



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

HEURÍSTICA PARA LA GENERACIÓN DE ZONAS DE DISTRIBUCIÓN POSTAL

TÉISIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES

FERNANDO FELIPE CAVIERES VÁSQUEZ

PROFESOR GUÍA:
RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO
RODOLFO URRUTIA URIBE

SANTIAGO DE CHILE
2021

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN GESTIÓN DE OPERACIONES
POR: FERNANDO FELIPE CAVIERES VÁSQUEZ
FECHA: 2021
PROF. GUÍA: RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

HEURÍSTICA PARA LA GENERACIÓN DE ZONAS DE DISTRIBUCIÓN POSTAL

Resumen

En este trabajo, se logró conceptualizar un modelo matemático para resolver el problema del distritaje de códigos postales y la generación de zonas de distribución postal para la Empresa de Correos de Chile. El modelo aborda dificultades regulares en la conformación de distritos: compacidad, conexidad y balance de cargas entre distritos, donde las cargas de los códigos postales se distribuyen heterogéneamente en la cartografía. Pero sobretodo, tiene foco en diseñar los distritos "más compactos posibles", puesto que este tipo de resultados se percibe como una mejor solución, logra mayor aceptación y genera menor necesidad de modificaciones posteriores.

La formulación de este problema se basó en un modelo de optimización lineal entera sobre un grafo, el cual tiene como función objetivo minimizar la distancia de cada nodo de un distrito al centro de este último, cumpliendo restricciones de balance de carga y conexidad. El propósito fundamental de este modelo reside en la posibilidad de establecer un benchmark del tipo de soluciones que se desean obtener.

Este modelo resultó extremadamente complejo de resolver en instancias del tamaño de la operación regular de Correos, las cuales rondan los 4000 nodos. Por esta razón, frente a la imposibilidad de utilizar este modelo de optimización en problemas operacionales, se propone una metodología heurística que, tras análisis empíricos, consigue obtener soluciones muy cercanas al óptimo (GAP promedio de 5%) en tiempos funcionales para la operación regular (menos de una hora).

El procedimiento se aplicó a un caso de estudio real, representado por la generación de cuarteles de distribución postal en la comuna de Recoleta, y fue comparado contra otros distritajes realizados en la empresa. Los distritos obtenidos por la metodología propuesta logran excelente balance y presentan una elevado nivel de compacidad, muy superior a las alternativas. Además, este resultado se obtuvo en tiempos por debajo de los márgenes de espera establecidos, lo cual habilita este procedimiento para ser usado operacionalmente.

De manera que, el procedimiento presentado en este trabajo, se puede considerar como una alternativa que genera resultados con mejores índices de aceptación que la actual metodología usada para generar zonas de distribución postal.

Dedicado a Matila Isidora, mi hija.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos mis compañeros de trabajo en la Universidad de Chile, pues siempre que solicité su ayuda, me la entregaron con mucho agrado.

Gracias a todo el equipo de Correos de Chile, porque me permitieron explorar su trabajo y adentrarme en sus problemáticas (algunas muy sensibles), siempre con mucha buena onda y respeto. Fueron años bien entretenidos.

Gracias a mis amigos: Villano, Armani, Dani. De los cuales recibí más de un consejo para terminar este trabajo.

Sobretudo, muchas gracias mi esposa Natalia, que impulsó mi trabajo con amor y paciencia. Especialmente cuando las cosas se veían mal y había que dedicar largas noches a pensar, ella fue un apoyo constante.

Y, finalmente, gracias a mi hija Matilda, que en medio de un terrible año para la humanidad, viéndose azotada por la pandemia del COVID-19, la simple noticia de su llegada revitalizó mis ánimos y la vida se volvió más bella que nunca.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Empresa de Correos de Chile	1
1.2. Evolución del servicio de distribución postal	2
1.3. Zonas de distribución postal	2
2. Contexto General y Motivación	4
2.1. Contexto	4
2.2. La herramienta actual para generación de zonas de reparto	5
2.3. Características de la carga de trabajo	6
2.4. Problemas de la solución actual	8
2.4.1. Problemas de la compacidad de la solución	8
2.4.2. Problemas de las componentes aleatorias de la solución	10
3. Definición del Problema, Objetivos y Alcances	11
3.1. Definición del problema	11
3.2. Objetivo general	11
3.3. Objetivos específicos	12
3.4. Alcances y Limitaciones	12
4. Marco Teórico	13
4.1. Problemas de distritaje	13
4.1.1. Diseño de distritos políticos	13
4.1.2. Diseño de distritos comerciales	14
4.1.3. Diseño de distritos para la aplicación de servicios	14
4.1.4. Diseño de distritos para distribución	15
4.2. Criterios de distritaje	15
4.2.1. Asignación completa y exclusiva	15
4.2.2. Balance	16
4.2.3. Contigüidad/Conexidad	17
4.2.4. Compacidad	20
4.3. Enfoques de solución	22
4.3.1. El problema de la ubicación de instalaciones (<i>The p-median problem</i>)	23
4.3.2. Problema de partición de conjuntos (<i>Set partitioning problem</i>)	24
4.3.3. Métodos de división geométrica	25
4.3.4. Metaheurísticas	26
5. Procedimiento para la Generación de Zonas de Reparto	28

5.1.	Datos de entrada	28
5.2.	Modelo base de distritaje	32
5.2.1.	Parámetros	32
5.2.2.	Variables	32
5.2.3.	Función Objetivo	32
5.2.4.	Restricciones	33
5.3.	Heurística para la obtención de distritos en tiempos reducidos	36
5.3.1.	Etapla 1: Obtención de una solución inicial	37
5.3.2.	Etapla 2: Refinación de la solución inicial	43
5.4.	Desempeño del procedimiento	46
6.	Resultados aplicados a una instancia real	50
6.1.	Características del caso de estudio	50
6.2.	Datos de entrada	51
6.3.	Resultados del modelo aplicados al caso de estudio	53
6.4.	Análisis comparativo de la solución propuesta contra los distritos actualmente implementados y contra otros generados con la actual herramienta de distritaje	57
6.4.1.	Tiempos de resolución	57
6.4.2.	Balance de cargas	57
6.4.3.	Conexidad	59
6.4.4.	Compacidad	60
7.	Conclusiones	63
7.1.	Conclusiones generales	63
7.2.	Sobre los resultados obtenidos	64
7.3.	Sobre mejoras y trabajo futuros	65
	Bibliografía	66
	A. K-means	69
	B. Algoritmo de Dijkstra	70
	C. Distritos actuales	71
	D. Distritos alternativos	72

Índice de Ilustraciones

1.1. Códigos postales y manzanas de una comuna. Los colores de los códigos postales identifican aquellos que pertenecen a una misma zona.	3
2.1. División de los códigos postales de la comuna de Lo Prado, realizada por la herramienta de cuartelización. Se solicitaron 10 cuarteles, exigiendo que el cuartel con mayor workload no supere en más de 10% al cuartel con el menor workload.	5
2.2. Workload asociado a códigos postales en la comuna de Lo Prado.	7
2.3. Percepción de la compacidad en cuarteles generados con el algoritmo actual. A) Zonas mostradas solo mediante códigos postales coloreados. B) Zonas donde se han construido sus límites cóncavos. Estos límites se perciben como un mal resultado. C) Solo los límites de las zonas, donde se aprecian muchos apéndices e invaginaciones.	9
2.4. Zonas generadas en la comuna de Recoleta usando 2 semillas aleatorias diferentes.	10
4.1. Tres diferentes diseños de grafos. (A) Un conjunto de unidades básicas. (B) Grafo de Gabriel. (C) Grafo basado en el diagrama de Voronoi. (D) Grafo de costos reducidos.	18
4.2. Tres maneras de dividir 50 elementos de distintas preferencias para obtener diferentes resultados, balanceando siempre la cantidad en cada distrito. . . .	21
4.3. Proceso de partición de conjuntos por medio de criterios geométricos, expuesto en el trabajo de [Salazar-Aguilar et al., 2013].	26
5.1. Ejemplo de nodos conectados por un grafo de proximidad.	29
5.2. Distritos desconectados, incentivados por el uso de la distancia euclidiana. Al usar distancias sobre el grafo, este tipo de problemas se reducen.	30
5.3. A) Puntos A y B que se encuentran en un grafo conexo. B) Distancia Euclidiana entre los puntos A y B. C) Distancia en camino mínimo entre A y B.	30
5.4. A la izquierda, un grafo donde se muestra mediante colores, como se propaga el orden de los nodos a partir de un centro (orden 0). A la derecha, los nodos etiquetados con su respectivo orden, el cual incrementa con los grados de separación del nodo centro.	31
5.5. Distritos creados con el modelo al usar todos los nodos como semillas.	35
5.6. Proceso Unitario para la obtención de soluciones del Modelo 1 basado en el algoritmo de K-Means.	39

5.7.	Caracterización del proceso unitario en instancias de distintos tamaños. (A) Iteraciones del Modelo 1 que fueron necesarias para que el Proceso Unitario convergiera. (B) Tiempo requerido para completar los Procesos Unitarios. . .	40
5.8.	Indicadores de desempeño del proceso unitario en instancias de distintos tamaños.	41
5.9.	Histograma de las instancias y el número de la iteración del Proceso Unitario donde dejaron de obtener mejoras.	41
5.10.	Iteraciones en las que el 95 % de las instancias dejaron de encontrar mejoras según el tamaño del problema.	42
5.11.	Proceso de mejora de la solución.	45
5.12.	Distribución del tamaño de las instancias usadas para validar el procedimiento heurístico de generación de distritos.	46
5.13.	Distribución del tiempo de ejecución según tamaño de instancia. (A) Tiempos de ejecución del modelo base. (B) Tiempos de ejecución del procedimiento heurístico.	47
5.14.	Histograma del valor del GAP entre la solución óptima del Modelo Base y el valor del proceso heurístico.	48
5.15.	Distribución del valor del GAP entre la solución óptima del modelo base y el valor del proceso heurístico según el tamaño de la instancia.	49
5.16.	Indicadores numéricos del GAP según tamaño de la instancia.	49
6.1.	Límites geográficos de la comuna de Recoleta Fuente: www.recoleta.cl	50
6.2.	Nodos de la comuna de Recoleta coloreados según la carga asociada a su atención.	51
6.3.	Grafo de proximidad de los códigos postales de la comuna de Recoleta.	52
6.4.	Evolución del desbalance de las cargas de los distritos respecto de a la carga media.	53
6.5.	Evolución de los distritos conforme el Modelo 2 mejora el balance a lo largo de varias iteraciones.	54
6.6.	Gráfico con las cargas totales de los distritos resultantes del proceso completo.	55
6.7.	Distritos propuestos para la comuna de Recoleta.	56
6.8.	Gráfico comparativo de las cargas de cada propuesta de distritaje.	58
6.9.	Gráfico comparativo de las cargas de los distritos propuestos y una solución particular de la metodología alternativa.	58
6.10.	Mapas con distritos actuales y distritos propuestos. A) Distritos actuales. B) Distritos de una solución particular de la metodología alternativa. C) Distritos propuestos.	59
6.11.	Medidas de compacidad asociadas a la envoltura convexa de un distrito. A) Envoltura convexa de los nodos del distrito versus el menor rectángulo circunscrito. B) Envoltura convexa de los nodos del distrito versus el menor círculo circunscrito.	60
6.12.	La intersección de distritos es una indicador de la falta de compacidad. Corresponde a los nodos de un distrito que se encuentran dentro de la envoltura convexa de algún otro distrito.	61
6.13.	Tabla comparativa de las distintas soluciones mostradas frente a los diferentes indicadores de compacidad. Se destaca en color verde la mejor solución por cada indicador	61

C.1. Distritos actuales de la comuna de Recoleta.	71
D.1. Distritos alternativos para la comuna de Recoleta.	72

Capítulo 1

Introducción

1.1. Empresa de Correos de Chile

La Empresa de Correos de Chile, o también CorreosChile¹, es una entidad pública con administración autónoma del Estado, que participa, principalmente, en la distribución de documentos y paquetería a nivel nacional e internacional.

CorreosChile cumple un mandato de carácter social por parte del Estado de Chile, lo cual implica asegurar la conectividad mediante la mención de su presencia y cobertura a lo largo de todo el país. Además, la compañía se dedica al cumplimiento de los acuerdos y obligaciones suscritos por el Estado de Chile mediante convenios y tratados internacionales postales [CorreosChile, 2018].

Al respecto, Correos es designado ante la Unión Postal Universal (UPU) por el Estado de Chile, con el compromiso de enviar y recibir los envíos postales a nivel nacional como también los correspondientes a los 192 países de la red UPU.

Pero el servicio que entrega Correos de Chile al país va mucho más allá del envío de documentación y cartas en condiciones óptimas, es un compromiso con la comunidad, incluso con los más aislados tanto geográfica como social y económicamente.

Siguiendo los mandatos del Estado de Chile y de la Unión Postal Universal (UPU), en función de su rol estratégico y social del país, debe cumplir con las siguientes obligaciones como empresa pública [CorreosChile, 2017]:

1. Ejecutar a cabalidad el Servicio Postal Universal, integrando a todas las personas aisladas, no solo geográficamente, sino que también en lo social y económico.
2. Ser confiables y actuar como ministros de fe en el envío de documentación y cartas certificadas.
3. Ser autosustentables y rentables para el Estado, enfrentando la fuerte competencia existente en el rubro.

¹CorreosChile es el nombre comercial mientras que Empresa de Correos de Chile es la razón social.

CorreosChile mantiene una amplia cobertura a lo largo del país, asegurando la conectividad en términos de distribución postal (cartas y paquetería), acorde con el cumplimiento de los acuerdos de la UPU. Actualmente, cuenta con 232 sucursales, 275 agencias, 92 centros de distribución postal, 24 plantas de clasificaciones (3 en la Región Metropolitana) y alrededor de 2.300 carteros. Este nivel de cobertura lo convierte en el principal actor de distribución postal en el país, llegando hasta aproximadamente un 78 % de participación en el mercado nacional. [Feller.Rate, 2019]

1.2. Evolución del servicio de distribución postal

Durante la historia, la Empresa de Correos de Chile, al igual que los diferentes operadores de distribución postal alrededor del mundo, ha debido actualizar la manera de desarrollar sus labores, mejorando sus operaciones logísticas con el fin de lograr mayores estándares de calidad en su servicio.

En el caso particular de la Empresa de Correos de Chile, distribuir el correo en la actualidad no tiene las mismas características que hace 20 años, mucho menos que hace 40 ó más años. El crecimiento demográfico normal, es un factor importante en los cambios de la demanda por distribución. Los centros urbanos crecen tanto en dimensiones geográficas como en densidad, haciendo necesario contar con más agentes de distribución (carteros) y que estos sean capaces de trasladar volúmenes mayores de envíos y entregarlos de manera eficiente. La gestión de los envíos se vuelve mucho más difícil a medida que la cantidad de estos crece, presionando las capacidades de la empresa para lograr buenos resultados que sean perceptibles por los clientes. Todos estos esfuerzos por adaptar el servicio deben, además, traducirse en retornos económicos que garanticen cierta continuidad del negocio. [UPU, 2019]

CorreosChile actualmente distribuye más de 250 millones de envíos postales todos los años, pero la digitalización del mundo y las comunicaciones en general, han ido modificando velozmente la naturaleza de estos envíos. Sólo en 2018, la empresa distribuyó por todo el país más de 20 millones de envíos generados mediante el comercio electrónico internacional, mientras que el 2013, la empresa distribuía 500.000 paquetes al año. Lo más complejo es que, aún sabiendo que la naturaleza de los envíos está mutando año a año, resulta complejo determinar la manera precisa en que estos cambios afectan la operación de distribución postal, volviendo necesario encontrar formas de planificar la operación en escenarios con situaciones diversas. [CorreosChile, 2019]

1.3. Zonas de distribución postal

La operación de distribución postal en la Empresa de Correos de Chile la realizan alrededor de 2.300 carteros que cubren territorios a lo largo de todo el país, los cuales utilizan diversos implementos (vehículos eléctricos, bicicletas tradicionales y eléctricas, carros de arrastre, entre otros) para hacer su labor de la mejor manera posible. [CorreosChile, 2019]

La unidad básica de distribución postal en CorreosChile se denomina código postal, y corresponde a una georeferencia única de un conjunto de direcciones. Regularmente, un código

postal representa a todas las direcciones que se ubican en el mismo frente de manzana². Esta agrupación de direcciones, facilita la planificación de la distribución, reduciendo la complejidad de buscar una dirección particular y dejando esa labor a los carteros, que son los agentes de distribución en terreno.

Por otro lado, cada cartero es responsable de distribuir correctamente (íntegros y dentro de los plazos correspondientes) los envíos asociados a los códigos postales que se encuentren en su zona de distribución postal. Estas zonas se denominan cuarteles, y se pueden definir como territorios conexos³ compuestos por códigos postales, que dividen el área de una comuna. De esta definición se puede concluir que un cuartel no contiene códigos postales de 2 comunas diferentes, ni 2 cuarteles diferentes comparten el mismo código postal. Un ejemplo de la manera en que las zonas dividen el área de una comuna se puede ver en la figura 1.1.



Figura 1.1: Códigos postales y manzanas de una comuna. Los colores de los códigos postales identifican aquellos que pertenecen a una misma zona.

La configuración de cuarteles en la actualidad, es consecuencia de una lenta evolución demográfica del país. Por ejemplo, al crecer una ciudad, la urbanización se manifiesta mayormente en la periferia, fomentando la creación de cuarteles y/o incrementando el tamaño de los ya existentes. Es de entender que el crecimiento demográfico no es necesariamente balanceado en términos de distribución de la carga de trabajo que un cartero debe realizar para cubrir su terreno. Es por esta razón que en la Empresa de Correos de Chile existe una entidad que evalúa la reestructuración y reasignación de las zonas de reparto llamada ***Comisión Nacional de Distribución***. Esta entidad estudia modificaciones posibles a las zonas de reparto, con el fin de lograr que cada cartero sea capaz de entregar correctamente los envíos que tiene asignados.

²Cuando no se han cartografiado todas las direcciones de una comuna, se utiliza un código postal comunal.

³Normalmente son conexos pero en la práctica existen casos no deseables donde las zonas no están conectadas.

Capítulo 2

Contexto General y Motivación

En este capítulo, se explicará la situación en la Empresa de Correos de Chile que genera el problema que se va a abordar en este trabajo, presentando también la manera en que actualmente se maneja y cuáles son sus falencias.

2.1. Contexto

La definición de las zonas de reparto es un problema muy complejo para cualquier empresa de distribución. En particular para la distribución postal, es un problema de gran tamaño, donde son variados los factores que lo caracterizan, por ejemplo: variaciones de tráfico de la correspondencia mes a mes, o semana a semana, entre una zona y otra; crecimiento de las zonas urbanas o pobladas, que a su vez modifica el tráfico postal de maneras no determinadas; construcción de edificios y cambios en el plan regulador municipal que cambian la manera de distribuir; entre otros.

Como se mencionó antes, la Comisión Nacional de Distribución es la entidad encargada de resolver problemáticas relacionadas a la reconfiguración de cuarteles. Estas problemáticas no solo tienen que ver con reasignar códigos postales de una zona a otra, sino de entregar sustento suficiente al cambio que se desea realizar. Esto se debe a que, en la práctica, la asignación de zonas de reparto es un problema que va más allá de la complicación teórica de particionar un área geográfica, sino que se debe asumir el impacto que implica este tipo de cambios en la operación de un cartero. En términos simples, el sueldo de un cartero se ve afectado por cambios en su zona de distribución. Por esto, se precisan herramientas que cuenten con un fuerte soporte técnico, y que puedan entregar confianza y respaldo a las decisiones de modificar o no un cuartel.

Si se piensa que los cambios en zonas de distribución siempre afectan al menos a dos carteros (el que recibe un código postal y el que lo entrega), y que la mayor parte de los trabajadores de la Empresa de Correos de Chile se encuentra sindicalizada en alguno de los 6 sindicatos involucrados en la Gerencia de Personas [CorreosChile, 2019], resulta imperativo ser capaz de mediar el cambio con justificaciones adecuadas. De esta manera se puede evitar caer en complicaciones de índole social que son más complejas de tratar.

2.2. La herramienta actual para generación de zonas de reparto

Durante muchos años, la tarea de crear o modificar cuarteles se llevó a cabo sin la ayuda de sistemas de apoyo, usando planos impresos, cuentas estimadas de tráfico postal y el juicio experto de los miembros de la Comisión. Esta situación limitó la exploración de cambios en zonas, a tan solo pequeñas modificaciones un par de veces al mes. Esto se debía fundamentalmente a la poca capacidad de análisis de datos y a la falta de herramientas que facilitaran la distribución de carga en una zona determinada. Dado esto, los estudios realizados en zonas atendían mayormente solicitudes que venían desde los carteros, es decir, eran estudios reactivos que pretendían dar solución a problemáticas puntuales.

Sin embargo, durante el año 2019 se ha implementado una herramienta que procesa información cartográfica y de tráfico postal, que ha permitido analizar de manera más efectiva y eficiente las características de las zonas de distribución. Esta herramienta cuenta con un algoritmo heurístico de generación de zonas de reparto [Epstein et al., 2015], que permite apoyar la decisión de hacer modificaciones, puesto que busca la partición balanceada de la carga de trabajo asociada a los códigos postales de una comuna en específico. Este algoritmo, explicado en extenso en el trabajo de [Vega, 2017] consiste, en grandes rasgos, en una heurística que distribuye los códigos postales de un área, en una determinada cantidad de zonas conexas cuya carga de trabajo total (la suma de las cargas de los códigos postales que la componen) está balanceada entre una zona y otra. Un ejemplo gráfico del resultado de esta herramienta se puede observar en la figura 2.1.

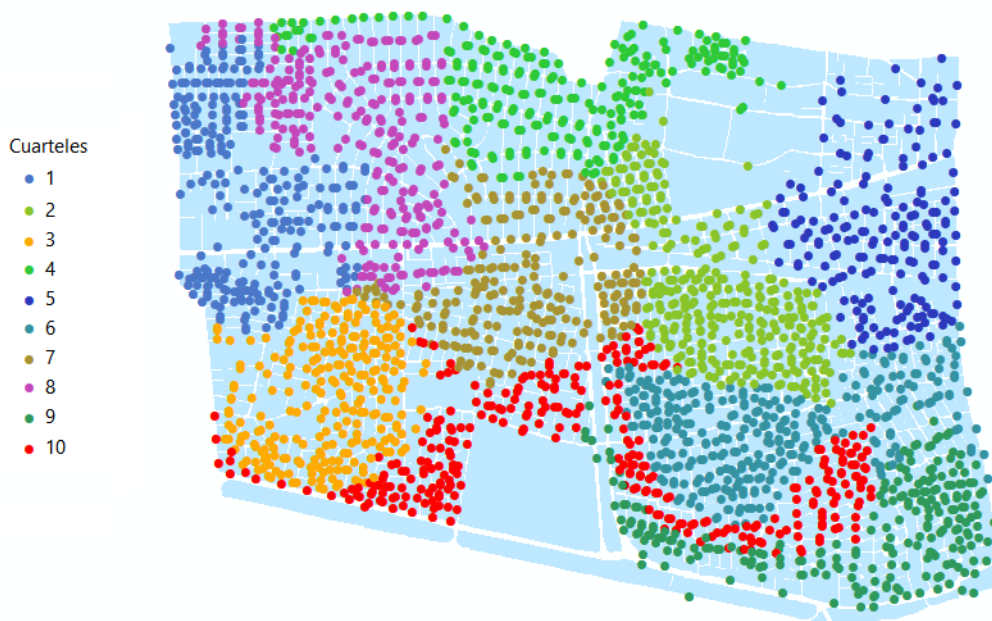


Figura 2.1: División de los códigos postales de la comuna de Lo Prado, realizada por la herramienta de cuartelización. Se solicitaron 10 cuarteles, exigiendo que el cuartel con mayor workload no supere en más de 10% al cuartel con el menor workload.

La habilitación de esta herramienta en la Empresa de Correos de Chile, ha permitido incrementar la cantidad de estudios en la asignación de los códigos postales, tanto por la posibilidad de visualizar indicadores asociados a las zonas, como por la velocidad en que las zonas son creadas y evaluadas.

2.3. Características de la carga de trabajo

Si bien se ha hablado que existe un algoritmo de generación de zonas de reparto que balancea de alguna forma la carga de trabajo, no se ha mencionado en explícito que se entiende por carga de trabajo.

La carga de trabajo o *workload*, es la cantidad de trabajo necesario para realizar una labor en particular. Es un indicador complejo de definir y, tiene variadas interpretaciones que dependen fuertemente de la percepción de cada persona [Jex, 1998]. En particular para el problema de la asignación de zonas de reparto en CorreosChile, el indicador de *workload* utilizado (el que se busca balancear en el algoritmo de generación de zonas) está definido como la cantidad de trabajo necesario para atender un código postal. Es decir, cada código postal posee una carga de trabajo representada como un valor numérico (y medido en unidades de tiempo), el cual es calculado mediante una función que aúna varios componentes. Estos componentes representan tiempos y frecuencias, y cada uno a su vez tiene una fórmula específica para obtenerla. Una formulación simplificada del cálculo del *workload* de cada código postal, se puede ver a continuación:

$$Workload_i = [CompDes_i + CompEnv_i] \quad (2.1)$$

Donde:

$CompDes_i$: Indicador asociado al desplazamiento en el código postal i .

$CompEnv_i$: Indicador asociado a la entrega de envíos en el código postal i .

La componente $CompDes_i$, está relacionada a las dimensiones espaciales de código postal: el largo de la manzana, las distancias desde y/o hacia otros códigos postales, las tipologías de los inmuebles, etc. Este valor representa cuanto tardaría un cartero en desplazarse por la calles entre código y código, recorriendo un condominio o un edificio, o transitando desde el CDP¹ hasta el cuartel. Este cálculo asume una velocidad de movimiento que permite llevar las distancias a unidades de medida de tiempo. Pero la característica más importante de esta componente es que es constante en el horizonte de evaluación, puesto que se asume que las propiedades inherentes del código postal no cambian.

A diferencia de la anterior componente, la base del cálculo del indicador $CompEnv_i$ está en el tráfico postal y en el horizonte temporal de los datos usados. Los envíos tienen diferentes tiempos asociados al momento en que son entregados, por ejemplo, un envío regular solo tardaría un par de segundos en entregarse mientras que un envío certificado podría demorar

¹CDP es la abreviación de Centro de Distribución Postal. Corresponde al lugar donde los carteros llegan cada día a buscar los envíos que deben distribuir.

varios minutos. Otro ejemplo es la diferencia en tiempos de entregar solo 1 envío o muchos envíos en el mismo lugar, lo cual puede ocurrir normalmente en inmuebles con muchas direcciones, como los edificios. Por lo tanto, esta componente cambia de acuerdo a la cantidad y tipo de envíos asociados al código postal durante un periodo de tiempo determinado. Normalmente, el horizonte de evaluación que se usa corresponde a un año, y el valor de la componente se calcula como una media del tiempo diario necesario para hacer las entregas.

