espacio necesario que debe tener cada bloque para que un equipo de carguío pueda acceder a él en cada banco. Para esto, propone un modelo entero binario, donde se decide el periodo de extracción de cada bloque, maximizando el valor descontado, y considerando restricciones clásicas como precedencia, capacidad y mezcla. Para la accesibilidad, considera que cada bloque tiene ocho vecinos inmediatos, y que de esos ocho es necesario extraer al menos tres que sean consecutivos entre ellos, generando cuatro direcciones posibles para acceder a cada bloque. En base a estas direcciones, genera cuatro grupos de precedencia, y las relaciona de tal forma que si se cumplen las precedencias de un grupo, el bloque puede ser extraído. No se presenta ningún caso de estudio con este modelo.

Rehman y Asad (2010) presentan un modelo de corto plazo aplicado a canteras de cemento, considerando como bloques disponibles aquellos definidos en el plan de largo plazo y centrándose en restricciones propias del corto plazo como disponibilidad de movimiento de material, mezcla, stockpiles, aditivos para las mezclas de cemento, entre otras. Una diferencia relevante en la explotación de canteras de cemento es que, a diferencia de las operaciones metálicas, cada bloque no posee intrínsecamente un valor económico. Esto ocurre porque el producto final comercializado es una mezcla de distintos elementos disponibles en los bloques, donde no existe un elemento principal y otros secundarios como ocurre en minería del cobre. De esta forma, asignarle un precio a cada elemento del bloque no lleva a resultados satisfactorios. Además, no existe una asignación a priori de mineral y estéril. De esta forma, la función objetivo no será la maximización del valor de extracción, sino la minimización del costo de explotación y el costo de compra de aditivos externos para cumplir con la mezcla, decidiendo qué bloques extraer en cada periodo y la cantidad de aditivo a comprar.

El modelo presenta restricciones de precedencia para la accesibilidad de cada bloque, junto con restricciones especiales de mezcla: el producto final posee índices de calidad, los cuales se calculan como una razón de distintos elementos. Por ejemplo, el índice de razón

de sílica se calcula como la razón entre el silicio dividido por el contenido de alúmina y óxido de hierro. De esta forma, se tienen diversas restricciones de mezcla para cada índice de calidad, los cuales deben estar en un rango aceptable para la operación. Además se presentan restricciones de mezcla por elemento individual y en el producto final. Otras restricciones presentan capacidades máximas y mínimas de movimiento de material, y capacidad máxima y minimiza del stock usado para la mezcla. Este modelo es aplicado en un caso de estudio con 30 bloques en 3 periodos de agendamiento, con múltiples restricciones de mezcla para la calidad del producto. Los autores destacan que este modelo cumple las restricciones y es resuelto en segundos, lo que elimina la necesidad de usar las técnicas de prueba y error manuales, comunes en el corto plazo.

El trabajo de Morales (2009) agenda la producción de corto plazo sujeto a restricciones geometalúrgicas, utilizando un parámetro de radio de avance previamente definido para acotar la cantidad de variables en cada periodo. Vargas (2011) plantea una metodología de agregación basada en características geometalúrgicas de los bloques para el problema de agendamiento del corto plazo, utilizando una heurística de ventanas para resolver el problema agregado. Finalmente en esta misma línea tenemos el trabajo de Madariaga (2013) agenda la producción de corto plazo, sujeto a condiciones de acceso de cada banco, y con un modelo que permite múltiples procesos posibles para cada bloque, sujeto a distintas valorizaciones y condiciones geometalúrgicas.

Eivazy y Askari-Nasab (2012) presentan un modelo entero mixto para el agendamiento de la producción en corto plazo, cuya función objetivo es minimizar el costo de extracción y procesamiento del agendamiento, considerando que el plan de largo plazo entrega los sectores productivos que deben ser extraídos en cierto horizonte. El agendamiento considera múltiples destinos posibles para los bloques, entre los que destacan diferentes plantas de procesamiento, diferentes botaderos y stocks. Además, incorpora distintas rutas/rampas por las cuales se debe extraer el material, las cuales tienen asociadas distintas distancias y por ende, distintos costos de transporte. Por otro lado, incorpora direcciones preferentes de minado, pues en el corto plazo la accesibilidad de los bancos determina ciertas direcciones en la que se deben extraer los bloques. Con respecto a los destinos de procesamiento, se asume que cada uno de ellos puede recibir ciertos tipos de roca y tiene asociados límites de ley inferiores y superiores para un buen funcionamiento. Los stocks, por su parte, son divididos típicamente según tipo de roca y rango de ley, y se asumen perfectamente homogéneos, por lo que cada bloque enviado al stock modifica la ley promedio, y todos los bloques que salen de cada stock presentan exactamente las mismas características basadas en el material presente en cada periodo.

El modelo da la posibilidad de extraer fracciones de bloques, pero con una cota mínima para evitar extracción de fracciones muy pequeñas. Se incorporan restricciones clásicas de corto plazo como capacidades máximas y mínimas de distintos procesos y de minado, tonelaje máximo de stocks y restricciones de precedencia (tanto verticales, para mantener el talud, como horizontales, para imponer las direcciones de minado). Como caso de estudio se presenta una mina de hierro ubicada en Irán, con fósforo y sulfuro como contaminantes. Se consideran tres bancos, con 3089 bloques agendados en 12 meses. Los bloques son agrupados utilizando un algoritmo de *fuzzy C-means*, pero no se detalla explícitamente su funcionamiento. Se consideran seis destinos: dos plantas de procesamiento, dos stocks, y dos botaderos, con distintos rangos de ley aceptables para cada uno de ellos, y capacidad máximas y mínimas acordes. Se

prueban tres escenarios basados en distintas direcciones de minado. Como resultado, se obtienen los agendamientos que cumplen las restricciones impuestas. Se aprecia que los bloques son extraídos por los accesos más cercanos, producto de la minimización de los costos. Los planes de producción muestran diferencias según las direcciones de minado, con diferentes toneladas enviados a cada destino y diferentes usos de stocks. Sin embargo, los costos totales de cada agendamiento son similares, con diferencias menores al 1% en costo total, por lo que la elección de la mejor dirección de minado, y por ende, el mejor agendamiento, pasa por las fluctuaciones en la productividad en cada proceso, y por la factibilidad operacional de acuerdo a la dirección de minado.

Yavarzadeh et al. (2014) presentan un modelo de agendamiento de bloques de corto plazo cuyo objetivo es mantener un control de la ley y la calidad del material enviado a planta, pues declaran que es la variable más relevante en este horizonte temporal para su caso de estudio. Para determinar los bloques que son extraídos en el corto plazo, proponen un modelo de optimización entera mixta, cuya función objetivo es minimizar las desviaciones de la ley de los bloques enviados a la planta de procesamiento con respecto a una ley de alimentación de planta predefinida. Incorporan restricciones de mezcla para que la ley promedio de los bloques enviados a planta sea menor a una ley máxima admitida, y mayor a una ley mínima necesaria para el buen funcionamiento del proceso. Las otras restricciones relevantes son las de producción mínima y máxima, tanto de material minado como de material procesado, y una restricción de accesibilidad para asegurar que existe un camino desde el acceso a cada bloque extraído. Finalmente, cada bloque representa una frente de extracción, lo que se utiliza para definir una restricción de máximo número de frentes siendo minadas en cada periodo, con el fin de limitar el uso de equipos de carguío en la operación del corto plazo. Los resultados en un caso de estudio limitado, muestran que el modelo logra mantener una ley de alimentación promedio a planta estable, con pocas desviaciones en cada periodo, y manteniendo un orden en la secuencia de extracción.

Mousavi et al. (2014) centran su investigación en el problema de secuenciamiento de bloques en el corto plazo, proponiendo métodos de resolución eficientes. Como base, se considera una mina de hierro, cuyo material es clasificado como mineral de alta y baja ley, y estéril, con stocks para la mezcla de los distintos tipos de material y plantas de enriquecimiento para obtener el producto final que es enviado a la zona de carga de trenes. El modelo busca maximizar el beneficio obtenido de la extracción, decidiendo qué bloques extraer, su periodo y destino, y cuál es el equipo asignado para la extracción. El modelo está sujeto a restricciones de precedencia por talud, disponibilidad de equipos de extracción, capacidad de mina y procesamiento y restricciones de mezcla. Se plantean diferentes instancias, donde los periodos son considerados como horas, por lo cual los modelos utilizados tienen pocos bloques: desde 25 a 150 en la instancia de mayor tamaño, con número de equipos desde cuatro a seis, dos a cuatro destinos de procesamiento y botaderos, y periodos desde 12 a 72 horas. Como resultado, se muestra que las instancias de mayor tamaño no pueden ser resueltas de forma exacta por CPLEX, ni por el uso de *constraint programming*, por lo que se plantea que el uso de metaheurísticas puede ser beneficiosos para resolver instancias reales.

Mousavi et al. (2016b) expanden el modelo anterior, incorporando otro tipo de consideraciones afines al corto plazo: la función objetivo busca minimizar el costo del agendamiento, el cual incluye extracción, procesamiento, remanejo por stocks, error en la clasificación del

material, y un costo que penaliza la extracción de un bloque en un banco si sus vecinos inmediatos aun no han sido extraídos, conocido como *drop-cut*, con el fin de evitar la extracción de bloques aislados en un banco. Este modelo incorpora nuevas restricciones de precedencia, donde además de las precedencias por talud, se ocupan precedencias horizontales. Dado que un bloque puede ser extraído por cuatro direcciones en un banco, o directamente desde arriba (como *drop-cut*), se plantean cinco restricciones de precedencia, y el bloque puede ser extraído si una de ellas se cumple. Dado que la función objetivo penaliza este *drop-cut*, el modelo tiende a preferir extraer bloques por alguno de sus lados. En caso que el modelo determine que es necesario realizar un *drop-cut* por la apertura de un nuevo banco, una restricción adicional fuerza a la extracción de ciertos bloques vecinos, con el fin de asegurar un ancho operacional razonable al abrir el banco.

Otra restricción relevante en el corto plazo es la limitación del área posible de trabajo de las palas: dado que el traslado de largas distancias por parte de las palas es poco deseable, cada equipo tiene asignado ciertas zonas posibles de trabajo. Para completar el modelo, se tienen las restricciones clásicas de capacidad mina y planta, mezcla para cada planta de procesamiento y cada stock, y el comportamiento de stock se calcula como mezcla homogénea en cada periodo. Dados los resultados encontrados en Mousavi et al. (2014), se plantea como técnica de resolución una heurística mixta, que incorpora elementos de *simulated annealing*, *Large neighborhood search* y *branch & bound*. La heurística considera algunas restricción para favorecer la obtención de soluciones factibles en cada permutación, las cuales tienen relación con el cumplimiento de precedencias y capacidad de extracción. El resto de las restricciones son consideradas a posteriori. Como caso de estudio se utilizan 2500 bloques, agendados en un horizonte de seis meses, en una resolución temporal de dos semanas. La heurística obtuvo resultados cercanos a CPLEX en aquellas instancias donde se encontraba solución exacta, con una diferencia promedio de menos de 1 %, cumpliendo todas las restricciones relevantes del corto plazo.

El modelo utilizado en Mousavi et al. (2016b) es utilizado en Mousavi et al. (2016a), donde el foco de la investigación se centra en comparar tres metaheurísticas para la resolución del problema de corto plazo. Estas heurísticas son *simulated annealing*, *Tabu search* y un híbrido de ambas. Como resultado se aprecia que la heurística híbrida genera mejores resultados que las individuales, pero que todas entregan resultados satisfactorios para el problema de corto plazo, con una diferencia máxima de 3.78 % entre la función objetivo de las heurísticas y el resultado exacto de CPLEX.

Villalba y Dimitrakopoulos (2016) abordan el agendamiento de la producción en el corto plazo incorporando incertidumbre. Para esto, formulan un modelo matemático en dos etapas, donde la primera etapa está relacionada con la decisión de qué bloques extraer en cada periodo y la asignación de los equipos de carguío en cada frente de trabajo. La segunda etapa, por su parte, considera decisiones relacionadas a la incertidumbre geológica y operacional, donde se consideran escenarios de tiempos de ciclo y disponibilidad mecánica de los equipos de transporte asociados a cada sector productivo -lo que impacta en el número de ciclos realizado por cada camión y por ende, en la productividad final de cada sector de la mina- y se incorporan las variables que controlan las desviaciones por no cumplir las metas de producción de mineral y producción total de cada pala, junto con las desviaciones del contenido de contaminantes y ley de alimentación a planta para cada escenario geológico. La función

objetivo considera múltiples componentes que apuntan a minimizar el costo total de minado en el horizonte de agendamiento considerado. Este costo total se divide en las siguientes componentes: costo mina por extracción de los bloques por periodo, costo por movimiento de equipos de carguío a distintas frentes, costo esperado de transporte calculado sobre los distintos escenarios de incertidumbre operacional, penalización por el no cumplimiento de la productividad nominal de cada pala dada la incertidumbre asociada a su disponibilidad mecánica, penalización por la no extracción conjunta de bloques adyacentes con el fin de cumplir con los espacios operacionales requeridos, y penalización por desviaciones de cantidad y calidad de mineral alimentado a planta dada la incertidumbre geológica considerada.

Dentro de las restricciones consideradas en este modelo están las de tipo operacional, donde destacan la asignación de camiones a las frentes considerando el número de viajes realizados por cada equipo según el escenario operacional considerado, y la restricción del número de viajes por camión en distintos periodos como forma de incorporar que periodos más tardíos presentan distancias recorridas más largas a medida que avanza la extracción. Dado que se deciden los camiones y las palas de cada sector, la productividad completa de estos sectores está restringida por los equipos asignados, con el fin de mantener una estimación correcta del material enviado a planta en cada periodo. La formulación ocupa ciertas leyes de corte para cada bloque que designa cuáles de estos pueden ser enviados a cada destino, considerando que ciertos bloques no cumplen los requerimientos de calidad de materiales contaminantes y no pueden ser procesados en la planta. Estos bloques son pre-asignados directamente a botadero.

Adicionalmente, se consideran restricciones geométricas en el orden de la extracción para asegurar que el agendamiento sea operacionalmente factible. Para esto, la primera restricción está relacionada con la dirección de minado, donde se establece para cada banco una dirección de avance de la explotación de acuerdo a la ubicación de la rampa de acceso. Adicional a esto, se establece una restricción de ancho mínimo de minado, para evitar la extracción de bloques aislados. Para esto, cada bloque posee una vecindad de ν bloques que deben ser extraídos en conjunto con él. Para otorgar más flexibilidad, esta restricción no es estricta: se permite que un bloque no cumpla con la extracción de su vecindad, dado que en ciertos sectores no es posible encontrar ν bloques a su alrededor como solución factible. Para forzar el cumplimiento de esta restricción, sin embargo, se penaliza en la función objetivo cuando no se cumple con la extracción de la vecindad. Esta restricción fue introducida con anterioridad en Dimitrakopoulos y Ramazan (2004).

Este modelo fue aplicado en un depósito de hierro con un horizonte de planificación anual dividido en 12 meses. Los resultados muestran que la incorporación de incertidumbre en el corto plazo genera planes con menor costo. Pese a que la utilización de equipos de carguío y transporte no difiere considerablemente entre ambas metodologías, se aprecia que el modelo estocástico cumple con la producción utilizando menos equipos de transporte durante la mayoría de los periodos del agendamiento producto de la incorporación de la incertidumbre operacional. También se aprecia que las mayores minimizaciones del costo vienen por la incorporación de la incertidumbre en la disponibilidad mecánica de los equipos de carguío, puesto que son más críticos en la operación del corto plazo.

Jamshidi y Osanloo (2018) presentan un trabajo donde se enfocan en estudiar el efecto de

considerar múltiples elementos en un modelo de agendamiento de corto y mediano plazo con múltiples destinos. El estudio toma como base la minería de hierro, donde el valor obtenido de los productos depende tanto de su contenido de Fe, como de elementos deseables y no deseables contenidos en él. Proponen un modelo que decide el destino y periodo de extracción de cada bloque, con el fin de cumplir las restricciones de mezcla de distintos procesos y maximizar el valor del agendamiento, sujeto a restricciones de capacidad por destino, precedencia por talud y límites de concentración de elementos permitidos para cada destino. Como caso de estudio, se presenta el agendamiento de una fase con 3000 bloques, con hierro como elemento principal y potasio y azufre como elementos secundarios. Para evaluar el efecto de los múltiples destinos y sus requerimientos, 10 escenarios fueron generados, cada uno con un distinto número de destinos (de 1 a 4) y requerimientos para el agendamiento. El modelo fue resuelto para cada escenario, y los agendamientos con múltiples destinos y requerimientos entregan un VAN mayor a los casos con destinos únicos, dada la mayor flexibilidad que ofrece tener distintas rutas de procesamiento.

2.3.2. Agendamiento con actividades operacionales

En el corto plazo, la asignación de diferentes equipos a las frentes de trabajo, y el agendamiento de sus actividades asociadas - perforación, tronadura, carguío y transporte - son una etapa fundamental para obtener un plan operacionalmente factible. Es por este motivo que diversos modelos han buscado agendar los bloques del corto plazo, y a la vez considerar estas actividades operacionales en el proceso de optimización.

Souza et al. (2010) presentan un modelo de asignación de equipos de carguío y transporte a diferentes pits o fases de producción, decidiendo la tasa de extracción de cada una de ellas. El modelo considera que cada pala debe ser asignada a un solo pit, mientras que el número de camiones asignados a cada una de ellas puede variar para cumplir la tasa de extracción, asignando número de viajes de cada camión en cada fase. Dado que el corto plazo tiene ciertas metas de producción, tanto en cantidad de tonelaje a mover como en la calidad del material enviado a planta, el modelo busca minimizar las desviaciones entre estas metas y la producción del sistema minero asignado, junto con un término adicional que busca minimizar el número de camiones utilizados en la asignación. Además de estas metas productivas (que son consideradas como objetivos recomendados por el modelo), se incluyen límites máximos y mínimos para la productividad requerida, para evitar soluciones que sean infactibles en la operación.

Además de proponer el modelo, los autores desarrollan una heurística de resolución, pues declaran que este modelo es un caso particular de *Multiple Knapsack Problem*, el cual es *NP-hard*. Esta heurística combina elementos de *Greedy Randomized Adaptive Search Procedures* y *General Variable Neighborhood Search*. El caso de estudio corresponde a una mina de hierro ubicada en Brasil, con números de pits variables entre 17 y 32, número de palas entre 7 y 8, y 30 camiones de diversas características, por un total de 8 instancias. La heurística mostró resultados cercanos a la mejor solución conocida en todas las instancias, con una diferencia menor al 1.32% en el valor de la función objetivo, con un tiempo de cómputo limitado por el usuario a 2 minutos, lo cual muestra que puede ser útil para asignación de equipos en el corto plazo.

Kozan et al. (2013) se enfocan en el agendamiento de las actividades asociadas al corto plazo como muestreo, perforación, tronadura y transporte. Declaran que la mayoría de los modelos de secuenciamiento de bloques no consideran estas actividades, las cuales son recursos limitados en el corto plazo. Para subsanar estas deficiencias, proponen un modelo multi-etapa y multi-recurso para el agendamiento del corto plazo. Para esto, definen como un *agregado* a un conjunto de bloques que son perforados, muestreados, tronados y extraídos al mismo tiempo, similar al concepto de polígono. Estos agregados son los llamados *trabajos mineros*, los cuales son considerados independientes entre sí. Cada *trabajo* tiene una serie de procesos que se deben ejecutar (las cuales son referidas como *etapas*), cada uno de los cuales presenta un recurso limitante principal en la operación (del cual pueden haber más de una unidad: multi-recurso). Estos procesos son: (i) perforación (con las perforadoras como recurso limitante), (ii) muestreo de pozos, (iii) tronadura (con los cargadores de explosivos como limitante) y (iv) carguío (con palas como recurso limitante).

El agendamiento de los *trabajos* considerando las múltiples etapas y asignando los distintos recursos asociados a ellas se declara como *NP-hard*, pues es un caso particular de un problema conocido como *parallel-machine job-shop scheduling*. Se plantea una heurística de resolución llamada *shifting-bottleneck algorithm* (Liu y Kozan, 2012), la cual se enfoca en minimizar el tiempo de completitud del agendamiento, descomponiendo este problema en cada una de las etapas. Luego, se utiliza la solución de cada etapa individual en el problema multi-etapa y multi-recurso, el cual es resuelto en base a una metaheurística de *Tabu Search*. La solución global es luego utilizada como dato de entrada en los problemas de cada etapa individual, y se resuelve el algoritmo iterativamente. Como caso de estudio se presenta una mina de hierro ubicada en Australia, y se busca agendar 18 trabajos, considerando tres etapas (perforación, tronadura y extracción), con dos equipos de perforación, dos de tronadura y cinco palas como recursos. El agendamiento original, provisto por la compañía minera, completaba los trabajos en 178 días, mientras esta heurística completaba el agendamiento en 123 días, mostrando una clara ganancia en el tiempo de término para este caso de estudio.

Este tipo de modelo de trabajos, etapas y recursos es utilizado en Kozan y Liu (2016) y Kozan y Liu (2018). Nuevamente se busca asignar equipos y agendar actividades de perforación, tronadura y extracción, para lo cual se ocupa un modelo MIP, donde la función objetivo es minimizar el tiempo total de completitud y el *tardiness* de los trabajos, dado que cada uno posee un *due date* que se espera cumplir. Este modelo presenta una serie de mejoras, considerando precedencias entre los distintos trabajos (que antes eran considerados independientes entre sí), y un mayor detalle al considerar velocidades de los equipos, sus tiempos de preparación, tiempo de movimiento entre trabajos, restricciones de ángulo de talud, entre otras. A diferencia de su trabajo anterior (Kozan et al., 2013), este modelo MIP es resuelto sin heurísticas, utilizando el solver entero-mixto que provee ILOG-CPLEX. El caso de estudio corresponde a 54 trabajos, en un horizonte de 18 semanas, utilizando 2 perforadoras, 2 equipos de carga de explosivo, y 5 palas. No se presentan comparaciones entre el tiempo de completitud y las demoras entre el resultado del agendamiento y la asignación manual de equipos.

L'Heureux et al. (2013) presentan un modelo de optimización entero-mixto para el agendamiento de las actividades de producción en el corto plazo. El modelo decide el movimiento y asignación de equipos de carguío a distintas áreas y frentes de trabajo. El movimiento de

los equipos de carguío entre áreas está fuertemente penalizado. En cambio, las frentes de trabajo son subdivisiones de un mismo sector, en donde el movimiento de la pala para cambiar entre frentes está penalizado en menor magnitud. Naturalmente, se controla la producción en cada una de las frentes, que en el caso de estudio tienen una dimensión de un bloque. Por otro lado, se decide qué clusters -definido como agrupación de bloques- se perforan y tronan en cierto periodo, junto con la asignación de palas y posterior extracción de cada frente. La función objetivo minimiza los costos de la producción, los cuales consisten en los costos por movimiento de palas entre frentes y entre áreas y el costo por perforación y tronadura de los distintos clusters. El tonelaje de producción requerido, dado típicamente por la planificación de mediano plazo, se introduce como una cota mínima basada en un porcentaje de la producción esperada de los equipos de carguío disponibles en cada periodo.

Dada la complejidad computacional del modelo, se proponen cuatro variaciones al modelo inicial con el fin de acelerar la obtención de soluciones al problema. El primer modelo (M_1) propuesto toma la formulación base y fija ciertas variables considerando el tiempo mínimo que le tomaría a la operación el llegar a cada clúster y cada frente. Además, se introducen como prioridad el branching de las variables que controlan la asignación de palas a las frentes, pues se determinó que eran las decisiones más críticas en la minimización de la función objetivo. Estas consideraciones disminuyen en un 80% el tiempo de resolución de las instancias de prueba. La segunda modificación propuesta (M_2) toma como base el modelo anterior, y agrega una tasa de descuento a la producción por periodo, para eliminar soluciones idénticas, que pueden demorar la obtención de una solución final. Además, se agrega un estado inicial de la mina, lo que fija variables adicionales al inicio de la operación. Esta modificación mejora en un 97% los tiempos de resolución con respecto al modelo M_1 . Dos modelos adicionales son propuestos, uno que impone un número mínimo de desplazamientos para cada pala, y otro que relaciona las variables de asignación y movimiento de las palas como pre-proceso, que mejoran los tiempos de cómputos de los modelos anteriores. Finalmente, los autores declaran que el uso de estrategias de resolución que explotan las relaciones entre las variables de decisión pueden mejorar los tiempos de resolución sin afectar la calidad de la solución obtenida para este tipo de modelos de corto plazo.

2.3.3. Análisis de Investigación de Operaciones en Planificación de corto plazo

En esta sección se comenta los principales resultados de la revisión de los modelos de corto plazo descritos en las secciones anteriores y cuál es su relación con los objetivos de esta tesis.

Los modelos generales han sentado las bases del agendamiento de corto plazo. En los trabajos revisados se ha hecho énfasis en la multiplicidad de destinos disponibles y en diferentes restricciones relativas a capacidades, mezclas y calidad del producto. Estos trabajos permiten resolver de manera eficiente el problema de maximizar el metal producido o minimizar los costos de extracción cumpliendo las restricciones dadas por el sistema minero y las plantas de procesamiento. Además, algunos modelos incorporan restricciones relativas al avance temporal de la extracción desde los puntos de acceso de cada banco. Esto permite secuencias factibles de extracción a nivel de bloques en cada periodo. Sin embargo, se detecta una brecha relativa a la selectividad: los modelos generales omiten que las dimensiones del equipo de carguío frecuentemente impiden la extracción individual de los bloques en el corto

plazo. Esto impide que los destinos de bloques adyacentes puedan ser determinados de forma independiente. Es así como la agregación de bloques en cortes o polígonos que compartan el mismo destino de procesamiento es un paso necesario para obtener un plan de corto plazo que sea operacionalmente factible. Por este motivo se declara que la suposición de selectividad perfecta resulta problemática para la implementación de estos modelos. Los avances desarrollados en esta investigación incorporan estas problemáticas.

Los modelos centrados en actividades operacionales permiten definir la asignación de equipos a las distintas labores que se desarrollan en el corto plazo. Esto genera planes de extracción y preparación factibles en términos de recursos utilizados en cada periodo. Sin embargo, estos modelos asumen que existe un plan de producción ya definido que debe cumplirse, y no se hace referencia a la obtención de dicho plan. La factibilidad operacional depende tanto de la asignación de tareas como de la factibilidad de dichas tareas, la cual es un requerimiento necesario para que la asignación de labores sea factible. En ese sentido, se plantea que los modelos que definen las metas de producción y las frentes de extracción deben considerar los requerimientos operacionales de los equipos que serán asignados. Los avances planteados en esta tesis son capaces de incorporar la factibilidad operacional de los equipos en la definición de las metas de producción.

En conclusión, aún se presenta una oportunidad de mejora en la factibilidad operacional de los modelos de optimización aplicados a corto plazo al considerar la selectividad de los equipos de carguío. Los trabajos que han intentado abordar esta brecha son descritos en detalle en la sección [2.4](#).

2.4. Agrupamiento en agendamiento de la producción

Diversas técnicas de agrupamiento han sido usadas en la planificación minera. Dependiendo del objetivo buscado, las clasificaremos en:

- **Agrupamiento operacional:** Técnicas para agrupar bloques con el fin de otorgar espacios operacionales para los equipos de carguío.
- **Política de leyes de corte:** Técnicas para definir el destino de bloques (no necesariamente agrupados espacialmente).

2.4.1. Agrupamiento operacional

En esta sección se muestran los distintos trabajos que abordan la agrupación de bloques en planificación minera cuyo objetivo es cumplir con algún criterio operacional. Se destacan dos tipos de trabajos: el agrupamiento de bloques para obtener formas geométricas adecuadas tanto para el diseño como para la planificación y la delimitación de zonas entre mineral y estéril en un banco.

Definición de polígonos y fases operativas

La definición de polígonos se basa en subdividir el área agendada para la extracción en unidades básicas que puedan tener dimensiones adecuadas para los equipos de carguío

y que estén asignadas a un destino en particular en base a su valor, ley y propiedades geometalúrgicas, con el fin de cumplir los requerimientos operacionales tanto de la mina como de la planta de procesamiento. Un ejemplo de creación automática de polígonos puede apreciarse en la Fig. 2.4.

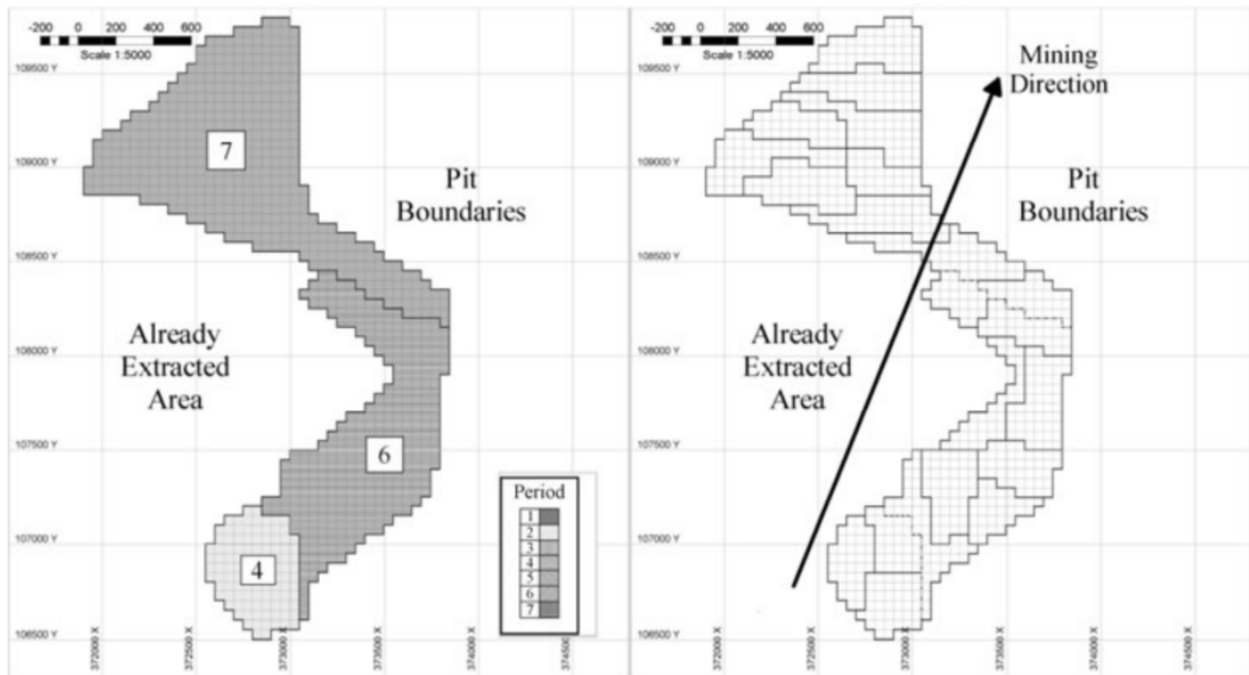


Figura 2.4: Resultado de algoritmo de agrupamiento para polígonos en corto plazo. *De Tabesh y Askari-Nasab (2013)*

Un trabajo inicial relacionado a agrupamiento de bloques y definición de fases se presenta en Stone et al. (2004), donde se propone una metodología de planificación estratégica desde el cálculo del pit final hasta el agendamiento de la producción de distintas fases. Esta metodología busca maximizar el valor descontado neto del agendamiento cumpliendo restricciones de capacidad, precedencias, mezcla, transporte, mercado, sinking rate, etc. Dado que la metodología es propietaria, no se presentan detalles acerca del proceso. En particular, se menciona que el proceso de agendamiento está basado en agrupaciones de bloques llamados *AGG*, los cuales se forman en base a un algoritmo de *fuzzy clustering*, que favorece el agrupamiento de bloques cercanos, y que las formas resultantes respetan las restricciones de precedencia entre ellos. Luego, el agendamiento se realiza utilizando estos *AGG* como unidad básica, donde cada *AGG* posee bins, los cuales definen distintos materiales dentro del agregado que pueden ser extraídos de forma independiente. Este agendamiento sirve como insumo para la definición de fases, donde los *AGG* que comparten periodo de extracción tienen prioridad para pertenecer a la misma fase. Finalmente, se agendan las fases-bancos (llamadas paneles en este trabajo), para obtener el plan de producción final.

Huang et al. (2009) presentan un optimizador comercial, dedicado al agendamiento de polígonos en el corto y mediano plazo. Este módulo de optimización se enfoca en obtener una secuencia óptima de extracción de polígonos en distintas fases-banco, comúnmente con la maximización del beneficio como función objetivo, pero con la posibilidad de considerar otras como minimización de costos, distancias de transporte u horas de equipos mineros. El modelo

considera distintos destinos para el material basados en reglas de leyes de corte, y agenda los polígonos sujeto a restricciones de precedencia entre fases y sinking rate, capacidades mínimas y máximas para el material minado y para cada destino en función de la disponibilidad de equipos, mezcla para controlar la calidad del material resultante en cada proceso, y asignación de equipos de carguío y transporte en función del estado actual de la mina. El trabajo solo enuncia las características del modelo, pero no presenta su formulación matemática por ser de uso comercial. No se comparan los resultados de este módulo con planes de referencia.

Tabesh y Askari-Nasab (2011) proponen un algoritmo de agregación de bloques con el fin de obtener polígonos adecuados para la planificación del corto plazo. Para esto, se basan en la definición de un índice de similitud entre bloques definido considerando proximidad espacial, rango de ley y tipo de roca. El algoritmo de agrupamiento es del tipo jerárquico, y funciona en dos etapas: la primera etapa es la construcción de clusters desde el fondo del pit hacia la superficie, por bancos. Dentro de cada banco, se definen el índice de similitud entre cluster como una medida normalizada de la distancia euclidiana entre sus ubicaciones y sus leyes del elemento de interés más relevante. Además, se le asigna una penalización en el índice de similitud a los clusters que no posean el mismo tipo de roca, dado que para este atributo no es posible plantear una distancia euclidiana al ser una variable categórica. Otra penalización incorporada a este índice es aquella que castiga la unión de clusters que no están sobre el mismo cluster en el banco inferior. Esto está relacionado con que estos clusters se usarán en la resolución de un problema MIP de agendamiento de la producción, y favorecer la unión de clusters que tienen un único cluster en el banco inferior disminuye la creación de arcos de precedencia entre bancos, con la respectiva disminución de variables enteras que controlan este orden de extracción en el modelo de agendamiento utilizado, basado en Askari-Nasab et al. (2010).

