



**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO INGENIERÍA DE MINAS**

**ESTIMACIÓN GEOESTADÍSTICA DE RECURSOS EN LOS  
RELAVES ABANDONADOS DE LA MINA HAVERI (SUR-  
OESTE DE FINLANDIA)**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN MINERÍA**

**FABIÁN GONZALO SOTO FERNÁNDEZ**

PROFESOR GUÍA:

XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA

MOHAMMADALI MALEKITEHRANI

ANNIKA PARVIAINEN

SANTIAGO DE CHILE

2021

## ABSTRACT

Worldwide and Chilean mining industry produces a big number of tailings which are under public scrutiny due to hazards regarding chemical and physical stability, also due to environmental impact. To counteract this, government guidelines have emerged to reuse tailings deposits for innovative applications, thus transforming them from an environmental liability to an economic asset. A significant part of the tailings in Chile are abandoned (23%) and the availability of information in these cases tends to be scarce. For this reason, to technically and economically assess new uses of tailings, it is necessary to characterize their chemical composition, which can be done using information from drilling campaigns. The estimation of resources in tailings deposits has several complexities: the variability of density in different zones of the deposit, the lack of grades continuity and the difference in scale between the vertical and horizontal dimensions. These features pose a challenge for the geostatistical modeling of this type of deposit.

In this work, the resources of a tailings deposit located in south-western Finland were estimated using three methods: grades cokriging, accumulations cokriging and transitive kriging. The results show that the three methods are accurate in estimating the resources of a tailings deposit, with the accumulations method being the best at estimating the resources, however, this method has lower resolution in the block model than the other two. Transitive kriging, in general terms, performs better than cokriging for 3D grade estimation, showing better predictive power and greater robustness in modeling spatial continuity through the transitive covariogram. Comparisons were made based on the cross-validation method.

Future work within this research line should consider the extension of the transitive kriging theory to the multivariate context to improve its performance, the study of the construction of a regular sampling grid for the covariogram calculation and the integrated modeling of tailings resources incorporating and modeling geological, tonnage and granulometry information.

## RESUMEN

La minería chilena y mundial genera una gran cantidad de relaves mineros, los cuales están bajo el escrutinio público debido a los peligros de la estabilidad química y física, así como por los efectos en el medio ambiente. Para contrarrestar esto, han surgido directrices de los gobiernos para reutilizar los depósitos de relaves en usos innovadores, para de este modo convertirlos de un pasivo ambiental a un activo económico. Una parte significativa de los relaves en Chile se encuentran abandonados (23%) y la disponibilidad de información en estos casos tiende a ser escasa. Es por ello que, para evaluar técnico-económicamente los nuevos usos de los relaves, es necesario caracterizar su composición química, lo que se puede hacer ocupando la información de campañas de sondeos. La estimación de recursos en depósitos de relaves tiene varias complejidades: la variabilidad de la densidad en diferentes zonas del depósito, la poca continuidad de las leyes y la diferencia de escala entre las dimensiones vertical y horizontal. Estas características plantean un desafío para el modelamiento geoestadístico de este tipo de depósitos.

En este trabajo se estimaron los recursos de un relave ubicado al sur-oeste de Finlandia, mediante tres métodos: cokriging de leyes, cokriging de acumulaciones y kriging transitivo. Los resultados muestran que los tres métodos son precisos para estimar los recursos de un depósito de relaves, siendo el método de las acumulaciones el que estima de mejor forma los recursos, sin embargo, este método tiene menor resolución en el modelo de bloques que los otros dos. El kriging transitivo, en términos generales, tiene mejor rendimiento que el cokriging para la estimación de leyes en 3D, mostrando mejor poder predictivo y mayor robustez en el modelamiento de la continuidad espacial a través del covariograma transitivo. Las comparaciones se hicieron en base el método de validación cruzada.

Un trabajo futuro dentro de esta línea de investigación considera la extensión de la teoría del kriging transitivo al contexto multivariable, para mejorar su desempeño, el estudio de la generación de la malla de muestreo regular para el cálculo del covariograma y el modelamiento integral de los recursos de los depósitos de relaves incorporando y modelando información geológica, de tonelajes y granulometría.

## **Agradecimientos**

Quisiera agradecer a todos los integrantes del laboratorio ALGES, quienes me apoyaron siempre y empujaron a terminar esta tesis, especialmente a Álvaro, Felipe, Gonzalo, Marcia y Christian quien me aconsejaron y motivaron en momento cruciales. A Manuel Caraballo y Brian Townley, por quienes inicié mi acercamiento e interés en el estudio de los depósitos de relaves, a Annika Parviainen quien potenció esto, y facilitó los datos para el desarrollo de esta tesis. Al profesor Xavier Emery quien ha sido un gran guía y me ha entregado una formación del más alto nivel en geoestadística.

También agradecer a todos mis compañeros del magíster y de los diplomados del Departamento de Ingeniería de Minas a quienes pude conocer en esta etapa educativa, con especial cariño a mis compañeros extranjeros con quienes forjé grandes amistades. A todas las personas que me apoyaron a iniciar este postgrado.

Finalmente, a toda mi familia que siempre me apoyó, a Melissa y a mi padre que me entregan su amor incondicional siempre.

Agradezco también a ANID en el marco de los proyectos basal PIA AFB180004 y Fondecyt Regular 1170101, a Alejandro Cáceres y Mohammad Maleki por sus valiosos comentarios a este trabajo.

## Tabla de Contenido

1.	Introducción.....	1
1.1.	Problema .....	1
1.2.	Hipótesis .....	3
1.3.	Objetivos.....	3
1.3.1.	Objetivo general .....	3
1.3.2.	Objetivos específicos .....	3
1.4.	Alcances.....	4
2.	Metodología.....	5
3.	Antecedentes.....	6
3.1.	Relaves.....	6
3.2.	Geoestadística probabilística y geoestadística transitiva.....	6
3.2.1.	Geoestadística probabilística .....	6
3.2.2.	Geoestadística transitiva .....	8
3.3.	Estimación de recursos en relaves mineros .....	10
4.	Caso de estudio.....	12
4.1.	Antecedentes del relave de la mina Haveri.....	12
4.2.	Estudio exploratorio de datos .....	13
4.2.1.	Limpieza de datos .....	13
4.2.2.	Ubicación espacial y geometría.....	14
5.	Estimación multivariable de leyes.....	17
5.1.	Variables del estudio.....	17
5.2.	Análisis exploratorio de leyes.....	17

5.3.	Análisis variográfico de leyes .....	19
5.4.	Estimación de leyes mediante cokriging .....	22
6.	Estimación multivariable de acumulaciones .....	25
6.1.	Variables del estudio.....	25
6.2.	Análisis exploratorio de acumulaciones .....	26
6.3.	Análisis variográfico de acumulaciones .....	27
6.4.	Estimación mediante cokriging .....	30
7.	Estimación de leyes mediante kriging transitivo.....	33
7.1.	Variables del estudio.....	33
7.2.	Análisis exploratorio.....	33
7.3.	Análisis covariográfico .....	35
7.4.	Estimación mediante kriging transitivo .....	39
8.	Análisis de resultados y discusión .....	42
8.1.	Comparación de los métodos .....	42
8.2.	Comparación entre kriging probabilístico y transitivo .....	44
8.3.	Kriging probabilístico de cobalto.....	46
8.4.	Comparación de métodos en contexto de acumulación.....	48
8.5.	Recursos del depósito de relave.....	49
9.	Conclusiones y perspectivas.....	59
10.	Bibliografía.....	62
11.	Anexos.....	65

## Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1. Geometría de relave Haveri.....	14
Ilustración 2. Distribución espacial de las muestras de leyes: vista en planta de plata y oro (arriba), vista de perfil para cobre y cobalto (centro) y vista 3D en perspectiva para el hierro .....	15
Ilustración 3. Campañas de perforación y dominio de las leyes .....	16
Ilustración 4. Histogramas de leyes en el relave <i>Haveri</i> .....	18
Ilustración 5. Variogramas experimentales directos de leyes en <i>Haveri</i> .....	20
Ilustración 6. Modelamiento de variogramas directos de leyes en <i>Haveri</i> .....	22
Ilustración 7. Validación cruzada de leyes en <i>Haveri</i> .....	24
Ilustración 8. Histogramas de acumulaciones .....	27
Ilustración 9. Variogramas experimentales directos de acumulaciones en <i>Haveri</i> .....	28
Ilustración 10. Variogramas modelados directos de acumulaciones en <i>Haveri</i> .....	30
Ilustración 11. Validación cruzada de acumulaciones en <i>Haveri</i> .....	32
Ilustración 12. Malla de perforación de las muestras de plata.....	34
Ilustración 13. Malla interpolada mediante vecino más cercano.....	35
Ilustración 14. Covariogramas de leyes en <i>Haveri</i> .....	37
Ilustración 15. Validación cruzada de leyes en <i>Haveri</i> usando kriging transitivo .....	41
Ilustración 16. Correlación entre hierro y cobalto .....	46
Ilustración 17. Variograma de cobalto .....	47
Ilustración 18. Validación cruzada de cobalto.....	47
Ilustración 19. Modelo de bloques para plata y oro estimado con kriging transitivo.....	51
Ilustración 20. Modelo de bloques para cobalto, cobre y hierro estimado con kriging transitivo .....	52
Ilustración 21. Modelo de bloques para plata y oro estimado con cokriging de leyes.....	53
Ilustración 22. Modelo de bloques para cobalto, cobre y hierro estimado con cokriging de leyes .....	54
Ilustración 23. Modelo de leyes bloques de acuerdo con el método de las acumulaciones .	55
Ilustración 24. Curvas de tonelaje para los modelos de bloques construidos mediante cokriging de leyes y kriging transitivo. ....	57

Ilustración 25. Curvas de ley media para los modelos de bloques construidos mediante cokriging de leyes y kriging transitivo. ....	58
Ilustración 26. Variogramas directos de leyes.....	65
Ilustración 27. Variogramas cruzados para la ley plata.....	66
Ilustración 28. Variogramas cruzados para la ley de oro .....	67
Ilustración 29. Variogramas cruzados para la ley de cobre.....	68
Ilustración 30. Variogramas cruzados para la ley de cobalto.....	69
Ilustración 31. Variogramas cruzados para la ley de hierro .....	70
Ilustración 32. Variogramas directos de acumulaciones .....	71
Ilustración 33. Variogramas cruzados para acumulación de plata .....	72
Ilustración 34. Variogramas cruzados para acumulación de oro.....	73
Ilustración 35. Variogramas cruzados para acumulación de cobre .....	74
Ilustración 36. Variogramas cruzados para acumulación de cobalto .....	75
Ilustración 37. Variogramas cruzados para acumulación de hierro.....	76

## Índice de Tablas

Tabla 1. Estadísticas básicas posteriores a la limpieza de datos .....	13
Tabla 2. Estadísticas básicas con datos desagrupados.....	16
Tabla 3 Parámetros del modelo de bloques 3D del relave <i>Haveri</i> .....	17
Tabla 4 Parámetros del variograma experimental de leyes .....	19
Tabla 5 Estructuras para el ajuste del variograma de leyes.....	21
Tabla 6 Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda.....	22
Tabla 7 Estadísticas de la validación cruzada en cokriging de leyes .....	23
Tabla 8 Parámetros del modelo de bloques 3D del relave <i>Haveri</i> .....	25
Tabla 9 Parámetros del variograma experimental de acumulaciones.....	27
Tabla 10 Estructuras para el ajuste del variograma de acumulaciones .....	29
Tabla 11 Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda.....	30
Tabla 12 Estadísticas de la validación cruzada usando acumulaciones .....	31
Tabla 13 Parámetros de la grilla de muestreo regular .....	33
Tabla 14 Parámetros del covariograma experimental de leyes .....	36



Tabla 15 Estructuras para el ajuste del covariograma de Ag .....	38
Tabla 16 Estructuras para el ajuste del covariograma de Au .....	38
Tabla 17 Estructuras para el ajuste del covariograma de Cu.....	38
Tabla 18 Estructuras para el ajuste del covariograma de Co.....	38
Tabla 19 Estructuras para el ajuste del covariograma de Fe .....	39
Tabla 20: Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda para el kriging transitivo ..	39
Tabla 21 Estadísticas de la validación cruzada usando kriging transitivo .....	40
Tabla 22 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre.....	44
Tabla 23 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro .....	44
Tabla 24 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre.....	45
Tabla 25 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro .....	45
Tabla 26 Comparación de validación cruzada para cobalto .....	48
Tabla 27 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre.....	48
Tabla 28 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro .....	49
Tabla 29 Comparación de recursos de plata, oro y cobalto.....	50
Tabla 30 Comparación de recursos de cobre y hierro .....	50

# **1. Introducción**

## **1.1. Problema**

Los relaves, residuos que resultan de los procesos de flotación, son un pasivo ambiental de gran magnitud en la minería. Estos son dispuestos en diferentes configuraciones que pueden ser embalses, tranques, entre otros.

Los relaves han comenzado a tomar mayor relevancia en Chile a partir del 2010 debido a sus altos tonelajes (que van en aumento), la minería se ha acercado a zonas pobladas y a regiones agrícolas. Sumado a lo anterior, hay una fuerte crítica de la comunidad a la minería y con mayor énfasis, hacia los relaves.

Existen diversos riesgos asociados a los relaves, existen problemas de estabilidad física y química, lo que puede conllevar a accidentes catastróficos, existen problemas ambientales asociados, los sulfuros remanentes, usualmente sin valor económico, provocan liberación de acidez y metales debido a la exposición aire y al agua de lluvia. Estos riesgos están pobremente controlados en el caso de los relaves abandonados, puesto que existe menor monitoreo, no hay una entidad responsable y su manejo termina siendo realizado por entidades gubernamentales.

Es por esto, que, en los últimos años, ha tomado fuerza la investigación para dar nuevos usos a los relaves. Estos potenciales usos pueden ser el reprocesamiento de relaves, la elaboración de materiales de construcción y cerámicas, geopolímeros, ente otros.

Cualquier uso planificado y con potencial económico de un relave se verá beneficiado por la caracterización del material presente en éste. La disponibilidad de información puede ser muy variada dependiendo de la historia y contexto de cada depósito. Los relaves pueden estar activos o inactivos, puede existir mucha información de la alimentación desde la operación o esta puede ser muy escasa, muchas veces no se tiene la información del volumen de los depósitos, debido a su antigüedad y a que muchos de estos han sido abandonados (el 23% en Chile [Sernageomin, 2020]).

Cuando no se tiene información de la operación que alimentó un relave, una forma de subsanar esa carencia es realizar campañas de sondajes/pozos sobre el depósito de relave, tal como se realiza en la exploración de yacimientos minerales, el material obtenido de estas

campañas puede ser analizado mediante diferentes tipos de análisis, para obtener leyes elementales, mineralogía, análisis biológicos, entre otros. Adicionalmente, en relaves donde no se tiene conocimiento de la profundidad o topografía del fondo, los pozos también pueden dar luces de su geometría. Con los datos obtenidos a partir de los sondajes es posible elaborar un modelo geoestadístico de los recursos del depósito de relave, sin embargo, se observan ciertos aspectos especiales referentes a la continuidad espacial en los relaves.

Uno de los objetivos principales de las aplicaciones geoestadísticas consiste en predecir la concentración de los elementos de interés en el dominio de estudio. En el ámbito de la evaluación de yacimientos, el dominio en estudio corresponde a un depósito mineral, y las muestras típicamente usadas para realizar la predicción, son los datos que se pueden obtener de los diferentes tipos de análisis de sondajes (análisis químico, mapeo geológico y ensayos metalúrgicos, entre otros). La geoestadística a través del análisis de la continuidad espacial ha generado técnicas para la estimación de recursos minerales. Un relave, a diferencia de un yacimiento mineral, posee diferentes características de continuidad espacial, ya que, ésta depende de la historia de la operación, la dinámica de los materiales dentro del tranque y las reacciones químicas que se producen en él. Sin embargo, la disposición espacial tampoco es completamente al azar, ya que la operación tiene relación con la geología del yacimiento, y la dinámica tanto física y química está controlada por las características mineralógicas de los materiales.

Este trabajo busca proponer un método geoestadístico para la estimación de recursos en tranques de relaves, usando la información de sondajes, considerando las diferencias en la continuidad espacial de los elementos de interés (respecto de un yacimiento tradicional) y la poca información disponible para el estudio de un depósito abandonado.

Desde el punto de vista geométrico y de la continuidad espacial, los relaves mineros tienen la dificultad de que las dimensiones horizontales son mucho mayores que la dimensión vertical [Parviainen 2020], por lo que, tanto el análisis variográfico, como la estimación en esa dirección, se vuelven complejos. Este es un problema similar al que ocurre en la estimación de vetas de oro u otros depósitos angostos [Zuñiga, 2010], y por eso se proponen como alternativa al kriging o cokriging tradicional, la estimación mediante acumulaciones y la estimación mediante kriging transitivo.

## **1.2. Hipótesis**

Es posible estimar los recursos de un relave minero usando métodos basados en geoestadística clásica y/o transitiva con exactitud y precisión.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Estimar los recursos contenidos en un relave minero, usando métodos basados en geoestadística clásica (probabilística) y basados en geoestadística transitiva (determinística).

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Realizar el análisis exploratorio de la base de datos disponible, realizar limpieza de datos y selección de las variables relevantes para el estudio.
- Estimar usando cokriging las leyes de un relave minero.
- Estimar usando cokriging las acumulaciones de un relave minero.
- Estimar las leyes de los elementos de interés en un relave minero usando kriging transitivo.
- Realizar un análisis y comparación de las estimaciones realizadas mediante los tres métodos.

#### **1.4. Alcances**

El estudio fue aplicado a un relave de un yacimiento de oro y cobre que operó entre los años 1942 al 1960. Se tienen mediciones de análisis químicos de dos campañas de sondajes: una de 1980 y otra de 1983. Las variables consideradas en el estudio son: oro, plata, cobalto, hierro y cobre. El relave en cuestión se llama *Haveri* y se encuentra al sur de Finlandia [Parvainen 2020]. Las estimaciones se realizarán usando métodos basados en geoestadística tradicional y transitiva.

Cabe mencionar que la estimación de un relave abandonado tiene varias complejidades:

1. La densidad variable en las diferentes zonas del tranque y complejidades granulométricas.
2. La determinación del volumen del tranque.
3. La poca continuidad de las leyes.
4. Lo angosto de la dimensión vertical respecto de la horizontal.

En este trabajo se abordará solo el tercer y cuarto punto. Los recursos se modelarán usando una densidad fija y un modelo geológico/geométrico ya definido del volumen del tranque para todos los métodos. Otro desafío presente en el modelamiento de recursos de relaves abandonados es la poca información que se tiene disponible y la deficiente calidad de datos. Para este estudio se digitalizaron los análisis de las dos campañas de sondajes mencionadas anteriormente, las cuales se encontraban en documentos escritos a máquina, adicional al uso de herramientas OCR (*Optical character recognition*), se realizó una corrección manual posterior, para validar y corregir la base de datos final y digitalizada.

## 2. Metodología

El objetivo principal de este estudio es estimar los recursos en un relave minero usando métodos basados en geoestadística clásica y transitiva. De esta forma, se evaluarán las ventajas y desventajas de cada método y las condiciones necesarias para su aplicación.

La metodología de estudio consiste en los siguientes pasos:

- 1) Realizar un análisis exploratorio de los datos de sondajes del relave *Haveri*, para limpiar y corregir la base de datos. Este análisis también permite estudiar la distribución global de los elementos de interés, así como su continuidad espacial.
- 2) Realizar la estimación de las leyes de oro, plata, cobalto, cobre y hierro usando cokriging tradicional. Construir el modelo de recursos respectivo en 3D.
- 3) Realizar la estimación de las acumulaciones de oro, plata, cobalto, cobre y hierro usando cokriging tradicional. Construir el modelo de recursos respectivo en 2D.
- 4) Realizar la estimación de las leyes de oro, plata, cobalto, cobre y hierro usando kriging transitivo. Construir el modelo de recursos respectivo en 3D.
- 5) Realizar una comparación de los resultados de los tres métodos de estimación, cuantificando la diferencia entre los estadísticos de la validación cruzada, y analizando las ventajas y desventajas de cada método. Cabe mencionar que dado que el método de estimación por acumulaciones se realiza en un contexto 2D (dominio y muestras) se comparará contra los otros métodos solo a nivel de capacidad predictiva de la variable de respuesta, para esto se usará el coeficiente de correlación por ser un índice y de análisis simple.

Las herramientas computacionales empleadas durante el desarrollo del proyecto fueron los software Octave y ANDES [Soto 2017].

### 3. Antecedentes

#### 3.1. Relaves

La minería chilena y mundial genera una gran cantidad de toneladas de relaves mineros, y debido a esto, existen directivas que apuntan a analizar los depósitos de relaves con el potencial de concretar una minería secundaria en ellos [European Commission, 2018, Ministerio de Minería 2019]. También son objeto discusión en temas medio ambientales y se espera un uso sustentable de ellos. La forma de lograr esto es mediante la reutilización, reciclaje y remediación de depósitos de relaves [De Villiers, 2017; Lottemoser, 2011; Tayebi-Khorami et al. 2019]

#### 3.2. Geoestadística probabilística y geoestadística transitiva

##### 3.2.1. Geoestadística probabilística

El modelamiento de recursos minerales se ha hecho tradicionalmente usando geoestadística probabilística [Matheron, 1970], y el método de interpolación más usado es el kriging, el cual interpreta la variable regionalizada de interés como la realización de una función aleatoria, y para facilitar la inferencia de esta última, asume a menudo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden [Journel, 1986; Deutsch y Journel, 1998]. El kriging se puede extender al contexto multivariable mediante el cokriging [Chilès y Delfiner, 1999; Wackernagel 2003], y de este modo predecir el valor de una variable regionalizada, no solo usando los datos de la misma variable, sino que también aportando información con datos de las covariables.

Para caracterizar las propiedades estructurales de la variable regionalizada, la geoestadística probabilística hace uso de la función covarianza o, equivalentemente, del variograma,

Si denotamos por  $\{x_i \in \mathbf{R}^3, i = 1, \dots, n\}$  las ubicaciones con datos, y por  $\{z(x), x \in D\}$  la variable regionalizada sobre el dominio  $D$ , el variograma teórico se define por [Emery 2020]:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \mathbb{E} \{ [Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2 \}$$

donde  $Z$  representa la función aleatoria asociada a la variable regionalizada  $z$ . Esta función calcula la varianza consistente en los pares de datos separados por un vector  $\mathbf{h}$ . En la práctica, al disponer solamente de una muestra, se calcula un variograma experimental para estimar el variograma teórico, el cual mide la desviación cuadrática promedio entre datos separados espacialmente por un vector  $\mathbf{h}$ :

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2|N_{\gamma}(\mathbf{h})|} \sum_{k \in N_{\gamma}(\mathbf{h})} [z(\mathbf{x}_k) - z(\mathbf{x}_k + \mathbf{h})]^2$$

donde  $\mathbf{x}_k$  y  $\mathbf{x}_k + \mathbf{h}$  representan sitios de medición de la variable regionalizada, y  $N_{\gamma}(\mathbf{h})$  es el número de tales pares de sitios  $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k + \mathbf{h}\}$  disponibles en la muestra. Esta definición es extensible al esquema multivariable reemplazando las varianzas (cuadrados) por covarianzas (productos) entre variables. Cuando las variables involucradas son iguales, se habla de un variograma directo, y cuando son diferentes, de un variograma cruzado.

Ya en el caso general (multivariable), se ajusta un modelo teórico en base a funciones de variograma conocidas (esférica, exponencial, gaussiana entre otras). Esto es necesario porque el variograma experimental es incompleto, no cumple las condiciones matemáticas necesarias y es sensible a los parámetros usados en su cálculo.

Para ajustar un modelo teórico  $G(\mathbf{h})$  a variogramas directos y cruzados, se utiliza un modelo lineal de coregionalización, el que construye  $G(\mathbf{h})$  combinando varias estructuras básicas de la siguiente forma:

$$G(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^s S_i g_i(\mathbf{h})$$

donde  $S_i$  es una matriz simétrica y semi definida positiva con coeficientes de mesetas, y donde  $g_i(\mathbf{h})$  es una estructura básica. A este esquema se le llama construcción mediante estructuras anidadas o modelo lineal de coregionalización.

La última etapa en un modelamiento geoestadístico consiste en la interpolación o estimación de la variable regionalizada en las ubicaciones sin datos, existen varios métodos de estimación, entre ellos el kriging.

El kriging es el mejor interpolador lineal no sesgado, es óptimo en el sentido de la varianza de error mínima. Este estimador toma en cuenta la distancia a los sitios a estimar, la redundancia de los datos y la continuidad espacial a través del variograma.



El kriging simple considera la media global conocida, y el kriging ordinario no supone esta media conocida, y es capaz de modelar variables en donde la media es localmente constante, pero variable en el espacio global.

La extensión al caso multivariable se denomina cokriging y hace uso del modelo de lineal de coregionalización para modelar la continuidad espacial. Un aspecto importante del cokriging es que, al incorporar covariables, mejora la predicción, tanto individual, como conjunta de las variables de interés (conserva mejor que el kriging las relaciones entre variables).

