



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**IMPACTO DE TRONADURAS SUPERFICIALES EN LA ESTABILIDAD DE  
CAVIDADES SUBTERRÁNEAS**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN MINERIA**

**LUIS ANDRÉS TORO ABARZÚA**

PROFESOR GUIA:  
JAVIER VALLEJOS MASSA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
LUIS ORELLANA ESPINOZA  
CRISTIAN SANTANDER JOPIA  
LUIS QUIÑONES AVARIA

SANTIAGO DE CHILE  
2021

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL  
TITULO DE: Magister en Minería  
POR: Luis Andrés Toro Abarzua  
FECHA: 07/04/2021  
PROFESOR GUIA: Javier Vallejos Masa

## **IMPACTO DE TRONADURAS SUPERFICIALES EN LA ESTABILIDAD DE CAVIDADES SUBTERRÁNEAS**

La industria minera actual proyecta un aumento en el número de operaciones con planes de transición de Minería a Cielo Abierto a Minería Subterránea, o viceversa y también, la posibilidad de trabajar en ambas operaciones, ya sea por separado o en conjunto, lo que requiere la mantención de la infraestructura general, tal como talleres, oficinas, galerías y cavernas. Esto último implica un especial cuidado con dichas obras al momento de realizar detonaciones con explosivos, sobre todo en los casos donde estas instalaciones se encuentran en las cercanías de estas operaciones.

Actualmente en Chile existen varias faenas mineras en las cuales conviven operaciones subterráneas y a cielo abierto de forma simultánea y otras se encuentran en proceso de pasar de cielo abierto a subterráneas. Ejemplos son Codelco Chile - División Chuquicamata, Compañía Minera Michilla, Compañía Minera Candelaria y Codelco Chile - División Andina. Por lo anteriormente expuesto, es relevante evaluar el impacto que tienen las ondas de las tronaduras superficiales de mina rajo sobre las excavaciones subterráneas (Galerías, piques, Caserones, etc.), debido a que las vibraciones producidas por las tronaduras se transmiten por medio de ondas desde el punto emisor (pozo tronado) a través del macizo rocoso hasta labores subterráneas cercanas, pudiendo afectar la estabilidad de estas últimas.

El siguiente estudio presenta una simulación en la tronadura de pozos de producción de mina rajo abierto, mediante el uso del software FLAC2D. Las ondas producidas por la detonación de pozos de tronadura pueden sobrepasar la velocidad de partícula crítica (Peak Particle Velocity critical). Este indicador (PPVc), se utiliza como unidad de medida del daño que se puede generar en el macizo rocoso producto de la vibración/paso de ondas en el medio. Al superar este valor establecido (PPVc), las ondas se pueden catalogar o clasificar en distintos niveles según el posible daño que pueden generar en el entorno del macizo rocoso (umbrales de daño). En este estudio se comprueba el paso del frente de ondas, tanto para el caso supersónico como transónico propuesto por H. P. Rossmannith y B. Mueller en el macizo rocoso, verificando la presencia de las ondas P y S con la detonación del explosivo y calibrando esta detonación, con valores obtenidos por medición de vibraciones en campo cercano gracias a un estudio previo realizado en Codelco Chile – División Andina. La simulación realizada permitió evaluar el daño en el pilar, entre el fondo de pozo detonado y el techo de la excavación subterránea, y utilizando el indicador PPVc, se clasifica el contorno de la excavación bajo los umbrales de daño definidos para la litología estudiada, determinando así que, a una distancia de 16 metros de pilar, existe daño notorio en la zona estudiada.

## **Abstract**

### **IMPACT OF SURFACE BLASTINGS ON THE STABILITY OF UNDERGROUND CAVITIES**

The current mining industry projects an increase in the number of operations with transition plans from open-pit to underground mining, or vice versa, as well as the possibility of working in both operations, either separately or together, which requires the maintenance of general infrastructure, such as workshops, offices, galleries, and caves. The latter implies special care with these constructions when using explosives, especially in cases where these facilities are in the vicinity of such operations.

Currently in Chile, there are several mining operations where underground and open-pit operations coexist simultaneously while others are in the process of going from open-pit to underground. Examples are Codelco Chile (División Chuquicamata), Compañía Minera Michilla, Compañía Minera Candelaria and Codelco Chile (División Andina). Consequently, it becomes relevant to evaluate the impact that waves of the superficial blasting of the open-pit mine have on the underground excavations (galleries, shafts, stope, etc.) because the vibrations produced by the blasts are transmitted by means of waves from the emitting point (blasting well) through the rock mass to nearby underground constructions, which might affect the stability of the latter.

The following study presents a simulation of production blasting wells of an open-pit mine using the FLAC2D software. The waves produced by the blasting well detonation can exceed the critical Peak Particle Velocity (PPV). This indicator is used as a measurement unit of the damage that can be generated in the rock mass due to the vibration / passage of waves in the medium. By exceeding this established value, the waves can be cataloged or classified into different levels according to the possible damage they can generate in the rock mass environment (damage thresholds).

In this study, the passage of the wave front is proven, both for the supersonic and transonic cases proposed by H. P. Rossmann and B. Mueller in the rock mass, verifying the presence of the P and S waves with the detonation of the explosive and calibrating this detonation with values obtained by measuring vibrations in the near field, thanks to a previous study carried out at Codelco División Andina, in Chile. The performed simulation allowed to evaluate the damage in the pillar, between the bottom of the blasting well and the ceiling of the underground excavation, and, using the critical PPV indicator, to classify the contour of the excavation under the damage thresholds defined for the lithology studied, thus determining that, at a distance of 16 meters from the pillar, there is noticeable damage in the studied area.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1	Presentación del tema .....	1
1.2	Hipótesis .....	3
1.3	Objetivos.....	3
1.3.1	Objetivo General.....	3
1.3.2	Objetivos Específicos .....	3
1.4	Motivación .....	3
1.5	Alcances .....	4
1.6	Metodología de trabajo .....	4
<b>2</b>	<b>REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>5</b>
2.1	Tronadura y explosivos .....	5
2.2	Presión en las paredes del pozo .....	6
2.3	Formas de propagación de las ondas en el medio según su velocidad de detonación. ....	8
2.3.1	Detonación Supersónica .....	9
2.3.2	Detonación Transónica .....	10
2.3.3	Detonación Subsónica .....	11
2.4	Propagación pseudo-esférica bajo régimen supersónico .....	12
2.5	Umbral de daño .....	13
2.6	Estimación de velocidad de partícula.....	17
2.6.1	Modelo de Holmberg and Persson (Campo cercano).....	18
2.6.2	Modelo de Devine (Campo lejano).....	19
2.7	Comportamiento del macizo rocoso .....	20
2.8	Software para modelamiento de tronadura.....	22
2.8.1	Flac2D (Fast Lagrangian Analysis of Continua) .....	22
2.8.2	HSBM (Hybrid Stress Blasting Model).....	27
2.8.3	JKSIMBLAST.....	33
2.8.4	Conclusiones referentes a los softwares de modelamiento.....	38
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>40</b>
3.1	Descripción del trabajo de tesis.....	40
3.2	Etapas de trabajo.....	40
<b>4</b>	<b>MODELAMIENTO Y RESULTADOS.....</b>	<b>42</b>
4.1	Consideraciones .....	42
4.2	Modelamiento sin excavación – Calibración del modelo .....	43
4.2.1	Simulación ondas P y S .....	44
4.2.2	Resultados modelo constitutivo elástico.....	46
4.2.3	Resultados modelo constitutivo elasto-plástico.....	49
4.2.4	Conclusiones respecto al uso de modelo constitutivo elástico o elasto-plástico.....	50
4.3	Modelamiento con excavación.....	50
4.3.1	Modelo con excavación, pilar de 48m. ....	51

4.3.2	Modelo con excavación, pilar de 32m.....	55
4.3.3	Modelo con excavación, pilar de 16m.....	58
4.3.4	Variabilidad de datos de entrada .....	61
4.3.5	Resumen resultados obtenidos .....	63
<b>5</b>	<b>CASO DE ESTUDIO .....</b>	<b>65</b>
5.1	Simulación caso de estudio .....	71
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>77</b>
<b>7</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>80</b>
<b>8</b>	<b>ANEXOS .....</b>	<b>83</b>
8.1	Anexo 1 Método Numérico: Diferencias finitas.....	83

## Índice de figuras

Figura 1: Topografía avance diario diciembre 2018 Mina Rajo Don Luis y labores subterráneas del Proyecto Cuerpos de Alta Ley, Codelco Chile – División Andina 2018 .....	2
Figura 2: Distribución labores subterráneas generales con avance mina rajo actual, Codelco Chile-División Andina 2018.....	2
Figura 3 Presión aplicada en las paredes de un pozo con una velocidad de detonación velocidad estacionaria de detonación $C_d$ (Vanbrabant, F., Chacón, E. y Quiñones, L. (2002)).....	7
Figura 4: Ondas teóricas Mach en roca para detonación supersónica con explosivos donde $(C_s < C_p < C_d)$ . (Mueller B. y Rossmannith H. (2013)) .....	9
Figura 5: Esquema tronadura con velocidad de detonación Supersónica (Mueller B. and Rossmannith H. 2013) .....	10
Figura 6: Esquema tronadura con velocidad de detonación Transónica (Mueller B. y Rossmannith H. 2013) .....	10
Figura 7: Esquema tronadura con velocidad de detonación Subsónica (Mueller B. y Rossmannith H. 2013).....	11
Figura 8: Comparación de velocidad de detonación Supersónica, Transónica y Subsónica (Mueller B. and Rossmannith H. 2013). .....	12
Figura 9: Modelo Pseudo esférico en caso supersónico (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002)).....	13
Figura 10: Daño y propagación de onda en mina rajo y posible daño en labores subterráneas. (Saharan, 2006; Kaiser, 1996; Elaboración propia).....	15
Figura 11: Conceptualización modelo campo cercano (Holmberg R, Persson P. 1993).....	18
Figura 12: Gráfica esfuerzo deformación con los posibles comportamientos del macizo rocoso. (Vanbrabant F., Chacón E. and Quiñones L., 2002). .....	20
Figura 13: Gráfica esfuerzo deformación con los posibles comportamientos del macizo rocoso y propiedades residuales. (González de Vallejos L, 2004). .....	21
Figura 14: Ciclo básico de cálculo utilizado por FLAC2D. Julio (2011) .....	23
Figura 15 Aplicación de una fuerza variable en el tiempo a una masa, resultando en aceleración, velocidad y desplazamiento. Julio (2011).....	23
Figura 16 Esquema en 2d de distribución de pernos para modelamiento (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).....	26
Figura 17 Esquema con distribución de pernos en 3D para modelamiento (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).....	26
Figura 18 Respuesta dinámica al esfuerzo de corte a lo largo de la resina del sistema de pernos. En imagen de la izquierda se presenta evolución del esfuerzo de corte en la primera ronda de pernos. En la imagen de la derecha se presenta la evolución del esfuerzo de corte para el perno número 1 a diferentes distancias de la frente (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014). .....	27
Figura 19 Códigos empleados en HSBM CODELCO (Chile), 2015.....	28
Figura 20 Representación esquemática del modelo continuo y discontinuo (Furtney, Cundall & Chitombo, 2010) ....	29
Figura 21 Representación esquemática de la red de nodos (Furtney, Cundall & Chitombo, 2010).....	29
Figura 22 Representación esquemática de los fragmentos ( Furtney, Cundall & Chitombo, 2010) .....	30
Figura 23 Esquema segunda pasada banco doble modelado en HSBM, Codelco Chile – División Andina (Vega I, 2017).....	31
Figura 24 Resultados simulación con HSBM pozos sobre cresta berma banco siguiente en tronadura segunda pasada banco doble Codelco Chile – División Andina (Vega I, 2017). .....	32
Figura 25 Ejemplo de estructura de árbol de la BMS para una operación subterránea (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001) .....	33
Figura 26 Ejemplo de diseño de perforación en módulo 2DRing. (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001).....	34
Figura 27 Ejemplo de diseño de perforación en bancos para minería de superficie, 2DBench. ....	35
Figura 28 Ejemplo de diseño de perforación de desarrollo en minería subterránea con módulo 2DFace. (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001) .....	36
Figura 29 Análisis cumplimiento full control con 0% cumplimiento ancho de berma banco 3660 Mina Rajo. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019) .....	37
Figura 30 Simulación filas buffer y primera producción B3660 MRA. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019) .....	37
Figura 31 Esquema de trabajo planteado para realizar el modelamiento. ....	41

Figura 32 Geometría definida en FLAC 2D con 1 tiro, sin excavación modelo elástico y elasto-plástico. ....	44
Figura 33 (Izquierda) Presencia de ondas P y S en simulación realizada con Flac2D v7.0 dinámico en gráfico esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo dinámico caso transónico. (Derecha) Magnitud de esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo para el caso transónico, con presencia de ondas P y S. (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002)). ....	45
Figura 34 (Izquierda) Presencia de ondas P y S en simulación realizada con Flac2D v7.0 dinámico en gráfico esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo dinámico caso supersónico. (Derecha) Magnitud de esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo para el caso transónico, con presencia de ondas P y S. (Quiñones L, Vanbrabant F and Chacón E. 2002).....	45
Figura 35 Puntos de control ubicados a 25 y 48 metros de tiro detonado, modelo elástico axi-simétrico. ....	46
Figura 36 Estimación de PPV en puntos de control con valores de 4100 mm/s y 820 mm/s a 25 y 48m respectivamente. ....	47
Figura 37 Parámetros de Holmberg and Persson (Campo Cercano) para GDRB obtenidos de Mina Subterránea Codelco Chile – División Andina. (INGEOL, 2018). ....	48
Figura 38 Estimación de PPV en puntos de control a 25 y 48m con valores de 1400 mm/s y 610 mm/s respectivamente. ....	49
Figura 39 Geometría y condiciones de borde modelo con excavación .....	51
Figura 40 Resultado puntos de control a 1 y 2m pilar 48m (puntos de control 12 y 13 del modelo). ....	52
Figura 41 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación. ....	53
Figura 42 Imagen con valor máximo de PPV en simulación pilar 48 metros, con contorno de excavación en zona de dilatación de fracturas.....	54
Figura 43 Resultado modelo elasto plástico con excavación en puntos de control a 1 y 2m, pilar de 32m .....	55
Figura 44 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación. ....	56
Figura 45 Imagen de Iso contornos de PPV máximo en pilar de 32 metros, con zona en el contorno de excavación en el umbral de aparición de nuevas grietas, donde zona en blanco esta fuera de rango para esta imagen. ....	57
Figura 46 Resultado modelo elasto plástico con excavación en puntos de control a 1 y 2m, pilar de 16m .....	58
Figura 47 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación. ....	59
Figura 48 Imagen de Iso contornos de PPV máximo en pilar de 16 metros, con zona en el contorno de excavación en el umbral de aparición de Daño notorio.....	60
Figura 49 Resultados obtenidos en los diferentes pilares con variación de VOD (elaboración propia).....	62
Figura 50 Resultados obtenidos en los diferentes pilares con variación de $\beta$ (elaboración propia).....	63
Figura 51 Gráfica con valores obtenidos de PPV para los diferentes casos estudiados y los límites de PPVc. Elaboración propia. ....	64
Figura 52 Tronadura a banco 3260 a 32-33 metros de los caserones proyecto CAL (Cuerpos de Alta Ley). Elaboración propia. ....	65
Figura 53 Distancia entre galería cabecera caserón E01 y remanente cuña rampa F4 a tronadura. Elaboración propia .....	66
Figura 54 Interpretación Estructural. En verde, diaclasas; en rojo, vetas; en azul, fallas; en rosado, fallas interpretadas en Sector Base (Zarate A, 2015).....	67
Figura 55 Condición de galerías y pilares antes de la tronadura en nivel CAL techo de caserón E01, proyecto CAL. (Zarate A, Lagos C, 2018).....	68
Figura 56 Perfil de carguío pozos buffer y producción. Propuesta de carguío explosivos ENAEX. ....	69
Figura 57 Secuencia de salida (curva de iso-tiempos). Propuesta de secuencia de salida ENAEX software paradigm (ENAEX).....	69
Figura 58 Simulación de PPV a 32m aproximados de tronadura con un valor estimado de PPV de 330 mm/s. Software Paradigm (ENAEX).....	70
Figura 59 Cambio de diámetro y longitud de carga de pozos para simulación de tronadura a 32 metros entre fondo de tiro y galería.....	72
Figura 60 PPV obtenido en los puntos de control a 1 y 2 metros desde el techo de la galería.....	73
Figura 61 Iso curvas de PPV máximo obtenidos por simulación para el caso de estudio.....	74
Figura 62 Condición de labores en CAL techo, con lajamiento menor en techo y pilares de las galerías. (Zarate A, Lagos C, 2018) .....	75
Figura 63 Imagen en planta con ubicación cuerpo E01 y zona cerrada producto de daño y agrietamiento en piso de la galería cabecera. ....	75

Figura 64 Aumento de daño y agrietamiento en galería cabecera cuerpo E01 meses después de tronadura realizada. (Zarate A, Lagos C, 2018)..... 76

## Índice de tablas

Tabla 1 Resumen de las constantes de atenuación de Holmberg and Persson para diferentes tipos de rocas (Altamirano, 2014).	16
Tabla 2 Umbrales de daño	16
Tabla 3 Umbrales de daño (Holmberg. R, Persson. P, 1993).	17
Tabla 4 Resumen de los criterios de daño y predicción de velocidad de partícula	15
Tabla 5 Casos evaluados daño en berma B3660 MRA. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019)	38
Tabla 6 Comparación software modelamiento tronadura	39
Tabla 7 Propiedades utilizadas para el macizo rocoso y del explosivo	42
Tabla 8 Parámetros de H&P para litología GDRB (utilizada en modelamiento).	48
Tabla 9 Comparación entre valor estimado y simulado a 25 y 48m del tiro en modelo elástico realizado.	49
Tabla 10 Comparación entre valor estimado y simulado a 25 y 48m del tiro en modelo elástico y elasto-plástico realizado.	50
Tabla 11 Distancia puntos de control sobre techo de excavación y valor obtenido del PPV	52
Tabla 12 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 48m.	53
Tabla 13 Umbrales de daño con valores para el caso de estudio de GDRB	54
Tabla 14 Umbral de daño según PPV para caso pilar 48m, en zona de Dilatación de Fracturas.	55
Tabla 15 Distancia de punto de control sobre excavación con valor obtenido por el modelo pilar 32m	56
Tabla 16 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 32m	57
Tabla 17 Umbral de daño según PPV para caso pilar 32m, en zona de Aparición de nuevas grietas.	58
Tabla 18 Distancia de punto de control sobre excavación con valor obtenido por el modelo pilar 16m	59
Tabla 19 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 16m	59
Tabla 20 Umbral de daño según PPV para caso pilar 16m, en zona de Daño notorio.	61
Tabla 21 Valores VOD y $\beta$ para revisar su efecto en los resultados	61
Tabla 22 Resumen valores obtenidos con simulación para los diferentes pilares evaluados.	64
Tabla 23 Umbral de daño según PPV para labores a 32m de tronadura.	71
Tabla 24 Umbral de daño según PPV para caso del pilar de 32m con diámetro de perforación 10 5/8.	73
Tabla 25 Comparación de valor estimado por Enaex a 32 metros vs valor estimado por modelo para caso de estudio.	74
Tabla 26 Umbral de daño según PPVc con Modulo de Young dinámico (Ed).	79

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Presentación del tema

De forma general, es posible indicar que en proyectos donde la minería a cielo abierto convive con la minería subterránea, las tronaduras se encuentran cada día más cerca de labores subterráneas en diferentes faenas como Codelco Chile – División Andina o Codelco Chile – División Chuquicamata. Dichas tronaduras, generan ondas que se desplazan por el medio de acuerdo con la velocidad de detonación del explosivo y a las propiedades del macizo rocoso, pudiendo generar impactos de diferentes magnitudes en la geometría de estas últimas (al encontrarse con una cara libre en el medio).

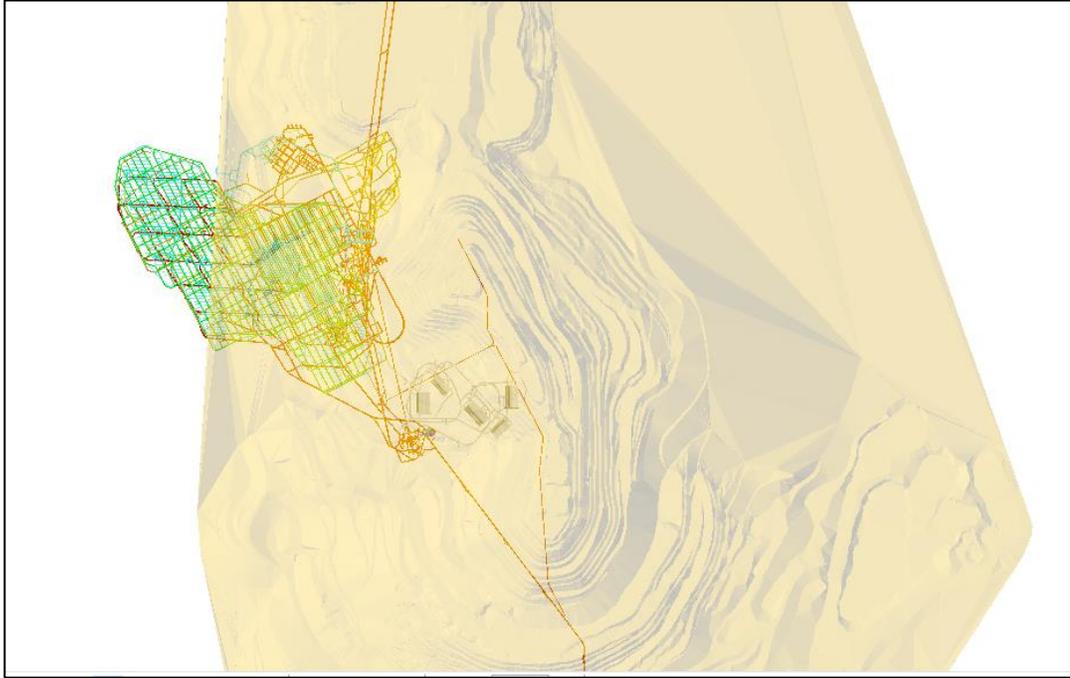
La tronadura, tiene por objeto principal fragmentar la roca para luego llevar este mineral/estéril a la planta y/o botadero dependiendo de su ley. Al fragmentar la roca, se disminuye el requerimiento energético en los procesos aguas abajo; en particular, sobre el proceso de chancado.

La tronadura también genera zonas de daño asociadas a las presiones que ejerce el explosivo, por el efecto de los gases que se producen y las vibraciones asociadas a la velocidad de detonación en el medio.

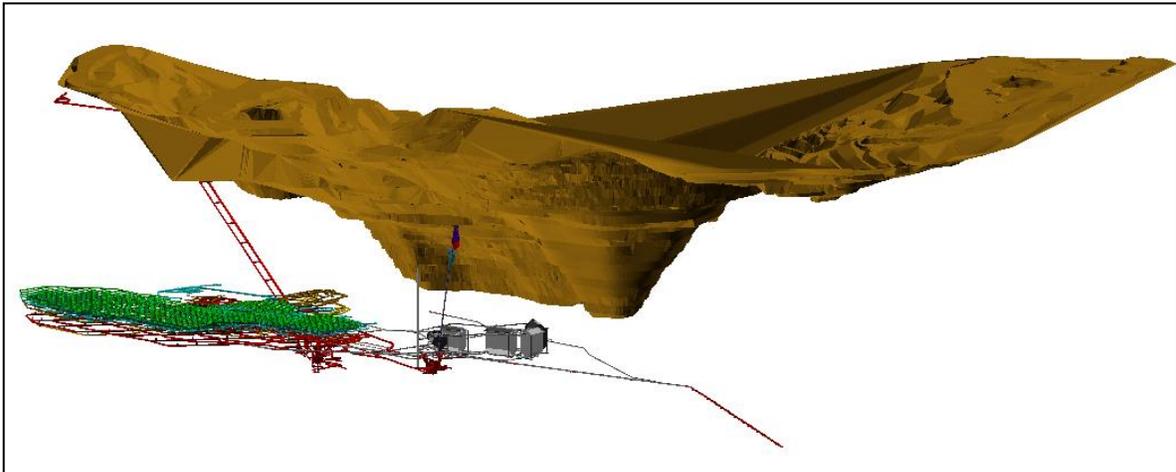
Las vibraciones transmitidas en el macizo rocoso, cuando la detonación es supersónica, permiten determinar la velocidad de la onda P (primaria), la cual generaría un daño en el macizo rocoso de superar la velocidad de partícula crítica del medio (PPVc).

Diversos autores han planteado modelos conceptuales para determinar la velocidad peak de partícula (PPV) con la cual se propaga la onda desde una fuente emisora (pozo de tronadura) hasta una distancia de interés. Holmberg and Persson (1978), define que la velocidad peak de partícula está en función de la distancia de la fuente emisora y la concentración lineal de carga del explosivo, despreciando los efectos de la distribución de esta carga dentro del pozo tronado.

A continuación, se presenta en la Figura 1, una imagen en planta con el avance de la mina rajo Don Luis, Codelco Chile- División Andina, a fines de Diciembre 2018 y las labores subterráneas del proyecto Cuerpos de Alta Ley (CAL) (Sub Level Stopping) y del tercer panel (Block Caving). En la Figura 2 se presentan las labores subterráneas bajo la mina rajo y el avance actual de la explotación en superficies rotadas respecto a Figura 1. En una primera instancia, se debe mantener la infraestructura de las labores subterráneas, situación que debe ser considerada mediante controles adicionales durante el avance de las fases de explotación en minería de superficie.



**Figura 1: Topografía avance diario diciembre 2018 Mina Rajo Don Luis y labores subterráneas del Proyecto Cuerpos de Alta Ley, Codelco Chile – División Andina 2018**



**Figura 2: Distribución labores subterráneas generales con avance mina rajo actual, Codelco Chile-División Andina 2018**

## **1.2 Hipótesis**

Las tronaduras realizadas en mina rajo abierto producen daño en el contorno de labores subterráneas cercanas, debido a la onda expansiva/vibración que se propaga por el macizo rocoso.

## **1.3 Objetivos**

### 1.3.1 Objetivo General

- Evaluar el impacto que tienen las ondas generadas por las tronaduras de producción que se realizan en mina rajo abierto, en la estabilidad de labores subterráneas cercanas.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Representar la propagación de ondas en el medio producto de la detonación de pozos de tronadura.
- Evaluar el impacto del modelo constitutivo en la representación de la propagación de las ondas en el medio.
- Evaluar el daño en el pilar de roca, entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación.

## **1.4 Motivación**

La principal motivación del presente estudio proviene de la necesidad de evaluar el efecto de las tronaduras de producción de mina rajo, en las labores cercanas ubicadas en cotas inferiores al avance de este desarrollo.

Dicha condición es común en la minería actual, tal como se presentó en la introducción, por lo que es una referencia válida de evaluación para faenas que presenten condiciones similares, tomando en consideración sus propiedades del macizo rocoso, unidades geotécnicas, ubicación de labores subterráneas cercanas, diámetros de perforación y tipo de explosivo utilizado.

## **1.5 Alcances**

Los alcances para el desarrollo del presente estudio corresponden a:

- El trabajo se realiza asumiendo un macizo rocoso competente (macizo con estructuras selladas y con baja a nula alteración).
- Estudio corresponde a condición de faena Codelco Chile – División Andina.
- Caso de estudio corresponde a interacción Mina Rajo con Mina Subterránea de Codelco Chile – División Andina.
- No se evalúa condición estructural en este análisis.
- Modelamiento bi-dimensional con FLAC 2D versión dinámica.
- Se utiliza modelo constitutivo lineal elástico y elasto plástico.

## **1.6 Metodología de trabajo**

La metodología aplicada para el desarrollo de la presente investigación se inicia con el análisis de los antecedentes, los cuales tienen relación con el tema planteado, entre los que se encuentran los principios de la tronadura en mina rajo abierto y las propiedades de los explosivos, la propagación de la onda en el medio y los criterios de daño para la evaluación.

Con la finalidad de evaluar el daño producido por la tronadura en mina rajo en una labor subterránea, se utilizará el software FLAC2D versión dinámica, para lo cual es necesario determinar y utilizar parámetros del macizo rocoso y propiedades de los explosivos que permitan simular la tronadura.

A continuación, se presenta el siguiente esquema como guía del trabajo a realizar:

- Revisión bibliográfica
- Planteamiento del problema simplificado
- Definición de propiedades a utilizar.
- Modelamiento y estimación de vibraciones.
- Calibración del modelo
- Evaluación del daño en diferentes rangos del pilar entre excavación y pozo tronado en Mina Rajo.
- Elaboración de caso de estudio
- Realización de análisis y conclusiones respecto a los resultados obtenidos.

En general, se plantea una etapa inicial simplificada para demostrar la factibilidad de modelar una tronadura, para posteriormente realizar una calibración e incluir los pilares a evaluar.

## **2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

La revisión bibliográfica presenta un resumen que abarca desde los aspectos relevantes de la tronadura y explosivos, mencionando los modelos existentes de propagación de la onda en el medio según la velocidad de detonación y propagación junto con la base teórica de la simulación y modelamiento, lo cual permitirá generar el presente estudio con las propiedades de roca de Codelco Chile División Andina y realizar un caso de estudio en la interacción de Mina Rajo Don Luis y la Mina Subterránea Río Blanco, de esta división.

### **2.1 Tronadura y explosivos**

Los explosivos presentan un conjunto de características que se relacionan con sus condiciones reales de aplicación. Entre las características prácticas, podemos mencionar (Chacón. J, 2000):

- Sensibilidad (capacidad para detonar debido a la detonación de otro explosivo cercano o inserto en él o a algún impacto).
- Fuerza o Potencia (relacionado con la capacidad de fragmentar y remover rocas),
- Gases Tóxicos (se deben conocer los gases que se forman y liberan luego de la reacción química, por medidas de seguridad, sobre todo en minas subterráneas),
- Resistencia al Agua (capacidad del explosivo de mantener sus propiedades frente a la presencia de agua), entre otras.

Existe otro conjunto de características relacionadas al fenómeno de detonación propiamente tal, las cuales hacen referencia a las capacidades rompedoras y a sus capacidades energéticas. El presente estudio se centrará en las características rompedoras, las que se relacionan con la onda de choque generada por la reacción química, las cuales inciden en el fracturamiento del macizo rocoso. Las características energéticas, relacionadas con la expansión de los gases, no serán consideradas, ya que, sólo se busca fragmentar y no remover la roca.

- **Características rompedoras**

Son aquellas que miden la capacidad para fragmentar la roca por efecto del impacto de la onda de Choque que acompaña a la reacción química, por lo tanto, depende de los siguientes parámetros (Chacón. J, 2000)

- **Densidad ( $\delta$ )**: La densidad de la mayoría de los explosivos varía entre 0,6 y 1,6 [grs/cm<sup>3</sup>], y cuanto mayor sea la densidad mayor será el efecto rompedor del explosivo.
- **Velocidad de detonación (VOD)**: Es una medida de la velocidad de propagación de la reacción química por la columna explosiva. Típicamente, la VOD varía entre los 3000 m/s (ANFO) hasta 6000 m/s (Emulsión) en los explosivos comerciales.
- **Presión de detonación (PD)**: Una detonación es una reacción química muy rápida. Para explosivos comerciales, las presiones en el frente de detonación son del orden de 2.000 Mpa (20 Kbares) a 12.000 Mpa (120 Kbares). Es esta la presión conocida como “presión de detonación”, la que depende principalmente de la densidad y de la VOD del explosivo.

Dicha presión se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$PD = \frac{\delta(VOD)^2}{4} \quad (1)$$

## 2.2 Presión en las paredes del pozo

Al realizarse la iniciación de la tronadura dentro de un pozo, se genera un efecto de carga en las paredes laterales dentro de la perforación por la presión de detonación que se ejerce en el contorno del tiro.

Esta presión  $P(t)$  varía en el tiempo, y es función del VOD, de la frecuencia de la señal ( $n$  y  $\beta$ ),  $P_e$  y  $P_o$  (Minchinton. A; Lynch. P, 1997), donde:

$$P(t) = P_o t^n e^{-\beta t} \quad (2)$$

$$P_o = \left(\frac{\beta}{n}\right)^n e^n P_e \quad (3)$$

- $P_e$  = Máxima presión aplicada en la pared del pozo.
- $P_o$  = Presión de detonación en la pared del pozo
- $\beta$  y  $n$  = Constantes asociadas a la frecuencia de la señal (onda).
- $t$  = Rise time (tiempo en el cual se logra la máxima presión).

En la Figura 3 se observa el comportamiento de la presión  $P(t)$  en un tiempo  $t$  en un pozo una vez iniciada la detonación. A medida que la presión se mueve a una velocidad  $C_d$ , la presión llega a un máximo  $P_e$  y luego baja de forma exponencial.

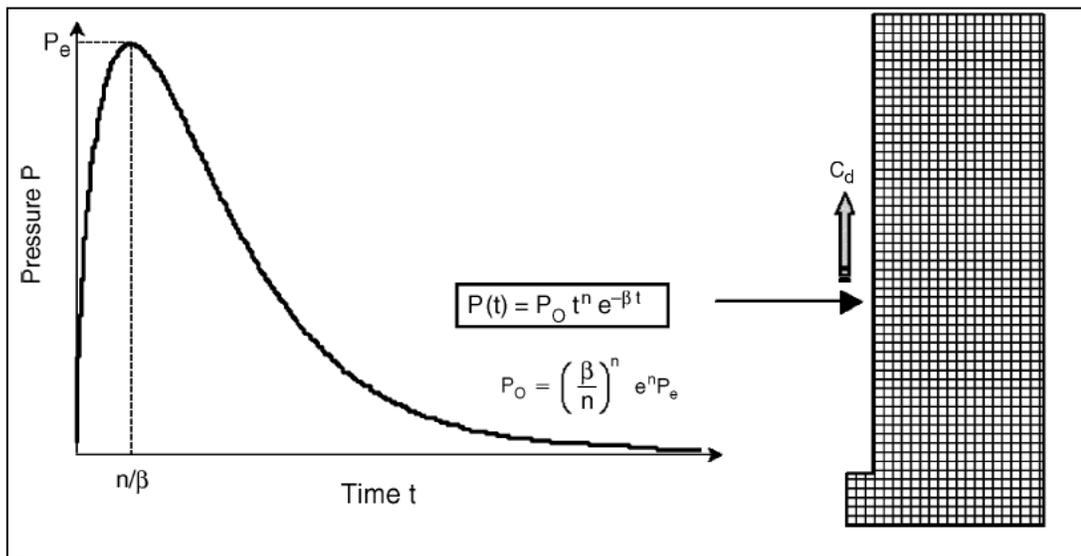


Figura 3 Presión aplicada en las paredes de un pozo con una velocidad de detonación velocidad estacionaria de detonación  $C_d$  (Vanbrabant, F., Chacón, E. y Quiñones, L. (2002))

### 2.3 Formas de propagación de las ondas en el medio según su velocidad de detonación.

Se vuelve relevante para el estudio, comprender que sucede en el macizo rocoso una vez producida la detonación dentro del pozo de tronadura.

