



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**ESTUDIO DE ESCALABILIDAD EN RETICULADOS PERIÓDICOS**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

**CRISTIAN ALEJANDRO OLIVARES CAROCA**

PROFESOR GUÍA:  
RAFAEL RUÍZ GARCÍA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
LEONEL QUINTEROS PALOMINOS  
VIVIANA MERUANE NARANJO

SANTIAGO DE CHILE  
2021

**RESUMEN DE:** Memoria para  
optar al Título de Ingeniero Civil Mecánico  
**POR:** Cristian Alejandro Olivares Caroca  
**FECHA:** 2021  
**PROF. GUÍA:** Rafael Ruíz García

## ESTUDIO DE ESCALABILIDAD EN RETICULADOS PERIÓDICOS

El siguiente trabajo tiene por objetivo identificar el comportamiento de band gap en estructuras periódicas macroscópicas para diferentes escalas. Estas estructuras periódicas serán llamados reticulados periódicos y se trabajaran con dos tipos distintos, por una parte tenemos los enrejados (truss) compuestos por barras y por otro tenemos a los marcos (frames) constituidos por vigas.

Para modelar los reticulados periodicos se introdujo la teoría de estructuras periódicas, la cual nos permite imponer la condición de borde de periodicidad en el espacio. Estos reticulados periódicos presentan propiedades que dependen de su configuración geométrica, la que será de gran interés para este trabajo consiste en la capacidad de estos materiales de generar un rango de frecuencia de aislación de vibraciones, denominado band gap, el cual será estudiado en este trabajo para reticulados de distintas dimensiones.

Para estudiar lo que ocurre al escalar reticulados periódicos se eligen 4 casos para enrejados y marcos, estos variarán en su número de celdas básicas por eje definido como  $n_c$ , que son las estructuras mínimas de las cuales están conformados los reticulados periódicos. A partir de estos casos se lleva a cabo una optimización estructural para maximizar el band gap. La formulación del problema de optimización consiste en elegir dos bandas del diagrama de bandas y maximizar la separación entre estas. Para esto, las variables de decisión elegidas son la sección transversal de cada elemento y su respectivo material. Los materiales empleados por su alto contraste son el tungsteno y el aluminio.

Como resultados, se logra optimizar exitosamente el reticulado de tipo enrejado y marco, obteniéndose de estos un band gap máximo para cada valor de  $n_c$ . Una vez optimizados los reticulados, se llevó a cabo el estudio de escalamiento de su estructura. Para esto se introduce la constante de escalamiento alpha ( $\alpha$ ) que será la relación entre el largo de la celda básica con respecto al diámetro de la sección transversal de la barra o viga, que tendrá el objetivo de mantener la proporción entre estas dos variables mientras la estructura se amplifica.

El trabajo concluye que hay una relación de escalamiento para las estructuras reticuladas de tipo enrejado y marco, que será la relación entre la frecuencia a la cual esta sintonizado el band gap con respecto al largo en escala logarítmica. Esta relación será idéntica en enrejados y marcos. Además se encuentra que el rango normalizado del band gap para estructuras reticuladas con  $n_c$  igual o mayor a 6 son iguales para los distintos casos entre enrejados, y lo mismo sucede con los marcos, aún cuando el número de celdas básicas aumenta. Se tiene finalmente que se pueden diseñar distintas estructuras que son capaces de aislar una misma frecuencia en función del número de celdas básicas y el largo de esta.

*Dedicado a mi familia y amigos,  
sin los cuales este trabajo no  
hubiera sido posible.*

# Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi familia, que ha sido un pilar fundamental este último tiempo, en especial quiero agradecer a mi madre Virginia, quien me ha quitado un peso inmenso de encima, preocupándose de cosas que yo debiese hacer, dejándome la labor de sólo tener que preocuparme de terminar este trabajo, apoyándose a diario para cumplir mis metas y motivándome con lo que queda. A mis hermanos Francisco, Carlos, Virginia, Claudio y Carolina, quienes han estado para mí en lo que he necesitado, agradezco su preocupación en mis estudios.

Quiero agradecer también a mis amigos, en especial a David Silva, quien ha estado conmigo en todo este proceso, con el cual hemos tenido un apoyo mutuo, en la que predomina la confianza y el cariño, gracias por tanto apañe. A mis amigos mecánicos, Nachin, Nicolás, Leo y Diego quienes me han ayudado demasiado en el camino, haciendo de mi una mejor persona y profesional, aportando inmensamente en mi formación. A Nathalie Echeverria y Felipe Torres en los cuales siempre encontré apoyo y contención cuando la necesite, les agradezco amigos, todo lo que me han ayudado. Y a mis demás amigos, Marcela, Mathias, Guillermo y Valentina quienes me hacen feliz con su compañía.

Quiero agradecer a la comisión de este trabajo. A mi profesor co-guía Leonel Quinteros, quien me guió demasiado en este trabajo, el cual siempre estuvo atento a mis avances y se mostró disponible a cualquier duda que tuviese. A mi profesor guía Rafael Ruíz por haber confiado en mí y darme la oportunidad de trabajar con él, quien siempre estuvo disponible y atento a mi trabajo.

Finalmente a Muriel Paris, quien me apoyo durante mucho tiempo y fue un pilar fundamental en mi vida como estudiante.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Objetivo general . . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.3. Alcances . . . . .	2
<b>2. Antecedentes generales</b>	<b>3</b>
2.1. Band gap fonónico . . . . .	3
2.2. Cristales fonónicos . . . . .	4
2.3. Teoría de materiales periódicos . . . . .	5
2.3.1. Red directa y recíproca . . . . .	5
2.3.2. Zona irreductible de Brillouin . . . . .	6
2.3.3. Teorema de Bloch . . . . .	7
2.3.4. Imposición de la simetría . . . . .	10
2.4. Problema de optimización . . . . .	11
2.5. Escalamiento . . . . .	13
<b>3. Metodología</b>	<b>14</b>
3.1. Caso barra con condiciones de periodicidad . . . . .	14
3.2. Caso viga con condiciones de periodicidad . . . . .	16
3.3. Estructuras reticuladas . . . . .	17
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>21</b>
4.1. Casos analíticos . . . . .	21
4.1.1. Frecuencia natural en barra . . . . .	21
4.1.2. Frecuencia natural en viga . . . . .	22
4.2. Configuración y propiedades de los reticulados . . . . .	23
4.3. Análisis de sensibilidad de malla . . . . .	24
4.4. Comparación entre reticulados . . . . .	26
4.5. Resultados de escalamiento . . . . .	31
4.5.1. Optimización del band gap, y relación de la frecuencia respecto al largo para enrejados . . . . .	32
4.5.2. Optimización del band gap, y relación de la frecuencia respecto al largo para marcos . . . . .	36
4.5.3. Resumen de resultados de escalamiento . . . . .	40
<b>5. Conclusión</b>	<b>42</b>

<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>
<b>Anexo A. Elementos finitos</b>	<b>45</b>
A.1. Matrices de rigidez y masa para enrejados planos . . . . .	46
A.1.1. Transformación de coordenadas . . . . .	48
A.2. Matrices de rigidez y masa para marcos planos . . . . .	49
A.2.1. Transformación de coordenadas . . . . .	52
<b>Anexo B. Derivadas de las matrices de masa y rigidez para enrejados y marcos planos</b>	<b>53</b>
B.1. Derivadas de las matrices de masa y rigidez para enrejado plano . . . . .	53
B.2. Derivadas de las matrices de masa y rigidez para marco plano . . . . .	54

# Índice de Tablas

4.1.	Propiedades mecánicas del aluminio 6061 y tungsteno. . . . .	23
4.2.	Error RMS en función del mallado . . . . .	24

# Índice de Ilustraciones

2.1.	Ejemplo de estructuras y diagrama de bandas. [6]	4
2.2.	Geometría de la estructura.[1]	5
2.3.	Tipos de arreglo.[1]	6
2.4.	Simetría reflectiva y Zona Irreductible de Brillouin.[1]	7
2.5.	Nodos en el borde.[3]	8
2.6.	Elementos unidimensionales con simetría reflectiva horizontal, vertical y en $45^\circ$ con respecto al centro, en cual los elementos del mismo color están relacionados.[3]	10
2.7.	En la parte izquierda la ZIB. En el lado derecho se encuentra el diagrama de bandas con los primeros cuatro valores propios a lo largo del vector de ondas.[13]	11
3.1.	Configuración 1: barra de dos elementos.	14
3.2.	Configuración 2: viga de un elemento.	16
3.3.	Reticulado con $n_c = 4$ con nodos numerados.	19
3.4.	Ensamble matriz de rigidez. [12]	20
4.1.	Reticulados a optimizar	23
4.2.	Band gap para $n_c=4$ y distintos refinamientos (ref)	25
4.3.	Comparación de estructuras reticuladas con conformación óptima para maximizar el band gap.	27
4.4.	Comparación de band gap para las estructuras reticuladas óptimas.	28
4.5.	Comparación entre band gap normalizados para enrejados con distintos $n_c$ .	29
4.6.	Comparación entre band gap normalizados para marcos con distintos $n_c$ .	30
4.7.	Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para $n_c=4$ .	32
4.8.	Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para $n_c=6$ .	33
4.9.	Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para $n_c=8$ .	34
4.10.	Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para $n_c=10$ .	35
4.11.	Marco, band gap y relación de este último con el largo para $n_c=4$ .	36
4.12.	Marco, band gap y relación de este último con el largo para $n_c=6$ .	37
4.13.	Marco, band gap y relación de este último con el largo para $n_c=8$ .	38
4.14.	Marco, band gap y relación de este último con el largo para $n_c=10$ .	39
4.15.	Relación entre $\omega$ y el largo de la celda básica para enrejados con $n_c=4, 6, 8$ y $10$ .	40
4.16.	Relación entre $\omega$ y el largo de la celda básica para marcos con $n_c=4, 6, 8$ y $10$ .	41
A.1.	Tipos de elementos finitos [12].	45
A.2.	Elemento de un enrejado plano mostrando los desplazamientos nodales y fuerzas.	46
A.3.	Funciones de desplazamiento [15].	48



A.4.	Elemento de viga mostrando las cargas nodales axiales $P_1, P_2$ y sus correspondientes desplazamientos nodales $\delta_1, \delta_2$ . . . . .	50
A.5.	Elemento de viga mostrando las fuerzas y desplazamientos nodales axiales y de flexión. . . . .	50

# Capítulo 1

## Introducción

Las vibraciones cuando superan ciertos límites, pueden traer consigo consecuencias negativas, tanto en el personal de trabajo, como también en máquinas e instalaciones, como por ejemplo, ruidos molestos y problemas de seguridad. Las vibraciones pueden afectar la calidad del producto o servicio y provocar que la máquina consuma demasiada energía.

La forma más eficaz de reducir la vibración no deseada es detener o modificar la causa de la vibración. Cuando esto no es posible, es necesario un material que sea capaz de aislar las vibraciones. Un material que es capaz de lograr esto, es el reticulado periódico. Se considerarán los reticulados periódicos como estructuras periódicas que pueden ser creadas artificialmente, y que pueden poseer propiedades especiales que resultan de su diseño geométrico. Estos materiales pueden ser diseñados especialmente para controlar la propagación de ondas mecánicas y de esta manera suprimir vibraciones, ya que estos materiales poseen un rango de frecuencias en la cual no existe propagación de éstas.

Estos materiales modernos con estructuras complejas muestran una mayor eficiencia estructural en comparación con los materiales tradicionales. En particular, las estructuras periódicas muestran un gran potencial para aplicarse en aplicaciones ligeras debido a su gran resistencia/rigidez en relación a la masa. Además de ligeros, estos materiales pueden exhibir increíbles propiedades de aislamiento de vibraciones conocidos como band gap [1], haciéndolos atractivos en aplicaciones de bajo peso, como el diseño de aeronaves [2].

Estudiar que sucede con estos materiales al aumentar sus tamaños podría ser de gran utilidad a la aislación de vibraciones que se presentan en diferentes rangos de frecuencia. Se pueden encontrar estructuras capaces de aislar vibraciones en función del largo de su celda básica, y más aún encontrar una relación de escalabilidad que nos permita relacionar el band gap con el tamaño del reticulado.

En este trabajo se verá el resultado del estudio de escalabilidad en reticulados con estructuras optimizadas, de tal forma que estas generan un band gap máximo entre ciertas bandas de frecuencia. Es de gran interés poder encontrar el tamaño de distintos reticulados para diferentes rangos de frecuencias que se quieran aislar.

## 1.1. Motivación

La motivación de este trabajo yace en poder generar estructuras capaces de aportar a la aislación de vibraciones. También estudiar el comportamiento de estas estructuras cuando son escaladas, con tal de poder analizar el aporte que podría significar una relación que vincule el band gap con el tamaño del reticulado.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Identificar el comportamiento de band gap en estructuras periódicas macroscópicas para diferentes escalas.

### 1.2.2. Objetivos específicos

1. Obtener diagrama de bandas para estructuras bidimensionales con elementos tipo barra.
2. Realizar estudio de escalabilidad en el problema de estructuras bidimensionales con elementos tipo barra.
3. Obtener diagrama de bandas en el problema de estructuras bidimensionales con elementos tipo viga.
4. Realizar estudio de escalabilidad en el problema de estructuras bidimensionales con elementos tipo viga.
5. Identificar la relación de las estructuras bidimensionales respecto a la escala. Encontrar una relación de escalamiento.

## 1.3. Alcances

- El Trabajo de Título constará solamente de cálculos numéricos, dejando de lado lo experimental, por lo tanto todo lo que tiene que ver con la confección de la estructura no se llevará a cabo.
- Se analizarán estructuras cuadradas con un patrón de barras cruzadas en su interior.
- Se considerarán estructuras bidimensionales formadas por barras (truss) o vigas (frames) de sección circular.
- Se considerarán como variables de decisión dos materiales y dos secciones transversales para cada elemento tipo barra o viga, como limitantes para el diseño del reticulado.

# Capítulo 2

## Antecedentes generales

A continuación se presentará la teoría necesaria para entender el trabajo a cabalidad. En primer lugar se verá lo que es un band gap fonónico, el cual es muy importante de entender para este trabajo. Seguido de esto se verá qué es un cristal fonónico y la teoría de estructuras periódicas, con la cual se impondrá la condición de borde de periodicidad en el espacio. Finalmente se introduce lo que es la optimización topológica, la cual nos permitirá maximizar el band gap en función de la estructura del reticulado. Las secciones 2.1-2.3 y 2.5 están basadas en lo expuesto el trabajo de Quinteros et al. [3] . Se puede encontrar información sobre el método de elementos finitos utilizado para enrejados y marcos planos en la sección de Anexo A.

### 2.1. Band gap fonónico

El band gap fonónico en materiales periódicos consiste en un rango de frecuencias en los cuales son suprimidas las ondas mecánicas. Estos materiales periódicos son conocidos como cristales fonónicos [4, 5] o simplemente como materiales con band gap fonónicos [6]. Estos materiales para poder estar definidos necesitan de un vector de ondas  $\mathbf{k}$ , el cual entrega la información de la repetición de la onda (forma de la celda y la simetría que esta posee). Se puede graficar a partir de una celda unitaria las bandas de frecuencia en función del vector de onda  $\mathbf{k}$ .

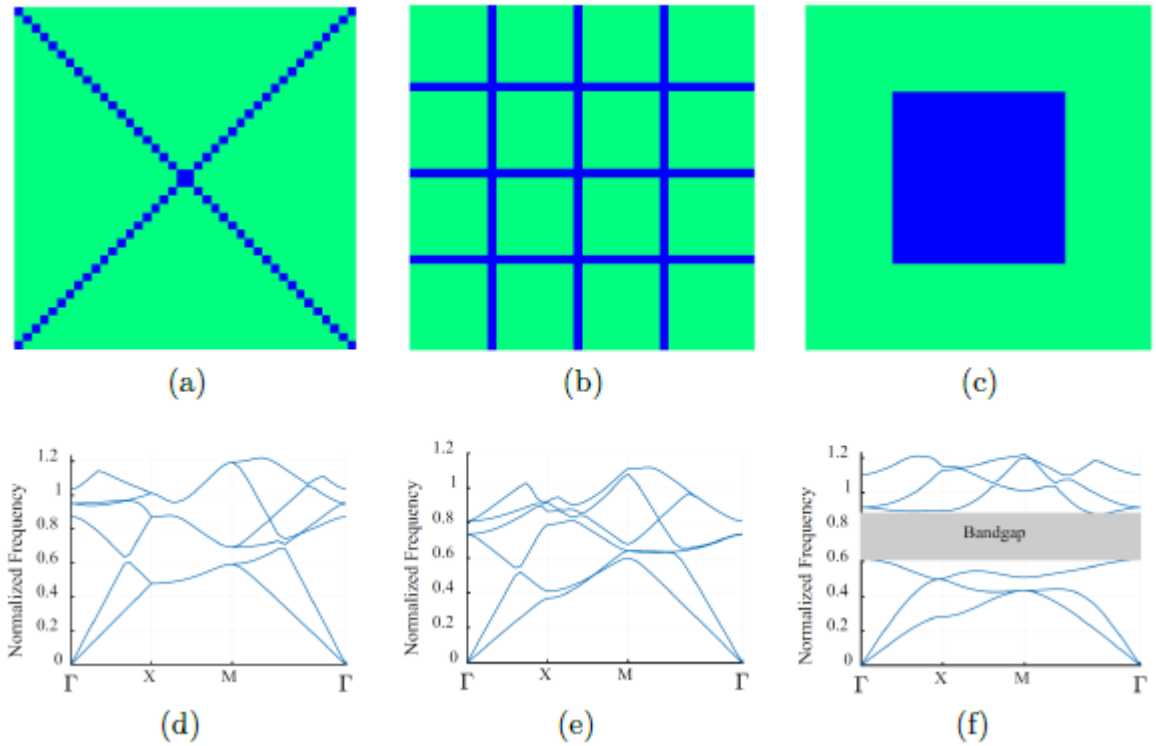


Figura 2.1: Ejemplo de estructuras y diagrama de bandas. [6]

A modo de ejemplo para observar el diagrama de bandas, se presenta el trabajo de Yi et al.[6] que simuló la propagación de ondas elásticas en el plano x-y con dos materiales (verde es aluminio y azul tungsteno), se impusieron simetrías reflectivas en el eje horizontal, vertical y en 45 grados. Como se observa en la Figura 2.1 (a), (b) y (c) se presentan distintas estructuras (celdas unitarias) con distintos patrones y en (d), (e) y (f) sus diagramas de bandas respectivos. Vemos que en (f) se tiene un diagrama de bandas en donde el eje y representa la frecuencia normalizada y el eje x representa el vector de onda que recorre la zona irreducible de Brillouin (se verá con más detalle en la subsección 2.3.2). Este gráfico presenta una zona en donde no hay bandas que se traslapen entre sí. A esta zona se le conoce como band gap, y en este rango no hay propagación de ondas mecánicas. La zona en la cuál esta sintonizado el band gap es llamado como banda media.

