



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**ESTUDIO DE RESONADORES PERIÓDICOS PARA REDUCIR LA
VIBRACIÓN EN CABLES**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

SEBASTIÁN ENRIQUE AGUIRRE MADARIAGA

PROFESOR GUÍA:
RAFAEL RUIZ GARCÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
JUAN FELIPE BELTRÁN MORALES

SANTIAGO DE CHILE
2021

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO
POR: **SEBASTIÁN ENRIQUE AGUIRRE MADARIAGA**
FECHA: 2021
PROF. GUÍA: Rafael Ruiz García

ESTUDIO DE RESONADORES PERIÓDICOS PARA REDUCIR LA VIBRACIÓN EN CABLES

Los cables son elementos estructurales de baja rigidez y masa, lo que los hace poseedores de amortiguamiento muy débil ante vibración, alcanzando amplitudes de oscilación que los llevan a la fatiga inducida por factores sumamente comunes, tales como el viento o tráfico.

Al incluir resonadores periódicos compuestos por masa y resorte, se induce la formación de band gaps en torno a la frecuencia natural del resonador, que busca ser igualada a la del cable. Un band gap es una zona de frecuencias en que, para determinadas condiciones, se presenta anulación de vibración. El objetivo del trabajo de título es describir la formación de band gap en condiciones realistas de operación, incrementando la seguridad estructural.

La confección de la memoria comienza por la realización en Matlab de un código que simule las matrices de rigidez y masa del cable, con la información de condiciones de operación de este. Las matrices, al ser manipuladas, permiten la obtención de band gaps de Bragg (originadas por los resonadores, en contraste a las de resonancia local del sistema sin resonadores), en condición de periodicidad.

Con el modelamiento en condiciones nominales finalizado, se procede a estudiar el efecto de variación de distanciamiento de los resonadores sobre la ubicación y ancho de band gap. Se concluye en este punto que, si la masa total del set de resonadores no varía, el efecto del daño en las hebras y alteración de distanciamiento resulta irrelevante.

Al ser la única variable analizada con efecto considerable en la constitución de band gap, para cada masa de resonador se propaga incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable (densidad, elasticidad y tensión) mediante Monte Carlo Importance Sampling. Se obtiene que la incertidumbre en la densidad del cable, con una incidencia directa en la masa de los resonadores, domina la varianza del centro y ancho de band gap.

Finalmente, se analiza la sensibilidad del band gap mediante el método de descomposición de varianza, ratificando cuantitativamente que la variabilidad del sistema está dominada por la incertidumbre en la densidad del cable. El estudio es validado finalmente comparando con el método de función de respuesta en frecuencia para elementos finitos, específicamente con localización de mínimos de la función de transferencia.

Se concluye que el parámetro que domina la incertidumbre del sistema es la densidad del material que compone al cable, la cual, en el modelo utilizado, influye directamente en la masa del resonador. La tensión del cable es la segunda variable incierta que más afecta al sistema. Por último, el módulo de Young posee un efecto despreciable.

*A mi familia, amigos,
y a Rafael Ruiz.*

Saludos

Agradecimientos

Durante seis años he recibido la ayuda de muchas personas, familia, amigos y docentes, que me han permitido llegar a este punto, el final de mi carrera. Quisiera comenzar nombrando a Rafael Ruiz, a quien he conocido siendo su alumno en dos asignaturas, ayudante y memorista. No solo me ha enseñado sobre estructuras o incertidumbre, sino que también me ha enseñado de la vida, un largo camino en que siempre será bueno entregarse para ayudar a los demás. Por ser el mejor docente que he conocido, por preocuparse constantemente de mi proceso de titulación, por todo consejo que me ha brindado, dedico esta memoria a Rafael.

En segundo lugar, quiero agradecer a Tiare, una gran amiga que siempre me ha brindado todo el apoyo emocional que podría pedir, y aún más.

Quiero agradecer también a mi madre, que se ha sacrificado constantemente por mí y mi familia y me ha enseñado, desde pequeño, la importancia de la educación.

No puedo dejar fuera a todos aquellos que han hecho tan amenos estos seis años, con los que he compartido buenos momentos y han estado siempre cuando se necesitan, Camila, Daniela, Carolina, Valeria, Diego, Luis, Daniel, Alonso, Eduardo y Nicolás. Por último, nombro a Adrián Barraza, que siempre estará en mis recuerdos y los de muchos más.

Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones	v
1. Introducción	1
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivos	4
1.3. Alcances	4
2. Obtención de Band Gap	6
2.1. Descripción del cable	6
2.2. Efecto de daño en las hebras	11
2.3. Inclusión de resonadores	12
2.4. Condición de periodicidad	16
2.5. Modelo nominal	19
3. Identificación de parámetros relevantes	22
4. Propagación de incertidumbre	27
4.1. Monte Carlo directo	27
4.2. Distribución Lognormal	29
4.3. Standard gaussiano	30
4.4. Monte Carlo Importance Sampling	31
4.5. Modelo incierto	31
5. Descomposición de varianza	40
5.1. Análisis de Sobol	40
5.2. Sensibilidad del modelo	41
6. Validación del modelo	59
6.1. Función de transferencia	59
6.2. Función de transferencia del modelo	62
6.3. Imprecisión del estimador	64
7. Conclusión y trabajos futuros	66
Bibliografía	68

Índice de Ilustraciones

1.1.	Daño simétrico	5
2.1.	Grados de libertad en ausencia de resonadores	7
2.2.	Sección transversal del cable	7
2.3.	Ángulo de hélice	8
2.4.	Grados de libertad de los resonadores	14
2.5.	Nomenclatura de las periodicidades	17
2.6.	Diagrama de frecuencia natural en función de vector de onda en modelo nominal	21
3.1.	Centro de band gap para 0 hebras dañadas	23
3.2.	Centro de band gap para 2 hebras dañadas	23
3.3.	Centro de band gap para 4 hebras dañadas	23
3.4.	Centro de band gap para 6 hebras dañadas	23
3.5.	Ancho de band gap para 0 hebras dañadas	24
3.6.	Ancho de band gap para 2 hebras dañadas	24
3.7.	Ancho de band gap para 4 hebras dañadas	24
3.8.	Ancho de band gap para 6 hebras dañadas	24
4.1.	Construcción de intervalo de confianza a partir de MCd	28
4.2.	Correlación entre dos variables numéricas	30
4.3.	Concepto gráfico de Importance Sampling	31
4.4.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$	33
4.5.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	33
4.6.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	33
4.7.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	34
4.8.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	34
4.9.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	34
4.10.	I. de confianza en cable sin daño, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	35
4.11.	I. de confianza en cable sano, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	35
4.12.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$	35
4.13.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	36
4.14.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	36
4.15.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	36
4.16.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	37
4.17.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	37
4.18.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	37
4.19.	I. de confianza en cable dañado, $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	38
5.1.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$.	42
5.2.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	42
5.3.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	43
5.4.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	43

5.5.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	44
5.6.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	44
5.7.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	45
5.8.	Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	45
5.9.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$	46
5.10.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	46
5.11.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	47
5.12.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	47
5.13.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	48
5.14.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	48
5.15.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	49
5.16.	Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	49
5.17.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$	50
5.18.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	50
5.19.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	51
5.20.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	51
5.21.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	52
5.22.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	52
5.23.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	53
5.24.	Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	53
5.25.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$	54
5.26.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$	54
5.27.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$	55
5.28.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [1\% \ 10\% \ 10\%]$	55
5.29.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 1\%]$	56
5.30.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 1\%]$	56
5.31.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 1\% \ 10\%]$	57
5.32.	Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $\mathbf{c.o.v}[\rho \text{ E T}] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$	57
6.1.	Desplazamiento, velocidad y aceleración en oscilación sinusoidal	60
6.2.	DCL de 1 gdl en oscilación ante aplicación de fuerza	60
6.3.	Localización de band gap nominal mediante FRF	64

6.4. Máximos c.o.v. del estimador	65
---	----

Capítulo 1

Introducción

Los cables son elementos utilizados ampliamente en el sector estructural en todo el mundo, encargados de resistir esfuerzos de tracción. Otra importante aplicación de estos elementos se encuentra es el sector energético, el cual no será estudiado en la presente memoria.

Dentro del sector estructural, sus principales usos se hallan en grúas, puentes colgantes, ascensores, teleféricos, etc. El uso en maquinaria y estructuras cotidianas entrega importancia a su estudio, enfocándose este en la seguridad que brinda durante su funcionamiento. La exigencia mecánica, abrasión, interacción ambiental y vibraciones son algunos de los factores que degradan al cable o sus componentes constantemente [1].

Los cables presentan sección transversal pequeña en relación a su longitud, por lo que su rigidez a flexión es casi nula. Debido a su baja rigidez y masa, junto a una casi nula amortiguación interna, se caracterizan por amortiguamientos muy pequeños ante la vibración, lo que los hace alcanzar elevadas amplitudes de oscilación ante excitaciones [2].

Las grandes amplitudes de oscilación pueden causar tensiones excesivas o cíclicas, que a su vez pueden dañar considerablemente a las hebras o a los puntos de montaje [2]. Es así como factores sumamente comunes, como viento, lluvia, sismicidad o tráfico vehicular inducen vibraciones sumamente perjudiciales para el elemento, por lo que cobra importancia su reducción a valores mínimos.

Enmarcado este contexto, el trabajo de título consiste en el estudio de resonadores periódicamente distribuidos para reducir la vibración en cables tensos, los que a su vez pueden ser modelados como metamateriales, repitiéndose vigas sin esfuerzo de flexión.

Al incluir resonadores de masa-resorte en estructuras periódicas se inducen band gaps en torno a la frecuencia natural del resonador. Un band gap es una zona de frecuencias en que, para determinadas condiciones, se presentan anti-resonancias o anulación de vibraciones [3]. De esta manera, se impone como condición de diseño que la frecuencia natural del resonador sea igual a la frecuencia de resonancia que se desea atenuar en el cable.

Los resonadores de masa-resorte distribuidos periódicamente a lo largo del cable se diferencian de los sistemas de amortiguación presentes en el mercado, en los cuales se disipa energía vibratoria gracias a la deformación de un elastómero entre cables paralelos [9] o se utiliza el amortiguador de Stockbridge, restringido a estar muy cerca de los extremos del cable, en la repetitividad del subsistema, resultando más eficiente que el modelo no periódico. En el amortiguador de Stockbridge, las vibraciones del cable principal se transmiten mediante un mensajero a un cordón de acero flexible con masas ubicadas simétricamente en sus extremos, controlando con la masa y rigidez la frecuencia natural del subsistema [9].

La inclusión de resonadores periódicos para reducir la amplitud de oscilaciones ha sido estudiada anteriormente por Sugino et al. en *On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials* [3], donde se describe la formación de band gap en vigas periódicas infinitas; Ruiz et al. en *Stress Cycle Assessment of Cables under Wind-Induced Vibrations: A General Probabilistic Approach* [4], que aborda el rango de tensión en función del número de curvas cíclicas experimentadas por un cable como consecuencia de vibraciones eólicas; Lazar et al. en *Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers (TID)* [5], que considera el uso de sistema TID para suprimir vibraciones indeseadas en cables; Xiao et al. en *Theoretical and Experimental Study of Locally Resonant and Bragg Band Gaps in Flexural Beams Carrying Periodic Arrays of Beam-Like Resonators* [7] y *Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators* [12], presentándose en el primero una caracterización teórica del band gap para vigas infinitas con resonancia local e inclusión de resonadores tipo viga, mientras en el segundo se incluyen resonadores tipo masa-resorte; Serrano et al. en *On the Mechanism of Bandgap Formation in Beams With Periodic Arrangement of Beam-Like Resonators* [13], que analiza una estructura compuesta de vigas verticales periódicas unidas a una viga horizontal.

Se describe la importancia de la reducir la amplitud de oscilación en los trabajos *Cable vibration caused by wind* [2] de Golebiowska et al., sobre los tipos básicos de excitación en cables causados por el efecto dinámico del viento; *Principios Básicos De Las Vibraciones Eólicas En Líneas De Transmisión Y Sistema De Amortiguamiento* [9] de Manrique et al., sobre el modelo básico de las vibraciones eólicas, sistemas de amortiguamiento y estándares internacionales.

Los métodos numéricos utilizados para cuantificar confiabilidad e incertidumbre son abordados por Ruiz et al. en *Uncertainties propagation and global sensitivity analysis of the frequency response function of piezoelectric energy harvesters (PEHs)* [6], sobre la propagación de incertidumbre en PEHs; Tanabashi en *Monte Carlo Techniques* [17], capítulo 33 de *Review of Particle Physics*, sobre métodos para abordar funciones de densidad de probabilidad comunes; Schuurmans et al. en *Monte Carlo inference via greedy importance sampling* [20], sobre la variante *greedy* de Monte Carlo; Sobol en *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates* [21], sobre los índices de Sobol en el método de Sobol o descomposición de la varianza.

Material complementario utilizado en el trabajo de título es obtenido a partir de investigaciones de Beltrán et al. en *Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution* [1], que propone un modelo mecánico para estimar la respuesta estática de una cuerda dañada asimétricamente; Hofer en *Daño superficial asimétrico en cables: Aplicación método de perturbaciones* [8], sobre el efecto de ruptura de las hebras en el comportamiento de un cable ante ruptura de sus hebras; Grouthier et al. en *On the efficiency of energy harvesting using vortex-induced vibrations (VIV) of cables* [10], sobre la eficiencia de recolección de energía en VIV; Yang en la introducción de *Basic Finite Element Method as Applied to Injury Biomechanics* [11] sobre la aplicación del método de elementos finitos; Quinteros en *Optimización de Band Gap en materiales tipo Sandwich* [14], sobre el diseño y optimización de un panel tipo sándwich para evitar la propagación de ondas mecánicas; Halliwell et al. en *The Lognormal Random Multivariate* [15], que explica el modo de empleo de la distribución lognormal; Weisstein en *Log Normal Distribution* [16] y *Multivariate Normal Distribution* [19], sobre las distribuciones lognormal y normal; Nettleton en el capítulo *Selection of Variables and Factor Derivation* [18] del libro *Commercial Data Mining*, sobre la selección de variables en la minería de datos comerciales; Jin et al. en *Efficient Evaluation of Sobol' Indices Utilizing Samples from an Auxiliary Probability Density Function* [22], sobre la eficiencia del método de descomposición de la varianza; Thorby et al. en *Structural Dynamics and Vibration in Practice* [23], sobre el análisis oscilatorio que entrega el método de elementos finitos.

El método de elementos finitos presenta múltiples ineficiencias en el modelamiento de cables, tales como inestabilidad numérica, dificultades de convergencia y altos costos computacionales [1][5]. Por este motivo, tanto en la bibliografía como en esta memoria, se estudia el cable como una periodicidad de elementos axiales, o vigas no lineales sin esfuerzo a flexión, siendo necesario que el cable se encuentre tenso [4]. Para que este modelo sea válido se debe cumplir la hipótesis cinemática de Bernoulli, la cual indica que la longitud del elemento debe ser al menos 5 veces mayor a su diámetro para que las secciones transversales de cable (o viga) sean planas y normales a su eje centroidal aún después de la deformación [1].

El modelo de resonadores periódicos se encuentra limitado por la factibilidad de diseño y construcción, elevándose la dificultad al incrementar el número de resonadores y masa asociada, pero incrementando a la vez el ancho de band gap.

1.1. Motivación

A la fecha, en los estudios llevados a cabo sobre la inclusión de resonadores periódicos para reducir la vibración en cables, no ha sido incluida la incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable, tales como la densidad, módulo de Young o tensión a la que se encuentra sometido. De igual manera, no ha sido estudiado el efecto de daño en las hebras del cable sobre la atenuación de vibraciones.

El presente trabajo de título busca aportar a la comprensión del tema mediante la inclusión de incertidumbre y consideración de daño. Para esto, se espera construir un modelo de cable de seis hebras, en que el daño de una de ellas se represente como completa inoperatividad, y para cada estado del cable se estudie el efecto de los parámetros inciertos sobre la posición y el ancho del band gap, utilizando con tal finalidad los métodos numéricos de Monte Carlo estocástico y descomposición de varianza de Sobol.

El método de Monte Carlo se aplica con el fin de hallar el valor esperado de salida de un sistema que posee una entrada o parámetros inciertos, descritos por una función de densidad de probabilidad [6]. Por su parte, el análisis de Sobol plantea que la varianza total en la salida es la suma de los aportes provenientes de excitación, parámetros de modelo, errores, etc., permitiéndose conocer qué variables son las que más incertidumbre entregan [6].

1.2. Objetivos

Con el fin de aportar en la comprensión de un tema muy reciente en la ingeniería, se toma como objetivo general describir la formación de band gap en condiciones de daño del cable, junto a la inclusión y cuantificación del efecto de incertidumbre en sus propiedades mecánicas, consideraciones que no se han utilizado en los estudios precedentes.

A continuación, se indican los objetivos específicos:

- Implementar un caso de estudio de un cable en condiciones realistas de operación, ajustando para ello tensión, masa, rigidez, y daño del cable.
- Implementar resonadores periódicos sobre modelo de cable dañado, estudiando el comportamiento de formación de band gap al variar el distanciamiento entre ellos. Se utilizan en este punto valores nominales en las propiedades del cable.
- Propagar incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable, aplicando el método de Monte Carlo Importance Sampling, el cual busca el valor esperado de la salida en un modelo al considerar la incertidumbre estocástica en su entrada.
- Ejecutar un análisis de sensibilidad con el método de descomposición de varianza, en que se determina qué parámetros de entrada afectan en mayor medida la varianza de la salida.
- Validar el modelo de resonadores periódicos por medio de comparación con un cable finito sujeto a fuerza armónica, utilizando para esto la función de respuesta en frecuencia de admitancia .

1.3. Alcances

El trabajo de título descrito posee un alcance numérico, de simulación bidimensional en Matlab con validación en un caso conocido. Se utiliza para esto un servidor otorgado por Rafael Ruiz. En el estudio solo se analizan cables tensos, en que el peso propio no provoca una forma catenaria, permitiéndose el uso de elementos axiales para modelar.

Daños parciales en una hebra serán considerados como total inoperatividad de ella, es decir, el daño será discretizado. Adicionalmente, debido a la dificultad matemática y analítica que presenta, el daño asimétrico no será considerado, mostrándose en la figura 1.1 las hebras que serán cortadas en el análisis. Cabe destacar que solo se considera daño en las hebras externas, el núcleo se encuentra siempre operativo en el modelo.

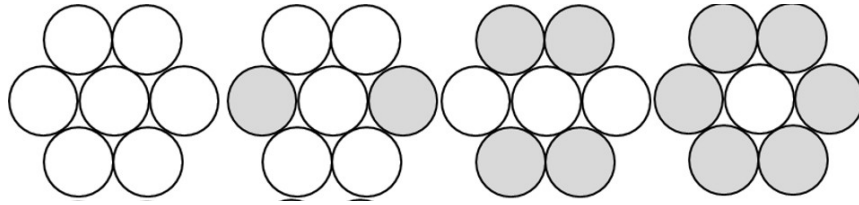


Figura 1.1: Casos de daño simétrico, con gris las hebras dañadas o cortadas.

Capítulo 2

Obtención de Band Gap

En este capítulo se presenta la teoría que describe la formación de band gap o zonas de anulación de vibración en condiciones de cable con daño simétrico o sin daño.

Se comienza describiendo la representación matricial de un cable en estado *As New*, para luego incluir el efecto de daño, también matricialmente. Posteriormente, se explica la inclusión de resonadores en el modelo, completando así el análisis de una periodicidad. La descripción del cable finaliza con la imposición de condiciones de borde sobre cada tramo periódico, de modo de ensamblar la totalidad de estructura en que la formación de band gap es estudiada.

2.1. Descripción del cable

Resulta inconveniente modelar un cable mediante el método de elementos finitos, ya que el propio largo de la estructura hace necesaria una división en una cantidad de elementos elevada, induciendo altos costos computacionales e inestabilidad numérica [1][3].

De este modo, se inicia el estudio de un cable arbitrario como metamaterial, en que cada periodicidad está, a su vez, formada por elementos axiales, vigas no lineales bajo carga axial y sin contar con esfuerzo de flexión, en cumplimiento de la hipótesis cinemática de Bernoulli, como se describe en el trabajo de Ruiz et al. [4]. Para que esto sea posible, es necesario considerar un cable rígido como consecuencia de la tensión o carga axial, eliminando estructuras catenarias del presente estudio.

Cada elemento viga no lineal cuenta con dos grados de libertad por nodo, uno de rotación y otro de desplazamiento transversal, con lo que los movimientos vibratorios pueden ser cabalmente modelados. En la figura 2.1 se muestra una periodicidad de cable, indicándose en ella los grados de libertad de los nodos. [4]

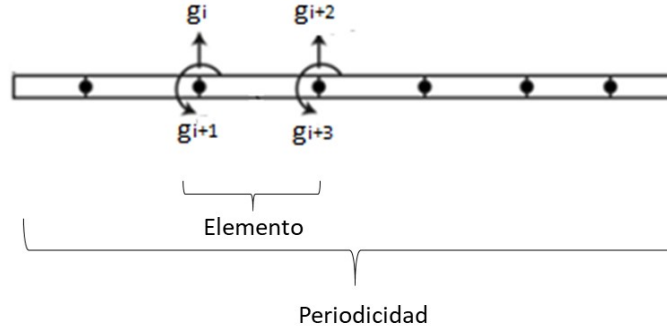


Figura 2.1: Grados de libertad en ausencia de resonadores

El cable estudiado está compuesto por siete hebras iguales, una de ellas corresponde al núcleo, mientras que las hebras externas rodean helicoidalmente a la hebra central, mostrándose en la figura 2.2 la sección transversal. El ángulo de la hélice se denota η , mostrándose en la figura 2.3 [4]. La periodicidad corresponde a un tramo con $n_{vueltas}$ vueltas de la hélice en torno al núcleo, siendo $n_{vueltas}$ un número entero. De este modo, el largo de periodicidad viene dado por:

$$l = \frac{2 d_{cable}}{n_{vueltas} \tan(\eta)} \quad (2.1)$$

Donde d_{cable} corresponde al diámetro del cable, el triple del diámetro de una hebra, d_{hebra} , como se muestra en la figura 2.2.

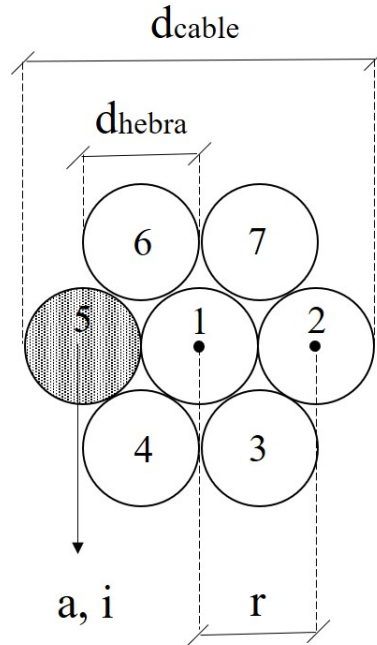


Figura 2.2: Sección transversal del cable

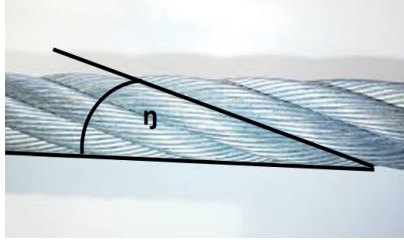


Figura 2.3: Ángulo de hélice

Una vez definido el largo de la periodicidad, es posible obtener el largo de cada elemento. Arbitrariamente se fija un número n_{nodos} de nodos por periodicidad. Un número elevado de nodos implica mayores costos computacionales, mientras que insuficientes entregan resultados no convergentes (i.e. 10 nodos entregan resultados distintos a 9 u 11 nodos, por ejemplo). El número de elementos en una periodicidad es $n_{nodos} - 1$, con lo que el largo de cada elemento resulta:

$$h = \frac{l}{n_{nodos} - 1} \quad (2.2)$$

Por su parte, las propiedades geométricas y locativas de las hebras, mostradas en la figura 2.2, son:

- Distancia al eje central del cable

$$r = \begin{cases} 0 & \text{para hebra 1 (central)} \\ 1 & \text{para hebras 2 a 7 (externas)} \end{cases} \quad (2.3)$$

- Área transversal

$$a = \frac{d_{hebra}^2 \pi}{4} \quad (2.4)$$

- Momento de inercia

$$i = \frac{d_{hebra}^4 \pi}{32} \quad (2.5)$$

Vectorialmente, con el orden definido en la figura 2.2, las propiedades geométricas y locativas resultan:

- Vector de distancia al eje central del cable

$$\mathbf{r} = r [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (2.6)$$

- Vector de área transversal

$$\mathbf{a} = a [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (2.7)$$

- Vector de momento de inercia

$$\mathbf{i} = i [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (2.8)$$

- Vector de ángulo de hélice

$$\boldsymbol{\eta} = \eta [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (2.9)$$

La tensión en cada hebra en ausencia de daño, considerando una carga axial T actuando sobre el cable, corresponde a [1]:

$$\mathbf{t}_{sano} = \frac{T}{\cos(\boldsymbol{\eta})} \quad (2.10)$$

Si bien un cable transmite únicamente cargas axiales, una fuerza externa puede provocar el mismo efecto que esfuerzos de flexión, correspondiendo tal fuerza a la carga de flexión equivalente. Se asocia a tal concepto la rigidez equivalente a flexión, resistencia combinada de las hebras a la deformación provocada, desacoplada de la respuesta axial, que, en ausencia de daño, se expresa [4]:

$$\overline{EI}_{sano} = \sum_{j=1}^7 E \mathbf{a}_j \mathbf{r}_j^2 \cos^3(\boldsymbol{\eta}_j) + \sum_{j=1}^7 E \mathbf{i}_j \cos(\boldsymbol{\eta}_j) \quad (2.11)$$

Donde E corresponde al módulo de Young del material.

