



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL
PREDICTIVO PARA SISTEMAS DIFUSOS BASADOS EN DESIGUALDADES
MATRICIALES LINEALES**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN ELÉCTRICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

MANUEL ALEJANDRO NOVA SEPÚLVEDA

PROFESORA GUÍA:
DORIS SÁEZ HUEICHAPAN
PROFESOR CO-GUÍA:
DIEGO MUÑOZ CARPINTERO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
KARINA ACOSTA BARBOSA
MARCOS ORCHARD CONCHA

SANTIAGO DE CHILE
2021

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA ING., MENCIÓN ELÉCTRICA Y AL
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO
POR: **MANUEL ALEJANDRO NOVA SEPÚLVEDA**
FECHA: 2021
PROF. GUÍA: DORIS SÁEZ HUEICHAPAN
PROF. CO-GUÍA: DIEGO MUÑOZ CARPINTERO

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL PREDICTIVO PARA SISTEMAS DIFUSOS BASADOS EN DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES

En este trabajo se diseñan e implementan estrategias de control predictivo con dinámica optimizada para modelos difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza basado en desigualdades matriciales lineales. Estas estrategias incorporan una ley de control predicha difusa con estado propio que evoluciona con una dinámica que se optimiza para maximizar la zona de operación resultante del sistema. En particular, esta optimización de la ley de control predicha se realiza para que las estrategias de control predictivo cumplan las restricciones operativas y establezcan el sistema difuso.

En esta optimización se han usado condiciones que vienen de desigualdades matriciales no lineales y difusas, que para ser impuestas se emplean cambios de variables, complementos de Schur y relajaciones de Pólya para expresar en condiciones asintóticamente equivalentes a través de desigualdades matriciales lineales. De esta forma, los problemas de optimización son convexos y son tratables computacionalmente.

Los resultados muestran que las estrategias de control predictivo con dinámica optimizada logran controlar los sistemas difusos cumpliendo satisfactoriamente las restricciones operativas. Asimismo, se comprueba la mejora en los desempeños y las zonas de operación de los controladores al utilizar leyes de control predichas difusas con respecto a la utilización de leyes de control no difusas.

Para mis abuelos, Antonio y Sandra
Para mis padres, Nathalie y Gabriel
Para mis hermanos, Gabriel, Marco y Alex
Para mi novia, Elena

... Sí, tengo talento y lo luzco ...

Agradecimientos

Me gustaría empezar agradeciendo a mi familia por el constante apoyo, soporte y mucho amor que me han entregado durante toda mi vida. En particular quiero agradecer a mis abuelos por el esfuerzo que realizaron para que hoy esté donde estoy; sé que estarían muy orgullosos de que uno de sus pastelitos esté terminando la U. A mis padres por dar todas sus fuerzas para criarme de la mejor forma posible, por trabajar inagotablemente para asegurar mi bienestar, por inspirarme a ser siempre mejor persona e inculcarme que la educación es lo más importante para superarnos. Gracias Nathalie y Gabriel, la pega no fue nada fácil.

Me ha resultado muy difícil hablar en primera persona cuando siento que soy uno junto a mis hermanos. Agradezco a mis dos clones, Gabriel y Marco, por acompañarme durante toda la vida en todos los desafíos que nos hemos planteado, por apoyarme y exigirme siempre a ser mejor en todo sentido y nunca rendirme. Al conchito, el Alex, que con el supimos qué era tener un hermano, y que me obligó a descansar de la U con Legos, Fornite y Marvel.

A mi novia Elena, la naca, que me enseñó a ser menos frío y que se robó mi corazón (unos cuantos polerones también), muchas gracias por amarme y ser mi confidente. Te has convertido en una parte fundamental de mi vida, espero que podamos cumplir todos los planes y sueños que nos hemos propuesto para el futuro.

A mis amigos que me han acompañado desde mi años escolares y se han convertido en amigos de vida, a quienes les agradezco por cada uno de los viajes, carretes (algunos mejor no recordar) y juntas, pero por sobre todo les doy las gracias por las risas, amistad sincera, y apañe en los momentos difíciles. Igualmente, a mis compañeros de sección en plan común y los K de eléctrica por su apoyo, compañía en los años de universidad y muchos almuerzos o ventanas que supimos muy bien aprovechar. También a aquellas personas que me apoyaron y colaboraron durante toda mi estancia en Beauchef.

Gracias a todas las personas que aportaron el desarrollo de este trabajo, de los cuales me gustaría destacar a la Profesora Doris Sáez y a el Profesor Diego Muñoz, quienes me guiaron en el desarrollo de esta tesis. Hago especial énfasis con el *Profe* Diego que me dirigió en investigaciones por dos años (en seminario de investigación, trabajo de título I y magíster). El estallido social o la pandemia no fue impedimento para que me brindase clases magistrales de control predictivo, revisarme cada una de las demostraciones e incluso ayudarme a encontrar errores en los códigos. Muchas Gracias por todo.

Finalmente, quisiera agradecer a la Fundación Moisés Mellado por su apoyo financiero en pregrado y a Paulette Iribarne por toda su labor con la red de ingenieros solidarios.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Hipótesis	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Estructura de la tesis	5
1.5. Notaciones y definiciones básicas	6
2. Control Predictivo basado en modelos	8
2.1. Control predictivo clásico - MPC	9
2.1.1. Formulación del problema	9
2.1.2. Condiciones para estabilidad	11
2.2. Control predictivo robusto - RMPC	14
2.2.1. RMPC para sistemas con incerteza multiplicativa	14
2.2.1.1. Sistemas con incerteza multiplicativa	14
2.2.1.2. Estrategia de RMPC para sistemas con incerteza multiplicativa	15
2.2.1.3. Estrategia de RMPC con dinámica optimizada para sistemas con incerteza multiplicativa	19
2.2.2. RMPC para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa	24
2.2.2.1. Sistema con incerteza aditiva y multiplicativa	24
2.2.2.2. Estrategia de RMPC con dinámica optimizada para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa	25
2.3. Control predictivo basado en modelos difusos	29
2.3.1. Modelos difusos Takagi-Sugeno	30
2.3.2. FMPC para sistemas con modelos locales lineales	31
2.3.3. FRMPC para sistemas con modelos locales no lineales con incerteza aditiva	38
2.4. Desigualdades matriciales lineales difusas	43
2.4.1. Aplicaciones de las relajaciones de Pólya a FLMIIs	46
2.5. Discusión	48
3. MPC con dinámica optimizada basado en LMIs para sistemas difusos Takagi-Sugeno	50
3.1. Ley de control con dinámica optimizada difusa sin incerteza (DOPDC)	51
3.1.1. Formulación del problema	51
3.1.2. Estrategia de control	52
3.1.3. Análisis de estabilidad	59
3.1.4. Análisis del tamaño del conjunto estabilizante	60

3.2.	Casos particulares de la ley de control predicha	64
3.2.1.	Formulación del Problema	64
3.2.1.1.	Ley de control predicha KD-LND	66
	Estrategia de control	66
	Análisis del tamaño del conjunto estabilizante	68
3.2.1.2.	Ley de control predicha KND-LD	68
	Estrategia de control	68
	Análisis del tamaño del conjunto estabilizante	70
3.2.1.3.	Ley de control predicha KND-LND	70
	Estrategia de control	70
	Análisis del tamaño del conjunto estabilizante	72
3.3.	Discusión	72
4.	RMPC con dinámica optimizada basado en LMIs para sistemas difusos Takagi-Sugeno con incerteza aditiva	74
4.1.	Ley de control con dinámica optimizada difusa con incerteza aditiva (DOPDC-I)	75
4.1.1.	Formulación del problema	75
4.1.2.	Estrategia de control	76
4.1.3.	Análisis de estabilidad	84
4.2.	Casos particulares de la ley de control predicha	85
4.2.1.	Formulación del problema	85
4.2.1.1.	Ley de control predicha KD-LND	87
4.2.1.2.	Ley de control predicha KND-LD	89
4.2.1.3.	Ley de control predicha KND-LND	91
4.3.	Discusión	93
5.	Resultados de Simulación	94
5.1.	Sistema benchmark difuso Takagi-Sugeno	94
5.1.1.	Primer caso de estudio	96
5.1.2.	Segundo caso de estudio	103
5.2.	Discusión	111
6.	Caso de Estudio: Sistemas de Climatización HVAC	112
6.1.	Sistemas HVAC	112
6.1.1.	Unidad de tratamiento de aire de un sistema HVAC	113
6.2.	Modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC	115
6.3.	Simulaciones	118
6.3.1.	Resultados de simulación	119
6.4.	Discusión	124
7.	Conclusiones	126
	Trabajo Futuro	127
8.	Glosario	128
	Bibliografía	129

Anexo A. Conjuntos Invariantes	133
Anexo B. Estabilidad Lyapunov	135
Anexo C. Desigualdades Matriciales Lineales	137
Anexo D. Procedimiento S	138
D.1. El procedimiento S para funciones cuadráticas y desigualdades no estrictas .	138
D.2. El procedimiento S para formas cuadráticas y desigualdades estrictas	138
Anexo E. Estabilidad de leyes de control de realimentación difusas con y sin incerteza aditiva	139
Anexo F. Diseño de leyes de realimentación difusas	141
Sistema difuso sin incerteza	141
Sistema difuso con incerteza aditiva	142
Anexo G. Algoritmos de control predictivo con dinámica optimizada para modelos difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva	144
G.1. MPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno	144
G.2. RMPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno con incerteza aditiva	146

Índice de Tablas

5.1.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el primer criterio de diseño.	97
5.2.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el segundo criterio de diseño.	97
5.3.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el tercer criterio de diseño.	97
5.4.	Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio.	99
5.5.	Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio.	99
5.6.	Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el tercer criterio.	99
5.7.	Costo cuadrático total promedio	103
5.8.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el primer criterio de elección bajo un sistema con incerteza	104
5.9.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el segundo criterio de elección para un sistema con incerteza	104
5.10.	Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el tercer criterio de elección para un sistema con incerteza	104
5.11.	Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio para un sistema con incerteza.	105
5.12.	Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio para un sistema con incerteza.	106
5.13.	Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el tercer criterio para un sistema con incerteza.	106
5.14.	Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza	109
5.15.	Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza bajo el cuarto criterio de diseño	110
5.16.	Cota norma l_2 de las perturbaciones con respecto a la salida para las leyes de control base y predicha para distintos criterios de diseños específicos.	110
6.1.	Región de atracción de las leyes de control base bajo el primer criterio específico de diseño.	119
6.2.	Región de atracción de las leyes de control base bajo el segundo criterio específico de diseño.	119

6.3.	Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio para el modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire.	120
6.4.	Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio para el modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire.	120
6.5.	Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza	124

Índice de Ilustraciones

5.1.	Función de pertenencia	95
5.2.	(a) Trayectorias en lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones la dinámica bajo una ley de control predicha KND-LND bajo el criterio 3	102
5.3.	(a) Trayectorias en lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 3	102
5.4.	(a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KND-LND bajo el criterio 3	108
5.5.	(a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 3	108
6.1.	Señales involucradas con sistemas HVAC	113
6.2.	Unidad de tratamiento de aire de un Sistema de Climatización HVAC [41].	114
6.3.	(a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 1	122
6.4.	(a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 1	122
6.5.	Perfil de perturbaciones	123
6.6.	Costo por etapa promedio para las leyes de control predichas KND-LND y KD-LD bajo el primer criterio criterio	124

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo se presenta la motivación de la tesis y luego se realiza una breve introducción a los temas abordados en este trabajo. Posteriormente se plantean las hipótesis y los objetivos generales y específicos, para continuar con la estructura de este documento y finalizar con la presentación de notaciones utilizadas en este trabajo.

1.1. Motivación

El control predictivo basado en modelos (MPC, por su nombre en inglés *model predictive control*) es una técnica de control que utiliza modelos representativos de un sistema, para realizar una optimización del comportamiento futuro del modelo del sistema. Para cumplir con este propósito, estas estrategias de control calculan en cada instante una secuencia de acciones de control que minimiza un funcional de costos sujeto al cumplimiento de las restricciones para el estado actual y los futuros del modelo del sistema. Este procedimiento genera una secuencia óptima de acciones de control, donde solo se aplica la primera entrada de la secuencia. Este cálculo se repite en cada instante actualizando el estado actual del modelo[1].

Como se mencionó, los sistemas presentan restricciones físicas, operativas u otras, que deben ser cumplidas por el sistema. Por lo anterior es que el MPC ha tenido un amplio éxito, pues este controlador tiene la capacidad de manejar restricciones en la formulación del problema de optimización [2, 3]. Existen muchas otras estrategias que pueden incorporar restricciones, pero no tienen la capacidad de manejar las restricciones en un modo directo como es el caso de MPC. El mejor desempeño de MPC, se da cuando existe un conocimiento completo del proceso, pero en general, en aplicaciones reales los sistemas se ven afectados por perturbaciones externas, no se tiene acceso completamente al estado o el sistema tiene parámetros que no son completamente conocidos [4, 5].

La incerteza en los parámetros que define la dinámica o a variables externas que afectan al proceso, generan errores en las predicciones del modelo del sistema. Esto provoca que no todo el tiempo se cumplan las restricciones impuestas para el sistema, lo cual puede provocar problemas en la correcta operación de la planta a controlar.

Cuando se conoce por completo el sistema y todas las variables que afectan al proceso se habla de MPC, MPC clásico o MPC determinístico, y cuando se maneja la incerteza de un

sistema mediante un enfoque de peor caso, se habla de control predictivo robusto (RMPC, por su nombre en inglés, *robust model predictive control*) [1].

Las estrategias de RMPC buscan entregar estabilidad y el cumplimiento de las restricciones para todas las posibles realizaciones de incertidumbre definidas dentro de un conjunto acotado. Las incertidumbres del sistema se pueden dividir en dos grandes tipos: incerteza multiplicativa e incerteza aditiva. La primera, son incertidumbres asociadas al modelo (de los parámetros del sistema) y las segundas en general son perturbaciones externas.

Las primeras estrategias de RMPC, como [6, 7], consideraban problemas de control óptimo en lazo abierto, obteniendo solo una secuencia de acciones de control conocidas, y válidas para todas las posibles realizaciones de las incertezas o perturbaciones. Por lo tanto, no se toma en cuenta la información futura disponible de los estados producto de la realización de la incerteza [8]. Estrategias más recientes mejoran su desempeño al usar esta información, el controlador determina las acciones de control que evita la violación de las restricciones al considerar los peores casos de valores que pueden adquirir las distintas realizaciones de la perturbación externa o los parámetros de modelo [5].

Un ejemplo de lo anterior, es la estrategia propuesta en [9], en la cual se calcula una ganancia de realimentación para la ley de control en cada instante tomando los valores extremos de las perturbaciones, y así las acciones de control cambian según la realización de las incertezas. Por lo tanto, las estrategias en lazo cerrado, realizan la optimización para obtener una secuencia de acciones de control que son funciones del estado y que dependen de la incerteza.

RMPC también se ha usado para procesos no lineales con buenos resultados, en particular cuando las no linealidades de la planta son fuertes, los modelos difusos han permitido modelar a los sistemas debido a su característica de aproximador universal [10, 11, 12]. Uno de los modelos difusos más usados que se puede encontrar en la literatura son los modelos Takagi-Sugeno [10], los cuales combinan varios modelos lineales locales, con el propósito de lograr representar la dinámica de sistemas complejos. Estrategias que consideran modelos difusos son conocidos como controles predictivos basado en modelos difusos (o FMPC, por su nombre en inglés *fuzzy model predictive control*) o FRMPC en modelos difusos con incertezas.

Resolver los problemas de optimización de forma exacta en las estrategias de RMPC o FRMPC sujeta a restricciones en lazo cerrado crece exponencialmente con el horizonte de predicción [13]. De esta forma, se requiere un gran esfuerzo computacional para horizontes pequeños o sencillamente, son problemas computacionalmente intratables. Varios trabajos [14, 15, 16], han incluido en sus estrategias de control el uso de desigualdades matriciales lineales (o LMIs, de sus siglas en inglés *linear matrix inequality*) para hacer frente a esta problemática.

Las restricciones de los problemas de optimización pueden ser planteadas como LMIs, es decir, en restricciones lineales con respecto a las variables a optimizar [17]. Para lograr esto, en la literatura se usan cambios de variables apropiados o el uso de herramientas matemáticas como lo son el complemento de Schur. El uso de LMIs o restricciones lineales, genera un problema de optimización convexo lo que se traduce en un problema computacionalmente

tratable, permitiendo poder aplicar estrategias de control en línea con un número de variables y restricciones que tienen crecimiento polinomial con respecto al horizonte de predicción, siendo usualmente lineal [1, 5, 18].

Varios trabajos de RMPC han podido realizar lo anteriormente descrito, ejemplos son [14, 16, 19, 20]. Los últimos desarrollos en control predictivo robusto [13, 21, 22], han incorporado una ley de control predicha con estado propio que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar, permitiendo obtener tasas de crecimiento lineal y de esta forma reducir aún más los esfuerzos computacionales. Estas estrategias de RMPC que incluyen leyes de control predichas con estado propio, son optimizadas para diseñar la dinámica asociada a la ley de control tal que maximicen la región de factibilidad de la estrategia de RMPC, es decir, la región para el estado donde la optimización resulta factible.

En este tipo de estrategias, el estado propio de las leyes de control predichas evolucionan en una dinámica propia, donde sus grados de libertad están dados por perturbaciones con respecto a una ley de control de realimentación lineal, que en esta tesis se denominará *Ley de control base*. En la literatura, como en [21, 22], a las leyes de control predichas con estado propio que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar, se les conoce como dinámica optimizada (o DO, por su nombre en inglés *Optimized Dynamics*). Según sea el contexto, en esta tesis se usará dinámica optimizada o leyes de control predichas con dinámica optimizada.

La estrategia de RMPC con dinámica optimizada para modelos con incerteza multiplicativa se presenta en [21] y para modelos con incerteza multiplicativa e incerteza aditiva se presenta en [22]. Estas estrategias imponen condiciones de factibilidad, invarianza y estabilidad que posteriormente son ‘linealizadas’ para tener un problema basado en LMIs, luego se resuelven para diseñar las leyes de control predicha de modo que cumplan con las restricciones operativas y estabilicen el sistema en el horizonte de predicción.

A pesar de tener estos avances en MPC y RMPC para modelos lineales, en la literatura no se han desarrollado estrategias con leyes de control predicha para sistemas no lineales que incluyan un estado extendido con dinámica propia que es un parámetro de diseño.

Basado en lo expuesto anteriormente, este trabajo busca en un primera instancia diseñar estrategias MPC con dinámica optimizada para que incorporen leyes de control predichas con estado propio que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar para sistemas no lineales con y sin incerteza. Para esto se utilizan modelos difusos, pues su característica de aproximador universal permiten representar un sistema no lineal en una combinación de modelos locales.

Los modelos difusos, en particular, los modelos Takagi-Sugeno permiten utilizar las mismas herramientas que en el caso de los modelos con incerteza multiplicativa debido a que ambos tipos de modelos son similares, puesto que sus dinámicas están dadas por una interpolación. En los modelos con incerteza multiplicativa, la dinámica del sistema se obtiene de una combinación no conocida de parámetros extremos conocidos y en el caso de los modelos difusos Takagi-Sugeno, la dinámica del sistema se obtiene de una combinación de reglas difusas conocidas ponderadas por el grado de activación de cada una de ellas que también es conocido. Es acá justamente donde radica su principal similitud y su principal diferencia.

Como similitud, en ambos modelos se conocen los valores extremos que se interpolan (parámetros extremos y reglas difusas) y como diferencia, que solo en los modelos difusos se conoce el ponderador en cada instante.

Por consiguiente, en este trabajo, se extiende el uso de herramientas de modelos robustos a modelos difusos con y sin incerteza para diseñar estrategias de MPC y RMPC que incluyan leyes de control predichas con estado propio que evoluciona en una dinámica que puede ser optimizada.

Además, con el objeto de obtener un esfuerzo computacional similar a las estrategias presentes en la literatura, se expresan las condiciones de diseño a través de desigualdades matriciales lineales difusas (FLMIs, de su nombre en inglés *fuzzy linear matrix inequality*¹) con el uso de herramientas como lo son: cambios de variables, complemento de Schur y procedimiento S . Luego, estas son expresadas en condiciones asintóticamente equivalentes a través de LMIs con el uso de relajaciones de Pólya.

Se evidencia, que al aumentar los grados de complejidad de las relajaciones de Pólya, se obtienen condiciones asintóticamente equivalentes a las impuestas por las condiciones originales (no lineales). Estas relajaciones permitirán además obtener zonas de operación del controlador cada vez mayores.

Con el objeto de mostrar los beneficios de las propuestas presentadas en esta tesis, se plantean dos casos de estudio simples. El primero se encuentra basado en el control de un modelo difuso Takagi-Sugeno sin incerteza, mientras que el segundo caso, el sistema está afectado con incerteza. Para ambos casos, los controladores propuestos debe estabilizar los sistemas en el origen. Finalmente, se plantea un caso de estudio aplicado, compuesto por un sistema de la unidad de tratamiento de aire de un sistema climatización. La razón de este ultimo caso de estudio es probar el funcionamiento de las estrategias de control predictivo propuestas en esta tesis, llevando a cabo un análisis de simulaciones más cercanas a lo que sería una implementación real de los controladores.

1.2. Hipótesis

El desarrollo de esta tesis consiste en el diseño de estrategias de control predictivo con dinámica optimizada para modelos difusos. En relación a esto, las hipótesis asociadas a este trabajo son las siguientes:

- Es posible extender estrategias de control predictivo con dinámica optimizada para sistemas lineales con incerteza aditiva y multiplicativa a modelos difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva.
- Es posible utilizar estrategias de control predictivo con leyes de control predichas difusas con dinámica optimizada que logran controlar sistemas difusos satisfaciendo las

¹ Se entiende que las desigualdades matriciales difusas son no lineales debido a los grados de activación normalizados pero a pesar de esto, se utilizará este nombre para hacer referencia de que se tiene una desigualdad matricial compuesta por una suma ponderada, por los grados de activación de matrices que son lineales con respecto a las variables de diseño u optimización.

restricciones operativas impuestas.

- Estrategias de control predictivo con dinámica optimizada difusas permitirá obtener mejores zonas de operación que al considerar dinámica optimizada no difusa.

1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es diseñar e implementar estrategias de control predictivo para sistemas difusos del tipo Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva. Las estrategias propuestas incorporan una ley de control predicha que tiene un estado que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar, es decir, con dinámica optimizada. Estos diseños se basan en el uso de relajaciones de Pólya para obtener, y luego usar, desigualdades matriciales lineales menos conservativas.

Para lograr esto, se pueden enumerar los siguientes objetivos específicos:

1. Establecer LMIs que impongan invarianza y factibilidad sobre la optimización de la dinámica de la ley de control predicha para un modelo difuso Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva.
2. Diseñar estrategias de control predictivo no lineal para modelos difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva que incorporen un controlador con una ley de control predicha con dinámica optimizada que cumpla las LMIs anteriores para obtener condiciones de estabilidad.
3. Implementar y analizar el tamaño de la zona de operación y desempeño de las estrategias de control predictivo diseñadas en esta tesis. Para esto, se utilizarán sistemas no lineales simples y la aplicación sobre un sistema de climatización.

1.4. Estructura de la tesis

El presente trabajo consta de siete capítulos, cada uno de los cuales contemplará una breve descripción preliminar de los temas a abordar. El contenido de cada capítulo se resume a continuación.

Este primer capítulo contiene la motivación para realizar este trabajo de investigación, una breve introducción a los temas que se abordaran en esta tesis, hipótesis, objetivos y las principales notaciones utilizadas en este trabajo.

En el segundo capítulo se presenta un marco teórico donde se resume el estado del arte de la teoría de control predictivo clásico, robusto y sus versiones difusas. Se revisan los aspectos teóricos más relevantes, para sistemas lineales con incerteza multiplicativa y/o aditiva, y modelos difusos con y sin incerteza aditiva.

En el tercer capítulo, como primera contribución de esta tesis, se presenta un set de estrategias de control predictivo difuso para modelos Takagi-Sugeno sin incerteza. En estas estrategias se incorpora una ley de control predicha con estado propio que evoluciona en una

dinámica que se puede optimizar para maximizar la zona de operación. Además, se definen las condiciones de factibilidad e invarianza que deben ser incluidas en la etapa offline para diseñar el controlador, así como, aquellas condiciones que deben ser incluidas en la etapa online para optimizar un funcional de costos futuro y estabilizar asintóticamente el sistema.

En el cuarto capítulo, como una segunda contribución de esta tesis, se presenta un set de estrategias de control predictivo robusto difuso para modelos Takagi-Sugeno con incerteza. Al igual que en el capítulo anterior, se incorpora una ley de control predicha con estado propio que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar para maximizar la zona de operación. Además, se definen las condiciones de factibilidad e invarianza que deben ser incluidas en la etapa offline para diseñar el controlador, así como, aquellas condiciones que deben ser incluidas en la etapa online para optimizar un funcional de costos futuro y estabilizar el sistema.

En el quinto capítulo se presentan análisis por simulación de las estrategias propuestas en esta tesis. Éstas, se evalúan en términos del tamaño de la zona de operación, estabilidad, satisfacción de restricciones operativas y costos. Los sistemas, en los cuales se aplican las estrategias, son un modelo difuso sin incerteza y otro con incerteza, que se basan en un sistema con incerteza multiplicativa presentado en [13].

En el sexto capítulo se presenta, como caso de estudio aplicado, un modelo difuso con incerteza para un sistema real de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización. En este capítulo, se evalúa el desempeño de las estrategias propuestas en esta tesis en términos del tamaño de la zona de operación, estabilidad, satisfacción de restricciones operativas y costos.

En el séptimo capítulo se presentan las principales conclusiones, cumplimiento de los objetivos y trabajo futuro. Finalmente, en el octavo capítulo se presenta el glosario de las siglas utilizadas en este trabajo.

1.5. Notaciones y definiciones básicas

Algunas notaciones y definiciones básicas se presentan a continuación:

- x_k , u_k y w_k representan el estado, señal de control y perturbaciones en el instante k .
- $(\cdot)_{k+i|k}$ denota la predicción de la variable en el instante $k+i$ realizada en el instante k .
- $\underline{1}$ representa el vector $[1, \dots, 1]^T$ y I representa la matriz identidad, ambos con dimensiones apropiadas.
- 0 representa una matriz de dimensiones apropiadas con todos sus elementos iguales a cero.
- \mathbb{R} es el conjunto de números reales, \mathbb{Z} es el conjunto de números enteros y $\mathbb{Z}_{[i,j]}$ denota los números enteros entre i y j .
- $A \succeq 0$ denota que A es una matriz semidefinida positiva y $A \succ 0$ denota que A es una matriz definida positiva

- $Co\{(A_i, B_i)\}$ representa la envoltura convexa formada a partir de los vértices (A_i, B_i)
- \star representa un bloque simétrico en una matriz simétrica.
- $A_j \in Co\{A_i, i = 1, \dots, v_m\}$ es una matriz, donde j indica que es vértice conocido de una envoltura convexa.
- A^j , $j \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ es una matriz, donde j indica que es una matriz conocida asociada al modelo local j del modelo difuso conformado por L reglas difusas.

Capítulo 2

Control Predictivo basado en modelos

Este capítulo tiene como objetivo mostrar las más importantes estrategias de control predictivo basado en modelos que servirán como base para este trabajo: en sus versiones clásico, robusto, lineal difuso y no lineal difuso. También se presentan estrategias para optimizar la dinámica de las predicciones para modelos lineales con incerteza multiplicativa y con incerteza aditiva como base para poder ser aplicada en este trabajo. La finalidad de presentar esta amplia base teórica, es comprender el funcionamiento de estas estrategias de control, y así generar nuevas variantes que incluyan leyes de control predichas con estado propio que evolucionan en una dinámica que puede ser optimizada para modelos difusos. La revisión bibliográfica logra fijar los conceptos claves para las propuestas de control predictivo para sistemas difusos que se presenta en esta tesis.

En este capítulo; primero, se revisa la formulación del control predictivo clásico para sistemas lineales (MPC), haciendo énfasis en describir las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que se deben considerar para su implementación.

Segundo, se enuncia y revisa la formulación de control predictivo robusto (RMPC) para sistemas lineales con incerteza multiplicativa, especificando las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que se deben considerar para sus implementaciones. Además, se presentan dos estrategias de control predictivo robusto que incorporan leyes de control predichas con estado propio que evolucionan en una dinámica a optimizar que mejora el desempeño en términos de costo computacional de las estrategias anteriormente mencionadas.

Tercero, se presenta una estrategia de control predictivo difuso (FMPC) para modelos Takagi-Sugeno sin incerteza y otra para modelos con incerteza aditiva (FRMPC).

Finalmente, se presentan las relajaciones de Pólya como herramienta para expresar FLMIIs en un conjunto de LMIIs menos conservativas y asintóticamente equivalente a las condiciones originales.

2.1. Control predictivo clásico - MPC

2.1.1. Formulación del problema

El control predictivo clásico o determinístico se refiere a la clase de controles que incluyen sistemas lineales e invariantes (o LTI, por su nombre en inglés *linear time invariant*), donde la dinámica es descrita por un modelo discreto sin incertezas en los parámetros ni afectado por perturbaciones. La dinámica del sistema se describe en variables de estado de un modelo de tiempo discreto LTI por la ecuaciones:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.1)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2.2)$$

$$Fx + Gu \leq \underline{1}, \quad (2.3)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado compuesto por n_x variables de estado del sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada compuesto por n_u variables de control del sistema, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de salida compuesto por n_y variables de salida del sistema y el índice k representa el instante actual en tiempo discreto. En (2.1), $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ y $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ son matrices que al ser multiplicadas por sus respectivos vectores, definen la dinámica del sistema. En (2.2), $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ es una matriz que define la salida del modelo a partir de las variables de estado. En (2.3), se presentan las restricciones lineales del sistema definido en (2.1), donde $F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_x}$ es una matriz que al ser multiplicada por el vector de estado representa las n_f restricciones asociadas a variables de estado del sistema, por su parte, $G \in \mathbb{R}^{n_g \times n_u}$ es una matriz que al ser multiplicado por el vector de entrada representa las n_g restricciones asociadas a las variables de control del sistema.

Esta estrategia es considerada un problema de regulación con el propósito de llevar el sistema al origen. Para cumplir con esto, MPC optimiza el rendimiento predicho del sistema cumpliendo con las restricciones (2.3) para un horizonte de predicción N , mediante la búsqueda de una secuencia óptima de entradas de control, y solo aplica la primera al sistema. Este procedimiento se repite en cada instante actualizando la información disponible.

Además, esta estrategia permite llevar el sistema a cualquier punto de equilibrio. Esto se realiza mediante un cambio de variables para que el sistema sea redefinido en un nuevo sistema de coordenadas donde el punto de equilibrio sea el origen.

El rendimiento predicho o función objetivo de esta estrategia de control, para un modelo discreto LTI sujeto a restricciones, está dado por el costo predicho a lo largo del tiempo en cada instante k , según el siguiente funcional:

$$J(\vec{x}_k, \vec{u}_k) = V(x_{k+N|k}) + \sum_{i=0}^{N-1} l(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad (2.4)$$

donde $\vec{x}_k = \{x_{k|k}, x_{k+1|k}, \dots, x_{k+N-1|k}\}$ y $\vec{u}_k = \{u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$ son el vector de estados futuros y el vector de entradas futuras, respectivamente. Estos están conformados por $x_{k+i|k}$ y $u_{k+i|k}$, que denotan las predicciones para las variables de estado y las entradas, en el instante $k+i$ dada la información del instante k . En este funcional, $V(x_{k+N|k})$ y

$l(x_{k+i|k}, u_{k+i|k})$ se denominan respectivamente, costo terminal y costo por etapa. Cabe destacar que para esta tesis se consideran costos de diversos tipos para $V(x_{k+N|k})$ y $l(x_{k+i|k}, u_{k+i|k})$ que se definen en cada estrategia.

Además, el estado medido en k debe ser igual al estado predicho para este instante, lo que se representa en (2.5). También, las predicciones $x_{k+i|k}$ y $u_{k+i|k}$ deben satisfacer la dinámica del estado, es decir, deben cumplir (2.6) y las limitaciones del sistema (2.7) para todo el horizonte de predicción N , lo que se expresa a continuación:

$$x_{k|k} = x_k, \quad (2.5)$$

$$x_{k+i+1|k} = Ax_{k+i|k} + Bu_{k+i|k}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (2.6)$$

$$Fx_{k+i|k} + Gu_{k+i|k} \leq \underline{1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.7)$$

El costo cuadrático considerado para esta estrategia de control se expresa en la siguiente ecuación:

$$J(\vec{x}_k, \vec{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}) + x_{k+N|k}^T P x_{k+N|k}, \quad (2.8)$$

donde las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ y $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ definen el costo por etapa asociados a los estados y entradas, respectivamente y $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ define el costo terminal asociado a los estados terminales del sistema. Además, Q es semidefinida positiva ($Q \succeq 0$) y R es definida positiva ($R \succ 0$).

Luego, para obtener la secuencia óptima de señales de entrada de control futuras $\{u_{k+i|k}\}$, y las predicciones del estado $\{x_{k+i|k}\}$ asociadas la dinámica (2.1) en un horizonte de predicción N , se debe minimizar el funcional de costos cuadráticos, es decir, resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{\vec{x}_k, \vec{u}_k} \quad & J(\vec{x}_k, \vec{u}_k) \quad (2.9) \\ \text{s.a} \quad & x_{k|k} = x_k, \\ & x_{k+i+1|k} = Ax_{k+i|k} + Bu_{k+i|k}, \\ & Fx_{k+i|k} + Gu_{k+i|k} \leq \underline{1}, \\ & x_{k+N|k} \in \mathbb{X}_f, \\ & i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

donde $\vec{x}_k = \{x_{k|k}, x_{k+1|k}, \dots, x_{k+N-1|k}\}$ y $\vec{u}_k = \{u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$ corresponden a las variables de optimización.

Cabe notar que en (2.9), se agrega la restricción para el estado terminal y se define por:

$$Hx_{k+N|k} \leq \underline{1}, \quad (2.10)$$

donde la matriz $H \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ permite garantizar que las predicciones posteriores al horizonte de predicción cumplan las restricciones. Más detalles se entregan en la siguiente sección.

En resumen, esta estrategia de control en cada instante de tiempo k mide el valor del estado actual y resuelve el problema de optimización (2.9) cumpliendo con las restricciones para todos los estado y las acciones de control predichos en el horizonte de control. Luego se obtienen las secuencias de acciones de control futura asociado a los estado futuros resolviendo:

$$(\vec{x}_k^*, \vec{u}_k^*) = \underset{\vec{x}_k, \vec{u}_k}{\operatorname{argmin}} J(x_k, u_k) \quad (2.11)$$

s.a. $\{(2.6), (2.7) \text{ y } (2.10)\}$.

Posteriormente, solo se aplica la primera al sistema, es decir, se aplica $u_k = u_{k|k}^*$. El proceso se continua repitiendo, por lo que se actualiza el valor del estado actual, se resuelve el problema de optimización y se aplica solo la primera acción de control.

A continuación, en el Algoritmo 1 se resume la estrategia de control predictivo clásico.

Algorithm 1: Control Predictivo para modelos lineales sin incerteza

```

while  $k > 0$  do
  1. Medir (o estimar)  $x_k$ 
  2. Resolver (2.9)
  3. Aplicar entrada  $u_k = u_{k|k}^*$ 
  4. Actualizar,  $k = k + 1$ 

```

En la siguiente sección se explica el concepto de modo dual, que permite utilizar el problema de optimización en un horizonte N como aproximación para un problema de optimización en un horizonte infinito. También, se muestran las condiciones para que el problema cumpla con lo descrito anteriormente, es decir, las restricciones se satisfagan y la ley de control estabilice al sistema.

2.1.2. Condiciones para estabilidad

En la literatura existen estrategias de control que logran minimizar el costo (2.8) en un horizonte de tiempo infinito, pero no son aplicables cuando existen restricciones. Por otro lado, esta estrategia de control minimiza el funcional sujeto a restricciones, pero no es posible realizarlo de manera exacta para un horizonte N muy grande o a tiempo infinito debido a que tiene un gran costo computacional.

Sin perjuicio de lo anterior, MPC con horizonte finito logra proporcionar acciones de control óptimas que pueden computarse de manera eficiente y en tiempo real, que aseguran una estabilidad del sistema. Esto es posible gracias al modo dual usado en la parametrización de las predicciones, lo que permite manejar las predicciones hasta el infinito y especificar la optimización como un problema de dimensión finita.

El modo dual divide el horizonte de predicción en dos intervalos, Modo 1 y Modo 2, los cuales se describen a continuación:

- **Modo 1**

El modo 1 se refiere a las N predicciones de las entradas de control, es decir,
 $\vec{u}_k = \{u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$ lo que define los estados predichos de sistema,
 $\vec{x}_k = \{x_{k|k}, x_{k+1|k}, \dots, x_{k+N|k}\}$.

■ Modo 2

El modo 2 se refiere a las predicciones a partir del instante $N + 1$ hasta el infinito.

Las predicciones para el modo 1 son variables de optimización (libres), mientras que para el modo 2, las predicciones son fijas y se definen a partir de una ley de retroalimentación del estado, dada por $u_k = Kx_k$, que se suele considerar la óptima para el problema de minimizar el costo en ausencia de restricciones.

Para que esta estrategia estabilice el sistema sujeto a las restricciones operativas, es necesario imponer algunas condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad sobre el modo 1 y 2.

A fin de establecer las restricciones de invarianza, se define a continuación cuando un conjunto es positivamente invariante¹.

Definición 1 El conjunto de estados $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ se dice positivamente invariante o simplemente invariante, para una dinámica del sistema, bajo una ley de control y sujeto a restricciones operativas si y solo si, para cualquier estado $x_k \in \mathbb{X}$, el estado siguiente x_{k+1} permanece dentro del conjunto \mathbb{X} [24].

En esta estrategia, la condición de invarianza se impone al aplicar una restricción terminal. Esta restricción obliga a que el estado final de modo 1 deba situarse en un conjunto invariante y así asegurar el cumplimiento de las restricciones hasta el infinito (en el modo 2).

La condición (2.10), de ser satisfecha, impone que el estado terminal esté en un conjunto terminal que es invariante para la dinámica (2.1), con restricciones (2.3) y bajo la ley de control $u_k = K_k x_k^*$. De esta forma, si un estado está contenido en \mathbb{X} , entonces en el instante siguiente el estado permanecerá en \mathbb{X} , lo que garantiza recursivamente que todos los estados futuros estén dentro de \mathbb{X} .

Ahora, para la condición de factibilidad, es importante entender que el objetivo de cualquier estrategia de control es llevar el proceso a un punto de operación deseado, y esto sería trivial si no se tuviesen diversas restricciones o limitaciones del tipo económicas, físicas u otras. Por lo tanto, la estrategia debe proporcionar acciones de control que satisfagan las restricciones asociadas a las entradas y además, deben ser diseñadas tal que los estados obtenidos a partir de estas, también cumplan con las restricciones de estado.

Bajo esta mirada, una estrategia de control, se dice factible en un instante k si cumple con las restricciones impuestas por el problema para ese instante. Además, un problema de optimización tiene factibilidad recursiva si en cierto instante k el problema es factible, y para

¹ Para mayor detalle revisar Anexo A.

los siguientes instantes $k + i$, $i \geq 1$ también es factible.

De acuerdo a las definiciones anteriores, factibilidad indica que para un instante k , todas las variables de predicción en modo 1 y 2 cumplen las restricciones. Así mismo, la factibilidad recursiva implica que si en un instante (por ejemplo, el inicial) el problema es factible, entonces será factible para todo instante posterior. De esta forma, para todos los instantes, se asegura que todas las variables en todo el horizonte de predicción (Modo 1 y 2) cumplan con las restricciones.

Para esta estrategia de MPC, la condición de factibilidad se cumple si en el instante inicial, el estado inicial medido es igual al estado predicho $x_{k|k}$. Luego, se tendrá factibilidad recursiva si en el instante posterior al inicial, el estado cumple la dinámica para una ley de control que satisfaga las restricciones. De esta forma, la formulación planteada es recursivamente factible para todas las variables predichas en el horizonte N (modo 1) y para todas las variables en modo 2 que estén dentro del conjunto terminal \mathbb{X}_f .

Ahora, con el propósito de establecer las condiciones de estabilidad que debe cumplir esta estrategia de control, se presentan las condiciones de estabilidad basadas en la teoría de Lyapunov².

Teorema 1 [25] *Si existe una función de Lyapunov $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, y funciones ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 crecientes y definidas positivas, tal que:*

$$\phi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi_2(\|x\|), \quad (2.12)$$

$$\Delta V(x) \leq -\phi_3(\|x\|), \quad (2.13)$$

donde $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$ y $f(x)$ representa la dinámica del sistema, entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

A partir de la teoría de Lyapunov, se establecen condiciones sobre el funcional de costo, la ley de control terminal y la restricción terminal para que esta estrategia de control sea asintóticamente estable. En efecto, las condiciones para que esta estrategia estabilice el sistema en el origen, se resumen en imponer que las predicciones en modo 1 sean factibles y que el estado terminal este contenido en un conjunto invariante y recursivamente factible. Por consiguiente, si se cumplen las condiciones de invarianza y factibilidad para esta estrategia, discutidas en párrafos anteriores, bajo el Teorema 1 se demuestra que el funcional de costo es decreciente y así el sistema se estabiliza.

La demostración de estabilidad se obtiene al comprobar que se cumplen las condiciones del Teorema 1. Esto se tiene al considerar $V(x) = J^*(\vec{x}_k, \vec{u}_k)$, $V(f(x)) = J^*(\vec{x}_{k+1}, \vec{u}_{k+1})$ y ϕ_3 igual al costo por etapa, lo que se traduce en que la solución óptima del problema es decreciente:

$$J^*(x_k, u_k) - J^*(x_{k+1}, u_{k+1}) \leq -(x_{k|k}^T Q x_{k|k} + u_{k|k}^T R u_{k|k}). \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) se traduce en que el costo terminal $V(x_{k+N|k}) = x^T P x$ es una función

² Para mayor detalle revisar Anexo B.

de Lyapunov decreciente si se cumple la siguiente condición:

$$(A + BK)^T P (A + BK) - P \preceq Q + K^T R K, \quad (2.15)$$

donde $Q, P \succ 0$ y $R \succeq 0$. Lo que implica que la ley de control terminal es asintóticamente estable. Sumando además que el conjunto terminal \mathbb{X}_f es positivamente invariante y recursivamente factible, todos los estados predichos cumplirán las restricciones y convergen al origen debido a que la ley de control terminal es asintóticamente estable. Por lo tanto la estrategia de control es asintóticamente estable.

2.2. Control predictivo robusto - RMPC

Los sistemas reales normalmente no tienen un comportamiento con una dinámica completamente conocida, en general siempre existe un grado de incerteza en los parámetros que rigen el modelo o perturbaciones externas que afectan al proceso. Las estrategias de RMPC toman en cuenta estos aspectos al buscar optimizar el desempeño y asegurar el cumplimiento de las restricciones impuestas en el problema de optimización para un sistema con incertezas.

En esta sección se presentan estrategias de control predictivo robusto para sistemas lineales con incerteza multiplicativa y/o aditiva. Estos trabajos son presentados en esta sección ya que establecen las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad a través del uso de LMIs, lo que permite obtener enfoques computacionalmente tratables.

Al final de esta sección se presentan estrategias RMPC que incorporan leyes de control predichas con estado propio que evolucionan en una dinámica a optimizar. Esto permite disminuir el costo computacional de las etapas online, al realizar el diseño óptimo de las predicciones a través de leyes de control predichas con estado propio en la etapa offline. Se presentan dos estrategias, una para un sistema con incerteza multiplicativa y otra, para sistemas más frecuente en la práctica, que incluye ambos tipos de incerteza: multiplicativa y aditiva.

2.2.1. RMPC para sistemas con incerteza multiplicativa

En esta subsección se presentan estrategias de RMPC para sistemas con modelos lineales donde su dinámica esta definida por matrices cuyos parámetros están restringidos por valores extremos conocidos, es decir, sistemas sujeto a incerteza multiplicativa. Esto se puede generar debido a que los parámetros del modelo cambian de forma natural o se tiene un conocimiento impreciso del sistema. Para cualquier caso, los estados del sistema real deben estar contenidas en el envoltura convexa de las trayectorias que son generadas por los modelos lineales definidos por vértices.