## 2.2. Cristales fonónicos

Los cristales fonónicos son materiales periódicos, los cuales impiden la propagación de ondas acústicas o elásticas en ciertos regímenes de vibración. Los cristales fonónicos suelen estar hechos de una combinación de materiales y las escalas de tamaño pueden estar entre los nanómetros hasta metros.

Se puede modelar los cristales fonónicos como una estructura periódica, en la cual es posible determinar bandas de frecuencias en donde no se transmiten ondas mecánicas, denominado como band gap ( como se vio en la sección anterior). Por tanto es su principal aplicación la aislación acústica y la supresión de vibraciones.

## 2.3. Teoría de materiales periódicos

A continuación se presentarán las condiciones que permiten simular periodicidad infinita, esta teoría consta de varios pasos. En esta oportunidad se utilizará una estructura hecha de elementos unidimensionales (truss) con un patrón de barras cruzadas para ejemplificar, por que es el tipo de estructura que se utilizará en parte de este trabajo. Se comenzará exponiendo lo que es una red directa y recíproca para luego dar paso a la definición y aplicación de la zona irreducible de Brillouin, y luego explicar como utilizar el teorema de Bloch en este ejemplo. Finalmente se expondrá la imposición de la simetría en la estructura del reticulado, lo que nos permitirá reducir el número de variables [3].

El primer paso es describir la celda a estudiar, a modo de ejemplo se estudiará la celda de la Figura 2.2(b) la cual esta hecha de una malla de 4x4 celdas básicas definidas en la Figura 2.2(a), la cual a su vez esta constituida de 4 elementos unidimensionales que forman un cuadrado, en donde los nodos aparecen como círculos grises. La estructura en la Figura 2.2(b) será la que en teoría tendrá una periodicidad infinita, en ambos ejes.

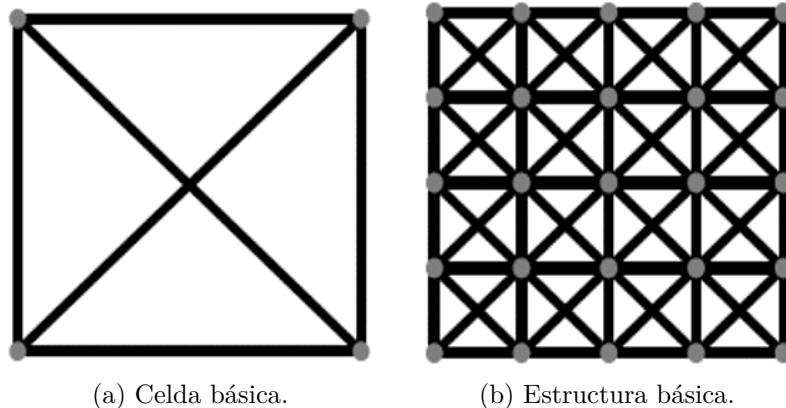


Figura 2.2: Geometría de la estructura.[1]

En las siguientes subsecciones se explicarán los pasos a seguir para imponer periodicidad infinita para este ejemplo.

### 2.3.1. Red directa y recíproca

Los vectores primitivos o de red, definen matemáticamente un subespacio geométrico llamado red directa a través de su combinación lineal, a partir de la cual se puede construir una red secundaria llamada red recíproca. La red recíproca se puede utilizar para estudiar los fenómenos físicos del comportamiento de las ondas en la estructura cristalina.[7]

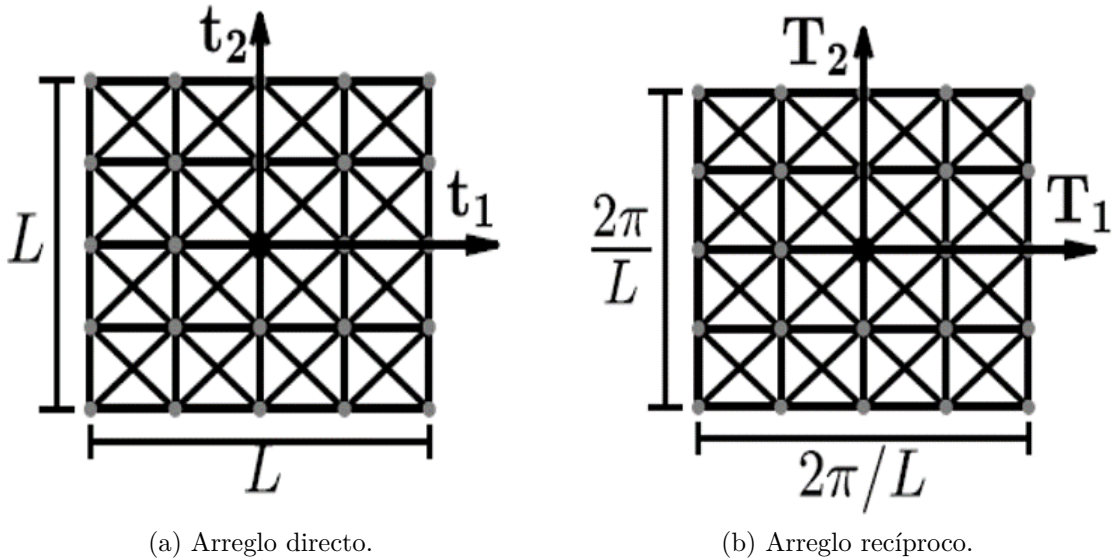


Figura 2.3: Tipos de arreglo.[1]

El paso siguiente es definir los vectores del arreglo directo, los cuales serán denotados por  $\mathbf{t}_1$  y  $\mathbf{t}_2$ , los que son perpendiculares entre si, como se puede observar en la Figura 2.3(a). En esta Figura también se expone el largo y ancho de la celda, que para este ejemplo es un reticulado de lado  $L$ . Ahora, a partir de lo anterior se puede definir el vector recíproco del arreglo el cual se expone en la Figura 2.3(b). En el cual los vectores  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$  son perpendiculares y, además ambos poseen magnitud igual a  $\frac{2\pi}{L}$ .

### 2.3.2. Zona irreductible de Brillouin

El tercer paso es estudiar la simetría reflectiva de los arreglos con respecto al centro. Se puede ver que el arreglo directo tiene simetría horizontal, vertical y en  $45^\circ$  con respecto al centro. Este mismo ejercicio puede ser realizado para el arreglo recíproco del cual se obtiene la Zona Irreductible de Brillouin (ZIB) [8]. Esta práctica también tiene por objetivo reducir el número de variables, reduciendo así el costo computacional que tiene este tipo de problemas.

En la Figura 2.4(d) se tiene que el triángulo de la Zona Irreductible de Brillouin tiene por vértices a las letras griegas  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$ , luego un vector de onda  $\mathbf{k}$  puede ser definido alrededor del perímetro de la ZIB.

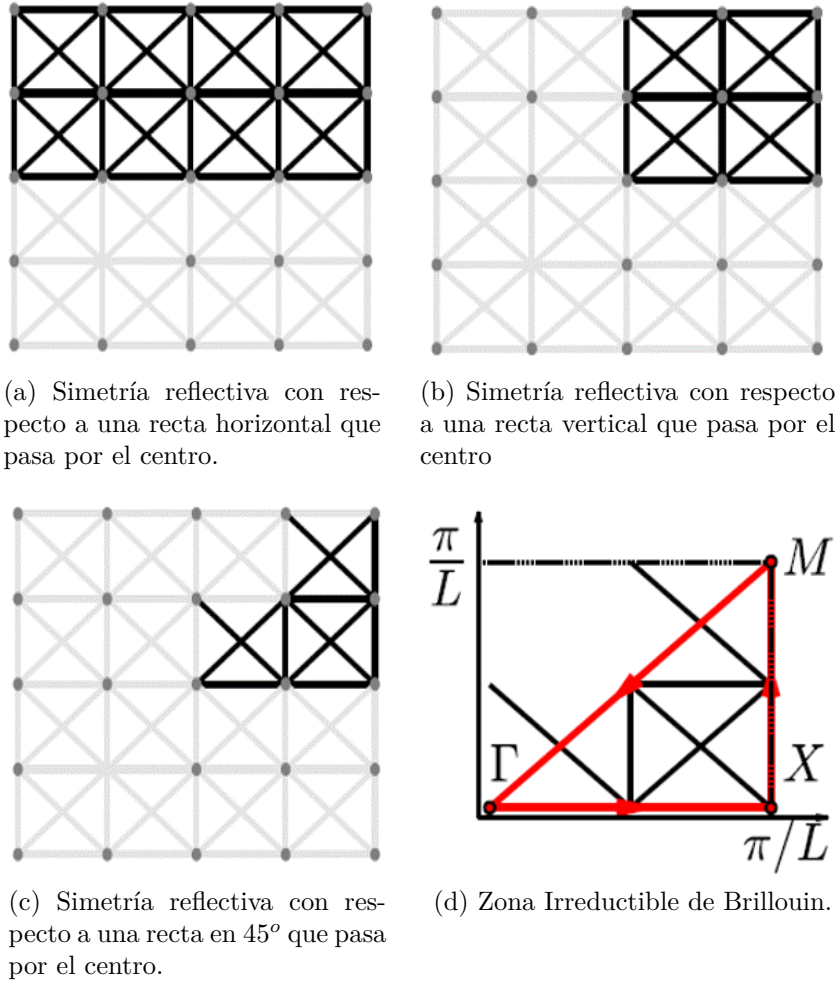


Figura 2.4: Simetría reflectiva y Zona Irreductible de Brillouin.[1]

### 2.3.3. Teorema de Bloch

El cuarto paso se puede aplicar una vez conocido el vector  $\mathbf{k}$ , esa información es utilizada en el teorema de Bloch y, este a su vez, se utiliza para imponer condiciones de borde de periodicidad infinita de la siguiente forma:

$$u(x + R_j) = u(x)e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_j} \quad (2.1)$$

En donde:

- $\mathbf{R}_j$ : Periodicidad de la celda en  $j$ .
- $\mathbf{u}$ : Grados de libertad por nodo.
- $\mathbf{k}$ : Vector de onda definido en la ZIB.
- $i$ : Componente imaginaria.

La Ecuación 2.1 al imponerla como condición de borde lo que hace es analizar la respuesta a la estructura infinitamente periódica frente a ondas mecánicas de cualquier largo y dirección.



Utilizando el método de elemento finitos, es posible agregar la condición descrita en la Ecuación 2.1. Para llevar a cabo la imposición, se utilizará la metodología presentada por Langlet et. el. [10]. Será utilizado el ejemplo que aparece en la Figura 2.2(b).

El vector de onda  $\mathbf{k}$  posee dos coordenadas (dado el ejemplo que esta en 2D), el cual puede ser escrito como  $\mathbf{k} = k\sin(\theta)\hat{I} + k\cos(\theta)\hat{J}$ , este vector se moverá alrededor de la ZIB. Utilizando la Figura 2.5 como referencia, se puede imponer el teorema de Bloch con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 u_T &= u_B e^{i\mathbf{k}L\cos(\theta)} \\
 u_R &= u_L e^{i\mathbf{k}L\sin(\theta)} \\
 u_{BR} &= u_{BL} e^{i\mathbf{k}L\cos(\theta)} \\
 u_{TL} &= u_{BL} e^{i\mathbf{k}L\sin(\theta)} \\
 u_{TR} &= u_{BL} e^{i\mathbf{k}L(\cos(\theta)+\sin(\theta))}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

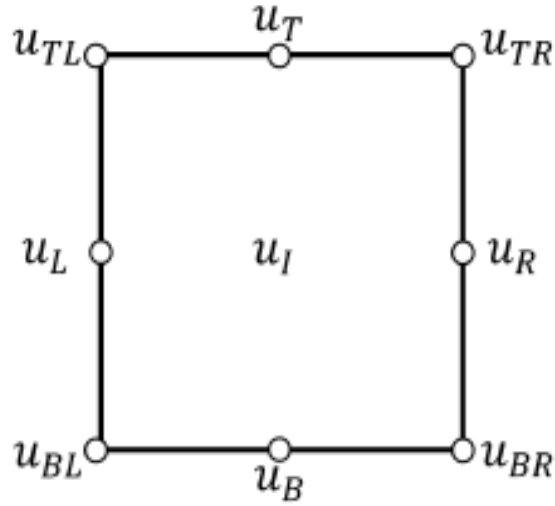


Figura 2.5: Nodos en el borde.[3]

En donde las variables representan:

- $\mathbf{u}_L$ : Nodos de la zona izquierda.
- $\mathbf{u}_R$ : Nodos de la zona derecha.
- $\mathbf{u}_B$ : Nodos de la zona inferior.
- $\mathbf{u}_T$ : Nodos de la zona superior.
- $\mathbf{u}_I$ : Nodos de la zona interna.

- $\mathbf{u}_{BL}$ ,  $\mathbf{u}_{BR}$ ,  $\mathbf{u}_{TL}$ , y  $\mathbf{u}_{TR}$ : Nodos de los bordes.

Dado el teorema de Bloch el número de variables se reduce de tal forma que se cumple la siguiente relación  $\mathbf{u} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{u}}$ , en donde  $\mathbf{u}$  es el vector de todos los grados de libertad de los nodos y  $\tilde{\mathbf{u}}$  es el vector reducido. Estos vectores están definidos en la Ecuación 2.3:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_R \\ u_B \\ u_T \\ u_{BL} \\ u_{TL} \\ u_{BR} \\ u_{TR} \\ u_I \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_L \\ u_B \\ u_{BL} \\ u_I \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Mientras que la matriz  $\mathbf{T}$  esta dada por la Ecuación 2.4[1]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ Ie^{i\mathbf{k}L\sin(\theta)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & Ie^{i\mathbf{k}L\sin(\theta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{i\mathbf{k}L\sin(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{i\mathbf{k}L\cos(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & Ie^{i\mathbf{k}L(\sin(\theta)+\cos(\theta))} & I \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Con la matriz global de masa  $\mathbf{M}$  y la de rigidez  $\mathbf{K}$ , es posible expresar el problema de valores y vectores propios como:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})u_i = 0, \quad \mathbf{k} \in [\Gamma, X, M, \Gamma] \quad (2.5)$$

Donde:

- $\omega_i$ : i-esima frecuencia natural.
- $u_i$ : i-esimo vector modal asociado.

La condición de borde se impone multiplicando la matriz  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  por la matriz  $\mathbf{T}$  y su traspuesta  $\mathbf{T}^t$  por lo que la Ecuación 2.5 puede ser reescrita como:

$$(\mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T} - \omega_i^2 \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T})u_i = 0 \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{K}^* - \omega_i^2 \mathbf{M}^*)\tilde{u}_i = 0 \quad (2.7)$$

En donde  $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T}$  y  $\mathbf{M}^* = \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T}$  en donde se tiene la matriz de rigidez y de masa con las condiciones de borde impuestas.

### 2.3.4. Imposición de la simetría

Se impone una matriz de reducción que cumple la misma función que la matriz  $\mathbf{T}$  de la Ecuación 2.4. Se presenta la Figura 2.6, en la cual se toma la misma estructura mostrada en la Figura 2.2(b) aunque sin las barras cruzadas por un tema de simplicidad. Para hacer el ejercicio de simetría se debe suponer que el largo de la estructura es igual al ancho de la misma. Las barras del mismo color son las que están relacionadas entre si para imponer la simetría.

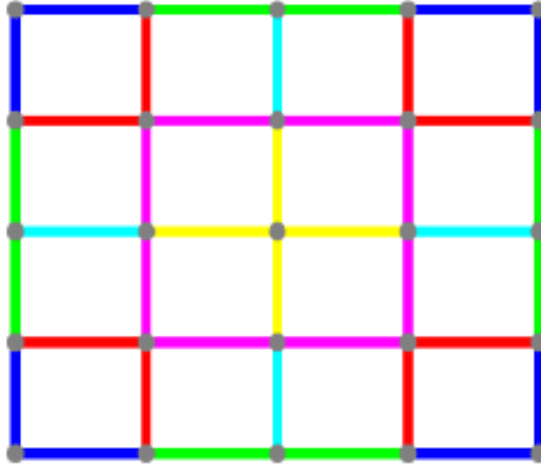


Figura 2.6: Elementos unidimensionales con simetría reflectiva horizontal, vertical y en  $45^\circ$  con respecto al centro, en cual los elementos del mismo color están relacionados.[3]

El número total de elementos esta dado por la expresión:

$$N_{e_{totales}} = N_{e_{horizontales}} + N_{e_{verticales}} = n_c \times (n_c + 1) + (n_c + 1) \times n_c \quad (2.8)$$

Y el número de variables reducidas esta dado por la expresión:

$$N_{e_{red}} = \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2} + \frac{\frac{n_c}{2} \times (\frac{n_c}{2} + 1)}{2} \quad (2.9)$$

Para este caso  $N_{e_{totales}} = 40$  y  $N_{e_{red}} = 6$ , por lo que se reduce el número de variables para definir la estructura.

La dimensionalidad es reducida con la expresión  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{S}$  es la matriz de reducción,  $\tilde{\mathbf{x}}$  el vector de variables reducido y  $\mathbf{x}$  todas las variables.

## 2.4. Problema de optimización

El diagrama de bandas entrega información sobre las ondas mecánicas en el material periódico, como se puede observar en la Figura 2.7.

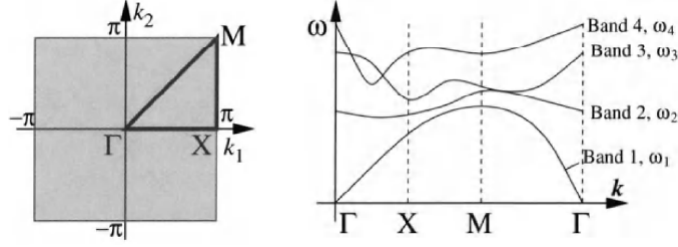


Figura 2.7: En la parte izquierda la ZIB. En el lado derecho se encuentra el diagrama de bandas con los primeros cuatro valores propios a lo largo del vector de ondas.[13]

Entonces lo que hay que hacer es maximizar el ancho entre dos bandas contiguas del diagrama de bandas. Este problema de optimización ya lo ha tratado Bendsøe & Sigmund [13] en el cual se dan una banda  $n$  y maximizan la distancia entre esa banda y la  $n + 1$  utilizando optimización topológica, en la cual se varía el material de cada elemento del modelo en elementos finitos.

Para resolver el problema de optimización se han utilizado distintos métodos, entre ellos el Método de las Asíntotas Móviles (MMA) [9], este método será utilizado en este trabajo para desarrollar la optimización.

