UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

DURACIÓN DE LICENCIAS Y BIENESTAR SOCIAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

EXEQUIEL FRANCISCO PADILLA BELMAR

PROFESOR GUÍA:
JUAN ESCOBAR CASTRO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RONALD FISCHER BARKAN
CARLOS NOTON NORAMBUENA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT

SANTIAGO DE CHILE
2021

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA
POR: EXEQUIEL FRANCISCO PADILLA BELMAR
FECHA: 2021
PROF. GUÍA: JUAN ESCOBAR CASTRO

DURACIÓN DE LICENCIAS Y BIENESTAR SOCIAL

Cuando se quiere licitar una concesión como las de espectro radioeléctrico surge inmediatamente la pregunta sobre su tiempo de caducidad. Generalmente se asocia una baja (o sub) inversión a una concesión corta, pero con el beneficio de poder permitir la temprana participación de firmas entrantes más eficientes o con proyectos más valorados. Si bien el *trade-off* parece intuitivo, la literatura de organización industrial carece de un modelo formal que dé cuenta de los efectos que emergen de la duración de una concesión y su impacto en el bienestar.

Analizamos un modelo de dos periodos donde un incumbente dueño de una licencia que le permite ser el monopolio en un mercado, puede realizar una inversión costosa en el presente y recibir posiblemente los beneficios en el futuro. Cuando la licencia es corta el incumbente corre el riesgo de no beneficiarse de la inversión ya que hay un potencial entrante que puede participar de la relicitación y ganar la licencia, quitándole el puesto en el mercado. Cuando la licencia es larga no existe este riesgo y el incumbente es el monopolio en ambos periodos.

A pesar del riesgo que el incumbente enfrenta cuando la licencia es corta, la existencia de un pequeño costo de participación en la licitación genera un incentivo adicional a invertir con el fin de disminuir la probabilidad de competencia y llevarse la licencia a un precio de reserva.
En cuanto al bienestar, encontramos que si el incumbente es poco eficiente, entonces una licencia corta es socialmente preferida. Además, bajo ciertas condiciones, se podría generar mayor inversión en licencias cortas que en largas, lo que es deseable cuando el consumidor obtiene un alto beneficio en el mercado.

Nuestro trabajo tiene implicancias en la regulación de mercados como el de espectro radioeléctrico para telecomunicaciones, sugiriendo que desde el punto de vista de eficiencia, licencias cortas rinden mejor.

A mi familia y amigos: por el apoyo, motivación y buenos consejos. Este logro es tanto de ellos como mío. También el azar hizo lo suyo.

Agradecimientos

Al cuerpo docente, administradores(as) y compañeros(as) del magister. A los(as) profesores(as) por la buena enseñanza y por tomar en cuenta y premiar el esfuerzo de sus estudiantes. A mi profesor guía Juan Escobar por su apoyo y motivación. A la secretaria Olguita por los millones de trámites que me hizo. A mis compañeros(as) de batalla, con los que aprendí a compartir y colaborar, y con quienes sufrimos juntos sobre todo el primer semestre.
A mis amigos.
A mi mamá y papá por el amor incondicional.
A mis otras mamás y papás que me han recibido en sus hogares durante periodos no acotados.
A mi squad del Call of Duty mobile con quienes disfrutamos jugando y riendo todas las noches, a pesar de morir pronto.
Al grupo de Whatsapp “Memes y otras delicias”, que alegra mis días.
A las funciones cóncavas y diferenciables, que hacen la vida del economista más sencilla.

Tabla de Contenido

Introducción

Las licitaciones son importantes a la hora de asignar eficientemente recursos escazos, y lo son aun más cuando dichos recursos son utilizados por privados para preveer algún bien o servicio valorado por la sociedad, como los servicios de telecomunicación. En particular, cuando se licita una concesión se debe determinar el tiempo de caducidad que tendrá, y comprender los efectos que provocará en el comportamiento de la firma concesionaria. Lo que se pretende en este trabajo es entender los efectos en los incentivos de inversión de las firmas y el bienestar social cuando se decide sobre la duración de una licencia, y ofrecer un contexto en el cual tenga sentido considerar cada una de las configuraciones.

El trade-off ampliamente aceptado entre economistas es que una licencia larga (un derecho a participar en un mercado, que dure un largo periodo) promueve la inversión de largo plazo, mientras se sacrifica la pronta inclusión de firmas entrantes más eficientes y proyectos de más valor que surgen en el tiempo. Meister (2005)[15] estudia el caso del monopolio del agua usando un modelo simple de dos periodos donde muestra que cuando se usa una licencia corta se invierte menos y dicha disminución depende del tipo de licitación que se use. Si bien nuestro modelo es similar al de Meister, se diferencia en tres aspectos importantes. El primero es que hacemos endógena la decisión de participación en la licitación del potencial entrante. Segundo, utilizamos una función explícita para medir el bienestar social y por último, suponemos que la inversión del incumbente es observada por la firma entrante.
Weyl y Lee Zhang (2017)[19] abordan el problema inversión-innovación en el mercado de espectro radioeléctrico, proponiendo un nuevo tipo de licencias. Estas no tienen un tiempo de caducidad. Cada año, el dueño de una licencia debe revelar en cuánto la valora y debe estar dispuesto a venderla a ese precio a cualquier otra firma. Además, debe pagar una anualidad igual a un cierto porcentaje del valor anunciado. Así, los dueños de las licencias que deseen invertir a largo plazo de forma más segura pueden anunciar un alto valor a cambio de pagar un poco más, mientras los que tienen planes a corto plazo pueden fijar un valor bajo. Su implementación supone un cambio radical en la asignación de licencias, aunque Milgrom et al. (2017) sugiere una aproximación a este tipo de licencias usando las clásicas licitaciones con algunas cuidadosas modificaciones en las reglas. En el modelo de Weyl y Lee Zhang se analiza el trade-off entre inversión y la anualidad pagada por el dueño de la licencia.
Arozamena y Cantillon (2000)[4] estudian los incentivos de una firma que puede invertir para reducir sus costos marginales previo a una licitación primer precio, que garantiza vender un bien o servicio. Muestran que la firma tenderá a subinvertir ya que prevee una competencia más feroz en la licitación. Las firmas oponentes al ver la inversión reaccionan apostando de forma "agregada" más agresivamente. Tal efecto indeseado desaparece con la licitación se-

gundo precio, que asegura una inversión eficiente. En este paper la inversión es una decisión discreta (se hace o no) que reduce el costo marginal de forma estocástica y el número de participantes de la licitación es fijo. En cambio, la inversión en nuestro modelo es continua y genera un aumento del valor de la licencia de forma segura, mientras solamente permitimos la participación de a lo más un competidor en la licitación.
Cabe destacar que en nuestro trabajo tratamos en un ambiente con un monopolio, supuesto que no es inocuo pero que simplifica el análisis comparado a una competencia oligopolística. A continuación describimos nuestro modelo.

Un incumbente dueño de una licencia que le permite producir un bien (o servicio) debe decidir cuánto invertir en su empresa para así obtener mayores utilidades en el mercado donde vende dicho bien. Por ejemplo, podríamos pensar en una compañía de telecomunicaciones que tiene una licencia de esprecto electromagnético para poder producir servicios de telefonía e internet que debe decidir cuánto invertir en antenas. Una mayor cantidad de antenas le permite brindar una conexión más rápida y más estable, con lo cual puede cobrar más por un mejor servicio, aumentando sus utilidades. Dicha inversión tiene un efecto positivo tanto en los ingresos de la firma como en el bienestar de los consumidores. También podemos pensar en la inversión como un medio a través del cual el monopolio reduce sus costos marginales, permitiéndole obtener mayores márgenes en el mercado y resultando en menores precios, y por ende un mayor bienestar para el consumidor. Cualquiera sea el caso, la firma invierte para maximizar su propia utilidad y no considera en sus cálculos el beneficio extra que queda para los consumidores. Éstos últimos obtienen utilidades del intercambio ya que supondremos (y en realidad suele ser así) que hay una asimetría de información, en la que el monopolio no conoce con exactitud cuánto valoran el bien los consumidores (Patrick Bolton y Mathias Dewatripont 2005, 48-50)[5]. Por lo tanto, la inversión beneficia tanto a los consumidores como a la firma misma. Como la firma sólo está pensando en invertir para extraer parte de la renta de los consumidores y no para maximizar el valor total del mercado, dicha inversión es subóptima desde el punto de vista del bienestar de toda la economía (consumidor y productor). En particular, el nivel de inversión de la firma depende estrechamente del plan de negocios que tenga y su eficiencia para ejecutarlo; es esperable que una empresa altamente eficiente y visionaria quiera (y requiera) comprar y contratar más y mejores insumos de lo que haría otra que apenas puede mantenerse en el negocio, logrando mejores servicios y/o un costo por unidad producida más pequeños.

Para apreciar los efectos que tendría una modificación en la duración de una concesión presentamos dos configuraciones de mercado, en las que un monopolio decide invertir sabiendo si su licencia es esporádica o permanente. A grandes rasgos, en la configuración de *Licencias Largas* el incumbente posee una licencia que le garantiza producir ambos periodos y luego el juego se termina. En cambio, en *Licencias Cortas* el incumbente es dueño de una licencia que dura sólo un periodo, la cual será relicitada para determinar al monopolio del segundo periodo. El supuesto principal que mantenemos en nuestro modelo es que la inversión es de largo plazo, como explicamos a continuación: en ambos mundos la inversión debe hacerse al principio del primer periodo y sus beneficios se reciben solamente en el segundo[1]. Así, en Licencias Cortas el monopolio corre el riesgo de invertir sin recibir retorno alguno.

[1]Eliminamos la posibilidad de recibir beneficios en el corto plazo con el fin de simplificar el modelo, ya

Uno de nuestros principales resultados es que el incumbente puede usar su inversión para desalentar competencia en la relicitación. Ocurren dos efectos antagónicos cuando la licencia es corta. Por un lado, está el riesgo de perder y no recibir los ingresos derivados de la inversión, pero por otro lado, una inversión mayor desalienta a potenciales entrantes, que al reconocer que no podrán ganar prefieren evitarse el costo de participar, lo que le permite al incumbente llevarse la licencia gratis. Este resultado está relacionado con que el formato de la licitación es una segundo precio, aunque con un supuesto razonable podemos extenderlo a una licitación primer precio. Así, contribuimos a la literatura de *entry-deterrence*, muy estudiada en organización industrial (Dixit, 1980; Fundenberg y Tirole, 2000). De la mano de este resultado, bajo ciertas condiciones, encontramos que incluso es posible una inversión mayor en licencias cortas, por lo que si el consumidor obtiene un alto beneficio en el mercado aguas abajo, dichas licencias serán socialmente preferidas[2].
Medimos el bienestar social suponiendo que los consumidores se benefician de forma proporcional a los beneficios de la firma y obtenemos una conclusión esperada: si el incumbente es ineficiente y el costo marginal de la inversión es relativamente alto, entonces una licencia corta es socialmente preferida ya que los beneficios esperados del potencial entrante son mayores que incluso aquellos generados por el incumbente en una licencia larga.

Argumentamos que nuestro modelo sugiere usar licencias cortas en el mercado de espectro radioeléctrico debido a la alta innovación, sus benenenficios directos y la externalidad positiva que produce. La tecnología 5G ya se está desarrollando en diversos países y sus beneficios reflejados en mejor conectividad, implementación del internet de las cosas y ciudades inteligentes, se espera que generen un gran valor para sus economías.

El trabajo está ordenado de la siguiente manera. En el capítulo 1 planteamos de manera formal nuestro modelo que se compone de las dos configuraciones posibles del mercado. En el capítulo 2 resolvemos y analizamos cada configuración, para luego en el capítulo 3 revisar las limitaciones de nuestro modelo junto con ofrecer algunas extensiones. En el capítulo 4 se discuten las implicancias en el plano regulatorio y finalmente concluimos.

que nos importa la inversión que arriesga el incumbente. Además podría existir una inversión de corto plazo que brinde beneficios en el mismo periodo de ejecución. Ignoramos esta posibilidad pero estamos concientes que su existencia podría tener un impacto en los resultados.

[2]Para extender nuestros resultados a una competencia de oligopolio se debe tener cuidado, ya que la inversión de las firmas podrían ser complementos o sustitutos estratégicos.

Capítulo 1

Modelo

En este capítulo planteamos el juego de manera formal. Al final se incluyen los supuestos claves para los resultados obtenidos.

Un monopolio que tiene un plan de negocios y cierta eficiencia para ejecutarlo, que resumiremos en su tipo $\theta \in [0,1]$, puede hacer una inversión al principio del periodo 1 para recibir sus beneficios en el periodo 2, siempre y cuando continúe en el mercado. En ambos periodos el monopolio vende el bien que produce y obtiene θ en el primer periodo y $h(I,\theta) = \theta + I + \alpha\theta I$ en el segundo, si es que corresponde, donde I es la inversión y α es un escalar no negativo que representa la complementariedad e interacción entre el plan de la firma y su inversión. Este $h(I,\theta)$ es la utilidad indirecta del monopolio en el mercado aguas abajo. El costo de invertir I es $C(I) = \frac{a}{2}I^2$, con $a > 0$. Por otro lado, supondremos que los consumidores se benefician en alguna proporción de la renta que obtiene la firma. Específicamente, en el primer periodo el bienestar de los consumidores es de $\lambda\theta$, con $\lambda > 0$, y luego $\lambda(\theta + I + \alpha\theta I)$ en el caso de que el incumbente siga en el mercado, o $\lambda\hat{\theta}$ si un entrante es el nuevo monopolio, donde $\hat{\theta}$ representa el tipo y utilidad[1] que el entrante obtendrá en el segundo periodo. Más adelante especificamos el timing correspondiente a cada configuración.

Antes de continuar con el detalle de cada configuración, microfundamos la utilidad indirecta $h(I,\theta)$ del incumbente en el mercado aguas abajo con dos posibles modelos: uno donde la inversión aumenta la calidad del bien y otro donde la firma invierte para reducir sus costos marginales.

[1] El tipo puede provenir de una inversión hecha o comprometida por el entrante. En el capítulo 3 discutimos sobre este tema.