En base a los parámetros definidos en las ecuaciones 2.2 a 2.11, se representa matricialmente un elemento de viga no lineal [4], el cual posteriormente es ensamblado mediante el método de elementos finitos en matrices globales, caracterizando una periodicidad [7].

Las matrices locales de rigidez lineal \mathbf{K} , no lineal \mathbf{K}^{NL} , y de masa \mathbf{M} que caracterizan al elemento se obtienen con [4]:

$$\mathbf{K} = \overline{EI} \begin{bmatrix} 12/h^3 & 6/h^2 & -12/h^3 & 6/h^2 \\ & 4/h & -6/h^2 & 2/h \\ & sym & 12/h^3 & -6/h^2 \\ & & & 4/h \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{K}^{NL} = \frac{\mathbf{t} \cos(\boldsymbol{\eta})}{h} \begin{bmatrix} 6/5 & h/10 & -6/5 & h/10 \\ & 2h^2/15 & -h/10 & -h^2/30 \\ & sym & 6/5 & -h/10 \\ & & & 2h^2/15 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho_l h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ & 4h & 13h & -3h \\ & sym & 156 & -22h \\ & & & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

\overline{EI} corresponde a la rigidez equivalente a flexión y \mathbf{t} a la tensión en cada hebra, descritas en la ulterior sección de la obtención de band gap. En la condición de ausencia de daño en las hebras, \overline{EI} es reemplazado por \overline{EI}_{sano} y \mathbf{t} por \mathbf{t}_{sano} . La densidad lineal del cable se denota ρ_l y, en el caso de 7 hebras iguales formándolo, con ρ la densidad del material, se calcula:

$$\rho_l = 7\rho \frac{d_{hebra}^2 \pi}{4} \quad (2.15)$$

La matriz de rigidez geométrica (dependiente de la tensión) de un elemento es la suma de las matrices lineal y no lineal de rigidez. [4]

Como se indica anteriormente, las matrices globales se obtienen ensamblando las matrices de todos los elementos individuales, de acuerdo con el procedimiento tradicional del método de elementos finitos, ejemplificado a continuación con matrices de 2x2 [7]:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{21} & D_{11} + D_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_{11} + D_{12} & D_{12} \\ 0 & \cdots & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Dos elementos de viga no lineal consecutivos cuentan con un nodo común, compartiendo dos grados de libertad, utilizándose estos para el ensamble. Se construye la matriz de masa global en una periodicidad de dos elementos a modo de ejemplo:

$$\mathbf{M}_{G \ 2 \ elementos} = \frac{\rho_l h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h & 0 & 0 \\ & 4h & 13h & -3h & 0 & 0 \\ & & 312 & 0 & 54 & -13h \\ & & sym & 8h & 13h & -3h \\ & & & & 156 & -22h \\ & & & & & 4h \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.2. Efecto de daño en las hebras

En un cable de siete hebras, una central o núcleo y seis rodeándola en una capa externa, uno o más puede sufrir daños, lo que eventualmente lleva a su ruptura. Para estudiar el efecto de daño sobre la formación de band gap se toman tres consideraciones, discretización del daño, simetría y ruptura de únicamente hebras externas, cuya validez o motivo es explicado a continuación.

La discretización del daño consiste en la consideración de ruptura total para cualquier hebra sin condiciones *As New*. Se entrega de este modo un factor de seguridad a cada hebra, y, por tanto, al conjunto cable, evitando fallas inesperadas del sistema. Adicionalmente, la discretización simplifica la modelación analítica y numérica.

Por su parte, la simetría de ruptura de hebras solo posee justificación de simplicidad. El daño asimétrico genera cargas desbalanceadas, que a su vez generan desplazamientos transversales [8], lo que, en condición de periodicidad, escapa del dominio de la investigación. En cambio, el cable permanece recto, sin deformación transversal, cuando el daño es simétrico.

Por último, se considera el núcleo siempre operativo. Dado que el ángulo de hélice en la hebra central es cero, la tensión en el núcleo es siempre menor que la de las hebras externas en ausencia de daño (ecuación 2.10), reduciendo la posibilidad de ruptura, lo que se cumple también en condición de daño. Adicionalmente, las hebras externas son más susceptibles a interacciones con el medio, facilitando su ruptura.

Es importante señalar que las hebras cortadas no son extraídas del sistema, por lo que la densidad lineal, y por tanto la matriz de masa expresada en la ecuación 2.14, no se ven alteradas con el daño.

Las hebras operativas se representan vectorialmente a partir de la figura 2.2., siguiendo los criterios de discretización, simetría y núcleo siempre operativo. Vectores análogos a los de la ecuación 2.18 también pueden ser usados. En el vector \mathbf{op} 0 representa daño y 1 operatividad.

$$\mathbf{op} = \begin{cases} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T & \text{para 0 hebras dañadas} \\ [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T & \text{para 2 hebras dañadas} \\ [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T & \text{para 4 hebras dañadas} \\ [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T & \text{para 6 hebras dañadas} \end{cases} \quad (2.18)$$

El efecto de dos o más hebras cortadas se incluye en las matrices de rigidez (ecuación 2.12 y ecuación 2.13). La rigidez equivalente a flexión en condición de daño se obtiene con la ecuación 2.19 [4]. Es claro que, en el caso de cable totalmente operativo, las ecuaciones 2.11 (rigidez equivalente a flexión en ausencia de daño) y 2.19 son equivalentes.

$$\overline{EI} = \sum_{j=1}^7 E \mathbf{a}_j \mathbf{r}_j^2 \cos^3(\eta_j) \mathbf{op}_j + \sum_{j=1}^7 E i_j \cos(\eta_j) \mathbf{op}_j \quad (2.19)$$

Mientras que la matriz de rigidez lineal es modificada por la rigidez equivalente a flexión \overline{EI} , la matriz de rigidez no lineal es modificada por la tensión en cada hebra \mathbf{t} . El vector de tensiones se encuentra condicionado por el estiramiento del cable $\Delta\epsilon$ al ser sometido a carga axial, que a su vez se obtiene en base a la rigidez axial del cable \overline{AE} , describiéndose el comportamiento en el modelo de Lanteigne, citado por Beltrán et al. [1]

Se distinguen dos condiciones de operación para un cable tenso, que modifican la rigidez axial y, por tanto, la tensión en cada hebra, tratándose de desplazamiento y carga controlados. [1]

En el desplazamiento controlado o control por desplazamiento, los extremos del cable se encuentran empotrados, por lo que el largo no varía al cortar hebras, manteniéndose en la magnitud $L_o + \Delta\epsilon$. Es el caso de teleféricos, funiculares, puentes colgantes, etc. La rigidez axial del cable, sin dependencia de la cantidad de hebras operativas, se expresa [1]:

$$\overline{AE}_{CD} = \sum_{j=1}^7 \mathbf{a}_j E \cos^3(\eta_j) \quad (2.20)$$

En elevadores o grúas, condiciones de izaje de carga, solo uno de los extremos está empotrado, por lo que al cortar hebras cambia la deformación $\Delta\epsilon$ del cable respecto al estado *As New*, correspondiendo el sistema a carga controlada o control por carga. La rigidez axial del cable, dependiente de la cantidad de hebras operativas, da lugar a una deformación que varía con la ruptura de hebras [1]:

$$\overline{AE}_{CC} = \sum_{j=1}^7 \mathbf{op} \mathbf{a}_j E \cos^3(\eta_j) \quad (2.21)$$

Tanto en control por desplazamiento como por carga, la deformación axial y tensión en cada hebra (según figura 2.2) se expresan [1]:

$$\Delta\epsilon = \frac{T}{\overline{AE}} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{op}_j \mathbf{a}_j E \Delta\epsilon \cos^2(\eta_j) \quad \text{para } j = [1, \dots, 7] \quad (2.23)$$

2.3. Inclusión de resonadores

Las vibraciones eólicas son fenómenos caracterizados por frecuencias de oscilación de 5 a 30 Hz, originadas por fuerzas transversales del viento [9]. Por su parte, el tráfico vehicular también genera oscilaciones de baja frecuencia, con valores característicos para cada estructura.

Las frecuencias naturales del modo n_{modal} de un cable tenso con bordes fijos, de largo total L , se expresa [10]:

$$\omega_{n \text{ s/n}} = \frac{n_{\text{modal}} \pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \quad (2.24)$$

Debido a la naturaleza de las vibraciones a las que se encuentran sometidos los cables tensores, el presente estudio de formación de band gap se centra únicamente en el primer modo, es decir, el de menor frecuencia natural.

La inclusión de resonadores periódicos de masa-resorte en un cable impide que las ondas se propaguen libremente en determinada zona de frecuencias. Sugino et al. [3] describe en su investigación que el posicionamiento de band gap en tal zona depende únicamente de la razón de masas y la frecuencia natural de los resonadores. La razón de masas *ratio* corresponde a la relación entre la masa del conjunto de resonadores m_r y la masa de la periodicidad m_p (ecuación 2.25). Se obtiene, analíticamente, que el límite inferior de la zona band gap corresponde a la frecuencia natural de los resonadores periódicos, mientras que el ancho depende de la masa total de resonadores y su relación con la del cable, detallando Sugino et al. [3] lo anterior.

$$ratio = \frac{m_r}{m_p} = \frac{m_r}{\rho l} \quad (2.25)$$

Para incluir el efecto de los absorbedores de vibración en el modelo, se representa mediante matrices de masa [7] y rigidez [11] locales el efecto sobre un elemento (ecuaciones 2.26 y 2.27). Se considera, para el estudio, que todos los resonadores son iguales, con masa m_r y rigidez k_r :

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} k_r & -k_r \\ -k_r & k_r \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

En caso de presentarse un resonador en cada nodo, es decir, dos por elemento (figura 2.4), las matrices globales de absorción se obtienen mediante ensamble con el método de elementos finitos, asignándose un grado de libertad, en dirección del movimiento transversal, a cada absorbedor.

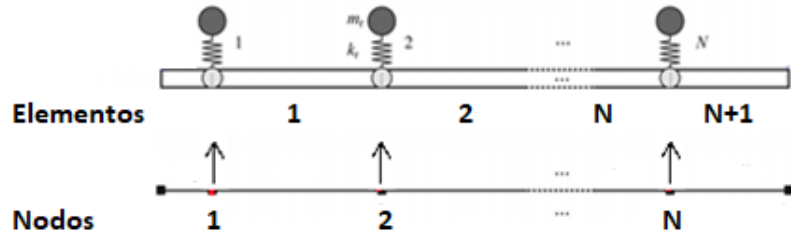


Figura 2.4: Grados de libertad de los resonadores

Una periodicidad de n_{nodos} cuenta con $(n_{nodos} - 1)$ elementos, aportando el primero 4 grados de libertad (2 por nodo), mientras que los demás solo dos, debido a la repetición de nodos. Tanto la matriz de masa como de rigidez globales sin resonadores resultan siempre de dimensiones $2 n_{nodos} \times 2 n_{nodos}$:

$$dim = 4 + 2((n_{nodos} - 1) - 1) = 2 n_{nodos} \quad (2.28)$$

El efecto en masa de los resonadores se incluye en una matriz de $3 n_{nodos} \times 3 n_{nodos}$, adicionando a la matriz original los absorbedores a partir del valor $(2 n_{nodos} + 1)$ de la diagonal, resultando, para una periodicidad de dos elementos, equivalente a tres nodos:

$$M_{G \ 2 \ elem} = \frac{\rho_l h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4h & 13h & -3h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 312 & 0 & 54 & -13h & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8h & 13h & -3h & 0 & 0 & 0 \\ & & & sym & 156 & -22h & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 4h & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{420 m_r}{\rho_l h} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{420 m_r}{\rho_l h} & 0 \\ & & & & & & & & \frac{420 m_r}{\rho_l h} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Por su parte, al incluir resonadores a elementos de dos grados de libertad (barras), uno por extremo, la matriz de rigidez global adopta la estructura dada por [11]:

$$\mathbf{D}_{rig} = \begin{bmatrix}
D_{11} & D_{12} & 0 & \cdots & 0 & -k_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
D_{21} & D_{11} + D_{12} & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & -k_r & \ddots & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & -k_r & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & D_{11} + D_{12} & D_{12} & \vdots & & \ddots & -k_r & 0 \\
0 & \cdots & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_r \\
-k_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 & k_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -k_r & \ddots & & \vdots & 0 & k_r & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & -k_r & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & k_r & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -k_r & 0 & \vdots & & \ddots & k_r & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_r & 0 & \cdots & \cdots & 0 & k_r
\end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A diferencia de una barra, la viga no lineal que modela al cable cuenta con dos grados de libertad por nodo, adicionando uno al incluir los resonadores. De esta manera, la asignación en razón 2:1 modifica la matriz presentada en la ecuación 2.30, como se ejemplifica en el ensamble de rigidez global para dos elementos.

$$\mathbf{K}_{G \ 2 \ elem} = \begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & -k_r & 0 & 0 \\
& k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & k_{33} + k_{11} & 0 & k_{13} & k_{14} & 0 & -k_r & 0 \\
& & & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 \\
& & & sym & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & -k_r \\
& & & & & k_{44} & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & k_r & 0 & 0 \\
& & & & & & & k_r & 0 \\
& & & & & & & & k_r
\end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Donde los valores k_{ij} con $i, j \in [1, 4]$ se obtienen de la suma de matriz de rigidez lineal y no lineal (ecuaciones 2.12 y 2.13), como se describe anteriormente. Por simplicidad de notación, k_{ij} con $i, j \in [1, 4]$ no son reemplazados en la matriz $\mathbf{K}_{G \ 2 \ elem}$

Las matrices de masa y rigidez globales con un resonador por nodo son utilizadas para la validación mediante elementos finitos, descrita en subsecciones ulteriores. En contraposición, el modelo de cable como periodicidad de vigas no lineales, cada una compuesta por elementos y nodos, utiliza solo un resonador por tramo periódico. En tal condición de singularidad, las matrices presentadas en la ecuación 2.29 y ecuación 2.31 se modifican, siendo análogo el procedimiento para más elementos, a:

$$\mathbf{M}_{G \ 2 \ elem, \ sing} = \frac{\rho_l h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4h & 13h & -3h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 312 & 0 & 54 & -13h & 0 & 0 & 0 \\ & & & 8h & 13h & -3h & 0 & 0 & 0 \\ & & & sym & 156 & -22h & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 4h & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{420 \ m_r}{\rho_l h} & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}_{G \ 2 \ elem, \ sing} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & -k_r & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} + k_{11} & 0 & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44} + k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 \\ & & & sym & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & k_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_r & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Se adopta como característica de diseño la igualdad de frecuencias naturales del cable (ecuación 2.24) y del resonador, reduciendo la transmisibilidad de vibraciones en la zona crítica. Xiao et al. [7] utiliza este criterio en su investigación. Así, ante una masa m_r , la rigidez k_r requerida corresponde a:

$$k_r = \omega_n^2 m_r \quad (2.34)$$

En este punto, una periodicidad ha sido totalmente modelada, pero no se encuentra asociada al anterior y siguiente tramo periódico de cable, para lo cual es requerida la imposición de condiciones de borde.

2.4. Condición de periodicidad

Como se indica en secciones previas, cada nodo posee dos grados de libertad, quedando su desplazamiento determinado transversal (u) y rotacionalmente (θ), adhiriéndose un tercer grado de libertad (u_r) al incluir resonador, como se muestra en el primer nodo de la figura 2.5.

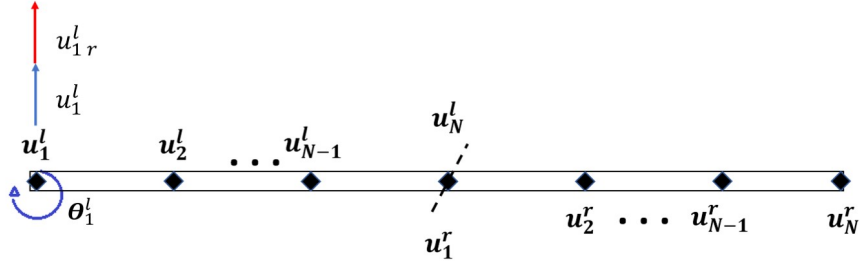


Figura 2.5: Nomenclatura de las periodicidades

Dada la periodicidad del cable, en condición de oscilación y de acuerdo con el teorema de Bloch, vectores de posición o desplazamiento \mathbf{u} en nodos equivalentes (j) de periodicidades sucesivas (left-right), como se presenta en la figura 2.5, se relacionan por [12]:

$$\mathbf{u}_j^r = \mathbf{u}_j^l e^{-iql} \quad (2.35)$$

Donde q corresponde al vector de onda.

El vector de onda representa el desfase en el movimiento oscilatorio de los nodos. Su valor se encuentra, arbitrariamente, en el rango $[0, 2\pi/l]$, ocupando ql el rango $[0, 2\pi]$. [13]

Cuando el vector de onda posee valor π/l se cumple $x_i^{right} = -x_i^{left}$, correspondiendo a desfase total entre los nodos. Por su parte, cuando posee valores 0 o $2\pi/l$ se obtiene $x_i^{right} = x_i^{left}$, movimiento en fase.

De la ecuación 2.35 se desprende que el comportamiento en fase o desfase para el primer nodo de una periodicidad, respecto al primero del contiguo y al no considerar presencia de resonadores, es:

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}_1^r = \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}_1^l e^{-iql} \quad (2.36)$$

Lo anterior se expresa matricialmente en $\mathbf{T}_{\mathbf{u}, \theta}$, donde cada grupo de 2x2 casillas de diagonal no nula representa un nodo de la viga no lineal. [14]

$$\mathbf{T}_{\mathbf{u}, \theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ e^{-iql} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-iql} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

De la ecuación 2.35 se desprende, análogamente, el comportamiento periódico de los resonadores:

$$\mathbf{u}_{r-1}^r = \mathbf{u}_{r-1}^l e^{-iql} \quad (2.38)$$

La matriz \mathbf{T}_r representa en cada casilla no nula un nodo con resonador:

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-iql} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

En caso de presentarse resonador solo en el primer nodo de la periodicidad, $\mathbf{T}_r \text{ sing}$ resulta:

$$\mathbf{T}_r \text{ sing} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e^{-iql} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La matriz \mathbf{T} que representa completamente el comportamiento reiterativo se expresa, al incluir un resonador por nodo [14]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ e^{-iql} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{-iql} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & e^{-iql} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La matriz \mathbf{T} incluye a $\mathbf{T}_{u, \theta}$ y \mathbf{T}_r . El caso de un resonador por periodicidad en lugar de por nodo es análogo, reemplazando \mathbf{T}_r por $\mathbf{T}_r \text{ sing}$.

\mathbf{T} es empleada en la imposición de condiciones de borde sobre cada viga no lineal, resultando las matrices de masa y rigidez con condiciones de borde impuestas [14]:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_G \mathbf{T} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_G \mathbf{T} \quad (2.43)$$

Las matrices \mathbf{M}_0 y \mathbf{K}_0 agrupan la totalidad de información de modelamiento, tensión de operación, estado de las hebras, propiedades del material, propiedades geométricas y locativas, vector de onda, etc. La influencia del vector de onda sobre \mathbf{M}_0 y \mathbf{K}_0 permite la notación $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0(q)$ y $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0(q)$.

El problema de valores propios para un vector modal \mathbf{u} , con ω_j la frecuencia natural, resulta [14]:

$$(\mathbf{K}_0(q) - \omega_i^2 \mathbf{M}_0(q)) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

De esta manera, las frecuencias de excitación que inducen resonancia, dando solución a la ecuación 2.44, corresponden a las raíces de la parte no imaginaria de los autovalores de $\mathbf{M}_0^{-1}(q)\mathbf{K}_0(q)$, es decir:

$$\omega(q) = \sqrt{\text{Re}(\text{eig}(\mathbf{M}_0^{-1}(q)\mathbf{K}_0(q)))} \quad (2.45)$$

En la sección *Modelo nominal* se describe la formación de band gap en función de $\omega(q)$

2.5. Modelo nominal

El cable estudiado cuenta con 7 hebras de acero con diámetro 5 [mm], 6 de ellas rodeando al núcleo helicoidalmente con un ángulo $\eta = 10^\circ$, parámetros fijos en el modelo.

La densidad, elasticidad y tensión del cable son propiedades difíciles de controlar, aún cuando el material es conocido, por lo que se ejecuta sobre ellos el análisis paramétrico descrito en la memoria. Los valores nominales respectivos son:

$$\rho_{nominal} = 7850 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$E_{nominal} = 200 \text{ [GPa]}$$

$$T_{nominal} = 100 \text{ [kN]}$$

El largo total del cable en estudio es, arbitrariamente, $L = 2480D$ durante todo el trabajo de título, con el objetivo de contar con una frecuencia natural de primer modo cercana a 4[Hz] (ecuación 2.24). La longitud y primera frecuencia natural del cable obtenidas son:

$$L = 37.2 [m]$$

$$w_n \text{ sin resonadores} = 4.0919 [Hz]$$

Por su parte, el largo de periodicidad nominal, sujeto a variación en análisis paramétrico, corresponde a 10 vueltas de las hebras externas en torno al núcleo, lo que a su vez determina la distancia entre los resonadores al ubicarse uno por periodicidad. La magnitud del distanciamiento nominal de los resonadores (ecuación 2.1) es:

$$l_{nominal} = 1.7014 [m]$$

Con la longitud de periodicidad utilizada, se asegura el cumplimiento de la hipótesis cinemática de Bernoulli tanto para la viga no lineal como para la totalidad de elemento estructural, entregando validez al estudio.

La cantidad de nodos por periodicidad se fija mediante análisis de convergencia, siendo aceptable cuando el centro y ancho de band gap con n_{nodos} y $(n_{nodos} - 1)$ nodos posean igual valor. Según este criterio, es posible usar 10 nodos, pero se opta por trabajar con 30 en una modalidad conservadora.

Inicialmente, se utiliza $ratio = 1$ (ecuación 2.25), es decir, la masa del resonador es la misma que la de la periodicidad, ajustándose la rigidez del resonador para igualar la frecuencia natural del conjunto masa-resorte con la del cable original (ecuación 2.34). Por otro lado, se considera el cable totalmente operativo en el modelo nominal, sin detrimento de sus hebras, con lo que tanto desplazamiento como carga controlados entregan iguales resultados (ecuaciones 2.18 a 2.23).

Con los parámetros nominales definidos, se procede a buscar las frecuencias naturales en función del vector de onda (ecuación 2.45), mostrándose en la figura 2.6 el resultado de barrer la totalidad del dominio de $\omega(q)$. La ecuación 2.45 utiliza las matrices de masa y rigidez con imposición de condiciones de borde (ecuaciones 2.42 y 2.43), que a su vez son construidas a partir de \mathbf{T}_{sing} , con un resonador por periodicidad (ecuaciones 2.42 a 2.44), $\mathbf{M}_G \text{ sing}$ (ecuación 2.32) y $\mathbf{K}_G \text{ sing}$ (ecuación 2.33). La construcción de las matrices globales a las que se unen los resonadores periódicos se describe en las ecuaciones 2.2 a 2.17.

Como se muestra en la figura 2.6, el band gap corresponde a la zona de frecuencias que no genera resonancia para ninguna condición de fase o desfase de movimiento oscilatorio cuantificada en el vector de onda (descrito en la sección *Condición de periodicidad*), reduciendo así la transmisibilidad de vibraciones. [3]

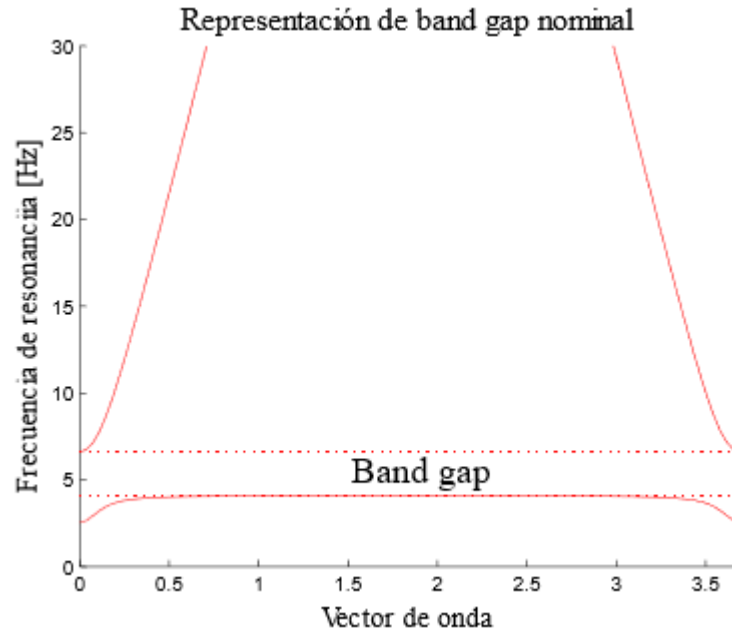


Figura 2.6: Frecuencia natural en función de vector de onda en modelo nominal

El efecto de incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable (ρ , E , T), distanciamiento de los resonadores o longitud de periodicidad (l), operatividad de las hebras (op) y ratio entre masa de resonador y periodicidad ($ratio$), se incluye en el análisis paramétrico, el cual usa como herramientas la propagación de incertidumbre mediante Monte Carlo Importance Sampling y descomposición de varianza de Sobol, descritas en capítulos siguientes.

Capítulo 3

Identificación de parámetros relevantes

Como se ha descrito anteriormente, el modelo posee múltiples parámetros sujetos a variación. La densidad, elasticidad y tensión del cable deben ser estudiados debido a la dificultad de su control en un valor nominal, propagándose la incertidumbre en la salida del modelo mediante el método de Monte Carlo, descrito en el capítulo posterior.