El kriging o cokriging tiene las siguientes propiedades:

- 1) Interpolación exacta: la estimación en un sitio con medición es igual a la medición en dicho sitio.
- 2) Insesgo: la esperanza del error de estimación es cero.
- 3) Precisión: el error de estimación tiene varianza mínima.
- 4) Aditividad: el kriging del valor promedio de una región es el promedio de las estimaciones puntuales en esa región.

El kriging también entrega una varianza del error, la cual depende de la geometría de la malla de muestreo. Sin embargo, ésta no siempre es una buena medida de la incertidumbre de la predicción, puesto que, no considera la variabilidad intrínseca de la variable regionalizada [Armstrong 1994; Journel 1993].

### **3.2.2. Geoestadística transitiva**

Otra rama de la geoestadística, mucho menos conocida, es la geoestadística transitiva [Matheron 1970; Alfaro y Miguez 1976; Rivoirard 2005]. En ella se modela la variable regionalizada conjuntamente a su dominio, dicho de otro modo, se modelan conjuntamente las leyes y la geometría del dominio en estudio, sin pasar por una interpretación en términos de función aleatoria. En su versión inicial, la geoestadística transitiva busca caracterizar la variable de interés con un valor representativo del campo completo: para ello toma como objetivo la abundancia, la cual se define de la siguiente forma:

Si  $z(x)$  es la variable regionalizada sobre un dominio  $D$ , se define la abundancia  $q$  como:

$$q = \int_D z(x) dx$$

para el caso de las leyes, la abundancia representaría la cantidad de metal contenido en el yacimiento o dominio en estudio. Como convención, se extiende la variable fuera del dominio D, rellenando con ceros. Bajo el formalismo matemático el problema de estimación global con el que se desarrolla la geoestadística transitiva es estimar la abundancia de la variable regionalizada con los datos de las mediciones en sitios particulares del dominio.

La geoestadística transitiva, en vez del variograma, hace uso del covariograma transitivo [Rivoirard et al 2000], y a través de él, estudia las características estructurales de la variable regionalizada  $z(x)$ . Para un vector de separación  $h$  se define el covariograma como:

$$g(h) = \int_D z(x)z(x+h)dx = \int z(x)z(x+h)dx$$

La integral se puede calcular sobre todo el dominio o incluso sobre todo el espacio, ya que la variable se anula fuera del dominio.

El covariograma experimental es difícil de calcular en el caso general, sin embargo, en la presencia de un muestreo regular, la fórmula se simplifica y queda de la siguiente manera:

$$\forall \eta, \nu, \lambda \in \mathbb{Z}, \quad \hat{g}(\eta a + \nu b + \lambda c) =$$

$$|a||b||c| \sum_{k,l,m} z(x_0 + ka + lb + mc)z(x_0 + ka + lb + mc + \eta a + \nu b + \lambda c)$$

considerando una grilla con origen en  $x_0$  y con longitudes  $|a|, |b|, |c|$  en el espacio 3D.

El covariograma se modela análogamente al variograma, con la diferencia de que las estructuras básicas que se anidan son covarianzas.

Del mismo modo que se deducen las ecuaciones del kriging simple y ordinario, es posible deducir las ecuaciones del kriging transitivo simple y ordinario, destinado a estimar la variable regionalizada en cualquier posición del espacio [Alfaro y Miguez 1976; ; Rivoirard et al 2000, Rivoirard 2005]. De hecho, las ecuaciones son formalmente idénticas, pero usando el covariograma transitivo en lugar del variograma.

De esta manera el kriging transitivo tiene las siguientes propiedades:

- 1) Interpolación exacta: La estimación en un sitio con medición es igual a la medición en dicho sitio.
- 2) Suavizamiento: la dispersión de los valores estimados es menor que la de los valores reales (desconocidos).

Es conveniente remarcar una diferencia entre el enfoque probabilístico y transitivo: este último no introduce ninguna hipótesis sobre la variable regionalizada (salvo que se anula fuera del dominio), y por tanto se puede usar en un marco no estacionario. Otra diferencia notable es el paso de una metodología basada en medias o esperanzas (en la herramienta estructural, siendo la covarianza la esperanza de un producto, y en el criterio de optimalidad del kriging, donde se minimiza la esperanza del error cuadrático) a una metodología basada en sumas (el covariograma transitivo es ahora la suma de productos, y el kriging transitivo busca minimizar la suma de los errores cuadráticos). En casos de dominios angostos en alguna de las direcciones del espacio, la inferencia de una media resulta generalmente mucho menos robusta que la inferencia de una suma, lo cual motiva el uso de la geoestadística transitiva en la evaluación de vetas [Renard et al. 2013] o de relaves mineros, como en la presente tesis.

### **3.3. Estimación de recursos en relaves mineros**

Pocos son los trabajos a la fecha, referentes al modelamiento geoestadístico para la estimación de recursos en depósitos de relaves mineros. La mayoría de ellos, abordan la problemática con una mirada simple, y no innovan en la aplicación de la geoestadística. Tuhafeni [Tuhafeni 2016] estima elementos de valor y contaminantes usando inverso de la distancia, Muthavhine [Muthavhine 2017] realiza la estimación mediante kriging directo de leyes sobre relaves de platino, *Alexco Resource Corporation* [SRK Consulting, 2008] estimó elementos de valor en un relave de una mina de plomo y zinc usando la misma aproximación. Para el caso de Chile, hay un estudio de la estimación de dos relaves en Tal Tal [Tripodi 2019], sin embargo, el modelamiento geoestadístico también se reduce al kriging y no se dan detalles de ninguna validación estadística del modelo. Ninguno de los trabajos antes mencionados realiza la estimación con variables alternativas u ocupando métodos de estimación más avanzados (geoestadística multivariable). Un trabajo que aplica geoestadística probabilística avanzada a través de la simulación multigaussiana es el de [Wilson 2021], en cual se simulan 12 elementos de interés en un depósito de relave en Tal Tal cuantificando la incertidumbre geológica y se analizan los modos de operación de un sistema de simulación por eventos discretos. Nadie ha aplicado geoestadística transitiva para la estimación de recursos en relaves mineros.

Un trabajo interesante de examinar es el reporte técnico de GSWG [Cosia geostatistical and deposit sampling working group, 2015], en el cual, se establece una metodología para predecir finos y sólidos en desechos de hidrocarburos con “confiabilidad razonable”. A diferencia de los trabajos anteriores, se analiza además el espaciamiento de las muestras y el propósito principal es recomendar una nueva campaña de muestreo. Cabe mencionar que este trabajo fue desarrollado en el ámbito de los hidrocarburos, disciplina que tiene sus propias complejidades diferentes a las de la minería.

Uno de los casos emblemáticos de reprocesamiento de relaves mineros, es el de la compañía Minera Valle Central, que reprocesa una mezcla de relaves frescos desde la mina El Teniente, y relaves antiguos desde el tranque Cauquenes [Henderson 2018], en su caso también realizan la estimación de los recursos del relave con métodos tradicionales.

## 4. Caso de estudio

### 4.1. Antecedentes del relave de la mina Haveri

La magnitud de los relaves presentes en Chile es muy grande. A la fecha existen 742 depósitos de relaves, 106 activos, 463 inactivos y 173 abandonados, la mayor parte de los relaves se encuentran en el Norte Chico [Sernageomin, 2020]. Uno de los ejes principales del “Plan Nacional de Depósitos de Relaves para una Minería Sostenible” es la economía circular e innovación. Dentro de ese contexto, se busca fomentar el reprocesamiento y reutilización de los depósitos de relaves [Ministerio de minería, 2019].

El problema del manejo de relaves es global, particularmente en Finlandia han operado 418 minas entre los años 1520 y 2001, produciendo una gran cantidad de material en depósitos de relaves. Entre ellos se encuentra la mina de cobre-oro *Haveri*, que operó entre 1942 y 1960, dejando 1.559 Mt de relaves [Puustinen, 2003]. Estos relaves corresponden al caso de estudio de este trabajo.

Los datos usados en el presente trabajo fueron compilados en base a investigaciones previas [Parviainen, 2009; Kokkola, 1982, 1986]. Se consideraron dos campañas de sondajes, realizadas en el tranque de relave, una en 1980 y otra en 1983. Estas campañas exploratorias se componen de **165** sondajes verticales y un total de **1.201** muestras, los sondajes fueron compositados cada 1 metro, ya que la mayor parte de las muestras tenía esa longitud, salvo los tramos finales en algunos pozos, cuya longitud es menor a un metro.

Cada dato presenta información de su coordenada geográfica (este, norte y distancia al collar del sondaje), el identificador del sondaje, desde dónde hasta dónde corresponde el compósito, oro, plata, cobalto, cobre y hierro. La base de datos es homotópica, es decir, posee estas mediciones en todas las muestras. La profundidad máxima de los sondajes llega a los 9 metros y la malla es regular en la parte central del relave.

No se dispone de información de la topografía en el tiempo de la campaña del relave, por lo que se simplificó dicha topografía y se modeló considerando una topografía superior equivalente al plano con elevación igual a cero.

En las siguientes secciones se expone el modelamiento geoestadístico de los elementos de interés en el relave: cokriging de leyes, cokriging de acumulaciones y kriging transitivo.

## 4.2. Estudio exploratorio de datos

El objetivo de esta etapa del estudio es tener una visión lo más detallada de los datos disponibles. Los aspectos que se deben revisar en esta etapa son: la calidad y representatividad de los datos, el soporte de las muestras, la precisión, la eliminación o corrección de datos erróneos y la delimitación del dominio de estudio.

### 4.2.1. Limpieza de datos

La limpieza de datos consiste en detectar errores e inconsistencias en la base de datos, éstos pueden ser errores en las mediciones, datos duplicados, errores de transcripción, entre otros.

Para la base de datos de sondajes de *Haveri*, se encontraron errores referentes a tramos de muestreo duplicados. En todos los casos, la diferencia entre las mediciones era mínima y se escogió la muestra con una mayor precisión (más decimales en el documento de muestras). También se eliminaron por completo cuatro pozos duplicados.

Con lo anterior, se pasó de tener de 1.201 datos a 1.114 datos. Además, en la Tabla 1 se indican las variables de interés para este estudio y las principales estadísticas.

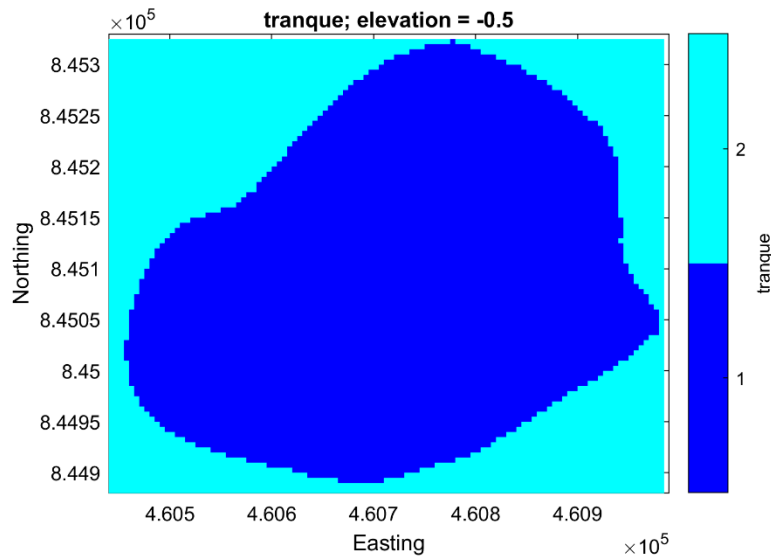
No se identificaron datos extremos en ninguna de las variables del estudio. Sin embargo, para la campaña de 1980 se observó que las leyes de plata tenían muy poca precisión. De todos modos, se prefirió utilizar estos datos tal cual, para no perder información relevante. En la Tabla 1 se presentan las estadísticas básicas de los datos finales.

**Tabla 1. Estadísticas básicas posteriores a la limpieza de datos**

	Ag(ppm)	Au(ppm)	Co(ppm)	Cu(ppm)	Fe(%)
<b>Media</b>	3.22	1.13	144	934	10.02
<b>Desviación estándar</b>	0.81	0.7	103	400	2.16
<b>Rango</b>	7.00	7.94	1219	3471	14.22
<b>Mínimo</b>	1.00	0.02	3	89	2.79
<b>Máximo</b>	8.00	7.96	1222	3560	17.01

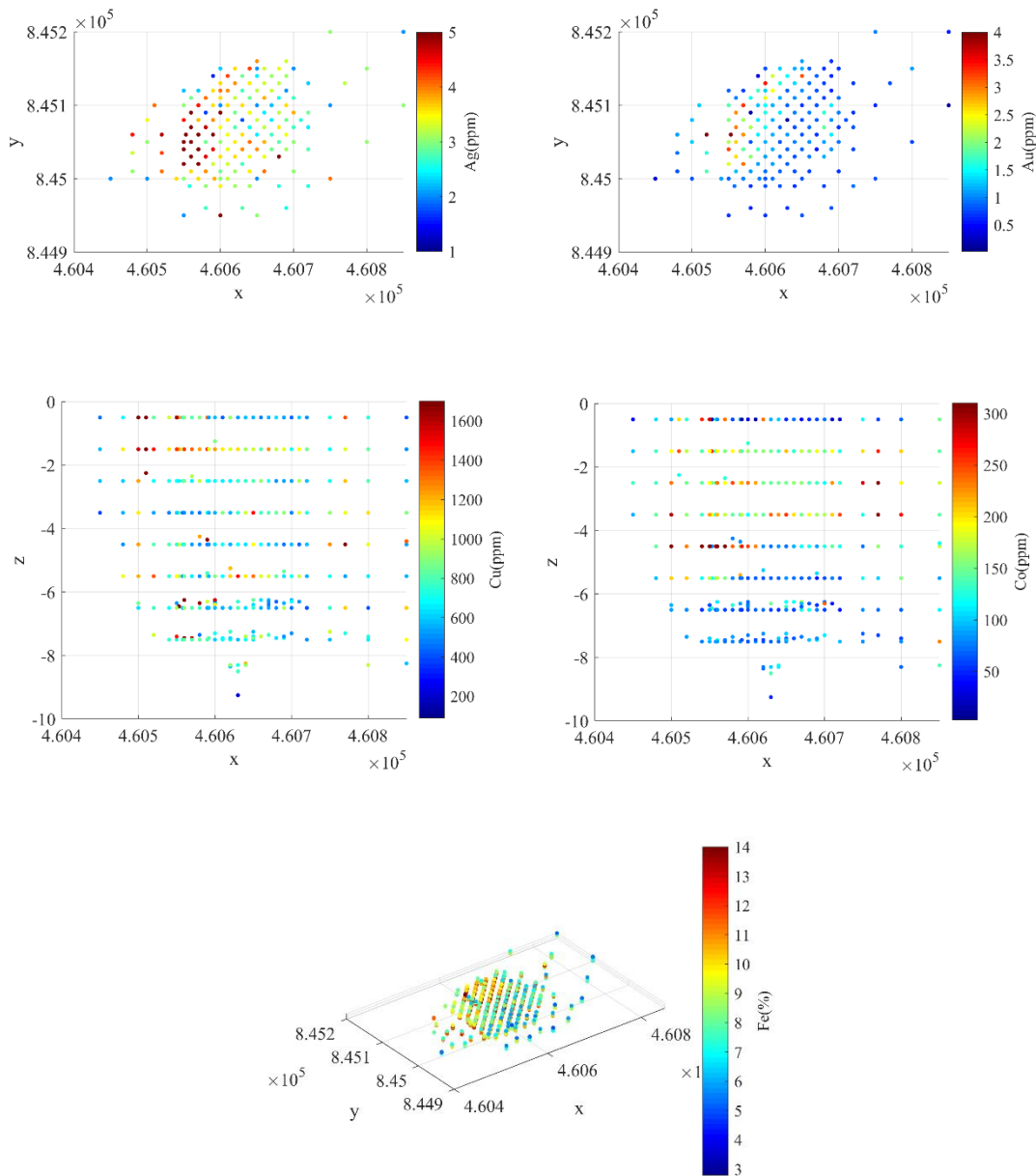
#### 4.2.2. Ubicación espacial y geometría

El dominio en estudio tiene dimensiones de 540 metros en la dirección este-oeste, 440 metros en la dirección norte-sur y 10 metros en la vertical. El volumen correspondiente al tranque se tiene de antemano, mediante un modelo geométrico previo, y se usa como el dominio en el cual las leyes del estudio tienen valores mayores a cero. En la Ilustración 1 se observa una planta en la que se puede apreciar la geometría del tranque (en azul oscuro).



**Ilustración 1. Geometría de relave Haveri**

Una vez hecha la limpieza de la base de datos, quedan 161 pozos, completando 1.114 muestras en total. En la Ilustración 2 se despliegan la ubicación espacial de las muestras y la distribución de las cinco leyes en diferentes vistas.



**Ilustración 2. Distribución espacial de las muestras de leyes: vista en planta de plata y oro (arriba), vista de perfil para cobre y cobalto (centro) y vista 3D en perspectiva para el hierro**

Tal como se aprecia en la Ilustración 2, existe una zona de muestreo preferencial, muy denso en los cuadros centrales, y escaso hacia los bordes. Por lo cual se recalculan las estadísticas aplicando un desagrupamiento de los datos por el método de las celdas con tamaños de  $100\text{m} \times 100\text{m} \times 10\text{m}$ .

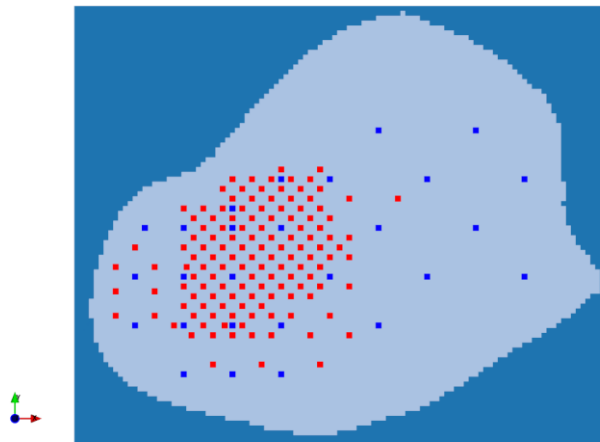


**Tabla 2. Estadísticas básicas con datos desagrupados**

	<b>Ag(ppm)</b>	<b>Au(ppm)</b>	<b>Co(ppm)</b>	<b>Cu(ppm)</b>	<b>Fe(%)</b>
<b>Media</b>	2.89	0.83	132	818	8.77
<b>Desviación estándar</b>	0.85	0.6	78	381	2.25
<b>Rango</b>	7.00	7.94	1219	3471	14.22
<b>Mínimo</b>	1.00	0.02	3	89	2.79
<b>Máximo</b>	8.00	7.96	1222	3560	17.01

Se puede observar en la Tabla 2, que todas las medias disminuyeron, lo que se explica por un muestreo preferencial del sector con mayores leyes.

El dominio de las variables del estudio está definido por el modelo del tranque descrito en la Ilustración 1, la relación del dominio y la malla de muestreo se expone en la Ilustración 3, en azul se muestran los sondajes efectuados en la campaña de 1980, y en rojo los realizados en el año 1983.



**Ilustración 3. Campañas de perforación y dominio de las leyes**

## 5. Estimación multivariable de leyes

### 5.1. Variables del estudio

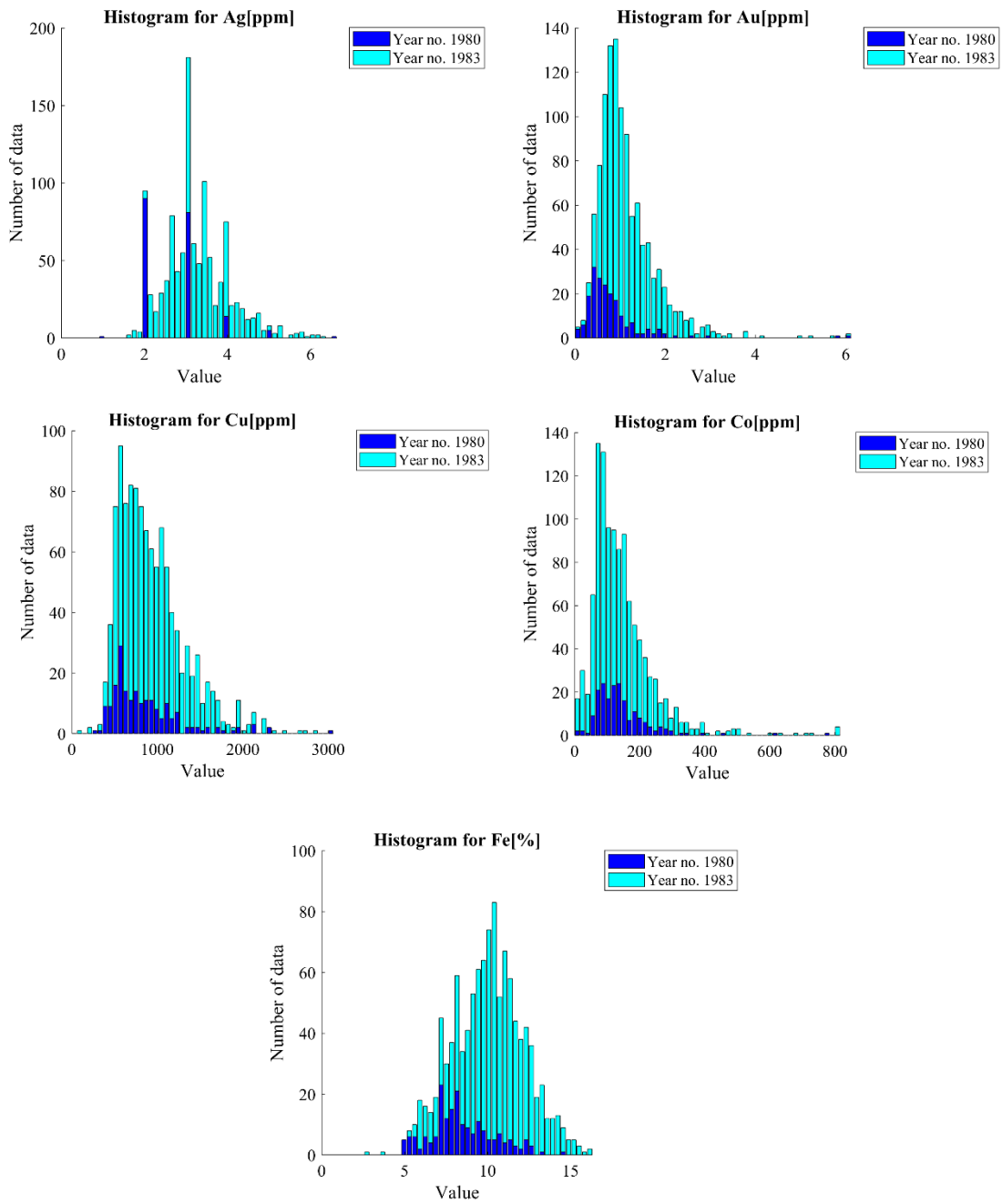
Para el primer método las variables a modelar en el yacimiento son: las leyes de oro, plata, cobre, cobalto y hierro. El modelamiento se hace usando como muestras los datos compositados a un metro en la vertical sobre un **dominio 3D**, el cual corresponde al modelo de bloques definido por los parámetros de la Tabla 3 y delimitando la zona del tranque por el volumen geométrico descrito en la sección anterior.

**Tabla 3 Parámetros del modelo de bloques 3D del relave *Haveri***

	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
<b>Origen</b>	460.440 m	844.880 m	-9.5 m
<b>Tamaño de bloque</b>	5 m	5 m	1 m
<b>Nodos</b>	110	90	10

### 5.2. Análisis exploratorio de leyes

En el análisis exploratorio de datos no se encontraron anomalías, por lo que no se hicieron modificaciones a la base de datos del estudio. Cabe recordar, que se vieron valores pocos precisos para las leyes de plata para la campaña de 1980, los que se pueden apreciar en color azul oscuro en la Ilustración 4. Sin embargo, se decidió trabajar con estos datos en virtud de no mermar la cantidad de datos disponibles para la estimación mediante cokriging.