La unión de clusters basados en este índice de similitud es secuencial: se calcula este índice para todo par de clusters, y se unen secuencialmente aquellos que posean la mayor similitud. Dado que cada cluster está compuesto por bloques individuales, la similitud entre clusters está definida como el menor valor de todas las combinaciones de bloques entre ambos clusters. Finalmente, se define un tamaño máximo de cluster, para el cual se detiene el agrupamiento. En una segunda etapa, se introduce un algoritmo de *Tabu Search*, el cual busca modificar los clusters iniciales para reducir el número de arcos de precedencia entre distintos bancos para mejorar los tiempos de cómputo del algoritmo de agendamiento. Según sus resultados, el tamaño objetivo de los clusters puede generar una variación de hasta el 15% en el VAN obtenido en el agendamiento, donde clusters más pequeños obtienen mayores beneficios.

El algoritmo de agrupamiento jerárquico introducido en Tabesh y Askari-Nasab (2011) es evaluado en diversos casos de estudio en Tabesh y Askari-Nasab (2013), con el objetivo de probar su desempeño bajo distintas condiciones y objetivos. Cuatro criterios son considerados: tamaño máximo de cluster, homogeneidad de tipo de roca (definida como la porción máxima de un cluster con el mismo tipo de roca), factor de dilución de destinos (considerado como la fracción de bloques que comparten destino por sobre el total de bloques del cluster), y variación de ley dentro del cluster (considerada como en el coeficiente de variación de la ley). Además, se realiza un post-proceso de los clusters para eliminar bloques que generan esquinas y para remover clusters muy pequeños. Este proceso es iterativo, desmarcando los bloques problemáticos y asignándolos a un cluster distinto, revisando en cada iteración si

aún se forman clusters pequeños o bloques-esquina, para continuar el proceso hasta que estos problemas no se presenten.

El primer caso de estudio se centró en utilizar solo la distancia como índice de similitud, lo cual genera clusters regulares en tamaño pero con alta variabilidad de ley y tipo de roca. Para mejorar este resultado, se agrega al índice de similitud la diferencia de ley de distintos metales entre bloques, y una penalización si los bloques no son enviados al mismo destino. Al usar solamente la ley como medida de similitud, se obtiene el menor coeficiente de variación, pero el post-proceso para obtener clusters con formas adecuadas genera un aumento significativo en este parámetro. Alternativamente, si se considera la distancia y el destino como factores en el índice de similitud, se generan formas adecuadas y variaciones razonables de ley, destino y tipo de roca simultáneamente, dado que para este caso de estudio la ley y el destino tienen buena correlación. En el corto plazo, la accesibilidad y la dirección en que se generan los polígonos es relevante para obtener un plan minero factible. Por este motivo, se incluyó un índice de dirección de minado, el cual define puntos de inicio y término de la explotación, generando una dirección preferente en el banco. En base a esta dirección, se genera un factor adicional en el índice de similitud, lo que genera clusters en la dirección deseada, aunque los resultados muestran un aumento notorio en el coeficiente de variación. Esto también se utiliza para generar bandas de extracción, las cuales pueden ser útiles para otro tipo de yacimiento, como el caso ejemplificado en este trabajo sobre extracción de arenas bituminosas. De estos casos se concluye que la consideración simultánea de forma y destino fue la que generó resultados más razonables en términos de homogeneidad de tipo de roca, variación de leyes y destinos, y que dependiendo del objetivo del corto plazo, puede ser útil darle más peso a los distintos parámetros del índice de similitud, lo que genera un cambio relevante en los clusters obtenidos.

Este algoritmo de clustering también fue utilizado en Tabesh et al. (2014), como parte de una metodología multi-etapa de planificación a largo plazo. En este trabajo, se proponen distintas fases de resolución para el problema de agendamiento de la producción. A partir de un modelo de bloques, se resuelve el problema de pit final de manera convencional. La definición de fases, sin embargo, se realiza resolviendo un problema de programación entera binaria, donde se asignan bloques a distintos pushbacks con el objetivo de mantener el tonelaje de mineral y total de cada fase controlado para evitar el problema del *gap* entre fases que puede surgir al usar pits anidados convencionales. Una vez definidas las fases, se utiliza el algoritmo de agrupamiento para generar polígonos de producción dentro de cada fase-banco, los cuales son luego utilizados como unidad básica en el problema de agendamiento de la producción.

Un trabajo que aborda los espacios operacionales de forma indirecta es propuesto por Saavedra-Rosas et al. (2016). Los autores buscan un secuenciamiento de bloques que presente *mineral expuesto* al final de cada periodo, con el objetivo de mantener una operación fluida en la vida de la mina. El modelo de optimización propuesto, al cumplir la meta de mineral expuesto, también genera espacios operacionales adecuados para el agendamiento de largo plazo. Dado que este es un resultado indirecto de la formulación, el control de la forma y tamaño de estos espacios operacionales no es posible de forma certera.

Farmer y Dimitrakopoulos (2017) presentan una metodología para obtener un diseño de

fases operativo a partir de un agendamiento directo de bloques estocástico. Para esto, se considera el resultado de un agendamiento por periodos, y cada conjunto de bloques de un mismo periodo es separado en formas operativas y formas no operativas desde el punto de vista de la extracción. Este criterio está definido en base a un cierto número de bloques mínimo que debe poseer este conjunto en cada dirección. Esto representa el ancho mínimo requerido por los equipos en la operación. De esta forma, los sectores del agendamiento que no cumplen con esta condición, son considerados en una etapa posterior, mientras que los conjuntos que sí cumplan la restricción serán los elementos que formarán los candidatos a fases. Estos elementos se agrupan entre ellos para generar los candidatos a fases, utilizando un algoritmo de *k-means++* (Arthur y Vassilvitskii, 2007), que minimiza la diferencia promedio dentro de cada cluster. Dado que se intenta mantener el agendamiento inicial, el periodo de extracción tiene un alto peso en el índice de similitud, lo que favorece el agrupamiento de formas aptas para minar del mismo periodo.

Una vez obtenidos los candidatos a fases, se agregan las formas que no eran aptas para la extracción, considerando las restricciones de precedencia que deben cumplir para que la extracción de fases cumpla con los ángulos de talud. En caso de que alguna forma no pueda ser unida a algún candidato a fase, se desagrupa en los bloques que la constituyen para luego agregar bloques individuales a cada candidato a fase. Posterior a este paso, es posible que algunos sectores de las fases tengan secciones que no cumplan el ancho mínimo de minado, por lo que una fase de post-proceso final se encarga de cambiar algunos bloques de fase, con el fin de cumplir estos anchos operaciones. No se evalúa el impacto en el VAN de este método de definición de fases, comparado con el método tradicional de definir fases-banco, pero se espera que los resultados sean favorables al estar basado en un agendamiento directo de bloques.

Sepúlveda et al. (2018a) presentan una metodología de agrupamiento enfocada en la definición de dominios geometalúrgicos. A pesar de no incorporar el agendamiento, esta metodología de agrupación de bloques considera variables categóricas y continuas para generar volúmenes conexos, lo cual coincide con algunas características de los polígonos operacionales. Los autores mencionan que los procesos de agrupamiento duros se basan en sets disjuntos donde cada muestra pertenece solo a un set. Sin embargo, estos procesos no consideran la incertidumbre que existe en la definición de pertenencia a cierto cluster dado el conocimiento limitado que se tiene de las variables en los yacimientos. Por este motivo, los autores proponen el uso de *fuzzy clustering*, donde cada muestra posee una medida de pertenencia a ciertos clusters, la cual puede ser utilizada como medida de probabilidad de pertenencia a cada set. Para la definición de las distancias, los autores presentan estrategias para variables continuas y categóricas. Además, se pueden definir distancias basadas en objetivos que se quieran cumplir, como por ejemplo valores de recuperación.

El otro componente requerido en estos clusters es conectividad espacial, para lo cual se usan técnicas de segmentación de imágenes, donde a cada pixel de una imagen completa se le asigna una categoría (cluster) que mantienen una forma conexas. Las dificultades de este problema se dividen en dos partes: encontrar los mejores centroides, y encontrar el mejor sets de pesos para cada atributo. Un algoritmo genético es utilizado para encontrar los centroides para cierto conjunto de pesos, para luego ocupar otra implementación de algoritmo genético para optimizar los pesos dada la solución de centroides encontrada anteriormente. Una vez

encontrado los clusters con esta metodología, se realiza la corrección de imagen para asegurar la conectividad espacial. Dado que en el problema de definición de unidades geometalúrgicas el número de clusters definidos es relativamente bajo, es necesario estudiar el escalamiento de esta metodología para aplicarla a definición de polígonos del corto plazo. Sin embargo, la corrección de la imagen genera formas conexas, lo cual es beneficioso para la factibilidad operacional de los polígonos.

Tabesh y Askari-Nasab (2019) presentan una extensión del algoritmo jerárquico presentado en Tabesh y Askari-Nasab (2011, 2013) incorporando incertidumbre geológica. Los autores presentan cuatro algoritmos que se basan en clustering bajo incertidumbre considerando la metodología de *possible worlds* introducida por Volk et al. (2009). Esta metodología se basa en que es posible generar escenarios, llamados *possible worlds*, de los datos inciertos, y luego aplicar alguna técnica de clusters a estos escenarios de forma independiente, para finalmente ocupar estos escenarios agrupados para generar un agrupamiento final basado en esta información. La extensión propuesta por Tabesh y Askari-Nasab (2019) utiliza simulación geoestadística para generar escenarios posibles de tipo de roca y ley, los cuales son usados como *possible worlds*, a los cuales le aplica la metodología de agrupamiento jerárquico mostrada en Tabesh y Askari-Nasab (2011, 2013). En base a estos escenarios agrupados de forma independiente, los autores proponen tres maneras de generar clusters finales: (i) para N bloques a agrupar, en cada escenario se crea una matriz de $N \times N$ cuya entrada (i, j) es 1 si el bloque i y el bloque j pertenecen al mismo cluster. Luego, se calcula la frecuencia de que dos bloques estén agrupados en base a estas matrices. Si esta frecuencia es mayor a un valor umbral (0.5 en la implementación de los autores), estos bloques son agrupados. (ii) A partir de la misma matriz descrita en la metodología (i), las frecuencias calculadas son utilizadas como índices de similitud entre bloques, los cuales son usados para correr un algoritmo de agrupamiento jerárquico y generar los clusters finales. (iii) Se introduce un algoritmo de agrupamiento por *k-means* para generar los clusters en cada escenario.

A pesar de que el *k-means* original no es utilizado para variables categóricas, se introducen columnas a la matriz de características para cada tipo de roca, las cuales son penalizadas según un valor acorde a la importancia que posee generar clusters con tipos de roca similares. Este algoritmo de *k-means* es utilizado para generar clusters en cada escenario de forma independiente, para luego calcular las matrices y las frecuencias descritas en la metodología (i) y utilizar este valor como índice de similitud para el algoritmo de agrupamiento jerárquico final. Los autores comparan estas tres metodologías con respecto al caso base de generar el agrupamiento basado en un solo escenario de valor esperado de las características del yacimiento. En base al primer caso de estudio mostrado, la metodología (i) presentaba menor coeficiente de variación de las leyes y mayor homogeneidad en el tipo de roca con respecto al valor esperado de los escenarios en comparación a los otros dos algoritmos y al caso base, mientras el caso base presentaba los peores indicadores. Sin embargo, presentaba variaciones considerables en el tamaño de los clusters, lo cual es perjudicial para la factibilidad operacional del los polígonos mineros.

Al comparar los indicadores para los distintos escenarios geológicos, se aprecia que las metodologías (ii) y (iii) tienen menores variaciones en los indicadores inter-escenarios, mientras que la metodología (i) y el caso base presentaban diferencias considerables. Para un segundo caso de estudio, las metodologías (iii) y (ii) presentaban los mejores indicadores. Una

diferencia notable entre las metodologías propuestas es que el uso de *k-means* en la metodología (iii) reducía considerablemente el tiempo de cómputo, pasando de 3452 minutos para la metodología (ii) a 70 minutos para la metodología (iii), mostrando la notable diferencia en tiempo de cómputo entre el algoritmo jerárquico de agrupamiento el *k-means*, lo cual puede ser relevante en casos de estudios de mayor tamaño.

Delimitación entre mineral y estéril

La delimitación entre zonas de mineral y estéril con el fin de cumplir los requerimientos operacionales dados por los equipos de carguío en cada banco de extracción también se presenta como un problema de agrupamiento operacional. Se diferencia principalmente de la definición de polígonos en que el objetivo más relevante es controlar la frontera entre las zonas de mineral y estéril para evitar dilución excesiva y problemas de clasificación en la planificación operacional, considerando los espacios necesarios según la selectividad de los equipos de carguío. La Fig. 2.5 muestra la aplicación de una metodología automática para la creación de estos límites a partir del modelo de recursos y una ley de corte.

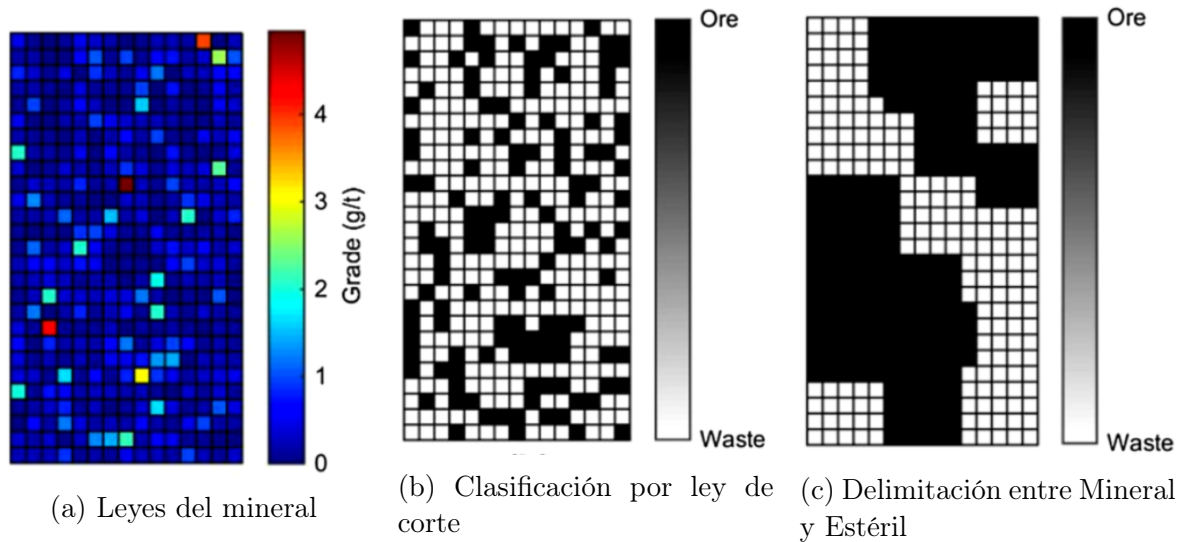


Figura 2.5: Aplicación de un algoritmo de optimización para el límite entre mineral y estéril. De Sari y Kumral (2017).

Norrena y Deutsch (2001) abordan de manera temprana el problema de delimitación, denominado *dig-limit optimization*. Los autores declaran que el control de ley usual considera selectividad perfecta bloque a bloque, lo cual es una limitante considerable en la operación. Los autores a su vez enumeran diversas dificultades que presenta la delimitación manual, entre las cuales podemos mencionar la complejidad en considerar incertidumbre, la subjetividad en la definición de contornos y la poca consistencia en mantener límites aceptables para la maniobrabilidad de los equipos de carguío. Por este motivo es necesario una metodología que genere, de forma automática, los límites entre mineral y estéril dentro de un banco. Los autores comentan brevemente acerca de las limitaciones de las técnicas de análisis de imagen, dado que es complejo considerar el valor de cada bloque dado que típicamente se utiliza una categoría binaria (mineral o estéril, en este caso), pero el valor de dicho estéril condiciona los límites generados, lo cual no es posible capturar con análisis de imagen convencional.

Por este motivo, los autores proponen otra metodología, que considera un polígono inicial el cual está caracterizado por sus vértices en el banco, y el problema radica en modificar estos vértices considerando dos objetivos: maximizar el beneficio y, a su vez, mantener la factibilidad operacional. La factibilidad operacional se mide con una función de penalización: dependiendo del equipo, se castigan los ángulos de los vértices que sean inferiores a cierto valor. Estas dos componentes se consideran como un problema de optimización multi-objetivo con distintos ponderadores, y el algoritmo de resolución es *simulated annealing*, donde las perturbaciones pueden ser mover un vértice, o agregar un vértice intermedio. En una comparación con diseños manuales, la metodología generó resultados similares a aquellos de los ingenieros, pero con mayor valor y menor penalización por ángulos.

En Norrena et al. (2002) se proponen extensiones a este trabajo, como la capacidad de generar polígonos anidados, calcular un beneficio esperado considerando distintos escenarios de incertidumbre y recuperación variable, elegir la penalización según la factibilidad operacional en los ángulos de cada polígono, parámetros recomendados para el algoritmo de *simulated annealing*, y otros comentarios prácticos sobre el uso de esta herramienta. Neufeld et al. (2003) presentan un caso de estudio con esta metodología, similar a los trabajos anteriores, y comenta sobre una posible extensión con múltiples materiales en el mismo banco, aplicando este algoritmo de forma iterativa para los distintos productos requeridos.

Richmond y Beasley (2004) abordan el problema de la delimitación considerando restricciones de equipos e incertidumbre de leyes bajo un enfoque financiero y usando heurísticas de búsqueda local *greedy*. Los autores declaran que el problema de delimitar de manera óptima las distintas zonas de mineral y estéril es un problema intrínsecamente incierto, donde la mineralización puede ser errática, la malla de muestreo insuficiente, y la incorporación de dilución compleja. Para obtener una mejor delimitación, los autores proponen un modelo de teoría de portafolio, que por un lado maximiza el valor obtenido por la clasificación de los bloques a distintos destinos, y por otro minimiza el riesgo al considerar los distintos escenarios geológicos. La resolución del modelo es compleja, por lo que los autores implementan una metodología de círculo flotante, donde un círculo de radio dado por el radio de giro del equipo de carguío, se va moviendo por el banco y calcula la ley promedio de las unidades selectivas mineras (SMU) que están dentro de él. Si este promedio es mayor a la ley de corte, se asignan todas las SMU como mineral. Este algoritmo no consideraba en su búsqueda la minimización del riesgo financiero, por lo que se incorporó un algoritmo de búsqueda local *greedy* que perturba la solución inicial y verifica si existen mejores en la función objetivo -en el trade-off de valor y riesgo del problema de portafolio clásico-.

Wilde y Deutsch (2007b) abordan el tema de la delimitación desde una perspectiva distinta a los trabajos anteriores. Los autores nuevamente declaran que el control de ley tradicional basado en beneficio individual de cada bloque es poco realista, dado que no considera la posible dilución y la factibilidad operacional en la extracción. Los autores comentan que los avances anteriores de Neufeld et al. (2003), Norrena et al. (2002) y Norrena y Deutsch (2001), basados en modificar vértices de una forma inicial, son poco prácticos para estimar el beneficio en un estudio de factibilidad, donde existen muchos bancos que analizar. Por este motivo, se propone otra metodología llamada *feasibility grade control (FGC)*, por su utilidad para etapas de factibilidad, donde se optimiza cómo las SMU son agrupadas en unidades de mayor tamaño considerando la factibilidad operacional y dilución, con el fin de obtener

una mejor estimación del valor real de la explotación del yacimiento. Para esto, se define un tamaño objetivo de cada polígono, considerado como la unión de un número predeterminado de SMU de acuerdo a la capacidad del equipo de carguío. El objetivo es maximizar el beneficio, considerando que todas las SMU de un mismo polígono deben tener el mismo destino. Dependiendo del tamaño requerido del polígono, existen diversas configuraciones de SMU que lo cumplen, pero dado que no todas las formas son factibles, se asignan distintas penalizaciones manuales según su facilidad de extracción. El algoritmo toma una secuencia inicial aleatoria, y va moviendo bloques entre distintos polígonos, verificando si aumenta el beneficio o si disminuye la penalización por factibilidad operacional. No se plantea el modelo de optimización completo, pues sólo se resuelve el problema mediante permutaciones aleatorias.

Wilde y Deutsch (2007a) comparan esta metodología con los trabajos de *dig-limit optimization* previos, donde se destaca que sólo requiere el tamaño de polígono y las penalizaciones por parte del usuario, pero los límites generados típicamente son erráticos y son útiles sólo para refinar la estimación de valor en estudios de factibilidad y no como control de ley con corto plazo.

Isaaks et al. (2014) también proponen una metodología para la delimitación de distintas zonas en un banco, pero que se enfoca principalmente en cumplir con el ancho mínimo de minado. Los autores declaran que el uso de funciones de pérdida es un buen enfoque para abordar el problema de mala clasificación de los bloques en un banco, puesto que por una parte es inevitable mezclar bloques de distintos destinos para satisfacer las restricciones operacionales, pero a la vez es necesario minimizar esta pérdida para obtener el mayor beneficio posible. Más aún, la magnitud de esta pérdida no es simétrica en torno a las leyes de corte: no es equivalente enviar un bloque de mineral a botadero, que enviar un bloque de estéril a planta, pues en el primer caso todo el valor económico se pierde, mientras que en el segundo puede existir material económico que se puede recuperar. El espacio operacional es considerado como una línea de N SMU, donde N depende del espacio operacional necesario, y todos los bloques de dicha línea deben ser enviados al mismo destino. En base a una configuración inicial, el algoritmo propuesto modifica estas líneas utilizando *simulated annealing* y evalúa si la nueva configuración genera una disminución en las pérdidas. Los resultados en un caso de estudio muestran que, comparados con un diseño manual, se genera un aumento del 2.8 % en el beneficio total percibido por la explotación de un banco.

Ruiseco et al. (2016) desarrollan un modelo de optimización que maximiza el valor de la asignación de destinos, sujeto a que todas las SMU que caen dentro de un radio de búsqueda pre-definido, en base al espacio operacional relevante, deban ser enviadas al mismo destino. La resolución de este modelo involucra un algoritmo genético, donde la función de aptitud (*fitness*) de cada cromosoma corresponde al beneficio obtenido por el agrupamiento, descontando una penalización por clusters para determinar la calidad del agrupamiento, para evitar formas que no favorezcan la extracción operativa del conjunto de SMU. Los resultados obtenidos fueron comparados con diseños manuales, donde el algoritmo genético generó una mayor medida de *fitness*, dado que aunque el diseño manual presentaba mejor clasificación basado en ley de corte, el *fitness* considera beneficio y una penalización por formas desfavorables para el minado.

Sari y Kumral (2017) proponen un modelo de optimización similar al propuesto por Ruiseco et al. (2016). Los autores proponen un modelo de optimización que define las zonas de mineral y estéril basado en *frames*, definido como un rectángulo de dimensiones adecuadas para la explotación minera basado en el tamaño del equipo de carguío, y cuyas dimensiones son múltiplo del tamaño de las SMU. Como insumo al proceso de optimización, se calculan todos los posibles *frames* para cada SMU, y el proceso de optimización se basa en encontrar la ubicación de estos *frames* que maximizan el valor de la extracción del banco. Cada *frame* escogido debe ser *válido*, en el sentido que todas las SMU que lo componen deben ser enviadas al mismo destino y cada SMU debe pertenecer al menos a un *frame* válido. A diferencia del modelo propuesto por Ruiseco et al. (2016), este modelo fue resuelto sin utilizar metaheurísticas. El modelo fue probado en distintos bancos y generó separaciones claras entre las zonas de mineral y estéril. Además, fue comparado con un diseño manual realizado por un ingeniero basado en las leyes de corte y las categorías de cada SMU, y aunque los resultados fueron similares en términos de las geometrías producidas por el ingeniero y por el modelo, el modelo logró capturar un 6.5 % más de valor económico.

Deutsch (2017) propone un algoritmo que clasifica el destino de los bloques en un banco y además exige que cada bloque pertenezca a una zona de extracción con un espacio operacional definido. El autor propone un modelo de asignación de destinos en el corto plazo, donde se maximiza el beneficio obtenido al enviar los bloques a diferentes destinos, donde cada bloque debe pertenecer a un polígono de extracción. Esta restricción se genera con una variable adicional que representa todos los posibles polígonos de ancho operacional que se pueden generar en el banco (el cual puede ser una forma característica, como un cuadrado de tamaño 3×3 bloques), los cuales se pueden traslapar entre ellos. El autor declara que este es un problema de *covering*, el cual es *NP-hard*, y por ende es complejo de resolver. Como alternativa a la solución exacta, el autor propone un algoritmo de *Branch & Bound*, donde se generan ramas a partir de una asignación inicial según las distintas clasificaciones posibles de cada bloque, descartando las ramificaciones que no respetan el ancho operacional. Sin embargo, el autor declara que la dificultad de obtener una buena cota como solución inicial, y las diferencias mínimas en valor de distintas ramas, generan que este algoritmo no genere soluciones satisfactorias en poco tiempo, por lo que propone el uso de *simulated annealing* para mejorar las soluciones obtenidas. Además, se utilizan algunos pre-procesos para evitar evaluar todos los bloques, cuando ya se conoce la mejor clasificación en algunas zonas donde no se tiene problemas de selectividad. Utilizando estas técnicas, evalúa distintas formas operacionales en dos casos de estudios, donde se aprecia que aumentar el espacio operacional genera un aumento en bloques mal clasificados y disminución del valor, conocido usualmente como el trade-off entre valor y selectividad. El autor declara que esta delimitación entre distintas zonas de extracción iniciales pueden servir como guía para el planificador, pues no son totalmente operativas.

Vasylychuk y Deutsch (2019) utilizan un modelo similar a Deutsch (2017), pero entregan más detalle acerca de su resolución. Los autores declaran que a partir de un modelo de valor por destino de los bloques, la definición del destino de los distintos clusters puede realizarse en base a un *frame* de tamaño adecuado que recorre todo el modelo, evaluando si el beneficio de enviar todos los bloques dentro de ese *frame* a un mismo destino es positivo o negativo, y cambiando el destino de forma acorde. Los autores declaran que aunque esta metodología es sencilla, genera formas problemáticas para el minado, por lo que se propone una metodología

alternativa donde se construye una grilla de puntos fija, y esta grilla se mueve por el modelo de SMU. El tamaño de esta grilla tiene relación con el tamaño operacional necesario para la operación. Los autores declaran que esta metodología genera menos formas problemáticas que la anterior. El algoritmo de resolución consta de dos pasos: se genera una clasificación inicial basada en esta grilla de un tamaño operacional adecuado, y un segundo paso revisa las ubicaciones problemáticas y reasigna los destinos para eliminarla. Una vez terminada la revisión de zonas problemáticas, se vuelven a revisar zonas al azar y se cambia el destino de algunas SMU siempre y cuando aumente el valor y genere zonas factibles. El algoritmo es rápido, pero no asegura optimalidad. En un caso de estudio particular, capturó un 98 % del valor base considerando selección libre de cada SMU. El caso de estudio, sin embargo, tiene zonas marcadas de mineral y estéril incluso en la selección individual de cada SMU, por lo que no se aprecia de buena forma el aporte de esta metodología.

2.4.2. Política de leyes de corte

La elección de leyes de corte óptimas también ha sido estudiada como un método de clustering: la discriminación de los bloques que constituyen mineral y sus posibles destinos pueden considerarse como un tipo de agrupamiento, con distintos niveles de complejidad. Típicamente estos modelos no consideran la ubicación espacial de los bloques para definir los destinos, sino que eligen el conjunto de todos los bloques de distintas zonas del yacimiento que deben ser enviados a cada destino para maximizar el valor. La Fig. 2.6 muestra un esquema de clustering multivariable para definir el destino de grupos de bloques, unidos por características similares.

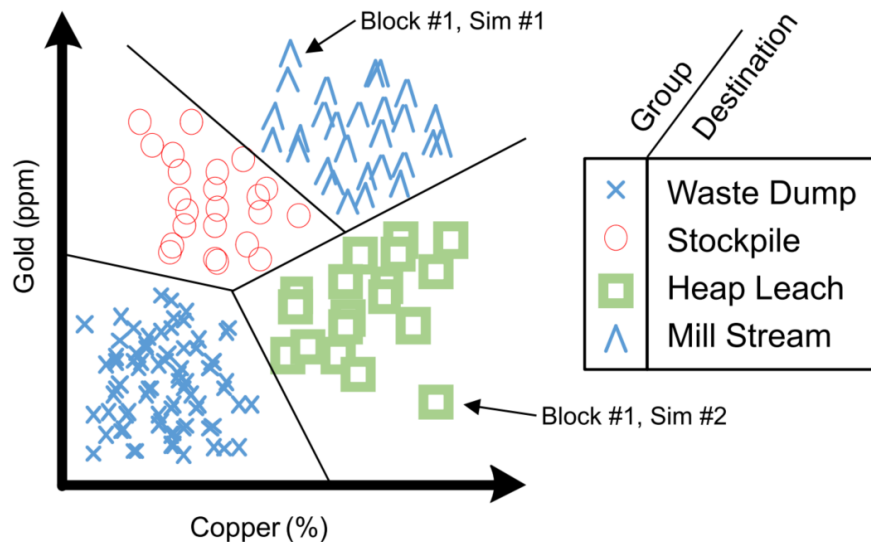


Figura 2.6: Definición de destinos basado en agrupamiento por *k-means*. De Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016)

Kumral (2015) plantea el problema del envío de bloques a distintos destinos como un problema de *quality management* basado en una función de pérdidas considerando incertidumbre geológica. El autor declara que la decisión del destino de cada SMU es fundamental para maximizar el beneficio de la explotación minera, evitando la mala clasificación de los bloques y maximizando las capacidades de producción. Sin embargo, el autor declara que la mayoría

de las metodologías tradicionales de política de leyes de corte -como elegir el destino que maximiza el beneficio o minimiza los costos- no incorporan la incertidumbre en la calidad del material, ni restricciones de capacidad, ni relaciones de precedencias entre distintas SMU o el cumplimiento de mezcla en los distintos destinos. Además, en el caso multi-destino y multi-variable, la definición de una ley de corte que incorpore todas las distintas posibilidades se vuelve una tarea compleja.

Por este motivo, el autor propone un modelo de optimización que simultáneamente, determina el destino de cada SMU y las leyes objetivos de cada línea de procesamiento. La función objetivo se basa en minimizar una función de pérdida de Taguchi, donde existen un costo de penalización que es proporcional al cuadrado de la diferencia entre la ley enviada a cada destino, y el objetivo de ley determinado. Como restricciones, se introducen restricciones de precedencia entre SMU, capacidad de procesamiento, límites máximos y mínimos de desviación con respecto a la ley objetivo y límites máximos y mínimos de mezcla para cada proceso. Las restricciones sólo incorporan leyes promedio de cada SMU, mientras que la función objetivo considera el cálculo de la función de pérdidas para cada escenario geológico del modelo. La determinación de las metas de ley genera que el problema sea no-lineal, por lo que para su resolución se inicializan las leyes objetivos de cada destino para linealizar la función objetivo, y se resuelve iterativamente utilizando la solución obtenida para re-calcular las metas y volver a resolver, hasta alcanzar algún criterio de convergencia.

El caso de estudio mostrado corresponde a 3600 SMU -las cuales fueron reducidas a 1687 al aplicar un filtro previo a la optimización-, cinco destinos, dos metales (oro y plata), y diez simulaciones. La metodología propuesta fue comparada con los enfoques manuales de maximizar beneficio y minimizar pérdidas de cada SMU de forma separada. El modelo de optimización genera un aumento del valor de hasta un 6.2% comparado con minimizar pérdidas de cada SMU, y además cumple con las capacidades de procesamiento y precedencias, a diferencia de los enfoques manuales. Se menciona que el resultado del problema de optimización es sensible a los parámetros de entrada como el costo de la función de pérdidas, por lo que es necesario estudiar en detalle la elección de estos parámetros.

Un caso sencillo es presentado por Menabde et al. (2018), donde se introduce modelo de agendamiento que incorpora la elección de leyes de corte óptimas por periodo, considerando incertidumbre geológica. La elección de estas leyes de corte óptima se realiza durante el proceso de optimización, considerando como dato de entrada leyes de corte “candidatas” a ser escogidas. Estas leyes de corte inducen un agrupamiento en los distintos escenarios geológicos, donde el destino de cada bloque, y por ende, la cantidad de mineral y metal en cada simulación varía en función de estas leyes candidatas o *bins*. El modelo, luego, selecciona la agrupación que maximiza el VAN en cada periodo, considerando como mineral todo material que tiene ley por sobre a la ley de corte de cada periodo, la cual también es una variable de decisión. El uso de este MIP es evaluado primero considerando una ley de corte fija y ley de corte variable sin considerar incertidumbre, lo que conlleva un aumento del VAN del 20%. Luego, sobre el caso de ley de corte variable se aplica incertidumbre, y se obtiene una ganancia extra del 4.1% en el VAN. El perfil de riesgo de los tres casos es similar, contrastado con los escenarios geológicos, y los planes de producción no mantienen un nivel de producción constante en ninguno de los tres casos propuestos.

Una metodología de agrupación multivariable es presentada por Goodfellow y Dimitrakopoulos (2017). En este trabajo también se busca definir una política de leyes de corte para un agendamiento bajo incertidumbre, pero esta vez el enfoque está en complejos mineros. Dado que los complejos mineros se caracterizan por múltiples opciones de procesamiento, cada cual con diversos requerimientos de leyes y contaminantes, una agrupación univariable como la presentada en Menabde et al. (2018) puede no ser óptima al considerar el efecto de los elementos secundarios en cada proceso. Para subsanar esta deficiencia, se presenta una agrupación basada en el algoritmo de *k-means++* (Arthur y Vassilvitskii, 2007), utilizando las características relevantes de cada bloque para la minimización de las distancias con respecto a los centroides en varias dimensiones. Como resultado, se obtienen los distintos grupos de bloques basados en su similitud multivariable. Dado que este trabajo incorpora incertidumbre geológica, es posible calcular el agrupamiento para cada escenario. Posteriormente, junto con la elección de qué bloques se extraen en cada periodo (decisión de primera etapa) existe una variable de decisión asociada a cada grupo generado, donde se define si dicho grupo es enviado a cierto destino en un periodo determinado. Dado que los bloques pueden pertenecer a distintos grupos según la simulación, se asocia una penalización de desviarse de las metas productivas y de contaminantes en cada destino, por lo cual el optimizador decidirá la política de leyes de corte basado en el mejor cumplimiento de estos objetivos. Existe una segunda decisión, que es escenario-dependiente (segunda etapa), asociada a las distintas líneas de procesamiento dentro de cada destino, donde según el contenido de mineral de cada bloque puede modificarse según como es procesado en cada planta.