2.2.1.1. Sistemas con incerteza multiplicativa

Por las razones mencionadas anteriormente, se presenta una estrategia de control que considera dinámicas lineales más generales que el caso LTI. Por consiguiente considere el sistema discreto lineal y variante (o LTV, por su nombre en inglés *linear time variant*) con

incerteza multiplicativa,

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (2.16)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado de sistema compuesto por n_x variables, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada compuesto por n_u variables, y el índice k representa el instante actual en tiempo discreto. Los parámetros (A_k, B_k) de (2.16) pertenecen para todo k a un conjunto politopo compacto convexo, Ω , definido por la envoltura convexa de un conjunto conocido de vértices, dado por

$$\Omega = Co\{(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)\}, \quad (2.17)$$

por lo tanto,

$$(A_k, B_k) = \sum_{j=1}^m \lambda_k^{(j)} (A_j, B_j), \quad (2.18)$$

donde, $\lambda_k^{(1)} \dots \lambda_k^{(m)}$ son escalares desconocidos para el instante k que satisfacen,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_k^{(j)} = 1, \quad \lambda_k^{(j)} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

Se puede destacar que con $m = 1$ en (2.19) se obtiene el caso nominal, es decir, un sistema LTI con parámetros constantes para (A, B) que fue revisado en la sección anterior. Además, el sistema tiene restricciones para la señal de entrada y salida del sistema, expresadas por

$$|u_{j,k+1|k}| \leq u_{j,max}^* \quad j = 1, \dots, n_u \quad (2.20)$$

$$|y_{j,k+1|k}| = |Cx_{j,k+1|k}| \leq y_{j,max}^* \quad j = 1, \dots, n_y \quad (2.21)$$

que pueden ser representadas por una restricción lineal más general del tipo:

$$Fx_k + Gu_k \leq \underline{1}, \quad (2.22)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_x}$ y $G \in \mathbb{R}^{n_g \times n_u}$ son matrices que definen las restricciones para el estado y para las acciones de control, respectivamente.

2.2.1.2. Estrategia de RMPC para sistemas con incerteza multiplicativa

Esta estrategia busca minimizar un costo predicho en cada instante k , pero para lograr este objetivo existen dos alternativas. Una alternativa consiste en minimizar el costo nominal obtenido por un conjunto conocido de parámetros del modelo (A_0, B_0) , definidos por el valor esperado de parámetros pertenecientes a Ω o por su centroide como,

$$(A_0, B_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (A_j, B_j). \quad (2.23)$$

Otra alternativa, que es ampliamente usada, es considerar el costo predicho como el rendimiento para el peor caso, que se define como el valor máximo del costo predicho sobre todos los parámetros del modelo en el conjunto de incertidumbres Ω .

Al considerar el rendimiento de peor caso se incluyen las realizaciones de las incertezas en la dinámica predicha, es decir, que se considera como afectan estas a la trayectoria del estado predicho. De esta forma, al incluirlo en una estrategia de control, permite asegurar la estabilidad para cualquier realización de las variables inciertas en un espacio acotado.

En la literatura estos enfoques son conocidos como estrategias de control predictivo robusto (RMPC) y la versión más simple se puede encontrar en [9]. Luego, con el objeto de ir fijando conceptos claves y estratégicos para el diseño de las estrategias propuestas en esta tesis, es que se describe la estrategia de RMPC propuesta en [9].

Específicamente en [9], se menciona que el objetivo de la estrategia es diseñar, para cada instante k , la ley de control de realimentación $u_k = K_k x_k$ que minimiza el peor de los casos de una función objetivo con horizonte infinito y que esta sujeto a las restricciones (2.20) y (2.21), o (2.22) de modo que estabilice el sistema.

La función objetivo con horizonte infinito que se utiliza en esta estrategia de control es del tipo cuadrática, descrita por,

$$J_\infty(\vec{x}_k, \vec{u}_k) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}), \quad (2.24)$$

donde \vec{x}_k, \vec{u}_k son los vectores de estados y entradas predichas, las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ y $R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ definen el costo asociados a los estados y entradas, respectivamente. Además, $Q \succeq 0$ y $R \succ 0$.

Para considerar el rendimiento de peor caso se resuelve un problema min – max, es decir, se minimiza el costo en un horizonte de predicción infinito al incluir el máximo valor que puede tomar este funcional sobre el conjunto incierto Ω . De esta forma se escoge el peor caso para todos los posibles sistemas en Ω .

Luego cabe destacar que el problema de minimizar el peor rendimiento en un horizonte infinito bajo restricciones de manera exacta no es computacionalmente tratable, por lo que en [9] se demuestra la existencia de una cota superior. Así pues, el objetivo de esta estrategia de control se redefine a minimizar esta cota superior bajo la ley de control

$$u_{i|k} = K_{i|k} x_{i|k}, \quad (2.25)$$

lo que si resulta tratable.

En efecto, según [9], la función cuadrática de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ con $P \succ 0$ es una cota superior del costo de peor rendimiento en un horizonte infinito, que esta dada por

$$J_\infty(\vec{x}, \vec{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}) \leq V(x_{k|k}), \quad (2.26)$$

y en consecuencia, el nuevo problema de optimización que minimiza el pero de los casos, se

expresa según el siguiente funcional de costos,

$$\check{J}_\infty(x_{0|k}, k_k) = \max_{(A_{i|k}, B_{i|k}) \in \Omega, i=0,1,\dots} \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}). \quad (2.27)$$

Definido el problema de optimización que se minimiza en cada instante; a continuación se presentan las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad de la ley de control predicha que esta estrategia debe cumplir para que se estabilice el sistema.

La condición de invarianza se impone sobre el conjunto elipsoidal $\mathbb{X} = \{x \mid x_{k|k}^T P x_{k|k} \leq \gamma\}$, donde $P \succ 0$ y γ es la cota superior para cualquier estado predicho en Ω . Esto se realiza para asegurar que la cota del costo de peor caso (2.26) exista y sea γ .

Luego, para que esta estrategia de control sea factible, se deben cumplir las restricciones (2.20) y (2.21) para todas las variables de optimización en el horizonte de predicción. Del mismo modo, la ley de control predicha es factible si cumple (2.20) y (2.21). Además, (2.25) será estable si se cumple la siguiente condición, presentada en [9]

$$(A_j + B_j K_k)^T P (A_j + B_j K_k) - P + Q + K_k^T R K_k \succeq 0 \quad \forall (A_j, B_j) \in \Omega. \quad (2.28)$$

donde se aglutina ambas propiedades; factibilidad recursiva y estabilidad, para algún escalar $\gamma > 0$. Además, (2.28) establece que si el sistemas con incerteza multiplicativa, tiene estabilidad en cada uno de los vértices de la envoltura convexa. Entonces, para cualquier combinación de los pares $(A_j, B_j) \in \Omega$, es decir, para cualquier realización de la incerteza, el problema es recursivamente factible y además la ley de control predicha estabiliza al sistema asintóticamente.

Luego, si se cumplen todas las condiciones mencionadas anteriormente, en [9] se demuestra que esta estrategia de control estabiliza asintóticamente el sistema (2.16) para cualquier realización de la incerteza multiplicativa contenida en Ω . Cabe destacar que las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad presentadas son desigualdades matriciales no lineales con respecto a las variables de optimización. Esto provoca que la optimización no sea convexa, lo que en la práctica podría generar un costo computacional elevado para encontrar las soluciones o que sea intratable. Además, bajo una optimización no convexa, las soluciones (de ser posible encontrarlas) no necesariamente son óptimas globales.

Para solucionar lo anterior, en [9], se presentan las condiciones o restricciones del problema de optimización en desigualdades matriciales lineales (LMIs) para tener restricciones convexas y así un problema convexo. Esto se realiza para asegurar que la solución encontrada sea una solución óptima global y garantizar que el problema de optimización sea computacionalmente tratable al reducir el tiempo de resolución.

Para lograr tener restricciones convexas, se convierten las desigualdades matriciales no lineales en lineales, por medio de herramientas matemáticas. Las más utilizadas en la literatura son el complemento de Schur junto con cambios de variables [17]. El complemento de Schur o CS, permite representar equivalentemente desigualdades matriciales no lineales en desigualdades matriciales lineales (LMIs) con respecto a las variables a optimizar. Formalmente el

CS plantea que las desigualdades no lineales con el siguiente formato,

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S^T(x)R^{-1}(x)S(x) > 0, \quad (2.29)$$

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0. \quad (2.30)$$

son equivalentes a la desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.31)$$

donde $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ y $S(x)$ son matrices dependiente linealmente de x .

Luego, dada la restricción en el formato de las desigualdades no lineales que puede manejar el CS, en la literatura se usan cambios de variables para poder plantear las restricciones no lineales como condiciones (2.29) o (2.30) y luego aplicar el CS para obtener LMIs.

Cabe mencionar que para esta y las próximas estrategias que se presentan en esta tesis, se hace uso de desigualdades matriciales lineales (LMIs), complemento de Schur y cambios de variables, herramientas matemáticas disponibles en Anexo C.

Con todo lo mencionado anteriormente, se presentan para esta estrategia las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad a través de LMIs. Además se evidencian los cambios de variables utilizadas y los CS aplicados para obtener las LMIs.

En efecto, considere que la ganancia de retroalimentación K_k en la ley de control estabilizante (2.25), $i \geq 0$ que minimiza la cota superior de $V(x_{k|k})$ en la función objetivo (2.24) en cada instante, esta dado por el siguiente cambio de variables;

$$K_k = Y_k S_k^{-1}, \quad (2.32)$$

donde Y_k y $S_k \succeq 0$ son obtenidos de la solución de la minimización de la cota superior del costo de peor caso, a través de un problema de optimización lineal:

$$(Y_k^*, S_k^*, \gamma_k^*) = \underset{Y, S, \gamma}{\operatorname{argmin}} \gamma \quad (2.33)$$

Sujeto a :

- Para que el conjunto \mathbb{X} sea positivamente invariante se realiza el cambio de variable $P = \gamma S^{-1}$ a $x_{k|k}^T P x_{k|k} \leq \gamma$ y luego se aplica el CS a la desigualdad no lineal $x_{k|k}^T S^{-1} x_{k|k} \leq 1$, obteniendo la LMI:

$$\begin{bmatrix} I & x_{k|k}^T \\ x_{k|k} & S \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.34)$$

- Para que la ley de control predicha sea asintóticamente estable y el problema sea recursivamente factible se introduce el cambio de variables $P = \gamma S^{-1}$ junto con (2.32) en a la desigualdad no lineal (2.28) y luego se pre-post multiplica por S . Posteriormente se realiza el CS, obteniendo la LMI:

$$\begin{bmatrix} S & (A_j S + B_j Y)^T \\ (A_j S + B_j Y) & S \\ \star & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S Q^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ 0 & 0 \\ \gamma I & \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.35)$$

donde \star representa el bloque simétrico de la matriz.

- Para que todas las variables manipuladas predichas (u_k) en el horizonte de predicción sean menores que (u_{max}), se realiza el CS a (2.20), obteniendo la LMI:

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & Y \\ Y^T & S \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.36)$$

- Para que todas las salidas predichas del sistemas ($y_k = Cx_k$) en el horizonte de predicción sean menores que y_{max} , se realiza el CS a (2.21), obteniendo la LMI:

$$\begin{bmatrix} S & (A_j S + B_j Y)^T C^T \\ C(A_j S + B_j Y) & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.37)$$

De esta forma, al resolver en cada instante, el problema de optimización (2.33) sujeto a restricciones convexas (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37), se genera la acción de control que se aplicará al sistema. De esta forma, la estrategia de control estabiliza asintóticamente el sistema (2.16) para cualquier realización de la incerteza multiplicativa contenida en Ω

Finalmente, esta estrategia se resume en el siguiente algoritmo.

Algorithm 2: Control Predictivo Robusto para sistemas con incerteza multiplicativa

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
2. Resolver:

$$(Y_k^*, S_k^*, \gamma_k^*) = \underset{Y, S, \gamma}{\operatorname{argmin}} \gamma$$

s.a. :

$$\{(2.34), (2.35), (2.36), (2.37)\}$$

3. Aplicar entrada $u_k^* = K_k^* x_k = Y_k^* S_k^{*-1} x_k$
 4. Actualizar, $k = k + 1$
-

2.2.1.3. Estrategia de RMPC con dinámica optimizada para sistemas con incerteza multiplicativa

Una gran limitante de las estrategias de RMPC para sistemas con incerteza multiplicativa presentadas hasta ahora, es que el esfuerzo computacional crece rápidamente con el horizonte de predicción N . Por lo que el uso de estas estrategias se limita a horizontes cortos e incer-

tidumbres para los parámetros con un número reducido de vértices [1].

Para solucionar lo descrito anteriormente, en [21] se propone una estrategia de RMPC que incorpora una ley de control predicha con estado propio que evoluciona en una dinámica a optimizar. Esta estrategia se divide en una etapa offline y una online. En la etapa offline se reduce el esfuerzo computacional al calcular el conjunto invariante máximo y diseñar las ganancias de la ley de control predicha. Luego en la etapa online, en cada instante, se minimiza un funcional de costos infinito predicho nominal o de peor caso. Así, través de ambas etapas, esta estrategia estabiliza asintóticamente el sistema para cualquier realización de la incerteza multiplicativa en Ω .

La ley de control predicha propuesta se diseña con un estado extendido para incluir el estado del sistema y un estado propio. El estado propio del controlador evoluciona en una dinámica propia, donde sus grados de libertad están dados por perturbaciones $\{v_{k+i|k}\}$ con respecto a una ley de control de realimentación lineal $u = Kx$, que en esta tesis se denominará *Ley de control base*. El diseño de la ley de control predicha contempla optimizar la dinámica extendida tal que maximice la zona de operación del controlador.

En la literatura, como en [21, 22], a las estrategias que incluyen leyes de control predichas con estado propio que evoluciona en una dinámica que se puede optimizar, se les conoce como *dinámica optimizada* o simplemente DO. Las dinámicas optimizadas diseñan las leyes de control predichas en conjunto a sus dinámicas tal que maximicen el conjunto invariante para una ley de control base. De esta forma, las dinámica optimizadas generan la máxima zona de operación para cualquier ley de control base, lo que permite incluir un criterio de desempeño en el diseño de la ley de control base y mantener la máxima zona de operación.

Según lo expuesto, el nombre de dinámica optimizada no refleja el trasfondo de la implementación de las leyes de control predichas en las estrategias de control. A pesar de esto, simplemente por un motivo histórico, se utilizará el mismo nombre para las estrategias que incluyan leyes de control predichas con estado propio que evoluciona en una dinámica que se optimiza para maximizar la zona de operación del controlador. Así mismo, cuando se hable de dinámica optimizada u optimización de la dinámica sobre la ley de control base, se referirá al diseño de la ley de control predicha junto con su dinámica tal que maximice su zona de operación.

Ahora, para detallar esta estrategia, considere que el sistema con incerteza multiplicativa (2.16) está sujeto a restricciones del tipo (2.22). Luego, la ley de control predicha que incluye su propio estado esta dada por,

$$u_{k+i|k} = Kx_{k+i|k} + Lv_{k+i|k} \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (2.38)$$

donde K es la ganancia asociada al estado del sistema y es requerida para estabilizar el sistema (2.16) en un horizonte infinito. En (2.38), L es la ganancia asociada al estado del controlador $v_{k+i+1|k} \in \text{Co}\{M_j v_{k+i|k}, j = 0, \dots, m\}$ que toma valores dado por la dinámica

$$v_{k+i+1|k} = \sum_{j=1}^m \alpha_j M_j v_{k+i|k}. \quad (2.39)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son escalares desconocidos. Se destaca que (2.39) está relacionada con la dinámica del sistema con incerteza multiplicativa y de esta forma, según [13], la ley de control depende de las realizaciones futuras de la incerteza que son desconocidas.

Las predicciones del sistema (2.16) y la dinámica del controlador (2.39) generadas con la ley de control predicha (2.38) se presentan como un modelo autónomo extendido:

$$z_{k+i+1|k} = \Psi_{k+i|k} z_{k+i|k}, \quad (2.40)$$

$$z_{k+i|k} = \begin{bmatrix} x_{k+i|k} \\ v_{k+i|k} \end{bmatrix}, \quad \Psi_{k+i|k} \in \text{Co}\{\Psi_j, j = 0, \dots, m\}, \quad (2.41)$$

$$\Psi_j = \begin{bmatrix} \Phi_j & B_j L \\ 0 & M_j \end{bmatrix}, \quad \Phi_j = A_j + B_j K, \quad (2.42)$$

$$x_{k+i|k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} z_{k+i|k}, \quad v_{k+i|k} = \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} z_{k+i|k}, \quad (2.43)$$

donde L y $M_j \in \text{Co}\{M_j, j = 0, \dots, m\}$ son los parámetros de la dinámica del controlador y se diseñan optimizar la dinámica (2.40), en otras palabras, se diseñan para optimizar la zona de operación de la ley de control predicha.

Luego, es necesario presentar las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que debe cumplir esta estrategia para la formulación del modelo extendido presentado anteriormente.

En [21] se obtiene la condición de invarianza para el conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P z \leq 1\}$ al imponer que la función cuadrática de Lyapunov $V(z) = z^T P z$ sea decreciente, lo que se traduce en la siguiente condición:

$$\begin{bmatrix} P & P \Psi_j^T \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.44)$$

donde \star indica un bloque simétrico y $P \succ 0$ es un parámetro a diseñar. Cumpliendo (2.44), las predicciones del sistema extendido que estén en \mathcal{E}_z siempre permanecerán dentro de \mathcal{E}_z .

A partir de [21], la condición de factibilidad para que las predicciones cumplan las restricciones (2.22) se establece con:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & \begin{bmatrix} F + GK & GL \end{bmatrix} \\ \star & P \end{bmatrix} > 0, \quad \Upsilon_{ii} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (2.45)$$

donde \star indica un bloque simétrico y $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ es una variable auxiliar.

Como se mencionó, esta estrategia de control se divide en un parte offline y una online. En la etapa offline, se maximiza el conjunto elipsoidal positivamente invariante al tomar como variables de optimización P y Υ , y como consecuencia, se maximiza la proyección \mathcal{E}_z en el subespacio x . La proyección en el subespacio x esta dado por $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ y su maximización causa que el controlador tenga la máxima zona de operación.

Luego, en la etapa online, en cada instante se aplica la primera acción de la ley de control predicha (2.38) obtenida de la suma de la acción de control de la ley de control base con el estado inicial del controlador v_0 , que minimiza un funcional de costos, multiplicado por la ganancia L .

La maximización del elipsoide \mathcal{E}_x es un problema de optimización no convexo debido a que las condiciones (2.44) y (2.45) son desigualdades matriciales no lineales para P , M_j y L . Por esta razón, se utiliza un cambio de variables junto con el complemento de Schur para expresar en LMIs condiciones equivalentes a (2.44) y (2.45).

El cambio de variables propuesto en [21], esta dado por:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & X^{-1}U \\ U^T X^{-1} & \bullet \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \bullet \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$T = LV^T, \quad UV^T = X - Y, \quad H_j = UM_jV^T, \quad j = 0, \dots, m$$

donde \bullet es definido talque $PP^{-1} = I$. Luego, en [21] se demuestra que la condición de invarianza esta dada por,

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_j Y + B_j T & \Phi_j X \\ \Phi_j Y + B_j T + H_j & \Phi_j X \end{bmatrix} \\ \star & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad j = 0, \dots, m \quad (2.47)$$

y la condición de factibilidad, como:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & [(F + GK)Y + GT & (F + GK)X] \\ \star & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad \Upsilon_{ii} \leq \underline{1}, \quad i = 0, \dots, n_c \quad (2.48)$$

Luego, el problema de optimización que maximiza el volumen de \mathcal{E}_x sobre las variables M_j , L , P sujeto a a las restricciones comentadas anteriormente es,

$$\max_{X, Y, K, T, \Upsilon} \log \det(Y) \quad (2.49)$$

s a :

$$\{(2.47) \text{ y } (2.48)\}$$

donde las LMIs (2.47) y (2.48) son condiciones necesarias y suficientes para asegurar la factibilidad recursiva y estabilidad del problema. Además, en [21, 13] se demuestra que el máximo volumen \mathcal{E}_x se logra cuando v tiene al menos la misma dimensión que x . También se demuestra que a partir de cualquier ley de control base, el volumen del elipsoide invariante \mathcal{E}_x que genera la optimización de la dinámica con estado extendido es máximo e igual para todos los casos.

Esto último es sumamente relevante, ya que a partir de una ley de control base que sea diseñada para optimizar el costo predicho, con la optimización de la dinámica, tiene la misma zona de operación que una ley de control base que sea diseñada para maximizarla. En otras

palabras, esta estrategia permite aumentar la zona de operación de una ley de control que optimiza un costo predicho a la máxima posible generada por una del tipo $u = Kx$.

A partir de las soluciones de problema de optimización (2.49), las variables originales M_j y L están dados por:

$$M_j = U^{-1}H_jV^{-T} \quad L = TV^{-T}. \quad (2.50)$$

Considerado lo ya planteado, el algoritmo de esta estrategia determina los parámetros óptimos de la dinámica con estado extendido para maximizar la zona de operación a partir de una ley de control de base ($u = Kx$). Luego, como se mencionó, la etapa online consiste en encontrar, para cada instante k , el vector de acciones de control predichas que minimizan un funcional de costos. Se destaca que el vector de acciones de control queda determinado por el estado inicial v_0 del controlador ya que cuenta con dinámica autónoma propia.

En [21], se propone minimizar el funcional de costos para la dinámica nominal (2.23), lo que se traduce en resolver:

$$(v_0^*) = \underset{v \in \mathcal{E}_v(x_k)}{\operatorname{argmin}} v^T \mathcal{W}_v v, \quad (2.51)$$

donde $\mathcal{E}_v(x_k) = \{v \mid [x_k^T \quad v^T]^T \in \mathcal{E}_z\}$ es el conjunto elipsoidal positivamente invariante que corresponde a la proyección de \mathcal{E}_z en el subespacio v . En (2.51), \mathcal{W}_v es obtenido de resolver:

$$\mathcal{W}_x - \Phi_0^T \mathcal{W}_x \Phi_0 = C^T C + K^T R K, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{W}_v - M_j^T \mathcal{W}_v M_j = L^T (R + B_0^T \mathcal{W}_x B_0) L, \quad (2.53)$$

donde $\Phi_0 = A_0 + B_0 K$, los subíndices 0 indican que son los valores nominales o esperados y C es tal que $y_k = Cx_k$ sea la salida del sistema.

Con esto, la acción de control para el instante k está dada por:

$$u_k(x_k) = Kx_k + Lv_k^* \quad (2.54)$$

Finalmente, según [21], se tiene que el origen del sistema es asintóticamente estable en lazo cerrado bajo (2.51) con una región de atracción \mathcal{E}_x .

A modo de resumen, se presenta el Algoritmo 3 que muestra como se aplica esta estrategia de control de RMPC con dinámica optimizada para sistemas con incerteza multiplicativa.

Algorithm 3: Control Predictivo Robusto con dinámica optimizada para sistemas con incerteza multiplicativa

Fuera de línea:

1. Resolver:

$$(X^*, Y^*, K^*, T^*, \Upsilon^*) = \underset{X, Y, K, T, \Upsilon}{\operatorname{argmax}} \log \det(Y)$$

s a :

$$\{(2.47), (2.48)\}$$

2. Obtener M_j y L del cambio de variable (2.46).

En línea:

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k .

2. Resolver:

$$(v_k^*) = \underset{v \in \mathcal{E}_v(x_k)}{\operatorname{argmin}} v^T \mathbb{W} v$$

3. Aplicar entrada $u_k(x_k) = Kx_k + Lv_k^*$

4. Actualizar, $k = k + 1$

2.2.2. RMPC para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa

En la sección anterior se presentó el trabajo [21] que introduce la optimización de la dinámica de las predicciones al incluir un estado extendido junto con la maximización de los conjunto elipsoidales invariantes para sistemas con incerteza multiplicativa.

Desarrollos como [26], ampliaron al caso de tener presente incerteza aditiva y multiplicativa, proporcionando solo una condición suficiente para la invarianza de los conjuntos. Lo que permite manejar las restricciones exclusivamente bajo el supuesto de conocer la incertidumbre durante el horizonte de predicción.

En [22] se elimina el supuesto descrito en [26], proponiendo una estrategia que no requiere que se conozca la incertidumbre sobre la horizonte de predicción. Esto se logra al presentar condiciones necesarias y suficientes para la invarianza en el caso de perturbaciones más generales [13].

De esta forma, en [22], se propone una estrategia de RMPC con optimización de la dinámica de las predicciones al incluir una ley de control predicha con estado propio, es decir, dinámica optimizada para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa.

2.2.2.1. Sistema con incerteza aditiva y multiplicativa

Para presentar la estrategia de RMPC con dinámica optimizada con estado extendido para el caso con incerteza aditiva y multiplicativa, considere un sistema de tiempo discreto

y lineal sujeto a incerteza aditiva y multiplicativa,

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_k w_k, \quad (2.55)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ son el estado, entrada de control y perturbaciones en el instante k . Las matrices del sistema $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $D \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, y la perturbación w_k son desconocidas para todo instante, pero se encuentran contenidas en vértices conocidos de los conjuntos politópicos dado por

$$(A_k, B_k, D_k) = \text{Co}\{(A_i, B_i, D_i), i = 0, \dots, v_p\}, \quad (2.56)$$

$$w_k \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}_j, j = 0, \dots, v_a\}, \quad (2.57)$$

donde v_p representa los p vértices de la incerteza multiplicativa (A_j, B_j, D_j) y v_a son los a vértices de la incerteza aditiva \tilde{w}_j . Los subíndices i y j identifican el vértice de la incerteza multiplicativa y aditiva, respectivamente. Además, (2.56) queda completamente definido por

$$(A_k, B_k, D_k) = \sum_{i=1}^{v_p} \lambda_i (A_i, B_i, D_i), \quad (2.58)$$

$$w_t = \sum_{i=1}^{v_a} \beta_j \tilde{w}_j, \quad (2.59)$$

donde λ_i y β_j son escalares de interpolación desconocidos que satisfacen $\lambda_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{v_p} \lambda_i = 1$ y $\sum_{j=1}^{v_a} \beta_j = 1$.

El sistema (2.55) esta sujeto a restricciones para el estado y las acciones de control,

$$F x_k + G u_k \leq \underline{1}, \quad (2.60)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_x}$ y $G \in \mathbb{R}^{n_g \times n_u}$. Es importante destacar, que estas restricciones deben ser consideradas para todas las predicciones del estado y acciones de control en el horizonte de predicción.

2.2.2.2. Estrategia de RMPC con dinámica optimizada para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa

En la sección 2.2.1.3, se presentó el caso para cuando $w = 0$, donde se maximiza el volumen de conjuntos invariantes elipsoidales mediante el uso del estado de mismo controlador $v_{k+i|k}$, de tal manera que las entradas predichas están dadas por (2.38) y la dinámica descrita por el modelo autónomo extendido (2.40)-(2.43).

Luego, la extensión para el caso con incerteza aditiva $w \neq 0$, es decir, al considerar ambas incertezas es directo. Así en [13, 22, 26], se propone una ley de control predicha con estado extendido (sistema y controlador), donde se incluyen las perturbaciones $w_t \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}_j, j = 0, \dots, v_a\}$ en la dinámica propia del controlador. De esta forma, la ley de control

predicha con estado extendido y la dinámica del controlador son

$$u_{k+i|k} = Kx_{k+i|k} + Lv_{k+i|k} \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.61)$$

$$v_{k+i+1|k} = \sum_{j=1}^{v_m} \lambda_j (M_j v_{k+i|k} + S_j w), \quad (2.62)$$

donde λ_j son los mismos que en (2.56) y K es requerido para que la ley de control base $u = Kx$ establezca el conjunto Ω en un horizonte infinito y sin restricciones.

Luego, las predicciones del sistema (2.55) y la dinámica del controlador (2.62), generadas con la ley de control predicha (2.61), se presentan como un modelo extendido:

$$z_{k+i+1|k} = \Psi_{k+i|k} z_{k+i|k} + \widetilde{D}w, \quad (2.63)$$

$$z_{k+i+1|k} = \begin{bmatrix} x_{k+i+1|k} \\ v_{k+i+1|k} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{D}_{k+i|k} = \begin{bmatrix} D_{k+i|k} \\ S_j \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\Psi_j = \begin{bmatrix} \Phi_j & B_j L \\ 0 & M_j \end{bmatrix}, \quad \Phi_j = A_j + B_j K \quad j = 1, \dots, v_m \quad (2.65)$$

$$x_{k+i|k} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} z_{k+i|k}, \quad x_{k+i|k} = \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} z_{k+i|k}, \quad (2.66)$$

donde $(\Psi_{k+i|k}, \widetilde{D}_{k+i|k}) \in \text{Co}\{(\Psi_j, \widetilde{D}_j), j = 0, \dots, v_m\}$, y $w \in \mathbb{W}$. Además L , M_j y S_j son diseñados para para optimizar la dinámica (2.55).

Presentado el estado extendido para sistemas con incerteza multiplicativa y aditiva, ahora y de forma similar al caso multiplicativo, se presentan las condiciones para que esta estrategia sea factible, invariante y establezca el sistema (2.55).

La condición de factibilidad vista en la estrategia anterior, para el caso cuando $w = 0$ es valida también para este caso ($w \neq 0$). Por lo tanto la condición de factibilidad para esta estrategia es (2.45). Para la invarianza, dado que hay incerteza aditiva en el sistema, la condición (2.44) no es valida para esta estrategia.

Luego, para tener la condición de invarianza del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P^{-1} z \leq 1\}$ con $P \succ 0$, en [22] se propone una condición necesaria y suficiente para el caso más general de incerteza dada por $w_i \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}_j, j = 0, \dots, v_a\}$.

En consecuencia, para que el conjunto \mathcal{E}_z sea invariante para cualquier posible realización de la incerteza, por definición se tiene que cumplir que si $z \in \mathcal{E}_z$, entonces $z^+ \in \mathcal{E}_z$. Esto es equivalente a que si $1 - z^T P^{-1} z \geq 0$, entonces $1 - (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \tilde{w}_j)^T P^{-1} (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \tilde{w}_j) \geq 0, \forall i, j$.

Luego, en [22] se utiliza el procedimiento S definido en [17] para plantear las condiciones de invarianza. El procedimiento S es una herramienta matemática presentada en [17] que permite expresar como una desigualdad matricial restricciones que tienen una forma polinomial cuadrática con o sin términos lineales o constantes. Mayor información se encuentra disponible en Anexo D.

Luego, bajo el procedimiento S para cada combinación de (i, j) $1 - z^T P^{-1} z \geq 0$ implica una única desigualdad,

$$1 - (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \widetilde{w}_j)^T P^{-1} (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \widetilde{w}_j) \geq \alpha_{i,j} (1 - z^T P^{-1} z), \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, v_m \\ j = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (2.67)$$

que es una condición necesaria para la invarianza. Luego al tomar α como el mínimo valor de $\alpha_{i,j} \forall i, j$, se tiene la condición necesaria y suficiente,

$$1 - (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \widetilde{w}_j)^T P^{-1} (\Psi_i z + \widetilde{D}_i \widetilde{w}_j) \geq \alpha (1 - z^T P^{-1} z), \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, v_m \\ j = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (2.68)$$

Esta es claramente una condición no lineal, por lo que para ser expresada como una LMI, se aplica el complemento de Schur a (2.68), obteniendo

$$\begin{bmatrix} P & \Psi_i P & \widetilde{D}_i \widetilde{w}_j \\ \star & \alpha P & 0 \\ \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, v_m \\ j = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (2.69)$$

Luego, (2.69) es una condición necesaria y suficiente, es decir, que si se cumpla la condición anterior es equivalente a que el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_z sea positivamente invariante bajo la dinámica (2.55) y (2.63) para una descripción más general de la incerteza.

Al igual que la estrategia de RMPC con dinámica optimizada para incerteza multiplicativa, esta estrategia de control se divide en un parte offline y una online. En la etapa offline, se maximiza el conjunto elipsoidal positivamente invariante $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$ y en la etapa online, en cada instante se aplica la primera acción de la ley de control predicha (2.61).

Análogamente, la maximización del elipsoide \mathcal{E}_x es un problema de optimización no convexo debido a que las condiciones (2.45) y (2.69) son desigualdades matriciales no lineales para α , P , L , M_j y S_j para un escalar fijo $\alpha \geq 0$. Por esta razón, se utiliza un cambio de variables junto con el complemento de Schur para expresar condiciones equivalentes a (2.45) y (2.69).

El cambio de variables propuesto en [22], esta dado por:

$$P = \begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{U} \\ \mathcal{U}^T & \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y} & \mathcal{V} \\ \mathcal{V}^T & \mathcal{S} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} I & \mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\mathcal{W}\mathcal{Y} + \mathcal{U}\mathcal{V}^T = I, \quad \mathcal{U}^T\mathcal{Y} + \mathcal{Q}\mathcal{V}^T = 0, \quad (2.71)$$

donde $TPT^T = \mathcal{W}$ y $PP^{-1} = I$, luego las nuevas variables de optimización quedan determinadas por

$$\widetilde{L} = L\mathcal{U}, \quad \Gamma_i = \mathcal{Y}\Phi_i\mathcal{W} + \mathcal{Y}B_iL\mathcal{U}^T + \mathcal{V}M_i\mathcal{U}^T, \quad \widetilde{S}_i = \mathcal{V}S_i, \quad i = 0, \dots, v_m \quad (2.72)$$

Luego, al utilizar el cambio de variables y aplicar el complemento de Schur a (2.69), para

un α específico se obtiene una LMI que establece la condición de invarianza dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & I & \Phi_i \mathcal{W} + B_i \tilde{L} & \Phi_i & D_i \tilde{w}_j \\ \star & \mathcal{Y} & \Gamma_i & \mathcal{Y} \Phi_i & (\mathcal{Y} D_i + \tilde{S}_i) \tilde{w}_j \\ \star & \star & \alpha \mathcal{W} & \alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \alpha \mathcal{Y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, v_m \\ j = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (2.73)$$

de la misma forma se obtiene una LMI a partir de (2.45) que establece la condición de factibilidad, que esta dada por

$$\begin{bmatrix} Z & (F + GK) \mathcal{W} + G \tilde{L} & F + GK \\ \star & \mathcal{W} & I \\ \star & \star & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, v_m \\ j = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (2.74)$$

Como se mencionó, (2.73) y (2.74) son LMIs para un escalar fijo de α pero estrictamente estas condiciones representan restricciones bilineales ya que α también es una variable de optimización. Para lidiar con esto, se resuelven los problemas de optimización de forma iterativa para valores fijos de $\alpha \in [0, 1]$; en específico se busca el α_{max} tal que maximice el objetivo buscado. Con esta consideración, (2.73) y (2.74) imponen condiciones a través de LMIs, que permiten resolver un problema de optimización convexo para un valor fijo de $\alpha \geq 0$.

Luego, el problema de optimización que maximiza el volumen de \mathcal{E}_x sobre las variables P, L, M_j, S_j para un escalar fijo $\alpha \geq 0$ sujeto a a las restricciones comentadas anteriormente es,

$$\begin{aligned} & \max_{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}, \tilde{L}, \Gamma, \alpha} \log \det(\mathcal{W}) \\ \text{s a :} & \quad \{(2.73) \text{ y } (2.74)\} \end{aligned}$$

donde las LMIs (2.73) y (2.74) son condiciones necesarias y suficientes para asegurar invarianza y factibilidad recursiva del problema. Es importante notar además que las soluciones para P, L, M_j, S_j están dados al utilizar las definiciones (2.70)-(2.72) de los resultados de la optimización $\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}, \tilde{L}, \Gamma$ y α . Para mayor detalle, revisar Anexo A en [22].

Considerado lo ya planteado, el algoritmo de esta estrategia en la etapa offline determina los parámetros óptimos de la dinámica con estado extendido para maximizar la zona de operación a partir de una ley de control base ($u = Kx$). Luego, como se mencionó, la etapa online consiste en encontrar, para cada instante k , la acción de control predicha, lo que se traduce en resolver:

$$v_k^* = \underset{v \in \mathcal{E}_v}{\operatorname{argmin}} x^T \mathcal{W}_x x + v^T \mathcal{W}_v v, \quad (2.75)$$

donde $\mathcal{E}_v = \{v \mid [x_k^T \ v_k^T]^T \in \mathcal{E}_z\}$ es el conjunto elipsoidal positivamente invariante que corresponde a la proyección de z_k en el subespacio v . En (2.75), \mathcal{W}_x y \mathcal{W}_v es obtenido de

resolver:

$$\mathcal{W}_x - \Phi_0^T \mathcal{W}_x \Phi_0 = C^T C + K^T R K \quad (2.76)$$

$$\mathcal{W}_v - M_j^T \mathcal{W}_v M_j = L^T (R + B_0^T \mathcal{W}_x B_0) L \quad (2.77)$$

donde $\Phi_0 = A_0 + B_0 K$ es la dinámica nominal, los subíndices 0 indican que son los valores centrales o esperados y C es tal que $y_k = C x_k$ sea la salida del sistema.

De esta forma, la acción de control implementada en cada instante k , está dada por:

$$u_k(x_k) = K x_k + L v_k^*. \quad (2.78)$$

En resumen, si esta estrategia cumple con las condiciones (2.74) y (2.73), entonces la región de atracción \mathcal{E}_z es positivamente invariante bajo la ley de control de (2.61) y las restricciones (2.60), las predicciones son factibles y el algoritmo es recursivamente factible. Luego esta estrategia proporciona una ley de control que estabiliza el sistema (2.55) para cualquier realización de la incerteza aditiva y multiplicativa, lo que se comprueba de derivar la condición que muestra que el costo es decreciente, lo que hace que el costo sea una función de Lyapunov.

Para finalizar se presenta el Algoritmo 4 que resume como se aplica esta estrategia de control.

Algorithm 4: Control Predictivo Robusto con dinámica optimizada para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa

Fuera de línea:

1. Resolver:

$$(\mathcal{Y}^*, \mathcal{W}^*, Z^*, \tilde{S}^*, \tilde{L}^*, \Gamma^*, \alpha^*) = \underset{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}, \tilde{L}, \Gamma, \alpha}{\operatorname{argmax}} \log \det(\mathcal{W})$$

s a :

$$\{(2.73), (2.74)\}$$

2. Reemplazar con cambio de variable (2.70)-(2.72)

En línea:

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k

2. Resolver:

$$v_k^* = \underset{z \in \mathcal{E}_z}{\operatorname{argmin}} x^T \mathcal{W}_x x + v^T \mathcal{W}_v v \quad (2.79)$$

3. Aplicar entrada $u_k(x_k) = K x_k + L v_k^*$

4. Actualizar, $k = k + 1$

2.3. Control predictivo basado en modelos difusos

Además de que los sistemas reales normalmente no tienen un comportamiento con una dinámica completamente conocida y que generalmente siempre existe un grado de incerteza

en los parámetros que rigen el modelo o perturbaciones externas que afectan al proceso. También existen sistemas no lineales que su dinámica no posible capturarla utilizando modelos lineales sin incerteza (LTI) o uno con incerteza multiplicativa (LTV).

Como solución a lo expuesto anteriormente, en la literatura existen diversas herramientas para modelar procesos no lineales. Dentro del enfoque difuso, las dos herramientas difusas más utilizadas para identificar sistemas son los desarrollados por Takagi & Sugeno en [10] y Mandami en [27]. Para cualquiera de estos métodos de identificación, el sistema se expresa a través de reglas difusas, donde las premisas de cada regla determinan la activación de esta. Luego se realiza un proceso de inferencia y se obtiene un salida, que para el caso Mandami es difusa y debe ser defusificada, en cambio, para los modelos de Takagi-Sugeno la salida es una función de las entradas.

En esta tesis se utiliza el enfoque difuso Takagi-Sugeno [10], el cual establece subsistemas o modelos locales a través de sus reglas para generar un modelo global que refleje la dinámica del proceso.

En esta sección se presentan las estrategias de control predictivo para modelos difusos del tipo Takagi-Sugeno con subsistemas o modelos locales lineales sin presencia de perturbaciones, y también se examina la situación para subsistemas o modelos locales no lineales afectados de perturbación externa, es decir, con incerteza aditiva. Ambas estrategias que se presentan, se resuelven desde un enfoque robusto y al igual que en la sección anterior, se presentan las condiciones que garantizan invarianza, factibilidad y estabilidad, haciendo hincapié en enfoques que sean computacionalmente tratables a través del uso de desigualdades matriciales lineales.

Finalmente se destaca que los trabajos presentados en esta sección tiene un enfoque de compensación distribuida en paralelo (PDC, por su nombre en ingles *parallel distributed compensation*), por lo que se presentan condiciones para asegurar la estabilidad del sistema basados en trabajos [28, 29].

2.3.1. Modelos difusos Takagi-Sugeno

En esta sección se presentan los modelos difusos del tipo Takagi-Sugeno. En el año 1985 se propuso un nuevo método para identificar sistemas utilizando modelos difusos, este trabajo fue desarrollado por Tomohiro Takagi y Michio Sugeno en [10]. Este método permite aproximar la salida de un sin fin de sistemas no lineales a través de la combinación de modelos locales.

El modelo está descrito por un conjunto de L reglas difusas del tipo *Si, entonces*. Las premisas de cada regla están definidas en un subespacio difuso relacionadas por operadores y lógicos y las consecuencias en general son una combinación lineal de entradas y salidas. El formato de cada regla es,

$$\begin{aligned} \text{Regla } l : & \\ \text{Si } \mathbf{x}_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \text{ y } \mathbf{x}_k^m \text{ es } \mathcal{F}_m^l, \text{ entonces } y^l &= f^l(\mathbf{x}_k^1, \dots, \mathbf{x}_k^m), \end{aligned} \tag{2.80}$$

donde $l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ es el número de regla, $\mathbf{z}_k = \{z_k^i, i = 1, \dots, m\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas generalmente por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_m^l$ son los conjuntos difusos asociados a las premisas, y^l es la salida de la regla o modelo local l y $f^l(\cdot)$ es una función lineal o no lineal que representa la combinación de las entradas. Luego, la salida del modelo se obtiene de ponderar los modelos locales por sus grados de activación normalizado,

$$y = \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) y^l, \quad h^l(\mathbf{z}_k) = \frac{W^l(\mathbf{z}_k)}{\sum_{i=1}^L W^i(\mathbf{z}_k)} \quad \text{y} \quad W^l(\mathbf{z}_k) = \prod_{i=1}^m \mu_{\mathcal{F}_i^l}(z_k^i), \quad (2.81)$$

donde $h^l(\mathbf{z}_k)$ es el grado de activación normalizado para la regla l , $W^l(\mathbf{z}_k)$ es el grado de activación de la regla l y $\mu_{\mathcal{F}_j^l}(z_k^j)$ es la función de membresía o grado de pertenencia de la variable z_k^j al conjunto difuso \mathcal{F}_j^l .

Más aplicado al desarrollo de esta tesis, los modelos difusos Takagi-Sugeno, también permiten representar la dinámica de un sistema a través de modelos locales lineales basado en variables de estados como,

$$\begin{aligned} \text{Regla } l : & \\ \text{Si } z_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \text{ y } z_k^m \text{ es } \mathcal{F}_m^l, \text{ entonces } & x_{k+1}^l = A^l x_k^l + B^l u_k, \end{aligned} \quad (2.82)$$

de esta forma, el modelo global queda representado por,

$$x_{k+1} = \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) (A^l x_k + B^l u_k). \quad (2.83)$$

Para determinar los parámetros de un modelo difuso del tipo Takagi-Sugeno en mayor detalle se puede revisar [10], donde se explica el método completo. Para el trabajo de esta tesis, se asumen conocido todos los parámetros del modelo difuso, es decir, la base de reglas que determina el modelo, funciones de pertenencia, modelos locales, etc.

2.3.2. FMPC para sistemas con modelos locales lineales

En esta subsección se presenta una estrategia de control predictivo difuso basado en modelos Takagi-Sugeno con modelos locales lineales usando LMIs. La estrategia se resuelve desde un enfoque de peor caso y se presentó en [30, 31, 32], los cuales se basan en el trabajo de [9], presentado en la sección 2.2.1.2

En [30, 31] se diseñan dos controladores de compensación distribuida en paralelo (PDC) y de compensación no distribuida en paralelo (NO-PDC), que garantizan que el sistema difuso en lazo cerrado sea asintóticamente estable para una incerteza aditiva. En [16] se pueden encontrar metodologías similares, PDC y NO-PDC pero para incertezas que tiene una dinámica no lineal conocida más una componente desconocida.

Los controladores del tipo PDC, se diseñan con una base de reglas igual a la que expresa la dinámica difusa del sistema; donde en cada regla se establece una ley de control asociada a la sistema local correspondiente. Luego, la ley de control global, queda determinada por la

combinación de todas las leyes de control locales a través del grado de activación normalizado.

Solo se presenta en esta sección el controlador del tipo PDC, pues se alinea con el objetivo de este trabajo; para mayor información sobre el trabajo de FRMPC del tipo NO-PDC revisar [16, 30, 32].

De acuerdo a lo anterior, la estrategia de control se desarrolla en base al uso de LMIs para encontrar soluciones óptimas de las mismas para diseñar controladores con compensación distribuida en paralelo, que garantizan que el sistema difuso discreto de lazo cerrado resultante sea asintóticamente estable. Además, los controladores de realimentación difusa cumplen con las restricciones de entrada y salida [30].