El problema de optimización consiste en encontrar la estructura que maximice el band gap entre dos bandas adyacentes  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}+1$ . Esta formulación se expresa como:

$$Max \quad \min \{ \omega_{n+1}(x, \mathbf{k}) \} - \max \{ \omega_n(x, \mathbf{k}) \} \quad (2.10)$$

$$s.a. \quad [-\omega_i \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T} + \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T}] \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in [\Gamma, X, M, \Gamma] \quad (2.11)$$

La variable de decisión  $\mathbf{x}$  en la función objetivo, es un vector columna que contiene dos variables de decisión para cada elemento, el área de su sección transversal y el material.  $\omega_n$  y  $\omega_{n+1}$  son las bandas  $n$  y  $n + 1$  respectivamente y lo que se expresa, es maximizar la distancia entre el valor mínimo de la banda  $n + 1$  y el max de la banda  $n$ . La Ecuación 2.10 indica que se debe resolver el problema de valores y vectores propios en la ZIB, donde  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$ , son las matrices globales de rigidez y masa respectivamente.

El vector  $\mathbf{x}$  esta compuesto de dos variables,  $\mathbf{x}_a$  controla el área de la sección transversal, mientras que  $\mathbf{x}_m$  controla el material del elemento. Estas se definen como variables continuas en el intervalo  $[0,1]$ , y se utiliza una función de interpolación lineal para obtener así la propiedad  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  que puede ser el área, módulo de elasticidad, densidad o momento de inercia ( $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ,  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ ). Como indica Sigmund [16], no hay razón para no utilizar una interpolación no lineal o un factor de penalización. La razón está relacionado con el fenómeno

del band gap en el cual, a medida que hay más contraste entre materiales, este se vuelve más ancho y las propiedades de los materiales tienden a irse a los bordes. Por lo tanto, no hay necesidad de usar una interpolación no lineal, mientras los dos materiales tengan un alto contraste. La interpolación puede ser expresada como:

$$P(x) = (P_2 - P_1)x + P_1 \quad (2.12)$$

Donde  $\mathbf{x}$  representa la variable de interpolación. Si  $\mathbf{x}$  es cero, la propiedad tomará el valor de  $P_1$ , mientras que si toma el valor 1, la propiedad será igual a  $P_2$ . Esta función de interpolación se utiliza para definir las matrices de masa y rigidez locales, siendo para enrejados planos:

$$K(x_m, x_a) = \frac{E(x_m)A(x_a)}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$M(x_m, x_a) = \frac{\rho(x_m)A(x_a)L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Y para marcos planos se tienen las siguientes 2 ecuaciones:

$$K(x_m, x_a) = \frac{E(x_m)I(x_a)}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{A(x_a)L^2}{I(x_a)} & 0 & 0 & -\frac{A(x_a)L^2}{I(x_a)} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{A(x_a)L^2}{I(x_a)} & 0 & 0 & \frac{A(x_a)L^2}{I(x_a)} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$M(x_m, x_a) = \frac{\rho(x_m)A(x_a)L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Utilizando la Ecuación 2.12 de interpolación se tiene que las propiedades quedan como sigue:

$$A(x_a) = (A_2 - A_1)x_a + A_1 \quad (2.17)$$

$$I(x_a) = (I_2 - I_1)x_a + I_1 \quad (2.18)$$

$$E(x_m) = (E_2 - E_1)x_m + E_1 \quad (2.19)$$

$$\rho(x_m) = (\rho_2 - \rho_1)x_m + \rho_1 \quad (2.20)$$

Un problema al abordar directamente el problema de valores y vectores propios es la no diferenciable asociada a valores propios repetidos. Otro problema es el cambio de modo durante la optimización. Para poder resolver estos problemas, se propone utilizar aproximaciones suaves utilizando la norma P en la función objetivo, como se muestra a continuación:

$$Max \omega_n(x, \mathbf{k}) \approx \|\omega_n\|_P = \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{IBZ} \omega_{ij}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.21)$$

$$Min \omega_{n+1}(x, \mathbf{k}) \approx \|\omega_{n+1}\|_{-P} = \left( \sum_{j=n+1}^m \sum_{i=1}^{IBZ} \omega_{ij}^{-p} \right)^{\frac{1}{-p}} \quad (2.22)$$

En ambas expresiones, la suma de  $i=1$  hasta la IBZ es la discretización del vector de onda  $\mathbf{k}$  y el índice  $j$  representa el número de banda.

Será necesario calcular la sensibilidad de los valores propios, ya que se trabajará con un método basado en gradiente. Se utilizará la norma P para evitar el problema que genera lo no diferenciable tener valores propios repetidos.

Como presenta Haftka y Zafer [11], las sensibilidades de los valores propios corresponden a:

$$\frac{dw_{ij}}{dx_e^\alpha} = \frac{q_{ij}^T \left( \frac{dK}{dx_e^\alpha} - \frac{dM}{dx_e^\alpha} w_{ij}^2 \right) q_{ij}}{2w_{ij} q_{ij}^T M q_{ij}} \quad (2.23)$$

Las derivadas de  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  con respecto a las variables de decisión se presentan en Anexos B.

## 2.5. Escalamiento

Para encontrar alguna relación de escalamiento dentro de la frecuencia natural de los reticulados, se debe introducir una constante de escalamiento  $\alpha$  que queda definida por la relación del largo de la celda básica y el diámetro de la sección transversal como se puede ver en la Ecuación 2.24.

$$\alpha = \frac{L}{D} \quad (2.24)$$

Con la constante de escalamiento  $\alpha$  podemos dejar en función de ésta el área transversal y el segundo momento de inercia, de tal forma que estas quedan definidas respectivamente como:

$$A = \frac{\pi L^2}{4\alpha^2} \quad (2.25)$$

$$I = \frac{\pi L^4}{32\alpha^4} \quad (2.26)$$

Ahora vemos que  $A$  e  $I$  dependen del largo,  $\pi$  y de la constante de escalamiento.

# Capítulo 3

## Metodología

El primer paso para el estudio de escalabilidad en reticulados periódicos es revisar que ocurre con las frecuencias naturales de una barra y una viga que tengan impuestas las condiciones de periodicidad, por lo tanto se estudiarán los casos analíticos. Luego se revisará el procedimiento para estructuras reticuladas, en este caso para enrejados (truss) y marcos (frames).

### 3.1. Caso barra con condiciones de periodicidad

Para poder encontrar las frecuencias naturales de esta caso, se necesita lo siguiente:

- Definir el problema a resolver.
- Definir las ecuaciones necesarias para resolver el problema.
- Ensamblar las ecuaciones globales de masa y rigidez.
- Aplicar condiciones de periodicidad infinita.
- Resolver el problema de valores propios.

Luego, se procede de la siguiente manera:

1. En este primer paso se describirá la configuración de este primer caso. La configuración es : barra de dos elementos (Figura 3.1). Esta configuración fue elegida debido a su simplicidad y casos más complicados eran difíciles de exponer en este Trabajo de Título, debido a lo extenso de los resultados que habría que exponer (frecuencias naturales con demasiados términos).

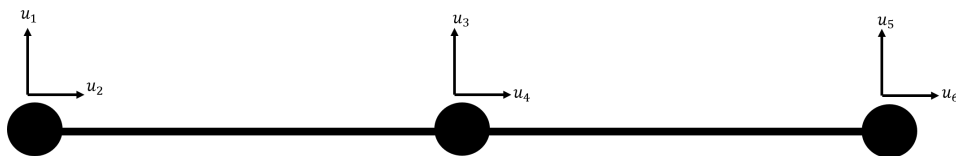


Figura 3.1: Configuración 1: barra de dos elementos.

2. Para este caso serán necesarias las Ecuaciones A.10 y A.15, que son las matrices de rigidez y masa locales respectivamente para un elemento de enrejado plano. Además también será necesaria la Ecuación 3.1, con la cual se impondrá la condición de periodicidad.

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ e^{-i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

3. Las ecuaciones globales de masa y rigidez para la configuración 1 serán las siguientes dos ecuaciones:

$$\mathbf{M}_{\text{global1}} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}_{\text{global1}} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

4. Ahora es necesario multiplicar las matrices globales de masa y rigidez por la matriz  $\mathbf{T}$  respectiva para cada configuración con tal de imponer las condiciones de periodicidad. Las matrices de masa y rigidez quedan respectivamente:

$$\mathbf{M}_1^* = \mathbf{T}_1' \mathbf{M}_{\text{global1}} \mathbf{T}_1 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{K}_1^* = \mathbf{T}_1' \mathbf{K}_{\text{global1}} \mathbf{T}_1 \quad (3.5)$$

5. Ahora hay que resolver lo siguiente:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_1^* + \mathbf{K}_1^*) \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \det[-\omega^2 \mathbf{M}_1^* + \mathbf{K}_1^*] = 0 \quad (3.6)$$

Con lo cual se pueden obtener los valores de las frecuencias naturales de este caso. Se presentará una sola frecuencia para analizar la dependencia de esta con respecto al largo. Este resultado puede ser encontrado en la subsección 4.1 del Capítulo 4 Resultados.



## 3.2. Caso viga con condiciones de periodicidad

Para poder encontrar las frecuencias naturales de esta caso, se necesita lo siguiente:

- Definir el problema a resolver.
- Definir las ecuaciones necesarias para resolver el problema.
- Ensamblar las ecuaciones globales de masa y rigidez.
- Aplicar condiciones de periodicidad infinita.
- Resolver el problema de valores propios.

Luego, se procede de la siguiente manera:

1. En este primer paso se describirá la configuración de este segundo caso. La configuración es : viga de un elemento (Figura 3.2). Esta configuración fue elegida debido a su simplicidad y casos más complicados eran difíciles de exponer en este Trabajo de Título, debido a lo extenso de los resultados que habría que exponer (frecuencias naturales con demasiados términos).



Figura 3.2: Configuración 2: viga de un elemento.

2. Para este segundo caso serán necesarias las Ecuaciones A.32 y A.36 que corresponden a la matriz de rigidez y masa locales respectivamente para un elemento de marco plano. Además también será necesaria la Ecuación 3.7 con la cual se impondrá la condición de periodicidad.

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3. Las ecuaciones globales de masa y rigidez estarán representadas por sus respectivas matrices locales debido a que el caso de estudio es de sólo un elemento.

4. Ahora es necesario multiplicar las matrices globales de masa y rigidez por la matriz  $\mathbf{T}$  respectiva para cada configuración con tal de imponer las condiciones de periodicidad. Las matrices de masa y rigidez quedan respectivamente:

$$\mathbf{M}_2^* = \mathbf{T}_2' \mathbf{M}_{\text{global}2} \mathbf{T}_2 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_2^* = \mathbf{T}_2' \mathbf{K}_{\text{global}2} \mathbf{T}_2 \quad (3.9)$$

5. Ahora hay que resolver lo siguiente:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_2^* + \mathbf{K}_2^*) \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \det[-\omega^2 \mathbf{M}_2^* + \mathbf{K}_2^*] = 0 \quad (3.10)$$

Con lo cual se pueden obtener los valores de las frecuencias naturales para las dos configuraciones. Se presentará una sola frecuencia para analizar la dependencia de esta con respecto al largo. Este resultado puede ser encontrado en la subsección 4.1 del Capítulo 4 Resultados.

### 3.3. Estructuras reticuladas

Para poder encontrar las bandas de frecuencias con respecto al largo de la celda básica, se necesita lo siguiente:

- Especificar los 2 tipos de materiales y los 2 diámetros transversales a utilizar para los elementos tipo barra y viga de los reticulados.
- Definir el patrón que tendrá cada reticulado.
- Especificar el número de casos que se tomarán para este trabajo. Y el número de celdas básicas que tendrán por eje cada una ( $n_c$ ).
- Definir las coordenadas de cada nodo.
- Definir la manera en que se relacionarán los nodos del reticulado, mediante la matriz conexión.
- Armar la matriz de grados de libertad.
- Aplicar la matriz de rotación.
- Ensamblar las matrices de masa y rigidez globales.
- Armar la matriz  $\mathbf{T}$  para imponer la periodicidad infinita a las matrices de masa y rigidez globales.
- Utilizar un código en el software Matlab para optimizar mediante el Método Asíntotas Móviles (*MMA*) la estructura del reticulado de tal forma que se maximice el band gap.
- Analizar el band gap resultante.

Luego, se procede de la siguiente manera:

**1.** Se utilizarán dos materiales distintos que poseen un gran contraste en sus propiedades mecánicas. Los materiales elegidos serán aluminio y tungsteno. Los diámetros iniciales elegidos serán de 0.004 en su parte más angosta y 0.008 [m] en su parte más gruesa.

**2.** Cada reticulado estará formado por celdas básicas con un patrón cuadrado con dos barras o vigas cruzadas en forma de X.

**3.** Se tomarán 4 casos de estudio para reticulados formados por barras y 4 para vigas, adicionalmente para cada caso se verán dos suposiciones, el primero será cuando el área transversal de la barra o viga es constante y su largo escalable, y el segundo cuando tanto el área transversal y el largo son escalables. Se introducirá el termino  $n_c$  que es el número de celdas básicas que se tiene por eje. Por ejemplo la Figura 2.2(b) tiene  $n_c = 4$  y por lo tanto posee 16 celdas básicas en total. Para este trabajo se utilizarán reticulados con  $n_c = 4, 6, 8$  y 10 para contrastar resultados.

**4.** Se deben tomar las coordenadas de cada nodo de tal forma que la matriz de coordenadas quede con una dimensión de 2 columnas y la cantidad de filas es el número de nodos que existen en el reticulado. Así tendremos una matriz de la forma :

$$\text{Coordenadas} = \begin{bmatrix} (0, 0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (L_x, L_y) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

**5.** Se definirá la matriz de conexión. En esta matriz primero se conectarán los nodos horizontales seguido de los verticales, luego las barras o vigas en X, primero las que están en dirección de izquierda a derecha / y luego de derecha a izquierda \. De esta forma siguiendo

como ejemplo la Figura 3.3, la matriz de conexión queda:

$$\text{Conexión} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

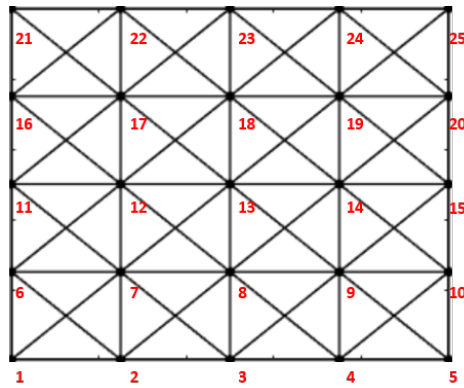


Figura 3.3: Reticulado con  $n_c = 4$  con nodos numerados.

6. La matriz de grados de libertad es una matriz de 6 columnas (dado que son 3 grados de libertad por nodo y la conexión es entre dos nodos) y n filas, en donde n es el número de elementos. Por ejemplo la primera fila de esta matriz será **[1 2 3 4 5 6]** en donde estos números representan los primeros 6 grados de libertad de los 2 nodos extremos del primer elemento. Para definir esta matriz se hacen necesarios las matrices de coordenadas y de conexión.

7. Una vez que se tiene la matriz de coordenadas y conexión, podemos obtener el ángulo que tienen los elementos entre si, en otras palabras podemos determinar si el elemento esta horizontal, vertical o diagonal. Teniendo el ángulo ( $\phi$ ) se puede calcular las matrices de rotación que fueron definidas en Anexos, en las Ecuaciones A.17 y A.38. Las matrices locales quedan como están expresadas en las Ecuaciones A.23 y A.21.

8. Ahora se debe ensamblar la matriz global de masa y rigidez. En la Figura 3.4 se muestra un ejemplo de ensamble de la matriz global, en donde las matrices  $K_1 - K_5$  son las matrices locales que se traslapan, formando la matriz global. El caso para la matriz global de masa se construye de manera análoga.

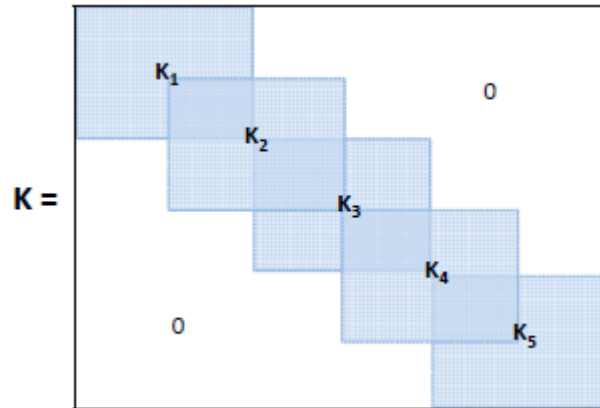


Figura 3.4: Ensamble matriz de rigidez. [12]

9. La matriz  $\mathbf{T}$  queda definida como esta en la Ecuación 2.4. Tal que  $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^t \mathbf{K} \mathbf{T}$  y  $\mathbf{M}^* = \mathbf{T}^t \mathbf{M} \mathbf{T}$  en donde se tiene la matriz de rigidez y masa global con condiciones de periodicidad impuestas.

10. Utilizando un código desarrollado en el software Matlab, se optimiza la estructura del reticulado empleando el Método de Movimiento de Asíntotas (*MMA*) en donde las variables de decisión son los materiales de las barras o vigas y su sección transversal; de tal forma que la estructura queda diseñada para maximizar el band gap. Para desarrollar este código, se utilizó como base el desarrollado en el trabajo de Quinteros L. at. el.[3], quien lo utilizó para su tesis de magíster en la cual trabajó con enrejados planos.

11. Una vez que se ha optimizado la geometría de los reticulados, podemos obtener los diagramas de frecuencias en la cuál nos encontramos con el band gap. Luego, podemos escalar su estructura de tal forma que se pueda estudiar su band gap a la par que se escala el largo de su celda básica, y así poder encontrar alguna relación de escalamiento.

# Capítulo 4

## Resultados y discusión

En este capítulo se expondrán varios resultados, el principal y más importante será el comportamiento de la frecuencia media de una estructura reticulada comparada con el largo de la celda básica. Los primeros resultados son los casos analíticos de dos casos distintos, el primero de una barra de dos elementos (de un enrejado plano) y el segundo de una viga de un elemento (de un marco plano) en donde se analizará la relación de la frecuencia con el largo. Seguido de lo anterior se verá la configuración y propiedades de los reticulados, luego un análisis de sensibilidad de la malla y finalmente distintas comparaciones entre reticulados y sus estructuras escaladas, de ahí podremos determinar alguna relación de escalamiento. Al final de este capítulo se puede observar en las Figuras 4.15-4.16 un resumen con los resultados sobre el estudio de escalabilidad para enrejados y marcos.

### 4.1. Casos analíticos

En esta sección se expondrá la frecuencia natural para los casos 1 y 2. Sólo se mostrará una frecuencia debido a que para las demás frecuencias es análogo. El procedimiento para obtener estas frecuencias fue descrito en el Capítulo 3 Metodología. Se verá a continuación la dependencia de la frecuencia con respecto al largo de la celda básica. El caso 1 corresponde a una barra de dos elementos de un enrejado plano, mientras que el caso 2 a una viga de un marco plano.