En este capítulo se seleccionan los parámetros relevantes en la modificación de la zona band gap, y los que generan cambios nulos o despreciables son fijados en base a la sección *Modelo nominal* del capítulo *Obtención de band gap*.

Los parámetros sometidos a filtro se indican a continuación:

- Razón de masas: Se asigna valores de 10 %, 50 % y 100 % a la razón entre la masa del resonador y de periodicidad.
- Largo de periodicidad: Con valores 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15 vueltas de las hebras externas en torno al núcleo, modifica el distanciamiento de los resonadores, el cual posee igual magnitud al asignarse un único resonador por periodicidad.
- Operatividad del cable: la cantidad de hebras dañadas en estudio es, como se justifica anteriormente, 0, 2, 4 o 6, aplicándose en cada caso control por carga y por desplazamiento.

En las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 se presenta los centros de band gap en función del largo de periodicidad para distintas razones de masas (*ratio*) y cantidad de hebras dañadas (*daño*), con valores nominales de densidad, elasticidad y tensión del cable.

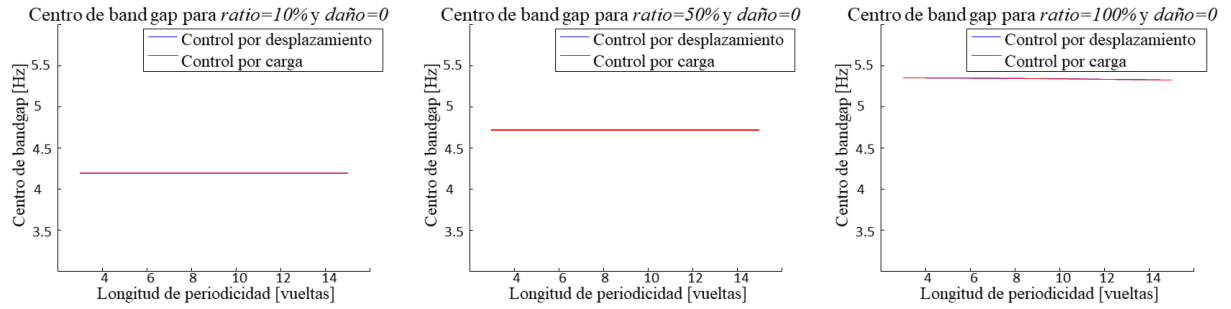


Figura 3.1: Centro de band gap para 0 hebras dañadas

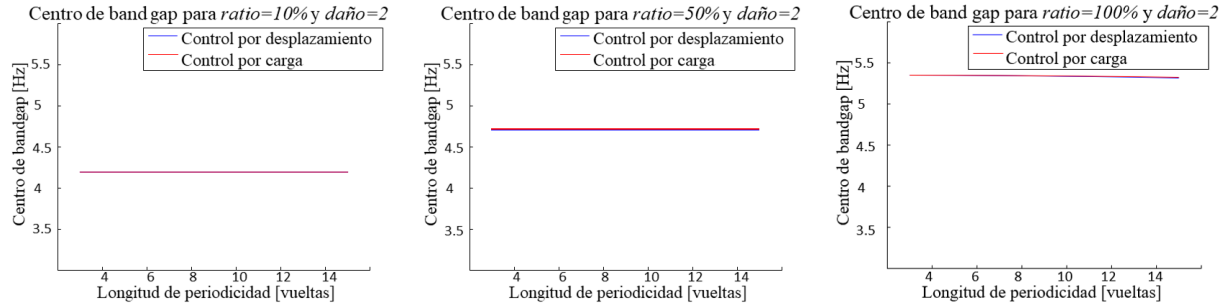


Figura 3.2: Centro de band gap para 2 hebras dañadas

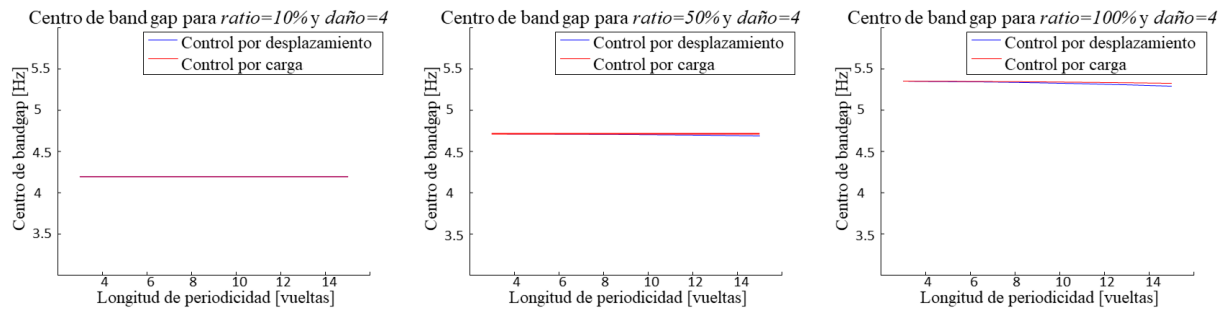


Figura 3.3: Centro de band gap para 4 hebras dañadas

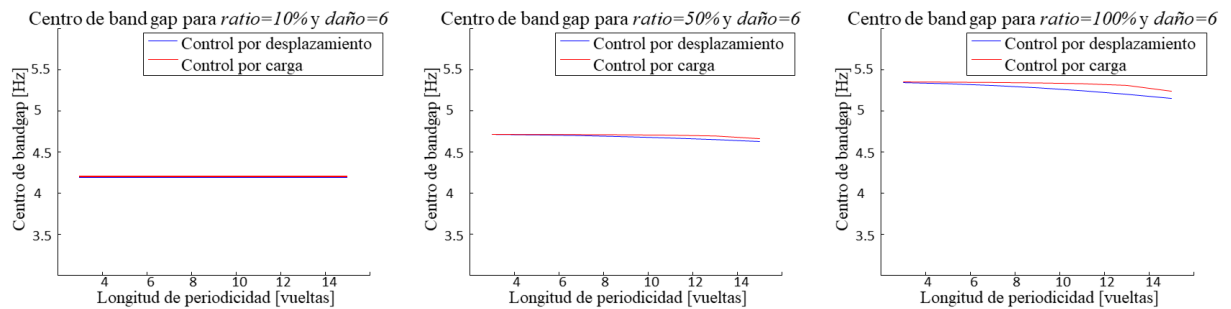


Figura 3.4: Centro de band gap para 6 hebras dañadas

En las figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8, por su parte, se presentan los anchos de band gap en función del largo de periodicidad, al variar $ratio$ y $daño$ con $[\rho, E, T]$ nominal.

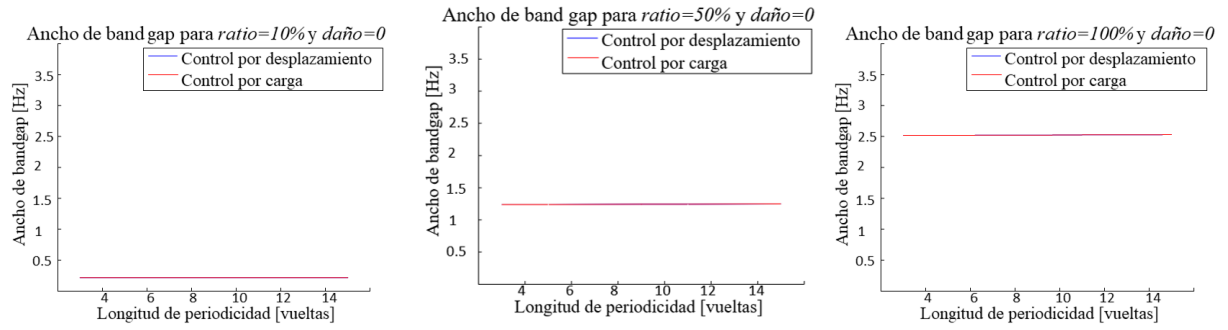


Figura 3.5: Ancho de band gap para 0 hebras dañadas

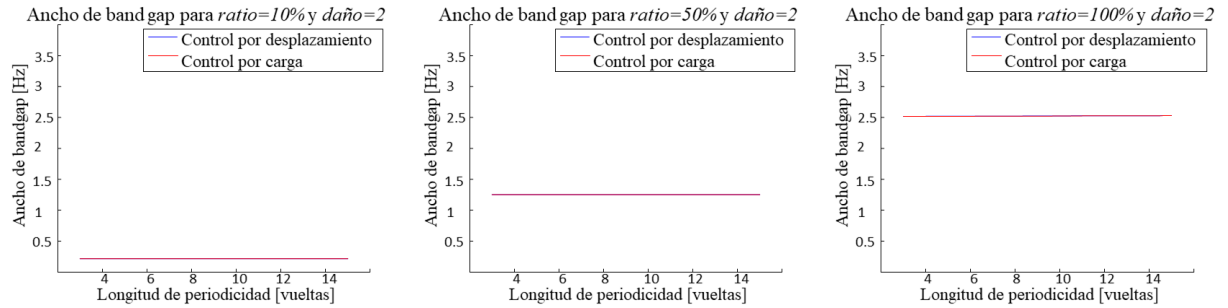


Figura 3.6: Ancho de band gap para 2 hebras dañadas

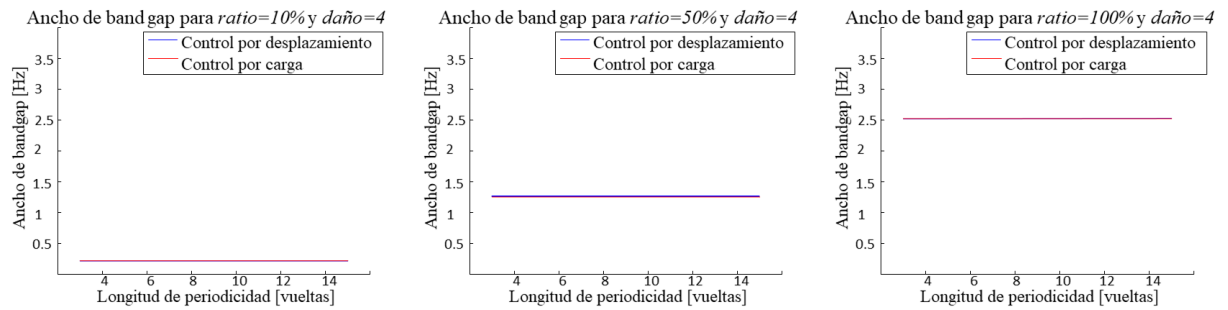


Figura 3.7: Ancho de band gap para 4 hebras dañadas

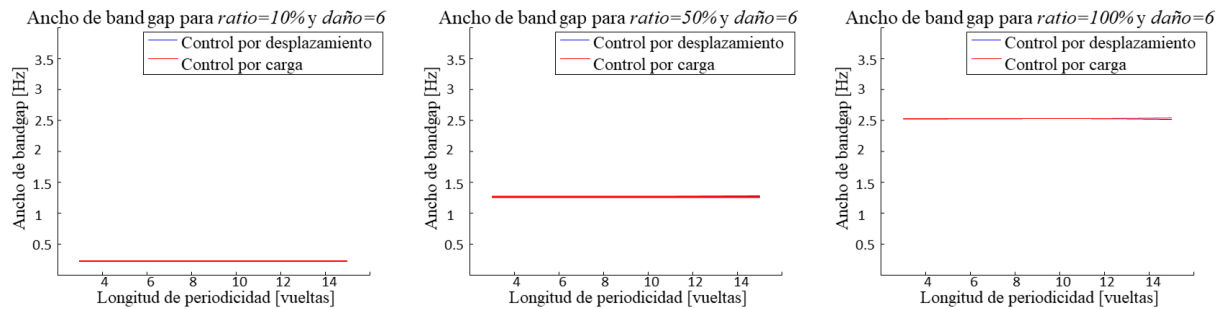


Figura 3.8: Ancho de band gap para 6 hebras dañadas

La masa total de resonadores Σm_r es el producto de la masa unitaria m_r y la cantidad de ellos en el cable, n_r , dependiendo la última del largo de periodicidad l y el de la totalidad del cable L , desarrollándose:

$$\Sigma m_r = m_r n_r = (m_p \text{ ratio}) \left(\frac{L}{l} \right) = \rho_l l \text{ ratio} \frac{L}{l} = \rho_l \text{ ratio} L$$

En cada gráfico de las figuras 3.5 a 3.8 se muestra que la longitud de periodicidad no tiene influencia sobre el ancho de band gap. Como se describe en la sección *Inclusión de resonadores*, el ancho depende solo de la masa total de resonadores, indicándose en el desarrollo analítico Σm_r su nula dependencia del distanciamiento de los cuerpos adicionados, validándose los resultados numéricos presentados.

Al ser el largo del elemento, h , dependiente del largo de periodicidad (ecuación 2.2), se presentan cambios en las matrices locales de rigidez y masa (ecuaciones 2.12 a 2.14), los cuales se propagan y, cuando 6 hebras poseen daño, alteran la relación de nula dependencia *ancho de band gap-largo de periodicidad*, siendo este efecto despreciado para análisis futuros (cambios menores a 10% del ancho de band gap).

La rigidez del resonador es ajustada para igualar la frecuencia natural del conjunto masa-resorte con la del cable original, al igual que en el modelo nominal. En la sección *Inclusión de resonadores* se describe que el límite inferior del band gap es igual a la frecuencia natural de los resonadores periódicos, lo que también se cumple numéricamente en la extensión de la memoria, siendo cercano a 4.0919 [Hz]. Debido a que la longitud de periodicidad no influye de manera relevante en el ancho de band gap, el centro resulta igualmente independiente del distanciamiento de resonadores, lo que se observa en cada gráfico de las figuras 3.1 a 3.4.

Se concluye que el largo de periodicidad, equivalente al distanciamiento de resonadores al presentarse uno por tramo periódico, influye en forma despreciable en el posicionamiento de la zona de anulación, por lo que, en adelante, se utiliza el valor nominal de 10 vueltas de las hebras externas en torno al núcleo.

$$l = 1.7014[m]$$

Por otro lado, la cantidad de hebras dañadas varía en cada fila de gráficos, es decir, cada figura presenta distinta operatividad del cable. Al comparar los centros de band gap presentados en las figuras 3.1 a 3.4 se observa que, al modificar la cantidad de hebras deterioradas entre un set de gráficos y otro, se genera un efecto sobre la posición central de la zona de anulación de vibración que es despreciable en el estudio, con errores inferiores a 5% respecto al comportamiento de total independencia *centro de band gap-operatividad del cable*. Tal efecto despreciable se justifica de forma análoga al de la independencia *centro de band gap-largo de periodicidad*. La cantidad de hebras dañadas modifica el centro de band gap en el modelo al incluirse indirectamente en las matrices locales de rigidez y masa (ecuaciones 2.12 a 2.14).

Los anchos de band gap, presentados en las figuras 3.5 a 3.9, poseen también despreciable dependencia de la cantidad de hebras dañadas, observándose lo anterior al desplazarse en cada columna de gráficos. En adelante, la cantidad de hebras dañadas consideradas para el análisis corresponde a 0, cable totalmente operativo, o 6, daño total de las hebras externas.

hebras dañadas = 0 o 6

Por último, al analizar cada fila de gráficos, es decir, cada figura por sí sola, se observa que la razón de masas es el parámetro relevante en la obtención del centro (figuras 3.1 a 3.4) y ancho de band gap (figuras 3.5 a 3.8). El parámetro *ratio* influye directamente en la masa total del conjunto de resonadores, que, como se describe previamente, condiciona el ancho de band gap, y en consecuencia la ubicación del centro. El vector de razones de masa, ***ratio***, utilizado en la propagación de incertidumbre y análisis de sensibilidad, se explicita a continuación:

$$\mathbf{ratio} = [0.05 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1]^T \cdot 100\%$$

Capítulo 4

Propagación de incertidumbre

En este capítulo se presentan los antecedentes que permiten cuantificar el efecto de incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable, centrándose el análisis en la confección de intervalos de confianza para el centro y ancho de band gap. Se utiliza para esto el método numérico de Monte Carlo, con sus respectivas adaptaciones.

4.1. Monte Carlo directo

El modelo determinista entrega el centro y ancho de band gap para parámetros concretos $\boldsymbol{\theta} = [\rho \ E \ T]$, tal como se muestra en la sección *Modelo nominal*, denotándose tal resolución determinista:

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \text{centro} \\ \text{ancho} \end{bmatrix}(\boldsymbol{\theta}) \quad (4.1)$$

Sin embargo, cuando se utilizan parámetros inciertos, es requerido un análisis paramétrico para conocer el valor esperado de salida real del sistema. Tal salida real corresponde a la adición de un error predictivo \mathbf{e} a la salida determinista [6]:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e} \quad (4.2)$$

Cuando los parámetros inciertos siguen una función de distribución de probabilidad (PDF) $p(\boldsymbol{\theta})$, el valor esperado de salida real resulta [6]:

$$\mathbf{g} = \int \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \quad (4.3)$$

La dimensión de la integral es igual a la de $\boldsymbol{\theta}$, 3 en el caso de estudio. La resolución analítica de la ecuación 4.3 es posible solo para casos simples, y la integración numérica resulta ineficiente para dimensiones mayores o iguales a 3, por lo que se recurre al método de simulación estocástica de Monte Carlo (MC). [6]

El primer paso del método de Monte Carlo directo (MCD) consiste en generar k muestras que sigan la distribución $\mathbf{p}(\boldsymbol{\theta})$, cada una denominada $\boldsymbol{\theta}_j$, con $j = [1, \dots, k]$. Con cada muestra se obtiene el vector de salida determinista del sistema $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_j)$, estimándose la integral probabilística (ecuación 4.3) como el promedio de los vectores $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_j)$ [6]:

$$\bar{g} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G(\theta_j) \quad (4.4)$$

Las salidas $G(\theta_j)$ se pueden, adicionalmente, emplear en la creación de intervalos de confianza. Un intervalo de confianza corresponde a la zona en que con probabilidad $(1 - \alpha)$ se encuentra $G_i(\theta_j)$, con $i = 1$ para el centro e $i = 2$ para ancho de band gap en el caso de estudio. Tras ordenarse crecientemente las salidas obtenidas con MCd, una razón $(1 - \alpha)$ de ellas se encuentra entre $G_i^{k\alpha/2}(\theta_{j'})$ y $G_i^{k(1-\alpha/2)}(\theta_{j''})$, es decir, entre la salida $k\frac{\alpha}{2}$ y $k(1 - \frac{\alpha}{2})$, lo que se muestra en la figura 4.1. Un ordenamiento decreciente es también aceptable.

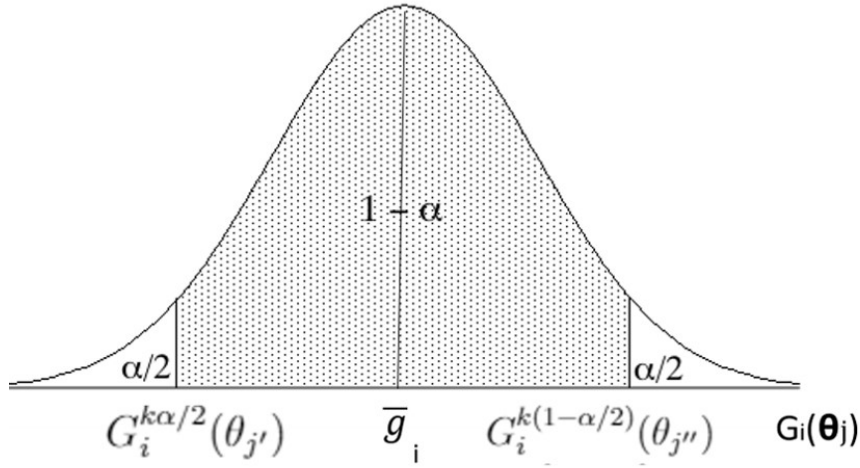


Figura 4.1: Construcción de intervalo de confianza a partir de MCd

La imprecisión del método de Monte Carlo se cuantifica mediante el coeficiente de variación (c.o.v.) del estimador, medida de la variabilidad de las salidas, centro y ancho de band gap en el caso de estudio. [6]:

$$\mathbf{c.o.v.}_{MC\ i} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{std(G_i(\theta))}{mean(G_i(\theta))} \quad i = [1, 2] \quad (4.5)$$

Pese a que se esperan distintos $\mathbf{c.o.v.}_{MC\ i}$ al repetir la iteración, es posible estimar la imprecisión a partir de un único set de muestras, debido a que el método MCd es imparcial y convergente, aproximándose a cero el coeficiente de variación al tender k a infinito. [6]

Dado que los parámetros del modelo, densidad, elasticidad y tensión, físicamente no pueden tomar valores negativos, es necesario imponer positividad en la generación de muestras, lo que se logra mediante la distribución lognormal.

4.2. Disitribución Lognormal

La distribución lognormal corresponde a una función de densidad de probabilidad en que el logaritmo natural de la variable aleatoria ($\boldsymbol{\theta}$) sigue una distribución normal, es decir [15]:

$$\ln(\boldsymbol{\theta}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (4.6)$$

Donde $\boldsymbol{\mu}$ corresponde a la media y $\boldsymbol{\Sigma}$ a la covarianza (varianza en múltiples variables) del logaritmo del set de muestras, requiriendo la última ser definida positiva. [15]

Al considerar solo una variable (x) con distribución $\ln(x) \sim (\mu, \sigma^2)$, con μ promedio y σ^2 varianza escalares, el coeficiente de variación y promedio de x se obtienen con [16]:

$$c.o.v.(x) = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \quad (4.7)$$

$$mean(x) = exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (4.8)$$

Al trabajar con varianzas lo suficientemente pequeñas, se cumple:

$$\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \approx \sigma \Rightarrow c.o.v.(x) \approx \sigma \quad (4.9)$$

$$exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \approx exp(\mu) \Rightarrow mean(x) \approx e^\mu \quad (4.10)$$

Así, la media y covarianza de PDF de $\ln(\boldsymbol{\theta}) = \ln([\rho \ E \ T])$ resultan, al extrapolar para varias variables [17][19]:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \ln(mean(\rho)) \\ \ln(mean(E)) \\ \ln(mean(T)) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} c.o.v.^2(\rho) & c_{\rho E} c.o.v.(\rho) c.o.v.(E) & 0 \\ c_{\rho E} c.o.v.(\rho) c.o.v.(E) & c.o.v.^2(E) & c_{ET} c.o.v.(E) c.o.v.(T) \\ 0 & c_{ET} c.o.v.(E) c.o.v.(T) & c.o.v.^2(T) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

En la ecuación 4.12, $c_{a,b} \in [-1, 1]$ corresponde al coeficiente de correlación de Pearson, donde 0 es ausencia de correlación, 1 es correlación positiva total y -1 correlación negativa total entre a y b . En la figura 4.2 se muestra la relación de Pearson para dos variables numéricas, a modo de ejemplo. [18]

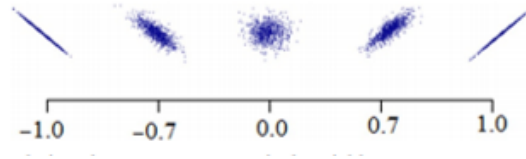


Figura 4.2: Correlación entre dos variables numéricas

Existen diversos algoritmos para modificar la complejidad, velocidad y precisión de la generación de muestras, tales como decaimiento exponencial, dirección isotrópica en 3D, seno y coseno de ángulo aleatorio en 2D, standard gaussiano, etc. El standard gaussiano permite la generación de muestras que sigan distribuciones normales o, en el caso de estudio, lognormales en varias variables, eliminando problemas asociados a diferencias en órdenes de magnitud. [17]

4.3. Standard gaussiano

La generación de muestras mediante standard gaussiano toma, en su versión básica, una distribución gaussiana con media 0 y desviación estándar 1, la cual es trabajada para construir el espacio muestral en el espacio físico, distribuyéndose este según $\ln(\boldsymbol{\theta}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (ecuación 4.6). [17]

La PDF $N(0, 1)$, al ser extrapolada para varias variables, entrega la distribución de muestras en espacio gaussiano, siendo v el número de variables, tres en el caso de estudio, $\mathbf{0}_{vx1}$ un vector de ceros e $\mathbf{I}_{v xv}$ la matriz identidad [19]:

$$\boldsymbol{\theta}_{sg} \sim N(\mathbf{0}_{vx1}, \mathbf{I}_{v xv}) \quad (4.13)$$

El set de muestras en espacio físico logarítmico se obtienen, correspondiendo C a la descomposición de Cholesky ($C C^T = \boldsymbol{\Sigma}$) y en base a las ecuaciones 4.11 y 4.12, con [17]:

$$\ln(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\mu} + C \boldsymbol{\theta}_{sg} \quad (4.14)$$

Finalmente, el espacio físico es construido con $\boldsymbol{\theta} = \exp(\ln(\boldsymbol{\theta}))$.