Según lo mencionado en el punto 2.1, existe una presión de detonación (PD) y una velocidad de detonación (VOD) como reacciones a la detonación. Con esta VOD en el contorno de la perforación, se produce una propagación de las ondas en el medio (macizo rocoso), la comprensión de la forma en que se propaga esta onda según el tipo de detonación que se genera, resulta relevante para el presente estudio, razón por la cual se vuelve necesario describir las diferentes formas que existen para que se movilice este frente de ondas en el macizo.

Referente a lo expuesto anteriormente, resulta importante comprender la propuesta elaborada por Rossmanith, H. y Kouzniak, N. (1998) en la cual se menciona que *“los parámetros más importantes en una explosión son la densidad del explosivo y la velocidad estacionaria de detonación ( $C_d$ ). Dicha Velocidad de detonación depende del diámetro de la carga cilíndrica en la perforación”*. (Rossmanith. H y Kouzniak. N, 1998)

Una vez iniciada la detonación lineal con la velocidad  $C_d$ , dos ondas de esfuerzo emergen del frente de detonación, estas son: la onda longitudinal P ( $C_p$ ) y la de corte S ( $C_s$ ). Su forma (y en el caso Supersónico, sus ángulos), vienen dados por la razón (Mueller B; Rossmanith H, 2013).

Esta relación corresponde a los números Mach  $M_p$  y  $M_s$ , los cuales dependen de las proporciones de velocidad de detonación ( $C_d$ ), respecto las velocidades de onda S ( $C_s$ ) y P ( $C_p$ ).

$$M_p = \frac{C_d}{C_p} \text{ y } M_s = \frac{C_d}{C_s} \quad (4)$$

En la Figura 4 se observa un modelo conceptual del frente de ondas una vez realizada la tronadura de un pozo, con el frente de ondas P y ondas S que emergen de la zona.

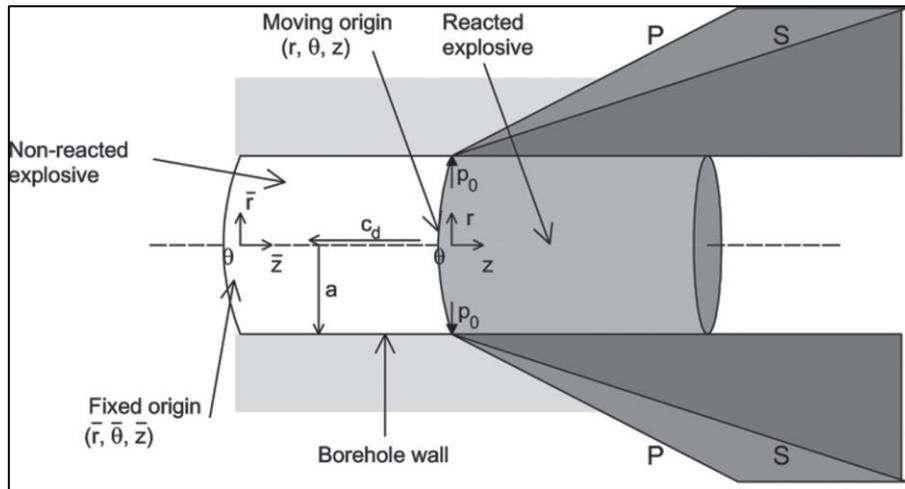


Figura 4: Ondas teóricas Mach en roca para detonación supersónica con explosivos donde ( $C_s < C_p < C_d$ ).  
(Mueller B. y Rossmannith H. (2013))

En un macizo homogéneo e isótropo existen básicamente 3 modelos de sonicidad.

### 2.3.1 Detonación Supersónica

Corresponde al caso donde  $C_d > C_p > C_s$ . La velocidad de detonación es mayor que la velocidad de onda P y la onda S en la roca: Dos frentes de onda cónicos Mach llamados  $M_p$  y  $M_s$  se formarán y sostendrán siempre que se cumpla la desigualdad  $C_d > C_p$ . Ver Figura 5.

Como resultado, la fragmentación es óptima a muy buena, con niveles de vibración comparativamente bajos.

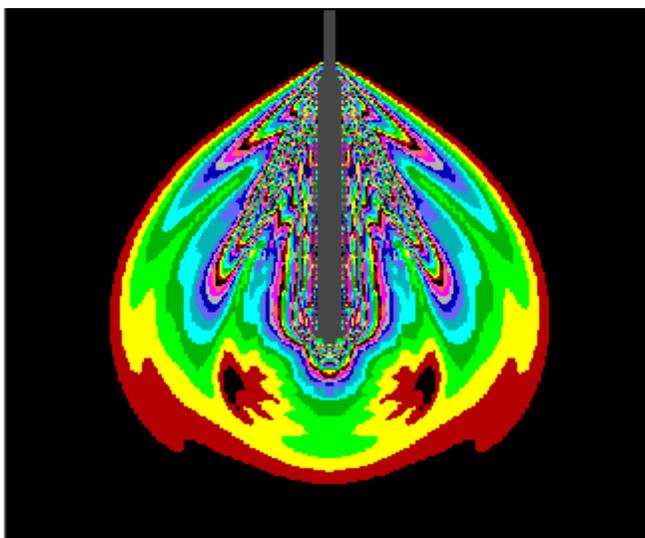


Figura 5: Esquema tronadura con velocidad de detonación Supersónica (Mueller B. and Rossmanith H. 2013)

### 2.3.2 Detonación Transónica

Corresponde al caso donde  $C_p > C_d > C_s$ . La velocidad de detonación se encuentra entre la velocidad de onda  $C_p$  y  $C_s$  en la roca. Solo se forma un frente de ondas Mach  $M_s$  con el frente de onda cuasi esférico, similar a la situación en la que una fuente de movimiento más lento emite energía continua que se irradia más rápido que el movimiento que la fuente. Ver Figura 6.

Como resultado se obtiene una fragmentación en promedio aceptable en las cercanías del pozo de tronadura, causando un nivel medio de vibración.

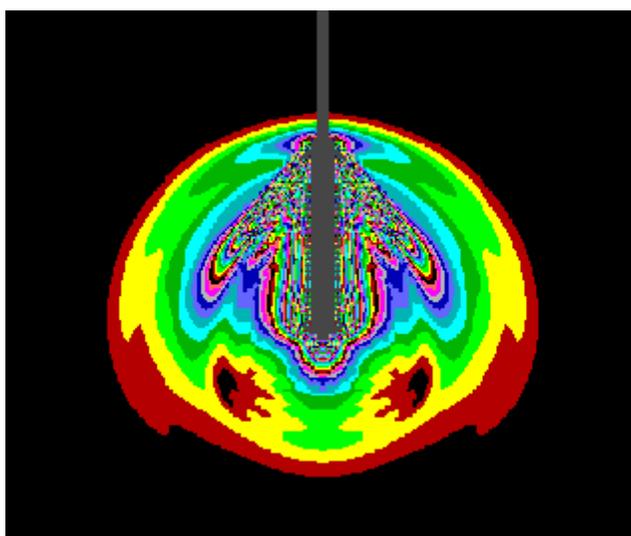


Figura 6: Esquema tronadura con velocidad de detonación Transónica (Mueller B. y Rossmanith H. 2013)

### 2.3.3 Detonación Subsónica

Corresponde al caso donde  $C_p > C_s > C_d$ . La velocidad de detonación es menor que las velocidades de onda  $C_p$  y  $C_s$ . En este caso, no se forman frentes de onda Mach. Ver Figura 7.

Como resultado se obtiene una fragmentación deficiente en el contorno de la perforación, acompañado de una vibración intensa

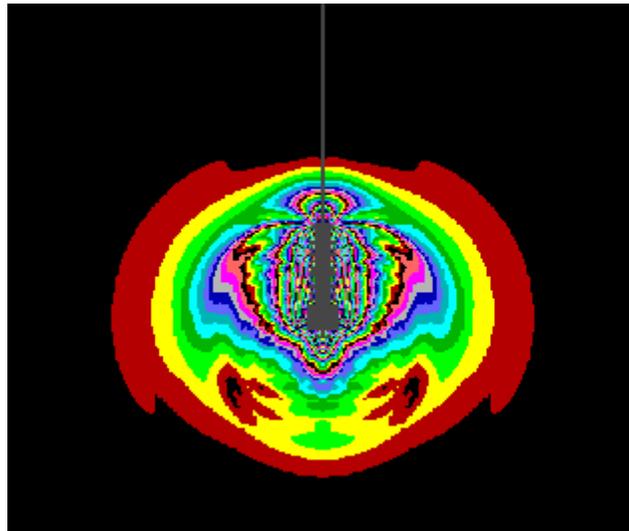


Figura 7: Esquema tronadura con velocidad de detonación Subsónica (Mueller B. y Rossmannith H. 2013)

La comparación de estos 3 tipos de régimen de detonación se presenta en la Figura 8.

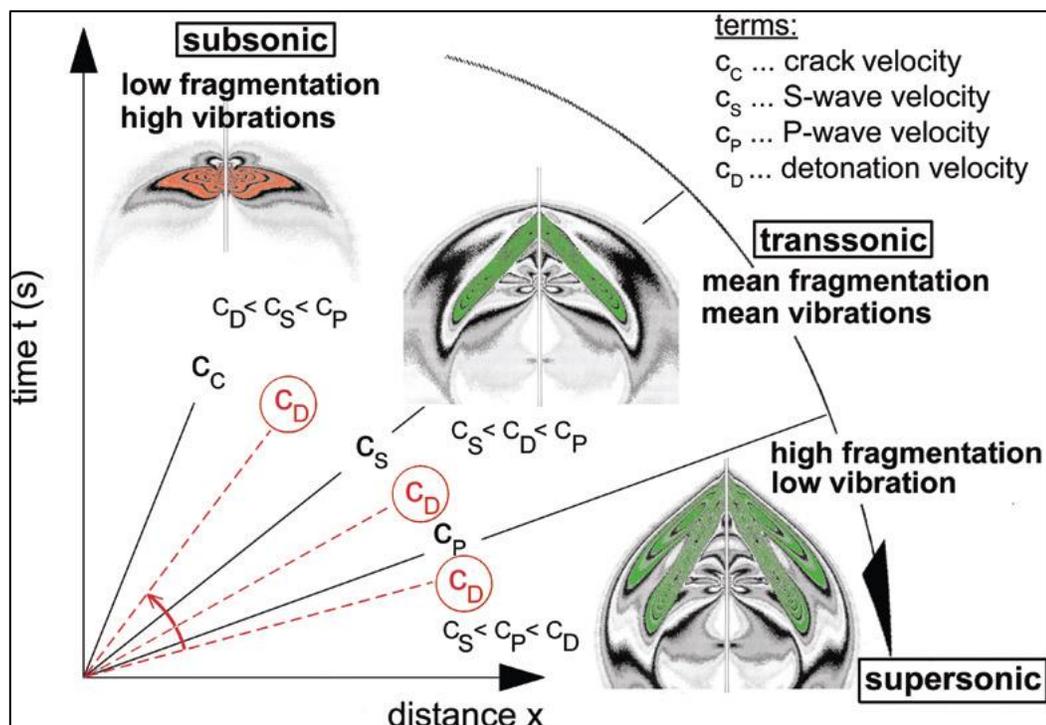


Figura 8: Comparación de velocidad de detonación Supersónica, Transónica y Subsónica (Mueller B. and Rossmanith H. 2013).

Cabe destacar que, el caso más importante de los 3 mencionados anteriormente corresponde al de la velocidad Supersónica, donde se forman los frentes de onda Mach  $M_p$  y  $M_s$ .

Este supuesto de la aparición de las ondas  $M_p$  y  $M_s$  fue demostrado con prueba en terreno y mediciones en geófonos en Codelco Chile – División Andina (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L., 2002) en un estudio realizado, para el caso del DDE (Debilitamiento Dinámico con explosivos)

## 2.4 Propagación pseudo-esférica bajo régimen supersónico

En el caso de régimen supersónico visto en el punto 2.3.1, se observa la formación del frente de ondas Mach P y S ( $M_p$  y  $M_s$ ). En este caso, los ángulos de los conos del frente de onda formados están dados por la siguiente relación (Ver Figura 9):

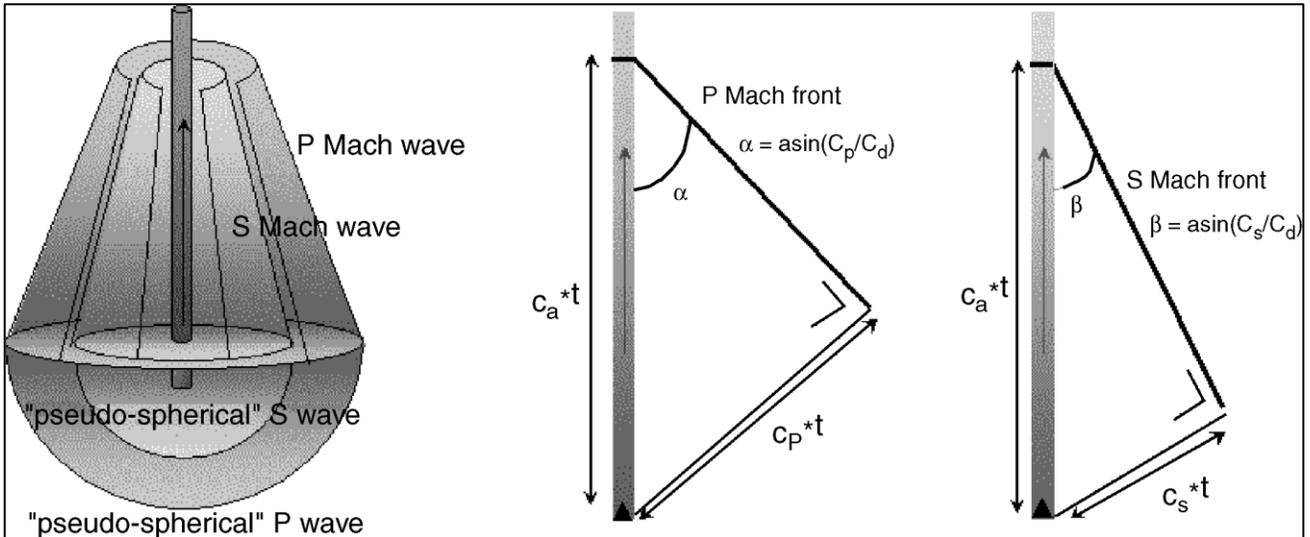


Figura 9: Modelo Pseudo esférico en caso supersónico (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002))

Los ángulos de estos conos pseudo esféricos formados, vienen dados por las siguientes ecuaciones:

$$\alpha = \text{asin}\left(\frac{c_p}{c_d}\right) \quad (5)$$

$$\beta = \text{asin}\left(\frac{c_s}{c_d}\right) \quad (6)$$

Cuando la columna finita cargada con explosivo inicia, se forman los frentes de onda P y S de forma pseudo esférica en el contorno del pozo tronado.

Permitiendo determinar la interacción de la onda en pozos cercanos, a través de estos ángulos.

## 2.5 Umbrales de daño

Es posible indicar que, debido al frente de ondas que se genera al realizar la tronadura, (las ondas P y S que se describen en puntos anteriores), es factible la generación de daño o deterioro de las condiciones en la zona cercana a la perforación tronada y, adicionalmente, se transmiten estas ondas en el entorno, llegando con cierta velocidad a labores, excavaciones y/o infraestructura ubicada en las cercanías del evento.

Al generar este daño en la zona cercana a la tronadura, se debe catalogar y/o cuantificar en qué nivel afecta el entorno con la propagación de las ondas.

La cuantificación de este posible daño se debe realizar estableciendo un criterio que determine cuando se produce la fractura/ deterioro del macizo en esa zona.

Con la finalidad de determinar a qué velocidad de partícula se produce este deterioro de las características del macizo, se debe tener en cuenta el concepto de velocidad de partícula crítica (PPV<sub>c</sub> = Critical Peak Particle Velocity), el cual depende de parámetros de roca intacta.

La fórmula de determinación de esta velocidad de partícula crítica se presenta a continuación:

$$PPV_c = \frac{\sigma_t * V_p}{E} \quad (7)$$

Dónde:

$\sigma_t$  = Resistencia a la tracción

$V_p$  = Velocidad *p* de propagación en roca

$E$  = Modulo de young

Cabe mencionar que la relación anterior asume una elasticidad lineal del material a través del cual se propaga la onda, utilizando parámetros obtenidos a través de ensayos de laboratorio de **roca intacta**.

En general, no es posible medir directamente la zona con daño por tronadura con precisión. Se define que una zona de la roca o macizo rocoso está considerada con daño, cuando no reacciona elásticamente y la deformación es plástica.

En tanto, la zona de sobre quiebre se produce cuando la roca sufre fracturas y colapsa, es decir, el macizo rocoso no se podría mantener estable por sí solo.

La zona perturbada o de grietas se genera cuando la roca sufre un daño menor, y es el lugar donde se estima que se forman las primeras grietas o las grietas presentes se extienden (la zona no es visible). Y finalmente, la zona intacta que es donde la roca no sufre ninguna alteración.

En la Figura 10 se aprecia una esquematización de las zonas de daño por la tronadura de mina rajo, con su proyección de onda en mina subterránea.

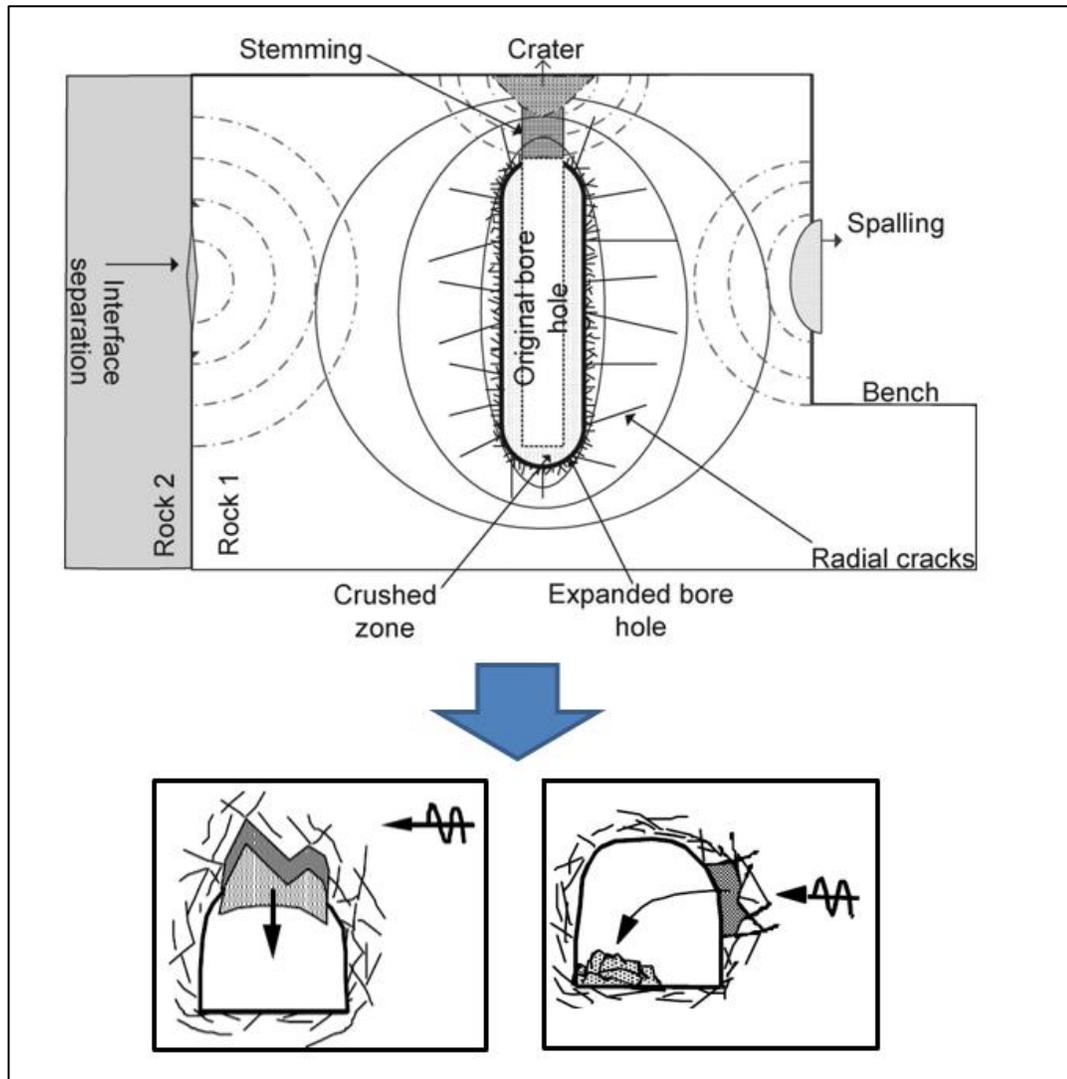


Figura 10: Daño y propagación de onda en mina rajo y posible daño en labores subterráneas. (Saharan, 2006; Kaiser, 1996; Elaboración propia).

A modo de resumen se muestra en la Tabla 1, las constantes de H& P y halos de daño estimados para diferentes tipos de roca, propuestos por diferentes autores, presentada por Altamirano (2014).

**Tabla 1 Resumen de las constantes de atenuación de Holmberg and Persson para diferentes tipos de rocas (Altamirano, 2014).**

Rock type and reference	K	alfa	PPVc(mm/s)	PPVbreakage (mm/s)
Massive Granite, (Persson et al, 1994)	700	0.7	1000	>4000
Andesite, (McKenzie et al, 1995)	200	0.9	600	>2400
Strong Sandstone, (Mckenzie et al, 1995)	400	0.78	450	>1800
Strong Shale, (Mckenzie et al, 1995)	175	1.25	350	>1400
Strong Shales (across bedding), (Villaescusa et al, 2004)	456	1.12	848	>3400
Ridgeway Volcanics, (Onaderra, 2001)	470	0.94	1200	>4800
Medium/coarse grained quartz diorite, (LeBlanc et al, 1995)	150	0.87	840	>3360
Bronzewing (Onederra and La Rosa, 2002)	332	1	1100	>4400

Diversos investigadores desarrollaron diferentes criterios de umbrales de daño basándose en el PPV según el tipo de roca. En la Tabla 2 se presenta un resumen de los criterios más importantes.

De forma general las estimaciones más utilizadas se basan en el criterio de H&P.

**Tabla 2 Umbrales de daño**

Propuesta	Umbral de daño
Langefors (1973), Edwards y Northwood (1960), Nicholls (1971).	De comun acuerdo se estableció que un PPV de menos de 50 mm/s tendría pocas probabilidades de generar daños estructurales en edificios y viviendas
Langefors and Kihlstrom (1973)	Langefors y Kihlstrom (1973) propusieron los siguientes criterios para el desarrollo de túneles. PPV de 305 mm/s a 610 mm/s produce caída de roca en túneles sin revestimiento y la formación de nuevas grietas.
Bauer and Calder (1970)	Observaron que no hay fractura de la roca intacta para un PPV de 254 mm/s, de 254 a 635 mm/s resulta en una tracción menor y VPP de 635 a 2540 mm/s causaría fuerte tracción y algunas grietas radiales. La rotura o fracturamiento del macizo rocoso por encima de 2540 mm/s.
Oriard (1982)	Oriard menciona que la roca sufrirá daño con un PPV por encima de 635 mm/s
Holmberg and Persson (1979)	El PPV para que la roca sufra daño está entre 700 y 1000 mm/s
Rustan (1985)	El trabajo realizado por Rustan sigue que los niveles de PPV para que la roca sufra daño están por encima del rango 700 a 1000 mm/s
Yang (1993)	Yang utilizó el modelo de Holmberg and Persson para estimar el PPV en la zona de daño. Se demostró que los datos tomados en campo tienen valores muy cercanos con los valores estimados teóricamente.
Bogdanhoff (1996)	Bogdanhoff supervisa la tronadura de un túnel de acceso en Estocolmo. La medición de vibraciones se realizó a distancias entre 0.25 y 1.0 m. El rango de PPV donde producía daño era entre 2000 y 2500 mm/s
Blair et al (1996)	Blair argumentó que el modelo de Holmberg and Persson no incorpora ningún tiempo de retraso para los picos de vibración en el punto P, el modelo no es capaz de proporcionar el análisis correcto en el campo cercano. Blair desarrolló un modelo de elementos finitos para evaluar la zona de daño
Murthy and Dey (2002)	Murthy y Dey propusieron que el nivel de PPV para generar fractura en una roca de basalto es 2050 mm/s
Dey (2004)	Basándose en el modelo de campo cercano encontró que los niveles de PPV para generar fractura en la roca varían entre 700-1300 mm/s, test realizado en cinco desarrollos horizontales de minas metálicas

Basándose en el modelo de estimación de velocidad de partícula (Holmberg, R, Persson, P, 1993), los umbrales de daño más utilizados, de acuerdo al valor obtenido de la fórmula de PPVc (Velocidad de partícula crítica), se presentan en la Tabla 3, con los diferentes rangos que definen y clasifican el daño en el macizo.

**Tabla 3 Umbrales de daño (Holmberg. R, Persson. P, 1993).**

<b>Umbral</b>	<b>Criterio</b>
Dilatación de Fracturas	1/4*PPVc
Aparición de nuevas grietas	1*PPVc
Daño notorio u obvio	4*PPVc
Trituración	8*PPVc

## **2.6 Estimación de velocidad de partícula.**

En el capítulo anterior se plantea la forma en la cual emergen de un pozo de tronadura el frente de ondas P y S, sin embargo, es necesario determinar la velocidad con la cual la onda llega a la zona de estudio.

Es importante mencionar, que la estimación de la velocidad de partícula a una distancia conocida ha sido motivo de estudio durante años.

Debido a esta razón, diferentes autores han planteado fórmulas y/o criterios mediante los cuales se puede estimar un modelo de predicción de velocidad de onda en función de las propiedades del medio donde se realiza la tronadura.

Existen criterios que son en función de los kilos de explosivo y la distancia, otros en función del diámetro de la perforación y la presión ejercida en el mismo.

En la Tabla 4, se presenta un resumen de los diferentes criterios de determinación de velocidad de partícula que existe junto su autor y las consideraciones del formulismo planteado (Altamirano. A, 2014).

**Tabla 4 Resumen de los criterios de daño y predicción de velocidad de partícula**

Modelo/Autor	Supuestos	Fórmula	Variables	Comentarios
Holmberg & Persson (1978)	Se asume que toda la longitud de carga detona instantáneamente. Se dividió la carga cilíndrica en una serie de pequeños elementos de longitud dx y de concentración de carga lineal de q (kg/m)	$V = K * \frac{W^\alpha}{R^\beta}$	a y b: Son constantes empíricas. V: Peak particle Velocity (PPV). W = Carga. R = distancia de medición.	La zona de daño se puede determinar asumiendo que el PPV excede el valor crítico (PPVc). Este es un enfoque práctico para la aplicación de diseño. Se modificó la ecuación, Holmberg & Persson (1994).
SveBeFo/ Ouchterlony (1997)	La zona de daño se define por el sector circundante del pozo que genera grietas. Para predecir la zona de daño, expresa una ecuación para la longitud radial de la grieta	$P_h = \frac{\gamma^\gamma * \rho_0}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} * D^2 * \left(\frac{d_e}{d_h}\right)^{2.2}$	Ph: Presión del pozo o tiro. De: Diámetro de la perforación g: Exponente insertrónico para un determinado explosivo. D: Velocidad de detonación (VOD)	La formación de grietas es controlada por la penetración del gas en la roca, el tamaño del fragmento se rige por las ondas de choque
Colorado School of Mine/ Favreau (1969)	Se basa en la velocidad de las partículas resultantes de la detonación de una carga esférica en un medio infinito, isótropo y homogéneo, presentado por	$V = e^{\frac{-\alpha^2 * \tau}{\rho_r * V_p * r_h}} * [f(V_p, \alpha, \beta, t, p)]$	V: Peak Particle Velocity; t: tiempo; P: Presión de explosión; t: Tiempo de retardo; Vp: Velocidad de onda; a y b constantes isentrópicas.	El modelo considera una carga cilíndrica que es dividida en una serie de cargas esféricas con un diámetro igual al diámetro de la perforación equivalente.
Hustrulid-Lu	Hustrulid y Lu (2002) presentaron un nuevo enfoque para el PPV.	$V = k * \frac{\rho_0 * D^2}{2 * (\gamma + 1) \rho_r V_p} R_r^{2\gamma} \left(\frac{r_h}{R}\right)^\alpha$	V: Peak Particle Velocity  K y $\alpha$ son constantes empíricas.  $R_r$ : Relación del diámetro del explosivo al diámetro del pozo.	
Modelo Ruso	Drukopvanyi et al. (1976) divide teóricamente la extensión de la zona de quiebre (Rcrush) y zona de fractura (Rc).	$R_{crush} = r_h \left[ \frac{P_h}{-\frac{C}{f} + \left(\sigma_c + \frac{C}{f}\right)^{\frac{f}{L^{1+f}}}} \right]^{\frac{1}{2f}} \sqrt{L}$  $R_c = \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_t}\right) * R_{crush}$	C: cohesión  f: Coeficiente de fricción. $\sigma_c$ : Resistencia a la compresión uniaxial.  L: f (Coeficiente Poisson). $\sigma_t$ : Resistencia a la tracción.	La extensión del daño utilizando este modelo es más alta que la observada en la práctica para aquellas rocas cuya resistencia a la compresión es menos de 100 MPa.

Continuación Tabla 4

Modelo	Supuestos	Fórmula	Variables	Comentarios
<b>Modelo Modificado Ash</b>	Hustrulid (2010) utiliza el enfoque clásico de Ash (1963) para desarrollar un nivel de daño basado en energía explosiva.	$\frac{R_d}{r_h} = 25 \left( \frac{d_e}{d_h} \right) \sqrt{\frac{\rho_e S_{ANFO}}{\rho_{ANFO}}} \sqrt{\frac{2,65}{\rho_r}}$	<p><math>R_d</math>: Radio zona de daño.</p> <p><math>S_{ANFO}</math>: Peso del explosivo en relación con el ANFO.</p> <p><math>\rho_{ANFO}</math>: Densidad de ANFO.</p> <p><math>\rho_e</math>: Densidad del explosivo.</p>	Hustrulid desarrolló un modelo de extensión del daño basado en la presión del pozo basado en VOD de 3500 mm/seg y una densidad de 0,85 gr/cc.
<b>NIOSH Stress Decay</b>	El modelo fue desarrollado en el Laboratorio de Investigación de Spokane, NIOSH (Johnson 2010). Se describen cinco zonas. La zona explosiva, zona desacoplada del pozo, zona de deformación, zona de grietas y zona de exclusión de daños (zona sísmica).	$\sigma_{cd} = P_h \sqrt{\frac{r_h}{R_{crush}}} e^{-(R_{crush}-r_h)\gamma}$ $\sigma_{trans} = \sigma_{cd} \sqrt{\frac{R_{crush}}{R_{trans}}} e^{-(R_{trans}-R_{crush})\beta}$	<p><math>R_{crush}</math>: Zona de fractura.</p> <p><math>\gamma</math>: Constante de desintegración (experimento de laboratorio).</p> <p><math>R_{trans}</math>: Extensión de la zona de transición.</p> <p><math>\beta</math>: Constante de decaimiento.</p> <p><math>\sigma_{trans}</math>: Fuerza dinámica de la roca en la zona de transición.</p>	La capacidad de calcular el radio de fracturamiento y el de agrietamiento proporciona un buen medio para determinar hasta qué punto se daña el macizo rocoso.
<b>McHugh</b>	McHugh (1983) señala que el efecto de la presión interna del gas predomina sobre el efecto de las tensiones de tracción en la ampliación de las grietas en la roca.	$R_c^{(2-\frac{1}{2\gamma})} + \left( \frac{2V_b}{n\pi w} \right) R_c^{-\frac{1}{2\gamma}} - \left( \frac{2V_b}{n\pi w} \right) \left( \frac{2P_h}{\sqrt{\pi} IC} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0$	<p><math>R_c</math>: Longitud de la grieta.</p> <p><math>V_b</math>: Volumen del pozo.</p> <p><math>P_h</math>: Presión del pozo.</p>	La ecuación estima la longitud de la grieta basado en la mecánica de fractura en metales. Para roca, los parámetros IC, n y w, son difíciles de obtener.
<b>Mosinets</b>	Mosinets et al. (1972) da la relación para calcular el radio de la zona de la grieta Rc y el radio de la zona de fracturamiento Rcrush para carga esférica.	$R_c = \sqrt{\frac{V_p}{V_s}} \sqrt[3]{q}$ $R_{crush} = \sqrt{\frac{V_s}{V_p}} \sqrt[3]{q}$	<p><math>V_p</math>: Velocidad de onda longitudinal.</p> <p><math>V_s</math>: Velocidad de ondas.</p> <p>q: Peso de explosivo.</p>	

Modelo	Supuestos	Fórmula	Variables	Comentarios
<b>Modelamiento Numérico</b>	<p>Elementos Finos Dinámicos (Blair y Minchinton, 1997). Método de Diferencias Finitas (Fiserova, 2006).</p> <p>Hybrid Stress Blasting Model (HSBM) (Cundall, 2001)</p>	<p>La nueva tendencia es la utilización de métodos de simulación numérica aplicados a la tronadura de la roca, estimación de la fragmentación y vibraciones, estas tienen las ventajas de ser capaz de tomar en cuenta la propagación de la onda de detonación en la columna de explosivo, la propagación de la onda de tensión en la masa de roca, la atenuación de la onda en la roca, y la influencia de las superficies libres existentes. Sin embargo, la principal desventaja de simulación numérica es que no siempre es accesible a los ingenieros a causa de los requisitos básicos y teóricos de programación. Adicionalmente, muchos de estos procedimientos no han sido validados en la industria minera.</p>		

En general, se puede indicar que, de las tablas presentadas, los modelos/criterios de predicción de velocidad de partícula se determinan en función de datos medidos en terreno (tomados por geófonos, acelerómetros, sismógrafos, etc.), los cuales miden la velocidad en diferentes ejes (transversal, horizontal y longitudinal) y se determinan los parámetros específicos para cada unidad geotécnica analizada, generalmente con una regresión.