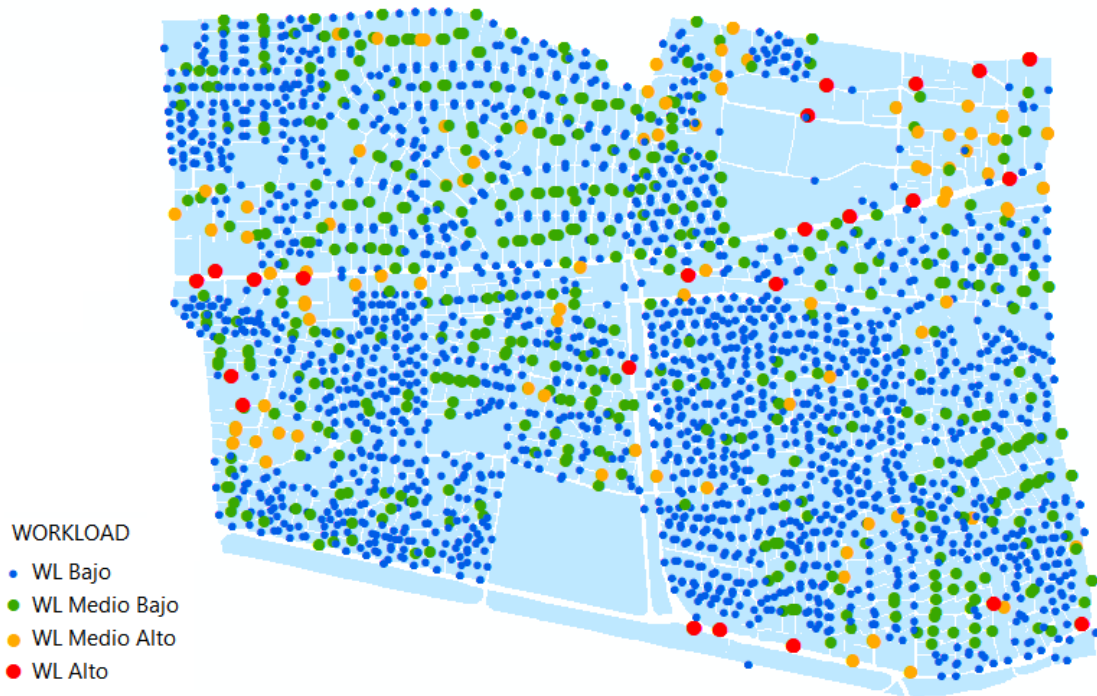


Figura 2.2: Workload asociado a códigos postales en la comuna de Lo Prado.

Como se ve en la figura 2.2, la carga de trabajo se puede mostrar a través de un mapa de calor que permite explorar más fácilmente la distribución de ésta en los códigos postales. En este caso, la escala es arbitraria y se ha realizado en base a juicio experto. Se puede interpretar de la siguiente manera: WL Bajo implica atención media con una duración menor a un minuto; WL Medio Bajo implica atención media con una duración entre 1 y 3 minutos; WL Medio Alto implica atención media con duración entre 3 y 6 minutos; y WL Alto implica atención media con duración mayor a 6 minutos (en este caso hasta 20 minutos).

Dada esta definición de carga de trabajo a balancear, el algoritmo actual de generación de zonas se puede interpretar como “si se tuvieran que recorrer todos los códigos postales en un día, la carga es el tiempo medio que tomaría recorrerlo”.

2.4. Problemas de la solución actual

Habiendo mencionado ya cómo se generan actualmente zonas de distribución, hay que abordar ciertas problemáticas que hacen que esta manera de resolver el problema tenga aristas de exploración que podrían mejorar las soluciones.

2.4.1. Problemas de la compacidad de la solución

En términos prácticos, el algoritmo de generación de zonas de distribución entrega solo una guía para la definición de zonas. Luego de obtener el resultado, las personas en la Comisión Nacional de Distribución deben efectuar un post proceso de ajuste de esta guía, con el fin de obtener zonas “fácilmente reconocibles”. Este concepto es muy abstracto y confuso de definir, puesto que habla de la forma que deberían tener las zonas, y cuán “agradables a la vista” deberían ser. Sin embargo, una manera consensuada de acercarse a este concepto es mediante el diseño de zonas compactas. De esta manera, al tener zonas compactas, se disminuye el tiempo dedicado a realizar ajustes en la partición de códigos postales.

El problema que se presenta entonces hace referencia a la compacidad de la solución entregada por el algoritmo. Como se mencionó, este problema deriva de la percepción que tienen los usuarios de la herramienta, al ver los resultados y notar que algunas zonas tienden a envolver a otras o formar figuras que parecieran estar “rellenando espacios que dejaron otros cuarteles mejor formados”. Esta situación implica que se deban realizar muchos ajustes manuales de reformulación de las zonas. Esto no se debe considerar a la ligera puesto que mientras mayores sean los ajustes realizados, más desbalance se produce entre zonas, generándose pérdida de objetividad e incluso disminuyendo la confianza que los carteros han depositado en los resultados que entrega esta metodología.

La figura 2.3 muestra un resultado de la herramienta actual y se han demarcado los polígonos que muestran los límites de cada zona. En este resultado se percibe la falta de compacidad en general, es decir, se notan muchos apéndices en algunas zonas que están envueltos en otras zonas.

Un resultado deseable de la herramienta debería definir zonas que tiendan a formas más compactas, dentro de lo posible. Sin embargo, la heurística que resuelve este problema no se encarga a fondo de esta característica y parte del proceso de balanceo destruye la forma de manera muy drástica.

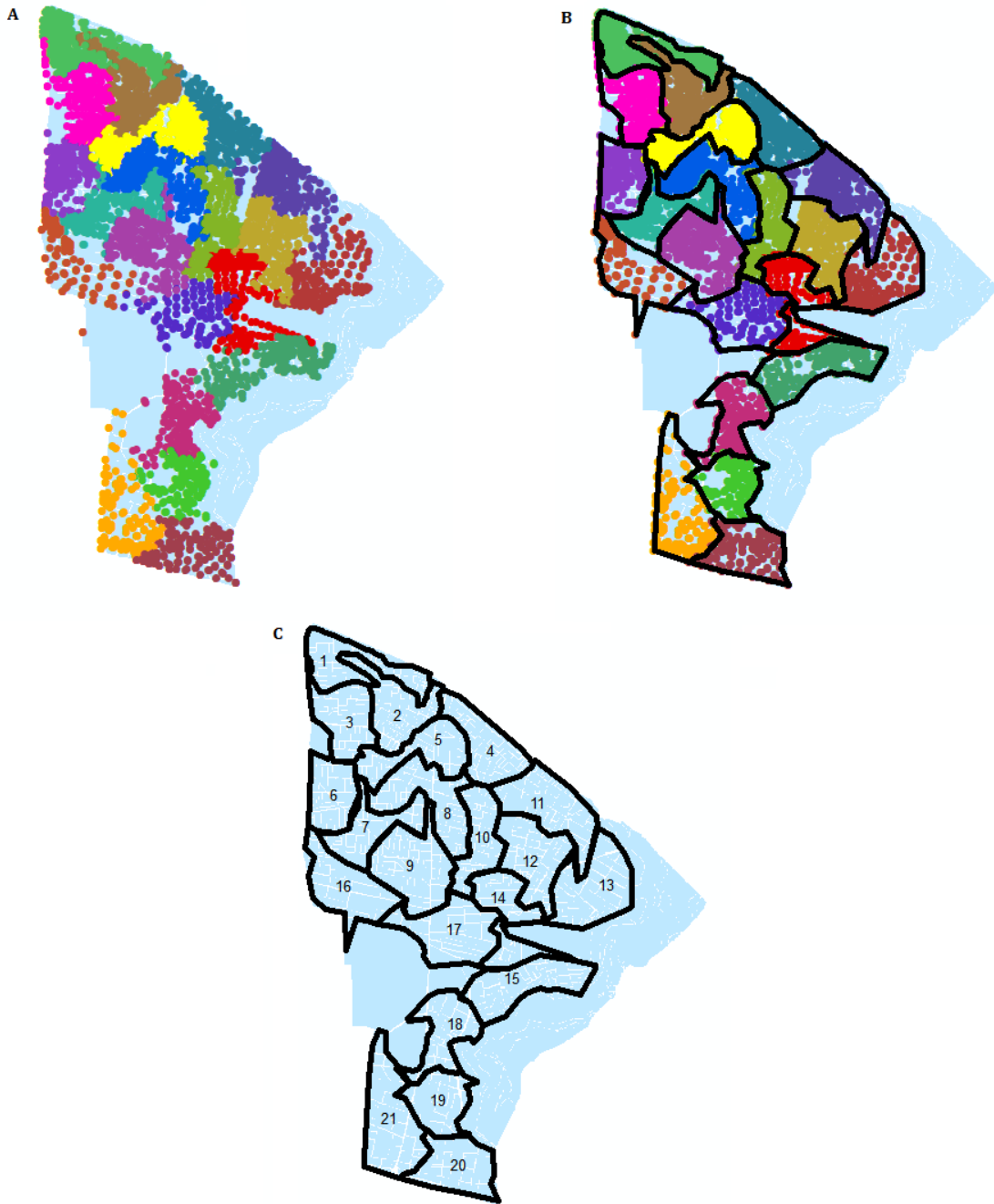


Figura 2.3: Percepción de la compactidad en cuarteles generados con el algoritmo actual. A) Zonas mostradas solo mediante códigos postales coloreados. B) Zonas donde se han construido sus límites cóncavos. Estos límites se perciben como un mal resultado. C) Solo los límites de las zonas, donde se aprecian muchos apéndices e invaginaciones.

2.4.2. Problemas de las componentes aleatorias de la solución

Un recurso comúnmente usado en heurísticas para la resolución de problemas combinatoriales, es la incorporación de componentes aleatorios o pseudo aleatorios. Esto es normal cuando se quiere discriminar de manera insesgada una opción de otra en la ejecución de un algoritmo. Sin embargo, dependiendo de la manera en que se resuelve cada problema, el uso de componentes aleatorias puede causar que los resultados obtenidos cambien en cada ocasión, lo cual no tiene buena recepción entre los usuarios y les hace perder credibilidad en las soluciones entregadas. [Martí et al., 2018]

En particular, el algoritmo actual de generación de zonas de distribución tiene una componente aleatoria importante al seleccionar al azar los centros iniciales de las zonas de distribución. Esto causa que si dos personas usan semillas distintas, llegarán a soluciones diferentes. Un ejemplo de esto se puede apreciar en la figura 2.4, donde las soluciones son evidentemente diferentes pese a ser el mismo problema a resolver.

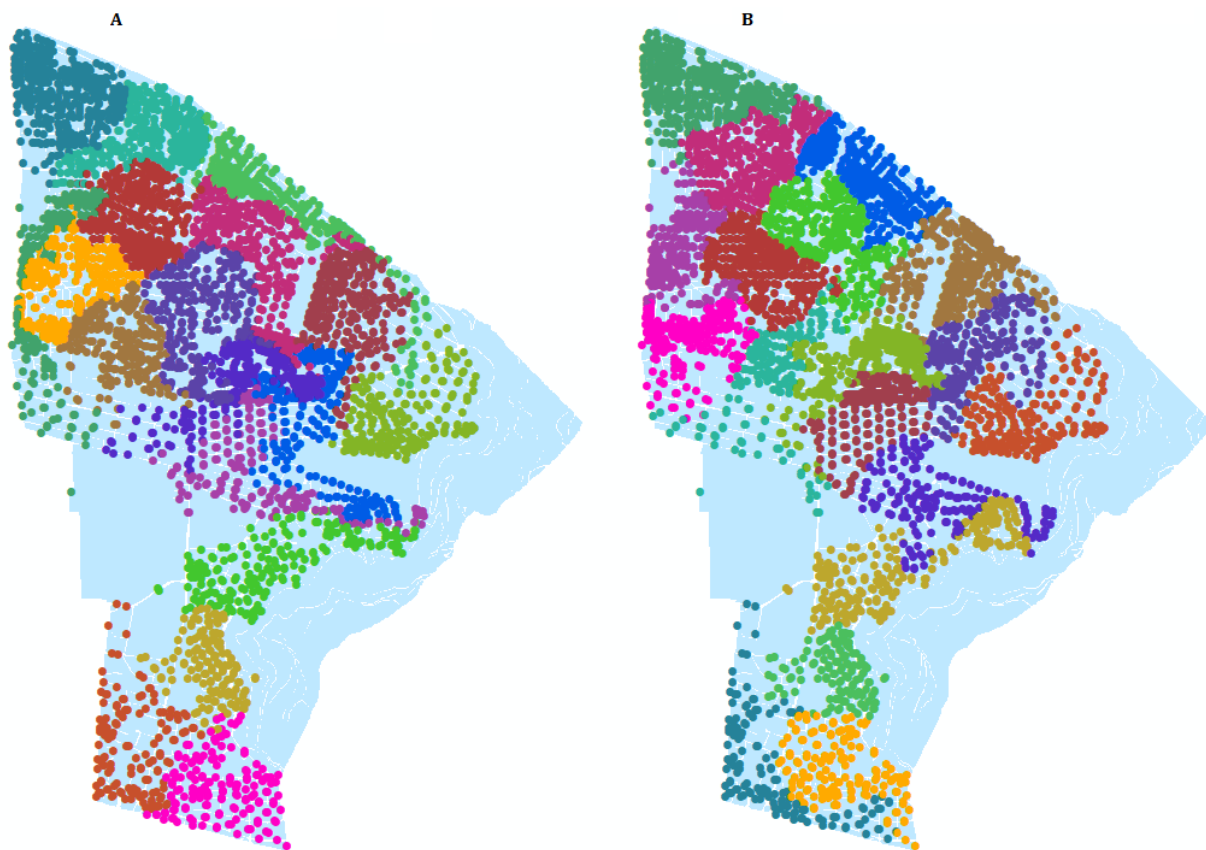


Figura 2.4: Zonas generadas en la comuna de Recoleta usando 2 semillas aleatorias diferentes.

Adicionalmente, hay semillas que producen resultados en tiempos muy rápidos y otras en tiempo muy lentos. Por ejemplo, para un problema de 2.000 códigos postales, un set de semillas puede hacer terminar el problema en un par de segundos mientras que otro set lo puede hacer iterar por 2 horas. Y puesto que no hay una metodología que escoja las semillas de manera consistente, diferentes usuarios de la herramienta podrían tener percepciones muy distintas de la dificultad de resolver el problema y/o de la calidad de las soluciones.

Capítulo 3

Definición del Problema, Objetivos y Alcances

En este capítulo, se explicitará el problema a resolver y se establecerán los objetivos que se desean lograr en este trabajo.

3.1. Definición del problema

Habiendo presentado los antecedentes sobre cómo se crean las zonas de distribución y los problemas que tiene la actual solución, se nota claramente que existe un potencial de mejora en la exploración de una metodología de generación de zonas de reparto, que aborde de mejor manera la distribución de la carga de trabajo, y no solo busque zonas conexas y balanceadas, sino que también entregue soluciones más compactas, y que dependan en menor manera de componentes aleatorias.

En este trabajo, se buscará proponer una nueva metodología de generación de zonas de reparto que aborde las problemáticas mencionadas anteriormente. Para esto se propone el siguiente enfoque de solución:

- Usar una metodología de resolución que permita tener referencias sobre cuánto más es posible mejorar la solución.
- Reducir las componentes aleatorias para tener resultados más deterministas.
- Dar un valor más protagónico a la búsqueda de zonas compactas, puesto que es una característica que afecta fuertemente la percepción de los resultados.

3.2. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo consiste en desarrollar un modelo de generación de zonas de reparto, que sea una alternativa a la actual metodología comenzada a usar por la Empresa de Correos de Chile, y que logre entregar zonas balanceadas en cuanto a carga de trabajo, conexas y lo más compactas posible. Esto debe realizarse dentro de tiempos deseablemente cercanos a media hora y no mayores a una hora.

3.3. Objetivos específicos

Con el fin de alcanzar el objetivo general, se han establecido los siguientes objetivos específicos:

- Determinar una metodología que aborde la compacidad de las zonas con el fin de mejorar la percepción de los resultados, respetando restricciones de conexidad y balance de carga.
- Incluir una o varias métricas de evaluación de la compacidad de los distritos, con el objeto de contrastar el desempeño de las soluciones en este aspecto.
- Incorporar consistencia a la metodología de generación de cuarteles, con el fin de lidiar con la variabilidad de tiempos de resolución y calidad de las soluciones.

3.4. Alcances y Limitaciones

Tal como fue descrito en las secciones anteriores, este trabajo busca desarrollar una metodología para la generación de zonas de distribución postal para la Empresa de Correos de Chile y se hace cargo de las condiciones establecidas por la empresa para la formación de distritos, las cuales incluyen la conexidad de las zonas generadas y el balance de la carga de estos distritos.

Este trabajo tiene ciertas limitaciones y simplificaciones las cuales son nombradas a continuación:

- Entre los datos usados para este trabajo, se incluye un grafo que conecta todos los códigos postales de una comuna. Si bien, en capítulos posteriores se comenta la generación de este grafo, para efectos de cumplir con los objetivos, se considerará como un dato entregado.

La relevancia de este punto está en que las características del grafo pueden modificar la solución. Sin embargo, en este trabajo no se investigará la calidad del grafo para solucionar el problema.

- En este trabajo no se busca determinar la cantidad óptima de cuarteles, sino buscar la mejor partición de los códigos postales en cuanto a criterios de balance, conectividad y compacidad dado un número de cuarteles. Esto se debe mayormente a que no es un objetivo de este trabajo el determinar una métrica que compare resultados entre 2 instancias con diferente cantidad de zonas de distribución. En el caso de existir dicha métrica, la metodología lógica sería ejecutar el modelo para diferentes cantidades de cuarteles y verificar cuál resultado es mejor.
- Este trabajo no abordará la definición profunda de la carga de trabajo de cada código postal. En cambio, se desea que el modelo sea capaz de asumir cualquier valor cuyo objetivo sea ser balanceado entre las zonas y periodos. Es por esto, que se asumirán valores específicos previamente calculados para la operación de Correos.
- En términos prácticos, el balance exacto de la carga de los cuarteles, considerado como la igualdad de carga, resulta imposible dada la heterogeneidad del valor de la distribución de la carga de los códigos postales. Es por este motivo que al hablar de balance, realmente se habla de restringir sustantivamente el desbalance de los distritos.

Capítulo 4

Marco Teórico

En este capítulo se habla respecto al estado del arte en problemas asociados a la formación de sectores o “distritos” y la manera en que se han abordado.

4.1. Problemas de distritaje

En general, se habla de “distritaje” al referirse al problema de agrupar pequeñas áreas geográficas, llamadas unidades básicas, en mayores cluster geográficos, llamados distritos. Esta agrupación se realiza en función a algún criterio de planificación que sea relevante en cada problema. Ejemplos típicos de unidades básicas son consumidores, calles o códigos postales. Dependiendo del contexto práctico, un problema de distritaje se suele llamar también diseño territorial, trazado de sectores o diseño de zonas, entre otras. [Gilbert Laporte, 2015]

Los problemas de distritaje pueden estar motivados por variados propósitos: distritos políticos, distritos escolares, zonas para diferentes beneficios sociales, sectores comerciales, áreas de recolección de desperdicios, distritos para rutas, sectores de trabajo agrícola, y muchos más. Cada uno estos está definido por particulares restricciones y criterios, convirtiendo el universo de problemas de distritaje en una composición heterogénea de soluciones. Incluso, es normal la consideración de objetivos múltiples, por lo que “la mejor solución” con frecuencia es una alternativa no dominante, en donde la mejora en ciertos criterios conlleva peores resultados en al menos uno del resto de los criterios en evaluación [Fragoso et al., 2016]. Pero en términos generales, se pueden hacer 4 distinciones: distritos políticos, distritos comerciales, distritos para aplicación de servicios, y distritos para distribución.

4.1.1. Diseño de distritos políticos

El distritaje político consiste en subdividir un determinado territorio, por ejemplo, un país o una región, en zonas donde los votantes deben manifestar su voto respecto a una elección en particular (regularmente asociado a uno o más cargos políticos). El objetivo de esta división territorial es obtener zonas “neutrales”, en el sentido de que ningún grupo político pueda tomar ventaja de la partición a la hora de obtener los puestos electorales.

En el diseño de distritos electorales neutrales, se debe prestar atención al tamaño (en términos de cantidad de votantes) y a la forma, puesto que, combinados con la fórmula electoral, estos elementos pueden incidir en el resultado de las votaciones. Una comprobable “baja neutralidad” de los distritos podría, al menos, deslegitimar las elecciones, incurriendo en elevados gastos económicos, o peor aún, terribles costos sociales. Esta mala práctica es conocida como “Gerrymandering” [Ricca et al., 2013].

4.1.2. Diseño de distritos comerciales

Cuando se habla de diseño de distritos comerciales, se hace referencia a la tarea de asignar un conjunto de posibles clientes a un determinado agente de ventas, de tal manera que cada posible cliente esté asociado a solo un agente y, que todos los agentes tengan cargas de trabajo y tiempos de viaje similares. Los candidatos a cliente tienen probabilidades de generar ingresos con cada agente, y esos ingresos también se desea que sean balanceados.

A diferencia del distritaje político, los distritos comerciales no tienen que necesariamente respetar estricta contigüidad. Típicamente, un agente de ventas es responsable de todos los consumidores asociados a una específica región geográfica. Sin embargo, también es común que en vez de asociar un agente a un sector geográfico se asocie a un determinado segmento de consumidores o cuentas, clasificados por ejemplo, por nivel de renta. En estos casos, es normal que ciertas zonas se traslapen [Zoltners et al., 2005].

4.1.3. Diseño de distritos para la aplicación de servicios

Los distritos para aplicación de servicios se puede apreciar en diversos contextos. Un área de aplicación en particular, consiste en la necesidad de que una instalación sea capaz de prestar uno o más servicios a un distrito geográfico. Este es el caso típico de hospitales u otras instalaciones sociales, en donde se asocian responsabilidades provenientes de la necesidad de que un habitante del distrito reciba el servicio en un momento adecuado. De esta manera, el distritaje no solo asocia la responsabilidad de atender, sino también permite establecer la capacidad que dicha instalación debiera poseer. En estos casos, se vela por que los distritos tengan buen acceso al servicio, normalmente usando transporte público y balanceando factores como el tiempo de viaje y la cantidad de trabajo [Blais et al., 2003].

Otra aplicación específica de distritos, consiste en servicios aplicados a unidades básicas que representan varias viviendas. Este es el caso típico de la distribución postal o la entrega de folletos, donde los distritos se conforman por códigos postales, manzanas o calles. La idea de estos distritos es que el tiempo aproximado usado en recorrerlos sea similar y no exceda cierto tiempo límite. La gracia es que la suma del tiempo asociado al distrito es proporcional al largo del tour del problema de cartero chino [Butsch et al., 2014], lo cual sirve de referencia para posibles tours realizados dentro del distrito. Las patrullas de seguridad policial o las ambulancias, son otro caso de aplicación donde el tamaño del distrito asociados debe garantizar la posibilidad de atención oportuna.

Otro ejemplo ligeramente diferente de diseño de distritos para aplicación de servicios, consiste en la asignación de áreas residenciales a escuelas. En este caso, se consideran muchas restricciones conjuntamente: limitaciones de capacidad de las escuelas pero a la vez se intenta

lograr la máxima utilización; balance en la cantidad de estudiantes asociados a cada escuela; y que estos no vivan demasiado lejos; Restringir cuantos deben moverse a pie y cuantos en autobús o con buena accesibilidad; incluso restricciones al porcentaje vinculado a ciertas etnias [Gilbert Laporte, 2015].

4.1.4. Diseño de distritos para distribución

Otro campo importante de aplicación es el diseño de distritos para la logística de distribución. Normalmente, estos problemas son modelados como ruteo de vehículos. Sin embargo, hay formas de abordar este problema en varias etapas: en una de ellas se forman distritos, y en otra se crean rutas dentro de los distritos. En este tipo de distritaje, las unidades básicas corresponden a lugares donde se debe realizar la distribución, y se usan restricciones de contigüidad y convexidad para fomentar la posterior formación de mejores rutas. Una de las ventajas de usar este enfoque es que al asignar un conductor a un distrito fijo, este se vuelve familiar con el sector geográfico asociado, permitiéndole mejorar sus tiempos de desplazamiento y cumplir de mejor manera la planificación. Otra ventaja es que los clientes del distrito también se familiarizan con el conductor, incrementando la satisfacción de los clientes [Jarrah et al., 2012].

4.2. Criterios de distritaje

Si bien, los problemas de distritaje tienen, normalmente, particularidades que vuelven sus soluciones demasiado específicas, también comparten características regularmente deseadas. Se puede llamar a estas características representativas como “criterios de distritaje” y cada una tiene diferentes maneras de ser abordada.

Los trabajos de [Jin, 2017], [Gilbert Laporte, 2015] y [Ríos-Mercado, 2020], entre otros, analizan estos criterios de distritaje usados en gran cantidad de trabajos hasta la fecha, y es posible clasificarlos en 4 categorías:

- Asignación completa y exclusiva
- Balance
- Conexidad
- Compacidad

4.2.1. Asignación completa y exclusiva

Este criterio hace referencia a que, comúnmente en problemas de distritaje, se requiere que cada unidad básica pertenezca exactamente a solo un distrito, es decir, que todos los distritos D_k de un total de p distritos, sean una partición del set total J de unidades básicas.

$$D_1 \cup D_k \cup D_p = J, \quad D_l \cap D_k = \emptyset, \quad 1 \leq l, k \leq p, l \neq k \quad (4.1)$$

El requerimiento de exclusividad es llamado algunas veces como criterio de integridad. En distritajes políticos, esta restricción resulta obvia pues es necesario que cada persona solo

pueda tener voto en un distrito y que no haya gente sin votar. Pero también es recurrente encontrar este exacto criterio en distritaje comercial, cuando un agente de ventas/distribución no puede invadir territorios de otro agente. Además, en ciertos negocios (como Correos), la asignación única permite transparentar responsabilidades en la realización de las operaciones y fomenta el establecimiento de relaciones de largo plazo entre agentes de distribución y unidades básicas (como carteros y los hogares donde distribuyen).

4.2.2. Balance

El criterio de balance es uno de los requerimientos más específicos y característicos de los problemas de distritaje. Es donde se expresa la necesidad de que los distritos tengan un tamaño equitativo respecto a alguna o algunas medidas. Estas medidas de balance entre distritos, varían de problema en problema, por ejemplo: semejante cantidad de población, ingresos equivalentes equitativos, parecida cantidad de puntos de venta o de puntos de atención. Adicionalmente, para un mismo objetivo de balance pueden haber múltiples unidades de medida funcionales, puesto que el fin del balance no siempre es evidente, por ejemplo, ante el objetivo de balancear el número de habitantes de un distrito, contar la cantidad de hogares es tan buena medida como la cantidad de manzanas o la superficie del distrito.