La variabilidad del método de Monte Carlo, con distribución lognormal generada a partir de espacio gaussiano, puede ser reducida mediante la generación de muestras ubicadas más frecuentemente en la zona de importancia, método conocido como Monte Carlo Importance Sampling (MCIS). [20]

4.4. Monte Carlo Importance Sampling

En la figura 4.3 se muestra el concepto de importance sampling para escalares, en que la salida $G(x)$ de un modelo se maximiza en una entrada x de baja probabilidad $p(x)$, reduciendo la contribución a la integral probabilística, y por ende la eficiencia de MCd al ser poco el aporte (ecuación 4.4). Por este motivo, se introduce una distribución $q(x)$ para generar las muestras, centrada en el máximo del integrando de MCd, $G(x)p(x)$, reduciendo la variabilidad en la salida al optimizar el posicionamiento muestral. Es necesario, para un apropiado funcionamiento de MCIS, que las distribuciones $p(x)$ y $q(x)$ sean similares para todo el dominio. [20]

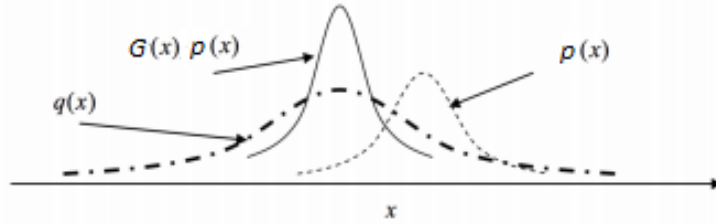


Figura 4.3: Concepto de Importance Sampling

La generación de muestras según la distribución objetivo en varias variables, $p(\theta)$, se logra en MCIS con la propuesta $q(\theta)$, la cual es ponderada para cada muestra θ_j según $\omega(\theta_j) = p(\theta_j)/q(\theta_j)$. Así, la integral probabilística a resolver, junto a su discretización para resolución numérica, es [20]:

$$g = \int G(\theta)p(\theta)d\theta = \int G(\theta)\frac{p(\theta)}{q(\theta)}q(\theta)d\theta = \int G(\theta)\omega(\theta)q(\theta)d\theta \quad (4.15)$$

$$\bar{g} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k G(\theta_j)\omega(\theta_j) \quad (4.16)$$

4.5. Modelo incierto

El análisis paramétrico se efectúa en las propiedades mecánicas del cable, densidad (ρ), elasticidad (E) y tensión(T), con coeficientes de variación de 1% y 10% en todas sus posibles permutaciones, es decir:

$$c.o.v.(\theta) = \begin{cases} [1 \% 1 \% 1 \%] \\ [1 \% 10 \% 1 \%] \\ [1 \% 1 \% 10 \%] \\ [1 \% 10 \% 10 \%] \\ [10 \% 1 \% 1 \%] \\ [10 \% 10 \% 1 \%] \\ [10 \% 1 \% 10 \%] \\ [10 \% 10 \% 10 \%] \end{cases}$$

Se considera nula correlación entre las propiedades mecánicas del cable, por lo que la distribución lognormal $\ln(\boldsymbol{\theta}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ es definida con (ecuaciones 4.6, 4.11 y 4.12):

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \ln(\text{mean}(\rho)) \\ \ln(\text{mean}(E)) \\ \ln(\text{mean}(T)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(7850 \text{ kg/m}^3) \\ \ln(200 \cdot 10^9 \text{ Pa}) \\ \ln(100 \cdot 10^3 \text{ N}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} c.o.v.^2(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & c.o.v.^2(E) & 0 \\ 0 & 0 & c.o.v.^2(T) \end{bmatrix}$$

Las muestras generadas en espacio gaussiano, 3000 en el caso de estudio, siguen la distribución $\boldsymbol{\theta}_{sg} \sim N(\mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{I}_{3 \times 3})$ (ecuación 4.13). Para cada razón de masas y condición de daño indicadas en el capítulo *Identificación de parámetros relevantes*, se localizan los máximos de los integrando $\text{centro}(\boldsymbol{\theta}_{sg}) \cdot p(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ y $\text{ancho}(\boldsymbol{\theta}_{sg}) \cdot p(\boldsymbol{\theta}_{sg})$, donde $\text{centro}(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ y $\text{ancho}(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ se obtienen a partir de la exponencial de $\ln(\boldsymbol{\theta})$ (ecuación 4.14).

El máximo de integrando indica el óptimo para ubicar la distribución propuesta de MCIS, siendo $\theta_{opt,centro,sg}$ para el centro y $\theta_{opt,ancho,sg}$ para el ancho. El punto de diseño en que se centra la distribución propuesta general $q(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ de MCIS se define:

$$\boldsymbol{\theta}_{opt \ sg} = \frac{\theta_{opt,centro,sg} + \theta_{opt,ancho,sg}}{2}$$

Así, la probabilidad y distribución propuesta general resultan:

$$\boldsymbol{\theta}_{sg} \sim q(\boldsymbol{\theta}_{sg}) \equiv N(\boldsymbol{\theta}_{opt \ sg}, 1.2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3})$$

Las muestras en espacio gaussiano generadas con $N(\boldsymbol{\theta}_{opt \ sg}, 1.2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3})$ son ponderadas en $\omega(\boldsymbol{\theta}_j)$ y multiplicadas por la salida determinista $\text{centro}(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ o $\text{ancho}(\boldsymbol{\theta}_{sg})$ (ecuación 4.15), según corresponda. Las salidas obtenidas con MCIS lognormal standard gaussiano son utilizadas para la construcción de los intervalos de confianza de 90% que se muestran en las figuras 4.4 a 4.19.

Se comienza presentando, en las figuras 4.4 a 4.11, las zonas de centro y ancho de band gap en que se encuentran 90% de los resultados cuando el cable se encuentra totalmente operativo, para carga y desplazamiento controlado y para cada razón de masas, cambiando en cada figura el vector de coeficientes de variación de los parámetros inciertos.

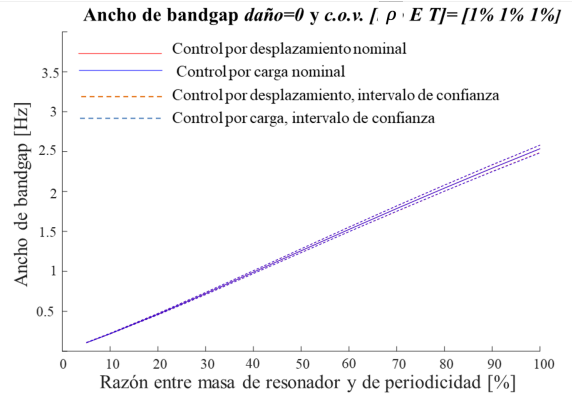
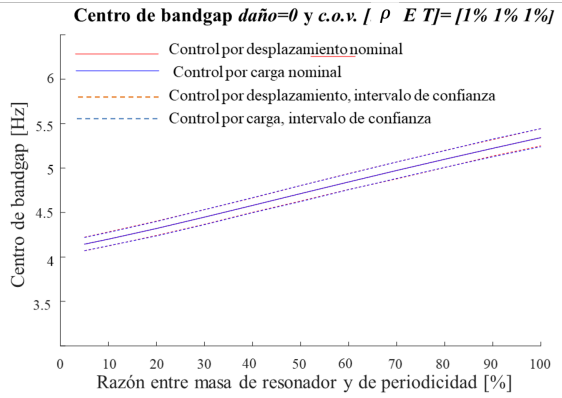


Figura 4.4: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v. [\rho \ E \ T] = [1\% \ 1\% \ 1\%]$

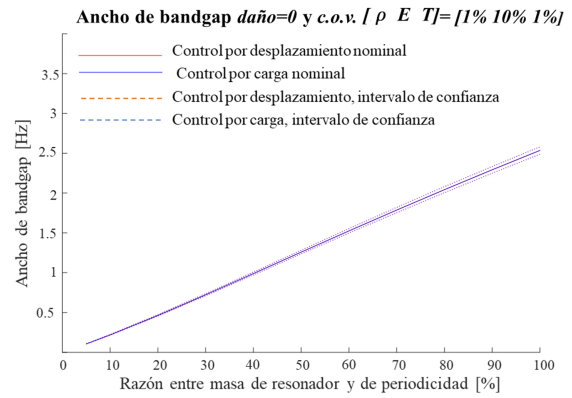
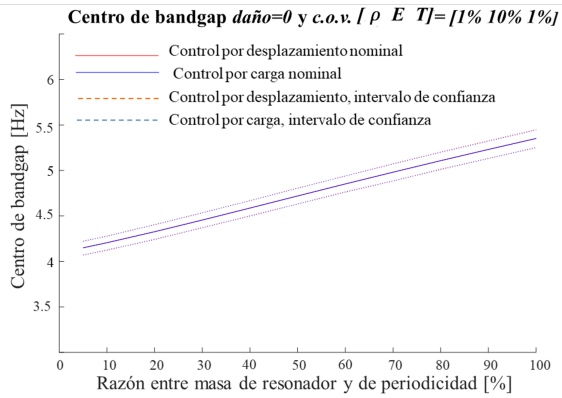


Figura 4.5: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v. [\rho \ E \ T] = [1\% \ 10\% \ 1\%]$

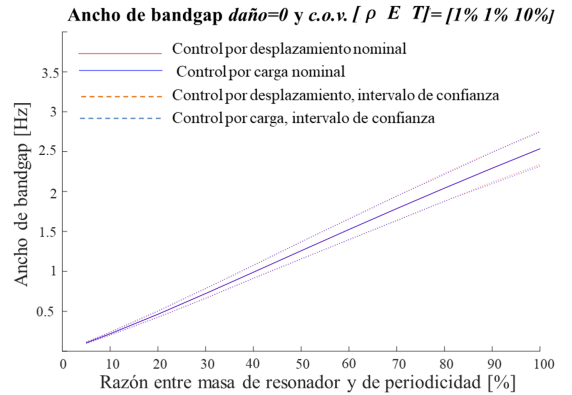
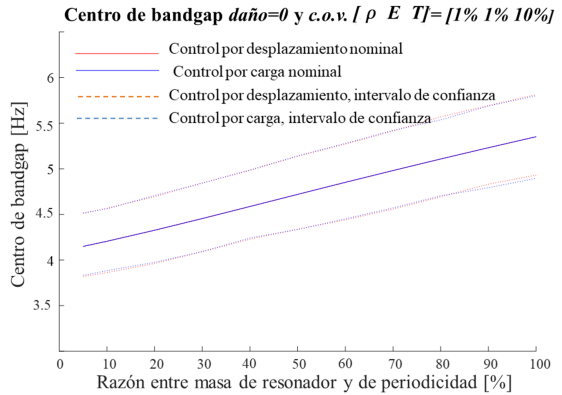


Figura 4.6: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v. [\rho \ E \ T] = [1\% \ 1\% \ 10\%]$

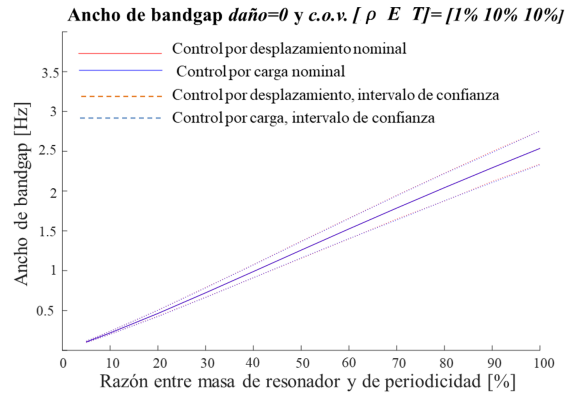
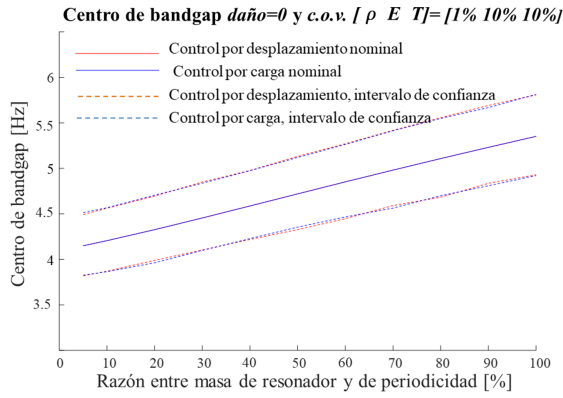


Figura 4.7: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 10\% \ 10\%]$

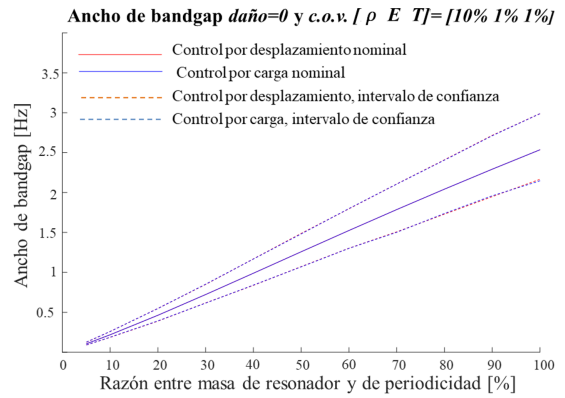
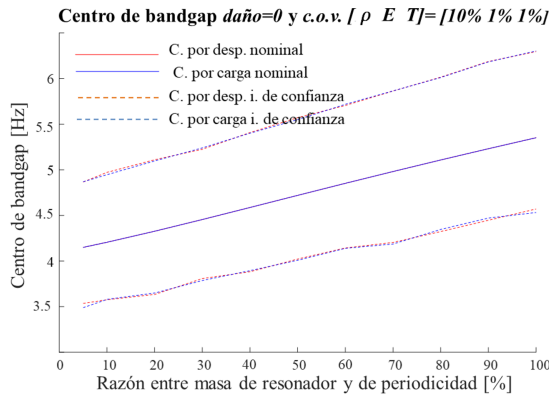


Figura 4.8: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[10\% \ 1\% \ 1\%]$

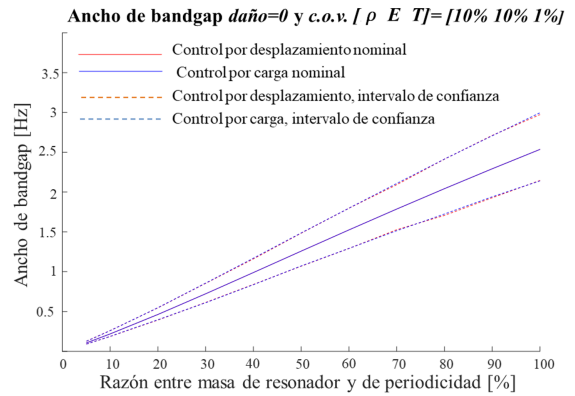
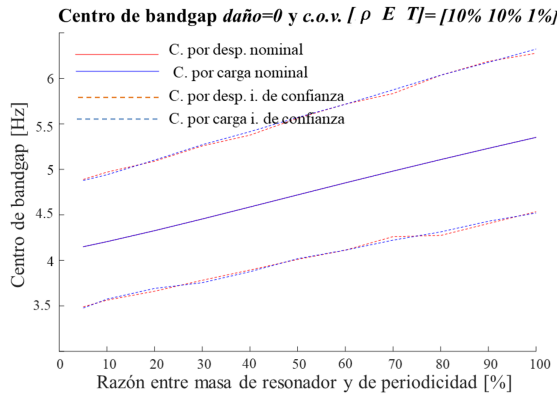


Figura 4.9: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[10\% \ 10\% \ 1\%]$

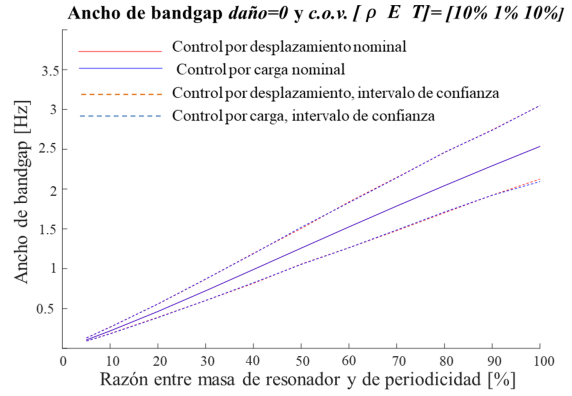
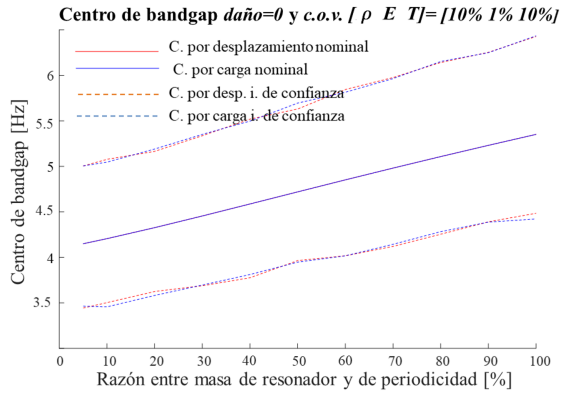


Figura 4.10: I. de confianza en cable sin daño, $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 1\% 10\%]$

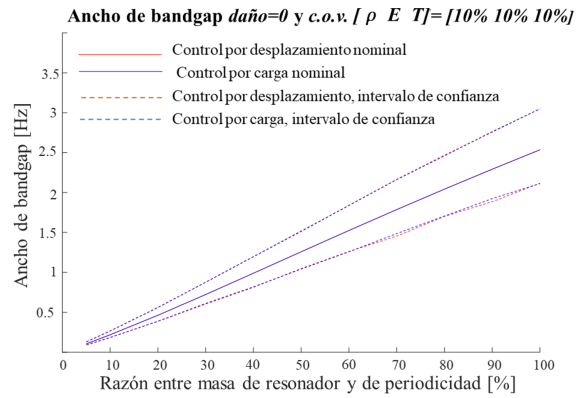
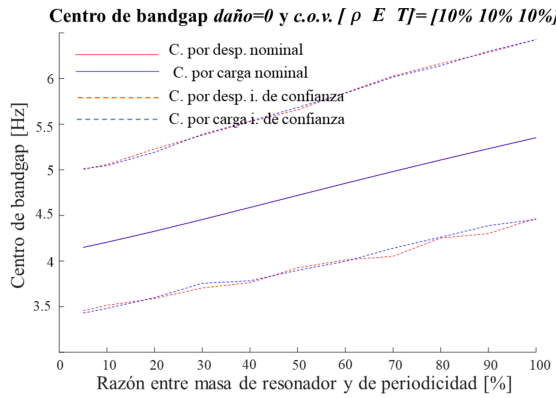


Figura 4.11: I. de confianza en cable sano, $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 10\% 10\%]$

En las figuras 4.12 a 4.19 se presentan los intervalos de confianza de 90 % en condición de daño de todas las hebras externas, cambiando en cada figura el vector de coeficientes de variación de los parámetros inciertos.

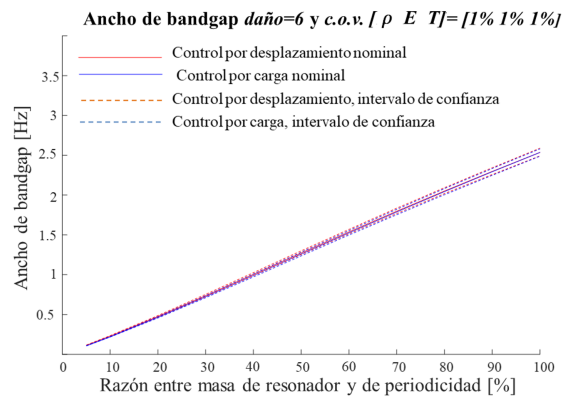
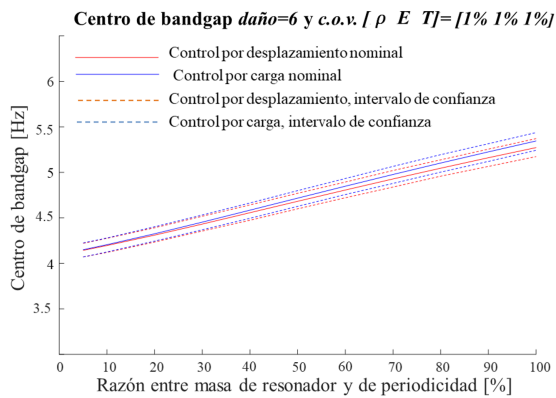


Figura 4.12: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v.[\rho E T]=[1\% 1\% 1\%]$

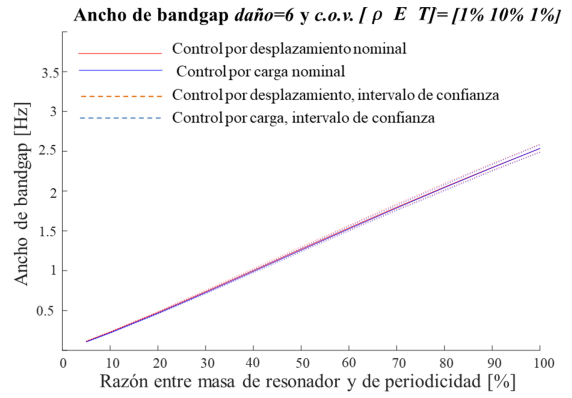
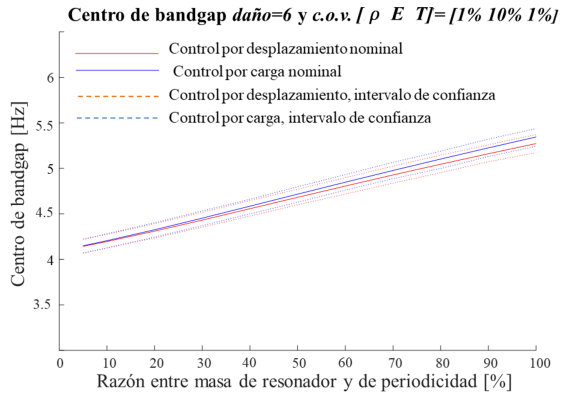


Figura 4.13: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 10\% \ 1\%]$

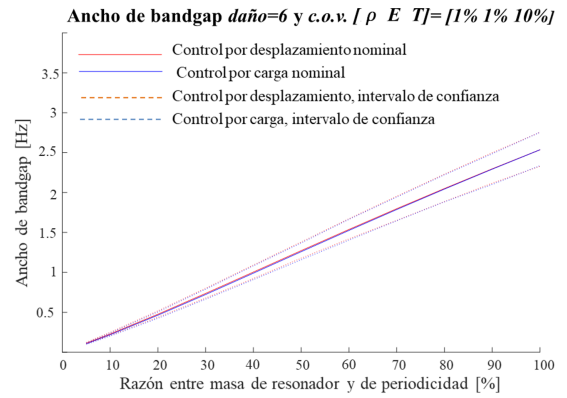
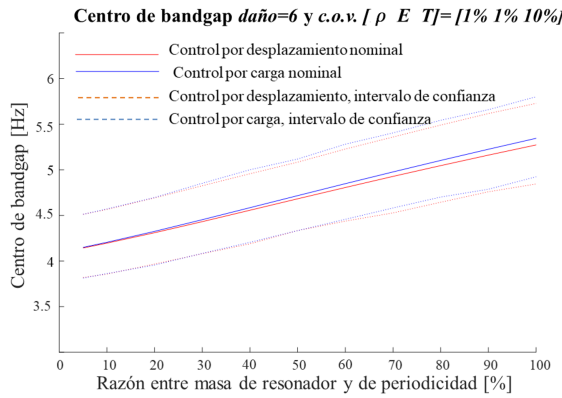


Figura 4.14: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 1\% \ 10\%]$

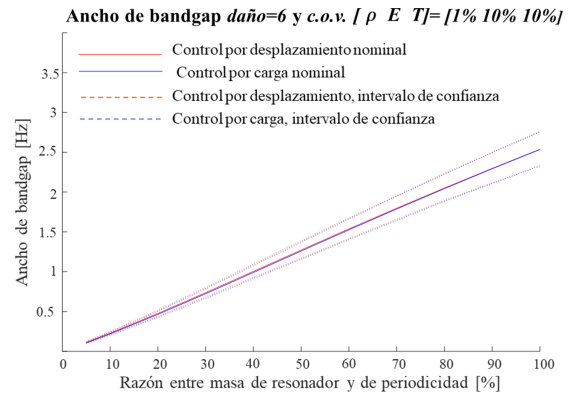
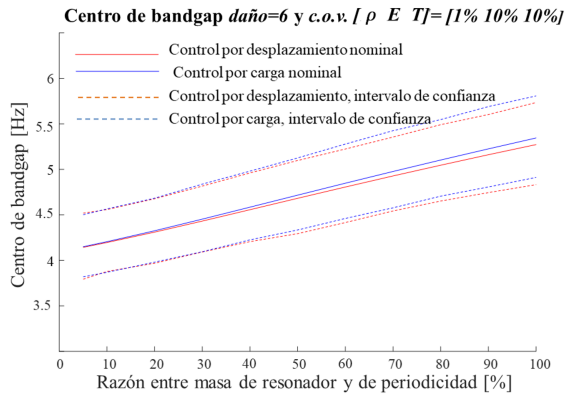


Figura 4.15: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 10\% \ 10\%]$

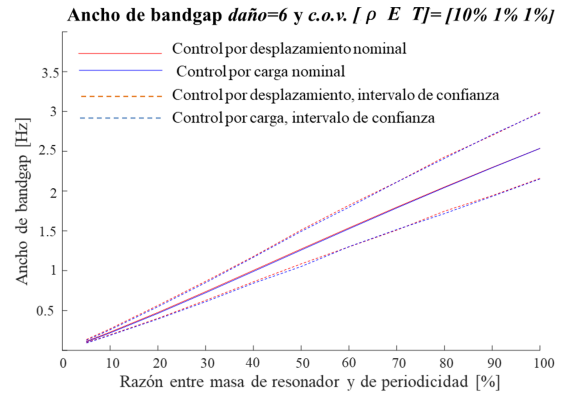
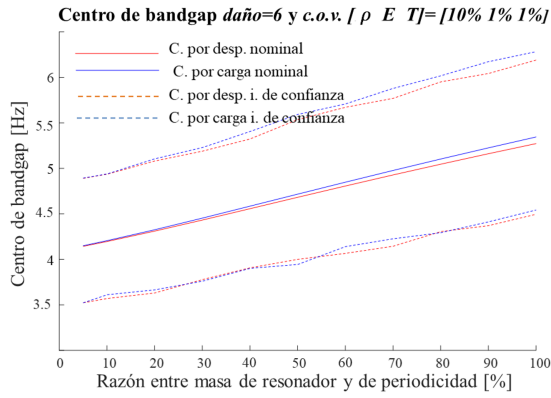