#### 4.1.1. Frecuencia natural en barra

La frecuencia para el caso 1 será:

$$\omega_1 = \frac{C_1}{L} \sqrt{\frac{C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7}{C_8}} \quad (4.1)$$

En donde:

$$C_1 = \sqrt{6}$$

$$C_2 = -E\rho$$

$$C_3 = 4e^{i\theta} E\rho$$

$$C_4 = 138e^{2i\theta} E\rho$$

$$C_5 = 4e^{3i\theta} E\rho$$

$$C_6 = -e^{4i\theta} E\rho$$

$$C_7 = 6\sqrt{e^{i\theta}(1 - 13e^{i\theta} - 13e^{2i\theta} + e^{3i\theta})^2 E^2 \rho^2}$$

$$C_8 = (1 - 14e^{i\theta} + e^{2i\theta})^2 \rho^2$$

Luego la frecuencia puede ser escrita como:

$$\omega_1 = \frac{C_9}{L} \quad (4.2)$$

En donde:

$$C_9 = C_1 \sqrt{\frac{C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7}{C_8}}$$

Ahora podemos obtener el logaritmo de la frecuencia, de tal forma que esta queda como:

$$\text{Log}(\omega_1) = \text{Log}(C_9) - \text{Log}(L) \quad (4.3)$$

Esta representa a una recta afín, en donde el valor de  $y$  queda representado por  $\text{Log}(\omega_1)$ ,  $x$  por  $\text{Log}(L)$ , el coeficiente de posición  $n$  por  $\text{Log}(C_9)$  y la pendiente  $m$  es igual a -1.

#### 4.1.2. Frecuencia natural en viga

La frecuencia para el caso 2 será:

$$\omega_2 = \frac{B_1}{L} \quad (4.4)$$

La constante  $B_1$  quedará en función del módulo de Young, la densidad, de  $\theta = \mathbf{k}L$  y de  $\alpha$  (de valor igual a 6.25). Debido a lo compleja que es la solución de las frecuencias para el caso de una viga, es que se prefiere dejar como aparece en la Ecuación 4.4, dado que de otra manera la solución ocuparía varias páginas.

Ahora podemos obtener el logaritmo de la frecuencia, de tal forma que está queda como:

$$\text{Log}(\omega_2) = \text{Log}(B_1) - \text{Log}(L) \quad (4.5)$$

Esta representa a una recta afín, en donde el valor de  $y$  queda representado por  $\text{Log}(\omega_2)$ ,  $x$  por  $\text{Log}(L)$ , el coeficiente de posición  $n$  por  $\text{Log}(B_1)$  y la pendiente  $m$  es igual a -1.

## 4.2. Configuración y propiedades de los reticulados

En este capítulo se desea exponer la configuración y las propiedades de los reticulados. Se toman distintos reticulados a optimizar, se utilizarán los casos en donde  $n_c = 4, 6, 8$  y  $10$  como puede ser visto en la Figura 4.1. El largo inicial (para determinar la estructura óptima) estará determinado por  $n_c$  y será calculado por la expresión  $L_c = 0.025n_c[m]$  para que cada celda básica tenga inicialmente un largo de  $2.5[cm]$  en sus dimensiones para luego ser escalado hasta  $1[m]$ .

El material a emplear es aluminio 6061 y tungsteno descritos en la Tabla 4.1, por su alto contraste entre sus propiedades mecánicas. El área transversal en barras y vigas se calculará como una sección con diámetro de  $4[mm]$  en la sección más angosta y  $8[mm]$  en la sección más ancha, estas secciones serán escalas con respecto al largo mediante la constante alpha presentada en la Ecuación 2.24. En este trabajo se utilizará una constante de escalamiento alpha  $\alpha = 6.25$  que será la proporción entre el largo de la celda básica del reticulado optimizado, dividido en el diámetro de la sección más angosta, por lo que los diámetros llegarán hasta  $0.16[m]$  y  $0.32[m]$  (dado que el largo de la celda básica llegará hasta  $1[m]$ ). La variable  $n$  que indica la banda que se va a optimizar se emplea como  $n = 3$  en todos los casos. Las frecuencias naturales calculadas a lo largo del vector de ondas es de 8.

Tabla 4.1: Propiedades mecánicas del aluminio 6061 y tungsteno.

Propiedad	Aluminio	Tungsteno
Módulo de elasticidad	68.9 [GPa]	411[Gpa]
Densidad	2700 $[\frac{kg}{m^3}]$	19300 $[\frac{kg}{m^3}]$

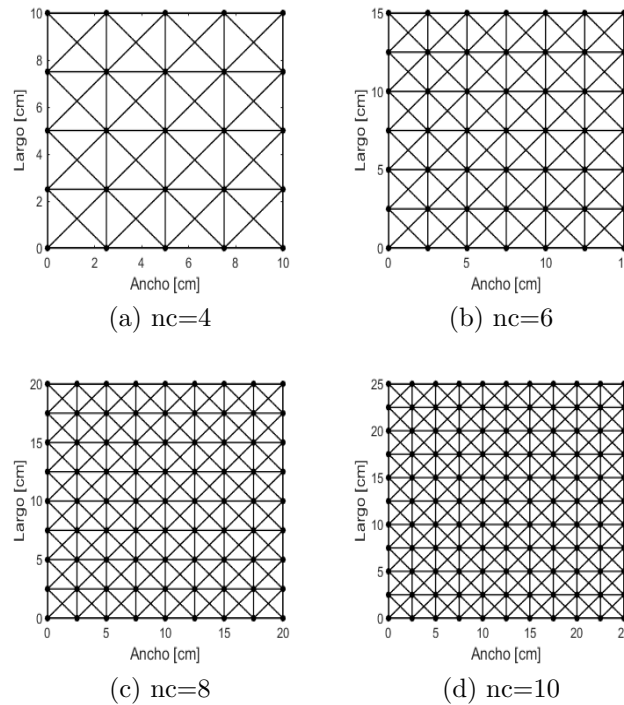


Figura 4.1: Reticulados a optimizar



### 4.3. Análisis de sensibilidad de malla

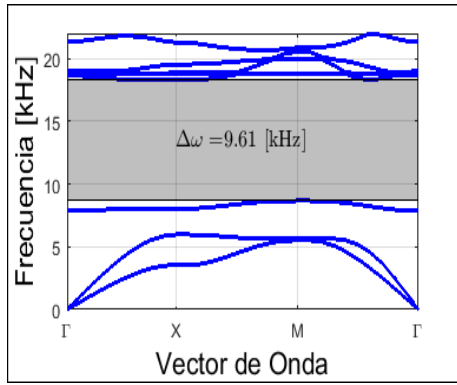
Para analizar la sensibilidad de malla, se utiliza el error medio cuadrado (RMS), debido que hay un conjunto de bandas que conforman la matriz, la cual necesita un estimado global para saber si el error disminuye en general en la matriz o no. Estas matrices son de dimensiones  $n_{vp} \times ZIP$ , donde  $n_{vp}$  es el número de valores propios elegidos y ZIB es el refinamiento del vector de ondas. La Ecuación 4.6 fue la utilizada para calcular el error medio cuadrado, en donde  $m$  corresponde al refinamiento de cada viga. En la Tabla 4.2 se observan los errores para cada refinamiento.

$$Error_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n_{vp} \times ZIP} \sum_{j=1}^{ZIB} \sum_{i=1}^{n_{vp}} \left( \frac{\omega(i, j)^m - \omega(i, j)^{m+1}}{\omega(i, j)^{m+1}} \right)^2} \quad (4.6)$$

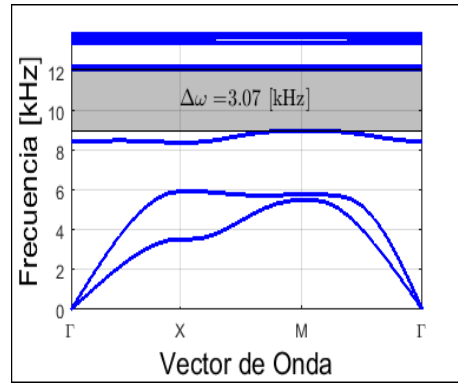
Tabla 4.2: Error RMS en función del mallado

Refinamiento $m$	$Error_{RMS}[\%]$
1	38.57
3	2.51
5	0.47
7	0.30
9	0.19

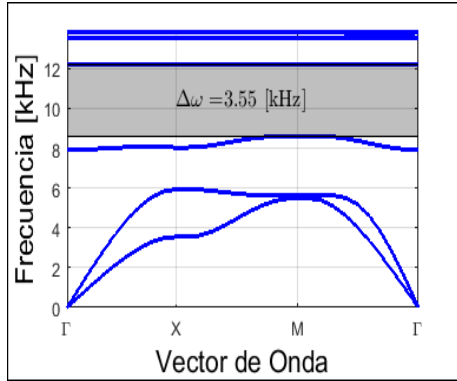
En la Figura 4.2 se puede observar los distintos refinamientos para un marco con  $n_c = 4$ . Se tiene que el cambio de  $ref = 1$  a  $ref = 3$  es grande, tanto en el valor del band gap como en el rango en el cual esta sintonizado, este presenta un error de 38.57%. Para  $ref = 5$  se tiene un bajo porcentaje de error, y se puede observar en los diagramas de frecuencias entre  $ref = 5$  y  $ref = 11$  que son casi idénticos, teniendo un error de 0.47% lo que lo hace una muy buena aproximación. Es por este bajo error (y también a las limitaciones computacionales) que se harán los cálculos de refinamiento con  $ref = 5$ .



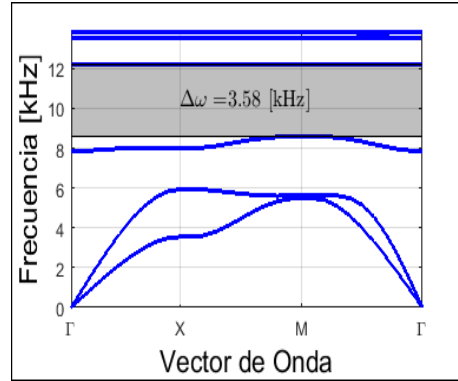
(a) ref=1.



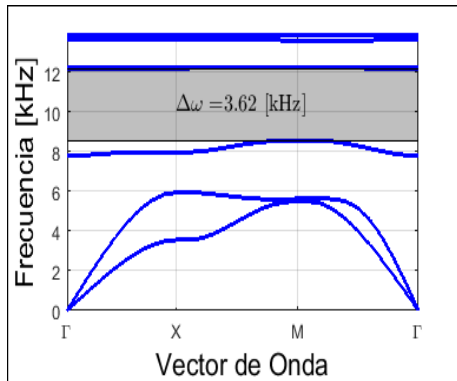
(b) ref=3.



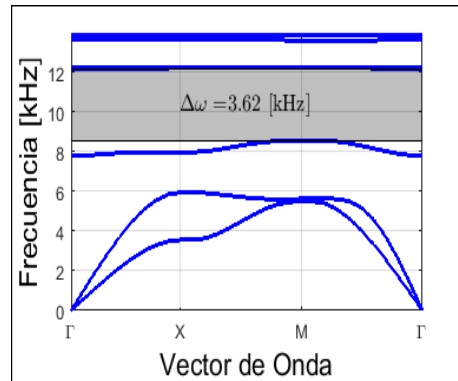
(c) ref=5.



(d) ref=7.



(e) ref=9.



(f) ref=11.

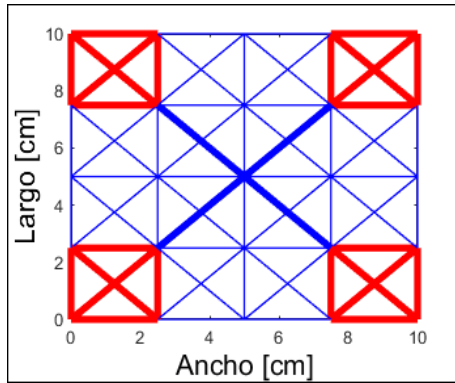
Figura 4.2: Band gap para  $nc=4$  y distintos refinamientos (ref)

## 4.4. Comparación entre reticulados

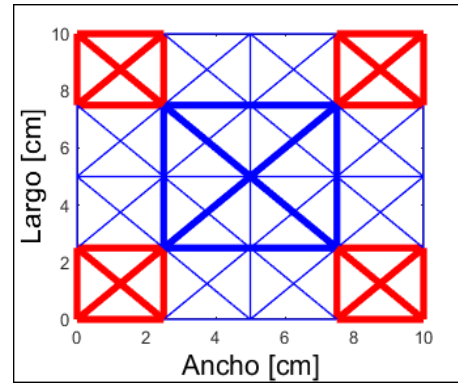
En esta sección se verán las diferencias entre las estructuras y band gap entre reticulados, por lo tanto se compararan los enrejados y marcos para los 4 casos de  $n_c$ .

En la Figura 4.3 se pueden observar las diferencias entre estructuras para enrejados y marcos. Vemos que a lo igual que lo descrito por Quinteros L. at. el. [3] y otros autores, los materiales más resistentes se concentran en los bordes, dejando el material considerablemente menos denso y con un módulo de Young mucho menor en el centro de la estructura, en color azul se tiene el aluminio y en rojo el tungsteno. Se puede observar en la Figura 4.3 que tanto marcos como enrejados poseen estructuras distintas para el mismo número de  $n_c$ , aunque estas difieren levemente entre si. Podemos ver que estas diferencias y el tipo de elemento que se considera hacen variar en ciertos casos en gran proporción el band gap, como se puede observar en la Figura 4.4 en donde se tiene una comparación entre band gap (optimizados) para los distintos tipos de reticulados. Para el caso de enrejados se ve una clara reducción del band gap a medida que crecen las celdas básicas, caso que no ocurre con los marcos. Se observa además que los rangos de los band gap disminuyen tanto en enrejados como en marcos, cuando se aumenta el número de  $n_c$ .

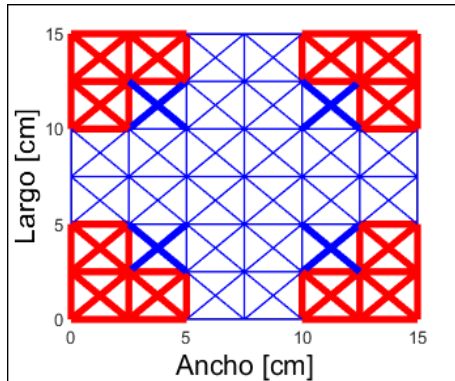
En las Figuras 4.5-4.6 se tienen los diagramas de frecuencias normalizados vistos en la Figura 4.4. Estos diagramas son normalizados con respecto a la frecuencia a la cual esta sintonizado cada uno de los band gap. De la Figura 4.5 para enrejados se observa que el rango del band gap normalizado en la cual están todas las figuras es aproximadamente 0.5-1.5 y el band gap normalizado es de 1. Mientras que en el caso de la Figura 4.6 para marcos se observa que el rango de band gap normalizado en la cual están los casos  $n_c=6, 8$  y  $10$  es aproximadamente 0.6-1.4 y el band gap normalizado es de 0.75, mientras que en el caso de  $n_c=4$  es 0.85-1.15 y 0.31 respectivamente. En el caso de enrejados, la igualdad puede deberse a que la estructura se amplifica manteniendo una distribución de los grosores y materiales, por lo que se podría tener que la banda a la cual están sintonizado puede ser proporcional entre sí, dado que la banda máxima, como la banda mínima normalizado por la banda media es cercano en valor para todos los casos. Lo anterior también es valido para el caso de marcos, menos para el caso en donde  $n_c=4$ , esto puede deberse a que la distribución de los grosores de la parte central de la estructura forma un cuadrado, patrón que no continua a medida que aumenta  $n_c$ .



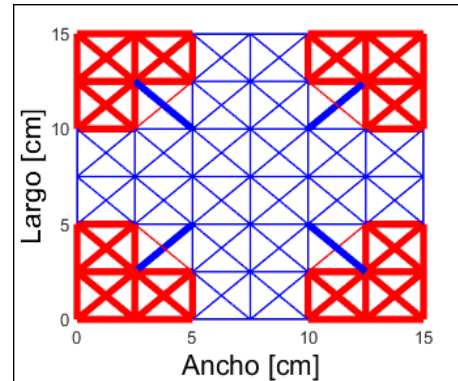
(a) Enrejado  $nc=4$ .



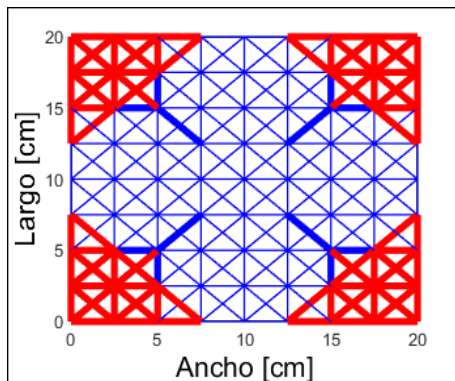
(b) Marco  $nc=4$ .



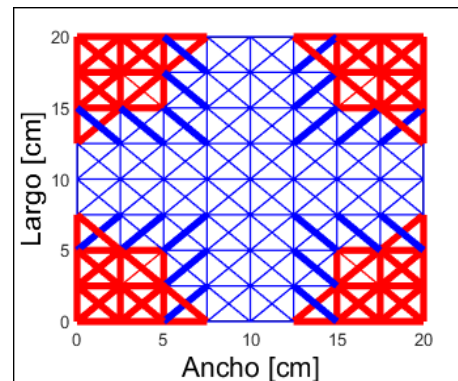
(c) Enrejado  $nc=6$ .



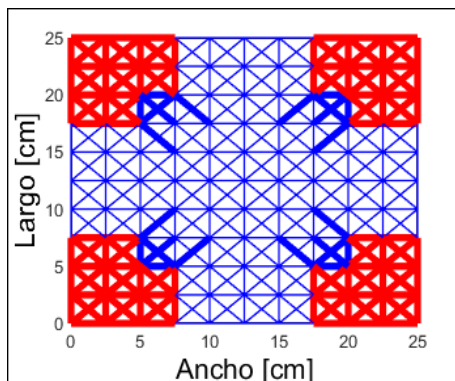
(d) Marco  $nc=6$ .



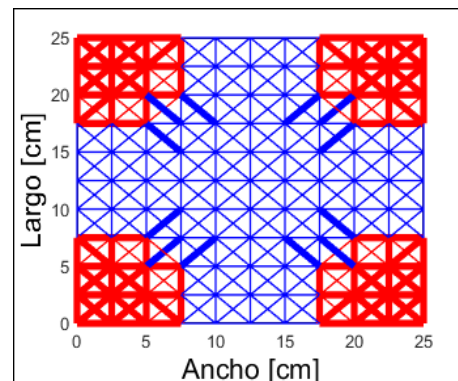
(e) Enrejado  $nc=8$ .