Dada la discreta naturaleza de las unidades básicas y las típicas suposiciones de integridad, encontrar distritos perfectamente balanceados suele ser una labor imposible de cumplir, por lo que las restricciones de balance en la literatura acostumbran a buscar la reducción del desbalance hasta ciertos niveles de tolerancia. La restricción de balance mayormente utilizada está basada en usar de alguna manera la desviación relativa del tamaño (medido en unidades del criterio de balance) de un distrito $w(D_k)$ frente a la media del tamaño de los distritos $\mu = w(J)/p$:

$$bal(D_k) = \left| \frac{w(D_k) - \mu}{\mu} \right|, \quad 1 \leq k \leq p \quad (4.2)$$

[Silva de Assis et al., 2013]. Mientras mayor es el valor de $bal(D_k)$, peor es el balance. Por el contrario, un distrito D_k se encontraría perfectamente balanceado si $bal(D_k) = 0$. La mayor dificultad de la restricción de balance, es que comúnmente la medida de desempeño de la solución está no solo asociada al tamaño del distrito sino también a la composición específica de unidades básicas, no pudiendo saber a priori, solo por características de las unidades básicas, el mejor balance posible. Esta situación implica que cualquier aproximación a priori que se utilice siempre conlleva una desviación difícil de medir respecto del mejor balance posible. Un ejemplo de esto se puede ver en los distritos que buscan mejorar rutas. La mejor ruta posible en un distrito específico solo puede obtenerse habiendo previamente diseñado tal distrito, es por esta razón que la medida de desempeño para balancear, regularmente es solo un proxy de la ruta. Es por esta razón que en vez de buscar minimizar $bal(D_k)$, limitarlo entre márgenes superiores e inferiores suele ser una alternativa más usada. Para esto se considera un umbral $\alpha \geq 0$ que impide que el desbalance exceda valores indeseados [Bozkaya et al., 2011].

$$bal(D_k) = \frac{1}{\mu} \max\{w(D_k) - (1 + \alpha)\mu, (1 - \alpha)\mu - w(D_k), 0\}, \quad 1 \leq k \leq p \quad (4.3)$$

Finalmente, la medida del balance del plan de distritaje suele calcularse como el mayor balance entre todos los distritos, como la suma del balance de todos los distritos o como una combinación convexa de los dos anteriores.

$$bal(D)^{max} = \max_{k=1..p} bal(D_k) \quad (4.4)$$

$$bal(D)^{sum} = \sum_{k=1}^p bal(D_k) \quad (4.5)$$

$$bal(D)^{cvx} = \gamma bal(D)^{max} + (1 - \gamma) bal(D)^{sum} \quad (4.6)$$

Una alternativa menos usada para buscar un balance global corresponde a limitar el rango entre el peor y el mejor balance.

$$bal(D)^{rng} = \max_{k=1..p} bal(D_k) - \min_{k=1..p} bal(D_k) \quad (4.7)$$

4.2.3. Contigüidad/Conexidad

Para la mayoría de los problemas de distritaje, se precisa que los distritos sean contiguos, esto significa que las unidades básicas estén “suficientemente cerca” entre si para considerarse una al lado de otra. Comúnmente, la razón detrás de la exigencia de contigüidad está fundada en la necesidad de conexidad, es decir, la posibilidad de transitar entre todas las unidades básicas sin tener que salir del distrito. La contigüidad de las unidades básicas se puede ver como una necesidad en todo tipo de aplicaciones, por ejemplo: permite reducir las distancias en el día a día de visitantes en general como carteros o vendedores; o habilita la posterior formación de rutas para tractores, quitanieves u otros vehículos que realizan su labor a la vez que se desplazan. Desafortunadamente, es difícil realizar una formulación concisa que represente genéricamente la restricción de contigüidad en unidades básicas. [Gilbert Laporte, 2015]

Una de las maneras más utilizadas para abordar esta restricción consiste en la generación de grafos de proximidad, los cuales corresponden a la representación geométrica del concepto de “vecindario”. En términos simples, dos unidades básicas se dicen próximas o vecinas entre si, si bajo algún criterio estas unidades son contiguas y, por lo tanto, es posible moverse de manera directa (sin atravesar otra unidad básica) entre ellas. En un mapa donde se ubican las unidades básicas, la representación de la vecindad corresponde a una línea que conecta ambas unidades. Al conjunto de unidades básicas con el conjunto de vecindades le llamamos grafo. [Gross et al., 2003]

Los criterios por los cuales dos unidades básicas se podrían considerar vecinas varían tanto como problemas se formulen. Esto se debe a que, regularmente, están asociados a la

cantidad de información disponible. Sin embargo, aún contando con muchos datos, siempre existe una decisión de conveniencia sobre si declarar o no una vecindad. Por ejemplo, dos códigos postales podrían declararse vecinos si comparten una calle en común, pero en el caso que sea imposible cruzar directamente de un lado de la calle al otro quizás sea conveniente no declarar dicha vecindad. Para poder tomar la decisión en este ejemplo, no basta con el trazado de calles o con la localización de las unidades básicas, sino que es necesario contar con la posibilidad de evaluar de manera efectiva la conectividad entre ambos códigos postales, lo cual suele ser una labor extremadamente tardada. En ausencia de información, lo cual es lo normal, alguna medida de distancia suele ser lo más usado. El resultado de estos criterios entrega distintos diseños de grafos.

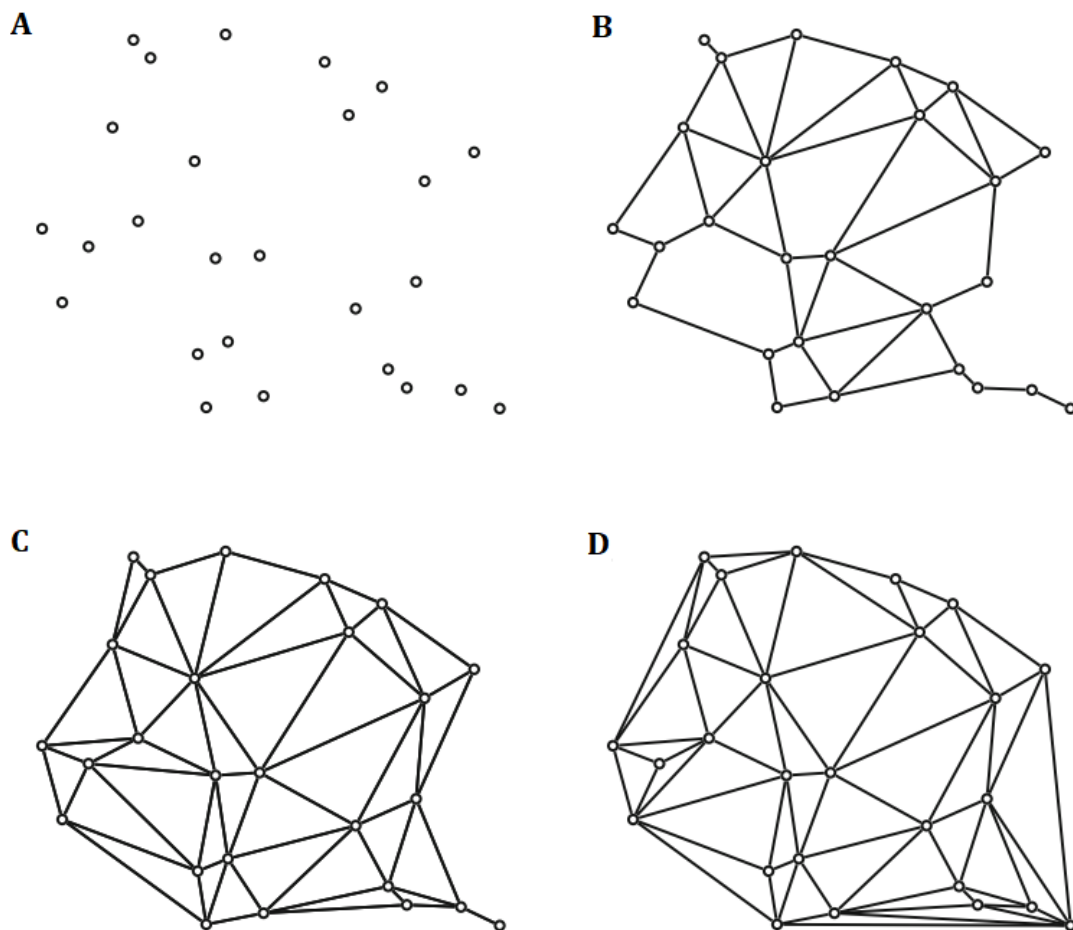


Figura 4.1: Tres diferentes diseños de grafos. (A) Un conjunto de unidades básicas. (B) Grafo de Gabriel. (C) Grafo basado en el diagrama de Voronoi. (D) Grafo de costos reducidos.

Un grafo donde no existen conexiones que se cruzan se denomina grafo planar. La bondad de un grafo planar es apreciada en varias áreas, por ejemplo en arquitectura [Noguera, 2009] o en diseño de circuitos eléctricos [Grimaldi, 1989]. Pero para el problema de distritaje, tiene mucho valor pues disminuye el tamaño del problema al reducir la cantidad de vecinos por cada unidad básica, tal como lo muestra la solución de [Vega, 2017]. Algunas formas estandarizadas de encontrar grafos planares son las que se muestran en la figura 4.1. El grafo de Gabriel

determina que dos unidades básicas son vecinas si dentro del círculo del cual ambas unidades forman los extremos del diámetro, no hay ninguna otra unidad básica [Gross et al., 2003]. Otro enfoque más sofisticado consiste en usar el diagrama de Voronoi [Lei et al., 2012] y determinar como vecinos aquellas unidades básicas cuyas celdas comparten una arista. Un tercer enfoque consiste en declarar todas las vecindades posibles y cuando existe un cruce, se descarta la más larga, la cual representa el mayor costo. De esta manera, se va reduciendo el costo del grafo hasta que no hayan más cruces. Hay metodologías más simples o más complejas que se pueden utilizar para crear un grafo, pero no existe una que sea siempre prevalentemente ventajosa sobre la otra. Además, hay que considerar que la operación de generación del grafo implica tiempo de procesamiento y, mientras más compleja es la metodología, más tiempo va a ocupar.

Algunas veces, cuando no existe ningún tipo de información que permita establecer vecindarios, se pueden utilizar criterios sobre el distrito en vez de sobre las unidades básicas. Un ejemplo común de esto es limitar la sobreposición de las envolventes convexas formadas por las unidades básicas de los distritos. Esta manera de abordar la contigüidad tiene la ventaja que los distritos resultantes son buenos para crear rutas que no se intersectan [Jarrah et al., 2012].

Una vez establecido el grafo, en los modelos de distritaje, la contigüidad de las unidades básicas está normalmente establecida como una restricción dura [Gilbert Laporte, 2015] y algunas de las maneras que se ha abordado son las siguientes:

Una primera formulación para abordar la contigüidad es: Sea $c_k \in J$ un centro predeterminado del distrito k , y $S \in S' = J \setminus \{N(c_k) \cup \{c_k\}\}$ un subconjunto de unidades básicas que no son adyacentes a c_k . Si todos los elementos de S son asociados al distrito k , es decir $S \subset D_k$, entonces al menos una unidad básica que no está en S y que es adyacente a alguna unidad de S debe ser asignada al distrito k . Esta restricción se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{j \in \cup_{i \in S} N(i) \setminus S} x_{kj} - \sum_{j \in S} x_{kj} \geq 1 - |S|, \quad \forall S \in S', \quad (4.8)$$

Donde x_{kj} vale 1 si $j \in J$ es asignado al distrito k y 0 sino. La mayor problemática que tiene esta formulación es que requiere un número exponencial de restricciones debido a la cantidad de subconjuntos S que se pueden crear. [Ríos-Mercado et al., 2013]

Otra formulación de menor tamaño está basada en redes de flujos que van sobre el grafo. Cada centro de un distrito actúa como un sumidero de un flujo que se extiende por todas las unidades básicas asociadas al mismo distrito. De esta manera, un distrito k es contiguo si para cada unidad básica en D_k se tiene un flujo hasta c_k que solo pasa por otras unidades en D_k . Las restricciones asociadas a este concepto siguen la siguiente estructura:

$$\sum_{i \in N(j)} f_{ji} - \sum_{i \in N(j)} f_{ij} = x_{kj}, \quad \forall j \in J \setminus \{c_k\}, \quad (4.9)$$

$$\sum_{i \in N(j)} f_{ij} \leq (n-2)x_{kj}, \quad \forall j \in J \setminus \{c_k\}, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i \in N(j)} f_{i,c_k} \leq n-1, \quad (4.11)$$

Donde f_{ij} es el flujo desde la unidad básica i a la j y $f_{c_k,j} = 0, \forall j \in N(c_k)$. Esta formulación solo precisa de una cantidad lineal de restricciones. [Shirabe, 2009]

Una formulación más simple aún y bastante usada, corresponde a la generación de subárboles $T(c_k)$ que recorren el grafo centrados cada uno en los diferentes centros de distritos c_k . Entonces, por cada unidad básica j en el distrito k , al menos una de las unidades básicas adyacentes $i \in N(j)$ que inmediatamente precede a j en el camino más corto al centro c_k , también debe ser incluida en el distrito. Las restricciones se verían de la siguiente manera:

$$x_{kj} \leq \sum_{i \in S_j} x_{ki}, \quad \forall j \in J \setminus \{c_k\}, \quad (4.12)$$

Donde $S_j = \{i \in N(j) \mid i \text{ precede inmediatamente a } j \text{ en el camino más corto desde } j \text{ a } c_k\}$ [Mehrotra et al., 1998].

Lo más relevante de todas estas formulaciones para la contigüidad de los distritos es que asumen, como base, que los centros de los distritos son una decisión previa en el proceso de optimización. Por lo tanto, es menester extenderlas para que la decisión de los centros sea parte del proceso.

4.2.4. Compacidad

Se habla de un distrito compacto cuando, “bajo alguna percepción”, la forma del distrito tiende a figuras semejantes a círculos o polígonos regulares, en vez de figuras alargadas o sin una apariencia específica. A pesar de ser un concepto bastante intuitivo, no existe una definición rigurosa de lo que implica que un distrito sea compacto, más aún, depende fuertemente de la representación geométrica de las unidades básicas y el criterio de quien evalúa la geometría resultante de los distritos. Es por esta razón que las métricas usadas para cuantificar la compacidad de los distritos deben buscar atender las necesidades específicas de cada problema [Gilbert Laporte, 2015].

Las razones que fundamentan la compacidad son muy similares a las que sostiene la conexidad de las soluciones: disminuyen los trayectos del día a día, favorecen la construcción de rutas y permiten la mejor gestión de la carga de trabajo. Pero además, la compacidad en problemas de distritaje político ayuda a prevenir “gerrymandering”. Como se había mencionado antes, este concepto hace referencia a la posibilidad de manipular los distritos con

el fin de obtener ventajas de la composición política resultante. Es un concepto muy interesante que hace notar cómo la conformación de distritos afecta de manera relevante ciertas métricas, sin modificar otras. Un buen ejemplo de esto se puede ver en la figura 4.2, donde se muestra cómo tres particiones distintas de 50 elementos de dos preferencias, pueden afectar una decisión general manteniendo siempre los distritos balanceados. En el caso (A), se han creado 3 distritos de una preferencia específica y dos de la otra preferencia; en el caso (B) también manteniendo el balance, se puede ver que los elementos que son mayoría, dominan en todos los distritos sobre la otra preferencia; finalmente en el caso (C), se han distribuido los elementos de tal manera que la preferencia que es minoría pueda dominar a la que es mayoría.

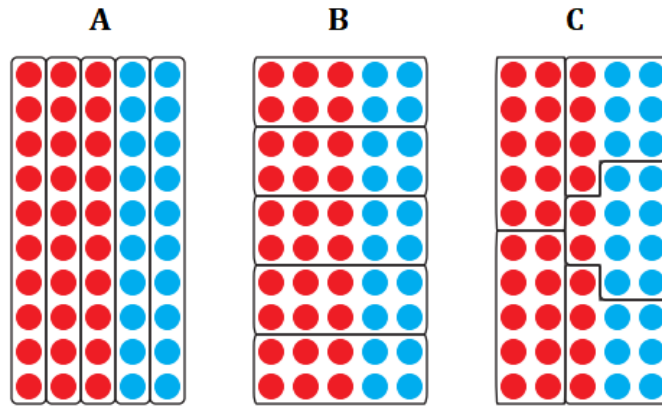


Figura 4.2: Tres maneras de dividir 50 elementos de distintas preferencias para obtener diferentes resultados, balanceando siempre la cantidad en cada distrito.

Si bien, el problema de “gerrymandering” no tiene tanta relevancia en el distritaje para la distribución o para la generación de rutas, sí debe ser considerado como un aviso que indica que los resultados de modelos de distritaje normalmente responden a criterios que abordan de manera específica un requerimiento medianamente ambiguo, por lo que es muy probable que múltiples soluciones sean suficientemente buenas para atender dicho requerimiento [Tapp, 2018]. Este punto vuelve particularmente relevante, para buscar la compacidad de las soluciones, a las métricas usadas para cuantificarla.

Dependiendo del problema y de la información que se cuente, se han diseñado muchas métricas para cuantificar la compacidad de los distritos. Puesto que el requisito de ser compacto es una característica, sobretodo, de apariencia, la mayoría de las métricas buscan cuantificar de alguna manera cuán alejado está un distrito de alguna forma “óptima”. Algunas de estas métricas se exponen a continuación ([Horn et al., 1993]):

1. Desviación absoluta del área de la envoltura convexa del distrito con respecto al área media.
2. Desviación absoluta del perímetro de la envoltura convexa del distrito con respecto al perímetro medio.
3. Razón entre el área de la envoltura convexa y el área del menor círculo inscrito.
4. Razón entre el área de la envoltura convexa y el área del menor rectángulo inscrito.

5. Suma de las distancias entre las unidades básicas y el centro del distrito.
6. Máxima distancia entre las unidades básicas y el centro del distrito.
7. Máxima distancia entre las unidades básicas y el centro del distrito sobre el radio del mínimo círculo inscrito.
8. Media de las distancias entre las unidades básicas y el centro del distrito sobre el radio del mínimo círculo inscrito
9. Área de la envoltura convexa sobre el perímetro de la envoltura convexa.

La mayoría de los modelos de distritaje considera la compacidad como la función objetivo a ser optimizada. Adicionalmente, se pueden restringir la distancia máxima entre una unidad básica y el centro del distrito. También se puede restringir la distancia máxima entre dos unidades básicas asociadas al mismo distrito. Sin embargo, cualquier medida usada es altamente dependiente de las características particulares de cada problema [Ríos-Mercado et al., 2009].

4.3. Enfoques de solución

A través de la historia, muchos autores han propuesto diversos modelos y metodologías que, usando los criterios de distritaje antes mencionados como bases de sus desarrollos, han logrado obtener soluciones para los diferentes escenarios planteados en sus problemáticas específicas [Ricca et al., 1997]. De manera general, se pueden agrupar de la siguiente manera:

1. Modelos exactos que resuelven el **problema de la ubicación de instalaciones** (*location allocation problem*). Estos modelos están basados en el p-median problem, donde se busca minimizar la distancia de los nodos al centro del distrito asociado a cada uno, o basados en formulaciones de tipo *covering*, en los cuales se debe determinar la ubicación de instalaciones de tal manera que sean capaces de atender a las unidades básicas que se encuentren dentro de un rango restringido.
2. Enfoques que resuelven el **problema de la partición de conjuntos** (*set partitioning problem*). Puesto que el distritaje es básicamente partición de conjuntos en subconjuntos equivalentes, las soluciones que resuelven este problema pueden usarse para resolver el distritaje.
3. **Métodos de división geométrica** donde, de manera iterativa, se busca particionar el conjunto de nodos en dos o más partes balanceadas. La naturaleza de la división puede seguir diferentes patrones, por ejemplo, una línea recta o una cruz. De esta manera, cada iteración crea un par (o a veces más) subproblemas de menor tamaño. Luego, se itera hasta llegar al número de distritos deseados.
4. **Metodologías heurísticas y metaheurísticas.** Variadas metodologías de este tipo se han desarrollado en el tiempo para resolver diferentes problemas de distritaje, partiendo desde una solución factible o infactible y mejorando por medio de diferentes procedimientos. Algunas heurísticas mencionables que lista la literatura son: *Simulated Annealing* [D’Amico et al., 2002], distintas aplicaciones de *Tabu Search* [Ricca et al., 2008] o GRASP [Ríos-Mercado et al., 2009], solo por nombrar algunas. Una gran ventaja de estas metodologías es que son muy flexibles y pueden incluir cualquier tipo de métrica para diseñar los distritos.

4.3.1. El problema de la ubicación de instalaciones (*The p-median problem*)

También conocido como el “p-median problem”, es uno de los modelos clásicos que abordan el problema de la ubicación de instalaciones y su formulación es la base de muchos otros modelos de *location*. Este problema, ha estado históricamente relacionado con el problema de diseño de territorios. Esto se debe a que ambos problemas requieren, de alguna manera, particionar un área geográfica y distribuir ciertas unidades básicas, usando criterios de conectividad, compacidad y balance [Días et al., 2017]. Típicamente, el centro de estos distritos resulta ser una muy buena ubicación para las instalaciones que proporcionan cobertura a las unidades del distrito, y las capacidades de las instalaciones, se pueden considerar como capacidades de los distritos. Esto significa que ambos problemas, en lo más general, resultan equivalentes.

El problema p-median ha sido estudiado durante muchos años y se ha demostrado que usando una red conexa de nodos para las unidades geográficas básicas, la complejidad de decidir distritos conexos y compactos es NP-Hard, lo cual imposibilita de manera práctica la facultad de encontrar un algoritmo que resuelva este problema de manera óptima en tiempos polinómicos [Kariv et al., 1979]. Sin embargo, [Ríos-Mercado, 2020] muestra una gran cantidad de trabajos realizados en el tema hasta la fecha, que se acercan a la optimalidad dentro tiempos razonablemente aceptables.

La formulación del problema p-median consiste en ubicar p instalaciones (medians) en función de minimizar la distancia ponderada entre las instalaciones y los puntos de demanda (nodos, consumidores, centros de población). A continuación se presenta una formulación entera para una definición genérica del problema.

$$\min_x \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (4.13)$$

$$\text{subject to:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = p \quad (4.15)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

En esta formulación, n representa el número de puntos de demanda, p el número de instalaciones, d_{ij} la distancia (costo) entre el punto de demanda i y la instalación j ,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } i \text{ está asignado a la instalación } j \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$x_{jj} = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } j \text{ es una la instalación } j \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \quad (4.19)$$

La restricción 4.14 previene que haya puntos de demanda libres, es decir, que no se hayan asignado a ninguna instalación. La cantidad de instalaciones se limita mediante las restricciones 4.15. Las ultimas condiciones, expresadas en las inecuaciones 4.16, aseguran la coherencia de la solución, esto es, un punto de demanda i no puede ser asignado a la instalación j si esta última no ha sido establecida como instalación ($x_{ij} = 1$) previamente.

Este es un modelo de programación lineal entero que puede ser resuelto por algún software de programación lineal/entera general. Sin embargo, el modelo presenta n^2 variables y $n^2 + 1$ restricciones, lo cual implica que es muy simple que el problema se vuelva muy grande para ser resuelto en tiempos razonables, incluso para redes con un tamaño modesto [Domínguez et al., 2006]. A pesar que los softwares de optimización se han vuelto más veloces con el tiempo, y capaces de resolver grandes problemas, esta formulación sigue siendo problemática. Es por este motivo que aún en la actualidad, los investigadores usan variados enfoques como heurísticas, relajación Lagrangiana, híbridos, métodos duales y diferentes reformulaciones para poder abordar el problema de mejor manera.

Comparado con el problema p-median, el problema de distritaje puede ser tanto o más complejo. Sin embargo, los avances en el desarrollo de soluciones para el problema p-median, suelen tener gran impacto en las soluciones del problema de distritaje puesto que, para este último, los enfoques de solución habitualmente dividen el problema en etapas donde al menos una de ellas involucra el problema p-median.

4.3.2. Problema de partición de conjuntos (*Set partitioning problem*)

El problema de partición de conjuntos ha sido estudiado de manera extensiva durante muchos años debido a sus varias aplicaciones en importantes problemas operacionales. La definición del problema corresponde a cubrir de manera exacta las filas de una matriz a_{ij} con m filas y n columnas llena de ceros y unos, con un subconjunto de columnas a costo mínimo. Se define $x_j = 1$ si la columna j (con costo c_j) está en la solución y $x_j = 0$ en caso contrario. El problema sigue como:

$$\text{mín}_x \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4.20)$$

$$\text{subject to:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

La aplicación más conocida de este problema corresponde al agendamiento de la tripulación de aerolíneas, pero su utilización es basta y se puede encontrar en todo tipo de ámbitos. Un

ejemplo simpático de su utilización se tiene en la asignación de los invitados de una boda a las diferentes mesas, cumpliendo variados tipos de restricciones. Para el caso del distritaje, [Garfinkel et al., 1970] propuso un enfoque basado en el problema de partición de conjuntos donde, en primera instancia, se generaban territorios candidatos, los cuales cumplían de alguna manera con reglas de compacidad y conexidad, para luego ser seleccionados en una segunda etapa. [Mehrotra et al., 1998] mejoró este modelo modificando la función objetivo, de tal manera que se focalizara en mejorar la compacidad general de los distritos.

Este tipo de formulación puede ser resuelta de varias maneras y, en particular, en el trabajo de [Mehrotra et al., 1998] se desarrolló un algoritmo de generación de columnas que permite considerar una gran variedad de distritos candidatos. Sin embargo, también se explicita que la complejidad de este tipo de formulación es igual o mayor que la de una formulación de ubicación de instalaciones, teniendo serios problemas de desempeño incluso con instancias de 100 unidades básicas.

4.3.3. Métodos de división geométrica

Una solución muy sencilla y eficiente para ejemplificar este tipo de metodologías, es la que se obtiene de la estrategia de dicotomías sucesivas presentada en [Kalcsics et al., 2005]. La idea principal corresponde a subdividir recursivamente el problema mediante un corte geométrico. Cada corte genera subproblemas más y más pequeños hasta que cierto nivel elemental es alcanzado. El nivel elemental es tal que permite que el problema pueda ser resuelto de manera eficiente.

La naturaleza del corte puede variar según las necesidades del problema, por ejemplo, se podría usar una cruz o un asterisco, que dividen el conjunto de unidades en porciones similares a un trozo de torta. Sin embargo, usar una línea recta es la manera más simple de entender este tipo de metodologías. Primeramente se define un conjunto de posibles direcciones (pendientes) que cortan los territorios en dos mitades. Luego, por cada pendiente, se determina la línea que genera el mejor corte. Este corte suele estar determinado por diferentes métricas establecidas. Por ejemplo, se puede exigir que la mejor recta es la que entrega los conjuntos más balanceados. Pero es normal que existan más criterios involucrados. En tal caso, se puede escoger el mejor corte utilizando una combinación convexa de los criterios. Normalmente balance y compacidad son los criterios más relevantes. Este procedimiento se repite hasta que cada subconjunto corresponde a un distrito.

Este tipo de estrategias son capaces de determinar una partición muy bien balanceada rápidamente, con la ventaja que los distritos no se traslapan. Sin embargo, puesto que los patrones y las particiones no pueden considerar las distancias entre nodos y, la información de los vecindarios es muy compleja de incorporar, los resultados tienden a tener malos desempeños en cuanto a la compacidad de los distritos [Salazar-Aguilar et al., 2013]. La figura 4.3 muestra un ejemplo gráfico del proceso de partición geométrica al utilizar una recta como patrón de división.