Figura 4.16: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v. [\rho \ E \ T]= [10\% \ 1\% \ 1\%]$

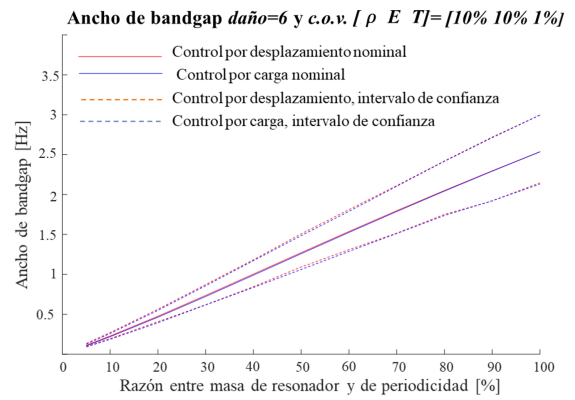
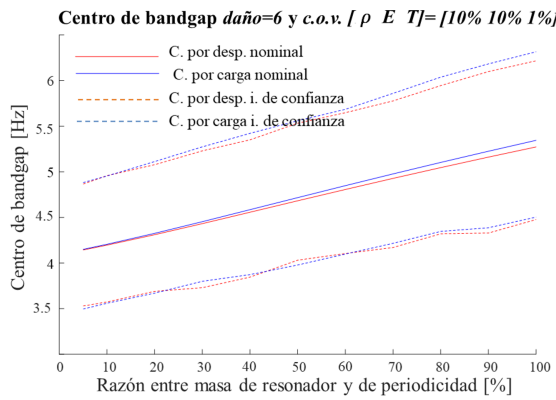


Figura 4.17: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v. [\rho \ E \ T]= [10\% \ 10\% \ 1\%]$

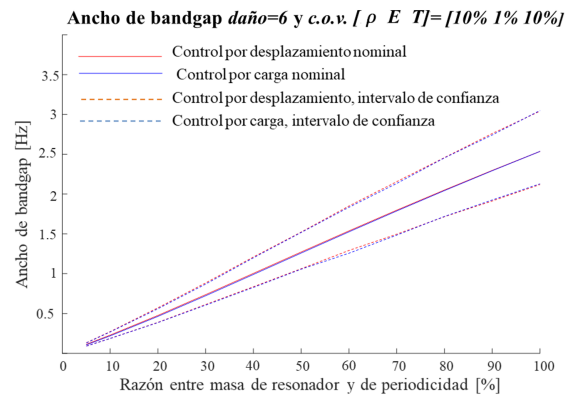
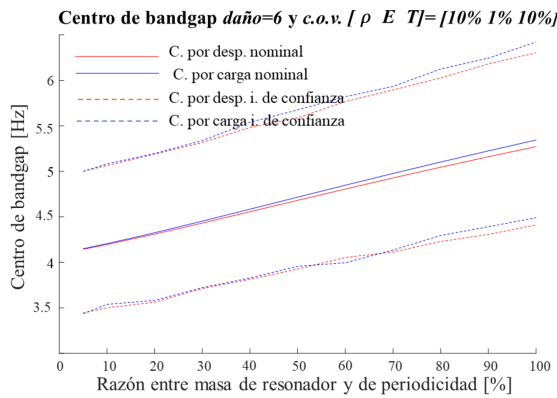


Figura 4.18: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v. [\rho \ E \ T]= [10\% \ 1\% \ 10\%]$

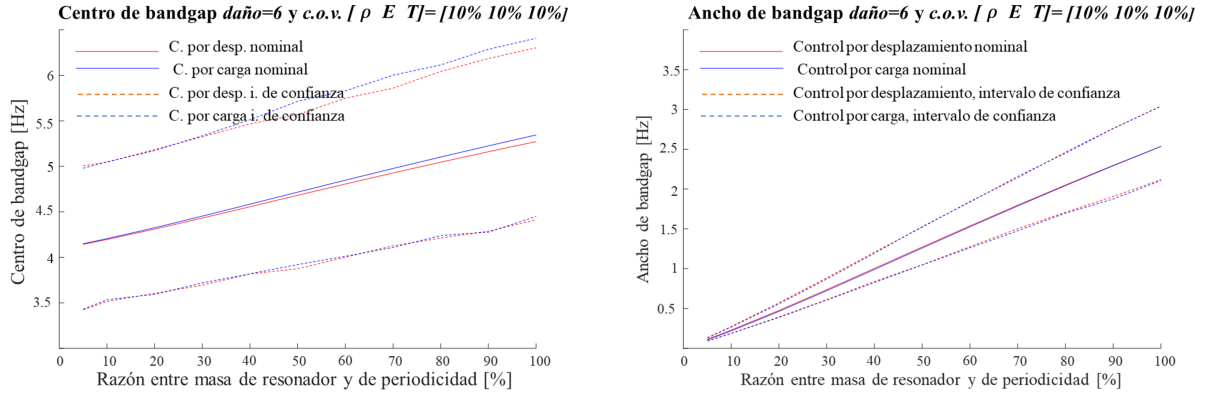


Figura 4.19: I. de confianza en cable dañado, $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 10\% 10\%]$

Al comparar los intervalos de confianza para el cable totalmente operativo (figuras 4.4 a 4.11) con sus correspondientes intervalos en el cable con todas sus hebras externas dañadas, se observa una similitud en los resultados que avala la baja dependencia del centro y ancho de band gap respecto a la operatividad, tratada en el capítulo *Identificación de parámetros relevantes*.

Al estudiar cada figura por separado se observa que, tanto en control por carga como por desplazamiento, el ancho de band gap es directamente proporcional a la razón entre la masa de resonador y la de periodicidad. Se observa también que el centro de band gap se posiciona en frecuencias superiores al subir la razón de masas. En base a la inherente constancia del límite inferior de la zona de anulación de vibración en el modelo estudiado, el incremento de frecuencia de la posición central se justifica en el crecimiento del ancho, validando el comportamiento descrito en el capítulo anterior. Para cada muestra $[\rho ET]$ generada con MCIS se obtiene una frecuencia natural distinta (ecuación 2.24), por lo que resulta necesario indicar que la constancia del límite inferior de band gap es solo una aproximación.

Se tiene también que, en todos los gráficos de ancho de band gap, un incremento en la razón de masas, con el consecuente aumento de ancho nominal, genera mayor amplitud en el intervalo de confianza, lo que representa una mayor dispersión de las salidas reales, alejándose estas de la nominal. Por su parte, en figuras con alto coeficiente de variación como fig. 4.11 o fig. 4.19, se puede apreciar que la amplitud del intervalo de confianza de ubicación central de band gap es proporcional a la salida nominal, pero, al ser cercana a 1 la razón entre centro de band con *ratio* 100% y 5% (fin e inicio de las abscisas), la dispersión de la salida permanece aproximadamente constante. En figuras con bajos coeficientes de variación, como fig. 4.4 o fig. 4.12, la dispersión sufre modificaciones casi nulas.

En las figuras 4.4 y 4.12 se presentan los intervalos de confianza para el vector de coeficientes de variación [1 % 1 % 1 %]. Al incrementar la variabilidad del módulo de Young a 10 %, es decir, utilizar un vector $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 10 \% 1 \%]$ (figuras 4.5 y 4.13, respectivamente), los resultados son aproximadamente iguales. De la misma manera, las figuras 4.6 y 4.14, con $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 1 \% 10 \%]$, son similares a las figuras 4.7 y 4.15, respectivamente. Se deduce entonces que la elasticidad o módulo de Young no afecta la variabilidad de la salida en gran medida, conclusión respaldada en el capítulo de descomposición de varianza. Para llegar a tal deducción también es válida la comparación de $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 1 \%]$ (figuras 4.8 y 4.16) y $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 10 \% 1 \%]$ (figuras 4.9 y 4.17) o la de $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 10 \%]$ (figuras 4.10 y 4.18) y $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 10 \% 10 \%]$ (figuras 4.11 y 4.19). La irrelevancia del efecto de la elasticidad sobre la dispersión de la salida se opone a los resultados esperados, ya que su variación provoca modificaciones en la rigidez equivalente a flexión y en la tensión de cada hebra, como se describe en la sección *Descripción del cable*.

De forma análoga a la elasticidad, se analiza el efecto de incremento o reducción de la variabilidad de la densidad y tensión del cable.

La variabilidad de la densidad aumenta desde $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 1 \% 1 \%]$ (figuras 4.4 y 4.12) hacia $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 1 \%]$ (figuras 4.8 y 4.16), o bien de $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 1 \% 10 \%]$ a $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 10 \%]$. En ambos casos es posible apreciar que la incertidumbre en la densidad del material sí afecta la variabilidad de la salida, lo que, nuevamente, es respaldado en el capítulo siguiente.

Por otro lado, la variabilidad de la salida también es afectada por la incertidumbre en la tensión, lo que se observa al comparar $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 1 \% 10 \%]$ (figuras 4.6 y 4.14) con $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [1 \% 1 \% 1 \%]$ (figuras 4.4 y 4.12), o bien $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 10 \%]$ con $\mathbf{c.o.v}[\rho E T] = [10 \% 1 \% 1 \%]$ (figuras 4.8 y 4.16).

La cuantificación del efecto de la incertidumbre de los parámetros inciertos sobre la variabilidad o varianza en la salida, centro y ancho de band gap, se presenta en el capítulo *Descomposición de varianza*.

Capítulo 5

Descomposición de varianza

5.1. Análisis de Sobol

La sensibilidad de la respuesta ante una entrada incierta puede ser estudiada con el análisis de descomposición de varianza, en el que se plantea que la varianza total en la salida es la suma de los aportes provenientes de los parámetros y sus interacciones, utilizándose el método de Sobol para cuantificar el aporte. [6]

La varianza total para la salida i , con $i = 1$ para el centro e $i = 2$ para el ancho en el caso de estudio, siendo g_i el valor esperado para el i -ésimo output (ecuación 4.3), está dada por [6]:

$$V_i = \int G_i^2(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} - g_i^2 \quad (5.1)$$

Numéricamente, V_i es obtenido como la varianza de las muestras generadas con Monte Carlo.

El principio del análisis de descomposición de varianza de Sobol se describe matemáticamente en la ecuación 5.2, siendo V_n la varianza generada por parámetros independientes de primer orden $\theta_n \in \Theta_n$ (ρ , E , T en el caso de estudio) y V_{nm} la generada por la agrupación de variables independientes, esta última descrita en un vector $\theta_{nm} \in \Theta_{nm}$ compuesto por θ_n y θ_m . La cantidad de variables independientes se representa como N . [6]

$$V_i = \sum_{n=1}^N V_n + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^N V_{nm} + \dots \quad (5.2)$$

Las varianzas de primer y segundo orden se describen en las ecuaciones 5.3 y 5.4, donde $\boldsymbol{\theta}'_n \in \boldsymbol{\Theta}'_n$ denota todos los parámetros de $\boldsymbol{\theta}$ a excepción de θ_n , mientras que $\boldsymbol{\theta}'_{nm} \in \boldsymbol{\Theta}'_{nm}$ es análogo para los parámetros de segundo orden. [6]

$$V_n = \int_{\Theta_n} \left[\int_{\boldsymbol{\Theta}'_n} G_i(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}'_n)d\boldsymbol{\theta}'_n \right]^2 p(\theta_n)d\theta_n \quad (5.3)$$

$$V_{nm} = \int_{\Theta_{nm}} \left[\int_{\boldsymbol{\Theta}'_{nm}} G_i(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}'_{nm})d\boldsymbol{\theta}'_{nm} \right]^2 p(\theta_{nm})d\theta_{nm} - V_n - V_m - g_i \quad (5.4)$$

Los métodos numéricos que permiten la resolución de las ecuaciones 5.3 y 5.4 son descritos en detalle por I.M. Sobol en *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates* [21]

Los índices de Sobol S_n y S_{nm} indican la razón entre la varianza generada por un parámetro y la varianza total de la salida, permitiéndose conocer qué entradas del modelo son más relevantes en análisis posteriores. [6]

$$S_n = \frac{V_n}{V_i} \quad (5.5)$$

$$S_{nm} = \frac{V_{nm}}{V_i} \quad (5.6)$$

5.2. Sensibilidad del modelo

Al igual que en la propagación de incertidumbre, la sensibilidad de la salida frente a parámetros inciertos se estudia en base a muestras generadas mediante MCIS, en las variantes lognormal y standard gaussiano, replicando la iteración descrita en la sección *Modelo incierto*. Nuevamente, el número de muestras en estudio es 3000 y los coeficientes de variación ocupan todas las permutaciones de 1% y 10% para el grupo $[\rho, E, T]$, pero el vector de razones de masa utilizadas se reduce debido al alto costo computacional de la iteración:

$$\mathbf{ratio} = [0.05 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1]^T \cdot 100 \%$$

Se puede considerar como irrelevante el efecto de la incertidumbre de los parámetros de segundo orden sobre la varianza del modelo, ya que, para la cantidad de muestras utilizadas, índices menores a 5% no son confiables. [22]

En las figuras 5.1 a 5.8 se muestran los índices de Sobol de primer orden en gráficos de barra acumulativos para el cable con todas sus hebras operativas, aplicándose control de carga, mientras que en las figuras 5.9 a 5.16 se controla el desplazamiento.

Las figuras 5.8, 5.9, 5.10 y 5.12 presentan diferencias en el eje de ordenadas respecto a las otras ilustraciones, debido a que la suma de índices de Sobol, numéricamente, resulta ampliamente mayor a 1 para determinadas razones de masa.

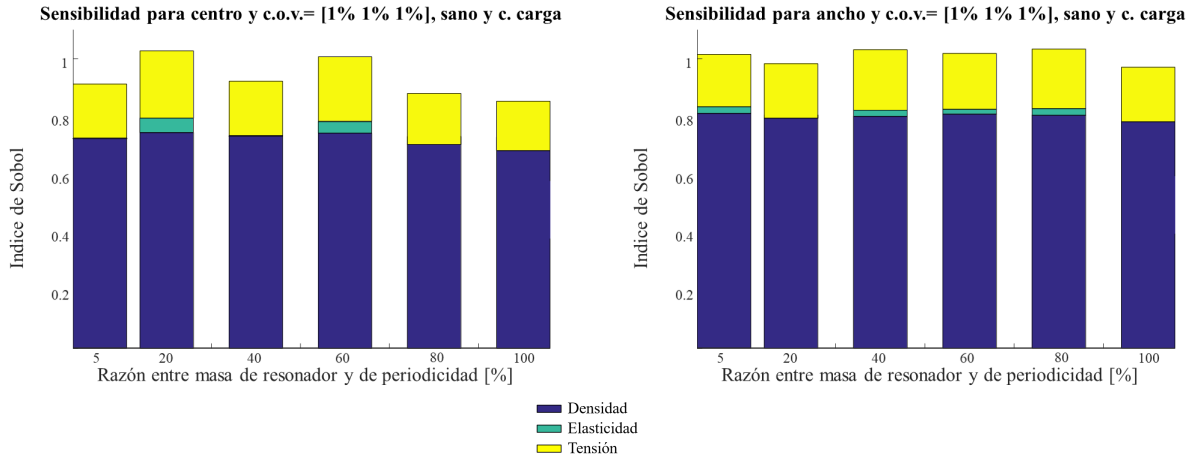


Figura 5.1: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 1\% \ 1\%]$

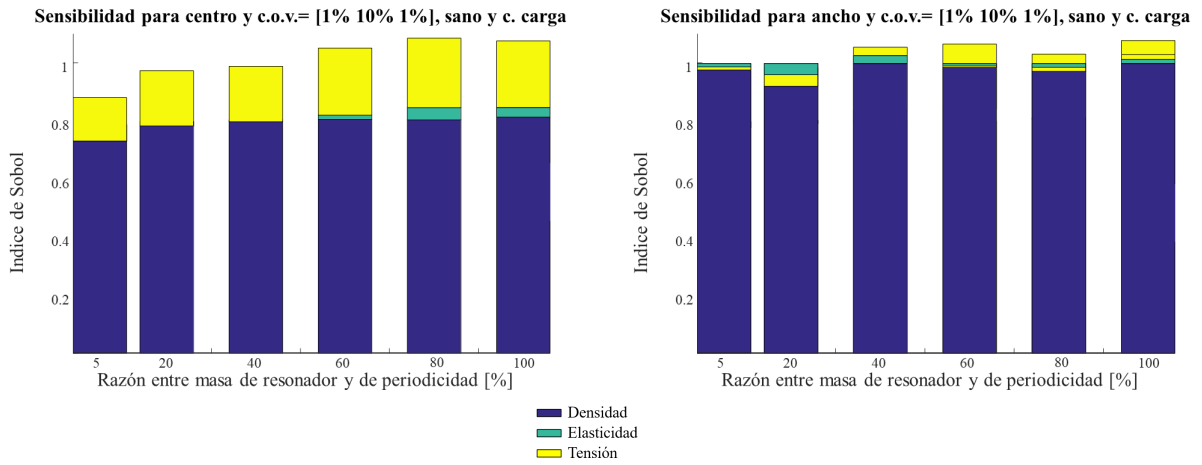


Figura 5.2: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 10\% \ 1\%]$

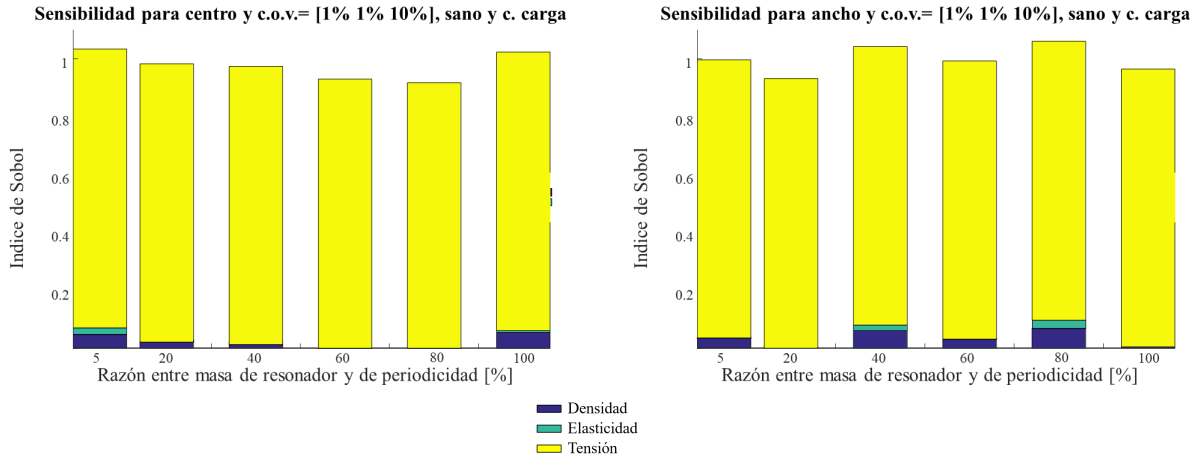


Figura 5.3: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 1\% 10\%]$

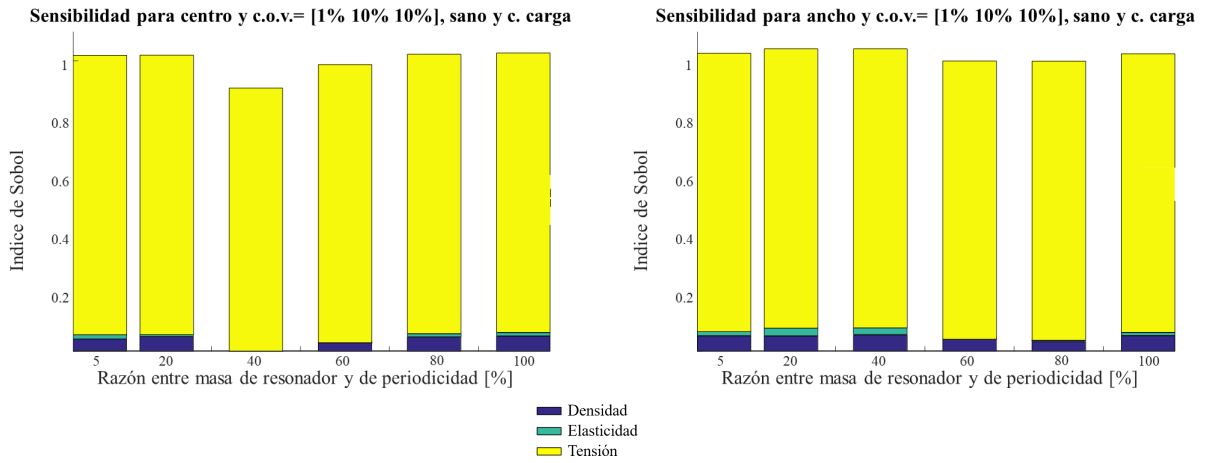


Figura 5.4: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 10\% 10\%]$

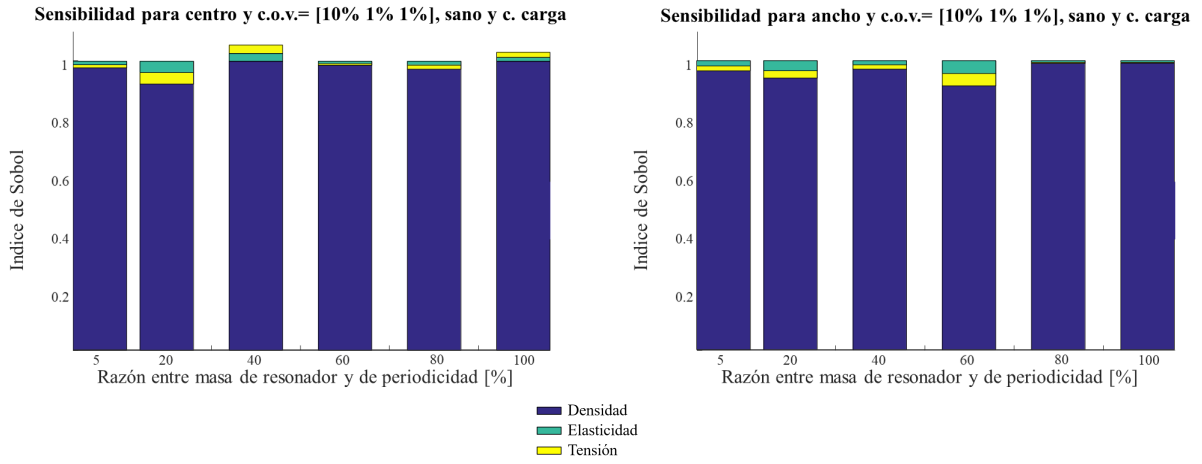


Figura 5.5: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 1\% 1\%]$

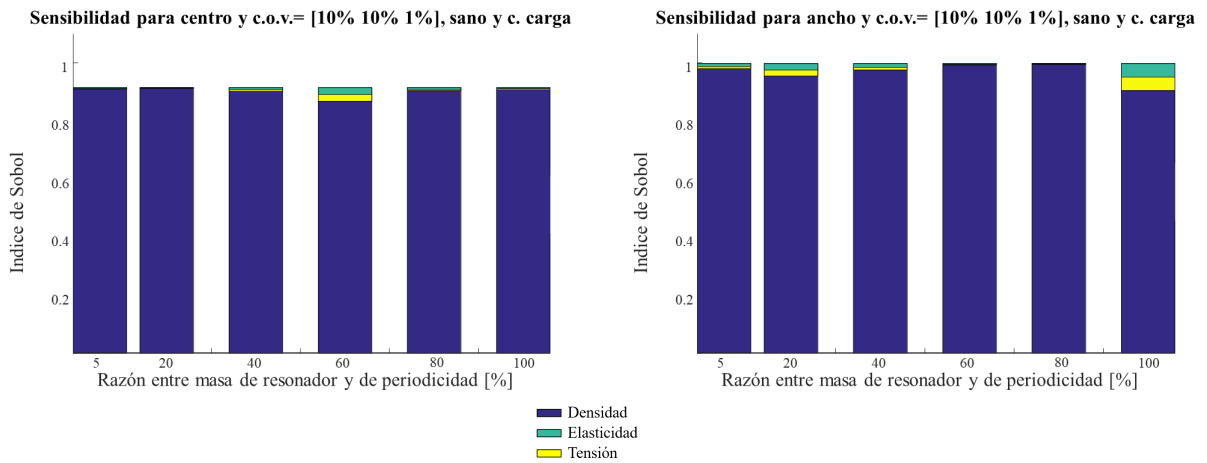
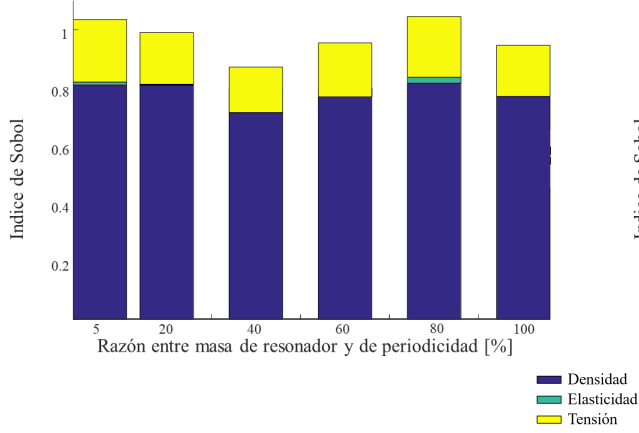