El objetivo de esta estrategia es minimizar el peor de los casos de un funcional de costos en horizonte infinito para todos los modelos locales de la base de regla, sujeto a las restricciones del proceso. Para lograr esto, se utilizan LMIs para que todas las predicciones (variables de estado y señales de control) cumplan las restricciones, es decir, que el problema sea recursivamente factible. Además se incluyen las restricciones necesarias para que la ley de control propuesta en [30] sea asintóticamente estable.

Para describir la estrategia, considere el siguiente modelo difuso Takagi-Sugeno discreto que representa la dinámica de un sistema no lineal discreto a través de L reglas que definen los subsistemas lineales en variables de estados:

Regla l :

$$\text{Si } z_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots z_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } x_{k+1}^l = A^l x_k + B^l u_k, \quad (2.84)$$

donde $z = \{z_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos asociados a las premisas y $l \in \mathbb{Z}_{[0,L]}$ indica el número de regla o el subsistema local. Por lo tanto el estado y salida global del sistema están dados por,

$$x_{k+1} = \sum_{l=1}^L h^l(A^l x_k + B^l u_k), \quad (2.85)$$

$$y_k = \sum_{l=1}^L h^l C^l x_k, \quad (2.86)$$

donde $h^l(z_k)$ es escrito por conveniencia como h^l y representa la función de pertenencia normalizada en el instante k para la regla o subsistema local l . En (2.86) $C^l \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ es la matriz que define la salida global del sistema.

El sistema descrito en (2.85) tiene restricciones para las predicciones de la entrada y el

estado que se expresan mediante la salida del sistema global, dadas por:

$$|u_{n,k+i|k}| \leq u_{n,max}^*, \quad n = 1, \dots, n_u \quad (2.87)$$

$$|y_{n,k+i|k}| = |Cx_{n,k+i|k}| \leq y_{n,max}^*, \quad n = 1, \dots, n_y \quad (2.88)$$

$$i = 1, \dots, \infty$$

donde n indica la componente específica en el vector de estado y el vector de la ley de control, respectivamente.

Antes de continuar, es importante destacar la similitud y a su vez las diferencias que tienen los modelos difusos con los modelos con incerteza multiplicativa vistos en la sección 2.2.1.1. La principal similitud radica en como se define cada uno de los modelos. En el caso de difuso, el modelo global se obtiene como una combinación de modelos locales que son ponderados por grados de activación normalizados. Para el caso de los modelos con incerteza multiplicativa, la dinámica está dada por una combinación de vértices que son ponderados por escalares.

Y su principal diferencia radica en el conocimiento que existe de los ponderadores; en el caso difuso, se conoce el valor exacto del grado de activación normalizado ya que este está dado por la función de pertenencia. En cambio, para el caso multiplicativo, se desconocen los valores de los escalares λ_j .

Dada esta notoria similitud, es que las estrategias presentadas en esta tesis para ambos tipos de modelos son bastante similares, pero se diferencian en como plantean las condiciones para utilizar la información disponible de los ponderadores.

Luego, en [30] se propone una ley de control predicha similar a la propuesta en [9], pero se considera difusa del tipo PDC al considerar una ley de control por cada una de las reglas difusas, dada por

Regla Controlador l :

$$\text{Si } \mathbf{z}_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \mathbf{z}_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } u_k^l = -K^l x_k, \quad (2.89)$$

donde $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas para el instante k conformadas por regresores de la entradas y/o salidas, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos y $l \in \mathbb{Z}_{[0,L]}$ indica el número de regla o el subsistema local. Por lo tanto al considerar todas las reglas (2.89) da una ley de control global,

$$u_k = \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) K^l x_k. \quad (2.90)$$

Con la ley de control predicha definida por (2.89) y (2.90) esta estrategia de control plantea resolver un problema min – max para minimizar el costo en un horizonte de predicción infinito al incluir el máximo valor que puede tomar el funcional de costos sobre todos los subsistemas o modelos locales, pues este sistema no está afectado por incertezas. De esta forma se escoge el peor caso para todos los posibles subsistemas.

De acuerdo a lo anterior, se resuelve una optimización similar a la que se revisó en la sección 2.2.1.2. Recordando, el funcional del costos cuadráticos en un horizonte de predicción infinito esta dado por:

$$J_\infty(x_k, u_k) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}), \quad (2.91)$$

donde $Q \succ 0$ y $R \succeq 0$.

De acuerdo a lo anterior, esta estrategia de control, en cada instante k busca minimizar el costo (2.91) para diseñar la ley de control de realimentación dada por (2.89) y (2.90) de modo que establezca el sistema (2.85) en un horizonte de predicción infinito cumpliendo las restricciones (2.87) y (2.88) para todas las predicciones en cada uno de los modelos locales en todo el horizonte de predicción.

Luego cabe destacar que el problema de minimizar el peor rendimiento en un horizonte infinito bajo restricciones para todos los modelos locales no es computacionalmente tratable, por lo que primero se muestra la existencia de una cota superior del costo $J_\infty(x_k, u_k)$ y luego se minimiza esta cota superior bajo la ley de control (2.90), lo que si es tratable.

Para mostrar la existencia de la cota superior del peor rendimiento, considere la siguiente función de Lyapunov difusa:

$$V(x_{k|k}) = x_{k|k}^T \left(\sum_{l=1}^L h^l P^l \right)^{-1} x_{k|k}, \quad (2.92)$$

donde h^l son las funciones de pertenencia normalizadas dadas por el modelo y las matrices $P^l \succeq 0$ son variables de optimización asociadas a cada modelo local (que se definen más adelante). Luego, la función de Lyapunov (2.92) esta asociada a la dinámica descrita en (2.85) para todas las predicciones de $x_{k+i|k}^l$ y $u_{k+i|k}^l$ y para todos los modelos locales, se tiene que

$$V(x_{k+i+1|k}) - V(x_{k+i|k}) \leq (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}). \quad (2.93)$$

Con esto presente, para que la función objetivo de rendimiento sea finita se debe cumplir que $x_{\infty|k} = 0$, por lo tanto $V(x_{\infty|k}) = 0$. Según esto al sumar en el intervalo $i = 0, \dots, \infty$ la ecuación (2.93) se tiene que,

$$J_\infty(x_k, u_k) \leq V(x_{k|k}) \leq \gamma, \quad (2.94)$$

es decir que el funcional de costos para un horizonte infinito, tiene una cota superior. Por lo tanto el objetivo de esta estrategia de control se redefine para generar, en cada instante k , una ley de control de realimentación para minimizar $V(x_{k|k})$, o equivalentemente γ .

Teniendo presente lo anterior, ahora es necesario establecer las condiciones que aseguran la existencia de las l matrices $P^l \succeq 0$ para la función de Lyapunov propuesta. De esta forma, los estados locales x^l pertenecen al conjunto \mathbb{X} que es positivamente invariante [30], si se cumple con:

$$x_{k|k}^T P^l x_{k|k} \leq \gamma, \quad \forall l, \quad (2.95)$$

y dada la no linealidad de la desigualdad, se utiliza el complemento de Schur para presentar

LMIs equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} \gamma & x_{k|k}^T \\ x_{k|k} & P^l \end{bmatrix} > 0, \quad \forall l. \quad (2.96)$$

Luego, para minimizar la cota superior del costo de peor caso γ y asegurar la estabilidad del sistema global descrito en (2.85), en [30] se establecen condiciones convexas. Para lograr esto, en [30] se utiliza el cambio de variables $K^l = Y^l G^{-1}$ y que al reemplazar en (2.90) se tiene

$$u_k = - \sum_{l=1}^L h^l(z) Y^l G^{-1} x_{k|k}^T, \quad (2.97)$$

Luego, para plantear la condición de estabilidad, se reemplaza la ley de control (2.97) en (2.93) y en [30] se utiliza que $G^T + G - P_\mu \leq G^T P_\mu^{-1} G$. Con esto, la condición de estabilidad para el sistema (2.85) esta dada por:

$$(G^T + G - P_\mu) - (A_\mu G - B_\mu Y_\mu)^T P_\mu^{-1} (A_\mu G - B_\mu Y_\mu) - Y_\mu^T R Y_\mu - G^T Q G > 0 \quad (2.98)$$

donde

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) A_l, & B_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) B_l, & C_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) C_l, \\ P_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) P_l, & K_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) Y_\mu G^{-1}, & Y_\mu &= \sum_{l=1}^L \mu_l(z) Y_l. \end{aligned} \quad (2.99)$$

La condición de estabilidad presentada en (2.98) es una desigualdad no lineal ponderada por grados de activación normalizados, por lo que se presenta la siguiente desigualdad matricial lineal difusa o FLMI equivalente, obtenida de reordenar términos y aplicar el complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} G^T + G - P_\mu & \star & \star & \star \\ A_\mu G - B_\mu Y_\mu & P_\mu & \star & \star \\ R Y_\mu & 0 & R & \star \\ Q G & 0 & 0 & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (2.100)$$

Hasta ahora, solo se han presentado las condiciones de invarianza y estabilidad para el sistema. Para las condiciones de factibilidad de esta estrategia, se consideran las restricciones asociadas a las predicciones de la entrada y del estado a través de la salida del sistema.

Según [30], el problema de optimización es recursivamente factible, si la ley de control predicha cumple con las restricciones asociadas a las entradas (2.87) y las asociada a las salidas del sistema (2.88).

Para presentar desigualdades matriciales lineales, primero se muestra como se obtiene la condición y posteriormente los pasos para obtener las LMIs equivalentes. En efecto, la condición de las predicciones de ley de control (2.97) asociada al cumplimiento de las restricciones (2.87) esta dada por,

$$\left| Y_\mu G^{-1} x_{n,k+i|k} \right| \leq u_{n,max}, \quad n = 1, \dots, n_u \quad i = 1, \dots, \infty \quad (2.101)$$

luego, al multiplicar ambos lados por $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G^T \end{bmatrix}$ y aplicando el complemento de Schur se tienen las siguientes LMIs equivalentes

$$\begin{bmatrix} U_{max} & \star \\ Y^{jT} & G^T + G - P^j \gamma^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad j \in \mathbb{Z}_{[0,L]}, \quad (2.102)$$

donde $U_{max} = \max\{u_{n,k+i|k} \text{ con } i = 1, \dots, \infty \quad n = 1, \dots, n_u\}$, es decir, U_{max} es el mayor valor para todas las variables de entradas en todo el horizonte de predicción para todos los subsistemas.

Luego, de manera similar, si se consideran las restricciones para las salidas (2.88) y el sistema en lazo cerrado

$$x_{k+1|k} = (A_\mu - B_\mu K_\mu) x_{k|k}, \quad (2.103)$$

$$y_k = C_\mu x_{k|k}, \quad (2.104)$$

en [30], se muestra que la condición esta dada por

$$\begin{bmatrix} Y_{max,j} & \star \\ (A^j G - B^j Y^l)^T (C^l)^T & G^T + G - P^j \gamma^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad l, j \in \mathbb{Z}_{1,L} \quad (2.105)$$

donde $Y_{max,j} = \max\{u_{n,k+i|k} \text{ con } i = 1, \dots, \infty \quad n = 1, \dots, n_u\}$, es decir, $Y_{max,j}$ es el mayor valor para todas las salidas en todo el horizonte de predicción para todos los subsistemas.

En resumen, las condiciones presentadas hasta ahora aseguran que el controlador diseñado en esta estrategia al resolver una optimización sea factible con (2.102) y (2.105), ya que las restricciones se cumplen para todas las variables predichas en cada uno de los subsistemas o modelos locales para todo el intervalo de predicción. Además, bajo la condición (2.96) todas las variables predichas del estado pertenecen a un conjunto positivamente invariante. Y finalmente la ley de control de (2.97) estabiliza al sistema en lazo cerrado al minimizar el funcional de costos (2.91) bajo la condición (2.100).

Un punto relevante a notar, es que todas las condiciones presentadas son LMIs menos la condición (2.100) que es una FLMI, es decir, que es una desigualdad matricial lineal que depende de los grados de activación normalizados. Es por esto que en [30, 31] presentan LMIs equivalentes a (2.100) y así obtener un problema de optimización convexo.

De los mismos trabajos mencionados, se establece que la estrategia de control es factible y el equilibrio del sistema (2.85) en lazo cerrado es globalmente estable si existen las matrices $P^l \succ 0$, G , Y^l y $X^l > 0$ tal que $X^{lj} = X^{Tlj}$ sean soluciones del siguiente problema de

$$\min_{P^l, Y^l, G, X^{lj}} \gamma \quad (2.106)$$

Sujeto a :

$$\begin{bmatrix} -\gamma & x_{k|k}^T \\ x_{k|k} & -P^l \gamma^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (2.107)$$

$$\begin{bmatrix} -U_{j,max} & \star \\ -Y_j^T & P^j \gamma^{-1} - G^T - G \end{bmatrix} < 0, \quad (2.108)$$

$$\begin{bmatrix} -Y_{j,max} & \star \\ (A^j G - B^j Y^l)^T & P^j \gamma^{-1} - G^T - G \end{bmatrix} < 0, \quad (2.109)$$

$$\begin{bmatrix} -W & \star \\ HC^{jT} & Y_{j,max} - H - H^T \end{bmatrix} < 0, \quad (2.110)$$

$$\Upsilon^{ll} > X^{ll}, \quad (2.111)$$

$$\Upsilon^{lj} + \Upsilon^{ljT} > X^{lj} + X^{ljT} \quad l \neq j, \quad (2.112)$$

$$X^{lj} > 0, \quad (2.113)$$

$$\Upsilon^l = \begin{bmatrix} G^T + G - P^l & \star & \star & \star \\ A^j G - B^j Y^l & P^l & \star & \star \\ -RY^j & 0 & R & \star \\ -QG & 0 & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

$$l, j \in \{1, \dots, L\}.$$

Finalmente, con la ley de control predicha dada por (2.97) obtenida de la solución de (2.106) en cada instante de muestreo, se cumple que el costo de peor caso para la función objetivo es minimizado en cada tiempo de muestreo satisfaciendo las restricciones del problema.

A continuación, en el Algoritmo 5 se resume la estrategia de control predictivo robusto para sistemas difusos sin incerteza.

Algorithm 5: Control Predictivo Difuso para modelos difusos sin incerteza

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k

2. Resolver:

$$(P^{l*}, Y^{l*}, G^*, X^{lj*}) = \underset{P^l, Y^l, G, X^{lj}}{\operatorname{argmin}} \gamma$$

s a :

$$\{(2.107), (2.108), (2.109), (2.110), (2.111), (2.112) \text{ y } (2.113)\}$$

3. Aplicar entrada $u_k^* = -\sum_{l=1}^L h^l(x_k) Y^{l*} G^{-1*} x_{k|k}^T$

4. Actualizar, $k = k + 1$

2.3.3. FRMPC para sistemas con modelos locales no lineales con incerteza aditiva

Para sistemas complejos con severas no linealidades, incertidumbres en los parámetros y perturbaciones, el control predictivo con un modelo difuso Takagi-Sugeno con modelos locales lineales en caso de lograr llegar a una solución es muy conservadora o incluso no logra llegar a ninguna solución en algunas ocasiones. Además, como se ha expuesto en esta tesis y en los trabajos revisados; la carga computacional es algo clave que puede restringir la aplicación de alguna estrategia de control predictivo en línea y para el control predictivo difuso la carga computacional es aún mayor.

Sin embargo, en [33] se desarrolla una estrategia que obtiene resultados más relajados mediante el enfoque propuesto de control predictivo basado en modelos difusos del tipo Takagi-Sugeno con modelos locales no lineales. Otra ventaja que se presenta en esta estrategia, es que se puede reducir significativamente el costo computacional en línea del problema de optimización mediante el uso de desigualdades matriciales lineales.

Para describir esta estrategia, considere el siguiente sistema discreto no lineal con incerteza aditiva:

$$x_{k+1} = f(x_k) + g(x_k)u_k + w(x_k)d_k, \quad (2.115)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estado de sistema compuesto por n_x variables, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es el vector de entrada compuesto por n_u variables y $d_k \in \mathbb{R}^{n_d}$ son n_d perturbaciones (incerteza aditiva) que afectan al sistema. Además, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $w(\cdot)$ son funciones de x_k , donde $f(\cdot)$ es una función no lineal. Dada esta característica del sistema, una aproximación difusa con modelos locales lineales no es suficiente, debido a que no permite describir correctamente la dinámica del modelo [33]. Frente a esto, el sistema (2.115) puede ser descrito por el siguiente modelo no lineal basado en un sistema difuso de tipo Takagi-Sugeno con modelos locales no lineales:

Regla l :

$$Si : z_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots z_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } x_{k+1}^l = A^l x_k + B^l u_k + G^l \phi_k + E^l d_k, \quad (2.116)$$

donde $z_k = \{z_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos, $l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ indica el número de regla y $\phi_k \in Co\{0, Wx_k\}$ es el termino no lineal que se separó de $f(\cdot)$, de tal modo que:

$$f(x_k) = \sum_{l=1}^L h^l(z_k)(A^l x_k + G^l \phi_k),$$

donde $h^l(z_k)$ es el grado de activación normalizado de la regla l .

Realizando la misma comparación que en la subsección anterior, la formulación presentada en esta estrategia de FRMPC, para modelos locales no lineales con incerteza aditiva, es bastante similar al caso revisado en la estrategia de RMPC para sistemas con incerteza aditiva y multiplicativa.

Lo anterior, se debe a que ambas estrategias consideran modelos por reglas/vértices co-

nocidos, basando su diferencia en que los modelos difusos se conoce el ponderador de las reglas y no así para los vértices de las dinámicas en una envoltura convexa. Con respecto a la incerteza, ambos modelos la consideran en sus reglas o vértices. Y también, ambas estrategias son robustas con un enfoque que considera resolver un problema de min – max, es decir, que el sistema definido por del conjunto convexo o la base de reglas sea estable para cualquier realización de la incerteza.

Ahora, para simplificar la notación se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) A^l, & G_\mu &= \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) G^l, \\ B_\mu &= \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) B^l, & E_\mu &= \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) E^l. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Luego, a partir de (2.117) el sistema no lineal se puede expresar en el modelo global difuso del tipo:

$$x_{k+i+1|k} = A_\mu x_{k+i|k} + B_\mu u_{k+i|k} + G_\mu \phi_{k+i|k} + E_\mu d_{k+i|k}. \quad (2.118)$$

Para el sistema (2.118) se considera que las perturbaciones externas son acotadas y que está sujeto a restricciones para las acciones de control dadas por:

$$d_{k+i|k} \in D = \{d_{k+i|k} \mid d_{k+i|k}^T d_{k+i|k} \leq \xi\}, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (2.119)$$

$$u_{k+i|k} \in U = \{u_{k+i|k} \mid |u_{n,k+i|k}| \leq u_{n,max}\}, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad n \in \mathbb{Z}_{1,n_u} \quad (2.120)$$

donde ξ es un escalar positivo y u_n representa el elemento n del vector de entrada.

Luego en esta estrategia se propone un controlador de realimentación con compensación distribuida en paralelo (PDC), donde la ley de control predicha se define por reglas difusas. En cada una de las reglas, la ley de control se propone como la suma de constantes relacionadas con la dinámica lineal y no lineal del sistema multiplicadas por x y ϕ respectivamente. Las reglas difusas para la ley de control predicha están dadas por:

Regla Controlador l :

$$\text{Si } \mathbf{z}_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \mathbf{z}_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } u_k^l = K_a^l x_k + K_b^l \phi_k, \quad (2.121)$$

donde $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos y $l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ indica el número de regla. Por lo tanto la ley de control global esta dada por,

$$u_k = \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) K_a^l x_k + \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}_k) K_b^l \phi_k = K_{a\mu} x_k + K_{b\mu} \phi_k. \quad (2.122)$$

donde K_a^l y K_b^l son las ganancias que se diseñaran para optimizar un funcional de costos.

Con lay ley de control definida por (2.122) se quiere minimizar el funcional de costos cuadráticos en un horizonte de predicción N para el peor caso de la realización de la incerteza

aditiva de todos los modelos locales no lineales. El funcional del costos cuadráticos en un horizonte de predicción N esta dado por (2.4), donde el costo por etapa y el costo terminal propuestos en [33], son:

$$l(k+i|k) = x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \tau d_{k+i|k}^T d_{k+i|k}, \quad (2.123)$$

$$v(x_{k+N|k}) = \sum_{l=1}^L h^l(z_{k+N|k}) x_{k+N|k}^T P^l x_{k+N|k}, \quad (2.124)$$

con $Q, R \succ 0$, τ es un escalar y donde P^l son diseñados bajo condiciones que se describirán más adelante. Además, cabe destacar que la incerteza aditiva, las perturbaciones d están contenidas en el costo por etapa (2.123).

De acuerdo a lo anterior, esta estrategia de control, en cada instante k busca minimizar el peor de los casos de el funcional de costos (2.4) conformado por el costo por etapa (2.123) y el costo terminal (2.124) para diseñar la ley de control de realimentación (2.122) de modo que establezca el sistema (2.118) en un horizonte de predicción N , cumpliendo las restricciones (2.120) para todas las predicciones en cada uno de los modelos locales en todo el horizonte de predicción.

Bajo los mismos argumentos de las otras estrategias presentadas, el problema de minimizar el peor rendimiento en un horizonte infinito bajo restricciones para todos los modelos locales no es computacionalmente tratable, por lo que primero se muestra la existencia de una cota superior y luego se minimiza esta cota superior bajo la ley de control (2.122), lo que si resulta tratable.

En efecto, para mostrar que el funcional de costos de peor caso tiene un cota superior, considere la siguiente función de Lyapunov difusa $V(x_{k|k})$:

$$V(x_{k|k}) = x_{k|k}^T \sum_{l=1}^L h^l P^l x_{k|k}, \quad (2.125)$$

donde h^l son los grados de pertenencia normalizada dadas por el modelo. Luego, la función de Lyapunov (2.125) esta asociada a la dinámica descrita en (2.118) para todas las predicciones $x_{k+i|k}^l$ y $u_{k+i|k}^l$ y según [33] se cumple

$$V(x_{k+i+1|k}) - V(x_{k+i|k}) \leq -(x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \tau d_{k+i|k}^T d_{k+i|k}). \quad (2.126)$$

Teniendo presente además que, para que la función objetivo de rendimiento robusta sea finita se debe cumplir que $x_{\infty|k} = 0$, por lo tanto $V(x_{\infty|k}) = 0$. Según esto al sumar en el intervalo $i = 0, \dots, \infty$ la ecuación (2.126) se tiene que,

$$J_{\infty}(x_k, u_k) \leq V(x_{k|k}) \leq \gamma, \text{ o equivalentemente } x_k^T P^l \gamma^{-1} x_k \leq 1, \quad (2.127)$$

dado que $h^l(z_k) > 0$.

Con (2.127) se muestra que el funcional de costos para un horizonte infinito, tiene una cota superior. Por lo tanto el objetivo de esta estrategia de control se redefine para generar,

en cada instante k , una ley de control de realimentación para minimizar $V(x_{k|k})$, o equivalentemente γ .

De acuerdo a lo anterior, ahora es necesario establecer las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que debe cumplir esta estrategia para estabilizar el sistema (2.118).

Primero, se destaca que esta estrategia esta diseñada para un horizonte de predicción N por lo cual la estrategia de control debe asegurar que el estado terminal este dentro de un conjunto terminal, es decir,

$$x_{k+N|k} \in \mathbb{X}_f, \quad (2.128)$$

y que este sea positivamente invariante. Luego, para que el conjunto terminal $\mathbb{X}_f = \{x \mid x^T P_\mu x \leq \gamma\}$ donde $P_\mu = \sum_{i=1}^L h^i(z_k) P^i$ sea positivamente invariante, se debe tener que para todo $x \in \mathbb{X}_f$, se debe garantizar que el estado siguiente x^+ pertenezca a \mathbb{X}_f para cualquier incerteza o perturbaciones. Esto lo expresan en [33] a través de siguiente desigualdad matricial difusa

$$x^{+T} P_\mu^+ \gamma^{-1} x^+ - x^T P_\mu \gamma^{-1} x - \lambda(d^T \xi^{-1} d - x^T P_\mu \gamma^{-1} x) \leq 0, \quad (2.129)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_{(0,1)}$ es un escalar real, x^+ es el estado posterior a aplicar la ley de control (2.122) al estado x_k y P^l son variables de optimización del problema a resolver.

Para la condición de factibilidad, se debe cumplir que todas las variables de predicción cumplan las restricciones (2.120) en todo el horizonte de predicción. Esta condición, la expresan en [33] a través de la siguiente desigualdad matricial difusa

$$(K_{a\mu}x + K_{b\mu}\phi)^T Z^{-1}(K_{a\mu}x + K_{b\mu}\phi) - x^T P_\mu \gamma^{-1} x + 2(\phi \Lambda^{-1} W x - \phi^T \Lambda^{-1} \phi) \leq 0, \quad (2.130)$$

donde Λ , Z son variables de optimización del problema a resolver y W esta definido por $\phi_k \in \text{Co}\{0, W x_k\}$.

En [33] se establece que esta estrategia estabiliza el sistema (2.118) si se satisfacen las condiciones anteriores y la siguiente desigualdad matricial difusa

$$\begin{aligned} x^{+T} P_\mu^+ x^+ - x^T P_\mu x + (K_{a\mu}x + K_{b\mu}\phi)^T R (K_{a\mu}x + K_{b\mu}\phi) \\ - \tau d^T d + 2\gamma(\phi^T \Lambda^{-1} W x - \phi^T \Lambda^{-1} \phi) < 0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

De esta forma, al cumplir (2.129), (2.130) y (2.131), la estrategia de control predictivo robusto basado en modelos difusos es estable bajo la ley de control (2.122) para la incerteza aditiva d . [33].

Presentadas todas las condiciones para esta estrategia, en [33], se presenta un cambio de variables y se utiliza el complemento de Schur para plantear a través de LMIs condiciones equivalente a las anteriores. El cambio de variables esta dado al considerar

$$K_a^l = Y_a^l L^{l-1} \quad \text{y} \quad K_b^l = Y_b^l \Lambda^{-1}$$

y posteriormente se reemplazan en la ley de control (2.122), obteniendo

$$u_k = \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}) Y_a^l L^{l-1} x_k + \sum_{l=1}^L h^l(\mathbf{z}) Y_b^l \Lambda^{-1} \phi_k, \quad (2.132)$$

donde los Y_a^l , L^l , Y_b^l y Λ son nuevas variables de optimización.

Luego, destacando que las condiciones (2.129), (2.130) y (2.131) son desigualdades matriciales no lineales difusas, en [33] se realiza el complemento de Schur para obtener desigualdades matriciales lineales difusas (FLMIs). Las FLMIs se caracterizan por tener en las desigualdades, matrices lineales con respecto a las variables de optimización pero que están ponderadas por uno o más grados de activación normalizados.

Establecer este tipo de restricciones no es posible, por lo que en [33] se soluciona al plantear como restricciones al combinar todos los posibles matrices de las FLMIs sin los grados de activación. Esto se realiza conservando los índices de cada variable, que indican a que regla pertenecen y agregar tantas restricciones como combinaciones posibles de $i, j, l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ existan. En otras palabras, se agregan tantas restricciones como combinaciones de reglas existan para las variables a optimizar.

De acuerdo a todo lo anterior, y según [33], el problema de minimizar γ es recursivamente factible en cada instante k , lo que permite generar la entrada (2.132) y de esta forma, la estrategia estabiliza el sistema (2.118) si existen las variables; $X^i > 0$ tal que $X^{i-1} = P^i \gamma^{-1}$, L^j , Y_{aj} , Y_{bj} , Z , $\Lambda = \text{diag}([\rho_1 \dots \rho_q]^{-1})$ con $\rho_1, \dots, \rho_q > 0$ y un escalar positivo $\lambda \in \mathbb{R}_{(0,1)}$, γ y ε que resuelvan,

$$\min_{\xi, \tau, X^i, L^j, \Lambda, Y_a^j, Y_b^j, Z} \tau \gamma \quad (2.133)$$

S.a

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T \\ x_k & X^l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.134)$$

$$\begin{bmatrix} Z & \star & \star \\ Y_a^{jT} & L^j + L^{jT} - X^j & \star \\ Y_b^{jT} & -WL^j & 2\Lambda \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{n,n} \leq u_{n,max}^2, \quad (2.135)$$

$$\begin{bmatrix} (-1 + \lambda)(L^j + L^{jT} - X^i) & \star & \star & \star \\ WL^j & -2\Lambda & \star & \star \\ 0 & 0 & -\lambda/\xi & \star \\ A^i L^j + B^i Y_a^j & G^i \Lambda + B^i Y_b^j & E^i & -X^l \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.136)$$

$$\begin{bmatrix} X^i - L^j - L^{jT} & \star & \star & \star & \star & \star \\ WL^j & -2\Lambda & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\tau\gamma & \star & \star & \star \\ A^i L^j + B^i Y_a^j & G^i \Lambda + B^i Y_a^j & \gamma E^i & -X^l & \star & \star \\ QL^j & 0 & 0 & 0 & -\gamma Q & \star \\ RY_a^j & RY_b^j & 0 & 0 & 0 & -\gamma R \end{bmatrix} < 0, \quad (2.137)$$

$i, j, l \in \mathbb{Z}_{[1,L]} \quad n \in \mathbb{Z}_{[0,n_u]}$

donde las LMIs (2.134), (2.135), (2.136) y (2.137) son equivalentes las condiciones (2.127), (2.129), (2.130) y (2.131), respectivamente.

Finalmente, en [33] se demuestra que esta estrategia de control si tiene solución en el instante $k = 0$ entonces siempre tendrá solución por lo cual es recursivamente factible y el origen del sistema es asintóticamente estable.

A continuación en el Algoritmo 6 se resume la estrategia de FRMPC para modelos Takagi-Sugeno para subsistemas no lineales con incerteza aditiva.

Algorithm 6: Control Predictivo Difuso Robusto para modelos difusos con incerteza aditiva

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
2. Resolver:

$$(\xi^*, \tau^*, X^{i*}, L^{j*}, \Lambda^*, Y_a^{j*}, Y_b^{j*}, Z^*) = \underset{\xi, \tau, X^i, L^j, \Lambda, Y_a^j, Y_b^j, Z}{\operatorname{argmin}} \tau\gamma$$

Sujeto a :

$$\{(2.134), (2.135), (2.136), (2.137)\}$$

3. Aplicar entrada

$$u_k^* = K_{a\mu}^* x_k + K_{b\mu}^* \phi_k \text{ donde}$$

$$K_{a\mu}^* = \sum_{i=1}^L h^l(z_k) Y_a^{i*} L^{i*-1} \text{ y } K_{b\mu}^* = \sum_{i=1}^L h^i(z_k) Y_b^{i*} \Lambda^{*-1}$$

4. Actualizar, $k = k + 1$

end

2.4. Desigualdades matriciales lineales difusas

Todas las estrategias que se proponen en esta tesis, tendrán desigualdades matriciales ponderadas por grados de activación normalizado en función de las premisas para expresar las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad.

Resolver problemas de optimización sujeto a desigualdades matriciales difusas, en general no lineales, en la práctica es computacionalmente intratable. Por lo que, en la literatura, se

utilizan cambios de variables y el complemento de Schur para generar desigualdades matriciales lineales difusas o FLMI. Con esto se reduce una dimensión del problema, ya no hay desigualdades no lineales con respecto a las variables de optimización, pero aún están presentes los grados de activación. La presencia de estos, implicaría comprobar el cumplimiento de las desigualdades para cualquier valor que pueda tomar el grado de activación, lo que sigue siendo inviable computacionalmente.

Para solucionar este problema, en [39] se proponen las relajaciones de Pólya para plantear condiciones menos conservativas por medio de LMIs asintóticamente equivalentes a las FLMI, y de esta forma, los problemas de optimización son convexos y con baja carga computacional al incluirlas.

En esta tesis se utilizarán las relajaciones de Pólya para el manejo de las FLMI. A fin de aplicar las relajaciones de Pólya, se utiliza el método de notación de *multi-índice* propuesto en [39], el cual consiste en realizar combinaciones sobre las FLMI sin considerar el grado de activación, y así obtener un conjunto de LMIs asintóticamente equivalente.

Según lo demostrado en [39], el método de multi-índice solo es aplicable a desigualdades matriciales interpoladas por un o dos sumatorio difuso de la forma,

$$\Xi(\theta, h^l) = \sum_{l=1}^L h^l Q^l(\theta) > 0, \quad (2.138)$$

$$\Xi(\theta, h^l, h^j) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j Q^{lj}(\theta) > 0, \quad (2.139)$$

donde $\Xi(\theta, h^l)$ y $\Xi(\theta, h^l, h^j)$, representan respectivamente, un polinomio lineal en función de $\theta \in \mathbb{R}^n$ ponderados con uno y dos grados de activación normalizado. Además, $\theta \in \mathbb{R}^n$ representa las n variables de diseño u optimización en las desigualdades matriciales.

El método multi-índice es capaz de manejar todas las FLMI que se imponen sobre las estrategias que se proponen en esta tesis. De todas formas, para FLMI que consideren más de dos sumatorios difusos, se recomienda utilizar el método de *La expansión de la dimensionalidad* propuesto en [39].

Las aproximaciones más conservadoras para que las FLMI (2.138) y (2.139) sean expresadas como LMIs están dadas, respectivamente por:

$$\Xi(\theta) = Q^l > 0, \quad \forall l, \quad (2.140)$$

$$\Xi(\theta) = Q^{lj} > 0, \quad \forall l, j \quad (2.141)$$

donde $\Xi(\theta)$ es un polinomio lineal en función de θ , destacando que no está ponderado por grados de activación normalizado. El conjunto de LMIs anteriores son impuestas al imponer las condiciones considerando que cada una de las reglas de la FLMI esta activa por si sola. Se destaca además, que en la literatura en trabajos como [33], el conjunto de FLMI (2.141) han sido propuestas como un conjunto de condiciones suficientes.

Otra aproximación, que se ha utilizado en [34], considera imponer condiciones por cada una de las reglas por si sola y combinación entre pares de ellas. Esto se representa, para el caso de un sumatorio difuso por

$$Q_i \leq 0, \quad \forall i \quad (2.142)$$

$$Q_i + Q_j \leq 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.143)$$

y para el caso de dos sumatorios difusos por,

$$Q_{ii} \leq 0, \quad \forall i \quad (2.144)$$

$$Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.145)$$

Otra condición suficiente menos conservativa se presentó en [35], que para el caso de dos sumatorios difusos, es formulada como:

$$Q_{ii} \leq 0, \quad \forall i \quad (2.146)$$

$$\frac{1}{r-1} Q_{ii} + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0, \quad \forall i, j, \quad r \leq L \quad (2.147)$$

donde r son la cantidad de reglas activas de base de reglas conformada por L reglas.

Todas estas aproximaciones son muy conservadoras y llevan a condiciones excesivamente restrictivas que limitarán en exceso su aplicabilidad práctica. Sin embargo, el problema se cerró finalmente en [36, 37, 38, 39] con las relajaciones de Pólya, las cuales permiten obtener condiciones asintóticamente equivalentes a las originales por medio de conjuntos de LMIs.

Para explicar las relajaciones de Pólya, considere el polinomio $\Xi(\theta, \mu)$ lineal en $\theta \in \mathbb{R}^n$ con $\mu = (h^l, h^j, \dots) \in \mathbb{R}^{n_\mu}$. En [36, 37], a la búsqueda del conjunto en $\theta \in \mathbb{R}^n$ donde el polinomio $\Xi(\theta, \mu)$ es positivo para cualquier valor de $\mu > 0$ se le denomina como programación copositiva. Luego, las relajaciones de Pólya se basan en el siguiente teorema.

Teorema 2 [38] *Sea $\Xi(\theta, \mu) > 0$ un polinomio copositivo donde $\mu = (h^l, h^j, \dots)$ representa la tupla de grados de activación por regla normalizados. Entonces, existe un $d \in \mathbb{N}$ finito, donde todos los coeficientes del polinomio $\Xi(\theta, \mu)$ son positivos, es decir, que se cumplirá que*

$$\left(\sum_{i=1}^L \mu \right)^d \Xi(\theta) > 0, \quad (2.148)$$

donde al desarrollo $(\sum_{l=1}^L h^l)^d \Xi(\theta)$ se denota como relajación de Pólya con un grado de complejidad d .

El Teorema 2 plantea que la programación copositiva de $\theta \in \mathbb{R}^n$ del polinomio $\Xi(\theta, \mu)$ es asintóticamente equivalente a realizarla sobre la relajación de Pólya. De esta forma, la desigualdad matricial lineal difusa que representa el polinomio $\Xi(\theta, \mu)$ puede ser tratada con relajaciones de Pólya para realizar la programación copositiva de las variables de optimización o diseño.

Bajo todo lo explicado anteriormente, en esta tesis se define al conjunto de LMIs generadas por las relajaciones de Pólya con un grado de complejidad d , donde $\theta \in \mathbb{R}^n$ es copositivo para la FLMI $\Xi(\theta, \mu) > 0$, como:

$$\mathcal{P}^d(\Xi(\theta, \mu)) = \{\Xi(\theta) > 0 \mid (\sum_{l=1}^L h^l)^d \Xi(\theta) > 0\}$$

donde $\mathcal{P}^d(\Xi(\theta, \mu))$ representa un conjunto de polinomios lineales en θ que no dependen de los grados de activación normalizados. Además, por un tema de conveniencia en la escritura de esta tesis, el argumento de $\mathcal{P}^d(\bullet)$ hará referencia al número de ecuación que representa una FLMI.

A continuación se ahonda en como utilizar las relajaciones de Pólya en desigualdades matriciales lineales difusas

2.4.1. Aplicaciones de las relajaciones de Pólya a FLMI

Las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad de las estrategias que se presentarán, vienen definidas como una serie de desigualdades que se puede expresar como un problema de copositividad de un polinomio definido por uno o dos sumatorios difusos.

La relajación consiste en probar la positividad de los coeficientes del polinomio expandido, por ejemplo, considere la FLMI $\Xi(\theta, h^l, h^j)$ se expande con un grado de complejidad d , obteniendo:

$$\left(\sum_{i=1}^L h^i \right)^d \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j Q^{lj} > 0. \quad (2.149)$$

Para calcular la relajación de la Pólya, se definirá un conjunto de multi-índices \mathbb{I}_d , con dimensión d , para un fácil ajuste de los coeficientes polinómicos, dado por:

$$\mathbb{I}_d = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i_j \leq L, j = 1, \dots, d\}. \quad (2.150)$$

Luego, con el índice anterior, es posible escribir la ecuación (2.149) como:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_d} Q^{i_j} = \sum_{i_1=1}^L \sum_{i_2=1}^L \dots \sum_{i_d=1}^L \sum_{j=1}^L Q^{i_1, i_2, \dots, i_d, j} > 0. \quad (2.151)$$

El propósito de esta nomenclatura multi-dimensional es representar de forma más compacta los sumatorios difusos multi-dimensionales, como se muestra a continuación:

$$h^l = \prod_{i=1}^d h_{li} = h^{l_1} h^{l_2} \dots h^{l_d}, \quad (2.152)$$

dada esta notación ocurre que, $h_{1,2} = h^1 h^2 = h^2 h^1$ asociado al termino Q^{12} . Por lo cual se propone una forma más compacta, generada por el conjunto de permutaciones con repetición del índice \mathbb{I}_p . Así se tendrá que el conjunto de índices $\mathbb{P}(\mathbb{I}_p)$ que agrupa elementos en un sumatorio múltiple difuso que comparten el mismo antecedente, lo que se expresa formalmente

como:

$$\mathbb{I}_p^+ = \{\mathbf{i} \in \mathbb{I} \mid i_k \leq i_{k+1}, k = 1, \dots, p-1\}. \quad (2.153)$$

El procedimiento consiste, primero en trabajar con los índices, para esto se calcula la cantidad de índices a permutar p dado por el grado de complejidad d y la cantidad de sumatorios que tiene la FLMI. Luego, se obtienen todos los índices al realizar permutaciones con repetición solo considerando aquellos que pertenezcan a \mathbb{I}_p^+ , es decir que, el índice k sea menor o igual al índice $k+1$. Posteriormente, para cada índice $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_p^+$ se relaja la condición al sumar la FLMI para todas las permutaciones generadas a partir de \mathbf{i} considerando solo la cantidad de índices originales (uno o dos sumatorios difusos).

El procedimiento se ejemplifica a continuación. Considere una desigualdad matricial lineal difusa que tiene dos sumatorios difusos y cada uno de ellos dos reglas ($L = 2$), es decir

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 h^l h^j Q^{lj} \geq 0. \quad (2.154)$$

Como caso base, las condiciones para que (2.154) sea copositivo son expresadas sin relaciones de Pólya como en (2.141), por:

$$Q_{11} \geq 0, \quad (2.155)$$

$$Q_{12} \geq 0, \quad (2.156)$$

$$Q_{21} \geq 0, \quad (2.157)$$

$$Q_{22} \geq 0. \quad (2.158)$$

El desarrollo de Pólya con grado de complejidad $d = 0$, define $p = 2$ índices a permutar con repetición tal que pertenezcan a \mathbb{I}_p^+ ; es decir que se tiene el siguiente conjunto con tres elementos (índices):

$$\mathbb{I}_{p=2}^+ = \{\{11\}, \{12\}, \{22\}\}, \quad (2.159)$$

luego, para cada índice $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_{p=2}^+$, se suman las permutaciones sin repetición de los elementos que conforman el índice, por lo que se define las siguientes condiciones:

$$\mathbf{i}_1 = \{11\} = Q_{11} \geq 0, \quad (2.160)$$

$$\mathbf{i}_2 = \{12\} = Q_{12} + Q_{21} \geq 0, \quad (2.161)$$

$$\mathbf{i}_3 = \{22\} = Q_{22} \geq 0, \quad (2.162)$$

donde $\mathcal{P}^0((2.154)) = \{Q_{11} \geq 0, Q_{12} + Q_{21} \geq 0 \text{ y } Q_{22} \geq 0\}$. Además, se observa que la relajación de Pólya con un grado de complejidad $d = 0$ están dadas como en (2.144) y en (2.145).

Para un grado de complejidad $d = 1$, se agrega un índice por lo que se permutaran $p = 3$ índices con repetición tal que pertenezcan a $\mathbb{I}_{p=3}^+$; es decir que se tiene el siguiente conjunto con tres elementos (índices):

$$\mathbb{I}_{p=3}^+ = \{\{111\}, \{112\}, \{122\}, \{222\}\}, \quad (2.163)$$

luego, para cada índice $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_{p=3}^+$, se suman las permutaciones sin repetición de los elementos que conforman el índice, por lo que se define las siguientes condiciones:

$$\mathbf{i}_1 = \{111\} = Q_{111} \geq 0, \quad (2.164)$$

$$\mathbf{i}_2 = \{112\} = Q_{112} + Q_{121} + Q_{211} \geq 0, \quad (2.165)$$

$$\mathbf{i}_3 = \{122\} = Q_{122} + Q_{212} + Q_{221} \geq 0, \quad (2.166)$$

$$\mathbf{i}_4 = \{222\} = Q_{222} \geq 0, \quad (2.167)$$

pero en este caso p es mayor que el número de índices originales, por lo que se consideran solo la cantidad de índices originales, que corresponde a los 2 primeros índices, obteniendo las condiciones:

$$Q_{11} \geq 0, \quad (2.168)$$

$$Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} \geq 0, \quad (2.169)$$

$$Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} \geq 0, \quad (2.170)$$

$$Q_{22} \geq 0, \quad (2.171)$$

de esta forma, $\mathcal{P}^1((2.154)) = \{Q_{11} \geq 0, Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} \geq 0, Q_{12} + Q_{21} + Q_{22} \geq 0 \text{ y } Q_{22} \geq 0\}$. Y así sucesivamente, donde se observa cómo a medida que aumenta el grado de complejidad de las relajaciones de Pólya, las condiciones convergen asintóticamente a condiciones necesarias y suficientes, reduciendo paulatinamente el conservadurismo de las soluciones.

2.5. Discusión

En este capítulo se presentaron las estrategia de control predictivo más relevantes que servirán como base para las estrategias propuestas en esta tesis. Primero se presentó la formulación de MPC clásico para sistemas lineales dando un mayor énfasis en la descripción de las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que se deben cumplir para que esta estrategia estabilice el sistema cumpliendo las restricciones operativas.

Se presentó a continuación una estrategia de RMPC para sistemas afectados por incerteza multiplicativa desde un enfoque de peor caso, en la cual, se resuelve un problema de optimización sujeto a restricciones que son expresadas en LMIs para disminuir el esfuerzo computacional y tener un problema tratable.

Posteriormente, se revisaron estrategias de RMPC que incorporan una ley de control predicha con estado propio que evoluciona en una dinámica que es posible optimizar en una etapa offline. Se mencionó, que estas estrategias por razones históricas llevan el nombre de dinámica optimizada. Estos enfoques, generan las máximas zonas de operación para cualquier ley de control base, lo que permite incluir un criterio de desempeño específico sin afectar la zona de operación. Además estas estrategias disminuyen aún más la carga computacional al realizar el diseño de la ley de control predicha junto con su dinámica, en una etapa offline a través de una optimización sujeta restricciones expresadas en LMIs.