Los modelos de predicción de vibración más utilizados corresponden a dos:

### 2.6.1 Modelo de Holmberg and Persson (Campo cercano).

En el modelo de Holmberg and Persson (1993), se define una columna de explosivos de longitud  $H$ , una concentración lineal de carga, se asume una detonación completa del pozo de forma instantánea y la VOD se asume infinita (Holmberg R and Persson P. 1993)

En la siguiente figura se presenta el modelo de H&P (Figura 11):

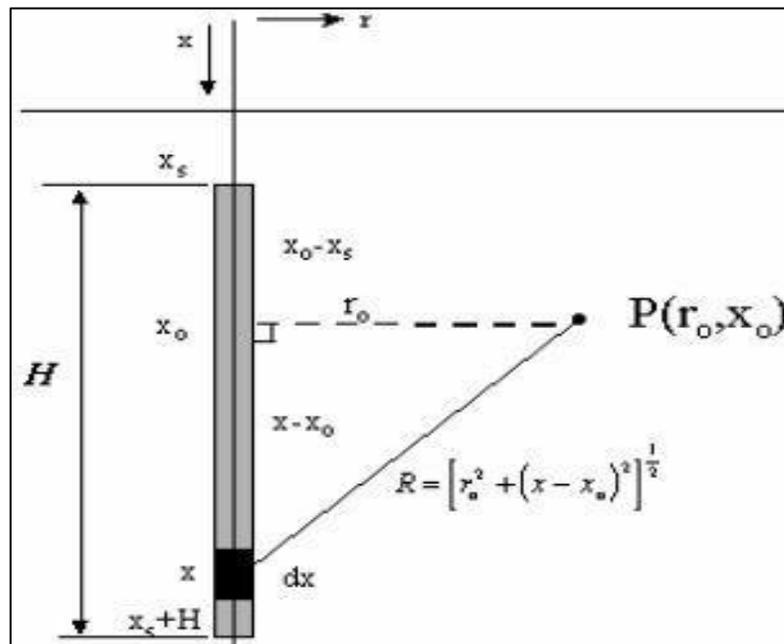


Figura 11: Conceptualización modelo campo cercano (Holmberg R, Persson P. 1993)

Cuya fórmula corresponde a:

$$v = K * \left(\frac{l}{r_0}\right)^\alpha * \left[ \arctan\left(\frac{H+x_s+x_0}{r_0}\right) + \arctan\left(\frac{x_0-x_s}{r_0}\right) \right]^\alpha \quad (8)$$

Este criterio, corresponde al más utilizado para determinar las constantes del macizo rocoso  $K$  y  $\alpha$  y permite estimar velocidad de partícula a una distancia determinada.

## 2.6.2 Modelo de Devine (Campo lejano).

El modelo de campo lejano de Devine corresponde uno de los más comunes dentro de los existentes para estimación de velocidad de partícula a una determinada distancia.

En este modelo, son necesarias las constantes K y alfa del macizo rocoso y se determina una velocidad de partícula Peak en función de la distancia de interés y los kilos de explosivo por retardo.

Este criterio viene dado por la siguiente ecuación:

$$PPV = K * \left[ \frac{D}{W^\beta} \right]^\alpha \quad (9)$$

Dónde:

*K y  $\alpha$  Parametros de la roca*

*$\beta = 1/2$  para Devine*

*D = Distancia de la fuente a la zona de interes*

*W = kilos de explosivo por retardo*

En general, la ecuación de campo lejano no se permite ser utilizada en campo cercano debido a que sobreestima los valores de PPV en ese sector.

Es necesario considerar en que campo se trabaja (cercano o lejano), para la elección del modelo que más se acomode a la zona de interés que se desea analizar.

En este caso, se trabajará en campo cercano debido a que se busca estimar el daño en el contorno de la excavación por tronaduras cercanas a estas labores.

## 2.7 Comportamiento del macizo rocoso

Para realizar una simulación de la detonación con explosivos, es necesario determinar el comportamiento que más represente al del macizo rocoso frente a una tronadura en mina rajo en función de las curvas esfuerzo vs deformación.

Esta relación de tensión-deformación está definida por la deformación que se produce en la medida que se aplica un esfuerzo, es decir, como varía la resistencia del material para diferentes niveles de deformación.

Por esta razón, se vuelve relevante tener en cuenta que existen varias formas en las cuales se puede comportar el macizo rocoso, las que se presentan en Figura 12:

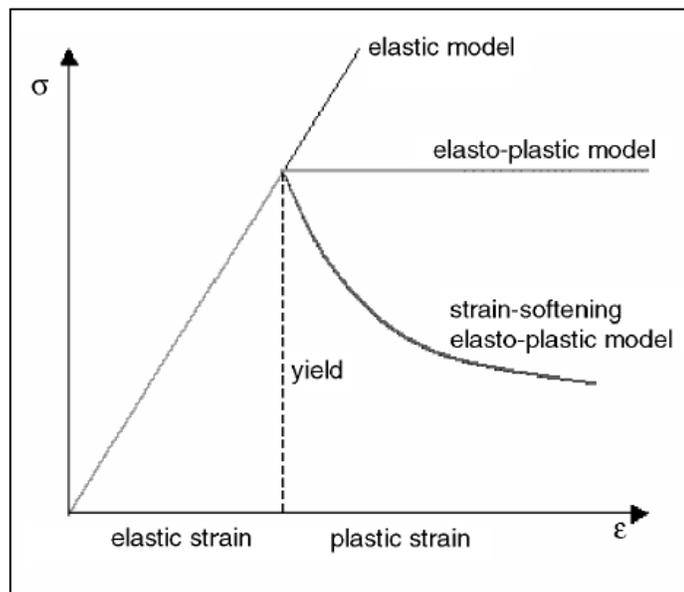


Figura 12: Gráfica esfuerzo deformación con los posibles comportamientos del macizo rocoso. (Vanbrabant F., Chacón E. and Quiñones L., 2002).

La zona de las propiedades residuales se puede ver en Figura 13 donde se ejemplifica en el comportamiento elástico (frágil), en el comportamiento elasto-plástico y en el comportamiento dúctil (plástico).

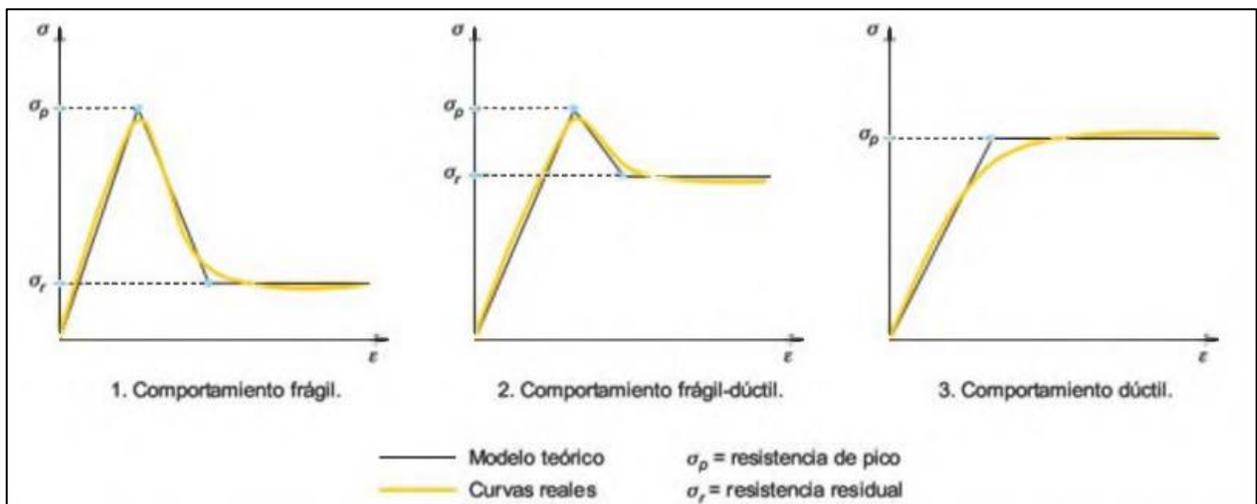


Figura 13: Gráfica esfuerzo deformación con los posibles comportamientos del macizo rocoso y propiedades residuales. (González de Vallejos L, 2004).

De la Figura 13 es importante destacar que una vez superada la resistencia máxima puede ocurrir:

- La resistencia disminuye drásticamente, cercana a valores de 0. Este comportamiento corresponde al frágil o elástico, el cual, generalmente, este asociado a rocas con muy alta resistencia, con muy poca o nada deformación plástica.
- La resistencia baja hasta un cierto valor después de alcanzar el peak, el cual corresponde a un comportamiento elasto-plástico. De este comportamiento se deriva el elasto-plástico con reblandecimiento o Strain-softening en el cual la curva decreciente no es tan pronunciada.
- Cuando la deformación aumenta sin que se pierda la resistencia (resistencia/esfuerzo constante después de grandes deformaciones), corresponde a un comportamiento dúctil o plástico.

En la presente investigación, se utilizaron el modelo de comportamiento elástico y elasto-plástico con reblandecimiento (Strain-Softening). Esto debido a que se verificara con el modelo elástico el comportamiento del macizo rocoso ante una tronadura, comparando los resultados obtenidos con estimaciones a una distancia simulada y posterior a eso, corroborando los valores obtenidos con un modelo elasto plástico con reblandecimiento con propiedades post peak,

Se vuelve relevante indicar, que bajo el modelo elasto-plástico con reblandecimiento (Strain – Softening), es necesario tener las propiedades residuales del macizo rocos.

El modelo con reblandecimiento utiliza las propiedades post peak, es decir, post ruptura, estableciendo que el macizo tiene un comportamiento que implica que conserva un grado de resistencia posterior al quiebre.

Se destaca que, en el caso de no tener datos medidos, ya que en la actualidad son escasos los estudios realizados en faenas en Chile, los cuales tengan como objetivo las propiedades post peak, existen autores que plantean métodos mediante los cuales se puede inferir estas propiedades. Para este estudio, se utiliza lo planteado por J.J. Crowder and W.F. Bawden donde se indica un rango de GSI en el cual trabajar con las propiedades residuales, definiendo estos en base a criterio experto, (Crowder. J; Bawden. W, 2004).

## **2.8 Software para modelamiento de tronadura**

A continuación, se presenta una revisión de los programas más relevantes en el modelamiento numérico, para el estudio del daño producido por las tronaduras.

### **2.8.1 Flac2D (Fast Lagrangian Analysis of Continua)**

FLAC es un software distribuido por la empresa Itasca®, basado en el método numérico de diferencias finitas, que de acuerdo al problema que se desee modelar y conociendo los valores iniciales y los de borde, resuelve un set de ecuaciones diferenciales para determinar principalmente esfuerzos y deformaciones en suelo, roca y otros materiales. La lógica utilizada consiste en reemplazar directamente las ecuaciones que gobiernan el problema por una expresión algebraica escrita en términos de las variables de campo en puntos discretos del espacio (como por ejemplo esfuerzos, desplazamientos). Estos puntos están controlados por la especificación de una grilla que utiliza el método de *volumen finito* para realizar el cálculo.

La solución corresponde a un método explícito denominado esquema de *tiempo – marcha* que resuelve las ecuaciones algebraicas en cada paso. El procedimiento consiste primero en invocar las ecuaciones de movimiento con las que se encuentran las nuevas velocidades y desplazamientos debido a los esfuerzos y a las fuerzas en el sistema. Luego, las tasas de deformación son encontradas a partir de las velocidades, y los nuevos esfuerzos son encontrados a partir de dichas tasas de deformación. Una vez finalizado lo anterior se tienen los nuevos esfuerzos y fuerzas, cerrando así el primer ciclo de cálculo. En la Figura 14 se puede visualizar de forma correcta este proceso donde, en cada una de las estaciones, se actualizan todas las variables de la grilla a partir de valores conocidos que permanecen fijos (no varían en cada uno de estos procesos).

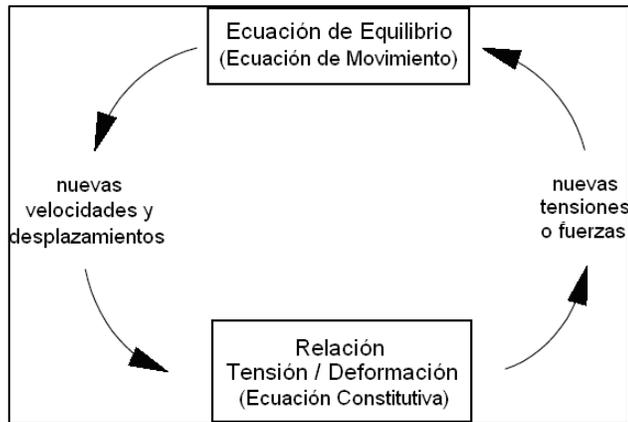


Figura 14: Ciclo básico de cálculo utilizado por FLAC2D. Julio (2011)

La solución que FLAC utiliza las ecuaciones de movimiento y relaciones constitutivas. Para transferencia de calor se utiliza la ley de Fourier y para flujo de fluidos en sólidos porosos, la ley de Darcy.

El concepto básico de la aplicación de las ecuaciones de movimiento y equilibrio es el de relacionar la aceleración de una masa con la fuerza aplicada,  $F$ , que es una función del tiempo. La Figura 15 muestra este concepto.

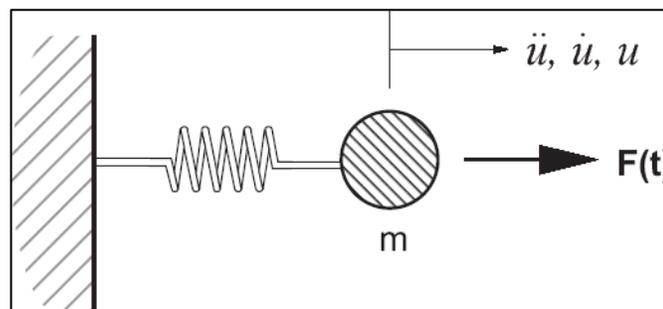


Figura 15 Aplicación de una fuerza variable en el tiempo a una masa, resultando en aceleración, velocidad y desplazamiento. Julio (2011)

Utilizando la segunda ley de Newton para el sistema masa-resorte se obtiene:

$$m * \frac{d\dot{u}}{dt} = F \quad (10)$$

Cuando se generaliza este problema a un sistema de muchas fuerzas, la ecuación expresa también la condición de equilibrio estático si la aceleración tiende a cero, esto es  $\Sigma F = 0$ . Cabe destacar que, las otras dos leyes de conservación, de momento y energía, se pueden expresar a partir de la ecuación (11) y de las otras dos leyes de Newton.

La generalización de la ley de Newton para un sólido continuo se expresa de la siguiente forma:

$$\rho * \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho * g_i \quad (11)$$

Donde:

$\rho =$  Densidad de masa

$t =$  tiempo

$x_i =$  Vector de coordenadas

$g_i =$  aceleracion gravitacional

$\sigma_{ij} =$  componente del tensor de tensiones

Los subíndices i, j indican la dirección en la componente cartesiana.

Posteriormente, es necesario la aplicación de otro set de ecuaciones, correspondiente a las de la relación constitutiva para realizar el cálculo tensional y de deformaciones en cada paso de tiempo. La forma de las ecuaciones que se plantean en este nivel corresponde al tipo de modelo constitutivo elegido para el material (ver formulas 12 y 13):

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} * \left[ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} := M(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, \kappa) \quad (13)$$

Donde

- $\dot{\epsilon}_{ij}$  es la tasa de deformación
- $\dot{u}_i$  es la componente de velocidad
- $M$  es la forma de la relación constitutiva
- $\kappa$  es un parámetro de historia que puede estar o no estar presente, dependiendo de la ley en particular.
- $:=$  significa “reemplazado por”.

Existen además expresiones que contribuyen al tensor de tensiones, en términos de la rotación finita de un elemento para un paso de tiempo cuando se realizan cálculos en el modo de grandes deformaciones (Manual de FLAC v7.0 Itasca®, 2011).

- Ejemplo uso FLAC

A modo de ejemplo de uso del programa Flac (Itasca®), se presenta estudio realizado en *FLAC<sup>3D</sup>* asociado a la estabilidad de un sistema de pernos de anclaje perturbado por un impulso de carga (tronadura) (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).

Este estudio emplea el módulo dinámico de *FLAC<sup>3D</sup>* para simular la transferencia de tensión a lo largo del perno de anclaje y el macizo rocoso.

En la Figura 16 se presenta esquema 2d de distribución de pernos en pared y techos para el modelamiento y en la Figura 17 se muestra esquema con distribución de pernos en 3D.

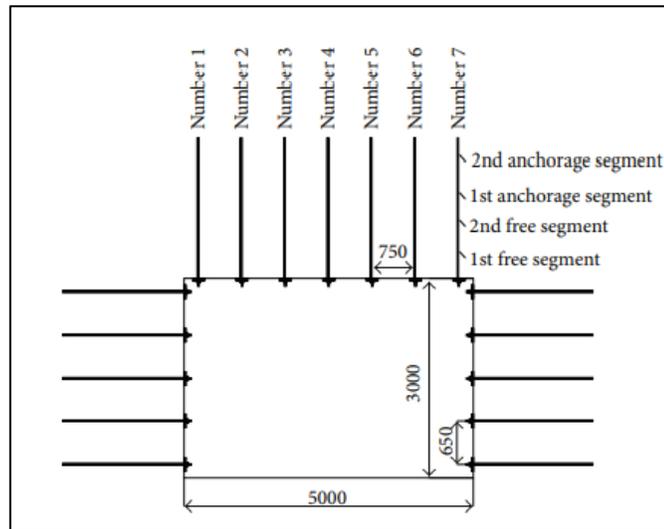


Figura 16 Esquema en 2d de distribución de pernos para modelamiento (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).

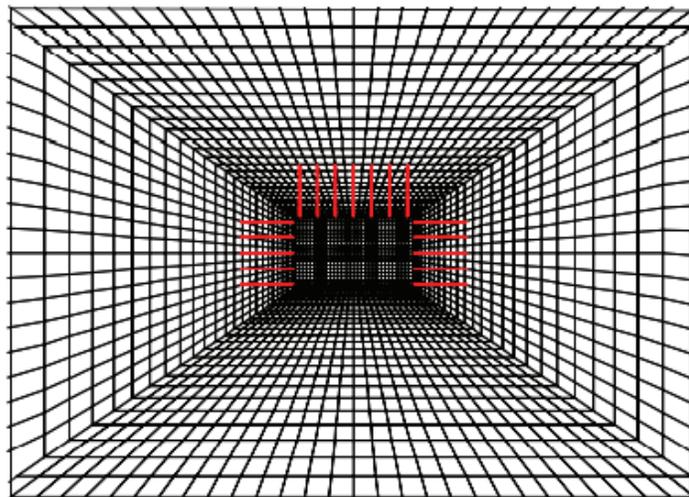
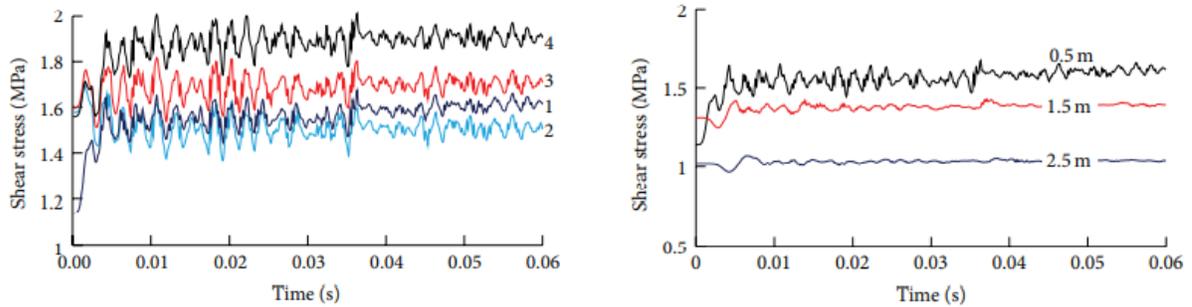


Figura 17 Esquema con distribución de pernos en 3D para modelamiento (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).

Los resultados obtenidos de la simulación en el sistema de anclajes se presentan en la Figura 18.



**Figura 18** Respuesta dinámica al esfuerzo de corte a lo largo de la resina del sistema de pernos. En imagen de la izquierda se presenta evolución del esfuerzo de corte en la primera ronda de pernos. En la imagen de la derecha se presenta la evolución del esfuerzo de corte para el perno número 1 a diferentes distancias de la frente (Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Ciaowei F and Lei Z; 2014).

De la Figura 18 (izquierda), se puede indicar que el esfuerzo de corte en la resina de la primera ronda de pernos oscila hasta un tiempo de 0.04s aproximadamente, para luego estabilizar en un valor promedio. El esfuerzo incrementa en los pernos 1, 2, 3 y 4 a razón de 41.37%, 4.5%, 6.64% y 22% respectivamente. Debido a lo anterior, los pernos mas afectados son los centrales y los de las esquinas del esquema. En la imagen de la derecha se presenta el esfuerzo de corte a diferentes distancias de la frente en el perno N°1, mostrando que la vibración se reduce a medida que la distancia aumenta de la frente. El mayor efecto se observa en los primeros 0.5m del perno (zona libre), y ya en los 1.5m se observa una oscilación casi reducida en un tiempo de 0.04s.

### 2.8.2 HSBM (Hybrid Stress Blasting Model)

El software de modelamiento numérico HSBM fue desarrollado a través de un proyecto internacional financiado por un consorcio de empresas. Este software permite simular la detonación de una carga explosiva y su efecto en el macizo rocoso circundante mediante la combinación de dos códigos, el código de detonación VIXEN (Varied Ideality Explosives Energetics) combinado con el modelo de rotura de roca Blo-Up (ver Figura 19).

El código de detonación VIXEN (Braithwaite, 2009), genera un archivo .txt, que contiene información de la composición química, velocidad de detonación (VOD), grado de reacción y densidad del explosivo. Este archivo .txt se carga al software Blo –Up para ingresar las propiedades del explosivo, siendo un parámetro de entrada para dicho programa.

El concepto físico utilizado en el modelo Blo-Up se basa en la combinación de los métodos numéricos continuos (FDM) y discontinuos (DEM) con el propósito de predecir

la detonación y propagación de las ondas dinámicas (Furtney, JK, Cundall, PA y GP, Chitombo, 2010).

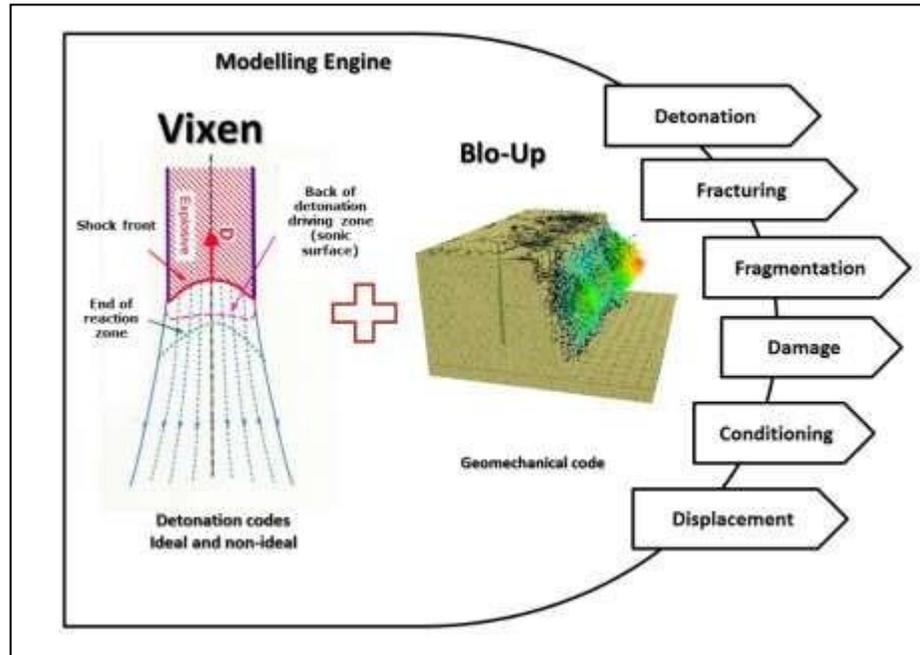


Figura 19 Códigos empleados en HSBM CODELCO (Chile), 2015

La roca en la zona de campo cercano se representa como un material de comportamiento tipo Mohr -Coulomb, que está acoplado a la zona explosiva. El material de confinamiento se expande en respuesta a la creciente presión de gas proveniente de la detonación del explosivo, debido a que la roca y el explosivo están en contacto en todo momento.

El modelo de campo cercano conformado por el pozo, explosivo y la región de la roca que se extiende por dos veces el diámetro del pozo aproximadamente, se representa como una zona continua utilizando el programa *FLAC*, para simular los esfuerzos de corte y trituración de la roca.

El modelo de campo lejano se encuentra unido al modelo de campo cercano. Esta zona se representa en forma de red (ver Figura 20), y utiliza el programa *PFC<sup>3D</sup>*.

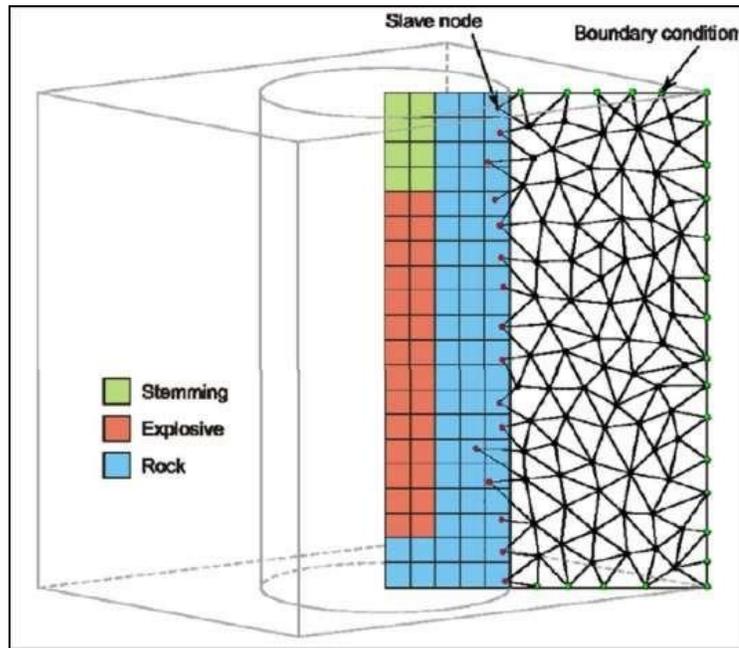


Figura 20 Representación esquemática del modelo continuo y discontinuo (Furtney, Cundall & Chitombo, 2010)

Esta red se encuentra conformada por diferentes nodos conectados entre sí por medio de enlaces, los cuales se mueven de forma independientes fundamentados en las leyes de Newton que otorgan la relación de movimiento y fuerza entre partícula (ver Figura 21).

Los enlaces que conectan estas partículas están determinados por las propiedades geomecánicas de roca intacta del sector modelado, los que además presentan resortes disipadores de energía, confiriéndole las características de atenuación de las vibraciones del medio de propagación.

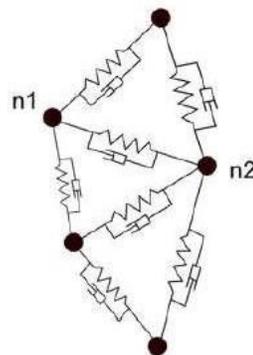


Figura 21 Representación esquemática de la red de nodos (Furtney, Cundall & Chitombo, 2010)

Cuando se crea el modelo en el software, se ingresan las propiedades de la roca intacta (valores determinados en ensayos de laboratorio) tales como el módulo de Young ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), densidad ( $\rho$ ), resistencia a la compresión no confinada (UCS), resistencia a la tracción ( $T$ ) y ángulo de fricción ( $\phi$ ). Junto con las propiedades de roca intacta, se ingresan además los parámetros internos del software (debidamente calibrados) de damping,  $b$  y  $M$ , que como se mencionó anteriormente, le confieren características de amortiguación y resistencia a la tracción dinámica a la roca.

Las estructuras presentes en el modelo se representan como planos de debilidad, los enlaces que se unen a las partículas en estos sectores poseen propiedades geomecánicas de roca intacta diferentes a las de la roca circundante, que también son ingresadas al crear el modelo.

Al inicio de la simulación, todos los nodos del modelo están conectados entre sí por medio de enlaces intactos, con el propósito de representar un macizo rocoso sin daños. Cuando ocurre la tronadura, fuerzas puntuales se aplican sobre estas partículas esféricas, las cuales se desplazan de acuerdo a las leyes de movimiento. Sin embargo, estos enlaces se rompen cuando las fuerzas aplicadas son mayores a la resistencia de tracción de la roca. Al separarse estas partículas, los enlaces se rompen generando fracturas radiales que representan a un macizo rocoso dañado.

La Figura 22 representa esquemáticamente dos fragmentos, los cual se generaron por la destrucción de sus enlaces.

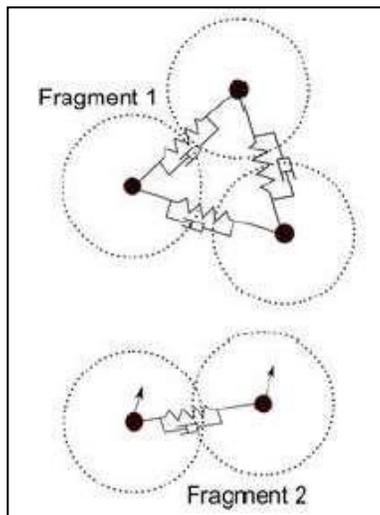


Figura 22 Representación esquemática de los fragmentos ( Furtney, Cundall & Chitombo, 2010)

De momento, el HSBM es el único software dedicado a modelamiento 3D para simulación de tronadura que tiene la ventaja de realizar simulaciones dinámicas y permite ver el efecto del acople o secuencia de salida de los pozos en daño en el entorno, pero con limitantes: el primero, no es un programa abierto a mercado para su compra y utilización (software desarrollado para un grupo de compañías mineras participantes como patrocinadores), y segundo, los tiempos de simulación, los cuales son bastante elevados debido a su capacidad dinámica de simulación, por lo que puede tardar desde un par de horas para un pozo simple, a un mes en el caso del análisis de una tronadura menor de un banco o disparo de avance/socavación en minería subterránea

- Ejemplo uso HSBM

Dentro de los trabajos realizados con el software HSBM, se presenta análisis de sobre quiebre en cresta de berma realizado en Codelco Chile – División Andina (Vega I, 2017).

En la Figura 23 se presenta esquema de trabajo realizado para ver condición de sobre quiebre en bermas para segunda pasada del banco doble, usando HSBM, con pre-corte ya tronado y filas buffer, primera, segunda y tercera fila de producción.

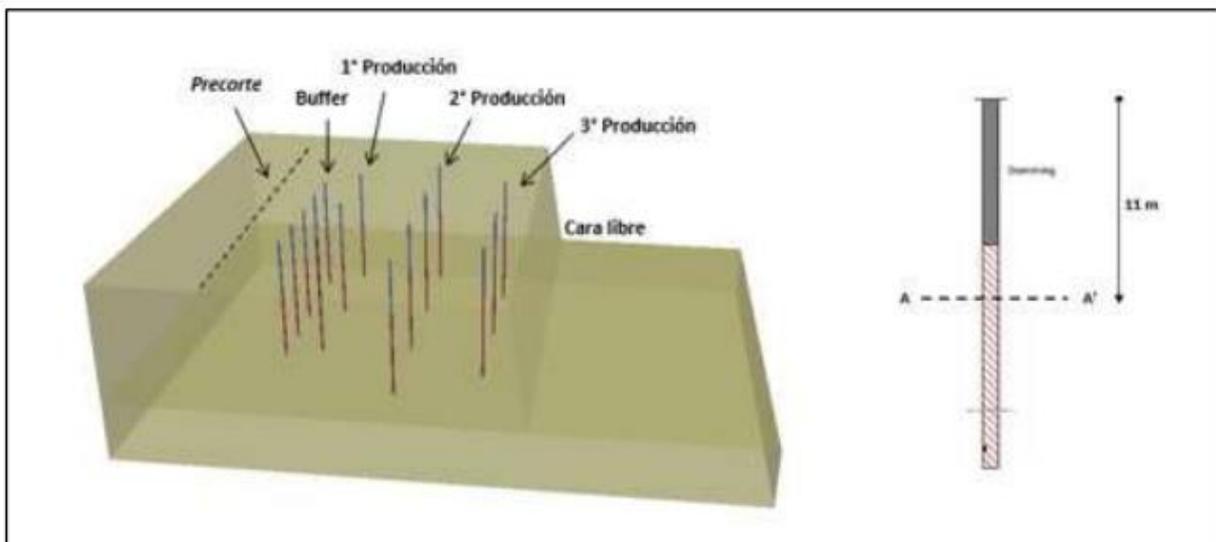
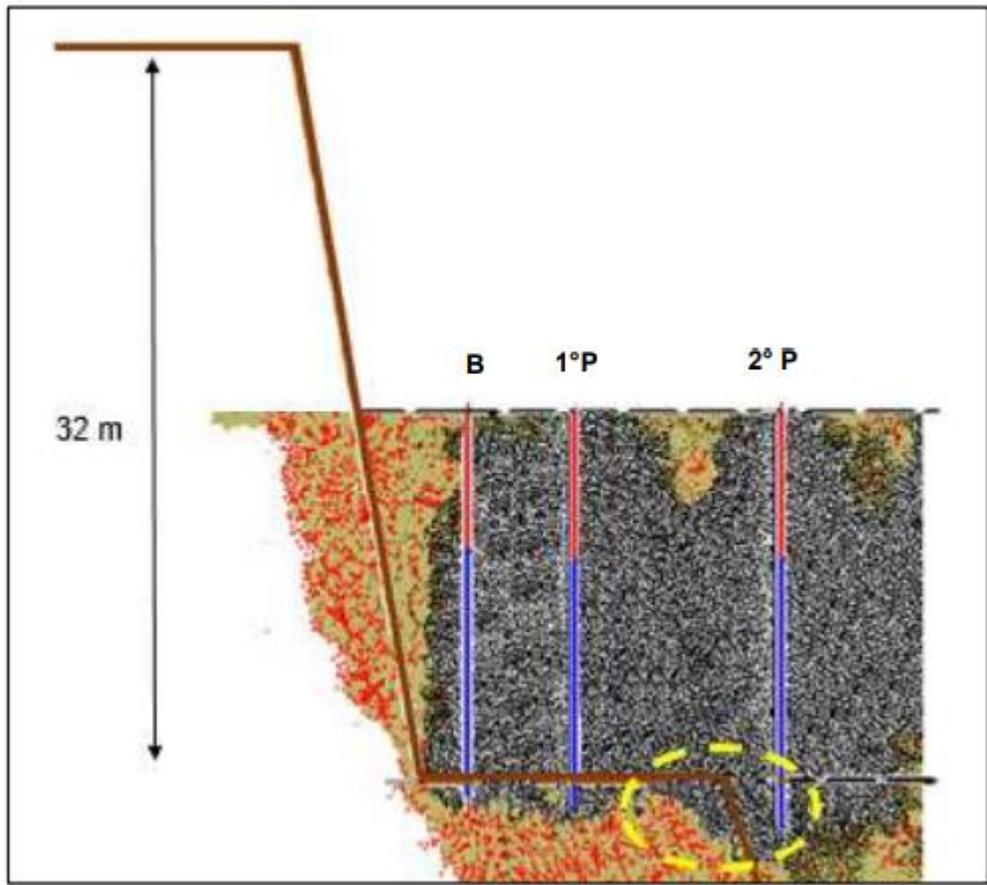


Figura 23 Esquema segunda pasada banco doble modelado en HSBM, Codelco Chile – División Andina (Vega I, 2017).