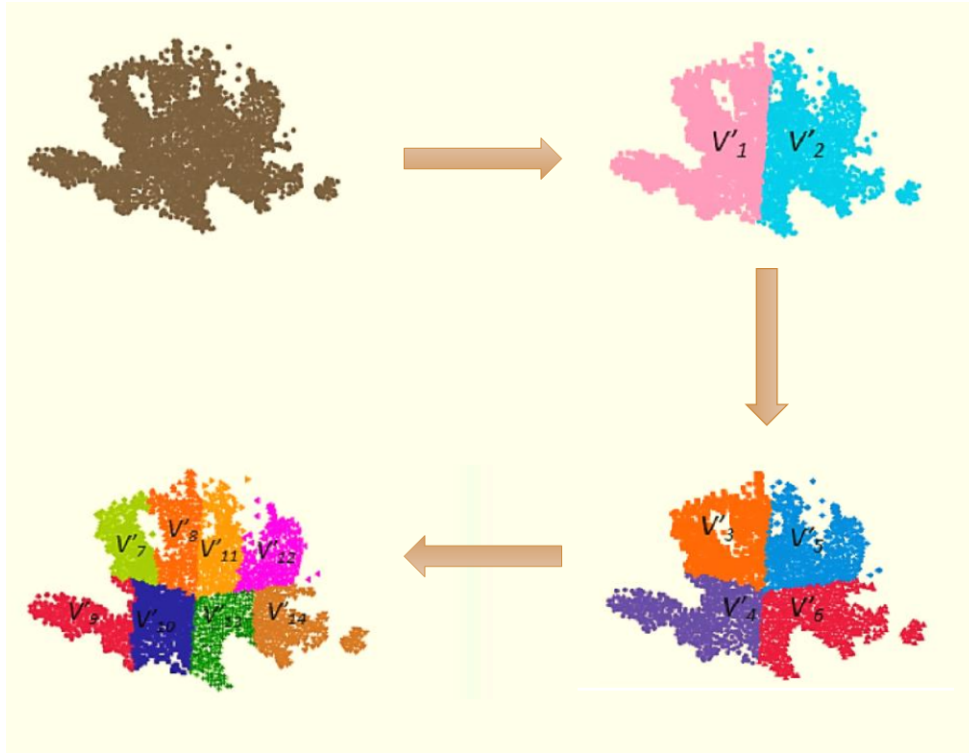


Figura 4.3: Proceso de partición de conjuntos por medio de criterios geométricos, expuesto en el trabajo de [Salazar-Aguilar et al., 2013].

4.3.4. Metaheurísticas

Dada la compleja naturaleza de cualquier método exacto usado para resolver el problema de distritaje, distintas heurísticas se han desarrollado con el propósito de obtener soluciones que aborden las diferentes problemáticas que se puedan plantear, en tiempos asequibles.

Algunas conocidas metaheurísticas que se han utilizado a través del tiempo son de tipo búsqueda local. Estos algoritmos heurísticos tienen como insumos: un problema de optimización cuya función objetivo debe ser minimizada; y alguna solución s a este problema (en general una solución factible) no necesariamente óptima. El concepto detrás de estas heurísticas está en determinar soluciones vecinas a s , las cuales conforman el vecindario, $N(s)$, el cual será explorado en búsqueda de mejores soluciones. Dependiendo de como sea formado y explorado $N(s)$ las heurísticas de búsqueda local obtienen distintos rendimientos [Aarts et al., 1997]. Dependiendo de como se explore el conjunto de soluciones vecinas se puede caer en mínimos locales de mal desempeño, por lo que muchas implementaciones de estas heurísticas utilizan distintos puntos de partida para obtener mejores resultados [Bucarey, 2014]. A continuación se muestran ejemplos de estas heurísticas y aplicaciones al problema de diseño de territorios:

Búsqueda Tabú (*Taboo Search*): Esta heurística combina una búsqueda entre soluciones de mejor costo con la posibilidad de explorar vecinos con peor costo para no caer en óptimos locales. El conjunto $N(s)$ es restringido en cada iteración para prevenir el volver a soluciones de recientemente visitadas y provocar ciclos.

GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*): Esta heurística recorre

de una solución s a una dentro de su vecindario $N(s)$, seleccionada aleatoriamente, la cual puede mejorar o empeorar el valor de la función objetivo dentro de un rango o umbral, el cual puede ir aumentado (si la solución empeora) o decreciendo (en caso contrario). Con esto se evita caer prematuramente en óptimos locales.

Enfriamiento Simulado (*Simulated Annealing*): Esta heurística se basa en el proceso físico de templado de metales. Dada una solución s se selecciona aleatoriamente una solución alternativa a partir del vecindario $N(s)$. Si esta solución es mejor se acepta, en caso contrario, si la solución tiene peor costo, se acepta con cierta probabilidad. La probabilidad de aceptar peores soluciones es decreciente conforme avanza el algoritmo, como un proceso de enfriamiento en la analogía del templado de metales.

Algoritmos Genéticos o Evolutivos: Esta heurística realiza una búsqueda utilizando conceptos del estudio de la evolución y la genética. Inicialmente se comienza con una “población de n soluciones” las cuales son mejoradas a través de búsquedas locales simples. Posterior a eso se recombinan estas soluciones para encontrar soluciones “hijas” las cuales son mejoradas a través de búsquedas locales simples. Luego se reduce la población nuevamente a las n mejores soluciones y se repite el procedimiento hasta que se cumpla algún criterio de convergencia.

Capítulo 5

Procedimiento para la Generación de Zonas de Reparto

En el siguiente capítulo, se propone un modelo exacto para generar distritos compactos, conexos y balanceados, y una metodología heurística, basada en el mismo modelo exacto combinado con el conocido procedimiento de clusterización K-means (ANEXO A), para encontrar soluciones cuando el tamaño del modelo exacto es demasiado grande como para ser resuelto en los tiempos de operación aceptados. Finalmente, se compararán los resultados del modelo exacto y la heurística, con el fin evaluar el desempeño de esta última para resolver el problema de distritaje.

5.1. Datos de entrada

Primeramente se van a introducir los datos de entrada que se van a utilizar para formular el modelo o para generar parámetros asociados a dicha formulación.

Nodos: En este problema, lo que se desea es hacer distritos conformados por códigos postales. Por lo tanto, cada nodo representa las coordenadas geográficas del centro de un código postal, lo cual en la operación real corresponde al centro de masa de la ubicación de las direcciones asociadas a dicho código postal. Llamaremos a los nodos j y al conjunto de nodos J .

Grafo de proximidad: Uno de los objetos básicos para la construcción de este modelo corresponde al grafo de proximidad que determina las vecindades de cada nodo. El concepto tras la red representada por el grafo, alude a la posibilidad de movimientos desde un nodo específico a otro nodo en su vecindad. Este grafo es planar y completamente conexo, permitiendo encontrar caminos para moverse desde todos los nodos a cualquier otro nodo del grafo. Por lo tanto, es un representante de los accesos físicos efectivos que podrían existir, por ejemplo, en la operación de distribución de los carteros. Como se ha mencionado antes, la elaboración de éste no está abordada en este trabajo y se considera un dato entregado. Un ejemplo visual del concepto de grafo se puede observar en la figura 5.1.

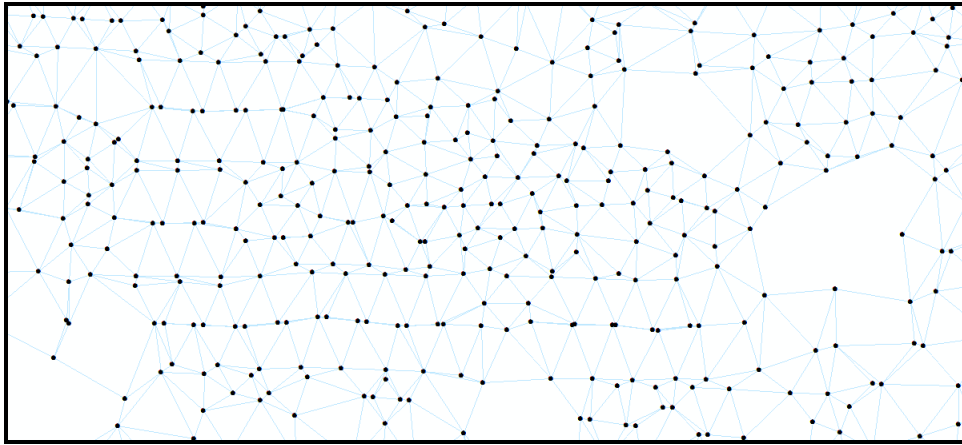


Figura 5.1: Ejemplo de nodos conectados por un grafo de proximidad.

Carga de trabajo: Probablemente el dato que incorpora más complejidad al problema es la carga de trabajo de cada nodo, puesto que si la carga de todos los nodos fuera igual, bastaría con que cualquier formulación buscara minimizar las distancias a algún centro en particular para obtener la mejor compacidad, manteniendo conectividad y balanceo. La carga desbalanceada de cada nodo hace que los modelos deban incorporar restricciones adicionales de conectividad, aumentando más aún la complejidad del problema. La carga de trabajo en este caso, es una estimación del tiempo promedio que necesita un operador postal para atender un código postal en un día. Dado que la composición inmobiliaria de los códigos postales es muy variable (por ejemplo, algunos códigos postales solo se componen de pocas casas mientras que otros un par de edificios con muchos departamentos), es normal que la carga de trabajo también tenga valores muy disímiles entre uno y otro, volviendo el problema más difícil de resolver.

Distancias entre nodos: Una de las características distintivas de esta propuesta de modelamiento del problema, está en las distancias entre los nodos que se usarán. Típicamente, en la literatura se utilizan distancias euclidianas para la formulación. Sin embargo, al contrario de lo que se puede pensar, al contar con un grafo de proximidad, las distancias euclidianas no aportan a la compacidad de la solución. Por el contrario, pueden generar problemas de conectividad (figura 5.2). Lo cual determina inmediatamente la infactibilidad de la solución. En cambio, se usarán las distancias en camino mínimo sobre el grafo de proximidad (mirar la figura 5.3). De esta manera se busca apoyar al modelo para fomentar la conexidad natural. Para el propósito de calcular estas distancias, se ha usado al algoritmo de Dijkstra (ANEXO B). Llamaremos d_{jk} a la distancia en camino mínimo sobre el grafo que hay desde el nodo j al nodo k .

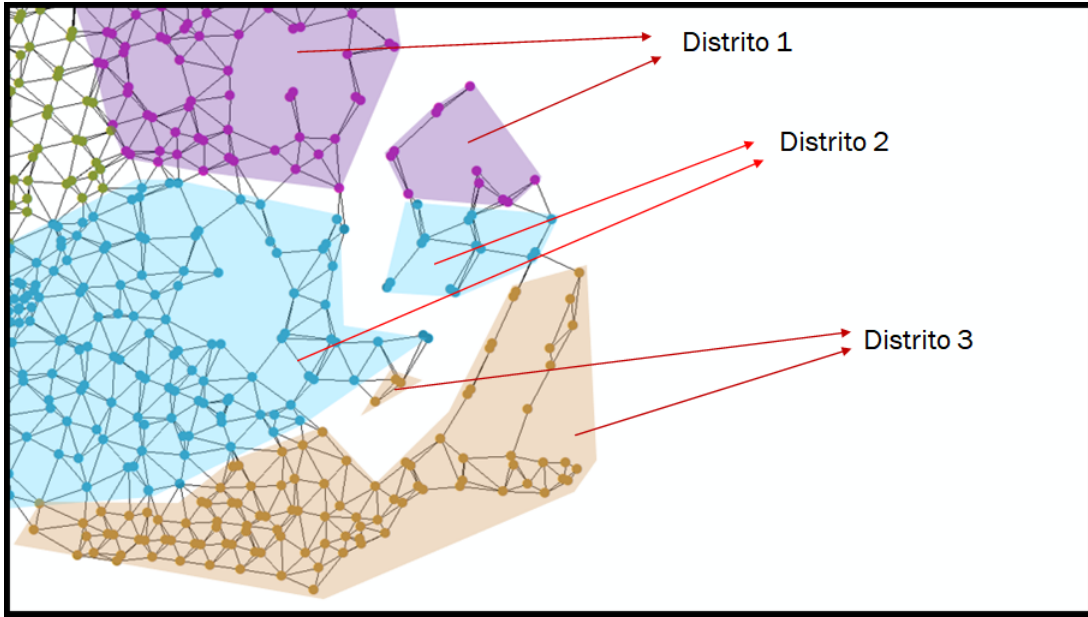


Figura 5.2: Distritos desconectados, incentivados por el uso de la distancia euclidiana. Al usar distancias sobre el grafo, este tipo de problemas se reducen.

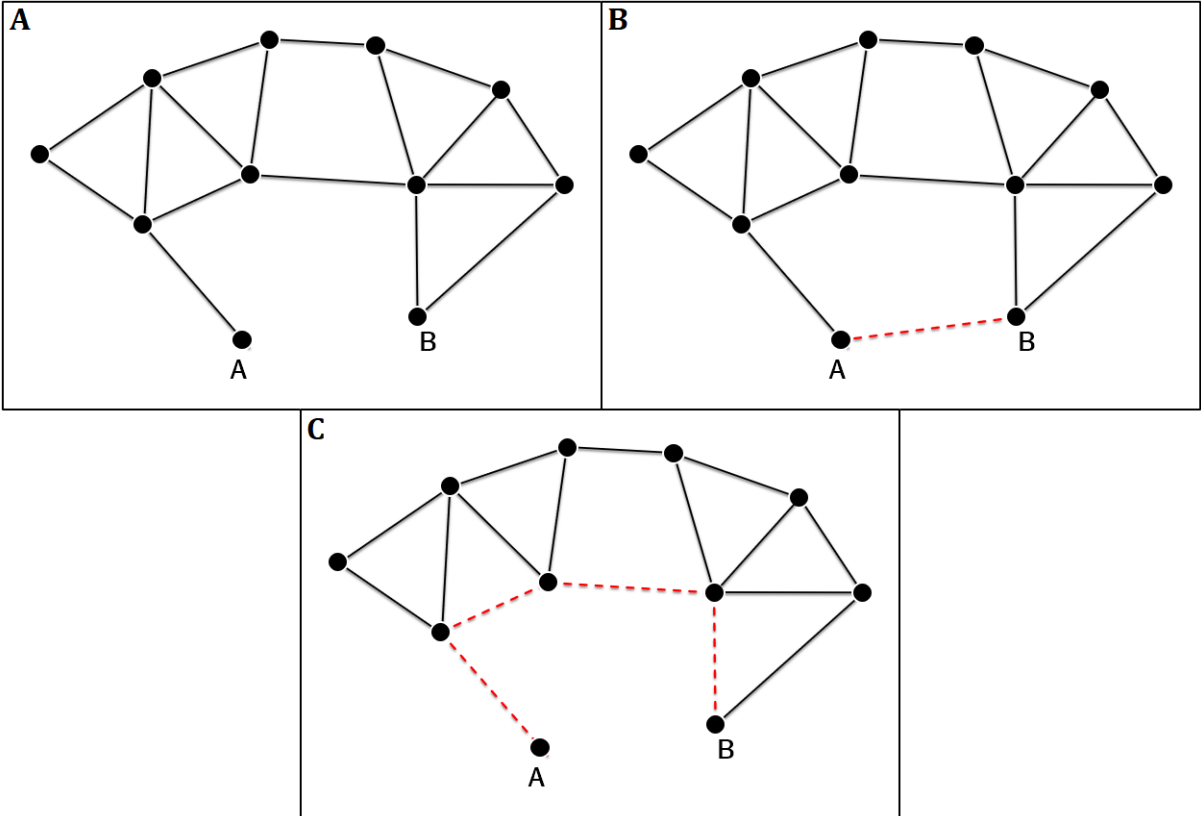


Figura 5.3: A) Puntos A y B que se encuentran en un grafo conexo. B) Distancia Euclidiana entre los puntos A y B. C) Distancia en camino mínimo entre A y B.

Semillas: En la formulación clásica del problema de p -medianas, las posibles ubicaciones de las instalaciones suelen denominarse semillas, y el modelo debe escoger entre esas semillas una cantidad fija (menor o igual al número de semillas) para convertirse en las ubicaciones efectivas. Mientras mayor sea la cantidad de semillas entregadas al modelo, este se vuelve más complejo. En este caso, las semillas corresponden a los nodos que pueden ser seleccionados como centros de los distritos. Para facilitar el entendimiento de la formulación, llamaremos s a los nodos cuando se están usando como semillas.

Orden de los nodos: Un atributo importante que se usará en la formulación de las restricciones de conectividad es el orden de cada nodo respecto a cada otro nodo. Corresponde al valor de los grados de separación, usando el grafo de proximidad, que tiene cada par de nodos j y k , del conjunto J . Este orden además puede ser usado para reducir la complejidad del problema. Llamaremos o_{sj} al orden del nodo j para llegar a la semilla s . La figura 5.4 muestra como se propaga este orden a través de los arcos del grafo.

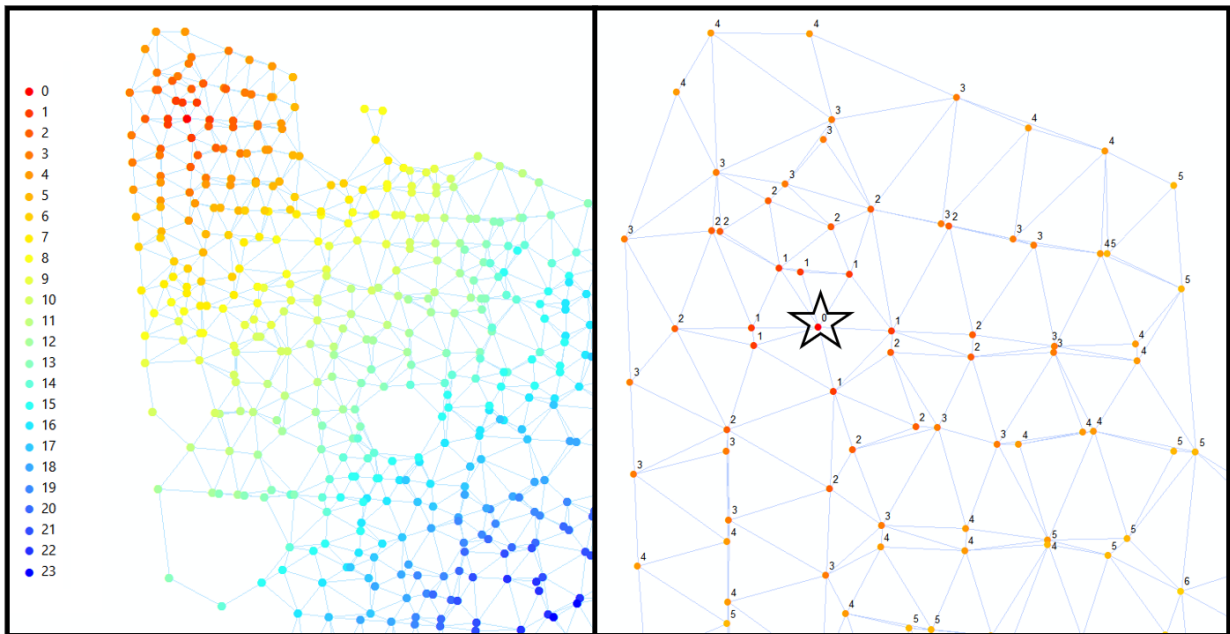


Figura 5.4: A la izquierda, un grafo donde se muestra mediante colores, como se propaga el orden de los nodos a partir de un centro (orden 0). A la derecha, los nodos etiquetados con su respectivo orden, el cual incrementa con los grados de separación del nodo centro.

5.2. Modelo base de distritaje

A continuación se presenta la formulación de un modelo exacto para resolver el problema específico de distritaje presentado en este trabajo. Desde aquí, lo llamaremos Modelo Base y servirá posteriormente para evaluar el desempeño de un enfoque heurístico de resolución. Este Modelo Base está íntegramente basado en un modelo de p -medias y se han incorporado restricciones para disminuir su complejidad, para que respete la conexidad y para balancear la carga de los distritos.

5.2.1. Parámetros

Parámetros usados en la formulación.

- J : Conjuntos de nodos j .
- S : Conjuntos de semillas s .
- c_j : Carga de trabajo asociada al nodo j .
- d_{js} : Distancia sobre el grafo para ir del nodo j a la semilla s .
- o_{js} : Grados de separación para ir del nodo j y la semilla s .
- p : Cantidad de distritos que se desean crear.
- w_{max} : Carga acumulada máxima asociada a cualquier distrito.

5.2.2. Variables

Definición de las variables del modelo.

$$x_{js} \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } j \text{ está asignado al distrito cuyo centro es la semilla } s. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

$$y_s \begin{cases} 1 & \text{si la semilla } s \text{ es centro de distrito.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

z_s : Distancia acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .

w_s : Carga acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .

5.2.3. Función Objetivo

La función objetivo del modelo corresponde a la suma de todas las distancias acumuladas de todas las semillas. La idea central de esta función objetivo es fomentar la cercanía de los nodos con su centro, generando la mayor compacidad posible.

$$\text{mín} \sum_{s \in S} z_s \tag{5.1}$$

Complementando la función objetivo, se encuentra la definición de la variable distancia acumulada. Se han escrito de manera separada porque es de interés notar cómo cambia este valor entre los diferentes distritos generados.

$$\sum_{j \in J} d_{js} x_{js} = z_s \quad \forall s \in S \quad (5.2)$$

5.2.4. Restricciones

Solo pueden haber p distritos en total.

$$\sum_{s \in S} y_s = p \quad (5.3)$$

Un nodo j solo puede, y debe, estar asociado a lo más a un distrito cuyo centro está definido por s .

$$\sum_{s \in S} x_{js} = 1 \quad \forall j \in J \quad (5.4)$$

Un nodo j solo puede estar asociado a un distrito cuyo centro está definido por s cuando s ha sido efectivamente seleccionado como centro.

$$x_{js} \leq y_s \quad \forall j \in J \quad \forall s \in S \quad (5.5)$$

Un nodo j solo puede estar asociado a un distrito cuyo centro está definido por s cuando algún vecino k , con un orden menor hacia s , ha sido asignado también a dicho distrito. Llamaremos V_{js-} al conjunto de vecinos k de j tales que $o_{ks} < o_{js}$. Esta restricción es la que permite garantizar la conectividad de los distritos.

$$x_{js} \leq \sum_{k \in V_{js-}} x_{ks} \quad \forall j \in J \quad \forall s \in S \quad (5.6)$$

Una restricción esencial es la que impone el balance en la carga de los distritos. En este caso, por simple comodidad de la formulación, se ha dividido en dos restricciones. Primero la definición de la carga acumulada de un distrito, y luego una imposición de la carga máxima para cada distrito.

$$w_s = \sum_{j \in J} c_j x_{js} \quad \forall s \in S \quad (5.7)$$

$$w_s \leq w_{max} \quad \forall s \in S \quad (5.8)$$

El cálculo de la carga máxima depende de un parámetro r que se puede entender como la desviación máxima que se puede existir entre todos los distritos, a partir de la carga media posible. Luego, la carga máxima por distrito se define como sigue:

$$w_{max} = \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sum_{j \in J} c_j}{p}$$

Como referencia, el valor $r = 0,1$, alude a que exista una desviación máxima del 10% de la carga media que debiera tener un distrito. En el peor caso, todos los distritos salvo uno, copan la capacidad máxima y aquel restante absorbe el desbalance del resto. En este caso, el distrito con menor carga total tiene menos de un 10% de desbalance respecto de la carga media.

Una restricción para la carga mínima de un distrito no se ha incorporado en esta formulación puesto que está asociada a la selección de un centro. Esta relación incorpora complejidad indeseada al modelo y no es realmente necesaria al usar la restricción de carga máxima antes definida. Esta situación es diferente cuando los centros de cada distrito son entregados a priori, puesto que tales centros siempre serán seleccionados por el modelo.

Con el propósito de reducir la complejidad del problema, e incluso aportar a la compacidad de la solución, se ha incorporado la siguiente restricción que limita arbitrariamente la extensión de un distrito. La idea es negar a priori la posibilidad que un nodo se asocie a un distrito en particular, puesto que se encuentra “demasiado” lejos de su centro. Para esto se ha definido el parámetro o_{max} , que se define como el orden máximo de un nodo para estar asociado a un distrito.

Luego, se definen las siguientes restricciones:

$$x_{js} = 0 \quad \forall j \mid o_{js} > o_{max} \quad \forall s \in S \quad (5.9)$$

Esta restricción tan simple puede disminuir de manera considerable la cantidad de variables binarias. Sin embargo, se debe usar con cuidado puesto que podría infactibilizar el problema. El valor a usar depende bastante del problema, las características del grafo y la distribución de la carga, pero tan solo usar un valor tal que disminuya a la mitad la cantidad de nodos a decidir, tiene un impacto sustancial, sobretodo, en instancias con pocas semillas.

Esta corresponde a la definición del modelo principal de generación de distritos, el cual puede ser resuelto usando paquetes de optimización como CPLEX o GUROBI. Para obtener los distritos óptimos, las semillas deben ser todos los nodos y los resultados que se obtienen son como muestra la figura 5.5. Desgraciadamente, al usar todos los nodos como posibles

candidatos a centros de distritos, la cantidad de variables binarias es de orden $O(|J|^2)$, lo cual explota rápidamente. La revisión bibliográfica ya mencionaba que este problema tiene complejidad NP-Hard, lo cual lo vuelve muy difícil de resolver en tiempos polinomiales. Para instancias con 300 nodos o menos, esta formulación puede obtener resultados en tiempos cercanos a una hora. Sin embargo, al aumentar los nodos a 500 o más, la naturaleza exponencial del problema combinatorial incrementa los tiempos de resolución hasta límites demasiado elevados para ser usados en la operación regular, incluso entregando pocas semillas. En el caso de una comuna o sector a cuartelizar en Correos, se tienen por lo regular entre 3.000 y 5.000 códigos postales, lo cual define un problema que el modelo es incapaz de resolver en tiempos tolerables, ni aunque se entreguen solo el doble de semillas que de distritos a generar¹.

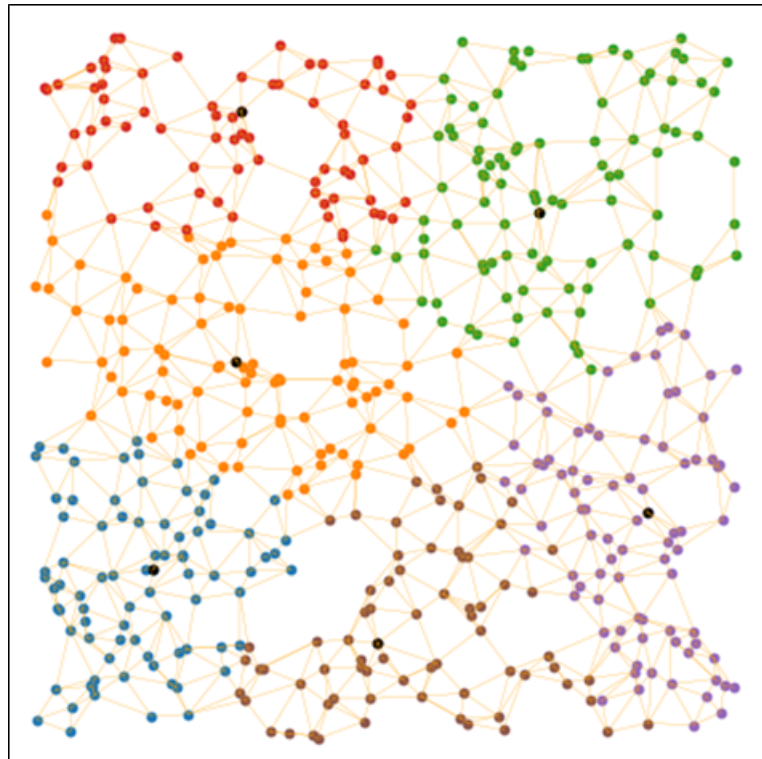


Figura 5.5: Distritos creados con el modelo al usar todos los nodos como semillas.