El capítulo continuó presentado una estrategia de FMPC para sistemas Takagi-Sugeno

sin incerteza y una versión robusta para sistemas Takagi-Sugeno con incerteza. Ambas estrategias son resueltas desde un enfoque de peor caso, resolviendo un problema de optimización con restricciones que se imponen en LMIs para disminuir su carga computacional. En este punto se identifica el gran paralelismo que existen entre los modelos con incerteza multiplicativa con los modelos difusos, ambos con y sin incerteza. La similitud radica en que ambos tipos de modelos se definen por una combinación de parámetros conocidos, diferenciándose solamente en la información del ponderador en cada caso.

Al final del capítulo, se presentaron las relajaciones de Pólya y su método de uso para expresar desigualdades matriciales lineales difusas en condiciones asintóticamente equivalentes a través de LMIs. El conjunto de LMIs que imponen las relajaciones de Pólya son menos conservativas que otras formas de expresar las FLMIs, lo que permite que estrategias difusas tengan una mejora en la aplicabilidad práctica.

Por todo lo mencionado, en los siguientes capítulos se proponen estrategias de control predictivo con dinámica optimizada basadas en LMIs para sistemas difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza, para lo cual se hacen uso de las relajaciones de Pólya.

Capítulo 3

MPC con dinámica optimizada basado en LMIs para sistemas difusos Takagi-Sugeno

Este capítulo tiene como objetivo exponer el primer grupo de las estrategias propuestas de esta tesis. Se pondrá especial énfasis en la formulación del problema, estrategia de control y análisis de estabilidad. Las propuestas presentadas en este capítulo corresponden al diseño de las estrategias de control predictivo difuso (FMPC) con dinámica optimizada para modelos difusos del tipo Takagi-Sugeno sin incerteza aditiva.

En estas estrategias se considera una ley de control predicha con dinámica propia difusa, y así generar un estado aumentado con el estado de la dinámica del sistema y el estado asociado a la misma ley de control predicha. A partir de la ley de control base, con la optimización de la dinámica se define la ganancia L asociada a la dinámica del controlador. Las leyes de control base y predicha se consideran difusas o no difusas, es decir, que se consideran ganancias K y L difusas o no difusas. Todas las leyes de control bases son de realimentación y además, se proponen difusas del tipo PDC, por lo que se genera una ley de control predicha con dinámica optimizada con compensación distribuida en paralelo, lo que se resume por la sigla DOPDC.

La DOPDC que se utiliza en las estrategias de FMPCs, maximiza la zona de operación de las leyes de control predichas diseñadas independiente de la ley de control base, difusa o no difusa, utilizada. Esto permite realizar una elección de la ganancia (o las ganancias) asociada al sistema para mejorar un desempeño específico.

Todas las estrategias de MPC con dinámica optimizada propuestas en este capítulo, tendrán condiciones expresadas en desigualdades matriciales multiplicadas por grados de activación normalizados, los que a priori son desconocidos y que por lo general, representa una función no lineal. Por lo tanto, se expresan en desigualdades matriciales lineales difusas (FLMIs) y es por esta razón que se utilizan las relajaciones de Pólya para establecer condiciones menos conservativas en un conjunto de LMIs asintóticamente equivalente a las originales.

3.1. Ley de control con dinámica optimizada difusa sin incerteza (DOPDC)

En esta sección se presenta una estrategia de control predictivo con dinámica optimizada para sistemas no lineales descritos por medio de modelos difusos Takagi-Sugeno sin incerteza. Para la dinámica optimizada, se considera una ley de control predicha difusa con estado propio y que se diseña para maximizar la zona de operación del controlador sobre una ley de control base de realimentación diseñada bajo un criterio de desempeño específico. Además, se introduce el concepto de dinámica optimizada con compensación distribuida en paralelo o DOPDC con una ley de control predicha difusa del tipo PDC sobre una ley de control base difusa.

Esta estrategia, que en el problema de optimización predicho considera la dinámica optimizada con un sistema aumentado (sistema y controlador), estabiliza asintóticamente la dinámica del sistema original. El diseño de estas estrategias se basan en los aporte de [21, 22]; y considera dividir en dos partes el algoritmo de la estrategia: offline y online. En la etapa offline, se diseña la dinámica de la ley de control predicha y las ganancias asociadas a ella, de modo que se maximice el volumen del conjunto invariante. Luego en la etapa online, en cada instante, se calcula la acción de control que se aplicará al sistema.

Esta propuesta se desarrolla utilizando las relajaciones de Pólya, para expresar las condiciones en base a LMIs, y así los problemas de optimización son convexos y computacionalmente tratables.

3.1.1. Formulación del problema

Considere el siguiente modelo difuso Takagi-Sugeno discreto, que representa la dinámica de un sistema no lineal discreto a través de L reglas dadas por los sistemas locales en variables de estados:

Regla l :

$$\text{Si } \mathbf{z}_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \text{ y } \mathbf{z}_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } x_{k+1}^l = A^l x_k + B^l u_k, \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos y $l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ indica el número de regla. Por lo tanto el sistema global esta dado por,

$$x_{k+1} = \sum_{l=1}^L h^l(A^l x_k + B^l u_k) \quad (3.2)$$

donde $h^l(\mathbf{z}_k)$ es escrito por conveniencia como h^l y representa el grado de activación normalizado de la regla l en el instante k .

El sistema descrito en (3.2) tiene restricciones operativas para el estado y las entradas

que se deben satisfacer en todos los instantes, y se expresan mediante:

$$Fx_{k+i} + Gu_{k+i} \leq \mathbf{1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Este sistema se desea controlar de modo de garantizar su estabilización y satisfacción de las restricciones operativas. Además de la estabilización, se espera minimizar el siguiente funcional de costo:

$$J(\vec{x}, \vec{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k^T). \quad (3.4)$$

3.1.2. Estrategia de control

Esta estrategia de control, basada en las propuestas [21, 22], considera incluir leyes de control predichas con dinámica optimizada. Las leyes de control predichas se diseñan en una etapa offline para maximizar el conjunto invariante tal que se garantice que las predicciones del sistema controlado cumplan las restricciones (3.3) en todo instante. Posteriormente, en la etapa online se desea encontrar las acciones de control para aplicar sobre el sistema. Para esto, se optimiza el comportamiento predicho bajo la ley de control predicha. Esta optimización, busca el estado inicial de la dinámica optimizada y se impone que el estado extendido esté en el conjunto invariante, de modo que todas las predicciones estén dentro de este conjunto lo que garantiza satisfacer las restricciones en el problema predicho. Además, se busca que las predicciones minimicen el costo (3.4). En particular, se aplica solo la primera acción de control de la ley de control predicha con dinámica optimizada y en el siguiente instante se repite el proceso para las nuevas condiciones del sistema.

A diferencia de [21, 22] en esta estrategia para la etapa offline, se considera diseñar una ley de control predicha difusa del tipo PDC con estado propio y en la etapa online, las acciones de control evolucionan por perturbaciones $\{v_{k+i|k}\}$ con respecto a la ley de control base difusa $u = \sum_{j=1}^L K^j x$. De esta forma, para cada una de reglas de la ley de control base, en la etapa offline se diseñan las ganancias asociadas al estado del controlador. Esta ley de control predicha se denomina KD-LD por tener las ganancias K y L difusas, como se muestra a continuación,

Regla j :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^j \text{ y } \dots z_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^j, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K^j x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}, \quad (3.5)$$

donde las premisas y los conjuntos difusos están dados por el sistema difuso (3.2).

En (3.5), las ganancias L^j define como afecta el estado del controlador a la acción de control y los K^j son requeridos para estabilizar el sistema difuso global (3.2). Las condiciones que se deben imponer para el diseño de las ganancias K^j para que la ley de control base difusa $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ estabilice el sistema difuso global (3.2) se expresan en el Teorema 17 disponible en Anexo E.

Luego, al considerar todas las reglas del controlador (3.5) da una ley de control predicha

global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}). \quad (3.6)$$

En la ley de control predicha (3.6), se destaca que $v_{k+i|k} \in \mathbb{R}^{n_v}$ es interpretado como las predicciones del estado del controlador y su dinámica está dada por un modelo Takagi-Sugeno con subsistemas locales de la forma,

$$v_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^m h^l M^l v_{k+i|k}, \quad (3.7)$$

donde h^l es el grado de activación normalizado por regla generado a partir de la misma base de reglas que el sistema difuso (3.2) y las matrices M^l son diseñadas para optimizar la zona de operación del controlador.

Luego, las predicciones del sistema (3.2) bajo la ley de control predicha (3.6) y la dinámica del controlador (3.7) pueden ser representadas en un sistema difuso autónomo extendido dado por:

Regla lj :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^{\text{11}} \text{ es } \mathcal{F}_1^{\text{11}} \text{ y } \dots z_{k+i|k}^{\text{lj}} \text{ es } \mathcal{F}_v^{\text{lj}}, \text{ entonces } z_{k+i+1|k}^{\text{lj}} = \Psi^{\text{lj}} z_{k+i|k} \quad (3.8)$$

donde,

$$\Psi^{\text{lj}} = \begin{bmatrix} \Phi^{\text{lj}} & B^{\text{l}} L^{\text{j}} \\ 0 & M^{\text{l}} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{\text{lj}} = A^{\text{l}} + B^{\text{l}} K^{\text{j}}. \quad (3.9)$$

De esta forma, el sistema extendido global está dado por:

$$z_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{\text{lj}} z_{k+i|k}, \quad (3.10)$$

donde L^j y M^l son los parámetros de la dinámica del controlador y se diseñan para optimizar la ley de control predicha junto con dinámica extendida difusa (3.10).

Como se mencionó, la ley de control predicha es diseñada en la etapa offline para maximizar la zona de operación del controlador dado que la ley de control base está fija y fue diseñada para optimizar el desempeño. Para conseguir esto, primero se presentan las condiciones de invarianza y factibilidad de las restricciones operacionales que se imponen en esta estrategia para las predicciones del sistema (3.10). Segundo, estas condiciones son tratadas con cambios de variables y complementos de Schur para presentar FLMI's equivalentes. Luego, se presenta el problema convexo basado en LMI's que optimiza la dinámica de la ley de control predicha.

La condición de estabilidad para las predicciones del sistema difuso extendido (3.10), está dado por el siguiente teorema.

Teorema 3 El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$ es positivamente invariante bajo la dinámica (3.10) si existe una matriz común P_z definida positiva tal que

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Psi^{ljT} P_z \Psi^{lj} - P_z) < 0, \quad (3.11)$$

DEMOSTRACIÓN. La condición (3.11) es una condición necesaria para que el elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$, $P_z > 0$ sea positivamente invariante bajo la dinámica (3.10) ya que se cumple que, $(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_k)^T P_z (\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_k) \leq z_k^T P_z z_k \leq 1$. Luego es una condición suficiente, si por el contrario, existiera un z_k tal que $(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_k)^T P_z (\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_k) > z_k^T P_z z_k$ y con $z^T P_z z \leq 1$ entonces implicaría que $z_{k+1} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z \notin \mathcal{E}_z$ para algún $z_k \in \mathcal{E}_z$. ■

Ahora, la condición de factibilidad debe asegurar que todas las predicciones de la dinámica global del sistema cumplan con las restricciones (3.3). El siguiente teorema, reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea recursivamente factible, y además invariante para la ley de control predicha difusa PDC (3.6).

Teorema 4 El conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$, con $P_z > 0$ es positivamente invariante para la dinámica (3.10) bajo las restricciones (3.3) si y solo si se cumple la condición (3.11) del Teorema 3 y la siguiente desigualdad:

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W^j & [F + GK^j \quad GL^j] \\ [F + GK^j \quad GL^j]^T & P_z \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j W_{ii}^j \leq 1. \quad (3.12)$$

DEMOSTRACIÓN. Similar a la presentada en [1]. Primero cabe destacar que las restricciones (3.3) bajo la ley de control predicha (3.6) tienen la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^L h^j [F + GK^j \quad GL^j] z \leq 1 \quad (3.13)$$

y para simplificar la notación considere $\tilde{F}^j = [F + GK^j \quad GL^j]$, y \tilde{F}_i que indica la i -ésima fila de $\sum_{j=1}^L h^j \tilde{F}^j$. Luego, se cumplirá que:

$$(\tilde{F}_i P_z^{-1} \tilde{F}_i^T)^{1/2} = \max_{z \in \mathcal{E}_z} \{\tilde{F}_i z\} \quad (3.14)$$

Con esto, las restricciones (3.3) pueden ser expresadas como:

$$\begin{bmatrix} W_{ii} - \tilde{F}_i P_z^{-1} \tilde{F}_i^T & & \\ & \ddots & \\ & & W_{ii} - \tilde{F}_i P_z^{-1} \tilde{F}_i^T \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j W_{ii}^j \leq 1 \quad i = 1, \dots, l \quad (3.15)$$

donde $W_{ii} = \sum_{j=1}^L h^j W_{ii}^j$, que es equivalente a:

$$W - \tilde{F}P_z^{-1}\tilde{F}^T \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j W^j \leq 1 \quad i = 1, \dots, l \quad (3.16)$$

Luego usando el complemento de Schur, se obtiene (3.12). ■

Las condiciones (3.11) y (3.12) para el sistema (3.10) son desigualdades matriciales difusas no lineales con variables W^j , P_z , L^j y M^l que se diseñan para maximizar la zona de operación del controlador, es decir, que se maximiza la proyección del elipsoide \mathcal{E}_z en el subespacio x .

Para presentar FLMI's equivalente a las condiciones (3.11) y (3.12) se utiliza el siguiente cambio de variables,

$$P = \begin{bmatrix} X^{-1} & X^{-1}U \\ U^T X^{-1} & -V^{-1}YX^{-1}U \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & -V^T U^{-T} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$T^j = L^j V^T, \quad UV^T = X - Y, \quad H^l = UM^l V^T, \quad j = 0, \dots, m$$

donde $PP^{-1} = I$. Es posible notar que (3.17) es bastante similar a lo presentado en [21], pero tiene pequeñas modificaciones para considerar la ley de control predicha difusa propuesta.

Luego, utilizando el cambio de variables (3.17) y complementos de Schur, el siguiente teorema presenta FLMI's equivalente a las condiciones (3.11) y (3.12).

Teorema 5 *Existen W , P_z , L^j y M^l que cumplen (3.11) y (3.12) para el sistema (3.10) si y solo si las siguientes FLMI's en X , Y , H^l , T^j , Υ^j son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi^{lj}Y + B^l T^j & \Phi^{lj}X \\ \Phi^{lj}Y + B^l T^j + H^l & \Phi^{lj}X \end{bmatrix} \\ \star & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.18)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \Upsilon^j & \begin{bmatrix} (F + GK^j)Y + GT^j & (F + GK^j)X \end{bmatrix} \\ \star & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j \Upsilon_{ii}^j \leq \underline{1}, \quad (3.19)$$

DEMOSTRACIÓN. La primera condición se obtiene al aplicar el complemento de Schur a (3.11) y pre-post multiplicar, respectivamente, por:

$$\begin{bmatrix} \pi^T & 0 \\ 0 & \pi^T \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}, \quad \text{con } \pi = \begin{bmatrix} Y & X \\ V^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

obteniendo:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \pi^T P_z \pi & \pi^T P_z \Psi^{lj} \pi \\ \pi^T (P_z \Psi^{lj})^T \pi & \pi^T P_z \pi \end{bmatrix} > 0, \quad (3.21)$$

resolviendo y reemplazando con el cambio de variables (3.17) se obtiene (3.18). La segunda

condición (3.19), se obtiene si se pre-post multiplica (3.12), respectivamente por;

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}, \quad \text{resolviendo, se tiene:} \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \Upsilon^j & [F + GK^j \quad GL^j] \pi \\ \pi^T [F + GK^j \quad GL^j]^T & \pi^T P_z \pi \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

luego, bajo el cambio de variables (3.17) se obtiene (3.19). De esta forma, (3.11) y (3.12) solo puede ser factible si (3.18) y (3.19) son factibles.

A continuación, observamos que U y V pueden suponerse de rango completo sin pérdida de generalidad, ya que las desigualdades que involucran a P_z en (3.11) y (3.12) son estrictas, y por lo tanto el conjunto factible para P_z es abierto. A partir de las definiciones de H^l, T^j en (3.17), las soluciones para M^l, L^j siempre existen para H^l, T^j dado que siempre se puedan obtener U y V con $n_v \geq n_x$, lo que implica que (3.11) y (3.12) son factibles si y solo si (3.18) y (3.19) son factibles. Para $n_v = n_x$, obteniendo U y V tal que $VU^T = X - Y$, las soluciones para M^l y L^j están dados por:

$$M^l = U^{-1} H^l V^{-T}, \quad L^j = T^j V^{-T}. \quad (3.24)$$

permitiendo retornar a las variables originales. ■

A partir del Teorema 5, las condiciones de invarianza y factibilidad impuestas para esta estrategia están dadas por FLMI's. Luego, para implementar estas restricciones, se utilizan las relajaciones de Pólya siguiendo la metodología explicada en en la Sección 2.4. De esta forma, se tendrá un conjunto de LMI's asintóticamente equivalentes, que permiten resolver un problema de optimización convexo.

Para cumplir con el objetivo de la etapa offline, a partir de la ley de control base $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ se diseña la ley de control predicha al maximizar el volumen del conjunto elipsoidal \mathcal{E}_z en el subespacio x , es decir, maximizar el tamaño de $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$. Este problema de optimización esta dado por:

$$\begin{aligned} & \max \log(\det(Y)) & (3.25) \\ & S.a : \{ \mathcal{P}^d(3.18) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.19) \} \end{aligned}$$

considerando que se han incluido las relajaciones de Pólya para que las FLMI's (3.18) y (3.19) sean un conjunto de LMI's copositivas equivalentes y así tener una optimización convexa. Además, en el problema de optimización (3.25) se maximiza $\log(\det(Y))$ ya que está monótonamente relacionado con $\frac{4}{3} \pi \sqrt{\det(Y)}$ que representa el tamaño¹ del conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x .

Con esto ya se tienen los parámetros que definen la dinámica de ley de control predicha

¹ En el caso que el sistema sea de dimensión dos el tamaño del conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x corresponde a área, para sistemas de orden superior el tamaño corresponde a volumen.

con lo que se concluye la etapa offline. Luego, el objetivo de la etapa online es optimizar el comportamiento predicho bajo la ley de control predicha y así obtener la acción de control en cada instante, para lo cual se requiere encontrar el estado inicial de la ley de control predicha. Este estado inicial se obtiene al minimizar el funcional de costos predicho en un horizonte infinito para todos los subsistemas locales del modelo difuso, dado por

$$J(x_{k|k}) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}), \quad (3.26)$$

donde $Q, R \succ 0$ son los costos asociados a los estados y entradas del sistema.

Se ha revisado en los trabajos presentados en el marco teórico de esta tesis, que la evaluación exacta del costo (3.26) tiene un costo computacional elevado, por lo que, para la optimización online se realiza minimizando la cota superior de este. La cota superior del costo (3.26) se define por el siguiente teorema:

Teorema 6 *El costo cuadrático de Lyapunov*

$$V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k} \quad (3.27)$$

es una cota superior del costo predicho (3.26) tal que,

$$J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k} \quad (3.28)$$

donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, si se cumple para $i = 0, 1, \dots$

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - z_{k+i+1|k}^T \mathcal{W} z_{k+i+1|k} \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} \quad (3.29)$$

Además, (3.29) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\mathcal{W} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l \Psi^{lj} \right) \geq \sum_{j=1}^L h^j \tilde{Q}^j, \quad (3.30)$$

donde,

$$\tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^{jT} R K^j & K^{jT} R L^j \\ L^{jT} R K^j & L^{jT} R L^j \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

DEMOSTRACIÓN. El límite del costo (3.26) se deriva de la suma de (3.29) desde el instante actual k hasta el infinito. Luego, la condición (3.29) puede ser reescrito como

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_{k+i|k} \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_{k+i|k} \right) \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}$$

lo que puede ser reformulado como:

$$z_{k+i|k}^T \left(\mathcal{W} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} \right) - \sum_{j=1}^L h^j \tilde{Q}^j \right) z_{k+i|k} \geq 0, \quad (3.32)$$

de esta forma, implica que las operaciones de las matrices centrales de (3.32) definen una FLMI que es semidefinida positiva y bajo un reordenamiento se obtiene la condición (3.30). ■

Con todo definido para realizar la optimización online, el control predictivo busca el estado inicial de la dinámica optimizada, minimizando el costo de peor caso, en el conjunto invariante \mathcal{E}_z . En particular, la dinámica de la ley de control predicha (3.7) permite definir completamente la trayectoria del controlador por el primer elemento de $\{v_{k+i|k}\}$. De acuerdo a lo descrito anteriormente, en cada instante k , se resuelve el siguiente problema de optimización para encontrar $v_{k|k}^*$:

De acuerdo a lo descrito anteriormente, en cada instante k , se minimiza la cota superior del costo de peor caso para encontrar $v_{k|k}^*$ al resolver:

$$v_{k|k}^* = \underset{z_{k|k} \in \mathcal{E}_z}{\operatorname{argmin}} z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}, \quad (3.33)$$

donde \mathcal{W} es tal que cumple $\mathfrak{P}^d(3.30)$. Además, como las predicciones del estado extendido siempre pertenece a \mathcal{E}_z , la acción de control es factible cumpliendo las restricciones operativas. Luego, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante, esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L^j v_k^*). \quad (3.34)$$

Para finalizar, se presenta el Algoritmo 7 que resume como se aplica esta estrategia de control.

Algorithm 7: MPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KD-LD con compensación distribuida en paralelo (DOPDC) para sistemas difusos sin incerteza aditiva

Etapa Offline:

1. Definir el grado de complejidad d para las relajaciones de Pólya de las FLMIIs.
2. Diseñar las ganancias K^j de la ley de control base difusa para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 17.
3. Diseñar M^l , L^j y P_z con el cambio de variable (3.24) al resolver

$$\begin{aligned} (X^*, Y^*, H^{j*}, T^{j*}, \Upsilon^*) &= \underset{X, Y, H^j, T^j, \Upsilon}{\operatorname{argmax}} \log \det(Y) \\ &s \ a : \{\mathfrak{P}^d(3.18) \text{ y } \mathfrak{P}^d(3.19)\} \end{aligned}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathfrak{P}^d(3.30)$.

Etapa Online:

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ sujeto a que $z_{k|k} \in \mathcal{E}_z$.
 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L^j v_k^*)$
 4. Actualizar, $k = k + 1$
-

3.1.3. Análisis de estabilidad

Hasta ahora, no se ha demostrado que la aplicación en lazo cerrado de la ley de control (3.34) en cada instante, de acuerdo a la etapa online del Algoritmo 7 establezca el sistema (3.2). Para cumplir con esto, primero se muestra que la estrategia es recursivamente factible y luego, que estabiliza asintóticamente el sistema.

Teorema 7 *Para el sistema (3.2), la aplicación en lazo cerrado de la ley de control (3.34) satisface las restricciones (4.5) y el problema de optimización (3.33) es recursivamente factible.*

DEMOSTRACIÓN. Considere que la solución candidata en el instante $k + 1$ es \hat{v}_{k+1} y que es construida a partir de la solución óptima en el instante k de (3.33) para x_k . Bajo la dinámica de la ley de control predicha (3.7) la candidata es $\hat{v}_{k+1} = \sum_{j=1}^L h^j M^j v_k^*$ es igual a la predicción $v_{k+1|k}$. Luego, con v_k^* bajo la aplicación en lazo cerrado de la ley de control (3.34), la candidata \hat{x}_{k+1} es igual a la predicción $x_{k+1|k}$. Adicionalmente, bajo el Teorema 4, el par $z_k = (x_k, v_k)$ dado que evoluciona de acuerdo a la dinámica (3.10), $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ pertenecen a \mathcal{E}_z que es invariante. En particular $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ están en \mathcal{E}_z por lo que son factibles y dado que \mathcal{E}_z esta construido para satisfacer (4.5) entonces $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ satisfacen las restricciones operativas.

Finalmente, \hat{v}_{k+1} es factible para el problema óptimo (3.33) siempre que v_k sea factible. Entonces, por un argumento recursivo, se puede establecer que el problema de optimización (3.33) seguirá siendo factible para todos los instantes futuros. ■

Teorema 8 *La etapa online del Algoritmo 7 estabiliza asintóticamente el sistema (3.2) con una región de atracción $\mathcal{E}_x = \{x \mid \exists v \text{ tal que } (x, v) \in \mathcal{E}_z\}$.*

DEMOSTRACIÓN. La candidata \hat{v}_{k+1} es factible de acuerdo al Teorema 7. Adicionalmente, el costo predicho es construido para satisfacer (3.30), por lo que la candidata cumplirá

$$z_k^{*T} \mathcal{W} z_k - \hat{z}_{k+1}^T \mathcal{W} \hat{z}_{k+1} \geq x_k^T Q x_k + u_k^{*T} R u_k^* \quad (3.35)$$

donde $Q, R \succeq 0$. Además, se sabe que si lo anterior es válido para la solución candidata, entonces también será válido para la solución óptima z_{k+1}^* que minimiza la cota superior del costo predicho (3.28). Luego, como la forma cuadrática $z^T \mathcal{W} z$ de la solución óptima z_{k+1}^* es menor que con la solución candidata \hat{z}_{k+1} , se obtiene

$$z_k^{*T} \mathcal{W} z_k^* - \hat{z}_{k+1}^{*T} \mathcal{W} \hat{z}_{k+1}^* \geq x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k), \quad (3.36)$$

que sumando hasta el infinito se tendrá

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k)) \leq z_0^T \mathcal{W} z_0. \quad (3.37)$$

A partir de (3.37) con $Q, R \succeq 0$ la forma cuadrática $x_k^T Q x_k \rightarrow 0$ como $k \rightarrow \infty$. Finalmente bajos los supuestos habituales de observabilidad sobre $(Q^{1/2}, R^{1/2})$ con $R \succ 0$ implica que $x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k) \rightarrow 0$ como $k \rightarrow \infty$ y por lo tanto x_k converge asintóticamente al origen del sistema. ■

De acuerdo a los teoremas anteriores, si el problema de optimización (3.25) es factible en el instante inicial, la optimización (3.33) es recursivamente factible y el origen del sistema ($x = 0$) es asintóticamente estable con la región de atracción $\mathcal{E}_x = \{x \mid \exists v \text{ tal que } (x, c) \in \mathcal{E}_z\}$. De esta forma, la región de atracción resulta ser la proyección de \mathcal{E}_z en el subespacio x , es decir, \mathcal{E}_x . En este dominio, la estrategia de control siempre es factible y permite llevar el estado al origen, y es justamente por esta razón que se le denomina región de atracción.

3.1.4. Análisis del tamaño del conjunto estabilizante

En esta sección se realizará un análisis teórico del tamaño que puede alcanzar el conjunto invariante \mathcal{E}_x definido por la dinámica optimizada. En particular, se compara el tamaño del conjunto \mathcal{E}_x que define la dinámica optimizada con el que tiene una ley de control base difusa del tipo PDC $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ que estabiliza el sistema tal que maximice la zona de operación.

En la estrategia de control propuesta en este capítulo, se estableció que el máximo conjunto invariante \mathcal{E}_x , es obtenido al optimizar el tamaño de Y sujeto a (3.11) y (3.12). Luego, a través cambio de variables (3.17) se compara el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x de la DOPDC con el máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base difusa del tipo PDC que estabilice el sistema, es decir, del tipo $u = \sum_{j=1}^L K^j x$.

Se vio anteriormente que (3.11) y (3.12) tiene solución si y solo si \mathcal{E}_x es invariante si la ley de control base difusa estabiliza el sistema en ausencia de restricciones. No obstante, esta ley de control base en general no es óptima en términos del tamaño del conjunto invariante. A continuación, se demostrará que el tamaño del elipsoide \mathcal{E}_x que define la dinámica optimizada es igual al máximo que se puede alcanzar con una ley de control del tipo de realimentación difusa PDC $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ tal que estabilice el sistema (3.2).

Para cumplir con lo anteriormente descrito, considere el problema de determinar Y y \tilde{K}^j tal que el elipsoide $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ es invariante bajo una ley de control base de realimentación difusa no especificada $u = \sum_{j=1}^L h^j \tilde{K}^j x$, es decir, una colección de \tilde{K}^j cualquiera que estabilicen el sistema, es decir, cumplir las condiciones (E.1) disponible en Anexo E.

Las condiciones de invarianza del sistema (3.2) expresadas con la ley de control base no especificada, se impone por el descenso la función Lyapunov $V(x) = x^T Y^{-1} x$,

$$V(x_k) - V(x_{k+1}) = x_k^T Y^{-1} x_k - x_{k+1}^T Y^{-1} x_{k+1} \geq 0 \quad (3.38)$$

donde x_{k+1} esta dado por una ley de control difusa no especificada $u_k = \sum_{j=1}^j h^j \tilde{K}^j x_k$, por lo que (3.38) será equivalente a:

$$x_k^T Y^{-1} x_k - x_k^T \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l + B^l \tilde{K}^j) \right)^T Y^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l + B^l \tilde{K}^j) \right) x_k^T \geq 0. \quad (3.39)$$

Luego, al utilizar el cambio de variables $\tilde{K}^j = \tilde{T}^j Y^{-1}$, se cumple que

$$Y^{-1} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l + B^l \tilde{T}^j Y^{-1}) \right)^T Y^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l + B^l \tilde{T}^j Y^{-1}) \right) \geq 0, \quad (3.40)$$

pre-post multiplicando por Y la expresión anterior, será equivalente a

$$Y - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l Y + B^l \tilde{T}^j) \right)^T Y^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j (A^l Y + B^l \tilde{T}^j) \right) \geq 0, \quad (3.41)$$

utilizando el complemento de Schur, se obtiene:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^j h^l h^j \begin{bmatrix} Y & A^l Y + B^l \tilde{T}^j \\ \star & Y \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.42)$$

Así mismo, la condición para que el sistema (3.2) cumpla con las restricciones (3.3) bajo la ley de control base no especificada $u = \sum_{j=1}^L h^j \tilde{K}^j x$, se debe cumplir que:

$$\sum_{j=1}^L h^j [F + G \tilde{K}^j] x \leq \underline{1}, \quad (3.43)$$

luego, reemplazando \tilde{K}^j por $\tilde{T}^j Y^{-1}$, se obtiene

$$\sum_{j=1}^j h^j [F + G \tilde{T}^j Y^{-1}] x \leq \underline{1}. \quad (3.44)$$

Posteriormente, siguiendo los mismos pasos empleados en la demostración del Teorema 4 se obtiene:

$$\sum_{j=1}^j h^j \begin{bmatrix} W & FY + G \tilde{T}^j \\ \star & Y \end{bmatrix} > 0, \quad W_{ii} \geq 1. \quad (3.45)$$

Luego el sistema será invariante y factible, por lo tanto, el elipsoide \mathcal{E}_x es invariante para la ley de control base no especificada si se cumple con (3.42) y (3.45). Esto quiere decir, que todo elipsoide \mathcal{E}_x es invariante bajo una ley de control base de realimentación difusa si se cumplen las condiciones (3.42) y (3.45).

Ahora, en el siguiente teorema, se muestra que las condiciones para la invarianza y factibilidad de la DOPDC son equivalentes a las generadas por la ley de control base no especificada diseñada para optimizar el tamaño de \mathcal{E}_x . Esto implica que si se obtiene el máximo conjunto elipsoidal dado por la optimización de $\log(\det(Y))$ para (3.18)-(3.19), con estas soluciones se puede reestructurar una solución para (3.42)-(3.45) con el mismo Y , es decir, que la ley de control con dinámica optimizada permite obtener el máximo conjunto elipsoidal sin importar la ley de control base con que se diseñó la ley de control predicha, mientras estabilice el sistema.

Teorema 9 *Existen X, Y, H^l, T^j, W^j que satisfacen (3.18)-(3.19) si y solo si Y, W^j son*

soluciones de (3.42)-(3.45) para algún \tilde{T}^j .

DEMOSTRACIÓN. Primero se muestra que eliminando H^l de (3.18) se obtiene:

$$\sum_{l=1}^L h^l \sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} Y & X & \Phi^{lj}Y + B^l T^j & \Phi^{lj}X \\ X & X & \Phi^{lj}Y + B^l T^j & \Phi^{lj}X \\ (\Phi^{lj}Y + B^l T^j)^T & (\Phi^{lj}Y + B^l T^j)^T & Y & X \\ (\Phi^{lj}X)^T & (\Phi^{lj}X)^T & X & X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.46)$$

luego, se pueden cancelar la tercera/segunda fila y columna, y obtener la siguientes condiciones equivalentes a (3.18):

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} [Y & X] & [\Phi^{lj}X] \\ [X & X] & [\Phi^{lj}X] \\ \star & X \end{bmatrix} > 0, \quad (3.47)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & [\Phi^{lj}Y + B^l T^j & \Phi^{lj}X] \\ \star & [Y & X] \\ & [X & X] \end{bmatrix} > 0. \quad (3.48)$$

La necesidad de (3.47)-(3.48) se deduce directamente de la cancelación del segundo bloque o tercera fila de (3.18). Para la suficiencia se reordena la condición (3.18) cambiando la tercera fila/columna por la segunda fila/columna, la segunda fila/columna por la cuarta fila/columna y la cuarta fila/columna por la tercera fila/columna; de esta forma se obtiene la condición equivalente:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj}X & X & \Phi^{lj}Y + B^l T^j \\ (\Phi^{lj}X)^T & X & (\Phi^{lj}X)^T & X \\ X & \Phi^{lj}X & X & \Phi^{lj}Y + B^l T^j + H^l \\ ((\Phi^{lj}Y + B^l T^j)^T & X & (\Phi^{lj}Y + B^l T^j)^T & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (3.49)$$

luego, aplicando el complemento de Schur, se obtienen las condiciones equivalentes para (3.18) como:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj}X \\ \star & X \end{bmatrix} > 0, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & H^l + \Phi^{lj}Y + B^l T^j \\ \star & Y \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj}X \\ (\Phi^{lj}Y + B^l T^j)^T & X \end{bmatrix} \\ & \times \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj}X \\ \star & X \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj}Y + B^l T^j \\ X \Phi^{ljT} & X \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Luego si H^l es elegido de modo que (3.51) sea un bloque diagonal, este estará dado por:

$$H^l = \sum_{j=l}^L h^j [X \quad \Phi^{lj}X] \left(\sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj}X \\ \star & X \end{bmatrix}^{-1} \right) \sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} \Phi^{lj}Y + B^l T^j \\ X \end{bmatrix} - \sum_{j=l}^L h^j \Phi^{lj}Y - B^l T^j, \quad (3.52)$$

y la condición (3.51) con H^l de la forma (3.52) genera una condición con una matriz diagonal, que es equivalente a las siguiente dos condiciones:

$$X - \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj} X \\ \star & X \end{bmatrix} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj} X \\ \star & X \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X \\ X \Phi^{lj} T^j \end{bmatrix} > 0 \quad (3.53)$$

$$Y - \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \left[(\Phi^{lj} Y + B^l T^j)^T \quad X \right] \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj} X \\ \star & X \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Phi^{lj} Y + B^l T^j \\ X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.54)$$

donde el complemento de Schur de (3.50) es condición de (3.47)-(3.48). Por lo tanto la solución de (3.47)-(3.48) para X , Y , T^j también satisfacen (3.18) si H^l esta dado por (3.52).

Ahora se muestra que (3.47)-(3.48) y (3.19) son factibles si y solo si (3.42)-(3.45) son factibles. La condición (3.47) al aplicar el complemento de Schur es equivalente a

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj} X \\ \star & X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.55)$$

$$Y - \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj} X \\ (\Phi^{lj} X)^T & X \end{bmatrix} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj} X \\ (\Phi^{lj} X)^T & X \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X \\ (\Phi^{lj} X)^T \end{bmatrix} > 0, \quad (3.56)$$

que al resolver se reduce a las siguientes condiciones,

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & \Phi^{lj} X \\ \star & X \end{bmatrix} > 0, \quad Y - X > 0 \quad (3.57)$$

mientras que (3.48) con (3.19) al aplicarles el complemento de Schur sobre el bloque superior izquierdo, se obtienen las condiciones equivalentes:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} Y & \Phi^{lj} Y + B^l T^j \\ \star & Y \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Phi^{lj} X \\ X \end{bmatrix} X^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{j=l}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X \Phi^{lj} & X \end{bmatrix} > 0, \quad (3.58)$$

$$\sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} W & (F + GK^j)Y + GT^j \\ \star & Y \end{bmatrix} - \sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} (F + GK^j)X \\ X \end{bmatrix} X^{-1} \sum_{j=l}^L h^j \begin{bmatrix} X(F + GK^j)^T & X \end{bmatrix} > 0, \quad (3.59)$$

$$X > 0, \quad W_{ii} \leq 1.$$

Claramente (3.42) y (3.45) son implicados por (3.58) y (3.59) con $\tilde{T}^j = T^j + K^j Y$. Por otra parte, dados Y , \tilde{T}^j y W que cumplan (3.42) y (3.45) para X en (3.57), una solución puede ser reestructurada como $T^j = \tilde{T}^j - K^j Y$ para (3.58)-(3.59).

Finalmente, (3.57) es necesariamente factible debido a que $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ estabiliza el sistema (3.2). \blacksquare

Es importante destacar que estos resultados se obtienen bajo condiciones expresadas co-

mo FLMI. Como ya se ha comentado, en esta tesis se utilizan las relajaciones de Pólya para plantear condiciones asintóticamente equivalentes a través de LMIs. Y es por esta razón, que lo demostrado anteriormente se cumplirá para complejidades de las relajaciones de Pólya lo suficientemente grande.

Reuniendo lo expuesto en esta subsección; como el conjunto factible para Y sujeto a (3.18)-(3.19) es idéntico al conjunto factible para Y sujeto a (3.42)-(3.45), se tiene que el máximo conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x sujeto a (3.18)-(3.19) es idéntico al máximo conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x sujeto a (3.42)-(3.45). De esta forma, el volumen de la proyección del elipsoide \mathcal{E}_z en el subespacio x es máxima para una ley de control de realimentación difusa del tipo PDC no especificada, es decir, que para cualquier ley de control base difusa $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ tal que estabilice el sistema (cumpla (E.1)) se alcanza la máxima región de atracción, permitiendo escoger las ganancias K^j de la ley de control base bajo un criterio de desempeño específico sin perjudicar la zona de operación del controlador.

Como se comentó anteriormente, la dinámica optimizada genera un conjunto \mathcal{E}_x con un tamaño igual al máximo alcanzado por una ley de control base difusa no especificada. Esto a simple vista no genera ningún beneficio, pues ambas leyes de control alcanzan el mismo volumen. El beneficio de emplear leyes de control con dinámica optimizada radica en que es posible escoger las ganancias K^j para optimizar el desempeño con una zona de operación máxima. Esto permite tener un desempeño igual o mejor que el proporcionado por una ley de control base $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ diseñada para maximizar el volumen, pues esta quizás tenga un peor desempeño.

Finalmente, bajo lo demostrado en toda esta sección, la estrategia de MPC con una ley de control con dinámica optimizada difusa del tipo PDC es una extensión de [21] a modelos difusos Takagi-Sugeno sin incerteza. Además, la estrategia DOPDC, amplía el enfoque propuesto por Mark Cannon y Basil Kouvaritakis en [21] al diseñar una ley de control predicha difusa con dinámica optimizada sobre una ley de control base difusa.

3.2. Casos particulares de la ley de control predicha

En esta sección se presentan variaciones de la estrategia propuesta en la sección anterior al considerar casos particulares de la ley de control predicha (3.6). Estos casos se originan al considerar que las ganancias K y L asociadas a la ley de control predicha, pueden ser difusas o no difusas. Se realiza esta comparación porque el trabajo de [21] es un caso particular de la propuesta de esta tesis. Además de este trabajo, se comparan casos particulares intermedios. De esta forma, en esta sección se revisan tópicos similares a los presentados en la sección anterior para dos leyes de control difusas y una ley de control no difusa bajo el enfoque propuesto en [21].

3.2.1. Formulación del Problema

Considere el modelo difuso Takagi-Sugeno discreto, que representa la dinámica de un sistema no lineal discreto a través de L reglas (3.1) esta dado por (3.2). Además, este sistema está sujeto a las restricciones operativas (3.3).

Para estas estrategias, de manera similar a lo propuesto en la sección anterior, se consideran leyes de control predichas con estado propio, donde su dinámica evoluciona por perturbaciones $\{v_{k+i|k}\}$ con respecto a una ley de control base. A continuación, se presentan los casos particulares de la ley de control predicha difusa (3.64) al considerar cada una de las ganancias difusas o no difusas para leyes de control base difusa o no difusa.

Ley de control predicha:

- KD-LND: considera el diseño de solo una ganancia L asociada al controlador para todos los modelos locales sobre una ley de control base de realimentación difusa del tipo PDC $u = \sum_{j=1}^L K^j x$, es decir, la ganancia K difusa y L no difusa.

Regla j :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots z_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K^j x_{k+i|k} + L v_{k+i|k}, \quad (3.60)$$

Luego, al considerar todas las reglas (3.60) da una ley de control predicha global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_{k+i|k} + L v_{k+i|k}). \quad (3.61)$$

- KND-LD: considera el diseño de ganancias L^j asociadas al controlador para cada modelo local sobre una ley de control base de realimentación lineal $u = Kx$, es decir, la ganancia K no difusa y L difusa.

Regla j :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots z_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}, \quad (3.62)$$

Luego, al considerar todas las reglas (3.62) da una ley de control predicha global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}). \quad (3.63)$$

- KND-LND: considera el diseño de solo una ganancia L asociada al controlador para todos los modelos locales sobre una ley de control base de realimentación lineal $u = Kx$, es decir, la ganancia K y L no difusas. De esta forma, la ley de control predicha no es difusa como en el enfoque propuesto en [21].

$$u_{k+i|k} = K x_{k+i|k} + L v_{k+i|k}. \quad (3.64)$$

En (3.61), (3.63) y (3.64), las ganancias L o L^j se diseñan para optimizar la dinámica del controlador y las ganancias K o K^j son requeridas para estabilizar el sistema difuso (3.2) en un horizonte infinito, por lo que el diseño de las ganancias asociadas al sistema debe cumplir el Teorema 17 disponible en Anexo E.

Se destaca además, que en las leyes de control predichas (3.61), (3.63) y (3.64), $v_{k+i|k} \in \mathbb{R}^{n_v}$ es interpretado como el estado del controlador y su dinámica está dada por un modelo Takagi-Sugeno con subsistemas locales de la misma forma que en (3.7).

Luego, las predicciones del sistema (3.2) generadas con las leyes de control predichas (3.61), (3.63) y (3.64), bajo la dinámica del controlador (3.7) son representadas en un sistema extendido global dado por:

$$z_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} z_{k+i|k}, \quad (3.65)$$

donde las reglas del modelo difuso con estado extendido del tipo Takagi-Sugeno, para cada ley de control predicha, están dadas por:

Regla lj :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^{11} \text{ y } \dots \text{ y } z_{k+i|k}^j \text{ es } \mathcal{F}_v^{lj}, \text{ entonces } z_{k+i+1|k}^{lj} = \Psi^{lj} z_{k+i|k} \quad (3.66)$$

donde:

- para la ley de control predicha KD-LND, $\Psi^{lj} = \begin{bmatrix} \Phi^{lj} & B^l L \\ 0 & M^l \end{bmatrix}$ y $\Phi^{lj} = A^l + B^l K^j$.
- para la ley de control predicha KND-LD, $\Psi^{lj} = \begin{bmatrix} \Phi^l & B^l L^j \\ 0 & M^l \end{bmatrix}$ y $\Phi^l = A^l + B^l K$.
- para la ley de control predicha KND-LND, $\Psi^l = \begin{bmatrix} \Phi^l & B^l L \\ 0 & M^l \end{bmatrix}$ y $\Phi^l = A^l + B^l K$. Además, en el sistema extendido global (3.65) se considera que $\Psi^{lj} = \Psi^l \forall j$

En estas estrategias, las leyes de control predichas se diseñan para maximizar su zona de operación al optimizar la dinámica extendida difusa (3.65) con variables M^l y L o L^j , según sea el caso.

En la siguientes subsecciones se presentan las estrategias de control y análisis del tamaño del conjunto estabilizante para cada una de las leyes de control predichas. Cabe destacar, que cada estrategia de control sigue los mismo pasos que la revisada en la sección 3.1, por lo que se ahondará solo en detalles relevantes; entendiendo que son casos particulares de lo ya presentado. Se destaca además, que bajo el Teorema 8, todas las estrategias de control son recursivamente factibles y estabilizan asintóticamente el sistema cumpliendo las restricciones operativas si son factibles en el instante inicial.