El explosivo utilizado corresponde a Pirex-50, con parámetros de diseño con pasadura de 1m en segunda fila de producción.

Los resultados se presentan en la Figura 24 se presentan los resultados de la simulación, con daño en cresta de berma banco siguiente en segunda pasada banco doble.



**Figura 24 Resultados simulación con HSBM pozos sobre cresta berma banco siguiente en tronadura segunda pasada banco doble Codelco Chile – División Andina (Vega I, 2017).**

De los resultados de este trabajo se concluye que es necesario acotar pozos de segunda pasada del banco doble en segunda fila de producción y alejarlos de la cresta de la futura berma en al menos 2 metros para evitar daños en esa zona.

### 2.8.3 JKSIMBLAST

El software de modelamiento y gestión de tronaduras, JKSIMBLAST soft-blast®, es una herramienta que a través de sus módulos 2DRing, 2DFace y 2DBench, permite obtener como resultado una estimación de PPV y energía en el contorno tronado junto con una curva de granulometría teórica. Para lograr esto, requiere insertar información de perforación, carguío de explosivos y distribución de cargas, características geotécnicas de la roca y secuencia de iniciación y salida.

Todos los módulos son gestionados desde la BMS que funciona como un sistema de árbol jerárquico en el cual se almacena la información. En la Figura 25 se observa un ejemplo de la BMS con el ingreso de diferentes litologías (dominios blandos y duros) y diferentes diagramas de disparo almacenados para el módulo subterráneo (2DRing).

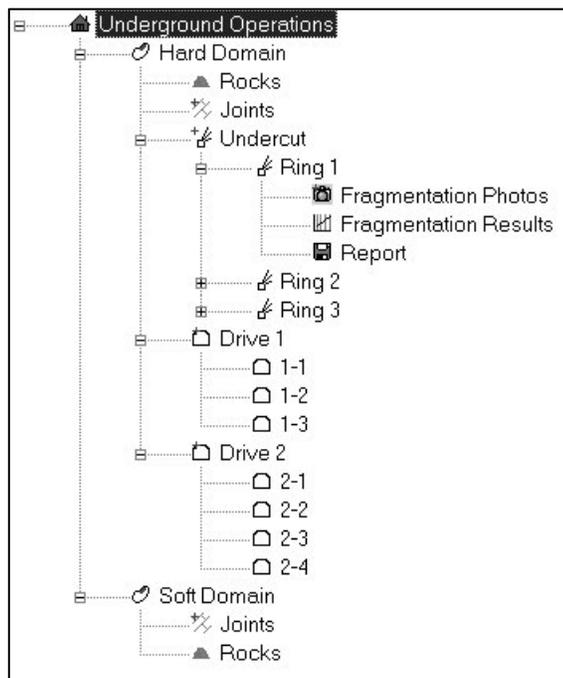


Figura 25 Ejemplo de estructura de árbol de la BMS para una operación subterránea (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001)

- 2DRing. (Ring blasting desing editor)

Como su nombre lo indica, este módulo corresponde al editor de diseño de perforación en la suit subterránea, permitiendo crear diagramas de perforación y de carga de columna

en un plano bi-dimensional. En la Figura 26 se presenta un ejemplo del diseño en el módulo subterráneo con un diagrama de socavación (ring de disparos de levante).

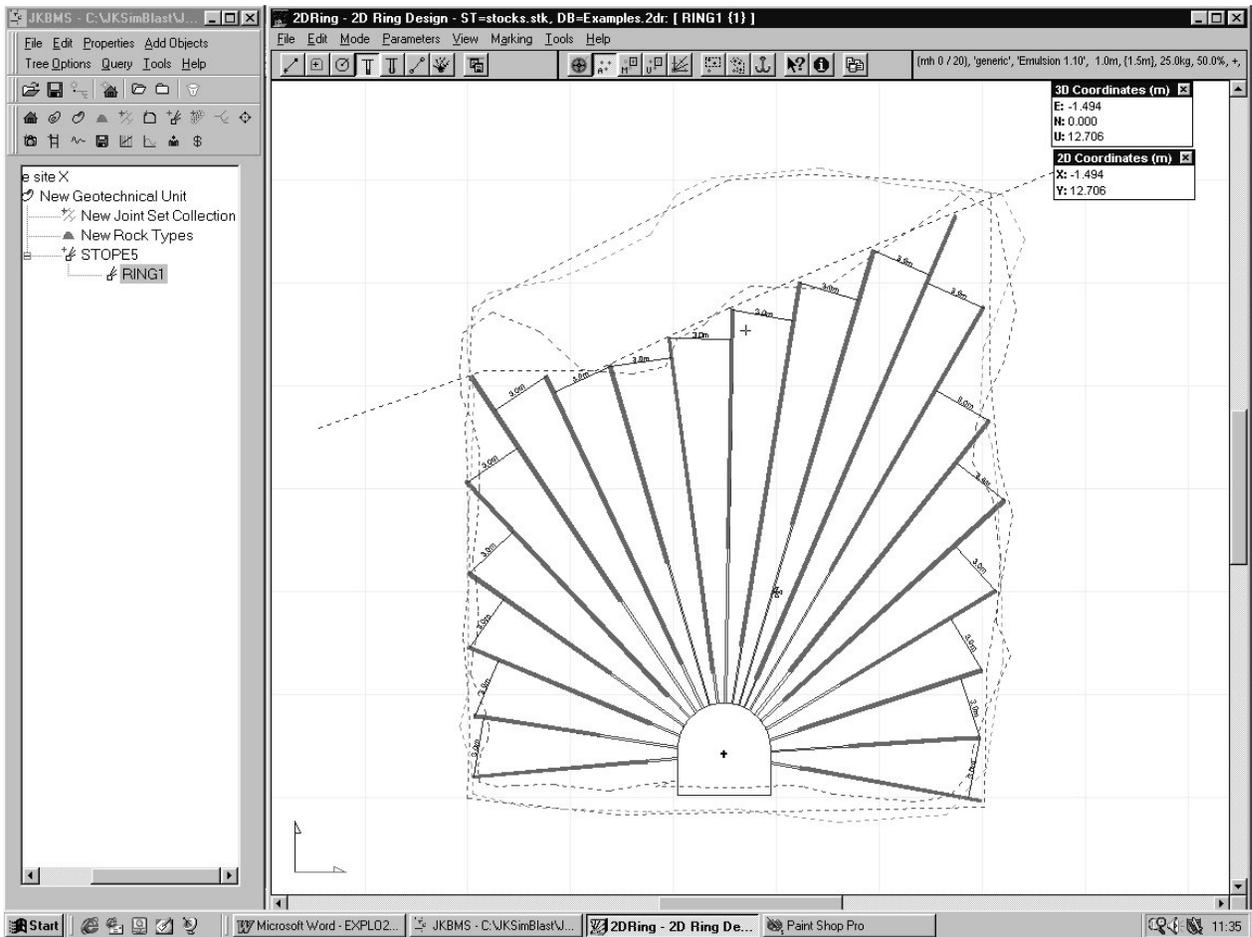


Figura 26 Ejemplo de diseño de perforación en módulo 2DRing. (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001)

- 2DBench (Open pit bench blasting)

En este módulo, tal como su nombre lo indica, es posible diseñar un diagrama de perforación de bancos para minería de superficie. En esta, es posible indicar diámetro de perforación, largo, distribución de carga y tipo de explosivos junto con secuencia de salida. En la Figura 27 se presenta un ejemplo de diseño en el módulo 2DBench.

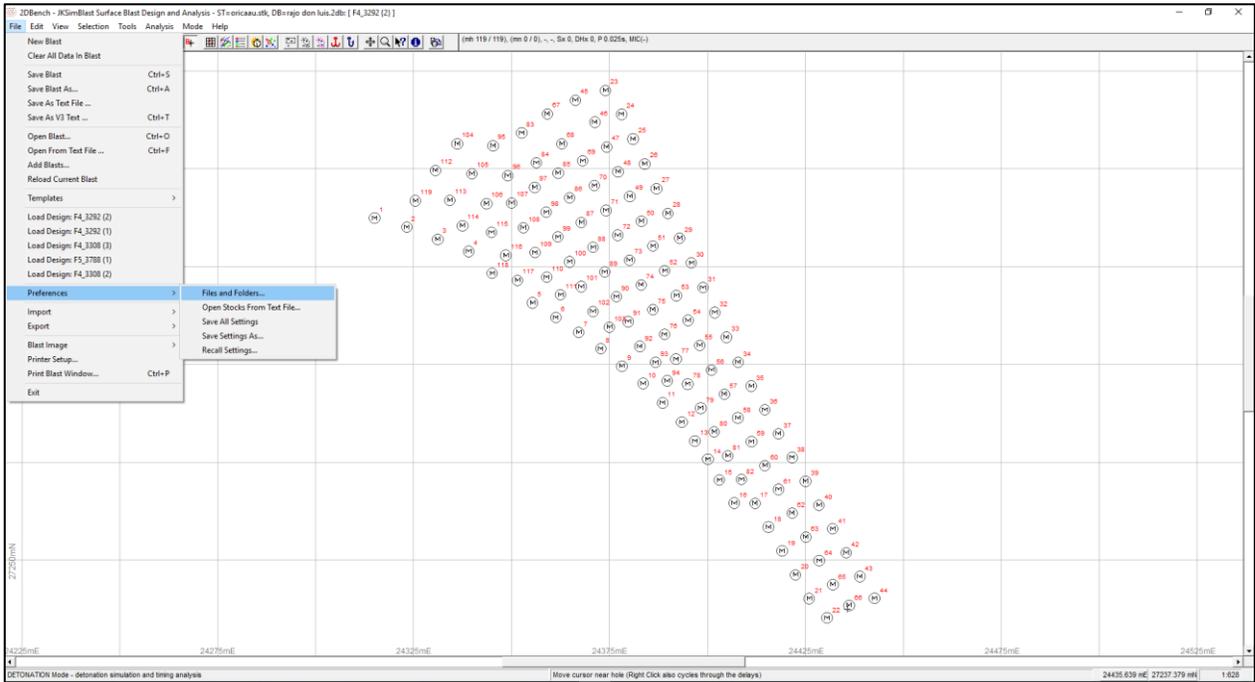


Figura 27 Ejemplo de diseño de perforación en bancos para minería de superficie, 2DBench.

- 2DFace (Editor de diseño de tronaduras)

Al igual que el módulo 2DRing, se puede crear un patrón bi-dimensional para minería subterránea, creando una secuencia de tronadura de avance (desarrollo) en vez de tiros de levante (2DRing). Esta permite ingresar parámetros de explosivo, distribución de carga y secuencia de salida, como los otros módulos de este programa. En la Figura 28 se presenta un ejemplo de diseño de perforación creado con el módulo 2DFace.

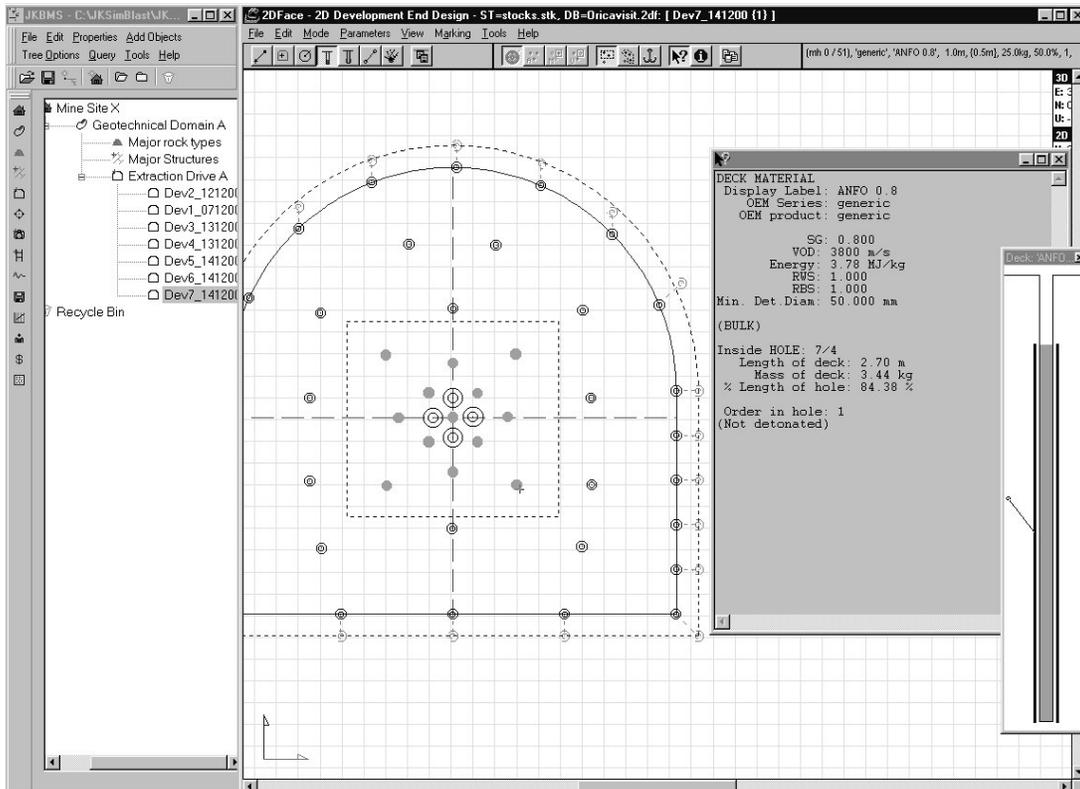


Figura 28 Ejemplo de diseño de perforación de desarrollo en minería subterránea con módulo 2DFace. (Onaderra. I, De la Rosa. D, Riihioja. K, Power. G; 2001)

- Ejemplo uso JKSIMBLAST

Como ya se definió en el punto 2.8.3, es posible simular daño por tronadura tanto en minería de superficie como en subterránea.

Como ejemplo de uso de este programa, se presenta análisis realizado durante el proceso de full control de mina rajo de Codelco Chile - División Andina, en banco 3660, donde se evalúan diferentes parámetros como altura de banco, ancho de berma, ángulo cara de banco y cumplimiento de línea de programa.

Dentro del detalle del análisis realizado, se observa un nulo cumplimiento del ancho de berma. Ver Figura 29.

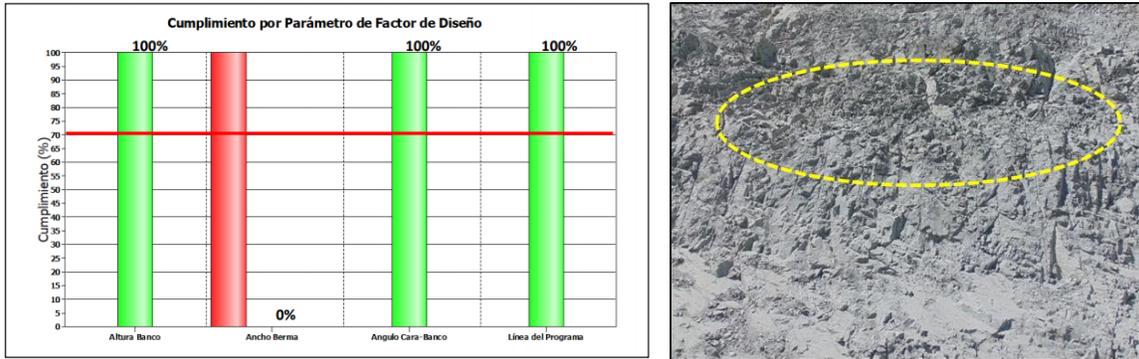


Figura 29 Análisis cumplimiento full control con 0% cumplimiento ancho de berma banco 3660 Mina Rajo. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019)

Para determinar las razones del bajo cumplimiento de berma, se realiza simulación con JKSIMBLAST, bajo parámetros entregados por personal de superintendencia P&T Codelco Chile – División Andina.

- Diámetros de perforación (311 mm, 270 mm y 165 mm) disponibles en mina rajo DAND.
- Pozos de 16m de profundidad, con 10m de carga real
- Características técnicas de los explosivos Pirex P-50 e Hidrex LDB (VOD, densidad y energía).
- Se utilizan K y  $\alpha$  de 300 y 1.205 respectivamente para litología intrusivo duro.
- $PPV_c$  corresponde a 974 mm/s para esta litología.

Se simulan filas buffer y primera producción en zona con daño en berma B3660 MRA. Ver Figura 30.

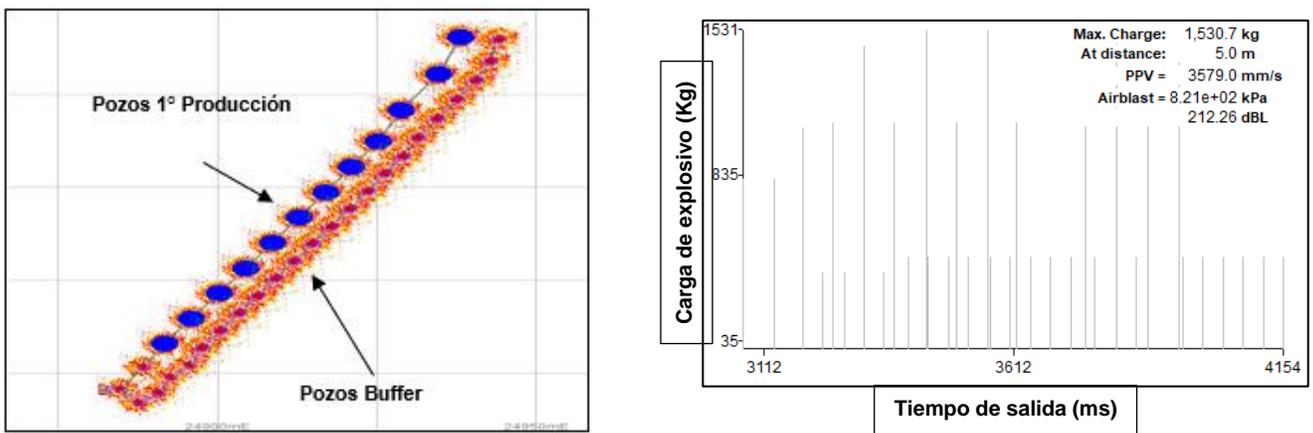


Figura 30 Simulación filas buffer y primera producción B3660 MRA. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019)

Del resultado de esta simulación se obtiene la Tabla 5.

**Tabla 5 Casos evaluados daño en berma B3660 MRA. (Informe interno Codelco Chile – División Andina, 2019)**

Caso Evaluado	Línea Buffer		Línea 1° Producción		PPV Tronadura (mm/s)	Porcentaje de disminución de vibración (%)	Criterio de daño
	Diámetro	Explosivo	Diámetro	Explosivo			
Real	12 ¼" – 10 5/8"	Pirex P-50	12 ¼" – 10 5/8"	Pirex P-50	3579	---	Daño notorio u obvio
2	12 ¼" – 10 5/8"	Hidrex LDB	12 ¼" – 10 5/8"	Hidrex LDB	3481	3	Daño notorio u obvio
3	6 ½"	Hidrex LDB	12 ¼" – 10 5/8"	Pirex P-50	3096	14	Daño notorio u obvio
4	6 ½"	Hidrex LDB	10 5/8"	Hidrex LDB	2439	32	Daño notorio u obvio
5	6 ½"	Hidrex LDB	6 ½"	Hidrex LDB	1536	57	Daño notorio u obvio

- De acuerdo al estudio del caso real, el nivel de vibraciones generadas a un offset de 5 metros es considerable, superando en casi 4 veces el PPV crítico del Intrusivo Duro (ID), lo cual evidentemente se aprecia en la pared, con daño y descreste de la berma de banco 3692.
- De acuerdo a los diversos casos estudiados, se puede apreciar que el cambio de explosivo no es la variable más influyente en las vibraciones de una tronadura, sino que el diámetro con el cual se perfora, ya que el nivel de vibraciones se puede reducir en hasta un 57% a 5 metros de la tronadura con una perforación de 6 ½".

#### 2.8.4 Conclusiones referentes a los softwares de modelamiento

A modo de resumen de las características de los programas se presenta la Tabla 6 con la comparación de los softwares presentados.

**Tabla 6 Comparación software modelamiento tronadura**

	<b>Flac 2D</b>	<b>HSBM</b>	<b>JKSIMBLAST</b>
<b>Adquirible en el mercado</b>	si	no	si
<b>Programable</b>	si	no	no
<b>Análisis de vibración</b>	si(programable)	si	si
<b>Uso diferentes explosivos</b>	si (programable)	si	si
<b>Interacción rajo con labores subterráneas</b>	si(programable)	si	no
<b>Visualizar vibración en función del tiempo</b>	si (programable)	si	no

Concluyendo, en base a lo presentado y resumido en Tabla 6, es posible indicar que de los 3 programas de modelamiento presentado (FLAC2D, HSBM y JKSIMBLAST), el software FLAC2D es el que mejor se adapta a las necesidades de la simulación requerida para el problema planteado debido a su capacidad dinámica, posibilidad de programar la presión dinámica que se produce en un pozo producto de la tronadura y a los tiempos de respuesta del modelamiento además de ser factible adquirirlo en el mercado. Dentro de esto, es posible verificar y crear puntos de control que permiten ver el paso del frente de ondas en el tiempo y evaluar daño según el criterio establecido.

### **3 METODOLOGIA**

Se presenta a continuación la forma de trabajo definida para este estudio, desde el planteamiento inicial hasta el análisis y conclusiones respecto a los resultados obtenidos, con el fin de dar respuesta a la hipótesis definida en el punto 1.2.

#### **3.1 Descripción del trabajo de tesis**

La siguiente investigación tiene como objetivo representar el comportamiento de la onda en el macizo rocoso, desde el fondo del pozo de producción tronado en mina rajo, hasta las cavidades subterráneas cercanas.

Con la finalidad de representar este sistema, se debe generar un modelo numérico que permita simular la propagación de la velocidad de la onda en el medio, producto de la presión ejercida en el pozo al momento de realizar la tronadura. Se utilizará el software FLAC2D, cuyas funcionalidades permiten abordar las necesidades identificadas en el estudio.

#### **3.2 Etapas de trabajo**

Es necesario plantear esquema de trabajo que permita cumplir con el objetivo del estudio. Dentro de este esquema, se deben generar etapas que permitan crear un modelo base de un tiro de tronadura y evaluar su comportamiento con el esperado según modelos predictivos de velocidad de onda, para luego de una calibración, poder simular y evaluar el daño producido por las tronaduras en mina rajo, en las labores subterráneas cercanas.

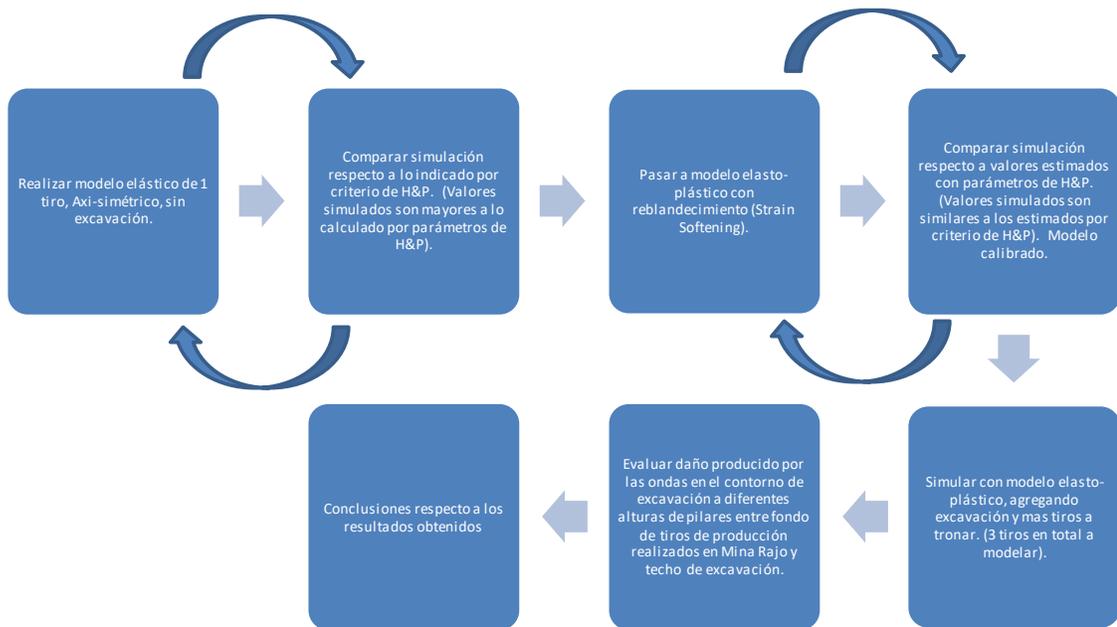
En función de esto se plantean las siguientes acciones:

- Realizar simulación axi-simétrica, elástico y sin excavación, con un solo tiro de tronadura.
- Calibración, con la comparación de valores obtenidos respecto a lo esperado en la simulación, por parámetro de Holmberg and Persson (1993), (campo cercano).
- Uso de modelo elasto-plástico con reblandecimiento (Strain Softening), agregando excavación y más tiros (3 tiros).
- Comparar nueva simulación respecto a lo esperado en puntos de control.
- Agregar excavación y modelar diferentes pilares entre fondo de pozo tronado y galería.
- Caso de estudio

- Realizar análisis y conclusiones respecto a los resultados obtenidos.

En general, se plantea una etapa inicial simplificada para demostrar la factibilidad de modelar una tronadura, para posteriormente realizar una calibración e incluir los pilares a evaluar.

Este esquema queda planteado en la Figura 31.



**Figura 31 Esquema de trabajo planteado para realizar el modelamiento.**

Es importante el avance de las etapas, con la finalidad de lograr demostrar la hipótesis planteada en el inicio de este informe.

En el siguiente capítulo, se presentan los resultados de la etapa inicial del estudio hasta los resultados finales obtenidos, al variar los pilares entre el fondo del pozo detonado y la excavación subterránea cercana.

## 4 MODELAMIENTO Y RESULTADOS

Como se encuentra descrito en el punto 3.2, dentro de las etapas de trabajo, la primera es modelar un solo tiro en un macizo rocoso, con lo que se busca simular una tronadura y evaluar si es posible replicar los casos supersónico y transónico, expuestos por Rossmanith según la velocidad de detonación del explosivo. Dicho análisis se basa en comparar las gráficas de esfuerzo principal mayor y esfuerzo principal menor, versus el tiempo dinámico.

Una vez simulada la tronadura en el caso supersónico, es necesario evaluar el daño según uno de los criterios de los expuestos en este informe. Para este caso se utilizará el criterio de daño del PPV crítico de Holmberg y Persson.

### 4.1 Consideraciones

Las propiedades utilizadas corresponden a las de una litología llamada GDRB (Granodiorita Rio Blanco), perteneciente a Mina Rajo de Codelco Chile – División Andina y al explosivo Pirex P-50, de la empresa Enaex, los cuales se presentan en la Tabla 7:

Tabla 7 Propiedades utilizadas para el macizo rocoso y del explosivo

(residual)	Litología GDRB					Explosivo Pirex P-50		
	GSI	E (Gpa)	Poisson	Cohesión (Mpa)	Fricción (°)	Pdet		
	65	55	0,21	3,8	50	55 kbar		
	45	55	0,26	1,7	32	VOD	5000 mm/s	
	<b>Vp</b>	4800 mm/s					<b>Parámetros de H&amp;P para GDRB</b>	
	<b>Vs</b>	3020 mm/s					<b>K</b>	652
	<b>Sigma ci</b>	120 Mpa					<b>alfa</b>	1,08
	<b>Tracción</b>	10 Mpa						
	<b>Dilatancia</b>	12,5 °						

El valor de la Dilatancia se obtiene según valor de  $\left(\frac{\phi (\text{ángulo de fricción})}{4}\right)$  (Hoek, E; Brown, E.T ;1997), para macizo rocoso competente.

Se define que el rango de deformación a la cual se van a utilizar los valores residuales de las propiedades del macizo rocoso corresponde a  $10^{-4}$ , es decir, a una deformación de 0.0001 en el macizo simulado, se utilizan los valores residuales.

Los valores de  $n$  y  $\beta$  de la ecuación (2), determinan la frecuencia de la señal, la cual resulta difícil de establecer, ya que, los autores usan valores distintos:  $\approx 300$  Hz (Minchinton A and Linch P., 1997),  $\approx 600$  Hz (Blair D and Minchinton A., 1997),  $\approx 1000$  Hz (Daehkne A, Rossmanith H, Shatz J., 1997),  $\approx 2300$  Hz (Rossmanith H and Kouzniak N. 1998)

Para el presente estudio se utiliza un  $\beta$  de 1500 hz y un  $n = 1$  en base a estudio realizado por Vanbrabant F, Chacon E, 2001, en informe IM2 asociado al estudio de aplicación preacondicionamiento al macizo rocoso.

Es necesario indicar que para el desarrollo de este trabajo se utilizan propiedades estáticas, debido a que como la propagación de ondas se trasmite en un medio sólido - elástico (Timoshenko S, Goodier J, 1970; Dowding C, 1985) se determina que la velocidad de propagación  $V_p$  y la velocidad de partícula peak  $PPV_c$  están relacionadas directamente con el módulo de Young ( $E$ ) estático, por solución de las ecuaciones de onda, y no tienen definido hacerlo a través de un modulo dinámico.

## 4.2 Modelamiento sin excavación – Calibración del modelo

Como se menciona en el capítulo de los alcances del estudio, se modelará mediante el software de diferencias finitas **FLAC2D V7.0 con modulo dinámico** (*Fast Lagrangian Analysis of Continua*) de *Itasca Consulting Group*.

En el punto 3.2 se describen las etapas del trabajo a realizar, donde se indica que en una primera etapa, se realizará un modelo sin excavación. En base a lo anterior, se debe generar una geometría simplificada que permita evaluar si es posible, simular una tronadura y ver el avance del frente de ondas en el macizo rocoso.

En la Figura 32 se muestra la geometría utilizada en esta etapa del modelamiento realizado con 1 tiro de diámetro 12 ¼" de 15m de largo, con detonador ubicado desde el fondo del pozo y un taco en superficie el cual confina el explosivo, donde el taco corresponde a 6 metros, la longitud de carga corresponde a 9 metros y el explosivo corresponde a emulsión bombeable Pirex P-50, con propiedades de este explosivo y de la roca presentadas en Tabla 7.

Para la simulación del modelo elástico, se utiliza la geometría expuesta en el capítulo 4.2 y puntos de control en la horizontal desde el pozo detonado a 25 y 48 metros con el fin de determinar el PPV estimado a esta distancia post tronadura.

La ubicación de estos puntos de control viene dada por la distancia máxima del pilar que se evaluara en la siguiente etapa (3 bancos de 16m logrando 48m) y, el segundo, como un punto medio a esta distancia (24m más 1m).

Esta geometría se utiliza para el caso elástico y elasto-plástico.