¹Para todos los procesos nombrados en este trabajo se ha utilizado un computador personal convencional con características: Inter Core i7, 16 GB de memoria RAM, GUROBI-Python

5.3. Heurística para la obtención de distritos en tiempos reducidos

Debido a que este es un problema fundamentalmente combinatorial, una medida lógica para disminuir sus tiempos de ejecución es limitar las posibles combinaciones que el modelo debe revisar. La cantidad de combinaciones en este caso se basa en los siguientes factores: cantidad de nodos y cantidad de semillas.

Los modelos optimizantes que describe la literatura, regularmente basan su formulación en la capacidad de indicar a priori aquellos nodos que pueden ser usados como centros, y con justa razón puesto que es un factor directo en la reducción del espacio de soluciones. Pero cualquier tipo de selección a priori de centros, que no sean en efecto los mejores, podría coartar el resultado. En este sentido, algunos resultados empíricos que provienen de la utilización del modelo base son las siguientes:

- Para instancias de más de 1000 nodos, cualquier número de semillas que sea mayor a la cantidad de distritos que se quieren generar, resulta en resoluciones con tiempo mayor a una hora.
- Si se entrega la misma cantidad de semillas que de distritos y, por casualidad, solo entregasen los centros óptimos, el resultado no tarda más de un par de segundos en instancias incluso de 5000 nodos.
- Si se entrega la misma cantidad de semillas que de distritos y, estos no son los centros óptimos, se puede obtener o bien un resultado subóptimo o una infactibilidad de manera instantánea.

Por lo tanto, para buscar resultados, se han considerado las siguientes premisas:

- Buscar centros entre los cuales se encuentren, deseablemente, los centros óptimos o sean cercanos a los centros óptimos del modelo base.
- Mejorar el resultado una vez que se cuenta con una solución factible.
- La o las metodologías deben procurar entregar resultados en tiempos menores a 1 hora.

Con estas premisas, lo que se propone es una heurística que usa el modelo base, con modificaciones que lo vuelven mucho más simple, con el fin de obtener centros para una segunda versión del modelo, que se encargará de refinar la solución y así obtener distritos conexos, compactos y balanceados. La heurística se pueden dividir en 2 etapas:

- Etapa 1: Obtención de una solución inicial
En esta etapa, se busca una solución al problema de distritaje suponiendo que las unidades básicas tienen cargas de trabajo idénticas.
- Etapa 2: Refinación de la solución inicial.
En esta etapa, a partir de la solución inicial, se efectúa un proceso iterativo donde se van mejorando el balance de los distritos, manteniendo la conexidad y procurando la mejor compacidad posible.

5.3.1. Etapa 1: Obtención de una solución inicial

El objetivo de esta primera etapa es obtener una solución rápida del problema resuelto por el Modelo Base, pero suponiendo que todas las unidades básicas tienen cargas idénticas. Es decir, el resultado corresponde a distritos con cantidad homogénea de unidades básicas.

La ventaja de tener todas las cargas iguales, es que el Modelo Base tiende a crear distritos naturalmente conexos, puesto que la única diferencia entre dos unidades básicas es su distancia a una semilla y, como la función objetivo minimiza esa distancia, siempre se va a seleccionar la menor. De esta manera, se puede evitar utilizar restricciones de conectividad, las cuales son muy exigentes. Sin embargo, solo con esta simplificación, el Modelo Base sigue siendo muy lento de resolver, por lo que se usará una metodología heurística para buscar soluciones factibles.

Esta metodología está basada en el algoritmo de K-Means y utiliza una formulación simplificada del Modelo Base como algoritmo de asociación de unidades básicas a semillas. Llamaremos Modelo 1 a esta formulación, y en ella, se han eliminado las restricciones de conectividad y sólo se permite usar una cantidad de semillas igual al número de distritos que se quieren crear. Pero aún se conservan restricciones de balance y se trata de maximizar la compacidad. La definición del Modelo 1 es como sigue:

Parámetros

- J : Conjuntos de nodos j .
- S : Conjuntos de semillas s donde $|S| = p$.
- d_{js} : Distancia sobre el grafo para ir del nodo j a la semilla s .
- r : Umbral de desbalance de la carga de los distritos.

Variables

$$x_{js} \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } j \text{ está asignado al distrito cuyo centro es la semilla } s. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

z_s : Distancia acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .

w_s : Carga acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{s \in S} z_s \tag{5.10}$$

$$\sum_{j \in J} d_{js} x_{js} = z_s \quad \forall s \in S \tag{5.11}$$

Restricciones

$$\sum_{s \in S} x_{js} = 1 \quad \forall j \in J \quad (5.12)$$

$$w_s = \sum_{j \in J} x_{js} \quad \forall s \in S \quad (5.13)$$

$$w_s \leq (1 + r) \frac{|J|}{p} \quad \forall s \in S \quad (5.14)$$

$$(1 - r) \frac{|J|}{p} \leq w_s \quad \forall s \in S \quad (5.15)$$

Habiendo definido el Modelo 1, se puede describir el proceso para obtener una solución de el problema particular mencionado en esta etapa. Como se ha dicho antes, está basado en el algoritmo de clustering, K-Means, y el proceso es el siguiente:

1. Se seleccionan aleatoriamente p unidades básicas que se usarán como semillas.
2. Usando el Modelo 1, se asocian las unidades básicas a estas semillas.
3. Se compara la función objetivo del resultado del Modelo 1 con el de una solución anterior (en caso de no haber ninguna, se considera que si hay cambios) y, en caso que no haya cambios significativos, se entrega última solución obtenida, la cual es un distritaje balanceado. En caso que si haya cambios, se sigue al siguiente paso.
4. Se calculan los centros geográficos de los distritos y se asocian a la unidad básica más cercana. Estas unidades se considerarán como p nuevas semillas. Se vuelve al paso 2.

Llamaremos a este procedimiento, Proceso Unitario, y con él se puede obtener soluciones diferentes dependiendo de las semillas aleatorias con las cuales se comience el ciclo. Un esquema de este proceso se puede ver en la figura 5.6.

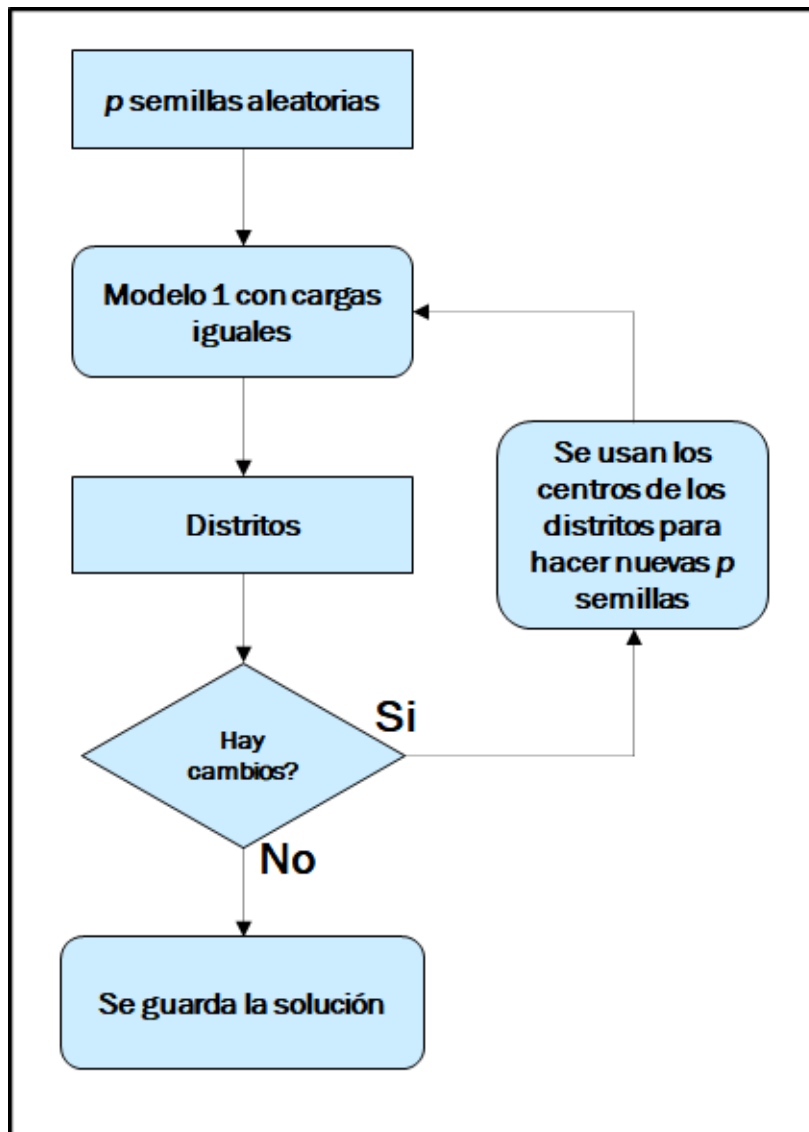


Figura 5.6: Proceso Unitario para la obtención de soluciones del Modelo 1 basado en el algoritmo de K-Means.

Tal como en el algoritmo de K-Means, el Proceso Unitario debe repetirse múltiples veces (escogiendo cada vez un conjunto diferente de semillas aleatorias) con el fin de obtener suficientes soluciones, para finalmente escoger la mejor. En este caso, la mejor solución es la que tiene la menor función objetivo, es decir, la que logra los distritos con la mejor compacidad. Preguntas razonables de este procedimiento son:

1. ¿Cuánto tarda un proceso unitario en converger a una solución?
2. ¿Cuántas ejecuciones del proceso unitario se deben efectuar para tener garantías de que se está escogiendo la mejor opción?
3. ¿Cuánto tiempo va a tomar realizar todo el proceso de selección de centros iniciales?

El gráfico mostrado en la figura 5.7 muestra la cantidad de iteraciones del Modelo 1 que fueron necesarias para que un Proceso Unitario converja a un resultado. Esto se realizó con distintas cantidades de nodos y distritos y, se puede percibir que hay una ligera tendencia

al incremento de la cantidad de iteraciones necesarias cuando se aumenta la cantidad de nodos del problema, pero es demasiado suave como para considerarla un problema. Para efectos prácticos, la media de los Procesos Unitarios no necesitan más de 14 iteraciones para converger, independientemente del problema planteado, tal como se ve en la tabla de la figura 5.8. Sin embargo, el tiempo de resolución sí puede suponer una dificultad, pues se encuentra claramente al alza conforme aumenta la cantidad de nodos del problema y, para problemas del tamaño relevante para este trabajo (alrededor de 4000 nodos), se debiera esperar demoras cercanas a los 30 segundos.

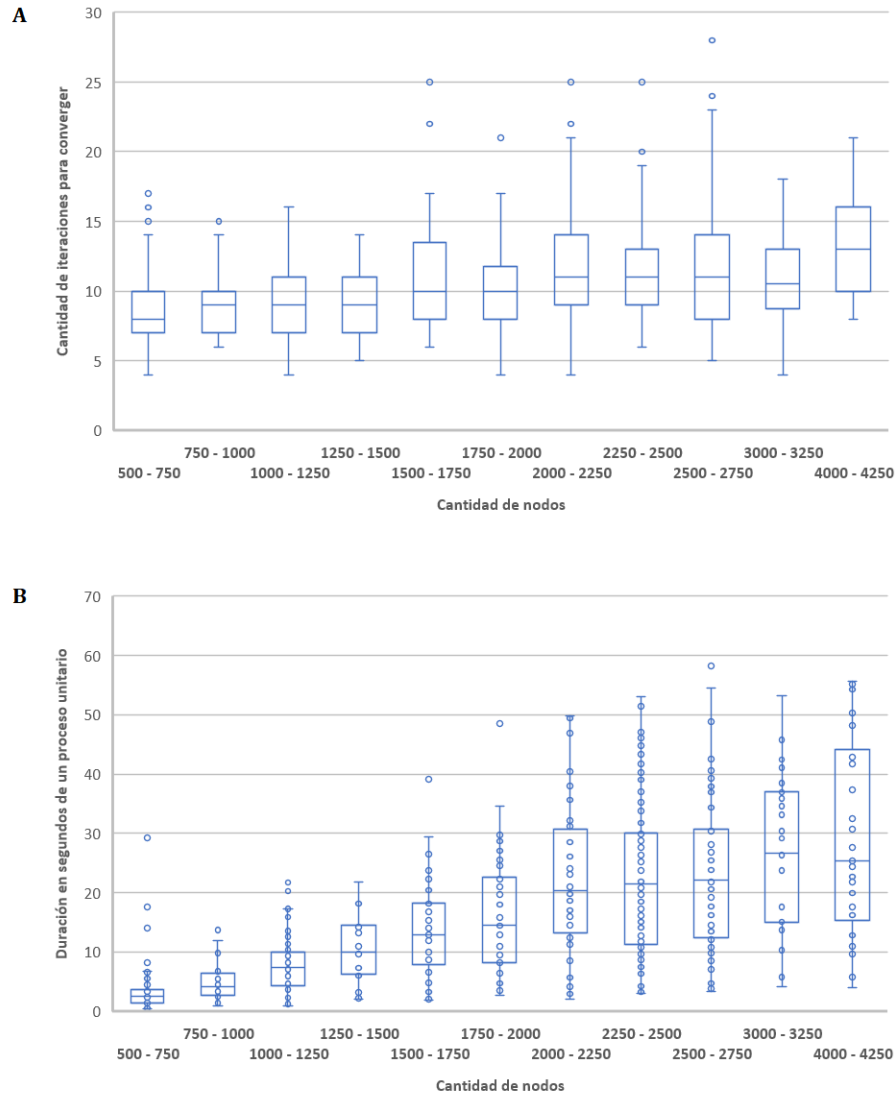


Figura 5.7: Caracterización del proceso unitario en instancias de distintos tamaños. (A) Iteraciones del Modelo 1 que fueron necesarias para que el Proceso Unitario convergiera. (B) Tiempo requerido para completar los Procesos Unitarios.

Cantidad de nodos	Cantidad de Iteraciones para converger				Segundos necesarios para converger			
	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo
500 - 750	8.63	2.75	4	17	2.98	2.96	0.48	29.23
750 - 1000	9.23	2.47	6	15	5.01	3.09	0.93	13.72
1000 - 1250	9.30	2.48	4	16	7.70	4.62	0.82	22.24
1500 - 1750	11.00	4.06	6	25	13.52	8.17	1.87	39.17
1250 - 1500	9.16	2.67	5	14	10.17	5.62	2.09	21.76
1750 - 2000	9.92	2.87	4	21	15.77	9.55	2.73	48.49
2000 - 2250	11.65	4.45	4	25	21.23	12.01	2.07	49.90
2250 - 2500	11.35	3.42	6	25	22.62	13.18	3.04	53.02
2500 - 2750	11.83	4.82	5	28	23.20	12.99	3.24	58.25
3000 - 3250	10.77	3.50	4	18	26.43	12.80	4.15	53.27
4000 - 4250	13.17	3.39	8	21	28.84	16.13	3.91	55.68
Total	10.31	3.62	4	28	14.56	12.92	0.48	58.25

Figura 5.8: Indicadores de desempeño del proceso unitario en instancias de distintos tamaños.

Ahora que se sabe aproximadamente cuanto podría tardar la ejecución de un Proceso Unitario, es necesario estudiar cuántas ejecuciones son necesarias para garantizar que se ha encontrado la mejor solución posible. Para esto, se ejecutó de manera secuencial, iteraciones del Proceso Unitario hasta que hubiesen pasado 100 iteraciones sin conseguir una solución que mejorara la función objetivo, esto se probó en miles de instancias de variados tamaños. De esta forma se desea saber cual es la cantidad estadísticamente suficiente de iteraciones para asegurar que se encuentra la mejor solución. Esta información está reflejada en el gráfico de la figura 5.9.

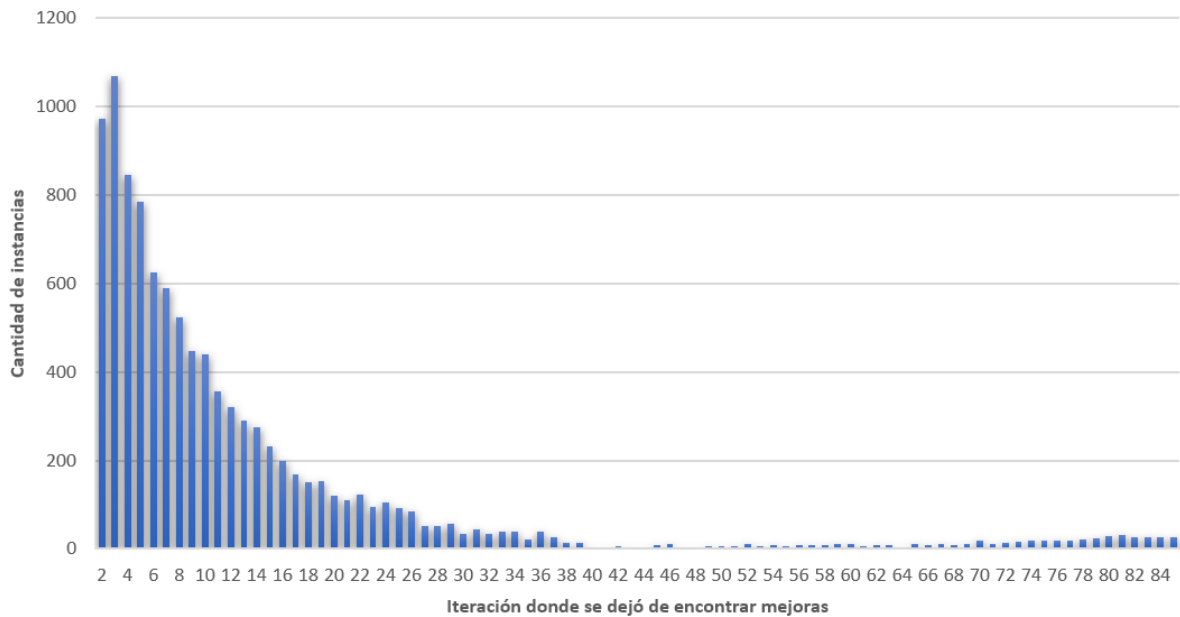


Figura 5.9: Histograma de las instancias y el número de la iteración del Proceso Unitario donde dejaron de obtener mejoras.

Como se puede observar en el gráfico 5.9, en general, cerca de la iteración número 40, las instancias no encuentran mejoras. Incluso, el 80% de las instancias no ven mejoras tras la iteración número 17, independientemente del tamaño del problema. Además, la figura 5.10

muestra, para diferentes rangos de tamaño del problema, en que iteración deja de encontrar mejoras el 95 % de las instancias. Por lo tanto, para instancias de alrededor de 4000 nodos, es necesario iterar 40 veces para tener 95 % de certeza que se está encontrando la mejor solución, pero para instancias menores no es necesario llegar a esa cota. Si bien en la figura 5.10 no se muestran instancias más grandes que 4500 nodos, está claro que existe una tendencia al alza, lo que indica que para problemas de mayor tamaño, se requieren más iteraciones del proceso unitario.

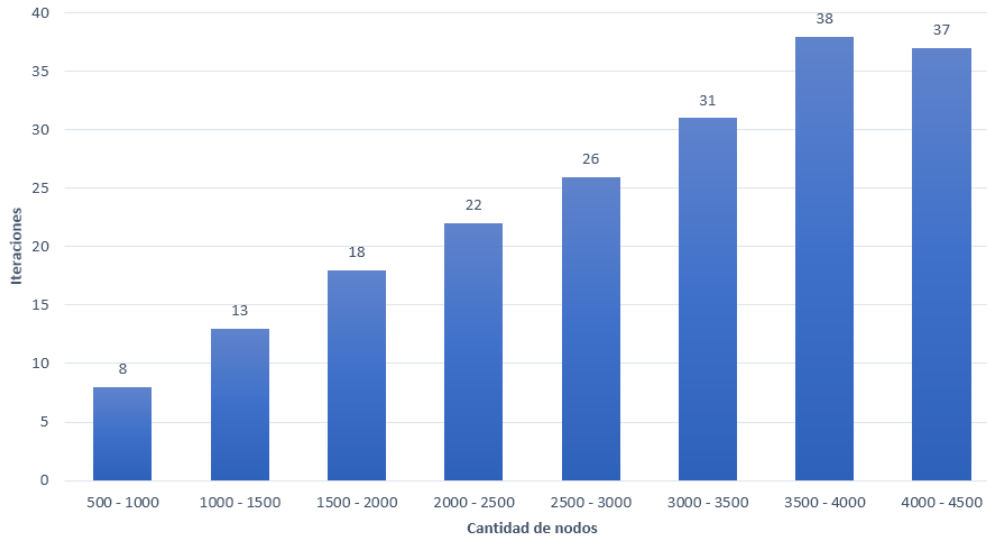


Figura 5.10: Iteraciones en las que el 95 % de las instancias dejaron de encontrar mejoras según el tamaño del problema.

Habiendo realizado las pruebas anteriores, algunas menciones se pueden realizar respecto de parte o el total del procedimiento:

1. Un Proceso Unitario es bastante rápido para converger a una solución: 30 segundos en promedio para instancias de tamaño cercano a 4000 nodos y mucho menos para instancias de menor tamaño.
2. Los Procesos Unitarios se pueden realizar en paralelo. Puesto que son independientes, es factible paralelizar el problema con el fin de agilizar la obtención de muestras.
3. No es necesario obtener miles de soluciones, como lo haría el método de K-means, para tener garantías de que se está escogiendo un buen resultado. Ya se sabe que 40 iteraciones son suficientes para obtener una solución razonablemente buena (el 95 % del tiempo).

En este punto, el resultado esperado de este macro procedimiento son distritos homogéneamente distribuidos, fuertemente compactos, y que poseen una cantidad muy similar de nodos. Una consideración muy relevante de esta formulación es que, si las cargas de los nodos efectivamente fueran iguales, el resultado de este procedimiento generaría una solución final perfectamente balanceada y compacta, pero podría tener problemas de conectividad. Sin embargo, un proceso simple usando búsqueda local debiera solucionar rápidamente este problema, tal como la literatura ha mostrado. La imperiosa necesidad de un proceso posterior a éste, viene netamente asociado a la variabilidad de la carga entre nodos que rompe abrupta-

mente la conexidad de las soluciones obtenidas con este método y exige modificaciones a las dimensiones espaciales de los distritos.

5.3.2. Etapa 2: Refinación de la solución inicial

Habiendo encontrado distritos homogéneos en cantidad de unidades básicas, lo que se propone es otro proceso equivalente, que incorpore las cargas reales de los nodos. El procedimiento va modificando paulatinamente los distritos para moverse siempre entre soluciones factibles que reduzcan el desbalance de cargas, procurando siempre buscar la mejor compacidad posible, y exigiendo que se respete la conexidad.

Se construyó un segundo modelo que llamaremos Modelo 2, el cual es muy similar al Modelo 1, pero hereda las restricciones de conexidad del Modelo Base. Esto hace que sea ligeramente más lento que el Modelo 1, pero siempre entrega resultados conexos. Su definición es como sigue:

Parámetros

- J : Conjuntos de nodos j .
- S : Conjuntos de semillas s donde $|S| = p$.
- d_{js} : Distancia sobre el grafo para ir del nodo j a la semilla s .
- c_j : Carga de trabajo asociada al nodo j .
- o_{js} : Grados de separación para ir del nodo j y la semilla s .
- r : Umbral de desbalance de la carga de los distritos.

Variables

- x_{js} $\begin{cases} 1 & \text{si el nodo } j \text{ está asignado al distrito cuyo centro es la semilla } s. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$
- z_s : Distancia acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .
- w_s : Carga acumulada del distrito cuyo centro es la semilla s .

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{s \in S} z_s \quad (5.16)$$

$$\sum_{j \in J} d_{js} x_{js} = z_s \quad \forall s \in S \quad (5.17)$$

Restricciones

$$\sum_{s \in S} x_{js} = 1 \quad \forall j \in J \quad (5.18)$$

$$w_s = \sum_{j \in J} c_j x_{js} \quad \forall s \in S \quad (5.19)$$

$$w_s \leq (1 + r) \frac{|J|}{p} \quad \forall s \in S \quad (5.20)$$

$$(1 - r) \frac{|J|}{p} \leq w_s \quad \forall s \in S \quad (5.21)$$

$$x_{js} \leq \sum_{k \in V_{js-}} x_{ks} \quad \forall j \in J \quad \forall s \in S \quad (5.22)$$

El procedimiento en esta etapa funciona de la siguiente manera: Usando las cargas reales, se calculan las cargas acumuladas de los distritos generados en la etapa anterior. Con esta información se calcula un umbral r , que corresponde al umbral de desbalance que hace esta solución factible en el Modelo 2, en caso que se cumplieran las restricciones de conexidad. Se resuelve el Modelo 2, usando como semillas los centros de los distritos generados en la etapa anterior. Aquí pueden suceder 2 cosas. Si el modelo no es factible, se acaba el proceso y se entregan los últimos distritos con los que se cuente. En cambio, si el modelo es factible, ahora se cuenta con un resultado compacto y que respeta conexidad, pero con nivel de desbalance r . Entonces se vuelven a calcular los centros de estos distritos, pero ahora como el centro de masa (incorporando la carga de los nodos), y se vuelve a ejecutar el Modelo 2 usando estos nuevos centros y un $r = r - \delta$, donde δ es un paso para disminuir el umbral de tolerancia del desbalance. Este paso debe ser pequeño, puesto que se corre riesgo de exigir un cambio que genera infactibilidad. Este proceso se repite hasta llegar al umbral de desbalance deseado o hasta que no se puedan obtener más soluciones factibles. Una vez se ha llegado este punto, se itera con el mismo umbral hasta que la función objetivo no cambia de manera significativa. El esquema de este proceso de refinamiento de la solución se puede apreciar en la figura 5.11.

Tal como en el proceso anterior, una pregunta razonable de hacer es ¿cuánto tarda este proceso en llegar a un resultado?. En este caso, la respuesta depende mucho del tamaño del problema y, sobretodo, de la distribución de la carga entre los nodos. Si la carga es muy desbalanceada en la iteración inicial, puesto que el paso δ es pequeño, requerirá más iteraciones para llegar al umbral (o al punto donde no se puede disminuir más el desbalance) y comenzar a iterar solo mejorando. La bondad del procedimiento es que cada iteración es, como se había comentado, muy rápida de ejecutar. Incluso, en los mejores casos, tanto como el Modelo 1, haciendo este procedimiento muy similar a una ejecución del proceso unitario del paso anterior.