1.1. Microfundamento 1: Calidad del bien

Un monopolio vende un bien cuyo costo de producción es cero[2]. El consumidor cuando compra el bien obtiene una utilidad de $u(p;v) = vq - p$, donde p es el precio del bien; v representa la valoración del bien que tiene el individuo, que suponemos desconocido para el monopolio y con la creencia de que distribuye Uniforme $(0,1)$, y q es la calidad del bien que depende de la eficiencia del monopolio y de una inversión hecha previamente por éste. El consumidor puede decidir no comprar y obtener una utilidad igual a cero. Supondremos que la calidad es $q(I,\theta) = 4h(I,\theta)$, que es por ende creciente en ambos argumentos de h. Luego de haber hecho la inversión que eleva la calidad del bien y por lo tanto la disposición a pagar de los consumidores, el monopolio maximiza su utilidad esperada $\pi = \mathbb{P}(vq - p > 0)p = (1 - \frac{p}{q})p$. Lo que se obtiene es[3]:

$$p = \frac{1}{2}q = 2h \qquad \pi = \frac{q}{4} = h \qquad \mathbb{E}[u] = \frac{q}{8} = \frac{1}{2}h \tag{1.1}$$

Así, si consideramos λ como la proporción de renta que el monopolio no le puede extraer al consumidor por la asimetría de información, tenemos que $\lambda = \frac{1}{2}$ termina de justificar los beneficios de cada agente del mercado en nuestro modelo principal. En el capítulo 3 discutiremos sobre lo que significa o puede significar el parámetro λ.

1.2. Microfundamento 2: Reducción de costos marginales

Supongamos que ahora la calidad del bien q viene dada y que el monopolio puede realizar una inversión previa al mercado para reducir su costo marginal de producción $c > 0$. La tecnología de reducción de costos es $c(I,\theta) \equiv q - 2\sqrt{qh(I,\theta)}$[4]. Una vez que se invirtió, el monopolio maximiza $\pi = \mathbb{P}(vq - p > 0)(p - c) = (1 - \frac{p}{q})(p - c)$. Usando condición de primer orden obetenmos:

$$p = \frac{q+c}{2} = q - \sqrt{qh} \qquad \pi = \frac{(q-c)^2}{4q} = h \qquad \mathbb{E}[u] = \frac{(q-c)^2}{8q} = \frac{h}{2}$$

Estos dos modelos ilustran los beneficios de la inversión del monopolio en distintas aristas y permiten, de manera separada, justificar la utilidad indirecta que usaremos en este trabajo. Ambos ejemplos nos serán de utilidad para interpretar el parámetro λ.
A continuación expondremos en detalle las dos configuraciones de mercado.

1.3. Licencias Largas

Como ya se dijo, la licencia que posee el incumbente dura dos periodos, por lo que el timing es el siguiente:

[2]Este supuesto simplifica la exposición y cumple con el propósito requerido. Sin perjuicio de lo anterior, con algunos ajustes se puede usar (por ejemplo) un costo marginal constante mayor a cero.

[3]En el apéndice dejamos los cálculos.

[4]Esta forma funcional de los costos marginales está elegida de tal forma que la utilidad del monpolio sea igual a $h(I,\theta)$. Sin perjuicio de lo anterior, cumple con ser decreciente tanto en la inversión como en el tipo.

- En el primer periodo el incumbente realiza una inversión I a costo $C(I)$ y recibe ingresos iguales a θ.
- El incumbente permanece en el mercado y recibe los beneficios de su inversión $h(I, \theta)$

El bienestar en esta configuración es:

$$W^L(\theta) = (1 + \lambda)\theta - C(I^L) + (1 + \lambda)(\theta + I^L + \alpha\theta I^L), \tag{1.2}$$

donde $I^L \equiv I^L(\theta)$ es la inversión óptima que realiza el incumbente. En el primer periodo, firma y consumidores se benefician del plan de negocios, mientras que la firma además incurre en un costo de inversión. En el segundo periodo se recogen los beneficios de la inversión por ambas partes del mercado. No hay descuento intertemporal[5].
Por su parte, el monopolio quiere maximizar utilidades:

$$\Pi^L(I, \theta) = \theta - C(I) + \theta + I + \alpha\theta I. \tag{1.3}$$

Un regulador podría estar interesado en maximizar el bienestar social y su herramienta para lograrlo, en este caso, será elegir entre licencias largas o licencias cortas.

1.4. Licencias Cortas

El incumbente puede realizar una inversión al principio del primer periodo que lo beneficiará sólo si logra ganar la relicitación que se llevará a cabo a comienzos del periodo 2 del mercado. Supondremos que un potencial entrante de tipo $\hat{\theta}$ desconocido, que distrtibuye de acuerdo a una fución absolutamente continua F en $[0, 1]$, decide si participar o no de la licitación habiendo observado la inversión I del incubente, y de hacerlo, incurre en un costo $k > 0$. Si el ganador es el incumbente, recibirá $\theta + I + \alpha\theta I$ en el segundo periodo; si por el contrario es el entrante, éste recibe $\hat{\theta}$. Podemos resumir el timing como sigue:

- En el primer periodo el incumbente realiza una inversión I a costo $C(I)$ y recibe ingresos iguales a θ.
- El potencial entrante observa I y decide participar o no de la relicitación. El ganador de la relicitación recibe su utilidad correspondiente y el otro queda fuera obteniendo un pago igual a cero

La función de bienestar debe ser comparable con la configuración anterior, por lo que nos queda[6]:

$$W^C(\theta) = (1 + \lambda)\theta - C(I^C) + (1 + \lambda)\phi(\theta) \tag{1.4}$$

donde $I^C \equiv I^C(\theta)$ es la inversión en equilibrio del incumbente y $\phi(\theta)$ es el valor esperado que se generará en el segundo periodo en equilibrio.
En esta congifuración el monopolio maximiza:

$$\Pi^C(I, \theta) = \theta - C(I) + G(I, \theta) \tag{1.5}$$

[5]En el capítulo 4 comentamos la relevancia de su (no) existencia.
[6]En el capítulo 3 profundizamos sobre este tema.

donde $G(I, \theta)$ son los beneficios esperados de invertir I siendo de tipo θ en equilibrio[7]. En el siguiente capítulo caracterizaremos los valores de $\phi(\theta)$ y $G(I, \theta)$, pero para eso necesitamos más supuestos.

1.4.1. Supuestos en Licencias Cortas

Detallamos los supuestos claves en los resultados de este trabajo

S1 *Función de utilidad del incumbente, θ e I son conocidas por el potencial entrante.*
Que el entrante conozca θ, si bien es un supuesto fuerte, se puede justificar sobre la base de que es una firma que conoce del rubro y que lleva tiempo observando el mercado en el que se desenvuelve el actual monopolio; podemos pensar en una empresa de telecomunicaciones internacional con intenciones de entrar al mercado de un nuevo país. Además, suponemos que el entrante (y no necesariamente un regulador)[8] el que conoce la inversión.

S2 *Licitación Segundo Precio sobre cerrado.*
Esto simplifica el análisis del comportamiento estratégico en la licitación, ya que en equilibrio las firmas apuestan sus propias valoraciones (Milgrom 2004, 45-51)[17], sin importar incluso la asimetría de información que aventaja al entrante en esta etapa.

S3 *Existe un pequeño costo por participar en la licitación.*
Un costo pequeño es razonable cuando las ganancias son grandes y por lo tanto el costo de particiáción es comparablemente despreciable. Este costo deriva del tiempo y recursos invertidos en recopilación y presentación de información respecto al proyecto que desarrollarían en el mercado junto con el costo de oportunidad asociado[9]. También puede haber costo monetario por las garantías exigidas para postular y eventualmente participar del mercado, como la garantía de fiel cumplimiento de contrato. Su existencia permite endogeneizar la decisión de entrar por parte de un potencial entrante.

S4 *Si no hay otro ofertante en la licitación, el monopolio se lleva la licencia a un precio de reserva.*
En nuestro modelo, dicho precio es cero.

S5 *$F(x)$ es dos veces diferenciable con derivadas continuas y es tal que $F(x)x$ es convexa*
Limitamos las posibles funciones de distribución y obtenemos un resultado intuitivo respecto de la inversión. Esta propiedad es satisfecha por ejemplo, por la familia $F(x) = x^n$ $\forall n > 0$, $x \in [0, 1]$.

S6 *La función de utilidad que maximiza el monopolio es cóncava en I para todo $\theta \in [0, 1]$*
Reduce la complejidad del poblema ayudando a caracterizar la iversión óptima.

Ya con el modelo planteado podemos empezar a resolver.

---

[7]Este valor depende de la estrategia que adopte el potencial entrante que a su vez depende del mecanismo de licitación

[8]Cuando el regulador puede observar o verificar la inversión puede ofrecer al regulado un contrato contingente a ésta para resolver problemas de subinversión.

[9]También puede atribuirse un costo en el cual se incurre para obtener información de las utilidades propias representadas por su tipo pero en este modelo asumimos dicha información conocida de antemano.

Capítulo 2

Resolución y análisis

Procederemos a resolver ambas configuraciones de mercados para luego comparar la eficiencia de cada uno. Nos referiremos indistintamente al incumbente (monopolio del primer periodo) como jugador 1 y al entrante (o potencial entrante) como jugador 2. Además, cuando no haya ambigüedad, se omitirán las variables de las que dependen las funciones para facilitar la visualización.

2.1. Licencias Largas

El monopolio maximiza 1.3 sobre I, que es una función cóncava ya que $a > 0$. Por lo tanto su inversión óptima se puede obtener de la condición de primer orden que nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^L}{\partial I}(I^*, \theta) &= (1+\alpha\theta) - aI^* = 0 \\ \iff I^L(\theta) \equiv I^* &= \frac{1+\alpha\theta}{a}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

lo que le brinda al monopolio unos ingresos en el segundo periodo iguales a $\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}$. Así, el bienestar generado en la economía en ambos periodos por un incumbente de tipo θ es

$$\begin{aligned} W^L(\theta) &= (1+\lambda)\theta - \frac{a}{2}\left(\frac{1+\alpha\theta}{a}\right)^2 + (1+\lambda)\left[\theta + \frac{1+\alpha\theta}{a}(1+\alpha\theta)\right] \\ &= 2\theta(1+\lambda) + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{2a}(1+2\lambda). \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. Licencias Cortas

Primero necesitamos calcular la estrategia óptima del potencial entrante, la cual será considerada por el incumbente en el momento de decidir su inversión de equilibrio.

Etapa de licitación. Como la licitación es Segundo Precio sobre cerrado, en equilibrio cada jugador ofertará su propia valoración; el monopolio oferta $\theta + I + \alpha\theta I$ y el entrante $\hat{\theta}$. La licencia se la lleva aquel con mayor valoración y paga la valoración del otro jugador.

Decisión de participación del entrante El jugador 2 decide participar sólo si su utilidad al entrar es mayor a su utilidad de no hacerlo, la que normalizamos a cero. Si $k > 0$ es el costo por participar, su utilidad por entrar dada la inversión y tipo del incumbente es:

$$U(E;\hat{\theta},\theta,I) = \begin{cases} \hat{\theta} - [\theta + I + \alpha\theta I] - k & \text{si } \hat{\theta} > \theta + I + \alpha\theta I \\ -k & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.3}$$

Por lo tanto, la estrategia del jugador 2 es entrar siempre que $\hat{\theta} > \theta + I + \alpha\theta I + k$ y está indiferente cuando se tiene la igualdad. Si hacemos tender k a cero, representando el costo pequeño, obtenemos que el jugador 2 prefiere entrar exactamente cuando $\hat{\theta} > \theta + I + \alpha\theta I$, es decir, cuando su valoración es mayor a la del incumbente y sabe con seguridad que ganará la licitación. Supondremos, para asegurar la existencia de equilibrio, que cuando está indiferente no entra.

El jugador 1, conociendo el comportamiento del entrante, calcula el beneficio esperado que le genera invertir I,

$$G(I,\theta) = F(\theta + I + \alpha\theta I)\,(\theta + I + \alpha\theta I)\,. \tag{2.4}$$

Con probabilidad $F(\theta + I + \alpha\theta I)$ la valoración del entrante por la licencia es menor que la del incumbente, por lo que decide no entrar. El incumbente gana la licitación sin tener que pagar, lo que le generará una utilidad de $\theta + I + \alpha\theta I$. Por otro lado, con probabilidad $1 - F(\theta + I + \alpha\theta I)$ el entrante es más eficiente y le gana la licencia. Esto implica que el problema que resuelve el jugador 1, indicado en 1.5 es equivalente a maximizar

$$\Pi^C(I,\theta) = \theta + F(h(I,\theta))h(I,\theta) - C(I), \tag{2.5}$$

donde, recordemos, $h(I,\theta) = \theta + I + \alpha\theta I$ es el valor que le genera al incumbente invertir I, y que también podemos interpretar como la tecnología de inversión que posee una firma de tipo θ. Esta función $\Pi^C(I,\theta)$ es la que suponemos cóncava (S6) en I. Dicha concavidad solo se necesita en un intervalo relevante que depende de θ, y para todo θ menor a cierta constante. Más adelante detallaremos dichos conjuntos.

2.2.1. Zona neutra o de bloqueo

Consideremos un $\theta \in [0,1]$, tal que $h(I^L(\theta),\theta) = \theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a} > 1$, es decir, una firma lo suficientemente eficiente como para poder invertir $I^L(\theta) = \frac{1+\alpha\theta}{a}$ y generar unos ingresos mayores a 1 en el segundo periodo en caso de seguir operando. Es fácil verificar que la inversión óptima que hace esta firma es $I^C(\theta) = I^L(\theta)$, ya que la renta que generaría, y por lo tanto su valor por la licencia, en el segundo periodo es mayor a 1 y en dicho caso ningún potencial entrante querría participar de la licitación ya que sabe que perderá. Decimos que en este caso, el incumbente bloquea la entrada. Así $F(\theta + I^L + \alpha\theta I^L) = 1$ y el problema de maximización tiene el mismo óptimo que en licencias largas.

Ahora, sea ω la solución mayor de

$$\omega + \frac{(1+\alpha\omega)^2}{a} = 1 \tag{2.6}$$

$$\Longrightarrow \omega = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha^2+4\alpha+a]} - (a+2\alpha)\right]. \tag{2.7}$$

Entonces, si $\theta \geq \omega$ se tiene que $h(I^L(\theta), \theta) \geq 1$ y su inversión óptima es

$$I^C(\theta) = I^L(\theta) = \frac{1+\alpha\theta}{a}, \tag{2.8}$$

por lo que para estos tipos la configuración del mercado es irrelevante para su decisión de inversión, lo que hace que la configuración no tenga efecto alguno en el bienestar. Si ω fuera no positivo, significa que para todo θ es óptimo invertir $I^L(\theta)$ y se aseguran la licencia ya que generarían un valor mayor a 1 para el segundo periodo, haciendo que la duración de la licencia sea totalmente irrelevante (y por lo tanto, el problema sea trivial).
El siguiente lema nos entrega las condiciones que aseguran que ω sea no negativo.

Lema 2.1 $\omega < 1$. *Además* $\omega \geq 0$ *exactamente cuando* $a \geq 1$.

La demostración se deja para el apéndice. Por ahora supondremos que $a > 1$ para poder abarcar todos los casos posibles.