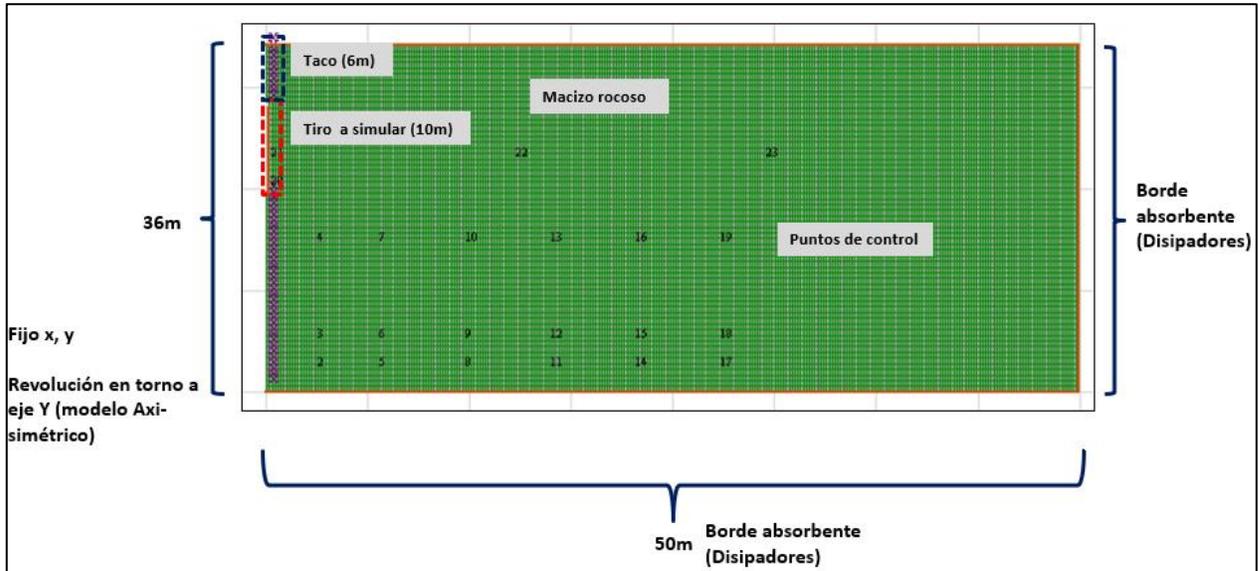


Figura 32 Geometría definida en FLAC 2D con 1 tiro, sin excavación modelo elástico y elasto-plástico.

#### 4.2.1 Simulación ondas P y S

En una primera etapa, se pretende replicar lo expuesto en la literatura, en donde se compara el esfuerzo principal mayor y el esfuerzo principal menor, versus el tiempo dinámico del modelo, tanto para el caso transónico como para el caso supersónico. De esta forma se busca verificar la presencia de las ondas P y S y determinar si es posible simular una tronadura y su propagación de ondas en el medio.

Para simular el caso transónico, se varía el VOD a un valor menor que  $V_p$ . Para este caso se utiliza  $VOD = 4000 \text{ mm/s}$ .

En base a lo anterior y con las propiedades de la GDRB expuestas, se obtiene el siguiente resultado para el caso transónico (Ver Figura 33).

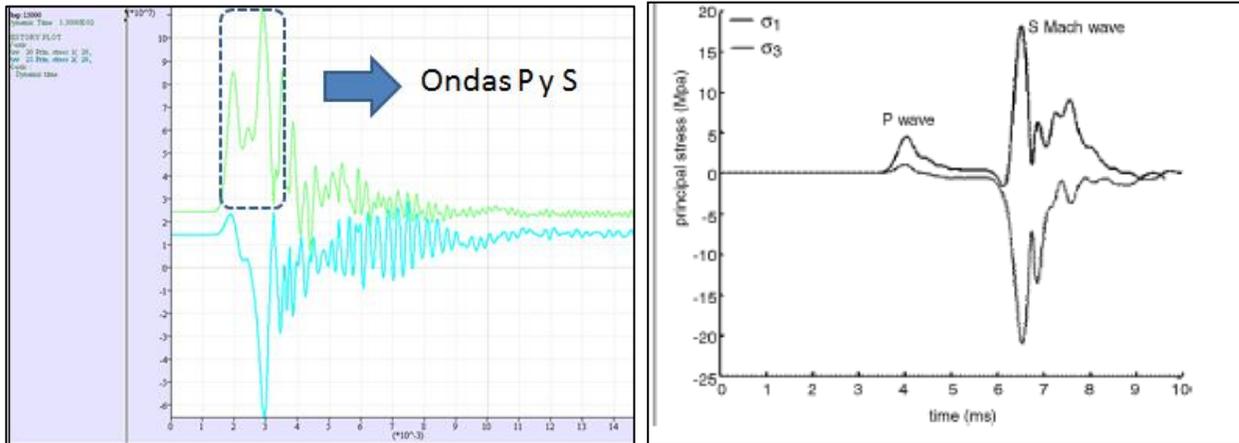


Figura 33 (Izquierda) Presencia de ondas P y S en simulación realizada con Flac2D v7.0 dinámico en gráfico esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo dinámico caso transónico. (Derecha) Magnitud de esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo para el caso transónico, con presencia de ondas P y S. (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002)).

En este caso, es posible indicar que se logra simular la onda P con menor magnitud que la onda S, logrando simular el comportamiento de los esfuerzos versus el tiempo para el caso transónico (VOD del explosivo mayor que  $V_p$  de la roca; VOD=4000 mm/s y  $V_p$ =4500 mm/s) (Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002)).

Para el caso supersónico, se utiliza el VOD del explosivo de 5000 mm/s ( $VOD > V_p$ ), con lo que se obtiene la siguiente gráfica del modelo junto con gráfica esperada de esfuerzos principales vs tiempo. Ver Figura 34.

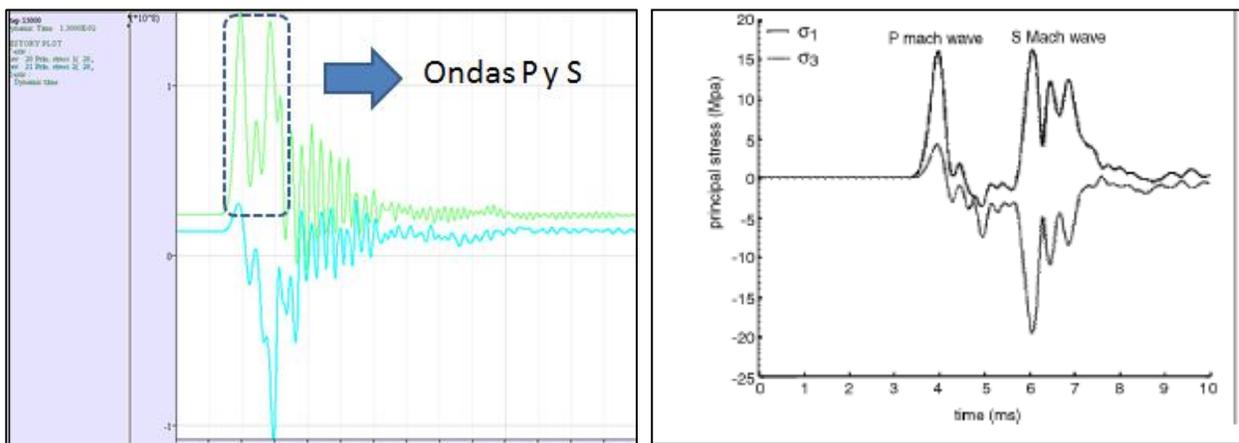


Figura 34 (Izquierda) Presencia de ondas P y S en simulación realizada con Flac2D v7.0 dinámico en gráfico esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo dinámico caso supersónico. (Derecha) Magnitud de esfuerzo principal mayor y menor vs tiempo para el caso transónico, con presencia de ondas P y S. (Quiñones L, Vanbrabant F and Chacón E. 2002).

En este caso, se observa que las ondas P y S son muy similares en magnitud, de acuerdo a lo esperado para el caso supersónico, con lo cual es posible indicar que se logra simular esta condición.

En vista de los resultados obtenidos, se puede indicar que se logra simular una tronadura bajo régimen supersónico y transónico. Esto debido a que es posible representar la propagación de ondas en el medio con el comportamiento de los esfuerzos en el tiempo.

#### 4.2.2 Resultados modelo constitutivo elástico

En base a lo indicado en el capítulo 4.2, se presenta la Figura 35, con los puntos de control evaluados para determinar PPV

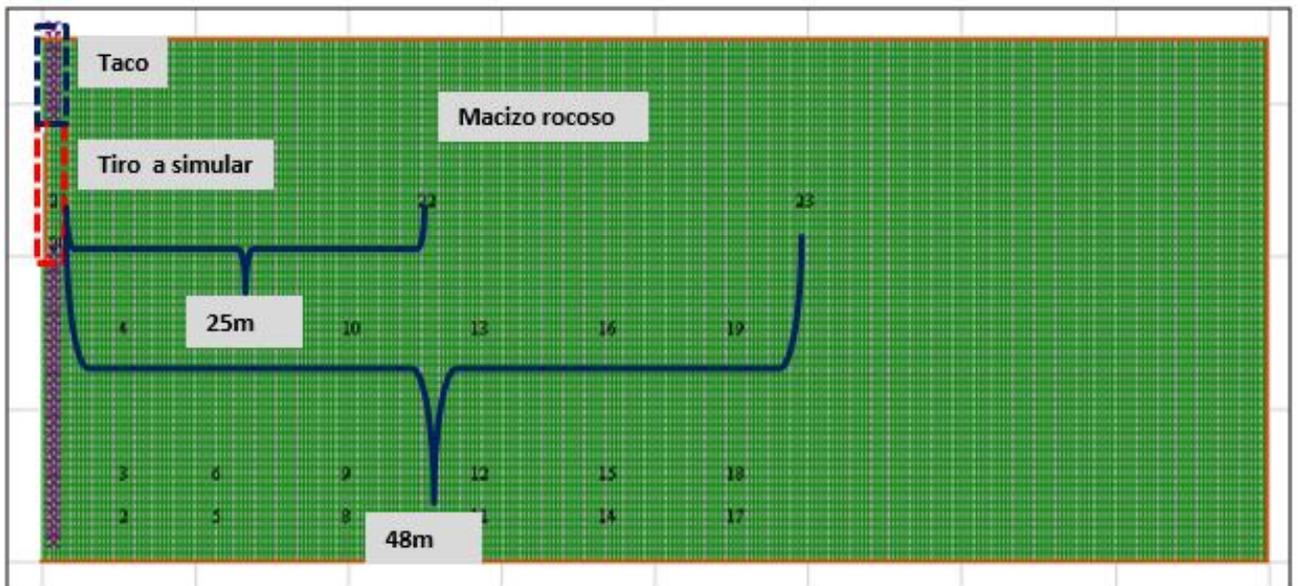
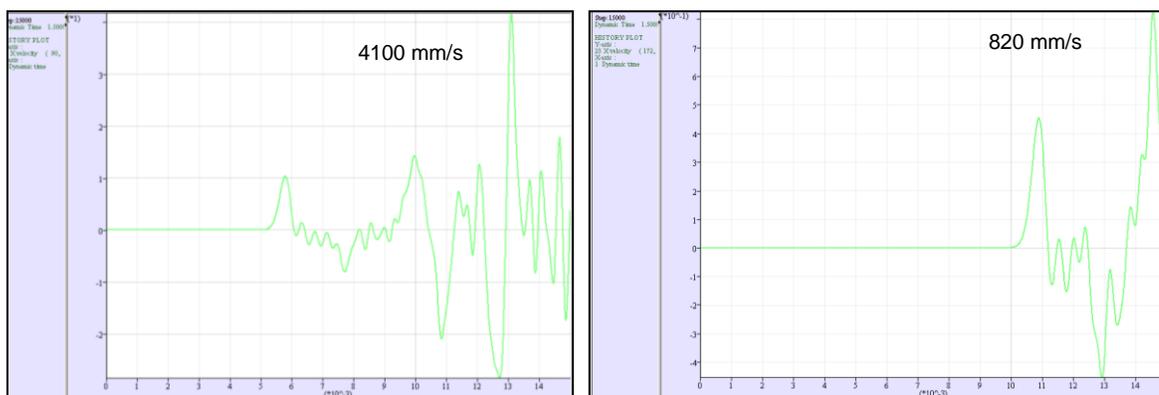


Figura 35 Puntos de control ubicados a 25 y 48 metros de tiro detonado, modelo elástico axi-simétrico.

El valor obtenido de los puntos de control en la simulación se presenta en la Figura 36, con una velocidad de 4100 mm/s aproximados para el punto ubicado a 25m y de 820 mm/s para el ubicado a 48m desde el tiro detonado.

Los resultados de la medición del PPV en la simulación elástica, se presentan a continuación:



**Figura 36 Estimación de PPV en puntos de control con valores de 4100 mm/s y 820 mm/s a 25 y 48m respectivamente.**

Con la finalidad de validar los resultados del modelamiento y verificar si están dentro del rango esperado a la distancia de los puntos de control, es necesario realizar una comparación del dato obtenido por modelo con alguna referencia en esta litología.

En base a lo anterior expuesto, es necesario utilizar los parámetros de Holmberg y Persson de estudio realizado en mina subterránea de Codelco Chile – División Andina para GDRB (Granodiorita Rio Blanco) (INGEOL, 2018). Ver Figura 37.

El presente estudio se realiza en campo cercano (CC), por lo que es comparable con los puntos de control determinados en el modelo y así poder verificar si los resultados obtenidos son similares a los determinados por este criterio.

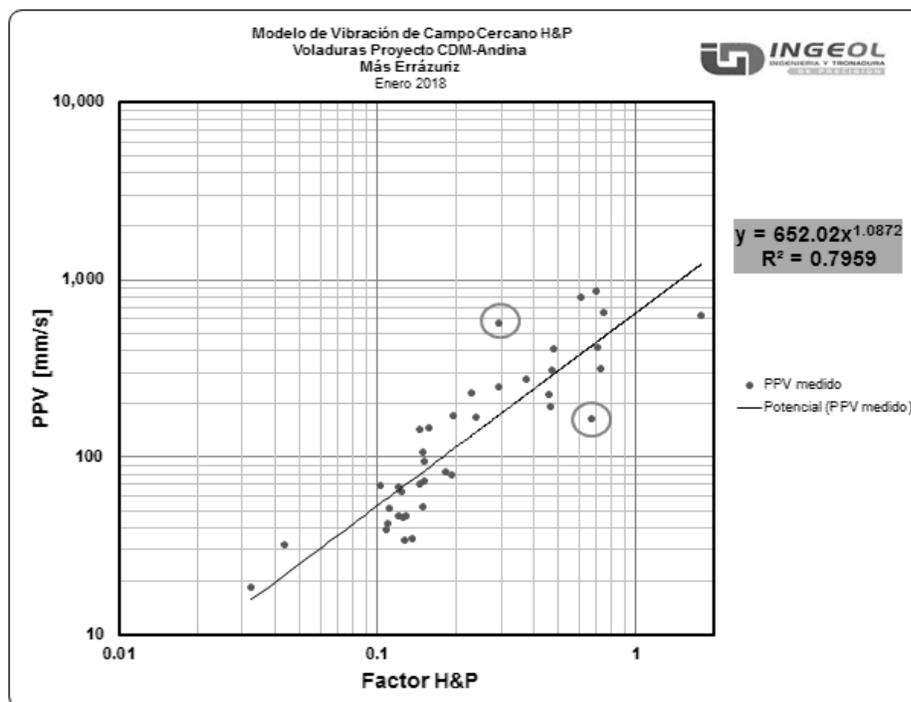


Figura 37 Parámetros de Holmberg and Persson (Campo Cercano) para GDRB obtenidos de Mina Subterránea Codelco Chile – División Andina. (INGEOL, 2018).

En la Tabla 8 se presentan los parámetros de Holmberg and Persson determinados para litología GDRB en Mina Subterránea en Codelco Chile – División Andina. (INGEOL, 2018)

Tabla 8 Parámetros de H&P para litología GDRB (utilizada en modelamiento).

Parámetros de H&P para GDRB	
K	652
alfa	1,08

Para estimar el PPV con estos factores, se utiliza la ecuación 4, del capítulo 2.6 :

En base a lo anterior, se obtiene el valor estimado de velocidad de partícula peak por parámetros de H&P a 25 y 48m respectivamente.

El resultado de PPV estimado y el valor obtenido por modelo se presenta en Tabla 9.

**Tabla 9 Comparación entre valor estimado y simulado a 25 y 48m del tiro en modelo elástico realizado.**

Distancia punto de control desde el tiro (m)	Valor estimado H&P(mm/s)	Valor obtenido de modelo (mm/s)
25	1600	4100
48	430	820

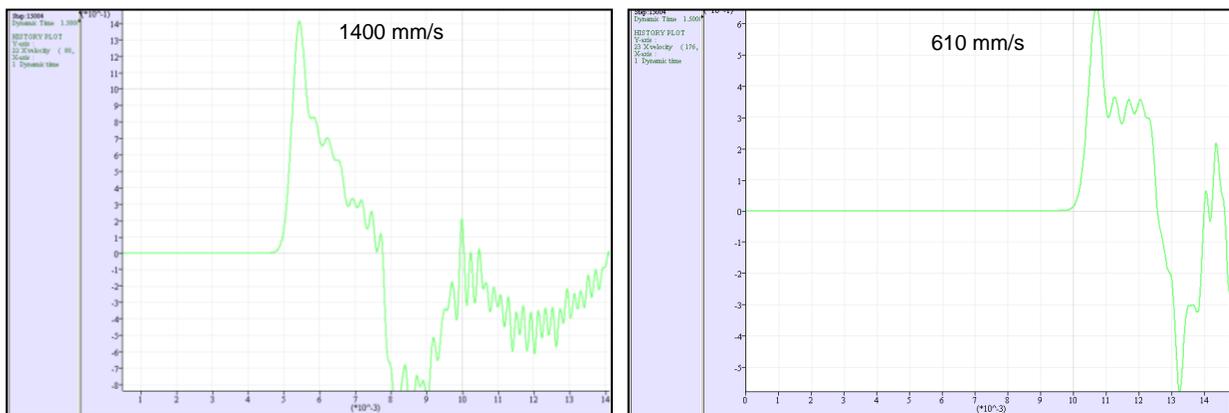
En los resultados expuestos en la Tabla 9, es posible indicar que el valor simulado de PPV sobre-estima en más de 200% para el punto de control a 25m y en un 90% para el punto de control a 48m, el valor obtenido por parámetros de H&P para la distancia de los puntos de control. Debido a esta diferencia en los valores es necesario verificar al comportamiento que se obtendrá en el modelo con el comportamiento elasto-plástico del macizo rocoso.

#### 4.2.3 Resultados modelo constitutivo elasto-plástico

En base a lo expuesto en el capítulo anterior, se debe evaluar el comportamiento de la onda en el medio con un modelo constitutivo diferente al presentado en capítulo 4.2.2, debido a que el modelo elástico sobre-estima el valor del PPV esperado respecto al modelado, por lo cual se utiliza el elasto-plástico con reblandecimiento (Strain Softening, SS).

Los parámetros de propiedades utilizadas se presentan en el capítulo 4.1

En la Figura 38 se presenta las gráficas modeladas en los puntos de control a 25 y 48 metros, con valores de PPV obtenidos de 1400mm/s y 610 mm/s respectivamente.



**Figura 38 Estimación de PPV en puntos de control a 25 y 48m con valores de 1400 mm/s y 610 mm/s respectivamente.**

En vista de lo anterior y comparando respecto a los valores estimados con parámetros de H&P se observa que modelo elasto – plástico se ajusta de mejor forma a los valores esperados (diferencia cercana a 12% en punto de control a 25 metros y de 41% para el punto de control a 48m), respecto al valor estimado. A modo de resumen, se presentan los resultados comparativos en la Tabla 10.

El error a 48m, si bien es cercano al 41%, es menor en un 49% aproximadamente que lo simulado de forma elástica. Adicionalmente se destaca que este error viene dado por que la estimación fue con campo cercano (H&P), siendo que se esta en el límite con campo lejano (Devine). Para este estudio no es posible comparar con un valor estimado de Devine debido a que no se tienen las constantes  $\alpha$  y  $k$  para esta condición de campo lejano.

**Tabla 10 Comparación entre valor estimado y simulado a 25 y 48m del tiro en modelo elástico y elasto-plástico realizado.**

Distancia punto de control desde el tiro (m)	Valor estimado H&P(mm/s)	Valor obtenido de modelo elástico (mm/s)	Valor obtenido de modelo elasto-plastico (mm/s)
25	1600	4100	1400
48	430	820	610

#### 4.2.4 Conclusiones respecto al uso de modelo constitutivo elástico o elasto-plástico

Al realizar la comparación en la simulación sin excavación, **se logra determinar que el modelo constitutivo que mejor se ajusta para un punto de control a 25 y 48 metros es el elasto plástico**, por lo que se decide pasar al modelo con excavación con este modelo constitutivo, destacando que tiene una diferencia respecto al valor esperado cercano al 12% a 25m, en comparación con la simulación elástica, la cual sobre-estima en más de un 200% el valor determinado por los parámetros de H&P.

### 4.3 Modelamiento con excavación

La geometría y condiciones de borde en el modelo con excavación se presentan en la Figura 39.

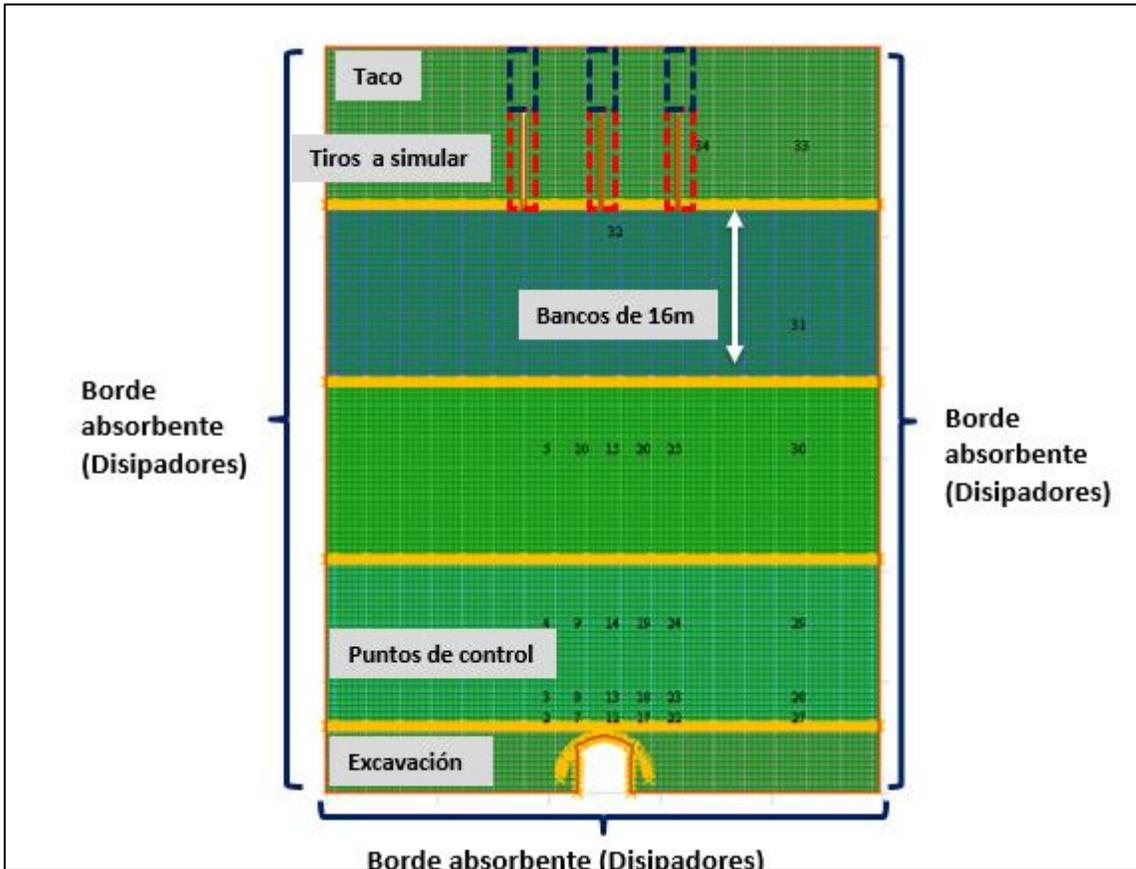


Figura 39 Geometría y condiciones de borde modelo con excavación

En este modelo se definen 3 pilares a evaluar entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación subterránea.

Los pilares generados se definen bajando la tronadura a realizar en bancos de 16 metros de altura. (Pilares de 48, 32 y 16 metros a evaluar).

#### 4.3.1 Modelo con excavación, pilar de 48m.

El análisis se realiza evaluando el impacto de las ondas en el contorno de la excavación subterránea ubicada, para este caso, a 48 metros desde el fondo del pozo al techo de la labor.

El resultado de la simulación en puntos de control ubicados a 1 y 2 metros (puntos de control N°12 y13) sobre el techo de la excavación, tal como se observa en la Figura 40.

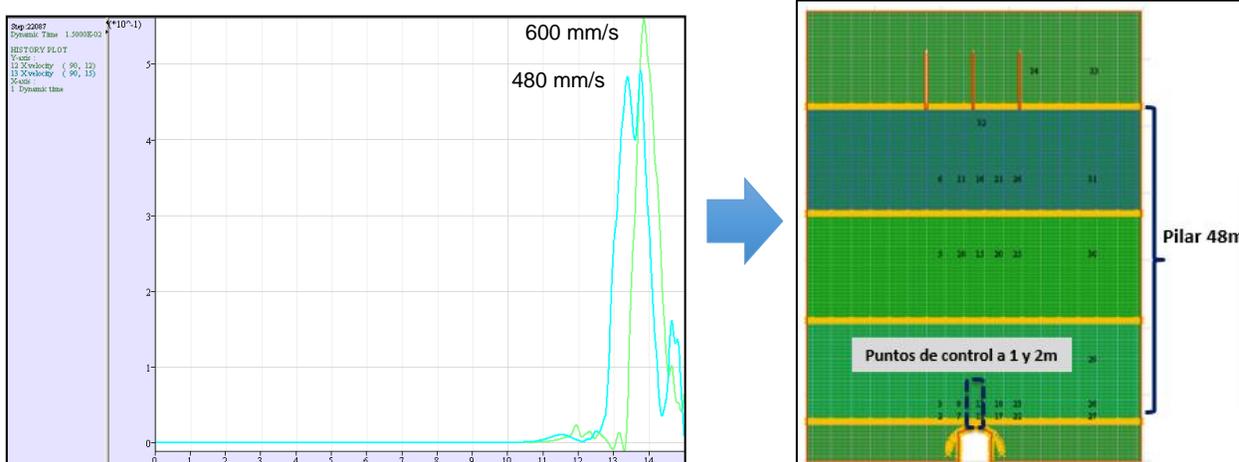


Figura 40 Resultado puntos de control a 1 y 2m pilar 48m (puntos de control 12 y 13 del modelo).

Es posible indicar que el valor obtenido en este caso, se encuentra en el rango de los 480 a 600 mm/s para los puntos de control a 2 y 1m sobre la labor respectivamente, lo cual se presenta en la Tabla 11.

Tabla 11 Distancia puntos de control sobre techo de excavación y valor obtenido del PPV

Distancia punto de control sobre excavación (m)	Valor obtenido de modelo (mm/s)
1	600
2	480

- Amplificación de ondas

Con el fin de poder visualizar el efecto de la amplificación de ondas en la zona del pilar analizado, es necesario realizar la simulación sin excavación para esta zona y luego compararla con el valor obtenido en los puntos de control con la excavación presentado en la Tabla 11. Ver Figura 41.

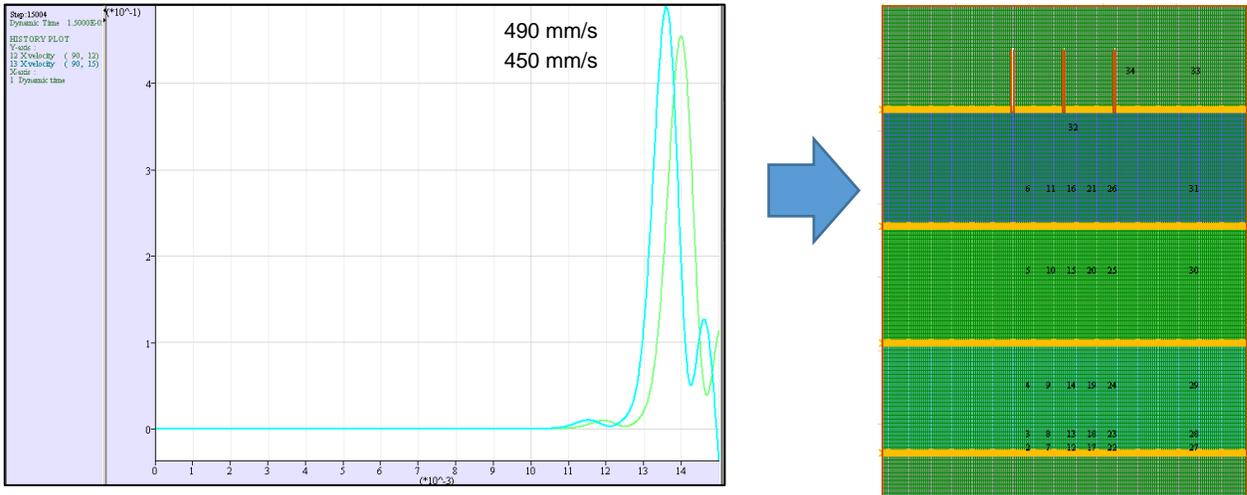


Figura 41 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación.

Según lo presentado, en los puntos de control 12 y 13 del modelo (zona donde se evalúa pilar de 1 y 2 metros en modelo con excavación), los valores obtenidos corresponden a 450 mm/s y 490 mm/s respectivamente.

En la Tabla 12 se presenta la comparación de los valores obtenidos para los puntos de control 12 y 13 del modelo con y sin excavación, donde se aprecia el efecto de amplificación de onda en el punto 12, el cual aumenta con la labor en un 30% aproximadamente.

Tabla 12 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 48m.

Punto de control del modelo	Distancia punto de control (con excavación) (m)	Valor obtenido modelo sin excavación (mm/s)	Valor obtenido modelo con excavación (mm/s)
12	1	450	600
13	2	490	480

- Criterio de daño

Según lo expuesto en el punto 4 (introducción del capítulo) , se utiliza como indicador de daño el valor obtenido por el PPV crítico expuesto en la ecuación 6 de ese capítulo.

Con los datos de la GDRB se tiene el siguiente  $PPV_c = 820 \text{ mm/s}$   
 Utilizando la tabla de umbrales de daño descrita en **Tabla 3** del capítulo 0, se puede indicar lo expuesto en **Tabla 13**:

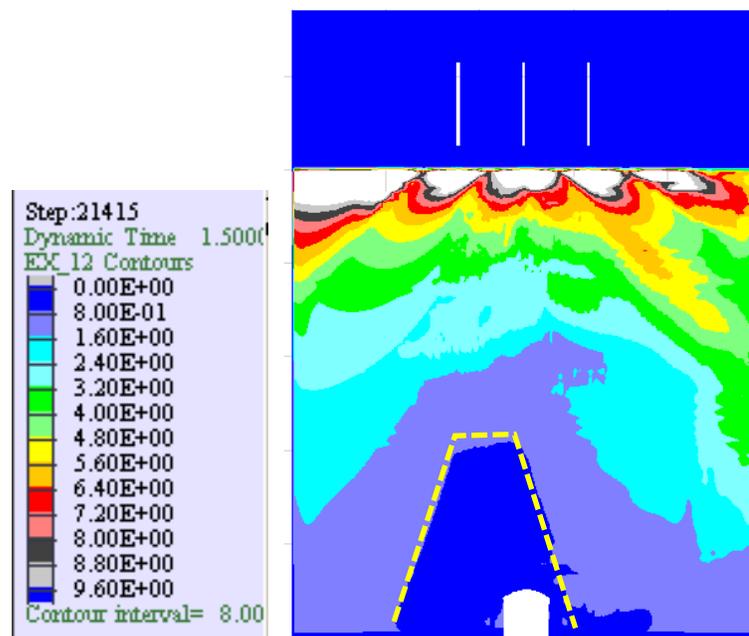
**Tabla 13 Umbrales de daño con valores para el caso de estudio de GDRB**

Umbral	Criterio	Valor (mm/s)
Dilatación de fracturas	$1/4 * PPV_c$	203
Aparición de nuevas grietas	$1 * PPV_c$	812
Daño notorio u obvio	$4 * PPV_c$	3248
Trituración	$8 * PPV_c$	6496

Comparando los valores obtenidos respecto a los umbrales de daño, es posible indicar que puntos de control sobre el techo de la excavación a 1 y 2 metros, se encuentran en la zona de dilatación de fracturas, ya que no supera el PPV crítico determinado para la litología.

Para lograr visualizar de mejor forma el posible daño en el contorno de la galería, se genera imagen con iso-contornos del valor máximo del PPV estimado por modelo versus la distancia desde el tiro tronado, la cual se presenta en la **Figura 42**.

En esta imagen, es posible apreciar que, en la zona demarcada, el PPV obtenido no supera los 800 mm/s porque no se genera daño en el contorno de la excavación y no se deben esperar potenciales inestabilidades en el pilar entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación.



**Figura 42** Imagen con valor máximo de PPV en simulación pilar 48 metros, con contorno de excavación en zona de dilatación de fracturas.

En la Tabla 14 se presenta el rango en el que se encuentra el PPV simulado dentro de los umbrales de daño señalados.

Tabla 14 Umbral de daño según PPV para caso pilar 48m, en zona de Dilatación de Fracturas.

Umbral	Criterio	Valor (mm/s)
Dilatación de fracturas	1/4*PPVc	203
Aparición de nuevas grietas	1*PPVc	812
Daño notorio u obvio	4*PPVc	3248
Trituración	8*PPVc	6496

Según lo visto en la Figura 42, nos permite indicar que en el contorno de la excavación no se produce daño ni se afecta la estabilidad general del pilar entre el fondo del pozo tronado y el techo de la labor.

#### 4.3.2 Modelo con excavación, pilar de 32m.

Se realiza la simulación evaluando un pilar de 32 metros (16 metros bajo el pilar de 48m), este análisis permite verificar y evaluar el impacto de las ondas en el contorno de la excavación post tronadura.

Los resultados se presentan en la Figura 43, donde el PPV obtenido está en 1200 mm/s y 900 mm/s, para los puntos ubicados a 1 y 2 metros del techo de la excavación, lo que para los valores de velocidad de partícula obtenidos, quedan dentro de la zona de aparición de nuevas grietas, ya que supera el PPVc pero no llega al rango de daño notorio (sobre 3000 mm/s).