**Ilustración 4. Histogramas de leyes en el relave *Haveri***

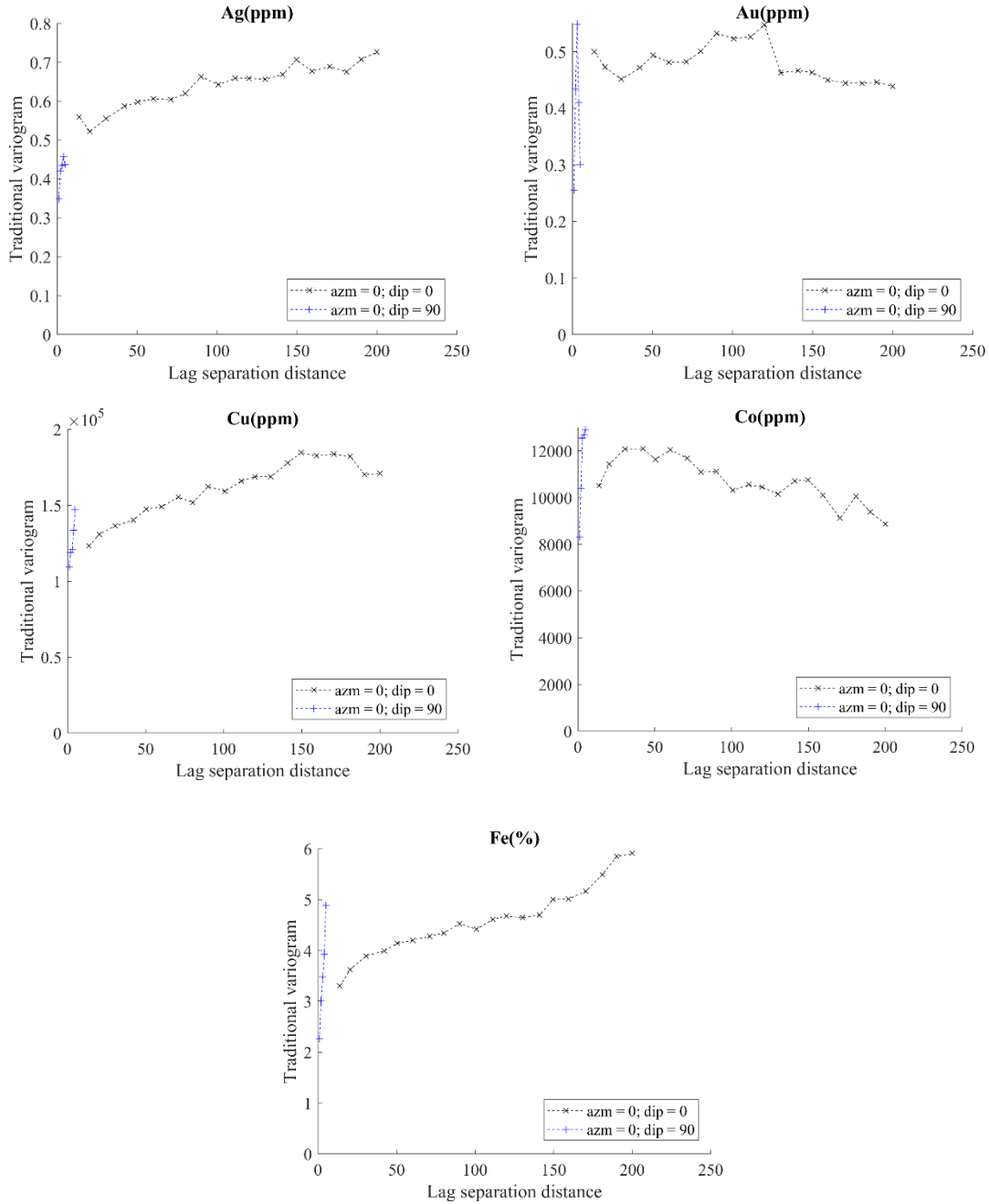
### 5.3. Análisis variográfico de leyes

Los variogramas experimentales muestran la poca continuidad espacial de las leyes, sobre todo en la vertical, en donde se aprecia un alcance mínimo. En la horizontal la continuidad sigue limitada, pero mayor, con un alcance cercano a 45 metros en todos los casos. La plata, el cobre y el hierro presentan la forma curvada esperada para un variograma hasta los 100 metros aproximadamente, mientras que el cobalto y el oro presentan un comportamiento errático a partir de los 20 metros con valores cercanos a la varianza (Ilustración 5). En la Tabla 4 se muestran los parámetros del cálculo para el variograma experimental.

**Tabla 4 Parámetros del variograma experimental de leyes**

	Variograma horizontal	Variograma vertical
<b>Azimut (°)</b>	0	0
<b>Tolerancia de Azimut (°)</b>	90	15
<b>Dip (°)</b>	0	90
<b>Tolerancia de dip (°)</b>	15	15
<b>Lag (m)</b>	20	1
<b>Tolerancia de Lag (m)</b>	15	0.5
<b>Número de Lags</b>	10	5

Por razones de foco y presentación, en los análisis variográficos multivariados, se expondrán solo los variogramas directos, el detalle de los variogramas cruzados está presente en los anexos.

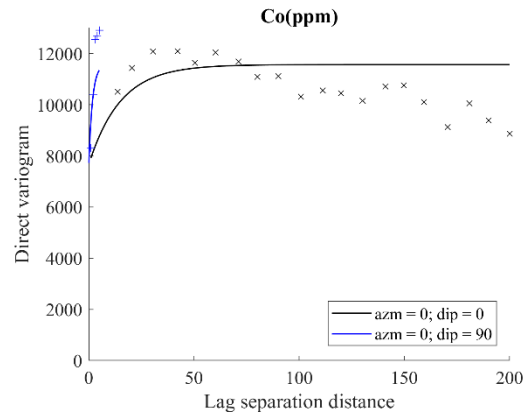
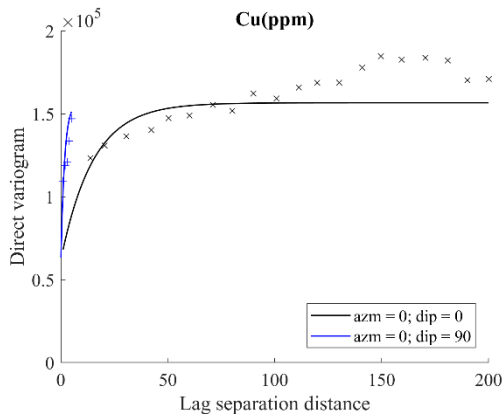
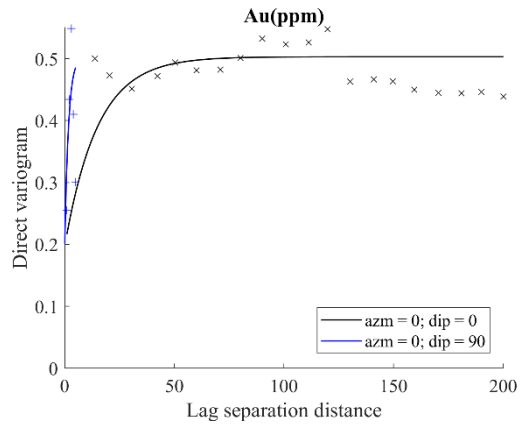
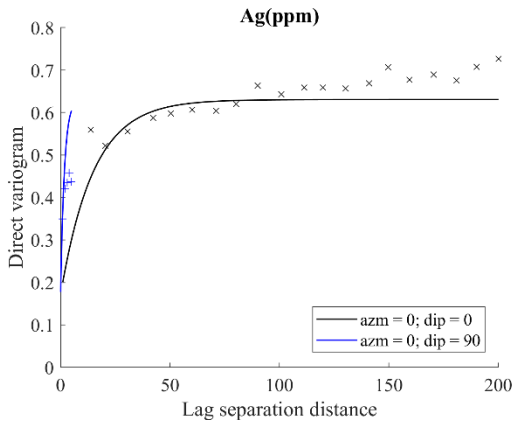


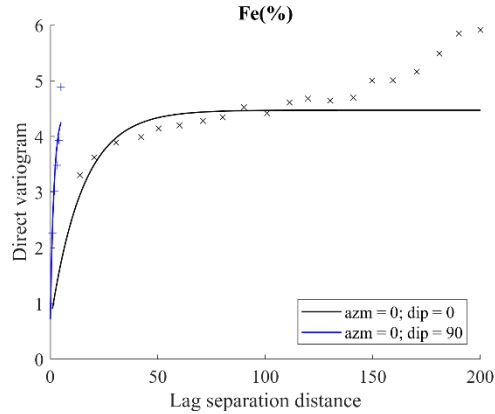
**Ilustración 5. Variogramas experimentales directos de leyes en *Haveri***

Debido al comportamiento uniforme de las variables, se modeló el depósito usando una sola estructura. Cabe mencionar, que la vertical se modeló con un criterio más bien de tendencia, ya que su posición es muy errática y diferente en las respectivas leyes. La meseta y el efecto pepita fueron ajustados por mínimos cuadrados. En la Tabla 5 se muestran los parámetros de las estructuras y en la Ilustración 6 se puede observar el ajuste gráficamente.

**Tabla 5 Estructuras para el ajuste del variograma de leyes**

<b>Estructura</b>	
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial
<b>Alcance horizontal (m)</b>	45
<b>Alcance vertical (m)</b>	5.2





**Ilustración 6. Modelamiento de variogramas directos de leyes en *Haveri***

#### 5.4. Estimación de leyes mediante cokriging

La estimación se efectuó mediante cokriging ordinario, la verificación del modelo se realizó con validación cruzada. Los parámetros de la vecindad de búsqueda se muestran en la Tabla 6, se usaron 30 datos por octante.

**Tabla 6 Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda**

	<b>Radio en Y</b>	<b>Radio en X</b>	<b>Radio en Z</b>
<b>Radio (m)</b>	300	300	10

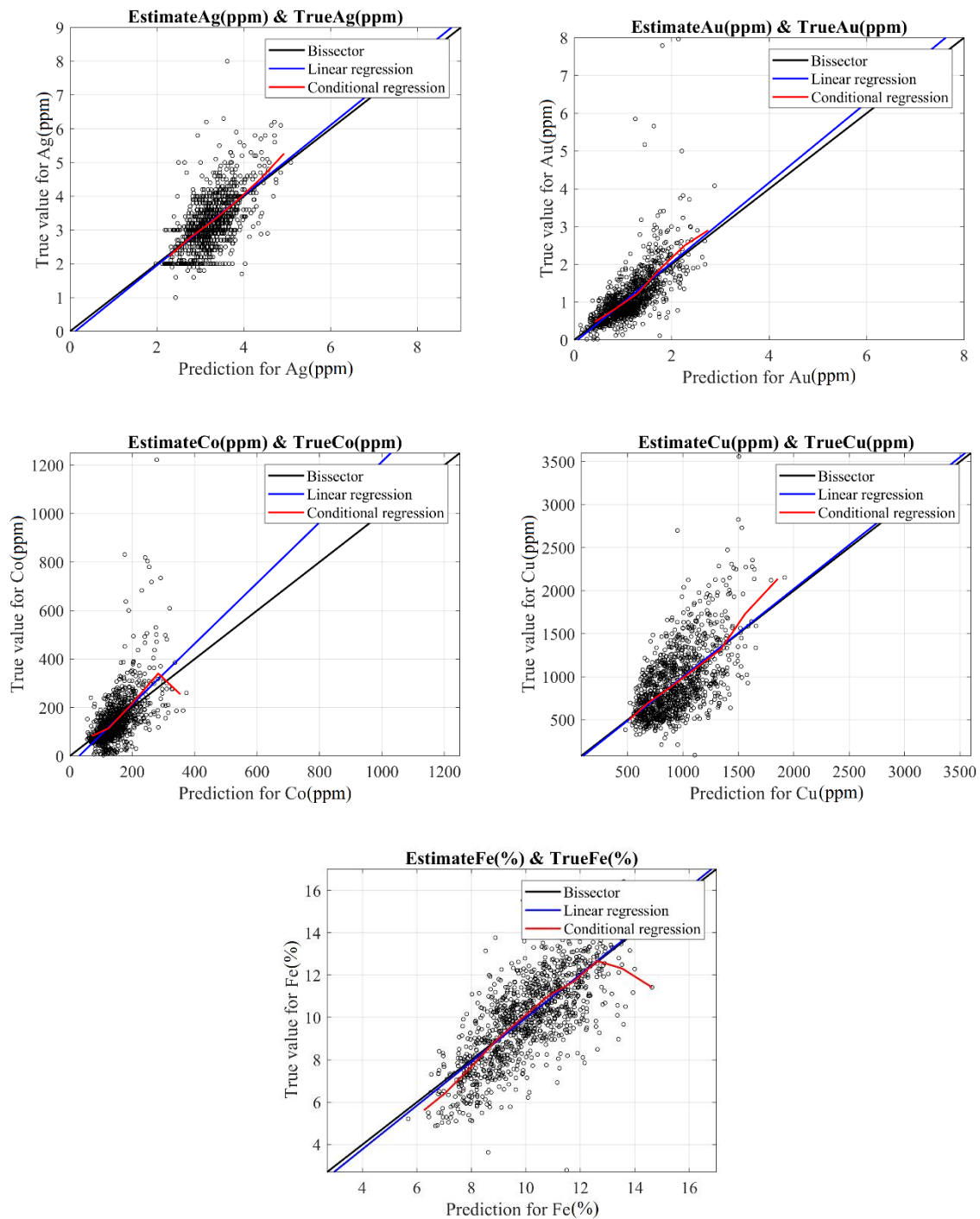
La validación cruzada muestra un buen desempeño para todas las variables (Ilustración 7), salvo para el cobalto, en la cual se puede apreciar que hubo varios valores altos que fueron fuertemente subestimados. En la Tabla 7, se pueden apreciar las estadísticas de la validación cruzada, donde se observa una fluctuación en la variable cobalto (media del error de -0.718 ppm). Cabe mencionar que la media del error de cobre se ve aparentemente alta, sin embargo, es importante considerar que la escala en la que se trabajó es partes por millón, y que la media asociada es de 934(ppm). Por otro lado, el error estandarizado evita estas distorsiones debidas al rango y valor promedio de la variable original. En este caso error estandarizado tiene media cercana a cero y desviación estándar cercana a uno, con lo cual se tiene una buena cuantificación del error y no se aprecia sesgo global.

**Tabla 7 Estadísticas de la validación cruzada en cokriging de leyes**

	<b>Ag(ppm)</b>	<b>Au(ppm)</b>	<b>Co(ppm)</b>	<b>Cu(ppm)</b>	<b>Fe(%)</b>
<b>Media del error</b>	0.000	-0.008	-0.718	-1.617	-0.031
<b>Desviación estándar del error</b>	0.635	0.508	82.947	318.678	1.464
<b>Media del error estandarizado</b>	-0.001	-0.013	-0.006	-0.004	-0.011
<b>Desviación estándar del error estandarizado</b>	0.972	0.855	0.822	0.934	0.901
<b>Coefficiente de correlación múltiple</b>	0.618	0.688	0.608	0.605	0.736

Se muestran las nubes de correlación (Ilustración 7) entre valores obtenidos por cokriging (eje horizontal) y valores reales (eje vertical), junto con la línea diagonal (negra), la regresión lineal (azul) y la regresión condicional (roja). Esta última regresión es cercana a la diagonal, salvo a veces en las partes con pocos valores estimados, lo que indica la ausencia de sesgo global o condicional del cokriging.





**Ilustración 7. Validación cruzada de leyes en *Haveri***

## 6. Estimación multivariable de acumulaciones

### 6.1. Variables del estudio

Para el segundo método, las variables a modelar en el depósito del relave son: las acumulaciones de oro, plata, cobre, cobalto y hierro. El modelamiento se hace usando como muestras la acumulación vertical sobre cada sondaje en un **dominio 2D**, el cual corresponde al modelo de bloques definido por los parámetros de la Tabla 8 y delimitando la zona del tranque por el volumen geométrico descrito anteriormente.

**Tabla 8 Parámetros del modelo de bloques 3D del relave *Haveri***

	<b>X</b>	<b>Y</b>
<b>Origen</b>	460.440 m	844.880 m
<b>Tamaño de bloque</b>	5 m	5 m
<b>Nodos</b>	110	90

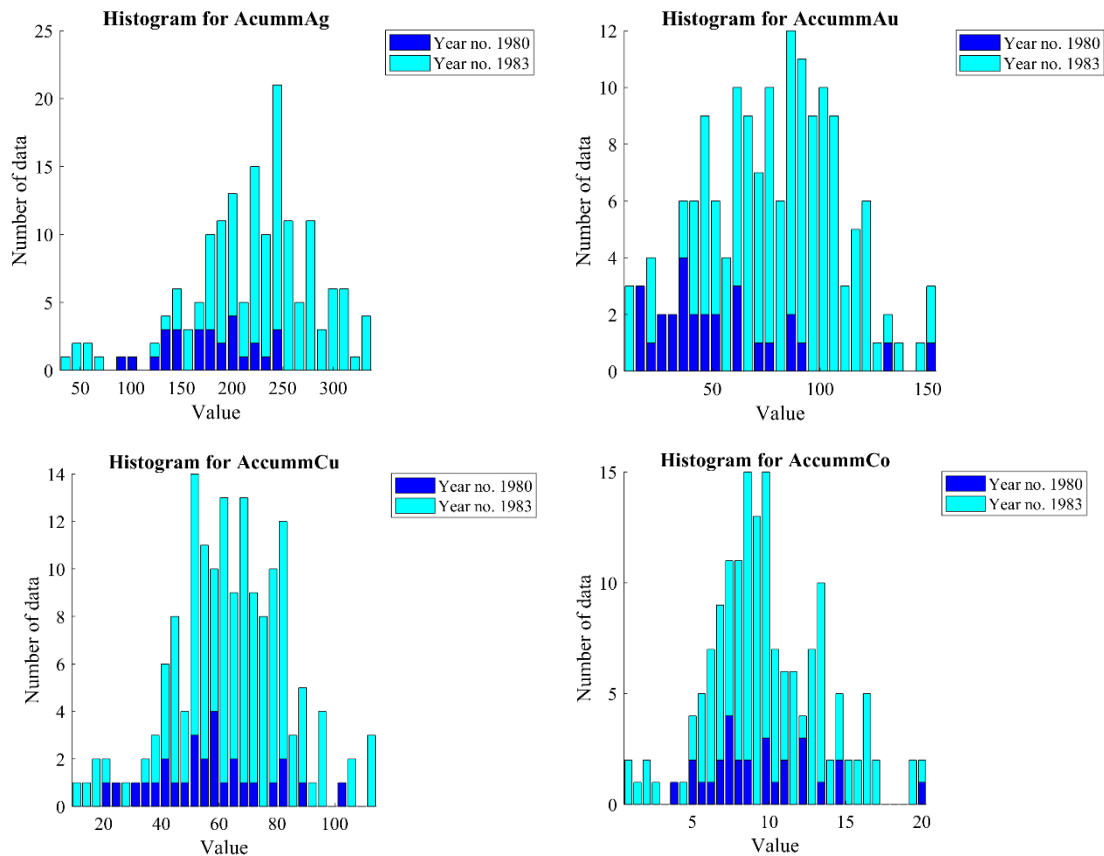
La acumulación es una variable que se usa en la estimación indirecta de recursos en vetas angostas [Zuñiga, 2010], se combina con la potencia para determinar los recursos totales:

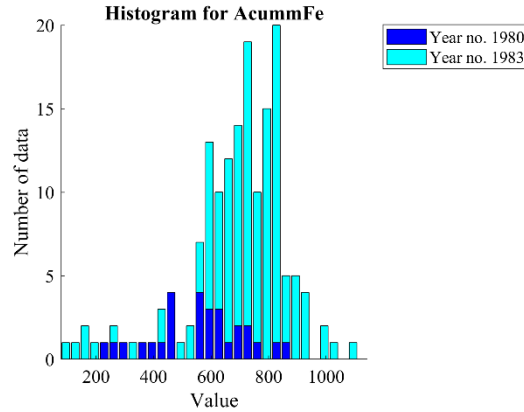
- 1) La **potencia** corresponde al grosor de la veta y se mide en la dirección perpendicular al plano que define la orientación de ésta.
- 2) La **acumulación** es el producto entre la potencia y la ley media.

Bajo este enfoque, el modelamiento se efectúa en dos dimensiones, ya que la potencia viene a completar la tercera dimensión. En los depósitos de relaves la longitud en la horizontal es mucho mayor a la longitud en la vertical, por lo que es una buena aproximación modelar el relave como un manto (una veta horizontal). Con esta analogía, en esta sección se modelarán los recursos del relave mediante el estudio de las acumulaciones. Cabe mencionar que, a diferencia del caso de las vetas angostas, aquí siempre se tiene la información dura de la potencia, ya que todos los sondajes tocaron el fondo del relave y adicionalmente se tiene un volumen 3D de la geometría completa del depósito. La potencia es variable, pero conocida, teniendo una variación mínima en la parte central del tranque y una variación mayor hacia los extremos.

## 6.2. Análisis exploratorio de acumulaciones

En el análisis exploratorio de datos no se encontraron anomalías por lo que no se hicieron modificaciones a la base de datos del estudio. Se puede apreciar que las distribuciones de todas las variables tienden a cambiar su forma y se vuelven más simétricas (Ilustración 8), salvo para la acumulación de hierro, en cuyo caso la ley de hierro ya tenía una distribución casi normal desde un comienzo. Adicionalmente los valores extremos desaparecen, esto asociado probablemente a la regularización de las leyes.





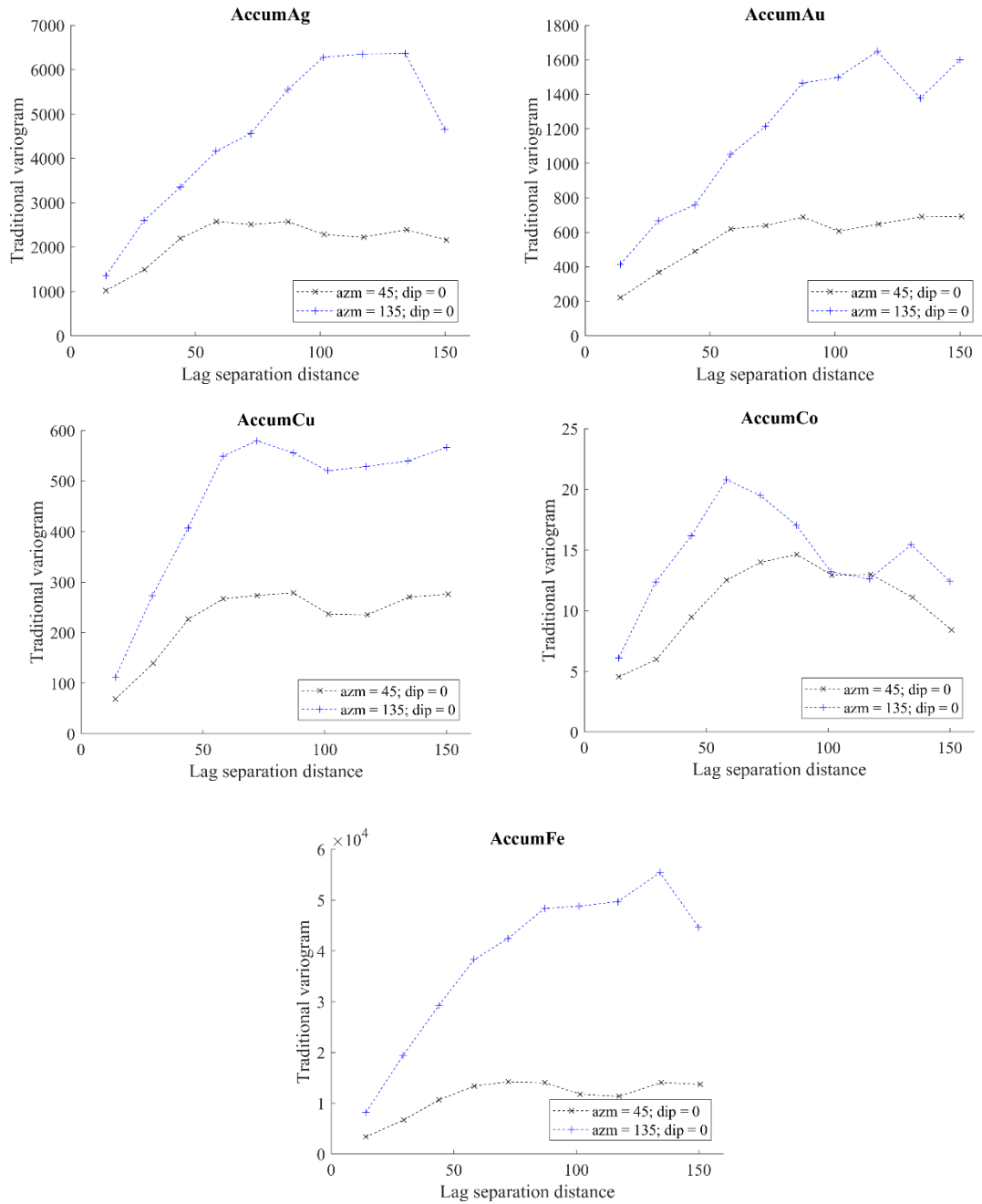
**Ilustración 8. Histogramas de acumulaciones**

### 6.3. Análisis variográfico de acumulaciones

Los variogramas experimentales muestran mucha más continuidad espacial para las acumulaciones que para las leyes. A diferencia del caso anterior, se dividió el modelamiento horizontal en dos orientaciones (Tabla 9), ya que, la dirección de máxima continuidad es  $45^\circ$  respecto del norte. De manera similar que, en la variografía de leyes, la acumulación de cobalto es la variable que presenta el comportamiento más irregular, sobre todo cerca de los 100 metros (Ilustración 9).