2.2.2. Zona de disuación

Supongamos ahora que tenemos un tipo $\theta < \omega$, y agreguemos al problema de maximización de 2.5 la restricción $h(I, \theta) = \theta + I + \alpha\theta I \leq 1$ o, equivalentemente

$$I \leq \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}. \tag{2.9}$$

En estos niveles de inversión la probabilidad de ganar la licencia es menor estricta a 1 excepto cuando 2.9 es activa. Llamaremos "Problema restringido" a la maximización que resuelve el jugador 1 sujeto a la restricción anterior. Dicha optimización tiene solución borde si su derivada en la máxima inversión factible es mayor o igual a cero[1]. La utilidad esperada derivada nos da (omitiendo las variables de de h)

$$\frac{\partial \Pi^C}{\partial I}(I, \theta) = (1+\alpha\theta)\left[f(h)h + F(h)\right] - aI. \tag{2.10}$$

Un aumento en I produce dos efectos positivos en los ingresos esperados: aumenta la probabilidad de ganar y el valor de ganar (renta).
Si evaluamos en $I^b = \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$ e imponemos positividad conseguimos[2]

$$\frac{\partial \Pi^C}{\partial I}(I^b, \theta) = (1+\alpha\theta)[1+f(1)] - a\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta} \geq 0 \tag{2.11}$$

$$\Longleftrightarrow \theta \geq \frac{1}{2\alpha^2(1+f(1))}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+f(1))[1+\alpha]+a]} - 2\alpha(1+f(1)) - a\right] \equiv \xi, \tag{2.12}$$

[1]Cierto por la concavidad de la función objetivo.
[2]Este nivel de inversión cumple que $h(I^b, \theta) = 1$.

y cuando $\theta = \xi$ se tiene la igualdad en 2.11:

$$(1+\alpha\xi)[1+f(1)] - a\frac{1-\xi}{1+\alpha\xi} = 0 \tag{2.13}$$

Note que el lado izquierdo de 2.11 es creciente como función de θ, lo que nos dice que la utilidad marginal de invertir lo suficiente para generar un valor igual a 1 (I^b) es creciente en el tipo. Por lo tanto, si para algún θ su óptimo restringido es $I^R = I^b$, entonces también lo es para tipos más altos. Más concretamente, si $\theta \in [\xi, \omega]$ entonces $I^R(\theta) = \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$ y la utilidad obtenida en el segundo periodo es $1 - \frac{a}{2}\left(\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}\right)^2$.

¿Será I^b inversión óptima para el problema irrestricto? La respuesta es que sí. Consideremos el problema del incumbente que maximiza 2.5 y agreguemos la restricción $I \geq \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$, o equivalentemente, $h(I,\theta) \geq 1$, con lo que $F(\theta + I + \alpha\theta I) = 1$ y por lo tanto el problema se transforma en maximizar la función de utilidad del incumbente en licencias largas 1.3 sujeto a la nueva restricción. Sabemos que 1.3 tiene máximo en $I^L(\theta) = \frac{1+\alpha\theta}{a}$, pero $\theta < \omega$, por lo que $h(I^L(\theta), \theta) < 1$ de lo que se sigue que $I^L(\theta)$ no es factible. Así el óptimo del nuevo problema restringido debe ser (por concavidad) $I^{R'} = \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$.
De aquí concluimos que el óptimo del problema irrestricto para todo $\theta \in [\xi, \omega]$ es

$$I^C(\theta) = \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}. \tag{2.14}$$

Esta inversión extra que hace el incumbente es un efecto estratégico que provoca una licencia corta.

Lema 2.2 *Si $f(1) \neq 0$, entonces $\xi < \omega$ y si $f(1) = 0$, entonces $\xi = \omega$. Además $\xi \geq 0$ exactamente cuando $a \geq 1 + f(1)$.*

Su demostración se deja para el apéndice. Al igual que para ω supondremos que $\xi > 0$, y $f(1) \neq 0$ para así poder describir todos los casos posibles. Si $\xi \leq 0$ implicaría que todo los tipos menor a ω encuentran óptimo invertir lo justo y necesario para asegurarse la licencia, es decir $I = \frac{1-\theta}{1+\theta}$. En este caso, incluso el tipo menos eficiente ($\theta = 0$) se lleva la licencia gratis.

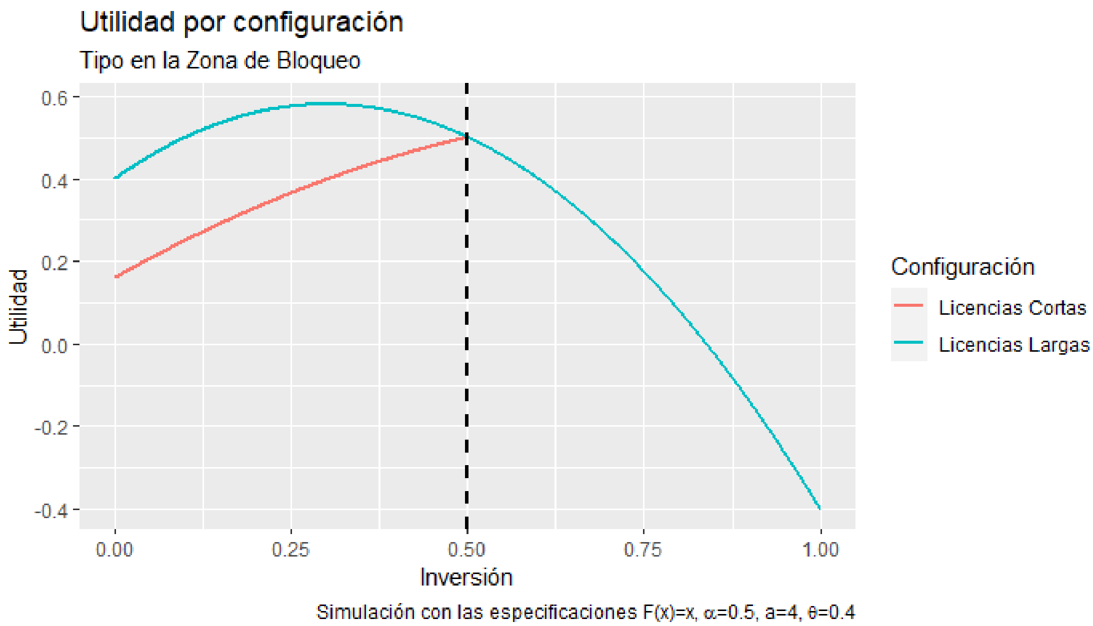
Para estos tipos es óptimo invertir lo justo y necesario para prevenir la entrada de un competidor en la licitación y llevarse la licencia con seguridad y a precio cero. Intuitivamente, estas firmas no son lo suficientemente eficientes como para invertir de igual manera que en licencias largas y asegurarse la licencia, pero son lo suficientemente eficientes como para asegurarla sobreinvirtiendo (en comparación a la otra configuración) lo justo y necesario. En este punto no tiene sentido seguir invirtiendo debido a que los costos marginales sobrepasan a los beneficios marginales, que ahora sólo se componen de un aumento del valor generado y no de un aumento en la probabilidad de ganar la licitación (a este nivel la probabilidad de ganar es 1). Matemáticamente, la utilidad marginal es discontinua en $\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$; su límite por la izquierda es igual a

$$(1+\alpha\theta)[1+f(1)] - a\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta} > 0, \tag{2.15}$$

mientras que por la derecha es simplemente

$$(1+\alpha\theta) - a\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta} < (1+\alpha\theta) - aI^L(\theta) = 0. \tag{2.16}$$

Por lo tanto hay discontinuidad si $f(1) \neq 0$. A continuación dejamos un ejemplo de la utilidad que tiene un tipo en la zona de bloqueo.



2.2.3. Zona creciente

Por último tenemos los tipos $\theta \in [0, \xi]$ cuya inversión óptima tiene solución interior. Dicha inversión cumple la condición de primer orden

$$(1+\alpha\theta)\left[f(h)h + F(h)\right] - aI = 0, \tag{2.17}$$

y el supuesto de concavidad nos dice que

$$(1+\alpha\theta)^2[f'(h)h + 2f(h)] - a < 0, \text{ para todo } \theta \leq \omega \text{ y } h \leq 1. \tag{2.18}$$

Para obtener una solución analítica se necesita al menos especificar F. Por otro lado, podemos obtener la derivada de la inversión óptima en función de θ usando el teorema de la función implícita. Derivando a ambos lados con respecto a θ y ordenando algunos términos obtenemos[3]

$$\frac{\partial I^C}{\partial \theta} = \frac{a\alpha I^C + (1+\alpha I^C)(1+\alpha\theta)^2[f'(h)h + 2f(h)]}{-(1+\alpha\theta)[(1+\alpha\theta)^2[f'(h)h + 2f(h)] - a]}, \tag{2.19}$$

con $I^C = I^C(\theta)$, y $h = h(I^C, \theta)$. Cabe destacar que el teorema de la función implícita garantiza derivabilidad y continuidad de $I^C(\theta)$ localmente.
Notemos que el denominador es positivo ya que corresponde al producto entre un escalar negativo y la segunda derivada de la utilidad. Además, gracias al supuesto S5 tenemos que

[3]Ver apéndice para los detalles

$F(h)h$ convexo, por lo que su segunda derivada, $f'(h)h + 2f(h)$, es positiva. Así, la derivada de la inversión es positiva y por lo tanto la inversión óptima es creciente en $[0, \xi]$.

Además podemos estimar dos valores claves. Primero, es fácil ver que $I^C(0) = 0$, ya que trivialmente cumple la condición de primer orden. Segundo, podemos averiguar en qué θ, dentro del intervalo $[0, \xi]$, la inversión en licencias cortas es igual a la de licencias largas. Para eso, igualamos las condiciones de primer orden de cada configuración e imponemos $I^C = I^L$:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha\theta)\left[f(h)h + F(h)\right] &= 1 + \alpha\theta \\ \iff MR(h) = h - \frac{1 - F(h)}{f(h)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

El lado izquierdo de 2.20 es el *Marginal Revenue* de $\hat{\theta}$ evaluado en $h = h(I^C, \theta) = h(I^L, \theta)$. Dicha función es conocida en la literatura de licitaciones y de selección adversa, y para ciertas distribuciones de probabilidades dicha función es creciente. Por lo tanto, las inversiones son iguales en ambas configuraciones en el tipo $\bar{\theta}$ tal que $\bar{h} \equiv h(I^L(\bar{\theta}), \bar{\theta})$ cumple 2.20. La existencia de dicho valor la justificamos en el siguiente lema.

Lema 2.3 *Sea $F(x)$ una función de distribución de probabilidad absolutamente continua, tal que su marginal revenue es mayor a cero en algún punto. Entonces existe $\bar{\theta} \in (0, \xi)$ tal que $\bar{h} \equiv h(I^L(\bar{\theta}), \bar{\theta})$ cumple 2.20.*

Su demostración es sencilla y se basa en la continuidad del marginal revenue y de la inversión óptima (ver apéndice).
De forma similar a 2.20 podemos corroborar cuándo la inversión en licencias cortas es mayor que la de licencias largas:

$$\begin{aligned} I^C(\theta) &> I^L(\theta) \\ \iff aI^C(\theta) &> aI^L(\theta) \\ \iff (1 + \alpha\theta)\left[f(h)h + F(h)\right] &> 1 + \alpha\theta \\ \iff h - \frac{1 - F(h)}{f(h)} &> 0. \end{aligned}$$

En la tercera desigualdad usamos la condición de primer orden para reemplazar costos marginales por beneficios marginales. Luego dividimos ambos lados por $(1 + \alpha\theta)f(h) > 0$ y reordenamos. Como el marginal revenue es creciente en h y h crece en θ, el lado izquierdo de la última desigualdad es una función creciente en θ y que en $\bar{\theta}$ es igual a cero, por lo tanto $\theta > \bar{\theta}$.
Resumimos lo que sabemos de la inversión en la siguiente proposición.

Proposición 2.4 *Bajo los supuestos S1 a S6, la inversión que realiza la firma de tipo θ en licencias cortas se puede caracterizar como sigue*

$$I^C(\theta) = \begin{cases} I^{cpo}(\theta) & si\ \theta \in [0, \xi) \\ \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta} & si\ \theta \in [\xi, \omega) \\ \frac{1+\alpha\theta}{a} & si\ \theta \in [\omega, 1] \end{cases} \tag{2.21}$$

donde $I^{cpo}(\theta)$ es creciente y cumple la condición de primer orden de 2.17.

Primero la inversión es creciente en el tipo hasta cierto punto. De aquí en adelante las firmas encuentran óptimo invertir lo justo para asegurarse la licencia, lo que implica una menor inversión a mayor eficiencia de éstas, ya que cada unidad invertida por firmas más eficientes genera un valor mayor comparado a las menos eficientes. Los tipos más eficientes invierten sin preocuparse por los entrantes ya que saben que nadie les hará competencia.

Más allá de la forma funcional de la inversión, la proposición 2.4 nos habla sobre una herramienta que puede usar un monopolio para mantener su posición como tal. Este es uno de los resultados relevantes de esta tesis, que establecemos en el siguiente corolario.

Corolario 2.5 *Si un incumbente tiene eficiencia $\theta \in [\xi, \omega)$, entonces usa su inversión para eliminar competencia en la licitación, invirtiendo $I^C = \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$.*

Los tipos en este intervalo sobreinvierten en el sentido de que condicional a ganar, la inversión es mayor que la que maximiza la utilidad de ganar, pero les resulta óptimo ya que aseguran su estadía en el mercado como monopolio.

El gráfico siguiente muestra un ejemplo particular de inversión en licencia cortas.

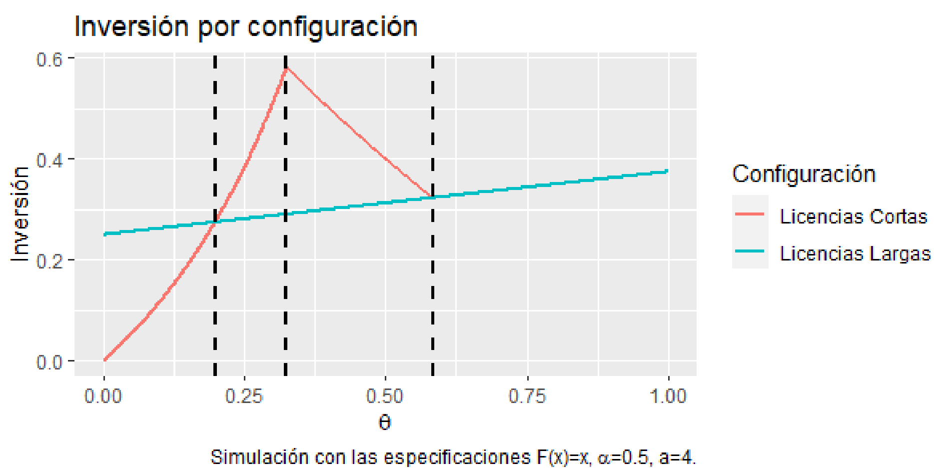


Figura 2.1: Las líneas segmentadas corresponden a los tipos $\bar{\theta}$, ξ y ω, de izquierda a derecha.