3.2.1.1. Ley de control predicha KD-LND

Estrategia de control

La condición suficiente para la estabilidad del sistema extendido (3.65), está dada por el Teorema 3 considerando que en Ψ^{lj} los $L^j = L \forall j$. Luego, a partir del Teorema 4, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y recursivamente factible.

Corolario 3.1 *El conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$, $P_z \succ 0$ es positivamente invariante para la dinámica (3.65) bajo las restricciones (3.3) si y solo si se cumple la condición (3.11) del Teorema 3 y la siguiente desigualdad:*

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W^j & [F + GK^j \quad GL] \\ [F + GK^j \quad GL]^T & P_z \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j W_{ii}^j \leq 1, \quad (3.67)$$

Luego, a partir del Teorema 5, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMI, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (3.17) considerando $T = LV^T$.

Corolario 3.2 *Existen W , P_z , L y M^l que cumplen (3.11) y (3.67) si y solo si las siguientes FLMI en X , Y , H^l , T , Υ^j son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi^{lj} Y + B^l T & \Phi^{lj} X \\ \Phi^{lj} Y + B^l T + H^l & \Phi^{lj} X \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.68)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \Upsilon^j & [(F + GK^j)Y + GT \quad (F + GK^j)X] \\ * & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j \Upsilon_{ii}^j \leq 1. \quad (3.69)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 5 pero considerando que $T = LV^T$. Luego, es posible notar que con $T = LV^T$ el cambio de variables no afecta a X , Y , U y V por lo que, si $n_v \geq n_x$ siempre se pueden obtener U y V tal que $VU^T = X - Y$, permitiendo así recuperar las variables originales. ■

Cabe destacar que es posible retornar a las variables originales M^l y L por medio de:

$$M^l = U^{-1} H^l V^{-T}, \quad L = TV^{-T}. \quad (3.70)$$

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ se diseña la ley de control predicha KD-LND al maximizar el tamaño del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ al resolver:

$$\begin{aligned} & \max \log(\det(Y)) \\ & S.a : \{\mathcal{P}^d(3.68) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.69)\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (3.26). Para conseguir esto, se resuelve el problema de optimización (3.33) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario;

Corolario 3.3 *El costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior del costo predicho (3.26) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, y la cota superior*

cumplirá (3.29) para $i \geq 0$. Además, (3.29) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\mathcal{W} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l \Psi^{lj} \right) \geq \sum_{j=1}^L h^j \tilde{Q}^j, \quad \tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^{jT} R K^j & K^{jT} R L \\ L^T R K^j & L^T R L \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Finalmente, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L (K^j x_k + L v_k^*). \quad (3.73)$$

Esta estrategia de control se resume en el Algoritmo 9 disponible en Anexo G.

Análisis del tamaño del conjunto estabilizante

El análisis del tamaño del máximo conjunto elipsoidal para la ley de control predicha KD-LND, basado en el Teorema 9, se define por la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *El máximo conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x que satisface (3.11) y (3.67) es menor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación difusa del tipo PDC, no especificada.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, el sistema será estable y factible, si el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x es invariante para la ley de control base difusa no especificada, es decir, si se cumple (3.42) y (3.45) con $\tilde{T} = \sum_{j=1}^j h^j \tilde{K}^j Y$, pues la ley de control predicha es KD-LND. Luego, del Teorema 9 se desprende que si, dados Y , \tilde{T} y W que cumplan (3.42) y (3.45) para X en (3.57), no es posible reestructurar una solución independiente de los grados de activación normalizado para T de (3.58)-(3.59). Es decir, que con $T = \tilde{T} - \sum_{j=1}^L h^j K^j Y$ no se puede asegurar que para cualquier grado de activación normalizado se mantenga el valor de T .

■

Bajo la proposición anterior, el criterio de diseño de las leyes de control base o la elección de las ganancias K^j sobre la que se diseña la ley de control predicha KD-LND, influirá en el tamaño máximo alcanzado por la DOPDC.

3.2.1.2. Ley de control predicha KND-LD

Estrategia de control

La condición suficiente para la estabilidad del sistema aumentado (3.65), está dada por el Teorema 3 considerando en Ψ^{lj} que Φ^{lj} es $\Phi^l = A^l + B^l K$. A partir del Teorema 4, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y recursivamente factible.

Corolario 3.4 *El conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$, $P_z \succ 0$ es positivamente invariante para la dinámica (3.65) bajo las restricciones (3.3) si y solo si se cumple la condición*

(3.11) del Teorema 3 y la siguiente desigualdad:

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W^j & [F + GK \quad GL^j] \\ [F + GK \quad GL^j]^T & P_z \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j W_{ii}^j \leq 1. \quad (3.74)$$

Luego, a partir del Teorema 5, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMI, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (3.17).

Corolario 3.5 *Existen W^j , P_z , L^j y M^l que cumplen (3.11) y (3.74) para el sistema (3.65) si y solo si las siguientes LMIs en X , Y , H^l , T^j , Υ^j son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} [Y \quad X] & [\Phi^l Y + B^l T^j & \Phi^l X] \\ [X \quad X] & [\Phi^l Y + B^l T^j + H^l & \Phi^l X] \\ * & [Y \quad X] \\ & [X \quad X] \end{bmatrix} > 0, \quad (3.75)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \Upsilon^j & [(F + GK)Y + GT^j & (F + GK)X] \\ * & [Y \quad X] \\ & [X \quad X] \end{bmatrix} > 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j \Upsilon_{ii} \leq \underline{1}, \quad (3.76)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 5 pero considerando que en Ψ^{lj} , $\Phi^l = A^l + B^l K$. Luego, es posible notar que el cambio de variables no se ve afectado, por lo que, si $n_v \geq n_x$ siempre se pueden obtener U y V tal que $VU^T = X - Y$ permitiendo recuperar las variables originales. ■

Cabe destacar que es posible retornar a las variables originales M^l y L^j por medio de:

$$M^l = U^{-1} H^l V^{-T}, \quad L^j = T^j V^{-T}. \quad (3.77)$$

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = Kx$ se diseña la ley de control predicha KND-LD al maximizar el tamaño del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ al resolver:

$$\max \log(\det(Y)) \quad (3.78)$$

$$S.a : \{\mathcal{P}^d(3.75) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.76)\}$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (3.26). Para lograr esto, se resuelve el problema de optimización (3.33) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario;

Corolario 3.6 *El costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior del costo predicho (3.26) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, y la cota superior cumplirá (3.29) para $i \geq 0$. Además, (3.29) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface*

$$\mathcal{W} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \Psi^{lj} \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l \Psi^{lj} \right) \geq \sum_{j=1}^L h^j \tilde{Q}^j, \quad \tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^T R K & K^T R L^j \\ L^{jT} R K & L^{jT} R L^j \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Finalmente, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (Kx_k + L^j v_k^*). \quad (3.80)$$

Esta estrategia de control se resume en el Algoritmo 10 disponible en Anexo G.

Análisis del tamaño del conjunto estabilizante

El análisis del tamaño del máximo conjunto elipsoidal para la ley de control predicha KND-LD, basado en el Teorema 9, se define por la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *El máximo conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x que satisface (3.11) y (3.74) es menor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación difusa del tipo PDC y es mayor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación lineal, ambas no especificada.*

DEMOSTRACIÓN. Para el caso de una ley de control base de realimentación difusa no especificada, el sistema será estable y factible, si el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x cumple (3.42) y (3.45) con $\sum_{j=1}^L h^j \tilde{T}^j = \tilde{K}$, pues la ley de control predicha de esta estrategia es KND-LD. Luego, del Teorema 9 se desprende que si, dados Y , \tilde{T}^j y W que cumplan (3.42) y (3.45) para X en (3.57), solo se puede reestructurar la misma solución para todos los T^j de (3.58)-(3.59). Es decir, que con $T^j = \tilde{T}^j - KY$ se restringen los grados de libertad para L^j , pues, se estaría obligando que todos los L^j fuesen iguales para todos los modelos locales.

Para el caso de una ley de control base de realimentación lineal no especificada, siguiendo la misma analogía anterior, es evidente concluir que una ley de control predicha KND-LD generará un volumen mayor o igual al que genera una ley de control KND-LND, pues la primera tiene más grados de libertad. De esta forma, el elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control KND-LD contiene al elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control KND-LND.

■

Bajo la proposición anterior, el criterio de diseño de la ley de control base o la elección de la ganancia K sobre la que se diseña la ley de control predicha KND-LD, influirá en el tamaño máximo alcanzado por la DOPDC.

3.2.1.3. Ley de control predicha KND-LND

Estrategia de control

Una condición suficiente para la estabilidad, revisada en el Teorema 3, para asegurar la estabilidad del sistema difuso aumentado (3.65) esta dado por el siguiente corolario:

Corolario 3.7 *El equilibrio del sistema difuso global (3.65) es asintóticamente estable si existe una matriz común P_z definida positiva tal que*

$$\sum_{l=1}^L h^l (\Psi^{lT} P_z \Psi^l - P_z) < 0. \quad (3.81)$$

A partir del Teorema 4, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y recursivamente factible.

Corolario 3.8 *El conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z z \leq 1\}$, $P_z \succ 0$ es positivamente invariante para la dinámica (3.65) bajo las restricciones (3.3) si y solo si se cumple la condición (3.81) del corolario 3.7 y la siguiente desigualdad,*

$$\begin{bmatrix} W & [F + GK \quad GL] \\ [F + GK \quad GL]^T & P_z \end{bmatrix} \geq 0, \quad W_{ii} \leq 1. \quad (3.82)$$

Luego, a partir del Teorema 5, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMI, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (3.17) considerando $T = LV^T$.

Corolario 3.9 *Existen W , P_z , L y M^l que cumplen (3.81) y (3.82) si y solo si las siguientes desigualdades matriciales en X , Y , H^j , T , Υ son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L h^l \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi^l Y + B^l T & \Phi^l X \\ \Phi^l Y + B^l T + H^l & \Phi^l X \end{bmatrix} \\ * & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.83)$$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & [(F + GK)Y + GT \quad (F + GK)X] \\ * & \begin{bmatrix} Y & X \\ X & X \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad \Upsilon_{ii} \leq \underline{1}. \quad (3.84)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 5 pero considerando que $T = LV^T$ y en Ψ^{lj} que $\Phi^l = A^l + B^l K$. Luego, es posible notar que con $T = LV^T$ el cambio de variables no afecta a X , Y , U y V por lo que, si $n_c \geq n_x$ siempre se pueden obtener U y V tal que $VU^T = X - Y$ permitiendo recuperar las variables originales. ■

Cabe destacar que es posible retornar a las variables originales M^l y L por medio de:

$$M^l = U^{-1} H^l V^{-T} \quad L = TV^{-T}. \quad (3.85)$$

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = Kx$ se diseña la ley de control predicha KND-LND al maximizar el volumen del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ al resolver:

$$\begin{aligned} & \max \log(\det(Y)) \\ & S.a : \{ \mathcal{P}^d(3.83) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.84) \} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (3.26). Para lograr esto, se resuelve el problema de optimización (3.33) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario;

Corolario 3.10 *El costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior*

del costo predicho (3.26) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, y la cota superior cumplirá (3.29) para $i \geq 0$. Además, (3.29) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\mathcal{W} - \left(\sum_{l=1}^L h^l \Psi^l \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L h^l \Psi^l \right) \geq \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q + K^T R K & K^T R L \\ L^T R K & L^T R L \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Finalmente, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = K x_k + L v_k^*. \quad (3.88)$$

Esta estrategia de control se resume en el Algoritmo 11 disponible en Anexo G.

Análisis del tamaño del conjunto estabilizante

El análisis del tamaño del máximo conjunto elipsoidal para la ley de control predicha KND-LND, basado en el Teorema 9, se define por la siguiente proposición.

Proposición 3.3 *El máximo conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x que satisface (3.81) y (3.82) es igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación lineal no especificada.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la presentada para la ley de control predicha KD-LD en el Teorema (9), pero considerando una ley de realimentación no difusa $u = \tilde{K}x$ con $\tilde{T}^j = \tilde{T} \forall j$, $\tilde{K}^j = \tilde{K} \forall j$ y $\tilde{T} = \tilde{K}Y$. ■

Bajo la proposición anterior, el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x es máximo para una ley de control base no especificada, es decir, que para cualquier ley de control base que establezca el sistema se alcanza el máximo tamaño, permitiendo, escoger la ganancia K de la ley de control base bajo un criterio de desempeño específico sin perjudicar la zona de operación del controlador.

En este punto cabe destacar, que con el diseño de la ley de control con dinámica optimizada para el caso particular de una ley de control base no difusa, es decir, la ley de control predicha KND-LND, se extiende el enfoque presentado en [21] a modelos difusos sin incerteza.

3.3. Discusión

En este capítulo se presentó un set de estrategias de MPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno sin incerteza. Primero, se presentó la estrategia de MPC que incorpora una ley de control predicha difusa con estado propio que evoluciona en una dinámica que es optimizada para maximizar la zona de operación de esta. Se dio gran énfasis en presentar las condiciones de invarianza y factibilidad por medio de FLMI's para optimizar la dinámica de las predicciones en la etapa offline con relajaciones de Pólya para tener un problema computacionalmente tratable al disminuir la carga computacional. Esto también se realizó para definir la etapa online, lo que permitió mostrar que esta estrategia estabiliza asintóticamente el sistema.

Posteriormente, se demostró que la DOPDC con una ley de control predicha del tipo KD-LD genera el máximo conjunto estabilizante para cualquier ley de control base estabilizante

de realimentación difusa del tipo PDC. Esto permite escoger las ganancias K^j de la ley de control de realimentación bajo un criterio de desempeño específico sin perjudicar la zona de operación del controlador.

Luego, en este capítulo se presentaron tres formulaciones que se generaron a partir de los casos particulares de la ley de control predicha difusa al considerar las ganancias difusas o no difusas. La estrategia de control empleada para cada ley de control predicha se basó siguiendo los mismos pasos que en la primera propuesta, es decir, que se consideró la etapa offline para optimizar la dinámica de las predicciones y la online para obtener las acciones de control. De esta forma, todos los algoritmos de control propuestos estabilizan el sistema asintóticamente cumpliendo las restricciones operativas.

Las principales diferencias se presentaron en los análisis del tamaño del conjunto estabilizante. En el caso de la DOPDC con una ley de control predicha KD-LND el máximo conjunto elipsoidal es menor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación difusa no especificada. Para el caso de una ley de control predicha KND-LD, el máximo conjunto elipsoidal es menor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación difusa y es mayor o igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación lineal, ambas no especificadas. En el caso de la DO con una ley de control predicha KND-LND el máximo conjunto elipsoidal es igual al máximo conjunto elipsoidal invariante para una ley de control base de realimentación lineal no especificada.

De acuerdo a lo anterior, el criterio de elección de las leyes de control base para mejorar un desempeño específico afectan las zonas de operación de las estrategias que incluye leyes predichas de control KD-LND y KND-LD. Por el contrario, los casos KND-LND y KD-LD, mantienen la máxima zona de operación para cualquier ley de control base sobre la que se diseñó la DO o DOPC. De este modo, la estrategia de MPC con DO que incorpora una ley de control predicha KND-LND es una extensión de [21] a modelos difusos Takagi-Sugeno sin incerteza. Así mismo, la estrategia de MPC con DOPDC que incluye una ley de control predicha difusa KD-LD amplía el enfoque disponible en la literatura, mejorando el tamaño de la región de atracción al sobrepasar las regiones de atracción generadas por DO con leyes de realimentación lineales.

Evidenciando la mejora que plantean las estrategias de MPC con dinámica optimizada que incluyen leyes de realimentación difusa para sistemas difusos Takagi-Sugeno sin incerteza, en el siguiente capítulo se extienden las formulaciones acá presentadas al caso con incerteza aditiva.

Capítulo 4

RMPC con dinámica optimizada basado en LMIs para sistemas difusos Takagi-Sugeno con incerteza aditiva

Este capítulo tiene como objetivo exponer el segundo grupo de las estrategias propuestas de esta tesis. Se pondrá especial énfasis en la formulación del problema, estrategia de control y análisis de estabilidad. Las propuestas presentadas en este capítulo corresponden al diseño de las estrategias de control predictivo robusto difuso (FRMPC) con leyes de control con dinámica optimizada para modelos difusos del tipo Takagi-Sugeno con incerteza aditiva.

En estas estrategias se considera una ley de control predicha con dinámica propia difusa que incorpora las realizaciones de la incerteza y de igual forma que el capítulo anterior, la ley de control predicha tiene una ganancia de realimentación K asociada al estado del sistema y una ganancia L asociada al estado del controlador. Las ganancias K y L se pueden considerar como difusas o no difusas. Todas las leyes de control difusas que se proponen son del tipo PDC, por lo que se genera una dinámica optimizada con estado extendido con compensación distribuida en paralelo que incluye las incertezas aditivas, lo que se resume por la sigla DOPDC-I.

La DOPDC-I que se utiliza en las estrategias de FRMPCs maximiza su zona de operación independiente de la ley de control base, difusa o no difusa, utilizada. Esto permite realizar una elección de la ganancia (o las ganancias) asociada al sistema para que mejore un desempeño específico.

Todas las estrategias FRMPCs con dinámica optimizada propuestas en este capítulo, tendrán desigualdades matriciales multiplicadas por grados de activación normalizados, los que en general representa una función no lineal. Por lo tanto, se emplean herramientas matemáticas para expresar las condiciones equivalentemente como desigualdades matriciales lineales difusas (FLMIs) y es por esta razón que se utilizan las relajaciones de Pólya para establecer las condiciones en conjunto de LMIs asintóticamente equivalente a las originales.

4.1. Ley de control con dinámica optimizada difusa con incerteza aditiva (DOPDC-I)

En esta sección se presenta una estrategia de control predictivo robusto con dinámica optimizada para sistemas descritos por medio de un modelo difuso Takagi-Sugeno con incerteza aditiva. De esta forma, el controlador considera una ley de control predicha difusa con estado propio y que se optimiza para maximizar la zona de operación del controlador sobre una ley de control base de realimentación difusa diseñada bajo un criterio de desempeño específico. Además, se introduce el concepto de dinámica optimizada con estado extendido con compensación distribuida en paralelo que incorpora la incerteza (DOPDC-I) para la ley de control predicha difusa del tipo PDC.

Esta estrategia, que en el problema de optimización predicho considera una dinámica optimizada con un sistema aumentado (sistema y controlador), estabiliza entorno al origen a la dinámica del sistema original para cualquier realización de la incerteza acotada. El diseño de estas estrategias se basan en los aporte de [21, 22]; y considera dividir en dos partes el algoritmo de la estrategia: offline y online. En la etapa offline, se diseña la dinámica de la ley de control predicha y las ganancias asociadas a ella, de modo que maximice el volumen del conjunto invariante. Luego en la etapa online, en cada instante, se calcula la acción de control que se aplicará al sistema.

Esta propuesta se desarrolla utilizando las relajaciones de Pólya, para expresar las condiciones en base a LMIs, y así los problemas de optimización son convexos y computacionalmente tratables.

4.1.1. Formulación del problema

Considere el siguiente modelo difuso Takagi-Sugeno discreto con incerteza aditiva que representa la dinámica de un sistema no lineal discreto a través de L reglas que definen los subsistemas lineales con incerteza en variables de estados:

Regla l :

$$\text{Si } \mathbf{x}_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \mathbf{x}_k^v \text{ es } \mathcal{F}_v^l, \text{ entonces } x_{k+1}^l = A^l x_k + B^l u_k + D^l w_k, \quad (4.1)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ son el estado, entrada de control y perturbaciones en el instante k . Las matrices $A^l \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B^l \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ y $D^l \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ son conocidas en todo instante k . Además, $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k^i, i = 1, \dots, v\}$ son las premisas de las reglas el instante k conformadas por regresores de la entrada y/o salida del sistema, $\mathcal{F}_1^l, \dots, \mathcal{F}_v^l$ son conjuntos difusos y $l \in \mathbb{Z}_{[1,L]}$ indica el número de regla o el subsistema local.

La incerteza aditiva, w_{k+j} , es desconocida en tiempo k , $j = 0, 1, 2, \dots$, pero se sabe que están contenidas en un conjunto politópico dado por:

$$w \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}, \quad (4.2)$$

donde los \tilde{w}^a , $a = 1, \dots, v_a$ son vértices conocidos. Esta descripción implica que las perturbaciones pueden ser representada por una suma ponderada de vértices conocidos, dada

por

$$w_{k+j} = \sum_{a=1}^{v_a} h^a \tilde{w}^a, \quad (4.3)$$

donde h^a son ponderadores desconocidos para todo instante k tal que $h^a \geq 0$ y $\sum_{a=1}^{v_a} h^a = 1$.

Luego, el sistema global está dado por,

$$x_{k+1} = \sum_{l=1}^L h^l (A^l x_k + B^l u_k + D^l w_k), \quad (4.4)$$

donde $h^l(z_k)$ es escrito por conveniencia como h^l y representa la función de pertenencia normalizada en el instante k para la regla o subsistema local l .

El sistema descrito en (4.4) tiene restricciones operativas para el estado y de las entradas que se expresan mediante:

$$F x_{k+i} + G u_{k+i} \leq \underline{1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n_f \times n_x}$ y $G \in \mathbb{R}^{n_g \times n_u}$.

Este sistema se desea controlar de modo de garantizar su estabilización y satisfacción de las restricciones operativas. Además de la estabilización, se espera minimizar el siguiente funcional de costos:

$$J = \max_{A^l, B^l, D^l, w_k} \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k - \gamma^2 w_k^T w_k), \quad (4.6)$$

donde $Q \succeq 0$, $R \succ 0$ y $\gamma \geq 0$.

4.1.2. Estrategia de control

Esta estrategia de control, basada en las propuestas [21, 22], se considera incluir leyes de control predichas con dinámica optimizada que incluyen la realización de las incertezas aditivas. Las leyes de control predichas se diseñan en una etapa offline para maximizar el conjunto invariante tal que se garantice que las predicciones del sistema controlado cumplan las restricciones (3.3) en todo instante. Posteriormente, en la etapa online se desea encontrar las acciones de control para aplicar sobre el sistema. Para esto, se optimiza el comportamiento predicho bajo la ley de control predicha. Esta optimización, busca el estado inicial de la dinámica optimizada y se impone que el estado extendido esté en el conjunto invariante, de modo que todas las predicciones estén dentro de este conjunto lo que garantiza satisfacer las restricciones en el problema predicho para cualquier incerteza acotada. Además, se busca que las predicciones minimicen el costo (4.6). En particular, se aplica solo la primera acción de control de la ley de control predicha con dinámica optimizada y en el siguiente instante se repite el proceso para las nuevas condiciones del sistema.

Para esta estrategia, similar a la revisada en el Capítulo 3, se considera diseñar en la

etapa offline una ley de control predicha difusa del tipo PDC con estado propio y en la etapa online, las acciones de control evolucionan por perturbaciones $\{v_{k+i|k}\}$ con respecto a la ley de control base difusa $u = \sum_{j=1}^L K^j x$. De esta forma, para cada una de reglas de la ley de control base se diseñan las ganancias asociadas al estado del controlador. Esta ley de control predicha se denomina KD-LD por tener las ganancias K y L difusas, como se muestra a continuación,

Regla j :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^j \text{ y } \dots z_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^j, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K^j x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}, \quad (4.7)$$

donde las premisas z y los conjuntos difusos \mathcal{F}_v^j son los mismos que para la base de reglas del sistema (4.1).

En (4.7), las ganancias L^j define como afecta el estado del controlador a la acción de control y los K^j son tales que estabilizan el sistema difuso (4.4) en un horizonte infinito. Las condiciones que se deben imponer para el diseño de las ganancias K^l para que la ley de control base $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ establezca el sistema difuso global (4.4) se expresan en el Teorema 18 disponible en Anexo E.

Luego, al considerar todas las reglas (4.7) da una ley de control predicha global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}). \quad (4.8)$$

En la ley de control predicha, $v_{k+i|k} \in \mathbb{R}^{n_v}$ es interpretado como las predicciones del estado del controlador pero que a diferencia de las estrategias presentadas en el Capítulo 3, en su dinámica se incorpora el efecto de la incerteza aditiva para cada regla, acorde con esto, la dinámica global del controlador esta dado por:

$$v_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (M^{lj} v_{k+i|k} + S^l w_{k+i}), \quad (4.9)$$

donde M^{lj} y S^l son los parámetros a diseñar de la dinámica del controlador. Además, h^l y h^j son el grado de activación por regla normalizado con la misma base de reglas que el sistema difuso (4.4) y la ley de control difusa (4.8).

Luego, al reemplazar la ley de control predicha (4.8) en la dinámica (4.4), se obtiene las predicciones del sistema en lazo cerrado que con la dinámica del controlador (4.9) pueden ser representadas en un sistema difuso extendido del tipo Takagi-Sugeno dado por:

Regla lj :

$$\text{Si } z_{k+i|k}^{11} \text{ es } \mathcal{F}_1^{11} \text{ y } \dots z_{k+i|k}^{lj} \text{ es } \mathcal{F}_v^{lj}, \text{ entonces } z_{k+i+1|k}^{lj} = \Psi^{lj} z_{k+i|k} + \widetilde{D}^l w_{k+i} \quad (4.10)$$

donde,

$$\Psi^{lj} = \begin{bmatrix} \Phi^{lj} & B^l L^j \\ 0 & M^{lj} \end{bmatrix}, \quad \Phi^{lj} = A^l + B^l K^j, \quad (4.11)$$

$$\widetilde{D}^l = \begin{bmatrix} D^l \\ S^l \end{bmatrix} \text{ y } w \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\widetilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}. \quad (4.12)$$

De esta forma, el sistema global esta dado por:

$$z_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Psi^{lj} z_{k+i|k} + \widetilde{D}^l w_{k+i}), \quad (4.13)$$

donde L^j , M^{lj} y S^l son los parámetros de la dinámica del controlador y se diseñan para optimizar la ley de control predicha KD-LD junto con dinámica no lineal difusa (4.13).

Como se mencionó, la ley de control predicha es diseñada en la etapa offline tal que maximice la zona de operación del controlador dado que la ley de control base está fija y fue diseñada para optimizar el desempeño. Para lograr esto, primero se presentan las condiciones de invarianza y factibilidad de las restricciones operacionales que se imponen en esta estrategia para las predicciones del sistema (4.13). Segundo, estas condiciones son tratadas con cambios de variables y complementos de Schur para presentar FLMI's equivalentes. Luego, se presenta el problema convexo basado en LMI's que optimiza la dinámica de la ley de control predicha.

La condiciones que se imponen en esta estrategias son extensiones de los resultados presentados por Muñoz-Carpintero en [22], al caso difuso con incerteza aditiva con una ley de control base de realimentación difusa, para que el elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$ sea positivamente invariante bajo la dinámica (4.13).

Una condición necesaria y suficiente para la invarianza del elipsoide \mathcal{E}_z esta dada por el siguiente teorema:

Teorema 10 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, con $P_z \succ 0$ es positivamente invariante bajo la dinámica (4.13) si y solo si $\exists \alpha \geq 0$ tal que se cumpla la siguiente condición:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} P_z & \Psi^{lj} P_z & \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a \\ \star & \alpha P_z & 0 \\ \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.14)$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para que el conjunto \mathcal{E}_z sea invariante para cualquier posible realización de la incerteza se tiene que cumplir que si $z \in \mathcal{E}_z$, entonces $z^+ \in \mathcal{E}_z$. Esto es equivalente a que si $1 - z^T P_z^{-1} z \geq 0$, entonces

$$1 - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a) \right)^T \times P_z^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a) \right) \succeq 0 \quad (4.15)$$

Luego, utilizando el procedimiento S definido en [17] y disponible en Anexo D, la desigualdad $1 - z^T P_z^{-1} z \geq 0$ implica una única desigualdad para cada combinación de (l, j, a) en (4.15), obteniendo

$$1 - (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a)^T P_z^{-1} (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a) \geq \alpha_{l,j,a} (1 - z^T P_z^{-1} z), \quad \begin{array}{l} l, j = 1, \dots, L \\ a = 1, \dots, v_a \end{array} \quad (4.16)$$

que es una condición necesaria para la invarianza. Luego al tomar α como el mínimo valor de $\alpha_{l,j,a} \forall l, j, a$, se tiene la condición,

$$1 - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a) \right)^T P_z^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Psi^{lj} z + \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a) \right) \geq \alpha (1 - z^T P_z^{-1} z), \quad (4.17)$$

de la cual, al aplicar el complemento de Schur, se obtiene (4.14). ■

Si se cumplen las condiciones del Teorema 10, se obtiene una condición necesaria y suficiente para que el conjunto elipsoidal \mathcal{E}_z sea positivamente invariante bajo la dinámica (4.4) y (4.13) para una descripción de la incerteza dada por (4.12).

A continuación se presenta un teorema que establece las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y para que todas las predicciones sean factibles.

Teorema 11 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, $P_z \succeq 0$ es positivamente invariante para la dinámica (4.13) y bajo las restricciones (4.5) si y solo si se cumple la condición (4.14) del Teorema 10 y la siguiente condición,*

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & [F + GK^j & GL^j] P_z \\ \star & P_z \end{bmatrix} > 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii}^j \leq 1 \quad (4.18)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es equivalente a la presentada para el Teorema 4 pero considerando que el conjunto elipsoidal para esta estrategia esta dado por $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$. ■

De manera similar a la estrategia MPC con dinámica optimizada difusa sin incerteza, esta estrategia, en su etapa offline maximiza el volumen del conjunto elipsoidal positivamente invariante si se toman como variables de optimización P , L , M^{lj} , S^l y $\alpha \geq 0$. Este problema de optimización es no convexo porque las condiciones de invarianza (4.14) y de factibilidad (4.18) son no lineales para P_z , L , M^{lj} , S^l y α , por lo que se utiliza el siguiente cambio de variables para expresar estas condiciones en FLMI's y así tener un problema de optimización convexo.

$$P = \begin{bmatrix} \mathcal{W} & \mathcal{U} \\ \mathcal{U}^T & \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y} & \mathcal{V} \\ \mathcal{V}^T & \mathcal{S} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} I & \mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{V}^T \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

donde $\mathcal{Y} P P^{-1} = I$. El siguiente teorema presenta condiciones equivalentes a (4.14) y (4.18) a través de FLMI's, bajo el cambio de variables (4.19) y el uso del complemento de Schur.

Teorema 12 Existen Z^j, P_z, L^j, M^{lj} y S^l que cumplen (4.14) y (4.18) si y solo si las siguientes FLMI en $\mathfrak{Y}, \mathfrak{W}, Z^j, \tilde{S}, \tilde{L}^j, \Gamma^{lj}$, para algún $\alpha \geq 0$ son factibles:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} \mathfrak{W} & I & \Phi^{lj}\mathfrak{W} + B^l \tilde{L}^j & \Phi^{lj} & D^l \tilde{w}^a \\ \star & \mathfrak{Y} & \Gamma^{lj} & \mathfrak{Y} \Phi^{lj} & (\mathfrak{Y} D^l + \tilde{S}^l) \tilde{w}^a \\ \star & \star & \alpha \mathfrak{W} & \alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \alpha \mathfrak{Y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.20)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & (F + GK^j)\mathfrak{W} + G\tilde{L}^j & F + GK^j \\ \star & \mathfrak{W} & I \\ \star & \star & \mathfrak{Y} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii} \leq 1 \quad (4.21)$$

donde las nuevas variables de optimización quedan determinadas por:

$$\tilde{L}^j = L^j \mathfrak{u}, \quad \Gamma^{lj} = \mathfrak{y} \Phi^{lj} \mathfrak{w} + \mathfrak{y} B^l L^j \mathfrak{u}^T + \mathfrak{v} M^{lj} \mathfrak{u}^T, \quad \tilde{S}^l = \mathfrak{v} S^l, \quad l, j = 0, \dots, L \quad (4.22)$$

DEMOSTRACIÓN. Para obtener (4.20) y (4.21), (4.14) se pre-post multiplica por:

$$\begin{bmatrix} \pi^T & 0 & 0 \\ 0 & \pi^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

y (4.18) por:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi^T \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Luego (4.20) y (4.21) son obtenidas de aplicar el cambio de variables (4.22) y utilizar el complemento de Schur. Por lo tanto, (4.14) y (4.18) sólo puede ser factible si (4.20) y (4.21) son factibles. A continuación es posible notar que a partir de (4.19) con $PP^{-1} = I$ se tiene que,

$$\mathfrak{W}\mathfrak{y} + \mathfrak{u}\mathfrak{v}^T = I, \quad \mathfrak{u}^T \mathfrak{v} + \mathfrak{Q}\mathfrak{s} = I, \quad \mathfrak{W}\mathfrak{v} + \mathfrak{u}\mathfrak{s} = 0, \quad \mathfrak{u}^T \mathfrak{y} + \mathfrak{Q}\mathfrak{v}^T = 0 \quad (4.25)$$

lo que implica que,

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{y} - \mathfrak{v}\mathfrak{s}^{-1}\mathfrak{v}^T)^{-1}, \quad \mathfrak{Q} = (\mathfrak{s} - \mathfrak{v}^T \mathfrak{y}^{-1} \mathfrak{v})^{-1}, \quad \mathfrak{u} = -\mathfrak{y}^{-1} \mathfrak{v} (\mathfrak{s} - \mathfrak{v}^T \mathfrak{y}^{-1} \mathfrak{v})^{-1} \quad (4.26)$$

y la primera ecuación anterior implica que $\mathfrak{y} - \mathfrak{W}^{-1} = \mathcal{R}\Lambda^2\mathcal{R}$ donde \mathcal{R}, Λ definen el vector propio y los valores propios de $\mathfrak{y} - \mathfrak{W}^{-1}$. Así,

$$\mathfrak{v} = \mathcal{R}\Lambda\mathfrak{s}^{1/2}, \quad \mathfrak{u} = -\mathfrak{y}^{-1}\mathcal{R}\Lambda(I - \Lambda\mathcal{R}^T\mathfrak{y}^{-1}\mathcal{R}\Lambda)^{-1}\mathfrak{s}^{1/2}, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{s}^{1/2}(I - \Lambda\mathcal{R}^T\mathfrak{y}^{-1}\mathcal{R}\Lambda)^{-1}\mathfrak{s}^{1/2}. \quad (4.27)$$

De esta forma, $\mathfrak{s} \succeq 0$ puede ser escogido libremente. Luego \mathfrak{u} y \mathfrak{v} están dados por (4.27), entonces se pueden obtener las variables originales del sistema M^{lj}, S^l, L^j con (4.22). Finalmente, si se cumple $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ con (4.25) se tiene que (4.14) y (4.18) son factible si y solo si (4.20) y (4.21) son factibles. \blacksquare

En esta tesis, como se propone en [22], se sugiere elegir $\mathcal{S} \succeq 0$ como el máximo valor singular de \mathcal{Y} tal que $PP^{-1} = I$. De esta forma, el diseño de P evita grandes diferencias entre el volumen de las proyecciones de \mathcal{E}_z sobre el subespacio x y el subespacio v . Una vez elegido \mathcal{S} , \mathcal{V} y \mathcal{U} vienen dados por (4.27), y entonces L^j , M^{lj} y S^l pueden obtenerse a partir de (4.22) con:

$$L^j = \tilde{L}^j \mathcal{U}^{-1}, \quad M^{lj} = \mathcal{V}^{-1}(\Gamma^{lj} - \mathcal{Y} \Phi^{lj} \mathcal{W} - \mathcal{Y} B^l L^j \mathcal{U}^T) \mathcal{U}^{-T}, \quad S^l = \mathcal{V}^{-1} \tilde{S}^l, \quad l, j = 0, \dots, L \quad (4.28)$$

A partir del Teorema 12, las condiciones de invarianza y factibilidad impuestas para esta estrategia son no lineales y difusas que sin la presencia de los grados de activación serían bilineales por la presencia de α . Para lidiar con esto, se resuelven los problemas de optimización de forma iterativa para valores fijos de $\alpha \in [0, 1]$; en específico se busca el α_{max} tal que maximice el objetivo buscado. Con esta consideración, el Teorema 12 para un $\alpha \geq 0$ fijo impone condiciones a través de FLMI, que son implementadas en la práctica con relajaciones de Pólya siguiendo la metodología explicada en en la Sección 2.4. Con el uso de las relajaciones se tendrá un conjunto de LMIs asintóticamente equivalentes, que permiten resolver un problema de optimización convexo para un valor fijo de $\alpha \geq 0$.

Para cumplir con el objetivo de la etapa offline, a partir de la ley de control base $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ se diseña la ley de control con dinámica optimizada tal que se maximiza el volumen de la región de atracción del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$ para un valor de específico de $\alpha \geq 0$. Este problema de optimización esta dado por:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}^j, \Gamma^{lj}, \alpha} \log \det(\mathcal{W}) \\ & s \ a : \ \{\mathcal{P}^d(4.20) \text{ y } \mathcal{P}^d(4.21)\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

considerando que se han incluido las relajaciones de Pólya para que las FLMI (4.20) y (4.21) sean un conjunto de LMIs copositivas y así tener un problema de optimización convexo. Además, en el problema de optimización (4.29) se maximiza $\log(\det(\mathcal{W}))$ ya que está relacionado monótonamente con la función $\frac{4}{3} \pi \sqrt{\det(\mathcal{W})}$ que representa el tamaño del conjunto elipsoidal \mathcal{E}_x .

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, a partir del problema de optimización (4.29), todas las predicciones del sistema (4.13) pertenecen al conjunto elipsoidal \mathcal{E}_z invariante, lo que garantiza que las predicciones del sistema (4.1) controlado bajo la ley de control predicha, siempre cumplen las restricciones operativas para cualquier realización de la incerteza aditiva acotada.

Con esto ya se tienen los parámetros que definen la dinámica de ley de control predicha con lo que se concluye la etapa offline. Luego, el objetivo de la etapa online es optimizar el comportamiento predicho bajo la ley de control predicha y así obtener la acción de control en cada instante, para lo cual se requiere encontrar el estado inicial de la ley de control predicha. Este estado inicial se obtiene al minimizar el funcional de costos predicho en un horizonte

infinito para todos los subsistemas locales del modelo difuso, dado por

$$J(z_{k|k}) = \max_{A^l, B^l, D^l, w} \sum_{i=0}^{\infty} (x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i|k}^T w_{k+i|k}), \quad (4.30)$$

donde $Q, R \succ 0$ y $\gamma > 0$.

La evaluación exacta del costo (4.30) requiere un cálculo que crece exponencialmente con el horizonte de predicción. Para evitar un gran esfuerzo computacional, en la etapa online de esta estrategia se minimiza el peor de los casos, es decir, minimizando la cota superior que se define por el siguiente teorema,

Teorema 13 *Para un $\gamma > 0$, el costo cuadrático de Lyapunov*

$$V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k} \quad (4.31)$$

es una cota superior del costo predicho (4.30) tal que,

$$J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k} \quad (4.32)$$

donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, si se cumple para $i = 0, 1, \dots$

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - z_{k+i+1|k}^T \mathcal{W} z_{k+i+1|k} \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i}^T w_{k+i} \quad (4.33)$$

Además, bajo el supuesto de que $0 \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$, (4.33) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\left(\begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Psi^{ljT} & 0 \\ \tilde{D}^{lT} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Psi^{lj} & \tilde{D}^l \\ 0 & I \end{bmatrix} \succeq \sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \tilde{Q}^j & I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right), \quad (4.34)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ y

$$\tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^{jT} R K^j & K^{jT} R L^j \\ L^{jT} R K^j & L^{jT} R L^j \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

DEMOSTRACIÓN. El límite del costo (4.30) se deriva de la suma de (4.33) desde el instante actual k hasta el infinito. Luego, la condición (4.33) puede ser reescrito como

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Psi^{lj} z_{k+i|k} + \tilde{D}^l w_{k+i}) \right)^T \mathcal{W} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Psi^{lj} z_{k+i|k} + \tilde{D}^l w_{k+i}) \right) \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i}^T w_{k+i}, \quad (4.36)$$

lo que puede ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} z_{k+i|k}^T & w_{k+i}^T \end{bmatrix} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \mathcal{W} - \Psi^{ljT} \mathcal{W} \Psi^{lj} - \tilde{Q}^j & -\Psi^{ljT} \mathcal{W} \tilde{D}^l \\ \star & \gamma^2 I - \tilde{D}^{lT} \tilde{D}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+i|k} \\ w_{k+i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.37)$$

$\forall A^l, B^l, D^l$ y w_{k+i} . Y con el supuesto de que $0 \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$, esto implica que la matriz central de (4.37) es semidefinida positiva y bajo un reordenamiento se puede obtener la condición (4.34). \blacksquare

Con todo lo definido para realizar la optimización online, el control predictivo busca el estado inicial de la dinámica optimizada, minimizando el costo de peor caso, en el conjunto invariante \mathcal{E}_z diseñado en la etapa offline. En particular, la dinámica de la ley de control predicha (4.9) permite definir completamente la trayectoria del controlador por el primer elemento de $\{v_{k+i|k}\}$. De acuerdo a lo descrito anteriormente, en cada instante k , se resuelve el siguiente problema de optimización para encontrar $v_{k|k}^*$:

$$v_{k|k}^* = \underset{z_{k+i|k} \in \mathcal{E}_z}{\text{argmin}} z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k} \quad (4.38)$$

donde \mathcal{W} es tal que cumple $\mathfrak{P}^d(4.34)$. Además, como las predicciones del estado extendido siempre pertenece a \mathcal{E}_z , la acción de control es factible cumpliendo las restricciones operativas. Luego, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante, esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L^j v_{k|k}^*). \quad (4.39)$$

Las etapas offline y online empleadas en esta estrategia se presentan el Algoritmo 8 que se resume como se aplica esta estrategia de control.

Algorithm 8: RMPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KD-LD con compensación distribuida en paralelo (DOPDC-I) para sistemas difusos con incerteza aditiva

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar las ganancias K^j de la ley de control base difusa para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 18.
3. Diseñar M^{lj}, L^j, S^l y P_z con el cambio de variable (4.22) al resolver

$$(\mathcal{Y}^*, \mathcal{W}^*, Z^*, \tilde{S}^{l*}, \tilde{L}^{j*}, \Gamma^{lj*}, \alpha^*) = \underset{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}^j, \Gamma^{lj}, \alpha}{\text{argmax}} \log \det(\mathcal{W})$$

s.a : $\{\mathfrak{P}^d(4.20) \text{ y } \mathfrak{P}^d(4.21)\}$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathfrak{P}^d(4.34)$.

Etapa Online:

while $k > 0$ **do**

- | |
|--|
| 1. Medir (o estimar) x_k |
| 2. Obtener $v_{k k}^*$ al minimizar $z_{k k}^T \mathcal{W} z_{k k}$ sujeto a que $z_{k k} \in \mathcal{E}_z$. |
| 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L^j v_{k k}^*)$ |
| 4. Actualizar, $k=k+1$ |
-

4.1.3. Análisis de estabilidad

Hasta ahora se ha mostrado que las predicciones del sistema extendido cumplen las restricciones operativas, pero no se ha demostrado que la aplicación en lazo cerrado de la ley de control predicha (4.39) en cada instante, sea factible ni que estabilice el sistema con incerteza aditiva (4.4). Para mostrar esto, primero se demuestra que la estrategia es recursivamente factible y luego, se da una noción de la estabilidad en lazo cerrado basado en la cota l_2 como en [22].

Teorema 14 Para el sistema (4.4), la aplicación en lazo cerrado de la ley de control (4.39) satisface las restricciones (4.5) y el problema de optimización (4.38) es recursivamente factible.

DEMOSTRACIÓN. Considere que la solución candidata en el instante $k+1$ es \hat{v}_{k+1} y que es construida a partir de la solución óptima en el instante k de (4.38) para x_k . Bajo la dinámica de la ley de control predicha (4.9) la candidata es $\hat{v}_{k+1} = \sum_{j=1}^L h^j M^j v_k^* + S^j w_k$ que es igual a esta predicción $v_{k+1|k}$ dado que w_k ocurrió como perturbación. Luego, con v_k^* bajo la aplicación en lazo cerrado de la ley de control (4.39), la candidata \hat{x}_{k+1} es igual a la predicción $x_{k+1|k}$. Adicionalmente, bajo el Teorema 11, el par $z_k = (x_k, v_k)$ dado que evoluciona de acuerdo a la dinámica (4.13), $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ pertenecen a \mathcal{E}_z que es invariante. En particular $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ están en \mathcal{E}_z por lo que son factibles y dado que \mathcal{E}_z esta construido para satisfacer (4.5) entonces $x_{k+1|k}$ y $v_{k+1|k}$ satisfacen las restricciones operativas.