**Tabla 9 Parámetros del variograma experimental de acumulaciones**

	Variograma Azm= $45^\circ$	Variograma Azm= $135^\circ$
<b>Azimut (<math>^\circ</math>)</b>	45	135
<b>Tolerancia de Azimut (<math>^\circ</math>)</b>	15	15
<b>Lag (m)</b>	15	15
<b>Tolerancia de Lag (m)</b>	7.5	7.5
<b>Número de Lags</b>	10	10

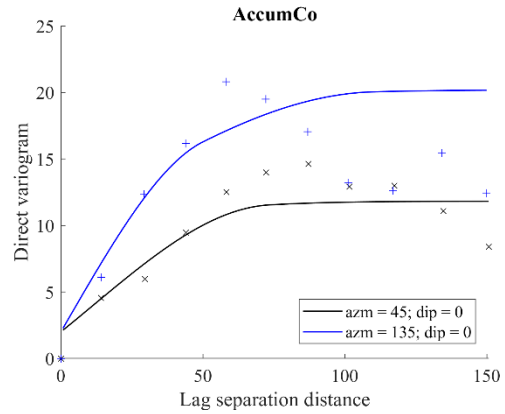
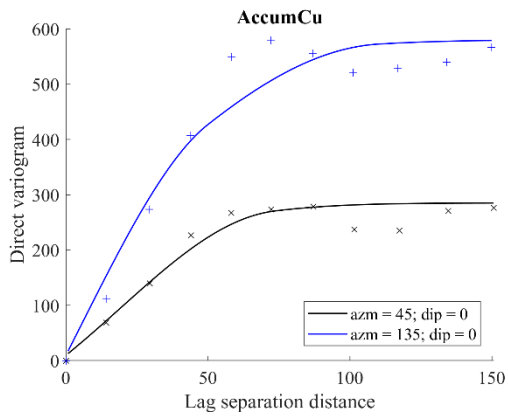
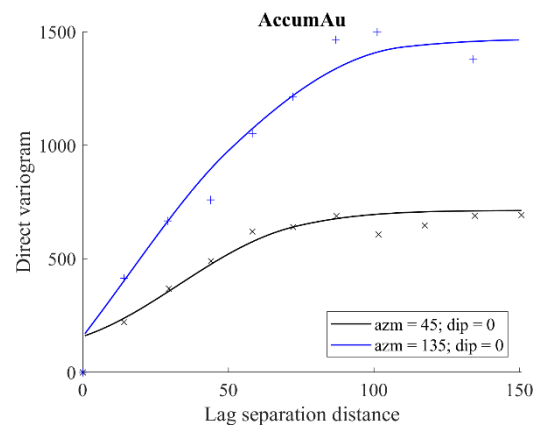
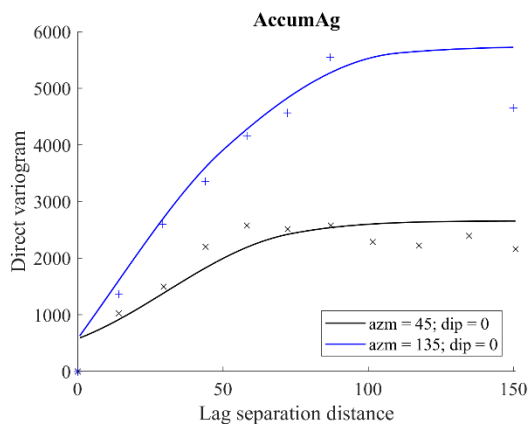


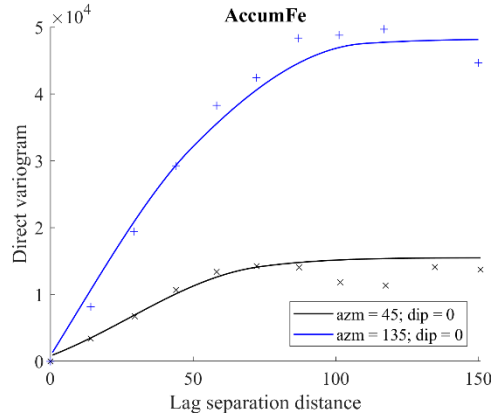
**Ilustración 9. Variogramas experimentales directos de acumulaciones en *Haveri***

Se modeló la acumulación usando tres estructuras, esto principalmente por la anisotropía encontrada (Ilustración 10). Las mesetas y el efecto pepita fueron ajustados por mínimos cuadrados. Las estructuras y alcances se muestran en la Tabla 10.

**Tabla 10 Estructuras para el ajuste del variograma de acumulaciones**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Esférica	Gaussiana	Esférica
<b>Alcance Azm=45° (m)</b>	Infinito	10	73.5
<b>Alcance Azm=135° (m)</b>	110	128	50





**Ilustración 10. Variogramas modelados directos de acumulaciones en *Haveri***

#### 6.4. Estimación mediante cokriging

La estimación se realizó se realizó usando cokriging ordinario, para verificar el modelo se usó validación cruzada. Los parámetros de la vecindad de búsqueda se muestran en la Tabla 11, se usaron 30 datos por octante.

**Tabla 11 Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda**

	Radio en Y	Radio en X
<b>Radio (m)</b>	300	300

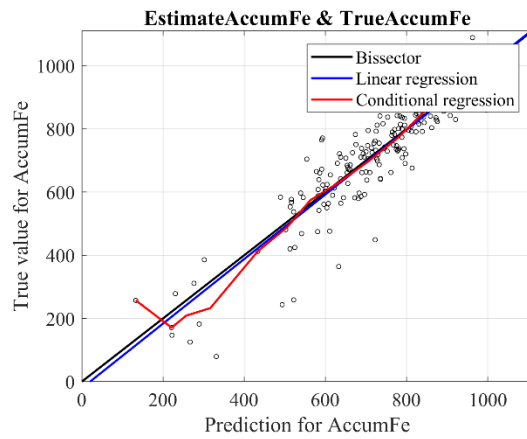
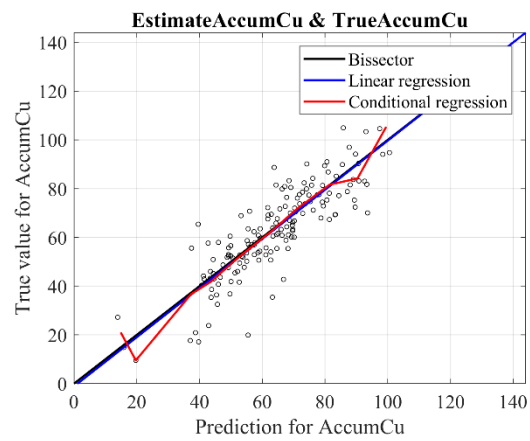
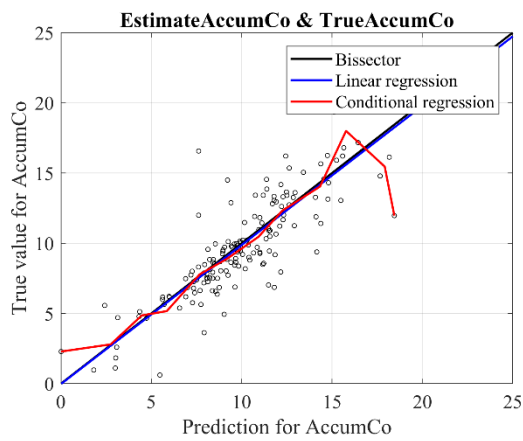
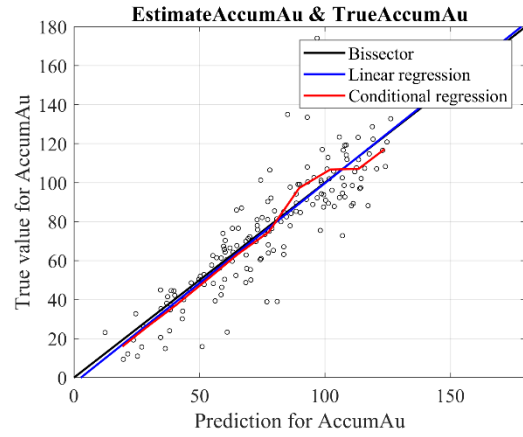
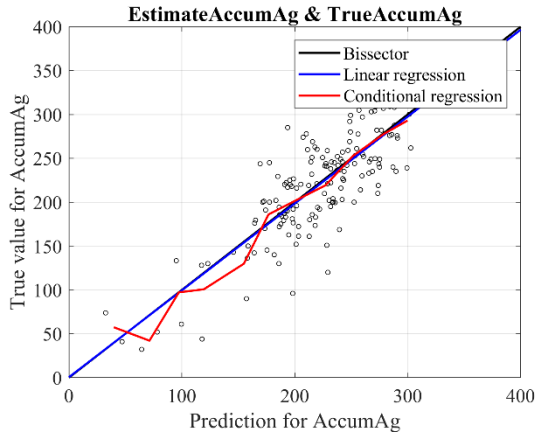
La validación cruzada muestra un muy buen desempeño para todas las variables, incluyendo la acumulación de cobalto (Ilustración 11), a diferencia de la estimación de leyes. La correlación entre valores estimados y valores reales es mayor que para el caso anterior. Cabe mencionar que la acumulación se mide con otra geometría y podríamos hablar de un mayor soporte. Adicionalmente la profundidad del tranque tiende a ser una variable mucho más continua espacialmente, salvo en los bordes del dominio. En la Tabla 12 se pueden apreciar las estadísticas de la validación cruzada. El error estandarizado tiene media cercana a cero y desviación estándar cercana a uno, con lo cual se tiene una buena cuantificación del error y no se aprecia sesgo global.

**Tabla 12 Estadísticas de la validación cruzada usando acumulaciones**

<b>Acumulaciones de Ag, Au, Co, Cu, Fe</b>					
	Ag (ppm)	Au(ppm)	Co(ppm)	Cu(ppm)	Fe (%)
<b>Media del error</b>	-1.686	-0.842	-0.124	-0.627	-5.590
<b>Desviación estándar del error</b>	35.313	16.371	2.103	10.113	79.095
<b>Media del error estandarizado</b>	-0.030	-0.023	-0.038	-0.033	-0.033
<b>Desviación estándar del error estandarizado</b>	1.034	0.980	0.905	0.984	1.045
<b>Coefficiente de correlación múltiple</b>	0.815	0.861	0.835	0.858	0.896

Se muestran las nubes de correlación (Ilustración 11) entre valores obtenidos por cokriging (eje horizontal) y valores reales (eje vertical), junto con la línea diagonal (negra), la regresión lineal (azul) y la regresión condicional (roja). Esta última regresión es cercana a la diagonal, salvo a veces en las partes con pocos valores estimados, lo que indica la ausencia de sesgo global o condicional del cokriging.





**Ilustración 11. Validación cruzada de acumulaciones en Haveri**

## 7. Estimación de leyes mediante kriging transitivo

### 7.1. Variables del estudio

Al igual que en el primer método, las variables a modelar en el yacimiento son las leyes de oro, plata, cobre, cobalto y hierro. El modelamiento se hace usando como muestras los datos compositados a un metro en la vertical sobre un **dominio 3D**.

En el kriging transitivo, la variable regionalizada se modela de forma determinística y se analizan, además de la variable, las fronteras del campo en donde la variable regionalizada presenta valores no nulos. La geoestadística transitiva es capaz de modelar simultáneamente la variable y su campo, el cual, en este caso, corresponde al interior del tranque.

Para modelar los patrones estructurales de las variables de interés, la geoestadística transitiva hace uso del covariograma transitivo, este tiene propiedades similares a la covarianza usada en el esquema probabilístico, habiendo también un covariograma experimental, cuyo cálculo es difícil en el caso general. Sin embargo, si el muestreo es regular, la fórmula se simplifica, y éste es el acercamiento usado en este trabajo. La malla regular para las muestras es de 10 metros en la horizontal y 1 metro en la vertical, análogamente a la grilla de estimación se puede definir mediante nodos, coordenada de origen y espaciamento, dichos parámetros se exponen en la Tabla 13.

**Tabla 13 Parámetros de la grilla de muestreo regular**

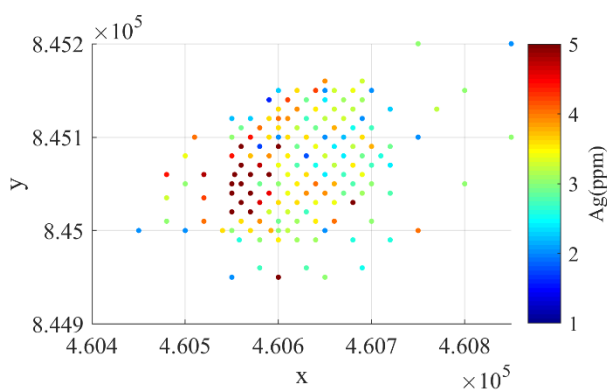
	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>Z</b>
<b>Origen</b>	460.440 m	844.880 m	-9.5 m
<b>Espaciamento</b>	10 m	10 m	1 m
<b>Nodos</b>	55	45	10

### 7.2. Análisis exploratorio

La base de datos a usar es la misma del primer método, por lo que no se hacen mayores modificaciones a las leyes. Respecto a la geometría del muestreo, se puede apreciar que, en la horizontal, el sector central del tranque está cubierto con una malla prácticamente regular, de 10m en la dirección norte-sur y este-oeste (Ilustración 3 e Ilustración 12). Las muestras

fueron tomadas cada 1 metro y los pozos son verticales, por lo que reúne todas las características para constituir una malla cuasi regular. Sin embargo, además de la regularidad es necesario que el muestreo esté definido sobre todo el dominio.

En la Ilustración 12 se muestra la malla de perforación usada en la campaña de sondajes, a su vez se despliega la distribución espacial de las muestras de plata. Es importante notar que la malla es cuasi regular, de 10mx10m y que dicha característica se pierde a medida que se acerca a la frontera del dominio (desde el centro hacia afuera).



**Ilustración 12. Malla de perforación de las muestras de plata**

El dominio de las variables del estudio está definido por el modelo del tranque descrito en la sección **4.2.2 Ubicación espacial y geometría**.

La malla y el dominio descritos en esta sección son elementos claves para el cálculo del covariograma, ya que este depende del espaciamiento en una malla regular, y además las leyes deben de anularse fuera del dominio.

### 7.3. Análisis covariográfico

En el contexto del kriging transitivo, la herramienta estructural que se usa es el covariograma, y se calcula en las diferentes orientaciones de la malla regular de muestreo.

Como se vio en la sección anterior, la malla de muestreo es cuasi regular, y por lo tanto requiere ciertas modificaciones para su uso en la geoestadística transitiva:

1. La malla debe estar definida en todo el dominio.
2. La malla debe ser perfectamente regular.
3. Las leyes fuera del dominio deben ser cero para los datos.

Para lograr lo anterior se realizó una interpolación simple usando el vecino más cercano sobre la grilla definida según los parámetros de la Tabla 13. Cabe mencionar que, dada la cuasi regularidad de la malla de muestreo, un 99% de los sondajes coinciden exactamente con una celda de la grilla en cuestión, por construcción, todas las muestras verticales de dichos sondajes también coinciden (ya que las muestras están cada un metro). A las celdas fuera del dominio se les asignó la ley cero. Sobre este resultado, se calcula el covariograma experimental. Para ejemplificar, en la Ilustración 13 se muestra el resultado de interpolación para el cobalto mediante vecino más cercano para completar una malla perfectamente regular, la cual será la entrada a los cálculos de los covariogramas transitivos.

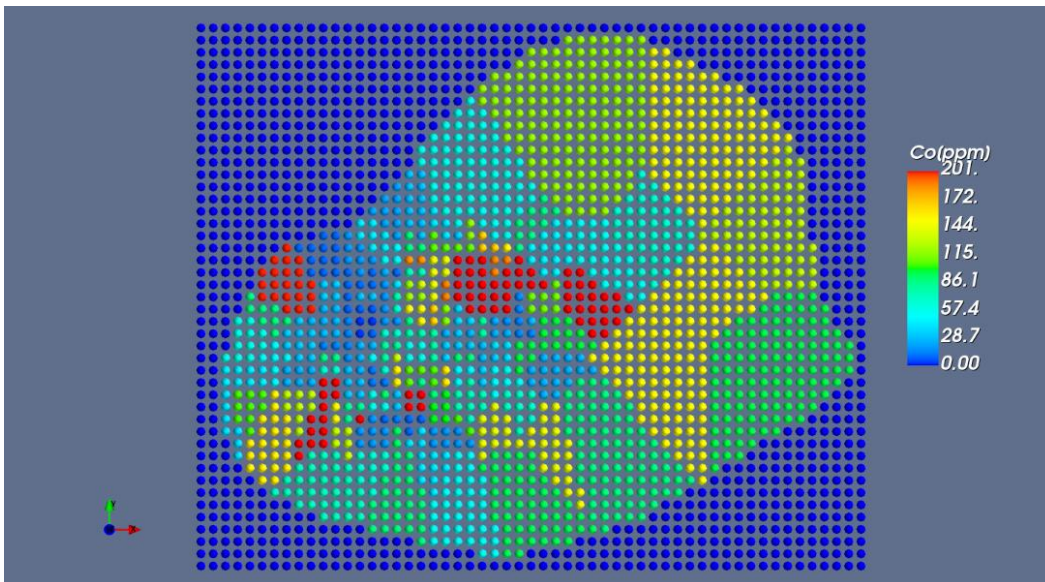


Ilustración 13. Malla interpolada mediante vecino más cercano

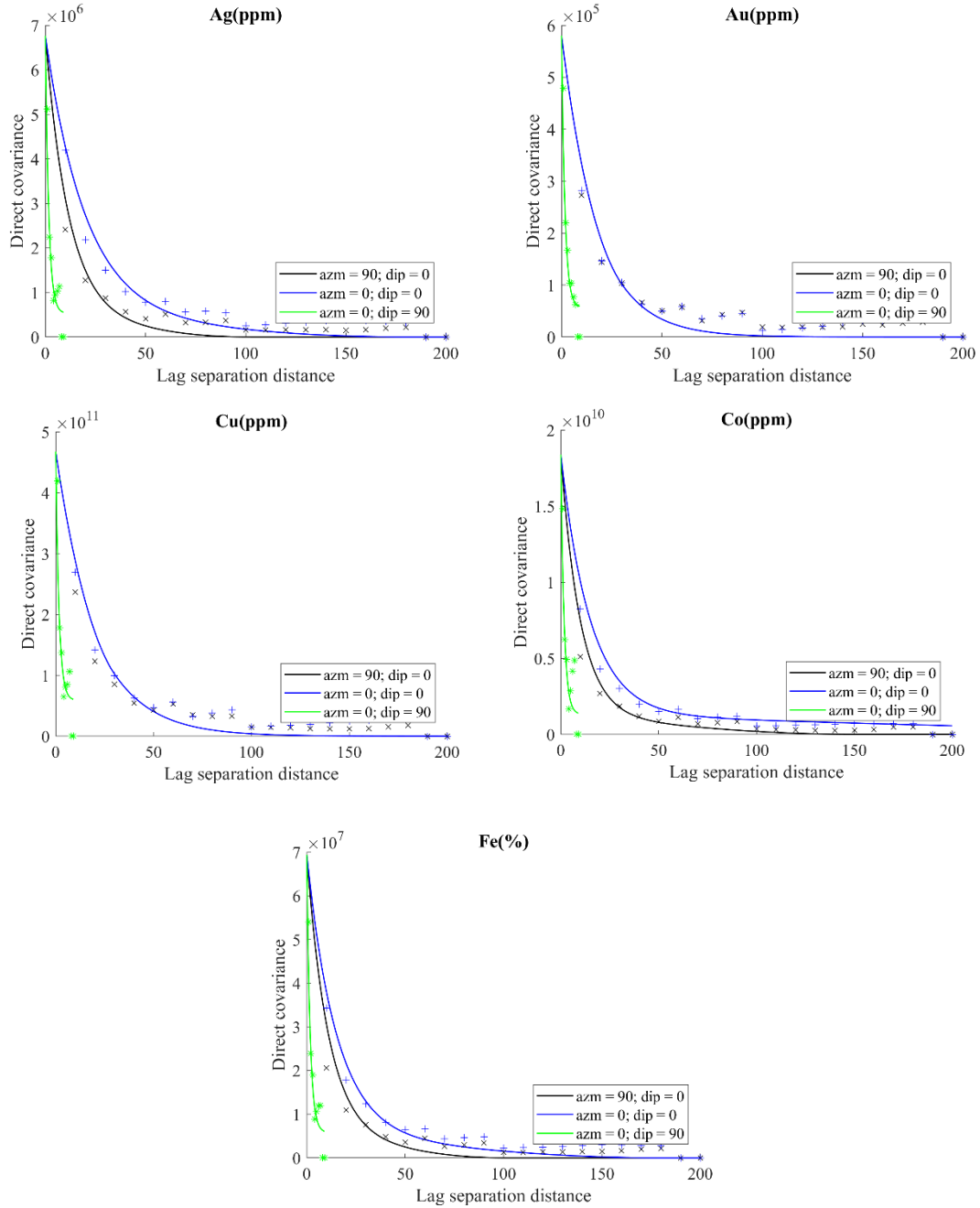
Dada la geometría de la malla, el covariograma experimental se calculó en las direcciones norte-sur, este-oeste y la vertical, al espaciamiento de la malla. Los parámetros del covariograma experimental se muestran en la Tabla 14

**Tabla 14 Parámetros del covariograma experimental de leyes**

	<b>Covariograma NS</b>	<b>Covariograma NS</b>	<b>Covariograma Vertical</b>
<b>Azimut (°)</b>	0	90	-
<b>Dip (°)</b>	0	0	90
<b>Paso (m)</b>	10	10	1
<b>Cantidad de pasos</b>	20	20	10

En algunos casos el comportamiento fue isótropo en la horizontal (para el oro y el cobre) y en otros casos fue anisótropo.

El ajuste del modelo teórico se hace mediante el uso de covarianzas y se hace uso de estructuras anidadas análogamente al caso probabilístico. En la Ilustración 14 se muestran los ajustes de los modelos y en las tablas 15, 16, 17, 18 y 19 se muestran los parámetros de las covarianzas para cada una de las leyes. Para todos los casos se usaron dos estructuras, una esférica y una exponencial. Las mesetas se ajustaron mediante mínimos cuadrados.



**Ilustración 14. Covariogramas de leyes en *Haverí***

**Tabla 15 Estructuras para el ajuste del covariograma de Ag**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial	Esférica
<b>Alcance NS (m)</b>	60	180
<b>Alcance EO (m)</b>	35	100
<b>Alcance vertical (m)</b>	5	Infinito

**Tabla 16 Estructuras para el ajuste del covariograma de Au**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial	Esférica
<b>Alcance NS (m)</b>	55	30
<b>Alcance EO (m)</b>	55	30
<b>Alcance vertical (m)</b>	5	Infinito

**Tabla 17 Estructuras para el ajuste del covariograma de Cu**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial	Esférica
<b>Alcance NS (m)</b>	65	30
<b>Alcance EO (m)</b>	65	30
<b>Alcance vertical (m)</b>	5	Infinito

**Tabla 18 Estructuras para el ajuste del covariograma de Co**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial	Esférica
<b>Alcance NS (m)</b>	45	50
<b>Alcance EO (m)</b>	30	150
<b>Alcance vertical (m)</b>	5	Infinito

**Tabla 19 Estructuras para el ajuste del covariograma de Fe**

	<b>Estructura</b>	<b>Estructura</b>
<b>Tipo de estructura</b>	Exponencial	Esférica
<b>Alcance NS (m)</b>	45	180
<b>Alcance EO (m)</b>	33	100
<b>Alcance vertical (m)</b>	5	Infinito

#### **7.4. Estimación mediante kriging transitivo**

La estimación de cada ley por separado se efectuó mediante kriging transitivo ordinario, la verificación del modelo se realizó con validación cruzada. Los parámetros de la vecindad de búsqueda se muestran en la Tabla 20, se usaron 30 datos por octante. Se usaron los mismos parámetros para todas las variables, y son los mismos que se usaron para el caso de cokriging en el contexto probabilístico.

**Tabla 20: Parámetros geométricos de la vecindad de búsqueda para el kriging transitivo**

	<b>Radio en Y</b>	<b>Radio en X</b>	<b>Radio en Z</b>
<b>Radio (m)</b>	300	300	10

La validación cruzada muestra un buen desempeño para todas las variables, salvo cobalto en la cual se puede apreciar una fluctuación (Ilustración 15), específicamente hubo varios valores altos que fueron fuertemente subestimados y además hubo un par de valores medios muy sobreestimados. En la Tabla 21 se pueden apreciar las estadísticas de la validación cruzada, donde se observa que el error promedio es bajo en comparación con el valor promedio de cada variable. A diferencia de los dos enfoques anteriores, aquí no es posible calcular errores estandarizados, dado que el kriging transitivo no hace referencia al modelo de función aleatoria y no proporciona una varianza de error, como lo hacía el kriging o cokriging en el caso de la geoestadística probabilística.