Ahora que tenemos mejor caracterizada la forma de inversión podemos computar el bienestar de esta economía.

2.2.4. Bienestar

El valor esperado que se generará en el segundo periodo en esta configuración es

$$\phi(\theta) = \mathbb{E}[max\{h^C, \hat{\theta}\}] = F(h^C)h^C + \int_{h^C}^{1} \hat{\theta} f(\hat{\theta}) \mathrm{d}\hat{\theta} = 1 - \int_{h^C}^{1} F(\hat{\theta}) \mathrm{d}\hat{\theta}, \tag{2.22}$$

donde $h^C = \theta + I^C(\theta) + \alpha\theta I^C(\theta)$ y la última igualdad se obtiene integrando por partes. El monopolio del segundo periodo será el que tenga una mayor valoración por la licencia y dicho valor es igual a la renta que generará, de la cual se beneficia tanto la firma como los consumidores. Por lo que el bienestar nos queda

$$W^C(\theta) = (1+\lambda)\theta - C(I^C) + (1+\lambda)\left[1 - \int_{h^C}^{1} F(\hat{\theta})\mathrm{d}\hat{\theta}\right] \tag{2.23}$$

Además, para $\theta \in [0, \xi)$, al derivar 2.22 obtenemos[4]

$$\phi'(\theta) = F(h)\frac{\partial h}{\partial \theta} = F(h)[1 + \alpha I^C(\theta) + (1+\alpha\theta)I^{C\prime}(\theta)], \tag{2.24}$$

que es una función positiva gracias a que la inversión es creciente en este intervalo. Por lo tanto lo que sabemos de $\phi(\theta)$ es

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \phi^{cpo}(\theta) & \text{si } \theta \in [0, \xi) \\ 1 & \text{si } \theta \in [\xi, \omega) \\ \theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a} & \text{si } \theta \in [\omega, 1] \end{cases} \tag{2.25}$$

donde $\phi^{cpo}(\theta)$ creciente.

2.3. Comparación de bienestar

Consideremos ahora la diferencia de bienestar entre las configuraciones de licencias cortas y largas:

$$\begin{aligned} \Delta W(\theta) &\equiv W^C(\theta) - W^L(\theta) \\ \Delta W(\theta) &= \frac{a}{2}\left(\left(\frac{1+\alpha\theta}{a}\right)^2 - (I^C)^2\right) + (1+\lambda)\left[\phi(\theta) - \left(\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Así por ejemplo, si $\theta = 0$, entonces $I^C = 0$, $I^L = \frac{1}{a}$, $\phi(0) = \mathbf{E}[\hat{\theta}]$ y por lo tanto

$$\Delta W(0) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^2 + (1+\lambda)\left[\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \frac{1}{a}\right] = \frac{1}{2a} + (1+\lambda)\left[\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \frac{1}{a}\right].$$

Si bien en licencias cortas el tipo más ineficiente no invierte, el bienestar aun puede ser mayor que en licencias largas ya que con seguridad llegará un entrante que generará un valor $\hat{\theta}$ en el segundo periodo.

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para obtener mejores resultados en licencias cortas que en largas, condicional a ciertos tipos ineficientes.

[4] Aquí $I^C(\theta) < \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$, por lo que $h < 1$

Proposición 2.6 *Consideremos $\bar{h}$ del lema 2.3 y definamos $\beta = min\{\bar{h}, \mathbb{E}[\hat{\theta}]\}$. Si $a > \frac{1}{\beta}$, entonces $\underline{\theta} \equiv \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+\alpha\beta)+a]} - (a+2\alpha)\right] > 0$ y para todo $\theta \leq \underline{\theta}$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$.*

Esta proposición nos dice que si el parámetro del costo de la inversión a, o β es suficientemente alto y el incumbente no es muy eficiente, entonces el bienestar generado en licencias cortas es mayor al de licencias largas. Un β alto significa que tanto el valor esperado del entrante como el tipo que invierte lo mismo en ambas configuraciones es alto. Así, $\underline{\theta}$ cumple dos propiedades importantes. Primero, tipos menores a éste invierten menos en licencias cortas que en largas. Segundo, tipos menores a $\underline{\theta}$ generan un valor en licencias largas menor al valor esperado del entrante. Por lo tanto, el valor generado en el segundo periodo en licencias cortas es mayor al valor generado en licencias largas y además se invierte menos, por lo que el bienestar es mayor. Así, bajo los supuestos anteriores, no importa que en licencias cortas tipos bajos inviertan menos, ya que esta pérdida de inversión es más que compensada por el valor del potencial entrante.
Es importante notar que si bien este resultado no depende del valor de λ, cuando éste aumenta, la diferencia de bienestar es aun mayor, por lo que licencias cortas serán aun más eficientes que licencias largas.

La proposición anterior arroja conclusiones respecto de incumbentes relativamente ineficientes, y que no dependen del multiplicador λ asociado al bienestar de los consumidores. El siguiente lema y proposición se encarga justamente de garantizar buenos resultados cuando el incumbente es más eficiente y dichos resultados dependerán en gran medida de λ.

Lema 2.7 *Sea $\bar{\theta}$ del lema 2.3 y $\theta \in [\bar{\theta}, \xi)$. Entonces, existe $\bar{\lambda} \geq 0$ tal que para todo $\lambda > \bar{\lambda}$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$.*

Ver Apéndice para la demostración.
La idea es que en este intervalo la inversión en licencias cortas es mayor que en largas, generando así un mayor valor para el segundo periodo. Por lo tanto, si el consumidor tiene un alto beneficio a partir del valor generado, éste compensará el costo extra de una mayor inversión, haciendo que en licencias cortas se genere un mayor bienestar.
Lamentablemente, no sabemos si dado un λ tal que $\Delta W(\theta) > 0$, al aumentar a un θ' sea cierto que $\Delta W(\theta') > 0$ con el mismo multiplicador λ, ya que en dicho intervalo la inversión en licencias cortas es creciente, por lo que podría darse un aumento muy grande en la diferencia entre costos, anulando el posible aumento en la diferencia del valor para el segundo periodo. Aun así, podemos encontrar una cota que nos asegura un mejor bienestar en licencias cortas para cualquier tipo razonablemente alto. Esta es la proposición que establecemos más abajo.

Proposición 2.8 *Sea $\theta \in [0, 1]$*

i Si $\theta \in [\omega, 1]$ entonces $\Delta W = 0$.

ii Existe $\hat{\lambda}$ tal que para todo $\theta \in [\bar{\theta}, \omega)$ y para todo $\lambda > \hat{\lambda}$ se cumple que $\Delta W > 0$.

La primera afirmación es trivial, ya que como ya probamos, en este intervalo la inversión en licencias cortas es igual a la de licencias largas y es tal que el valor que se genera para el segundo periodo es mayor o igual a 1, por lo que el incumbente vuelve a obtener la licencia con seguridad lo que lleva al mismo bienestar.
La segunda afirmación, y mucho más importante, nos dice que si tenemos una firma relativamente eficiente, y si el consumidor obtiene un alto beneficio por el bien producido, entonces se genera un bienestar mayor con licencias cortas. Si la firma es "demasiado" eficiente, la configuración del mercado es irrelevante para el bienestar. La prueba formal yace en el apéndice. La intuición es similar a la del lema 2.7 sólo que ahora buscamos una cota que sirva para todo $\theta \in [\bar{\theta}, \omega]$.

Ejemplo. Consideremos el caso particular $F(x) = x^n$ con $n \geq 1$, que como ya mencionamos, cumple los supuestos de S5. Veamos las condiciones para que se tenga concavidad en el problema de maximización del incumbente:

$$\begin{aligned}\Pi^C(I, \theta) &= (\theta + I + \alpha\theta I)^{n+1} - \frac{a}{2}I^2, \\ \frac{\partial \Pi^C}{\partial I} &= (n+1)(\theta + I + \alpha\theta I)^n(1 + \alpha\theta) - aI, \\ \frac{\partial^2 \Pi^C}{\partial I^2} &= n(n+1)(\theta + I + \alpha\theta I)^{n-1}(1 + \alpha\theta)^2 - a < 0,\end{aligned}$$

donde nos limitamos al intervalo $I \leq \frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}$ y $\theta < \omega$. Como $n \geq 1$, el lado izquierdo de la última desigualdad es débilmente creciente en θ, por lo que la desigualdad se tendrá si solo si se tiene en $\theta = \omega$, esto es:

$$n(n+1)(1 + \alpha\omega)^2 < a,$$

donde usamos que $\theta + I + \alpha\theta I \leq 1$ y ω viene dado por 2.7.
Además $f(x) = nx^{n-1}$ por lo que $f(1) = n$. Así, usando 2.12:

$$\xi = \frac{1}{2\alpha^2(1+n)} \left[\sqrt{a[4\alpha(1+n)[1+\alpha] + a]} - 2\alpha(1+n) - a\right]$$

El valor esperado del potencial entrante es

$$\phi(0) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \int_0^1 xnx^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}$$

Econtremos el valor $\bar{h}$:

$$MR(\bar{h}) = 0 \qquad \iff \bar{h} - \frac{1 - \bar{h}^n}{n\bar{h}^{n-1}} = 0 \qquad \iff \bar{h} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Se puede probar que $\bar{h} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{n}{n+1}$ para todo $n \geq 1$, y con igualdad sólo en $n = 1$ (ver apéndice). Además por concavidad:

$$a > n(n+1) > (n+1)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\bar{h}}.$$

Usando la proposición 2.6, tenemos que el bienestar es mayor en licencias cortas para todo $\theta \leq \bar{\theta} = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+\alpha\bar{h})+a]} - (a+2\alpha)\right]$. Para los tipos $\theta \in (\bar{\theta}, \omega)$ sabemos que la inversión es mayor en licencias cortas, pero el bienestar depende necesariamente de λ. Para dar una idea de las magnitudes de el multiplicador necesario para generar mayor bienestar en licencias cortas de la proposición 2.8, reutilizamos el caso representado en la figura 2.1, donde $n = 1$, $a = 4$, $\alpha = 0{,}5$ y al calcular numéricamente obtenemos $\hat{\lambda} = 0{,}499$. A continuación mostramos gráficamente los efectos del multiplicador en el bienestar de cada configuración.

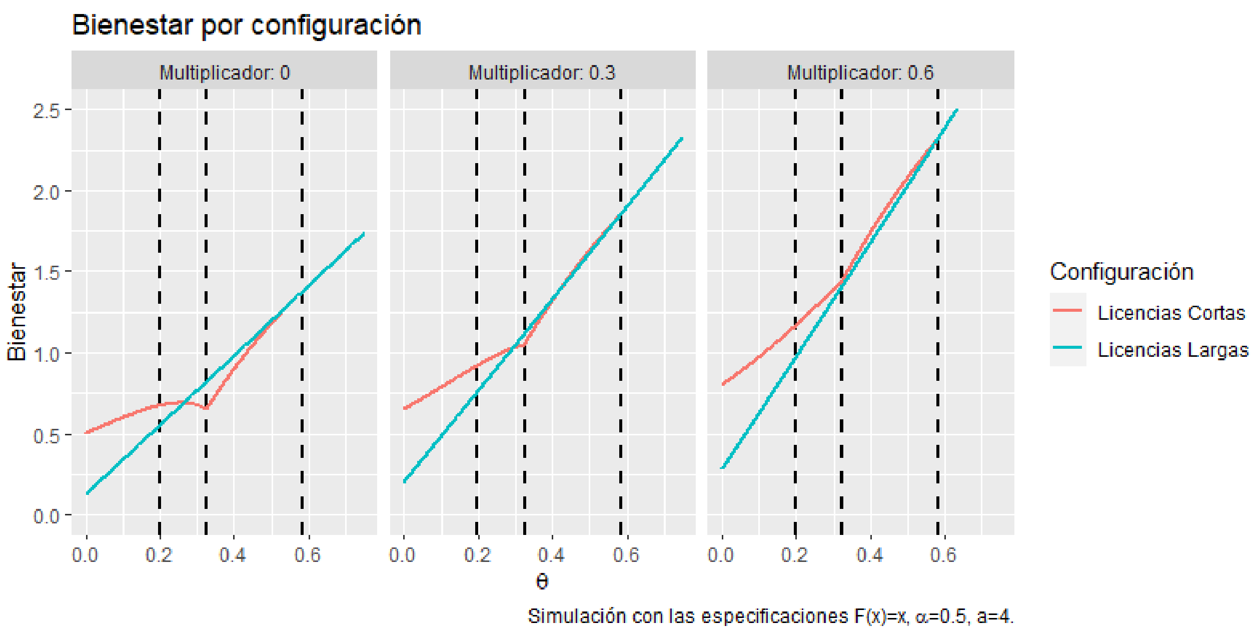


Figura 2.2: Las líneas segmentadas corresponden a los tipos $\bar{\theta}$, ξ y ω, de izquierda a derecha.

Se puede observar que cuando el multiplicador es menor a 0,5 existen tipos en los cuales se genera un mayor bienestar en licencias largas. Por el contrario, vemos que si $\lambda = 0{,}6$, el bienestar es mejor en licencias cortas siempre.

Capítulo 3

Limitaciones y extenciones

Revisamos algunas limitantes de nuestro modeldo. Luego comprobamos la robustez de nuestros resultados al introducir algunas modificaciones en los supuestos.

3.1. Limitaciones

Primeramente, debemos reconocer que estamos usando un modelo que contempla un único productor en el mercado, y que podría servir como primera aproximación a lo que podría suceder en un mercado con competencia imperfecta, con lo cual las conclusiones y resultados deben ser tomados con cautela al momento de decidir una política regulatoria.
Nuestra configuración de licencias cortas se plantea con una gran asimetría entre incumbente y entrante, como la información que posee cada jugador respecto del otro, las acciones que puede tomar cada uno, y sus eficiencias. Por esto, una de las dificultades que se enfrentan es la de plantear un modelo *sensato* que de una manera razonable haga sentido de la realidad o posibilidad de dichas asimetrías. A continuación discutimos sobre la interpretación de algunos aspectos del modelo y reconocemos ciertos puntos mejorables.

3.1.1. El tipo del entrante

Los beneficios de una configuración de licencias cortas provienen de la posibilidad de que surja una nueva firma en el mercado que sea más eficiente que el incumbente, con un plan de negocios mejor, generando un alto valor tanto para ella misma como para los consumidores. Pero, ¿de dónde proviene el valor que genera esta firma?. El valor (y tipo) del entrante $\hat{\theta}$ debe ser interpretado como un plan de negocios que tiene la nueva firma pero naturalmente, para concretarlo debe realizar algún tipo de inversión (al menos inicialmente). Por lo que el tipo del entrante es el beneficio de producir en el mercado, luego de hacer algún tipo de inversión costosa con alguna tecnología relacionada a su tipo. Así, para ser consistente con nuestro planteamiento, podemos pensar en $\hat{\theta} = \hat{h}(\hat{I}(\theta'), \theta') - c(\hat{I}(\theta'))$, donde la función $\hat{h}$ representa la tecnología y beneficios de su inversión en algún contexto razonable; $\hat{I}(\theta')$ es la inversión óptima de la firma y θ' es aleatorio y representa su *tipo* (reinterpretado como la eficiencia de inversión, igual que en el caso del incumbente)[1].