Figura 5.6: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 10\% 1\%]$

Sensibilidad para centro y c.o.v.= [10% 1% 10%], sano y c. carga



Sensibilidad para ancho y c.o.v.= [10% 1% 10%], sano y c. carga

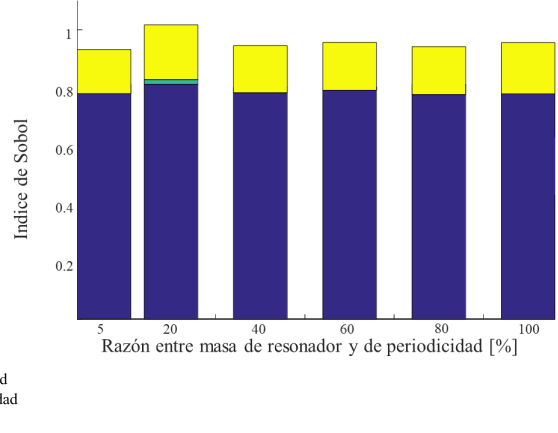
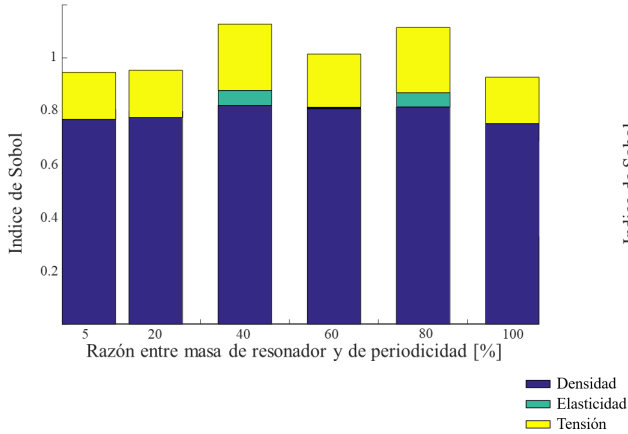


Figura 5.7: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 1\% 10\%]$

Sensibilidad para centro y c.o.v.= [10% 10% 10%], sano y c. carga



Sensibilidad para ancho y c.o.v.= [10% 10% 10%], sano y c. carga

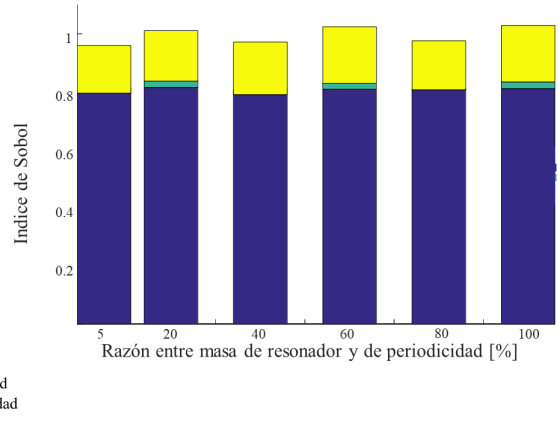


Figura 5.8: Sensibilidad en cable sin daño, control de carga y $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 10\% 10\%]$

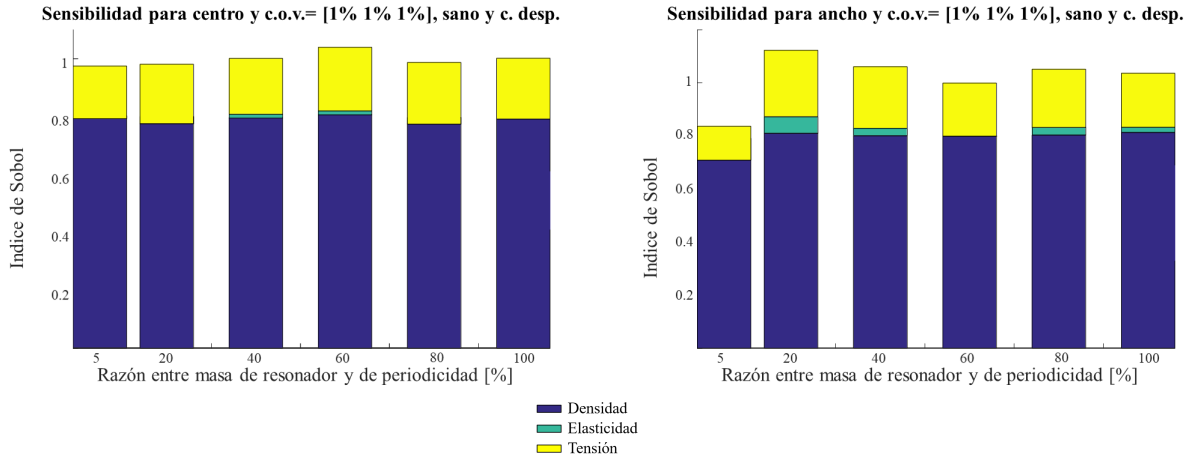


Figura 5.9: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\ \% \ 1\ \% \ 1\ \%]$

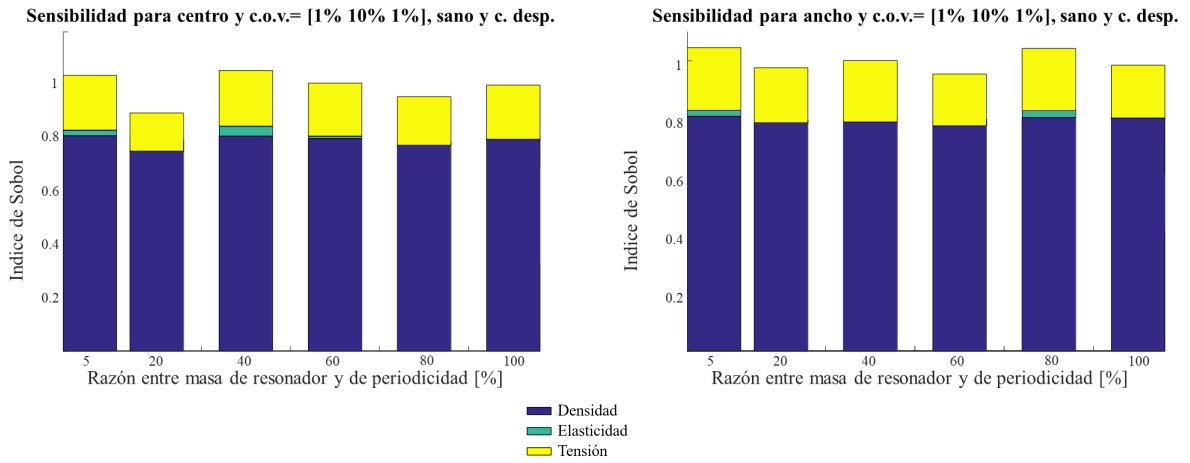


Figura 5.10: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\ \% \ 10\ \% \ 1\ \%]$

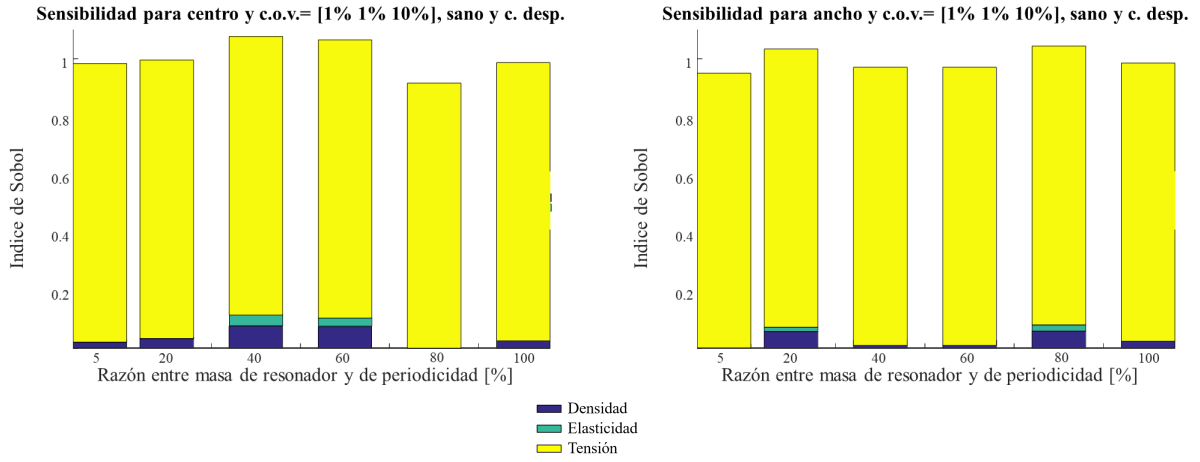


Figura 5.11: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 1\% 10\%]$

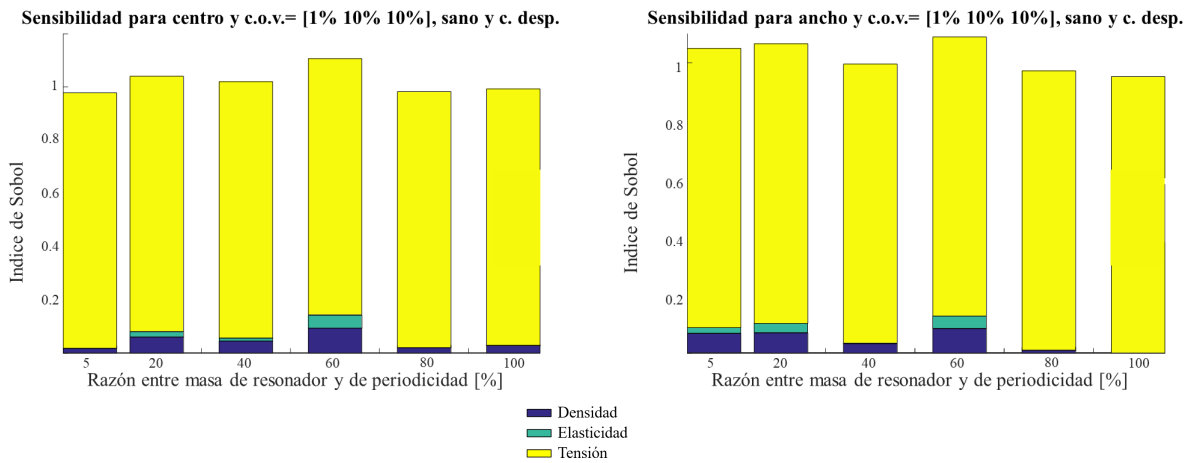


Figura 5.12: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 10\% 10\%]$

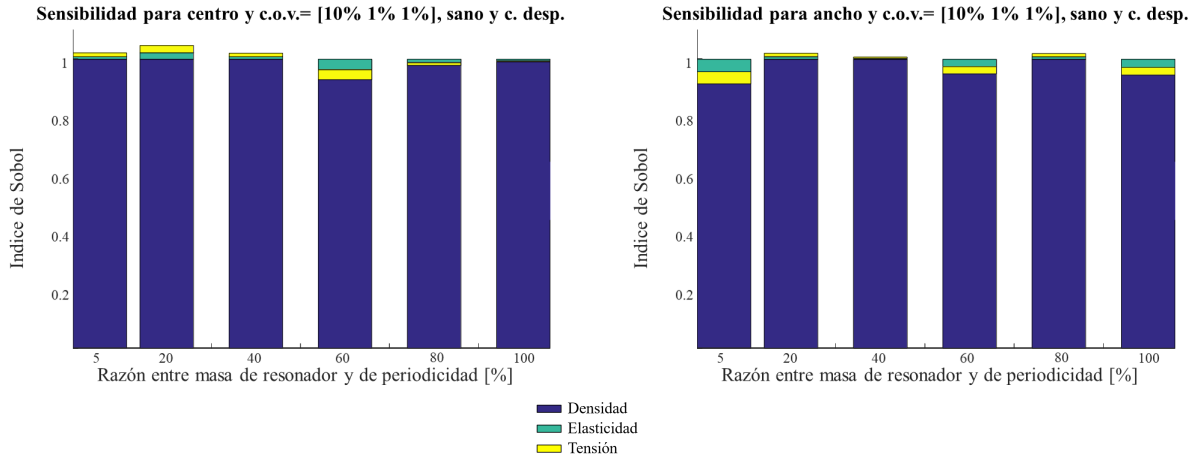


Figura 5.13: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 1\% 1\%]$

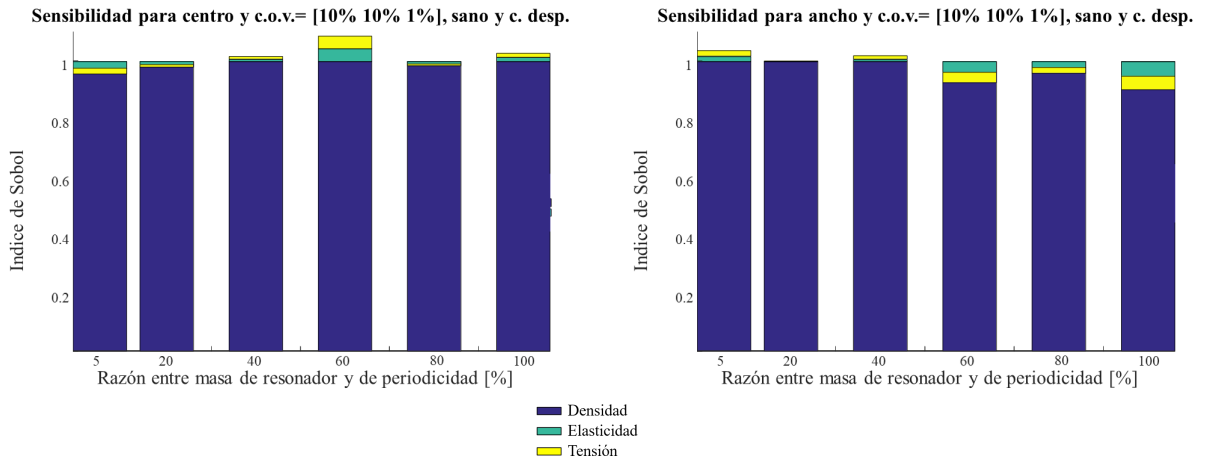


Figura 5.14: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 10\% 1\%]$

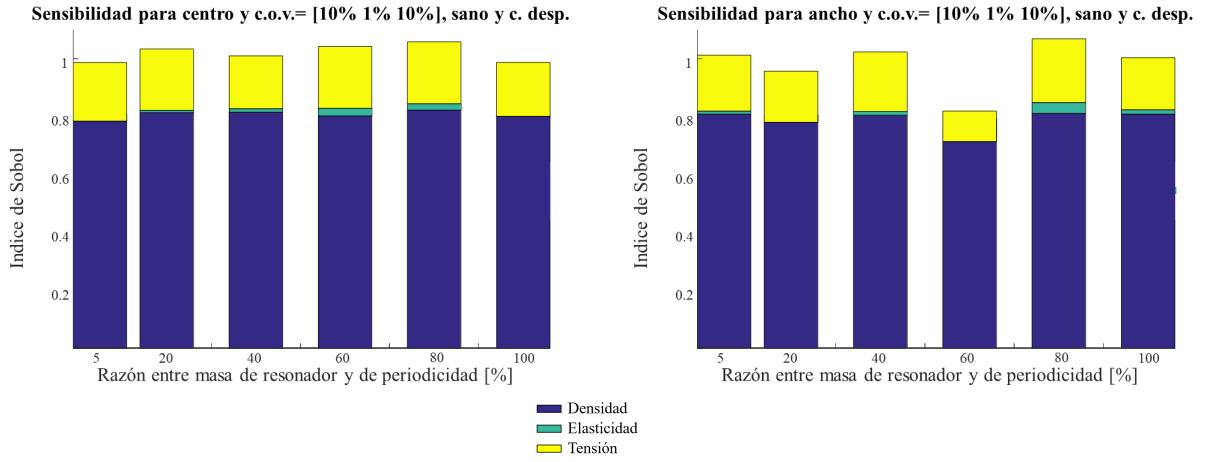


Figura 5.15: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 1\% 10\%]$

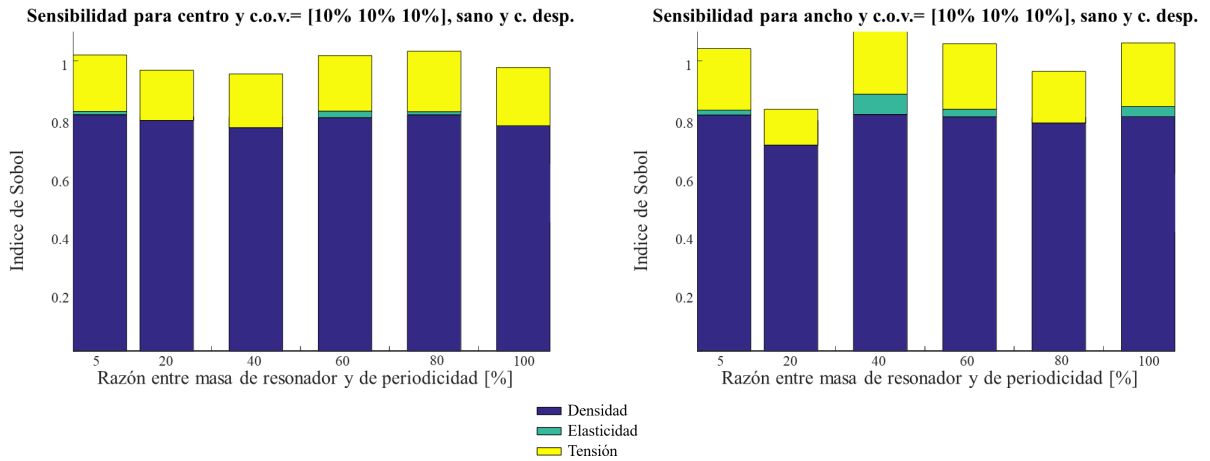


Figura 5.16: Sensibilidad en cable sin daño, control de desplazamiento y $c.o.v.[\rho E T]=[10\% 10\% 10\%]$

En las figuras 5.17 a 5.32 se muestra la descomposición de varianza para el cable con daño en todas las hebras externas, aplicándose control por carga en las figuras 5.17 a 5.24 y control por desplazamiento en las figuras 5.25 a 5.32.

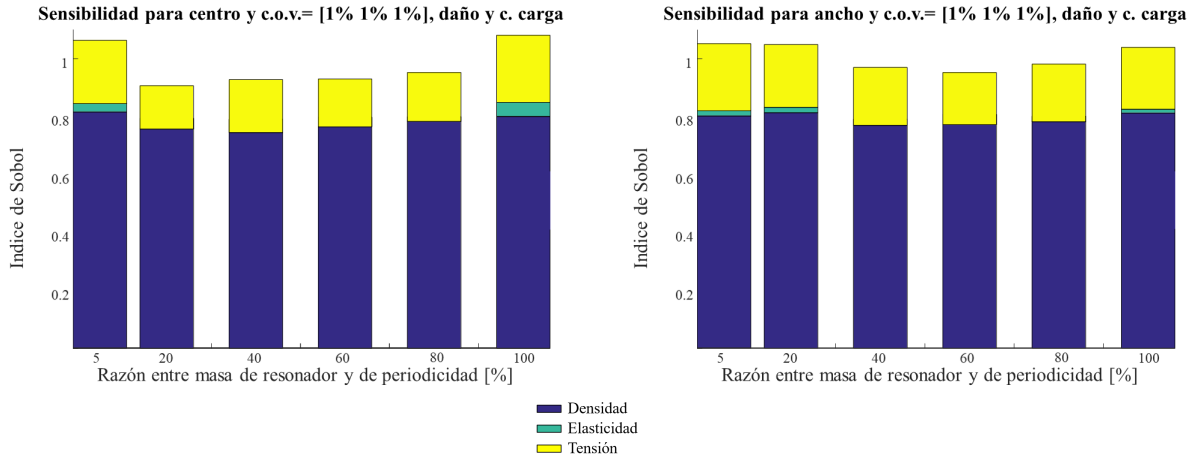


Figura 5.17: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 1\% \ 1\%]$

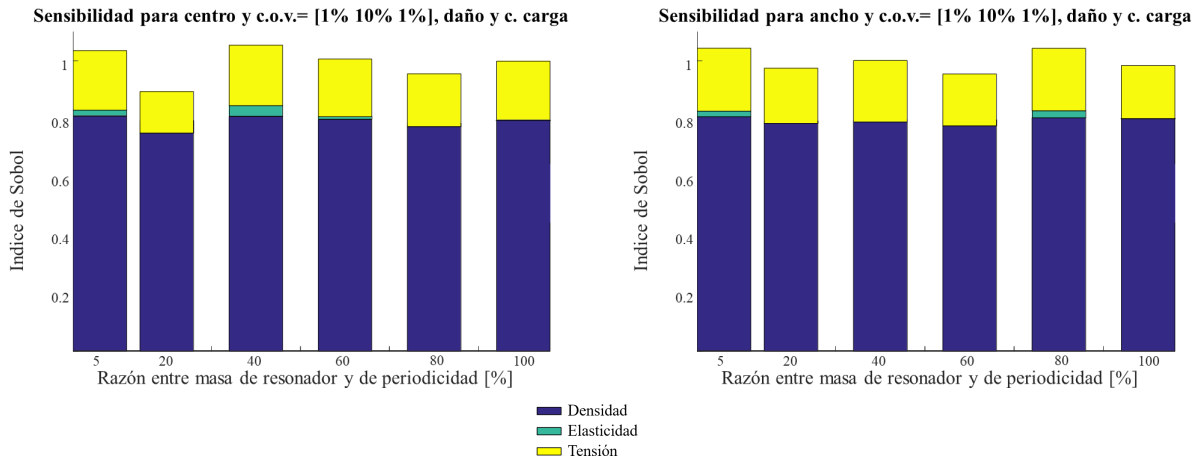


Figura 5.18: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho \ E \ T]=[1\% \ 10\% \ 1\%]$