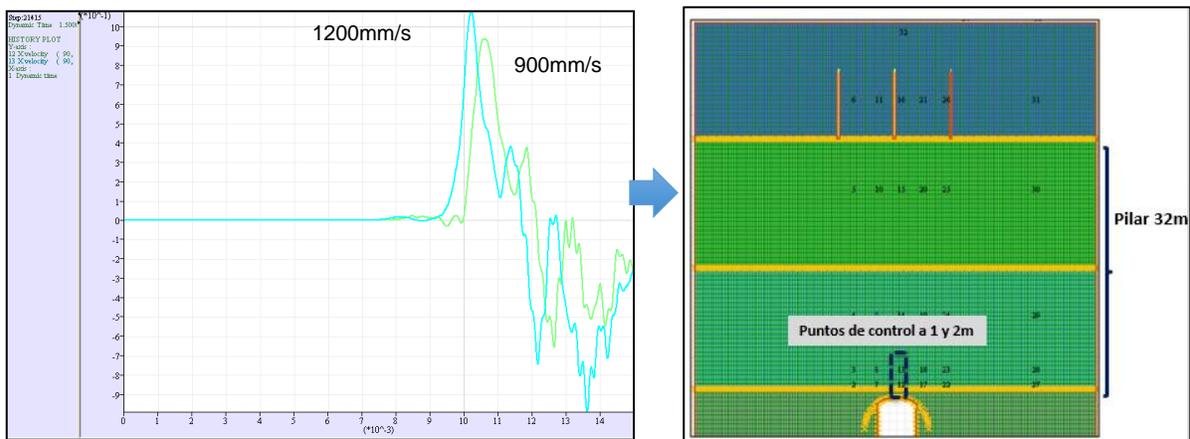


Figura 43 Resultado modelo elasto plástico con excavación en puntos de control a 1 y 2m, pilar de 32m

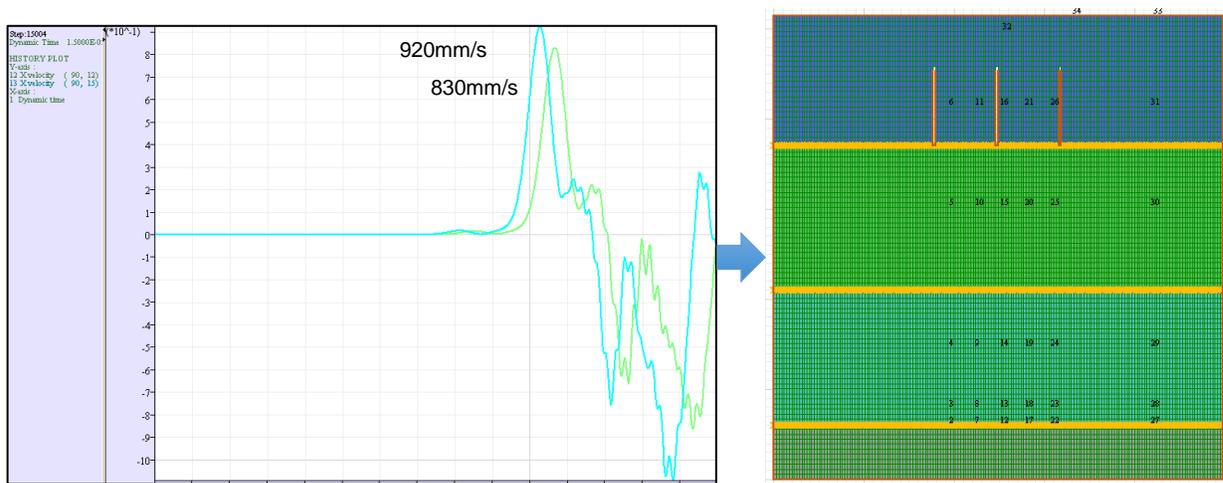
Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 15.

**Tabla 15 Distancia de punto de control sobre excavación con valor obtenido por el modelo pilar 32m**

Distancia punto de control sobre excavación (m)	Valor obtenido de modelo (mm/s)
1	900
2	1200

- Amplificación de ondas

Se realiza la comparación entre los valores obtenidos en los puntos cercanos a la excavación (puntos 12 y 13 mencionados en el punto anterior) con el modelo sin excavación en la misma zona. Ver Figura 44.



**Figura 44 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación.**

Según lo presentado, en los puntos de control 12 y 13 del modelo (zona donde se evalúa pilar de 1 y 2 metros en modelo con excavación), los valores obtenidos corresponden a 830mm/s y 920 mm/s respectivamente.

En la Tabla 16 se presenta la comparación de los valores obtenidos para los puntos de control 12 y 13 del modelo, con y sin excavación, donde se aprecia el efecto de amplificación de onda en el punto 13, el cual aumenta con la labor en un 30% aproximadamente. En el punto de control N°12, el valor aumenta en un rango cercano del 8%.

Tabla 16 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 32m

Punto de control del modelo	Distancia punto de control (con	Valor obtenido modelo sin excavación (mm/s)	Valor obtenido modelo con excavación (mm/s)
12	1	830	900
13	2	920	1200

- Criterio de daño

Se genera la imagen de iso-contornos del valor máximo del PPV estimado por modelo para identificar de mejor forma el daño producido por las ondas en el contorno de la galería en pilar de 32m. Ver Figura 45.

En esta imagen, se aprecia que en la zona marcada (contorno de la excavación), el PPV supera los 800 mm/s, pero no llega a la zona/umbral de daño notorio, por lo que se encuentra en la zona de aparición de nuevas grietas. Es esperable un daño menor en el contorno de la excavación, que no afectaría la estabilidad del pilar entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación.

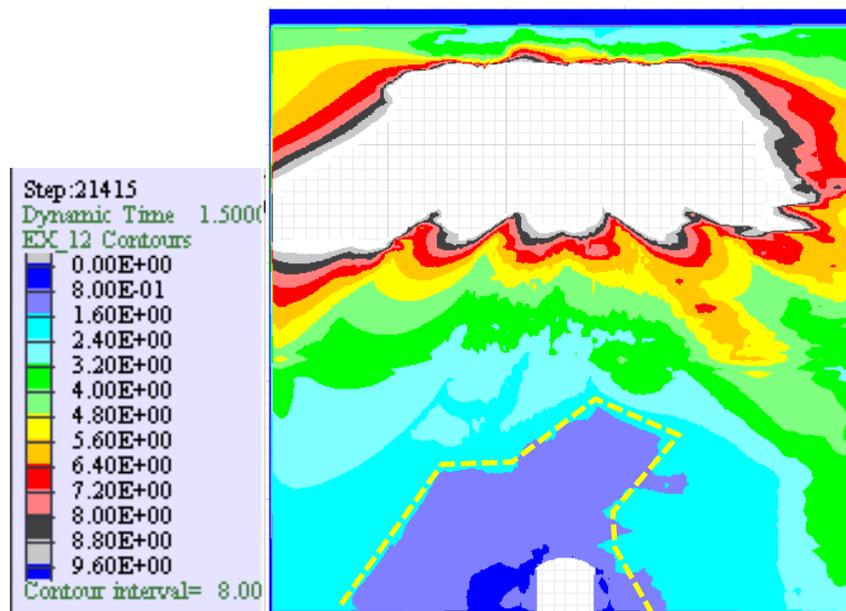


Figura 45 Imagen de Iso contornos de PPV máximo en pilar de 32 metros, con zona en el contorno de excavación en el umbral de aparición de nuevas grietas, donde zona en blanco esta fuera de rango para esta imagen.

En la Tabla 17 se presenta el rango en el cual se encuentra el PPV simulado dentro de los umbrales de daño determinados para esta litología.

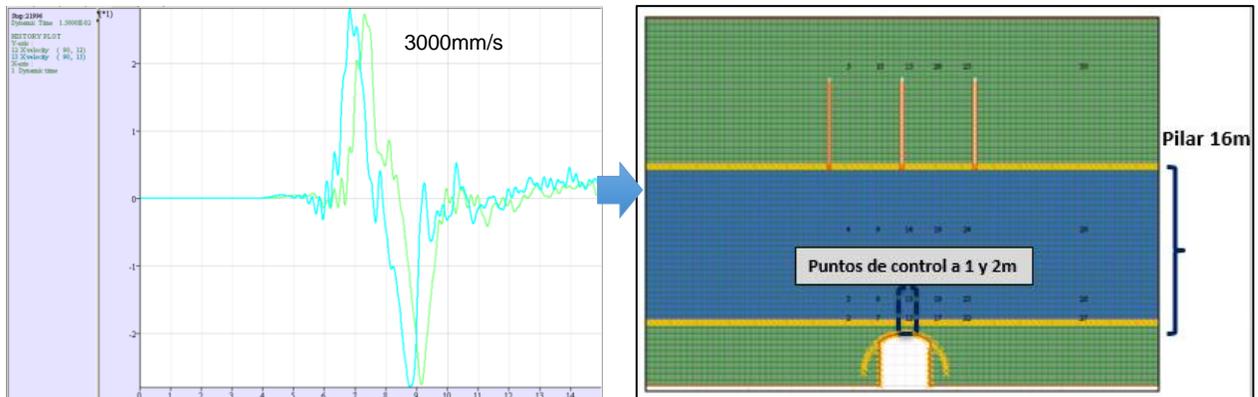
**Tabla 17 Umbral de daño según PPV para caso pilar 32m, en zona de Aparición de nuevas grietas.**

Umbral	Criterio	Valor (mm/s)
Dilatación de fracturas	$1/4 * PPV_c$	203
Aparición de nuevas grietas	$1 * PPV_c$	812
Daño notorio u obvio	$4 * PPV_c$	3248
Trituración	$8 * PPV_c$	6496

#### 4.3.3 Modelo con excavación, pilar de 16m

En el caso del pilar de 16 metros entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación, se verifica la velocidad de partícula máxima en los puntos de control determinados.

En la Figura 46 se presenta la gráfica de PPV vs Tiempo con los valores máximos obtenidos en los puntos de control y la imagen de la geometría modelada con pilar de 16 metros.



**Figura 46 Resultado modelo elasto plástico con excavación en puntos de control a 1 y 2m, pilar de 16m**

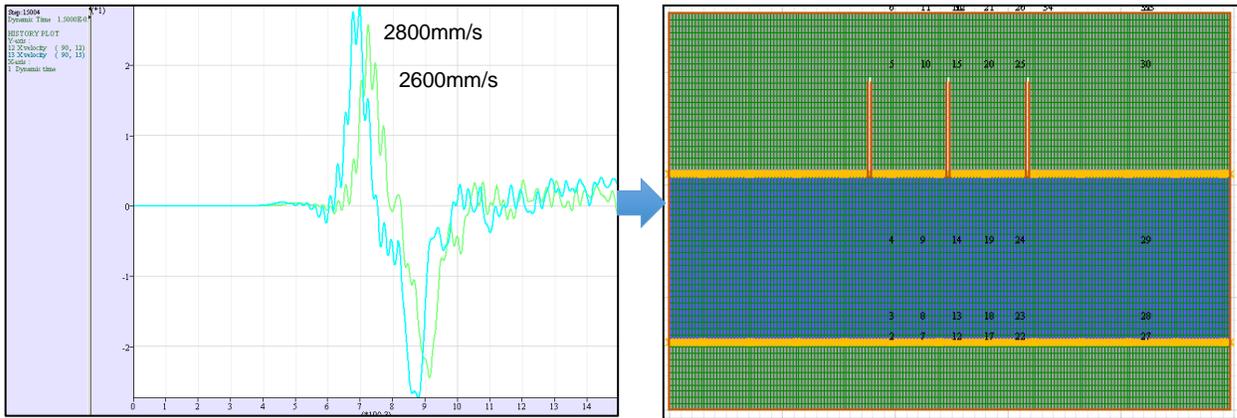
Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 18.

**Tabla 18 Distancia de punto de control sobre excavación con valor obtenido por el modelo pilar 16m**

Distancia punto de control sobre excavación (m)	Valor obtenido de modelo (mm/s)
1	2800
2	3000

- Amplificación de ondas

En la zona del pilar de 16 metros, se realiza la comparación entre los valores obtenidos en los puntos cercanos a la excavación (puntos 12 y 13 mencionados en los puntos anteriores) con el modelo sin excavación en la misma zona, a modo de poder evaluar en la misma zona las velocidades obtenidas en ambos casos. Ver Figura 47.



**Figura 47 Resultado puntos de control 12 y 13 del modelo, sin excavación.**

Según lo presentado, en los puntos de control 12 y 13 del modelo (zona donde se evalúa pilar de 1 y 2 metros en modelo con excavación), los valores obtenidos corresponden a 2600mm/s y 2800 mm/s respectivamente.

En la Tabla 19 se presenta la comparación de los valores obtenidos para los puntos de control 12 y 13 del modelo, con y sin excavación, donde se aprecia el efecto de amplificación de onda en ambos puntos, cercano a un 8%.

**Tabla 19 Comparación resultados punto de control para modelo con y sin excavación, pilar 16m**

Punto de control del modelo	Distancia punto de control (con)	Valor obtenido modelo sin excavación (mm/s)	Valor obtenido modelo con excavación (mm/s)
12	1	2600	2800
13	2	2800	3000

- Criterio de daño

Se genera la imagen de iso-contornos del valor máximo del PPV estimado por modelo para identificar de mejor forma el daño producido por las ondas en el contorno de la galería en pilar de 16m. Ver Figura 48.

En la imagen es posible indicar que el techo y contorno de la excavación se encuentran en el rango de los 3000 mm/s, muy cercano a la zona de daño notorio (3480 mm/s). Es esperable daños en el techo y contorno de la labor subterránea y daños en el pilar entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación, por lo que en la estabilidad del pilar analizado, es esperable que se encuentre comprometida debido a esta tronadura.

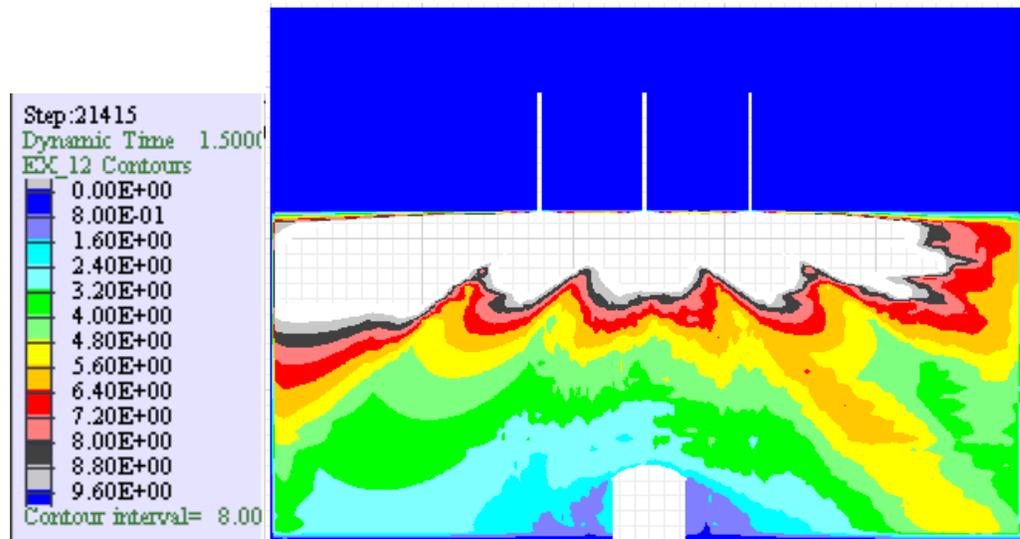


Figura 48 Imagen de Iso contornos de PPV máximo en pilar de 16 metros, con zona en el contorno de excavación en el umbral de aparición de Daño notorio.

Si bien el valor obtenido es bajo los 3480 mm/s (zona de daño notorio), se indica que el PPV estimado en los puntos de control se encuentra en este umbral de daño debido a la cercanía del resultado (3000 mm/s), el cual es cercano a esta zona de daño (14% bajo el valor del umbral mencionado).

En la Tabla 20 se presenta el rango en el cual se encuentra el PPV simulado dentro de los umbrales de daño determinados para esta litología.

**Tabla 20 Umbral de daño según PPV para caso pilar 16m, en zona de Daño notorio.**

Umbral	Criterio	Valor (mm/s)
Dilatación de fracturas	1/4*PPVc	203
Aparición de nuevas grietas	1*PPVc	812
Daño notorio u obvio	4*PPVc	3248
Trituración	8*PPVc	6496

#### 4.3.4 Variabilidad de datos de entrada

Los resultados obtenidos dentro de este estudio corresponden a los simulados en base a los parámetros de entrada presentados en la Tabla 7.

Dentro de estos parámetros, es necesario evaluar como cambian los resultados en base a la variación en los valores de entrada. Para esto, los valores que se van a evaluar en fluctuación corresponden a: el tipo de explosivo a utilizar (VOD) y al factor  $\beta$  (constante asociada a la frecuencia de la señal).

Para revisar el comportamiento de los resultados en base a esta variación se definen dos rangos presentados en Tabla 21.

**Tabla 21 Valores VOD y  $\beta$  para revisar su efecto en los resultados**

	Minimo	Intermedio	Máximo
<b>VOD (mm/s)</b>	5000	5500	6000
<b>beta (<math>\beta</math>)</b>	1000	1500	2000

Para poder revisar su efecto en los resultados, se mantienen los parámetros iniciales y se varía en una primera etapa el VOD en los diferentes pilares analizados.

Los 5 puntos de control donde se realiza esta comparación corresponden a los que están presentados en la Figura 39, y que están a 1m de la excavación (puntos 22, 17, 12, 7 y 2), los cuales para representación gráfica quedarán nombrados como puntos 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente).

Los resultados de esta revisión se presentan en la Figura 49

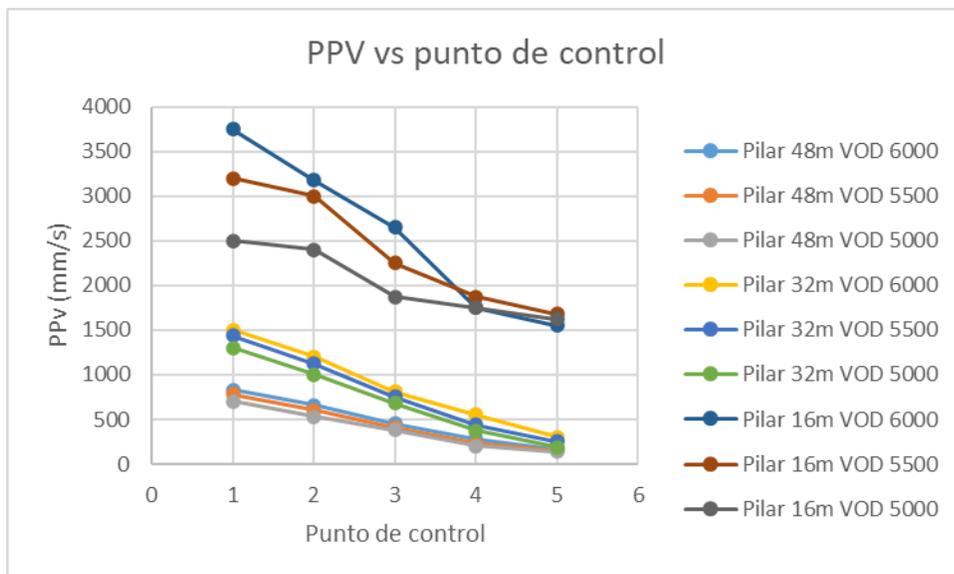
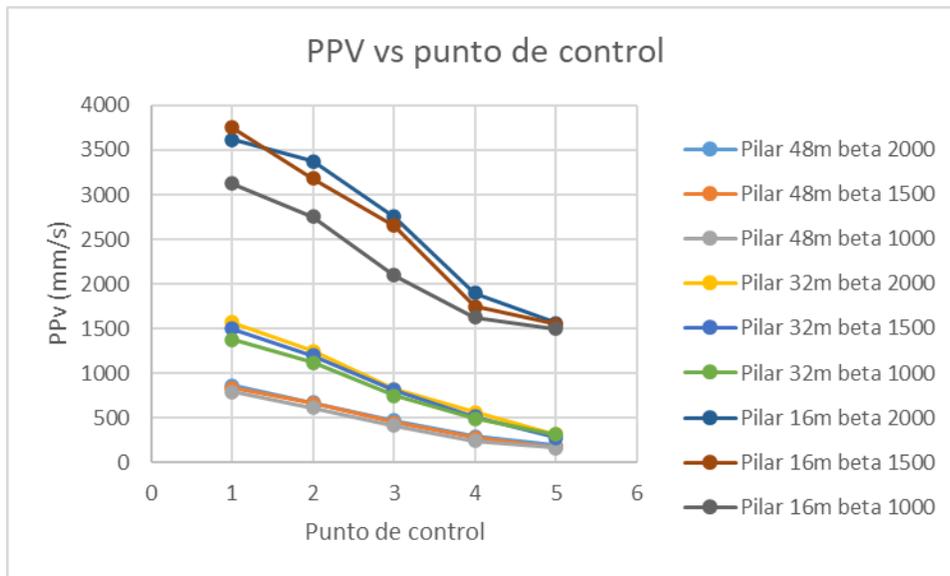


Figura 49 Resultados obtenidos en los diferentes pilares con variación de VOD (elaboración propia).

De los resultados presentados en la Figura 49 es posible indicar que en los pilares de 32 y 48m, la variación en el resultado obtenido respecto al trabajo realizado no es significativa de forma general (variaciones en torno a un 8%), salvo dos puntos en donde la variación máxima corresponde a un máximo de un 16%.

En pilar de 16m, la variación máxima obtenida corresponde a un 22%, respecto a lo realizado en este estudio con una media de un 15% de variación. Estos valores no presentan cambios en el criterio de daño de este estudio ya que no se acerca a la zona de trituración (sobre los 6000 mm/s), pero si corresponde a un cambio y aumento en el valor obtenido cercano a los 4000 mm/s.

Para la segunda etapa, respecto a la variación en el parámetro  $\beta$ , los resultados obtenidos se presentan en la Figura 50.



**Figura 50 Resultados obtenidos en los diferentes pilares con variación de  $\beta$  (elaboración propia).**

De los resultados presentados en la Figura 50, es posible indicar que: en los pilares de 48 y 32 metros, la variación máxima corresponde a un 14%, lo cual no es significativo por los valores de PPV obtenidos en estos pilares, con un valor medio de la variación en el rango de un 6%.

En pilar de 16m, la variación máxima obtenida corresponde a un 20% respecto a lo realizado en este estudio con una media de 11%. Esta variación no presenta cambios en el criterio de daño de este estudio, ya que no se acerca a la zona de trituración (sobre los 6000 mm/s).

Respecto a los resultados obtenidos de la variabilidad de los datos de entrada, es posible indicar que donde más se observa variación en el PPV máximo obtenido, es en la zona del pilar de 16m, donde en la variación del valor del VOD y de  $\beta$  es significativo en los valores obtenidos (sobre un 20%) respecto a la variación de los resultados de los pilares de 32 y 48 metros (variación media de un 8% y 6% respectivamente).

Dentro de los parámetros evaluados (VOD y  $\beta$ ), el parámetro que más afecta a los resultados obtenidos corresponde al VOD, con una media y valor máximo obtenido de  $PPV_c$  superior al de  $\beta$ .

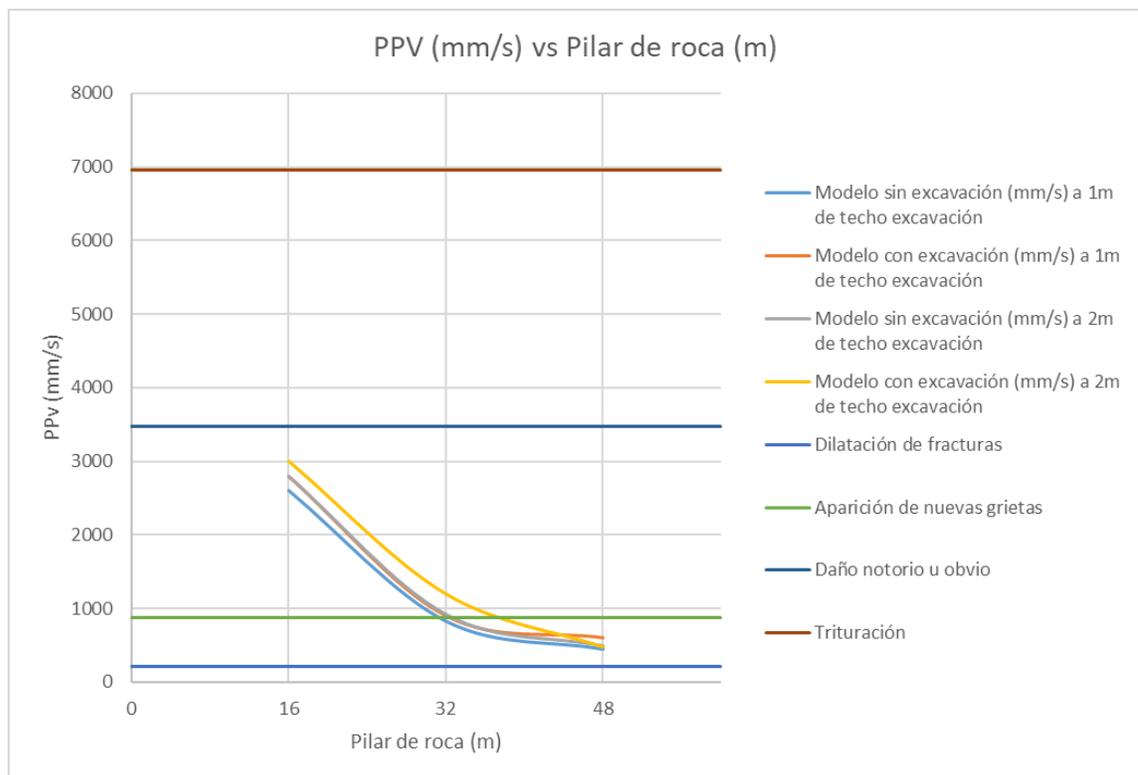
#### 4.3.5 Resumen resultados obtenidos

Como resumen de los resultados obtenidos se presenta la Tabla 22 con los diferentes pilares evaluados y el valor obtenido en PPV.

**Tabla 22 Resumen valores obtenidos con simulación para los diferentes pilares evaluados.**

Punto de control del modelo	Distancia punto de control (con excavación) (m)	Distancia Pilar (m)	Valor obtenido modelo sin excavación (mm/s)	Valor obtenido modelo con excavación (mm/s)
12	1	48	450	600
		32	830	900
		16	2600	2800
13	2	48	490	480
		32	920	1200
		16	2800	3000

De forma de ver este resumen de mejor forma se presenta gráfico con valores obtenidos junto con los límites de PPVc de los umbrales de daño para este estudio. Ver Figura 51.



**Figura 51 Gráfica con valores obtenidos de PPV para los diferentes casos estudiados y los límites de PPVc. Elaboración propia.**

En el caso del pilar de 16 metros entre el fondo del pozo tronado y el techo de la excavación, se verifica la velocidad de partícula

Respecto a la variabilidad de los datos, es importante indicar que en los pilares de 32 y 48 metros no se ve afectado significativamente el PPVc obtenido, sin embargo, en el pilar de 16m, los valores varían en torno a un 20%-22% según se utiliza la variación en el factor  $\beta$  o en el VOD. Dentro de estos dos parámetros, el que más afecta el PPVc obtenido corresponde al VOD.

## 5 CASO DE ESTUDIO

Con el fin de corroborar los resultados de la simulación realizada, se presenta como caso de estudio la tronadura realizada en la Fase 4, banco 3260 de mina rajo Don Luis, Codelco Chile – División Andina, donde desde el fondo del pozo tronado al techo de las labores subterráneas cercanas (caserones del proyecto CAL), se tiene una distancia aproximada de 32-33 metros en diagonal. Ver Figura 52

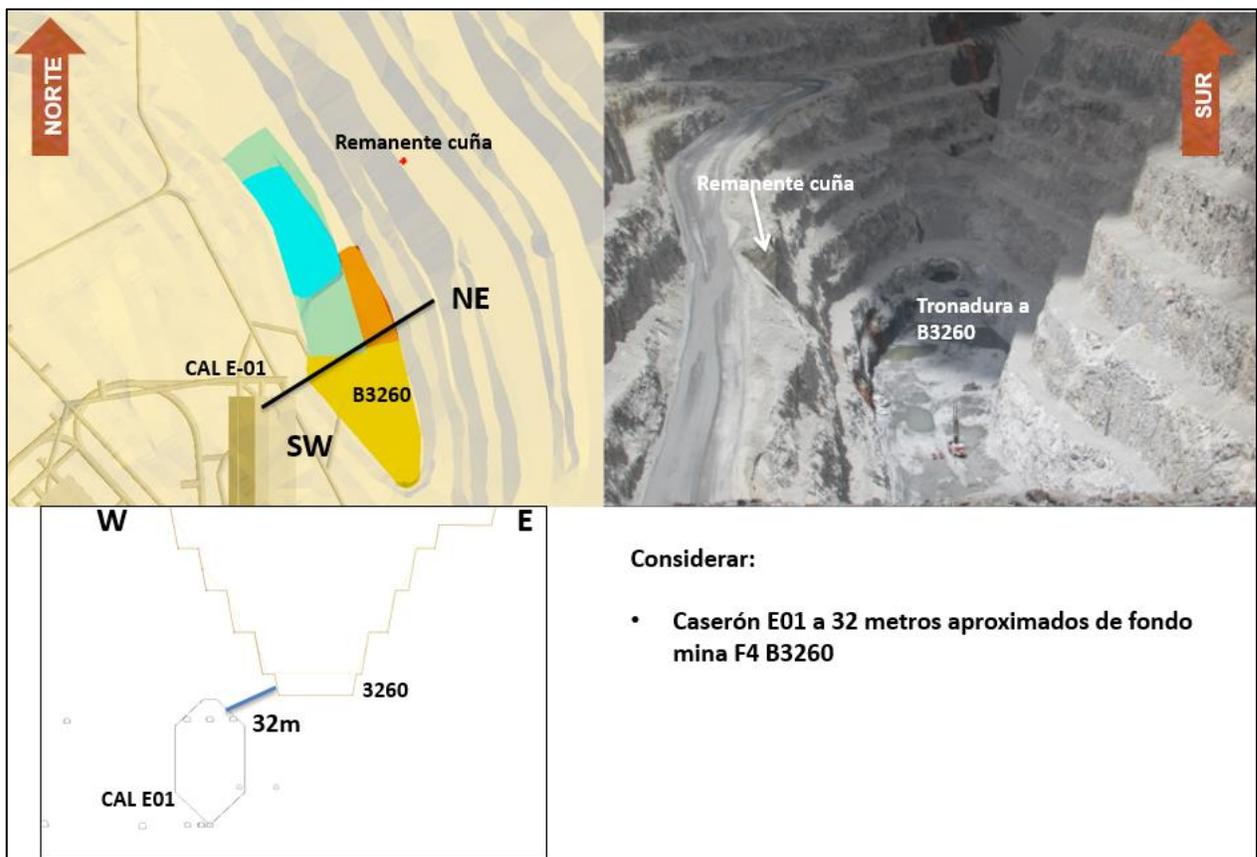
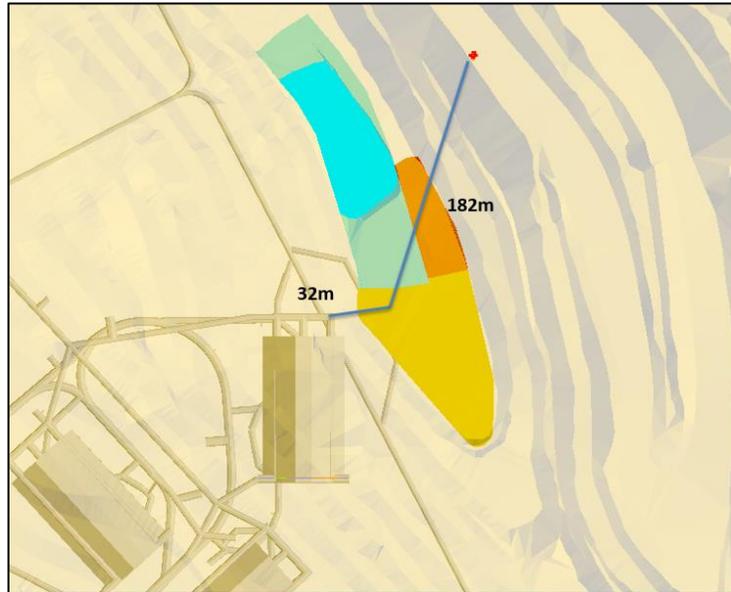


Figura 52 Tronadura a banco 3260 a 32-33 metros de los caserones proyecto CAL (Cuerpos de Alta Ley). Elaboración propia.

Este sector presenta la misma litología utilizada en este estudio, por lo que se mantienen las propiedades de la GDRB planteadas en el análisis de este trabajo.

Visto en planta, a las galerías de cabecera del Caserón E01 hay una distancia aproximada de 32 metros y al remanente de cuña por rampa principal a F4 se tiene una distancia aproximada de 182 metros. Ver Figura 53



**Figura 53** Distancia entre galería cabecera caserón E01 y remanente cuña rampa F4 a tronadura. Elaboración propia

Como antecedentes del sector de caso de estudio, se presenta condición de mapeo estructural (Zarate A, 2015), con interpretación de sistemas presentes tanto en nivel de piso como de techo de caserón E01 proyecto CAL de Codelco Chile – División Andina. Ver Figura 54.

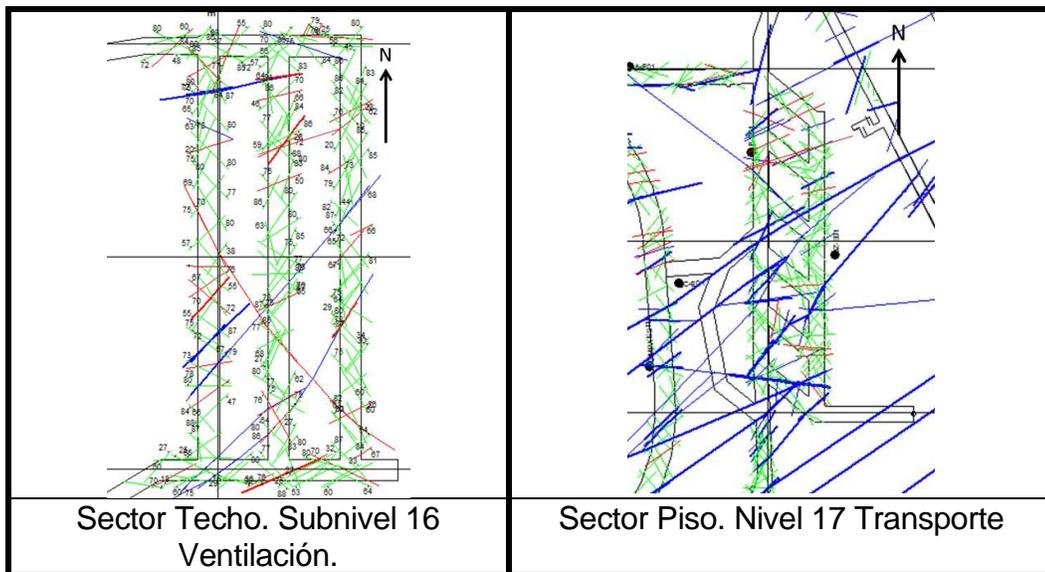


Figura 54 Interpretación Estructural. En verde, diaclasas; en rojo, vetas; en azul, fallas; en rosado, fallas interpretadas en Sector Base (Zarate A, 2015).