Pero esta interpretación del modelo tiene una gran queja en cuanto a cómo planteamos la función de bienestar en licencias cortas: estamos considerando que el costo de la inversión del entrante afecta al bienestar del consumidor, lo que no es consistente con nuestro relato. Esto se ve en la función $\phi(\theta)$ que aparece multiplicada por $1+\lambda$ en la función del bienestar de licencias cortas:

$$\phi(\theta) = \mathbb{E}_{\hat{\theta}}[max\{h^C, \hat{\theta}\}] = \mathbb{E}_{\theta'}[max\{h^C, \hat{h}(\hat{I}(\theta'), \theta') - c(\hat{I}(\theta'))\}],$$

por lo que cabe comentar dos puntos importantes como consecuencia. Primero, que estamos subvalorando el bienestar en licencias cortas, ya que el costo esperado del entrante lo estamos ponderando por $1+\lambda$ en vez de por 1. Segundo, nos hace reflexionar sobre la probabilidad de que una nueva firma gane la licencia, ya que ésta debe tener utilidades mayores al beneficio que tiene el incumbente porque para este último el costo de inversión es un costo hundido. En otras palabras, para que cambie el productor del mercado, el entrante debe ser *considerablemente* más eficiente que el incumbente.
Note que la subvaloración del bienestar en licencias cortas no cambia cualitativamente los resultados principales de la tesis, ya que el bienestar *real* sería una función mayor a W^C dado λ, por lo que la diferencia de bienestar corregida debe ser mayor a la de nuestro modelo.

3.1.2. Inversión del incumbente perdida

Otro punto criticable a nuestro modelo tiene que ver con un supuesto implícito poco realista: el costo en el que incurre el incumbente una vez hecha la inversión se pierde cuando el entrante gana la licitación. En un ambiente más realista el incumbente podría liquidar sus activos ya sea negociando con el entrante o en algún mercado alternativo. Gracias al teorema de Myerson–Satterthwaite sabemos que hay pérdida de eficiencia cuando dos firmas negocian y sus valoraciones son desconocidas, lo cual es un problema no menor a tener en mente al momento de decidir la licitación de algún bien o derecho. El incumbente tendrá incentivos a subir el precio con el fin de obtener renta, aun cuando la inversión no le sea de utilidad. Por otro lado, aun si no hubiera problemas de asimetría de información, si el incumbente posee un gran poder de negociación se puede dar el caso extremo en que ninguna firma consideraría participar de la licitación, adelantando un precio muy alto por la inversión. De esta forma, hacer una licitación no tendría ningún efecto sobre la eficiencia.
Más abajo extendemos nuestro modelo desde varias aristas y en una de éstas agregamos una etapa de negociación en la que el incumbente puede venderle su inversión al nuevo monopolio. Veremos que *cualitativamente* el resultado obtenido es el mismo, aunque obtendremos una inversión más *parecida* a la inversión de largo plazo. Matemáticamente hablando, la función de inversión de equilibrio en licencias cortas se acerca a la de licencias largas como función.

Agregamos además dos motivos más técnicos que limitan nuestro modelo. Primero, notemos que como el entrante observa perfectamente la valoración del incumbente, no permitimos el escenario en el cual el entrante participa de la licitación y pierde. Esta posibilidad podría

[1] En este modelo nos limitamos a considerar el valor que genera el entrante que de forma reducida lo suponemos igual a $\hat{\theta}$ distribuido de acuerdo a F.

reducir los incentivos de inversión del incumbente, ya que de ganar en este escenario debe pagar la oferta del rival. Segundo, y más notorio, es que la condición de concavidad sumada a la de convexidad de $F(x)x$ nos limita al punto de que sólo pudimos utilizar $F(x) = x^n$, $n \geq 1$, que garantiza una alta esperanza.

3.2. Extenciones

3.2.1. Licitación primer precio sobre cerrado

Habíamos supuesto que la licitación en nuestra configuración de licencias cortas sería de tipo segundo precio sobre cerrado, lo que daba un equilibrio sencillo de calcular en la etapa de licitación. Si cambiamos al formato de primer precio sobre cerrado, dependiendo del timming, podríamos en principio tener al incumbente con una desventaja por la asimetría de información con respecto al entrante. Veamos que bajo ciertos supuestos razonables en los sucesos previos a la licitación los resultados se mantienen y no existe desventaja práctica alguna.

Valores conocidos

Un factor relevante en nuestro modelo es que el incumbente realiza su inversión sin conocer el tipo del potencial entrante. ¿Qué sucedería si el tipo del potencial entrante se revelara para todos después del primer periodo de mercado pero antes de la licitación? Un resultado clásico sobre la licitación primer precio cuando los valores son conocidos es el siguiente equilibrio: El ofertante con mayor valor por el bien oferta el valor del segundo más un pequeño épsilon, mientras que el contrincante oferta su propio valor. El jugador con mayor valoración no quiere subir su oferta, ya que pagaría más por el mismo bien, y no quiere bajar para empatar o perder el bien, ya que si empata, se lo lleva con probabilidad un medio, y si pierde no se lleva nada. El contrincante está indiferente entre bajar su oferta y mantenerla, y definitivamente no prefiere subirla, ya que se llevaría el bien pagando un precio mayor que el valor que le asigna. Dado este equilibrio, concluimos, al igual que con licitación segundo precio, que el ganador será el jugador con mayor valoración y pagará la valoración del perdedor. Por lo tanto, cuando se revele el tipo del potencial entrante, éste decidirá entrar sólo si su tipo es mayor al del incumbente (debido al pequeño costo de participación). Si no entra, el incumbente gana automáticamente la licencia a precio cero. Por el contrario, si su valoración es mayor, entrará a la licitación, mientras que el incumbente estaría indiferente entre entrar o no, ya que sabe que perderá, por lo que el entrante podría pagar un precio igual o mayor a cero (siendo ésta la única diferencia con el modelo original). Así, al momento de invertir, el incumbente maximiza la misma utilidad de 2.5 y las conclusiones se mantienen.

Información asimétrica

¿Podemos decir lo mismo si el valor del potencial entrante se conociera después de terminada la licitación? Veamos que bajo el siguiente supuesto, el resultado de la licitación (asignación) no se verá afectado, haciendo que la decisión de inversión sea la misma del modelo original.

- **Supuesto de conocimiento de rival.** Al momento de comenzar la licitación el incumbente sabe si tendrá algún rival con quien competir o si se llevará la licencia gratis.

Desde la perspectiva del incumbente existen dos estados que llamaremos estado malo (M) y estado bueno (B). El estado malo es cuando el entrante participa de la licitación y, en cuyo caso, el incumbente debe elegir cuánto apostar. En el estado bueno el incumbente gana automáticamente sin pagar. Este juego, en estricto rigor, es un problema de signaling ya que el incumbente no conoce el el tipo del entrante pero su aparición en la licitación le revela información respecto a este.

Consideremos las estapas del juego una vez que la inversión ya fue hecha. Observando la inversión, el jugador 2 decide entrar o no a la licitación. El jugador 1 actualiza su creencia respecto del tipo del entrante de acuerdo a la regla de Bayes. Condicional a esta información, los jugadores 1 y 2 participan de la licitación primer precio sobre cerrado, eligiendo sus apuestas de forma simultánea. Sea $v_1 = h(I, \theta)$. Proponemos el siguiente equilibrio bayesiano perfecto:

Jugador 2

- Entra cada vez que $v_1 < \hat{\theta}$
- Apuesta $v_1 + \varepsilon$

Jugador 1

- $\mathbb{P}(\hat{\theta} > v_1 | M) = 1$
- Apuesta $b_1 = v_1$

Veamos que lo anterior es un equilibrio. Fijando la estrategia de 2, el jugador 1 sabe que ver un rival en la licitación significa que la valoración de aquel es mayor a la propia, por ende, está indiferente entre mantener y bajar su apuesta, y no prefiere subirla, ya que con cierta probabilidad ganaría obteniendo utilidad negativa. Además, su actualización de creencias es consistente con la estrategia de 2. Fijando la estrategia de 1, estando en la licitación, la única forma de ganar es ofrecer una apuesta mayor a v_1 pero lo más baja posible para minimizar el pago. Además, ganará renta positiva al entrar sólo si $v_1 < \hat{\theta}$, ya que en otro caso incurre en el pequeño costo de participación junto con una utilidad negativa $\hat{\theta} - v_1 - \varepsilon < 0$. Este es el único equilibrio en el cual el jugador 2 entra sólo cuando sabe que ganará. Para ver esto, supongamos que b_1 sea la apuesta del jugador 1 en algún equilibrio. El jugador 2 conoce esta estrategia en equilibrio, por lo que entrará sólo si puede ganar, apostando un poco más, $b_1 + \varepsilon$. De aquí se infiere que entrará sólo si $\hat{\theta} > b_1$. Si $b_1 < v_1$, el jugador 1 tiene incentivos a desviarse, ya que al ofertar b_1 obtiene utilidad cero, mientras que si apuesta $\bar{b_1} = b_1 + \varepsilon < v_1$ tedrá una probabilidad positiva de ganar[2], obteniendo $v_1 - b_1 - \varepsilon$.
En la etapa de inversión el incumbente sabe que en equilibrio sólo puede tener renta positiva si el estado realizado es B, lo que sucede con probabilidad $\mathbb{P}(\hat{\theta} \leq v_1) = F(h(I, \theta))$, por lo que su utilidad esperada al invertir I es $F(h(I, \theta))h(I, \theta) - c(I)$, al igual que en licitación

[2]Para esto es suficiente pedir que $f(x) > 0$ en $[0, 1]$ salvo quizás en un conjunto con medida nula

segundo precio.
Así, a pesar de la asimetría de información entre los jugadores, la asignación de la licitación es la misma y por lo tanto los incentivos y conclusiones del modelo principal se mantienen.

3.2.2. Duopolio

Nos gustaría extender nuestras conlusiones pera un ambiente de competencia imperfecta. Lamentablemente, encontrar un equilibrio de Nash para la decisión de inversión de cada empresa es un tanto complejo y se escapa de los alcances de este trabajo. Una alternativa es modelar los incentivos de una firma, manteniendo la inversión del rival fija. Esto ya no sería un juego, sino un problema de optimización de un agente. Nos limitamos a sugerir un modelo de este estilo y hacer algunos comentarios al respecto.
Supóngase que a una de las dos firmas existentes en un mercado le caducará su licencia para producir, por lo que para seguir operando deberá ganar su relicitación. El orden del juego es como sigue:

- En el primer periodo en el mercado, ambas firmas compiten a la cournot. Además el jugador 1 decide cuánto invertir en tecnología de reducción de costos marginales, cuyos beneficios se obtienen en el siguiente periodo. La firma 2 tiene una inversión fija.
- La licencia del jugador 1 expirará, por lo que debe participar de una re-licitación para seguir operando en el mercado y poder obtener los beneficios de su inversión
- Un potencial entrante puede participar de la licitación. El ganador tendrá el derecho a producir en el siguiente periodo, compitiendo a la cournot contra la firma 2.

Notemos que dada la inversión, las cantidades de producción de equilibrios están totalmente determinadas. Así, lo que se obtiene es una utilidad indirecta que depende solamente de la inversión del jugador 1.
De esta manera se llega a un problema de optimización similar al de nuestro modelo original pero con una potencia cuadrática y un parámetro que representa la inversión fija del jugador 2 y que le quita beneficios a la firma 1. Nuestro objetivo era poder justificar que el problema anterior era equivalente al modelo del monopolio y así mantener las conclusiones, pero no se logró este acometido debido a la potencia cuadrática involucrada. Su desarrollo supone un gran trabajo extra, del cual esperamos que se puedan obtener conclusiones similares debido a la "pasividad" en la inversión del jugador 2[3].

3.2.3. Traspaso de inversión mediante negociación

A continuación procederemos a ver los efectos que se producen al agregar la posibilidad de que el incumbente pueda vender su inversión al entrante en caso de perder en la licitación. En este apartado nos limitaremos a observar los incentivos de inversión y comentar sus repercusiones en el bienestar en vez de calcularlo expresamente.
Para esto, simplificamos el modelo asumiendo $\alpha = 0$[4]. Consideremos nuestro modelo original de licencias cortas con las siguientes modificaciones:

[3]Un juego de dos agentes donde sólo uno toma decisiones debería poder compararse a un problema de optimización de un agente, donde la estrategia del rival simplemente es un parámetro del modelo

[4]Esta simplificación reduce considerablemente la complejidad del problema

- Si el incumbente pierde, puede venderle su inversión al entrante a un precio por unidad igual a $p \in [0,1]$.
- Si el incumbente le traspasa una inversión I al entrante, entonces éste último recibe γI, $\gamma \in [0,1]$.
- El valor de la licecia para el jugador 2 cuando recibe una inversión I_1 del incumbente, a un precio por unidad p es $\hat{\theta} = \theta_2 + \gamma I_1 - \gamma p I_1 + l(\theta_2)$, donde $l(\theta_2)$ representa los beneficios netos de algún tipo de inversión extra que puede hacer el entrante[5].
- El valor por la licencia del jugador 1 cuando invierte I_1 es $v_1 = \theta_1 + I_1 - \gamma p I_1$, ya que tiene un costo de oportunidad equivalente a lo que obtendría al vender su inversión.
- $\theta_2 + l(\theta_2)$ distribuye de acuerdo a F, con $F(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

El parámetro p representa el poder de negociación que tiene el incumbente, mientras que γ representa la proporción de la inversión que es trasnferible (no específica)[6].

Resolvemos por inducción reversa. El jugador 2 entrará sólo cuando esté seguro que ganará la licitación, es decir, cuando su valoración sea mayor a la del incumbente:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} > v_1 \iff \theta_2 + \gamma I_1 - \gamma p I_1 + l(\theta_2) &> \theta_1 + I_1 - \gamma p I_1 \\ \theta_2 + l(\theta_2) &> \theta_1 + (1-\gamma) I_1\end{aligned}$$

Por lo que para una inversión I_1 del incumbente, su probabilidad de ganar (y de que no tenga rival) es $F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)$. Así, el problema de optimización de éste en el periodo 1 es maximizar:

$$\Pi^C = F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(\theta_1 + I_1) + (1 - F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1))p\gamma I_1 - \frac{a}{2}{I_1}^2$$

Podemos reescribir este término y obtenemos:

$$\Pi^C = p\gamma I_1 - \frac{a}{2}{I_1}^2 + F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(\theta_1 + (1-p\gamma)I_1) \tag{3.1}$$

En palabras, el incumbente tiene una fracción de la inversión asegurada gracias a la posibilidad de negociar con el entrante.