(f) Marco  $nc=8$ .

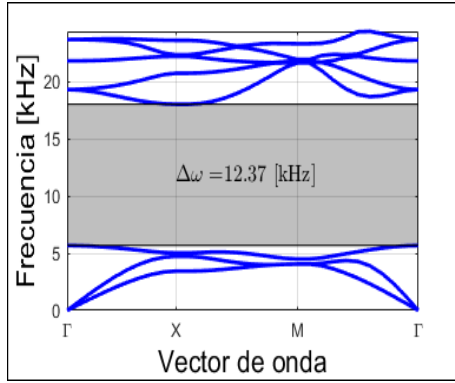


(g) Enrejado  $nc=10$ .

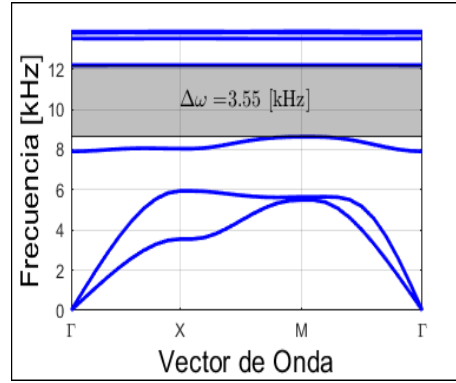


(h) Marco  $nc=10$ .

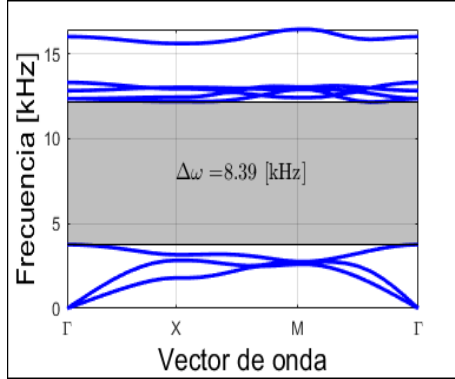
Figura 4.3: Comparación de estructuras reticuladas con conformación óptima para maximizar el band gap.



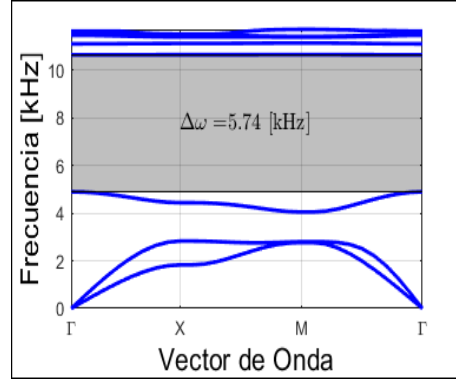
(a) Band gap para enrejado  $nc=4$ .



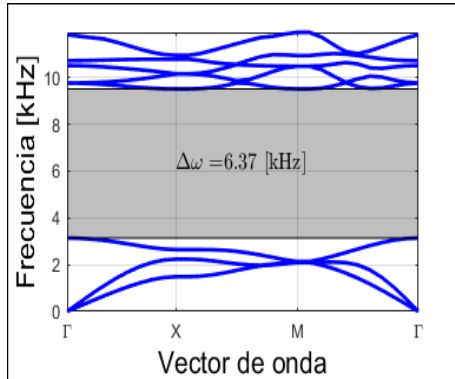
(b) Band gap para marco  $nc=4$ .



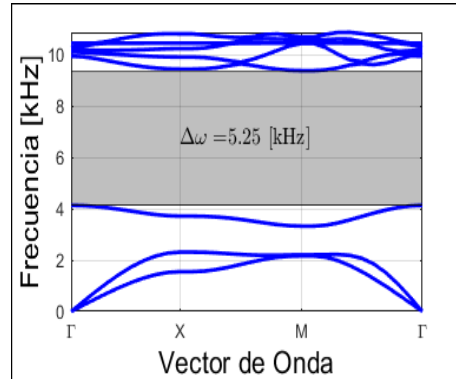
(c) Band gap para enrejado  $nc=6$ .



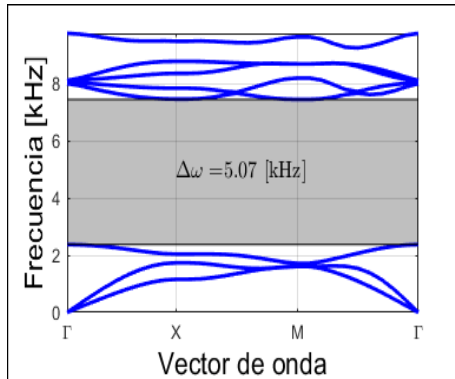
(d) Band gap para marco  $nc=6$ .



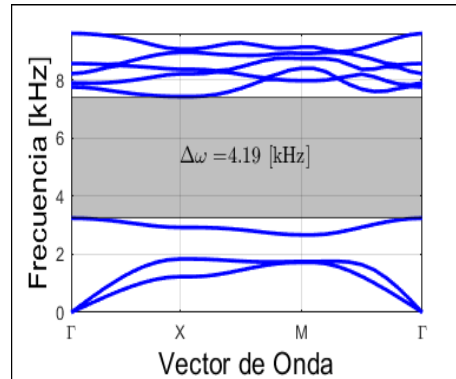
(e) Band gap para enrejado  $nc=8$ .



(f) Band gap para marco  $nc=8$ .

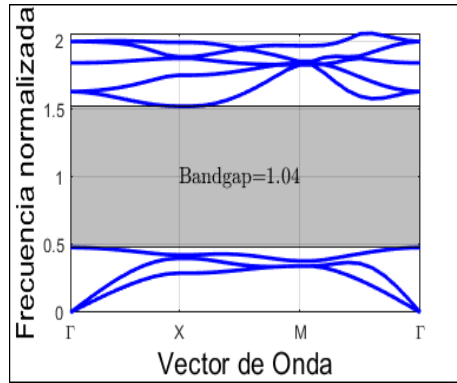


(g) Band gap para enrejado  $nc=10$ .

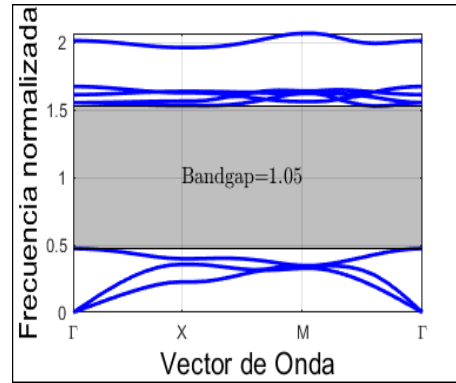


(h) Band gap para marco  $nc=10$ .

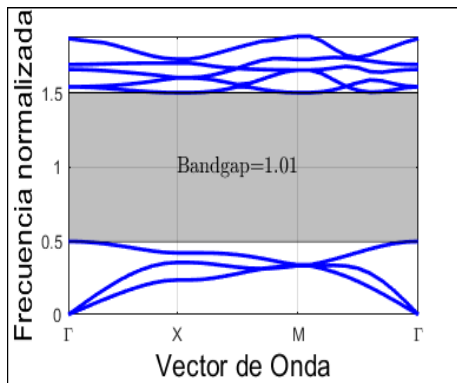
Figura 4.4: Comparación de band gap para las estructuras reticuladas óptimas.



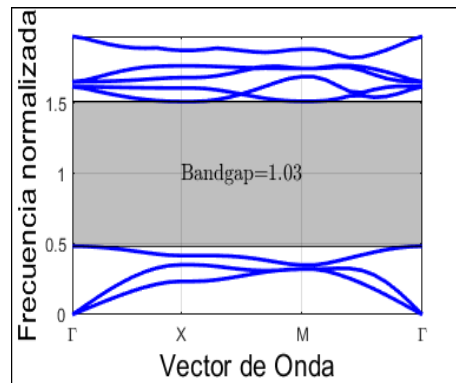
(a) Band gap normalizado para enrejado  $nc=4$ .



(b) Band gap normalizado para enrejado  $nc=6$ .

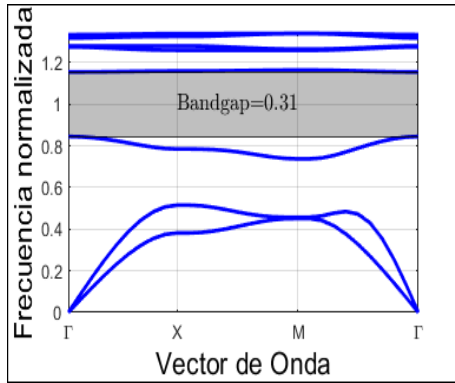


(c) Band gap normalizado para enrejado  $nc=8$ .

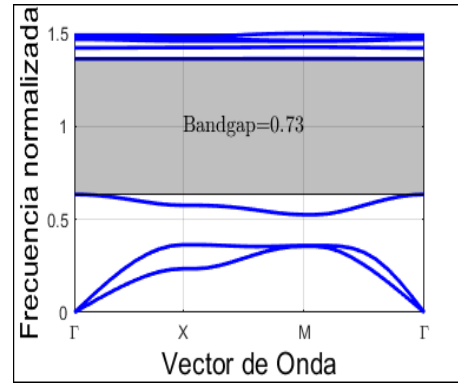


(d) Band gap normalizado para enrejado  $nc=10$ .

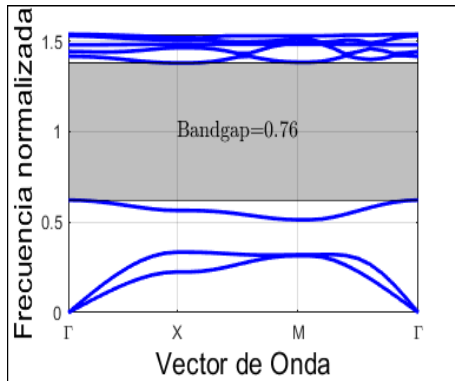
Figura 4.5: Comparación entre band gap normalizados para enrejados con distintos  $n_c$ .



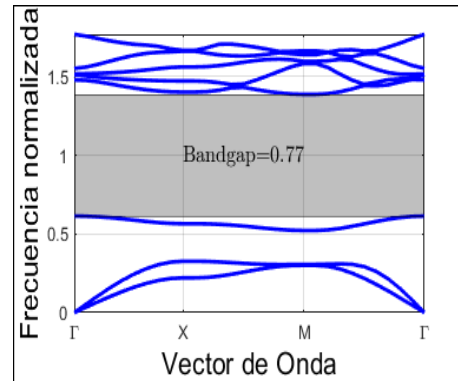
(a) Band gap normalizado para marco  $n_c=4$ .



(b) Band gap normalizado para marco  $n_c=6$ .



(c) Band gap normalizado para marco  $n_c=8$ .



(d) Band gap normalizado para marco  $n_c=10$ .

Figura 4.6: Comparación entre band gap normalizados para marcos con distintos  $n_c$ .

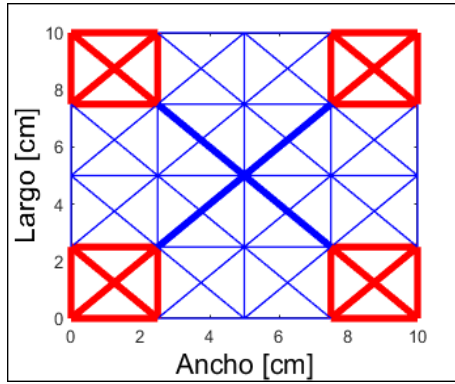
## 4.5. Resultados de escalamiento

En esta sección se verán los resultados obtenidos para el análisis de las bandas de frecuencias para distintos reticulados y la relación de estas con respecto al largo de la celda básica. Se presentarán la estructura y el band gap (partes (a) y (b) de las Figuras 4.7-4.14) de cada marco o enrejado para relacionar las bandas de frecuencias a un tipo específico de caso. Como ya se ha expuesto anteriormente, los casos estudiados son 4 para marcos y otros 4 para enrejados, en donde  $n_c = 4, 6, 8$  y  $10$ . Para cada caso se verán dos suposiciones, en donde el primero será considerar el área transversal y el largo escalables para el elemento de la celda básica (partes (c) y (d) de las Figuras 4.7-4.14) y el segundo será el área transversal constante y largo escalable para el elemento de la celda básica (partes (e) y (f) de las Figuras 4.7-4.14).

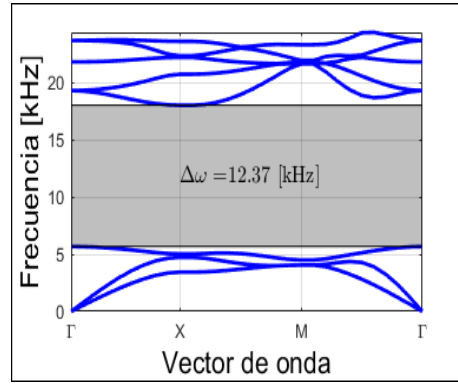
Primero se verán las figuras que analizan los casos de enrejados, seguidos de los casos de marcos. Finalmente se verá un resumen de los resultados obtenidos (Figuras 4.15-4.16). En las Figuras 4.7-4.10 parte (c) se puede ver la relación de las bandas de frecuencias con respecto al largo, en donde se ve una clara relación logarítmica. En la parte (d) se tiene una relación loglog de la frecuencia de la banda media con respecto al largo, en donde se tiene que esta forma una pendiente igual a  $-1$  en todos los casos. Ahora en las Figuras 4.7-4.10 parte (e) y (f) se tiene exactamente lo mismo que en (c) y (d) respectivamente, el diagrama de frecuencias no varía teniendo una sección transversal constante y la pendiente en escala loglog de la recta que forma la frecuencia de la banda media continua siendo  $-1$  para todos los casos. Ahora para marcos se tiene lo expuesto en las Figuras 4.11-4.14, en donde en las parte (c) de los casos se tiene un comportamiento logarítmico de las bandas de frecuencias con respecto al largo, y en (d) se tiene que la pendiente formada por la recta de la frecuencia de la banda media con respecto al largo en escala loglog es igual a  $-1$ , igual que en el caso de enrejados. Para las Figuras 4.11-4.14 parte (e) se tiene que el band gap tiende rápidamente a  $0$ , mientras que de la parte (f) la pendiente de la frecuencia de la banda media con respecto al largo en escala loglog nos da un valor aproximado de  $-1.95$  para todos los casos.



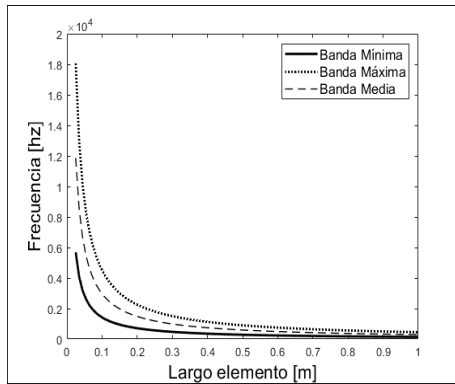
### 4.5.1. Optimización del band gap, y relación de la frecuencia respecto al largo para enrejados



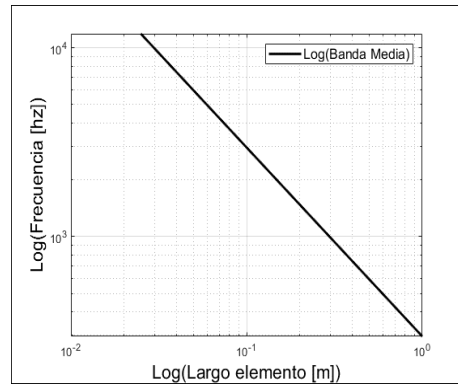
(a) Enrejado.



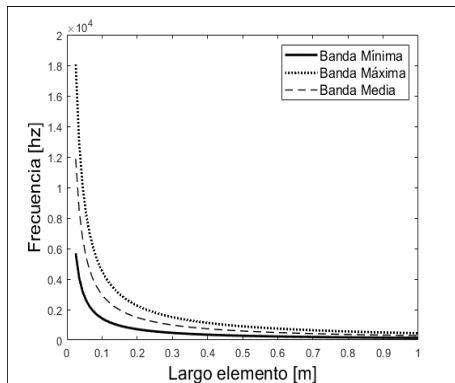
(b) Bandgap.



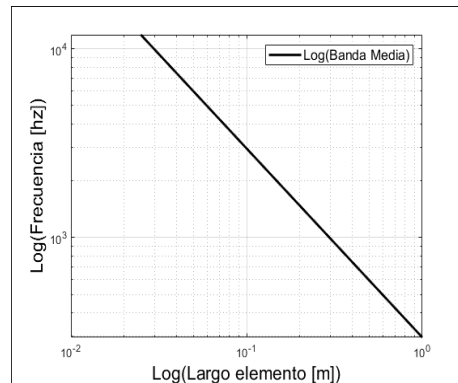
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

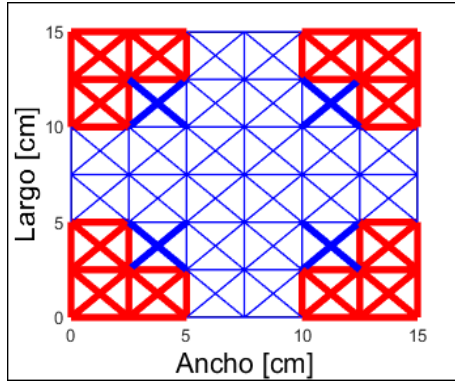


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

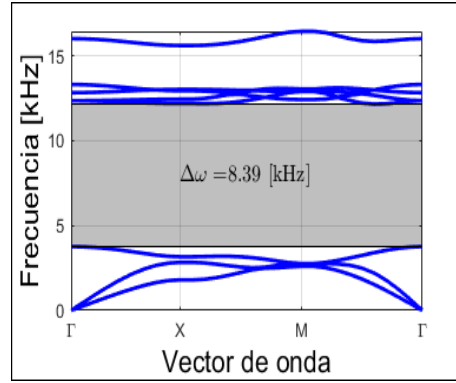


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

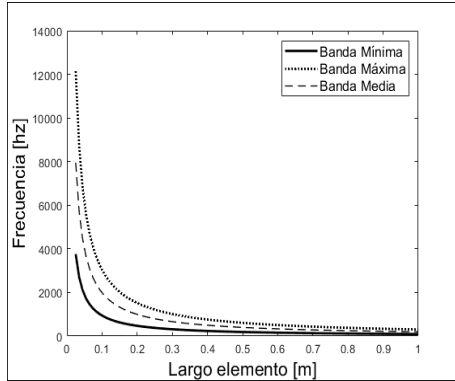
Figura 4.7: Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para  $n_c=4$ .