En general el kriging transitivo mostró un mejor desempeño que el cokriging probabilístico para todas las variables, excepto cobalto, sin embargo, esto puede ser atribuible a que la estimación fue univariable, a diferencia del cokriging que ocupa información de todas las

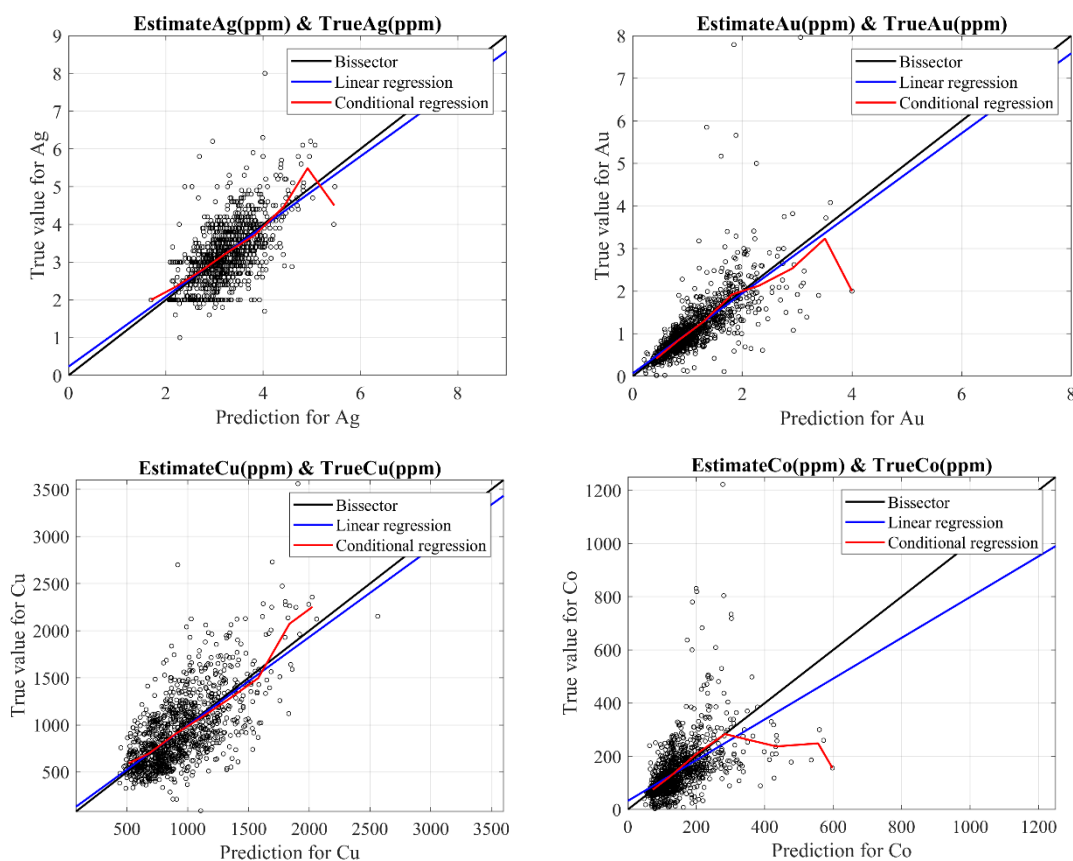


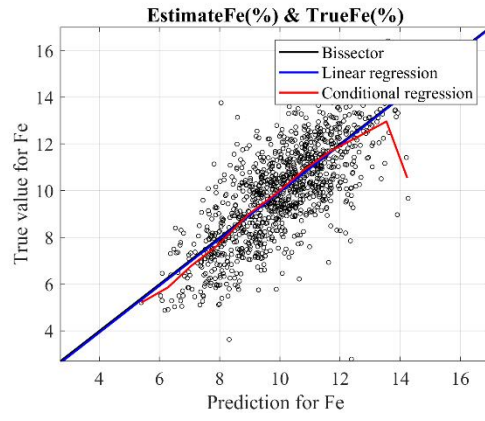
variables para estimar el cobalto. Este aspecto se discutirá en mayor profundidad en la sección **8.3 Kriging probabilístico de cobalto**.

**Tabla 21 Estadísticas de la validación cruzada usando kriging transitivo**

	Ag (ppm)	Au(ppm)	Co(ppm)	Cu(ppm)	Fe (%)
<b>Media del error</b>	0.002	0.001	-1.737	-2.131	-0.057
<b>Desviación estándar del error</b>	0.629	0.480	89.521	295.361	1.471
<b>Coefficiente de correlación múltiple</b>	0.628	0.729	0.524	0.677	0.732

En todos los casos, la curva de regresión (roja) entre valores estimados y valores reales (Ilustración 15) es cercana a la línea diagonal (negra), salvo en los tramos extremos que cuentan con pocos datos, lo que indica la ausencia de sesgo condicional y global.





**Ilustración 15. Validación cruzada de leyes en *Haveri* usando kriging transitivo**

## 8. Análisis de resultados y discusión

### 8.1. Comparación de los métodos

Los tres métodos de estimación mostraron ser efectivos y tener un buen poder de predicción para los elementos de interés en el depósito de relave. La comparación se realizó en base a la validación cruzada, se analizarán aspectos cuantitativos y cualitativos en cada uno de los métodos.

Previamente al análisis comparativos de los 3 métodos es bueno recalcar algunos aspectos del modelamiento:

- 1) La estimación por acumulación es conceptualmente (a nivel de modelo) diferente a los otros dos métodos, esto ya que modela otra variable, la acumulación y no la ley.
- 2) El punto anterior hace que la comparación entre los 3 métodos no sea directa, sin embargo, el objetivo de cualquier modelo predictivo es predecir la variable de interés con el menor error posible. Este error en general no es posible de calcular de forma exhaustiva, ya que no se conoce la realidad (*ground truth*), por eso se usan enfoques parciales como la validación cruzada.
- 3) Sustentado en el punto anterior, el gráfico de dispersión de las validaciones cruzadas muestra el error cometido en este contexto, y el coeficiente de correlación es un número adimensional que resume el desempeño de los modelos predictivos.
- 4) Con base en el punto anterior es que se usa el coeficiente de correlación como un indicador de desempeño que permite comparar los 3 modelos.
- 5) Adicional a lo anterior, se realizó un cambio de soporte a las estimaciones de leyes, para llevar esas estimaciones a un contexto de acumulación y de este modo realizar una comparación extra de la misma variable entre los tres métodos.

Al comparar los estadísticos obtenidos de las validaciones cruzadas se observan varias cosas:

- 1) Siempre la estimación por acumulación tiene un mejor poder predictivo y un coeficiente de correlación mucho mayor que las estimaciones de leyes.
- 2) El punto anterior, es reforzado al observar los gráficos de dispersión en la validación cruzada de las acumulaciones (Ilustración 11).

- 3) Las medias de errores y su desviación estándar son muy parecidas en el kriging transitivo y en el cokriging probabilístico. Salvo en el cobalto, en donde la estimación transitiva da levemente peores resultados.
- 4) El coeficiente de correlación mejora en la plata, el oro y el cobre al usar kriging transitivo versus cokriging probabilístico.
- 5) Al comparar como los 3 métodos modelan leyes en un contexto de acumulación (2D), la estimación por kriging transitivo es la que obtiene mejores resultados y se ve una fuerte pérdida del poder de predicción de leyes del método de las acumulaciones.

En un análisis inicial, de los tres métodos, se observa que, el de mejor rendimiento es la estimación por el método de las acumulaciones, sin embargo, este método no es estrictamente comparable a los otros dos debido a varias razones: la variable de estudio cambia y por lo tanto los errores no son directamente comparables: la acumulación está medida sobre otro soporte (mayor) y está en otro espacio (dos dimensiones), por lo que la mejor predicción podría atribuirse a una menor variabilidad intrínseca de las variables del estudio. Adicionalmente la cantidad de datos es menor, ya que se tiene una sola medición por sondaje.

En virtud de homologar la comparación de los métodos de estimación por kriging transitivo y cokriging de leyes con el método de las acumulaciones si hizo una comparación de leyes en este contexto. Los resultados muestran que el poder predictivo del kriging transitivo y del cokriging de leyes es mayor al del método de las acumulaciones en este caso.

Para simplificar la visualización de las tablas, en esta sección y en las siguientes se usarán las siguientes abreviaturas: KT, para el kriging transitivo, CK, para el cokriging probabilístico de leyes, y A para el cokriging vía acumulaciones.

En la Tabla 22 y en la Tabla 23 se marcan en negritas los mejores estadísticos según los siguientes criterios:

- 1) La media del error más cercana a cero entre KT y CK.
- 2) La varianza menor entre KT y CK.
- 3) El coeficiente de correlación más cercano a uno entre KT, CK y A.

**Tabla 22 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre**

Error	Ag (ppm)			Au(ppm)			Cu(ppm)		
	KT	CK	A	KT	CK	A	KT	CK	A
Media	0.002	<b>0.000</b>	-1.69	<b>0.001</b>	-0.008	-0.84	-2.131	<b>-1.617</b>	-0.63
Desviación estándar	<b>0.629</b>	0.635	35.31	<b>0.48</b>	0.51	16.37	<b>295</b>	319	10
R	0.628	0.618	<b>0.815</b>	0.729	0.688	<b>0.861</b>	0.677	0.605	<b>0.858</b>

De manera cualitativa y semi cuantitativa el método de las acumulaciones es el mejor, ya que es capaz de predecir con mayor precisión los datos mediante el método de validación cruzada, tal como se mencionó anteriormente, esto se aprecia al observar los gráficos de la Ilustración 11, y al comparar los coeficientes de correlación. Los otros dos métodos se compararán de manera más exhaustiva en la sección **8.2 Comparación entre kriging probabilístico y transitivo**. Adicionalmente en la sección **8.4 Comparación de métodos en contexto de acumulación** se comparan todos los métodos en el caso 2D para homologar la comparación en el contexto de acumulación.

**Tabla 23 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro**

Error	Co(ppm)			Fe (%)		
	KT	CK	A	KT	CK	A
Media	-1.737	<b>-0.718</b>	-0.124	-0.057	<b>-0.031</b>	-5.59
Desviación estándar	89.52	<b>82.95</b>	66.50	1.47	<b>1.46</b>	79.09
R	0.524	0.608	<b>0.835</b>	0.732	0.736	<b>0.896</b>

## **8.2. Comparación entre kriging probabilístico y transitivo**

En esta sección se compara mediante el análisis de la validación cruzada el kriging transitivo versus el cokriging probabilístico. En la Tabla 24 y en la Tabla 25 se marca en negritas el coeficiente de correlación más cercano a uno entre KT y CK.

**Tabla 24 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre**

Error	Ag (ppm)		Au(ppm)		Cu(ppm)	
	KT	CK	KT	CK	KT	CK
<b>R</b>	<b>0.628</b>	0.618	<b>0.729</b>	0.688	<b>0.677</b>	0.605

Para el caso de la plata, el oro y el cobre, el kriging transitivo tiene mejor desempeño en términos de coeficiente de correlación y términos de varianza del error (en la plata el error para el cokriging es menor, sin embargo, la diferencia es mínima). Para el cobre ocurre una diferencia y el error promedio es mayor para el caso del kriging transitivo, de todos modos, la diferencia es poco significativa, 0.5 aproximadamente, considerando que la escala del cobre está en partes por millón.

**Tabla 25 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro**

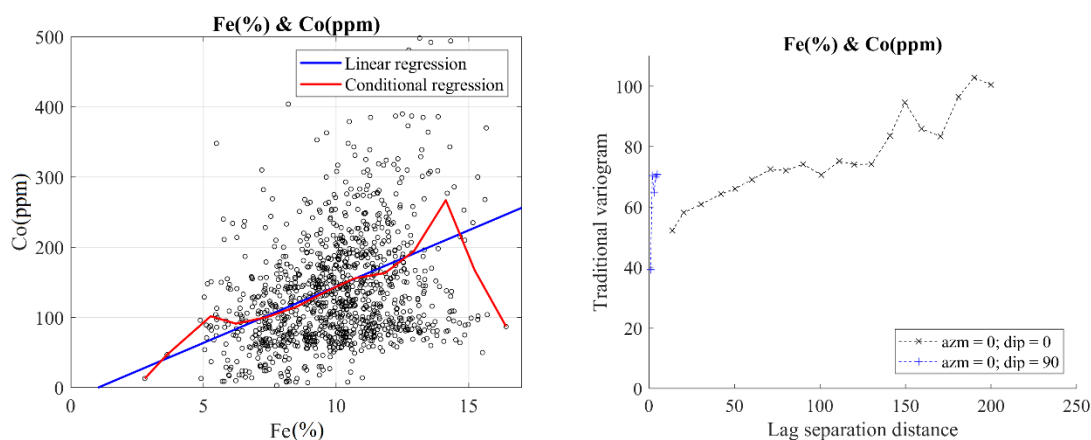
Error	Co(ppm)		Fe (%)	
	KT	CK	KT	CK
<b>R</b>	0.524	<b>0.608</b>	0.732	<b>0.736</b>

A diferencia de los elementos antes mencionados, el kriging transitivo tiene un menor desempeño para el cobalto y el hierro, esto se puede apreciar tanto en la exactitud y precisión, así como en el coeficiente de correlación. Particularmente para el hierro, la diferencia es muy pequeña y podría considerarse un desempeño equivalente en la práctica. El kriging transitivo tiene un desempeño mucho menor en la estimación de cobalto y esto se aprecia notablemente en el coeficiente de correlación, el estadístico que mejor resume el poder predictivo del modelamiento geoestadístico, el cual sube de 0.524 (KT) a 0.608 (CK).

Lo anterior se puede analizar desde una perspectiva específica del cobalto, ya que posee características particulares en este depósito de relaves:

- 1) Es el elemento que se predice más pobremente en ambos métodos.
- 2) Tiene una fuerte correlación con el hierro.
- 3) El hierro es el elemento que se predice de mejor manera.

Respecto al punto 1 cabe mencionar que, para el caso del cokriging probabilístico el coeficiente de correlación es menor en el caso del cobre, 0.605 versus 0.608 en el cobalto. Dicha diferencia no es significativa para establecer una mejora. Además, al comparar la desviación estándar de los errores estandarizados muestra una mejora sustancial entre el cobre (con desviación estándar 0.934) y el cobalto (con desviación estándar 0.822). La correlación entre hierro y cobalto se puede observar en su variograma cruzado y en el gráfico de dispersión (Ilustración 16).

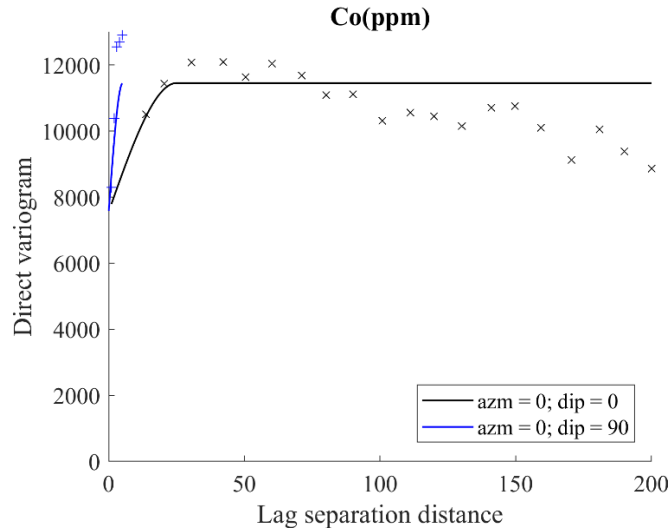


**Ilustración 16. Correlación entre hierro y cobalto**

En consideración a los puntos señalados anteriormente, el mejor desempeño del cokriging probabilístico en la predicción del cobalto, podría asociarse a la estimación multivariable, ya que, en este esquema, es posible enriquecer la información que ocupa el estimador usando los datos de las covariables. Para analizar este punto, se realizó un experimento, el cual se explica en la siguiente sección.

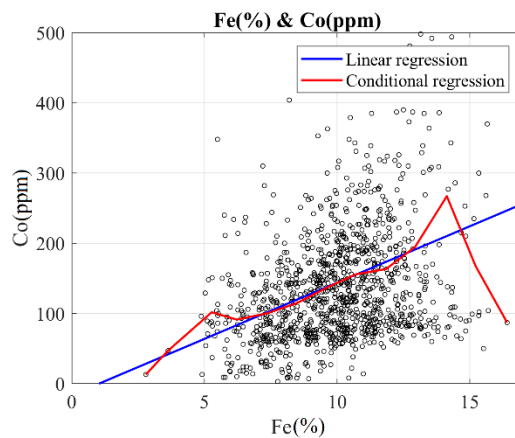
### **8.3. Kriging probabilístico de cobalto**

Para analizar el desempeño aislado del kriging probabilístico en la estimación de cobalto, se realizó un experimento consistente en estimar dicha variable con un kriging ordinario. En la Ilustración 17 se muestra el variograma modelado ajustado para el cobalto, en el cual se usaron dos estructuras (un modelo esférico y un efecto pepita).



**Ilustración 17. Variograma de cobalto**

Se realizó la validación cruzada por kriging ordinario, conservando la vecindad de búsqueda usada en los casos anteriores, en la Ilustración 18 se muestra la validación cruzada. Se observa que nuevamente el desempeño no es tan bueno y aumenta el error promedio.



**Ilustración 18. Validación cruzada de cobalto**

En la Tabla 26 se puede apreciar la considerable baja en el desempeño al usar solo kriging ordinario para estimar el cobalto, los índices antes analizados disminuyen por debajo de los valores del cokriging y del kriging transitivo, lo que confirma, que el mejor desempeño del cokriging probabilístico se sustenta más bien en su capacidad de modelamiento multivariable, más que en las cualidades intrínsecas del método.



**Tabla 26 Comparación de validación cruzada para cobalto**

Error	Co(ppm)		
	KT	CK	KO
Media	-1.737	-0.718	-2.289
Desviación estándar	89.5	82.9	2.8
R	0.524	0.608	0.498

#### 8.4. Comparación de métodos en contexto de acumulación

Para realizar un comparación adicional de los métodos de cokriging y kriging transitivo de leyes contra el método de acumulaciones se realizó un cambio de soporte de los dos primeros para llevarlo a un contexto 2D. Para esto se tomaron los resultados de la validación cruzada y se promediaron las leyes obtenidas a lo largo de cada sondaje, en el caso del método de las acumulaciones, simplemente se dividió el dato por el largo del sondaje, para de este modo comparar leyes al soporte de los sondajes en los tres casos.

En la Tabla 27 y la Tabla 28 se marcan en negritas los mejores estadísticos según los siguientes criterios:

- 1) La media del error más cercana a cero entre KT, CK y A.
- 2) La varianza menor entre KT, CK y A.
- 3) El coeficiente de correlación más cercano a uno entre KT, CK y A.

**Tabla 27 Comparación de validación cruzada para plata, oro y cobre**

Error	Ag (ppm)			Au(ppm)			Cu(ppm)		
	KT	CK	A	KT	CK	A	KT	CK	A
Media	-0.004	<b>-0.003</b>	0.101	<b>-0.001</b>	0.015	-0.84	<b>0.859</b>	-1.841	35.54
Desviación estándar	<b>0.236</b>	0.286	0.841	<b>0.116</b>	0.182	16.37	<b>73.07</b>	111	280
R	<b>0.997</b>	0.996	0.969	<b>0.995</b>	0.988	0.97	<b>0.997</b>	0.994	0.963

De manera cualitativa y cuantitativa la estimación por kriging transitivo es la mejor, ya que es capaz de predecir con mayor precisión los datos mediante el método de validación cruzada, teniendo el mejor desempeño en todos los criterios en términos generales. Solo para la media del error y en el caso de la plata, el cobalto y hierro la estimación directa de leyes por cokriging tiene mejor desempeño, sin embargo, esta pequeña diferencia probablemente tenga poca significancia.

**Tabla 28 Comparación de validación cruzada para cobalto y hierro**

Error	Co(ppm)			Fe (%)		
	KT	CK	A	KT	CK	A
<b>Media</b>	2.579	<b>2.439</b>	6.074	0.068	<b>0.04</b>	0.355
<b>Desviación estándar</b>	<b>12.32</b>	22.67	51.78	<b>0.452</b>	0.574	2.565
<b>R</b>	<b>0.996</b>	0.988	0.943	<b>0.999</b>	0.998	0.97

Cabe mencionar que bajo este enfoque la estimación por acumulación tiene un desempeño mucho más bajo que los otros dos métodos para todas las variables y bajo todos los criterios. Con esta última comparación se tiene otro antecedente para considerar el kriging transitivo como el mejor método para estimar las leyes de este tranque de relave.

### **8.5. Recursos del depósito de relave**

Para calcular los recursos del depósito se realizó la estimación para cada uno de los métodos sobre un modelo de bloques de 5x5x1 delimitado por la geometría del relave, la discretización usada fue de 3x3x2 para los casos 3D (cokriging de leyes y kriging transitivo) y de 2x2 para el caso 2D (cokriging de acumulaciones). Como una simplificación se consideró una densidad constante en todo el depósito. En la Tabla 29 y en Tabla 30 se muestran las diferencias entre los recursos calculados con cada método, en términos generales el método más conservador es el kriging transitivo, por lo que se tomó como referencia para ver las diferencias de tonelajes entre un método y otro. De este modo el porcentaje, calculado en la diferencia, indica cuánto aumentó (o disminuyó) la cantidad de recursos de cada método respecto del kriging transitivo.

**Tabla 29 Comparación de recursos de plata, oro y cobalto**

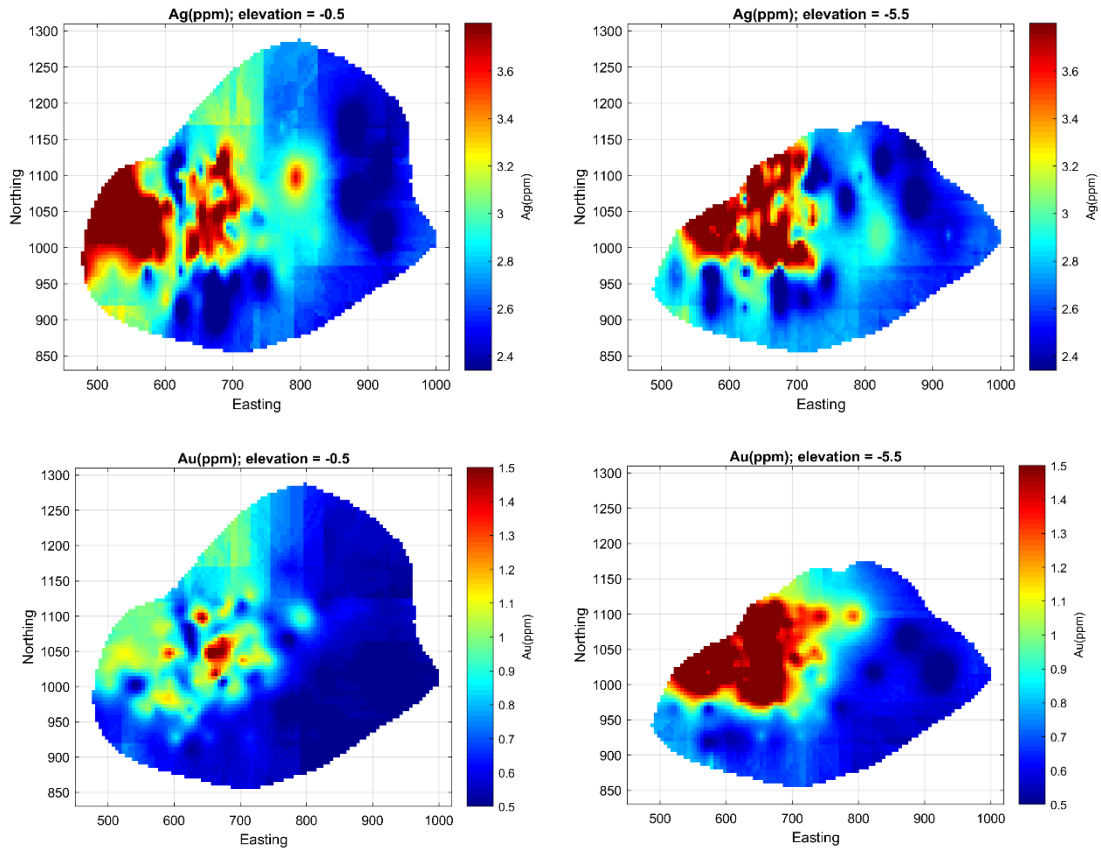
Recursos	Ag (ppm)			Au(ppm)			Co(ppm)		
	KT	CK	A	KT	CK	A	KT	CK	A
Media	2.853	2.867	2.867	0.779	0.762	0.77	136	138	143
Metal [t]	4448	4470	4470	1214	1188	1200	212024	215142	22397
Diferencia [%]	-	5	5	-	-2.2	-1.2	-	1.5	5.1

**Tabla 30 Comparación de recursos de cobre y hierro**

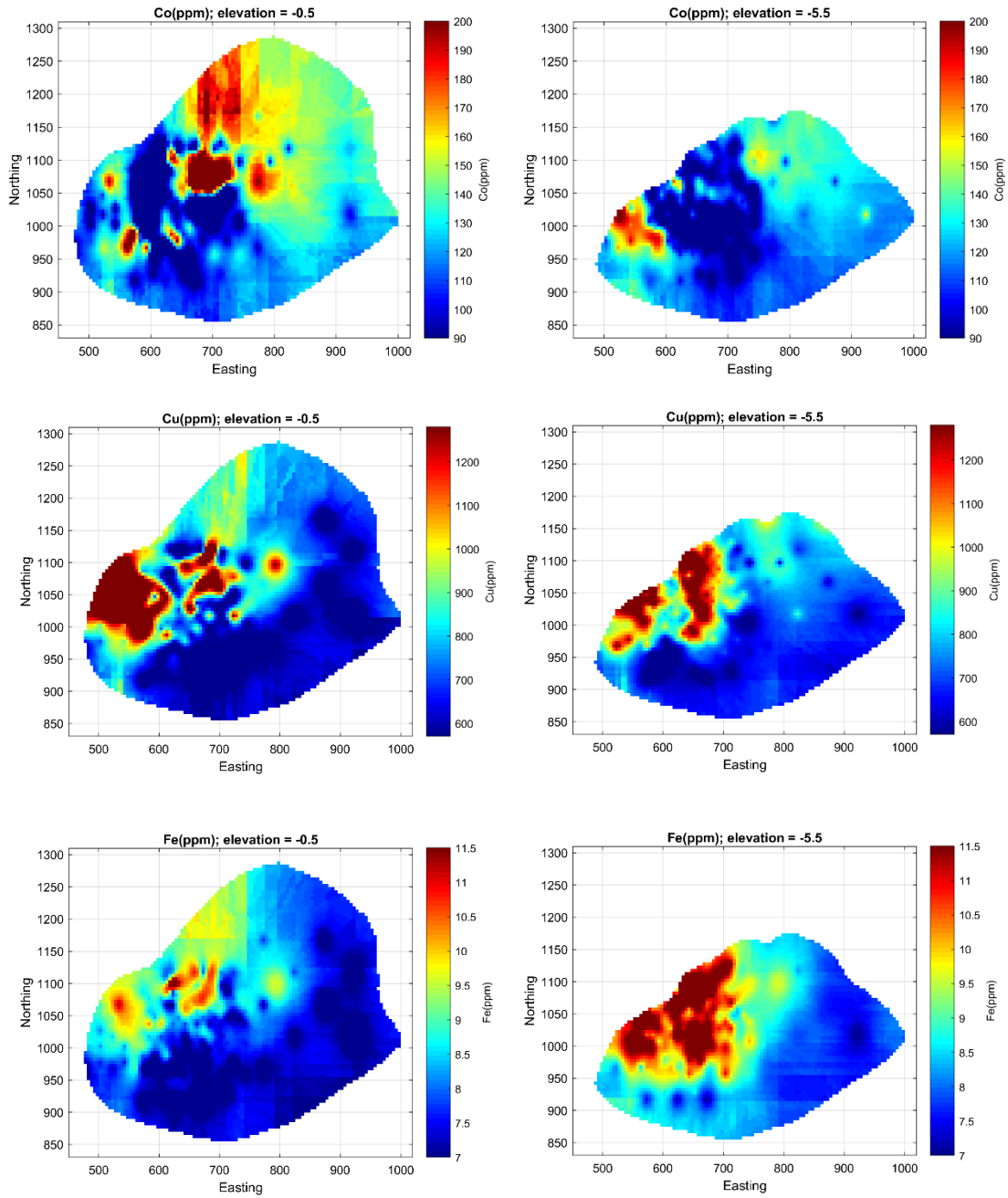
Recursos	Cu(ppm)			Fe (%)		
	KT	CK	A	KT	CK	A
Media	792	795	843	8.64	8.71	8.95
Metal [Mt]	1235	1239	1314	1346977	135789	139530
Diferencia [%]	-	0.4	6.4	-	0.8	3.6

Un aspecto relevante para destacar es que, existen desviaciones entre las medias de los diferentes modelos de bloques y la de los datos. Esto probablemente explicado por la escasez de muestras en los bordes del depósito de relave (ver sección “Ubicación espacial y geometría”), lo cual limita enormemente la información de las variables de interés en esas zonas. En términos generales el método más pesimista es el kriging transitivo, y el más optimista es el de las acumulaciones. Estas diferencias no superan el 5%, salvo para el caso del cobre.