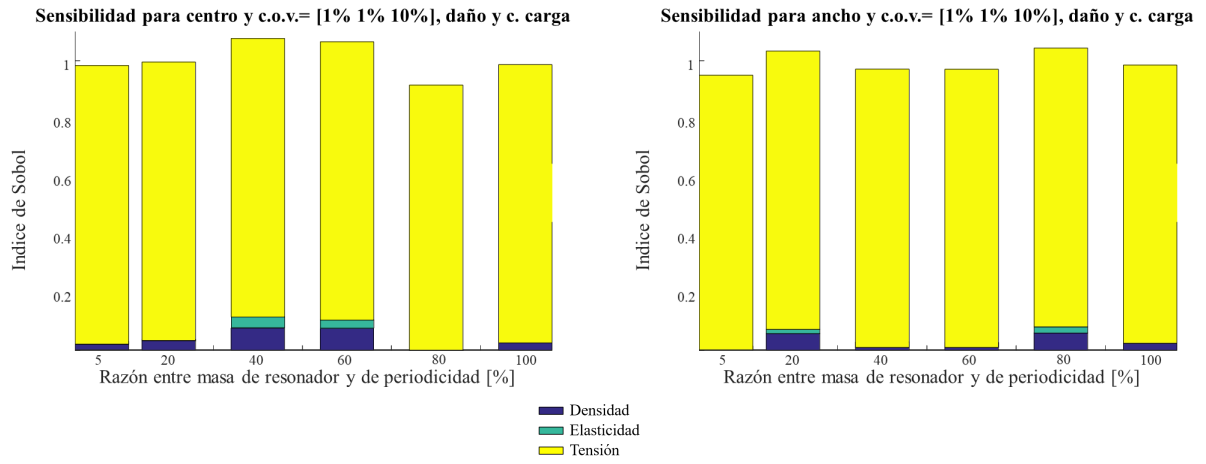


Figura 5.19: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 1\% 10\%]$

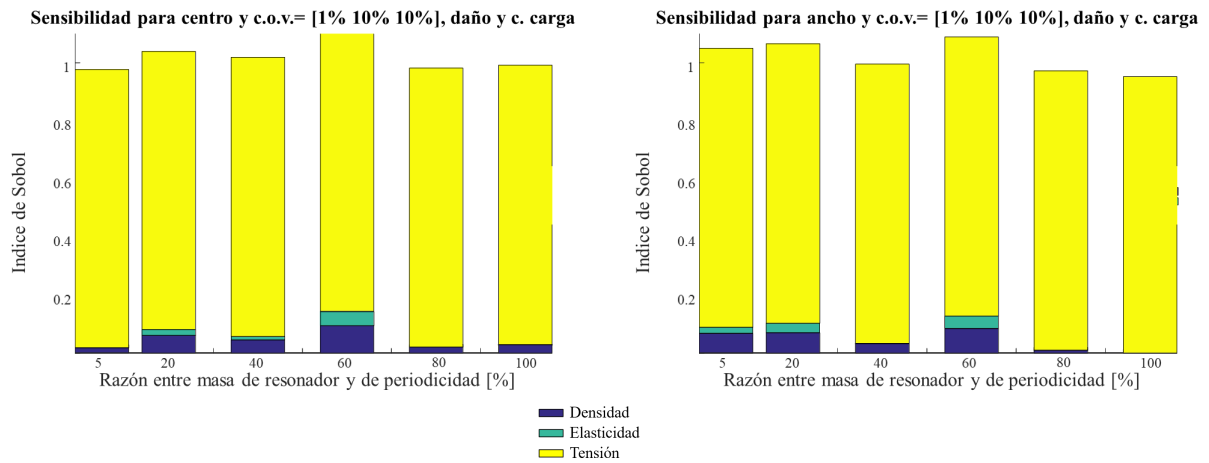


Figura 5.20: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 10\% 10\%]$

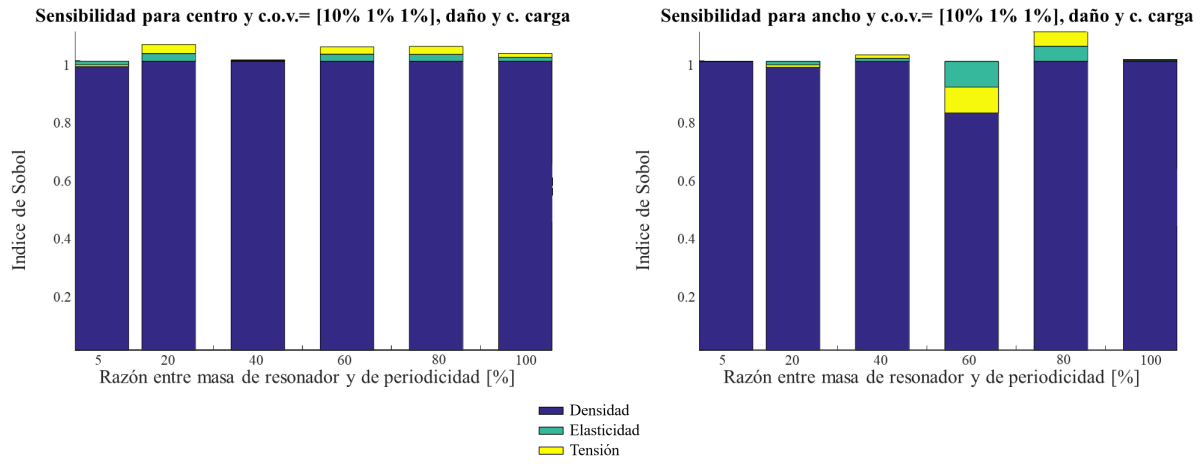


Figura 5.21: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 1\% 1\%]$

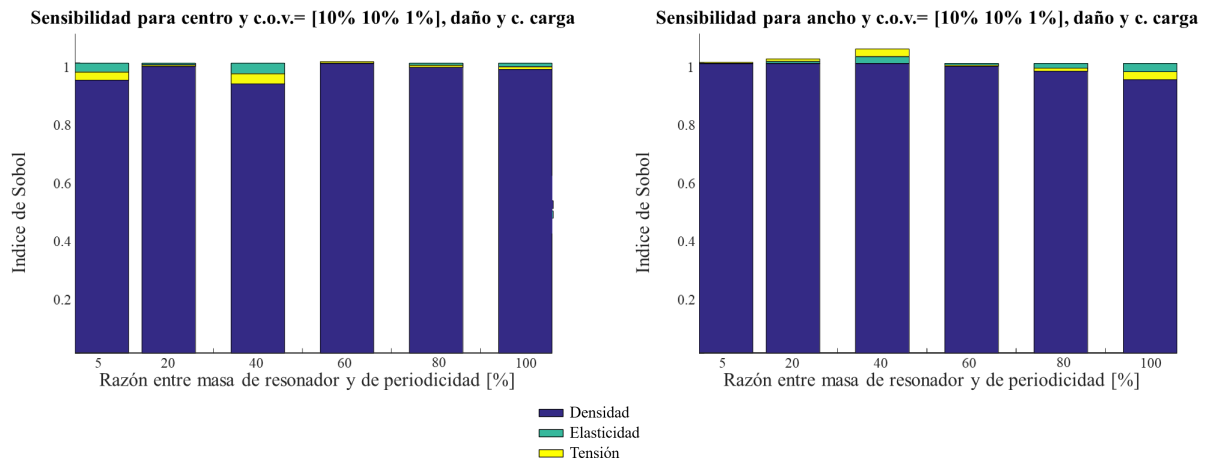


Figura 5.22: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 10\% 1\%]$

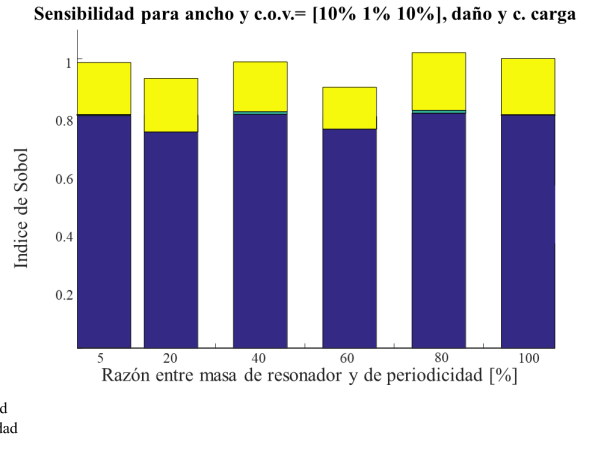
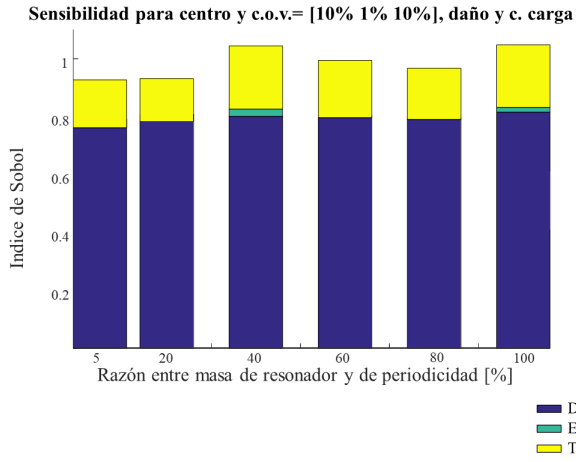


Figura 5.23: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v. [\rho E T] = [10\% 1\% 10\%]$

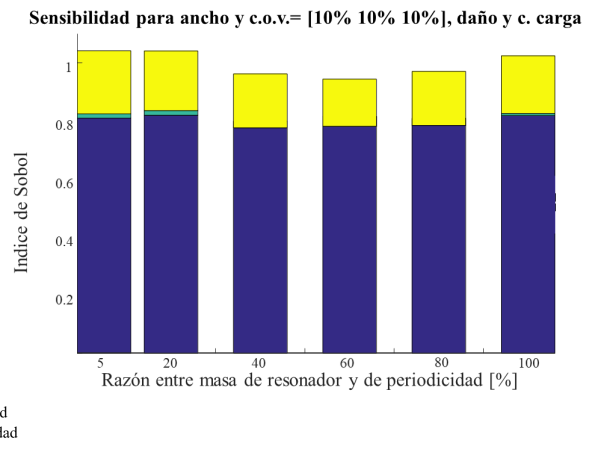
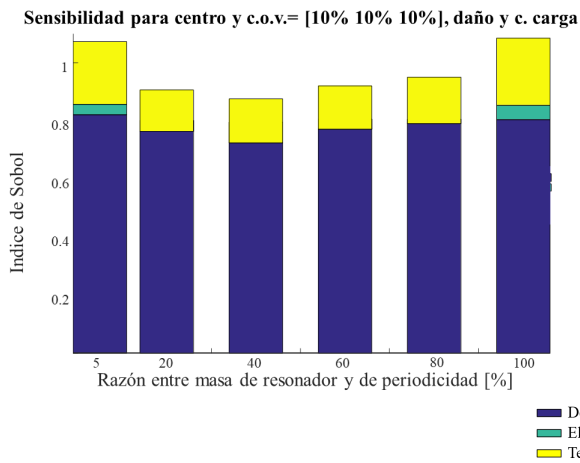


Figura 5.24: Sensibilidad en cable dañado, control de carga y $c.o.v. [\rho E T] = [10\% 10\% 10\%]$

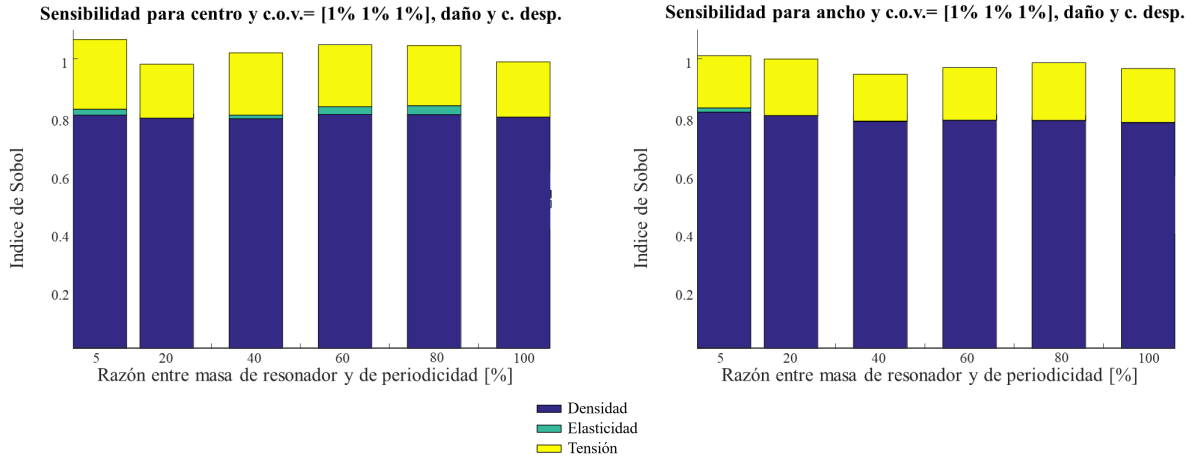


Figura 5.25: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 1\% 1\%]$

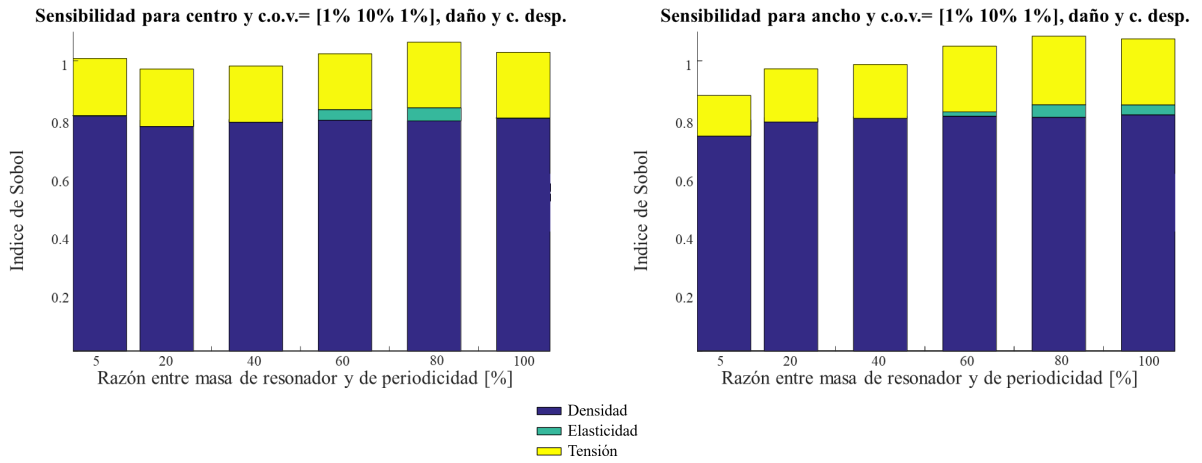


Figura 5.26: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 10\% 1\%]$

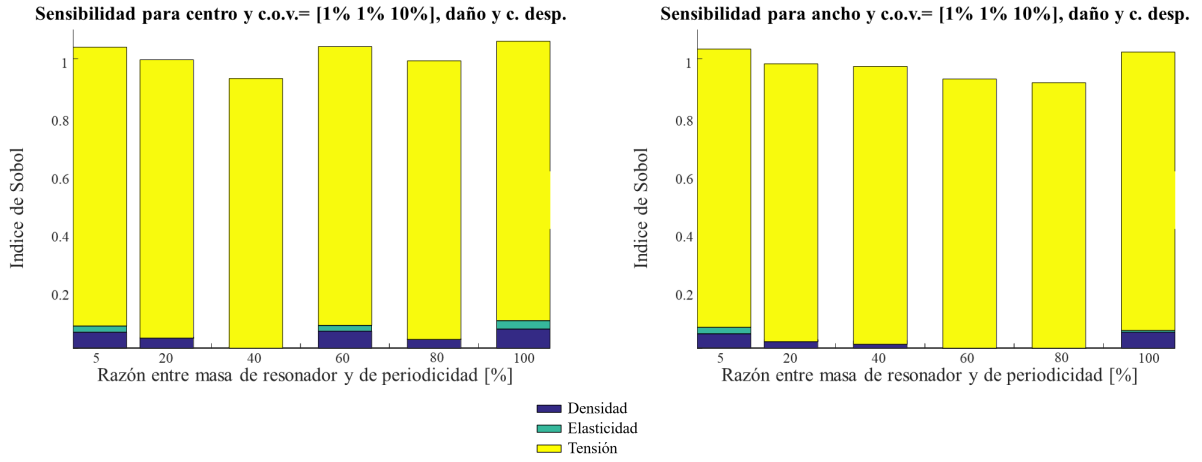


Figura 5.27: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 1\% 10\%]$

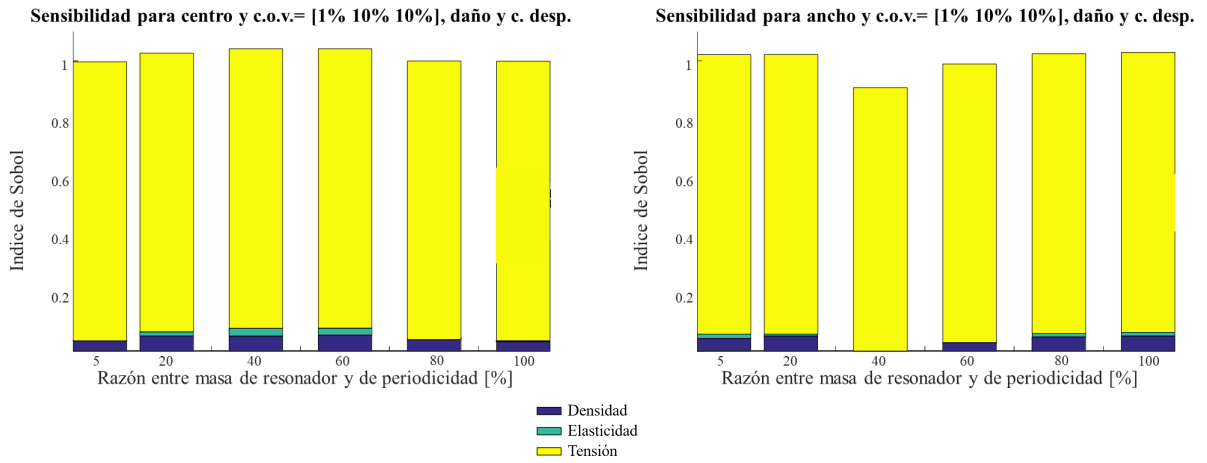


Figura 5.28: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[1\% 10\% 10\%]$

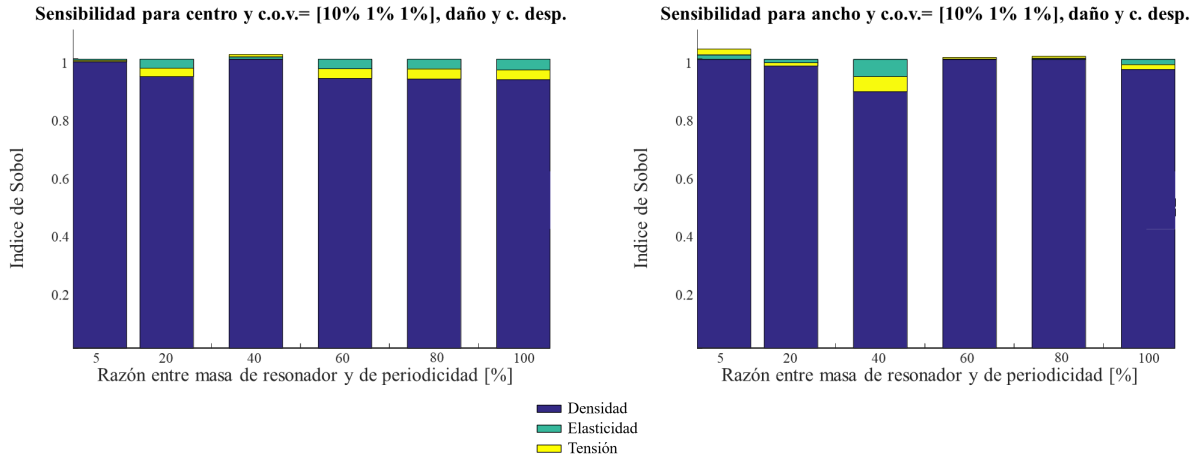


Figura 5.29: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 1\% 1\%]$

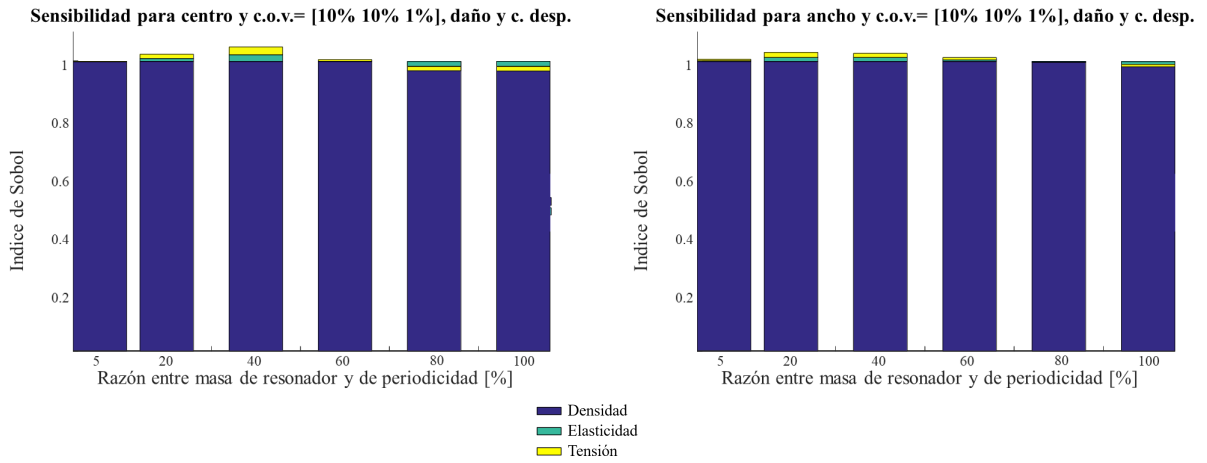


Figura 5.30: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 10\% 1\%]$

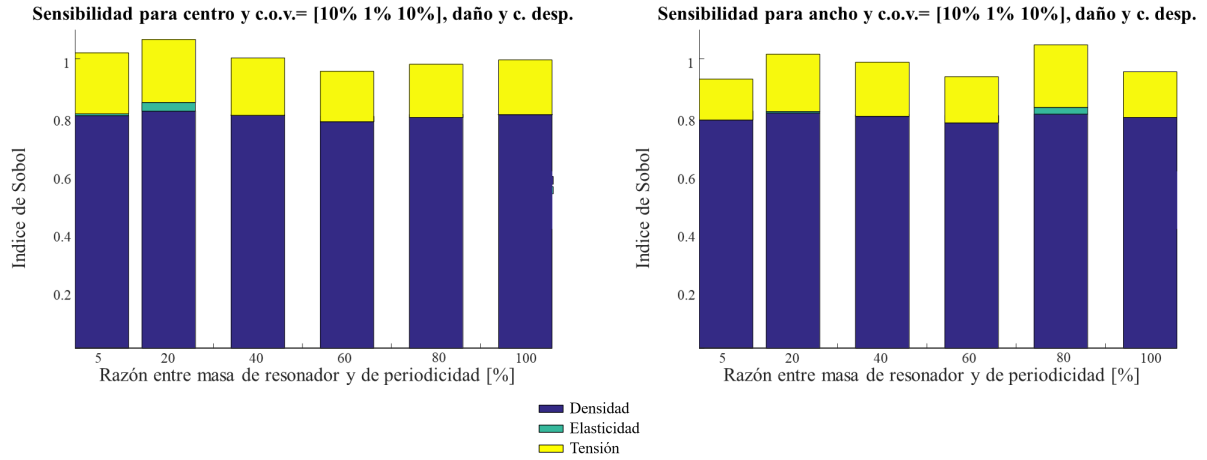


Figura 5.31: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 1\% 10\%]$

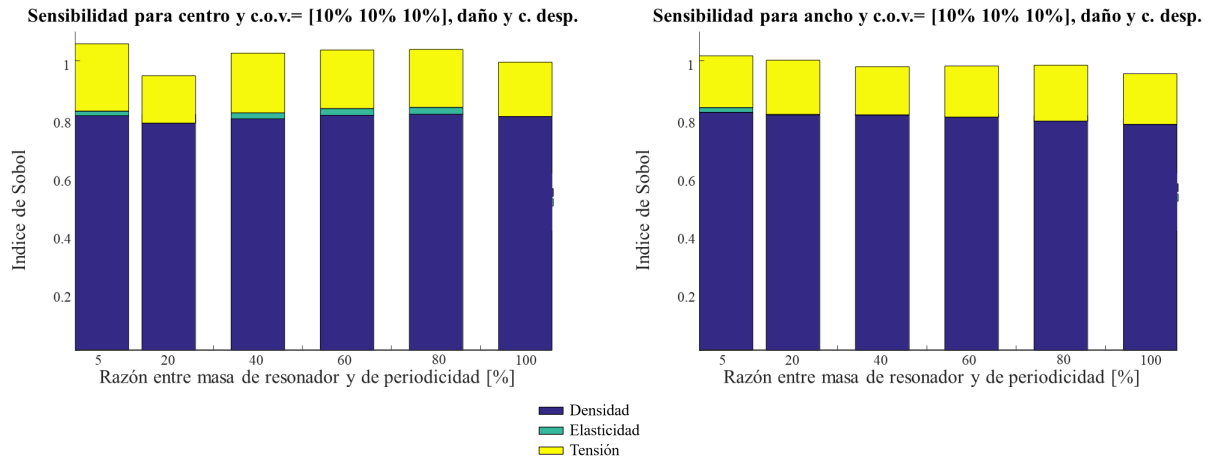


Figura 5.32: Sensibilidad en cable dañado, control de desplazamiento y $c.o.v[\rho E T]=[10\% 10\% 10\%]$

Las figuras 5.1, 5.9, 5.17 y 5.25 presentan los resultados del análisis de sensibilidad ante $c.o.v[\rho, E, T] = [1\% 1\% 1\%]$, mientras que en las figuras 5.8, 5.16, 5.24 y 5.32 se estudia el efecto de $c.o.v[\rho, E, T] = [10\% 10\% 10\%]$. En todas estas figuras se observa un comportamiento similar, una dominancia de los índices de Sobol de la densidad del cable frente a los demás, ante igualdad de incertidumbre en los parámetros.

La densidad del cable influye directamente sobre la masa de periodicidad, que a su vez condiciona a la masa del resonador, cambiando el centro y ancho de band gap. Por el motivo anterior, la densidad se convierte en el parámetro más influyente en la incertidumbre de la salida, seguido por la tensión, quedando la elasticidad en último plano.

Debido al casi nulo efecto de la elasticidad incierta sobre la varianza de la salida, modificaciones en su coeficiente de variación individual entre 1% y 10% muestran no afectar la descomposición de varianza. Ejemplos de este comportamiento se tienen al comparar la figura 5.1 con la 5.2, o la 5.3 con la 5.4, y así sucesivamente.

Cuando el coeficiente de variación de la tensión es mayor al de la densidad, 10 % y 1 % respectivamente, se obtiene que gran parte de la dispersión en el posicionamiento de band gap está determinada por la tensión, indicando que la dominancia de la densidad no es absoluta. Es el caso de las figuras 5.3, 5.11, 5.19 y 5.27 y sus equivalentes con incertidumbre de elasticidad mayor. En el caso contrario, cuando el coeficiente de variación de la tensión es 1 % y el de la densidad 10 %, resulta despreciable el efecto de la elasticidad y tensión sobre la dispersión de la salida (figuras 5.5, 5.13, 5.21, 5.29 y sus correspondientes al cambiar la incertidumbre en la elasticidad).

Cuando el cable se encuentra sin daño en sus hebras, teórica y analíticamente, los resultados de control de carga y control de desplazamiento son iguales. En la descomposición de varianza numérica, por el contrario, las salidas de los dos métodos de control no coinciden a la perfección (figuras 5.1 y 5.9 por ejemplo, o 5.2 y 5.11), pero se justifica el error en la baja cantidad de muestras.

En base a los resultados de los capítulos *Propagación de incertidumbre* y *Descomposición de varianza* se deduce que los set de figuras 5.1 a 5.8, 5.9 a 5.16, 5.17 a 5.24 y 5.25 a 5.32, y sus semejantes en el capítulo anterior, se encuentran correctamente ordenados (en modo de creciente dispersión de la salida).

En el capítulo siguiente se valida el modelo, otorgando fiabilidad al análisis de descomposición de la varianza y propagación de incertidumbre ejecutados.

Capítulo 6

Validación del modelo

El modelo es validado mediante la comparación con un cable finito sujeto a fuerza armónica, en que la zona de band gap es obtenida analíticamente como la minimizadora de la función de transferencia, descrita en la siguiente sección.

Se incluye en la sección *Imprecisión del estimador* la variabilidad del análisis numérico, cuantificado mediante el coeficiente de variación del estimador.

6.1. Función de transferencia

Ante una vibración sinusoidal, el comportamiento de un punto dado puede ser descrito en base al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio x , siendo x_0 la magnitud de la oscilación, ω la frecuencia en *rad/s* y t el tiempo [23]:

$$x = x_0 e^{i\omega t} \quad (6.1)$$

La velocidad \dot{x} y aceleración \ddot{x} asociadas al desplazamiento de la ecuación 6.1 son:

$$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t} \quad (6.2)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t} \quad (6.3)$$

En la figura 6.1 se muestra desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo, con sus respectivas amplitudes, para un punto sometido a movimiento armónico simple.