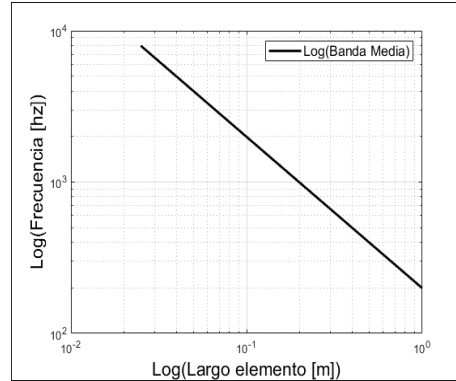
(a) Enrejado.



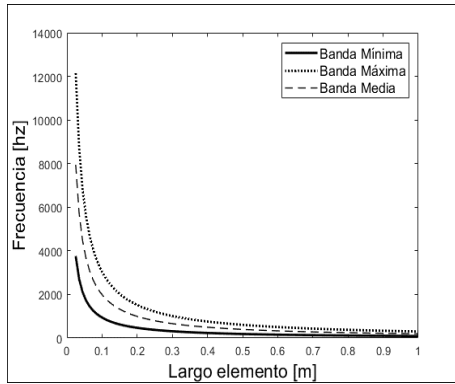
(b) Bandgap.



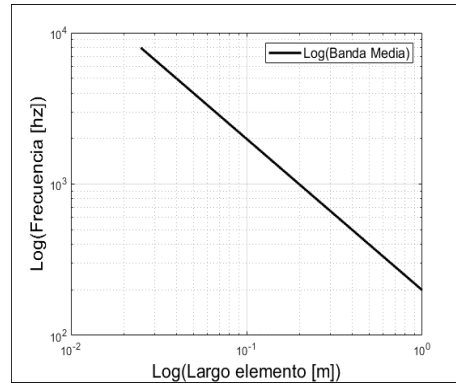
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

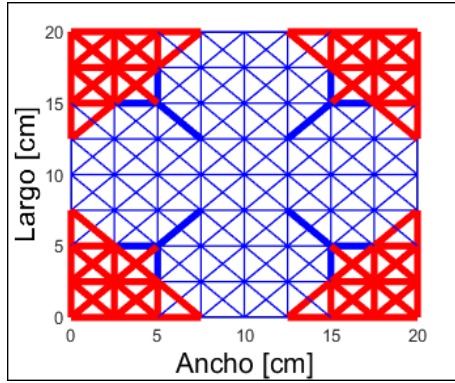


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

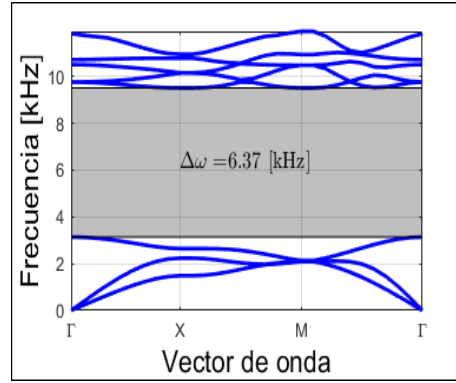


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

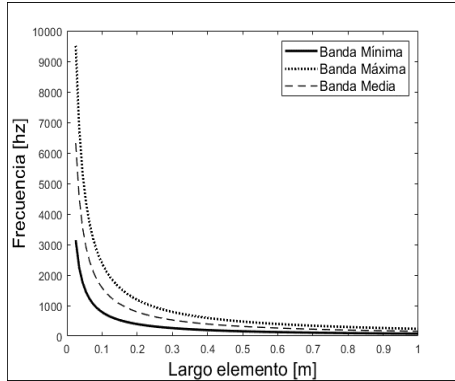
Figura 4.8: Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para  $n_c=6$ .



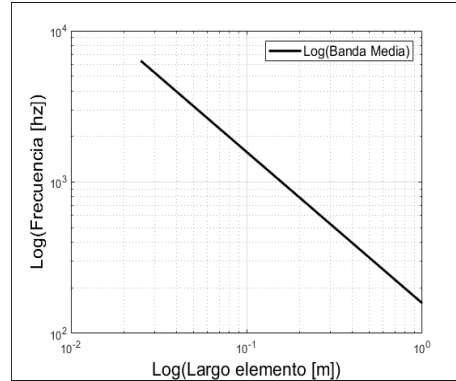
(a) Enrejado.



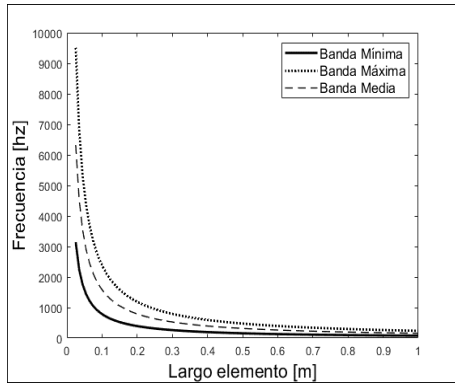
(b) Bandgap.



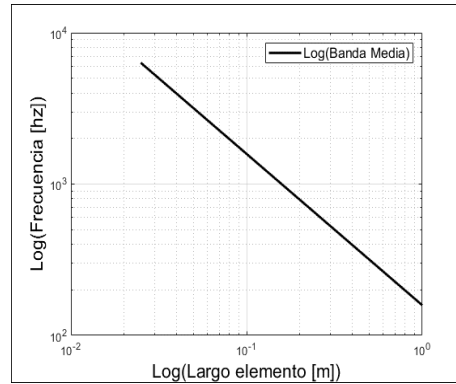
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

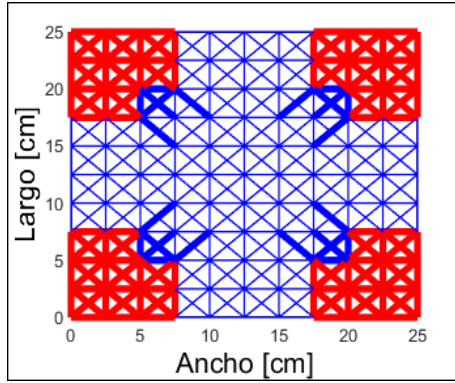


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

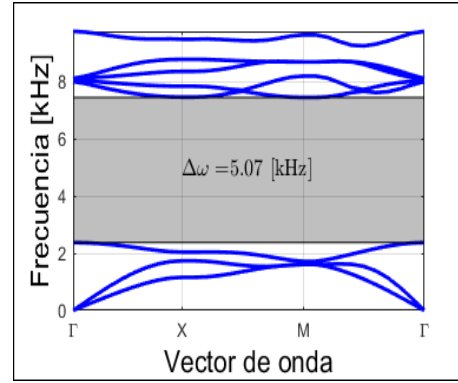


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

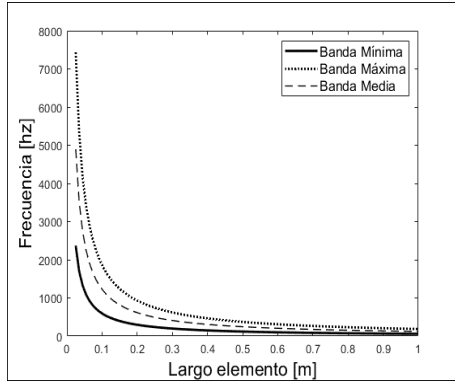
Figura 4.9: Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para  $n_c=8$ .



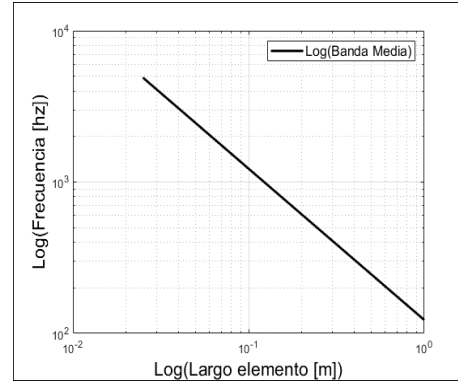
(a) Enrejado.



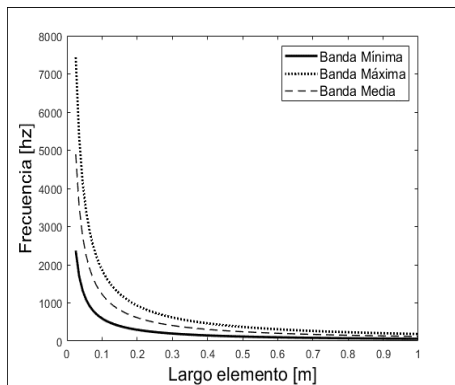
(b) Bandgap.



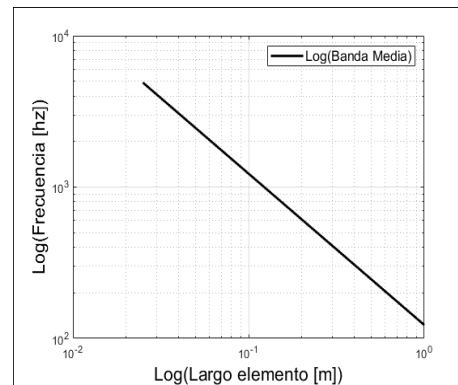
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.



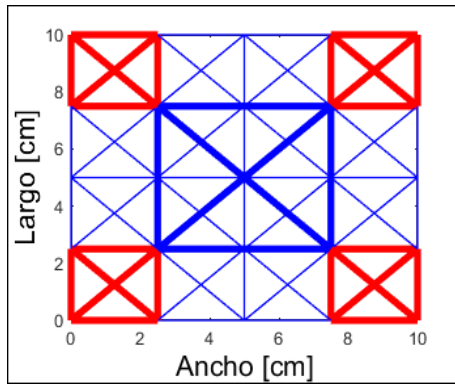
(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.



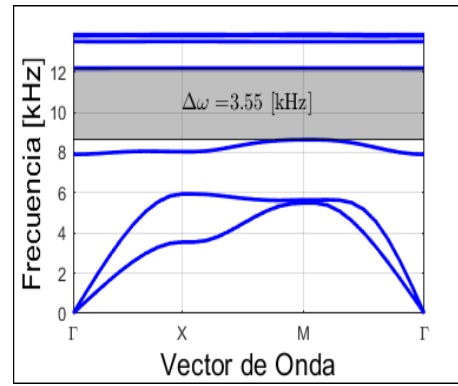
(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

Figura 4.10: Enrejado, band gap y relación de este último con el largo de la celda básica para  $n_c=10$ .

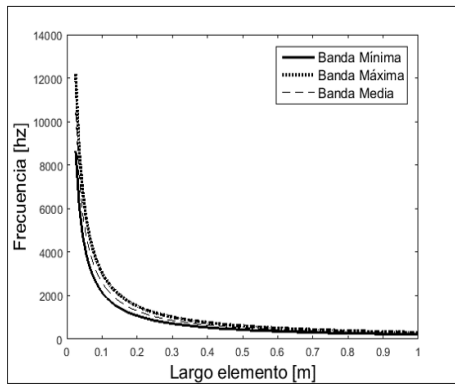
## 4.5.2. Optimización del band gap, y relación de la frecuencia respecto al largo para marcos



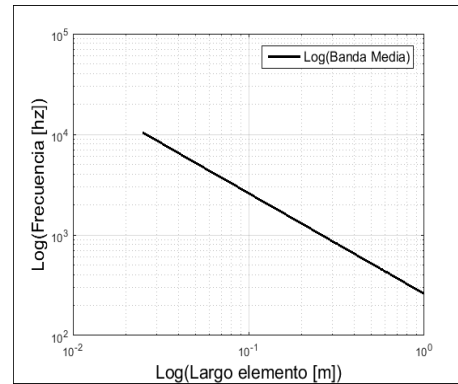
(a) Marco.



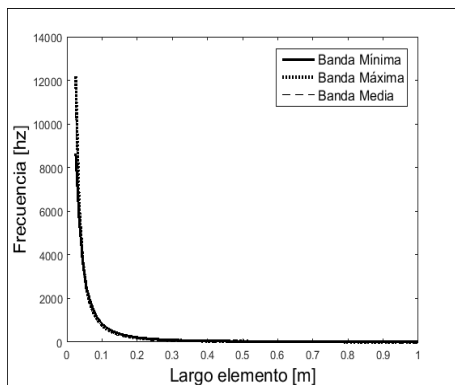
(b) Bandgap.



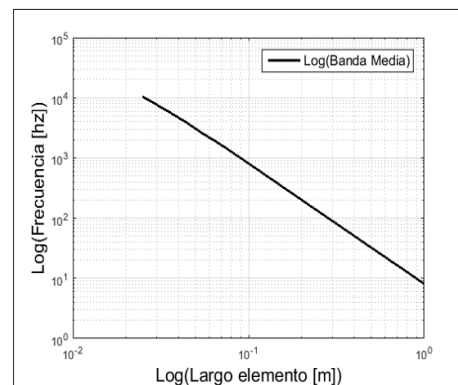
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

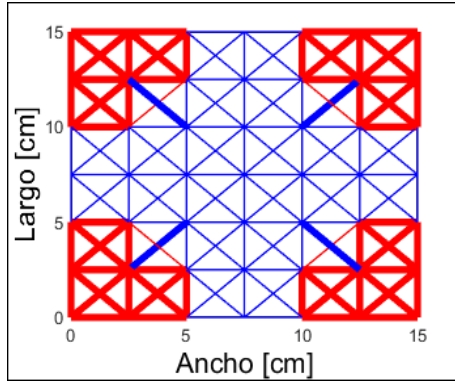


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

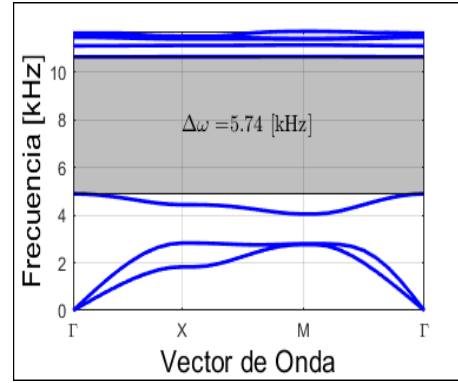


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

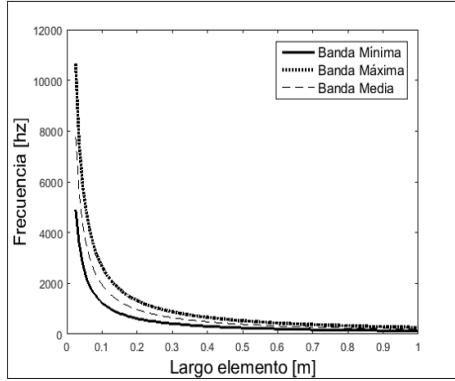
Figura 4.11: Marco, band gap y relación de este último con el largo para  $n_c=4$ .



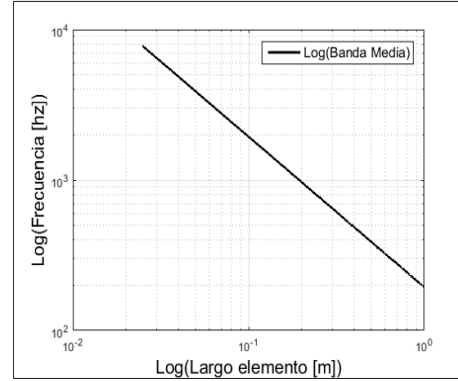
(a) Marco.



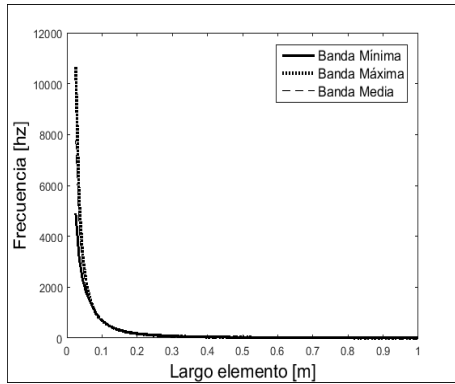
(b) Bandgap.



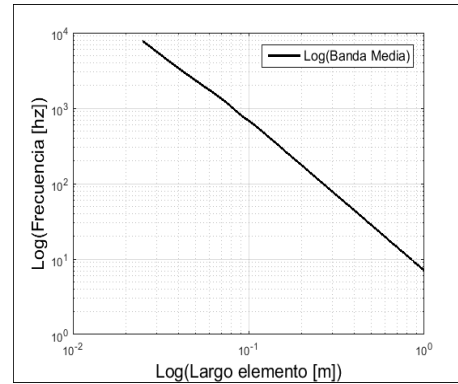
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

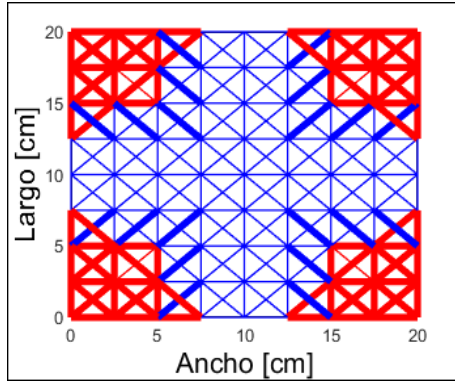


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

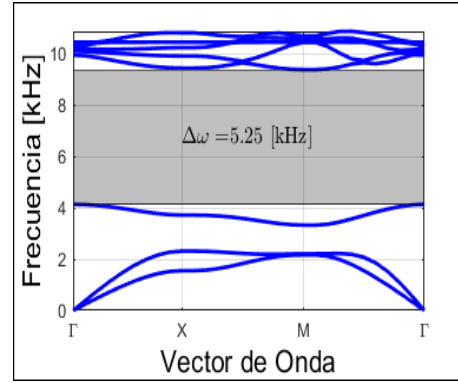


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

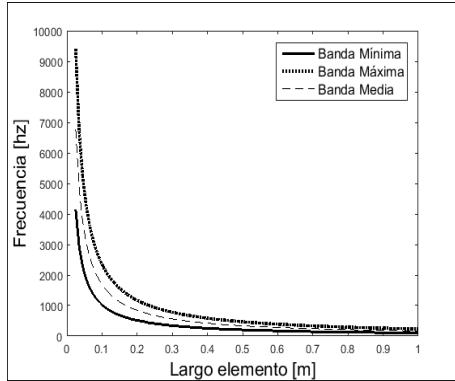
Figura 4.12: Marco, band gap y relación de este último con el largo para  $n_c=6$ .



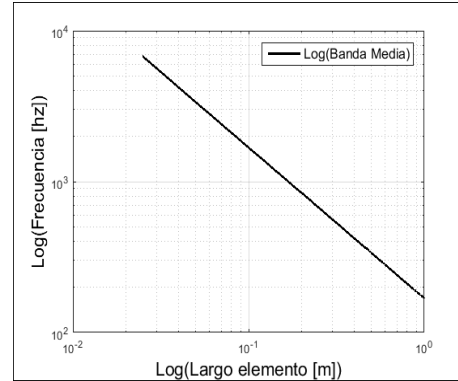
(a) Marco.