En la Ilustración 19 e Ilustración 20 se muestran una planta para el nivel más alto del tranque de relave y una para el nivel intermedio considerando todas las variables del modelo en el caso de la estimación por kriging transitivo.

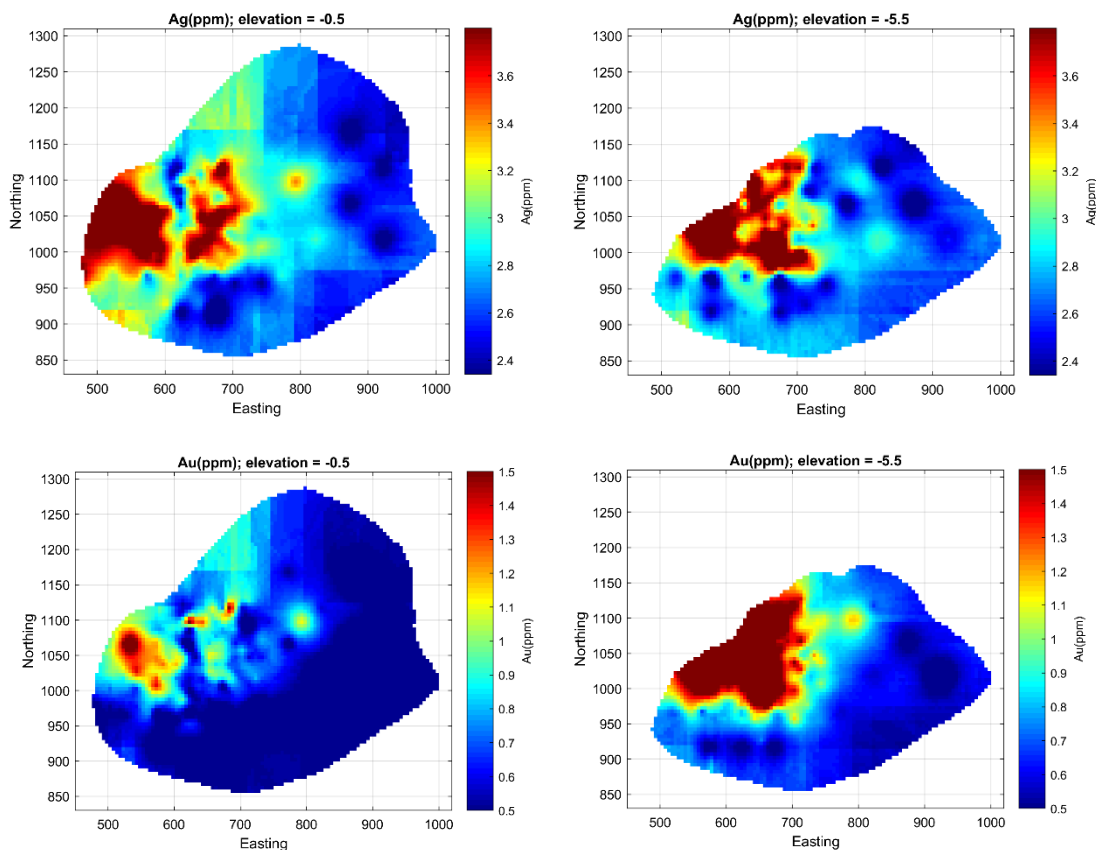


**Ilustración 19. Modelo de bloques para plata y oro estimado con kriging transitivo**



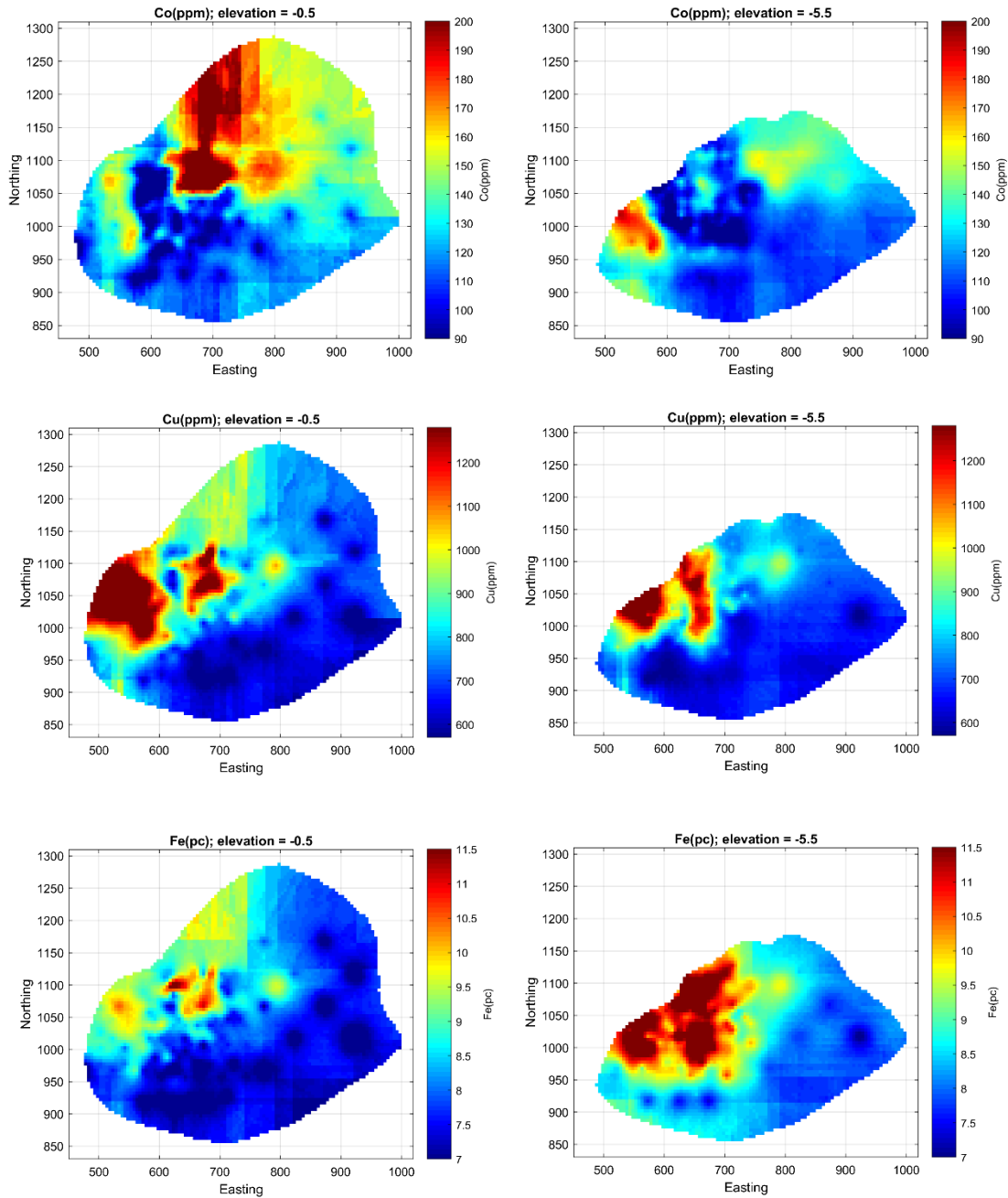
**Ilustración 20. Modelo de bloques para cobalto, cobre y hierro estimado con kriging transitivo**

En la Ilustración 21 e Ilustración 22 se muestran una planta para el nivel más alto del tranque de relave y una para el nivel intermedio considerando todas las variables del modelo en el caso de la estimación por cokriging de leyes.



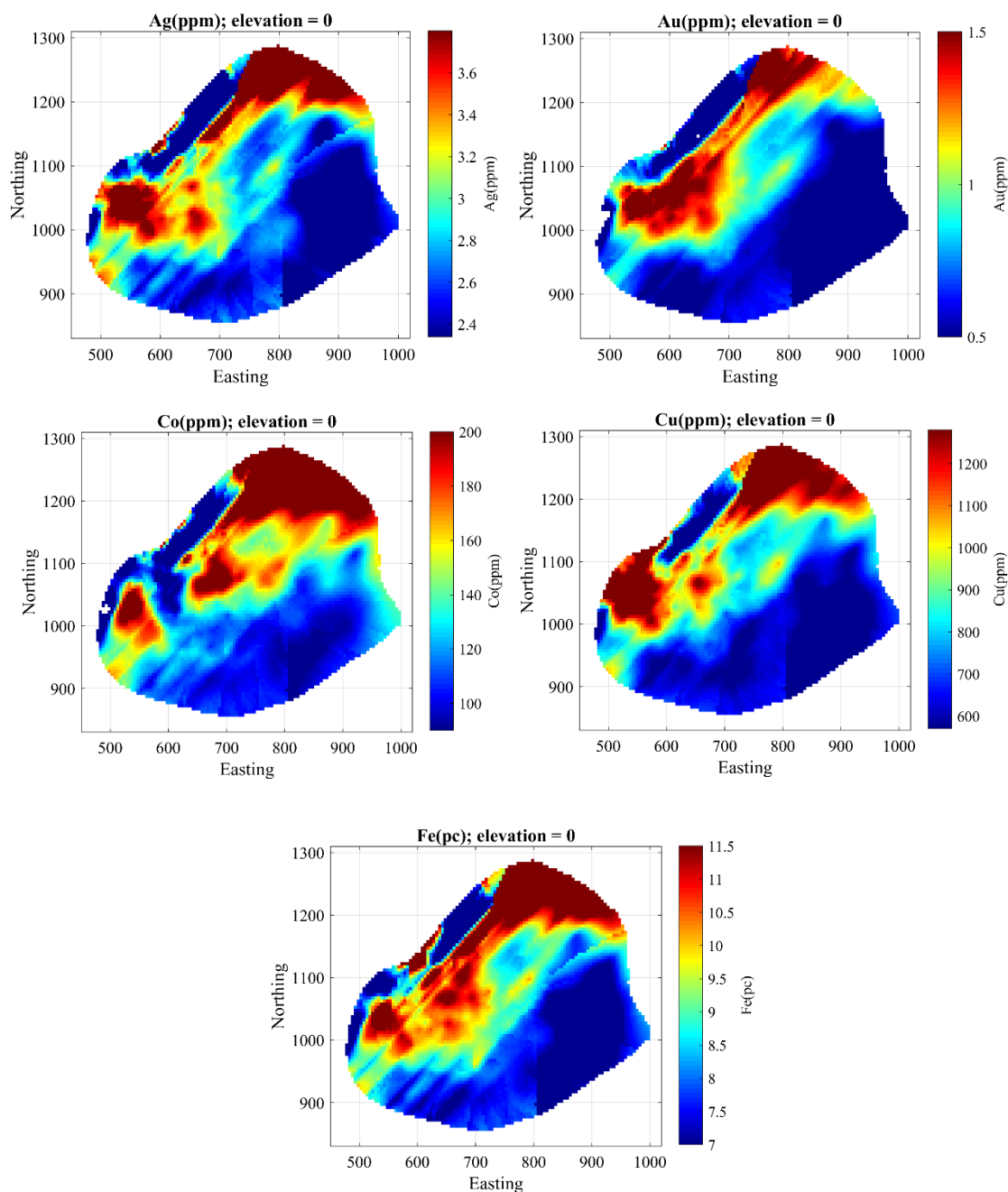
**Ilustración 21. Modelo de bloques para plata y oro estimado con cokriging de leyes**

Al observar los modelos de bloques construidos mediante cokriging de leyes y la estimación con kriging transitivo se puede observar que ambos métodos tienen un comportamiento similar en términos de distribución espacial de leyes. Adicionalmente se ve un suavizamiento levemente mayor en la estimación por cokriging, con transiciones más lentas entre regiones de leyes altas a regiones de leyes bajas y con menos sectores aislados de leyes altas. Esto se ve con mayor claridad en el sector norte del tranque para las leyes de cobalto y en el sector central para las leyes de plata, oro y cobre; en los tres casos se puede apreciar la diferencia de la influencia de un sector pequeño de alta ley (círculo rojo).



**Ilustración 22. Modelo de bloques para cobalto, cobre y hierro estimado con cokriging de leyes**

En la Ilustración 23 se muestra la estimación de leyes mediante el método de las acumulaciones.



**Ilustración 23. Modelo de leyes bloques de acuerdo con el método de las acumulaciones**

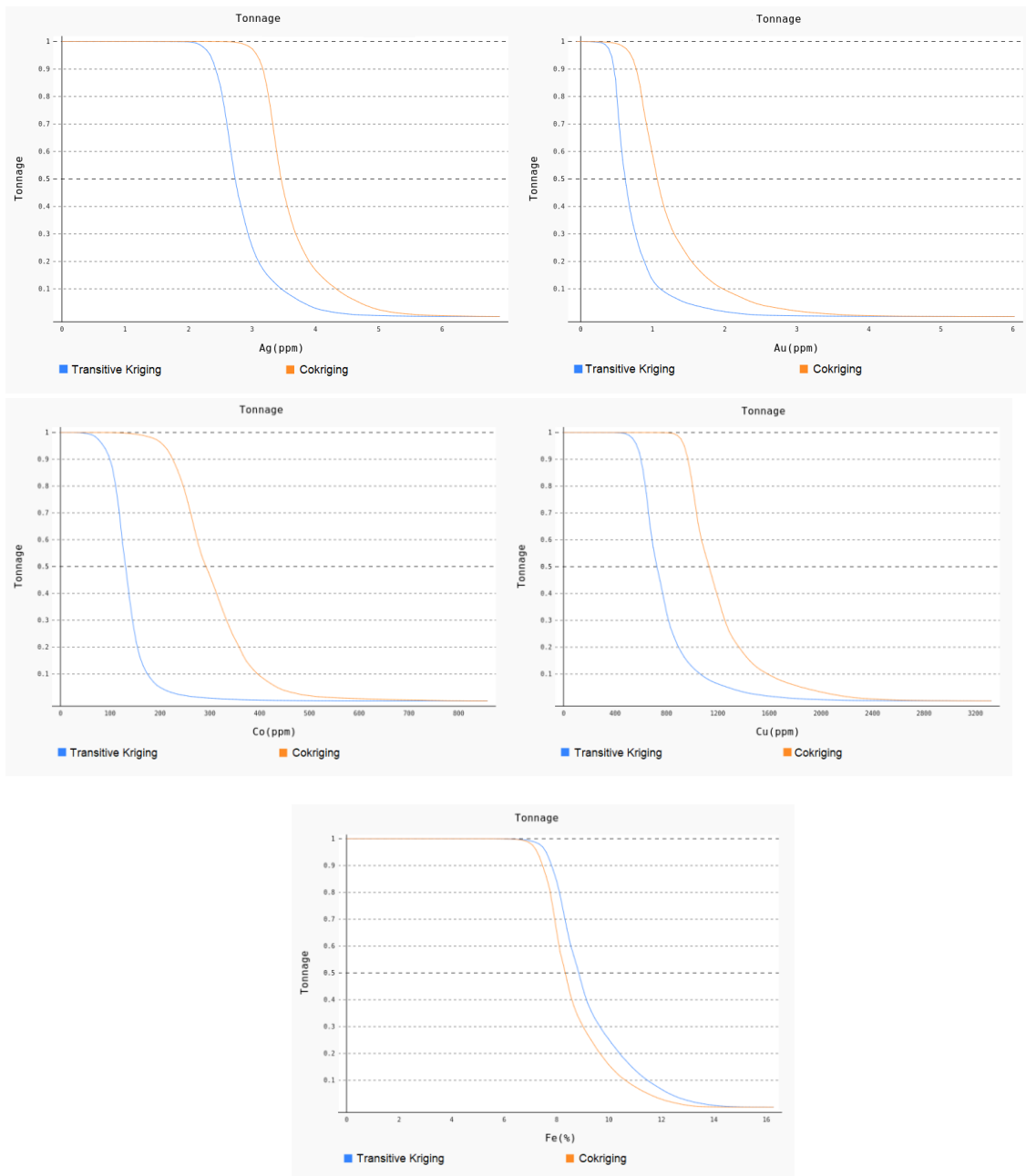
En contraposición a las leyes estimadas según los dos métodos anteriores, la estimación de leyes por el método de las acumulaciones muestra una anisotropía en 45° en la dirección norte-oeste aproximadamente. Esto anisotropía viene heredada por el modelo variográfico de



las acumulaciones y puede asociarse a una distorsión en las leyes provocada por la variable inicial, ya que, esta anisotropía tiene su origen en la profundidad del tranque y no en las leyes.

Como resultado general, respecto de los tres métodos se puede apreciar que, a nivel de modelo predictivo, el método de las acumulaciones tiene mejor desempeño que los métodos de cokriging de leyes y kriging transitivo. Sin embargo, al llevar el modelo de acumulaciones al campo de las leyes se observa que este método tiene falencias en la predicción y en la reproducción de la anisotropía de las leyes, esto principalmente explicado por la influencia de la profundidad del traque en el modelamiento.

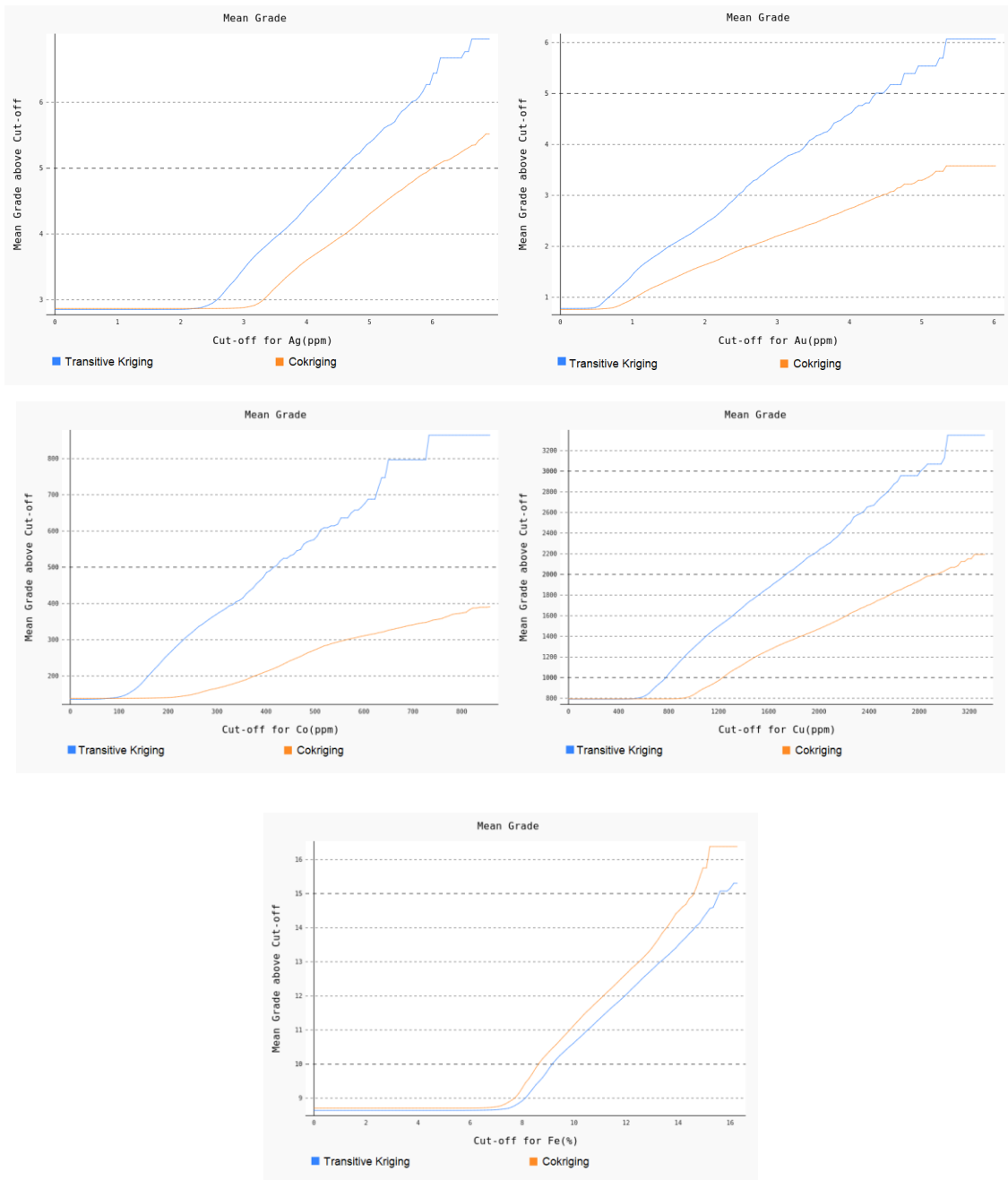
Como análisis complementario en la Ilustración 24 se muestran las curvas de tonelaje o proporción para los modelos de bloques para el caso de la estimación por cokriging de leyes y para el caso de la estimación por kriging transitivo. Similarmente en la Ilustración 25 se muestran las curvas de ley media en ambos casos. No se realizó el análisis con las leyes de las acumulaciones, debido a que la selectividad de dicho modelo es más difícil de interpretar y no es comparable a la de los modelos de bloques analizados.