Finalmente, \hat{v}_{k+1} es factible para el problema óptimo (4.38) siempre que v_k sea factible. Entonces, por un argumento recursivo, se puede establecer que el problema de optimización (4.38) seguirá siendo factible para todos los instantes futuros. ■

Teorema 15 La etapa online del Algoritmo 8 garantiza que la cota superior del comportamiento en lazo cerrado del sistema (4.4) esta dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^{*T} R u_k^*) \leq z_0^T \mathcal{W} z_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^2 w_k^T w_k. \quad (4.40)$$

DEMOSTRACIÓN. La candidata \hat{v}_{k+1} es factible de acuerdo al Teorema 14. Adicionalmente, el costo predicho es construido para satisfacer (4.34), por lo que la candidata cumplirá

$$z_k^{*T} \mathcal{W} z_k^* - \hat{z}_{k+1}^T \mathcal{W} \hat{z}_{k+1} \geq x_k^T Q x_k + u_k^{*T} R u_k^* - \gamma^2 w_k^T w_k \quad (4.41)$$

donde $Q, R \succeq 0$. Además, se sabe que si lo anterior es válido para la solución candidata, entonces también será válido para la solución óptima z_{k+1}^* que minimiza la cota superior del costo predicho (4.32). Luego, como la forma cuadrática $z^T \mathcal{W} z$ de la solución óptima z_{k+1}^* es menor que con la solución candidata \hat{z}_{k+1} , se obtiene

$$z_k^{*T} \mathcal{W} z_k^* - z_{k+1}^{*T} \mathcal{W} z_{k+1}^* \geq x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k) - \gamma^2 w_k^T w_k, \quad (4.42)$$

que sumando hasta el infinito se tendrá

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k) - \gamma^2 w_k^T w_k) \leq z_0^T \mathcal{W} z_0, \quad (4.43)$$

reordenando los términos se obtiene (4.40). ■

En (4.40), γ es interpretado como una cota en norma l_2 de las perturbaciones con respecto a un salida dada por $y_k = [x_k^T Q^{1/2} \ u_k^T R^{1/2}]^T$ cuando (4.36) se satisface [22, 13]. Esto se evidencia al despejar γ de la expresión (4.40) y considerando que $z_0^T \mathcal{W} z_0$ es un valor acotado, se tiene que:

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^{*T} R u_k^*)}{\sum_{k=0}^{\infty} w_k^T w_k} \leq \gamma. \quad (4.44)$$

donde es posible observar que γ es un parámetro que determina una relación entre el valor limite de $x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k)$ cuando $k \rightarrow \infty$ y el tamaño de las incertezas; de esta forma se busca minimizar el valor de γ para rechazar las perturbaciones. Luego, de acuerdo a (4.40), en el caso particular sin incerteza ($w = 0$), γ es igual a 0 y se obtiene la condición (3.37) del Teorema 8. Por lo que bajo los supuestos habituales de observabilidad sobre $(Q^{1/2}, R^{1/2})$ con $Q \succeq 0$ y $R \succ 0$ el sistema es asintóticamente estable en el origen. En el caso más general, con la presencia de incerteza ($w \neq 0$), bajo el Teorema 15 el sistema solo será acotado entorno al origen para valores acotados de incerteza.

Reuniendo lo expuesto anteriormente, si el problema de optimización (4.38) es factible en el instante inicial, la optimización es recursivamente factible y la aplicación de la ley de control (4.39) asegura que el costo de peor caso es acotado, lo que permite estabilizar el sistema entorno al origen para valores acotados de incerteza.

Finalmente, bajo lo demostrado en toda esta sección, la estrategia de RMPC con una ley de control con dinámica optimizada difusa del tipo PDC es una extensión de [22] a modelos difusos Takagi-Sugeno con incerteza. Además, la estrategia DOPDC-I, amplía el enfoque propuesto por Diego Muñoz, Mark Cannon y Basil Kouvaritakis en [22] al diseñar una ley de control predicha difusa con dinámica optimizada sobre una ley de control base difusa.

4.2. Casos particulares de la ley de control predicha

De manera análoga a como se realizó en el capítulo anterior, se puede revisar los casos particulares de la ley de control predicha difusa del tipo PDC, que se originan al considerar que las ganancias K y L asociadas a la ley de control predicha, pueden ser difusas o no difusas. Esto se realiza, con el objeto de llegar al caso particular de la ley de control predicha no difusas, y así comparar el enfoque de [22] con el propuesto en esta tesis.

4.2.1. Formulación del problema

Considere el modelo difuso Takagi-Sugeno discreto que representa la dinámica de un sistema no lineal discreto a través de L reglas (4.1) esta dado por (4.4). Además, este sistema está sujeto a las restricciones operativas (4.5).

Para estas estrategias, de manera similar a lo propuesto en la sección anterior, se consideran leyes de control predichas con estado propio, donde su dinámica evoluciona por per-

turbaciones $\{v_{k+i|k}\}$ con respecto a una ley de control base difusa $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ o no difusa $u = Kx$. A continuación, se presentan los casos particulares de la ley de control predicha difusa (4.49) al considerar cada una de las ganancias difusas o no difusas para leyes de control base difusas o no difusas.

Ley de control predicha:

- KD-LND: considera el diseño de solo una ganancia L asociada al controlador para todos los modelos locales sobre una ley de control base de realimentación difusa del tipo PDC $u = \sum_{j=1}^L K^j x$, es decir, la ganancia K difusa y L no difusa.

Regla j :

$$\text{Si } \mathbf{x}_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^j \text{ y } \dots \mathbf{x}_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^j, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K^j x_{k+i|k} + L v_{k+i|k}, \quad (4.45)$$

Luego, al considerar todas las reglas (4.45) da una ley de control predicha global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_{k+i|k} + L v_{k+i|k}). \quad (4.46)$$

- KND-LD: considera el diseño de ganancias L^j asociadas al controlador para cada modelo local sobre una ley de control base de realimentación lineal $u = Kx$, es decir, la ganancia K no difusa y L difusa.

Regla j :

$$\text{Si } \mathbf{x}_{k+i|k}^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^j \text{ y } \dots \mathbf{x}_{k+i|k}^v \text{ es } \mathcal{F}_v^j, \text{ entonces } u_{k+i|k}^j = K x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}, \quad (4.47)$$

Luego, al considerar todas las reglas (4.47) da una ley de control predicha global,

$$u_{k+i|k} = \sum_{j=1}^L h^j (K x_{k+i|k} + L^j v_{k+i|k}). \quad (4.48)$$

- KND-LND: considera el diseño de solo una ganancia L asociada al controlador para todos los modelos locales sobre una ley de control base de realimentación lineal $u = Kx$, es decir, la ganancia K y L no difusas. De esta forma, la ley de control predicha no es difusa como en el enfoque propuesto en [22],

$$u_{k+i|k} = K x_{k+i|k} + L v_{k+i|k} \quad (4.49)$$

En (4.46), (4.48) y (4.49), las ganancias L o L^j se diseñan para optimizar la dinámica del controlador y las ganancias K o K^j son requeridas para estabilizar el sistema difuso (4.4) en un horizonte infinito, por lo que las ganancias asociadas al sistema debe cumplir el Teorema 18 disponible en Anexo E.

Se destaca además, que en las leyes de control predichas (4.46) y (4.47), $v_{k+i|k} \in \mathbb{R}^{n_v}$ es interpretado como el estado del controlador y su dinámica está dada por un modelo Takagi-

Sugeno con subsistemas locales de la misma forma que en (4.9). En el caso de la ley de control predicha KND-LND la dinámica asociada al controlador esta dada por

$$v_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L h^l (M^l v_{k+i|k} + S^l w_{k+i}). \quad (4.50)$$

Luego, las predicciones del sistema (4.4) generadas con las leyes de control predichas (4.46), (4.47) y (4.49), bajo la dinámica del controlador (4.9) o (4.50) son representadas en un sistema extendido global dado por:

$$z_{k+i+1|k} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Psi^{lj} z_{k+i|k} + \widetilde{D}^l w), \quad (4.51)$$

donde las reglas del modelo difuso con estado extendido del tipo Takagi-Sugeno, para cada ley de control predicha, están dadas por:

Regla lj :

$$Si \ z_{k+i|k}^{11} \ es \ \mathcal{F}_1^{11} \ y \ \dots \ z_{k+i|k}^{lj} \ es \ \mathcal{F}_v^{lj}, \ entonces \ z_{k+i+1|k}^{lj} = \Psi^{lj} z_{k+i|k} + \widetilde{D}^l w \quad (4.52)$$

con $\widetilde{D}^l = \begin{bmatrix} D^l \\ S^l \end{bmatrix}$, $w \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$ y donde:

- para la ley de control predicha KD-LND, $\Psi^{lj} = \begin{bmatrix} \Phi^{lj} & B^l L \\ 0 & M^{lj} \end{bmatrix}$ y $\Phi^{lj} = A^l + B^l K^j$.
- para la ley de control predicha KND-LD, $\Psi^{lj} = \begin{bmatrix} \Phi^l & B^l L^j \\ 0 & M^{lj} \end{bmatrix}$ y $\Phi^l = A^l + B^l K$.
- para la ley de control predicha KND-LND, $\Psi^l = \begin{bmatrix} \Phi^l & B^l L \\ 0 & M^l \end{bmatrix}$ y $\Phi^l = A^l + B^l K$. Además, en el sistema extendido global (4.51) se considera que $\Psi^{lj} = \Psi^l \ \forall j$.

En estas estrategias, las leyes de control predichas se diseñan tal que maximice su zona de operación al optimizar la dinámica extendida difusa (4.51) con variables S^l , M^{lj} y L^j (o S^l , M^l y L), según sea el caso.

En la siguientes subsecciones se presentan las estrategias de control para cada una de las leyes de control predichas. Cabe destacar, que cada estrategia de control sigue los mismo pasos que la revisada en la sección 4.1, por lo que se ahondará solo en detalles relevantes, entendiendo que son casos particulares de lo ya presentado. Se destaca además, que el Teorema 15 asegura que las estrategias de control que se presentarán son recursivamente factibles y estabilizan entorno al origen el sistema para incertezas acotadas si son factibles en el instante inicial.

4.2.1.1. Ley de control predicha KD-LND

La condición suficiente para la estabilidad del sistema aumentado (4.51) para la ley de control predicha KD-LND, está dada por el Teorema 10. A partir del Teorema 11, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y factible.

Corolario 4.1 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, $P_z \succeq 0$ es positivamente invariante para la dinámica (4.51) y bajo las restricciones (4.5) si y solo si se cumple la condición (4.14) del Teorema 10 y la siguiente condición,*

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & [F + GK^j & GL] P_z \\ \star & P_z \end{bmatrix} > 0 \text{ y } \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii}^j \leq 1 \quad (4.53)$$

Luego, a partir del Teorema 12, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMI, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (4.19) considerando:

$$\tilde{L} = L\mathcal{U}, \quad \Gamma^{lj} = \mathcal{Y}\Phi^{lj}\mathcal{W} + \mathcal{Y}B^l L\mathcal{U}^T + \mathcal{V}M^{lj}\mathcal{U}^T, \quad \tilde{S}^l = \mathcal{V}S^l, \quad l, j = 0, \dots, L \quad (4.54)$$

Corolario 4.2 *Existen Z^j , P_z , L , M^{lj} y S^l que cumplen (4.14) y (4.53) si y solo si las siguientes desigualdades matriciales en \mathcal{Y} , \mathcal{W} , Z^j , \tilde{S} , \tilde{L} , Γ^{lj} , para algún $\alpha \geq 0$ son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I & \Phi^{lj}\mathcal{W} + B^l \tilde{L} & \Phi^{lj} & D^l \tilde{w}^a \\ \star & \mathcal{Y} & \Gamma^{lj} & \mathcal{Y}\Phi^{lj} & (\mathcal{Y}D^l + \tilde{S}^l) \tilde{w}^a \\ \star & \star & \alpha \mathcal{W} & \alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \alpha \mathcal{Y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.55)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & (F + GK^j)\mathcal{W} + G\tilde{L} & F + GK^j \\ \star & \mathcal{W} & I \\ \star & \star & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii}^j \leq 1 \quad (4.56)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 12 pero considerando que \tilde{L}^j para todas las reglas es igual a $L\mathcal{U}$. Luego, es posible notar que con $\tilde{L}^j = L\mathcal{U} \forall j$ el cambio de variables no afecta la libre elección de \mathcal{S} por lo que tampoco se ve afectado Q , \mathcal{U} y \mathcal{V} . De esta forma, siempre se pueden obtener Q , \mathcal{U} y \mathcal{V} tal que $PP^{-1} = I$ permitiendo recuperar las variables originales en función de (4.54). ■

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = \sum_{j=1}^L K^j x$ se diseña la ley de control predicha KD-LND tal que maximice el tamaño del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$ al resolver:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}, \Gamma^{lj}, \alpha} \log \det(\mathcal{W}) \\ & \text{s.a. : } \{\mathcal{P}^d(4.55) \text{ y } \mathcal{P}^d(4.56)\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (4.30). Para lograr esto, se resuelve el problema de optimización (4.38) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario;

Corolario 4.3 *Para un $\gamma > 0$, el costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior del costo predicho (4.30) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$, donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, si se cumple para $i = 0, 1, \dots$*

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - z_{k+i+1|k}^T \mathcal{W} z_{k+i+1|k} \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i}^T w_{k+i} \quad (4.58)$$

Además, bajo el supuesto de que $0 \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$, (4.58) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Psi^{ljT} & 0 \\ \tilde{D}^{lT} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{lj} & \tilde{D}^l \\ 0 & I \end{bmatrix} \succeq \sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \tilde{Q}^j & I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ y

$$\tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^{jT} R K^j & K^{jT} R L \\ L^T R K^j & L^T R L \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Luego, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L v_k^*). \quad (4.61)$$

Esta estrategia de control, tanto la etapa offline como la online, se resume en el Algoritmo 12 disponible en Anexo G.

4.2.1.2. Ley de control predicha KND-LD

La condición suficiente para la estabilidad del sistema aumentado (4.51), está dada por el Teorema 10 considerando en Ψ^{lj} que Φ^{lj} es $\Phi^l = A^l + B^l K$. A partir del Teorema 11, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y recursivamente factible.

Corolario 4.4 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, $P_z \succeq 0$ es positivamente invariante para la dinámica (4.51) y bajo las restricciones (4.5) si y solo si se cumple la condición (4.14) del Teorema 10 y la siguiente condición,*

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & [F + GK \quad GL^j] P_z \\ \star & P_z \end{bmatrix} > 0 \text{ y } \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii}^j \leq 1. \quad (4.62)$$

Luego, a partir del Teorema 12, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMIs, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (4.19) considerando:

$$\tilde{L}^j = L^j \mathcal{U}, \quad \Gamma^{lj} = \mathcal{Y} \Phi^l \mathcal{W} + \mathcal{Y} B^l L^j \mathcal{U}^T + \mathcal{V} M^{lj} \mathcal{U}^T, \quad \tilde{S}^l = \mathcal{V} S^l, \quad l, j = 0, \dots, L \quad (4.63)$$

Corolario 4.5 *Existen Z^j , P_z , L^j , M^{lj} y S^l que cumplen (4.14) y (4.62) si y solo si las*

siguientes desigualdades matriciales en \mathcal{Y} , \mathcal{W} , Z , \tilde{S} , \tilde{L}^j, Γ^{lj} , α son factibles:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I & \Phi^l \mathcal{W} + B^l \tilde{L}^j & \Phi^l & D^l \tilde{w}^a \\ \star & \mathcal{Y} & \Gamma^{lj} & \mathcal{Y} \Phi^l & (\mathcal{Y} D^l + \tilde{S}^l) \tilde{w}^a \\ \star & \star & \alpha \mathcal{W} & \alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \alpha \mathcal{Y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.64)$$

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} Z^j & (F + GK) \mathcal{W} + G \tilde{L}^j & F + GK \\ \star & \mathcal{W} & I \\ \star & \star & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j Z_{ii}^j \leq 1 \quad (4.65)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 12 pero considerando que $\Gamma^{lj} = \mathcal{Y} \Phi^l \mathcal{W} + \mathcal{Y} B^l L^j \mathcal{U}^T + \mathcal{V} M^{lj} \mathcal{U}^T$. Luego, es posible notar que con $K^j = K$ y $\Phi^l = A^l + B^l K$, el cambio de variables no afecta la libre elección de \mathcal{S} por lo que tampoco se ve afectado Q , \mathcal{U} y \mathcal{V} . De esta forma, siempre se pueden obtener Q , \mathcal{U} y \mathcal{V} tal que $PP^{-1} = I$ permitiendo recuperar las variables originales en función de (4.63). ■

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = Kx$ se diseña la ley de control predicha KND-LD tal que maximice el tamaño del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$ al resolver:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}^l, \Gamma^{lj}, \alpha} \log \det(\mathcal{W}) \\ & \text{s.a. : } \{\mathcal{P}^d(4.64) \text{ y } \mathcal{P}^d(4.65)\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (4.30). Para lograr esto, se resuelve el problema de optimización (4.38) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario;

Corolario 4.6 Para un $\gamma > 0$, el costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior del costo predicho (4.30) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$, donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, si se cumple para $i = 0, 1, \dots$

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - z_{k+i+1|k}^T \mathcal{W} z_{k+i+1|k} \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i}^T w_{k+i} \quad (4.67)$$

Además, bajo el supuesto de que $0 \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$, (4.67) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} \Psi^{ljT} & 0 \\ \tilde{D}^{lT} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{lj} & \tilde{D}^l \\ 0 & I \end{bmatrix} \succeq \sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} \tilde{Q}^j & I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ y

$$\tilde{Q}^j = \begin{bmatrix} Q + K^T R K & K^T R L^j \\ L^{jT} R K & L^{jT} R L^j \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Luego, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (Kx_k + L^j v_k^*). \quad (4.70)$$

Esta estrategia de control, tanto la etapa offline como la online, se resume en el Algoritmo 13 disponible en Anexo G.

4.2.1.3. Ley de control predicha KND-LND

Una condición suficiente para la estabilidad, revisada en el Teorema 10, para asegurar la estabilidad del sistema difuso aumentado (4.51) para la ley de control predicha KND-LND esta dado por el siguiente corolario,

Corolario 4.7 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, con $P_z \succ 0$ es positivamente invariante bajo la dinámica (4.51) si y solo si $\exists \alpha \geq 0$ tal que se cumpla la siguiente condición:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^a \begin{bmatrix} P_z & \Psi^l P_z & \widetilde{D}^l \widetilde{w}^a \\ \star & \alpha P_z & 0 \\ \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.71)$$

A partir del Teorema 11, el siguiente corolario reúne las condiciones para que el elipsoide \mathcal{E}_z sea invariante y recursivamente factible.

Corolario 4.8 *El elipsoide $\mathcal{E}_z = \{z \mid z^T P_z^{-1} z \leq 1\}$, $P_z \succ 0$ es positivamente invariante para la dinámica (4.51) y bajo las restricciones (4.5) si y solo si se cumple la condición (4.71) del corolario 4.7 y la siguiente condición,*

$$\begin{bmatrix} Z & [F + GK & GL] P_z \\ \star & P_z \end{bmatrix} > 0 \text{ y } Z_{ii} \leq 1 \quad (4.72)$$

Luego, a partir del Teorema 12, el siguiente corolario presenta condiciones equivalentes a través de FLMI, para lo cual es necesario utilizar el cambio de variables (4.19) considerando:

$$\widetilde{L} = L\mathcal{U}, \quad \Gamma^l = \mathcal{Y}\Phi^l\mathcal{W} + \mathcal{Y}B^l L\mathcal{U}^T + \mathcal{V}M^l\mathcal{U}^T, \quad \widetilde{S}^l = \mathcal{V}S^l, \quad l = 0, \dots, L \quad (4.73)$$

Corolario 4.9 *Existen Z , P_z , L , M^l y S^l que cumplen (4.71) y (4.72) si y solo si las siguientes desigualdades matriciales en \mathcal{Y} , \mathcal{W} , Z , \widetilde{S} , \widetilde{L} , Γ^l , para algún $\alpha \geq 0$ son factibles:*

$$\sum_{l=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^a \begin{bmatrix} \mathcal{W} & I & \Phi^l \mathcal{W} + B^l \widetilde{L} & \Phi^l & D^l \widetilde{w}^a \\ \star & \mathcal{Y} & \Gamma^l & \mathcal{Y}\Phi^l & (\mathcal{Y}D^l + \widetilde{S}^l)\widetilde{w}^a \\ \star & \star & \alpha \mathcal{W} & \alpha I & 0 \\ \star & \star & \star & \alpha \mathcal{Y} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (4.74)$$

$$\begin{bmatrix} Z & (F + GK)\mathcal{W} + G\widetilde{L} & F + GK \\ \star & \mathcal{W} & I \\ \star & \star & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad Z_{ii} \leq 1 \quad (4.75)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue los mismo pasos que la mostrada en el Teorema 12 pero considerando que $\Gamma^l = \mathfrak{y}\Phi^l\mathfrak{W} + \mathfrak{y}B^lL\mathfrak{U}^T + \mathfrak{V}M^l\mathfrak{U}^T$. Luego, es posible notar que con $K^j = K$, $L^j = L$, $\Phi^l = A^l + B^lK$ y $\tilde{L} = L\mathfrak{U}$ el cambio de variables no afecta la libre elección de \mathfrak{S} por lo que tampoco se ve afectado Q , \mathfrak{U} y \mathfrak{V} . De esta forma, siempre se pueden obtener Q , \mathfrak{U} y \mathfrak{V} tal que $PP^{-1} = I$ permitiendo recuperar las variables originales en función de (4.73). \blacksquare

Posteriormente, a partir de la ley de control base $u = Kx$ se diseña la ley de control predicha KND-LND tal que maximice el tamaño del conjunto elipsoidal $\mathcal{E}_x = \{x : x^T\mathfrak{W}^{-1}x \leq 1\}$ al resolver:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathfrak{y}, \mathfrak{W}, Z, \tilde{S}, \tilde{L}, \Gamma, \alpha} \log \det(\mathfrak{W}) \\ & \text{s.a : } \{\mathfrak{P}^d(4.74) \text{ y } \mathfrak{P}^d(4.75)\} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Diseñada la ley de control con dinámica optimizada, la etapa online consiste en minimizar en cada instante el funcional (4.30). Para lograr esto, se resuelve el problema de optimización (4.38) en cada instante, donde \mathcal{W} está dado por el siguiente corolario.

Corolario 4.10 *Para un $\gamma > 0$, el costo cuadrático de Lyapunov $V(z_{k|k}) = z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ es una cota superior del costo predicho (4.30) tal que, $J(z_{k|k}) \leq z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}^T \succ 0$, si se cumple para $i = 0, 1, \dots$*

$$z_{k+i|k}^T \mathcal{W} z_{k+i|k} - z_{k+i+1|k}^T \mathcal{W} z_{k+i+1|k} \geq x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} - \gamma^2 w_{k+i}^T w_{k+i}. \quad (4.77)$$

Además, bajo el supuesto de que $0 \in \mathbb{W} = \text{Co}\{\tilde{w}^a, a = 0, \dots, v_a\}$, (4.77) se cumple si y solo si \mathcal{W} satisface

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \sum_{l=1}^L h^l \begin{bmatrix} \Psi^l{}^T & 0 \\ \tilde{D}^l{}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^l & \tilde{D}^l \\ 0 & I \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} \tilde{Q} & I \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ y

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q + K^T R K & K^T R L \\ L^T R K & L^T R L \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Luego, la acción de control que se aplica al sistema en cada instante esta dada por:

$$u_k(x_k) = Kx_k + Lv_k^*. \quad (4.80)$$

Esta estrategia de control, tanto la etapa offline como la online, se resume en el Algoritmo 14 disponible en Anexo G.

En este punto cabe destacar, que con el diseño de la ley de control con dinámica optimizada para el caso particular de una ley de control base de realimentación lineal, es decir, la ley de control predicha KND-LND, se extiende el enfoque presentado en [22] a modelos difusos sin incerteza.

4.3. Discusión

En este capítulo se presentó un set de estrategias de RMPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno con incertezas aditivas. Primero, se presentó la estrategia de RMPC que incorpora una ley de control predicha difusa con estado propio que evoluciona en una dinámica que incluye la incertezas aditiva y que es optimizada para maximizar la zona de operación de esta. Se dio gran énfasis en presentar las condiciones de invarianza y factibilidad por medio de FLMI's para optimizar la dinámica de las predicciones. Esto se realizó en la etapa offline con relajaciones de Pólya para tener un problema computacionalmente tratable al disminuir la carga computacional. Luego, para la etapa online se impusieron condiciones de la misma forma, lo que permitió mostrar que esta estrategia estabiliza el sistema en torno al origen para valores acotados de incertezas.

Posteriormente, en este capítulo se presentaron tres formulaciones que se generaron a partir de los casos particulares de la ley de control predicha difusa al considerar las ganancias que la conforman difusas o no difusas. La estrategia de control empleada para cada caso particular se basó siguiendo los mismos pasos que para ley de control predicha difusa, es decir, que se consideró la etapa offline para optimizar la dinámica extendida y la etapa online para obtener las acciones de control. De esta forma, todos los algoritmos de control propuestos estabilizan el sistema en torno al origen cumpliendo las restricciones operativas para valores acotados de la incertezas.

De acuerdo a lo anterior, la estrategia de RMPC con DO que incorpora una ley de control predicha KND-LND es una extensión de [22] a modelos difusos Takagi-Sugeno con incertezas. Así mismo, las estrategias de RMPC con DOPDC-I que incluyen una ley de control predicha difusa amplían el enfoque disponible en la literatura, lo que en la práctica permite mejorar el tamaño de la región de atracción al sobrepasar las regiones de atracción generadas por DO con leyes de control predichas no difusas.

Con las distintas propuestas formuladas para MPC y RMPC con dinámica optimizada vistas en este capítulo y en el capítulo anterior, se procede a realizar pruebas de simulación para corroborar el correcto funcionamiento de las estrategias al momento de controlar sistemas difusos. Para cumplir con este objeto, en el próximo capítulo se implementan las estrategias de control sobre dos modelos difusos, uno con incertezas y el otro sin incertezas.

Capítulo 5

Resultados de Simulación

En este capítulo, se presentan los resultados de simulación de pruebas realizadas a las distintas estrategias de control predictivo con leyes con dinámica optimizada para modelos difusos propuestas en esta tesis. Para conseguir esto, se presentan dos modelos no lineales representado por un modelo difuso Takagi-Sugeno con y sin incerteza, el cual, se basa en el sistema presentado en [13]. Estos modelos servirán como caso de estudio general, permitiendo verificar a partir de resultados de simulación los beneficios que trae la implementación de las diferentes propuestas presentadas en los capítulos previos.

El capítulo se organiza como sigue: primero se presentan los sistemas no lineales a través de un modelo difuso Takagi-Sugeno con y sin incerteza. Luego, se presenta un breve descripción de las simulaciones que se realizarán sobre cada modelo y set de estrategias propuestas en esta tesis. Después, se presentan comparativas de zonas de operación entre leyes de control base y leyes de control predichas con dinámica optimizada. Posteriormente, se realiza un comparativa entre enfoques de optimizar la dinámica de leyes de control predichas de realimentación no difusa (como extensión de [21, 22]) y leyes de control predichas de realimentación difusa propuestas en esta tesis. Finalmente, se presenta una breve discusión de los principales resultados de simulación.

5.1. Sistema benchmark difuso Takagi-Sugeno

Para comprobar el funcionamiento de las estrategias de control predictivo difuso con dinámica optimizada que se propusieron en el capítulo 3 y 4, se presentan dos casos de estudios simples: el primer caso de estudio considera un sistema que no está afectado de incerteza aditiva ($w = 0$) y el segundo caso de estudio si considera la presencia de incerteza aditiva ($w \neq 0$). Los sistemas a controlar, se basan en el presentado en [13] y esta dado por dos variantes del siguiente modelo difuso:

Modelo difuso Takagi Sugeno (5.1)

Regla 1 :

$$\text{Si } z_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^1, \text{ entonces } x_{k+1} = A^1 x_k + B^1 u_k + D^1 w_k,$$

Regla 2 :

$$\text{Si } z_k^1 \text{ es } \mathcal{F}_1^2, \text{ entonces } x_{k+1} = A^2 x_k + B^2 u_k + D^2 w_k,$$

donde la premisa $\varkappa_k^1 = x_{1k}$ es el primer estado del sistema, $w \in \mathbb{W} = \{w \mid \|w_k\|_\infty \leq 1\}$ y las reglas las matrices están dadas por $D^l = I_{2 \times 2} \cdot 0.1$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.751 & -0.624 \\ -1.432 & 0.474 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.549 & -0.624 \\ -1.432 & 0.474 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.588 \\ 1.317 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.790 \\ 1.593 \end{bmatrix}.$$

Las funciones de pertenencia, que definen los grados de activación normalizados y los conjuntos difusos \mathcal{F}_1^1 y \mathcal{F}_1^2 están dadas por la zona de operación del sistema, como se muestra en la Figura 5.1.

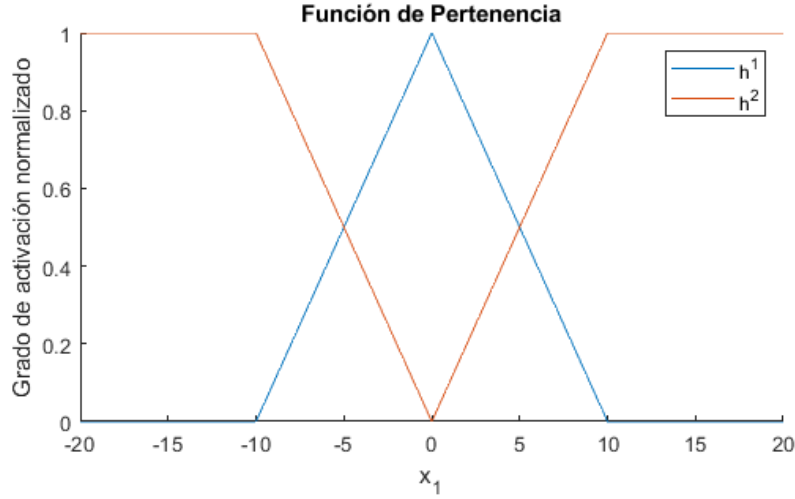


Figura 5.1: Función de pertenencia

Además, se considera que el sistema (5.1) está sujeto a restricciones operativas asociadas a la entrada de forma, $|u_k| \leq 1$, por lo que las restricciones lineales operativas $Fx + Gu \leq \underline{1}$ están definidas por las matrices $F = 0_{2 \times 2}$ y $G = [1, -1]^T$.

A ambos casos de estudios se le aplican, respectivamente, las estrategias de MPC y RMPC con dinámica optimizada para los cuatro casos particulares (KND-LND, KND-LD, KD-LND y KD-LD). Para evaluar el desempeño de las estrategias propuestas, se compara la región de atracción (zona de operación) que generan los controladores con dinámica optimizada con respecto a las que tienen las leyes de control base sobre las que se diseñaron estos.

Para cumplir con este cometido, se calcula el área de la región de atracción de leyes de control base difusas y no difusas que deben ser diseñadas tal que establezcan el sistema (5.1) al cumplir la condición de estabilidad (E.1) para $w = 0$ o (E.2) para $w \neq 0$. Además, para ilustrar que efectos tienen distintas leyes de control base, se considera utilizar tres criterios de diseño específico para la elección de las leyes de control base. El primer criterio busca maximizar el conjunto elipsoidal invariante \mathcal{E}_x bajo las restricciones operativas del mismo sistema. El segundo criterio consiste en elegir cualquier ley de realimentación que establezca el sistema en un horizonte infinito, es decir, se elegirá al azar las ganancias tal que la ley de realimentación cumpla, según sea el caso, (E.1) o (E.2). Y el último criterio, consiste en diseñar una aproximación de la ley de realimentación que optimice el costo cuadrático predicho infinito.

La metodología específica del diseño de las leyes de control base bajo el primer y segundo criterio se puede ahondar en Anexo F. El diseño de las leyes de control base bajo el tercer criterio ha sido propuesto en trabajos similares, como en [21, 22], en los cuales la ley de realimentación se obtiene de un LQR sobre el sistema nominal. En esta tesis, para las leyes de realimentación no difusas, se utilizará el sistema nominal como promedio de las reglas y en el escenario difuso, se diseña un LQR por regla. En consecuencia, se diseñan las ganancias K y K^j utilizando el costo $Q = I_{2 \times 2}$ y $R = 0.01$ asociados al estado y entrada del sistema (5.1), respectivamente.

El área de la región de atracción de un conjunto elipsoidal invariante $\mathcal{E} = \{x : x^T \mathcal{E} x \leq 1\}$ se calcula como $\frac{4}{3}\pi \sqrt{\det(\mathcal{E}^{-1})}$. Luego, cabe recordar que todas las leyes de control, base y predichas, poseen un conjunto elipsoidal invariante que determina su zona de operación.

Además, para estudiar los beneficios de usar las relajaciones de Pólya en los tamaños de los conjuntos invariantes \mathcal{E}_x , los resultados son presentados utilizando progresivamente las relajaciones de Pólya para distintos grados de complejidad. Como caso base no se utilizan las relajaciones de Pólya y luego, se aplican con grados de complejidad 1, 2 y 3 como se describió en la sección 2.4. Al caso base se le denotará por un grado de complejidad -1 .

Luego de comparar las regiones de atracción (zonas de operación), lo segundo que se realiza es comparar el enfoque de considerar una ley predicha con ambas ganancias difusas (KD-LD) con una con ambas ganancias no difusas (KND-LND). Esto se realiza para evidenciar los beneficios que presenta utilizar leyes de control predichas difusas por sobre el enfoque propuesto en [21, 22] de utilizar una ley de control predicha no difusa.

Esta comparación comienza al comprobar que las estrategias de control predictivo con dinámica optimizada propuestas en esta tesis permitan estabilizar el sistema cumpliendo las restricciones operativas del sistema. Los algoritmos aplicados para las leyes KD-LD y KND-LND consideran aplicar las condiciones menos restrictivas, por lo que se utiliza un grado de complejidad 3 para las relajaciones de Pólya. Además, para la etapa online se utilizan valores de Q y R iguales a los usados en el tercer criterio de diseño de la ley de realimentación.

Para finalizar la comparación de enfoques, se evalúa el desempeño de las estrategias para todos los casos particulares de la ley de control predicha en términos del costo, al calcular el costo total de la estrategia en un intervalo tiempo dado por

$$J(\vec{x}, \vec{u}) = \sum_{i=1}^N x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}. \quad (5.2)$$

5.1.1. Primer caso de estudio

En este caso de estudio se considera el sistema (5.1) sin incerteza aditiva ($w = 0$) para comprobar el funcionamiento de las estrategias propuestas en el Capítulo 3. Para lograr esto, se presentan a continuación los resultados de simulación según lo descrito en la sección anterior.

La máxima región de atracción del elipsoide invariante máximo \mathcal{E}_x bajo una ley $u = Kx$ tiene un área igual a 149.9898 y bajo una ley $u = \sum_{j=1}^2 K^j x$ igual a 375.1001. Luego, para cada caso de estudio, se denotará A_{ND} y A_D como las máximas áreas de las regiones que alcanzan los máximos elipsoides invariantes sujeto a la dinámica del sistema en lazo cerrado y a las restricciones operativas del mismo.

En las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se presentan las áreas de las regiones de atracción que tienen los elipsoides \mathcal{E}_x bajo las leyes de control base con el primer, segundo y tercer criterio de diseño.

Tabla 5.1: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el primer criterio de diseño.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$						
Leyes de Realimentación		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	Área	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	Área	149.9898	375.1001	375.1001	375.1001	375.1001

Tabla 5.2: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el segundo criterio de diseño.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$						
Leyes de Realimentación		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	Área	2.0074	1.6887	1.2860	0.9049	0.5928
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	Área	1.6005	1.7386	1.6589	1.6380	1.5897

Tabla 5.3: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el tercer criterio de diseño.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$	
Leyes de Realimentación	Área
$u = kx$	5.6306
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	5.6432

Es posible observar en la Tabla 5.1 que en la ley de control base no difusa, las regiones son iguales a A_{ND} , sin importar si se aplican o no las relajaciones de Pólya. Esto se debe a que como existe una sola ganancia K por encontrar, las condiciones obtenidas con las relajaciones de Pólya generan condiciones iguales a no aplicarlas. Por consiguiente, para las leyes de control base de realimentación lineal $u = Kx$ las relajaciones de Pólya no generan condiciones menos conservativas.

En la misma Tabla 5.1 se desprende que la ley de control base difusa sin aplicar las relajaciones de Pólya tiene una región igual a A_{ND} . Esto se debe a que ambas ganancias de las reglas del controlador son iguales dado que cada ganancia K^j debe cumplir las condiciones del conjunto de LMIs considerando que cada una de las reglas de la FLMI original esta activa por si sola. Esto no ocurre para el caso en que si se aplican las relajaciones; cada ganancia K^j cumple las condiciones para cada una de las regla y para combinaciones entre esas reglas y otras, permitiendo generar condiciones menos conservadoras y así encontrar ganancias distintas para cada regla.

A partir de lo comentado anteriormente, no aplicar las relajaciones de Pólya en las condiciones de diseño de las leyes de realimentación difusa se restringe el espacio factible de búsqueda de las ganancias K^j al de solo una ganancia K al imponer que $K^j = K$. Esto implica que en la práctica finalmente se estará aplicando un ley de realimentación no difusa. Por esta razón, en todos los siguientes resultados, se entenderá que al no aplicar las relajaciones de Pólya en el diseño de una ley de control base de realimentación difusa, las ganancias K^j son iguales, por lo que en la práctica la ley de control base será del tipo no difusa $u = Kx$.

En cuanto a las leyes de control base que si son difusas, en la Tabla 5.1 se observa que para todas las relajaciones de Pólya, las leyes de control base tienen la misma región de atracción y que es igual a A_D . De esta forma, de lo observado en las Tabla 5.1, es posible mencionar que todas las regiones de atracción de las leyes de control base alcanzan las regiones máximas A_{ND} o A_D , según sea el caso.

Luego, en las Tablas 5.2 y 5.3 se puede observar que las regiones de atracción generadas por las leyes de control base difusas y no difusas son menores a las regiones máximas A_D y A_{ND} , respectivamente. Esto se ajusta a lo esperado, debido a que el segundo y tercer criterio no se contempla maximizar la zona de operación del controlador en su diseño. Luego, por esta misma razón, es que a partir de la Tabla 5.2 no se puede realizar un mayor análisis sobre como afectan las relajaciones de Pólya al región de atracción.

En resumen, de lo observado en las Tabla 5.1, 5.2 y 5.3 es posible mencionar que todas las regiones de atracción de las leyes de control base son consistentes al criterio de diseño utilizado.

En las Tablas 5.4, 5.5, y 5.6 se presentan las áreas de las regiones de atracción \mathcal{E}_x de los controladores propuestos para los tres criterios de diseño de las leyes de control base y para todos los casos particulares de la ley de control predicha.

Tabla 5.4: Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	Área	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898
KND-LD	Área	149.9898	373.8721	374.2487	374.4303	374.5437
KD-LND	Área	149.9898	375.1001	375.1001	375.1001	375.1001
KD-LD	Área	149.9898	375.1001	375.1001	375.1001	375.1001

Tabla 5.5: Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	Área	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898
KND-LD	Área	149.9898	371.3700	371.9188	372.2124	372.4653
KD-LND	Área	149.9821	336.3729	360.1982	365.0507	370.0313
KD-LD	Área	149.9897	373.2691	373.6470	373.8611	373.9980

Tabla 5.6: Región de atracción de los controladores MPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el tercer criterio.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T Y^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	Área	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898	149.9898
KND-LD	Área	149.9898	369.2280	370.9617	371.6536	372.1341
KD-LND	Área	35.7113	143.3102	143.9129	144.0785	144.1517
KD-LD	Área	149.9898	369.2415	370.9360	371.6418	372.1345

En la Tabla 5.4 se puede observar que las leyes de control predichas difusas (KND-LD, KD-LND y KD-LD) sin relajaciones de Pólya y la no difusa (KND-LND) para cualquier relajación de Pólya, generan un región de atracción máxima igual a A_{ND} . Esto es debido a que los problemas para optimizar las DOs sin utilizar las relajaciones de Pólya restringen al caso base KND-LND, pues todos los conjuntos de LMIs son definidos considerando que cada una de las reglas de la FLMI original esta activa por si sola. Luego, al aplicar las relajaciones de Pólya la ley de control predicha difusa KND-LD genera regiones de atracción cada vez mayores, acercándose a A_D pero sin superarla. En el caso de las leyes de control predichas difusas (KD-LND y KD-LD) generan un región de atracción igual a A_D para todas todas las

relajaciones de Pólya. De esta forma, los resultados de la Tabla 5.4, se ajustan a las leyes de control base sobre las que se diseñó la Dinámica Optimizada, pues estas fueron elegidas para maximizar los elipsoides \mathcal{E}_x .

En la Tabla 5.5, se observa el mismo comportamiento para todas las leyes de control predichas sin aplicar las relajaciones de Pólya que el caso base KND-LND, es decir, generan un región de atracción igual a A_{ND} . Para las leyes de control predichas difusas KND-LD, KD-LND y KD-LD no generan la región máxima A_D , pero es posible observar que a medida que aumenta la complejidad de las relajaciones de Pólya la región de atracción es cada vez mayor, aproximándose a A_D .

Sin perjuicio de lo anterior, al comparar las regiones de atracción de las leyes de control base, de la Tabla 5.2, con las que se generan al optimizar la dinámica, de la tabla 5.5, es posible notar que todas las variantes de la DOPDC generan un beneficio en términos de la región de atracción con respecto a no utilizarla.

En la Tabla 5.6 se observa que las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD tienen regiones de atracción iguales o similares a las presentadas en la Tabla 5.2. Lo mismo no ocurre para la ley de control KD-LND, puesto que a pesar de que las regiones aumentan en función de la complejidad, existe una considerable reducción de la región que genera la DOPDC. No obstante, todas las regiones de atracción presentadas en la Tabla 5.6 son mayores que las regiones de atracción de las leyes de control base sobre la que se diseñó la DO presentadas en la Tabla 5.3.

Al observar las tres tablas, se evidencia como las regiones se ven afectas por las relajaciones de Pólya y por los criterios específicos de las leyes de realimentación. Con respecto a las relajaciones de Pólya, la ley KD-LD bajo lo revisado en los resultados de simulación y lo expresado en el Capítulo 3, se espera que las regiones generadas por la DOPDC en las Tablas 5.5 y 5.6 tendiesen a valores similares a los presentados en la Tabla 5.4 para grandes complejidades de Pólya. Lo que no ocurriría necesariamente para las leyes de control predichas KND-LD y KD-LND, debido a la asimetría entre los grados de libertad para K y L . Se destaca además que en el caso de KND-LND, siempre se alcanza la máxima región A_{ND} ya que sus condiciones de diseño no dependen efectivamente de las relajaciones de Pólya.

Tomando en cuenta lo anterior, al comparar las máximas regiones de atracción de las dinámicas extendidas óptimas de las Tablas 5.4, 5.5, y 5.6 con las máximas regiones de las leyes de realimentación A_D y A_{ND} para los criterios específicos de las leyes de control base es posible mencionar que:

- Las máximas regiones de atracción generada por las leyes de control predichas KND-LND y KD-LD no se ven afectadas por el criterio de diseño de las leyes de control base sobre la que se optimizó la dinámica. De esta forma, la máxima región de atracción es igual para cualquier ley de control base. En consecuencia, KND-LND y KD-LD permiten aumentar la zona de operación de una ley de control base con un criterio de diseño específico a la zona de operación máxima A_{ND} y A_D , respectivamente.
- Las máximas regiones de atracción generada por la ley de control predicha KND-LD se ven afectadas levemente por el criterio de diseño de la ley de control base sobre la que se

optimizó la dinámica. De esta forma, siempre la máxima región de atracción es mayor o igual a la máxima región de atracción para una ley de control base de realimentación no difusa. En consecuencia, KND-LD permite aumentar la zona de operación de una ley de control base no difusa con un criterio de diseño específico por sobre la zona de operación máxima A_{ND} acercándose al de una difusa A_D .

- Las máximas regiones de atracción generadas por la ley de control predicha KD-LND se ven afectadas por el criterio de diseño de la ley de control base sobre la que se optimizó la dinámica. De esta forma, solo es posible mencionar que la máxima región de atracción es menor o igual a la máxima región de atracción para una ley de control base de realimentación difusa. En consecuencia, KD-LND no siempre permite aumentar la zona de operación de una ley de control base con un criterio de diseño específico a la zona de operación máxima A_D .

Ahora se presentan los resultados para corroborar que las estrategias estabilizan el sistema (5.1) cumpliendo las restricciones operativas. Para esto, utilizando las leyes de control base bajo el tercer criterio de diseño específico, en las Figuras 5.2a y 5.3a se presenta, para KND-LND y KD-LD, la trayectoria de 30 diferentes realizaciones del sistema difuso para 30 diferentes estados iniciales escogidos al azar dentro del elipsoide invariante máximo. En celeste se presenta al máximo conjunto donde el sistema cumple las restricciones operativas del sistema bajo una ley de realimentación, en azul el elipsoide invariante máximo para las restricciones del problema, en verde el elipsoide invariante máximo generado por la DO y en rojo el elipsoide invariante para la ley de control base sobre la que se diseñó la DO o DOPDC. Además, en las Figuras 5.2b y 5.3b se presenta el nivel de satisfacción de las restricciones operativas para cada uno de los casos.