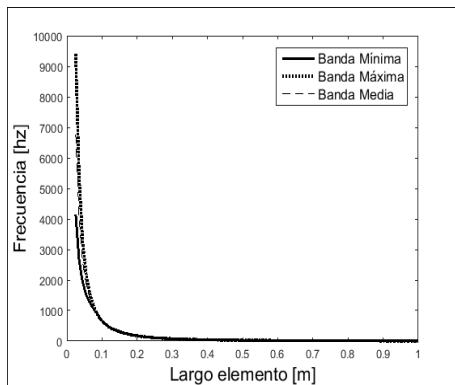
(b) Bandgap.



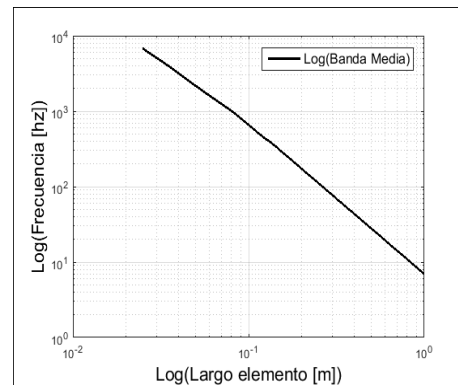
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.

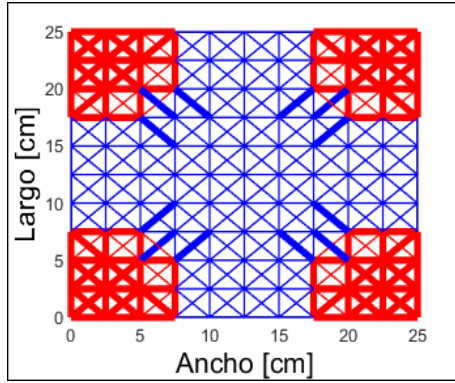


(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.

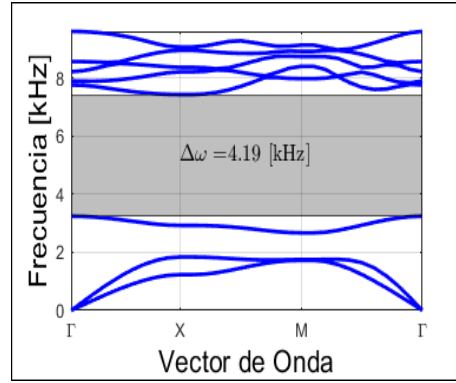


(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

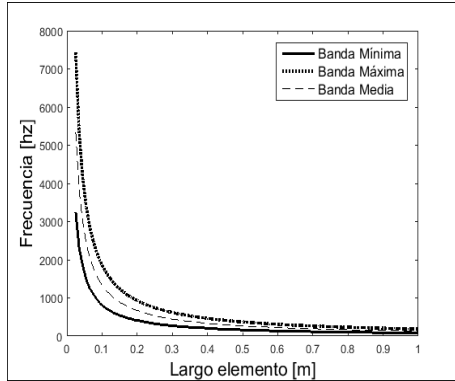
Figura 4.13: Marco, band gap y relación de este último con el largo para  $n_c=8$ .



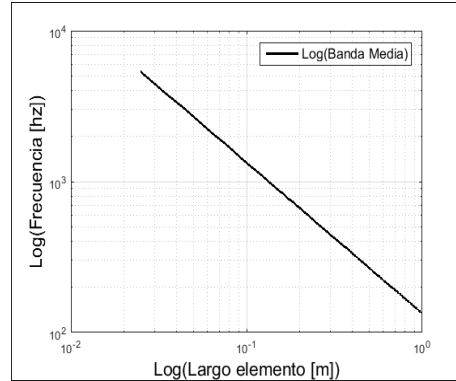
(a) Marco.



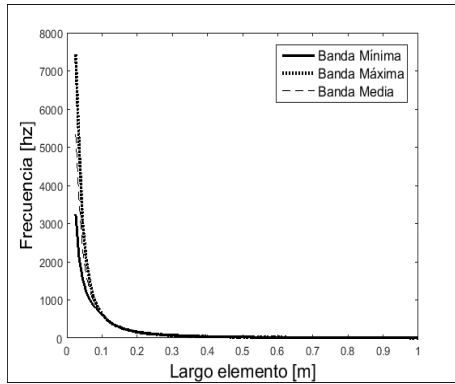
(b) Bandgap.



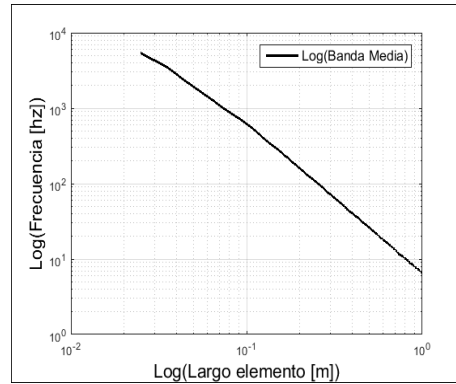
(c) Relación frecuencia con respecto a largo con área escalable.



(d) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas escalables.



(e) Relación frecuencia con respecto a largo con área constantes.



(f) Relación logarítmica entre frecuencia y largo para áreas constantes.

Figura 4.14: Marco, band gap y relación de este último con el largo para  $n_c=10$ .



### 4.5.3. Resumen de resultados de escalamiento

En las Figuras 4.15 y 4.16 se observa un resumen de los resultados obtenidos en este Trabajo de Título, en la Figura 4.15 se ve la relación de  $\omega$  con respecto al largo de la celda básica del reticulado de tipo enrejado, en esta se ve que estas variables en escala loglog tienen una pendiente igual a -1. En esta figura se ve en líneas punteadas que para cierto  $\log(\omega)$  hay 4 geometrías que cumplen con ese requisito, una para cada caso (en teoría se podrían estudiar muchos más casos en donde se obtenga lo mismo), por lo tanto si dejamos el valor de  $n_c$  fijo, tendremos una frecuencia asociada a cada largo, y si fijamos la frecuencia, obtendremos muchas geometrías que cumplen (para cierto largo) con este requisito. De forma análoga, ocurre lo mismo para marcos (Figura 4.16).

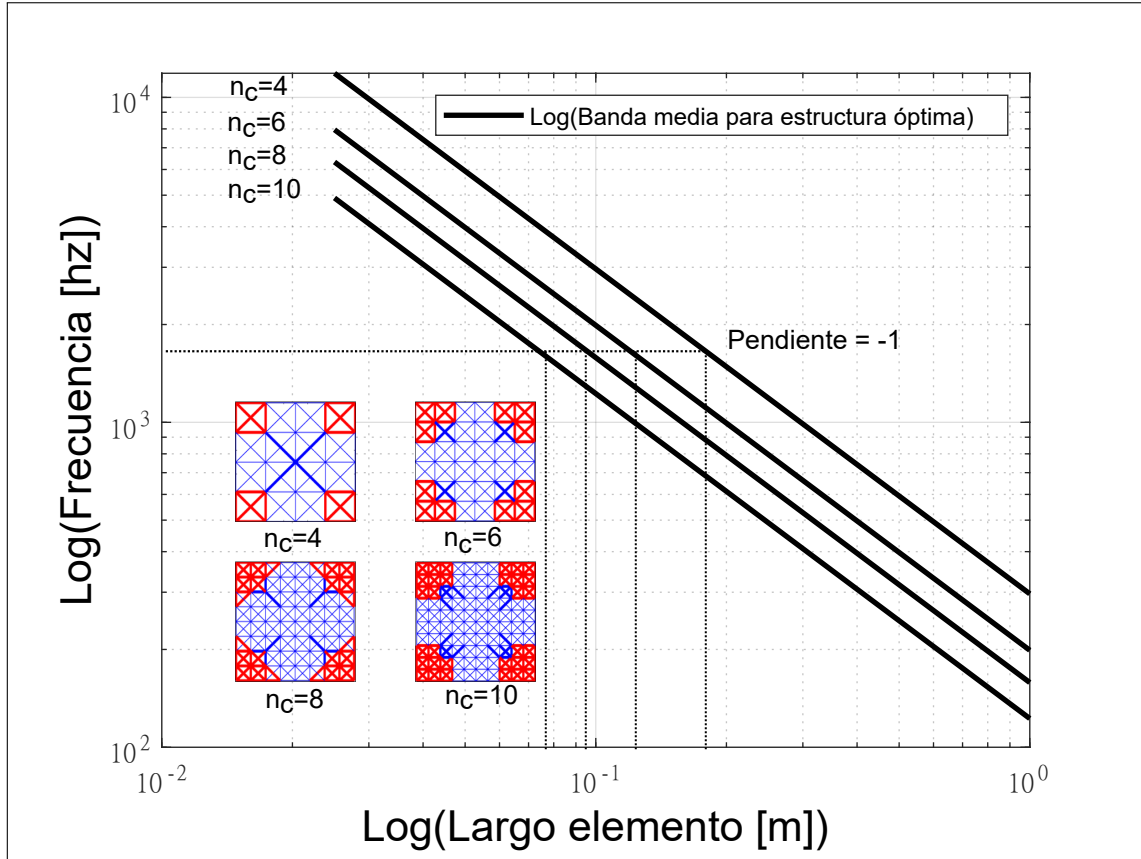


Figura 4.15: Relación entre  $\omega$  y el largo de la celda básica para enrejados con  $n_c=4, 6, 8$  y  $10$ .

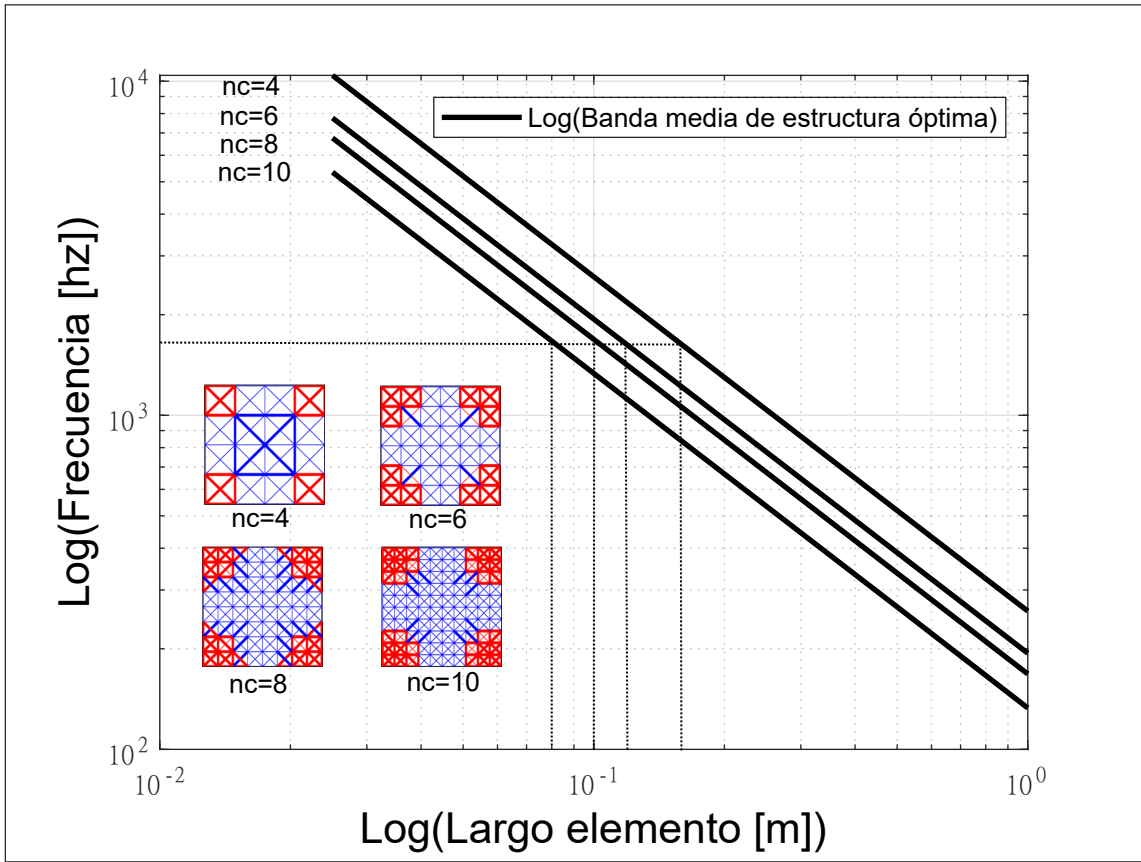


Figura 4.16: Relación entre  $\omega$  y el largo de la celda básica para marcos con  $n_c=4, 6, 8$  y  $10$ .

# Capítulo 5

## Conclusión

Es posible generar ciertas geometrías en reticulados periódicos que permiten producir bandas de frecuencias en las cuales una onda mecánica no pueda propagarse. De esta forma es que podemos crear distintas geometrías de tal forma que generen un band gap que podamos estudiar. De este trabajo se puede concluir lo siguiente:

1. Es posible generar band gap mediante la optimización estructural de enrejados y marcos.
2. Se encuentra una relación de escalamiento. Se determinó que el logaritmo de la frecuencia de la banda media (frecuencia a la cual está sintonizado el band gap) varía de forma lineal con respecto al logaritmo del largo de la celda básica con una pendiente igual a -1 para el caso de enrejados. También se concluye que el área transversal no influye en la relación de escalamiento, ya que independiente del valor de ésta, la pendiente de la recta que define el logaritmo de la frecuencia de la banda media es siempre igual -1. La pendiente también tiene un valor igual a -1 para el caso de marcos, siempre y cuando se considere como constante de escalamiento a  $\alpha$  y la sección transversal sea escalable. En el caso de marcos, el valor de la pendiente sí es dependiente del escalamiento de la sección transversal, cuando esta es constante se tienen distintos valores para los 4 casos vistos (muy cercanos), de valor aproximadamente igual a -1.95.
3. El caso en donde se considera el escalamiento de un marco con área transversal constante, no tiene utilidad en la práctica, ya que su band gap tiende rápidamente a 0.
4. En los casos cuando se normaliza el band gap con respecto a la frecuencia de la banda media, se tiene que para el caso de enrejados estos tienden a formar un band gap normalizado con un valor de aproximadamente 1, teniendo sus rangos de este iguales para todos los casos. Algo similar ocurre con el caso de marcos, en donde el band gap normalizado es cercano a 0.75 para todos los casos en donde  $n_c$  es igual o mayor a 6. Lo más notable de estos casos (tanto para enrejados y marcos) es que el valor sea muy similar siendo que la cantidad de celdas básicas varía, la explicación a esto es que debido a que se amplifica la estructura, la banda de frecuencia aumenta o disminuye en cierta proporción. Por lo tanto las frecuencias de las bandas media para cada enrejados y marcos, deben ser proporcionales a las bandas máximas y mínimas.
5. De las Figuras 4.15 y 4.16 se tiene que para una frecuencia fija, se tendrán una gran cantidad de estructuras que cumplirán con ese requisito. Para un valor de  $n_c$  fijo habrá una relación que nos dice que para cada frecuencia habrá una estructura que cumpla con esta, aumentando o disminuyendo el tamaño de su celda básica.

# Bibliografía

- [1] Quinteros, L., Meruane, V. & Cardoso, E.L. 2021. Phononic band gap optimization in truss-like cellular structures using smooth P-norm approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 63(5): 1-12.
- [2] N. B. Cramer, D. W. Cellucci, O. B. Formoso, C. E. Gregg, B. E. Jenett, J. H. Kim, M. Lendraitis, S. S. Sweig, G. T. Trinh, K. V. Trinh, et al. 2019. “Elastic shape morphing of ultralight structures by programmable assembly,” *Smart Materials and Structures*, vol. 28, no. 5, p. 055006.
- [3] Quinteros L. 2020. Optimización de band gap en paneles sándwich celulares. Memoria de Ingeniero Civil Mecánico y tesis de Magíster en Ciencias de la Ingeniería. Santiago, Chile. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. pp. 3-45
- [4] Pierre A. Deymier. 2013. *Acoustic metamaterials and phononic crystals*. Springer Science & Business Media. Volume 173.
- [5] Ole Sigmund and Jakob Søndergaard Jensen. 2003. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361(1806):1001–1019.
- [6] Guilian Yi, Yong Chang Shin, Heonjun Yoon, Soo-Ho Jo, and Byeng D Youn. 2019. Topology optimization for phononic band gap maximization considering a target driving frequency. *JMST Advances*, 1(1-2):153–159.
- [7] Astudillo S. 2021. Optimización topológica de una panel de metamaterial para la supresión de vibraciones a través de un metamodelo generado por Kriging. Memoria de Ingeniero Civil Mecánico. Santiago, Chile. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. pp. 4-28.
- [8] Leon Brillouin. 2003. *Wave propagation in periodic structures: electric filters and crystal lattices*. Courier Corporation.
- [9] Krister Svanberg. 1987. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2):359– 373.
- [10] Philippe Langlet, Anne-Christine Hladky-Hennion, and Jean-Noël Decarpigny. 1995. Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(5):2792–2800.
- [11] R. T. Haftka and G. Zafer. 1992. “Elements of structural optimization”. Kluwer academic publication.
- [12] Meruane, V. 2016. *Dinámica Estructural Apunte para el curso ME706*. Santiago, Chile.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. pp. 21-32.

- [13] Martin P. Bendsøe and O. Sigmund. 2003. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer.
- [14] I. Psarobas, N. Stefanou, and A. Modinos. 2000. Scattering of elastic waves by periodic arrays of spherical bodies. *Physical Review B*, vol. 62(1): 278
- [15] Paz, M. y Hoon, Y. 2019. *Structural Dynamics, Theory and Computation*. 6<sup>a</sup> ed. Switzerland. Springer. pp. 291-299, pp. 349-352.
- [16] Ole Sigmund and Jakob Søndergaard Jensen. 2003. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 361(1806):1001–1019.

# Anexo A

## Elementos finitos

El Método de Elementos Finitos es una técnica que permite modelar y resolver problemas en sistemas continuos (por ejemplo barras, vigas y placas) mediante un sistema de elementos discretos simplificados y conectados entre si. Son utilizados en este trabajo para modelar el diseño de una celda unitaria constituida de elementos tipo barras o vigas.

Para comenzar el primer paso es discretizar la estructura en un número finito de elementos. Se pueden definir tres familias de elementos (Figura A.1). 1) elementos unidimensionales (línea), 2) elementos bidimensionales (planos) y 3) elementos tridimensionales (sólidos) [12].