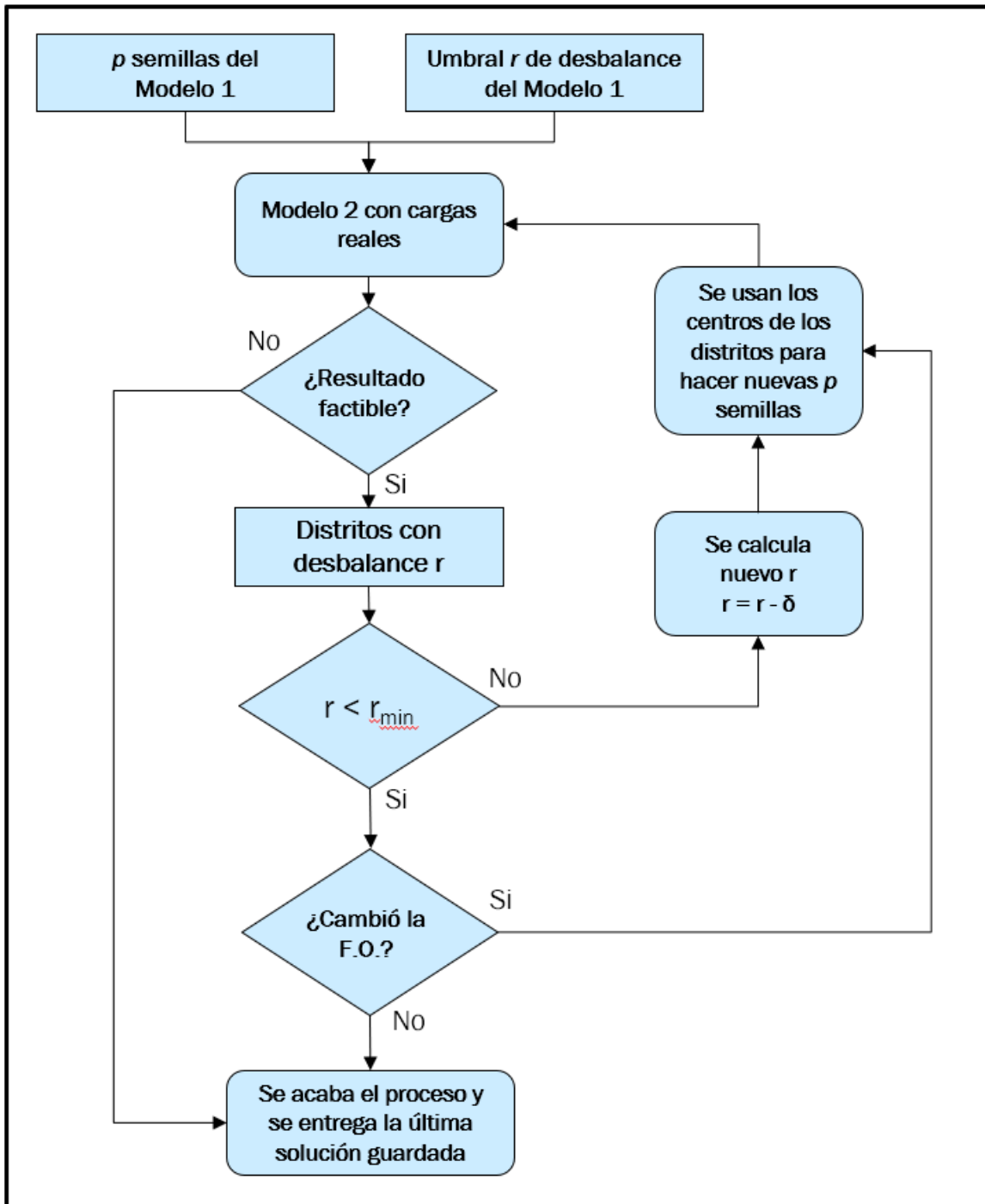


Figura 5.11: Proceso de mejora de la solución.

5.4. Desempeño del procedimiento

Para determinar la bondad del procedimiento heurístico, se evaluaron miles de instancias y se contrastaron con los resultados de distritaje obtenido por el Modelo Base. La muestra de instancias, en este caso, fue sesgada hacia aquellas de tamaño pequeño debido a las obvias limitaciones en el tiempo necesario para encontrar soluciones a problemas más grandes por medio del modelo base. El gráfico de la figura 5.12 muestra en detalle la distribución del tamaño de la muestra de instancias usadas para evaluar. Para todos los rangos de cantidad de nodos se exigían entre 5 y 10 distritos.

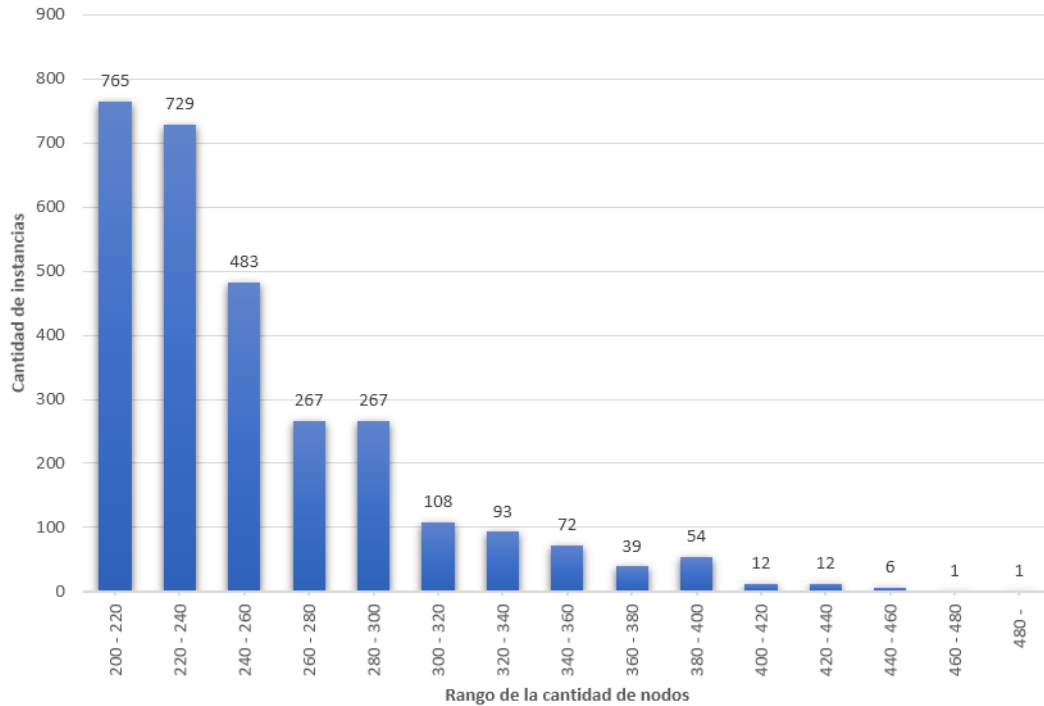


Figura 5.12: Distribución del tamaño de las instancias usadas para validar el procedimiento heurístico de generación de distritos.

El primer indicador de desempeño consiste en el tiempo necesario para obtener una solución, es decir, contrastar el tiempo que tarda el Modelo Base en llegar a la solución óptima (o que tenga un GAP inferior a 0.01 %) con el tiempo que tarda el procedimiento heurístico. En este aspecto, ya se sabe que el Modelo Base se vuelve lento con mucha facilidad, esto se puede ver la figura 5.13, donde instancias de 300 nodos pueden fácilmente superar una hora de resolución. En cambio, el procedimiento heurístico es capaz de reducir el tiempo de resolución de manera significativa hasta en las instancias más grandes. Incluso, para cada una de las instancias de la muestra, no fueron necesarios más de 15 segundos para obtener un resultado.

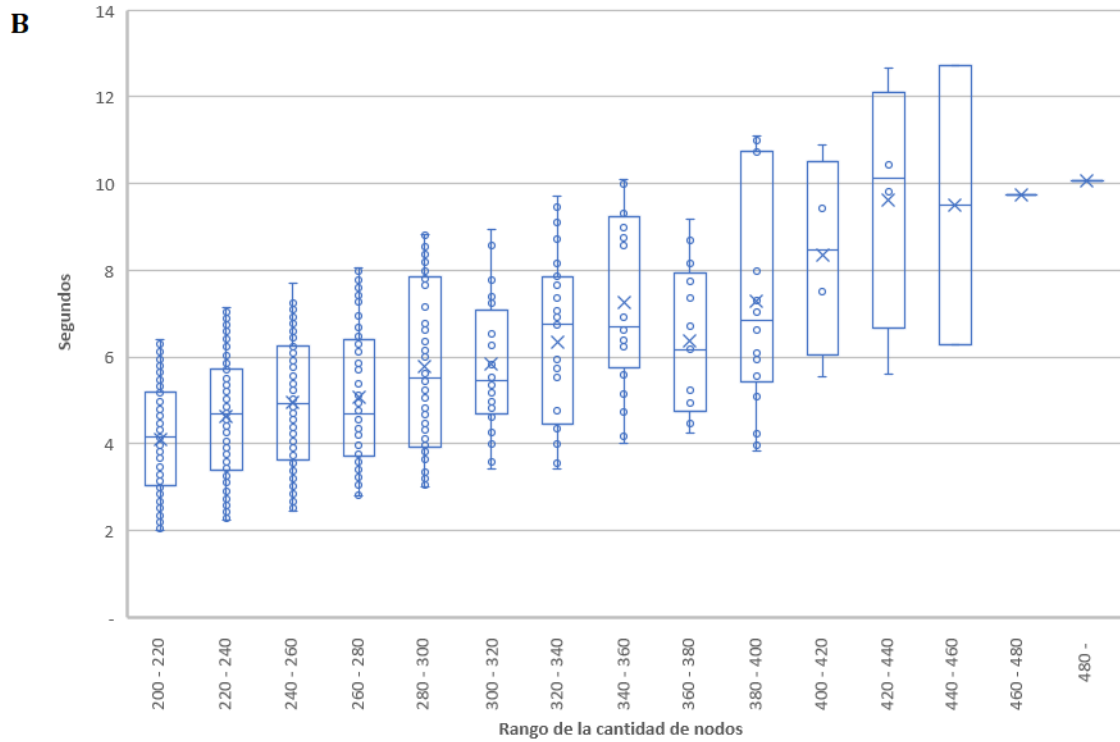
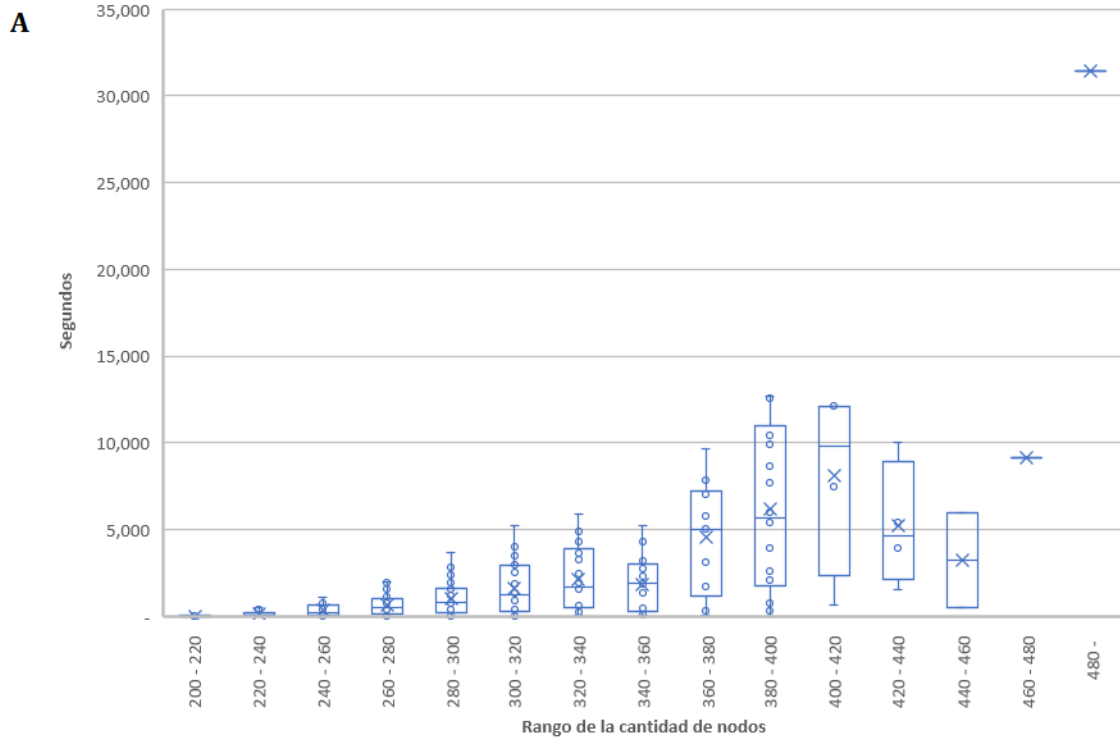


Figura 5.13: Distribución del tiempo de ejecución según tamaño de instancia. (A) Tiempos de ejecución del modelo base. (B) Tiempos de ejecución del procedimiento heurístico.

El segundo indicador de desempeño, corresponde a cuán cerca del óptimo están las soluciones que entrega el proceso heurístico. Para obtener este indicador, se calculó el GAP entre la función objetivo del Modelo Base (que es el resultado óptimo) y la función objetivo del proceso heurístico. El GAP se calcula con la siguiente fórmula:

$$GAP = \frac{FO_{ph} - FO_{mb}}{FO_{mb}}$$

Donde:

FO_{mb} : función objetivo del modelo base.

FO_{ph} : función objetivo del proceso heurístico.

En la figura 5.14 se puede ver como se distribuye este GAP entre todas las instancias evaluadas y se puede ver que los valores se mueven mayormente entre el 2% y 6%, y teniendo máximos no superiores al 16%. Este es un muy buen resultado para una metodología que poda de manera tan severa los posibles centros de los distritos. Incluso hay instancias donde el procedimiento encuentra el óptimo.

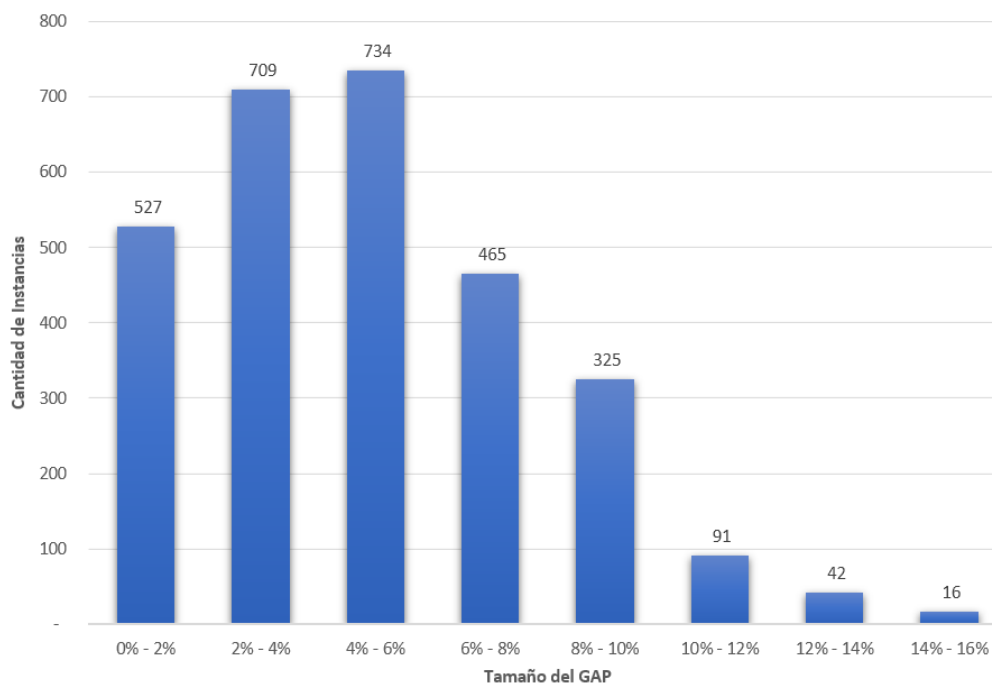


Figura 5.14: Histograma del valor del GAP entre la solución óptima del Modelo Base y el valor del proceso heurístico.

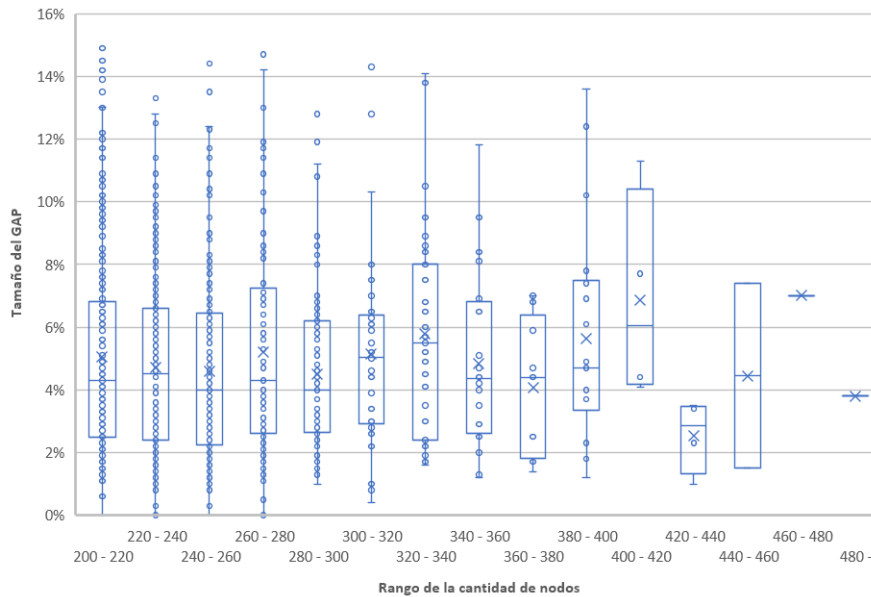


Figura 5.15: Distribución del valor del GAP entre la solución óptima del modelo base y el valor del proceso heurístico según el tamaño de la instancia.

Una observación muy interesante es que el GAP no parece distribuirse diferente entre el tamaño de las instancias. Esto se refleja en la figura 5.15. Tanto los mejores como los peores GAP de la muestra se obtuvieron uniforme e independientemente de la cantidad de nodos de las instancias. Esto es bastante relevante ya que sabemos que la dificultad de resolver el Modelo Base se incrementa exponencialmente con su tamaño. Sin embargo, pareciera que el proceso heurístico no ve mermada la calidad de la solución, es decir, su GAP no aumenta conforme crece el problema, lo cual habla del gran potencial optimizante de la heurística propuesta.

Rango de Nodos	Cantidad de instancias	GAP Medio	GAP Mínimo	GAP Máximo
200 - 220	765	5.0%	0.0%	14.9%
220 - 240	729	4.7%	0.0%	13.3%
240 - 260	483	4.6%	0.0%	14.4%
260 - 280	267	5.2%	0.0%	14.7%
280 - 300	267	4.5%	1.0%	12.8%
300 - 320	108	5.1%	0.4%	14.3%
320 - 340	93	5.8%	1.6%	14.1%
340 - 360	72	4.8%	1.2%	11.8%
360 - 380	39	4.1%	1.4%	7.0%
380 - 400	54	5.6%	1.2%	13.6%
400 - 420	12	6.9%	4.1%	11.3%
420 - 440	12	2.6%	1.0%	3.5%
440 - 460	6	4.5%	1.5%	7.4%
460 - 480	1	7.0%	7.0%	7.0%
480 -	1	3.8%	3.8%	3.8%
Total	2909	4.9%	0.0%	14.9%

Figura 5.16: Indicadores numéricos del GAP según tamaño de la instancia.

Capítulo 6

Resultados aplicados a una instancia real

El fin último del procedimiento desarrollado en este trabajo es generar distritos que puedan ser usados como cuarteles para los carteros de la Empresa de Correos de Chile y, en este capítulo, se exponen los resultados de su uso para crear cuarteles en la comuna de Recoleta, conjuntamente con un análisis comparativo de los cuarteles actualmente en uso (distritos actuales), los cuarteles que entregaría la actual herramienta de generación de cuarteles (distritos alternativos), y aquellos propuestos por el procedimiento (distritos propuestos).

6.1. Características del caso de estudio

Recoleta es una comuna ubicada en el sector norte de la ciudad de Santiago, parte de la Provincia de Santiago en la Región Metropolitana. Limita al norte con la comuna de Huechuraba, oeste con las comunas de Independencia y Conchalí, al este con la comuna de Providencia y Vitacura.

La comuna posee una superficie de 16 km^2 y una población de 148.220 habitantes, de los cuales 75.906 mujeres y 72.314 hombres. Recoleta acoge al 2,45 % de la población total de la región. Un 100 % corresponde a población urbana¹.

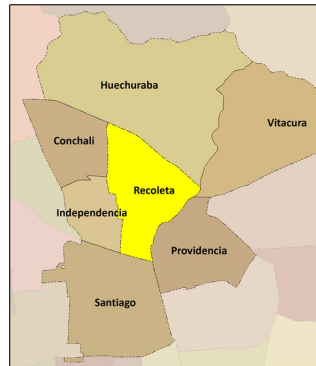


Figura 6.1: Límites geográficos de la comuna de Recoleta Fuente: www.recoleta.cl

¹www.recoleta.cl

6.2. Datos de entrada

La comuna cuenta con 4.202 códigos postales, los cuales se encuentran distribuidos en 21 cuarteles de distribución postal. Cada código postal está asociado a una carga de trabajo, la cual se considera un dato de input, y que corresponde al tiempo promedio que tarda un cartero en atender dicho código postal. La distribución de la carga se puede apreciar en la figura 6.2.

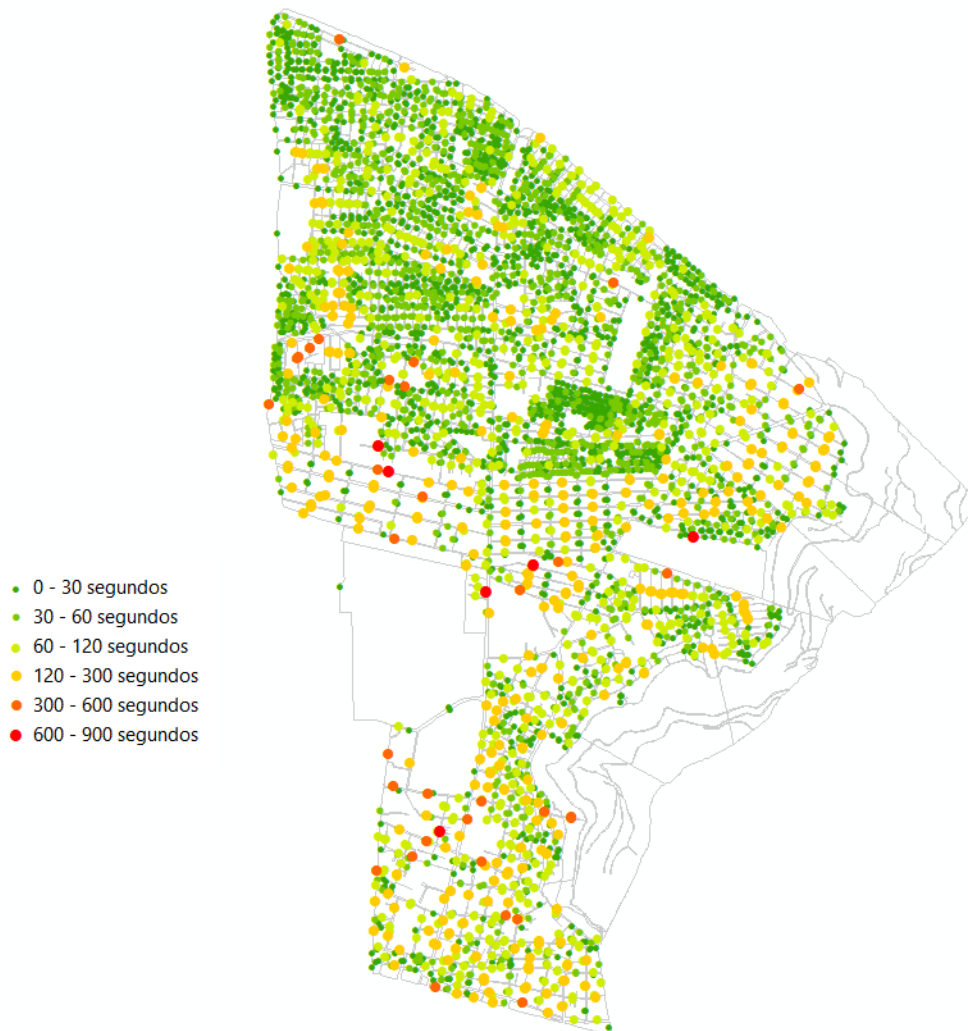


Figura 6.2: Nodos de la comuna de Recoleta coloreados según la carga asociada a su atención.

Una gran particularidad de esta comuna es que muestra una perceptible división de la carga de trabajo. La zona norte es un sector con prominentes barrios residenciales, donde la carga postal es baja, por lo que las entregas se realizan velozmente. Mientras que el sector sur concentra códigos postales de mayor tamaño, y con más carga postal. Muchos, incluso corresponden a sectores comerciales que tienen elevados tiempos de entrega. Este tipo de distribución de la carga, tan heterogénea, agrega complejidad al problema y resulta más difícil obtener balance. Estas características, sumadas a la cantidad de códigos postales, vuelven a la comuna de Recoleta un muy buen escenario de pruebas.

Como se ha mencionado antes, el grafo a utilizar es un dato conocido. Corresponde a una red de proximidad entre códigos postales que ha sido ajustada por personal de la Empresa de Correos para representar de mejor manera la posibilidad de transitar de nodo en nodo.

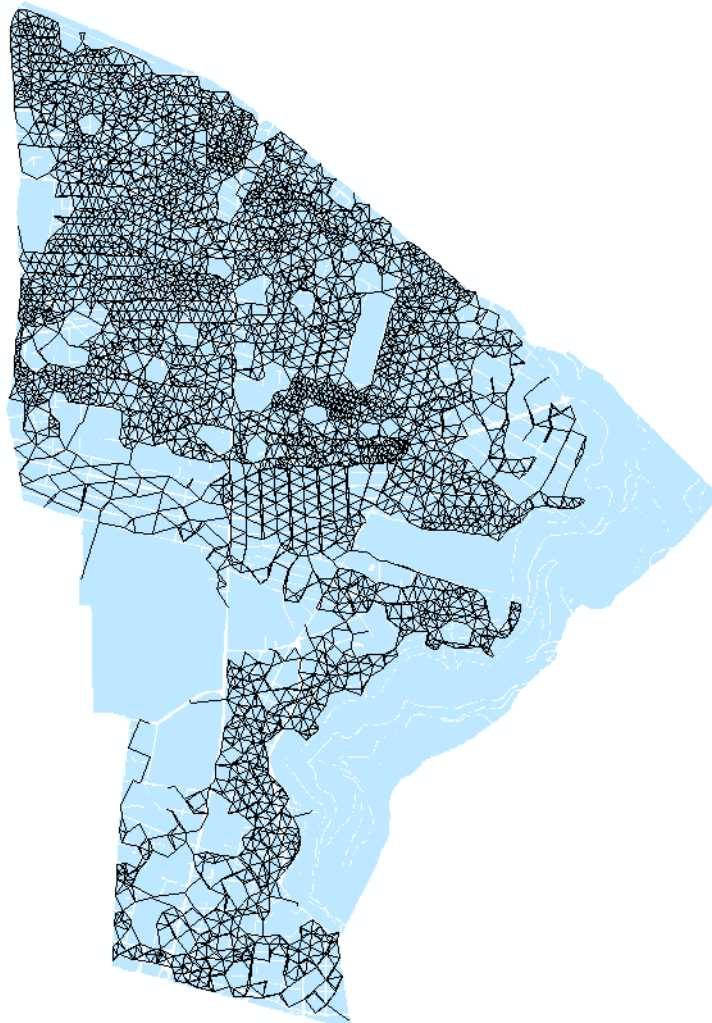


Figura 6.3: Grafo de proximidad de los códigos postales de la comuna de Recoleta.