El modelo propuesto es no-lineal, por lo que se presentan ciertas heurísticas para obtener soluciones a estos problemas, las cuales son explicadas en mayor detalle en Goodfellow y Dimitrakopoulos (2016), y que pueden incorporar valorizaciones no-lineales de los clusters. Se muestran dos casos de estudios - una mina de cobre y otra de níquel- donde esta metodología presenta mejores cumplimientos de las metas productivas y mayor VAN, comparado con la metodología tradicional secuencial.

Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016) también presenta una política de leyes de corte basada en agrupamiento, pero se centra en la componente geometalúrgica del depósito, donde el destino de cada bloque depende no solo de sus características individuales, sino del conjunto de bloques que son procesados de manera conjunta. Dadas las relaciones no lineales presentes en el procesamiento del mineral, el valor de un bloque no es función sólo de sus características similares, sino de la agrupación de bloques que es enviada a planta. Por este motivo, Del Castillo y Dimitrakopoulos plantean que el agrupamiento basado solo en similitud como el propuesto en Goodfellow y Dimitrakopoulos (2017) es insuficiente y no captura de buena forma estas relaciones no lineales. Para lograr un agrupamiento que considere el desempeño del procesamiento, se propone un algoritmo de *coalition formation clustering*, basado en teoría de juegos cooperativos, donde se plantea que el valor obtenido por los participantes de un juego es mejor en agrupaciones cooperativas que de forma individual, lo que incentiva la formación de grupos.

Dado que las relaciones de valor no son lineales, determinar el grado de satisfacción de los integrantes de una coalición no es trivial, y se han propuestos varias metodologías para determinarlo. En este trabajo se utiliza el *shapley value* (Shapley, 1953), el cual determina la contribución de cada participante en un grupo basado en todas las combinaciones de grupos

posibles, donde el valor de cada participante y cada grupo está determinado por funciones características. En el ámbito minero, los participantes del juego cooperativo son los bloques, los cuales deben agruparse para maximizar el beneficio y cumplir las restricciones de cada destino. Las interacciones geometalúrgicas se traducen en una función característica específica que considere las particularidades del sistema minero. Sin embargo, el cálculo del valor *shapley* para un modelo de bloques real es inviable computacionalmente. Por este motivo, en el trabajo se consideran ciertos pre-procesos del modelo de bloques, primero con el objetivo de juntar bloques similares utilizando el trabajo de Goodfellow y Dimitrakopoulos (2017). Más aún, el cálculo de este valor se realiza por cada periodo por separado, considerando un agendamiento previo que determina la secuencia de extracción de los bloques.

En un caso de estudio con recuperación no lineal, esta metodología generó un aumento en el valor del agendamiento de un 5.6% con respecto al caso base que considera leyes de corte fijas por destino y no considera el efecto del agrupamiento. Además, se obtuvo un mejor cumplimiento de las restricciones geometalúrgicas y de mezcla en cada destino. Se plantean como extensiones la consideración de un valor *shapley* estocástico y la determinación conjunta del agrupamiento y la secuencia de extracción. Los autores notan, además, que la consideración de una mezcla anual de los bloques no es realista, por lo que nuevas extensiones para el corto plazo son necesarias.

2.4.3. Análisis de agrupamiento en agendamiento de la producción

En esta sección se comenta los principales resultados de la revisión de las diversas técnicas de agrupamiento en agendamiento de la producción y cómo se relacionan con los objetivos de la tesis.

Las técnicas de agrupamiento operacional basadas en polígonos y fases operativas se usan para subsanar la brecha detectada en los modelos de investigación de operaciones de corto plazo: la solución no necesariamente cumplía con los espacios y la selectividad requerida por la operación. Diversas metodologías han sido propuestas para este fin, entre las cuales podemos mencionar agrupamiento jerárquico, agrupamiento difuso, y *k-means*. El resultado de estas técnicas genera volúmenes que presentan forma y tamaño adecuados para el funcionamiento del sistema minero de carguío y transporte, y que además pueden presentar índices de similitud en términos de litología, alteración, destino o elemento de interés.

De manera similar, los modelos de delimitación entre materiales también son usados para incorporar selectividad y factibilidad operacional en el corto plazo. A diferencia de los modelos de agrupamiento, este tipo de modelos no forma directamente polígonos, sino que se encargan de determinar los límites de la explotación mediante distintas técnicas. El avance en estos modelos ha permitido recientemente resolver este tipo de problemas de manera óptima y evitando el uso de heurísticas de resolución, las cuales fueron muy comunes en trabajos tempranos. Sin embargo, la resolución óptima de estos modelos está limitada a definiciones de estéril y mineral y no incorpora múltiples destinos. El resultado de estos modelos permite definir el destino de los bloques en el corto plazo considerando el funcionamiento de los equipos de carguío.

Sin embargo, ambos enfoques comparten limitaciones similares. Estas técnicas son utilizadas de manera independiente de los modelos de planificación de corto plazo. Requieren un

plan de producción ya definido, el cual es agrupado para obtener factibilidad operacional, o bien son utilizados como pre-proceso para obtener los insumos para modelos de optimización posteriores. De esta forma existen una serie de restricciones, propias de los modelos de agendamiento de la producción, que no son incorporadas en la definición de polígonos o zonas. Algunas de estas restricciones son: capacidad, mezcla, calidad, avance y temporalidad, entre otras. Por este motivo, no resuelven la brecha comentada en la sección 2.3.3. Los avances propuestos en esta tesis son capaces de incorporar estas consideraciones operativas en el proceso de agendamiento de la producción.

Finalmente, los modelos que definen política de leyes de corte son interesantes en la medida que agrupan bloques según su destino de procesamiento. La mayor parte de los trabajos se enfocan en minimizar una medida de error de clasificación o maximizar una función de valor, pero existen modelos más complejos que permiten incorporar interacciones geometalúrgicas en la política de destinos. Su importancia radica en que el material que se procesa junto genera interacciones que modifican el comportamiento en variables de respuesta tales como recuperación, energía de conminución, costos, entre otras. A pesar de que no incorporen consideraciones espaciales ni operacionales -por lo que no son aplicables para disminuir la brecha comentada anteriormente-, plantean la necesidad de incorporar estas interacciones geometalúrgicas en el proceso de agrupamiento, con el fin de maximizar el valor y la utilización de recursos. Para lograr este objetivo, es necesario estudiar la forma en que se han incorporado estas interacciones en el proceso de planificación. Una revisión detallada de estas técnicas es presentada en la sección 2.5.1.

2.5. Geometalurgia

La geometalurgia es la disciplina que integra la geología, minería, metalurgia y parámetros medioambientales para buscar la maximización del valor del negocio y reducir su riesgo, basado en el conocimiento preciso de las características del depósito. Típicamente se asocia con la relación de las características geológicas del yacimiento con su desempeño en etapas de procesamiento, y los métodos necesarios para muestrear, testear y modelar este comportamiento de la mejor forma posible (Coward et al., 2009; Dominy et al., 2018b; Dunham y Vann, 2007; Wills y Finch, 2016).

A pesar de que el efecto de la geología de las especies de interés tiene en el procesamiento posterior es conocido desde hace bastante tiempo, el modelamiento geometalúrgico es relativamente reciente. Antiguamente, el desempeño del procesamiento era descrito empíricamente en base a mediciones realizadas en la planta, en función del tamaño de conminución, por ejemplo. Los avances en técnicas de caracterización de las muestras de sondajes permitieron relacionar características mineralógicas con parámetros de procesamiento, y el impacto que éstas poseen en el beneficio final percibido en la operación. Una breve historia del estudio de esta disciplina puede encontrarse en Lotter et al. (2011).

En la actualidad, la investigación en geometalurgia está centrada en el desarrollo de técnicas y protocolos de muestreo que permitan capturar de buena forma las características relevantes del yacimiento, técnicas de laboratorio que entreguen resultados de proceso representativos de la operación, técnicas de estimación para obtener modelos de bloques con variables ligadas al procesamiento (dureza, recuperación, etc.) y finalmente las formas de

integrar estas variables en el proceso de planificación.

Una clasificación útil para dividir las variables relevantes para la geometalurgia fue propuesta por Coward et al. (2009), los cuales definen que existen variables primarias y de respuesta (secundarias) (Fig. 2.7). Las variables primarias corresponden a las que son intrínsecas al yacimiento, y pueden ser medidas directamente de muestras de sondajes, como por ejemplo las leyes de metal, mineralogía, alteración, etc. Existen metodologías conocidas para lidiar con el muestreo y estimación de este tipo de variables (kriging, por ejemplo), las cuales son típicamente aditivas. Por otro lado, existen variables secundarias o de respuesta, las cuales describen el desempeño del mineral en los distintos procesos, tal como recuperación, energía consumida en chancado o molienda, distribución de tamaño, resistencia a la compresión, etc. Dada la naturaleza compleja de estas variables, generalmente no aditivas, no es posible combinarlas para estimar comportamientos promedios, por lo cual las técnicas tradicionales de estimación no son directamente aplicables (Dunham y Vann, 2007; Emery y Séguret, 2020).

Las características medidas para una variable secundaria son fuertemente sensibles al procedimiento de testeo en laboratorio, lo que introduce dificultades adicionales en la correcta determinación de sus valores, por lo cual es recomendable que la estimación sea realizada en variables aditivas -conocidas como variables *proxy*- que luego puedan ser relacionadas con las variables secundarias. Carrasco et al. (2008) proponen una aplicación de este cambio de variables al estimar la recuperación metalúrgica, y muestran que es posible que el efecto de asumir aditividad puede generar un impacto considerable en la estimación global de la recuperación. Una discusión acerca de la elección de características geometalúrgicas que deben ser incorporadas al modelo de recursos puede encontrarse en Dunham y Vann (2007).

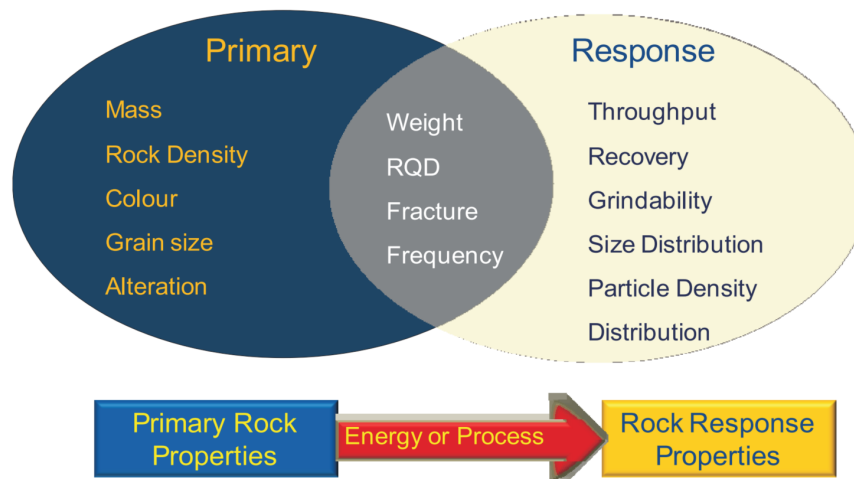


Figura 2.7: Esquema que ejemplifica distintas variables primarias y de respuesta. De Coward et al. (2009)

Al igual que con la evaluación tradicional de recursos y los horizontes de planificación, los programas geometalúrgicos pueden ser divididos en estratégicos y tácticos. De acuerdo a la definición propuesta en McKay et al. (2016), la geometalurgia a nivel estratégico se enfoca en el largo plazo, donde se predice el desempeño de los distintos procesos basados en pruebas metalúrgicas, mineralógicas, geoquímicas, etc. El fin es determinar el modelo de recursos con

variables geometalúrgicas, que puedan asistir al plan de producción de largo plazo y mejorar el diseño de los procesos para capturar el real valor del depósito.

Por otro lado, la geometalurgia a nivel táctico se enfoca en horizontes de planificación de mediano y corto plazo, donde la secuencia de extracción ya está definida y la decisión principal radica en el destino de procesamiento de las unidades mineras. El nivel de información producto del muestreo de pozos de tronadura y reconciliación del material ya extraído es mayor que en el nivel estratégico. Una diferencia con el control de ley clásico, es que la geometalurgia de nivel táctico basa sus decisiones de destino en el valor del bloque -el cual depende de múltiples factores metalúrgicos- y no solo en la ley, el cual se declara como un *proxy* típicamente sesgado del valor real de cada agrupación de bloques, lo que lleva a que una denominación más apropiada de esta elección de destino de corto plazo sea control de mineral (*ore control*).

La siguiente sección se centrará en las aplicaciones de geometalurgia en el agendamiento de la producción -nivel estratégico- y en el control de mineral -nivel táctico- encontradas en la literatura. Las temáticas de muestreo y modelamiento geometalúrgico no serán abordadas en el presente trabajo. Para más información sobre muestreo, consultar el trabajo de Dominy et al. (2018a) y Dominy et al. (2018b, Sec. 4.2). Para más información sobre distintos enfoques del modelamiento geometalúrgico en evaluación de yacimientos, consultar Boisvert et al. (2013), Coward y Dowd (2015), Deutsch et al. (2016), Dunham y Vann (2007), Emery y Séguret (2020) y Sepúlveda et al. (2017) junto con Dominy et al. (2018b, Sec. 4.3).

2.5.1. Geometalurgia en planificación minera

Los esfuerzos para considerar variables geometalúrgicas en los planes de producción son relativamente recientes, dado que la complejidad y no linealidad de las distintas variables involucradas hace complejo integrarlas en el proceso de planificación.

Van Den Boogaart et al. (2011) presentan un trabajo donde se cuantifican los beneficios de adaptar el procesamiento del mineral basado en sus características geometalúrgicas (mineralogía y microestructuras). Los autores comentan sobre el efecto que tiene la organización de los minerales en su grado de liberación luego de la molienda y finalmente en su recuperación, lo que conlleva a que minerales con la misma ley puedan tener recuperaciones distintas. De aquí nace la necesidad de adaptar los procesos para maximizar la recuperación según el tipo de mineral -una idea similar a los modos operacionales presentados posteriormente por Navarra et al. (2017a)-. Para evaluar la factibilidad económica de esta adaptabilidad, se plantea un caso de estudio donde se estudia el consumo de energía en el procesamiento basado en las distintas características del mineral que definan el tamaño de liberación de la especie de interés, donde el beneficio generado es proporcional al porcentaje de partículas que alcanzan dicho tamaño de liberación. Los autores declaran que el poder adaptar el proceso de molienda basado en la información limitada de este caso de estudio genera un aumento de valor de 3.9%, comparado al caso base de tratar todo de la misma forma. Este aumento menor es producto de las dificultades de predecir de forma correcta las características geometalúrgicas a partir de las muestras limitadas. Los autores comentan que poseer mejores muestras, en una malla de menor tamaño, permitirían obtener mayores beneficios de adaptabilidad en los procesos. Los autores no tratan con la optimización de las decisiones de secuencia y cómo

éstas pueden impactar en la adaptabilidad del procesamiento.

Un enfoque de evaluación de proyectos basada en escenarios (SBPE) es presentado en Coward et al. (2013). En este tipo de evaluación, se generan distintos escenarios geológicos que incluyen diversas características primarias del yacimiento, las cuales se traducen en indicadores de desempeño secundarios, según el esquema de variables primarias y de respuesta presentado en Coward et al. (2009). Estos escenarios son luego alimentados a un plan de producción ya definido para la resolución relevante del estudio (anual, mensual, etc.). Dado que este plan ya está definido, es posible incorporar todas las funciones de respuesta geometalúrgicas para evaluar el desempeño en las distintas rutas de procesamiento. Finalmente, estos escenarios de procesamiento son evaluados en diferentes condiciones de mercado, para obtener posibles respuestas en el VAN del proyecto.

Este mismo enfoque es presentado en Coward y Dowd (2015) para un caso de estudio en un pórfido polimetálico, con recuperación variable según la ley de alimentación al proceso, la cual es descrita a través de una serie de curvas de recuperación, que representan distintos escenarios posibles dada la incertidumbre en el desempeño real de recuperación en la operación. Con estas consideraciones, y escenarios de mercado adicionales, fue posible construir una distribución de curvas de valor. La dispersión de esta curva entre los percentiles 10 y 90 muestra una variación de hasta un 70 % en el valor del VAN con respecto estimado en el caso base. A pesar de que este enfoque permite la evaluación de variables geometalúrgicas, no permite incorporarlas dentro del proceso de optimización para obtener un plan de producción óptimo para las consideraciones geometalúrgicas involucradas.

Un acercamiento al agendamiento con consideraciones geometalúrgicas puede ser encontrado en Montiel y Dimitrakopoulos (2015), donde los autores presentan la optimización del agendamiento en un complejo minero, bajo incertidumbre geológica. Este trabajo menciona la importancia de considerar distintos modos de operación en las rutas de procesamiento: producto fino o grueso en la etapa de molienda, por ejemplo, el cual presenta distintos tiempos de residencia y consumo de energía, y genera diferente recuperación metalúrgica aguas abajo. El modelo de optimización incluye una variable de decisión para cada modo operacional. Los modos operacionales considerados presentan distintos costos, recuperaciones, productividades, y el modelo impone que sólo se pueda escoger un modo operacional por destino en cada periodo. Además, se describe que existen distintas propiedades metalúrgicas que deben ser cumplidas en cada modo operacional. Sin embargo, no se hace referencia al tipo de propiedades consideradas y las restricciones consideran que estas variables son aditivas, lo cual es abordado con restricciones de mezcla convencionales. El modelo es no lineal por la consideración de stocks homogéneos, y es resuelto mediante una heurística de *simulated annealing*. El caso de estudio tampoco hace referencia a las variables metalúrgicas consideradas y sólo impone límites máximos y mínimos que deben ser cumplidos. Se obtienen agendamientos que respetan de mejor forma los límites máximos y mínimos para los distintos objetivos productivos, con un aumento en el VAN del 5 % con respecto al caso base sin incertidumbre.

Garrido et al. (2017) presentan un agendamiento considerando homogeneidad en el tipo de arcillas en cada periodo. Los autores mencionan la importancia que tienen las arcillas en los procesos de recuperación metalúrgica, por lo cual el control en la cantidad y tipo de estos elementos es vital para el buen funcionamiento de la planta. Se menciona que distintos tipos

de arcillas generan diferentes problemas operacionales, por lo cual mantener un tipo similar de arcilla en la alimentación es necesario para hacer frente a las particularidades de cada una de ellas. Por este motivo, los autores plantean el concepto de *dilución geometalúrgica*, donde se representa el porcentaje de tipo de arcilla minoritaria con respecto al tipo de arcilla mayoritaria en cada periodo. El problema de agendamiento es multi-objetivo, y busca maximizar el VAN del agendamiento y minimizar esta medida de dilución, lo que favorece la extracción de un solo tipo de arcillas en cada periodo del agendamiento. Este modelo no-lineal es resuelto usando una heurística de *Tabu Search*, y los resultados muestran que la inclusión de esta medida de dilución genera planes con menor variabilidad de arcillas en cada periodo comparados con el caso base, aunque también se obtiene un menor VAN. No se hace referencia a las ganancias económicas que tendría el mantener un mismo tipo de arcilla por periodo, y cómo impactaría a la recuperación.

Navarra et al. (2018a) presentan un trabajo con distintas consideraciones para incorporar variables geometalúrgicas en el proceso de planificación de largo plazo. Destaca los avances en modelamiento geometalúrgico en la estimación de recursos y en las pruebas de propiedades mineralógicas, junto con su nexo en el desempeño de los procesos, lo cual permite optimizar los parámetros operacionales de las plantas de procesamiento. También destaca el uso de modos operacionales distintos según los requerimientos del mineral, con el fin de maximizar la recuperación o los ingresos. Estas opciones de distintos modos operacionales son ligadas a la valorización de los bloques, donde dependiendo del nivel de detalle buscado, el valor de un bloque depende de diversas variables: los costos de procesamiento dependen tanto del destino como de su modo operacional, mientras los ingresos dependen del contenido mineral de cada especie de interés (el cual puede ser considerado como una variable aleatoria), junto con la recuperación (la cual depende del destino y su modo operacional) y de su precio de venta, que también puede depender del modo operacional, pues distintos procesos generan productos de distinta calidad y valor comercial.

La capacidad de procesamiento de cada destino también está ligada a su modo operacional y además a las características del mineral de alimentación. En modelos simples este factor puede ser fijo para toda la alimentación, y variar sólo en función del modo operacional empleado. Típicamente, regresiones lineales son utilizadas para elaborar curvas empíricas que muestren los cambios en los costos, recuperaciones y capacidades de cada modo operacional frente a las distintas características geológicas de cada unidad geometalúrgica. Una suposición relevante para algunos trabajos que se enfocan en los modos operacionales, es considerar que cada bloque será procesado (dependiendo de su escenario geometalúrgico) en el modo operacional que maximice su valor. Esto asume que cada bloque se procesa de forma independiente y que existe suficiente flexibilidad en el corto plazo para cambiar de modo operacional de forma frecuente. Esta suposición se realiza con el fin de simplificar los problemas de agendamiento, evitando que el agendador decida el modo operacional en el que será procesado cada bloque.

Con estas consideraciones, los autores declaran que el uso de programación estocástica en dos etapas es una forma razonable de abordar el agendamiento con variables geometalúrgicas, donde la decisión de primera etapa radica en la secuencia de extracción, mientras la segunda etapa es la elección de la fracción de bloque procesada según el escenario considerado. A pesar de no presentar un modelo completo de agendamiento, el autor centra la discusión en

los algoritmos y heurísticas de resolución para este tipo de problemas.

Se presenta un caso de estudio simple, con un solo elemento de interés, con 9953 bloques, resuelto usando el algoritmo de Variable Neighborhood Descent (Lamghari et al., 2014). Por simplicidad, las variables geometalúrgicas fueron agrupadas en un solo factor, el cual es normalizado y va desde 0 hasta 1, donde el 0 corresponde a los bloques que están en superficie y 1 a los bloques más profundos del yacimiento. Este factor geometalúrgico entrega, para cada modo operacional y para cada ley de bloque, distintas variables del proceso como: costo de procesamiento, beneficio del procesamiento, recuperación y valor total del procesamiento. De esta forma se obtiene para cada ley, un valor de corte del factor geometalúrgico para el cual cambia el modo operacional en el que debe ser procesado. Este factor geometalúrgico también está sujeto a incertidumbre, aplicado como un ruido Gaussiano.

El algoritmo de resolución fue utilizado para resolver el problema considerando uno y dos modos operacionales, con distintos costos de capital y distintas capacidades de procesamiento. Los resultados muestran que el considerar un solo modo operacional genera un pit más pequeño, pues el modo operacional II es favorable para los factores geometalúrgicos mayores, los cuales se encuentran en el fondo del pit. En términos de VAN, el uso de un solo modo genera flujos de caja mayores en los primeros años, superando a la utilización de los dos modos, pero a medida que avanza el agendamiento, el modo II entrega mayores beneficios, obteniendo que al final de la vida de la mina la operación con dos modos entrega un VAN mayor que el caso mono-modo. Un análisis detallado de cómo determinar los mejores modos operacionales para distintas configuraciones de mineral y funciones de costo puede ser encontrado en Navarra et al. (2017b).

La actualización de los bloques que deben ser procesados en cada iteración, base del algoritmo de resolución de Navarra et al. (2018a), es explicada en detalle en Navarra et al. (2018b). En este trabajo, los autores declaran que en el esquema tradicional de planificación bajo incertidumbre con minimización de desviaciones se obtiene un plan de producción que en diversos casos excederá las capacidades de procesamiento de la planta, y que típicamente esto se penaliza de forma artificial considerando un costo por tonelada en la función objetivo para castigar este exceso. Sin embargo, dado que este costo no está asociado necesariamente a características del proceso, se hace difícil de estimar de buena forma.

Para subsanar esta deficiencia, se presenta una alternativa a la decisión de segunda etapa tradicional de penalizar las desviaciones, donde se define la flexibilidad de cambiar la ley de corte y escoger qué bloques procesar. A pesar de que esta flexibilidad no es nueva (pues es considerada en diversos modelos de dos etapas, como en Moreno et al. (2017)), el autor presenta un ordenamiento de las leyes de cada bloque en los distintos escenarios que hace que, para cambios en la secuencia, las decisiones de procesamiento sean fáciles de implementar, utilizando árboles de búsqueda binarios balanceados para actualizar la ley de corte y encontrar el último bloque en ser procesado bajo el nuevo secuenciamiento.

Un trabajo similar es presentado en Navarra et al. (2017a), donde también se utiliza esta metodología de ley de corte variable por ordenamiento de bloques, pero se hace referencia que, al considerar más de un modo operacional distinto, la ley no es un buen indicador del valor del proceso. Por este motivo, se reemplaza el concepto de capacidad de procesamiento por el de tiempo total disponible de proceso, y el ordenamiento de la ley por un ordenamiento

basado en el valor final obtenido luego del proceso, denominado *yield*. La misma metodología de implementar un árbol de búsqueda binario balanceado es aplicada en este trabajo para mantener el ordenamiento del valor al agregar o quitar bloques en cada periodo en el algoritmo de resolución. El caso de estudio presentado es el mismo de Navarra et al. (2018a), pero no se hace referencia al factor geometalúrgico, sino que se consideran dos tipos distintos de mineral asignados de forma arbitraria según una línea diagonal que corta el yacimiento en dos porciones. Estos tipos de mineral representan distintas características mineralógicas y por ende, responden de distinta forma a los tipos operacionales. Nuevamente se compara la configuración mono-modo y multi-modo de la planta de procesamiento, donde la configuración multi-modo permite aprovechar de mejor manera los recursos de tipo II y logra un mayor VAN y utilización en la planta.

Zhang y Dimitrakopoulos (2018) estudian la optimización de flujo de material en una cadena de valor de minerales considerando recuperación variable. A pesar de no incorporar directamente ninguna variable geometalúrgica en los recursos de entrada, la no-linealidad de la función de recuperación es un ámbito fundamental en el agendamiento geometalúrgico, donde el valor asignado a la recuperación depende tanto de la ley de material enviado como del tonelaje procesado en cada destino, según distintas curvas de recuperación de proceso, como la mostrada en la Fig. 2.8. El trabajo se centra en optimizar las rutas de procesamiento y stock para cumplir una serie de contratos pactados por distintos compradores y además decidir la cantidad comercializada a precio stock. Se considera una optimización de flujo de material pues las decisiones de secuencia de extracción desde el complejo minero son fijas. Luego, en base a los tipos de material, sus tonelajes y su incertidumbre geológica asociada, se deciden las mejores rutas de procesamiento para maximizar el VAN, sujeto a restricciones de capacidad, leyes de alimentación, rutas de transporte, stocks y cumplimiento de contratos (con penalizaciones en caso de no cumplirlos).

La no-linealidad está dada en las restricciones para el cálculo de salida de material en las plantas de procesamiento, donde el metal de salida es producto entre el mineral de entrada y su recuperación, que es una función no lineal de la ley de este material y el tonelaje procesado. Para resolver esta no-linealidad, se plantea una heurística iterativa de resolución, donde se linealiza el problema al considerar como la ley de alimentación al proceso un promedio simple entre dos límites (los cuales se inicializan como la ley máxima y la ley mínima admisible en el proceso) y se imponen límites para el material procesado que se inicializan en 0 y el máximo tonelaje admisible del proceso. Al fijar dichas variables, el problema se vuelve lineal y se puede resolver, obteniendo las decisiones de cuanto tonelaje enviar a cada destino. Con este resultado, es posible calcular la ley real de alimentación al proceso, y luego actualizar los valores de la ley y los límites de procesamiento utilizados anteriormente, y resolver nuevamente, hasta alcanzar la convergencia deseada. En los resultados se aprecia que asumir una ley de alimentación constante para todo el proceso sobrestima el VAN del agendamiento en un 60 % para este caso de estudio.

Una investigación relevante a considerar a partir del trabajo de Zhang y Dimitrakopoulos (2018), es presentada en Zhang y Dimitrakopoulos (2017). En el trabajo de Zhang y Dimitrakopoulos (2018) se optimiza sólo los flujos de material a cada destino, considerando que las decisiones de secuencia de extracción son fijas. Sin embargo, sería deseable tener la flexibilidad de decidir la secuencia de extracción de la mina para optimizar de mejor forma la cadena de

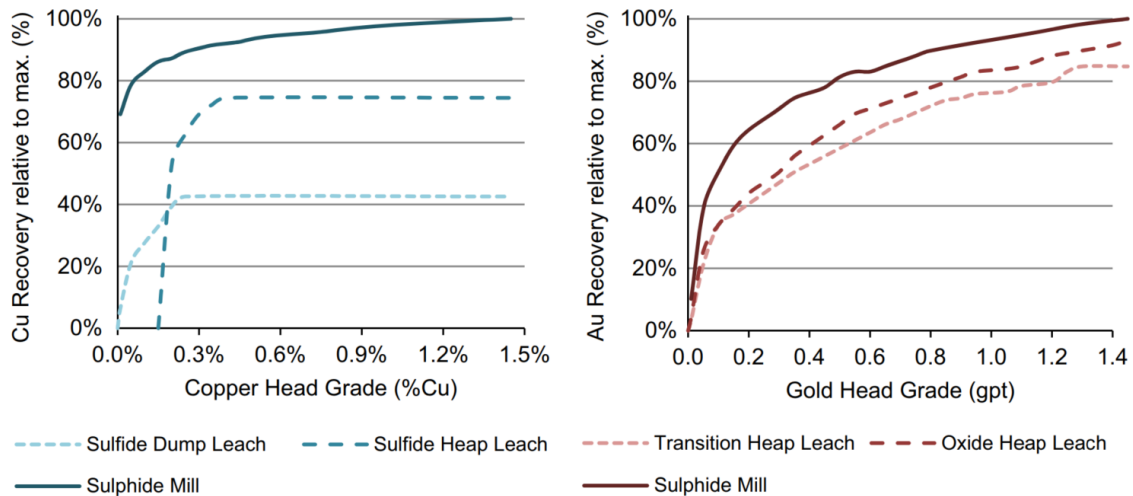


Figura 2.8: Ejemplo de curvas de recuperación no lineales según la ley de alimentación y el proceso escogido. De Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016)

valor completa, desde la mina hasta la venta del producto final. Esto es abordado por Zhang y Dimitrakopoulos (2017), en donde declaran que la cadena de valor mineral completa está compuesta por dos partes ínter-relacionadas: el agendamiento de la producción mina (MPS, por sus siglas en inglés) y la planificación de flujo de material (MFP). La primera parte se encarga de generar el agendamiento desde la mina, mientras que la segunda encuentra el mejor flujo de este material para maximizar el valor, sujeto a restricciones de producción de cada destino.

Dada la no-linealidad presente en algunas rutas de procesamiento, y el tamaño de los problemas de MPS, la integración de ambas partes para obtener un resultado óptimo a nivel de toda la cadena de valor mineral ha sido compleja, y los autores declaran que soluciones completas a la cadena de valor se han enfocado en casos particulares. Para subsanar esta deficiencia, los autores proponen una metodología llamada *Dynamic-material-value-based decomposition method*, la cual funciona como una capa de integración iterativa entre los resultados del MPS y FMP. El algoritmo funciona considerando que el precio de cada tipo de material agendado en el módulo de MPS funciona como incentivo: a mayor precio, mayor incentivo para minar ese tipo de material, el cual luego es usado como insumo en el MFP. El precio es usado como nexo entre ambos modelos: en cada iteración, se resuelve un MFP modificado, el cual incorpora un término auxiliar en la función objetivo, que describe una compra o venta ficticia de cada tipo de material para el precio dado. Si el modelo MFP decide que requiere comprar más material de cierto tipo para maximizar el valor, significa que sería más beneficioso tener un mayor tonelaje de ese material como dato de entrada. En caso contrario, si el modelo MFP decide que le es beneficioso vender ese tipo de material y así procesar menos, entonces el precio utilizado es mayor al óptimo y habría que disminuirlo. De esta forma, la salida del MFP entrega un indicio de cómo modificar el precio utilizado en el MPS.

Dado que esta metodología puede ser implementada con modelos diversos de MPS y MFP, el modelo con recuperación no-lineal presentado en Zhang y Dimitrakopoulos (2018) puede ser utilizado para encontrar un agendamiento de la producción que considere este

comportamiento geometalúrgico. Otro método de resolución para este tipo de problemas es propuesto en Zhang et al. (2019), donde se utiliza la misma división entre el problema de MPS y MFP, pero se usa una descomposición de Bender como método de resolución, donde el MPS es el problema maestro y el MFP es el problema secundario.

Sepúlveda et al. (2018b) presentan un modelo multi-objetivo de agendamiento de la producción de block caving con incertidumbre y variables geometalúrgicas. El modelo utilizado tiene como variable de decisión el número de bloques extraídos desde cada punto de extracción disponible en cierto periodo, sujeto a restricciones de capacidad de extracción total por periodo y al número máximo de bloques que puede ser extraído desde un punto de extracción. La incorporación de variables geometalúrgicas está dada en la función objetivo, donde se deja de lado el cálculo del VAN y se introduce el *Net Smelter Return* (NSR) como medida de valor, el cual se define como el beneficio percibido por el procesamiento del mineral luego de deducir todos los costos de procesamiento y refinación. Su cálculo involucra no sólo la ley, sino también las recuperaciones, ley de concentrado, tratamientos de refinación, marketing, transporte, penalizaciones por elementos contaminantes, etc. Este cálculo incluye tanto variables geometalúrgicas primarias como las de respuesta, según el esquema de Coward et al. (2009).

En este caso, la no-linealidad introducida por las respuestas geometalúrgicas está considerada sólo en el cálculo de este valor, y no en las posibles interacciones derivadas de los bloques agendados en el mismo periodo. El enfoque multi-objetivo propuesto en este trabajo se enfoca en maximizar el NSR y la inclusión de alguna otra medida como la minimización de la varianza, la maximización del CVaR, la minimización de las desviaciones de producción, etc. Estos modelos son resueltos utilizando Algoritmos Genéticos, dado que la mayoría de las medidas introducidas no son lineales.

Morales et al. (2019) presentan una metodología de agendamiento de largo plazo, que incorpora incertidumbre geológica y variables geometalúrgicas en su formulación. La metodología incorpora dos etapas: el cálculo de pit final en base a una medida de confiabilidad de los pits basada en los distintos escenarios geológicos y una segunda etapa donde el agendamiento de la producción dentro de dicho pit final se genera en base a la metodología de minimización de desviaciones. Las variables geometalúrgicas consideradas corresponden a la recuperación y a las toneladas de cada bloque que pueden ser procesadas por hora, como medida de la dureza del material. A su vez, estas variables se incorporan en dos etapas: la valorización, donde se comparan distintas metodologías que parten desde mantener todos los valores relevantes como promedios, hasta considerar todas las variables geometalúrgicas y de ley en los distintos escenarios geometalúrgicos; y por otro lado, se incorpora la capacidad máxima de producción en horas de funcionamiento de la planta de procesamiento como restricción en unos de los modelos de agendamiento considerados.