Cabe destacar que estas simulaciones se realizaron siguiendo las indicaciones presentadas en [21], las cuales aconsejan diseñar la DO o DOPDC maximizando la función objetivo $\log(\det(Y)) + \beta \log(\det(X))$ con un $\beta \geq 0$ pequeño para evitar grandes diferencias entre las regiones de las proyecciones de \mathcal{E}_z sobre el subespacio x y el subespacio v . Esto genera una reducción del tamaño de \mathcal{E}_x y aumento de \mathcal{E}_v para disminuir los errores numéricos en la etapa online al buscar los $v_0 \in \mathcal{E}_v$. EL valor de β escogido para estas simulaciones fue de 0.05.

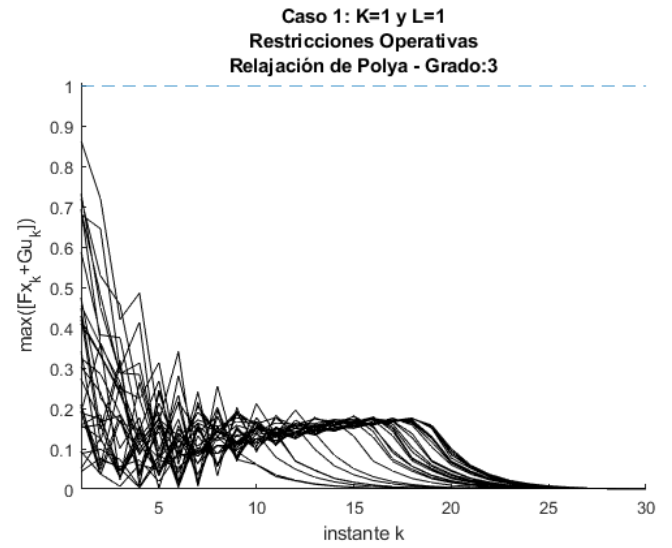
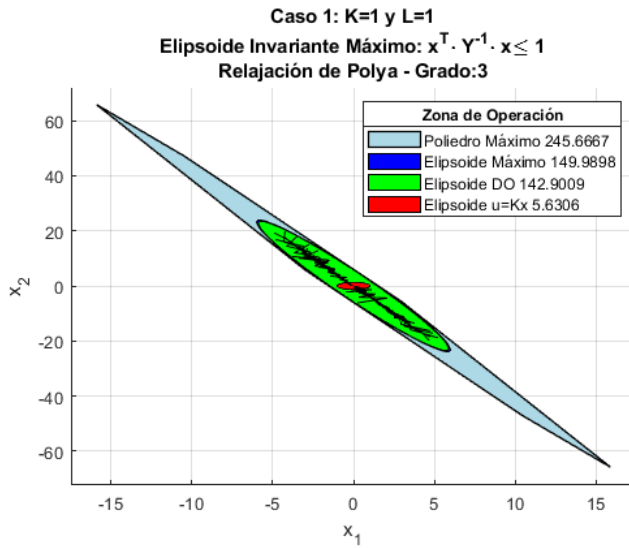


Figura 5.2: (a) Trayectorias en lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones la dinámica bajo una ley de control predicha KND-LND bajo el criterio 3

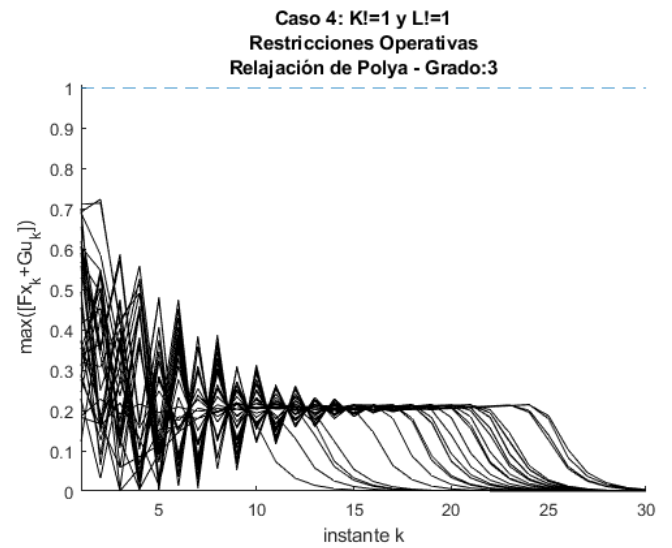
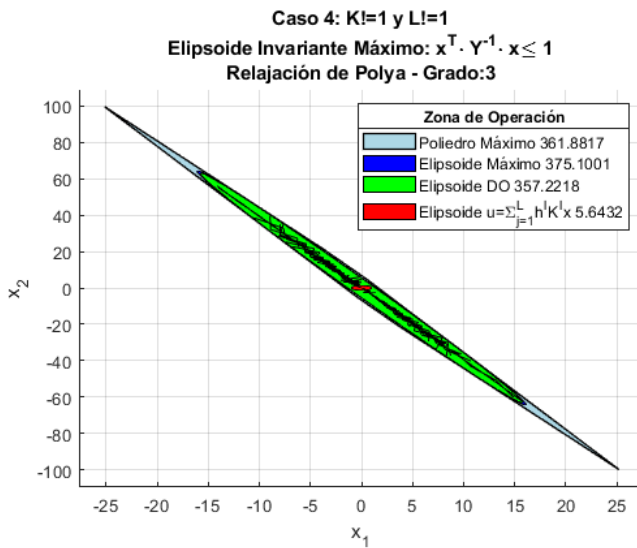


Figura 5.3: (a) Trayectorias en lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 3

Las Figuras 5.2a y 5.3a muestran que la región de atracción que generan los controladores con dinámica optimizada son conjuntos positivamente invariante que garantizan la satisfacción de las restricciones operativas para cualquier realización de la dinámica difusa sin incerteza, pues en todo instante, los estados permanecen en \mathcal{E}_x . Esto, también se puede evidenciar de las Figuras 5.2b y 5.3b, donde se observa que en todo instante, se satisfacen las restricciones operativas impuestas en el sistema. Además, se aprecia que las estrategias permiten estabilizar el sistema no lineal para cualquier estado inicial que este contenido en \mathcal{E}_x .

Finalmente, con el objeto de comparar en términos del costo los casos particulares de las leyes de control predichas con los criterios de diseños de las leyes de realimentación, en la Tabla 5.7 se presenta el costo cuadrático total (5.2) promedio de 30 estados iniciales para un horizonte de 30 instantes. Lo estados iniciales fueron los mismo para todos los casos y se escogieron al azar dentro del elipsoide invariante de menor tamaño que corresponde al de KND-LND. Además, se destaca que la optimización de las dinámicas se realizó para un grado de complejidad 3 de las relajaciones de Pólya, para que estas estrategias tuviesen las condiciones menos conservativas y las mayores regiones de atracción.

Tabla 5.7: Costo cuadrático total promedio

Ley de control Predicha	Criterio de diseño		
	1	2	3
KND-LND	483.9530	465.8935	465.9109
KND-LD	472.9798	451.5781	451.4708
KD-LND	472.2879	451.6792	446.2125
KD-LD	472.2912	451.1154	451.0788

En la tabla 5.7 se observa que el primer criterio, leyes de realimentación que maximizan el volumen, tienen el peor desempeño para cada uno de los casos particulares de la ley de control predicha. Además, se muestra que el segundo criterio, leyes de realimentación que no buscan maximizar el volumen, tienen un mejor desempeño que el primer criterio. El mejor desempeño es alcanzado por las leyes de realimentación bajo el tercer criterio de diseño, esto es esperable pues las leyes de control base se diseñan para optimizar el desempeño y la dinámica optimizada permite aumentar la región de atracción a la máxima zona de operación. Luego, al relacionar los costos de la Tabla 5.7 con las áreas de las regiones de atracción de cada uno de los criterios de diseño presentados en las Tablas 5.4, 5.5, y 5.6, se deduce que el aumento de las áreas de las regiones de atracción junto con el uso de leyes de realimentación diseñadas para optimizar el desempeño marcan una tendencia en la reducción del costo promedio total, por lo que se ve una correlación entre el aumento de la región de atracción con la mejora en el desempeño. Por último, se confirma que la estrategia de MPC con dinámica optimizada para la ley de control predicha difusa (para cualquier caso particular) permite obtener un mejor desempeño en términos de costos que la ley de control predicha no difusa.

5.1.2. Segundo caso de estudio

En este segundo caso de estudio, se considera el sistema (5.1) con incerteza aditiva ($w \neq 0$) para comprobar el funcionamiento de las estrategias propuestas en el Capítulo 4. Para lograr esto, se presentan a continuación los resultados de simulación de manera similar a la subsección anterior.

La máxima región de atracción del elipsoide invariante máximo \mathcal{E}_x bajo una ley $u = Kx$ tiene un área igual a 113.3840 y bajo una ley $u = \sum_{j=1}^2 K^j x$ igual a 329.8164. Luego, para cada caso de estudio, se denotará A_{ND} y A_D como las máximas áreas de las regiones que alcanzan los máximos elipsoides invariantes sujeto a la dinámica del sistema con incerteza en lazo cerrado y a las restricciones operativas del mismo.

En las Tablas 5.8, 5.9 y 5.10 se presentan las regiones de atracción que tienen los elipsoides \mathcal{E}_x bajo las leyes de control base con los tres criterios de diseño para cada α_{max} de acuerdo a lo detallado en el capítulo 4.

Tabla 5.8: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el primer criterio de elección bajo un sistema con incerteza

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	α_{max}	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400
	\hat{A}_{max}	113.3840	113.3840	113.3840	113.3840	113.3840
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3840	329.8164	329.8164	329.8164	329.8164

Tabla 5.9: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el segundo criterio de elección para un sistema con incerteza

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	α_{max}	0,9800	0,9800	0.9800	0.9800	0.9100
	\hat{A}_{max}	9.7896	9.7079	9.5328	9.5416	9.6063
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	\hat{A}_{max}	9.9295	9.0481	8.9814	8.9835	8.9210

Tabla 5.10: Región de atracción del elipsoide \mathcal{E}_x para una ley de control base lineal o difusa bajo el tercer criterio de elección para un sistema con incerteza

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$	
Leyes de Realimentación	Área
$u = Kx$	3.1162
$u = \sum_{j=1}^2 K^j x$	3.1092

A partir de la Tabla 5.8, se puede observar que las regiones de atracción de las leyes de control base bajo el primer criterio de diseño, ley de realimentación que maximiza \mathcal{E}_x , tienen un comportamiento similar al mostrado en la sección anterior. En concreto, las leyes de control base no difusas (incluyendo a las difusas sin relajaciones de Pólya) tiene áreas de regiones de atracción iguales a A_{ND} y las leyes de control base difusas al aplicar las relajaciones de Pólya tienen una área de la región de atracción igual a A_D . Luego, en las Tablas

5.9 y 5.10 se observa que las regiones de atracción generadas por las leyes de control base bajo el segundo criterio de diseño (cualquier ley de realimentación que estabiliza el sistema) y el tercer criterio de diseño (ley de realimentación para optimizar desempeño) son menores a las regiones máximas A_D y A_{ND} , respectivamente. De esta manera, a partir de las Tabla 5.8, 5.9 y 5.10 se menciona que todas las regiones de atracción de las leyes de control base se ajustan al criterio de diseño utilizado.

Ahora, en las Tablas 5.11, 5.12, y 5.13 se presenta el área de las regiones de atracción \mathcal{E}_x obtenido de optimizar la dinámica sobre las leyes de control base bajos los tres criterios de diseño y para todas los casos particulares de la ley de control predicha. Cabe destacar que se esperan resultados similares a los presentados en la sección anterior, puesto que el sistema es el mismo solo que ahora se ve afectado de incerteza. Además, las estrategias que se diseñaron en el Capítulo 4 para sistemas con incerteza, son una extensión de las estrategias propuestas en el Capítulo 3.

Tabla 5.11: Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio para un sistema con incerteza.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	α_{max}	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400
	\hat{A}_{max}	113.3840	113.3840	113.3840	113.3840	113.3840
KND-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3840	329.8162	329.8162	329.8162	329.8162
KD-LND	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3840	329.8164	329.8164	329.8164	329.8164
KD-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3840	329.8164	329.8164	329.8164	329.8164

Tabla 5.12: Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio para un sistema con incerteza.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	α_{max}	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400
	\hat{A}_{max}	113.3837	113.3837	113.3837	113.3837	113.3837
KND-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3836	329.8157	329.8157	329.8157	329.8159
KD-LND	α_{max}	0.9400	0.9600	0.9600	0.9600	0.9300
	\hat{A}_{max}	113.3837	219.4228	223.2492	224.6467	226.4576
KD-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3837	329.8156	329.8157	329.8157	329.8158

Tabla 5.13: Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el tercer criterio para un sistema con incerteza.

Región de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias Ley de Control		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
KND-LND	α_{max}	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400	0.9400
	\hat{A}_{max}	113.3835	113.3835	113.3835	113.3836	113.3836
KND-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3836	329.8155	329.8156	329.8156	329.8156
KD-LND	α_{max}	0.9300	0.9300	0.9300	0.9300	0.9300
	\hat{A}_{max}	29.9761	114.5910	114.5910	114.5910	114.5910
KD-LD	α_{max}	0.9400	0.9200	0.9200	0.9200	0.9200
	\hat{A}_{max}	113.3834	329.8155	329.8155	329.8156	329.8156

En la Tabla 5.11 se observa que las leyes de control predichas no difusas (KND-LND y las difusas sin relajaciones de Pólya) generan regiones iguales a A_{ND} . Dentro de las leyes de control predichas difusas con relajaciones de Pólya; KND-LD genera regiones de atracción comparables¹ con A_D , mientras que KD-LND y KD-LD generan regiones de atracción iguales a A_D . Además, es posible observar que para las leyes de control predichas KND-LND, KD-LND y KD-LD la zona de operación que genera la DOPDC no es mayor, según sea el caso, a A_{ND} o A_D . Mientras que para la ley de control predicha KND-LD, la zona de operación que genera la DOPDC son iguales o superiores que A_{ND} , presentando un beneficio superior con respecto a la ley de control base sobre la que se diseñó la DO llegando a valores de comparables con A_D .

¹ Se entenderá por comparable valores cercanos en el orden de las décimas.

En la Tabla 5.12, se observa que todas las leyes de control predichas no difusas (KND-LND y las difusas sin relajaciones de Pólya) tienen una región de atracción comparable a A_{ND} . Las leyes predichas difusas KND-LD, KD-LND y KD-LD generan regiones de atracción que son iguales o mayores a medida que aumenta la complejidad de las relajaciones de Pólya. La región de KND-LD y KD-LD es comparables a A_D y para algunas relajaciones la región de KND-LD es mayor que el de KD-LD por algunas diezmilésimas. En el caso de KD-LND la región de atracción generada no es comparables a A_D , presentado valores mucho menores. Sin perjuicio de lo anterior, al comparar las regiones de atracción de las leyes de control base, de la Tabla 5.9, con las que se generan al optimizar las dinámicas, de la tabla 5.12, es posible notar que todas las leyes predichas generan un beneficio en términos de la región de atracción.

En la Tabla 5.13 se observa que las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD generan regiones de atracción iguales o similares a las presentadas en la Tabla 5.12. Lo mismo no ocurre para la ley de control KD-LND, puesto que con y sin relajaciones de Pólya, las regiones de atracción son menores que A_D y A_{ND} , respectivamente. No obstante, todas las regiones de atracción presentadas en la Tabla 5.13 son mayores que las regiones de atracción de las leyes de control base sobre la que se diseñó la DOPDC presentadas en 5.10.

Según lo todo lo expuesto hasta ahora, las dinámicas optimizadas difusas para cualquier criterio de diseño de las leyes de control base, la máxima región se alcanza para la mayor complejidad de las relajaciones de Pólya. Ahora, comparando las máximas regiones de atracción de las dinámicas extendidas óptimas de las Tablas 5.11, 5.12, y 5.13 con las máximas regiones de las leyes de realimentación A_D y A_{ND} es posible mencionar que:

- Las máximas regiones de atracción generada por las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD se ven afectadas levemente por el criterio de diseño de las leyes de control base sobre la que se diseñó el máximo conjunto estabilizante. De esta forma, el máximo conjunto estabilizante es comparable para cualquier ley de control base. En consecuencia, KND-LND, permite aumentar la zona de operación de una ley de control base con un criterio de diseño específico a la de una zona de operación comparable con la máxima región de atracción A_{ND} . Mientras que KND-LD y KD-LD permiten aumentar la zona de operación de una ley de control base con un criterio de diseño específico a la de una de zona de operación comparable con la máxima A_D .
- Las máximas regiones de atracción generadas por la ley de control predicha KD-LND se ven afectadas por el criterio de diseño de la ley de control base sobre la que se diseñó el máximo conjunto estabilizante. De esta forma, solo es posible mencionar que el máximo conjunto estabilizante es menor o igual al máximo conjunto estabilizante para una ley de control base de realimentación difusa. En consecuencia, KD-LND no permite aumentar la zona de operación de una ley de control base con un criterio de diseño específico por sobre la zona de operación máxima.

Ahora se presentan los resultados para corroborar que las estrategias estabilizan el sistema (5.1) cumpliendo las restricciones operativas. Para esto, utilizando las leyes de control base bajo el tercer criterio específico, en las Figuras 5.4a y 5.5a se presenta, para KND-LND y KD-LD, la trayectoria de 30 diferentes realizaciones de la incerteza aditiva para 30 diferentes estados iniciales escogidos al azar dentro del elipsoide invariante máximo. En celeste se presenta al máximo conjunto donde el sistema cumple las restricciones operativas del sistema

bajo una ley de realimentación, en azul el elipsoide invariante máximo para las restricciones del problema, en verde el elipsoide invariante máximo \mathcal{E}_x y en rojo el elipsoide invariante para la ley de realimentación sobre la que se diseñó la DO. Además, en las Figuras 5.4b y 5.5b se presenta el nivel de satisfacción de las restricciones operativas para cada uno de los casos.

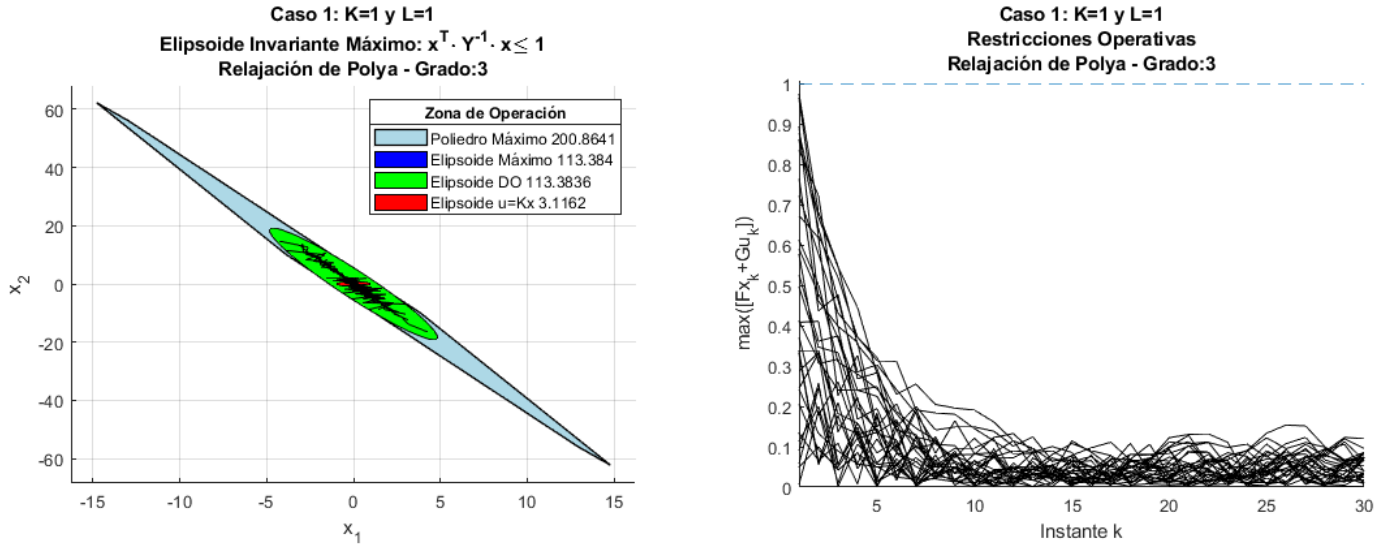


Figura 5.4: (a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KND-LND bajo el criterio 3

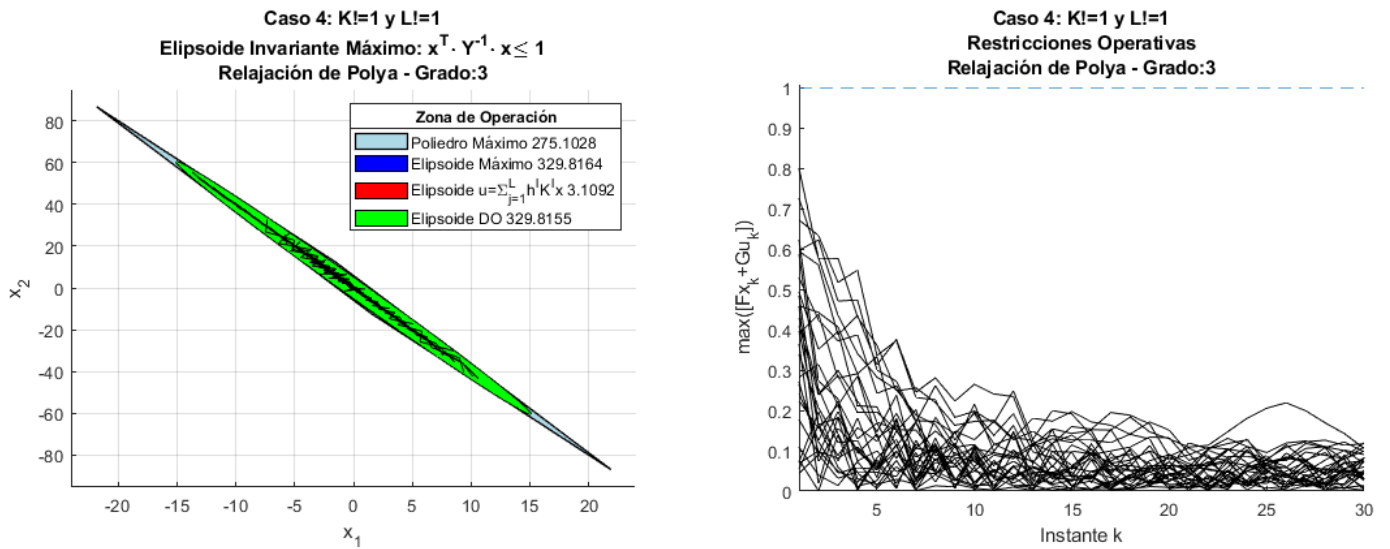


Figura 5.5: (a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 3

Las Figuras 5.4a y 5.5a se comprueba que la región de atracción que generan los controladores con la dinámica optimizada es un conjunto positivamente invariante que garantiza la satisfacción de las restricciones operativas para las realizaciones de incertezas acotadas, pues en

todo instante, los estados permanecen en \mathcal{E}_x . Esto también se puede evidenciar en las Figuras 5.4b y 5.5b, donde se observa que en todo instante, se satisfacen las restricciones operativas impuestas en el sistema. Además, se comprueba que las estrategias permiten estabilizar el sistema no lineal en torno al origen para los estados iniciales estudiados que estén contenidos en \mathcal{E}_x .

Con el objeto de comparar en términos del costo los casos particulares de las leyes de control predichas con los criterios de diseños de las leyes de control base, en la Tabla 5.14 se presenta el costo cuadrático total (5.2) promedio de 30 estados iniciales para un horizonte de 30 instantes. Lo estados iniciales fueron los mismo para todos los casos y se escogieron al azar dentro del elipsoide invariante de menor tamaño que corresponde al de KND-LND. Además, se destaca que la optimización de las dinámicas se realizó para un grado de complejidad 3 de las relajaciones de Pólya, para que estas estrategias tuviesen las condiciones menos conservativas y las mayores regiones de atracción.

Tabla 5.14: Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza

Ley de control Predicha	Criterio de diseño		
	1	2	3
KND-LND	310.1939	310.0691	310.0661
KND-LD	299.4804	299.3874	299.3864
KD-LND	299.4960	296.6910	295.7462
KD-LD	299.4960	299.3921	299.3717

En la tabla 5.14 se observa que las leyes de control predicha bajo el tercer criterio de diseño tienen un desempeño levemente mejor al resto de los criterios. Esto es esperable pues las leyes de control base se diseñan para optimizar el desempeño y la dinámica optimizada permite aumentar la región de atracción a la máxima zona de operación. De forma contraria al primer caso de estudio, al relacionar los costos de la Tabla 5.14 con las áreas de las regiones de atracción de cada uno de los criterios de diseño presentados en las Tablas 5.11, 5.12, y 5.13, se deduce que no hay un gran efecto de los diversos criterios de diseños en las áreas de la zona de operación. Sin perjuicio de lo anterior, las áreas de las regiones de atracción junto con el uso de leyes de control base diseñadas para optimizar el desempeño marcan una leve tendencia en la reducción del costo promedio total, por lo que se ve una baja correlación entre el aumento de la región de atracción con la mejora en el desempeño.

El tercer criterio de diseño específico minimiza el funcional de costo cuadrático (3.4), el cual no considera la presencia de incerteza aditiva. Por lo cual se propone utilizar un cuarto criterio de diseño específico, que minimice el funcional (4.6) donde se minimiza en norma l_2 el tamaño de las perturbaciones. El diseño específico de la ley de control base difusa y no difusa bajo el cuarto criterio de desempeño se basa en los desarrollos presentado en [48].

A continuación en la Tabla 5.15, se presenta el costo cuadrático total (5.2) promedio de 30 estados iniciales para un horizonte de 30 instantes para las cuatro leyes de control predichas considerando una ley de control base bajo el cuarto criterio de desempeño específico.

Tabla 5.15: Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza bajo el cuarto criterio de diseño

Ley de control Predicha	Criterio de diseño
	4
KND-LND	310.0249
KND-LD	299.3554
KD-LND	308.2421
KD-LD	299.3421

A partir de la Tabla 5.14 y 5.15 es posible observar que para las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD el mejor desempeño es alcanzado por el cuarto criterio de diseño específico. Esto no ocurre para el caso de la ley de control predicha KD-LND, en el cual, bajo este criterio su desempeño empeora.

Para reflejar evidenciar los beneficios de utilizar los distintos criterios de diseño específico, a continuación en la Tabla 5.16 se presenta el valor de γ que de acuerdo a lo descrito en el capítulo anterior, representa la cota en norma l_2 de las perturbaciones y determina la relación entre el valor limite de $x_k^T Q x_k + u_k(x_k)^T R u_k(x_k)$ y el tamaño de las incertezas. Los valores de γ que tiene cada unas de las leyes de control base y predicha bajo los cuatro criterio de diseño específico con el que se diseña la ley de control base considerando una grado de complejidad 3 para las relajaciones de Pólya se presenta a continuación.

Tabla 5.16: Cota norma l_2 de las perturbaciones con respecto a la salida para las leyes de control base y predicha para distintos criterios de diseños específicos.

γ				
Ley de control	Criterio de diseño			
	1	2	3	4
KND-LND				
Base	0.4218	0.0754	0.0597	0.0453
Predicha	0.4218	0.4218	0.4218	0.4218
KND-LD				
Base	0.4231	0.0704	0,0597	0.0453
Predicha	0.5444	0.5444	0.5444	0.5444
KD-LND				
Base	0.5209	0.0985	0.0812	0.1006
Predicha	0.5210	0.5444	0.4412	0.4074
KD-LD				
Base	0.5444	0.0789	0.0546	0.0440
Predicha	0.5444	0.5444	0.5444	0.5444

En la Tabla 5.16 se observa que la ley de control predicha KND-LND γ es igual a 0.4218 para cualquier criterio de diseño específico. Para las leyes de control predicha KND-LD y KD-LD γ es igual a 0.5444 para cualquier criterio de diseño específico. Para la ley de control

predicha KD-LND el valor de γ no se estabiliza en un valor exacto. Luego, relacionando los resultados de la Tabla 5.16 con las áreas de la zona de operación presentados en las Tablas 5.11, 5.12, y 5.13 se puede observar que los valores de γ están directamente relacionado con la zona de operación alcanzado por cada controlador. Para las leyes de control base, la zona de operación disminuye a medida que disminuye el valor de γ . Para la ley de control predicha KND-LND alcanza la máxima zona de operación no difusa con el mismo valor de γ para cualquier criterio de diseño específico. Para las leyes de control predichas KND-LD y KD-LD alcanzan la máxima zona de operación difusa con el mismo valor de γ para cualquier criterio de diseño específico.

Con todos los resultados presentados, se confirma que la estrategia de RMPC con dinámica optimizada para la ley de control predicha difusa (para cualquier caso particular) permite obtener un mejor desempeño en términos de costos que la ley de control predicha no difusa pero no se observa un gran beneficio entre los distintos criterios de diseño específico.

5.2. Discusión

En estos casos de estudios se presentaron dos variantes de un modelo difuso Takagi-Sugeno con subsistemas locales lineales con y sin incerteza para probar las estrategias propuestas en esta tesis para todos los casos particulares de la ley de control predicha difusa. Para ambos modelos se presentaron los resultados correspondiente a las regiones de atracción definidos por los máximos conjuntos elipsoidales invariantes \mathcal{E}_x que genera la optimización de la dinámica en la etapa offline de las estrategias. Además, se presentaron los resultados de la etapa online en términos de estabilización, nivel de satisfacción de restricciones y una comparativa de costos con respecto a los casos bases que se extendieron de [21, 22].

Los resultados presentados permiten comprobar que al optimizar la dinámica sobre una ley de control base no difusa, es decir, las extensiones de los enfoques [21, 22], se maximiza el volumen de los elipsoides invariantes. Además, al considerar leyes de control predichas difusas la región de atracción que genera la DOPDC es mayor que la ley de control base no difusa e igual o comparable con la ley de control base difusa. En particular, para el caso sin incerteza, la DOPDC para KD-LD genera la región de atracción máxima para cualquier ley de control base difusa, permitiendo introducir un criterio de diseño específico sin afectar la zona de operación. Esto es similar para el caso con incerteza, mencionando que las máximas regiones que genera la DOPDC-I son comparables con cualquier ley de control base difusa. Estas mayores regiones de atracción, generadas por la DOPDC y DOPDC-I, permiten obtener un mejor desempeño en términos del costo que las estrategias con enfoques [21, 22]. Indistintamente, a partir de los resultados de la etapa online, se comprueba que las estrategias generan acciones de control factibles que estabilizan el sistema con y sin incertezas.

Habiendo estudiado y verificado el funcionamiento de las diferentes estrategias de MPC y RMPC propuestas en esta tesis, en el siguiente capítulo se aplican las estrategias sobre un caso de estudio aplicado, que corresponde al de una unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización.

Capítulo 6

Caso de Estudio: Sistemas de Climatización HVAC

En este capítulo se evalúa el desempeño de las estrategias propuestas en esta tesis en un sistema real, para esto, se presenta un modelo de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización que incluyen calefacción, ventilación y uso de aire acondicionado, conocidos ampliamente en la literatura como sistemas HVAC (del inglés Heating, Ventilation and Air Conditioning). Se plantea la utilización de este sistema como caso de estudio, para probar las distintas estrategias de FRMPC propuestas en esta tesis. Los resultados por simulación son presentados posteriormente, de manera de ejemplificar la funcionalidad de los controladores diseñados en este trabajo.

El capítulo se organiza como sigue: primero se presentan y describen los sistemas de climatización HVAC para luego explicar el funcionamiento de la dinámica de la unidad de tratamiento de aire, exponiendo los distintos elementos que la afectan. El capítulo continúa, mostrando el modelo difuso Takagi-Sugeno con subsistemas lineales con incertezas que representa la dinámica del sistema estudiado.

Posteriormente, se presentan los resultados por simulación de las estrategias de control predictivo robusto difuso con dinámica optimizada que se propusieron en esta tesis para estudiar la región de atracción del máximo conjunto invariante \mathcal{E}_x en función de las relajaciones de Pólya, estabilidad del sistema, satisfacción de las restricciones operativas y comparativa de leyes predichas en función costos.

6.1. Sistemas HVAC

Los sistemas de Calefacción, Ventilación y Aire Acondicionado (HVAC) representan actualmente una parte importante de los edificios residenciales y comerciales. Según [40] la contribución de los edificios al consumo total de energía en los países desarrollados está entre el 20 % y el 40 %, de los cuales el 40 % pertenece a sistemas HVAC. Por tanto, una gestión y monitorización eficiente de estos sistemas puede reducir significativamente el consumo energético.

El objetivo principal de los sistemas de climatización HVAC es controlar la temperatura,

la humedad y la calidad de aire al interior de cada zona térmica [41]. En [15, 42], se define zona térmica como un espacio delimitado normalmente por murallas, como lo son; habitaciones, oficinas, salas u otros.

Lograr un buen control de los sistemas HVAC no es algo trivial, pues la dinámica de los sistemas de climatización se ven involucradas distintas variables que interactúan entre sí para determinar la temperatura de las zonas térmicas. A continuación, en la Figura 6.1 se observan las principales señales que se ven involucradas en la dinámica de los sistemas HVAC.

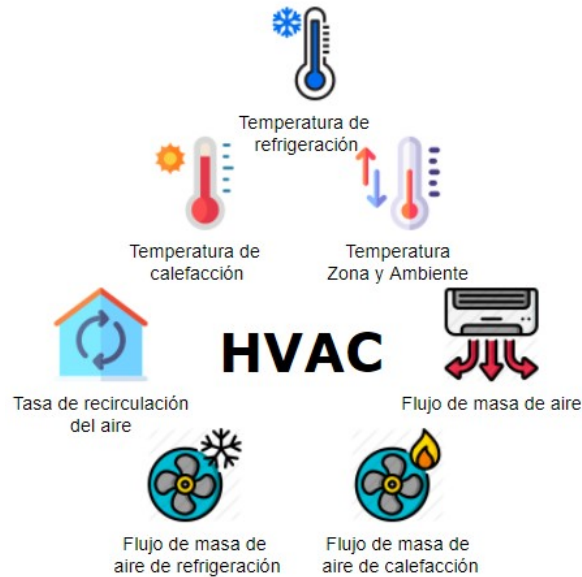


Figura 6.1: Señales involucradas con sistemas HVAC

Una parte fundamental de los sistemas de climatización HVAC que permite controlar la temperatura de la zona térmica es la unidad de tratamiento de aire [41]. La unidad de tratamiento de aire, dentro de otras cosas, determina la temperatura del aire que es enviado a la zona térmica. Luego, con el objeto de evaluar el desempeño de las estrategias propuestas en esta tesis, se controla un modelo difuso que representa la dinámica de la temperatura del aire suministrado por la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC como el propuesto en [41] el cual se representa a continuación.

6.1.1. Unidad de tratamiento de aire de un sistema HVAC

En la Figura 6.2 se ilustra la unidad la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC propuesta en [41]. Como se muestra en esta figura, el flujo de masa de aire posee cuatro flujos relevantes: aire exterior, suministro, retorno y escape con colores verde, azul, amarillo y naranja, respectivamente. Además, se ilustra la dirección del flujo de aire mediante flechas. Un punto relevante a destacar, es que el aire de retorno no se mezcla con el aire exterior fresco debido a los estándares de calidad del aire interior requeridos [41]. Dentro de la misma figura, los elementos controlados eléctricamente que se identifican son el recuperador, calentador, humidificador, enfriador, ventilador de suministro y retorno. Además, en [41] se menciona la existencia de actuadores asociados a cada elemento mencionado

que a través del porcentaje de apertura de válvulas determinan los flujos de masas de aire que circulan.

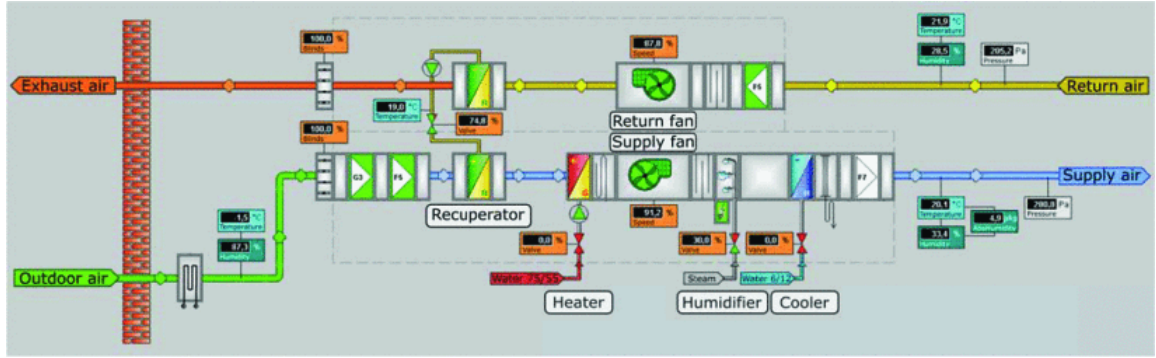


Figura 6.2: Unidad de tratamiento de aire de un Sistema de Climatización HVAC [41].

Según lo mencionado anteriormente, lo presentado en la Figura 6.2 y lo descrito en [41, 42], la temperatura de la zona térmica se determinada por la diferencia de las temperaturas del aire que sale de la zona térmica con el que ingresa a esta.

Por un lado, el aire que sale de la zona térmica es extraído por el ventilador de retorno. Este flujo de masa de aire se denomina como aire de retorno y tiene una temperatura denotada T_r . Además, como se mencionó, el aire de retorno no es reutilizado por la unidad de tratamiento de aire, por lo que es expulsado al exterior de la zona térmica a través del flujo de escape.

Por otro lado, el aire que ingresa a la zona térmica es suministrado por la unidad de tratamiento de aire, se denota como \dot{m}_s y tiene una temperatura específica denominada como temperatura suministrada T_s . Este aire junto con su temperatura, son determinados como se describe a continuación. La unidad de tratamiento de aire introduce aire exterior a una temperatura denominada como temperatura ambiente T_a . Este aire es impulsado por el ventilador de suministro para ser calentado por la bobinas del calentador, luego se regula su humedad a través del humidificador y finalmente es enfriado por la bobina del enfriador de acuerdo a las condiciones que se requieran. El flujo de masa de aire de calefacción y de enfriamiento se denota como $\dot{m}_s \Delta T_h$ y $\dot{m}_s \Delta T_c$, respectivamente. Estos flujos de aire son impulsados desde el calentador y enfriador, donde ΔT_h y ΔT_c representan las temperaturas de las bobinas del calentador y del enfriador.

Los principales actuadores del sistema de tratamiento de aire son los ventiladores, que son interpretados como válvulas que determinan la cantidad de aire que circula por cada flujo. Sus restricciones operativas están dadas por los límites físicos asociado a lo que se pueden abrir las válvulas, como se define a continuación

$$V_{Cerrada} \leq V_s \leq V_{abierta} \quad (6.1)$$

$$V_{Cerrada} \leq V_{T_h} \leq V_{abierta} \quad (6.2)$$

$$V_{Cerrada} \leq V_{T_c} \leq V_{abierta} \quad (6.3)$$

donde V_s , V_{T_h} y V_{T_c} representan el porcentaje de apertura de las válvulas del flujo de masa de aire suministrado, de aire calentado y de aire enfriado, respectivamente.

Además, de acuerdo a condiciones específicas de la zona térmica, se desea que la temperatura suministrada este dentro de un rango. Para esto, se fijan valores máximos y mínimos como:

$$T_{min} \leq T_s \leq T_{max} \quad (6.4)$$

En [41], se presentan los valores permitidos para los actuadores, donde se establece que el porcentaje de apertura de todas las válvulas de los actuadores está entre el 0% y el 100%. Además, se indica que la temperatura suministrada tiene valores comprendidos entre los $0^\circ C$ y $50^\circ C$.

Sin perjuicio de lo anterior, en [15] se menciona que la dinámica de la temperatura suministrada es mucho más rápida que la dinámica de la temperatura de la zona térmica. Además, se indica que las condiciones de la zona térmica determinan el modo de funcionamiento de la unidad de tratamiento de aire. De acuerdo lo anterior, en esta tesis se restringe la variación de la temperatura suministrada a $\pm 0.5^\circ C$ del valor central propuesto en [41] para considerar que la dinámica de la temperatura suministrada evoluciona completamente para requerimientos fijos de la zona térmica. Esto también puede ser interpretado como la existencia de un controlador de nivel superior que fije el rango en que se desea la temperatura suministrada de acuerdo a las condiciones de la zona térmica.

6.2. Modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC

Existe una vasta literatura donde se presentan modelos dinámicos basados en principios físicos del sistema, como se muestran en [43, 44]. Pero en esta tesis se tomará otro enfoque, se utilizará un modelo difuso obtenido mediante identificación difusa de la dinámica de los sistemas presentados en [41, 45].

El modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC utilizado para evaluar el desempeño de las estrategias de control propuesta en esta tesis fue obtenido mediante identificación difusa basándose en las metodologías expuestas en [11, 12].

Con estas metodologías, se identificó un modelo difuso Takagi-Sugeno de la temperatura suministrada, en el cual, la dinámica se determina por la combinación de tres reglas difusas del tipo

Regla j :

$$\text{Si } z_1(k-1) \text{ es } \mathcal{F}_1^l \text{ y } \dots \text{ y } z_{10}(k-1) \text{ es } \mathcal{F}_{10}^l, \text{ entonces } y_{k+1}^l = \sum_{j=1}^{10} p_j^l z_j \quad (6.5)$$

donde $z_j(k-1)$ es la componente j del vector de premisas $z(k-1) = [T_s(k-1), T_s(k-2),$

$T_s(k-3)$, $T_a(k-1)$, $V_s(k-1)$, $V_{Th}(k-1)$, $V_{Tc}(k-1)$, $T_r(k-1)$, $\Delta T_h(k-1)$, $\Delta T_c(k-1)$] y p_j^l corresponde al parámetro de la consecuencia asociado a la premisa j de la regla l .

Luego, para aplicar las estrategias de RMPC con dinámica optimizada sobre este modelo difuso, se consideró que las temperaturas ambiente (T_a), de retorno del aire (T_r), de los medios de calefacción (ΔT_h) y refrigeración (ΔT_c) son perturbaciones externas que afectan la dinámica de T_s . Por lo que se asume como desconocidas las funciones de pertenencia, los grados de activación y parámetros de las consecuencias para estas temperaturas, es decir, que no se utilizará información sobre estas temperaturas. De esta forma, el modelo difuso a controlar está conformado por tres reglas difusas del tipo:

Regla l :

$$\text{Si } z_1(k-1) \text{ es } \mathfrak{F}_1^l \text{ y } \dots \text{ y } z_6(k-1) \text{ es } \mathfrak{F}_6^l, \text{ entonces } x_{k+1}^l = A^l x_k + B^l u_k + D^l w_k \quad (6.6)$$

donde $z(k-1) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ son las premisas del modelo difuso conformado por el vector de entrada $[T_s(k-1), T_s(k-2), T_s(k-3), V_s(k-1), V_{Th}(k-1), V_{Tc}(k-1)]$, $x_k \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de estado del sistema conformado por la temperatura de suministro y dos regresores de ella, es decir, $x_k = [T_s(k), T_s(k-1), T_s(k-2)]^T$ y $u_k \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de variables manipuladas conformado por el porcentaje de apertura de las válvulas asociadas a la masa de aire, masa de aire de calefacción y masa de aire de refrigeración, es decir, $u_k = [V_s(k), V_{Th}(k), V_{Tc}(k)]^T$. Además, $w_k \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es el vector de perturbaciones externas y esta conformado por tres elementos, escogidos aleatoriamente en cada instante: la temperatura ambiente (T_a), de retorno del aire (T_r), de los medios de calefacción (ΔT_h) y refrigeración (ΔT_c). De esta forma las matrices D^l se fijan como la identidad ponderada por un parámetro δ para reescalar las perturbaciones en función del tamaño de las incertezas estudiadas.

Las reglas difusas (6.6) tienen matrices:

$$\begin{aligned} A^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0821 & 0.0148 & 0.7946 \end{bmatrix}, & B^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0215 & 0.0283 & -0.0604 \end{bmatrix}, \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1883 & 0.0098 & 1.1988 \end{bmatrix}, & B^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0486 & -0.0055 & -0.0788 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2.3251 & 1.5117 & -4.0581 \end{bmatrix}, & B^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0544 & 0.4809 & -1.8205 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y $D^l = I_{3 \times 3} \cdot \delta$.