El resto de parámetros utilizados para el procedimiento son los siguientes:

1. Cantidad de distritos a generar: 21.
2. Número de soluciones a explorar en la Etapa 1: 40.
3. Umbral de desbalance de carga: 5%.
4. Paso en la mejora del balance en la Etapa 2: 2%.

6.3. Resultados del modelo aplicados al caso de estudio

A continuación, se exponen los resultados obtenidos mediante la utilización del procedimiento propuesto en la comuna de Recoleta.

ETAPA 1

Tiempo de ejecución	:	16 minutos
Mayor desbalance sobre la media	:	74.60%
Mayor desbalance bajo la media	:	36.80%

ETAPA 2

Tiempo de ejecución	:	11 minutos
Iteraciones hasta converger	:	36
Mayor desbalance sobre la media	:	4.60%
Mayor desbalance bajo la media	:	4.50%

Tiempo de ejecución total 27 minutos

Los valores indicados anteriormente corresponden a una sola ejecución del procedimiento. Sin embargo, la prueba se realizó 10 veces, llegando siempre al mismo resultado. La única diferencia entre pruebas, era el momento donde el proceso dejaba de descubrir nuevas mejores soluciones en la Etapa 1. Por lo tanto, el procedimiento se comportó según lo esperado, encontrando de manera consistente la misma solución en la Etapa 2.

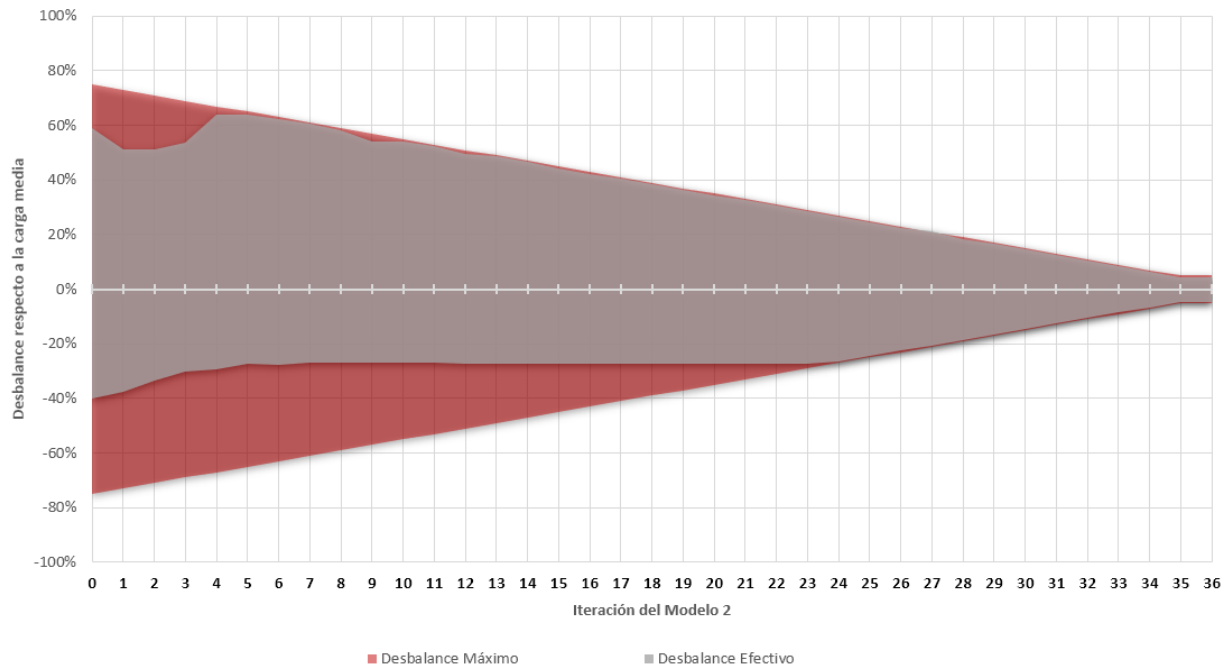


Figura 6.4: Evolución del desbalance de las cargas de los distritos respecto de a la carga media.

Un resultado muy interesante se puede apreciar en la figura 6.4, donde se muestra como cambia el desbalance de los distritos conforme las iteraciones del modelo 2 se van ejecutando hasta llegar al valor deseado de 5%. Si bien al comenzar las iteraciones, la restricción de desbalance máximo no es efectiva, ya en la quinta iteración, el desbalance superior a la media comienza a restringir la solución, mientras que el desbalance inferior a la media no se hace efectivo hasta muy adelante en la iteración 24. Esto significa que el modelo suele tener un par de distritos muy sobrecargados dejando holgura para todos los demás. Este comportamiento es tal como lo haría el modelo base, puesto que no tiene restricciones de desbalance máximo bajo la media, solo sobre la media.

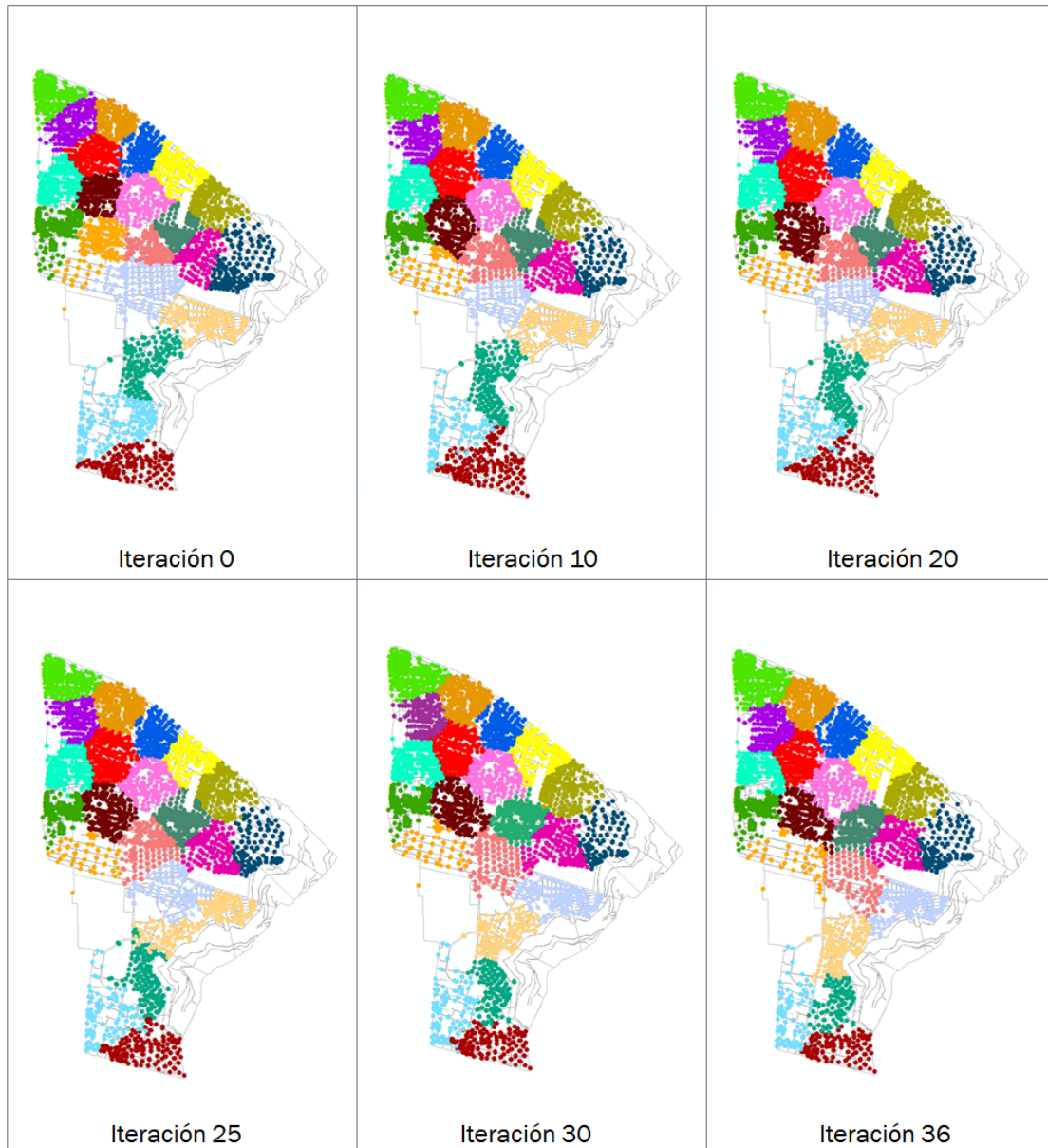


Figura 6.5: Evolución de los distritos conforme el Modelo 2 mejora el balance a lo largo de varias iteraciones.

La figura 6.5 muestra como cambian los distritos a medida que se hacen correcciones en la Etapa 2. La observación más destacable hace referencia a la reducción del tamaño de los distritos del sector sur, ya que se encuentran en una zona con mayor concentración de carga.

Se sabe que los distritos iniciales guardan balance respecto a la cantidad de códigos postales, más no respecto a su carga o a su dimensión espacial. Es por esto que los distritos del norte se ven muy compactos y pequeños, mientras que los del sur se perciben de mayor tamaño. Pero conforme el procedimiento redistribuye la carga de trabajo, se hace notar que los distritos del norte deben expandirse ligeramente, mientras que los del sur deben contraerse fuertemente. El resultado de esta distribución de carga se puede observar en la figura 6.6.

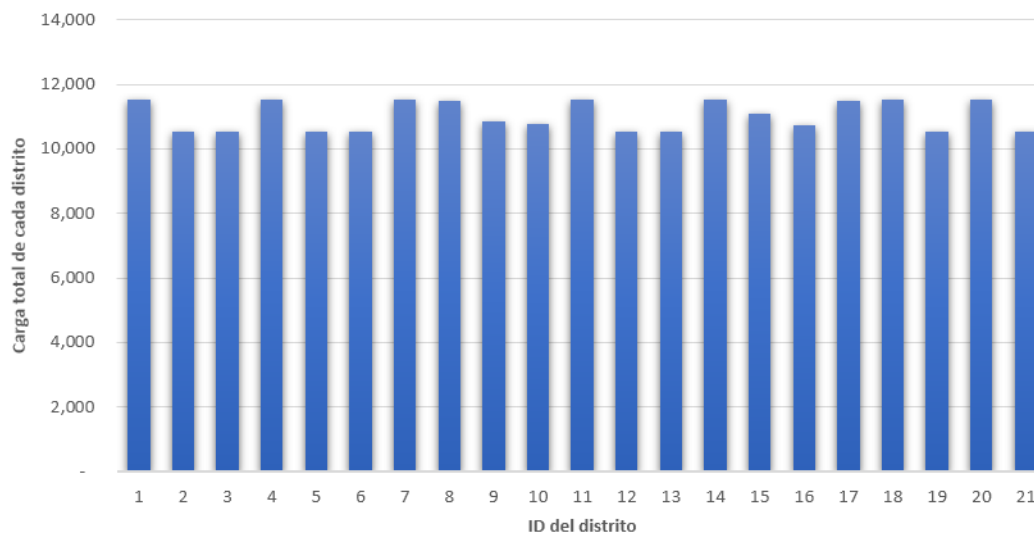


Figura 6.6: Gráfico con las cargas totales de los distritos resultantes del proceso completo.

Como muestra la figura 6.7, en los distritos propuestos no se visualizan apéndices o envolturas. Esto se debe a que la función objetivo siempre trata de minimizar la distancia de los nodos hacia el centro del distrito, por lo que se tiene una mayor percepción de compacidad. Otro criterio visual de la compacidad, consiste en la cantidad de sobreposiciones de las envolturas convexas de los distritos, las cuales son muy pocas y, cuando ocurren, lo hacen de manera muy sutil.

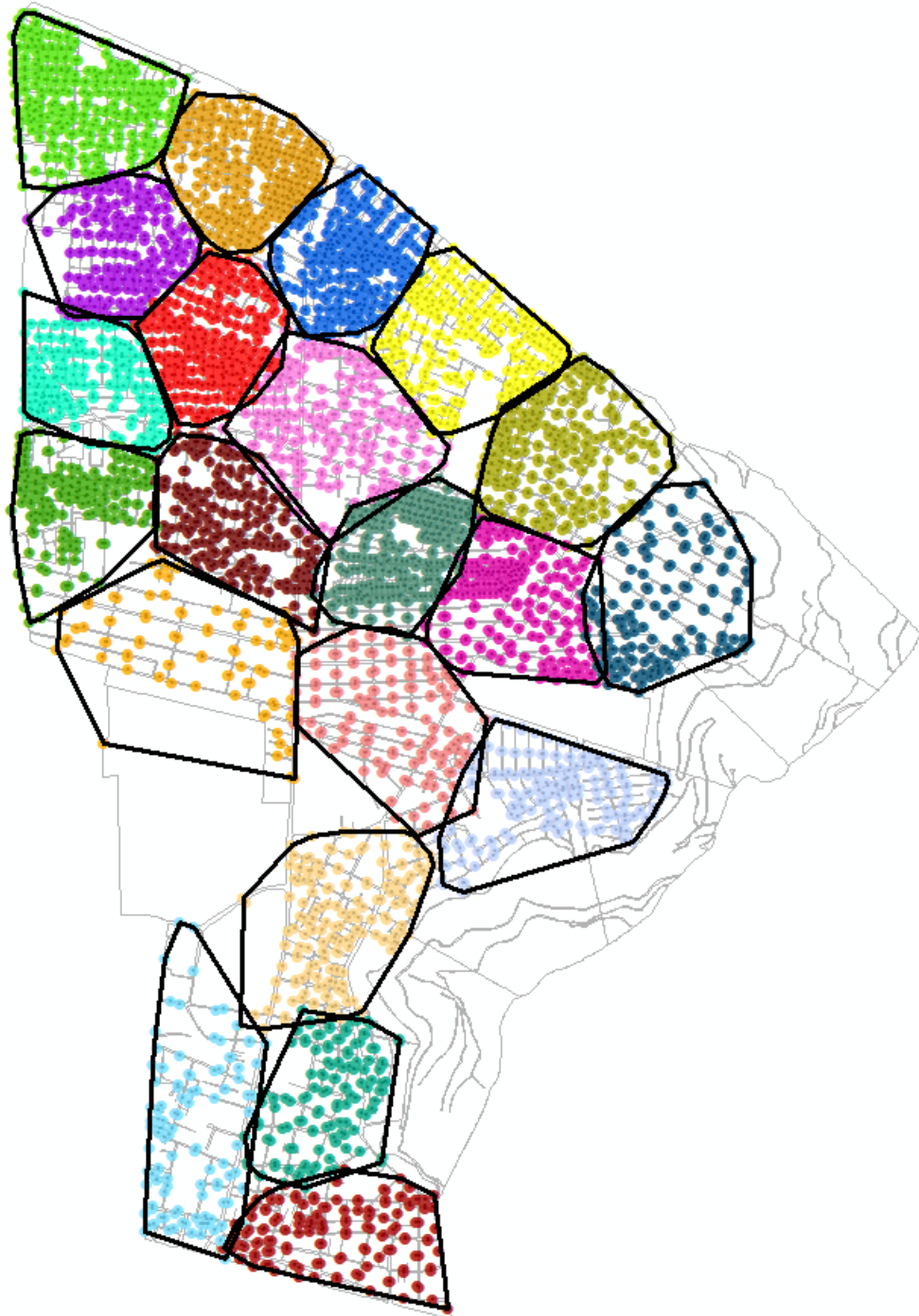


Figura 6.7: Distritos propuestos para la comuna de Recoleta.

6.4. Análisis comparativo de la solución propuesta contra los distritos actualmente implementados y contra otros generados con la actual herramienta de distritaje

El análisis presentado en esta sección busca comparar los cuarteles propuestos (distritos propuestos) con otras 2 opciones con las que cuenta la empresa de Correos: Los actuales cuarteles implementados (distritos actuales) y una solución generada por la actual herramienta de generación de zonas de reparto (distritos alternativos). Esta comparación se basa en contrastar las siguientes características, que se consideran ejes principales en la formación de distritos de distribución:

- Tiempos de resolución
- Balance de cargas
- Conexidad
- Compacidad

6.4.1. Tiempos de resolución

Los distritos actuales fueron construidos completamente a mano y, en estricto rigor, la creación de estos cuarteles ha tardado varios años, incluso décadas. Sin embargo, para ser justos, un plan de distritaje toma alrededor de una jornada laboral (8 horas) en ser realizado a mano. Por lo tanto, ese es el tiempo de resolución que se le asignará a los distritos actuales.

En el caso de los distritos alternativos, se ha comentado antes que, distintas corridas de la herramienta generan diferentes soluciones y tardan distintos tiempos de resolución. Es por este motivo que se han realizado varias ejecuciones de la herramienta solicitando la generación de 21 distritos donde el desbalance entre el distrito con mayor carga, no supere en más de 10% a aquel con menor carga, y ha resultado que en valor medio tarda 7 minutos en obtener una solución, pero la solución más rápida la obtuvo a los 2 minutos y la más tardada a los 13.

Sabiendo que el procedimiento propuesto en este trabajo demoró 27 minutos, la opción más veloz son los distritos alternativos, luego los distritos propuestos, y finalmente la cuartelización manual.

6.4.2. Balance de cargas

Para el caso de los distritos actuales, el balance de cargas es una gran problemática puesto que presentan una elevada desproporción entre sí. Como se ve en el gráfico de la figura 6.8, los distritos propuestos mejoran significativamente el balance de los distritos actuales. Mientras que los distritos propuestos no tienen más de un 5% de desbalance respecto de la carga media, el distrito actual con menor carga tiene un 43,7% menos que la carga media y, aquel con más carga, está sobre un 87,4% de la carga media.

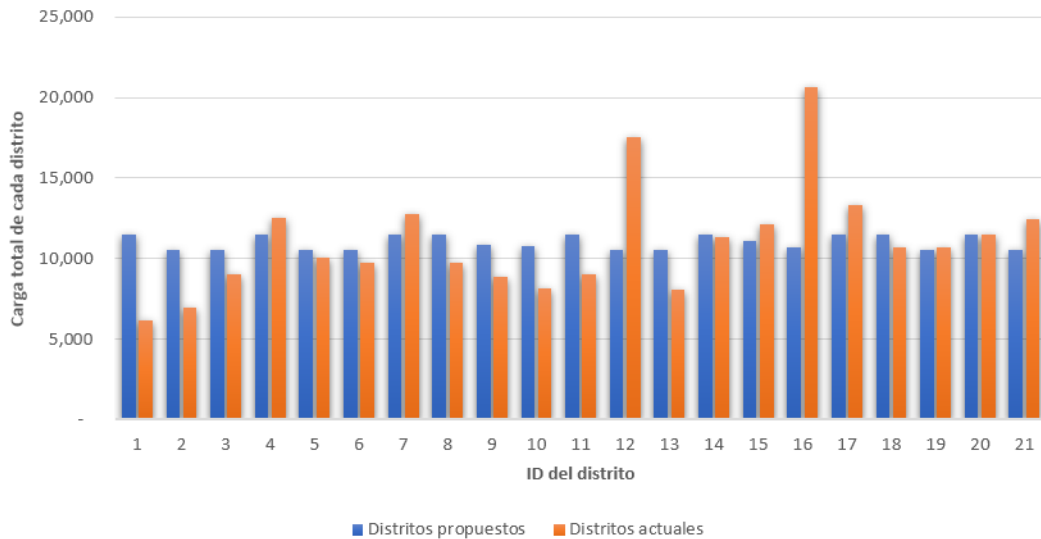


Figura 6.8: Gráfico comparativo de las cargas de cada propuesta de distritaje.

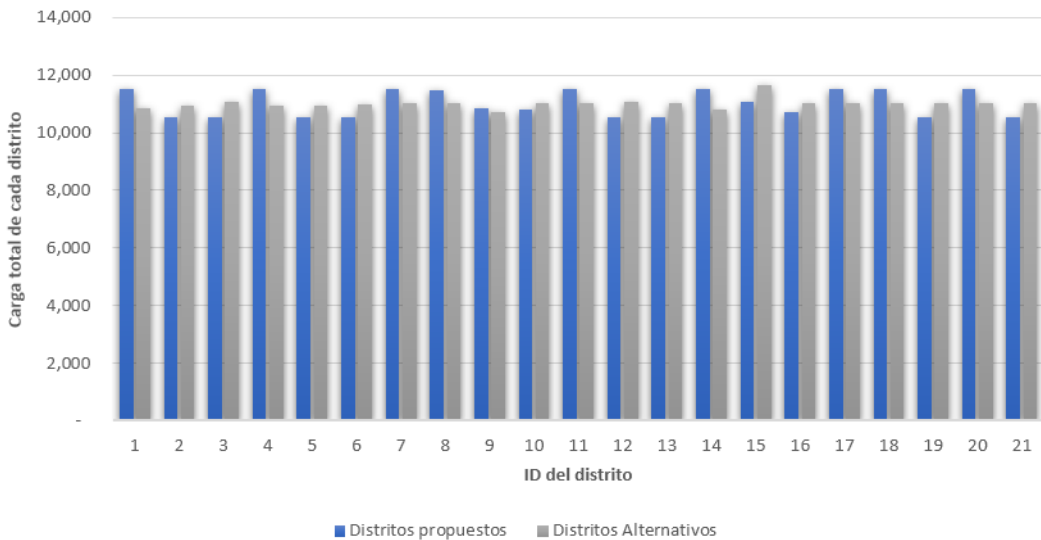


Figura 6.9: Gráfico comparativo de las cargas de los distritos propuestos y una solución particular de la metodología alternativa.

Con los cuarteles generados por la herramienta actual de la Empresa de Correos ocurre lo opuesto a los cuarteles actuales, tienen un excelente balance de carga. Puesto que la herramienta tiene como principal objetivo diseñar cuarteles balanceados, en poco tiempo obtiene soluciones con gran balance. En el figura 6.9 se contrastan las cargas de los distritos propuestos y los distritos alternativos. En el ejemplo representado, el distrito alternativo con menor carga, tiene un desbalance de 2,7% respecto de la carga media, mientras que el que tiene más carga, tiene 5,8% más que la carga media.

En resumen, respecto del balance de carga, los distritos propuestos y los alternativos son capaces de corregir la situación que enfrentan los cuarteles actualmente implementados de manera equivalente, llegando a niveles de desbalance muy pequeños.

6.4.3. Conexidad

Otro gran problema que tienen los distritos actuales es que se presentan una desconexión en uno de sus distritos. Esto se expone en la figura 6.10 (A), donde se destaca un distrito que se encuentra dividido y sus 2 componentes se encuentran severamente distanciados uno de otro, volviendo este distritaje una solución infactible.

En este aspecto, tanto los distritos propuestos como los distritos alternativos son soluciones completamente conexas.

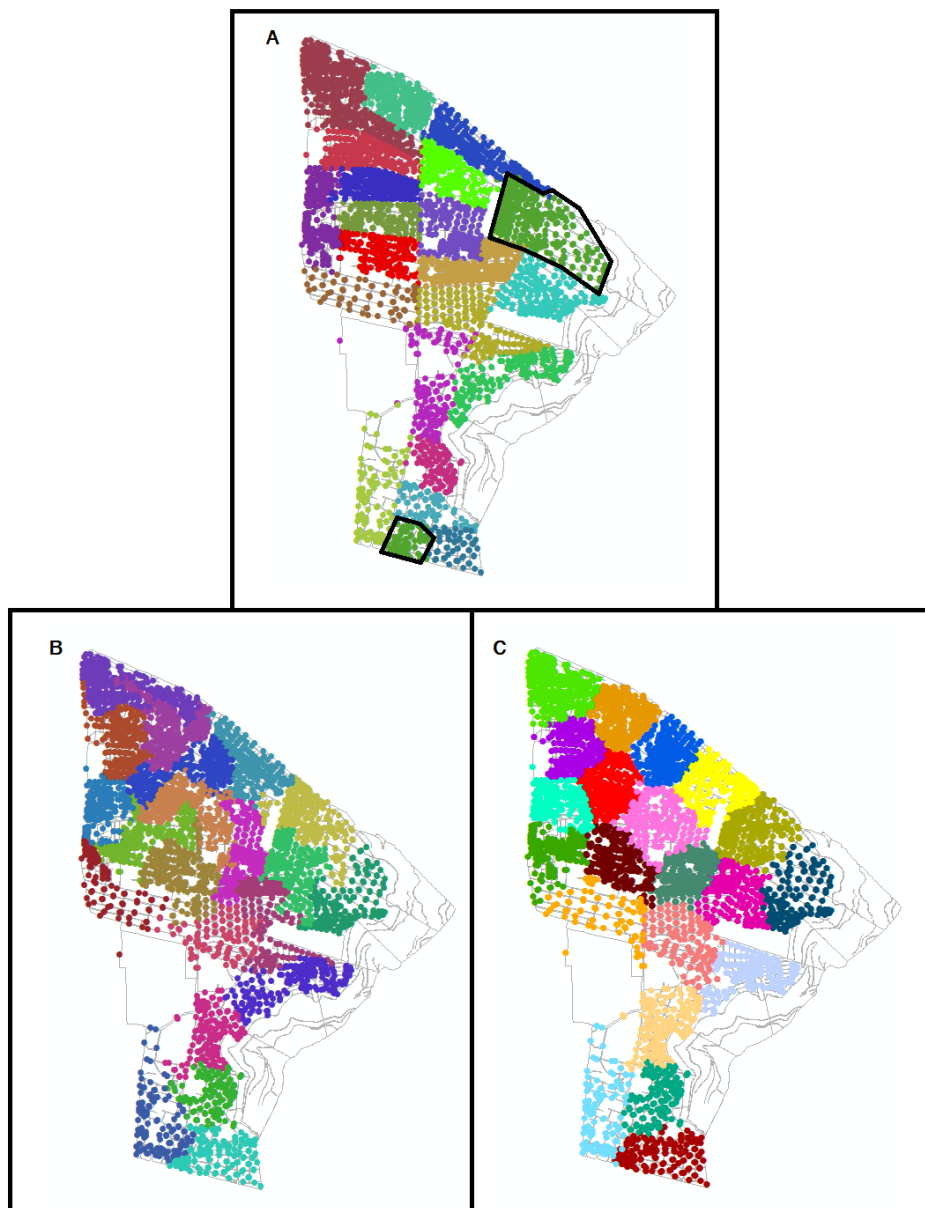


Figura 6.10: Mapas con distritos actuales y distritos propuestos. A) Distritos actuales. B) Distritos de una solución particular de la metodología alternativa. C) Distritos propuestos.