La metodología fue probada en un caso de estudio real de gran escala, donde se obtuvo que la incorporación de variables geometalúrgicas aumenta el valor del pit final hasta en un 12.3% con respecto al caso base con parámetros promedio. Con respecto al agendamiento, la incorporación de la incertidumbre genera un VAN ligeramente superior al caso sin incertidumbre (2.5% mayor), pero reduce la variabilidad encontrada en el agendamiento al contrastarlo con cada escenario individual, en comparación al caso base que presenta alta

variabilidad. La incorporación de variables geometalúrgicas mejora aún más el valor, donde el modelo completo, con recuperación y toneladas por hora, provee un aumento del 9.4 % con respecto al caso base, y tiende a reducir la incertidumbre al considerar diversos escenarios.

Kumar y Dimitrakopoulos (2019) presentan un caso de estudio donde se determina de forma simultánea el agendamiento de bloques, junto con una política de leyes de corte que incluye variables geometalúrgicas relacionadas con la dureza de la roca: el índice de potencia para molino semi-autógeno (SPI) y el índice de Bond (BWI) para el molino de bolas. Estos dos índices determinan la potencia requerida para la molienda de cada bloque, y determinan la productividad de la planta de procesamiento en cada periodo: material con valores altos de estos índices requieren mayores tiempos de residencia para alcanzar el tamaño requerido, lo que impacta la capacidad de producción de la etapa de molienda. Por su naturaleza, éstas no son variables aditivas con las cuales se puedan imponer restricciones tradicionales de mezcla para conseguir un índice aceptable para asegurar el correcto funcionamiento de la planta.

Para este trabajo, se utiliza como base la metodología presentada en Goodfellow y Dimitrakopoulos (2017). La extensión presentada en este trabajo para incorporar estas variables de dureza se realiza considerando que los molinos tendrán un modo de operación fijo, el cual requiere de una mezcla específica de materiales duros y blandos que está predefinida, con el fin de maximizar su producción y minimizar sus costos. Para cumplir esta mezcla, los distintos bloques del modelo se caracterizan como duros o blandos dependiendo si sus índices sobrepasan cierto valor umbral, para luego imponer una restricción de mezcla con desviaciones. Esta metodología fue aplicada a un complejo minero de cobre y oro de dos minas (120,000 y 78,000 bloques respectivamente), con 12 tipos de materiales entre ambas, que pueden ser enviados a nueve destinos primarios y seis secundarios, con diversas restricciones de calidad, capacidad y dureza en cada uno de ellos. Sus resultados indican que existe un aumento del 19.3 % en el VAN del proyecto comparado con el agendamiento convencional.

Maleki et al. (2020) presenta la aplicación de un modelo de planificación a largo plazo con incertidumbre geológica a un depósito de hierro. Dado el fuerte control que presenta el tipo de roca con los atributos de interés, se decide incluir la simulación de esta variable categórica en el proceso. La geometalurgia está incluida en la variable de coeficiente magnético (*magnetic ratio*), una medida de recuperación metalúrgica en el procesamiento de mineral de hierro, la cual es co-simulada con el resto de las variables (Fe, SiO₂, S, P, K) para cada tipo de roca. La metodología incluye un cálculo de pit final para cada escenario simulado para obtener una medida de confiabilidad para cada bloque. El pit final escogido para este caso de estudio representaba una confiabilidad del 95 % considerando todos los escenarios. Luego, un modelo de optimización estocástico que minimiza desviaciones fue aplicado, utilizando el coeficiente magnético en el cálculo del valor y como un atributo en el cálculo de las desviaciones. Para lidiar con esta variable no aditiva, se calculó un *proxy* aditivo (metal recuperado) asumiendo independencia en la recuperación de bloques adyacentes. Se obtuvo un plan de producción que lograba capturar de mejor forma la incertidumbre (comparado a un agendamiento determinístico), con un 6 % más de valor y un 16 % más de producción. No se hace referencia al impacto de la incorporación de la variable geometalúrgica en el agendamiento.

2.5.2. Análisis de geometalurgia en planificación minera

En esta sección se realiza un análisis de las metodologías utilizadas para incorporar geometalurgia a la planificación minera, y cómo se relacionan con los objetivos de la tesis.

La incorporación de las interacciones geometalúrgicas en planificación están limitados por las condiciones de linealidad que requieren los modelos de optimización. Por este motivo, se realizan simplificaciones para poder incluir variables geometalúrgicas como dureza, recuperación o tasa de procesamiento (*throughput*). Dentro de estas simplificaciones se encuentran la independencia en el procesamiento a nivel de bloques y la aditividad de la respuesta de bloques que se procesan juntos. Algunos modelos han intentado incorporar interacciones mas complejas, pero están enfocados en horizontes de planificación de largo plazo asumiendo que existe interacciones en horizontes temporales anuales.

Las interacciones de corto plazo, a nivel de cortes o polígonos de producción, no han sido estudiadas. Esto se vuelve relevante al generar modelos que decidan la mejor configuración de cortes de producción pues el valor de cada uno de ellos depende de las interacciones geometalúrgicas. Más aún, el cumplimiento de restricciones de capacidad y mezcla también depende de la complejidad de estas relaciones en tanto afectan la tasa de procesamiento y las condiciones geoquímicas de los procesos de recuperación. En base a esto, se detecta una brecha adicional pues no existe investigación en el área de generación de planes con formas operativas considerando geometalurgia en corto plazo. Los avances definidos en este trabajo incorporan este tipo de interacciones para definir la mejor configuración de cortes de producción.

2.6. Discusión

El análisis del estado del arte muestra que, en la actualidad, existen numerosas soluciones para la planificación minera a cielo abierto, tanto para la definición del pit final como el secuenciamiento de la extracción y agendamiento de la producción en el corto plazo, basadas en técnicas de optimización, programación matemática, heurísticas, aprendizaje automático, modelamiento dinámico de sistemas, geoestadística, investigación de operaciones, entre otras. Para efectos de esta revisión, y considerando los objetivos de esta tesis, la Tabla 2.1 presenta un resumen con los trabajos más relevantes y sus aportes al estado del arte.

Tabla 2.1: Resumen de aportes principales

Trabajo	Formas Operativas	Accesibilidad	Agendamiento	Multidestino	Geometalurgia	Interacciones No-lineales No-aditivas	Óptimo
Gholamnejad (2008)		✓	✓				
Rehman et al. (2010)		✓	✓				✓
Morales (2009)		✓	✓		✓		
Vargas (2011)	Pre-proceso	✓	✓		✓		
Madariaga (2013)		✓	✓	✓	✓		
Eivazy et al. (2012)		✓	✓	✓			✓
Yavarzadeh et al. (2014)		✓	✓				✓
Mousavi et al. (2014, 2016a,b)		✓	✓	✓			
Villalba et al. (2016)		✓	✓				✓
Jamshidi et al. (2018)			✓	✓			✓
Souza et al. (2010)		✓	✓	✓			
Kozan et al. (2013)	Pre-proceso	✓	✓				
Kozan et al. (2016, 2018)	Pre-proceso	✓	✓				✓
L'Heureux et al. (2013)	Pre-proceso	✓	✓				✓
Stone et al. (2004)	Pre-proceso		✓				
Huang et al. (2009)	Pre-proceso	✓	✓	✓			
Tabesh et al. (2011, 2013, 2019)	✓	✓		✓			
Tabesh et al. (2014)	Pre-proceso	✓	✓	✓			
Sepúlveda et al. (2018a)	✓				✓		
Norrena et al. (2002), Neufeld et al. (2003), Richmond et al. (2004)	✓						
Wilde et al. (2007b)	✓			✓			
Isaaks et al. (2014)	✓			✓			
Ruiseco et al. (2016)	✓			✓			
Sari et al. (2017)	✓						✓

Trabajo	Formas Operativas	Accesibilidad	Agendamiento	Multidestino	Geometalurgia	Interacciones No-lineales No-aditivas	Óptimo
Deutsch (2017)	✓				✓		
Vasylichuk et al. (2019)	✓				✓		
Kumral (2015)		✓	✓		✓		
Goodfellow et al. (2017)			✓		✓	✓	
Del Castillo et al. (2016)					✓	✓	
Van Den Boogaart et al. (2011)			✓		✓		
Coward et al. (2015)					✓	✓	
Montiel et al. (2015)			✓		✓		
Garrido et al. (2017)			✓		✓	✓	
Navarra et al. (2017a,b)			✓		✓		
Navarra et al. (2018a,b)			✓		✓		
Zhang et al. (2017, 2018)			✓		✓	✓	
Sepúlveda et al. (2018b)			✓		✓	✓	
Morales et al. (2019)			✓		✓	✓	
Kumar et al. (2019)			✓		✓	✓	
Maleki et al. (2020)			✓		✓	✓	

Tabla 2.2: Aportes de el trabajo de investigación

Trabajo	Formas Operativas	Accesibilidad	Agendamiento	Multidestino	Geometalurgia	Interacciones No-lineales No-aditivas	Óptimo
Capítulo 3	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Capítulo 4	✓		✓	✓	✓	✓	✓

En base a esta revisión, es posible identificar problemas no abordados en la literatura y que serán desarrollados en este trabajo:

1. **Espacio operacional y plan de producción:** Los modelos de agendamiento de la producción de corto plazo incorporan restricciones de avance horizontal para asegurar una dirección de minado factible. Sin embargo, no se impone ninguna restricción de destino de procesamiento que tome en cuenta la selectividad de los equipos de carguío. Esto puede generar planes de producción que cumplan con la dirección de avance, pero sobrestimen el grado de selectividad real de los equipos, lo cual puede conllevar problemas de optimalidad y factibilidad del plan en la operación.

Por otro lado, todos los trabajos que incorporan definición de espacios operacionales en el corto plazo ignoran las restricciones del plan de producción (capacidades, mezcla, avance, etc.). En ese sentido, la generación de formas operacionalmente factibles es un proceso previo a la generación del plan, por lo que no se asegura que la definición de estas formas operativas pueda cumplir las restricciones de la plantas de procesamiento, con el potencial de generar planes infactibles. De forma similar a lo anterior, es posible que una configuración de polígonos o cortes de producción simultáneas al plan de producción presente un beneficio mayor que su consideración secuencial. Este problema es abordado en el Capítulo 3.

2. **Geometalurgia en planificación de corto plazo:** Los trabajos que abordan geometalurgia dentro de modelos de planificación minera son limitados. La mayoría de ellos simplifican las interacciones geometalúrgicas asumiendo que cada bloque se procesa de forma individual e ignorando el efecto de la mezcla en el desempeño de las plantas de procesamiento. Los que integran relaciones no lineales utilizan heurísticas de resolución para encontrar solución al modelo de optimización. Más aún, no se encontraron trabajos que aborden esta problemática en el corto plazo, incorporando la definición de polígonos o cortes de producción operacionales los cuales definen la mezcla de atributos y el resultado en el procesamiento. Tal como se menciona en Del Castillo y Dimitrakopoulos (2016), un modelo de agendamiento de corto plazo que considere las interacciones geometalúrgicas entre bloques cercanos podría generar un plan de producción más realista en la operación. Este problema es abordado en el Capítulo 4.

En base a las categorías de la Tabla 2.1, los aportes de esta tesis están descritos en la Tabla 2.2.

Capítulo 3

A mathematical model for the scheduling and definition of mining cuts in short-term mine planning

Este capítulo aborda el problema de definición de cortes de producción y generación de plan de producción de corto plazo de forma simultánea. Para esto se utilizan una serie de bloques representantes que permiten definir precedencias basadas en destinos de procesamiento. Esto genera espacios operacionales factibles en la operación y pueden ser integradas como restricciones en un modelo de optimización. Este trabajo fue publicado en *Optimization and Engineering*:

Nelis, G. y N. Morales (2021). «A mathematical model for the scheduling and definition of mining cuts in short-term mine planning». En: *Optimization and Engineering*. DOI: [10.1007/s11081-020-09580-1](https://doi.org/10.1007/s11081-020-09580-1).

Abstract

Short-term open pit planners have to deal with the task of designing a feasible production schedule. This schedule must fulfill processing, mining and operational constraints and, at the same time, maximize the profit or total metal produced. It also must comply with the long-term production schedule and must incorporate new blasthole sampling data. This task is performed with little support of optimization tools, and therefore, there is a risk of generating suboptimal results.

Several approaches have been proposed in the literature to deal with these issues, either generating operational mining cuts or obtaining a mining schedule to fulfill the short-term constraints. However, an integrated approach has remained an open challenge. In this paper, we propose an optimization model to tackle the operational and scheduling issues simultaneously. The model defines the mining cut configuration and the production schedule in the short-term. It is based on representative Selective Mining Units (SMUs) as the potential locations of the mining cuts and then each SMU is assigned to one of these locations.

We tested the model with a real case study, and it was able to generate mining cuts and an extraction sequence fulfilling mining, processing and operational constraints, as well as access restrictions given by the ramp location in each bench. The mining cut design captured most of the profit, and thus it can be used as a guide for the short-term mine planner. The location of the representative SMUs and the precedence definition both impact the mining cut configuration, and future research could address how to incorporate different operational considerations and strategies on the location of these representatives.

3.1. Introduction

Short-term mine planning in open pit mining still faces several challenges to materialize the long-term plan in the mining operation. One of these challenges is the sequencing and scheduling of the mining units in the short-term, in such a way that they meet the production targets and estimated profit inherited from long-term plans, but also attend to additional constraints given by the operation of loading and hauling equipment.

During the short-term scheduling process, new information from blasthole sampling becomes available, which provides a better estimate of the deposit's true grade. Because the blasthole spacing is usually smaller than the block size used in the long-term planning, each block is divided into Selective Mining Units (SMUs) attached with the grade of their nearest blasthole sample. Therefore, there is a better granularity on the grade distribution that can be used by the short-term planner to define the best processing route for each unit, to maximize the metal produced or the economic profit.

However, the loading equipment imposes a new operational constraint related to the selectivity of the extraction: the loading equipment selectivity and blasting space requirements commonly exceed the SMU dimensions. Therefore, even if the grade is known, the loading operation cannot be done on an SMU basis. Thus, to obtain a mineable schedule, the planner defines *mining cuts* as the union of adjacent SMUs that are mined in the same period, sent to the same destination, and offer enough operational space to be extracted by the mining equipment. These cuts are scheduled to fulfill the processing and operational constraints in the short-term plan.

Figure 3.1 depicts the change of support from blocks to SMUs and then to mining cuts, and the process of deciding their destination and schedule. The process can be abstracted as follows.

Construction of the mining cuts. The first challenge of short-term planning is the construction of the mining cuts by aggregating SMUs. This step is a manual procedure based on the planner's sole expertise and aims to generate feasible mining cuts from the operational point of view.

Destination of the mining cuts. The planner assigns a destination to each mining cut. As an input, a cut-off grade map defines the destination of each SMU. During this process, although the planner attempts to maintain the guideline given by the cut-off grade map, destination changes of individual SMUs are necessary to obtain feasible mining shapes.

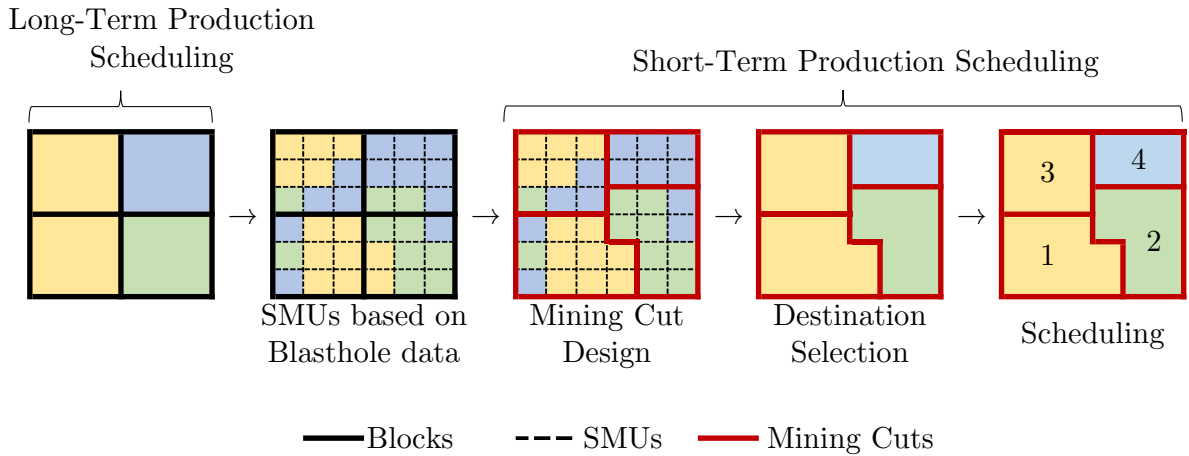


Figure 3.1: A conceptual model representing the stages from a long-term plan based on blocks, down to a short-term plan based on mining cuts. Colors represent different destinations.

Sequencing and scheduling of mining cuts. At this stage, the planner schedules the mining cuts to fulfill the mine and processing production rate, blending constraints, and the access restrictions imposed by the ramp design. The schedule must comply with these considerations daily, weekly, and monthly, and changes according to the mine operation advancement.

Notice that the challenges described above are useful for understanding the complexity of the process and modeling it. However, these stages are not strictly sequential. Indeed, for the construction of the mining cuts, the planner will look at the grades and other attributes of the SMUs, to be able to select the right destination afterward. Also, a given mining cut definition may be unfeasible in terms of production targets at the scheduling stage. In this case, the planner redefines the mining cuts to obtain a feasible schedule. Moreover, an additional step is performed manually to smooth the contours of each cut to account for the loading equipment’s movement.

As a result, finding a feasible cut definition and schedule that meets the long-term targets and complies with operational constraints strongly depends on the user’s expertise. This task may become in a trial and error process, which is highly time-consuming and suboptimal.

The literature has studied the problem of short-term scheduling using operations research and clustering techniques to assist the mine planner in this time-intensive task. However, considering all the challenges together has not been appropriately addressed so far. Because of that, in this work we tackle these issues at the same time through mathematical programming. For this, we introduce an optimization model that addresses all the challenges described before in a unique optimization problem, i.e., we devise a mathematical model that takes the SMUs, geometrical constraints for the mining cuts and production constraints as an input. As a result, it defines the mining cut configuration, selects their destinations, and schedules the mining cuts for production.

The rest of the paper is organized as follows: Section 3.2 presents the literature review.

Section 3.3 presents the optimization model introduced in this work. Section 3.4 shows a study case and the discussion related to the results obtained by the model. Finally Section 3.5 contains the conclusions of this work and possible extensions and recommendations.

3.2. Literature Review

In this section, we review the main results in the area. We separate the works related to the cut definitions from the studies about scheduling in short-term mine planning. We conclude with a summary and comments about these results.

3.2.1. Operational shapes for short-term mine planning

Obtaining operational shapes from the selective mining units in the short-term has been addressed in different ways. One approach related to this matter is the separation between ore and waste in each bench considering the loading equipment selectivity, often called *dig-limit optimization* because the main objective is to define the feasible limits between materials. Norrena and Deutsch (2001) proposed an algorithm based on simulated annealing, where different initial polygons are defined, and each vertex can move to maximize a function of profitability. The algorithm introduced digability as a penalty function to avoid acute angles in the polygons' definition. This work was later tested and extended by Norrena et al. (2002) and Neufeld et al. (2003), introducing grade uncertainty in the profit definition and studying different digability penalization factors. Richmond and Beasley (2004) considered uncertainty in the polygon definition, where an initial shape separates ore and waste, and a local search heuristic looks for better solutions considering risk measures.

Isaaks et al. (2014) proposed a methodology focused on complying with a minimum mining width. The authors defined this width as the minimum number of adjacent SMUs that must share the same destination. A simulated annealing algorithm defines the destination of each SMU while complying with the mining width. The algorithm minimizes a loss function to avoid misclassification of each unit. Ruiseco et al. (2016) proposed an optimization model to define the destination of each SMU, maximizing the mining profit and penalizing the aggregation of SMUs with different destinations in a given area. The model is solved using a genetic algorithm since the aggregation penalty is non-linear.

Another optimization model was proposed by Sari and Kumral (2017), where they defined valid "frames" as an aggregation of SMUs sent to the same destination and complying with operational constraints. The optimization model defines the frames associated with each SMU while maximizing the mining revenue and defining the dig-limits. Deutsch (2017) proposed an optimization model and a specialized algorithm based on branch and bound and simulated annealing, to select a set of structuring elements used as the minimum mining width shape given by the operational constraints in the short-term. Vasylychuk and Deutsch (2019) proposed a method based on a floating selection frame, where the operational constraint is introduced as the rectangular size of the frame. The algorithm provided an initial classification based on this moving frame, and an additional step improved the initial solution and fixed the locations that did not satisfy the excavation constraints.

The definition of mining cuts based on clustering techniques has been studied as well.

Tabesh and Askari-Nasab (2011) implemented a hierarchical clustering algorithm to generate mining cuts based on a similarity index, which depends on distance, rock type, destination, and metal grade, among other block attributes. The resulting clusters are used as an input to a mixed-integer linear program to obtain the short/medium term schedule. Tabesh and Askari-Nasab (2013) presented several hierarchical clustering applications, with different similarity indices and weights of the block attributes. A post-processing procedure improved the solution in terms of cluster size and similarity. Tabesh and Askari-Nasab (2019) presented a methodology to incorporate uncertainty in the clustering definition. They tested several options of similarity indices under geological uncertainty using a *possible worlds* approach, to obtain clusters with good performance on different scenarios.

3.2.2. Scheduling in short-term mining

Mining scheduling in the short-term has been studied mostly using optimization techniques. This includes heuristics and mixed-integer programming (MIP) models focusing on cost, total metal produced, or target fulfillment as the objective function. Blending, quality, and capacity constraints, and different material processing routes are also typical in this approach. Blom et al. (2019) provide a thorough review of this topic. The rest of this review will focus on operational constraints included in the short-term scheduling.

In regards to the operational considerations for short-term scheduling, several approaches have been proposed. Gholamnejad (2008) focused on accessibility: each block has four possible directions of extraction, which are imposed as constraints in the optimization model. To allow the extraction of each block, at least one of those constraints must be fulfilled. However, the author does not provide a case study to evaluate the performance of the model. Mousavi et al. (2016b) presented a similar idea, where each block has five possible directions of extraction: four from the side at the same bench, and one from the upper bench, referred to as *drop-cut*. The model imposes precedence constraints for each direction and enables the extraction of a block if one of them is fulfilled. The authors applied the model to a real case study, but they did not present information on the mining schedule's geometry.

Yavarzadeh et al. (2014) proposed a similar approach with directional constraints. To allow the extraction of a target block, the authors imposed that at least k adjacent blocks must be extracted beforehand. These precedence constraints provided a feasible extraction sequence given an initial mining direction in their case study. Eivazy and Askari-Nasab (2012) used horizontal constraints as well, but with a previous clustering step where the blocks in each bench are grouped into mining cuts using a fuzzy C-means method presented in Askari-Nasab et al. (2010). According to the mining direction, precedence constraints were imposed between these mining cuts to obtain the short-term schedule with a feasible mining width.

Villalba and Dimitrakopoulos (2016) also presented a MIP model to obtain a short-term schedule, but they introduce operational considerations as two different constraints. The first is the mining direction with horizontal precedence constraints on the same bench, similar to the previous approaches. The second constraint is related to the mining width, which favors the extraction of blocks within a fixed neighborhood on the same bench. Dimitrakopoulos and Ramazan (2004) presented this idea as *inner* and *outer windows*, where failing to extract

blocks in these windows is penalized in the objective function. The implementation of these constraints resulted in a schedule with a clear mining direction from the ramp access.

3.2.3. Summary

Based on the works presented, there are two main approaches to incorporate the operational constraints in the short term-scheduling. The first approach is to do two sequential steps: define the mining cuts or dig-limits and then to use these definitions as input for scheduling. Unfortunately, because the approach is sequential, it may turn out that the mining cut definitions might not be able to fulfill the capacity, quality, or blending constraints for each period. Further on, even if the process yields a feasible schedule, the result may be far from optimal. This issue is especially relevant in the case where several phases are active in the same period, so a feasible cut definition should integrate, simultaneously, all the available production benches to fulfill processing and blending constraints.

The second main approach is incorporating horizontal precedence constraints to ensure the existence of a feasible path from the bench access to each block in each period. However, this type of period-based precedence does not consider the definition of mining cuts, and therefore, there is no control over the destination of adjacent SMUs. Therefore, even when a feasible path from the ramp exists, the schedule might not fulfill the mining cuts operational dimensions.

In this work, we present a novel formulation for the short-term scheduling problem with operational constraints, which aims to maximize the value of the schedule and, at the same time, to generate a feasible mining cut definition and short-term plan.

3.3. Mathematical Model

In this section, we introduce the mathematical model to define the mining cuts and their scheduling.

The model presented selects which SMUs constitute a given mining cut, and assign a destination (processing facility or waste dump) to each cut. The extraction of the cut can span over several periods, but must comply with total extraction capacities as well as capacity and blending constraints at the processing destinations. The extraction of mining cuts is subject to slope precedence constraints to comply with the pitwall stability and precedence constraints within the bench if a mining direction is defined in advance. All these constraints can be modeled considering individual SMUs and using standard techniques from scheduling models in the literature, and therefore we discuss them directly in the formulation (Section 3.3.2).

The model also considers the minimum and maximum size of the mining cuts and a maximum number of active mining cuts which can be used to introduce considerations in terms of the loading equipment fleet. These constraints are direct from the model, so we also delay their discussion to Section 3.3.2.

Finally, the model must abstract the notion of mining cuts. This abstraction is the most

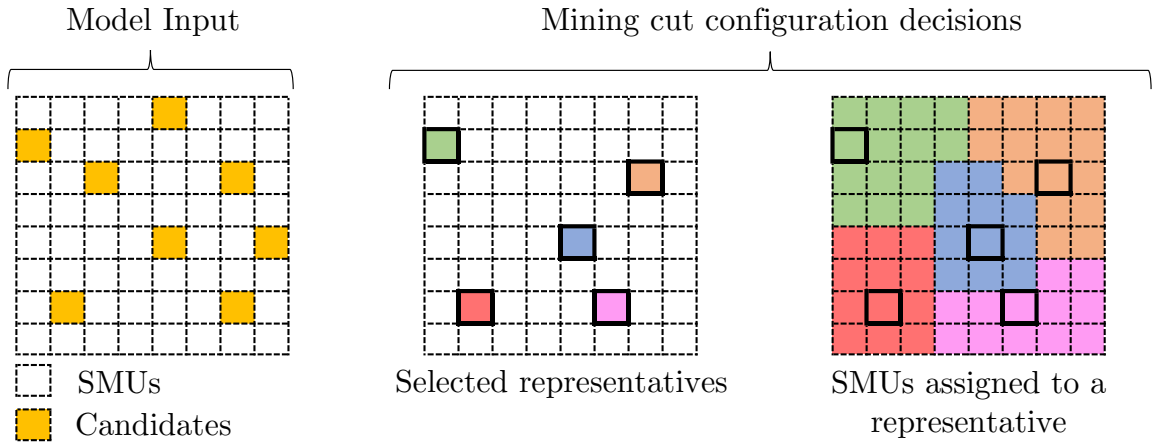


Figure 3.2: Mining cuts definition based on the optimization model. Colors represent different mining cuts and their representatives.

novel and complex part of the modeling, and for this reason, we describe it in detail in the following section.

3.3.1. Modeling mining cuts

In what follows, we will assume that a mining cut is a connected set of SMUs sent to the same destination and extracted over the same periods. We are looking for a *mining cut configuration*, i.e., a partition of the set of SMUs into mining cuts so that the obtained schedule maximizes the economic value. In order to develop the mathematical model, we, therefore, need to address the following aspects: (i) the shape of each mining cut, (ii) the economic value of each mining cut, and (iii) that SMUs belonging to the same cut are sent to the same destination and extracted over the same periods.

Our approach consists in considering a set of SMUs, which are an input for the mathematical model, that we call *representatives*, because, as their name suggests, they represent a potential mining cut. This allows us to separate the problem of defining the mining cut configuration into two parts: first, to select representatives, and second, to assign each SMU to one of the chosen representatives. If the model does not choose a potential representative, it is treated as a regular SMU and must be associated with a selected representative. Fig. 3.2 illustrates this with a small example consisting of 64 SMUs, with eight candidates. The model chose five representatives, therefore generating five mining cuts. The mining cut’s shape and connectivity are controlled using precedence arcs directed towards the chosen candidates (we discuss this with more detail later).

Using the above, to model that the SMUs in the same mining cut are sent to the same destination and extracted over the same periods is equivalent to enforcing that they share these decisions with their corresponding representative. That is, if SMU i is associated with representative r , then i and r must share the same destination and extraction periods.

In terms of the economic value of a mining cut, we consider it as the sum of the individual values of SMUs that constitute the cut. Such values may depend on the destination, as the

mineral recovery and processing costs depend on the material and the facility where it is processed or stocked. The model selects the best destination based on these differences and the processing capacities of each facility.

Finally, to model the shape of the mining cuts, we use precedence arcs directed from the SMUs towards their selected representative. In this way, we make sure that the mining cuts generated are valid (i.e., connected) because transitivity of the precedence arcs ensures a path from every SMU to its representative. Also, we can control the shapes of the mining cuts by using different precedence definitions. However, as the chosen representatives result from the model and are not a fixed input, each SMU has several sets of predecessors (one for each potential representative), and the model only enforces the precedence set corresponding to the chosen representative.

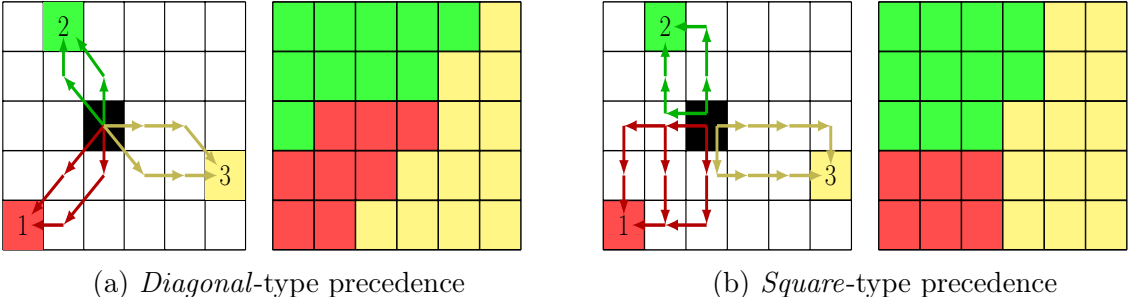


Figure 3.3: Left: Examples of precedence arcs between a single SMU (black) to three representative SMUs (red, green and yellow). Right: Shapes induced by these precedence constraints in the model. Arrows go from successor to predecessor.

Fig. 3.3 shows two examples of the concept of representatives and how precedence arcs model the cuts’ shape. In all the figures, the squares represent individual SMUs looked from the top and a few precedence arcs.

The left-side figures present an arbitrary SMU (in black), three representative SMUs (colored red, green, and yellow). For each representative, a different set of predecessors with the same color as the corresponding representative. The model defines which one of these precedence sets is enforced and, as a result, assigns the black SMU to one of the representative SMUs. The set of all precedence arcs directed towards a representative SMU r is P_r . If an arc (i, j) belongs to P_r , it reads as “if SMU i is assigned to representative r , SMU j must also be assigned to representative r and they must share the same destination”.

Fig. 3.3 also illustrates two possible ways to define the precedence arcs. Fig. 3.3a presents the case of a *diagonal*-type precedence, which offers more flexibility for the mining cut’s shape, but may have some problematic zones depending on the loading equipment selectivity, while Fig. 3.3b shows a *square*-type precedence which is more constrained. The right-side figures show the geometries of the mining cuts induced by both sets of precedence arcs.

Notice also that, for example, Fig. 3.3a shows only 4 elements of P_2 , 6 of P_1 and 6 of P_3 , but these sets consists of many more arcs that are not shown to keep the figure simple.

It is relevant to emphasize that, even though the model considers all the precedence arcs, it only enforces those corresponding to the chosen representative. In the example in Fig. 3.3a,

the model chooses representative one, and only the red precedence arcs are enforced, while in Fig. 3.3b, representative two is chosen instead. It is also important to note that, as the figure suggests, the precedence arcs do not link the SMU and the representative directly. Instead, they propagate through the bench incorporating different SMUs in the process. This propagation ensures connectivity in the mining cut, with a feasible path between different SMUs belonging to the same cut.

3.3.2. Optimization Model

In this section, we present in detail the optimization model that we propose to integrate the mining cut definition and scheduling problems.

- Sets, indices, and parameters

Sets and indices	
$b, i, j \in \mathcal{B}$	SMUs and set of SMUs.
$t, p \in \mathcal{T}$	Periods and set of time periods.
$r \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$	Representative and set of representative SMUs.
$d \in \mathcal{D}$	Destination and set of possible destinations.
$c \in \mathcal{C}$	Resource and set of operational and processing resources.
$q \in \mathcal{Q}$	Blending attribute and set of blending attributes.
$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$	Set of slope precedence arcs between SMUs.
$\mathcal{P}_r \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$	Set of precedence arcs directed to representative SMU $r \in \mathcal{R}$.
$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$	Set of precedence arcs between representative SMUs.
Parameters	
v_{btdr}	Profit obtained if SMU b is assigned to representative r and sent to destination d at period t .
α_{cb}	Quantity of resource c consumed by extracting SMU b .
u_c	Upper limit of resource c .
ℓ_c	Lower limit of resource c .
β_{cbd}	Quantity of resource c consumed by processing SMU b at destination d .
u_{cd}	Upper limit of resource c available at destination d .
ℓ_{cd}	Lower limit of resource c available at destination d .
ℓ_r	Minimum cut size associated with representative SMU r .
u_r	Maximum cut size associated with representative SMU r .
g_{qb}	Value of additive attribute q in SMU b .
u_{qd}	Upper limit on the blend of attribute q at destination d .
ℓ_{qd}	Lower limit on the blend of attribute q at destination d .
Δt_r	Maximum timespan in the extraction of a mining cut.
N_{active_cuts}	Maximum number of active mining cuts in the same period.
N_{total_reps}	Maximum number of representative SMUs used in the schedule.

- Decision Variables

$$x_{btdr} = \begin{cases} 1 & \text{if SMU } b \text{ is sent to destination } d \text{ at period } t \text{ assigned to representative SMU } r. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y_{tr} = \begin{cases} 1 & \text{if an SMU associated with representative } r \text{ is extracted at period } t. \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Objective Function

$$\max \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} v_{btdr} x_{btdr} \quad (3.1)$$

Eq. (3.1) represents the total profit obtained by the schedule in the planning horizon considered. Other objective functions could be used as well: maximize the total metal content extracted in the planning horizon, or minimize the total cost of the schedule changing the parameter v_{btdr} accordingly.