**Ilustración 24. Curvas de tonelaje para los modelos de bloques construidos mediante cokriging de leyes y kriging transitivo.**

En la Ilustración 24 se observa que la estimación por kriging transitivo es más conservadora (en términos de tonelaje) que la estimación de leyes por cokriging en todos los casos, salvo para el hierro. Análogamente en la Ilustración 25 se observa que la estimación por cokriging

es más conservadora (en términos de ley media) que la estimación de kriging transitivo en todos los casos, salvo para el hierro



**Ilustración 25. Curvas de ley media para los modelos de bloques construidos mediante cokriging de leyes y kriging transitivo.**

## 9. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se modelaron las leyes de un depósito de relave usando tres técnicas geoestadísticas diferentes, todas ellas mostraron buenos resultados. El método de estimación multivariable usando acumulaciones fue el que presentó mejor rendimiento al momento de comparar el poder predictivo de cada método. Esta técnica puede considerarse adecuada para un estudio preliminar de los recursos en el depósito, ya que trabaja sobre una variable regularizada (se promedia la ley sobre todo el pozo) y disipa los valores extremos de leyes, los cuales en los otros métodos son (a veces muy) subestimados. Una desventaja es que no se tiene información de la variabilidad en la vertical, y se pierde el concepto de bloques como operación unitaria. Dependiendo de los posteriores procesos que se efectúen sobre el modelo de bloques, es posible que esa limitación sea un problema, ya que dependerá de la selectividad necesaria para los análisis pertinentes, ya sea en ámbitos de planificación minera o de geometalurgia.

Por otro lado, al analizar las leyes en un contexto de acumulación, esto es, promediando las leyes en cada sondaje para la estimación por cokriging de leyes y para la estimación por kriging transitivo y comparando contra las leyes obtenidas por el método de las acumulaciones (dividiendo la variable acumulación por el largo del sondaje) se pudo observar que el método de kriging transitivo fue el que tuvo mejor desempeño y el método de las acumulaciones el que tuvo peor desempeño. Esto indica que el método de las acumulaciones puede ser adecuado para estimar la distribución global de las leyes (o metal contenido) de interés, pero poco adecuado para estimar su distribución local y espacial.

El método de kriging transitivo mostró una mejora significativa respecto al cokriging probabilístico, lo cual se vio reflejado principalmente en una mejora en los coeficientes de correlación de la validación cruzada. Especial es el caso del cobalto que se analizó en detalle, el cual fue mejor predicho por el cokriging probabilístico, sin embargo, esto se explicó en este caso, gracias al potenciamiento del método de cokriging con el modelamiento multivariable, probablemente soportado por la buena correlación global y espacial entre cobalto y hierro. Parte del trabajo futuro en este ámbito es la extensión de la teoría del kriging transitivo a un esquema multivariable (cómo definir un covariograma transitivo "cruzado" entre variables, herramienta que aún no ha sido investigada).

Las ventajas del kriging transitivo son su aplicabilidad en esquemas no estacionarios, el modelamiento en 3D y la robustez en la inferencia del covariograma, particularmente en este caso fue el método con mejor poder predictivo para el modelamiento de leyes. Una desventaja es la necesidad de una malla perfectamente regular para su aplicación. En trabajos futuros, este aspecto se podría mejorar, en este caso se completó la malla pseudo regular inicial, interpolando mediante vecino más cercano las celdas faltantes, y con esto completando una malla regular. La exploración de otros métodos para completar la malla, con un interpolador más sofisticado, podría llevar a una mejor inferencia en el covariograma.

En el aspecto práctico de las políticas para la exploración de relaves, sería beneficioso comparar el desempeño del kriging transitivo contra el kriging probabilístico cuando la malla original es perfectamente regular y evaluar las ventajas que puede generar el uso de la geoestadística transitiva en estos casos. Es importante mencionar que, a diferencia de en la exploración convencional de yacimientos, el diseño de una malla regular, para una campaña de sondajes en un depósito de relave, es totalmente factible, ya que la extensión del dominio (análogo al mineral) es conocida y a priori no deberían existir diferentes unidades de estimación que lleven un muestreo preferencial en algunas zonas del relave. El siguiente paso de esta investigación, además de buscar formas de mejorar la predicción en depósitos de relaves, es estudiar la incertidumbre asociada a la predicción, ya que el kriging transitivo no entrega una varianza del error de predicción y este fue un aspecto no abordado en esta tesis. Por otro lado, la geoestadística transitiva tampoco se extiende a los métodos de simulación, los cuales descansan en el concepto de función aleatoria.

Respecto al diseño de mallas de muestreo en relaves, los resultados de esta tesis son promisorios en términos de la factibilidad de predecir con precisión las leyes de un tranque de relave usando una malla perfectamente regular. Una primera recomendación sería utilizar este tipo de geometría de malla de muestreo y cubrir toda el área del tranque (tanto en la horizontal como en la vertical). Adicional a esto, el disponer de datos de calidad y una mayor cantidad de análisis pueden robustecer las proyecciones de la caracterización del material contenido en el relave, esto debido al aporte de las covariables a la predicción. Según este último punto, el desarrollo teórico de la geoestadística transitiva multivariable puede ser un gran aporte al modelamiento de relaves con miras a una economía circular.

En el ámbito más general del estudio de los relaves como fuente de recuperación de valiosos, el modelamiento de la densidad y las características granulométricas de los relaves son aspectos importantes para investigar en el futuro, ya que, debido a procesos de compactación y evaporación de aguas estas características son complejas dentro de los depósitos. El contar con información geológica del relave y de las muestras permitiría analizar con mayor contexto geocientífico los datos disponibles. Del mismo modo es importante desarrollar tecnologías que permitan recuperar los elementos de valor, ya sea mediante reprocesamiento directo o mediante la elaboración de nuevos materiales.

## 10. Bibliografía

Alfaro M. & Miguez F. (1976) Optimal Interpolation Using Transitive Methods. In: Guarascio M., David M., Huijbregts CJ., eds., *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*. Reidel, Dordrecht, pp. 91-99.

Armstrong, Margaret, 1994. "Is research in mining geostats as dead as a dodo?." *Geostatistics for the next century*. Springer, Dordrecht, 1994. 303-312.

Chilès, J.P., Delfiner, P., 1999. *Geostatistics : modeling spatial uncertainty*. New York : Wiley

Cosia geostatistical and deposit sampling working group, 2015. A geostatistical study to quantify uncertainty in tailings fines and workflow and software guide for constructing a three-dimensional geostatistical model of a tailings deposit for the purpose of conducting a geostatistical resampling study. (Available online) <<https://www.cosia.ca/sites/default/files/attachments/Tailings%20Geostatistical%20Study%20-%20Imperial.pdf>> (Accessed 10/03/2021)

Deutsch, C., Journel, A., 1998. *GSLIB : Geostatistical software library and user's guide*. New York : Oxford University Press.

De Villiers, J.P.R., 2017. How to Sustain Mineral Resources: Beneficiation and Mineral Engineering Opportunities. *Elements* 13, 307–312. DOI: 10.2138/gselements.13.5.307

Edraki, M., Baumgartl, T., Manlapig, E., Bradshaw, D., Franks, D.M., Moran, C.J., 2014. Designing mine tailings for better environmental, social and economic outcomes: a review of alternative approaches. *J. Clean. Prod.* 84, 411–420.

European Commission, 2018. *Report on Critical Raw Materials and the Circular Economy*, pp. 69.

Emery, X. 2020. *Apuntes de Catedra: Geoestadística*. Universidad de Chile.

Henderson, R.D., 2018. *Minera Valle Central Operations Rancagua, Region VI, Chile*. 43-101 Technical report. pp. 118. [http://www.amerigoresources.com/\\_resources/Technical\\_Report\\_March\\_2019.pdf](http://www.amerigoresources.com/_resources/Technical_Report_March_2019.pdf) (Accessed 9/3/2021).

Journel, A., 1986. *Geostatistics : models and tools for the earth sciences*. *Mathematical Geology* 18, 119–140.

Journel, A. G., 1993 Geostatistics: roadblocks and challenges. *Geostatistics Troia'92*. Springer, Dordrecht, 1993. 213-224.

Kivinen, S., 2017. Sustainable Post-Mining Land Use: Are Closed Metal Mines Abandoned or Re-Used Space? *Sustainability* 9 (10), 1705. <https://doi.org/10.3390/su9101705>

Kokkola M., 1982. Jätealueen soijatutkimus Kisko, Aijala. Outokumpu OY Report 067/2014 03/MK/1982, pp. 20. (in Finnish)  
[http://tupa.gtk.fi/raportti/arkisto/061\\_2014\\_03\\_mk\\_1982.pdf](http://tupa.gtk.fi/raportti/arkisto/061_2014_03_mk_1982.pdf)

Kokkola, M., 1986. Jätealueen soijatutkimus. Outokumpu Oy Report 061/2124/02b/MK/1986, pp. 83.  
[http://tupa.gtk.fi/raportti/arkisto/061\\_2124\\_02b\\_mk\\_86.pdf](http://tupa.gtk.fi/raportti/arkisto/061_2124_02b_mk_86.pdf) (in Finnish)

Lottermoser, B.G., 2011. Recycling, Reuse and Rehabilitation of Mine Wastes. *Elements* 7, 405–410. DOI: 10.2113/gselements.7.6.405

Markovaara-Koivisto, M., Valjus, T., Tarvainen, T., Huotari, T., Lerssi, J., Eklund, M., 2018. Preliminary volume and concentration estimation of the Aijala tailings pond – Evaluation of geophysical methods. *Resources Policy* 59, 7–16.

Matheron, G., 1970. La théorie des variables régionalisées et ses applications. Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau: Ecole des Mines de Paris.

Ministerio de Minería, 2019. Bases para una política nacional de depósitos de relaves.

Muthavhine, M.I., 2017. Mineral Resource Evaluation of a Platinum Tailings Resource: A Case Study, Master of Science in Engineering. University of the Witwatersrand, Faculty of Engineering and the Built Environment, School of Mining Engineering. pp 200

Parviainen, A., 2009. Tailings mineralogy and geochemistry at the abandoned Haveri Au–Cu mine, SW Finland. *Mine Water Environ* 28(4), 291–304.

Parviainen A, Soto F, Caraballo MA 2020. Revalorization of Haveri Au-Cu mine tailings (SW Finland) for potential reprocessing. *Journal of Geochemical Exploration*.

Puustinen, K., 2003. Suomen kaivosteollisuus ja mineraalisten raakaaineiden tuotanto vuosina 1530–2001, historiallinen katsaus erityisesti tuotantolukujen valossa (Mining industry and production of raw materials in Finland during 1530–2001, a historic review in the light of production figures). Geological Survey of Finland, report M 10.1/2003/3, 578 pp (in Finnish)



Rivoirard, J., Simmonds, J., Foote, K.G., Fernandes, P., Bez, N., 2000. Geostatistics for Estimating Fish Abundance. Blackwell Science, Oxford.

Rivoirard J. , 2005. Concepts and Methods of Geostatistics. In: Bilodeau M., Meyer F., Schmitt M., eds., Space, Structure and Randomness. Springer, Berlin, pp. 17-37.

Sernageomin, 2020. Catastro de depósitos de relaves en Chile.

Soto, F., Garrido, M., Díaz, G., Silva, C., 2017. Rapid multivariate resource assessment. In: GEOMIN-MINEPLANING, 5th International Seminar on Geology for the Mining Industry. Santiago de Chile: GECAMIN.

SRK Consulting, 2008. Mineral Resource Estimation Bellekeno Project, Yukon Territory, Canada. Available online: [https://alexcoresource.com/site/assets/files/3918/2008-01-28\\_bellekeno\\_tech\\_report.pdf](https://alexcoresource.com/site/assets/files/3918/2008-01-28_bellekeno_tech_report.pdf) [consulta : 18 de junio de 2020].

Tripodi, E., Rueda, J., Cespedes, C., Vega, J., Gomez, C., 2019. Characterization and geostatistical modelling of contaminants and added value metals from an abandoned Cu-Au tailing dam in Taltal (Chile). J. S. Am. Earth Sci. 93 (1), 183–202.

Tayebi-Khorami, M., Edraki, M., Corder, G., Golev, A., 2019. Re-Thinking Mining Waste Through an Integrative Approach Led by Circular Economy Aspirations. Minerals 9, 286, 1–12.

Tuhafeni A. 2016 .Remining and restructure of a tailing deposit - Technical feasibility. Master dissertation. Porto, Portugal. Faculty of engineering of the University of Porto, pp 16

Wackernagel, H., 2003. Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications, third ed. Springer Science & Business Media, s.l.

Wilson R., Toro N., Naranjo O., Emery X., Navarra A., 2021. Integration of geostatistical modeling into discrete event simulation for development of tailing dam retreatment applications. Minerals Engineering.

Zuñiga, R., Emery, X., 2010. Evaluating mineral resources in a narrow vein-type deposit. In: MININ, 4th International Conference on Mining Innovation. Santiago de Chile: GECAMIN.

## 11.Anexos

### A. Análisis variográfico

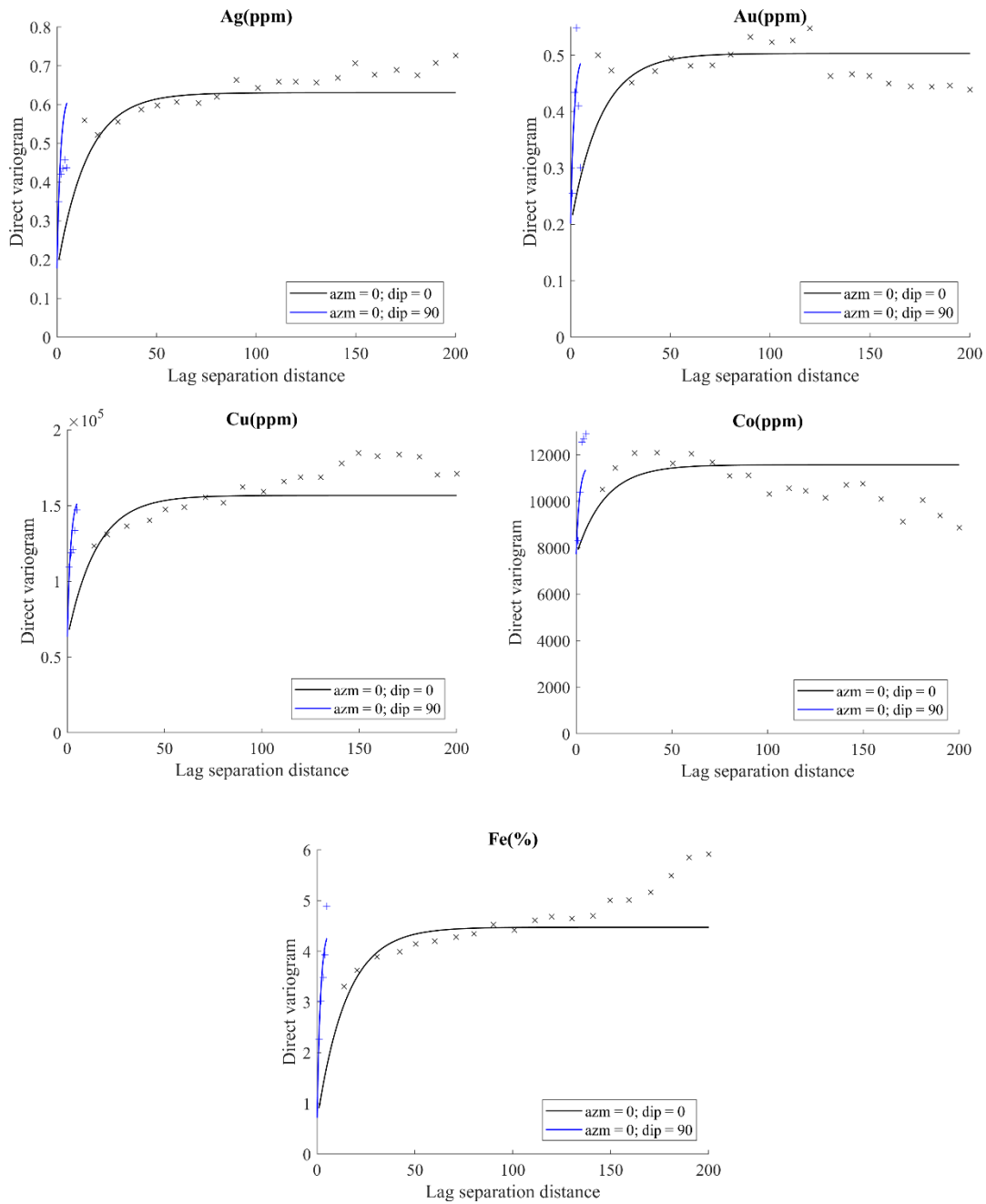
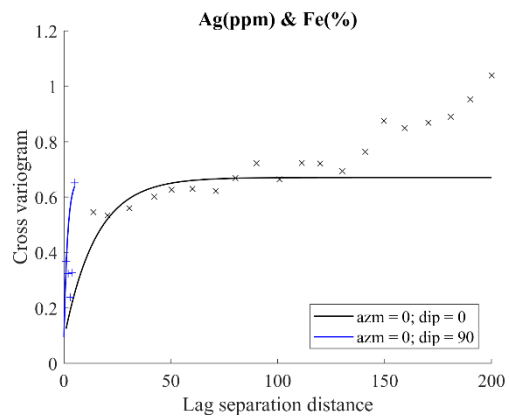
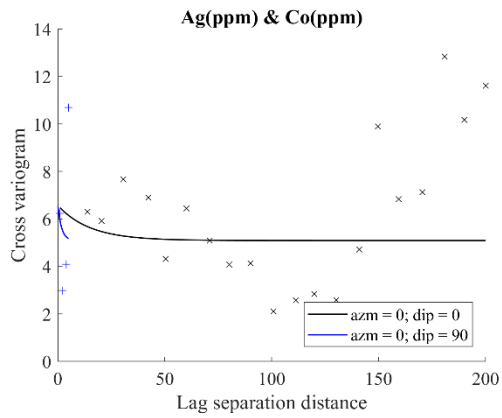
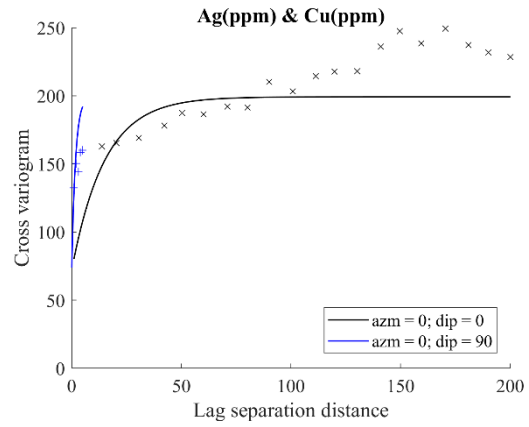
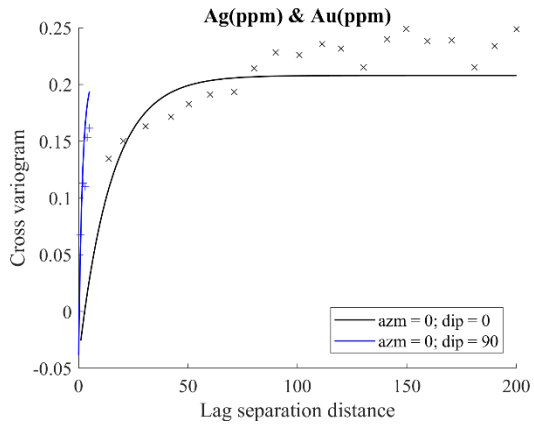
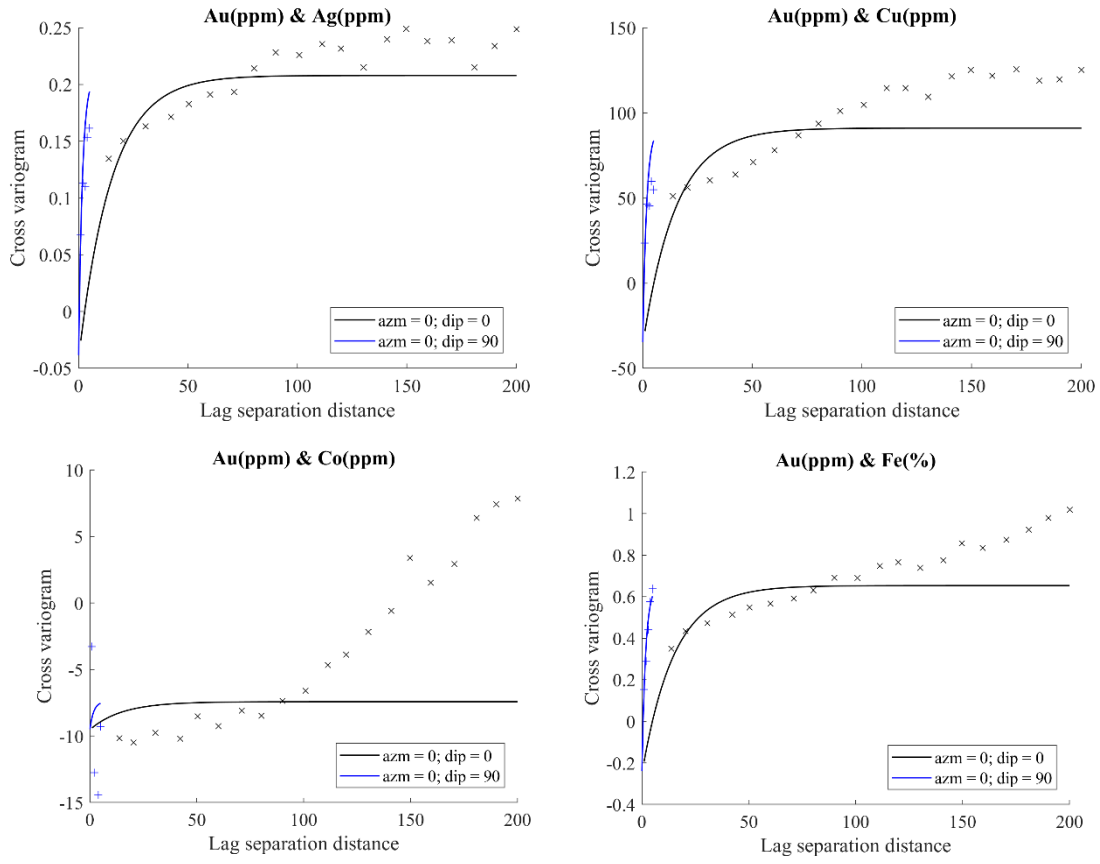


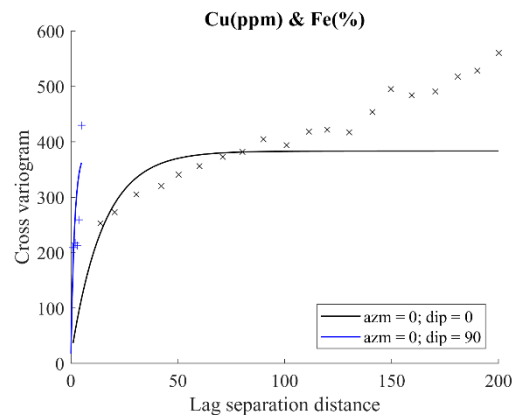
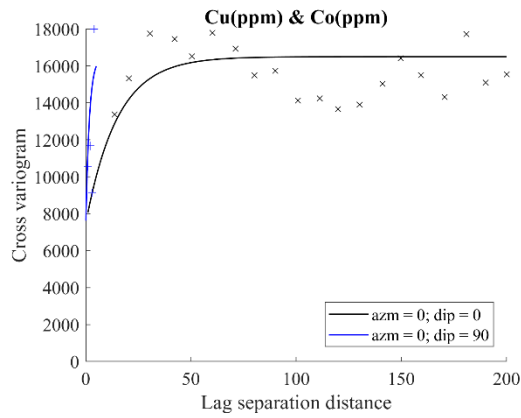
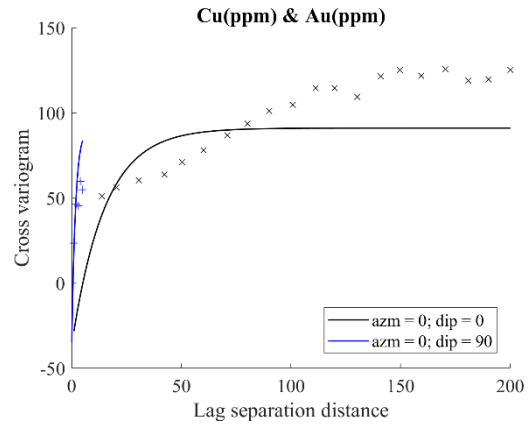
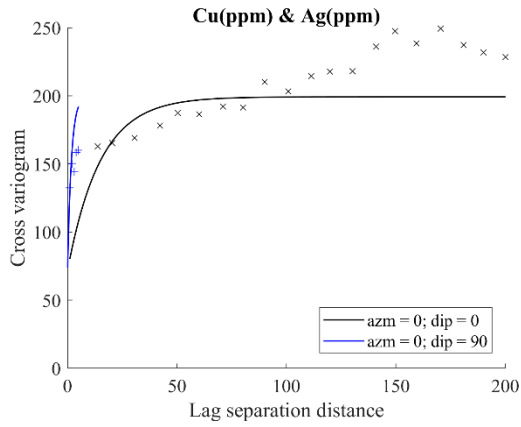
Ilustración 26. Variogramas directos de leyes