6.4.4. Compacidad

La compacidad ha sido el criterio más importante a abordar en este trabajo y también el más complejo debido a su definición tan poco específica. Es por esta razón que sólo una medida de compacidad podría no bastar para determinar que una solución es mejor que otra en este aspecto. Por lo tanto, se han evaluado las soluciones en las siguientes medidas de compacidad:

- Suma de las distancias de todos los nodos al centro de sus distritos (la función objetivo que minimiza el procedimiento propuesto en este trabajo).

Se espera que un resultado más compacto, tenga un menor valor en este indicador.

- El ratio del área de las envolventes convexas de los nodos de un distrito sobre el área del menor rectángulo circunscrito en los mismos nodos.

Mientras este indicador esté más cerca de 100 % se espera que la solución sea más compacta. Para referencias se puede mirar la figura 6.11 (A).

- El ratio del área de las envolventes convexas de los nodos de un distrito sobre el área del menor círculo circunscrito en los mismos nodos.

Igual que el indicador anterior, mientras este indicador esté más cerca de 100 % se espera que la solución sea más compacta. Para referencias se puede mirar la figura 6.11 (B).

- Cantidad de intersecciones, interferencias o cruces, de un distrito sobre otro distrito.

Este indicador corresponde a la cantidad de nodos de un distrito que se encuentran dentro de la envoltura convexa de otro distrito. Se espera que un resultado que busca la compacidad, reduzca este tipo de situaciones. Para mejor entendimiento se puede observar la figura 6.12.

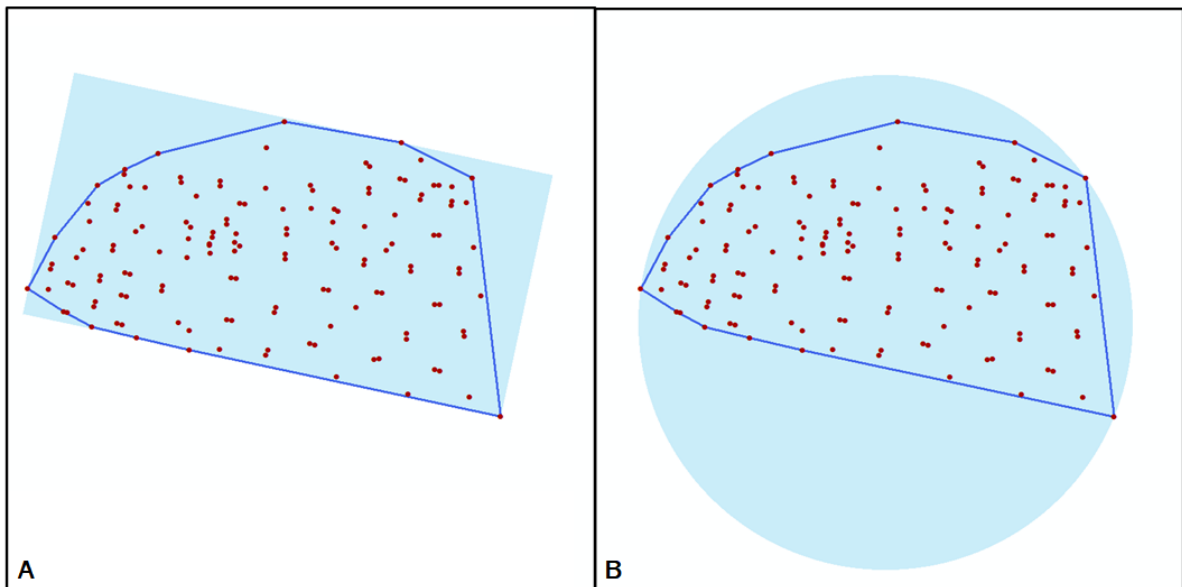


Figura 6.11: Medidas de compacidad asociadas a la envoltura convexa de un distrito. A) Envoltura convexa de los nodos del distrito versus el menor rectángulo circunscrito. B) Envoltura convexa de los nodos del distrito versus el menor círculo circunscrito.

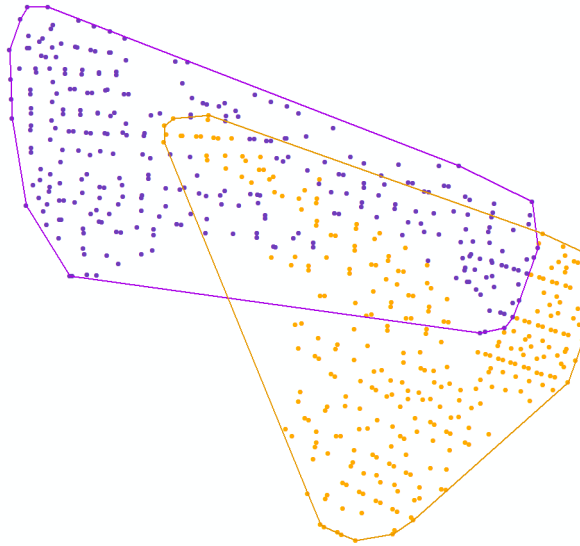


Figura 6.12: La intersección de distritos es una indicador de la falta de compacidad. Corresponde a los nodos de un distrito que se encuentran dentro de la envoltura convexa de algún otro distrito.

La tabla en la figura 6.13 muestra los resultados comparativos de todos los indicadores de compacidad mencionados antes y, se puede ver que los distritos propuestos se destacan prácticamente en todos ellos, por sobre las otras 2 soluciones de distritaje.

KPI		Distritos			
		Propuestos	Actuales	Alternativos	
Función Objetivo		Total	1,359,850	1,920,593	1,577,011
Convex Hull Area / Min Circle Area		Mínimo	36.8%	22.3%	33.7%
		Máximo	76.6%	67.3%	67.7%
		Media	62.4%	41.4%	52.3%
		Desv. Est.	10.9%	10.4%	8.8%
Convex Hull Area / Min Rectangle Area		Mínimo	70.8%	59.5%	63.7%
		Máximo	85.3%	89.2%	82.2%
		Media	77.9%	75.9%	74.6%
		Desv. Est.	3.6%	8.4%	5.6%
Cantidad de intersecciones		Total	97	1,379	1,253
		Total %	2.3%	32.8%	29.8%

Figura 6.13: Tabla comparativa de las distintas soluciones mostradas frente a los diferentes indicadores de compacidad. Se destaca en color verde la mejor solución por cada indicador

Un detalle muy llamativo de estos resultados es que, aunque la naturaleza de la construc-

ción de los distritos actuales sigue criterios visuales y patrones geométricos para propiciar la compacidad, sus indicadores no son significativamente mejores que los de los distritos alternativos, los cuales no se interesan por esta característica. Esto se suscita porque el distrito desconexo distorciona, para mal, todas las métricas. En el Apéndice C.1, se puede ver con gran detalle el cuartel que se encuentra dividido en 2 partes. La envoltura convexa de este cuartel se extiende del norte al sur de la comuna, intersectando 8 otros cuarteles. Además, al calcular el centro de ese distrito, se encuentra muy lejos de todos los nodos que le pertenecen, incrementando fuertemente el valor de la función objetivo.

Finalmente, habiendo evaluado todas la métricas, se tiene que los distritos propuestos por este trabajo, fueron:

- Si bien no los más rápidos, estaban dentro de los estándares de requerimiento operacional.
- Guardan un excelente balance de cargas entre todos los distritos, no superando más de un 5% de desbalance respecto a la carga media.
- Son distritos completamente conexos, lo cual tiene muchas ventajas a la hora de desarrollar la operación de distribución postal.
- Son ampliamente superiores a las otras opciones presentadas respecto a la compacidad que puede tener una solución de distritaje. Esto queda demostrado pues se evaluaron distintas métricas de compacidad y resultaron mejores en todas.

En resumen, estos resultados posicionan de muy buena manera este procedimiento heurístico de generación de zonas de distribución, al menos, para resolver instancias de tamaños similares a los presentados en este caso, constituyendo una alternativa superior a las actuales para usos operacionales en la Empresa de Correos.

Capítulo 7

Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales discusiones, conclusiones y posibles trabajos futuros que brotan del procedimiento propuesto y los resultados obtenidos en el caso de estudio.

7.1. Conclusiones generales

En este trabajo, se logró conceptualizar un modelo matemático para resolver el problema del distritaje de códigos postales y la generación de zonas de distribución postal para la Empresa de Correos de Chile. El modelo aborda dificultades regulares en la conformación de distritos: compacidad, conexidad y balance de cargas entre distritos, donde las cargas de los códigos postales se distribuyen heterogéneamente en la cartografía. Pero sobretodo, tiene foco en diseñar los distritos "más compactos posibles", puesto que este tipo de resultados se percibe como una mejor solución, logra mayor aceptación y genera menor necesidad de modificaciones posteriores.

La formulación de este problema se basó en un modelo de optimización lineal entera sobre un grafo, el cual tiene como función objetivo minimizar la distancia de cada nodo de un distrito al centro de este último, cumpliendo restricciones de balance de carga y conexidad. El propósito fundamental de este modelo reside en la posibilidad de establecer un benchmark del tipo de soluciones que se desean obtener. Por este motivo, se le denominó modelo base.

Este modelo base resultó extremadamente complejo de resolver en instancias del tamaño de la operación regular de Correos, las cuales rondan los 4000 nodos. Por esta razón, frente a la imposibilidad de utilizar este modelo de optimización en problemas operacionales, se propone una metodología heurística que, tras análisis empíricos, consigue obtener soluciones muy cercanas al óptimo (GAP promedio de 5%) en tiempos funcionales para la operación regular (menos de una hora).

El procedimiento se aplicó a un caso de estudio real, representado por la generación de cuarteles de distribución postal para la Empresa de Correos de Chile en la comuna de Recoleta, y fue comparado contra otros distritajes realizados en la empresa. Los distritos obtenidos por la metodología propuesta logran excelente balance y presentan una elevado nivel de

compacidad, muy superior a las alternativas. Además, una de las preocupaciones de buscar soluciones cercanas al valor óptimo suele ser el elevado tiempo necesario para obtenerlas. Sin embargo, este resultado se obtuvo en tiempos por debajo de los márgenes de espera establecidos, lo cual habilita este procedimiento propuesto para ser usado operacionalmente.

Con estos resultados, se puede concluir que se ha establecido una metodología que cumple con los objetivos de este trabajo, es decir, que permite obtener zonas de distribución postal, conexas, balanceadas en carga de trabajo, y que buscan la mayor compacidad posible. Este tipo de distritos generan una mejor percepción que los generados por la herramienta actual y permiten hacer más eficiente el proceso de construcción de zonas de distribución postal.

7.2. Sobre los resultados obtenidos

Como se ha mencionado, en este trabajo se presenta un modelo de programación lineal entero mixto, que permite resolver el problema de distritaje bajo las consideraciones planteadas en los objetivos del informe, es decir, que otorgue un valor protagónico a la compacidad de los distritos, manteniendo la conectividad y el balance de la carga de trabajo. Se le llamó Modelo Base. Sin embargo, el modelo tiene una elevada complejidad que lo hace infactible de utilizar en la operación de Correos de Chile.

Dada la problemática de la complejidad del Modelo Base, se ha introducido una metodología heurística que mezcla modelos de programación lineal entera con un algoritmo de clustering, y que permite entregar soluciones factibles del Modelo Base, en tiempos muy reducidos, y que se acercan en buena medida a la solución óptima.

La heurística fue sometida a dos tipos de evaluaciones. Primeramente, utilizando instancias pequeñas y por lo tanto más rápidas de resolver, se determinó cuán alejadas estaban las soluciones entregadas por la heurística respecto de las soluciones óptimas del Modelo Base. Esta evaluación entregó un resultado estadístico que situaba la media de las soluciones a un 5% del óptimo. Lo cual es un valor muy aceptable en términos numéricos.

Para la segunda evaluación, se analizó el desempeño de la heurística en una instancia real en la operación de Correos de Chile, correspondiente a la comuna de Recoleta. El ejercicio implicaba contrastar los resultados de la heurística propuesta con el distritaje actual y con una solución entregada con otra herramienta de generación de distritos. La comparación abordó los tres criterios más importantes del distritaje: conectividad, balance y compacidad. Como resultado, la solución entregada por la metodología propuesta se comportó adecuadamente en todas métricas utilizadas, representando una opción que puede tener mejor aceptación que la actual herramienta de Correos, o que la construcción manual.

7.3. Sobre mejoras y trabajo futuros

Si bien la herramienta tiene un buen desempeño y cumple con los objetivos esperados, algunos trabajos en el futuro podrían ser considerados para mejorar los resultados o la usabilidad de la herramienta.

Primeramente, se puede mencionar que la codificación de todo el proceso podría no ser la más eficiente, ni en el lenguaje de programación más adecuado para agilizar la obtención de resultados. Como se ha mencionado durante el informe, existen varios procesos que pueden ser paralelizados, y es probable que hayan lenguajes de programación que permitan hacer más veloces los diferentes procesos.

Si bien se utilizó un modelo de programación lineal en la primera etapa (Modelo 1) para realizar la asociación *nodo-semilla*, bien puede ser factible usar una metodología heurística para reemplazarlo. Lo que se debe buscar es una versión del algoritmo de K-means que logre balancear los clusters que genera. Por supuesto, esto significa un problema en si mismo, pero de obtenerse podría aumentar de manera considerable la velocidad de obtención de soluciones.

Una problemática de la que no se hace cargo este trabajo es de la variabilidad de la carga de trabajo en el tiempo. En cambio, se utiliza un valor promedio que no cambia en el tiempo, pero esto no es necesariamente cierto. Entonces, es posible que al incorporar periodos a la generación de zonas, la distribución de los nodos no sea la misma, generando otros distritos. Este trabajo involucraría, además, la definición de cual es el periodo más pequeño del que se desea hacer cargo, y qué tipo de balance se desea obtener.

Bibliografía

- [Aarts et al., 1997] Aarts, E. et al. (1997). *Local search in combinatorial optimization*.
- [Blais et al., 2003] Blais, M. et al. (2003). Solving a home-care districting problem in an urban setting. *Journal of the Operational Research Society*, volume 54.
- [Bozkaya et al., 2011] Bozkaya, B. et al. (2011). Designing New Electoral Districts for the City of Edmonton. *INFORMS Journal on Applied Analytics*.
- [Bucarey, 2014] Bucarey, V. (2014). Un modelo matemático para el diseño de territorios basado en el plan cuadrante de seguridad preventiva de Carabineros de Chile. Master's thesis, Universidad de Chile.
- [Butsch et al., 2014] Butsch, A. et al. (2014). Districting for Arc Routing. *INFORMS Journal on Computing*, volume 26.
- [CorreosChile, 2017] CorreosChile (2017). Memoria Anual 2016. Technical report, Empresa de Correos de Chile.
- [CorreosChile, 2018] CorreosChile (2018). Reporte Integrado Digital 2017. Technical report, Empresa de Correos de Chile.
- [CorreosChile, 2019] CorreosChile (2019). Reporte Integrado Digital 2018. Technical report, Empresa de Correos de Chile.
- [Domínguez et al., 2006] Domínguez, E. et al. (2006). A neural model for the p-median problem. *Computers and Operations Research*, volume 35.
- [Días et al., 2017] Días, J. et al. (2017). Primal and dual bounds for the vertex p-median problem with balance constraints. *Annals of Operations Research*.
- [D'Amico et al., 2002] D'Amico, S. et al. (2002). A simulated annealing approach to police district design. *Computers and Operations Research*, volume 29.
- [Epstein et al., 2015] Epstein, R. et al. (2015). Desarrollo de Modelos para la Optimización de las Zonas de Reparto de Correspondencia y Paquetería. Programa FONDEF, Project Id: ID15I10082.
- [Feller.Rate, 2019] Feller.Rate (2019). Empresa de Correos de Chile - Informe de Clasificación

- Junio 2019. Technical report, Feller Rate.
- [Fragoso et al., 2016] Fragoso, R. et al. (2016). Clustering of Territorial Areas: A Multi-Criteria Districting Problem. *Journal of Quantitative Economics*.
- [Garfinkel et al., 1970] Garfinkel, R. et al. (1970). Optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science*, volume 16.
- [Gass and Fu, 2013] Gass, S. I. and Fu, M. C., editors (2013). *Dijkstra's Algorithm*, pages 428–428. Springer US, Boston, MA.
- [Gilbert Laporte, 2015] Gilbert Laporte, Stefan Nickel, F. S. d. G. (2015). *Location Science*. Springer International Publishing.
- [Grimaldi, 1989] Grimaldi, R. (1989). *Matemáticas discretas y combinatoria: introducción y aplicaciones*. Buenos Aires : Addison-Wesley Iberoamericana.
- [Gross et al., 2003] Gross, J. et al. (2003). *Handbook of Graph Theory*. CRC Press.
- [Horn et al., 1993] Horn, D. et al. (1993). Practical Application of District Compactness. *Political Geography*, volume 12.
- [Jarrah et al., 2012] Jarrah, A. et al. (2012). Large-scale pickup and delivery work area design. *Computers and Operations Research*, volume 39.
- [Jex, 1998] Jex, S. M. (1998). *Stress and job performance: Theory, research, and implications for managerial practice*. Sage Publications Ltd.
- [Jin, 2017] Jin, H. (2017). *Spatial Optimization Methods And System For Redistricting Problems*. PhD thesis, College of Arts and Sciences University of South Carolina.
- [Jin and Han, 2010] Jin, X. and Han, J. (2010). *"K-Means Clustering*.
- [Kalcsics et al., 2005] Kalcsics, J. et al. (2005). Towards a unified territorial design approach — Applications, algorithms and GIS integration. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP*, volume 13.
- [Kariv et al., 1979] Kariv, O. et al. (1979). An Algorithmic Approach to Network Location Problems. II: The p-Medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics Vol. 37*.
- [Lei et al., 2012] Lei, H. et al. (2012). Districting for routing with stochastic customers. *EURO J Transp Logist*.
- [Martí et al., 2018] Martí, R. et al. (2018). *Handbook of Heuristics*. Springer International Publishing.
- [Mehrotra et al., 1998] Mehrotra, A. et al. (1998). An optimization based heuristic for political districting. *Management Science*, volume 44.
- [Noguera, 2009] Noguera, I. (2009). Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos.

Master's thesis, Universidad Politécnica de Valencia.

- [Ricca et al., 1997] Ricca, F. et al. (1997). Political districting: traps, criteria, algorithms and trade-offs. *Ricerca Operativa*, 27.
- [Ricca et al., 2008] Ricca, F. et al. (2008). Local search algorithms for political districting. *European Journal of Operational Research*, volume 189.
- [Ricca et al., 2013] Ricca, F. et al. (2013). Political Districting: from classical models to recent approaches. *Annals of Operations Research*.
- [Ríos-Mercado, 2020] Ríos-Mercado, R. (2020). *Optimal Districting and Territory Design*. Springer International Publishing.
- [Ríos-Mercado et al., 2009] Ríos-Mercado, R. et al. (2009). A reactive GRASP for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements. *Computers and Operations Research*, volume 36.
- [Ríos-Mercado et al., 2013] Ríos-Mercado, R. et al. (2013). Commercial territory design planning with realignment and disjoint assignment requirements. *Omega* 41.
- [Salazar-Aguilar et al., 2013] Salazar-Aguilar, M. A. et al. (2013). A divide-and-conquer approach to commercial territory design. *Computación y Sistemas*, volumen 16.
- [Shirabe, 2009] Shirabe, T. (2009). Districting modeling with exact contiguity constraints. *Environment and Planning B: Planning and Design*, volume 36.
- [Silva de Assis et al., 2013] Silva de Assis, L. et al. (2013). A redistricting problem applied to meter reading in power distribution networks. *Computers and Operations Research*, volume 41.
- [Tapp, 2018] Tapp, K. (2018). Measuring Political Gerrymandering. *arXiv.org*.
- [UPU, 2019] UPU (2019). Postal Economic Outlook 2019 - Latest Trends in an Evolving Sector. Technical report, Universal Postal Union.
- [Vega, 2017] Vega, F. (2017). Heurística para la generación de zonas de reparto para los carteros de Correos de Chile. Master's thesis, Universidad de Chile.
- [Zoltners et al., 2005] Zoltners, A. et al. (2005). Sales Territory Design: Thirty Years of Modeling and Implementations. *Marketing Science*, volume 24.

Apéndice A

K-means

K-means es un de los métodos de *clustering* más populares. La idea básica es la siguiente: dado un *clustering* inicial, pero no óptimo, se reubica cada nodo hacia el *cluster* cuyo centro se encuentre más cerca. Luego se recalcula el centro del *cluster* y se repite el proceso de reubicación de nodos y actualización de centros hasta que algún criterio de convergencia sea satisfecho. Normalmente se utiliza como criterio de convergencia el momento en que los centros no cambien de manera significativa, pero pueden usarse otros, por ejemplo, cuando se hayan realiza una determinada cantidad de iteraciones [Jin and Han, 2010].

El pseudocódigo del algoritmo se muestra a continuación:

Algorithm 1: K-means clustering algorithm

Require: K , number of clusters; D , a dataset of N points

Ensure : A set of K clusters

initialization;

while *stop criteria satisfied* **do**

for *each point p in D* **do**

 └ find the nearest center and assign p to the corresponding cluster;

 └ update clusters by calculating new centers using mean of the members;

Result: clustering result

Apéndice B

Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra es un método de etiquetado de nodos, que permite encontrar el camino más corto entre 2 puntos, a través de una red interconectada de nodos y arcos (un grafo) [Gass and Fu, 2013]. El algoritmo asume que la distancia c_{ij} entre algún par de nodos i y j es no negativa. Las etiquetas tienen 2 componentes: $\{d(i), p\}$, donde $d(i)$ es una cota superior del camino más corto entre un nodo s de origen y el nodo i ; mientras que p es el nodo que precede al nodo i en el camino más corto del nodo s al nodo i . Los pasos del algoritmo para encontrar el camino más corto desde el nodo s al resto de nodos de la red son los siguientes:

Paso 1: Se asigna un valor $d(i)$ a cada nodo i para denotar el largo tentativo del camino más corto desde s a i que usa solo nodos etiquetados como nodos intermedios. Inicialmente, $d(s) = 0$ y $d(i) = \infty$ para todo $i \neq s$. Denotando a y como el último nodo etiquetado, se etiqueta el nodo s con $\{0, -\}$ y se asigna $y = s$.

Paso 2: Por cada nodo i no etiquetado, se redefine $d(i)$ de la siguiente manera:

$$d(i) = \min\{d(i), d(y) + c_{yi}\}$$

Si $d(i) = \infty$ para todos los nodos no etiquetados, entonces el algoritmo se detiene pues no existe camino desde s a algún nodo i no etiquetado con el menor valor de $d(i)$. Además, en la etiqueta, hacemos que p guarde el nodo desde el cual el valor de $d(i)$ se hace mínimo. Es decir, $y = i$.

Paso 3: Si todos los nodos han sido etiquetados, el algoritmo se detiene pues el único camino de etiquetas $\{d(i), p\}$ desde s a i es el camino más corto desde s a todos los nodos i . En caso contrario, se vuelve al paso 2.

Apéndice C

Distritos actuales

Aquí se presentan los 21 distritos actuales de la comuna de Recoleta. Estos distritos fueron creados a mano.

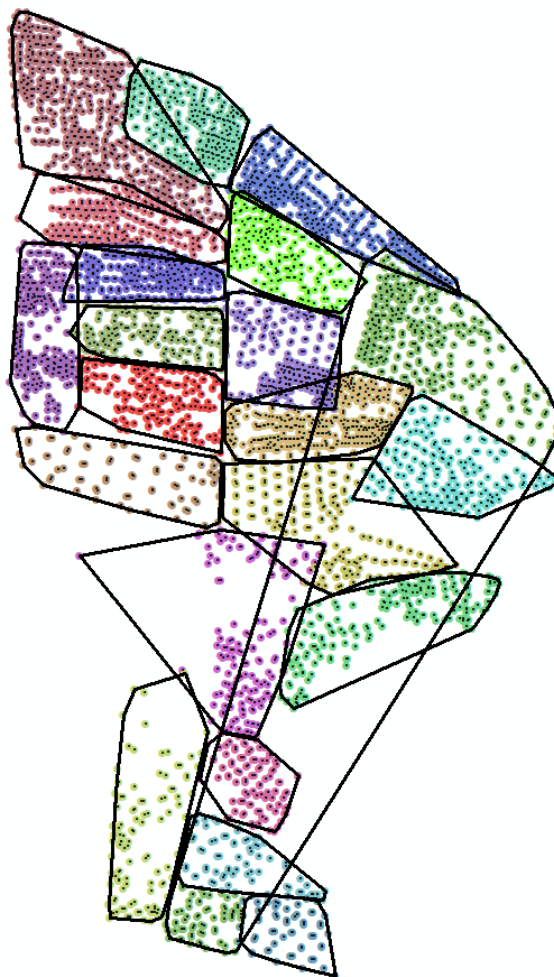


Figura C.1: Distritos actuales de la comuna de Recoleta.

Apéndice D

Distritos alternativos

Aquí se presentan los 21 distritos generados por la herramienta actual para la comuna de Recoleta que fueron utilizados como ejemplo durante este trabajo.

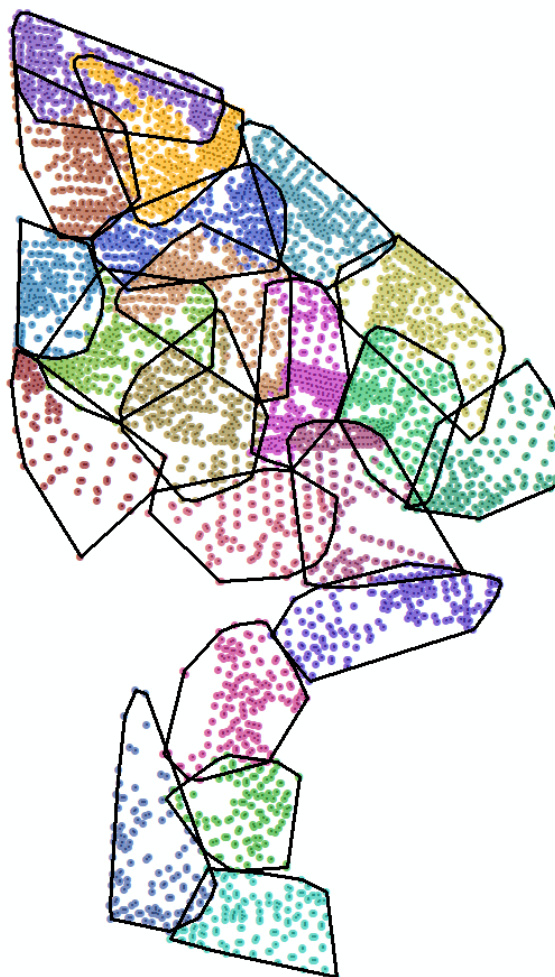


Figura D.1: Distritos alternativos para la comuna de Recoleta.