En la Figura 55 se presenta condición de galerías caserón E01 antes de tronadura cercana a estas labores.



**Figura 55** Condición de galerías y pilares antes de la tronadura en nivel CAL techo de caserón E01, proyecto CAL. (Zarate A, Lagos C, 2018)

Para esta tronadura se planteó un carguío que permite amortiguar y disminuir las vibraciones generadas por los explosivos en la zona, realizando esto en dos capas (dos deck), en la zona de tiros de producción, Estos se perforan en diámetro 10 5/8 para minimizar la carga por retardo y por lo tanto el PPV generado por esta tronadura. Ver Figura 56

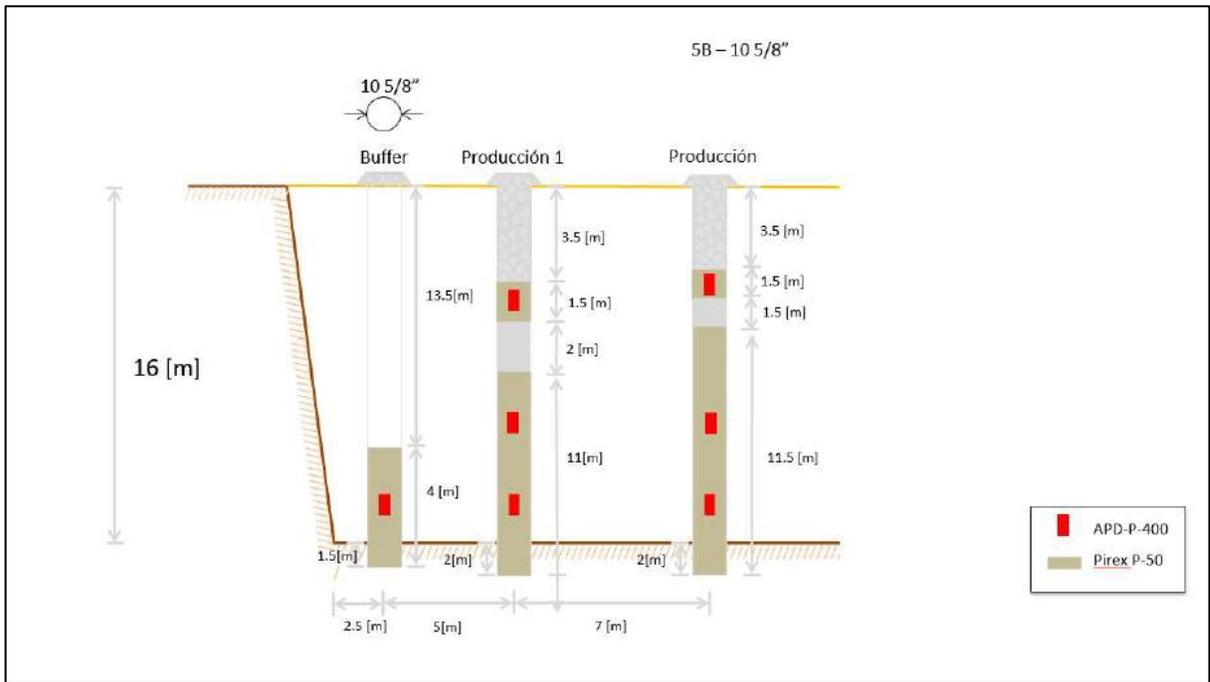


Figura 56 Perfil de carguío pozos buffer y producción. Propuesta de carguío explosivos ENAEX.

La secuencia de salida viene dada a la cara libre en el sector Norte, con salida en "V" y descanso entre filas de 100 milisegundos. Ver Figura 57

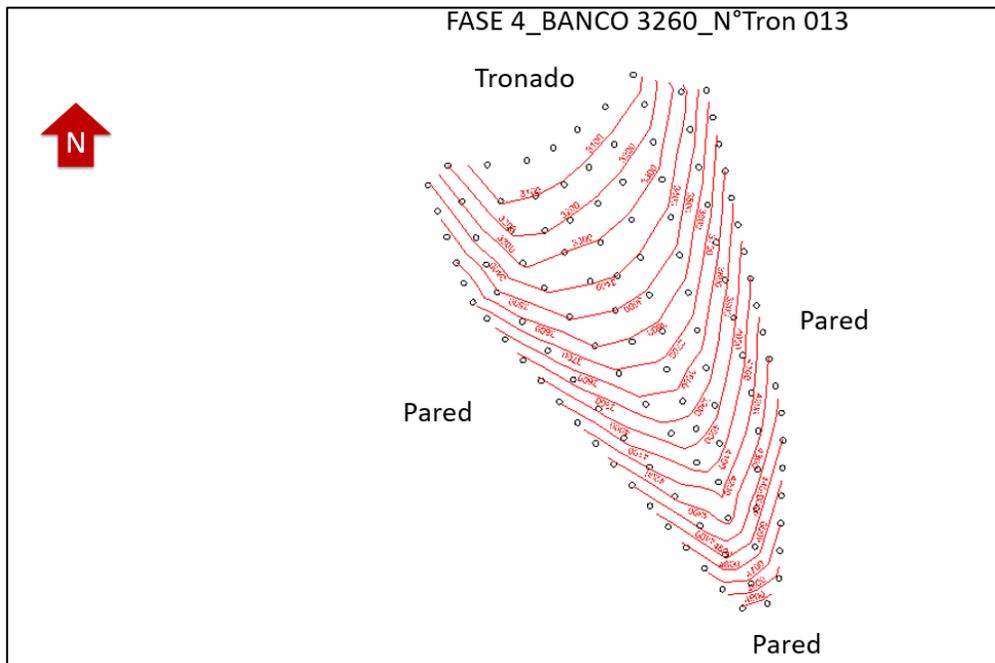


Figura 57 Secuencia de salida (curva de iso-tiempos). Propuesta de secuencia de salida ENAEX software paradigm (ENAEX).

En este caso, se realiza una simulación del PPV en planta por parte de la empresa Enaex (correo interno divisional), la cual tiene dos objetivos. El principal, evaluar la condición de cuña en rampa principal a fondo mina fase 4, la cual se encontraba en la horizontal a 182 metros en planta desde el origen y de 112 metros de diferencia en la vertical. Se define como objetivo secundario cuidar las galerías del caserón E01 proyecto CAL.

Debido al alcance de este trabajo, se utilizará la simulación realizada para las cercanías de las labores de mina subterránea.

Para el caso del caserón del proyecto CAL Este 01, este se encuentra a 32 metros aproximados tanto en planta como en la vertical, lo que para la simulación realizada por Enaex (correo interno divisional), estimó como resultado un valor de 330 mm/s aproximados. Ver Figura 58.

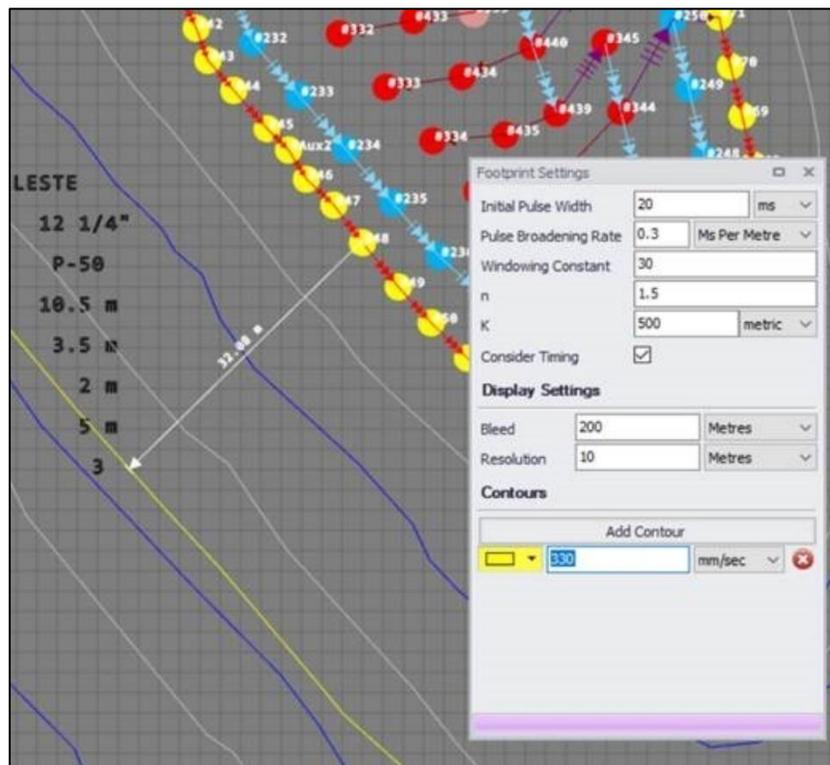


Figura 58 Simulación de PPV a 32m aproximados de tronadura con un valor estimado de PPV de 330 mm/s. Software Paradigm (ENAEX).

Esta velocidad de partícula se encuentra entre el rango bajo  $\frac{1}{4}$  del PPVc y  $1*PPVc$  lo que se encuentra dentro de la zona de dilatación y aparición de nuevas grietas. Ver Tabla 23

**Tabla 23 Umbral de daño según PPV para labores a 32m de tronadura.**

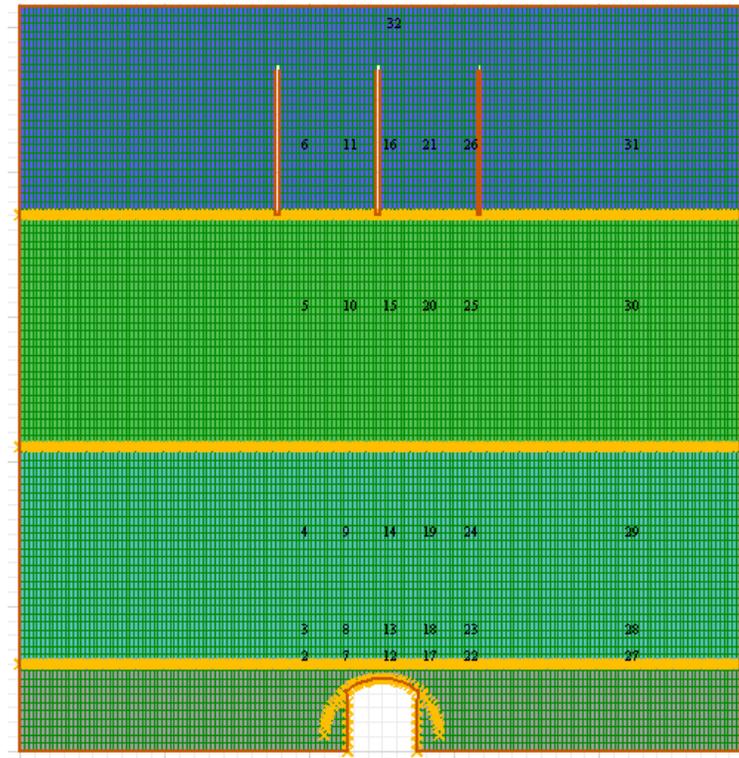
<b>Umbral</b>	<b>Criterio</b>	<b>Valor (mm/s)</b>
Dilatación de fracturas	$1/4*PPVc$	203
Aparición de nuevas grietas	$1*PPVc$	812
Daño notorio u obvio	$4*PPVc$	3248
Trituración	$8*PPVc$	6496

Se destaca que este estudio no presento mediciones con geófonos en terreno para validar la estimación presentada.

## **5.1 Simulación caso de estudio**

Para comparar los resultados del estudio de Enaex, lo esperado versus el modelo presentado, se realiza un cambio al diámetro y longitud de carga utilizado en los casos anteriores, dejando para este caso, los tiros en un diámetro de  $10\ 5/8''$  en vez de  $12\ 1/4''$ , con lo cual también se ajusta la longitud de carga a lo presentado en Figura 56 con una altura de columna de 11 metros, asumiendo deck con mayor carga respecto a la distribución presentada en contrato de tronadura.

En la Figura 59 se presenta la geometría utilizada la que mantiene la estructura de los casos anteriores.



**Figura 59** Cambio de diámetro y longitud de carga de pozos para simulación de tronadura a 32 metros entre fondo de tiro y galería.

En esta configuración, los valores obtenidos del PPV a 1 y 2 metros del techo de la galería corresponden a 720 y 880 mm/s respectivamente.

En la Figura 60 se presenta la gráfica con los valores de velocidad obtenidos en la simulación.

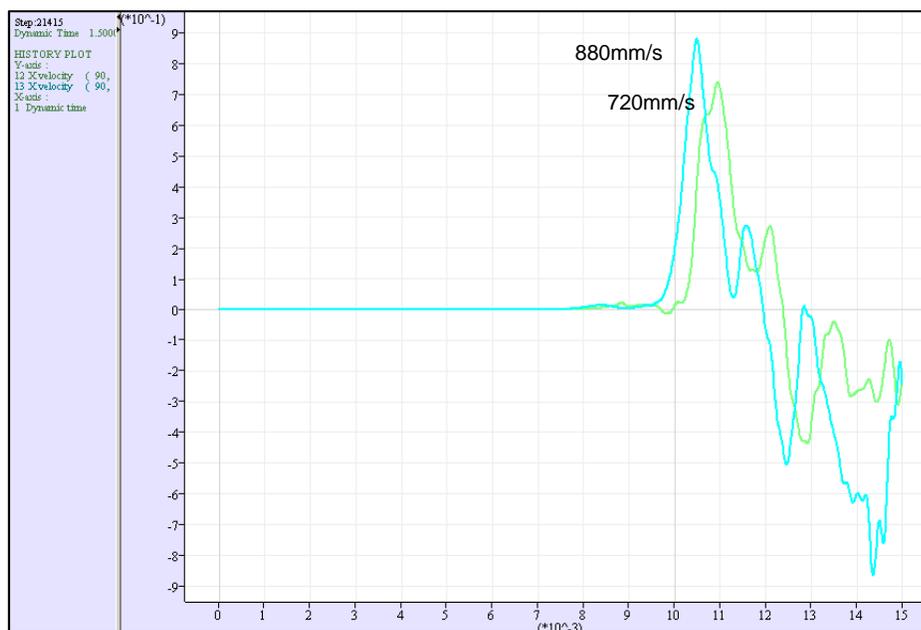


Figura 60 PPV obtenido en los puntos de control a 1 y 2 metros desde el techo de la galería.

En la Tabla 24 se presenta la zona de umbral de daño en la que se encuentra la simulación de PPV realizada.

Tabla 24 Umbral de daño según PPV para caso del pilar de 32m con diámetro de perforación 10 5/8.

Umbral	Criterio	Valor (mm/s)
Dilatación de fracturas	1/4*PPVc	203
Aparición de nuevas grietas	1*PPVc	812
Daño notorio u obvio	4*PPVc	3248
Trituración	8*PPVc	6496

Con el fin de visualizar de mejor forma el PPV obtenido, se presenta en la Figura 61 imagen con iso-curvas de PPV máximo en el contorno de la excavación post tronadura, dejando zona sobre 880 mm/s en el contorno de la excavación.

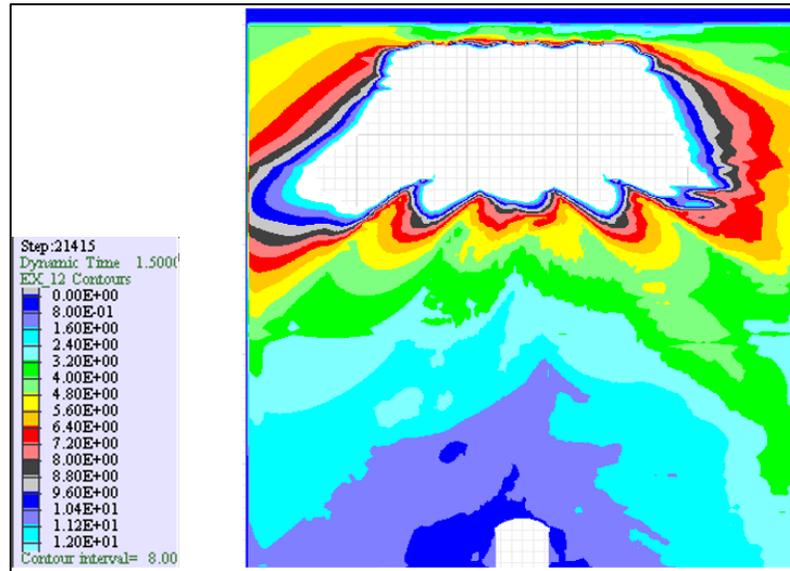


Figura 61 Iso curvas de PPV máximo obtenidos por simulación para el caso de estudio

Estos valores son menores en magnitud respecto del caso del pilar de 32 metros presentado en la Tabla 16, en el que los valores a 1 y 2 metros del techo de la excavación corresponden a 900 y 1200 mm/s. Esta variación viene dada por el cambio de diámetro y longitud de carga del caso de estudio.

**Realizando una comparación respecto a lo presentado simulado inicialmente para este sector, los valores obtenidos son un 240% mayor que lo estimado por modelo realizado para este estudio. Ver Tabla 25.**

Tabla 25 Comparación de valor estimado por Enaex a 32 metros vs valor estimado por modelo para caso de estudio.

Distancia Pilar (m)	Valor obtenido por simulación de Enaex (mm/s)	Valor obtenido por simulación realizada para caso de estudio (mm/s)
32	300	880

Según lo visto en terreno en las cercanías del caserón, es posible indicar que post tronadura, se genera daño en las cajas y techo de la labor de galería cabecera del cuerpo E01, la cual, al estar fortificada, bloques y lajas desprendidas de la zona quedan en su mayoría contenidas dentro de la malla instalada. Ver Figura 62.



Figura 62 Condición de labores en CAL techo, con lajamiento menor en techo y pilares de las galerías. (Zarate A, Lagos C, 2018)

Es relevante indicar que en la zona, ya pasado dos meses, se comienza a generar una extensión del daño inicial en el sector, en dirección a el caserón abierto (al sur de la zona con desprendimiento de bloques post tronadura), en la cual se presentan grietas y extensiones de la misma lo que implica dejar cerrado el acceso a este cuerpo (E01).

En la Figura 63 se presenta una vista en planta con la ubicación del cuerpo E01 y zona en la que se deja cerrado el acceso a la galería de cabecera por el aumento del agrietamiento en el piso del sector.

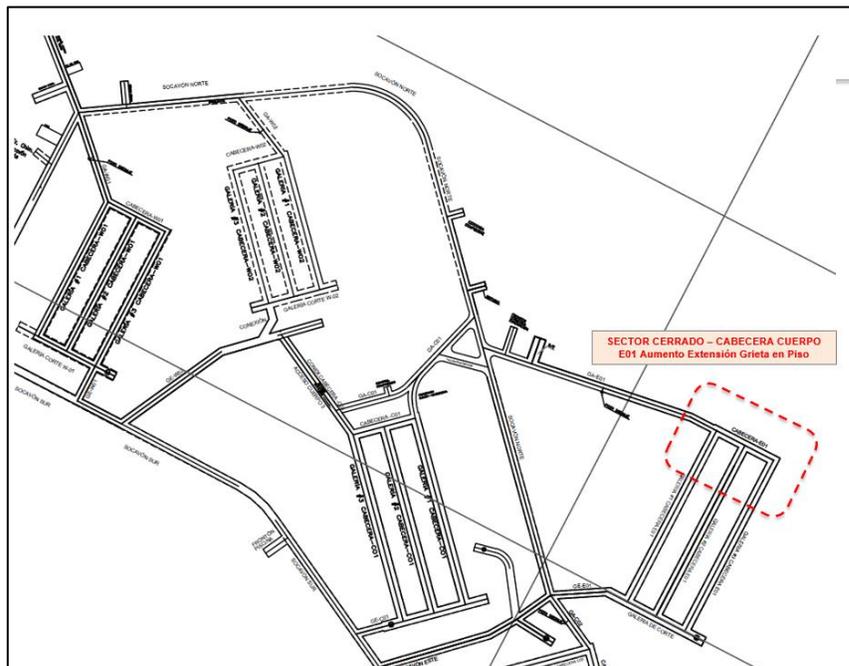


Figura 63 Imagen en planta con ubicación cuerpo E01 y zona cerrada producto de daño y agrietamiento en piso de la galería cabecera.

El daño visualizado en terreno corresponde a lo presentado en Figura 64, con el agrietamiento del piso de la galería de cabecera en dirección al caserón posterior a dos meses de tronadura realizada.

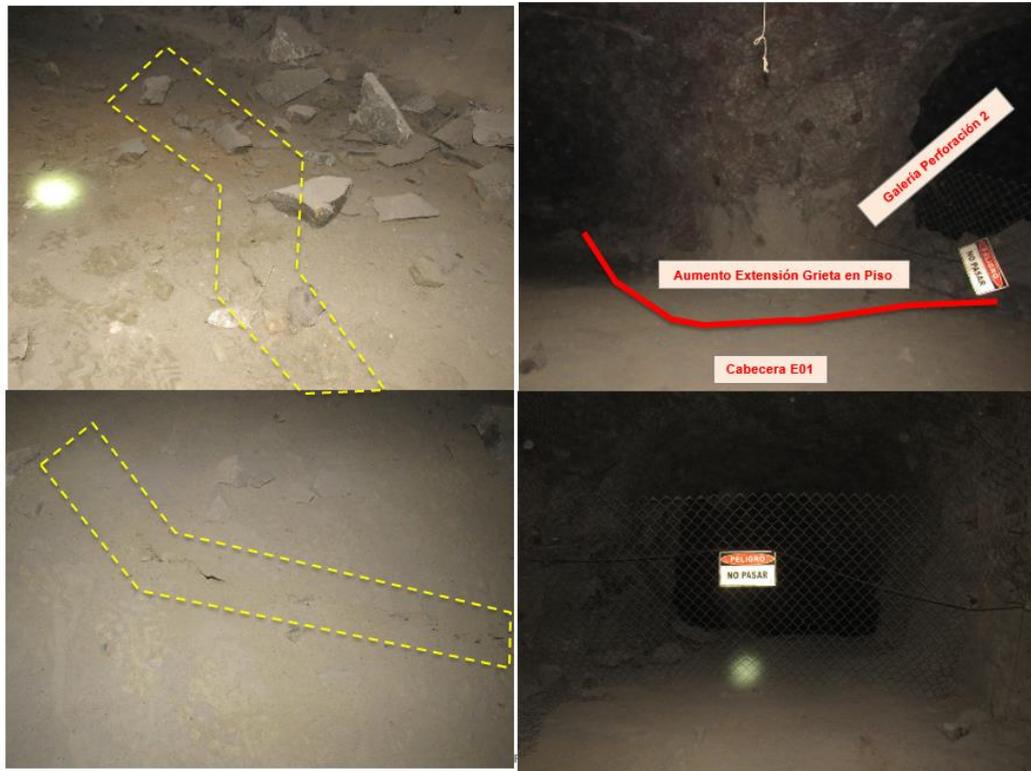


Figura 64 Aumento de daño y agrietamiento en galería cabecera cuerpo E01 meses después de tronadura realizada. (Zarate A, Lagos C, 2018)

Según los antecedentes expuestos y el modelamiento realizado, es posible indicar que la simulación presentada por la empresa Enaex, inicialmente por el área de P&T, no representa lo que se evidenció en terreno post tronadura cercana a las galerías del cuerpo E01 en mina subterránea.

La simulación realizada en base al modelo dinámico realizado en FLAC 2D se ajusta de mejor forma al daño del terreno (lajamiento y daño en pilares), ya que se encuentra en zona de aparición de nuevas grietas (1\*PPVc).

El daño que se presenta posterior a dos meses de tronadura está directamente relacionado con la cara libre del caserón y el aumento del deterioro de la condición por la tronadura efectuada (luz abierta a caserón permite extender daños en el sector).

## 6 CONCLUSIONES

Esta investigación tiene como objetivo representar el comportamiento de la onda en el macizo rocoso, desde el fondo del pozo de producción tronado en mina rajo, hasta las cavidades subterráneas cercanas. Con este fin, se genera un modelo numérico que permite simular la propagación de la velocidad de la onda en el medio, producto de la presión ejercida en el pozo al momento de realizar la tronadura. Se utiliza el software FLAC2D, ya que tiene funcionalidades que permiten abordar las necesidades de este estudio.

Como recapitulación de los resultados obtenidos, se puede indicar lo siguiente:

- Se demuestra que hay transmisión de ondas P y S, por lo que es posible indicar simular una tronadura bajo los supuestos definidos.
- El modelo elástico, axi-simétrico y sin excavación, sobreestima el valor máximo del PPV en los puntos de control ubicados a 25 y 48m desde el tiro tronado.
- Se calibra el modelo elasto-plástico y sin excavación en dos puntos de control, a 25 y 48 metros respectivamente, alcanzando valores cercanos a los estimados según parámetros de H&P (1400 mm/s modelado, 1600 mm/s estimado a 48 metros).
- En el modelo elasto-plástico que considera excavación, el PPV simulado en el contorno de la galería ubicada a 48 metros del fondo de los pozos tronados, no genera daño (no se supera los 800 mm/s).
  - ✓ Al considerar en la última simulación un pilar de 32 metros, los valores del PPV en el contorno de la excavación fluctúan sobre los 800 mm/s (800 a 1200 mm/s; zona de nuevas grietas).
  - ✓ Si la galería se emplaza dejando un pilar de 16 metros, los valores de PPV superan los 3000 mm/s en el contorno de la excavación, (zona de daño notorio).
  - ✓ Al ver el efecto de la amplificación de ondas, es posible indicar que al tener una excavación, los valores máximos obtenidos en los puntos de control aumentan entre un 8% y un 30% para los bancos analizados y comparados con el pilar de 48 y 32 metros.
  - ✓ En el caso del pilar de 16 metros, el valor de amplificación de ondas es cercano a un 8% para los dos puntos de control analizados en este estudio.
- Dentro de la variabilidad de los datos de entrada, el parámetro que más afecta los resultados corresponde al VOD, donde se ve aprecia una variación sobre el 20% de la velocidad de partícula simulada, donde la zona que presenta un cambio significativo en los resultados del PPV corresponde al pilar de 16m, tanto para una

fluctuación del VOD como del parámetro  $\beta$ . En la zona de pilar de 32 y 48m no se genera un cambio mayor en los resultados, con una media de 8% y 6%.

- En la tronadura realizada a 32 metros de los caserones del proyecto CAL (caso de estudio), es posible indicar que los daños vistos en terreno se ajustan de mejor forma a lo presentado por simulación realizada con FLAC 2D para condiciones similares (pilar de 32 metros con tiros en 10 5/8), respecto a lo simulado por ENAEX (modelo inicial al momento de realizar la tronadura), debido a que simulación de este estudio es dinámica y considera el macizo bajo el comportamiento elasto-plástico.
- Respecto al explosivo utilizado en este estudio (Pirex P-50), es necesario indicar que corresponde a un explosivo de producción, por lo cual si se busca un menor daño en las cercanías y en las labores cercanas, se debe utilizar un explosivo distinto de menor energía, con menor densidad y VOD, como Panfex (explosivo de tronadura de contorno), con densidad = 0.35 g/cc y VOD= 2000 m/s o utilizar otro tipo de técnica de tronadura, con la carga distribuida en “deck” o separada en 2 etapas, disminuyendo la carga por retardo en la zona de estudio.
- **De forma general, es posible indicar que se puede evaluar el impacto que tienen las ondas de una tronadura en mina rajo, en una excavación subterránea, donde el daño en general aumenta de forma notoria en el caso de pilar menor a 32 metros.**
- **Como se plantea en el capítulo 4.1, se indica que para el desarrollo de este trabajo se utilizan propiedades estáticas, debido a que como la propagación de ondas se trasmite en un medio sólido -elástico (Timoshenko S, Goodier J, 1970; Dowding C, 1985) se determina que la velocidad de propagación  $V_p$  y la velocidad de partícula peak  $PPV_c$  están relacionadas directamente con el módulo de Young ( $E$ ) estático, por solución de las ecuaciones de onda, y, no tienen definido hacerlo a través de un módulo dinámico.**

**Como se menciona en el párrafo anterior, en este trabajo se utilizan propiedades estáticas, pero se señala que se puede calcular el módulo dinámico de Young ( $E_d$ ) en función de la siguiente ecuación:**

$$E_d = \rho V_p^2 \frac{(1-2V_d)(1+V_d)}{(1-V_d)} \quad (14)$$

**Con lo cual sube el valor del módulo de Young en un 7% aproximadamente (desde 55 GPa a 59 GPa). Al determinar los umbrales de daño con este valor, estos bajan en el mismo porcentaje debido a que este modulo ( $E$ ) es el dividendo en la ecuación del  $PPV_c$  ( $PPV_c = \frac{\sigma_t * V_p}{E}$ ), quedando el nuevo cuadro de umbrales de daño expresado en la Tabla 26:**

**Tabla 26 Umbral de daño según PPVc con Modulo de Young dinámico ( $E_d$ ).**

<b>Umbral</b>	<b>Criterio</b>	<b>Valor (mm/s)</b>
Dilatación de fracturas	1/4*PPVc	203
Aparicion de nuevas grietas	1*PPVc	812
Daño notorio u obvio	4*PPVc	3248
Trituración	8*PPVc	6496

**En función de los resultados obtenidos en este estudio, no varía el resultado del nivel de umbral de daño presentado para cada caso analizado (pilar de 48, 32 y 16 metros), quedando todos los valores del PPV en los puntos de control mostrados, en el mismo rango de daño (dilatación de fracturas para el pilar de 48m, aparición de nuevas grietas en el pilar de 32m y daño notorio u obvio en el caso del pilar de 16m).**

- **Dentro de las mejoras de la metodología planteada, es necesario lograr tener datos de terreno de tronaduras en el sector de estudio antes de empezar a realizar una simulación y posterior calibración en base a estos datos y no a un supuesto de PPV esperado por métodos predictivos usados actualmente.**
- **En trabajos futuros, se recomienda continuar con este estudio, realizando mediciones en terreno con geófonos para calibrar lo esperado con lo medido en terreno. Es necesario, adicionalmente, ver la opción de estudiar comportamiento bajo otras litologías y agregando condición estructural, con otras condiciones de perforación y tronadura (tronaduras de contorno, con menor diámetro y pozos de menor longitud).**

## 7 BIBLIOGRAFÍA

1. Altamirano A. 2014. Diseño de tronadura en una Fase – Aplicación a Minería Continua. Codelco – División Andina. Memoria de título para optar a Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.
2. ASP Blastronics. 2000. Prueba especial en el proyecto de preacondicionamiento en División Andina de Codelco Chile. Institute for Innovation in Mining and Metallurgy, IM2-018/99, Codelco, Chile.
3. Blair D and Michinton A. 1997. On the damage zone surrounding a single blasthole – International Journal of Blasting and Fragmentation 1997, pp 59-72.
4. Chacón F, J. 2000: Tecnología de los Explosivos. Santiago de Chile. Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile.
5. Crowder; J.J, Bawden, W. 2004. Review of post-peak parameters and behaviour of rock masses: current trends and research. Lassonde Institute, University of Toronto.
6. Daehnke A, Rossmannith H, Shatz J. 2009. On dynamic gas pressure induced fracturing – International Journal of Blasting and Fragmentation 2009, pp 73-97.
7. Dowding C, 1985. Blast vibration monitoring and control, pp 45-50.
8. Furtney, JK, Cundall, PA y GP, Chitombo. 2009. Developments in numerical modeling of blast induced rock fragmentation: Updates from the HSBM project. Flagblast 2009, pp 335-342.
9. Gonzalez de Vallejos L. 2004. Ingeniería Geológica, pp 141-157;158-176
10. Hoek E, Brown E.T. 1997. Practical estimates of rock mass strength. International Journal of rock mechanics and mining sciences, pp 1165-1186.
11. Holmberg R, Persson P. 1978. The Swedish approach to contour blasting. Proceedings of conference on explosives and blasting technique, Society of Explosives Engineers, New Orleans, pp. 113-127
12. Holmberg R, Persson P. 1993. Rock Blasting and Explosives Engineering, pp 233-259.
13. Hustrulid, W, Lu W. 2003. The Lu-Hustrulid approach for calculating the peak particle velocity caused by blasting. Explosives and blasting technique 2003, pp 291-300.
14. Ingeol, Ingeroc. 2018. Medición de vibraciones en campo cercano, Cartera de Proyectos Andina
15. Itasca Consulting Group. 2011: FLAC: Fast Lagrangian Analysis of Continua, Users Manual.
16. Jha A: 2015. Impact of surface blasting on underground working and structures. Pp 33-39.
17. Julio A. 2011. Modelación numérica de erosión interna de suelos. Memoria de título para optar a Magister en Ciencias de la Ingeniería, Universidad de Chile.
18. Kouzniak, N. and Rossmannith, H.P. 1998: Supersonic Detonation in Rock Mass ± Analytical Solutions and Validation of Numerical Models ± Part 1: Stress Analysis. International Journal of Blasting and Fragmentation 1998, pp 449-486.
19. Lysmes J, Kuhlemeyer A. 1969. Finite dynamic model for infinite media. Journal of the Engineering Mechanics Division 1969, pp 859-878.
20. Minchinton A, Lynch P. (1997) Fragmentation and heave modeling using a coupled discrete element gas code. Flagblast 1997, pp 41-57.