- Constraints

1. Resource Constraints:

$$\ell_c \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \alpha_{cb} x_{btdr} \leq u_c \quad \forall t \in \mathcal{T}, c \in \mathcal{C} \quad (3.2)$$

$$\ell_{cd} \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \beta_{cbd} x_{btdr} \leq u_{cd} \quad \forall t \in \mathcal{T}, c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D} \quad (3.3)$$

Eq. (3.2) represents the mining capacity constraint, which imposes upper and lower limits on the total resources $c \in \mathcal{C}$ consumed in the extraction process. Similarly, Eq. (3.3) imposes upper and lower limits on the resources $c \in \mathcal{C}$ processed in each destination $d \in \mathcal{D}$. This type of resource constraint could limit the total tonnage extracted in each period or the total hours of processing capacity in each destination, for example.

2. Blending Constraints:

$$\ell_{qd} \leq \frac{\sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{r \in \mathcal{R}} g_{qb} c_b x_{btdr}}{\sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{r \in \mathcal{R}} c_b x_{btdr}} \leq u_{qd} \quad \forall t \in \mathcal{T}, d \in \mathcal{D}, q \in \mathcal{Q}, c \in \mathcal{C} \quad (3.4)$$

Destinations may limit the average value of some attribute across all the SMUs processed at each period. Eq. (3.4) imposes upper and lower limits on the blend of attributes $q \in \mathcal{Q}$ for the optimal performance of each destination $d \in \mathcal{D}$.

3. Slope Precedence:

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{itdr} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{jpdr} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T} \quad (3.5)$$

Eq. (3.5) represents the slope precedence constraint to maintain the pitwall stability. Set $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ contains ordered pairs calculated using a predefined angle given by geomechanical constraints. If a pair $(i, j) \in \mathcal{P}$, SMU j must be extracted before SMU i or during the same period.

4. Representative SMUs Precedence Constraints:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} x_{itdr} \leq \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{jtdr} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}_r, r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D} \quad (3.6)$$

Eq. (3.6) imposes a destination-based precedence constraint for every SMU assigned to representative r . Therefore, for every pair $(i, j) \in \mathcal{P}_r$, if SMU i is assigned to representative r , SMU j must also be assigned to representative r and they must share the same destination. Note that this precedence does not impose a temporal order of extraction between SMUs. The extraction sequence is related to the mining cut extraction order, which is imposed with Eq. (3.8).

5. Mining Cut Size Constraints:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{rtdr} \ell_r \leq \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{bt dr} \leq \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{rt dr} u_r \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (3.7)$$

Eq. (3.7) imposes upper and lower limits for the size of each cut, defined as the number of SMUs $b \in \mathcal{B}$ associated with each representative SMU $r \in \mathcal{R}$. The lower limit represents the minimum feasible operational size according to the mining equipment. The upper limit is optional and could be used to control the shape of the mining cuts.

It is relevant to note the use of variable $x_{rt dr}$ in both bounds. According to the definition, this variable is 1 if SMU r is assigned to representative r . Since the optimization model may not use every representative SMU provided as an input, variable $x_{rt dr}$ serves as an indicator of whether the model chose this representative. In case the representative r is chosen, $x_{rt dr} = 1$ and both bounds are active. On the other hand, if representative r is not chosen, $x_{rt dr} = 0$ and both bounds become null.

6. Representative SMUs Advancement Constraints:

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} x_{it di} \leq \sum_{p=1}^t \sum_{d \in \mathcal{D}} x_{jtdj} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}, t \in \mathcal{T} \quad (3.8)$$

Eq. (3.8) imposes an extraction order for the different representative SMUs. This constraint maintains a feasible extraction advancement starting from each bench's access point according to the long-term design of the pit. This provides a feasible schedule in the short-term and avoids the extraction of mining cuts with no viable path to the ramp in each period.

For this constraint, we also use the indicator variables since the constraints are enforced only between representative SMUs chosen by the model.

7. Mining Cut Scheduling Constraints:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} y_{tr} \leq \Delta t_r \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (3.9)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} y_{tr} \leq N_{active_cuts} \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.10)$$

Eq. (3.9) limits the number of periods a mining cut can be active. Note that this constraint could be omitted for the case of $\Delta t = 1$ since it can be incorporated into Eq. (3.6) imposing not only the same destination for the cut but also the same extraction period, which is the most common approach in the short-term.

On the other hand, Eq. (3.10) limits the maximum number of active mining cuts in each period.

8. Number of Representative SMUs Constraint:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{rt dr} \leq N_{total_reps} \quad (3.11)$$

Eq. (3.11) imposes an upper limit on the total number of representative SMUs used in the schedule. This constraint allows the model to choose the representative SMUs among some potential locations constrained by a maximum number defined by N_{total_reps} .

It is worth noting that if the model does not choose a representative, that does not mean that the SMU is not extracted. Eq. (3.13) forces the model to assign every SMU to a representative.

9. Variable Definition Constraints

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} x_{btdr} \leq y_{tr} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T}, r \in \mathcal{R} \quad (3.12)$$

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{btdr} = 1 \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad (3.13)$$

$$x_{btdr}, y_{tr} \in \{0, 1\} \quad \forall b \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{T}, r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D} \quad (3.14)$$

Eq. (3.12) links both decision variables: variable x can be 1 only if the corresponding variable y is 1 as well. Eq. (3.13) imposes that every SMU must be extracted in the planning horizon to comply with the long-term plan. Finally, Eq. (3.14) imposes that both decision variables are binary.

3.3.3. Comments

The introduction of representatives may appear as a practical problem because the set \mathcal{R} may significantly impact the results, and it is not clear how to choose it. Because of this, in

the case study carried out in Section 3.4, we compare two different approaches to define the set of potential representatives and show that, at least in the example studied, these rules perform well and similarly.

Despite the above, we observe that the model presented herein provides enough flexibility to tackle several short-term problems. For example, there is no conceptual upper limit on the number of representative SMUs defined as an input. A user could start with as many representatives as SMUs and let the model choose among all these possibilities, limited only by Eq. (3.11). Therefore, a planner could perform some exploratory analysis before settling with the definitive representatives.

The incorporation of slope precedence arcs in the model, while uncommon in the short-term, allows for larger planning horizons, where more than one bench is extracted in the same mining phase. Even when the slope precedence is imposed on an SMU basis, the model could force the extraction of complete mining cuts in the same period, and as a result, the slope precedence is fulfilled on a mining cut level. This generates larger operational spaces when a new bench is opened, which is a common restriction in the short-term to allow the correct operation of the loading equipment.

The separation of the destination-based precedence to control the mining cut's shape and the temporal-based precedence to control the sequence is another advantage. The sequence is controlled by the representative SMUs according to the mining direction provided as an input. However, the model allows the use of Eq. (3.5) to control the advancement on an SMU basis. This constraint is similar to the advancement constraints described in Section 3.2, but also accounts for the shovel selectivity given by the mining cut definition.

The model could also be used without the scheduling constraints to obtain mining cuts considering only the best destination according to the profit. In this sense, the model offers a different version of the dig-limit optimization problem, which separates different types of materials accounting for the loading equipment selectivity, but offering a broad range of possible destinations for each SMU.

3.4. Numerical Experiments

In this section, we apply the optimization model described in Section 3.3 in a real case study. We evaluate the short-term schedule, the geometry of the resulting mining cuts, the effect of the representatives' location, the influence of the precedence definition, and computational aspects of the model implementation.

3.4.1. Case Study

The case study corresponds to two benches of a real copper mine from northern Chile. The dimensions of each bench are 90m \times 120m, and they contain a total of 864 SMUs of 5m \times 5m, with a bench height of 12m. Fig. 3.4 shows the copper grade distribution of both benches. The grade was obtained using conditional simulation to replicate the local variability of the deposit found in the short-term. A description of the conditional simulation algorithm can be found in Emery (2008), and other applications of conditional simulation in grade control data

can be found in Dimitrakopoulos and Jewbali (2013) and Vasylichuk and Deutsch (2018).

Since these benches belong to different phases of the mine, they can be extracted simultaneously, and hence there is no slope precedence in this case study. However, the extraction must begin at the bottom left corner of each bench, where the access is located. The production scheduling in this case study corresponds to a five-week planning horizon.

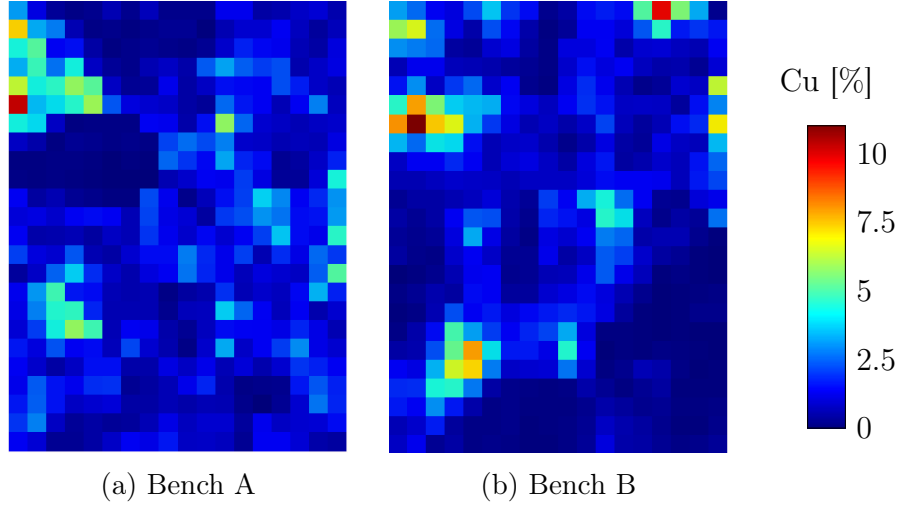


Figure 3.4: Copper grade

The mine has two processing facilities, each with different costs and recoveries, with an additional destination corresponding to the discard waste. The economic and scheduling parameters for each destination are shown in Table 3.2.

It is possible to perform a cut-off grade analysis to select the best destination of each SMU, i.e., the destination that produces the highest profit. Fig. 3.5 illustrates the result of this analysis, and shows that the heterogeneity of the copper grade causes a highly variable destination definition, which is impractical in the operation. This high variability motivated the application of the model in this case study.

The mining cut parameters used are shown in Table 3.3. The cut-off grade analysis was used as a base to define the set of representatives \mathcal{R} , which consists of 41 locations shown in Fig. 3.5. For this case study, these locations were defined manually by a mining engineer. The first representative was placed in the lower-left corner where the ramp access is located. Then, the representatives are defined sequentially, following three main rules:

- Representatives are located in zones where the cut-off grade map shows mostly a single destination. In this way, the representatives try to capture the same destination policy as the cut-off grade map.
- The higher the destination variability, the closer the representatives. This favors the definition of many mining cuts in zones where it is not clear how to define them manually from the cut-off grade map.
- A minimum of three SMUs of separation is maintained between representatives. This avoids the definition of small mining cuts, which could present feasibility issues in the

operation.

Finally, all the results were obtained using Gurobi 9.0 in a laptop with 8Gb of RAM and an Intel Core i5-7200U CPU (2.5 GHz).

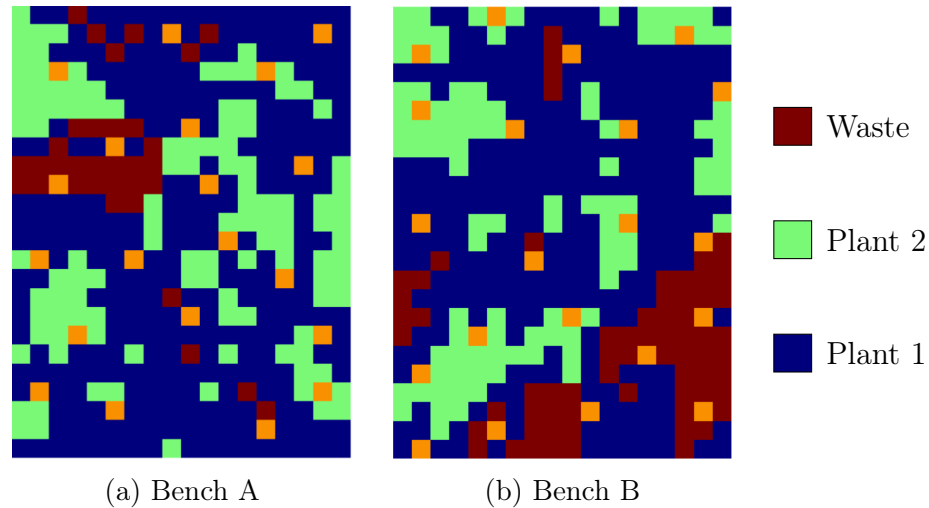


Figure 3.5: Best destination based on cut-off grade. Representative SMU locations shown in orange.

Table 3.2: Economical and Scheduling parameters for each destination

Parameter	Plant 1	Plant 2	Waste
Processing Cost [USD/ton]	\$6	\$11	\$0
Recovery [%]	75	90	0
Selling Cost [USD/lb]	\$0.15	\$0.3	\$0
Processing Capacity [kton/week]	[0 - 81.0]	[0 - 48.6]	[0 - 145.8]
Blending [Cu%]	-	[0.5 - 4.5]	-
Mining Capacity [kton/week]		145.8	
Mining Cost [USD/ton]		\$1.2	
Copper Sale Price [USD/lb]		\$2.0	

3.4.2. Results

Fig. 3.6 shows the location of representative SMUs used in the schedule and the final mining cuts obtained by the optimization model in both benches. Every SMU in a mining cut shares the same extraction period and destination, and every mining cut fulfills the operational constraints imposed by the model. The model also determines the shape of the mining cuts considering the profit, but also the mining, blending, and capacity constraints imposed in each period. These constraints restrict all the mining cuts extracted in the same period, whether they belong to Bench A or Bench B, to ensure the mine schedule’s feasibility.

Fig. 3.7 shows the mining sequence. Given the restriction of extracting complete mining cuts in the same period and the precedence constraint imposed between the representative

Table 3.3: Mining Cut definition parameters

Minimum Cut Size	10 SMU
Maximum Cut Size	30 SMU
Maximum Active Cuts per Period	10 SMU
Cut Extraction Span	1 period
Maximum Allowable Distance	6 SMU

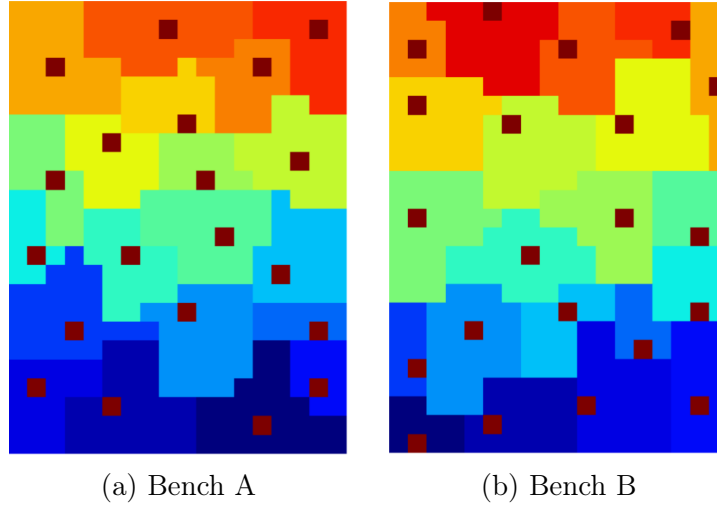


Figure 3.6: Representative SMUs (dark red) and resulting mining cuts

SMUs, large zones of each bench are extracted in conjunction producing enough operational space for the loading and hauling equipment. The set of mining cuts in each period fulfills both the processing constraints for each destination and the mining constraint for the total tonnage extracted. This ensures that there is enough capacity to extract and process the SMUs according to the mining sequence. Fig. 3.8 shows the production plan where each destination fulfills its capacity in each period.

Another product of the mining cut definition from the optimization model is the separation between types of material in each bench, referred to as dig-limit definition in the literature. Fig. 3.9 shows the destination of each SMU and the destination of the mining cuts, which illustrates how the model defines the dig-limits for this case study. The result from the model presents larger zones with the same destination, in contrast to the cut-off grade approach for each SMU. However, the results from both approaches are not entirely different. The optimization model tries to preserve the original classification of each SMU, but fulfilling the minimum cut size and changing some destinations accordingly to comply with all the constraints.

It is interesting to analyze the effect of the scheduling constraints on the mining cuts since usually, their definition resides in operational considerations. Fig. 3.10 shows a comparison between different destination definitions: Fig. 3.10a shows the cut-off grade analysis, Fig. 3.10b is obtained by the model with operational and scheduling constraints, while Fig. 3.10c is also obtained by the model but without capacities, blending, nor extraction advancement constraints. Table 3.4 shows the tonnage assigned to each destination, with the upper limit

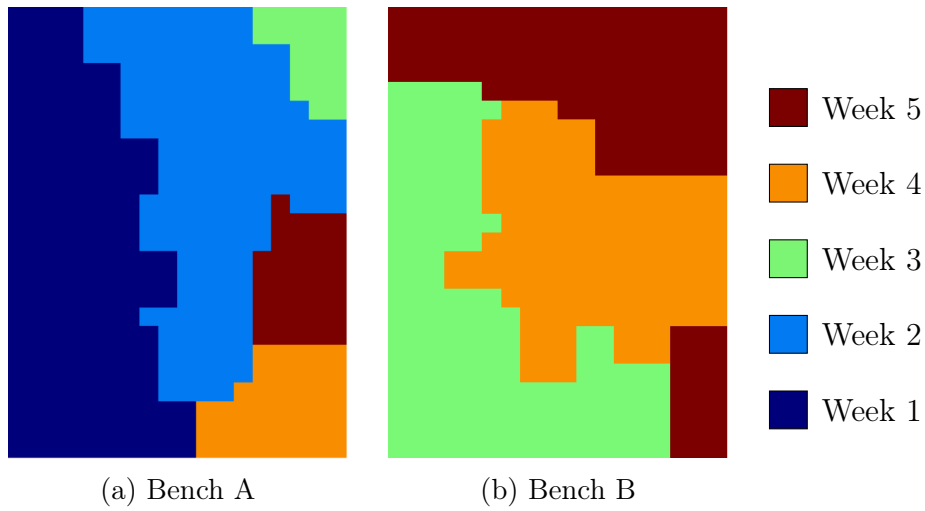


Figure 3.7: Extraction period of the SMUs in both benches

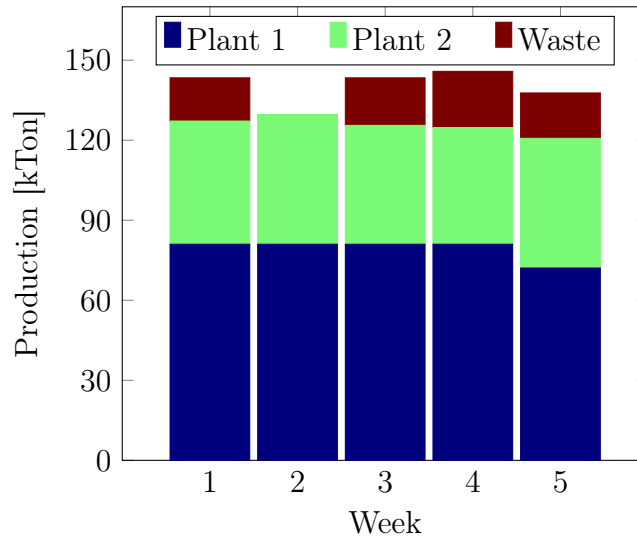


Figure 3.8: Production Plan

considered for the five-week planning horizon.

While the destination definition is similar among the three cases, the tonnage assigned for each destination varies between them. The upper limit for ‘Plant 2’ is fulfilled in all cases, but this does not occur for ‘Plant 1’. The cut-off grade policy surpasses the maximum tonnage by 38 kTon, and if the mining cuts are defined only by value and operational space, the limit is surpassed by 63 kTon. Using these mining cuts in a production schedule would require modifying the destination policy to comply with the processing capacity of ‘Plant 1’, or to change the cut definition itself to obtain a feasible plan. The model with scheduling constraints takes this into account during the optimization process, and therefore the mining cuts already fulfill the scheduling considerations. This result highlights how addressing the problem partially may lead to unfeasible solutions and, therefore, the need for a holistic approach including mining cuts definition and scheduling, like the one proposed in this work.

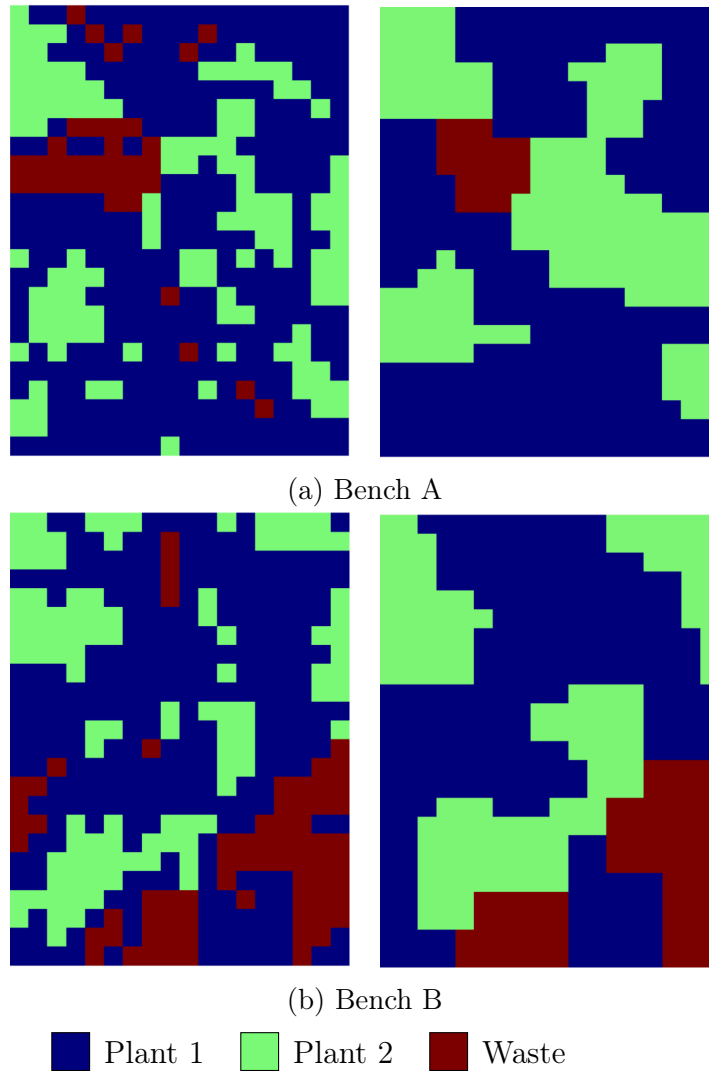


Figure 3.9: SMUs destination policy based on cut-off grade (left) and mining cuts (right)

It is important to note that the geometry presented may introduce some operational issues, where SMUs assigned to one destination are mostly surrounded by SMUs assigned to different one or a different period. This is related to the indirect way of imposing the operational constraints through the precedence definition towards each representative SMUs. These shapes are still allowed and fulfill the precedence arcs, even when they are not fully operationally feasible. A post-processing step could modify the initial cut definition to account for these problematic zones. Tabesh et al. (2014) introduces an example of this shape-refinement step.

However, these issues should disappear once the mining engineer defines the final shapes of the cuts assisted by a Computer-aided design (CAD) software to smooth their boundaries. To validate this, a short-term mine planner reviewed the model's results to assess their usefulness for a real operation. According to his evaluation, the mining cuts and the schedule comply with the operational considerations related to the size of the loading equipment, which is the primary constraint in the short-term. Therefore the model provides a valuable guide for the final mining cuts design.

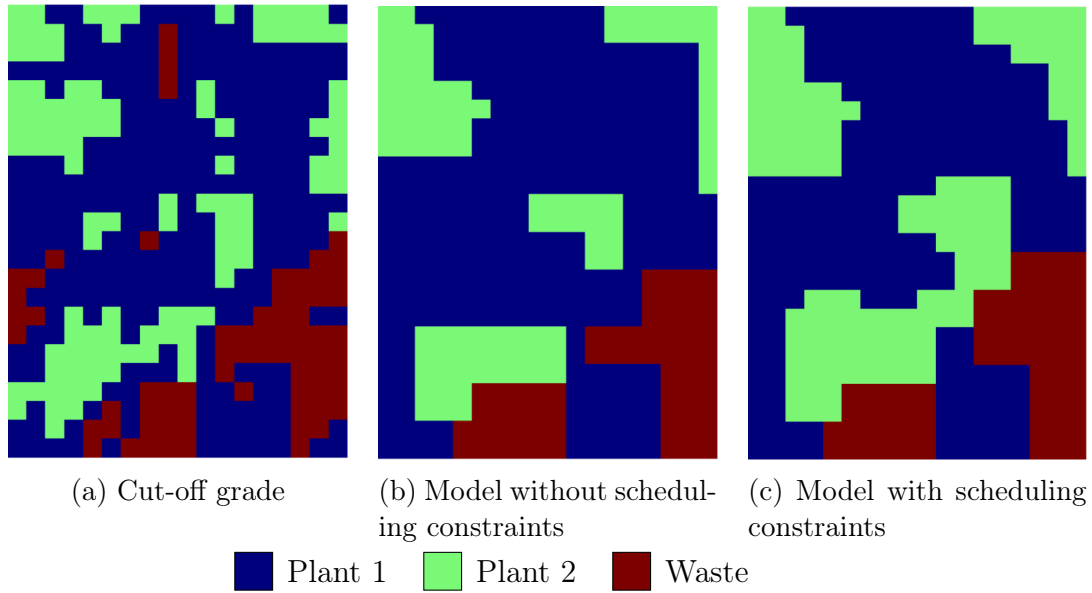


Figure 3.10: Effect of the scheduling constraints on the destination policy - Bench B

Table 3.4: Total tonnage by destination policy

Policy	Plant 1 [kton]	Plant 2 [kton]
Cut-off grade	434.16	179.82
Model without scheduling constraints	459.27	176.58
Model with scheduling Constraints	396.09	231.66
Upper Limit	405	243

Interestingly enough, the analysis provided by the expert planner also indicated that the results of the model are useful to allocate resources associated with the extraction process, such as auxiliary equipment and services since it is known beforehand which sectors are going to be extracted in the next periods. Also, the definition of mining cuts and dig-limits could be useful to produce a better evaluation of the real profit in the long-term, because it allows a better estimation of the operational costs, compared to the current approach based on blocks.

3.4.3. Impact of the precedence arcs to model mining cut shapes

As indicated before, how the precedence arcs are defined may be used to generate different geometries. Fig. 3.11 shows a comparison of the results obtained by the same instance of the problem, but with different precedence definition (Fig. 3.3 shows an example of these definitions).

For the two precedence definitions considered, the major differences include the boundaries between mining cuts, where diagonal interfaces are allowed. This could entail a particular operational extraction strategy according to the loading equipment and the mining direction. The shapes of the cuts are also different, presenting more problematic areas with the *Diagonal*-type since each SMU has fewer precedence arcs directed to the representatives. In this

way, the precedence definition impacts the cut shapes, which could be used to account for different extraction strategies or present the mine planner with different mining cut definitions options.

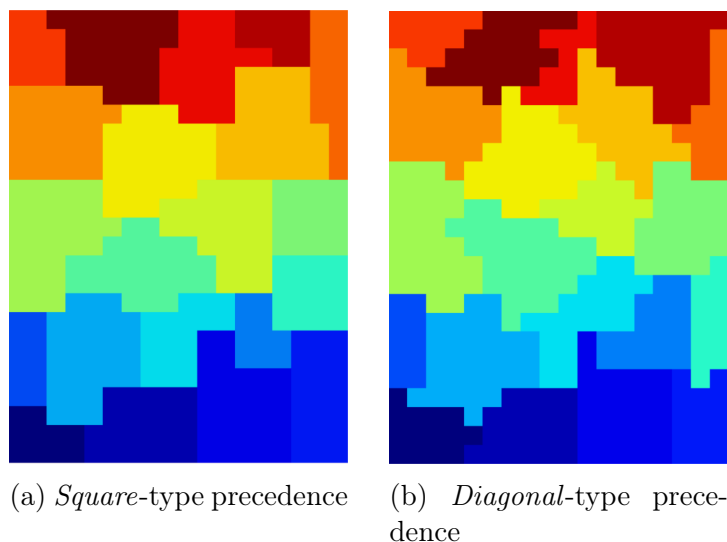


Figure 3.11: Mining cuts with different precedence definition

3.4.4. Impact of the initial selection of representatives

As mentioned before, a potential drawback of the approach presented in this paper is the need to define the potential locations of the representative SMUs and its impact on the final schedule. The case study shows that the cut-off grade destination policy serves as a good indicator of the representative’s locations and requires less effort from the planner than constructing all the cuts manually.

However, it is interesting to study the case where the cut-off grade analysis is not performed. Instead of that, the representatives are distributed systematically on the bench, which is shown in Fig. 3.12. Using these representatives leads to the mining cuts shown in Fig. 3.12a and the destination definition shown in Fig. 3.12b. As a comparison, Fig. 3.12c shows the destination definition based on the representative SMUs chosen by a mining engineer (previously shown in Fig. 3.6b).

It is clear that the definition of mining cuts and destination policy is not equal. The lack of representative SMUs in some areas forces the model to change the destination of some SMUs to comply with the systematic representatives used in this example. However, the systematic representatives managed to capture similar destination definitions in most of the bench, which shows that in this case study, even when a mining engineer does not define the representative location, the model achieves similar results.

In cases where a systematic approach is not satisfactory, the model could also decide the optimal location of the representative SMUs in each bench from a pool of candidate locations using Eq. (3.11), as previously discussed in Section 3.3. The downside of this approach is the increase in the size of the problem and its solving time. Therefore, better methodologies to obtain the location of the representative SMUs could be a future line of research, where a

heuristic could test and improve different configurations, or solve the model efficiently with a large pool of candidate locations.

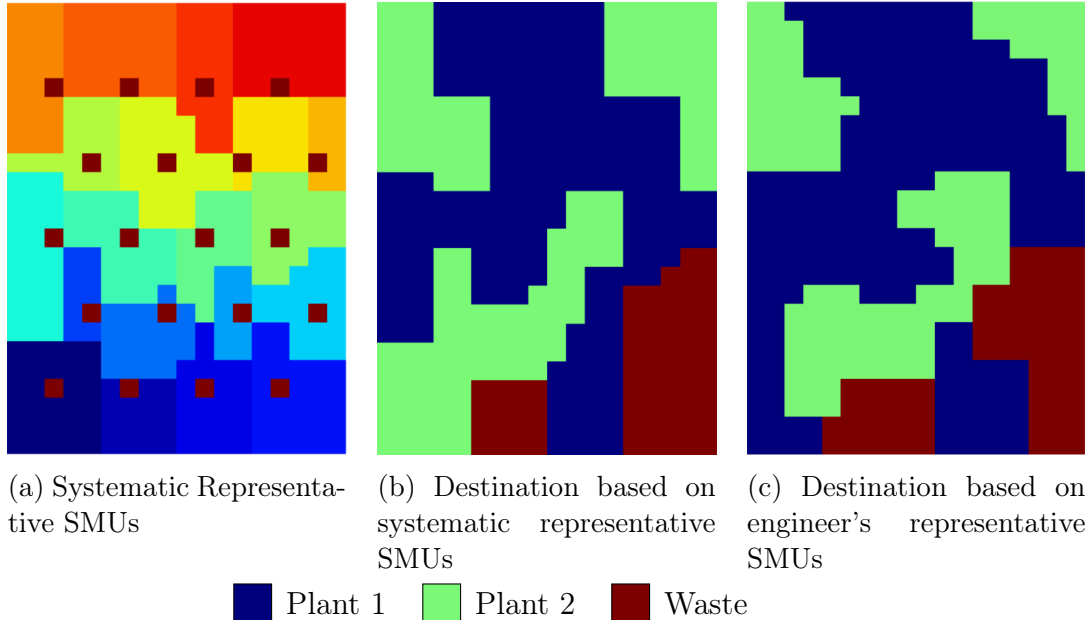


Figure 3.12: Effect of representative SMUs location on the mining cut definition and destination policy - Bench B

3.4.5. Computational aspects

Finally, regarding the optimization process, Table 3.5 shows the model performance in the three cases described previously: *Square*-type precedence (shown in Fig. 3.6), *Diagonal*-type precedence (shown in Fig. 3.11a), and systematic representatives (shown in Fig. 3.12). The cut-off grade destination policy is used as a reference since it is the maximum potential profit the schedule can achieve if perfect selectivity on the bench is assumed.

The value achieved by the model in this numerical experiment is lower than the cut-off grade profit as expected. However, the difference is relatively small, which shows that the optimization model captures most of the profit on these benches. The larger difference belongs to the systematic representatives' approach, with a reduction of almost 2% in terms of value.

In terms of runtime, however, there are significant differences. Systematic representatives take between three and four times longer than the others, which indicates that this representative definition makes the model harder to solve. In any case, the total execution time is very short and more than acceptable for the application. A mining engineer could take between hours or days to manually define a feasible mining cut configuration depending on the complexity. Therefore, the optimization model could provide a useful guide to shorten this planning time.

Table 3.5: Optimization results

Case	Value [MUSD]	Difference	Best Bound [MUSD]	Optimality Gap	Runtime [s]
Cut-off grade	24.18	-	-	-	-
Square-type precedence	23.85	1.36%	23.89	0.16%	151.0
Diagonal-type precedence	23.75	1.75%	23.96	0.87%	98.1
Systematic representatives	23.72	1.90%	23.81	0.38%	435.2

3.5. Conclusions

In this paper, we addressed the mining cut definition and scheduling for short-term open-pit planning. For this, we introduced an optimization model that defines the mining cuts and the mining sequence, fulfilling operational and scheduling constraints, and maximizing the profit obtained. We then applied the model in a realistic case and evaluate its performance in terms of operational considerations, production plan, and optimization runtime.

The optimization model presented in this work successfully defines the mining cut configuration and the production plan simultaneously. The shapes of the mining cuts obtained are useful. The model provides enough flexibility to tackle different cases in the short-term, related to the mining cut's size and shape, accessibility and advancement through the bench, simultaneous extraction of different phases, and dig-limit definitions for multiple materials.