Traspaso eficiente

Un caso particular es cuando la inversión se traspasa completamente al entrante, $\gamma = 1$. El problema se vuelve sencillo y podemos obtener el resultado de forma analítica. La utilidad a maximizar es $pI_1 - \frac{a}{2}{I_1}^2 + F(\theta_1)(\theta_1 + (1-p)I_1)$ y la condición de primer orden nos queda:

$$\begin{aligned}&p - aI_1 + F(\theta_1)(1-p) = 0 \\ \iff\ & I_1^C(\theta_1) = \frac{p + F(\theta_1)(1-p)}{a}\end{aligned}$$

[5]Es razonable que una firma más eficiente invierta lo mismo o más que una menos eficiente
[6]También puede representar cierta fricción o costo por la negociación

Podemos ver que la inversión, a diferencia del modelo original, es siempre más pequeña en licencias cortas, ya que en licencias largas obtenemos $I^L = \frac{1}{a}$. Esto se debe a que ya no se tiene el segundo efecto de la inversión, la que al aumentar hace crecer la probabilidad de ganar. Una unidad más de inversión aumenta la valoración del incumbente y del entrante por igual. Matemáticamente, las valoraciones marginales son iguales para ambos jugadores:

$$\frac{\partial v_1}{I_1} = \frac{\partial \hat{\theta}}{I_1} = 1 - p.$$

Así, ya no podemos establecer una proposición como la 2.8 que se sustenta sobre una mayor inversión en licencias cortas.
Las repercusiones en el bienestar podemos observarlas de forma indirecta en el valor que generará el incumbente (y el potencial entrante en licencias cortas) para el segundo periodo en cada configuración. El valor que se generará en licencias largas es simplemente $V(\theta_1) = \theta_1 + \frac{1}{a}$ (recordar que $\alpha = 0$). Mientras que en licencias cortas, con probabilidad $F(\theta_1)$ el incumbente ganará la licitación, generando un valor $\theta_1 + I_1^C(\theta_1)$ y con probabilidad $1 - F(\theta_1)$ el ganador será el entrante, generando un valor esperado igual a $\mathbb{E}[\theta_2 + l(\theta_2)|\theta_2 + l(\theta_2) > \theta_1] + I_1^C(\theta_1)$, ya que el entrante recibe la inversión de forma íntegra pagando $pI_1^C(\theta_1)$ al incumbente, lo que no cambia el valor producido. En la figura 3.1 mostramos un ejemplo en el cual se puede ver que a pesar de haber menos inversión siempre en licencias cortas, los beneficios de un potencial entrante más eficiente compensan la baja inversión.

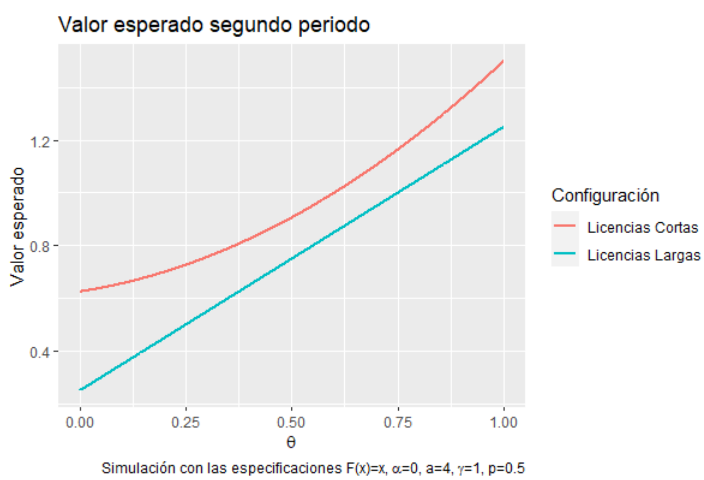


Figura 3.1: Valor esperado con traspaso eficiente.

Como la inversión en licencias cortas es más baja y además genera mayor valor en el segundo periodo, se sigue que el bienestar debe ser mayor en dicha configuración. Este ejemplo mantiene el espíritu de la proposición 2.6.

El traspaso eficiente es un escenario muy particular y restrictivo, ya que por ejemplo, no permite que parte de la inversión sea específica a la firma, o que haya algún coste en la negociación. Cubriremos este caso a continuación.

Traspaso ineficiente

Supongamos que parte de la inversión no es transferible, por lo que $\gamma < 1$. Procederemos de forma análoga a la resolución de nuestro modelo original en licencias cortas, analizando por partes la llamada zona neutra, zona de bloqueo y solución interior.

Primero, veamos los tipos cuya inversión óptima en licencias cortas es igual a la inversión en largas debido a su alta eficiencia. Estos son los θ_1 tal que al invertir $I^C = \frac{1}{a}$ consiguen con probabilidad 1 la licencia, es decir, $\theta_1 + (1-\gamma)\frac{1}{a} \geq 1$. Al imponer igualdad en la expresión anterior obtenemos que $\omega^N = 1 - \frac{1-\gamma}{a}$ es el tipo más pequeño que invierte óptimamente $\frac{1}{a}$, y todos los tipos mayores o iguales a éste componen la zona neutra.

Busquemos los tipos menores a ω^N que tengan incentivos a invertir lo suficiente para asegurarse la licencia. La derivada de la utilidad nos queda[7]

$$\frac{\partial \Pi^C}{\partial I_1} = p\gamma - aI_1 + f(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)[\theta_1 + (1-p\gamma)I_1](1-\gamma) + F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(1-p\gamma),$$

y dado θ_1, la inversión que asegura la licencia es $I^b = \frac{1-\theta_1}{1-\gamma}$. Así, al evaluar en su derivada debemos obtener un valor igual o mayor a cero:

$$\begin{aligned} p\gamma - a\frac{1-\theta_1}{1-\gamma} + f(1)\left[\theta_1 + (1-p\gamma)\frac{1-\theta_1}{1-\gamma}\right](1-\gamma) + 1(1-p\gamma) \geq 0 \\ \iff \theta_1 \geq \frac{a - (1-\gamma)[1 + (1-p\gamma)f(1)]}{a - (1-\gamma)\gamma(1-p)f(1)} \equiv \xi^N. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En el apéndice mostramos que $\xi^N \leq \omega^N$ con igualdad sólo si $f(1) = 0$. Para que ξ^N sea positivo necesitamos pedir que $a > (1-\gamma)[1+(1-\gamma)f(1)]$, de lo contrario todos los tipos menores que ω^N invierten lo suficiente para bloquear, de lo cual se sigue que licencias cortas genera mayor inversión en tipos bajos e igual inversión en el resto. Por lo tanto, si $\theta_1 \in [\xi^N, \omega^N]$ implica $I_1^C(\theta_1) = I^b$.

Finalmente, están los tipos cuya inversión óptima cumple la condición de primer orden y que no tienen asegurada la licencia. Notemos que como $F(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, la derivada con respecto a la inversión es:

$$\frac{\partial \Pi^C}{\partial I_1} = p\gamma - aI_1 + n(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)^{n-1}[\theta_1 + (1-p\gamma)I_1](1-\gamma) + (\theta_1 + (1-\gamma)I_1)^n(1-p\gamma),$$

que es claramente creciente en θ_1, por lo que usando el teorema de Topkis sabemos que $I_1^C(\theta_1)$ es creciente en $[0, \xi^N)$.
La condición de primer orden nos da:

$$\frac{p\gamma + n(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)^{n-1}[\theta_1 + (1-p\gamma)I_1](1-\gamma) + (\theta_1 + (1-\gamma)I_1)^n(1-p\gamma)}{a} = I_1, \tag{3.3}$$

[7] Suponemos concavidad en I_1. Ver apéndice.

que en particular nos dice que $I^C(\theta_1) > \frac{p\gamma}{a}$.
Si miramos al tipo ξ^N que es quien más invierte, notaremos que su inversión es menor que la máxima inversión en el modelo original. En efecto, la inversión en este punto es

$$I = \frac{1-\xi^N}{1-\gamma} = \frac{1+(1-\gamma)f(1)}{a-(1-\gamma)\gamma(1-p)f(1)} < \frac{1+(1-\gamma)f(1)}{a} < \frac{1+f(1)}{a} = 1-\xi$$

Además podemos probar que cada uno de los puntos críticos es mayor a su homólogo en el modelo original, es decir:

$$\xi^N > \xi, \quad \omega^N > \omega. \tag{3.4}$$

Notemos que si $\gamma = 0$ obtenemos el modelo original, y si este parámetro aumenta se generan dos efectos opuestos. Por un lado, asegura una fracción mayor de los beneficios de la inversión, pero por otro disminuye la probabilidad de ganar la licencia, ya que el entrante se beneficia de una transferencia de inversión más eficiente.

En resumen, si el traspaso no es totalmente eficiente obtenemos el mismo comportamiento en inversión que en el modelo original pero con puntos críticos mas altos, una inversión mínima más alta y una inversión máxima más baja, acercándose a la inversión óptima de licencias largas. Este comportamiento sugiere la posibilidad de formular proposiciones similares a las ya obtenidas respecto al bienestar. Dejamos un ejemplo en la siguiente figura.

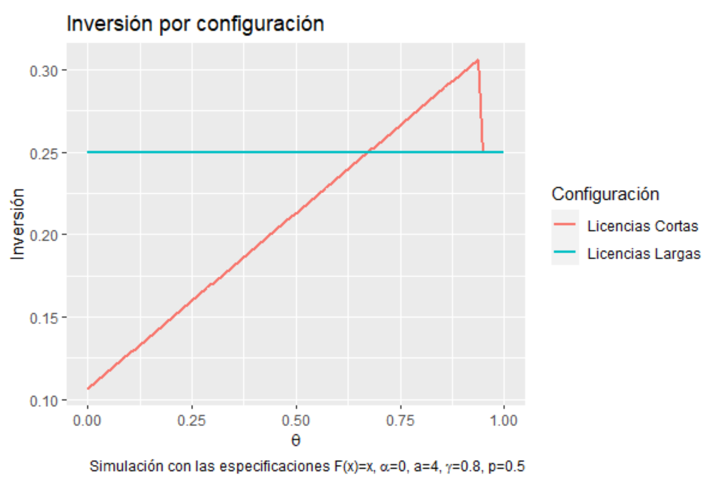


Figura 3.2: Incentivos de inversión con traspaso ineficiente.

Una inversión fácilmente transferible y un poder de negociación balanceado mitigaría el temido hold-up problem, dando mayores incentivos a la inversión de largo plazo.

Capítulo 4

Discusión e implicancias políticas

¿Qué podemos decir a partir del modelo? En este capítulo discutimos y analizamos las implicancias en la política regulatoria de nuestro trabajo.

4.1. El beneficio del consumidor

La proposición 2.8 nos dice que si el consumidor se beneficia en gran proporción del valor que genera la inversión del incumbente para el periodo 2, y el incumbente es relativamente eficiente, entonces licencias cortas genera un mayor bienestar que licencias largas. Si el incumbente es demasiado eficiente, entonces no hace diferencia y el bienestar es el mismo en ambas configuraciones. Lo que nos lleva a las preguntas ¿Cómo y cuándo el consumidor obtiene un gran beneficio del valor generado por la inversión? y más básico aun, ¿qué es λ?. Partamos analizando esta última pregunta.

4.1.1. Renta del consumidor

El multiplicador representa la medida en que se beneficia el consumidor a partir de la inversión que mejora la calidad del bien transado en el mercado, por lo que, una primera definición de lo que es λ es que corresponde a la fracción del valor generado que no es obtenido por el monopolio debido a por ejemplo, la asimetría de información acerca de la valoración del bien por los consumidores. Así, cada vez que la asimetría de información permita al consumidor quedarse con un gran excedente, estaríamos en presencia de un λ alto. Dicho valor dependerá de la demanda y su elasticidad o de la distribución de los tipos de los consumidores, que representa la disposición a pagar por el bien.
Algunas concesiones de autopistas y carreteras se otorgan a la firma que ofrezca menor cobro por peaje. En teoría, una firma racional y eficiente ofrecerá un bajo precio y se llevará la concesión sin quebrar o tener que renegociar el contrato[1], generando una gran renta al

[1]Engel et al. (1996)[12] muestran el caso de Chile, en donde sucede que empresas primerizas caen en la maldición del ganador, ganando con una oferta muy baja que los lleva a la quiebra o renegociando contrato. Otras firmas con un gran poder de negociación lo hacen a propósito, sabiendo que el gobierno tiene incentivos a renegociar el contrato en vez de dejar un camino sin construir.

consumidor cada vez que haga uso de estas pistas.

4.1.2. Externalidad positiva

Pensemos en el ejemplo de una firma de telecomunicaciones brindando servicios de internet. Notemos que una mayor inversión en antenas resulta en una mayor cobertura en internet, o una inversión en tecnología como la fibra óptica permite una velocidad de navegación más alta. Un consumidor se beneficia por variados motivos: menos tiempo de espera descargando archivos, videos cargan más rápido y en mejor calidad, video conferencias estables, etc. Uno de los beneficios más importantes es el acceso a la información; que sea estable, accesible para todos y veloz. Esto permite a estudiantes o gente del hogar educarse, y es justamente la educación (en sus muchas aristas) la que genera (y es por excelencia) una externalidad positiva, que redunda en vida más plenas y con mejor calidad de vida para todo el hogar. Un buen servicio de internet también permite el teletrabajo (trabajo a distancia desde el hogar), tan importante en estos momentos en que se escribe esta tesis debido a la pandemia del Coronavirus[2]. Quienes pueden y tienen el privilegio de realizar teletrabajo en estos momentos benefician a todo su hogar al no exponerlos a su contagio y al llevar sustento. También se beneficia la gente obligada a exponerse por su trabajo o por trámites, ya que disminuye la cantidad de personas en las calles y transporte público.
Otra externalidad es el valor que genera el que más individuos tengan acceso a internet. Tener internet es bueno, pero es mejor cuando también nuestro familiares, amigos y compañeros de trabajo tienen, ya que podemos comunicarnos, lo que brinda tiempos de calidad para el ocio y también permite hacer trabajos grupales o que necesitan coordinación. Así, el multiplicador λ puede involucrar una medida de las externalidades positivas que genera el mercado y que no se logra medir como un excedente del consumidor en la forma clásica, es decir, mirando disposiciones a pagar y el precio al que se transa.

En resumidas cuentas, el multiplicador λ puede representar:

i La fracción del valor generado en el mercado que obtiene el consumidor.

ii Externalidades positivas que podría tener en cuenta el regulador.