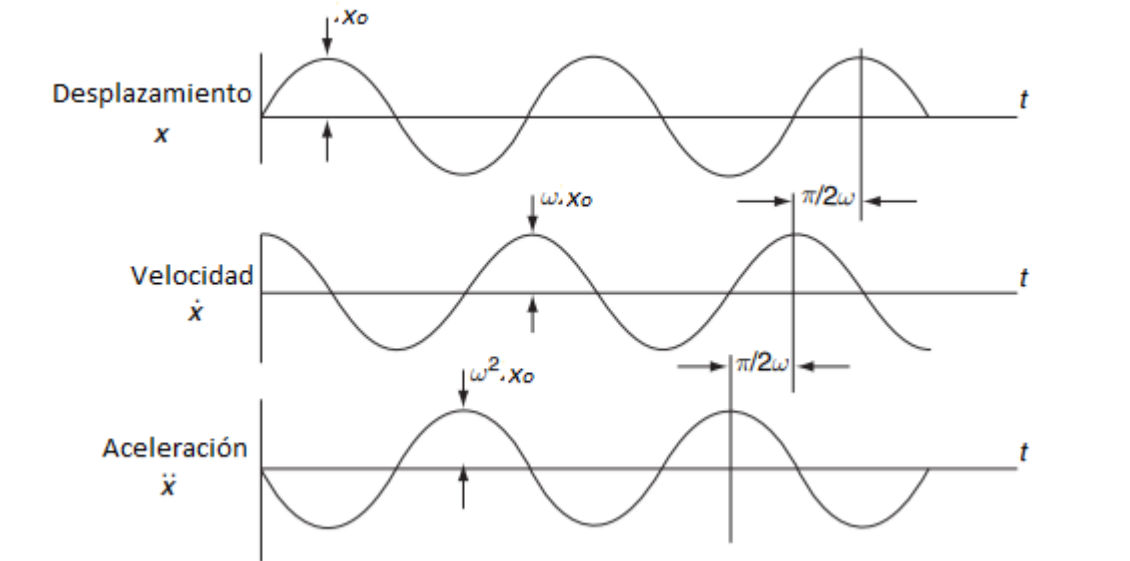


Figura 6.1: Desplazamiento, velocidad y aceleración en oscilación sinusoidal

Un sistema de un único grado de libertad (gdl), con amortiguamiento c , rigidez k y masa m , sometido a fuerza externa f , cuenta con el diagrama de cuerpo libre (DCL) presentado en la figura 6.2, expresándose matemáticamente la relación entre sus parámetros en la ecuación de movimiento (6.4).

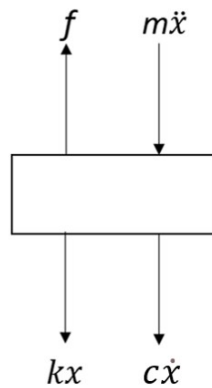


Figura 6.2: DCL de 1 gdl en oscilación ante aplicación de fuerza

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (6.4)$$

Para que la respuesta (x , \dot{x} , \ddot{x}) sea armónica, la excitación f también debe serlo [23], por lo que, al reemplazar las ecuaciones 6.1 a 6.3 en la ecuación de movimiento, se obtiene:

$$(-m\omega^2 x_0 + ci\omega x_0 + kx_0) e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t} \quad (6.5)$$

El cociente entre la magnitud de respuesta y excitación que la genera es conocida como función de respuesta en frecuencia (FRF). La FRF que asocia el desplazamiento con la fuerza externa aplicada es conocida como función de transferencia, recepción o admitancia. Las frecuencias naturales del sistema generan peaks en la admitancia, es decir, maximizan la amplitud, mientras que las zonas de band gap la minimizan. En el sistema de un gdl, la función de transferencia se expresa en la ecuación 6.6, donde el comportamiento del denominador condiciona los máximos y mínimos de la FRF. [23]

$$\frac{x_0}{f_0} = \frac{1}{-m\omega^2 + ci\omega + k} \quad (6.6)$$

Cuando un sistema en ausencia de amortiguamiento cuenta con múltiples grados de libertad, las respuestas \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ pueden ser expresadas vectorialmente extrapolando las ecuaciones 6.1 a 6.3 para varias variables [23]:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \bar{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \quad (6.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = i\omega \bar{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \quad (6.8)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \bar{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \quad (6.9)$$

La ecuación de movimiento del sistema de múltiples grados de libertad, en ausencia de amortiguamiento, se expresa en base a sus matrices de masa \mathbf{M} y rigidez \mathbf{K} [23]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (6.10)$$

Al igual que las respuestas, la fuerza externa se puede expresar vectorialmente. Se incluye para la representación el vector \mathbf{r} de posicionamiento de la excitación, con valor 1 si la fuerza se aplica sobre el nodo y 0 en el caso contrario. En el modelo de cable con resonadores, aunque la fuerza es aplicada en cada nodo, el efecto es considerado solo en los gdl transversales del propio elemento estructural, asignándose $r_j = 0$ a los gdl de desplazamiento transversal de los resonadores y rotacional de la viga no lineal.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} r_1 f_1 \\ r_2 f_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \bar{f}_1 \\ r_2 \bar{f}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{r} \bar{\mathbf{f}} e^{i\omega t} \quad (6.11)$$

Así, la ecuación 6.5 se extrapola al sistema de varias variables como:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{x}}) e^{i\omega t} = \mathbf{r} \bar{\mathbf{f}} e^{i\omega t} \quad (6.12)$$

El vector de funciones de transferencia, con información para los tres grados de libertad de todos los nodos del sistema, se obtiene según:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = (-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{r} \quad (6.13)$$

6.2. Función de transferencia del modelo

Tanto el modelo nominal como el incierto utilizan la división del cable en periodicidades, contando cada una con un set de elementos y nodos, asignándose solo un resonador por periodicidad. Al contrario, en la validación no se utiliza la división en periodicidades, explicándose el procedimiento a continuación.

Es claro que el nuevo cable (propuesto) debe poseer las mismas propiedades físicas que el utilizado anteriormente (objetivo), por lo que la longitud total se expresa:

$$L' = L = 37.2 [m]$$

Para la simulación, el largo L' se divide en elementos unidos por nodos, sin describir comportamiento periódico. Se espera que cada elemento de la propuesta se comporte como una periodicidad del objetivo, por lo que se utiliza:

$$h' = l_{nominal} = 1.7014$$

Se deben unir 22 elementos para alcanzar la longitud total del cable. Se permite entonces la igualdad de frecuencias naturales del cable propuesto y objetivo en ausencia de resonadores.

En el cable propuesto se incluye un resonador por periodicidad, respetándose así el distanciamiento del conjunto de masa-resortes. Por su parte, dado que se busca validar únicamente el modelo nominal mediante FRF, la masa de un resonador se iguala a la del elemento para emular la razón de masas $ratio = 1$, obteniéndose:

$$m'_r = 1.8357 [Kg]$$

Al igual que en el modelo nominal, el cable propuesto para la validación se encuentra totalmente operativo, obteniéndose con control por carga y desplazamiento iguales resultados, permitiéndose la construcción de las matrices de masa y rigidez globales (\mathbf{M}'_G , \mathbf{K}'_G), que representan la totalidad del cable, a partir de las ecuaciones 2.29 y 2.31.

La imposición de condiciones de borde sobre las matrices globales de masa y rigidez se logra fijando los grados de libertad del primer y último nodo, simulando el empotramiento. A modo de ejemplo se restringe la matriz de masa global de un cable de dos elementos (eliminando las filas y columnas de las casillas tachadas), para luego generalizar a $(nodos - 1)$ elementos, usándose $nodos = 23$ en el cable propuesto. La validez de tal método de imposición de condiciones de borde viene dada por el modelamiento con elementos tipo viga.

$$\mathbf{M}'_{0 \ 2 \ elem} = \frac{\rho_l h'}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h' & 54 & -13h' & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & 4h' & 13h' & -3h' & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & & 312 & 0 & 54 & -13h' & \emptyset & 0 & \emptyset \\ & & & 8h' & 13h' & -3h' & \emptyset & 0 & \emptyset \\ & & & sym & 156 & -22h' & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & & & & & 4h' & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & & & & & & \frac{420 m'_r}{\rho_l h'} & \emptyset & \emptyset \\ & & & & & & & \frac{420 m'_r}{\rho_l h'} & \emptyset \\ & & & & & & & & \frac{420 m'_r}{\rho_l h'} \end{bmatrix}$$

La matriz de masa global con imposición de condiciones de borde del cable validador se obtiene restringiendo, siendo análogo para la rigidez, según:

$$\mathbf{M}'_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_{011} & \mathbf{M}'_{012} \\ \mathbf{M}'_{021} & \mathbf{M}'_{022} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{M}'_{011} = \mathbf{M}'_G (3 : 2nodos - 2, 3 : 2nodos - 2)$$

$$\mathbf{M}'_{012} = \mathbf{M}'_G (3 : 2nodos - 2, 2nodos + 2 : 3nodos - 1)$$

$$\mathbf{M}'_{021} = \mathbf{M}'_G (2nodos + 2 : 3nodos - 1, 3 : 2nodos - 2)$$

$$\mathbf{M}'_{022} = \mathbf{M}'_G (2nodos + 2 : 3nodos - 1, 2nodos + 2 : 3nodos - 1)$$

Las matrices de masa y rigidez con imposición de condiciones de borde, \mathbf{M}'_0 y \mathbf{K}'_0 , se utilizan directamente para la resolución de la ecuación 6.13, entregando el vector de funciones de transferencia para una frecuencia ω determinada. El vector de posicionamiento de excitación para el problema posee dos tramos, el primero de largo $2(nodos - 2)$ para el propio cable empotrado y el segundo de largo $(nodos - 2)$ para los resonadores, siguiendo la estructura:

$$\mathbf{r} = [1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \quad 0 \ \dots \ 0]^T$$

Arbitrariamente, se elige el primer gdl del nodo 7 para la validación, presentada gráficamente en la figura 6.3.

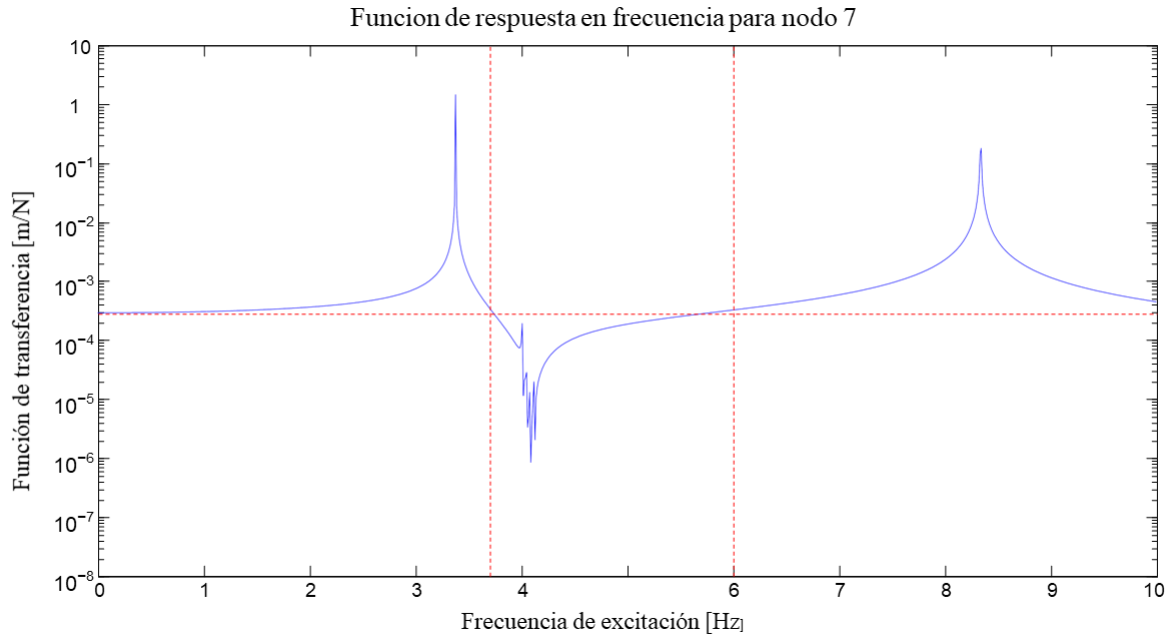


Figura 6.3: Localización de band gap nominal mediante FRF

En la figura 6.3 se muestra la zona en que se minimiza la función de transferencia del sistema, es decir, la ubicación del band gap. El modelo nominal presenta la anulación entre 4.0796 [Hz] y 6.6114 [Hz], mientras que el propuesto para validación presenta band gap entre 3.7[Hz] y 6[Hz], aproximadamente.

El posicionamiento de band gap en la figura 6.3 cambia según el criterio con que se elige el tramo que minimiza la FRF, justificándose así la diferencia entre el modelo objetivo y propuesto para la validación. De esta manera, el modelo de cable periódico con que se trabajó en la extensión de la memoria es verificado.

6.3. Imprecisión del estimador

Con el fin de cuantificar la imprecisión del método de Monte Carlo modificado empleado en la generación y evaluación de muestras, se utiliza el coeficiente de variación del estimador (ecuación 4.5).

Es claro que la mayor variabilidad en el posicionamiento de band gap es causada por $c.o.v[\rho, E, T] = [10\% \ 10\% \ 10\%]$, por lo que solo se analiza este caso.

Para cada razón de masas del vector *ratio* descrito en el capítulo *Identificación de parámetros relevantes*, se evalúan los coeficientes de variación de centro y ancho de band gap para 0 y 6 hebras dañadas, tanto en control por carga como por desplazamiento, obteniéndose 11 sets de 8 c.o.v. El máximo entre los 8 coeficientes para cada razón de masas se muestra en la figura 6.4.

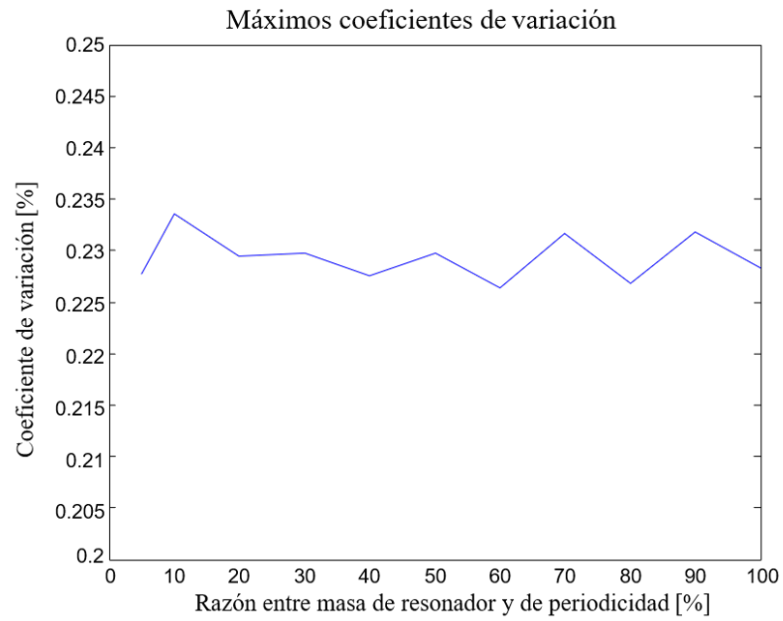


Figura 6.4: Máximos c.o.v. del estimador

Se muestra en la figura 6.4 que, en toda generación y evaluación de muestras, el coeficiente de variación de la salida no supera 0.25 %, otorgando alta credibilidad a la estimación numérica de salidas reales. La validez de este análisis se describe en la sección *Monte Carlo directo*, del capítulo *Propagación de incertidumbre*.

Capítulo 7

Conclusión y trabajos futuros

En la memoria presentada se consigue estudiar el efecto de inclusión de resonadores periódicos en distintas configuraciones sobre un cable tenso, emulando el último condiciones realistas de operación. Las mencionadas condiciones realistas de operación corresponden a número de hebras, ángulo de la hélice, largo total del cable, incertidumbre en las propiedades mecánicas, etc., siendo las propiedades mecánicas inciertas densidad, elasticidad y tensión.

En la sección *Modelo nominal* del capítulo *Obtención de band gap* se caracteriza el cable tenso en condición de total operatividad, hallándose la zona de anulación de vibraciones en igual intervalo tanto en control por carga como por desplazamiento, razón por la que solo se representa uno.

Posteriormente, en el capítulo *Identificación de parámetros relevantes*, el diseño del conjunto de resonadores es modificado en distanciamiento y razón de masa. Los resultados indican que la distancia entre los resonadores, al ser constante la masa total acumulada por el set, no influye en el comportamiento del band gap.

Por el contrario, en el mismo capítulo se muestra que, ante razón de masa constante, cambios en la densidad del cable modifican la masa del conjunto adherido, con lo que la zona de anulación se ve alterada por el incremento o decremento de ancho.

Hasta este punto se han completado los dos primeros objetivos específicos, implementación de un caso de estudio en condiciones realistas de operación e inclusión de resonadores periódicos con múltiple distanciamiento, obteniendo, adicionalmente, una baja influencia del tipo de control en que opera el cable sobre el comportamiento de band gap y una concordancia con resultados analíticos.

En conocimiento de la alta influencia de la razón de masas sobre el comportamiento de band gap, se construye el vector *ratio* y se propaga la incertidumbre en las propiedades mecánicas del cable para cada componente del vector, dando cumplimiento al tercer objetivo de la memoria mediante la construcción de intervalos de confianza de 90 %, en el capítulo *Propagación de incertidumbre*.

La construcción de intervalos de confianza entrega como principal resultado una proporcionalidad directa entre el ancho de band gap y la razón entre masa de resonador y de periodicidad, siendo también la dispersión del ancho directamente proporcional a la razón de masas. De este modo, resulta conveniente utilizar alta masa en los resonadores, con el objetivo de anular una mayor zona de frecuencias. Una opción conservadora es hacer coincidir el ancho de band gap requerido con el mínimo en el intervalo de confianza, para una razón de masas lo suficientemente alta.

Por otro lado, la dispersión del centro de band gap no se ve fuertemente influenciada por la razón de masas, por lo que resulta conveniente igualarlo a la frecuencia natural del cable.

En la memoria se utilizó la igualdad (aproximada) entre la frecuencia natural del cable y la del resonador. La dispersión del centro de band gap no se ve fuertemente influenciada por la razón de masas, por lo que resulta conveniente diseñar los resonadores con frecuencia natural $ancho/2$ menor a la del cable. La operatividad del cable puede ser omitida en el diseño, de acuerdo a los resultados descritos en la sección *Modelo incierto*, pero se sugiere incluirla en el análisis previo a construcción debido a la influencia mostrada en las figuras 3.3 y 3.4.

La dispersión mostrada en los intervalos de confianza depende de la variabilidad en la densidad, elasticidad y tensión, cumpliéndose el tercer objetivo al ejecutar un análisis de sensibilidad en el capítulo *Descomposición de varianza*.

La descomposición con el método de Sobol muestra que la densidad del cable, que influye indirectamente en la masa del conjunto resonador, es el parámetro de mayor influencia sobre la salida, seguida de la tensión, mientras la elasticidad presenta un efecto despreciable contrario a lo esperado. Debido a la dificultad de reducir la variabilidad asociada a la densidad, se recomienda incrementar el ancho de band gap (subir razón de masa) y centrarlo en la frecuencia natural del cable, como se describe anteriormente.

El quinto objetivo se cumple en la validación. En el modelo de periodicidades se utiliza el largo total únicamente para el cálculo de frecuencia natural del cable, estudiándose como infinito para la simulación. La comparación de band gap obtenido con infinitas periodicidades y con elementos finitos analizados, en función de respuesta en frecuencia de admitancia, valida el modelo al ser lo suficientemente cercanos los valores.

El modelo periódico, una vez verificado, ratifica los resultados, con lo que la memoria aporta al estudio de band gaps de Bragg sobre cables de forma efectiva. Se proporciona un análisis realista del sistema, donde existen variables con incerteza asociada, además de considerar, mediante la operatividad, la presencia de factores externos o propia fatiga.

En esta memoria se impusieron tres consideraciones sobre la operatividad de las hebras, discretización del daño, simetría y ruptura de únicamente hebras externas. La discretización entrega un factor de seguridad, pero su eliminación permite reducir costos en la operación del cable, por lo que es opcional la inclusión en estudios posteriores. La ruptura de hebras externas es un evento de alta probabilidad, pero resulta conveniente incluir en estudios futuros la ruptura del núcleo. Por último, la consideración de daño asimétrico es totalmente necesaria en una siguiente memoria, debido a la alta probabilidad de ocurrencia de la ruptura no ideal.

Bibliografía

- [1] Beltrán, J. F., & De Vico, E. (2015). Assessment of static rope behavior with asymmetric damage distribution. *Engineering Structures*, 86, 84-98. doi: 10.1016/j.engstruct.2014.12.026
- [2] Golebiowska, I., & Peszynski, K. (2018). Cable vibration caused by wind. *EPJ Web Conf.*, 180. doi:10.1051/epjconf/201818002031
- [3] Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M., & Erturk, A. (2016). On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120(13). doi:10.1063/1.4963648
- [4] Ruiz, R. O., Loyola, L., & Beltran, J. F. (2020). Stress Cycle Assessment of Cables under Wind-Induced Vibrations: A General Probabilistic Approach. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 24(1), 153-165. doi:10.1007/s12205-020-2159-7
- [5] Lazar, I., Neild, S., & Wagg, D. (2016). Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures*, 122, 62-71. doi:10.1016/j.engstruct.2016.04.017
- [6] Ruiz, R. O., & Meruane, V. (2017). Uncertainties propagation and global sensitivity analysis of the frequency response function of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, 26(6). doi:10.1088/1361-665x/aa6cf3
- [7] Xiao, Y., Wen, J., Wang, G., & Wen, X. (2013). Theoretical and Experimental Study of Locally Resonant and Bragg Band Gaps in Flexural Beams Carrying Periodic Arrays of Beam-Like Resonators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4). doi:10.1115/1.4024214
- [8] Hofer, M. (2020). Daño superficial asimétrico en cables: Aplicación método de perturbaciones. (*Memoria de Ingeniero Civil*). Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Santiago.

- [9] Manrique, S., & Hernández, A. (25 de agosto de 2012). Principios Básicos De Las Vibraciones Eólicas En Líneas De Transmisión Y Sistema De Amortiguamiento. *Conferencia Vibraciones Eólicas en Líneas de Transmisión*, (págs. 1-10). Medellín, Colombia, Universidad Pontificia Bolivariana. doi:10.13140/RG.2.1.2920.5847
- [10] Grouthier, C., Michelin, S., Bourguet, R., Modarres-Sadeghi, Y., & de Langre, E. (2014). On the efficiency of energy harvesting using vortex-induced vibrations of cables. *Journal of Fluids and Structures*, *49*, 427-440. doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2014.05.004.
- [11] Yang, K.-H. (2018). Chapter 1 - Introduction. En *Basic Finite Element Method as Applied to Injury Biomechanics* (págs. 3-49). United States: Elsevier Inc. doi:10.1016/B978-0-12-809831-8.00001-5.
- [12] Xiao, Y., Wen, J., & Wen, X. (2012). Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators. *Physics Letters A*, *376*(16), 1384-1390. doi: 10.1016/j.physleta.2012.02.059.
- [13] Serrano, Ó., Zaera, R., & Fernández-Sáez, J. (2019). On the Mechanism of Bandgap Formation in Beams With Periodic Arrangement of Beam-Like Resonators. *Journal of Vibration and Acoustics*, *141*(6). doi: 10.1115/1.4044863
- [14] Quinteros, L. (2020). Optimización de Band Gap en materiales tipo Sandwich. *Memoria de Ingeniero Mecánico*. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Santiago.
- [15] Halliwell, L. J., AS, F., & AA, M. (2015). The Lognormal Random Multivariate. Recuperado el 24 de febrero de 2021, de <https://www.casact.org/pubs/forum/15spforum/Halliwell.pdf>
- [16] Weisstein, E. W. (s.f.). *Log Normal Distribution*. Recuperado el 24 de febrero de 2021, de Wolfram MathWorld: <https://mathworld.wolfram.com/LogNormalDistribution.html>
- [17] Tanabashi, M. e. (2018). 33. Monte Carlo Techniques. En *Review of Particle Physics* (págs. 330-332). United States.
- [18] Nettleton, D. (2014). Chapter 6. Selection of Variables and Factor Derivation. En *Commercial Data Mining* (págs. 79-104). United States: Elsevier Inc. doi:10.1016/B978-0-12-416602-8.00006-6.
- [19] Weisstein, E. W. (s.f.). *Multivariate Normal Distribution*. Recuperado el 24 de febrero de 2021, de Wolfram MathWorld: <https://mathworld.wolfram.com/MultivariateNormalDistribution.html>

- [20] Schuurmans, D., & Southey, F. (June 30 - July 3, 2000). Monte Carlo inference via greedy importance sampling. *Proceedings of the 16th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence*, (págs. 523-532). Stanford. Recuperado en febrero de 2021
- [21] Sobol, I. M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. En *Mathematics and Computers in Simulation* (págs. 271-280). Russia: Matcom. doi: 10.1016/S0378-4754(00)00270-6
- [22] Jia, G., & Taflanidis, A. (2016). Efficient Evaluation of Sobol' Indices Utilizing Samples from an Auxiliary Probability Density Function. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(5). doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001061
- [23] Thorby, D. (2008). *Structural Dynamics and Vibration in Practice*. Oxford, United Kingdom: Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-7506-8002-8.X0001-6