Future research on this approach could study the best location of the representative SMUs and their influence on the mining cut definition and the production schedule. Algorithms to place the representatives in a good location based on the bench information or heuristics to handle the complete optimization model with a large pool of representatives could tackle more extensive and complex cases. Other extensions may include the incorporation of uncertainty in grade or rock type and a more complex geometallurgical model for the objective function to account for changes in recovery due to the blending of SMUs in the processing plants.

Acknowledgments

This work was (partially) funded by the National Agency for Research and Development (ANID) through PIA Project AFB180004 and Scholarship Program Doctorado Nacional 2018 - 2118155.

Conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

Capítulo 4

An algorithm for the operational short-term mine planning problem with geometallurgical interactions based on column generation

Este capítulo aborda la incorporación de funciones geometalúrgicas generales en planificación de corto plazo. Se incorporan las restricciones operativas mediante el cálculo de un conjunto de posibles cortes de producción y se integran a priori todas las interacciones geometalúrgicas dadas por la mezcla del material. El modelo se resuelve mediante un algoritmo de generación de columnas.

Abstract

In this work we propose a novel approach to solve the short-term operational problem in open pit mines with geometallurgical interactions. We incorporate operational constraints as a large set of feasible shapes and propose a simple way to describe them. We use a column generation approach to deal with the set of possible clusters and we are able to obtain the optimal solution for real-size instances in reasonable runtimes. A practical heuristic is proposed in case the integer problem is intractable.

This approach can incorporate any geometallurgical function to describe the blending properties in each mining cut. This allows for a better assessment of the processing outcomes and profit. We also show that nonlinear recovery functions influence the destination policy and expected profit. The traditional cut-off grade based policy is not the best strategy when nonlinear interactions are expected.

Several extensions are proposed, such as multi-period schedules and advancement constraints. Challenges regarding the feasible shapes remain open and could provide a more efficient way to solve larger instances.

4.1. Introduction

Mine planning is the procedure of defining the best extraction strategy subject to physical, geological and operational constraints (Johnson, 1969). This strategy includes selecting the material to extract, deciding the processing route for each unit (usually referred to as *blocks*), and constructing a feasible extraction schedule in the planning horizon. Some common constraints are upper and lower limits on total material extracted in the mine and processed by the facilities, and geometrical restrictions for stability and operational reasons. The magnitude of the mining industry has motivated plenty of research in this area. Given the decision-centered nature of mine planning, operations research has been widely used in the extraction and development stages of the mine operations (Newman et al., 2010).

One of the main assumptions needed to apply traditional mine planning techniques is the linearity and additivity on the block properties. Linearity is the assumption that the response variables in the processing facilities can be modeled as a linear combination of the blocks attributes. Additivity is the assumption that the properties of a blend of blocks can be calculated by averaging over the properties of each block. Under these assumptions, the response obtained by processing a single block is not affected by other blocks extracted in the same period. The objective function, therefore, is a linear combination of the individual block values calculated beforehand, and the constraints can also be described as linear functions.

Geometallurgy is the field that studies the interaction between rock properties and mining and processing outcomes (Coward et al., 2009). One of the main areas of this field is related to characterize response variables for a given set of rock attributes, and the properties of blends of different rock types. This research has proven that the assumptions of linearity and additivity do not hold true for some key block attributes, such as metal recovery (Nwaila et al., 2020; Van Tonder et al., 2010) and grindability (Tavares and Kallembach, 2013; Yan and Eaton, 1994). A better assessment of the plan feasibility, therefore, should incorporate the interaction given by the blend of blocks. Accounting for this behavior in usual mine planning techniques, unfortunately, results in a nonlinear program, making the usual models unsolvable using exact techniques, and relying on heuristics to deal with the nonlinearity.

The issue of blending properties is specially relevant in short-term mine planning. In this planning horizon, engineers face the problem of selectivity: loading equipment cannot extract blocks individually given its physical limitations. Therefore, the planners define *mining cuts* (also referred as *polygons* or *clusters*) as a combination of adjacent blocks which are extracted together and processed in the same facility. This is often a manual procedure of trial and error, where the planner must define a destination policy and extraction sequence that maximizes profit or recovered metal from the cuts.

Mining cuts' sizes and shapes must also be operationally compatible with the loading equipment. The definition of what makes a mining cut 'operationally feasible' is not clear, and we are not sure such a definition is possible. It depends on the operator expertise and the critical eye of the mine planner. In the literature, operational feasibility is defined with different metrics (mining width, minimum size, basic shapes), and additional steps to fix problematic locations are common.

Without a formal definition of a feasible mining cut, we propose addressing the short-

term mine planning problem by brute-force enumeration. Instead of imposing an operational constraint in the model to group blocks, we generate a large set of feasible mining cuts as an input. The advantages of this approach are directly related to both issues mentioned previously. Operational feasibility is achieved by construction, i.e., the mining cut shapes used as an input already fulfill operational requirements. The problem of nonlinearity and nonadditivity on the mixing are also addressed: the cluster properties are calculated before the optimization process, so any function of the blocks properties is allowed.

Solving an optimization problem with a large number of mining cuts is challenging. Even for small cases, the number of variables may grow exponentially. In this work we propose a column generation approach to tackle this issue.

4.1.1. Contribution

As far as we know, there are no other works that attempt to solve the mining cut definition problem by enumerating a large set of shapes. We show that this approach is tractable for real case studies with a straightforward column generation algorithm.

No assumptions are made about the functions used to obtain cluster profits or properties. Any geometallurgical model can be used as long as a single value can be assigned for a cluster and facility combination. This flexibility shows potential to include complex interactions not yet studied in the short-term scheduling literature.

We also make no assumptions about the shape generation process. The set of feasible shapes could be changed depending on the mine operation to account for different operational requirements. Our column generation implementation is applicable for any set of feasible cluster shapes.

The rest of the paper is organized as follows: A review of the literature on short-term mine planning and geometallurgy is presented in Section 4.2. Section 4.4 presents the optimization model and column generation algorithm. Section 4.5 shows the results in a real case study. Limitations of the current approach are presented in Section 4.6 and final conclusions are discussed in Section 4.7.

4.2. Literature Review

4.2.1. Mining cut definition and geometallurgy in short-term mine planning

Compared to long-term mine planning, literature dealing with short-term problems is limited. While there are several issues related to the short-term stage, we will focus on the mining cut definition problem. A usual approach is defining the boundaries between materials according to their processing destination. Such problems are called *dig-limit optimization* and are based on a measure of mining width or operational space defined as the number of blocks that need to be extracted together and sent to the same destination. The goal is to make such a destination definition while maximizing a profit function and fulfilling the operational requirements.

Isaaks et al. (2014) use a mining width as the base unit to differentiate between destinations. An heuristic approach is used to define the best dig-limit between materials while minimizing a loss-function related to the equipment selectivity. Sari and Kumral (2017) propose a mixed-integer program to solve the dig-limit optimization problem based on valid frames: each block must belong to a pre-defined valid frame, and all the blocks belonging to the same frame must be sent to the same destination.

Ruiseco et al. (2016) also propose an heuristic approach to the dig-limit problem. The authors penalize sectors that do not comply with operational constraints. The penalization function is nonlinear, so they rely on a genetic algorithm to solve the model. Vasylichuk and Deutsch (2019) tackles this problem with an iterative heuristic based on an initial classification using a fixed grid to maximize the expected profit, and additional steps to solve problematic locations related to operational restrictions.

A common downside of the dig-limit problem is the absence of mining cut definition. While a boundary between materials is well-defined, the local mixing and nonlinear properties of the blocks are usually ignored. Processing capacity limits for each facility are usually ignored as well, and an additional step might be needed to introduce these constraints and obtain a feasible mine schedule.

Nelis and Morales (2021) propose an optimization model based on *representative SMUs*. These SMUs are used as anchor points where precedence arcs are defined to obtain connected shapes. Imposing the shape feasibility through precedence constraints could still produce problematic shapes, as noted by the authors. And while the model allows multiple processing facilities with different capacities, the cluster properties are assumed to be linear and therefore the mixing interactions are ignored.

Tabesh and Askari-Nasab (2011, 2013) propose a clustering procedure with shape control. It is based on a hierarchical clustering technique, which aggregates the blocks based on several similarity indices such as rock type, grade, destination, closeness, among others. The authors note that some problematic shapes can be generated, so a post-processing step is needed to obtain mineable clusters. This work was extended by Tabesh and Askari-Nasab (2019) to introduce geological uncertainty in the clustering process under a *possible worlds* approach. The algorithm generates a feasible mining cut definition, but scheduling constraints are introduced as a posterior step (Tabesh et al., 2014). The clustering process is based solely on similarity indices and therefore the possible interactions of the blocks attributes in the processing facility are ignored.

The literature dealing with mine planning and nonlinearity is also limited. While there exist works dealing with geometallurgical variables, they tend to omit the nonlinearity and nonadditivity of the attributes. A common approach is estimating some geometallurgical attributes at the block level, but assuming there is no complex interaction between blocks. Morales et al. (2019), for instance, used this approach with recovery and throughput rate as metallurgical variables. Another common approach is considering a processing facility flexibility to change the operational mode to deal with different geometallurgical properties (Navarra et al., 2018a; Van Den Boogaart et al., 2011). But works that deal directly with the nonlinearity and nonadditivity of geometallurgical variables are scarce and mostly focused on the long-term mine planning horizon. We briefly discuss these works to present current

approaches for nonlinear geometallurgy variables.

Goodfellow and Dimitrakopoulos (2016) declare the importance and challenging nature of incorporating nonlinear and nonadditive geometallurgical interactions in the optimization process. The authors propose a meta-heuristic approach to obtain a mine plan for a mining complex considering nonlinear recovery curves. Since the planning horizon is long-term, they do not deal with the local mixing and operational space needed in the short term. Zhang and Dimitrakopoulos (2018) presents similar shortcomings, as they propose an iterative heuristic to incorporate nonlinear recovery in a mineral value chain optimization in the long-term mine planning.

An application of the heuristic used in Goodfellow and Dimitrakopoulos (2016) is presented in Kumar and Dimitrakopoulos (2019). However, instead of dealing with a nonlinear recovery curve, they introduce nonadditive attributes related with grindability. To deal with the nonadditive nature of these attributes, the authors assign a hard or soft category to each block depending on predefined limits. Then, these categories are used to impose a desirable ratio in the blending of different materials for each processing facility. The categorical transformation simplified the blend properties and allowed the authors to use linear blending constraints in the model.

Del Castillo and Dimitrakopoulos (2016) also deal with mining complexes and geometallurgy, but their focus is on the destination decision for a given mining sequence. They proposed a *coalition formation clustering* procedure to define processing destinations of groups of similar blocks. The definition is made by considering a cooperative group value in order to cluster blocks that yield a high value blended together. The coalition process does not account for spatial considerations, and as the authors note, works under the assumption that all blocks sent to a given processing facility are blended in a yearly time-span, which is an oversimplification. They declared that adapting this approach to deal with local blending phenomena could provide more realistic results.

Garrido et al. (2017) present an approach to incorporate clay variability in the long-term scheduling. The authors declare that keeping an homogeneous clay feeding is crucial to obtain a reliable plant performance. They address this issue by defining a *geometallurgical dilution* as the mixing of different types of clay. Minimizing this metric leads to a nonlinear optimization problem, which they solve using a Tabu Search heuristic.

As noted in this review, there are no works dealing, simultaneously, with mining cut definition and geometallurgical attributes in short-term mine planning. Works that incorporate geometallurgy tend to rely on heuristics to deal with the nonlinear or nonadditive behavior of such variables, or they ignore mixing interactions altogether. In operational aspects, the definition of ‘feasible shape’ varies between works, and there is not a clear consensus in the literature.

In this work, we opt to detach the operational shape definition from the optimization model, which allows us to deal with any set of feasible shapes provided by the mining engineer. This detachment also allows us to incorporate any geometallurgical variable on the optimization process. Our approach is described in the next section.

4.3. Problem formulation

The problem addressed in this paper is organizing the extraction and processing of surface blocks in a bench of an open pit mine. There are facilities where these blocks have to be processed. Every block has to be eventually extracted and processed in one of these facilities. This has to be done over a finite number of time periods. The blocks extracted over a same period and processed in a same facility may form one or several connected components we denote as clusters.

We aim at providing a partition of the bench into clusters and to decide for each time period which clusters are extracted and in which facility the blocks are processed. A cluster assigned to a time period is completely extracted at the end of this period, and several clusters can be extracted over the same time period.

The discrimination between the possible partitions comes from the profit: extracting a cluster and processing its blocks in a facility has a profit that depends in a nonlinear and nonadditive way on the blocks in the cluster, on the facility, and on the time at which the cluster is processed. There is no constraint on the number of clusters in the partition, but there are two families of capacity constraints: there is an upper-capacity on the total weight of clusters that can be extracted over a time period, and there is a similar constraint on the total weight of clusters processed in each facility. Weight can also be a nonlinear function or a nonadditive property of the blocks in the cluster.

We assume there is a procedure to generate a feasible cluster set. We provide a small example on how this set might be generated in Appendix 4.8.1, but any procedure that fits with the operational requirements on the mine operation is allowed.

Formally, we are given a set B of blocks with a weight function $w: B \rightarrow \mathbb{R}_+$ and a collection $\mathcal{C} \subseteq 2^B$ of possible *clusters*. We are also given a set \mathcal{F} of *facilities* and an oracle $v: \mathcal{C} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ that, given a cluster and a facility, returns the *profit* of this pair. There are time periods $t = 1, \dots, T$ and a *discount rate* $\alpha \in [0, 1]$. There is a *mine capacity* K and also a *facility capacity* Q_f for each $f \in \mathcal{F}$.

The problem consists in finding a subset \mathcal{S} of \mathcal{C} providing a partition of B , and two assignments $\phi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ and $\tau: \mathcal{S} \rightarrow [T]$, which maximize:

$$\sum_{c \in \mathcal{S}} \alpha^{\tau(c)} v(c, \phi(c))$$

and which satisfy the following constraints for each $t \in [T]$:

$$\sum_{c \in \tau^{-1}(t)} w(c) \leq K \quad \text{and} \quad \sum_{c \in \tau^{-1}(t) \cap \phi^{-1}(f)} w(c) \leq Q_f, \forall f \in \mathcal{F}.$$

4.3.1. Optimization model

The following mathematical program, denoted as **Open Pit Clustering Program (OPCP)**, models the problem introduced in Section 4.3. We denote by \mathcal{C}_b the set of all clusters $c \in \mathcal{C}$

such that $b \in c$. Binary variable $x_{c,f,t}$ equals 1 if cluster c is extracted at period t and sent to facility f , and 0 otherwise.

$$\max \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^T \alpha^t v(c, f) x_{c,f,t} \quad (\text{OPCP})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{c \in \mathcal{C}_b} \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^T x_{c,f,t} = 1 \quad b \in B \quad (4.1)$$

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{f \in \mathcal{F}} w(c) x_{c,f,t} \leq K \quad t \in [T] \quad (4.2)$$

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} w(c) x_{c,f,t} \leq Q_f \quad f \in \mathcal{F}, t \in [T] \quad (4.3)$$

$$x_{c,f,t} \in \{0, 1\} \quad c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{F}, t \in [T]. \quad (4.4)$$

4.4. Method

We propose to address Problem (OPCP) with a column generation approach. We propose to solve the linear relaxation of the Problem (OPCP) using a small subset of columns (denoted as the Master Problem). Then, a pricing subproblem is used to find new columns to add to the Master Problem based on their reduced cost. This process is repeated until no columns with negative reduced cost are found. A detailed explanation of this method can be found in Lübbecke and Desrosiers (2005).

This approach can be either combined with a heuristic to generate good integer solutions, or with a branch-and-bound, or following the scheme described in Parmentier and Meunier (2020, Section 3.3). In any case, we will have to solve the pricing subproblem.

4.4.1. Pricing problem

The dual of the linear relaxation of Problem (OPCP) (imposing $x_{c,f,t} \geq 0$) is the following optimization problem:

$$\min \sum_{b \in B} \lambda_b + K \sum_{t=1}^T \mu_t + \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^T Q_f \omega_{f,t} \quad (4.5)$$

$$\text{s.t.} \quad w(c)(\mu_t + \omega_{f,t}) + \sum_{b \in c} \lambda_b \geq \alpha^t v(c, f) \quad c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{F}, t \in [T] \quad (4.6)$$

$$\mu_t, \omega_{f,t} \geq 0 \quad f \in \mathcal{F}, t \in [T]. \quad (4.7)$$

Dual variables λ_b , μ_t and $\omega_{f,t}$ are associated with Constraints (4.1), (4.2) and (4.3) respectively. Given values of the dual variables λ_b , μ_t , and $\omega_{f,t}$, the pricing subproblem is

thus:

$$\text{Find a triple } (c, f, t) \text{ maximizing } \alpha^t v(c, f) - w(c)(\mu_t + \omega_{f,t}) - \sum_{b \in c} \lambda_b.$$

Note that we can always stop the resolution of the pricing subproblem as soon as we find (c, f, t) such that $w(c)(\mu_t + \omega_{f,t}) + \sum_{b \in c} \lambda_b < \alpha^t v(c, f)$.

When \mathcal{C} is not too large, we can do this by brute-force enumeration.

4.4.2. Column generation algorithm

We solve the pricing subproblem by enumerating the set of clusters with positive reduced cost. As the efficiency of this step is critical, we opted for a vectorized approach: we calculate the reduced cost for all the clusters simultaneously. Then, the clusters with highest reduced cost are added to the master problem in each iteration.

We define \vec{w}_c as the cluster weight vector. To simplify notation, we define $v_c(t, f) = \alpha^t v(c, f)$ as the cluster value given a period and facility and equivalently, $\vec{v}_c(t, f)$ as the cluster value vector. $\vec{\lambda}_c$ is the vector of $\sum_{b \in c} \lambda_b \forall b \in B$. With these definitions, the reduced costs vector for a given facility and period is:

$$\vec{p}_c(t, f) = \vec{v}_c(t, f) - \vec{\lambda}_c - \vec{w}_c \cdot (\mu_t + \omega_{t,f}). \quad (4.8)$$

Note that we get one reduced costs vector for each (t, f) pair. Each one of these vectors is calculated sequentially. We check every possible combination until we obtain a predefined number of columns with positive reduced cost.

Algorithm 1 describes our column generation approach. It is a fairly straightforward column generation implementation with a predefined set of columns. An initial feasible solution is required to be able to solve the pricing subproblem in the first iteration. In this case, we can get a partition of the bench using regular squares or rectangles. This initial set is easy to generate and in our case studies provided a good starting point for the algorithm.

The main control variable of the algorithm is N_{max} , the upper limit on the number of columns added to the master problem in each iteration. While adding a large number of columns could reduce the number of iterations needed to find the optimal solution, it could also increase the runtime of the master problem. For this reason, we will test different strategies for the N_{max} parameter in our case study.

4.4.3. Integer solution

The simplest approach to obtain an integer solution is performing classical branch and bound. The final iteration of the master problem contains only the columns added during the algorithm, which is usually a much smaller subset of the complete cluster set. Therefore, the master problem can be solved efficiently even with binary variables. We solve this restricted master problem imposing binary restrictions to all variables to find a feasible integer solution.

Algorithm 1 Main Column Generation Algorithm

```
1: initialize  $T, \mathcal{F}, v, K, Q_f, N_{max}$ 
2:  $Cols \leftarrow \text{CLUSTERS}(B) \times T \times \mathcal{F}$ 
3:  $\mathcal{C} \leftarrow \text{INITIALFEASIBLESET}((B))$ 
4:  $m \leftarrow \text{OPCP}(\mathcal{C}, \mathcal{F}, T)$ 
5: while  $Cols \neq \emptyset$  do
6:   solve root relaxation of  $m$ 
7:    $\hat{\mathcal{C}}^+ \leftarrow \emptyset$ 
8:   for  $(f, t) \in \mathcal{F} \times [T]$  do
9:      $\vec{p}_c(t, f) \leftarrow \vec{v}_c(t, f) - \vec{\lambda}_c - \vec{w}_c \cdot (\mu_t + \omega_{t,f})$ 
10:    add  $\{(c, f, t) \in Cols\}$  to  $\hat{\mathcal{C}}^+$  if  $p_c(t, f) >= 0$ 
11:    if  $|\hat{\mathcal{C}}^+| \geq N_{max}$  then
12:      sort  $\hat{\mathcal{C}}^+$  by  $p_c(t, f)$ 
13:       $\hat{\mathcal{C}}^+ \leftarrow$  first  $N_{max}$  elements of  $\hat{\mathcal{C}}^+$ 
14:      break for
15:    end if
16:  end for
17:  if  $\hat{\mathcal{C}}^+ = \emptyset$  then
18:    No column with positive reduced cost found
19:  end while
20: end if
21: remove  $(c, f, t) \in \hat{\mathcal{C}}^+$  from  $Cols$ 
22: end while
23: return  $m.solution$ 
```

While we cannot ensure optimality for the complete master problem (OPCP), the restricted master problem solution provides a lower bound for the optimal value of (OPCP). Parmentier and Meunier (2020) describe a strategy to check if any column not added during the algorithm might improve a given integer solution.

We perform one last iteration through the cluster set. We look for columns with reduced cost larger than the gap between our lower bound (restricted master problem integer solution) and the root relaxation solution of problem (OPCP). These columns are added to the restricted master problem and it is finally solved to optimality. Algorithm 2 shows these steps, and it is performed after solving the root relaxation through Algorithm 1.

In case the restricted master problem is too large to be solved to optimality, we propose a heuristic to get a practical solution. We denote it as *practical* since it allows for intermediate unfeasible solutions that are expected to be fixed manually by a mining engineer. This heuristic was not used for the case study shown in Section 4.5, so we defer its description to Appendix 4.8.2.

4.4.4. Free selection policy

We often use a free selection policy to compare geometric results of our algorithm. In many applications, this destination policy is used as a guide to define operational dig-limits. This

Algorithm 2 Integer Solution

Require: $m.solution$: Optimal solution from Algorithm 1

Require: $Cols$: Remaining columns from from Algorithm 1

- 1: $UB \leftarrow$ Optimal value of m
 - 2: **impose:** $m.variables \in 0, 1$
 - 3: **solve** m (Restricted IP)
 - 4: $LB \leftarrow$ Optimal value of m
 - 5: $\hat{\mathcal{C}}^+ \leftarrow \emptyset$
 - 6: **for** $(f, t) \in \mathcal{F} \times [T]$ **do**
 - 7: $\vec{p}_c(t, f) \leftarrow \vec{v}_c(t, f) - \vec{\lambda}_c - \vec{w}_c \cdot (\mu_t + \omega_{t,f})$
 - 8: **add** $\{(c, f, t) \in Cols\}$ to $\hat{\mathcal{C}}^+$ if $p_c(t, f) \geq LB - UB$
 - 9: **end for**
 - 10: **add** $(c, f, t) \in \hat{\mathcal{C}}^+$ to $m.variables$
 - 11: **solve** m (Final IP)
 - 12: **return** $m.solution$
-

policy assumes perfect selectivity, understood as being able to freely extract each individual block. Therefore, the best destination under this assumption is defined as selecting the highest-profit destination for each individual block. Formally, for each block $b \in B$:

$$\text{FreeSelection}(b) = \operatorname{argmax}_{f \in \mathcal{F}} v_b(0, f), \quad (4.9)$$

where $v_b(0, f)$ is understood as the block value for facility f at period $t = 0$. Equivalently, this policy can be obtained by solving problem (OPCP), considering B as the cluster set \mathcal{C} and a single time period. Mining and capacity constraints can also be applied, although depending on the problem, some applications ignore them as well.

As this policy ignores operational constraints, it is often unfeasible for the operational problem. However, in the literature the free selection policy profit is widely used as an upper bound for any operational definition profit (Nelis and Morales, 2021; Ruiseco et al., 2016; Sari and Kumral, 2017; Vasylychuk and Deutsch, 2019), and also to compare misclassification of individual blocks when operational constraints are introduced.

4.5. Experiments

4.5.1. Case Study

The case study corresponds to a copper mine. Drillhole data were used to simulate short-term blasthole information. Four benches with different sizes (216, 432, 720 and 912 blocks respectively) were selected to test the algorithm. A large set of 32,764 shapes was generated using the approach described in Appendix 4.8.1. Using the largest set of shapes would be recommended to obtain the best feasible schedule. However, we selected smaller random subsets to show the algorithm behavior at different scales. The sizes of these subsamples were 8,000, 15,000 and 24,000 shapes. We denote each instance as “BM(Number of blocks)

- S(Number of shapes)". Therefore, case "BM432-S24" corresponds to 432 blocks and 24,000 shapes. A comprehensive list of the shapes in each set can be found in Nelis (2021).

There are three processing facilities, with different costs and profits. An upper capacity limit for each facility (Q_f), and a global mining capacity (K) were imposed. The cluster tonnage was used as the weight parameter ($w(c)$). Table 4.1 describes the economic parameters used in all cases. Facility 3 represents the waste dump, where non-profitable material is discarded. Nonlinear recovery curves ($R(g(c), f)$), depending on the copper content, are used for Facilities 1 and 2, while no material is recovered in Facility 3 (Figure 4.1). To incorporate mixing effects on the profit valuation, the recovery percentage is assigned based on the mean copper content for each cluster, $g(c)$. Eq. 4.10 shows the cluster profit calculation:

$$v(c, f) = w(c) [(P - C_s(f)) g(c) R(g(c), f) - C_p(f) - C_m] \quad (4.10)$$

Table 4.1: Economic parameters

Parameter	Facility 1	Facility 2	Facility 3
Processing Cost ($C_p(f)$) (\$/ton)	7.0	11.0	0
Selling Cost ($C_s(f)$) (\$/lb)	0.5	0.5	0
Facility Capacity (Q_f) ¹ (kton)	49.6 - 101.2 - 170.1 - 226.8	174.9 - 349.9 - 538.2 - 738.7	
Copper Price (\$/lb)		2.0	
Mining Cost (C_m) (\$/ton)		1.5	
Mining Capacity (K) ¹ (kton)		174.9 - 349.9 - 538.2 - 738.7	

¹ Upper capacity for a specific bench ordered from smallest to largest.

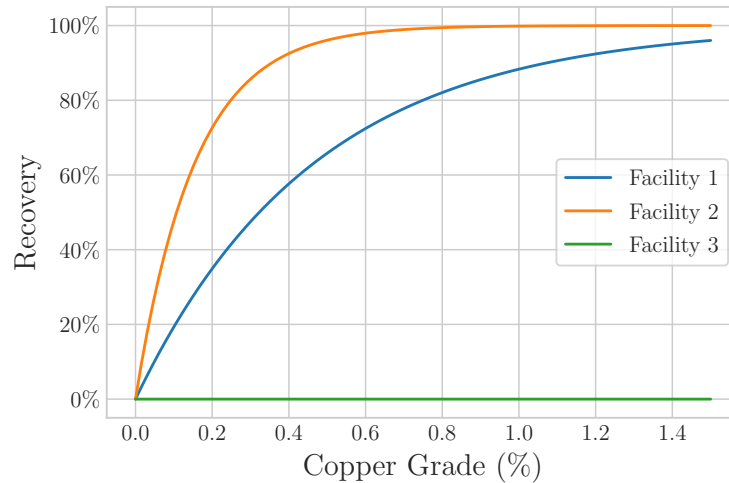


Figure 4.1: Recovery Curves

The algorithm was implemented in Python 3.8.6 and Numpy 1.19.2. Optimization problems were solved using Gurobi 9.1.0 on a AMD Ryzen 5 3600 processor with 16 GB of RAM. MIP Gap parameter was fixed at 0.01% for all integer problems. N_{max} parameter was also fixed at 1,000 columns for all instances. A detailed analysis of the effect of this parameter is show in Section 4.5.3.

4.5.2. Numerical Results

Figure 4.2 shows a cut definition and dig-limits obtained by this approach. As a reference, the free selection destination policy with capacity constraints is also shown. The free selection policy is modified by the clusters' shapes imposed to get a feasible schedule, and by the nonlinear approach to calculate the clusters' profit. The mining cut definition contains 34 clusters selected from a pool of 7.29 million candidates and three possible destinations for each one of them. Naturally, these cuts might not be operationally feasible for every mine operation. However, the resulting mining cut definition only contains clusters from the feasible set of shapes. Other operations might define different feasible shapes and the main algorithm presented in Section 4.4 would still provide the optimal solution.

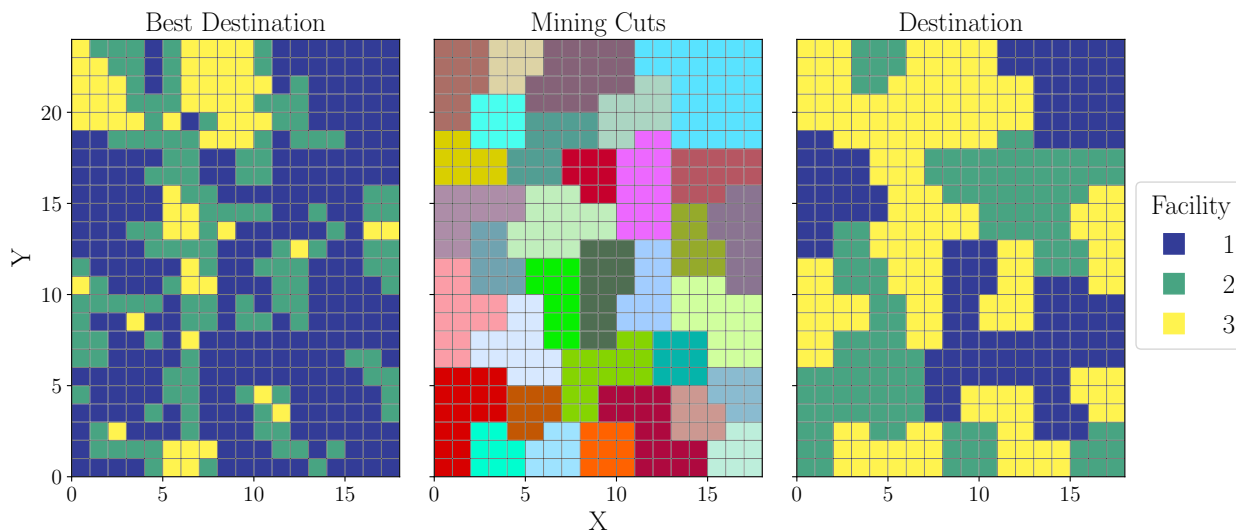


Figure 4.2: Mining cut definition for BM432 - S33

Table 4.2 summarizes our column generation algorithmic performance solving the root relaxation of Problem (OPCP). We compare runtimes and objective function values against solving the full model with Gurobi, if possible. Reported fields are described next:

- Clusters:
 - **Time:** Creation time of cluster set.
 - **N:** Number of clusters generated.
- Column Generation:
 - Overhead: Time needed to calculate the membership matrix, and value and weight vectors described in Section 4.4.2. It also includes the time to build the optimization model with the initial cluster set.
 - Columns: Total number of columns added to the master problem.
 - Runtime: Time to obtain the root node relaxed solution.

- Value: Optimal value of the objective function.
- Full Model:
 - Overhead: Time needed to build the optimization model.
 - Runtime: Time to obtain the relaxed solution of the root node.
 - Value: Optimal value of the objective function.

Table 4.2: Root relaxation

Instance	Clusters		Column Generation					Full Model		
	N	Time (s)	Overhead (s)	Columns	Iterations	Runtime (s)	Value (k\$)	Overhead (s)	Runtime (s)	Value (k\$)
BM216 - S8	600,017	19	3	9,098	13	2	5,014.8	55	248	5,014.8
BM216 - S15	1,120,597	35	5	14,437	19	5	5,042.0	107	351	5,042.0
BM216 - S24	1,790,731	57	8	19,190	24	6	5,078.3	177	571	5,078.3
BM216 - S33	2,447,373	78	11	18,313	23	6	5,102.9	235	630	5,102.9
BM432 - S8	1,785,611	58	8	31,100	30	29	11,675.0	182	791	11,675.0
BM432 - S15	3,341,299	104	16	42,959	40	42	11,707.4	349	1,980	11,707.4
BM432 - S24	5,342,551	173	26	54,374	50	53	11,748.8	618	-	-
BM432 - S33	7,297,725	236	42	72,170	59	66	11,759.0	1,105	-	-
BM720 - S8	3,547,277	113	17	49,995	55	119	18,383.3	366	8,137	23,257
BM720 - S15	6,642,073	218	34	67,919	71	172	18,876.2	864	-	-
BM720 - S24	10,622,443	338	83	88,358	90	204	18,917.6	-	-	-
BM720 - S33	14,507,157	464	136	101,899	103	211	18,939.7	-	-	-
BM912 - S8	4,806,006	153	23	59,288	61	155	22,239.8	539	-	-
BM912 - S15	9,002,674	290	65	83,389	85	229	22,285.6	1525	-	-
BM912 - S24	14,399,046	491	144	102,912	104	278	22,331.8	-	-	-
BM912 - S33	19,662,940	780	375	119,128	121	295	22,359.1	-	-	-

Table 4.3 shows the integer results for both approaches. As seen in Section 4.4.3, the column generation algorithm requires solving two integer problems to get the optimal solution: the reduced problem to get a feasible lower bound for the optimal value, and the final problem that adds several columns (reported under the 'Columns' field) to find the optimal solution of Problem (OPCP).

The optimization software does not allow to start the branch and bound algorithm using a pre-calculated root relaxation solution. For this reason, the master problem is solved again with the subset of columns added during the Column Generation process before starting the branch and bound algorithm. Runtimes reported in Table 4.3 include this re-solving time in the Restricted IP and Final IP fields.

In contrast, solving the full model only requires solving a single integer problem after the root relaxation solution dealing with all possible columns.

As a final comparison, Figure 4.3 shows the total algorithm runtime, from building the initial model to finding the optimal integer solution. For column generation, both integer problems runtimes are included. Overhead times differ between algorithms, so they are included as well.

Table 4.3: Integer Solution

Instance	Restricted IP		Final IP			Full Model	
	Runtime ¹ (s)	Obj. Value (k\$)	Columns	Runtime ¹ (s)	Value (k\$)	Runtime (s)	Value (k\$)
BM216 - S8	3	4,962.1	49,761	6	4,972.5	104	4,972.5
BM216 - S15	5	4,992.6	102,209	31	5,018.9	205	5,018.9
BM216 - S24	2	5,068.0	25,231	3	5,068.9	189	5,068.9
BM216 - S33	1	5,100.2	2,497	1	5,100.2	264	5,100.2
BM432 - S8	21	11,643.1	26,551	70	11,654.5	728	11,654.5
BM432 - S15	15	11,699.8	101,887	40	11,701.6	508 ²	11,699.7 ²
BM432 - S24	19	11,739.0	226,441	39	11,739.0	-	-
BM432 - S33	16	11,750.8	213,956	63	11,750.8	-	-
BM720 - S8	289	18,796.8	943,768	582	18,818.7	2,986 ²	18,672.9 ²
BM720 - S15	27	18,862.8	282,256	139	18,865.7	-	-
BM720 - S24	30	18,910.3	296,589	100	18,912.6	-	-
BM720 - S33	30	18,935.0	237,250	90	18,937.9	-	-
BM912 - S8	1,192	22,203.6	1,886,927	2,721	22,224.9	-	-
BM912 - S15	286	22,276.6	647,034	805	22,279.0	-	-
BM912 - S24	99	22,324.0	925,938	543	22,325.7	-	-
BM912 - S33	120	22,353.8	884,984	541	22,353.8	-	-

¹ Includes root relaxation re-solving time.