4.2. El tipo del incumbente y el factor de descuento

En este apartado nos referiremos brevemente a cada uno de estos temas.
En nuestro modelo tenemos el tipo del incumbente como información conocida y los resultados dependen de éste. Se podría pensar que tal incumbente debe tener algún grado de eficiencia, suponiendo que para lograr establecerse en el mercado tuvo que ganar alguna licitación previa. Si fuese el caso, podríamos pensar que es menos probable que aplique la proposición 2.6 (aunque no imposible), dependiendo de la eficiencia que pueda presentar el potencial entrante (modelada por la función F). En la misma línea, sería más probable observar el efecto de bloqueo o prevención de entrada, teniendo más importancia la proposición 2.8.

[2]En Chile el Coronavirus tiene una alta tasa de contagios y aun no alcanza su máximo, según los expertos y experiencia comparada.

Respecto de la ausencia de factor de descuento, afirmamos que no produce cambios cualitativos en los resultados. Para el caso de Licencias Largas, la inversión será menor para cada tipo. En Licencias Cortas, la inversión será menor en la zona creciente y los tipos claves, ξ y ω son más altos. No se ve que la presencia u omisión del factor de descuento beneficie alguna licencia por sobre la otra.

4.3. Implicancias políticas

Advertidos sobre las limitantes y robustez de nuestro modelo en el capítulo anterior y teniendo en cuenta que nuestro modelo solo considera el caso de un monopolio, procedemos a analizar las implicancias de nuestros resultados en política.
Ya vimos que bajo ciertas condiciones las licencias cortas son preferidas a las largas desde un pusto de vista de bienestar social. La proposición 2.6 nos dice que si el costo marginal de la inversión es alto y además el valor esperado que puede generar una nueva firma en el mercado es grande, entonces, a pesar de que un incumbente ineficiente invierta menos en licencia corta, el bienestar será mayor gracias al entrante. Por otro lado, la proposición 2.8 nos asegura que tipos medianamente altos invertirán más en licencia corta con el fin de proteger su estadía en el mercado, por lo que si el consumidor obtiene un alto beneficio de la inversión, este exceso de inversión es deseable socialmente.

Nuestro modelo sugiere que en el mercado de esprectro para telecomunicación, licencias cortas podrían ser más eficientes que licencias largas. Los avances en tecnología partiendo por la telefonía, pasando por transmisión de radio y televisión, y llegando al internet con sus progresivas mejoras en velocidad cuya cúspide actualmente es el 5G, dan a entender que hay constantemente nuevas ideas y proyectos que generan alto valor a los consumidores y por ende, oportunidades de obtener utilidades para las firmas. Sin duda alguna, una buena señal para comunicación telefónica y una buena conexión a internet produce un bienestar no solo a sus usuarios por separados, sino que también genera un valor colectivo, que se refleja en la posibilidad de teletrabajar, buscar-ofrecer trabajo, mantener contacto con seres queridos y facilitar el acceso a información y a la educación. Además el 5G permite el desarrollo del Internet de las Cosas (IoT) que es "la conexión de distintos objetos y sensores con internet, lo que permite el intercambio automático de información con otros dispositivos, sin la necesidad de intervención humana" (La Tercera, 2020)[6] y fomentará las ciudades inteligentes, "a través del transporte con vehículos conectados e interactuando entre ellos, con una gestión más eficiente de la red de las ciudades, evitando la ocurrencia de accidentes, aglomeraciones de tránsito y optimizando el uso de calles y carreteras" (Bíobío Chile, 2020)[18].
Históricamente, en Estados Unidos las licencias de espectro electromagnético han tenido duración entre 10 a 15 años y entre 10 y 25 años en el mundo. La licitación 103 de Estados Unidos realizada en 2018 para la implementacion del 5G otorgaba licencias con duración de 10 años. En Chile hubo una en 2013 para el desarrollo del 4g. Anterior a esa fecha, los derechos sobre el espectro electromagnético se otorgaron de acuerdo a propuestas de uso por parte de firmas interesadas (beauty contest). En este año, 2020, se realizará la licitación de espectro que permite desarrollar la tecnología 5G en la cual se decidió usar un largo de 30 años. La experiencia mundial sugiere que este largo es un tanto alto y podría generar ineficiencias en los años siguientes debido al avance tecnológico y a la futura escasez de licencias para nuevas

firmas entrantes que además de generar nuevos o mejores servicios, aumentan la competencia a los incumbentes.

Mercados en los que no son tan deseables licencias cortas pueden ser aquellos en los que el producto se exporta o mercados donde la inversión no es relevante o no es un problema. Una buena carretera y autopista generan un tremendo valor para el desarrollo del país, pero la calidad de las carreteras es comprobable por lo que se puede pedir por contrato fácilmente, sin tener que dar incentivos extras a invertir en calidad.
Las cuotas de pescas tienen un propósito más bien de guiar a una explotación de recursos naturales de forma sustentable, evitando por ejemplo la extinción o la temprana explotación de pescados. Si el mercado es competitivo ya se estará incentivando a tener buena tecnología de producción. Si además el producto en gran parte se vende al extranjero, lo que en nuestro modelos se traduciría en un λ pequeño, podría ser que licencias largas genere un mayor bienestar, ya que licencias cortas presionaría a algunas empresas a sobreinvertir sin generar un aumento significativo en el bienestar total.
Si las firmas son ineficientes y hay un gran valor por más entranres, licencias cortas tienen sentido.

Conclusión

Cuando se desea licitar una licencia que brinda el derecho a explotar un recurso y que permite participar en una actividad económica se debe pensar en cada una de sus características, como la cuota del recurso de la que puede hacer uso y el tiempo de caducidad de este derecho, ya que dichas características serán las reglas del juego que moldearán los incentivos de la firma dueña de la licencia. En este trabajo intentamos brindar un marco teórico que nos permita entender cómo la duración de las licencias afectan los incentivos de inversión de largo plazo de las firmas cuando la inversión importa para el bienestar social, y destacar factores claves que permitan justificar qué tipo de licencia usar. Encontramos algunos factores claves como la eficiencia del incumbente, el bienestar que genera un buen plan en el mercado aguas abajo y la posibilidad de transferir la inversión mediante negociación.
Usualmente serán deseables licencias cortas cuando los potenciales entrantes tengan buenos proyectos, el incumbente sea ineficiente y el costo marginal de la inversión sea alto. Sin embargo, aun cuando el incumbente es medianamente eficiente, licencias cortas funcionan mejor si los consumidores obtienen un alto beneficio en el mercado, ya que se presiona al incumbente a invertir más con el fin de proteger su estadía en el mercado. Este efecto se suma a la literatura de entrada y disuación, en la cual la inversión sirve al incumbente para disminuir la probabilidad de competencia en la licitación, lo que le permite obtener la licencia a precio (de reserva) cero. Esta distorsión en los incentivos de inversión no debe ser sobredimensionada ya que diversos ambientes o elementos, tales como la posibilidad de negociar o imponer un precio de reserva mayor a cero, la disminuyen.
Nuestros resultados tienen implicancias en el plano regulatorio y sugieren usar licencias cortas en el mercado de espectro radioeléctrico.

Para investigaciones futuras podemos considerar plantear un juego repetido infinitamente que permita justificar las tecnologías y tipos de entrantes; un ambiente en el que la inversión produzca mejoras estocásticas en los ingresos; la posibilidad de realizar inversiones de corto plazo y un modelo de competencia imperfecta.

Bibliografía

[1] Auction 103: Spectrum frontiers – upper 37 ghz, 39 ghz, and 47 ghz. Disponible en `https://www.fcc.gov/auction/103/factsheet`.

[2] Bases concurso. Disponible en `https://www.subtel.gob.cl/wp-content/uploads/2020/08/Bases_concurso_publico_700_MHz.pdf` (14/08/2020).

[3] Licitación 4g: se definen frecuencias para entel, movistar y claro. Disponible en `https://www.subtel.gob.cl/licitacion-4g-se-definen-frecuencias-para-entel-movistar-y-claro/` (30/07/2012).

[4] Leandro Arozamena and Estelle Cantillon. Investment incentives in procurement auctions. *The Review of Economic Studies*, 71(1):1–18, 2004.

[5] Patrick Bolton, Mathias Dewatripont, et al. *Contract theory*. MIT press, 2005.

[6] Carla Cabello. Licitación para el desarrollo del 5g: la tecnología permitirá velocidades 10 veces más rápidas que el 4g. Disponible en `https://www.latercera.com/pulso/noticia/licitacion-para-el-desarrollo-del-5g-la-tecnologia-permitira-velocidades-10-veces` `RABYYN3L2NHTVIT7QDOPSUMCWQ/` (17/08/2020).

[7] Peter Cramton et al. Lessons learned from the uk 3g spectrum auction. *report commissioned by the National Audit Office of the United Kingdom*, 2001.

[8] Peter Cramton et al. Spectrum auctions. *Handbook of telecommunications economics*, 1:605–639, 2002.

[9] Peter Cramton, Evan Kwerel, Gregory Rosston, and Andrzej Skrzypacz. Using spectrum auctions to enhance competition in wireless services. *The Journal of Law and Economics*, 54(S4):S167–S188, 2011.

[10] Avinash Dixit. The role of investment in entry-deterrence. *The economic journal*, 90(357):95–106, 1980.

[11] Glenn Ellison and Sara Fisher Ellison. Strategic entry deterrence and the behavior of pharmaceutical incumbents prior to patent expiration. *American Economic Journal: Microeconomics*, 3(1):1–36, 2011.

[12] Eduardo Engel, Ronald Fischer, and Alexander Galetovich. *Licitación de carreteras en Chile*. Centro de Estudios Públicos, 1996.

[13] Drew Fudenberg and Jean Tirole. Pricing a network good to deter entry. *The Journal of Industrial Economics*, 48(4):373–390, 2000.

[14] Dan Levin and James L Smith. Equilibrium in auctions with entry. *The American Economic Review*, pages 585–599, 1994.

[15] Urs Meister. Franchise bidding in the water industry—auction schemes and investment incentives. *Introducing Competition into the Piped Water Market: A Theoretical Analysis of Common Carriage and Franchise Bidding*, pages 89–123, 2006.

[16] Paul R Milgrom, E Glen Weyl, and Anthony Lee Zhang. Redesigning spectrum licenses to encourage innovation and investment. *Regulation*, 40(3):17–55, 2017.

[17] Paul Robert Milgrom. *Putting auction theory to work*. Cambridge University Press, 2004.

[18] Christian Ovalle. Piñera anuncia el inicio de la licitación de la red 5g: Chile es pionero en latinoamérica. Disponible en `https://www.biobiochile.cl/noticias/economia/tu-bolsillo/2020/08/17/pinera-anuncia-el-inicio-de-la-licitacion-de-la-red-5g-chile-es-pionero-en-latinoameri` `shtml` (17/08/2020).

[19] E Glen Weyl and Anthony Lee Zhang. Depreciating licenses. *Available at SSRN 2744810*, 2018.

Apéndice

Apéndice A

Pruebas formales del Capítulo 2

Justificación de la utilidad indirecta de 1.1
Calidad del bien

Demostración. Dada la calidad del bien, el monopolio calcula el precio p que maximice sus utilidades $\pi = (1 - \frac{p}{q})p$. La condición de primer orden nos da:

$$1 - 2\frac{p^*}{q} = 0$$
$$p^* = \frac{q}{2} = 2h$$

Por lo que sus utilidades son:

$$\pi = (1 - \frac{p^*}{q})p^* = \frac{1}{4}q = h$$

Y el consumidor obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u] = \mathbb{E}[vq - p^*|vq - p^* > 0]\mathbb{P}[vq - p^* > 0] &= \int_{\frac{p^*}{q}}^{1} vq - p^*\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{2}}^{1} vq - \frac{q}{2}\mathrm{d}v \\
&= q\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - q\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= q\frac{3}{8} - q\frac{1}{4} = q\frac{1}{8} = \frac{h}{2}
\end{aligned}$$

□

Reducción de costos

Demostración. La utilidad del monopolio es $\pi = (1 - \frac{p}{q})(p - c)$. La condición de primer orden nos da:

$$-\frac{(p-c)}{q}+(1-\frac{p}{q})=0$$
$$p^*=\frac{q+c}{2}=q-\sqrt{qh}.$$

En la última igualdad reemplazamos $c=q-2\sqrt{qh}$. Así mismo, sus utilidades son:

$$\pi=\left(1-\frac{q+c}{2q}\right)\left(\frac{q+c}{2}-c\right)=h$$

Y el consumidor obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u]&=\mathbb{E}[vq-p|vq-p>0]\mathbb{P}[vq-p>0]=\int_{\frac{p}{q}}^{1}vq-p\mathrm{d}v\\&=\frac{q}{2}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)-p\left(1-\frac{p}{q}\right)=\left(1-\frac{p}{q}\right)\left[\frac{q}{2}\left(1+\frac{p}{q}\right)-p\right]\\&=\left(\frac{q-c}{2q}\right)\left(\frac{q}{2}-\frac{q+c}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{q-c}{q}\frac{q-c}{2}=\frac{(q-c)^2}{8k}=\frac{h}{2}\end{aligned}$$

□

Cálculos previos para los lemas 2.1 y 2.2

Consideremos las condiciones que definen ambos parámetros obtenidas de 2.6 y 2.13

$$\omega+\frac{(1+\alpha\omega)^2}{a}=1,$$
$$(1+\alpha\xi)[1+f(1)]-a\frac{1-\xi}{1+\alpha\xi}=0.$$

Trabajamos la segunda ecuación: sumamos el segundo término del lado izquierdo, mutiplicamos por $\frac{1+\alpha\xi}{a}$ y sumamos ξ, lo que nos da

$$\xi+(1+f(1))\frac{(1+\alpha\xi)^2}{a}=1.$$

De aquí se concluye rápidamente que si $f(1)=0$, $\xi=\omega$. Supongamos ahora que $f(1)>0$, y definamos ahora la función $g(x,\theta)=\theta+(1+x)\frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}$, y notemos que es estrictamente creciente en ambos argumentos

$$g_x=\frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}>0,$$
$$g_\theta=1+\frac{2\alpha}{a}(1+x)(1+\alpha\theta)>0.$$

Lema 2.1

Demostración. Evaluemos algunos valores claves en g. Notemos que

$$\begin{aligned} g(0,\omega) &= \omega + \frac{(1+\alpha\omega)^2}{a} = 1 \\ g(0,1) &= 1 + \frac{(1+\alpha)^2}{a} > 1 \\ g\left(0, -\frac{1}{\alpha}\right) &= -\frac{1}{\alpha} < 1 \end{aligned}$$

Por teorema del valor intermedio existe $\theta' \in (-\frac{1}{\alpha}, 1)$ tal que $g(0,\theta') = 1$. Luego, θ' puede ser igual a ω o a la otra raíz:

$$\frac{1}{2\alpha^2}\left[-\sqrt{a[4\alpha^2 + 4\alpha + a]} - (a + 2\alpha)\right]$$

que es claramente siempre negativa y de hecho, menor a $-\frac{1}{\alpha}$, por lo que $\theta' = \omega < 1$. Además usando 2.7, sabemos que $\omega \geq 0$ exactamente cuando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha^2 + 4\alpha + a]} - (a + 2\alpha)\right] &\geq 0 \\ \sqrt{a[4\alpha^2 + 4\alpha + a]} - (a + 2\alpha) &\geq 0 \\ a[4\alpha^2 + 4\alpha + a] &\geq (a + 2\alpha)^2 \\ a[4\alpha^2 + 4\alpha + a] &\geq a^2 + 4a\alpha + 4\alpha^2 \\ 4\alpha^2(a-1) &\geq 0 \\ a &\geq 1 \end{aligned}$$

y cada par de desigualdad anterior son equivalentes. Con esto ya demostramos el lema.