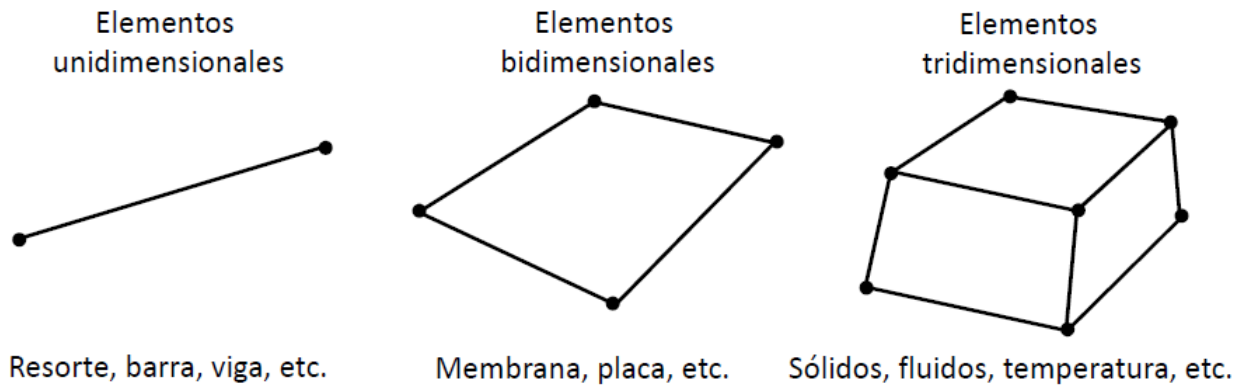


Figura A.1: Tipos de elementos finitos [12].

Se define  $\hat{\mathbf{u}}$  como el vector de desplazamiento nodal,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\epsilon(\mathbf{x})$  y  $\sigma(\mathbf{x})$  como los desplazamientos internos, deformaciones y esfuerzos en el elemento, en función de las coordenadas del elemento  $\mathbf{x}$ .

Los desplazamientos nodales ( $\hat{\mathbf{u}}$ ) se pueden relacionar con los desplazamientos internos ( $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ) mediante la matriz de funciones de forma  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ , que es característica para cada tipo de elemento. De tal forma que estas variables quedan como muestra la Ecuación A.1.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A.1})$$

Una segunda relación es posible, esta se da entre la deformación y el desplazamiento interno, mediante la matriz  $\mathbf{D}$  que es un operador diferencial espacial, esto queda representado

en la ecuación A.2.

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{N}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.3})$$

Las matrices de rigidez ( $\mathbf{K}$ ) y masa ( $\mathbf{M}$ ) de un elemento se calculan respectivamente:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (\text{A.5})$$

En donde:

- $\rho$ : Es la densidad del material.
- $\mathbf{H}$ : Es una matriz con las propiedades del material.
- $\mathbf{V}$ : Es el volumen del elemento.

## A.1. Matrices de rigidez y masa para enrejados planos

A continuación se estudiará lo que ocurre con las matrices de masa y rigidez para el caso de un enrejado plano formado por barras, en el cual un elemento de esta posee dos coordenadas nodales en cada unión (4 en total, Figura A.2) desplazamiento horizontal y vertical.

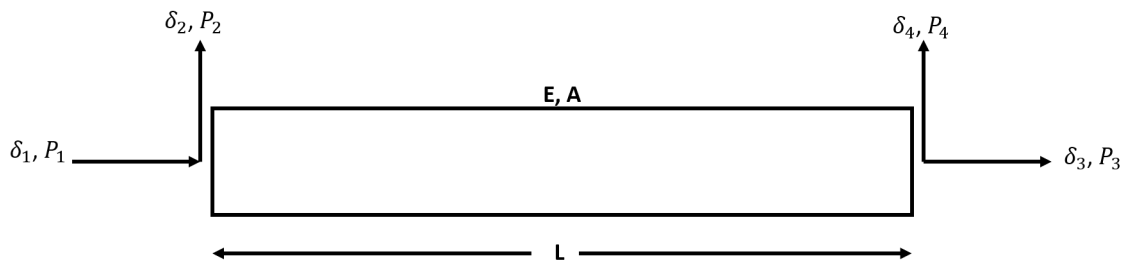


Figura A.2: Elemento de un enrejado plano mostrando los desplazamientos nodales y fuerzas.

Para pequeñas deflexiones, se puede suponer que la relación fuerza-desplazamiento para las coordenadas nodales a lo largo del eje del elemento (coordenadas 1 y 3 en la Figura A.2) son independientes de los desplazamientos transversales a lo largo de las coordenadas nodales 2 y 4. Esta suposición es equivalente a afirmar que un desplazamiento a lo largo de las coordenadas nodales 1 o 3 no produce fuerzas a lo largo de las coordenadas nodales 2 o 4 y viceversa.

Los coeficientes de masa y rigidez correspondientes a las coordenadas nodales axiales están dadas por las Ecuaciones A.6 y A.7, en donde  $\bar{m}(x)$  corresponde a la masa por unidad de largo.

$$k_{ij} = \int_0^L AEu(x)'_i u(x)'_j dx \quad (\text{A.6})$$

$$m_{ij} = \int_0^L \bar{m}(x)u_i(x)u_j(x)dx \quad (\text{A.7})$$

Aplicando las ecuaciones anteriores a un elemento de barra uniforme, obtenemos los siguientes coeficientes:

$$k_{11} = k_{33} = \frac{AE}{L}, \quad k_{13} = k_{31} = \frac{-AE}{L} \quad (\text{A.8})$$

$$m_{11} = m_{33} = \frac{\bar{m}L}{3}, \quad m_{13} = m_{31} = \frac{\bar{m}L}{6} \quad (\text{A.9})$$

Los coeficientes de rigidez, para elementos extremos de pasador, correspondientes a las coordenadas nodales 2 y 4 son todas iguales a cero, ya que no se requiere una fuerza para producir desplazamientos en estas coordenadas. Por lo tanto, ordenando los coeficientes dados por la Ecuación A.8, obtenemos la ecuación de rigidez para un miembro uniforme de un enrejado como:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

O en notación condensada:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}] \{\delta\} \quad (\text{A.11})$$

La matriz de masa consistente se obtiene, como se demostró anteriormente, utilizando expresiones para funciones de desplazamiento estáticos. Las funciones de desplazamiento correspondientes a una deflexión unitaria en las coordenadas nodales 2 y 4 ( Figura A.3) están dadas por:

$$u_2 = 1 - \frac{x}{L} \quad (\text{A.12})$$

$$u_4 = \frac{x}{L} \quad (\text{A.13})$$

Ahora se substituye las Ecuaciones A.12 y A.13 en A.7 obteniendo la Ecuación A.14.

$$m_{22} = m_{44} = \frac{\bar{m}L}{3}, \quad m_{24} = m_{42} = \frac{\bar{m}L}{6} \quad (\text{A.14})$$



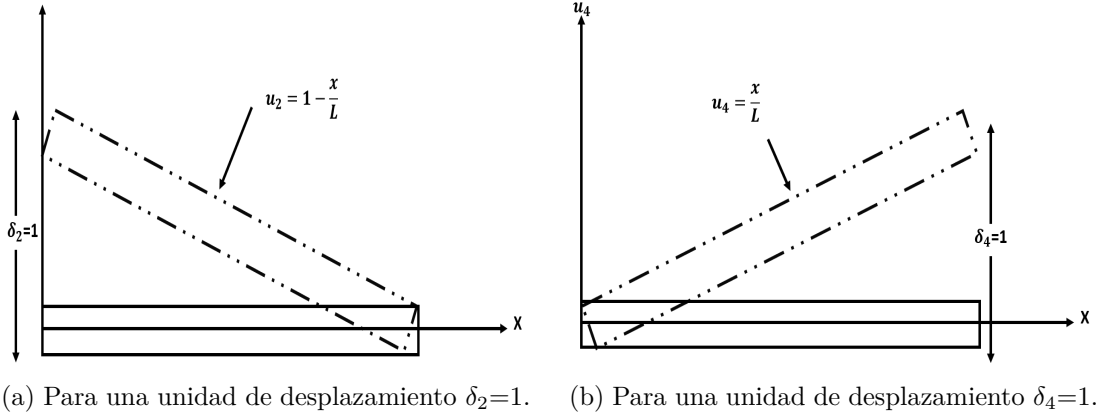


Figura A.3: Funciones de desplazamiento [15].

Finalmente, combinando los coeficientes de masa de las Ecuaciones A.9 y A.14 forman la matriz de masa consistente que relaciona las fuerzas con las aceleraciones en las coordenadas nodales para un elemento uniforme del enrejado plano (Ecuación A.15)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}E}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

O en notación condensada:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{M}] \{\ddot{\delta}\} \quad (\text{A.16})$$

### A.1.1. Transformación de coordenadas

La matriz de rigidez (Ecuación A.10) y la matriz de masas (A.15) se derivaron en referencia a coordenadas nodales asociadas con el sistema de coordenadas locales. Para estructuras, es necesario transformar estas matrices en un sistema común de referencia, el sistema de coordenadas globales. Esta representada en la Ecuación A.17.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

O en notación condensada

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{R}] \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad (\text{A.18})$$

En donde  $\{\mathbf{P}\}$  y  $\{\bar{\mathbf{P}}\}$  son las fuerzas nodales en referencias en coordenadas locales y globales respectivamente, y la matriz  $[\mathbf{R}]$  es la matriz de transformación (conocida también como matriz de rotación). La misma matriz de transformación  $[\mathbf{R}]$  sirve para transformar el vector desplazamiento nodal en sistema de coordenada global  $\bar{\delta}$  al vector coordenada desplazamiento nodal en coordenadas locales  $\delta$ :

$$\{\delta\} = [\mathbf{R}] \{\bar{\delta}\} \quad (\text{A.19})$$

Substituyendo las Ecuaciones A.18 y A.19 dentro de la matriz de rigidez (Ecuación A.10) se obtiene:

$$[\mathbf{R}] [\bar{\mathbf{P}}] = [\mathbf{K}] [\mathbf{R}] \{\bar{\delta}\}$$

Dado que  $[\mathbf{R}]$  es una matriz ortogonal ( $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ ) sigue que:

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{R}] \{\bar{\delta}\}$$

La que puede ser escrita como:

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\bar{\mathbf{K}}] \{\bar{\delta}\} \quad (\text{A.20})$$

En la cual:

$$\{\bar{\mathbf{K}}\} = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{R}] \quad (\text{A.21})$$

Es el elemento de rigidez en el sistema de coordenada globales. Análogamente podemos substituir las Ecuaciones A.18 y A.19 en A.15 y resulta:

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\bar{\mathbf{M}}] \{\bar{\delta}\} \quad (\text{A.22})$$

$$\{\bar{\mathbf{M}}\} = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{M}] [\mathbf{R}] \quad (\text{A.23})$$

## A.2. Matrices de rigidez y masa para marcos planos

La inclusión de fuerzas axiales en la matriz de rigidez de un elemento viga de flexión requiere la determinación de los coeficientes de rigidez para cargas axiales. Para derivar la matriz de rigidez para un miembro cargado axialmente, considere en la Figura A.4 un segmento de viga sobre el que actúan las fuerzas axiales  $P_1$  y  $P_2$  que producen los desplazamientos axiales  $\delta_1$  y  $\delta_2$  en los nodos del elemento. Para un segmento de viga uniforme de longitud  $L$  y sección transversal  $A$ , es relativamente sencillo obtener la relación de rigidez para efectos axiales mediante la aplicación de la Ley de Hooke. En relación con la viga que se muestra en la Figura A.4, los desplazamientos  $\delta_1$  producidos por la fuerza  $P_1$  que actúa en el nodo 1 mientras que el nodo 2 se mantiene fijo ( $\delta_2 = 0$ ) están dados por:

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{AE} \quad (\text{A.24})$$

De la Ecuación A.24 y la definición del coeficiente de rigidez, obtenemos:

$$k_{11} = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{AE}{L} \quad (\text{A.25})$$

El equilibrio del segmento de la viga sobre el que actúa la fuerza ( $k_{11}$ ) requiere una fuerza en el otro extremo de igual magnitud pero en dirección opuesta:

$$k_{21} = -k_{11} = \frac{-AE}{L} \quad (\text{A.26})$$

Análogamente, los otros coeficientes de rigidez debido a un desplazamiento unitario del nodo 2 ( $\delta_2 = 1$ ) son:

$$k_{22} = \frac{AE}{L} \quad (\text{A.27})$$

$$k_{12} = \frac{-AE}{L} \quad (\text{A.28})$$

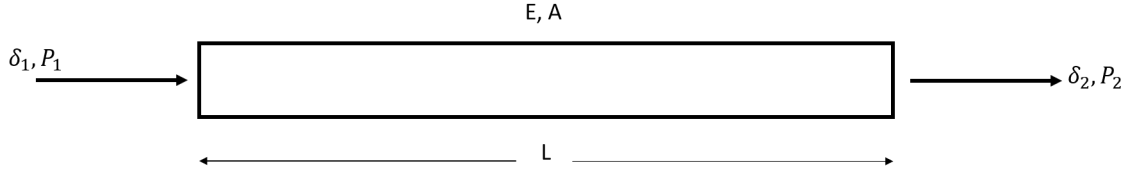


Figura A.4: Elemento de viga mostrando las cargas nodales axiales  $P_1$ ,  $P_2$  y sus correspondientes desplazamientos nodales  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .

Los coeficientes de rigidez dados en las Ecuaciones A.25-A.28 son los elementos de la matriz de rigidez que relacionan las fuerzas axiales y desplazamientos para un segmento de viga, es decir:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

La matriz de rigidez correspondiente a las coordenadas nodales para el segmento de la viga que se muestra en la Figura A.5 se obtiene combinando en una sola matriz, la matriz de rigidez para efectos de axiales, Ecuación A.29, y la matriz de rigidez para efectos de flexión, Ecuación A.30. La matriz resultante de esta combinación relaciona las fuerzas  $P_i$  y los desplazamientos  $\delta_i$  en las coordenadas indicadas en la Figura A.5 como se expresa en la Ecuación A.32.

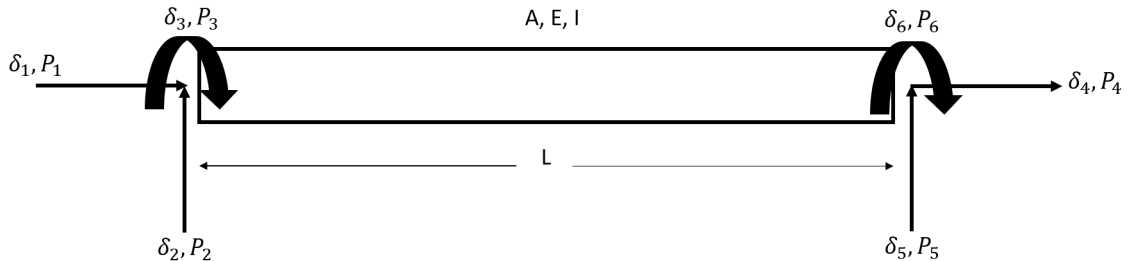


Figura A.5: Elemento de viga mostrando las fuerzas y desplazamientos nodales axiales y de flexión.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

O en notación condensada:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{k}]\delta \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{-AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ \frac{-AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

O en notación condensada:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{K}]\delta \quad (\text{A.33})$$

Ahora para el cálculo de la matriz de masa para un marco plano, se debe combinar la componente axial y de flexión de los coeficientes de masa. Luego para un segmento de viga, la relación entre las fuerzas axiales modales y aceleraciones modales esta dada por la Ecuación A.34 y la matriz que relaciona estas mismas variables pero de flexión es la Ecuación A.35.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Finalmente, combinando la Ecuación A.34 para efectos axiales y A.35 para efectos de flexión, se obtiene la matriz de masa consistente para un elemento de un marco plano en referencia a la Figura A.5 como :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_3 \\ \ddot{\delta}_4 \\ \ddot{\delta}_5 \\ \ddot{\delta}_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

O en notación condensada:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{M}]\{\ddot{\delta}\} \quad (\text{A.37})$$

En donde  $[\mathbf{M}]$  es la matriz de masa consistente para un elemento de marco plano.

### A.2.1. Transformación de coordenadas

La matriz de rigidez A.32 y la matriz de masas A.36 se derivaron en referencia a las coordenadas nodales asociadas con el sistema de coordenadas locales. Para estructuras es necesario transformar estas matrices en un sistema común de referencia, el sistema de coordenadas globales. Esta es representada en la Ecuación A.38.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

O en notación condensada puede ser representada por la Ecuación A.18. Luego la matriz  $\mathbf{R}$  será llamada la matriz de transformación de coordenadas o matriz de rotación. Las Ecuaciones A.19-A.23 son análogas para este caso.

# Anexo B

## Derivadas de las matrices de masa y rigidez para enrejados y marcos planos

### B.1. Derivadas de las matrices de masa y rigidez para enrejado plano

$$\frac{dK}{dx_m} = \frac{(E_2 - E_1)((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1)}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{dK}{dx_a} = \frac{(A_2 - A_1)((E_2 - E_1) \cdot x_m + E_1)}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{dM}{dx_m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{dM}{dx_a} = \frac{(A_2 - A_1)((\rho_2 - \rho_1) \cdot x_m + \rho_1) \cdot L}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

## B.2. Derivadas de las matrices de masa y rigidez para marco plano

$$\frac{dM}{dx_a} = \frac{(A_2 - A_1)((\rho_2 - \rho_1) \cdot x_a + \rho_1) \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & 3L^2 & 0 & -22L & 4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{dM}{dx_m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & 3L^2 & 0 & -22L & 4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dK}{dx_a} = \frac{((E_2 - E_1) \cdot x_m + E_1)}{L^3} \cdot \dots$$

$$\begin{bmatrix} (A_2 - A_1) \cdot L^2 & 0 & 0 & -(A_2 - A_1) \cdot L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \cdot (I_2 - I_1) & 6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 0 & -12 \cdot (I_2 - I_1) & -6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) \\ 0 & 6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 4 \cdot L^2 \cdot (I_2 - I_1) & 0 & -6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 2 \cdot L^2 \cdot (I_2 - I_1) \\ -(A_2 - A_1) \cdot L^2 & 0 & 0 & (A_2 - A_1) \cdot L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 \cdot (I_2 - I_1) & -6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 0 & 12 \cdot (I_2 - I_1) & -6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) \\ 0 & 6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 2 \cdot L^2 \cdot (I_2 - I_1) & 0 & -6 \cdot L \cdot (I_2 - I_1) & 4 \cdot L^2 \cdot (I_2 - I_1) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{dK}{dx_m} = \frac{(E_2 - E_1)((I_2 - I_1) \cdot x_a + I_1)}{L^3} \cdot \dots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L^2}{(I_2 - I_1) \cdot x_a + I_1} & 0 & 0 & -\frac{((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L^2}{(I_2 - I_1) \cdot x_a + I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L^2}{(I_2 - I_1) \cdot x_a + I_1} & 0 & 0 & \frac{((A_2 - A_1) \cdot x_a + A_1) \cdot L^2}{(I_2 - I_1) \cdot x_a + I_1} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$