² Last runtime and value reported before “out of memory” error.

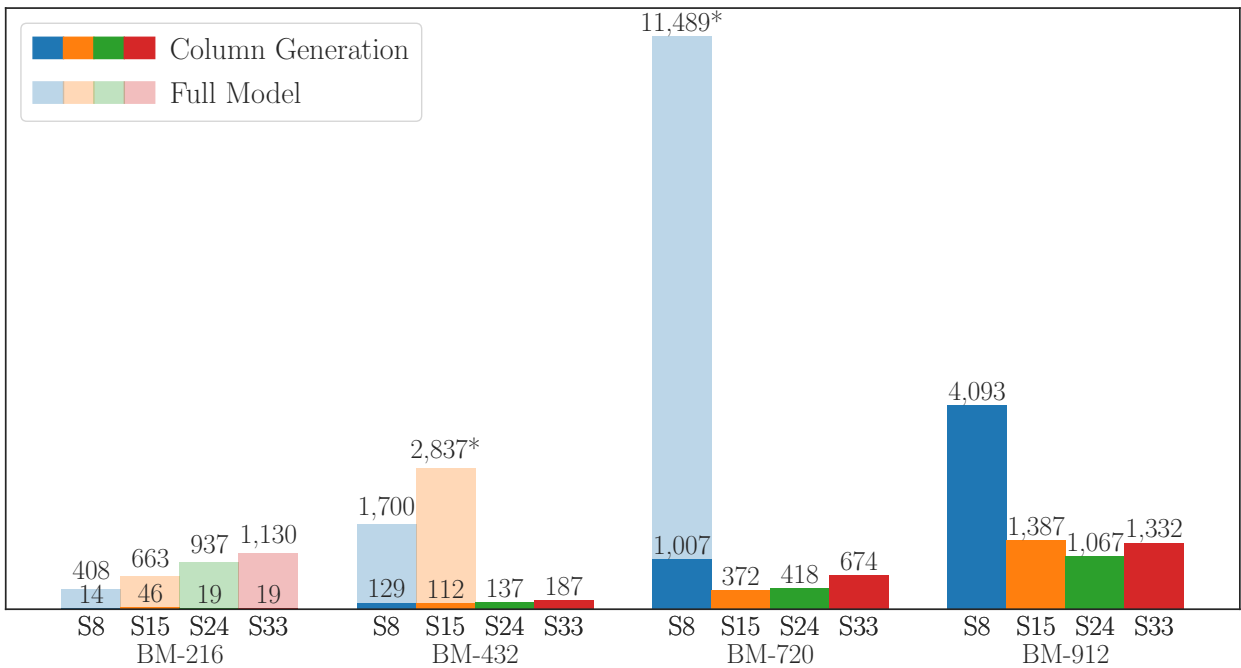


Figure 4.3: Total runtimes. Opaque bars represent column generation runtime, while transparent bars represent full model runtime. Runtime (in seconds) is displayed at the top of each bar. ‘*’ denotes instances not solved to optimality

4.5.3. Discussion

Linear relaxation

According to the results shown in Table 4.2, our column generation algorithm outperforms the full model approach in every instance. The full model runtimes are between 27 and 111 times larger than our column generation approach. In fact, setting up the full optimization model (Overhead Time) takes more time than getting the optimal solution with column generation in all instances tested. The structure of Problem OPCP, where the optimal solution contains just a small subset of all columns, favours the column generation approach as shown in these instances.

Moreover, our algorithm is not only faster but also memory-efficient. Dealing with the complete set of columns in the full model severely limits the instance size we were able to solve. In our tests, the largest instance the full model approach was able to solve consisted on 3.55 millions of clusters (10.64 millions of variables) in 8137 seconds. In comparison, our column generation algorithm was able to solve an instance of 19.7 millions of columns (59 millions of variables) in less than 300 seconds. On average, the column generation algorithm finds the optimal solution adding just 0.36% of the total columns to the master problem, which explains the large performance gap in all instances.

The number of columns added to the master problem and the number of iterations needed to reach the optimal value tends to scale with the number of columns of each instance, even for different block models. However, the block model size greatly impacts the runtime of each iteration. As a result, for a similar number of clusters, larger block models tends to show worse performance than smaller block models. This is explained by the constraints in each instance, which grows linearly with the number of blocks, making larger models harder to solve.

In terms of objective function value, the differences between sets of shapes are small. This might be related to the profit structure used for this case study, where Facilities 1 and 2 are mostly similar. Therefore, changes in destinations do not impact the objective function value in a significant way. More complex profit structure are expected to show larger differences.

Integer solution

In terms of the Integer solution, Table 4.3 shows that both algorithms finds the same optimal solution as expected. In terms of runtimes, the column generation outperforms the full model approach in every instance. Full model runtimes are between 5.7 to 120 times larger than column generation. On average, however, the performance gap is not as wide as in the root relaxation case. This is mostly because, in some instances, the lower bound provided by the restricted IP is not strong enough to limit the number of columns needed to find the optimal solution. In the most critical instance (BM912-S8), the Restricted IP goes from 60,815 columns to 1.95 million columns in the Final IP. For all instances, however, our algorithm was able to provide the optimal solution, which was not the case for the full model approach.

The value gap between the restricted and final IP solutions is also notably small, and ranges between 0% and 0.53% in every instance. The value provided by the restricted IP,

therefore, might be enough for practical uses of this approach.

Interestingly, the smaller set of shapes poses the biggest challenge for the algorithm. With a restricted set of shapes, the runtimes for both integer problems increase compared to larger set of shapes. Limiting the number of shapes also limits the number of feasible cluster combinations that deliver a feasible partition. A well populated set of shapes certainly increases the problem size, but simultaneously, presents more alternatives to get a feasible integer solution. For the current case study, results show that a larger set of shapes provides a meaningful performance advantage for the integer problems.

In terms of total runtimes (Figure 4.3), our algorithm is between 13 and 59 times faster among instances solved to optimality. In practice, the short-term schedule is prepared on a weekly or monthly basis. For all these instances, total runtimes are acceptable and could provide optimal solutions in real applications.

Algorithmic performance

An iteration in our column generation algorithm consists of three main tasks: finding columns with positive reduced cost, updating the master problem and then solving it to get a new solution. Figure 4.4 shows runtimes per task in each iteration for instance BM720 - S24. Since the number of columns added per iteration is the main control parameter of our implementation, we show three cases for this parameter as well.

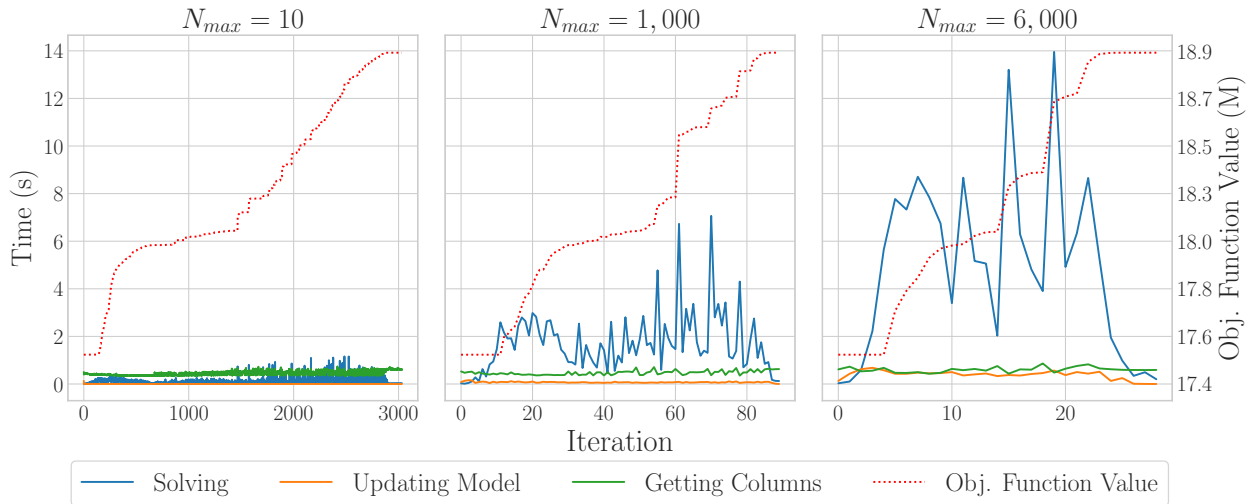


Figure 4.4: Time per task in each iteration for different values of N_{max}

There is a direct relationship between N_{max} and our algorithm runtimes in each iteration. This relationship is mainly driven by the solving time of the master problem. Adding a small set of columns keeps the problem size limited, and the warm start provided by the current solution is useful in each iteration. For larger values of N_{max} , the problem size and runtimes grow rapidly, and the warm start usefulness decreases. However, the number of iterations needed to reach the optimal solution also decreases with larger values of N_{max} , which suggest the existence of a trade-off between the total number of iterations and each iteration runtime.

To further study this trade-off, Figure 4.5 shows the root relaxation and total runtimes for

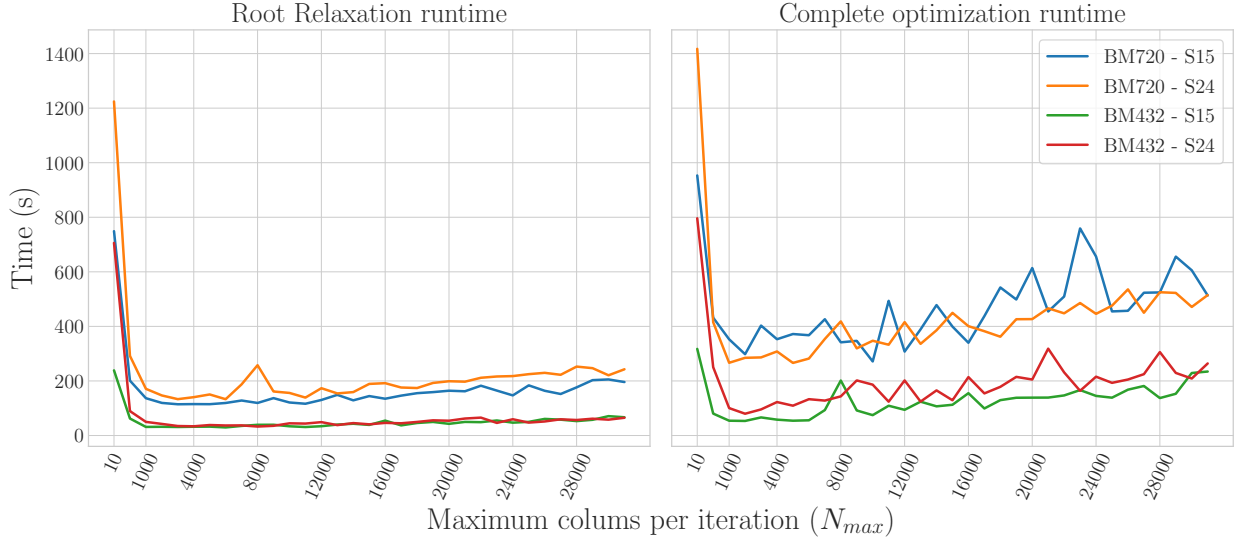


Figure 4.5: Algorithm runtime for different values of N_{max}

four instances by different values of N_{max} . For the root relaxation runtimes, all instances show the worst performance for $N_{max} = 10$. Having a faster solving time per iteration does not offset the large amount of iterations needed to reach the optimal solution. Runtimes decrease rapidly, though, and the best performance is around $N_{max} = 1000$. At higher values, a subtle trend towards higher runtimes appears, indicating that increasing the problem size too fast is detrimental to the algorithm global performance.

The trend becomes much more evident when we analyze the total runtime (which includes the integer problems). Worst performance is still achieved by the lowest value of N_{max} , and the best runtimes are still found around $N_{max} = 1000$. But the total runtime increases rapidly with higher values of N_{max} driven by the integer problems runtime. Higher values on N_{max} tends to reach the optimal solution with more columns added to the master problem. This makes both integer problems harder to solve due to the large number of variables. The number of columns added to solve the Final IP does not seem to decrease with larger values of N_{max} . Therefore, a possible solution for this issue might be dropping unused columns from the master problem to reduce its size. Since we did not face this issue with lower values of N_{max} , this step was not incorporated in the current implementation.

Nonlinear recovery effect

Lastly, we show a small example on the effect of mixing and nonlinear recovery. Recovery is a well-known nonadditive attribute in the block valuation. In the literature, the assumption of independency between adjacent block recoveries is common (Maleki et al., 2020; Morales et al., 2019), and any mixing interaction is ignored. For this case study, we incorporate geometallurgical interactions assuming a perfect mixing of the blocks inside each cluster, with a nonlinear recovery curve.

As discussed in Section 4.2, a well known short-term problem is the dig-limit definition. Problem (OPCP) can also deal with this kind of problems if all capacity bounds are removed. We show the results of a dig-limit definition problem in Figure 4.6.

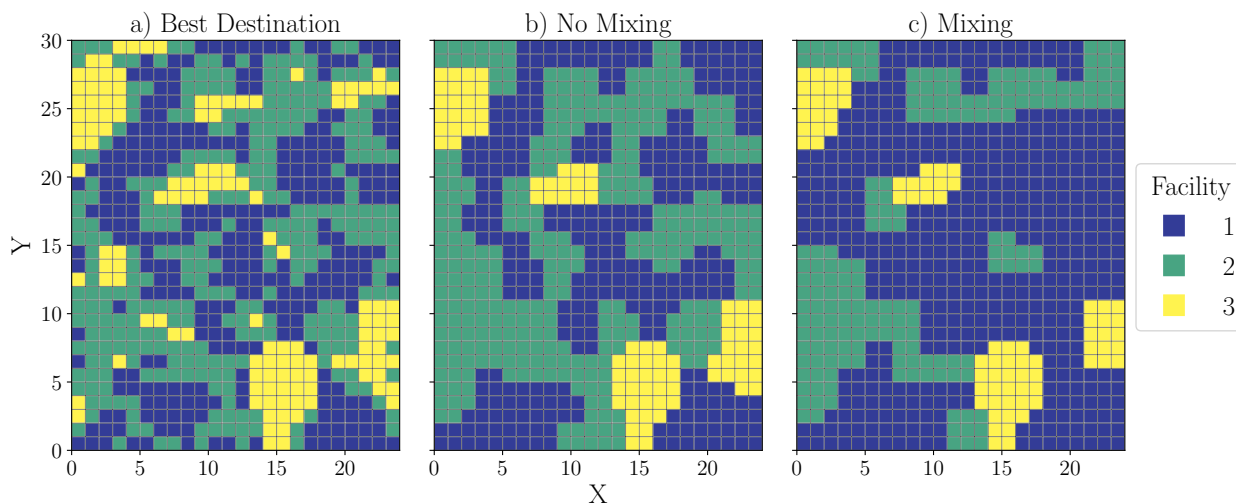


Figure 4.6: Destination Policy Comparison - BM720 - S33

Figure 4.6.a depicts the free selection policy. This definition, however, does not fulfill operational restrictions as stated in Section 4.4.4. A typical dig-limit algorithm would ignore mixing interactions of blocks extracted together. For our optimization problem, this is equivalent to define the cluster profit as the sum of the individual blocks profit, i.e., $v_c(t, f) = \sum_{b \in c} v_b(t, f)$. Under this assumption, and ignoring capacity constraints, our column generation approach results in definition 4.6.b.

The introduction of operational considerations (given by the clusters' shape) regularizes the free selection policy. In broad terms, however, both follow the same structures. For this case, the free selection policy profit was \$20.82M (Figure 4.6.a) and the operational profit (without mixing) was \$20.57M (Figure 4.6.b), lower as expected.

However, if we introduce mixing effects on the cluster profit, the dig-limit definition changes. Figure 4.6.c depicts the results of our column generation approach ignoring capacity constraints and using Eq. (4.10) to introduce mixing effects on the profit. In this example, Facility 1 becomes much more prevalent than Facility 2, while the waste remains relatively unchanged. Mixing has another effect: the profit obtained was \$20.98 M, higher than our free selection definition profit. This is a counter-intuitive result due to the recovery function shape (Fig. 4.1, which favors mixing blocks of low and high grade to yield a higher metal recovered content compared to processing these blocks independently. If we account for the mixing interactions on the definition shown in Figure 4.6.b, profit also increases from \$20.57M to \$20.82M, which is practically the same value achieved by the free selection policy.

While the value gap is rather small (which is due to the similarities between facilities 1 and 2), obtaining an operational definition with higher estimated profit than the free selection definition is a notable result. This is a clear example of how incorporating mixing effects and nonlinear recovery functions produces counter-intuitive results. More importantly, it shows that basing the dig-limit definition on the free selection policy is not the best methodology when nonadditive mixing effects are expected. The recovery curve used in this work is rather simple, and we expect seeing more sizable differences with more complex geometallurgical interactions.

4.6. Limitations

We describe some limitations of the current approach, and how they might be addressed in the future. The first is related to the description of the clusters feasible shapes. Appendix 4.8.1 shows our approach to define the feasible shapes, and while simple, works for this case study. However, different operational requirements might need a different approach to describe feasible shapes. Therefore, generating a meaningful set of feasible shapes introduces a new challenge to the short-term planning team, which is a limitation of this approach. Given the advantages of our approach, we expect more research addressing the creation of these sets for different operational considerations in the future.

Moreover, a formal definition of feasible cluster shapes is still an open challenge. This could avoid the brute-force enumeration of the current approach in favor of generating, in each iteration, the best possible set of clusters for the current solution. This would also help with the algorithmic performance, since the cluster set is the most memory-expensive data structure.

In short-term scheduling, a mining direction is commonly imposed to obtain a feasible path from the ramp in each bench. Different kinds of precedence constraints between blocks are defined to achieve this goal (Blom et al., 2017). In our model, however, we did not define variables to control the block extraction, and therefore, we did not impose horizontal precedence constraints. In the current implementation, calculating precedence arcs between all possible clusters is prohibitively large. Therefore, a new formulation of Problem (OPCP) is needed to account for these constraints in future works. A partial solution would require the mine planner to define, manually, which zones of each bench are extracted in each period. Then, our algorithm can define the mining cuts in each zone independently.

Finally, our approach is currently limited to a single bench. The multi-bench problem entails a mining cut definition for several benches that are extracted simultaneously from different sectors of a mine. This is a much more complex problem since it involves nonlinear interactions between blocks from different benches. An incremental approach could deal with this problem defining a mining cut configuration for each bench, and then obtaining a feasible schedule using these definitions as an input. However, an integrated approach should be developed to incorporate multi-bench interactions in the mining cut definition of each individual bench.

4.7. Conclusions

We presented a novel approach to tackle the short-term scheduling problem. Our approach was able to obtain feasible mining cuts definition for real case studies. Our solving methodology based on column generation outperforms general solvers and allows solving real-size instances. Also, the approach allows the incorporation of complex, nonlinear or nonadditive geometallurgical interaction in each cluster. We show how these interactions results in different mining cuts definition compared to the traditional linear approach. Limitations are related to the description of feasible shapes, horizontal precedence constraints and multi-bench problems that can be addressed in future works.

Acknowledgments

This work was (partially) funded by the National Agency for Research and Development of Chile (ANID) through PIA Project AFB180004 and Scholarship Program Doctorado Nacional 2018 - 2118155.

4.8. Appendix

4.8.1. Cluster shape generation

There is not a formal definition of an operationally feasible cluster shape. There are a series of rules that the mining engineer must follow, but they depend mostly on expert criteria and the loading equipment used in the mining operation. However, using a simple set of regular shapes we managed to get feasible and operationally sound mining cuts definition. We describe our basic procedure here, and how it can account for different operational rules. Note that this step is independent of the column generation step, and different strategies to produce these shapes can be plugged into the algorithm to account for other operational rules.

The idea is constructing a base shape as a rectangle, and appending smaller rectangles to each side of the base. The location of the side rectangles can be moved along the side of the base. The combination of all possible side rectangles and their location, for a given range of base sizes produces a rich enough set of shapes for our case studies. To get an even richer set of shapes, side shapes could be modified, or more than one shape can be stacked in each size of the base if they comply with the mine planner expert criteria.

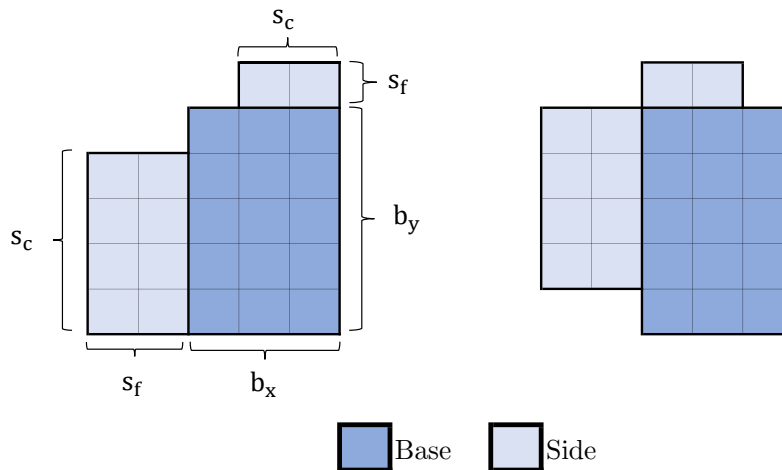


Figure 4.7: Shape generation example. Left side shows the control parameters and right side shows a possible permutation with the same side shapes but different location

An example of this procedure is shown in Figure 4.7. The design parameters are highlighted in the figure. The minimum size of the base and sides rectangles are given by the equipment selectivity to ensure there is enough operational space to extract the material. Smaller minimum sizes lead to less regular mining patterns, which tends to be more suitable to smaller loading equipment. While there is not a theoretical upper size limit for a cluster

shape, an upper bound is necessary since the mixing process is a local phenomena. The extraction of larger clusters require a larger time-span, and we cannot assume all blocks will be mixed in the processing facility. Hence, maximum size should be limited to have an accurate estimate of the cluster properties.

The control parameters are:

- b_x : Base rectangle size along the X coordinate. Limits are $[b_{min-x}, b_{max-x}]$
- b_y : Base rectangle size along the Y coordinate. Limits are $[b_{min-y}, b_{max-y}]$
- s_c : Side rectangle size along the axis parallel to the base side. Limits are $[s_{min-c}, s_{max-c}]$
- s_f : Side rectangle size along the axis perpendicular to the base side. Limits are $[s_{min-f}, s_{max-f}]$

The list of all the shapes we can generate with these parameters is too large to provide an extensive description. But using the parameters described before, and the permutations given by the different locations of the side rectangles, we were able to produce realistic clusters definitions for our case study. Note that the example only show two side rectangles, but shapes could be generated with any combination of the four side rectangles, including no sides, which leads to simple squares or rectangles.

For our case study, we generated a large set of 32,764 shapes using the following parameters, with a minimum base rectangle of 2×3 blocks:

- b_x : $b_{min-x} = 2, b_{max-x} = 6$
- b_y : $b_{min-y} = 2, b_{max-y} = 6$
- s_c : $s_{min-c} = 2, s_{max-c} = b_y - 1$
- s_f : $s_{min-f} = 1, s_{max-f} = 2$

4.8.2. Practical Heuristic

In case the procedure described in Section 4.4.3 is unsolvable due to a large number of columns, we propose a constructive heuristic to get a practical solution. It is based on trying to find a feasible solution from the basic variables of the linear relaxation. The procedure is detailed as follows:

As seen in Algorithm 3, dealing only with basic variables further reduces the size of the problem. However, finding a feasible solution becomes much more challenging, since there are fewer cluster combinations that could yield a partition of the bench. Single-block clusters provide more flexibility to the algorithm, but any solution containing these clusters would be unfeasible for the original problem. To avoid excessive use of these single-block clusters, we assign them a negative profit in the objective function. Then, we attempt to merge these blocks to a near cluster, and we test if that merging process produces a feasible shape. If a feasible partition is not found by this stage, we propose an iterative heuristic to add clusters

near the unfeasible locations.

For real applications, however, a small percentage of single-block clusters can be fixed manually by the mining engineer. While this defeats the purpose of obtaining a feasible integer solution for problem (OPCP), stop the heuristic when the number of single-block clusters in the solution falls below a given tolerance could be an attractive strategy. Table 4.4 presents the results of this heuristic for all instances described in Section 4.5. We excluded steps 25-27 of Algorithm 3 since we obtained an acceptable solution (below 5% of single-block clusters) in the first iteration.

Table 4.4: Practical heuristic

Instance	Optimal Solution ¹ (k\$)	Heuristic Solution ² (k\$)	Value Gap	Runtime (s)	Single-block clusters
BM216 - S8	4,972.5	4,841.2	2.6%	0.6	7 (3.2%)
BM216 - S15	5,018.9	4,828.6	3.8%	0.5	1 (0.5%)
BM216 - S24	5,068.9	4,858.0	4.2%	0.5	3 (1.4%)
BM216 - S33	5,100.2	5,088.4	0.2%	0.3	0 (0.0%)
BM432 - S8	11,654.5	11,526.4	1.1%	1.0	7 (1.6%)
BM432 - S15	11,701.6	11,631.5	0.6%	0.7	1 (0.2%)
BM432 - S24	11,739.0	11,462.4	2.4%	2.7	4 (0.9%)
BM432 - S33	11,750.8	11,728.8	0.2%	1.3	1 (0.2%)
BM720 - S8	18,818.7	18,242.7	3.1%	2.0	15 (2.1%)
BM720 - S15	18,865.7	18,654.5	1.1%	1.3	9 (1.3%)
BM720 - S24	18,912.6	18,780.5	0.7%	1.1	1 (0.1%)
BM720 - S33	18,937.9	18,920.6	0.1%	0.8	0 (0.0%)
BM912 - S8	22,224.9	22,019.8	0.9%	2.4	10 (1.1%)
BM912 - S15	22,279.0	22,182.0	0.4%	1.6	4 (0.4%)
BM912 - S24	22,325.7	22,113.4	1.0%	2.8	2 (0.2%)
BM912 - S33	22,353.8	22,335.8	0.1%	2.2	0 (0.0%)

¹ From Table 4.3.

² Total value does not include single-block clusters profit.

Algorithm 3 Proposed Heuristic

Require: $m.sol$: Optimal solution from Algorithm 1

- 1: $\mathcal{C}^{basic} \leftarrow \text{BASIC VARIABLES}(m.sol)$
 - 2: $m^{basic} \leftarrow \text{OPCP}(\mathcal{C}^{basic}, \mathcal{F}, T)$
 - 3: **solve:** m^{basic}
 - 4: **if** m^{basic} is unfeasible **then**
 - 5: Create single-block clusters: $\mathcal{C}^{single} \leftarrow \{\text{CLUSTER}(b) \forall b \in B\}$
 - 6: Add single-block clusters: $\mathcal{C}^{basic} \leftarrow \mathcal{C}^{basic} \cup \mathcal{C}^{single}$
 - 7: Assign negative profit: $v(c, f) \leftarrow -10^6 \forall c \in \mathcal{C}^{single}$
 - 8: update $m^{basic} : \text{OPCP}(\mathcal{C}^{basic}, \mathcal{F}, T)$
 - 9: **solve:** m^{basic}
 - 10: **for** $c_s \in m.sol^{basic} \cap \mathcal{C}^{single}$ **do**
 - 11: Find Neighbors of c_s : V_{c_s}
 - 12: **end for**
 - 13: Combine single-block clusters with neighbors: $\mathcal{C}^{new} \leftarrow \{c_s \times V_{c_s} \forall c_s \in m.sol^{basic} \cap \mathcal{C}^{single}\}$
 - 14: Purge unfeasible clusters: $\mathcal{C}^{new} \leftarrow \mathcal{C}^{new} \setminus \{c \notin \mathcal{C}\}$
 - 15: $\mathcal{C}^{basic} \leftarrow \mathcal{C}^{basic} \cup \mathcal{C}^{new}$
 - 16: update $m^{basic} : \text{OPCP}(\mathcal{C}^{basic}, \mathcal{F}, T)$
 - 17: **solve:** m^{basic}
 - 18: **if** $\mathcal{C}^{single} \cap \{c \in m.sol^{basic}\} = \emptyset$ **then**
 - 19: No single-block clusters in the solution. Feasible Solution Found.
 - 20: **terminate**
 - 21: **end if**
 - 22: **if** $|\mathcal{C}^{single}| \leq \text{Tol}$ **then**
 - 23: Number of single-block clusters less than tolerance.
 - 24: **terminate**
 - 25: **else**
 - 26: Add clusters close to $c \in \mathcal{C}^{single} \cap \{c \in m^{basic}.sol\}$
 - 27: **Goto:** 17
 - 28: **end if**
 - 29: **end if**
 - 30: **return** m^{basic} solution
-

Capítulo 5

Conclusiones

El objetivo principal de esta investigación era generar metodologías de planificación que integraran la definición de cortes de producción operacionales, el agendamiento de la producción y las interacciones geometalúrgicas en un horizonte de corto plazo. Para este fin, se desarrollaron dos modelos de optimización que abordan distintas aristas de esta problemática.

El primer trabajo introdujo un modelo de optimización con el objetivo de definir de forma simultánea el agendamiento y los cortes de producción en un horizonte de corto plazo respetando restricciones de capacidad, mezcla y avance de minado.

El modelo fue capaz de definir cortes con espacio y forma operacional adecuadas para ser usados como guía en una etapa final de diseño manual. Los cortes además de respetar condiciones operacionales, cumplen con restricciones de capacidad en cada destino y además proveen un camino factible desde el acceso de cada rampa. Más aún, el modelo permitió incorporar la extracción simultánea de dos fases de producción que comparten movimiento total mina y capacidad de procesamiento en cada destino, junto con restricciones de mezcla globales que aplican al producto final.

En términos de valor, el modelo logra capturar la mayor parte del beneficio económico contenido en el banco, con una diferencia de menos del 2 % con respecto a la política de leyes de corte, la cual no contempla restricciones operacionales.

La definición simultánea de los cortes y el plan de producción permite integrar ambas decisiones y evita problemas de factibilidad operacional y de plan de producción que se producen al tomar ambas decisiones por separado. En ese sentido, este es el primer modelo de optimización de la literatura que logra integrar ambas problemáticas de forma exitosa.

La ubicación de los representantes no tuvo gran impacto en términos del valor del agendamiento. En términos de geometría, se aprecia una diferencia menor entre los representantes elegidos por criterio ingenieril y los representantes ubicados de forma sistemática. En términos de tiempo de optimización, las diferencias fueron mayores, donde la ubicación sistemática generó un aumento de casi tres veces en el tiempo de cómputo. Sin embargo, todas las metodologías de ubicación de representantes fueron resueltas en tiempos razonables para la

operación de corto plazo.

La forma de las precedencias usadas para definir los cortes tiene un impacto mayor en las geometrías generadas. Esto permite una mayor flexibilidad en el modelo para poder incorporar distintos criterios operacionales a la hora de definir el plan de producción, dependiendo de los equipos utilizados.

Trabajos futuros en esta línea de investigación deben lidiar con diferentes alternativas de ubicación de representantes. En particular, incorporar metaheurísticas que permitan encontrar la mejor configuración de representantes para distintos casos de estudios que presenten una definición de destinos más desafiante que la utilizada en estos trabajos.

Otra alternativa es dejar al modelo decidir la ubicación de sus representantes. La formulación actual permite dejar libre esa decisión e imponer un número máximo de representantes en el banco. Sin embargo, el tamaño del problema crece rápidamente al considerar un *pool* de candidatos a representantes muy extenso. Posibles soluciones pueden cambiar la formulación con el fin de dar solución a ese problema de forma más eficiente, o probar heurísticas para resolver el problema completo en tiempos menores.

Aunque el primer modelo logra integrar de forma exitosa el agendamiento de la producción y la definición de cortes de producción, la formulación actual no permite integrar las interacciones geometalúrgicas (no lineales y/o no aditivas) dentro del proceso de optimización. Por este motivo, el segundo trabajo propone una metodología diferente para incluir estas interacciones en el problema operacional en el corto plazo.

El algoritmo propuesto, basado en el agendamiento de cortes de producción predefinidos, es la primera implementación en la literatura que logra integrar interacciones geometalúrgicas y definición de espacios operacionales en el corto plazo. Además, es posible incorporar restricciones de capacidad de procesamiento y minado para obtener un agendamiento factible.

Al precalcular todos los posibles cortes de producción, fue posible integrar cualquier función para obtener los atributos relevantes de cada corte a partir de los bloques contenidos en él. De esta forma, cualquier interacción geometalúrgica proveniente de la mezcla de dichos bloques puede ser integrada para obtener las características de procesamiento de cada corte.

El algoritmo basado en generación de columnas fue capaz de resolver el problema de forma eficiente para un caso de estudio real. Comparado con la solución completa del modelo de optimización, el algoritmo propuesto es entre 13 y 59 veces más rápido. Además, permite resolver problemas con hasta cinco veces más variables que los software de optimización de uso general.

Con este algoritmo se pudo verificar que las interacciones geometalúrgicas pueden modificar la política de destinos en la planificación de corto plazo y con eso capturar mayor valor en la operación. Además, se mostró que la política de destinos basado en leyes de corte tradicional no es una buena guía para el corto plazo cuando la mezcla es una condición relevante en la operación.

Este enfoque permite incorporar cualquier set de formas factibles al modelo de optimiza-

ción, ya que este conjunto es independiente del algoritmo de optimización. De esta forma se separa la definición operacional del modelo de optimización. En este trabajo, además, se propuso una metodología para generar formas relevantes en la operación utilizando parámetros sencillos de definir.

Dado que la forma propuesta de abordar el problema es nueva, existen variadas líneas de desarrollo para trabajos futuros. Una de estas líneas tiene relación con la definición matemática de un corte de producción operacionalmente factible. Dado que en la actualidad dicha definición no existe, es necesario realizar este precalculo inicial. Si hubiese una forma de caracterizar los cortes factibles, podría incorporarse al algoritmo una forma de generar columnas durante el proceso de optimización de forma eficiente para no lidiar con la gran cantidad de columnas que se generan en la versión actual.