□

Lema 2.2

Demostración. Ya sabemos que $\xi = \omega$ cuando $f(1) = 0$. Supongamos ahora que $f(1) \neq 0$ y procedamos de forma análoga a la anterior, evaluando valores convenientemente

$$\begin{aligned} g(f(1),\xi) &= \xi + (1 + f(1))\frac{(1+\alpha\xi)^2}{a} = 1, \\ \implies g(0,\xi) &< 1 = \omega + \frac{(1+\alpha\omega)^2}{a} = g(0,\omega). \end{aligned}$$

De aquí se concluye que $\xi < \omega$.
Por otro lado, para que $\xi \geq 0$ es necesario y suficiente (usando 2.12)

$$\frac{1}{2\alpha^2(1+f(1))}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+f(1))[1+\alpha]+a]} - 2\alpha(1+f(1)) - a\right] \geq 0$$

Trabajando aun más la desigualdad:

$$\begin{aligned} \sqrt{a[4\alpha(1+f(1))[1+\alpha]+a]} &\geq 2\alpha(1+f(1)) + a \\ a[4\alpha(1+f(1))[1+\alpha]+a] &\geq 4\alpha^2(1+f(1))^2 + 4a\alpha(1+f(1)) + a^2 \\ 4\alpha(1+f(1))[a(1+\alpha) - \alpha(1+f(1)) - a] &\geq 0 \\ \alpha[a - (1+f(1))] &\geq 0 \\ a &\geq 1 + f(1) \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Ecuación 2.19. Derivada implícita.

Demostración. Sea $h = h(I, \theta)$ y $I = I^C(\theta)$. De 2.17 tenemos

$$\begin{aligned}(1+\alpha\theta)\left[f(h)h + F(h)\right] - aI = 0 \\ \iff f(h)h + F(h) = \frac{aI}{1+\alpha\theta}\end{aligned}$$

Si derivamos a ambos lados con respecto a θ obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} l(h) = a\left[\frac{\frac{\partial I}{\partial \theta}(1+\alpha\theta) - I}{(1+\alpha\theta)^2}\right], \text{ donde } l(h) = f'(h)h + 2f(h)$$

Note que $\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta + (1+\alpha\theta)I) = 1 + \alpha I + (1+\alpha\theta)\frac{\partial I}{\partial \theta}$.
Reemplazando y multiplicando por $(1+\alpha\theta)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\left(1 + \alpha I + (1+\alpha\theta)\frac{\partial I}{\partial \theta}\right) l(h)(1+\alpha\theta)^2 &= a\left[\frac{\partial I}{\partial \theta}(1+\alpha\theta) - I\alpha\right] \\ \frac{\partial I}{\partial \theta}(1+\alpha\theta)[(1+\alpha\theta)^2 l(h) - a] &= -a\alpha I - (1+\alpha I)(1+\alpha\theta)^2 l(h) \\ \frac{\partial I}{\partial \theta} &= \frac{a\alpha I + (1+\alpha\theta)^2(1+\alpha I)l(h)}{-(1+\alpha\theta)[(1+\alpha\theta)^2 l(h) - a]}\end{aligned}$$

Al reemplazar $l(h)$ se obtiene el resultado de 2.19. $\square$

Lema 2.3 Sea $F(x)$ una función de distribución de probabilidad tal que su marginal revenue es mayor a cero en algún punto. Entonces existe $\bar{\theta} \in (0, \xi)$ tal que $h(I^C(\bar{\theta}), \bar{\theta})$ cumple 2.20.

Demostración. Definamos $MR(x) = x - \frac{1-F(x)}{f(x)}$. Esta función es continua gracias a que $F(x)$ la supusimos dos veces diferenciable con derivadas continuas. Además por hipótesis existe $z \in [0,1]$ tal que $MR(z) > 0$, y si x tiende a cero, entonces $MR(x) < 0$. Por teorema del valor intermedio existe $\bar{x} \in (0,1)$ tal que $MR(\bar{x}) = 0$. Por otro lado, usando la continuidad de $I^C(\theta)$, garantizada por el teorema de la función implícita, tenemos que $h^C(\theta) \equiv h(I^C(\theta), \theta)$ es continua, y $h^C(\theta) < 1$ ssi $\theta < \xi$. Luego, $h^C(0) = 0 < \bar{x}$ y $h^C(\xi) = 1 > \bar{x}$, y nuevamente por teorema del valor intermedio existe $\bar{\theta} < \xi$ tal que $h^C(\bar{\theta}) = \bar{x}$. $\square$

Proposición 2.6 Consideremos $\bar{h}$ del lema 2.3 y definamos $\beta = min\{\bar{h}, \mathbb{E}[\hat{\theta}]\}$. Si $a > \frac{1}{\beta}$, entonces para todo $\theta \leq \underline{\theta} \equiv \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+\alpha\beta) + a]} - (a + 2\alpha)\right]$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. La condición $a > \frac{1}{\beta}$ garantiza que $\underline{\theta} > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+\alpha\beta)+a]}-(a+2\alpha)\right] > 0 \\ a[4\alpha(1+\alpha\beta)+a] > a^2+4\alpha a+4\alpha^2 \\ 4\alpha^2 a\beta > 4\alpha^2 \\ a > \frac{1}{\beta}.\end{aligned}$$

Veamos que un tipo $\theta \leq \underline{\theta}$ genera un valor menor o igual a β en licencias largas:

$$\begin{aligned}\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a} &\leq \beta \\ a\theta + 1 + 2\theta + \alpha^2\theta^2 &\leq a\beta \\ \theta^2 + 2\theta\frac{a+2\alpha}{2\alpha^2} &\leq \frac{a\beta-1}{\alpha^2} \\ \left(\theta + \frac{a+2\alpha}{2\alpha^2}\right)^2 &\leq \frac{a\beta-1}{\alpha^2} + \frac{(a+2\alpha)^2}{4\alpha^4} = \frac{1}{4\alpha^4}[(a+2\alpha)^2+4\alpha^2(a\beta-1)] \\ \left(\theta + \frac{a+2\alpha}{2\alpha^2}\right) &\leq \frac{1}{2\alpha^2}\sqrt{a^2+4\alpha a+4\alpha^2 a\beta} \\ \theta &\leq \frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{a[4\alpha(1+\alpha\beta)+a]}-(a+2\alpha)\right] = \underline{\theta}\end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores son equivalencias. Por lo tanto, un incumbente de tipo $\theta \leq \underline{\theta}$ genera en licencias largas un valor $\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a} \leq \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \phi(0) < \phi(\theta)$ para $\theta > 0$. Además:

$$\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a} \leq \bar{h}$$

por lo que $\theta \leq \bar{\theta}$, de lo que se concluye que $I^C(\theta) \leq I^L(\theta)$. Así, la diferencia de bienestar es

$$\begin{aligned}\Delta W(\theta) &= \frac{a}{2}\left(\left(\frac{1+\alpha\theta}{a}\right)^2 - I^C(\theta)^2\right) + (1+\lambda)\left[\phi(\theta) - \left(\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}\right)\right] \\ &> 0 + (1+\lambda)\left[\mathbb{E}[\hat{\theta}] - \left(\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}\right)\right] > 0\end{aligned}$$

Para todo $\theta \in (0, \underline{\theta}]$. Si $\theta = 0$, tenemos $I^C(0) < I^L(0)$, por lo que la desigualdad también es estricta. □

Lema 2.7 Sea $\bar{\theta} \in (0, \xi)$ del lema 2.3 y $\theta \in [\bar{\theta}, \xi)$. Entonces, existe $\bar{\lambda} \geq 0$ tal que para todo $\lambda > \bar{\lambda}$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\theta \in [\bar{\theta}, \xi)$, entonces $I^C(\bar{\theta}) = I^L(\bar{\theta})$ y $I^C(\theta) > I^L(\theta)$ para todo $\theta > \bar{\theta}$. Sea $h^l = h(I^l(\theta), \theta)$ con $l \in \{C, L\}$, entonces se cumple $\phi(\theta) = \mathbb{E}[max\{h^C, \hat{\theta}\}] > h^C \geq h^L$. Sea $\lambda(\theta)$ tal que hace que dado θ, $\Delta W(\theta) = 0$, es decir

$$\lambda(\theta) = \frac{\frac{a}{2}(I^{C2} - I^{L2})}{\phi(\theta) - h^L} - 1$$

Note que el primer término del lado derecho de la igualdad es positivo y su denominador nunca se indetermina, por lo que $\lambda(\theta) < \infty$. Ahora tomamos $\bar{\lambda} = max\{0, \lambda(\theta)\}$. Así, si $\lambda > \bar{\lambda}$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$. □

Proposición 2.8

Demostración. Primero, notemos que cada vez que $I^C \geq I^L$ imlica que $h^C \geq h^L$ por lo que $\phi(\theta) > h^L$. Definamos sobre el intervalo $[\bar{\theta}, \xi]$ la función

$$\lambda(\theta) = \frac{\frac{a}{2}(I^{C2} - I^{L2})}{\phi(\theta) - h^L} - 1$$

del lema anterior. Note que dicha función es continua ya que es composición, suma y división de funciones continuas y que su denominador es positivo, por lo que $\lambda(\theta)$ no se indetermina. Como dicha función está bien definida en este intervalo compacto y es continua, por Teorema de Weierstrass, existe $\theta^* \in [\bar{\theta}, \xi]$ tal que $\lambda(\theta) \leq \lambda(\theta^*)$. Así conseguimos una cota para $\lambda(\theta)$ que no depende de θ y que hace que para cualquier $\lambda > \lambda(\theta^*)$ se cumpla $\Delta W(\theta) > 0$.
Consideremos ahora $\Delta W(\theta)$ en el intervalo $[\xi, \omega)$ y sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\Delta W(\theta) &= \frac{a}{2}\left(\left(\frac{1+\alpha\theta}{a}\right)^2 - \left(\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}\right)^2\right) + (1+\lambda)\left[1 - \left(\theta + \frac{(1+\alpha\theta)^2}{a}\right)\right],\\
\Delta W'(\theta) &= a\left(\frac{1+\alpha\theta}{a^2}\alpha + \left[\frac{1-\theta}{1+\alpha\theta}\right]\left[\frac{1+\alpha}{(1+\alpha\theta)^2}\right]\right) - (1+\lambda)\left[1 + 2(1+\alpha\theta)\frac{\alpha}{a}\right],\\
\Delta W''(\theta) &= -a(1+\alpha)\left(\frac{(1+\alpha\theta)^3 + 3(1-\theta)(1+\alpha\theta)^2\alpha}{(1+\alpha\theta)^6}\right) - \frac{\alpha^2}{a}(1+2\lambda) < 0,
\end{aligned}$$

por lo que $\Delta W(\theta)$ es cóncava, y además cuando $\theta = \omega$ las inversiones son iguales en ambas configuraciones:

$$\omega + \frac{(1+\alpha\omega)^2}{a} = 1 \iff \frac{(1+\alpha\omega)}{a} = \frac{1-\omega}{1+\alpha\omega}$$

y ambas generan un valor igual a 1 para el segundo periodo, por lo que $\Delta W(\omega) = 0$.
De este modo, si $\Delta W(\xi) > 0$ para algún λ se tendría que $\Delta W(\theta) > 0$ para todo $\theta \in (\xi, \omega)$, bajo el mismo multiplicador. En particular, si $\lambda > \lambda(\theta^*)$ entonces $\Delta W(\xi) > 0$, por lo que $\hat{\lambda} \equiv \lambda(\theta^*)$ es tal que para todo $\lambda > \hat{\lambda}$ se tiene que $\Delta W(\theta) > 0$ en (ξ, ω) y por lo tanto en $[\bar{\theta}, \omega)$.

□

Apéndice B

Pruebas formales del Capítulo 4

Dejamos las demostraciones y cálculos pendientes sobre la extensión de negociación con traspaso ineficiente.

Concavidad. Recordemos la primera derivada de la utilidad es:

$$\frac{\partial \Pi^C}{\partial I_1} = p\gamma - aI_1 + f(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)[\theta_1 + (1-p\gamma)I_1](1-\gamma) + F(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(1-p\gamma)$$

Derivando de nuevo obtenemos:

$$-a + (1-\gamma)[f'(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(1-\gamma)(\theta_1 + (1-p\gamma)I_1) + 2f(\theta_1 + (1-\gamma)I_1)(1-p\gamma)] < 0$$

Desigualdades

Demostración. Veamos que $\xi^N \leq \omega^N$. Definamos la siguiente función

$$H(x) = \frac{a - (1-\gamma)[1 + (1-p\gamma)x]}{a - (1-\gamma)\gamma(1-p)x},$$

y notemos que $H(0) = 1 - \frac{1-\gamma}{a} = \omega^N$ y $H(f(1)) = \xi^N$. Derivando podemos comprobar que esta función es decreciente:

$$H'(x) = \frac{-(1-\gamma)(1-p\gamma)[a - (1-\gamma)\gamma(1-p)x] + [a - (1-\gamma)(1 + (1-p\gamma)x)](1-\gamma)\gamma(1-p)}{[a - (1-\gamma)\gamma(1-p)x]^2} \leq 0$$

$$\iff [a - (1-\gamma)(1 + (1-p\gamma)x)]\gamma(1-p) \leq (1-p\gamma)[a - (1-\gamma)\gamma(1-p)x]$$

$$\iff 0 \leq (1-\gamma)[a + (1-p)\gamma]$$

Lo cual es cierto y por lo tanto $\xi^N \leq \omega^N$. □

Demostración. Ddemostremos ahora las desigualdades de 3.4.

$$\xi^N = \frac{a - (1-\gamma)[1 + (1-p\gamma)f(1)]}{a - (1-\gamma)\gamma(1-p)f(1)} > \frac{a - (1-\gamma)[1 + (1-p\gamma)f(1)]}{a} > \frac{a - 1 - f(1)}{a} = \xi$$

Por otro lado, es trivial ver que $\omega = 1 - \dfrac{1}{a} < 1 - \dfrac{1-\gamma}{a} = \omega^N$ □