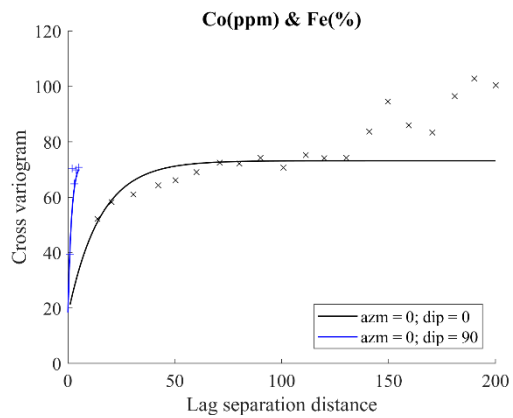
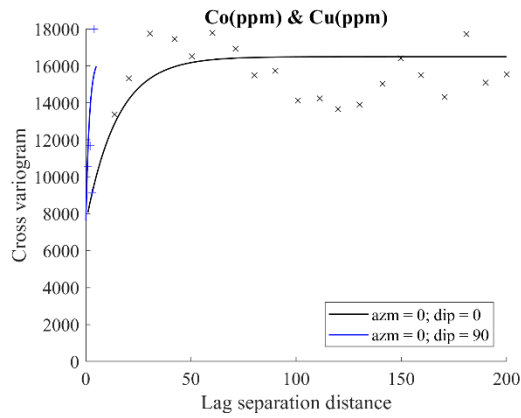
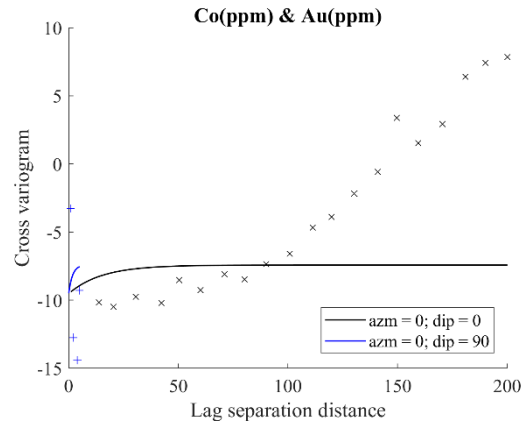
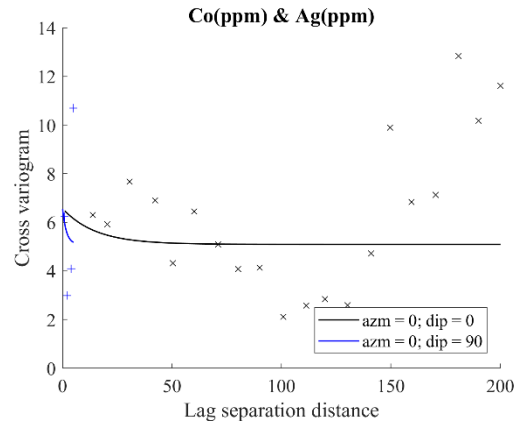
**Ilustración 27. Variogramas cruzados para la ley plata**



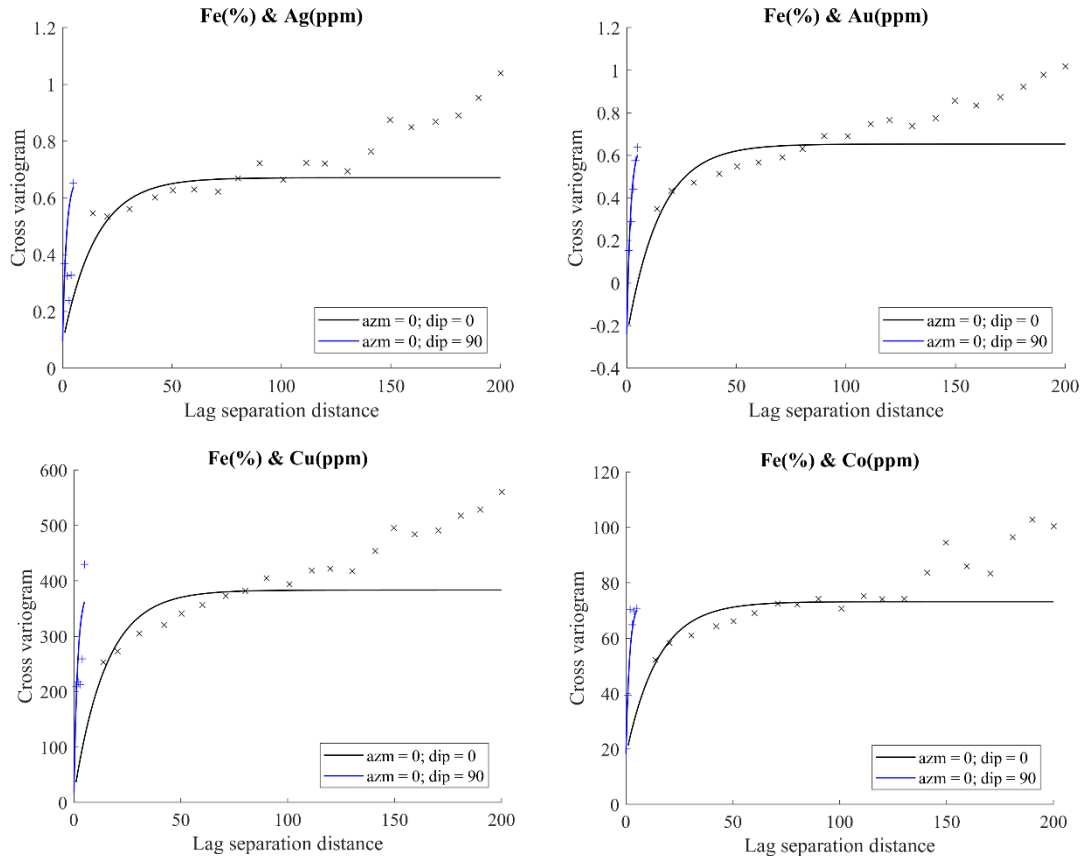
**Ilustración 28. Variogramas cruzados para la ley de oro**



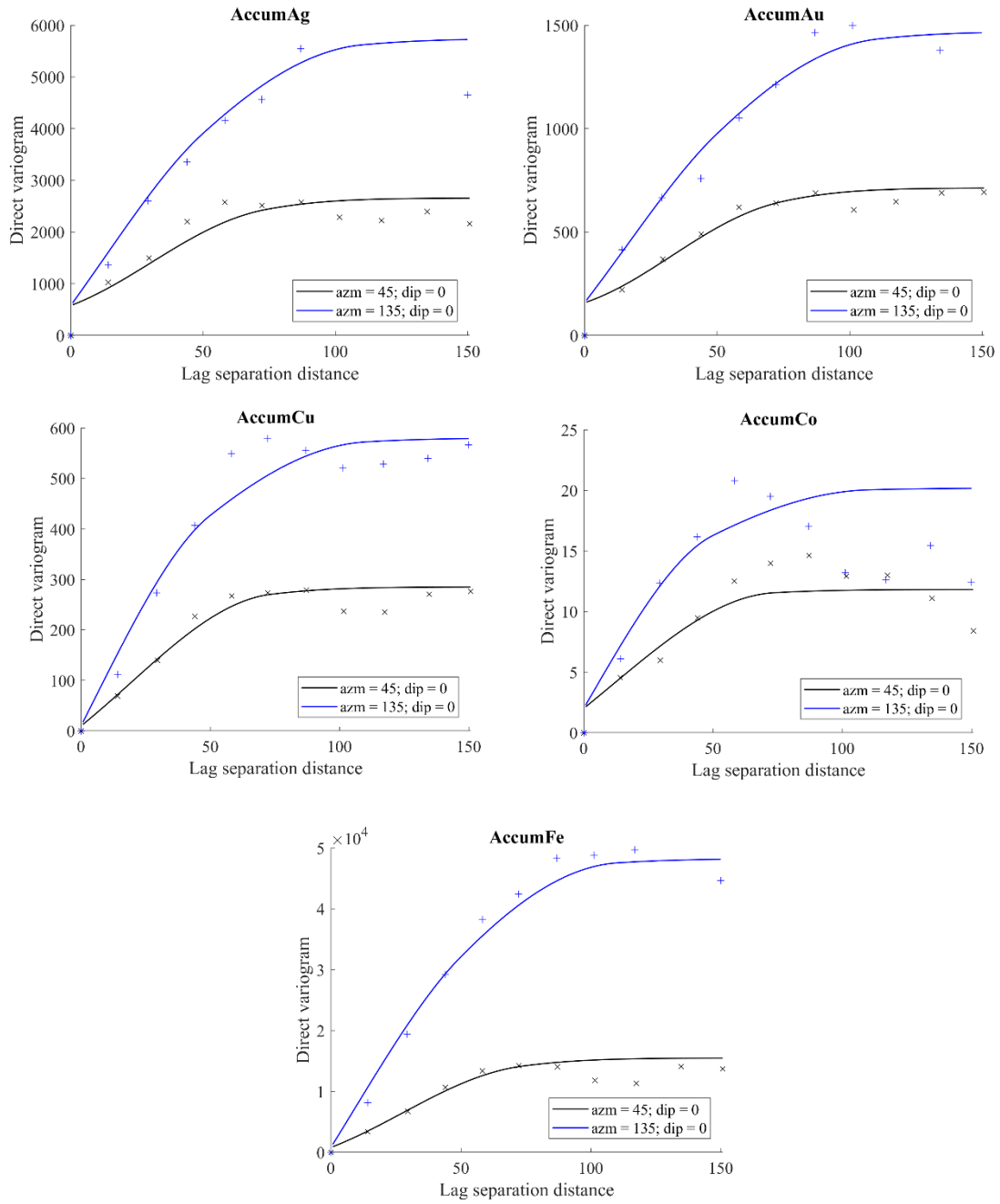
**Ilustración 29. Variogramas cruzados para la ley de cobre**



**Ilustración 30. Variogramas cruzados para la ley de cobalto**

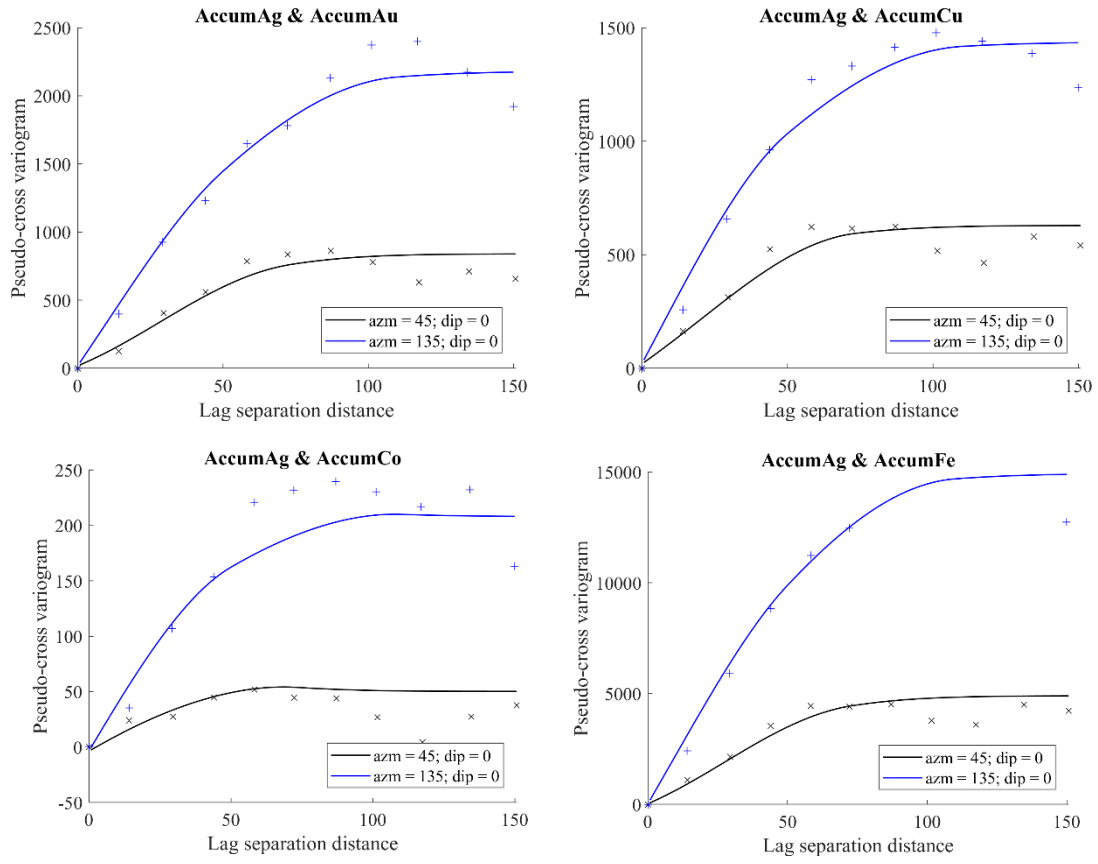


**Ilustración 31. Variogramas cruzados para la ley de hierro**

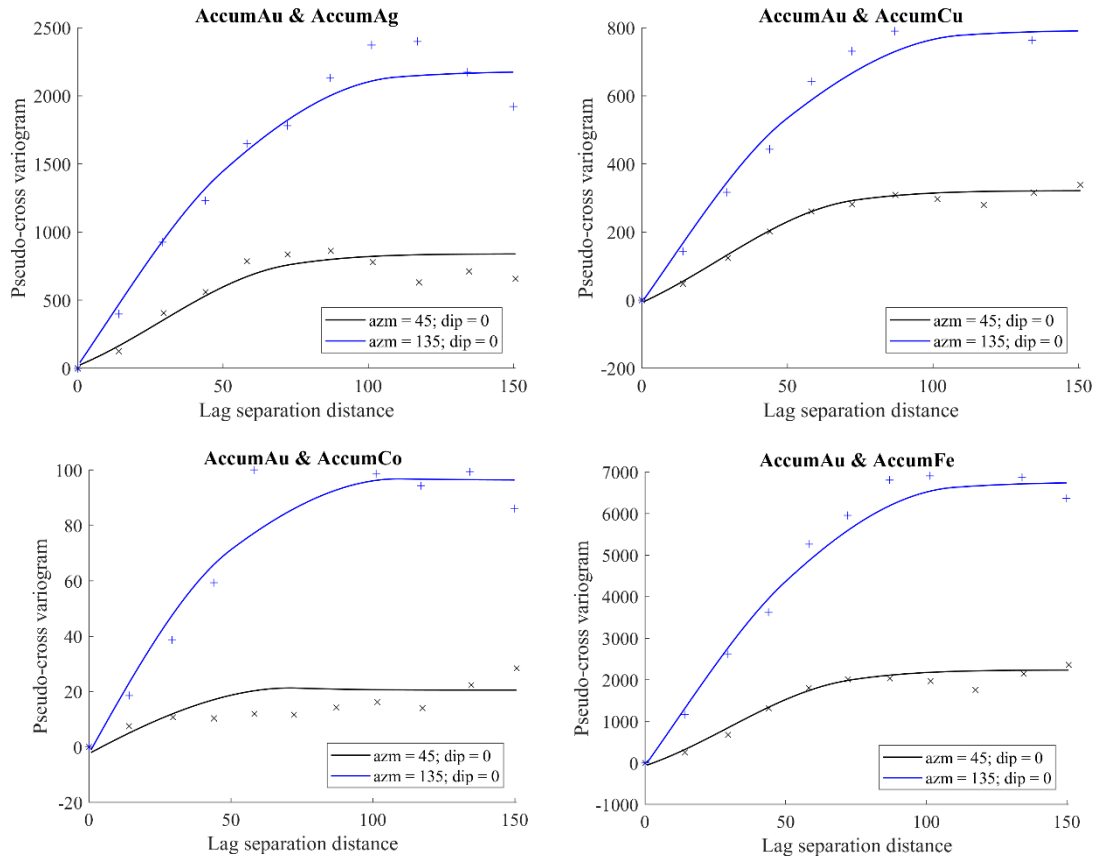


**Ilustración 32. Variogramas directos de acumulaciones**

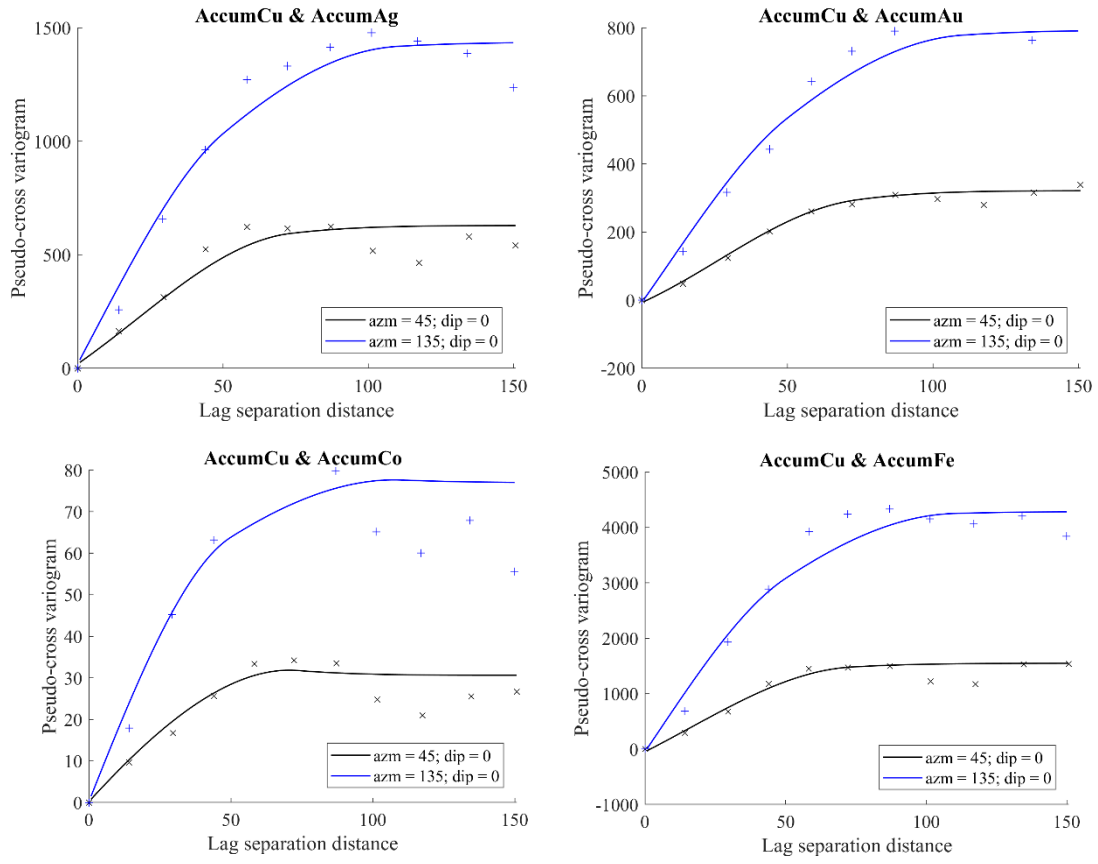




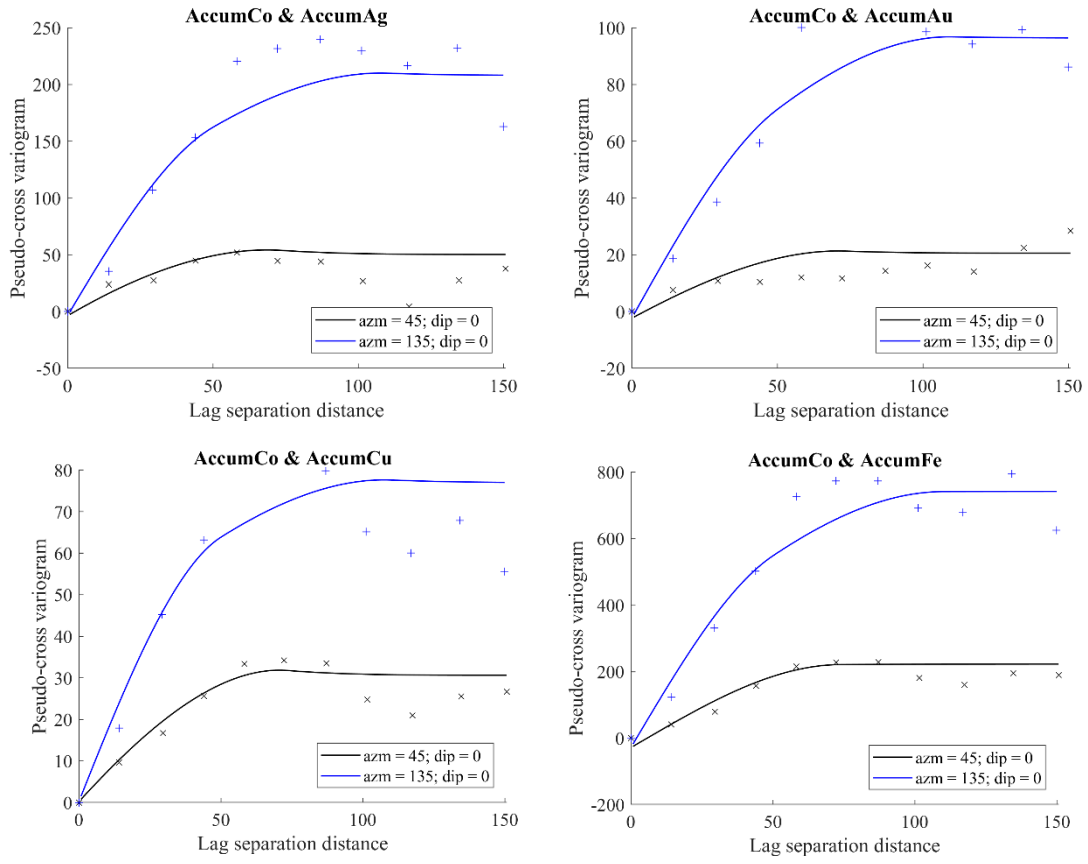
**Ilustración 33. Variogramas cruzados para acumulación de plata**



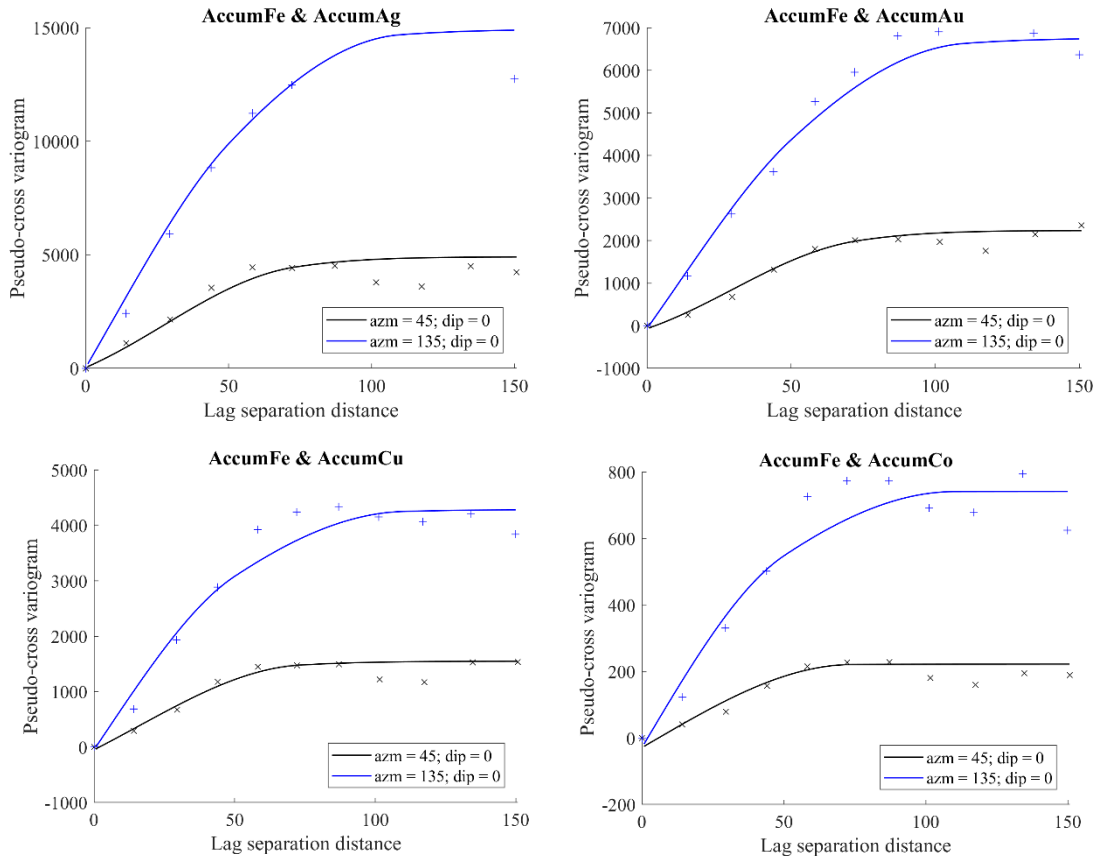
**Ilustración 34. Variogramas cruzados para acumulación de oro**



**Ilustración 35. Variogramas cruzados para acumulación de cobre**



**Ilustración 36. Variogramas cruzados para acumulación de cobalto**



**Ilustración 37. Variogramas cruzados para acumulación de hierro**