21. Music A. 2007. Diagnostico y optimización de disparos en desarrollo horizontal, Mina el Teniente. Memoria de título para optar a Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.
22. Onaderra I, Chitombo G, Ruest M. 2007: Burden Movement Experiments Using the Hybrid Stress Blasting Model (HSBM). *Explo 2007 Blasting: Techniques and Technology Proceeding*, pp 177-183.
23. Reveco A., Piñeiro I (2016). HSBM: Implementación corporativa - Implantación División Andina. Informe IM2 13-14.
24. Rivera A. 2008: Tronadura confinada para acondicionamiento de macizos rocoso, Memoria de título para optar a Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile, 2008.
25. Rossmanith H, Kouzniak N. 1998. Supersonic detonation in Rock Mass – Analytical solutions and validation of numerical models- Part 1: Stress Analysis. *Flagblast 1998*, pp 449-486.
26. Rossmanith H, Kouzniak N. 2004. Supersonic detonation in Rock Mass – Part 2: Particle displacement and velocity fields for single and multiple Non-Delayed and Delayed Detonating Blastholes. *Flagblast 2004*, pp 95-117.
27. Rossmanith H, Muller B. 2013. New physical finding revolutionize the drilling and blasting technology as well as the prediction of ground vibrations Part 1: The new Blasting model. *Blast in mines*, pp 29-39.
28. Rossmanith H, Muller B. 2013. New physical finding revolutionize the drilling and blasting technology as well as the prediction of ground vibrations Part 2: Practical applications above ground and underground. *Blast in mines*, pp 41-50.
29. Rossmanith, H., Uenishi, K. and Kouzniak, N. 1997: Blast Wave Propagation in Rock Mass - Part I: Monolithic medium. *Flagblast 1997*, pp 317-359.
30. Saharan M. 2006: Rock Fracturing by explosive energy: Review of state of the art. *Flagblast 2006*, pp 61-81
31. Salehnia F, Collin F, Charlier R. 2016. On the Variable Dilatancy Angle in Rocks Around Underground Galleries. *Rock Mechanics and Rock Engineering 2016*, pp 517-601
32. Sherpenisse C, Silva G. 2018. Clases Módulo Modelamiento de Vibraciones en campo lejano y campo cercano, Módulo excavaciones en roca. Diplomado Geomecánica Aplicada al Diseño Minero.
33. Timoshenko S, Goodier J, 1970. *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, pp 438-456.
34. Tunstall A. 1997: Damage to underground excavations from open pit blasting. *Transaction of Institute of Mining and Metallurgy 1997*, 19-24.
35. Vallejos J. 2017. Clases Modelos Constitutivos – Diplomado Geomecánica aplicada al Diseño Minero.
36. Vanbrabant F., Chacón E (2001). Aplicación de la tronadura precisa al preacondicionamiento del macizo rocoso. Informe IM2 18/99.
37. Vanbrabant, F., Chacón, E., Quiñones, L. (2002). "P and S Mach Waves Generated by the Detonation of a Cylindrical Explosive Charge - Experiments and Simulations". Codelco - Chile- División Andina. *Flagblast 2004*, pp 95-117.
38. Vega I. 2017. Evaluación del daño por tronadura de control de pared mediante software de modelamiento numérico en mina rajo de División Andina – Codelco Chile. Memoria de título para optar a Ingeniero Civil en Minas, Universidad de Santiago de Chile.

39. Xigui Z, Jinbo H, Nong Z, Xiaowei F and Lei Z, 2014. Simulation of the load evolution of an anchoring system under a blasting impulse load using Flac 3D. Hindawi Publishing Corporation – Shock and Vibration 2015, pp 1-8.
40. Zarate A, 2015. Caracterización geotécnica del caseron E01, proyectos cuerpos de alta ley Codelco Chile – División Andina.
41. Zarate A., Lagos C, 2018. Registro inspecciones diarias proyecto CAL Codelco Chile – División Andina.

## 8 ANEXOS

### 8.1 Anexo 1 Método Numérico: Diferencias finitas

#### MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS (SOFTWARE FLAC 2D)

##### Introducción

El método de las diferencias finitas es una clásica aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el modelo matemático de un sistema continuo. Básicamente, las derivadas son reemplazadas por aproximaciones en diferencias finitas, convirtiendo entonces un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico fácilmente resoluble por medios comunes (especialmente matriciales)

##### Método de Expansión de Taylor

El Método de Expansión de Expansión de Taylor es una forma alternativa de obtener aproximaciones de diferencia. Este método no solo deduce las fórmulas de diferencia sistemáticamente, sino que también deduce los términos de error. Para una derivada de p-esimo orden, el número mínimo de puntos de datos requeridos para deducir una aproximación de diferencia es p+1, así por ejemplo una aproximación de diferencia para la primera derivada de una función necesita por lo menos de dos puntos de datos. Si se considera la deducción de la aproximación de diferencia para  $f'_i = f'(x_i)$  en términos de  $f_i = f(x_i)$   $\wedge$   $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ . La expansión de Taylor de  $f_{i+1}$  alrededor de  $x_i$  es:

$$f_{i+1} = f_i + h \cdot f'_i + \frac{h^2}{2} \cdot f''_i + \frac{h^3}{6} \cdot f'''_i + \frac{h^4}{24} \cdot f^{IV}_i + \dots \quad (8.1)$$

Al resolver la ecuación anterior para la primera derivada, se tiene:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''_i - \frac{h^2}{6} \cdot f'''_i - \dots \quad (8.2)$$

Si se ignoran todos los términos con excepción del primero de la parte derecha de la ecuación c.2, se obtiene la aproximación por diferencia hacia adelante. Los términos que se ignoran constituyen el Error Truncado, representado por el término inicial,  $-(h/2) \cdot f''_i$ . Los demás términos desaparecen más rápidamente que el inicial cuando  $h$  disminuye. La aproximación de diferencia hacia adelante, con el error truncado incluido, se expresa como:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + E \quad (8.3)$$

Donde:

$$E \approx -\frac{h}{2} \cdot f_i'' \quad (8.4)$$

El término  $E$  indica que el error es aproximadamente proporcional al intervalo de la retícula  $h$ . El error también es proporcional a la segunda derivada  $f_i''$ .

De la misma forma se puede expandir  $f_{i-1}$  alrededor de  $x_i$  en la forma:

$$f_{i-1} = f_i - h \cdot f_i' + \frac{h^2}{2} \cdot f_i'' - \frac{h^3}{6} \cdot f_i''' + \frac{h^4}{24} \cdot f_i^{IV} - \dots \quad (8.5)$$

Y resolviendo nuevamente para la primera derivada, se tiene:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{h}{2} \cdot f_i'' - \frac{h^2}{6} \cdot f_i''' - \dots$$

Y aquí de la misma manera:

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E \quad (8.6)$$

Dónde

$$E \approx \frac{h}{2} \cdot f_i'' \quad (8.7)$$

Esta aproximación se denomina de Diferencia Hacia Atrás.

Si se toma ahora ambas aproximaciones y se resta la fórmula cuatro con uno, se tiene:

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2 \cdot h \cdot f_i' + \frac{1}{3} \cdot h^3 \cdot f_i''' + \dots \quad (8.8)$$

Expresión de la cual se ha eliminado el término  $f_i''$ . Resolviendo para  $f_i'$ , obteniendo la siguiente expresión:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot h} - \frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot f_i''' + \dots \quad (8.9)$$

Con el término de error incluido, la aproximación de Diferencia Central se expresa como

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot h} + E \quad (8.10)$$

Donde:

$$E \approx -\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot f_i''' \quad (8.11)$$

Resulta interesante que gracias a la cancelación del término  $f_i''$ , el error de la aproximación es proporcional a  $h^2$  y no a  $h$ . Entonces, reduciendo  $h$  se reduce el error con mayor rapidez que con las otras aproximaciones.

Como ya se expuso, una aproximación de diferencia de  $f_i''$  requiere al menos  $p+1$  puntos de datos. Aumentando el número de puntos de datos puede obtenerse una aproximación de diferencia más exacta.

Como ilustración de lo anterior, se deduce una aproximación de diferencia para la primera derivada  $f_i'$  utilizando tres puntos de datos  $f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$ , de modo que se tiene un punto más del mínimo requerido. Las expansiones para  $f_{i+1} \wedge f_{i+2}$  se escriben:

$$f_{i+1} = f_i + h \cdot f_i' + \frac{h^2}{2} \cdot f_i'' + \frac{h^3}{6} \cdot f_i''' + \frac{h^4}{24} \cdot f_i^{IV} + \dots \quad (8.12)$$

$$f_{i+2} = f_i + 2 \cdot h \cdot f_i' + \frac{4 \cdot h^2}{2} \cdot f_i'' + \frac{8 \cdot h^3}{6} \cdot f_i''' + \frac{16 \cdot h^4}{24} \cdot f_i^{IV} + \dots \quad (8.13)$$

Con estas dos ecuaciones es posible cancelar los términos de la segunda derivada, de modo que el término inicial de los errores de truncado es el término de la derivada de tercer orden. Por otro lado, si se eliminaran los términos de la tercera derivada de las ecuaciones (8.12) y (8.13) en lugar de los de la segunda derivada, la aproximación de diferencia obtenida sería menos exacta porque el término del error inicial sería de segundo orden en lugar de ser de tercer orden.

Multiplicando la ecuación (8.12) por la ecuación (8.7) y restándole la ecuación (8.13), se obtiene:

$$4 \cdot f_{i+1} - f_{i+2} = 3 \cdot f_i + 2 \cdot h \cdot f_i' - \frac{2}{3} \cdot h^3 \cdot f_i''' + \dots \quad (8.14)$$

Resolviendo para  $f_i'$ :

$$f_i' = \frac{(4f_{i+1} - f_{i+2} - 3f_i)}{2 \cdot h} + E \quad (8.15)$$

Donde el término de error está dado por:

$$E \approx \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot f_i'''$$

La ecuación 8.15 es la aproximación de diferencia hacia adelante de tres puntos. Su error es del mismo orden que el de la aproximación por diferencial central de dos puntos.

Análogamente, la aproximación de diferencia hacia atrás de tres puntos puede deducirse utilizando

$$f, f_{i-1}, f_{i-2} \rightarrow f'_i = \frac{(-4f_{i-1} + f_{i-2} + 3f_i)}{2h} + E \quad (8.16)$$

Donde

$$E \approx -\frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot f_i'''$$

Las aproximaciones de diferencia para la segunda derivada se deducen aplicando el mismo principio, el cual consiste en eliminar la primera derivada y el mayor número posible de derivadas de orden dos ó superior.

Como ilustración se deducirá la aproximación de diferencia para  $f_i''$  en términos de  $f_i, f_{i-1}, f_{i+1}$ . Las expansiones de Taylor de  $f_{i-1}$  y  $f_{i+1}$  están dadas por las ecuaciones 8.5 y 8.1 respectivamente. Sumando ambas se tiene:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 \cdot f_i + h^2 \cdot f_i'' + \frac{h^4}{12} \cdot f_i^{IV} + \dots$$

Ó de forma equivalente:

$$f_{i+1} + f_{i-1} - 2 \cdot f_i = h^2 \cdot f_i'' + \frac{h^4}{12} \cdot f_i^{IV} + \dots$$

Entonces, si se trunca después del término  $f_i''$  y se reacomodan los términos se tiene:

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 \cdot f_i}{h^2} + E \quad (8.17)$$

La ecuación anterior es la aproximación de diferencia central para  $f_i''$ , donde el error está representado por:

$$E \approx -\frac{h^2}{12} \cdot f_i^{IV}$$

Se puede deducir otra aproximación de diferencia para  $f_i''$  en términos de  $f_i, f_{i-1}, f_{i-2}$  (el número mínimo de puntos de datos para  $p = 2$  es 3). Si se multiplica por 2 la expansión de Taylor de  $f_{i-1}$  y la restamos de  $f_{i-2}$ , el resultado será:

$$f_{i-2} - 2 \cdot f_{i-1} = -f_i + h^2 \cdot f_i'' - h^3 \cdot f_i''' + \dots$$

Resolviendo la anterior para la segunda derivada:

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2 \cdot f_{i-1} + f_i}{h^2} + E \quad (8.18)$$

En la cual el error está dado por:

$$E \approx h \cdot f_i'''$$

La ecuación **8.18** es la aproximación de diferencia atrás para  $f_i''$ . El orden de su error de truncado es menor que el de la aproximación de diferencia central, dada por **8.17**. De este modo la mayor exactitud pertenece a la aproximación de diferencia central.

De forma similar se pueden obtener aproximaciones de diferencia para derivadas superiores, pero la deducción se hace cada vez más laboriosa al aumentar tanto el número de términos como el orden de la derivada.

No obstante, a continuación, se entregan las expresiones de diferencias finitas, cuyo uso es frecuente:

Primera Derivada:

Aproximación de diferencia hacia delante

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{1}{2} \cdot h \cdot f_i''$$

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4 \cdot f_{i+1} - 3 \cdot f_i}{2 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot f_i'''$$

$$f_i' = \frac{2 \cdot f_{i+3} - 9 \cdot f_{i+2} - 18 \cdot f_{i+1} - 11 \cdot f_i}{6 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{1}{4} \cdot h^3 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencia hacia atrás

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_i''$$

$$f_i' = \frac{+f_{i-2} - 4 \cdot f_{i-1} + 3 \cdot f_i}{2 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{3} \cdot h^2 \cdot f_i'''$$

$$f_i' = \frac{-2 \cdot f_{i-3} + 9 \cdot f_{i-2} - 18 \cdot f_{i-1} + 11 \cdot f_i}{6 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{4} \cdot h^3 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencias centrales

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot f_i'''$$

$$f_i' = \frac{-f_{i+2} + 8 \cdot f_{i+1} - 8 \cdot f_{i-1} + f_{i-2}}{12 \cdot h} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{30} \cdot h^4 \cdot f_i^{IV}$$

Segunda Derivada

- Aproximaciones de diferencias hacia adelante

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2 \cdot f_{i+1} + f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx h \cdot f_i'''$$

$$f_i'' = \frac{-f_{i+3} + 4 \cdot f_{i+2} - 5 \cdot f_{i+1} + 2 \cdot f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx \frac{11}{12} \cdot h^2 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencias hacia atrás

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2 \cdot f_{i+1} + f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx h \cdot f_i'''$$

$$f_i'' = \frac{-f_{i-3} + 4 \cdot f_{i-2} - 5 \cdot f_{i-1} + 2 \cdot f_i}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx \frac{11}{12} \cdot h^2 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencias centrales

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}}{h^2} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{12} h^2 \cdot f_i^{IV}$$

$$f_i'' = \frac{-f_{i+2} + 16 \cdot f_{i+1} - 30 \cdot f_i + 16 \cdot f_{i-1} - f_{i-2}}{12 \cdot h^2} + E \quad ; \quad E \approx \frac{1}{90} \cdot h^4 \cdot f_i^{VI}$$

### Tercera Derivada

- Aproximaciones de diferencia hacia adelante

$$f_i''' = \frac{f_{i+3} - 3 \cdot f_{i+2} + 3 \cdot f_{i+1} - f_i}{h^3} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{3}{2} h^2 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencia hacia atrás

$$f_i''' = \frac{f_i - 3 \cdot f_{i-1} + 3 \cdot f_{i-2} - f_{i-3}}{h^3} + E \quad ; \quad E \approx \frac{3}{2} h^2 \cdot f_i^{IV}$$

- Aproximaciones de diferencias centrales

$$f_i''' = \frac{f_{i+2} - 2 \cdot f_{i+1} + 2 \cdot f_{i-1} - 2 \cdot f_{i-2}}{2 \cdot h^3} + E \quad ; \quad E \approx -\frac{1}{4} h^2 \cdot f_i^{IV}$$

### Aproximación de Diferencia para Derivadas Parciales

Las fórmulas de aproximación de diferencia para derivadas parciales de funciones multidimensionales son esencialmente iguales a las de diferenciación de funciones unidimensionales.

Al considerar una función bidimensional  $f(x, y)$ . La aproximación de diferencia para la derivada parcial con respecto a "x", por ejemplo, puede deducirse fijando "y" en un valor constante  $y_0$  y considerando  $f(x, y_0)$  como una función unidimensional. Por tanto, las

aproximaciones de diferencia hacia adelante, central y hacia atrás para estas derivadas parciales se pueden escribir, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \rightarrow E \propto \Delta x \\
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0 - \Delta x, y_0)}{2 \cdot \Delta x} \rightarrow E \propto (\Delta x)^2 \\
 f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} \rightarrow E \propto \Delta x \quad (8.19)
 \end{aligned}$$

Las aproximaciones de diferencia central para las segundas derivadas de  $f(x, y)$  en  $(x_0, y_0)$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - 2 \cdot f(x_0, y_0) + f(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} \rightarrow E \propto (\Delta x)^2 \\
 f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - 2 \cdot f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2} \\
 f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 - \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} \\
 &\quad + \frac{-f(x_0 + \Delta x, y_0 - \Delta y) - f(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (8.20)
 \end{aligned}$$

### Diferencias Finitas en una Dimensión

Si se supone estar frente a un simple problema unidimensional de contorno, esto es, si se quiere determinar una función  $u(x)$ , la cual satisfaga una ecuación diferencial dada en una región  $0 \leq x \leq L$ , junto con condiciones de contorno apropiadas es  $x = 0$  y  $x = L$ .

Como ejemplo, si se considera el análisis de una barra uniforme (módulo elástico longitudinal  $E$  y área de sección transversal  $A$ ) como la que se muestra en la Figura 8. 1.

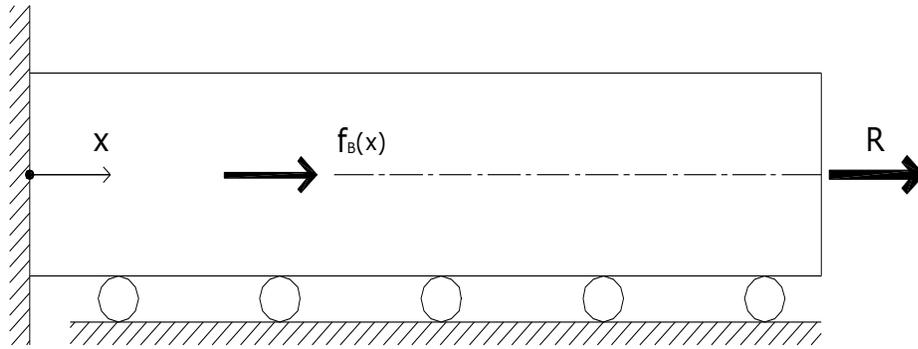


Figura 8. 1 Barra uniforme, de módulo longitudinal E y sección transversal A

La ecuación diferencial que corresponde a la formulación de este problema es:

$$u'' + \frac{f^B}{E \cdot A} = 0 \quad (8.21)$$

Con las siguientes condiciones de borde:

$$u = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} = R \quad \text{en} \quad x = L$$

Tomando por simplicidad la función de carga longitudinal  $f^B(x) = a \cdot x$  (variación lineal).

Para resolver el problema vía diferencias finitas, se comienza por diferenciar la variable independiente  $x$ , esto es, construir un conjunto (grilla o malla) de  $L + 1$  puntos de grilla discretos, igualmente espaciados  $x_l (l = 0, 1, 2, \dots, L)$  sobre el rango (ó dominio)  $0 \leq x \leq L$ , donde  $x_0 = 0$ ,  $x_L = L$ ,  $x_{l+1} - x_l = h = cte$ .

El siguiente paso es reemplazar los términos de la ecuación diferencial que involucra diferenciación por términos que involucren solo operaciones algebraicas. Este proceso, necesariamente, involucra una aproximación y puede lograrse haciendo uso de aproximaciones de diferencias finitas (deducidas anteriormente por medio de las expansiones de Taylor)

Sustituyendo la aproximación de diferencia central de la segunda derivada en un punto  $x_l$  en la ecuación **8.21**, se obtiene:



La ecuación 8.25 es idéntica a la que se hubiera derivado utilizando una serie de  $n$  elementos de resorte, cada uno de rigidez  $E \cdot A/h$ . Las cargas en los puntos de grilla correspondientes a  $f^B(x)$  se obtendrían usando el valor de carga distribuida en el punto de grilla y multiplicando ese valor por la longitud de contribución ( $h$  para los puntos de grilla internos y  $h/2$  para el punto de grilla final).

Tal vez con éste ejemplo no se aprecie la utilidad de las diferencias finitas, pues la naturaleza de la formulación diferencial hace que su resolución analítica sea viable por métodos de uso común. No obstante, lo importante de destacar y que es conclusión general es que se ha reemplazado un problema de determinación de una función continua desconocida  $u(x)$  por un problema de resolución de una ecuación matricial para un conjunto de valores discretos  $u_i$ . Ésta es la esencia del método. Debe recordarse que la solución  $u$  sólo se aproxima a la solución exacta del problema  $u(x)$  porque se ha reemplazado derivadas por diferencias.

La solución exacta corresponde a:

$$u(x) = \frac{-\left(\frac{a \cdot x^3}{6}\right) + \left(R + \frac{1}{2} \cdot a \cdot L^2\right) \cdot x}{E \cdot A} \quad (8.27)$$

Es evidente que el error decrece a medida que se aumenta el número de puntos de grilla. Esto es conclusión inmediata por medio de las Expansiones de Taylor.

### Diferencias Finitas en más de una Dimensión

El problema de aproximación de ecuaciones diferenciales en dos o más variables independientes es obviamente un poco más comprometido, aunque los principios utilizados son idénticos a los de una dimensión.

Si se considera un problema de Torsión Elástica de una barra prismática (región  $\Omega$  rectangular), regido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2 \cdot G \cdot \theta \quad (8.28)$$

Donde  $G$  es el módulo elástico transversal definido por la siguiente ecuación:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Donde  $E$  es el Módulo Elástico Longitudinal y  $\nu$  es la relación de Poisson;  $\theta$  es el ángulo de torsión de cada sección y  $\phi$  es la función de tensión que satisface la condición  $\phi = 0$  en los contornos.

El momento Torsor  $T$  está dado por:

$$T = 2 \cdot \iint_{\Omega} \phi \cdot dx \cdot dy \quad (8.29)$$

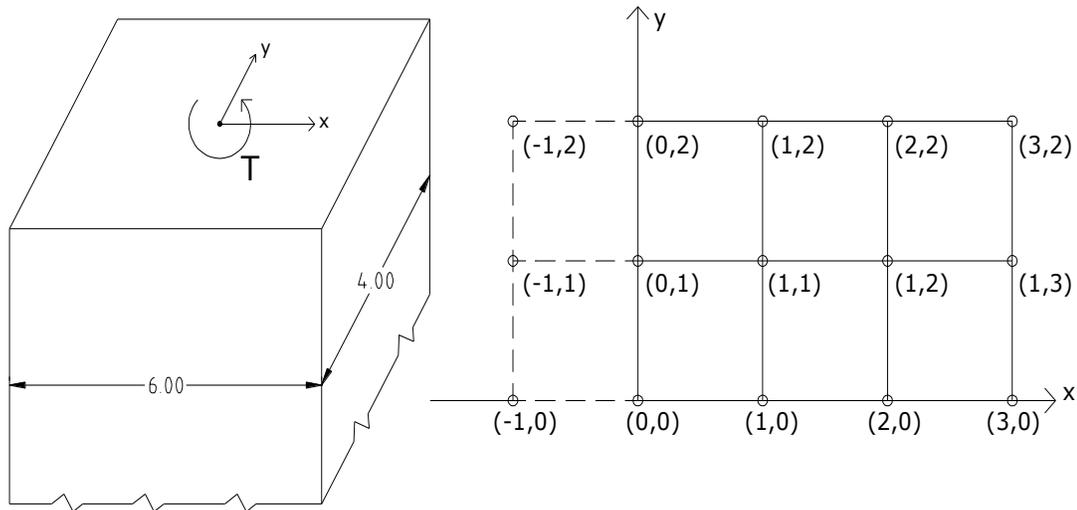
Y la tensión tangencial en una dirección cualquiera  $n$  en la sección se obtiene a partir de

$$\tau = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

Para aplicar el método de las diferencias finitas en esta situación, se procede exactamente de la misma manera que en el caso unidimensional. Con este fin, se construye un conjunto de puntos de grilla  $x_l = (l = 0, 1, 2, \dots, L)$ , igualmente espaciados en el rango  $0 \leq x \leq L_x$  con  $x_0 = 0, x_L = L, x_{l+1} - x_l = \Delta x = cte$ , y también un conjunto de puntos de grilla igualmente espaciados  $y_m (m = 0, 1, 2, \dots, M)$  sobre el rango  $0 \leq y \leq L_y$ , con  $y_0 = 0, y_M = L_y, y_{m+1} - y_m = \Delta y = cte$ .

La región en la cual se requiere la solución está entonces cubierta por una grilla rectangular de diferencias finitas, a través del trazado de líneas paralelas al eje "y" a través de cada punto  $x_l$ ; y de la misma forma, trazando paralelas al eje "x" a través de cada punto  $y_m$ .

Un punto típico de grilla está dado entonces por las coordenadas  $(x_l, y_m)$ . El método de diferencias finitas es ahora aplicable a la ecuación **8.27**, lo que significa que nuevamente se reemplazan los términos que involucran ahora derivadas parciales por sus correspondientes aproximaciones de diferencias finitas.



**Figura 8. 2 Barra Prismática y Grilla**

Se aplicará a la resolución de la siguiente barra prismática, utilizando la grilla que vemos a continuación:

Por condiciones de simetría, la solución necesita ser obtenida sólo para una cuarta parte de la sección, como se muestra en la Figura 8. 2 Barra Prismática y Grilla

anterior. Se utilizará una malla de tamaño  $\Delta x = \Delta y = 1$ . Se nota que el valor de la función de tensión  $\phi$  debe ser proporcional a la constante  $G \cdot \theta$ , y por simplicidad se toma  $G \cdot \theta = 1$ .

Utilizando las aproximaciones por diferencia, tenemos que, para un punto como el  $(x_l, y_m)$  se tiene:

$$\varphi_{l+1,m} + \varphi_{l-1,m} + \varphi_{l,m+1} + \varphi_{l,m-1} - 4 \cdot \varphi_{l,m} = -2 \quad (8. 30)$$

El uso de las condiciones de simetría requiere que  $\partial\varphi/\partial x = 0$  a lo largo del eje  $x$  y que similarmente  $\partial\varphi/\partial y = 0$  a lo largo del eje  $y$ .

Aplicando esta condición, por ejemplo, en el punto  $(0,0)$ , se tiene que la aproximación de diferencia central de la primera derivada era:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot h} \text{ (Despreciando el término de error)}$$

Entonces las condiciones son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 &\rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \frac{\varphi_{(1,0)} - \varphi_{(-1,0)}}{2 \cdot (1)} = 0 \rightarrow \varphi_{(1,0)} = \varphi_{(-1,0)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 &\rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{(0,0)} = \frac{\varphi_{(0,1)} - \varphi_{(0,-1)}}{2 \cdot (1)} = 0 \rightarrow \varphi_{(0,1)} = \varphi_{(0,-1)} \end{aligned}$$

De igual manera se aplican en todos los puntos situados en el contorno de la región  $\Omega$ , llegándose a condiciones similares en todos los casos.

Planteando ecuaciones como la ecuación **8.30** para todos los puntos interiores de la región, se tiene:

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow \varphi_{(1,0)} + \varphi_{(-1,0)} + \varphi_{(0,1)} + \varphi_{(0,-1)} - 4 \cdot \varphi_{(0,0)} = -2 \\ (1,0) &\rightarrow \varphi_{(2,0)} + \varphi_{(0,0)} + \varphi_{(1,1)} + \varphi_{(1,-1)} - 4 \cdot \varphi_{(1,0)} = -2 \\ (2,0) &\rightarrow \varphi_{(3,0)} + \varphi_{(1,0)} + \varphi_{(2,1)} + \varphi_{(2,-1)} - 4 \cdot \varphi_{(2,0)} = -2 \\ (0,1) &\rightarrow \varphi_{(1,1)} + \varphi_{(-1,1)} + \varphi_{(0,2)} + \varphi_{(0,0)} - 4 \cdot \varphi_{(0,1)} = -2 \\ (1,1) &\rightarrow \varphi_{(2,1)} + \varphi_{(0,1)} + \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,0)} - 4 \cdot \varphi_{(1,1)} = -2 \\ (2,1) &\rightarrow \varphi_{(3,1)} + \varphi_{(1,1)} + \varphi_{(2,2)} + \varphi_{(2,0)} - 4 \cdot \varphi_{(2,1)} = -2 \end{aligned}$$

Las anteriores, han sido planteadas sistemáticamente, siguiendo solamente la regla de la aproximación de diferencia de la segunda derivada. Aplicando los criterios de simetría, y las condiciones de contorno sobre los límites  $x = 3 \wedge y = 2$ , las anteriores se reducen al siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \varphi_{(1,0)} + 2 \cdot \varphi_{(0,1)} - 4 \cdot \varphi_{(0,0)} &= -2 \\ \varphi_{(2,0)} + \varphi_{(0,0)} + 2 \cdot \varphi_{(1,1)} - 4 \cdot \varphi_{(1,0)} &= -2 \\ \varphi_{(1,0)} + 2 \cdot \varphi_{(2,1)} - 4 \cdot \varphi_{(2,0)} &= -2 \\ 2 \cdot \varphi_{(1,1)} + \varphi_{(0,0)} &= -2 \\ \varphi_{(2,1)} + \varphi_{(0,1)} + \varphi_{(1,0)} - 4 \cdot \varphi_{(1,1)} &= -2 \\ \varphi_{(1,1)} + \varphi_{(2,2)} + \varphi_{(2,0)} - 4 \cdot \varphi_{(2,1)} &= -2 \end{aligned}$$

Disponiendo las anteriores de forma matricial, con  $\varphi^T = [\varphi_{(0,0)} \quad \varphi_{(1,0)} \quad \varphi_{(2,0)} \quad \varphi_{(0,1)} \quad \varphi_{(1,1)} \quad \varphi_{(2,1)}]$ , se tiene:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{(0,0)} \\ \varphi_{(1,0)} \\ \varphi_{(2,0)} \\ \varphi_{(0,1)} \\ \varphi_{(1,1)} \\ \varphi_{(2,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

Nuevamente se tiene un sistema del tipo  $K \cdot u = f$ , el que puede resolverse para el vector incógnita por cualquier método adecuado. Resolviendo, entonces, se tiene que  $\varphi^T = [3.1370 \quad 2.8866 \quad 1.9971 \quad 2.3873 \quad 2.2062 \quad 1.5508]$ .

Para evaluar el Momento Torsor, se utiliza la regla trapezoidal en un dominio bidimensional, obteniéndose  $T = 65.41$ , valor que puede compararse con la solución exacta  $T = 76.40$ . Similarmente, la máxima pendiente está en el punto  $(0,2)$  y una posible aproximación al valor absoluto de la máxima tensión de corte  $|\tau_{max}|$ , utilizando la aproximación de diferencia hacia atrás para la derivada  $\partial\phi/\partial n$ . Nuevamente se puede comparar con el valor exacto dado por  $|\tau_{max}| = 2.96$  (error: 19,4%). La aproximación obtenida por el uso de la fórmula de diferencia hacia atrás es de menor orden de exactitud que la aproximación utilizada para la formulación principal del problema. Se puede mejorar esta aproximación de  $\tau_{max}$  utilizando tres valores de la función de tensión sobre la sección central como sigue. Denotando el punto  $(0,2) = A$ ,  $(0,1) = B$  y  $(0,0) = C$ , se puede escribir, según la expansión de Taylor, de la siguiente manera:

$$\varphi_B = \varphi_A - \Delta y \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_A + \frac{1}{2} \cdot \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_A - \frac{1}{6} \cdot \Delta y^3 \cdot \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\Big|_D \quad (8.32)$$

Donde  $D$  está en la línea  $AB$ .

$$\varphi_C = \varphi_A - 2 \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_A + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \Delta y)^2 \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_A - \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot \Delta y)^3 \cdot \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}\Big|_E \quad (8.33)$$

Donde  $E$  está en  $AC$ .

De ambas formulaciones es posible eliminar el término  $\partial^2\varphi/\partial y^2|_A$ , obteniendo entonces:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_A = \frac{\varphi_C - 4 \cdot \varphi_B + 3 \cdot \varphi_A}{2 \cdot \Delta y} + E(\Delta y^2) \quad (8.34)$$

Utilizando el primer término del lado derecho de la ecuación **8.34** como aproximación, el error cometido es entonces del mismo orden que el cometido en la aproximación de la ecuación que gobierna el problema.

Insertando adecuadamente los valores, se tiene  $|\tau_{max}| = 3.21$  (error: 8,45%). Obviamente este resultado presenta mayor exactitud que el obtenido con la aproximación de diferencia hacia atrás.

## Aproximación y Convergencias

Las soluciones uno y bidimensionales para ecuaciones diferenciales parciales ordinarias derivadas anteriormente por procedimientos numéricos de diferencias finitas, ilustran las posibilidades de la discretización. El problema de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales ha sido reemplazado por un problema puramente algebraico en el cual debe resolverse un cierto número de ecuaciones simultáneas.

Se ha probado y mostrado que el error en las aproximaciones de diferencias finitas decrece incrementando la densidad del mallado. Para aplicar el proceso a una situación en la cual no se dispone de la solución exacta, es necesario estudiar la convergencia del método de acuerdo al refinamiento de la malla, en un intento por estimar la magnitud de los errores ocurridos al producirse una aproximación.

Si, por ejemplo, el error de una aproximación es del orden de  $(\Delta x^2)$ , entonces los resultados de dos soluciones sobre grillas de espaciado  $\Delta x_1 \wedge \Delta x_2$  puede extrapolarse como se detalla a continuación. Si,  $\phi^1$  y  $\phi^2$  corresponden a las soluciones para las grillas anteriores 1 y 2 respectivamente y que  $\phi^e$  corresponde a la solución exacta en el punto que se está considerando. De esta forma, aún cuando no se conoce la magnitud del error, se puede escribir:

$$\frac{\phi^e - \phi^1}{\phi^e - \phi^2} = \left( \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right)^2 \quad (8.35)$$

De la cual se puede extraer la solución exacta. Esta relación se conoce como Extrapolación de Richardson, y proporciona un método para mejorar la solución a partir de los resultados obtenidos para dos grillas de distinto tamaño de espaciado. Es aplicable también a casos bidimensionales y tridimensionales.