El modelo actual no incorpora restricciones de avance desde un acceso, por lo cual no se incorporaron múltiples periodos en las pruebas. Dado que la cantidad de cortes de producción precalculados es muy alta, es computacionalmente infactible calcular todas las precedencias entre ellos. Por este motivo, incorporar una dirección de avance puede ser una línea de investigación futura para obtener agendamientos multiperiodo.

El uso de cortes de producción precalculados resuelve el problema de la mezcla en un banco, pero no el problema de la mezcla en múltiples fases extraídas simultáneamente. En ese sentido, la extracción de dos o más fases simultáneamente debe considerar las interacciones del material proveniente de distintos bancos y su desempeño en la planta de procesamiento. Generar agendamientos que incluyan dicha interacción puede ser abordado con heurísticas para mantener las interacciones no lineales o no aditivas dadas por la geometalurgia.

Este modelo asume que existe una forma clara para incorporar las interacciones geometalúrgicas en el calculo de los atributos de los cortes. El desarrollo de dichos modelos, sin embargo, no siempre es una labor sencilla, por lo que el desarrollo de metodologías que apunten a caracterizar de mejor forma las interacciones posibles entre las especies de interés es un área relevante de trabajo futuro para el modelo que se presenta en esta tesis.

Finalmente, en ambos trabajos presentados se asume un conocimiento perfecto del modelo de bloques, lo cual no es realista. Es necesario poder incorporar la incertidumbre tanto geológica como geometalúrgica en ambas metodologías con el fin de obtener una definición de cortes y plan de producción robusta frente a las variaciones de los atributos del modelo. De la misma forma, incorporar otros tipos de incertidumbre como operacional o de mercado puede ser abordado en una investigación futura.

Bibliografía

1. Akaike, A. y K. Dagdelen (1999). «A strategic production scheduling method for an open pit mine». En: *Proceedings of the 28th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 729-738.
2. Arthur, D. y S. Vassilvitskii (2007). «K-means++: the advantages of careful seeding». En: *Proceedings of the 18th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*. Society for Industrial y Applied Mathematics, págs.1027-1035.
3. Askari-Nasab, H., K. Awuah-Offei y H. Eivazy (2010). «Large-scale open pit production scheduling using Mixed Integer Linear Programming». En: *International Journal of Mining and Mineral Engineering* 2.3. DOI: [10.1504/IJMME.2010.037624](https://doi.org/10.1504/IJMME.2010.037624).
4. Bienstock, D. y M. Zuckerberg (2010). «Solving LP relaxations of largescale precedence constrained problems». En: *Proceedings of the 14th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 6080, págs. 1-14.
5. Blom, M., A. Pearce y P Stuckey (2019). «Short-term planning for open pit mines: a review». En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment* 33.5, págs. 318-339. DOI: [10.1080/17480930.2018.1448248](https://doi.org/10.1080/17480930.2018.1448248).
6. Blom, Michelle L., Adrian R. Pearce y Peter J. Stuckey (2017). «Short-term scheduling of an open-pit mine with multiple objectives». En: *Engineering Optimization* 49.7, págs. 777-795. DOI: [10.1080/0305215X.2016.1218002](https://doi.org/10.1080/0305215X.2016.1218002).
7. Boisvert, J., M. Rossi, K. Ehrig y C.V. Deutsch (2013). «Geometallurgical Modeling at Olympic Dam Mine, South Australia». En: *Mathematical Geosciences* 45.8, págs. 901-925. DOI: [10.1007/s11004-013-9462-5](https://doi.org/10.1007/s11004-013-9462-5).
8. Busnach, E., A. Mehrez y Z. Sinuany-Stern (1985). «A Production Problem in Phosphate Mining». En: *The Journal of the Operational Research Society* 36.4.
9. Caccetta, L. y S.P. Hill (2003). «An Application of Branch and Cut to Open Pit Mine Scheduling». En: *Journal of Global Optimization* 27, págs. 349-365.

10. Carlson, T., J. Erickson, D. O'Brian y M. Pana (1966). «Computer techniques in mine planning». En: *Mining Engineering* 18.5, págs. 53-56.
11. Carrasco, P., J.P. Chilès y S. Séguret (2008). «Additivity, metallurgical recovery, and grade». En: *Proceedings of the 8th international Geostatistics Congress*. Ed. por X. Ortiz J.M. y Emery, págs. 109-113.
12. Chanda, E.K.C. y K. Dagdelen (1995). «Optimal blending of mine production using goal programming and interactive graphics systems». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 9.4, págs. 203-208. DOI: [10.1080/09208119508964748](https://doi.org/10.1080/09208119508964748).
13. Cochilco (2018a). *Inversión en la minería chilena - Cartera de proyectos 2018 - 2027*. Estudio técnico.
14. Cochilco (2018b). *Proyección de la producción de cobre en Chile 2018 - 2029*. Estudio técnico.
15. Coward, S. y P. Dowd (2015). «Geometallurgical Models for the Quantification of Uncertainty in Mining Project Value Chains». En: *Proceedings of the 37th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 360-369.
16. Coward, S., P. Dowd y J. Vann (2013). «Value Chain Modelling to Evaluate Geometallurgical Recovery Factors». En: *Proceedings of the 36th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 288-298.
17. Coward, S., J. Vann, S. Dunham y M. Stewart (2009). «The Primary-Response Framework for Geometallurgical Variables». En: *Proceedings of the 7th International Mining Geology Conference*. Ed. por S. Dominy, págs. 109-113.
18. Dagdelen, K. y T. Johnson (1986). «Optimum Open-Pit mine production scheduling by Lagrangian relaxation». En: *Proceedings of the 19th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*. SME, págs. 127-141.
19. Del Castillo, M.F. y R. Dimitrakopoulos (2016). «A multivariate destination policy for geometallurgical variables in mineral value chains using coalition-formation clustering». En: *Resources Policy* 50, págs. 322-332. DOI: [10.1016/j.resourpol.2016.10.003](https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2016.10.003).
20. Denby, B. y D. Schofield (1994). «Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms». En: *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology* 103, A21-A26.
21. Deutsch, J., K. Palmer, C. Deutsch, J. Szymanski y T. Etsell (2016). «Spatial Modelling of Geometallurgical Properties: Techniques and a Case Study». En: *Natural Resources Research* 25.2, págs. 161-181. DOI: [10.1007/s11053-015-9276-x](https://doi.org/10.1007/s11053-015-9276-x).

22. Deutsch, M. (2017). «A Branch and Bound Algorithm for Open Pit Grade Control Polygon Optimization». En: *Proceedings of the 38th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 3.1-3.8.
23. Dimitrakopoulos, R. y A. Jewbali (2013). «Joint stochastic optimisation of short and long term mine production planning: method and application in a large operating gold mine». En: *Mining Technology* 122.2, págs. 110-123. DOI: [10.1179/1743286313Y.0000000040](https://doi.org/10.1179/1743286313Y.0000000040).
24. Dimitrakopoulos, R. y S. Ramazan (2004). «Uncertainty-based production scheduling in open pit mining». En: *SME Transactions* 316, págs. 106-112.
25. Dominy, S., L. O'Connor, H. Glass, S. Purevgerel e Y. Xie (2018a). «Towards Representative Metallurgical Sampling and Gold Recovery Testwork Programmes». En: *Minerals* 8.5, pág. 193. DOI: [10.3390/min8050193](https://doi.org/10.3390/min8050193).
26. Dominy, S., L. O'connor, A. Parbhakar-Fox, H. Glass y S. Purevgerel (2018b). «Geometallurgy — A Route to More Resilient Mine Operations». En: *Minerals* 8.12, pág. 560. DOI: [10.3390/min8120560](https://doi.org/10.3390/min8120560).
27. Dunham, S. y J. Vann (2007). «Geometallurgy, geostatistics and project value – Does your block model tell you what you need to know?» En: *Proceedings Project Evaluation 2007*, págs. 189-196.
28. Eivazy, H. y H. Askari-Nasab (2012). «A mixed integer linear programming model for short-term open pit mine production scheduling». En: *Mining Technology* 121.2, págs. 97-108. DOI: [10.1179/1743286312Y.0000000006](https://doi.org/10.1179/1743286312Y.0000000006).
29. Emery, X. (2008). «A turning bands program for conditional co-simulation of cross-correlated Gaussian random fields». En: *Computers and Geosciences* 34.12, págs. 1850-1862. DOI: [10.1016/j.cageo.2007.10.007](https://doi.org/10.1016/j.cageo.2007.10.007).
30. Emery, X. y S.A. Séguret (2020). *Geostatistics for the Mining Industry. Applications to Porphyry Copper Deposits*. 1st Edition. DOI: [10.1201/9781003050469](https://doi.org/10.1201/9781003050469).
31. Farmer, I. y R. Dimitrakopoulos (2017). «Schedule-based pushback design within the stochastic optimisation framework». En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment* 32.5, págs. 327-340. DOI: [10.1080/17480930.2017.1289606](https://doi.org/10.1080/17480930.2017.1289606).
32. Fytas, K., J. Hadjigeorgiou y J.L. Collins (1993). «Production scheduling optimization in open pit mines». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 7.1, págs. 1-9. DOI: [10.1080/09208119308964677](https://doi.org/10.1080/09208119308964677).
33. Garrido, M., M. Sepúlveda y F. Navarro (2017). «Optimization of planning and scheduling of ore body with open pit extraction considering homogeneity in clays as geometallurgical variables». En: *Proceedings of the 5th International Seminar on Mine Planning*.

34. Gershon, M. (1987). «Heuristic approaches for mine planning and production scheduling». En: *International Journal of Mining and Geological Engineering* 5.1, págs. 1-13. DOI: [10.1007/BF01553529](https://doi.org/10.1007/BF01553529).
35. Gholamnejad, J. (2008). «A zero-one integer programming model for open pit mining sequences». En: *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 108.12, págs. 759-762.
36. Goodfellow, R. y R. Dimitrakopoulos (2016). «Global optimization of open pit mining complexes with uncertainty». En: *Applied Soft Computing* 40, págs. 292-304. DOI: [10.1016/j.asoc.2015.11.038](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.11.038).
37. Goodfellow, R. y R. Dimitrakopoulos (2017). «Simultaneous Stochastic Optimization of Mining Complexes and Mineral Value Chains». En: *Mathematical Geosciences* 49.3, págs. 341-360. DOI: [10.1007/s10479-012-1258-3](https://doi.org/10.1007/s10479-012-1258-3).
38. Hochbaum, D. S. (2008). «The Pseudoflow Algorithm: A New Algorithm for the Maximum-Flow Problem». En: *Operations Research, INFORMS* 56.4, págs. 992-1009.
39. Hu, Q., W. Wei y S. Fang (1995). «Short-term production scheduling for open pit minas by PERT network with resource constraints». En: *Mine Planning and Equipment Selection 1995*. Ed. por R. Singhal, A. Mehrotra, J. Hadjigeorgiou y R. Poulin, págs. 103-108.
40. Huang, Z., W. Cai y F. Banfield (2009). «A new short-and medium-term production planning tool-Minesight Schedule Optimizer (MSSO)». En: *Proceedings of the Society for Mining, Metallurgy and Exploration; SME annual meeting & exhibit*, págs. 1-5.
41. Hustrulid, W., M. Kuchta y R. Martin (2013a). «Pit Limits». En: *Open pit Mine Planning and Design*. 3rd. Vol. 1. CRC Press/Balkena. Cap. 5, págs. 441-450.
42. Hustrulid, W., M. Kuchta y R. Martin (2013b). «Production Planning». En: *Open pit Mine Planning and Design*. 3rd. Vol. 1. CRC Press/Balkena. Cap. 6.
43. Hustrulid, W., M. Kuchta y R. Martin (2013c). «Production Planning». En: *Open pit Mine Planning and Design*. 3rd. Vol. 1. CRC Press/Balkena. Cap. 6, págs. 628-631.
44. INFORMS (2015). *¿What is Operations Research?* The Institute for Operations Research y the Management Sciences. URL: <https://www.informs.org/About-INFORMS/What-is-Operations-Research> (visitado 17-03-2016).
45. Isaaks, E., I. Treloar y T. Elenbaas (2014). «Optimum Dig Lines for Open Pit Grade Control». En: *Proceedings of the 9th International Mining Geology Conference*. Australian Institute of Mining y Metallurgy, págs. 425-432.
46. Jamshidi, M. y M. Osanloo (2018). «Multiple Destination Influence on Production Scheduling in Multi-element Mine». En: *International Journal of Engineering, TRANSACTIONS A: Basics* 31.1, págs. 173-180.

47. Jélvez, E., Morales N., P. Nancel-Penard y F. Cornillier (2020). «A new hybrid heuristic algorithm for the Precedence Constrained Production Scheduling Problem: A mining application». En: *Omega* 94, pág. 102046. DOI: [10.1016/j.omega.2019.03.004](https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.03.004).
48. Jélvez, E., N. Morales, P. Nancel-Penard y J. Peypouquet (2016). «Aggregation heuristic for the open-pit block scheduling problem». En: *European Journal of Operational Research* 249, págs. 1169-1177. DOI: [10.1016/j.ejor.2015.10.044](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.10.044).
49. Johnson, T.B. (1969). «Optimum open-pit mine production scheduling». En: *A Decade of Digital Computing in the Mining Industry, Chapter 4*. Ed. por Weiss A., págs. 539-562.
50. Kawahata, K. y K. Dagdelen (2013). «An optimization algorithm for large scale mine production scheduling problems through lagrangian relaxation». En: *Proceedings of the 36th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 548-560.
51. Kozan, E. y S.Q. Liu (2016). «A new open-pit multi-stage mine production timetabling model for drilling, blasting and excavating operations». En: *Mining Technology* 125.1, págs. 47-53. DOI: [10.1179/1743286315Y.0000000031](https://doi.org/10.1179/1743286315Y.0000000031).
52. Kozan, E. y S.Q. Liu (2018). «An Open-Pit Multi-Stage Mine Production Scheduling Model for Drilling, Blasting and Excavating Operations». En: *Advances in Applied Strategic Mine Planning*. Springer, Cham, págs. 655-668. DOI: [10.1007/978-3-319-69320-0_38](https://doi.org/10.1007/978-3-319-69320-0_38).
53. Kozan, E., S.Q. Liu y R. Wolff (2013). «A short-term production scheduling methodology for open-pit mines». En: *Proceedings of the 36th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*. Ed. por João Felipe Coimbra leite Costa, Jair Carlos Koppe y Rodrigo de Lemos Peroni, págs. 465-473.
54. Kumar, A. y R. Dimitrakopoulos (2019). «Application of simultaneous stochastic optimization with geometallurgical decisions at a copper-gold mining complex». En: *Mining Technology* 128.2, págs. 88-105. DOI: [10.1080/25726668.2019.1575053](https://doi.org/10.1080/25726668.2019.1575053).
55. Kumral, M. (2015). «Grade control in multi-variable ore deposits as a quality management problem under uncertainty». En: *International Journal of Quality & Reliability Management* 32.4, págs. 334-345. DOI: [10.1108/IJQRM-08-2013-0134](https://doi.org/10.1108/IJQRM-08-2013-0134).
56. L'Heureux, G., M. Gamache y F. Soumis (2013). «Mixed integer programming model for short term planning in open-pit mines». En: *Mining Technology* 122.2, págs. 101-109. DOI: [10.1179/1743286313Y.0000000037](https://doi.org/10.1179/1743286313Y.0000000037).
57. Lamghari, A., R. Dimitrakopoulos y J. Ferland (2014). «A variable neighbourhood descent algorithm for the open-pit mine production scheduling problem with metal uncertainty». En: *Journal of the Operational Research Society* 65.9, págs. 1305-1314. DOI: [10.1057/jors.2013.81](https://doi.org/10.1057/jors.2013.81).

58. Lamghari, A., R. Dimitrakopoulos y J. Ferland (2015). «A hybrid method based on linear programming and variable neighborhood descent for scheduling production in open-pit mines». En: *Journal of Global Optimization* 63.3, págs. 555-582. DOI: [10.1007/s10898-014-0185-z](https://doi.org/10.1007/s10898-014-0185-z).
59. Lerchs, H. e I.F. Grossmann (1965). «Optimum Design of Open-Pit Mines». En: *Transactions, C.I.M.* LXVIII, págs. 17-24.
60. Liu, S.Q. y E. Kozan (2012). «A hybrid shifting bottleneck procedure algorithm for the parallel-machine job-shop scheduling problem». En: *Journal of the Operational Research Society* 63.2, págs. 168-182. DOI: [10.1057/jors.2011.4](https://doi.org/10.1057/jors.2011.4).
61. Lotter, N., L. Kormos, J. Oliveria, D. Fragomeni y E. Whiteman (2011). «Modern Process Mineralogy: Two case studies». En: *Minerals Engineering* 24.7, págs. 638-650. DOI: [10.1016/j.mineng.2011.02.017](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2011.02.017).
62. Lübbecke, M. y J. Desrosiers (2005). «Selected Topics in Column Generation». En: *Operations Research* 53.6, págs. 1007-1023. DOI: [10.1287/opre.1050.0234](https://doi.org/10.1287/opre.1050.0234).
63. Madariaga, E. (2013). «Modelo de planificación minera de corto plazo a través de la incorporación de múltiples procesos». Tesis de Magíster. Facultad de ciencias físicas y matemáticas. Universidad de Chile.
64. Maleki, M., E. Jélvez, X. Emery y N. Morales (2020). «Stochastic Open-Pit Mine Production Scheduling: A Case Study of an Iron Deposit». En: *Minerals* 10.7, pág. 585. DOI: [10.3390/min10070585](https://doi.org/10.3390/min10070585).
65. McKay, N, J. Vann, W. Ware, C. Norley y P. Hodkiewicz (2016). «Strategic and Tactical Geometallurgy - a Systematic Process to Add and Sustain Resource Value». En: *Proceedings of the 3rd Ausimm Geometallurgy Conference*, págs. 29-36.
66. Menabde, M., G. Froyland, P. Stone y G.A. Yeates (2018). «Mining Schedule Optimisation for Conditionally Simulated Orebodies». En: *Advances in Applied Strategic Mine Planning*. Ed. por R. Dimitrakopoulos. Springer, Cham, págs. 91-100. DOI: [10.1007/978-3-319-69320-0_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-69320-0_8).
67. Montiel, L. y R. Dimitrakopoulos (2015). «Optimizing mining complexes with multiple processing and transportation alternatives: An uncertainty-based approach». En: *European Journal of Operational Research* 247.1, págs. 166-178. DOI: [10.1016/j.ejor.2015.05.002](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.05.002).
68. Morales, C. (2009). «Metodología de corto plazo integrando restricciones geometalúrgicas». Tesis de Magíster. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile.
69. Morales, N., S. Seguel, A. Cáceres, E. Jélvez y M. Alarcón (2019). «Incorporation of Geometallurgical Attributes and Geological Uncertainty into Long-Term Open-Pit Mine Planning». En: *Minerals* 9.2 (Geometallurgy), pág. 108. DOI: [10.3390/min9020108](https://doi.org/10.3390/min9020108).

70. Moreno, E., X. Emery, M. Goycoolea, N. Morales y G. Nelis (2017). «A two-stage stochastic model for open pit mine planning under geological uncertainty.» En: *Proceedings of the 38th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 13.27-13.33.
71. Mousavi, A, E. Kozan y S.Q. Liu (2014). «Integrated Approach to Optimize Open-Pit Mine Block Sequencing». En: *Industrial Engineering Non-Traditional Applications in International Settings*. Ed. por B. Bidanda, I. Sabuncuoglu y B. Y. Kara. CRC Press, págs. 83-98.
72. Mousavi, A, E. Kozan y S.Q. Liu (2016a). «Comparative analysis of three meta-heuristics for short-term open pit block sequencing». En: *Journal of Heuristics* 22.3, págs. 301-329. DOI: [10.1007/s10732-016-9311-z](https://doi.org/10.1007/s10732-016-9311-z).
73. Mousavi, A, E. Kozan y S.Q. Liu (2016b). «Open-pit block sequencing optimization: A mathematical model and solution technique». En: *Engineering Optimization* 48.11, págs. 1932-1950. DOI: [10.1080/0305215X.2016.1142080](https://doi.org/10.1080/0305215X.2016.1142080).
74. Navarra, A., T. Grammatikopoulos y K. Waters (2018a). «Incorporation of geometallurgical modelling into long-term production planning». En: *Minerals Engineering* 120, págs. 118-126. DOI: [10.1016/j.mineng.2018.02.010](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.02.010).
75. Navarra, A., A. Menzies, A. Jordens y K. Waters (2017a). «Strategic evaluation of concentrator operational modes under geological uncertainty». En: *International Journal of Mineral Processing* 164, págs. 45-55. DOI: [10.1016/j.minpro.2017.05.009](https://doi.org/10.1016/j.minpro.2017.05.009).
76. Navarra, A., L. Montiel y R. Dimitrakopoulos (2018b). «Stochastic strategic planning of open-pit mines with ore selectivity recourse». En: *International Journal of Mining, Reclamation and Environment* 32.1, págs. 1-17. DOI: [10.1080/17480930.2016.1201380](https://doi.org/10.1080/17480930.2016.1201380).
77. Navarra, A., A. Rafiei y K. Waters (2017b). «A systems approach to mineral processing based on mathematical programming». En: *Canadian Metallurgical Quarterly* 56.1, págs. 35-44. DOI: [10.1080/00084433.2016.1261501](https://doi.org/10.1080/00084433.2016.1261501).
78. Nelis, G. (2021). *Set of cluster shapes*. URL: https://github.com/gnelis/Clusters_shapes.
79. Nelis, G. y N. Morales (2021). «A mathematical model for the scheduling and definition of mining cuts in short-term mine planning». En: *Optimization and Engineering*. DOI: [10.1007/s11081-020-09580-1](https://doi.org/10.1007/s11081-020-09580-1).
80. Neufeld, C.T., K.P. Norrena y C.V. Deutsch (2003). «Semi-Automatic Dig Limit Generation». En: *Centre for Computational Geostatistics Report 5 - 115*. University of Alberta, Canada.
81. Newman, A., E. Rubio, R. Caro, A. Weintraub y K. Eurek (2010). «A Review of Operations Research in Mine Planning». En: *Interfaces* 40.3. Ed. por INFORMS, págs. 222-245. DOI: [10.1287/inte.1090.0492](https://doi.org/10.1287/inte.1090.0492).

82. Norrena, K. P., C. Neufeld y C. V. Deutsch (2002). «An Update on Automatic Dig Limit Determination». En: *Centre for Computational Geostatistics Report 4 - 115*. University of Alberta, Canada.
83. Norrena, K.P. y C.V. Deutsch (2001). «Automatic Determination of Optimal Dig Limits Accounting for Uncertainty and Equipment Constraints». En: *Centre for Computational Geostatistics Report 3 - 114*.
84. Nwaila, G., Y. Ghorbani, M. Becker, H. Frimmel, J. Petersen y S. Zhang (2020). «Geometallurgical Approach for Implications of Ore Blending on Cyanide Leaching and Adsorption Behavior of Witwatersrand Gold Ores, South Africa». En: *Natural Resources Research* 20, págs. 1007-1030. DOI: [10.1007/s11053-019-09522-4](https://doi.org/10.1007/s11053-019-09522-4).
85. Parmentier, A. y F. Meunier (2020). «Aircraft routing and crew pairing: Updated algorithms at Air France». En: *Omega* 93. DOI: [10.1016/j.omega.2019.05.009](https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.05.009).
86. Rehman, S. y M. Asad (2010). «A mixed-integer linear programming (MILP) model for short-range production scheduling for cement quarry operations». En: *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 27.3, págs. 315-333. DOI: [10.1142/S0217595910002727](https://doi.org/10.1142/S0217595910002727).
87. Reyes, M. (2017). «Operative mine planning, design and geological modeling: Integration based on topological representations». Tesis de Doctorado. Universidad de Chile.
88. Richmond, A.J. y J.E. Beasley (2004). «Financially Efficient Dig-Line Delineation Incorporating Equipment Constraints and Grade Uncertainty». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 18.2, págs. 99-121. DOI: [10.1080/13895260412331295376](https://doi.org/10.1080/13895260412331295376).
89. Ruiseco, J.R., J. Williams y M. Kumral (2016). «Optimizing Ore–Waste Dig-Limits as Part of Operational Mine Planning Through Genetic Algorithms». En: *Natural Resources Research* 25.4, págs. 99-121. DOI: [10.1007/s11053-016-9296-1](https://doi.org/10.1007/s11053-016-9296-1).
90. Saavedra-Rosas, J., E. Jélvez, J. Amaya y N. Morales (2016). «Optimizing open-pit block scheduling with exposed ore reserve». En: *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 116.7, págs. 655-662. DOI: [10.17159/2411-9717/2016/v116n7a7](https://doi.org/10.17159/2411-9717/2016/v116n7a7).
91. Samavati, M., D. Essam, M. Nehring y R. Sarker (2018). «A new methodology for the open-pit mine production scheduling problem». En: *Omega* 81, págs. 169-182. DOI: [10.1016/j.omega.2017.10.008](https://doi.org/10.1016/j.omega.2017.10.008).
92. Sari, Y. A. y M. Kumral (2017). «Dig-limits optimization through mixed-integer linear programming in open-pit mines». En: *Journal of the Operational Research Society* 69.2, págs. 171-182. DOI: [10.1057/s41274-017-0201-z](https://doi.org/10.1057/s41274-017-0201-z).
93. Sepúlveda, E., P. Dowd, C. Xu y E. Addo (2017). «Multivariate Modelling of Geometallurgical Variables by Projection Pursuit». En: *Mathematical Geosciences* 49.1, págs. 121-143. DOI: [10.1007/s11004-016-9660-z](https://doi.org/10.1007/s11004-016-9660-z).

94. Sepúlveda, E., P. A. Dowd y C. Xu (2018a). «Fuzzy Clustering with Spatial Correction and Its Application to Geometallurgical Domaining». En: *Mathematical Geosciences* 50.8, págs. 895-928. DOI: [10.1007/s11004-018-9751-0](https://doi.org/10.1007/s11004-018-9751-0).
95. Sepúlveda, E., P. A. Dowd y C. Xu (2018b). «The optimisation of block caving production scheduling with geometallurgical uncertainty – a multi-objective approach». En: *Mining Technology* 127.3, págs. 131-145. DOI: [10.1080/25726668.2018.1442648](https://doi.org/10.1080/25726668.2018.1442648).
96. Sevim, H. y D. Lei (1998). «The problem of production planning in open pit mines». En: *Information Systems and Operations Research* 36.
97. Shapley, L. (1953). «A Value for n-person Games». En: *Contributions to the Theory of Games*. Ed. por H.W. Kuhn y A.W. Tucker. Vol. 2. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, págs. 307-317.
98. Smith, M. (1998). «Optimizing short-term production schedules in surface mining: Integrating mine modeling software with AMPL/ CPLEX». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 12.4, págs. 149-155. DOI: [10.1080/09208118908944038](https://doi.org/10.1080/09208118908944038).
99. Smith, M. y T. You (1995). «Mine production scheduling for optimization of plant recovery in surface phosphate operations». En: *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment* 9.2, págs. 41-46. DOI: [10.1080/09208119508964716](https://doi.org/10.1080/09208119508964716).
100. Souza, M., I. Coelho, H. Santos y L. Merschmann (2010). «A hybrid heuristic algorithm for the open-pit-mining operational planning problem». En: *European Journal of Operational Research* 207.2, págs. 1041-1051. DOI: [10.1016/j.ejor.2010.05.031](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.05.031).
101. Stone, P., G. Froyland, M. Menabde, B. Lwa, R. Pasyar y P. Monkhouse (2004). «Blasor — Blended Iron Ore Mine Planning Optimisation at Yandi, Western Australia». En: *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Uncertainty and Risks Management*. Ed. por R. Dimitrakopoulos. Ed. por S. Ramazan. Melbourne: The Australian Institute of Mining y Metallurgy, págs. 285-288.
102. Sundar, D.K. y D. Acharya (1995). «Blast schedule planning and shiftwise production scheduling of an opencast iron mine». En: *Computers & Industrial Engineering* 28.4, págs. 927-935. DOI: [10.1016/0360-8352\(94\)00221-8](https://doi.org/10.1016/0360-8352(94)00221-8).
103. Tabesh, M. y H. Askari-Nasab (2011). «Two-stage clustering algorithm for block aggregation in open pit mines». En: *Mining Technology* 120.3, págs. 158-169. DOI: [10.1179/1743286311Y.0000000009](https://doi.org/10.1179/1743286311Y.0000000009).
104. Tabesh, M. y H. Askari-Nasab (2013). «Automatic Creation of Mining Polygons Using Hierarchical Clustering Techniques». En: *Journal of Mining Science* 49.3, págs. 426-440. DOI: [10.1134/S1062739149030106](https://doi.org/10.1134/S1062739149030106).
105. Tabesh, M. y H. Askari-Nasab (2019). «Clustering mining blocks in presence of geological uncertainty». En: *Mining Technology*. DOI: [10.1080/25726668.2019.1596425](https://doi.org/10.1080/25726668.2019.1596425).

106. Tabesh, M., C. Mieth y H. Askari-Nasab (2014). «A multi-step approach to long-term open-pit production planning». En: *Int. J. Mining and Mineral Engineering* 5.4, págs. 273-298. DOI: [10.1504/IJMME.2014.066577](https://doi.org/10.1504/IJMME.2014.066577).
107. Tan, S. y R. Ramani (1992). «Optimization Models For Scheduling Ore And Waste Production In Open Pit Mines». En: *Proceedings of the 23rd International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*. SME, págs. 781-791.
108. Tavares, L.M. y R. Kallemback (2013). «Grindability of binary ore blends in ball mills». En: *Minerals Engineering* 41, págs. 115-120. DOI: [10.1016/j.mineng.2012.11.001](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2012.11.001).
109. Underwood, R. y B. Tolwinski (1998). «A mathematical programming viewpoint for solving the ultimate pit problem». En: *European Journal of Operations Research* 107.1.
110. Van Den Boogaart, K.G., C. Weibflog y J. Gutzmer (2011). «The Value of Adaptive Mineral Processing based on spatially varying Ore Fabric Parameters». En: *Proceedings of IAMG 2011*.
111. Van Tonder, E., D.A. Deglon y T.J. Napier-Munn (2010). «The effect of ore blends on the mineral processing of platinum ores». En: *Minerals Engineering* 23, págs. 621-626. DOI: [10.1016/j.mineng.2010.02.008](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2010.02.008).
112. Vargas, M. (2011). «Modelo de planificación minera de corto y mediano plazo incorporando restricciones operacionales y de mezcla». Tesis de Magister. Facultad de ciencias físicas y matemáticas, Universidad de Chile.
113. Vasylchuk, Y. y C. Deutsch (2018). «Improved grade control in open pit mines». En: *Mining Technology* 127.2, págs. 84-91. DOI: [10.1080/14749009.2017.1363991](https://doi.org/10.1080/14749009.2017.1363991).
114. Vasylchuk, Y.V. y C.V. Deutsch (2019). «Optimization of Surface Mining Dig Limits with a Practical Heuristic Algorithm». En: *Mining, Metallurgy & Exploration*. DOI: [10.1007/s42461-019-0072-8](https://doi.org/10.1007/s42461-019-0072-8).
115. Villalba, M. y R. Dimitrakopoulos (2016). «Stochastic short-term mine production schedule accounting for fleet allocation, operational considerations and blending restrictions». En: *European Journal of Operational Research* 255.3, págs. 911-921. DOI: [10.1016/j.ejor.2016.05.050](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.050).
116. Volk, P., F. Rosenthal, M. Hahmann, D. Habich y W. Lehner (2009). «Clustering Uncertain Data With Possible Worlds». En: *Proceedings of the 25th IEEE International Conference on Data Engineering*, págs. 1625-1632. DOI: [10.1109/ICDE.2009.174](https://doi.org/10.1109/ICDE.2009.174).
117. Wang, Q. y H. Sun (2001). «A theorem on open pit planning optimization and its application». En: *Proceedings of the 29th International Symposium on the Applications of Computers and Operations Research in the Mineral Industry (APCOM)*, págs. 295-298.

118. Wilde, B. J. y C. V. Deutsch (2007a). «A Short Note Comparing Feasibility Grade Control with Dig Limit Grade Control». En: *Centre for Computational Geostatistics Report 9 - 302*. University of Alberta, Canada.
119. Wilde, B. J. y C. V. Deutsch (2007b). «Feasibility Grade Control (FGC): Simulation of Grade Control on Geostatistical Realizations». En: *Centre for Computational Geostatistics Report 9 - 301*. University of Alberta, Canada.
120. Wills, B. y J. Finch (2016). «Modeling and Characterization. Geometallurgy». En: *Wills' Mineral Processing Technology*. 8th edition. Butterworth-Heinemann. Cap. 17.5, págs. 454-458. DOI: [10.1016/B978-0-08-097053-0.00017-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097053-0.00017-0).
121. Yan, D. y R. Eaton (1994). «Breakage properties of ore blends». En: *Minerals Engineering* 7.2/3, págs. 185-199. DOI: [10.1016/0892-6875\(94\)90063-9](https://doi.org/10.1016/0892-6875(94)90063-9).
122. Yavarzadeh, S., J. Abodallheisharif y A. Neishabouri (2014). «Modeling of Short Term Production Scheduling with the Objective Grade Control». En: *Mine Planning and Equipment Selection 2014*. Ed. por C. Drebenstedt y R. Singhal, págs. 379-387. DOI: [10.1007/978-3-319-02678-7_37](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02678-7_37).
123. Zhang, J., R. Barrie y R. Dimitrakopoulos (2019). «Optimizing a mineral value chain with market uncertainty using benders decomposition». En: *European Journal of Operational Research* 274.1, págs. 227-239. DOI: [10.1016/j.ejor.2018.09.047](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.09.047).
124. Zhang, J. y R. Dimitrakopoulos (2017). «A dynamic-material-value-based decomposition method for optimizing a mineral value chain with uncertainty». En: *European Journal of Operational Research* 258.2, págs. 617-625. DOI: [10.1016/j.ejor.2016.08.071](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.08.071).
125. Zhang, J. y R. Dimitrakopoulos (2018). «Stochastic optimization for a mineral value chain with nonlinear recovery and forward contracts». En: *Journal of the Operational Research Society* 69.6, págs. 864-875. DOI: [10.1057/s41274-017-0269-5](https://doi.org/10.1057/s41274-017-0269-5).
126. Zhang, M. (2006). «Combining genetic algorithms and topological sort to optimize open-pit mine plans». En: *Proc. 15th Internat. Sympos. Mine Planning Equipment Selection (MPES)*, págs. 1234-1239.