En (6.6) \mathfrak{F}_i^l son los conjuntos difusos asociado a la premisa i para la regla l . La salida

local esta dada por x_{k+1}^l , por lo que la salida global del modelo difuso esta dada por:

$$x_{k+1} = \frac{\sum_{l=1}^3 W^l x_k^l}{\sum_{l=1}^3 W^l} = \sum_{l=1}^3 h^l x_k^l \quad (6.7)$$

donde h^l es el grado de activación normalizado y W^l es el grado de activación, el cual esta dado por:

$$W^l = \prod_{i=1}^6 \mu_i^l \quad (6.8)$$

con μ_i^l el grado de pertenencia al conjunto difuso \mathcal{F}_i^l de la premisa \mathbf{x}_j , dado por

$$\mu_i^l(\mathbf{x}_j) = e^{-\frac{a_i^l - (\mathbf{x}_j - b_i^l)^2}{2}} \quad (6.9)$$

donde a_i^l y b_i^l están dados por:

$$\begin{aligned} a^1 &= [0.0648 \quad 0.0667 \quad 0.0693 \quad 0.0093 \quad 0.0057 \quad 0.0819], \\ a^2 &= [0.0332 \quad 0.0348 \quad 0.0361 \quad 0.0094 \quad 0.0294 \quad 0.0031], \\ a^3 &= [0.0806 \quad 0.0878 \quad 0.0922 \quad 0.0125 \quad 0.0356 \quad 0.2866], \\ b^1 &= [19.4074 \quad 19.4489 \quad 19.5197 \quad 74.5487 \quad 93.1192 \quad 5.2448], \\ b^2 &= [35.2964 \quad 35.2964 \quad 35.2964 \quad 6.7398 \quad 22.6394 \quad 77.8160], \\ b^3 &= [35.2964 \quad 35.2964 \quad 35.2964 \quad 6.7398 \quad 2.4197 \quad 0.0000]. \end{aligned}$$

El sistema (6.6), está sujeto a restricciones operativas, relacionadas con los limites físicos de las válvulas y el rango de temperaturas del aire suministrado para una referencia. De acuerdo a [41, 15] y lo discutido anteriormente, las restricciones operativas impuestas para el modelo difuso expresadas en las variables de estado están dadas por:

$$0\% \leq u_{k+j} \leq 100\% \quad j = 1, \dots \quad (6.10)$$

$$24.5^\circ c \leq x_{k+j} \leq 25.5^\circ c \quad j = 1, \dots \quad (6.11)$$

En este punto, es importante recordar que las estrategias de control propuestas en esta tesis, fueron diseñadas para que los modelos se estabilizaran en torno al origen del sistema. Claramente, como se han definido los sistemas de climatización en este capítulo, el modelo difuso (6.6) se desea estabilizar en una referencia establecida por las condiciones de comodidad de la zona térmica y que no necesariamente es igual a 0, por lo que es necesario realizar un cambio del sistema de coordenadas del sistema. En un nuevo sistema de coordenadas se define con:

$$\tilde{x} = x - \bar{x} \quad , \quad \tilde{u} = u - \bar{u}, \quad \tilde{w} = w - \bar{w}$$

donde \bar{x} , \bar{u} y \bar{w} representan el estado, la señal de control y las perturbaciones de referencias en el sistema original. En la práctica, estos valores se obtuvieron al fijar la referencia del sistema a $25^\circ C$ para todos los estados del sistema. De esta forma, los valores de referencia

están dados por:

$$\begin{aligned}\bar{T}_s(k-1) &= 25^0C, & \bar{T}_s(k-2) &= 25^0C, & \bar{T}_s(k-3) &= 25^0C \\ \bar{V}(\dot{m}_s) &= 58.4727\%, & \bar{V}(\dot{m}_s\Delta T_h) &= 16.6461\%, & \bar{V}(\dot{m}_s\Delta T_c) &= 1.1368\% \\ \bar{T}_a &= 6.9794^0C, & \bar{T}_r &= 25.0540^0C, & \Delta\bar{T}_h &= 58.3732, & \Delta\bar{T}_c &= 11.9661^0C\end{aligned}$$

destacando que estos valores, se ajustan a datos reales del procesos, como los presentados en [41, 15, 42].

Luego, el modelo difuso global en el nuevo sistema de referencia esta dado por:

$$\tilde{x}_{k+1} = \sum_{l=1}^3 \underbrace{(h^l - \bar{h}^l)}_{\tilde{h}^l} \left(A^l \underbrace{(x_k - \bar{x}_k)}_{\tilde{x}} + B^l \underbrace{(u_k - \bar{u}_k)}_{\tilde{u}} + D^l \underbrace{(w_k - \bar{w}_k)}_{\tilde{w}} \right) \quad (6.12)$$

donde \tilde{h}^l es el grado de activación normalizado para el nuevo sistema de coordenadas, obtenido de desplazar las funciones de pertenencias originales a los valores de referencia. Lo mismo se realiza para redefinir las restricciones al nuevo sistema de coordenadas, obteniendo:

$$\tilde{F}\tilde{x} + \tilde{G}\tilde{u} \leq \underline{1}. \quad (6.13)$$

6.3. Simulaciones

A razón de evaluar el desempeño de las estrategias propuestas en esta tesis en un sistema real, se utiliza el modelo difuso presentado en la subsección anterior. Se examina el desempeño de las estrategias al considerar perturbaciones que están dadas aleatoriamente en torno a ± 1 del valor de referencia presentado anteriormente, es decir, considerar $|\tilde{w}|_\infty \leq 1$. Cabe destacar que el rango de perturbaciones consideradas fue ajustado a través de las matrices D^l con $\delta = 0.01$ para que el rango de perturbaciones estudiadas fuese igual a reportado en los trabajos [42, 45, 41].

Al sistema presentado, se le aplican las estrategias de control predictivo robusto con optimización de la dinámica sujeto a incerteza propuestas en el capítulo 4 para los cuatro casos particulares de la ley de control predicha (KND-LND, KND-LD, KD-LND y KD-LD).

Para evaluar el desempeño de estas estrategias se siguen los mismos pasos que los empleados en el Capítulo 5, es decir, que se presentan los tamaños de las regiones de atracción de las leyes de control base y de las que generan las dinámicas óptimas para cada una de las leyes de control predicha. También, se corrobora que el sistema es estabilizado en torno de la referencia satisfaciendo las restricciones y se compara en términos de costo la extensión de [22] con estrategias de DOPDC-I propuesta en esta tesis.

Se considera además, realizar los mismos estudios de las relajaciones de Pólya y de los criterios de diseño de las leyes de control base. Se destaca que solo se contemplan dos criterios de elección de las leyes de control base: el primero y el segundo. El tercer criterio de diseño no se pudo implementar dado que las leyes de realimentación generadas no permitían estabilizar

el sistema (6.6) al no cumplir la condición (E.2).

6.3.1. Resultados de simulación

En las Tablas 6.1 y 6.2, se presentan los tamaños (volúmenes) de las regiones de atracción que tienen las leyes de control base bajo el primer y segundo criterio de diseño específico. Se recuerda que el primer criterio de diseño específico busca una ley de realimentación que maximice el elipsoide invariante \mathcal{E}_x tal que establezca el sistema al cumplir (E.2). Mientras que en el segundo criterio de diseño específico, se escogen al azar las ganancias ley de realimentación tal que establezca el sistema al cumplir (E.2).

Tabla 6.1: Región de atracción de las leyes de control base bajo el primer criterio específico de diseño.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$						
Leyes de Realimentación		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2464	0.2464	0.2464	0.2464	0.2464
$u = \sum_{j=1}^3 h^j K^j x$	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2464	0.2797	0.3048	0.3053	0.3126

Tabla 6.2: Región de atracción de las leyes de control base bajo el segundo criterio específico de diseño.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$						
Leyes de Realimentación		Relajaciones de Pólya				
		-	0	1	2	3
$u = Kx$	α_{max}	0.9900	0.9900	0.9900	0.9700	0.9900
	V_{max}	0.1328	0.1230	0.1078	0.1874	0.2003
$u = \sum_{j=1}^3 h^j K^j x$	α_{max}	0.9900	0.9900	0.9800	0.9700	0.9100
	V_{max}	0.1212	0.1268	0.1317	0.2045	0.2344

A partir de la Tabla 6.1, se observa que la ley de control base no difusa para cualquier relajación de Pólya y la difusa sin relajaciones tienen volúmenes iguales a 0,2464. En el caso de las leyes de control base difusas con relajaciones, se observa que a medida que aumentan las complejidades de las relajaciones los volúmenes de las regiones de atracción aumentan pero no se estabilizan en un valor fijo. De esta forma, efectivamente se observa que las relajaciones de Pólya quitan conservadurismo de las restricciones, pero para este caso de estudio a diferencia de los estudiados en el capítulo anterior, se requieren mayores complejidades para poder plantear condiciones asintóticamente equivalentes que permitan encontrar valores estables para el volumen de la ley de realimentación difusa.

De lo recién expuesto y al igual que en el capítulo anterior, con el objeto de tener un valor de referencia para comparar los tamaños de las regiones de atracción se define el máximo volumen del conjunto elipsoidal para una ley de control base no difusa como $V_{ND} = 0.2464$.

Para el caso de leyes de control base difusa, no se define un valor para V_D puesto que los volúmenes de las regiones de atracción no convergieron a un valor específico.

Luego, en la Tabla 6.2 se observa que los volúmenes de las regiones de atracción de las leyes de control base bajo el segundo criterio de diseño son menores a las presentadas en la Tabla 6.1, pues el segundo criterio de diseño no contempla optimizar el volumen de \mathcal{E}_x .

Ahora, en las Tablas 6.3 y 6.4 se presenta la región de atracción \mathcal{E}_x que generan los controladores con dinámica optimizada para las leyes de control base bajo los dos criterios de diseño y para todos los casos particulares de la ley de control predicha.

Tabla 6.3: Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el primer criterio para el modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire.

Región de atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias		Relajaciones de Pólya				
Ley de Control		-	0	1	2	3
KND-LND	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607
KND-LD	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2944	0.3196	0.3196	0.3269
KD-LND	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2874	0.3098	0.3104	0.3175
KD-LD	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2944	0.3196	0.3196	0.3269

Tabla 6.4: Región de atracción de los controladores RMPC con Dinámica Optimizada para una ley de control base difusa y no difusa bajo el segundo criterio para el modelo difuso de la unidad de tratamiento de aire.

Volumen de Atracción: $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T \mathcal{W}^{-1} x \leq 1\}$						
Estrategias		Relajaciones de Pólya				
Ley de Control		-	0	1	2	3
KND-LND	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2607	0.2607	0.2607	0.2606
KND-LD	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2944	0.3196	0.3196	0.3269
KD-LND	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2801	0.2896	0.2941	0.2908
KD-LD	α_{max}	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800	0.9800
	V_{max}	0.2607	0.2944	0.3196	0.3196	0.3269

En la Tabla 6.3 se observa que las leyes de control predichas no difusas (KND-LND y

las difusas sin relajaciones de Pólya) generan volúmenes iguales a V_{ND} . Dentro de las leyes de control predichas difusas con relajaciones de Pólya se observa que todos los volúmenes son mayores que V_{ND} y que estos aumentan a medida que crece el grado de complejidad. Un resultado relevante que se observa para las leyes predichas KND-LD y KD-LD, es que los volúmenes que generan las optimizaciones de las dinámicas son los mayores y son iguales entre sí. Esto es relevante ya que estos resultados comprueban que la dinámica optimizada con una ley de control predicha difusa KND-LD alcanza la misma región de operación con una ley de control base no difusas que una difusa. Este mismo resultado no se tiene para KD-LND debido que la región de tracción solo es mayor que V_{ND} , lo que era de esperar de acuerdo a lo discutido en los capítulos anteriores con respecto a los análisis del tamaño de la región de atracción.

Los volúmenes generados a partir de las leyes de control base bajo el segundo criterio para las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD presentadas en la Tabla 6.4 son idénticos a los de la Tabla 6.3. En el caso de la ley de control predicha KD-LND, los valores de los volúmenes generados por la DOPDC a partir de leyes de control base bajo el segundo criterio son menores a las generadas bajo el primer criterio. Este resultado era previsible debido a todo lo demostrado y analizado en esta tesis. En particular, las regiones de atracción generadas por las leyes de control predichas KND-LND, KND-LD y KD-LD se ven afectadas levemente por el criterio de diseño de la ley de control base, lo que se evidencia para este sistema; de hecho, el criterio de diseño no afecta el tamaño de la región de atracción. En el caso de KD-LND, si afecta el diseño de criterio de la ley de control base, lo que también se evidencia en este caso.

Sin perjuicio de lo anterior, todas las regiones de atracción generadas por la optimización de la dinámica presentados en las Tablas 6.3 y 6.4 generan regiones de atracción iguales o mayores que las leyes de control base (revisadas en las Tablas 6.1 y 6.2) sobre la que se optimizó la dinámica.

Ahora se compara el enfoque propuesto en [22], con el que fue extendido en esta tesis a modelos difusos, es decir, estudiar las diferencias de usar una ley de control base lineal o difusa del tipo PDC en la estrategia de RMPC con optimización de la dinámica. Para lograr esto, se controla el sistema (6.6) bajo las estrategias de RMPC con dinámica optimizada bajo leyes predichas KND-LND y KD-LD. Donde se destaca que KND-LND tiene el mismo enfoque que [22], de esta forma KND-LND es equivalente a esta pero para modelos difusos. La optimización de la dinámica se realizó con relajaciones de Pólya con un grado de complejidad 3 y bajo leyes de control base con el primer criterio de diseño específico. Además, la etapa online se realiza considerando valores arbitrarios para los costos asociados a los estados y entradas. En esta simulación, se fijó el valor de Q en $I_{3 \times 3} \cdot 100$, y el de R en $I_{3 \times 3}$.

En las Figuras 6.3a y 6.4a se presenta la trayectoria de 30 diferentes realizaciones de la temperatura del flujo de masa de aire de la unidad de tratamiento de aire del sistema HVAC, para 30 diferentes estados iniciales escogidos entre $24.5^{\circ}C$ y $25.5^{\circ}C$ con realizaciones aleatorias de la incerteza. Además, en las Figuras 6.3b y 6.4b se muestran las acciones de control aplicadas a la unidad de tratamiento de aire del sistema de climatización HVAC. En la Figura 6.5, se puede apreciar el perfil de perturbaciones que afectaron a ambos modelo.

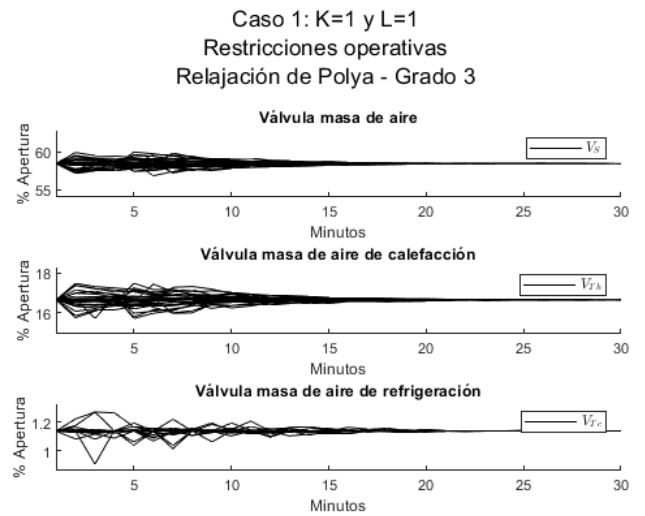
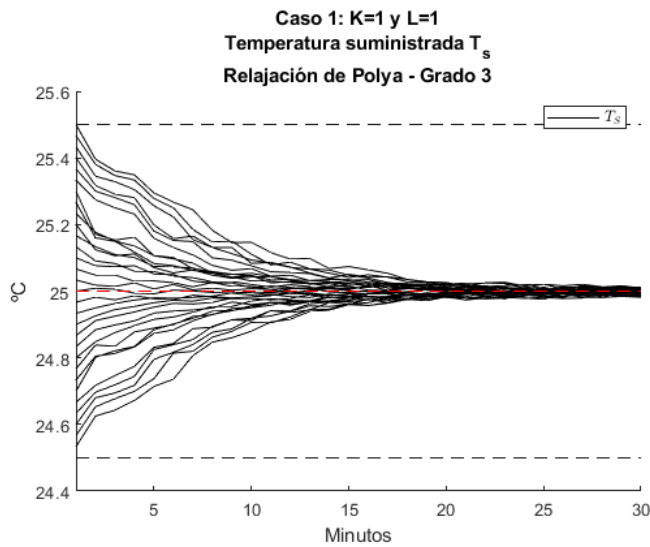


Figura 6.3: (a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 1

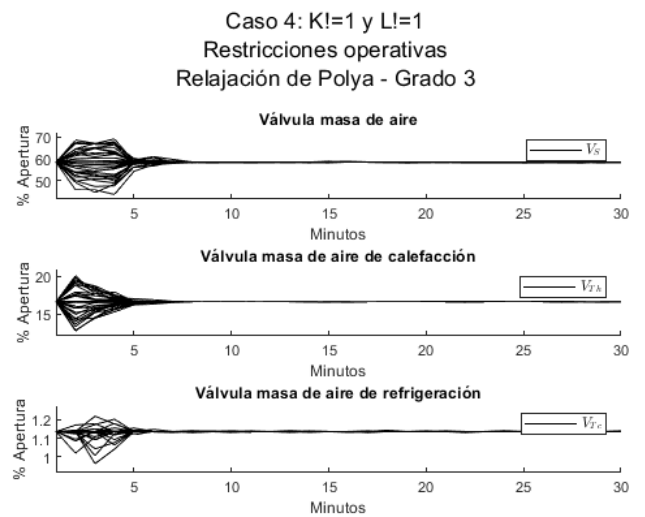
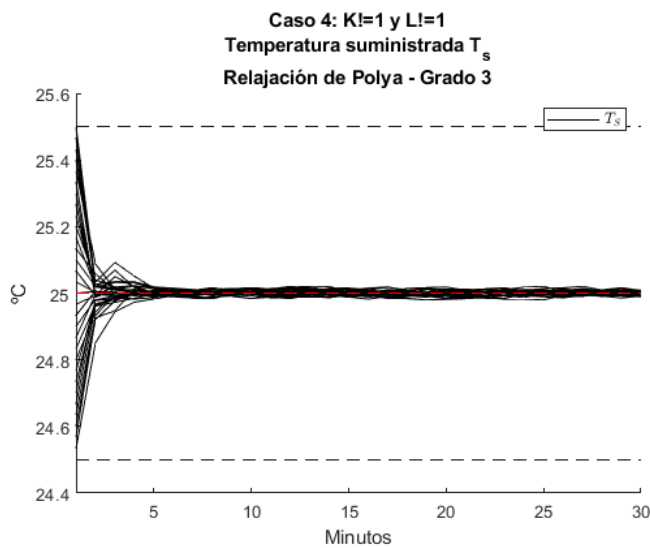


Figura 6.4: (a) Trayectoria lazo cerrado de x_k , (b) $\max([Fx_k + Gu_k])$, para 30 realizaciones de la dinámica bajo una ley de control predicha KD-LD bajo el criterio 1

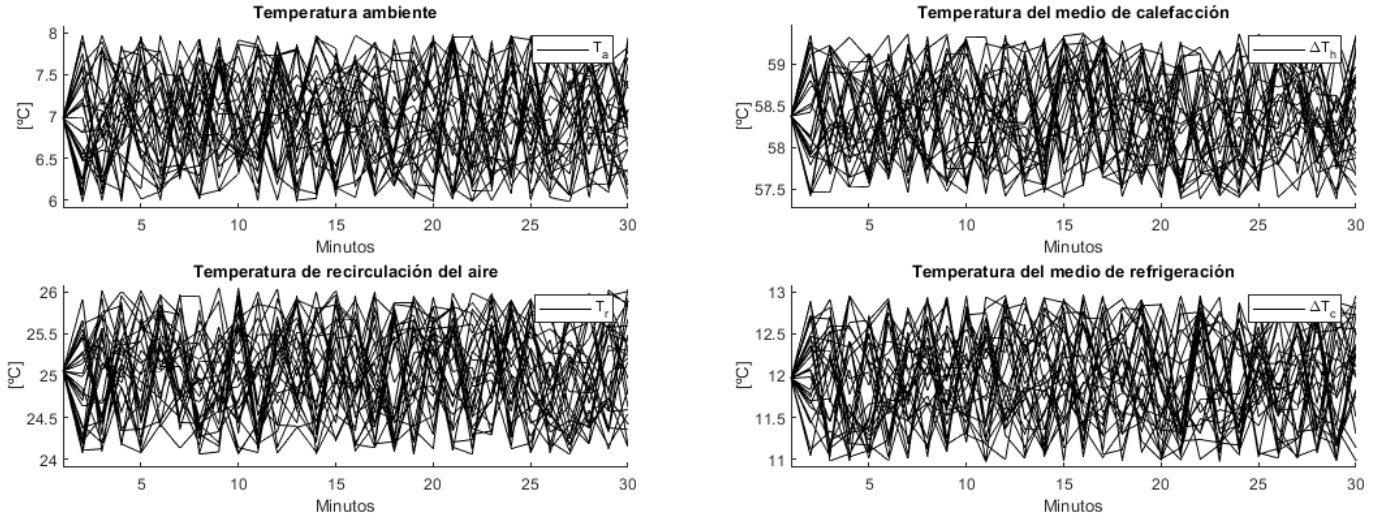


Figura 6.5: Perfil de perturbaciones

En las Figuras 6.3a y 6.4a se observa que las temperaturas del aire suministrado a la zona térmica, sujeto al perfil de perturbaciones mostrado en la Figura 6.5, son estabilizadas en la referencia deseada. Luego, se destaca que ambas versiones de las estrategias de control estabilizan de cualquier estado inicial de T_s que esté dentro del rango impuesto en (6.11). Además, en las Figuras 6.3b y 6.4b, se comprueba que las acciones de control satisfacen (6.10) en todo tiempo.

En cuanto al tiempo de estabilización, se observa en las Figuras 6.3a y 6.4a, que son distintos para cada una de las estrategias. Se aprecia que la estrategia KD-LD estabiliza el sistema en menos de diez minutos, mientras que la estrategia KND-LND, logra la estabilización después de los veinte minutos.

Con todo lo anteriormente mencionado, es posible concluir que ambas estrategias estabilizan el sistema difuso con incerteza aditiva en torno a la referencia impuesta cumpliendo las condiciones de diseño y las restricciones operativas. Con respecto a la estabilización en sí, no es posible concluir nada más, por lo que un trabajo futuro podría ahondar en temáticas sobre la estabilización del sistema bajo estas estrategias propuestas.

Para la evaluar el rendimiento de estas estrategias en términos de costos, se definió el funcional de de costos cuadrático con respecto a la referencia, dado por:

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \sum_{i=0}^N \left((x_{k+i|k} - \bar{x})^T Q (x_{k+i|k} - \bar{x}) + (u_{k+i|k} - \bar{u})^T R (u_{k+i|k} - \bar{u}) \right) \quad (6.14)$$

En la Figura 6.6 se presenta para la ley de control predicha KND-LND y KD-LD, el costo por etapa promedio de 30 estados iniciales para 30 instantes bajo el perfil de perturbaciones de la figura 6.5. Los estados iniciales fueron los mismos para ambas estrategias y se escogieron al azar dentro del elipsoide invariante de menor tamaño que corresponde al de la estrategia KND-LND.

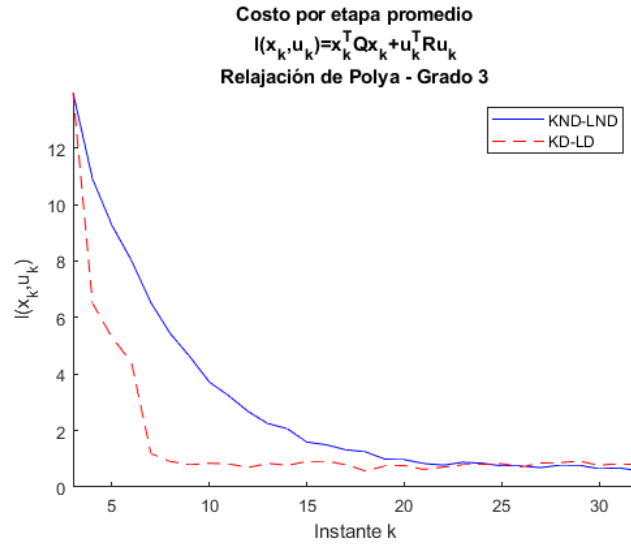


Figura 6.6: Costo por etapa promedio para las leyes de control predichas KND-LND y KD-LD bajo el primer criterio

En la Figura 6.6 se observa que la versión KD-LD tiene un mejor desempeño al presentar iguales o menores valores a lo largo de todo el intervalo de tiempo estudiado. Esto es ocasionado principalmente debido a que la estrategia KD-LD tiene un espacio factible mayor que KND-LND, lo que permite obtener acciones de control que optimicen de mejor forma el costo predicho.

Finalmente, en la Tabla 6.5 se observa el costo cuadrático promedio $J(\vec{x}_k, \vec{u}_k) = \sum_{i=1}^{30} l(\tilde{x}_{k+i|k}, \tilde{u}_{k+i|k})$ para las leyes predichas KND-LND y KD-LD. En esta tabla, se confirma que la estrategia de RMPC con dinámica optimizada con estado extendido para la ley de control predicha difusa KD-LD permite obtener un mejor desempeño en términos de costos que la ley de control predicha KND-LND. En otras palabras, considerar una ley de control predicha difusa tiene un mejor desempeño que el enfoque propuesto por [22].

Tabla 6.5: Costo cuadrático promedio para el sistema con incerteza

Ley de control predicha	$J(\vec{x}_k, \vec{u}_k)$
KND-LND	117.1660
KD-LD	79.1485

6.4. Discusión

En este capítulo se estudio la implementación de las distintas propuestas de RMPC con dinámica optimizada con estado extendido diseñadas en esta tesis para sistemas con incerteza. Estas son aplicadas al caso de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización HVAC. Para lograr esto, en primer lugar se presentaron los sistemas de climatización HVAC, explicando las principales señales que interactúan en su proceso dinámico. También se describió el funcionamiento de la unidad de tratamiento de aire de un sistema de climatización, haciendo énfasis en las principales variables que rigen su comportamiento para presentar el

modelo difuso con incerteza que captura su comportamiento.

Posteriormente se describieron las simulaciones que se realizarían sobre este caso de estudio, haciendo hincapié en los volúmenes de los máximos conjuntos elipsoidales invariantes \mathcal{E}_x que genera la optimización de la dinámica en la etapa offline sobre leyes de control base bajo dos criterios de diseño. Además, se realizaron comparativas en términos de estabilización, nivel de satisfacción de restricciones y costos de las estrategias. Para esto último, se consideró comparar el caso base KND-LND, que tiene un enfoque similar al propuesto en [22], con la ley de control predicha difusa con mayores grados de libertad para su diseño.

A partir de los resultados, se comprobó que la etapa offline de las estrategias propuestas permiten alcanzar la región de atracción máxima a partir de cualquier ley de control base que establezca el sistema. En el caso de leyes de control base difusa, se verificó que las zonas de operación generadas por la optimización de la dinámica son iguales o mayores a las proporcionadas por las leyes de control base difusa bajo cualquier criterio de diseño específico. Además, con las relajaciones de Pólya, se verificó que generan condiciones menos conservativas a medida que se aumenta la complejidad de estas, permitiendo obtener regiones de atracción mayores.

Luego se implementó la etapa online de las estrategias, logrando mostrar en los resultados que las leyes de control predichas KND-LND y KD-LD estabilizan el sistema con incerteza cumpliendo las restricciones operativas. Con esto se consiguió aumentar las zonas de operación de los controladores de volúmenes máximos generados por leyes de control base lineales a volúmenes incluso mayores que los generados por leyes de control base difusa sin afectar la estabilidad y factibilidad del controlador. Lo que si se vio afectado, fueron los tiempos de estabilización del sistema al usar una u otra estrategia; evidenciando que KD-LD permitió estabilizar el sistema en un menor tiempo. Todo estos beneficios; el aumento de la zona de operación y la disminución del tiempo de estabilización, se tradujeron en una disminución del costo con respecto al caso base KND-LND.

Con esto queda confirmada la utilidad de las estrategias de RMPC presentadas en esta tesis para la implementación en casos reales, mejorando los resultados con respecto a optimización de la dinámica reportados en la literatura, los cuales no contemplan la utilización de leyes de control base y predichas difusas ni utilización de las relajaciones de Pólya para obtener soluciones menos conservadoras.

Capítulo 7

Conclusiones

Una vez finalizado el presente trabajo, se puede concluir que se ha cumplido el objetivo general al lograr diseñar e implementar estrategias de control predictivo, que incorporan un controlador con dinámica propia, a través de leyes de control predichas cuya dinámica es optimizada, para sistemas difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza. En los siguientes párrafos se analizará cada uno de los objetivos específicos.

En primer lugar, se establecieron las condiciones de invarianza y factibilidad para la ley de control predicha de un controlador predictivo con estado extendido al utilizar una ley de control predicha difusa con compensación distribuida en paralelo con estado propio para un modelo Takagi-Sugeno con y sin incerteza. La ley de control predicha se diseñó con el estado del sistema y un estado propio sobre una ley de control base difusa. Además, se plantearon las condiciones para las variantes de la ley de control predicha difusa. Estas condiciones consideraron que las ganancias asociadas al estado del sistema y al estado del controlador fuesen difusas o no difusas. De esta forma se generaron las condiciones de invarianza y factibilidad para tres leyes de realimentación difusa con compensación distribuida en paralelo y para una ley de realimentación lineal para modelos difusos con y sin incerteza.

Las condiciones establecidas son necesarias y suficientes para conjuntos elipsoidales al considerar la dinámica difusa global del sistema extendido, conformado por la dinámica difusa del sistema predicho controlado y la dinámica difusa del controlador. Estas condiciones se expresan a través de desigualdades matriciales que están conformadas por la suma de matrices no lineales con respecto a las variables de diseño ponderadas por los grados de activación. La aplicabilidad de estas condiciones en la práctica no es computacionalmente tratable debido a la no linealidad de las matrices y la no linealidad de la ponderación de los grados de activación.

Para dar solución a esta problemática, en esta tesis se utilizaron cambios de variables, complementos de Schur y relajaciones de Pólya. El uso de cambios de variables junto con el complemento de Schur, permitió expresar las condiciones como desigualdades matriciales lineales difusas equivalentemente. Luego, las relajaciones de Pólya proporcionan conjuntos de desigualdades matriciales lineales necesarias y asintóticamente suficientes al aumentar la complejidad de estas. Así, las condiciones expresadas en LMIs permiten tener un problema de diseño convexo que asegura que el problema sea tratable computacionalmente.

Estas condiciones fueron utilizadas en la etapa offline de las estrategias de RMPC y MPC

para modelos Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva, para diseñar un controlador con una ley de control predicha para maximizar la zona de operación. Para las estrategias sin incerteza, se demostró que para las leyes de control predichas KD-LD y KND-LND, la optimización de la dinámica genera los máximos conjuntos elipsoidales bajo cualquier ley de control base difusa y no difusa, respectivamente. En el caso KND-LD, se demostró que la optimización de la dinámica permite aumentar la zona de operación de cualquier ley de control base no difusa llegando incluso a la zona de operación máxima que genera una ley de control base difusa. Para la ley de control predicha KD-LND solo se demostró que, en el mejor de los casos, la zona de operación máxima es igual al de una ley de control base difusa. Posteriormente, en la etapa online, se calcularon en cada instante las acciones de control al optimizar el comportamiento predicho bajo la ley de control predicha diseñada en la etapa offline. Para el cálculo de la acción de control, se buscó en el conjunto invariante el estado inicial de la dinámica optimizada al minimizar el costo de peor caso. La aplicación de la acción de control en cada instante, permitió establecer nociones de estabilidad satisfaciendo las restricciones operativas.

Estas nuevas estrategias se implementaron en casos de estudios propuestos en la literatura y aplicaciones reales, en la cual, se comprobó que estas estrategias controlan sistemas difusos con y sin incerteza cumpliendo satisfactoriamente las restricciones operativas impuestas. Además, se evidenció los beneficios de utilizar dinámicas optimizadas que incorporan estado extendidos con leyes de realimentación difusas formuladas en esta tesis. En particular, se destaca la mejora en las zonas de operación de los controladores con respecto a la utilización de leyes de control base lineales. Este beneficio se aprecia como consecuencia directa de la utilización de las leyes de control predichas difusas, junto con la implementación de las LMIs por medio de las relajaciones de Pólya.

Trabajo Futuro

Las estrategias de control predictivo propuestas en esta tesis utilizan toda la información disponible en la base de reglas del sistema difuso a través de los grados de activación normalizados y los parámetros que definen las mismas reglas. Esta información se utiliza para plantear las condiciones de invarianza, factibilidad y estabilidad que se deben imponer sobre las estrategias. Gran parte de estas condiciones se obtuvieron a partir de la teoría de estabilidad de Lyapunov, al imponer que una función cuadrática de Lyapunov sea decreciente. Esta última juega un papel fundamental dentro de las estrategias, ya que determina el tamaño del elipsoide invariante y así la zona de operación del controlador. En esta tesis se utiliza una función de Lyapunov que no es difusa, por lo que no se incorporan la información de los modelos locales en su diseño.

Lo descrito anteriormente, sugiere investigaciones futuras donde se consideren funciones de Lyapunov difusa, para establecer condiciones menos conservativas sobre las variables de diseño, y así obtener elipsoides invariantes para cada una de las reglas. De esta forma, el elipsoide invariante máximo global que genera la optimización de la dinámica estará dado por la combinación lineal entre los elipsoides invariantes máximos locales ponderados por los grados de activación. Pudiendo darse que para algunos grados de activación o equivalentemente, ciertos estados del sistema, el elipsoide invariante será mayor a los diseñados acá, es decir, que el volumen será superado bajo condiciones específicas.

Capítulo 8

Glosario

CS	Complemento de Schur
DO	Dinámica optimizada
DOPDC	Dinámica optimizada con compensación distribuida en paralelo
DOPDC-I	Dinámica optimizada con incerteza aditiva con compensación distribuida en paralelo
FLMI	Desigualdades matriciales lineales difusas
FMPC	Control predictivo difuso
FRMPC	Control predictivo robusto difuso
KD-LD	Ley de control predicha difusa con ganancias K y L difusas
KD-LND	Ley de control predicha difusa con ganancia K no difusa
KND-LD	Ley de control predicha difusa con ganancia L no difusa
KND-LND	Ley de control predicha no difusa con ganancias K y L no difusas
LMI	Desigualdades matriciales lineales
LTI	Sistemas lineales e invariantes en el tiempo
LTV	Sistemas lineales variantes en el tiempo
MPC	Control predictivo
NO-PDC	Compensación no distribuida en paralelo
PDC	Compensación distribuida en paralelo
RMPC	Control predictivo robusto
TS	Takagi-Sugeno

Bibliografía

- [1] B. Kouvaritakis & M. Cannon. Model predictive control: classical, robust and stochastic. Springer, 2016.
- [2] J. Rodríguez & P. Cortés. Predictive Control of Power Converters and Electrical Drives, 1st ed. New York: Wiley-IEEE Press, 2012.
- [3] S. Qin & T. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology, Control Eng. Pract. 11(7), pp. 733–764, 2003.
- [4] S. Vázquez, J. I. León, L. G. Franquelo, J. Rodríguez, H. A. Young, A. Márquez & P. Zanchetta. Model Predictive Control: A Review of Its Applications in Power Electronics. IEEE Industrial Electronics Magazine, 8(1), 16–31, 2014.
- [5] J. H. Lee. Model predictive control: Review of the three decades of development. International Journal of Control, Automation and Systems, 9(3), 415–424, 2011.
- [6] P. J. Campo & M. Morari. Robust model predictive control, Proc. of the American Control Conference, pp. 1021-1026, 1987.
- [7] J. C. Allwright & G. C. Papavasiliou. On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses, Systems and Control Letters, vol. 18, pp. 159-164, 1992.
- [8] J. H. Lee & Z. Yu. Worst-case formulation of model predictive control for systems with bounded parameters, Automatica, vol. 33, no. 5, pp. 763- 781, 1997.
- [9] M. Kothare, V. Balakrishnan & M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. Automatica, 32(10), 1361–1379, 1996.
- [10] T. Takagi & M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, smc-15, 116–132, 1985.
- [11] D. Sáez & R. Zuñiga. Takagi-Sugeno Fuzzy Model Structure Selection Based on New Sensitivity Analysis. The 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2005. FUZZ '05., 2005, pp. 501-506.
- [12] D. Sáez & R. Zuñiga. Cluster optimization for Takagi Sugeno fuzzy models and its application to a combined cycle power plant boiler. Proceedings of the 2004 American Control Conference, 2004.
- [13] D. Muñoz-Carpintero. Strategies in robust and stochastic model predictive control [PhD thesis]. Oxford University, UK, 2014.
- [14] J. Lofberg. Approximations of closed-loop minimax MPC. 42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475), 2, 1438–1442 Vol.2, 2003.
- [15] Ó. Cartagena. Estrategias de control predictivo robusto basadas en intervalos difusos.

- Tesis (magíster en ciencias de la ingeniería, mención eléctrica). Universidad de Chile, 2019.
- [16] X. Chang & G. Yang. Fuzzy robust constrained model predictive control for nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 13(6), 947–955, 2011.
- [17] S. Boyd. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [18] A. Jalali & V. Nadimi. A Survey on Robust Model Predictive Control from 1999-2006. 2006 International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation and International Conference on Intelligent Agents Web Technologies and International Commerce (CIMCA'06).
- [19] A. Casavola, D. Famularo & G. Franzé. Robust constrained predictive control of uncertain norm-bounded linear systems, *Automatica* 40, 2004, pp. 1865 – 1876.
- [20] W.J. Mao. Robust stabilization of uncertain timevarying discrete systems and comments on an improved approach for constrained robust model predictive control, *Automatica* 39, 2003, pp. 1109–1112.
- [21] M. Cannon & B. Kouvaritakis. Optimizing prediction dynamics for robust MPC. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1892–1897, 2005.
- [22] D. Muñoz-Carpintero, M. Cannon & B. Kouvaritakis. Robust MPC strategy with optimized polytopic dynamics for linear systems with additive and multiplicative uncertainty. *Systems & Control Letters*, 81, 34–41, 2015.
- [23] D. Mayne, J. Rawlings, C. Rao & P. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, Volume 36, Issue 6, 2000, Pages 789-814.
- [24] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35(11), 1747–1767, 1999.
- [25] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion, *International Journal of Control*, 55:3, 531-534, 1992.
- [26] A. Gautam, Y. Chu & Y. C. Soh. Optimized Dynamic Policy for Receding Horizon Control of Linear Time-Varying Systems With Bounded Disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 973–988, 2012.
- [27] E. H. Mamdani. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 121(12), 1585, 1974.
- [28] H. Wang, K. Tanaka & M. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2, 531–538 vol.2, 1995.
- [29] K. Tanaka, T. Ikeda & H. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2), 250–265, 1998.
- [30] Y. Xia, H. Yang, P. Shi & M. Fu. Constrained Infinite-Horizon Model Predictive Control for Fuzzy-Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2), 429–436, 2010.
- [31] B. Ding. Comments on Constrained Infinite-Horizon Model Predictive Control for Fuzzy-Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(3), 598–600, 2011.

- [32] A. Zahaf, B. Boutamina, S. Bououden & S. Filali. New approach of model based T-S fuzzy predictive control using LMI approach. 2014 15th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 38–43, 2014.
- [33] L. Teng, Y. Wang, W. Cai & H. Li. Robust Fuzzy Model Predictive Control of Discrete-Time Takagi-Sugeno Systems With Nonlinear Local Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(5), 2915–2925, 2018.
- [34] K. Tanaka & H. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis, A Linear Matrix Inequality Approach*. Wiley Interscience, New York, ISBN 0-471-32324-1, 2001.
- [35] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo & Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 324-332, April 2001.
- [36] F. Bedate. Control predictivo de modelos borrosos Takagi-Sugeno mediante función de Lyapunov contractiva. Tesis Doctoral, Universitat Jaume I, Departamento de Ingeniería de sistemas industriales y diseño, 2015.
- [37] A. Querol. Control Predictivo de sistemas borrosos mediante teoría de conjuntos invariantes y programación copositiva. Tesis Doctoral, Universitat Jaume I, Departamento de Ingeniería de sistemas industriales y diseño, 2017.
- [38] S. Pólya. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis [Review of Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis]. *The Mathematical Gazette*, 13(183), 169–170. G. Bell and Sons Ltd, 1926.
- [39] A. Sala & C. Ariño. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polyá’s theorem, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 158, Issue 24, 2671-2686, ISSN 0165-0114, 2007.
- [40] K. Bruton, D. Coakley, P. Raftery, D. O. Cusack, M. M. Keane, & D. T. O’Sullivan. Comparative analysis of the AHU InFO fault detection and diagnostic expert tool for AHUs with APAR. *Energy Efficiency* 8, 299–322, 2015.
- [41] G. Andonovski, S. Blažič & I. Škrjanc . Partial cloud-based evolving method for fault detection of HVAC system. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2018.
- [42] Ó. Cartagena, D. Muñoz-Carpintero & D. Sáez. A Robust Predictive Control Strategy for Building HVAC Systems Based on Interval Fuzzy Models. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2018.
- [43] R. Kwadzogah, M. Zhou & S. Li. Model predictive control for HVAC systems — A review. *IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, pp. 442-447, 2013.
- [44] A. Afram & F. Janabi-Sharifi. Theory and applications of HVAC control systems – A review of model predictive control (MPC). *Building and Environment*, Volume 72, Pages 343-355, ISSN 0360-1323, 2014.
- [45] Ž. Stržinar, “Modeliranje in zaznavanje napak v klimatskih sistemih,” Master Thesis, University of Ljubljana, 2017.
- [46] J.-J. E. Slotine & W. Li. *Applied nonlinear control*, Vol. 199, No. 1. Prentice-Hall En-

glewood Cliffs, NJ, 1991.

- [47] R. Kalman & J. Bertram. Control system analysis and design via the second method of Lyapunov. *Trans. ASME*, 1(82), 394– 400, 1960.
- [48] A. L. Mozelli & R. M. Palhares. Less Conservative Fuzzy Control for Discrete-Time Takagi-Sugeno Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011.

Anexo A

Conjuntos Invariantes

En esta sección, se presentan los principales conceptos de la teoría de conjuntos invariantes.

A continuación, se presenta la definición de un conjunto invariante, presentada por primera vez en [24] por Blanchini;

Definición 2 [24] El conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante para el sistema $x_{k+1} = f(x_k)$ si y solo si para todo $x_k \in \Omega \rightarrow f(x_k) \in \Omega$.

Otra definición relevante es el conjunto de invariantes para el sistema en lazo cerrado, es decir, cuando un sistema es controlado por una acción de control $u = K_{x_k}$:

Definición 3 [24] El conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante para el sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ si y solo si para todo $x_k \in \Omega \rightarrow \exists u_k \in \mathbb{U} \mid f(x_k) \in \Omega$.

Las definiciones anteriores, pueden ser expresadas para un sistema sujeto a perturbaciones w_k , donde $k \in \mathbb{W}$, por lo que la definición de un conjunto robusto invariable positivamente es,

Definición 4 [24] El conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante para el sistema $x_{k+1} = f(x_k, w_k)$ si y solo si para todo $x_0 \in \Omega \forall w_k \in \mathbb{W}$, la evolución del sistema cumple $x_k \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, el conjunto ω es invariante si y solo si se cumple que:

$$x_k \in \Omega \rightarrow x_{k+1} \in \Omega, \quad \forall w_k \in \mathbb{W}. \quad (\text{A.1})$$

De la misma forma, el conjunto invariante robusto, puede ser definido como,

Definición 5 [24] El conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante para el sistema $x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$ si y solo si $0 \in \Omega \forall w_k \in \mathbb{W}$, existe $u_k \in \mathbb{U}$ tal que la evolución del sistema cumple $x_k \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, el conjunto ω es invariante si y solo si se cumple que:

$$x_k \in \Omega \rightarrow_{k \in \mathbb{U}} : x_{k+1} \in \Omega, \quad \forall w_k \in \mathbb{W}. \quad (\text{A.2})$$

Nótese que los conjuntos invariantes están relacionados con los conjuntos de niveles de Lyapunov: si V es una función de Lyapunov, sus conjuntos de niveles $\{V(x) \leq \gamma\}$ son invariantes. Además, los conjuntos invariantes robustos también están relacionados con el concepto de conjuntos invariantes concebidos como conjuntos de niveles de una función similar a la de Lyapunov [37].

Sin embargo, esos conjuntos de niveles son, en la mayoría de los casos, conservadores (ya que hay conjuntos invariantes más grandes que los, por ejemplo, conjuntos elipsoidales que surgen de las funciones cuadráticas de Lyapunov). No obstante, el cálculo exacto de los conjuntos invariantes máximos, en una región de modelización puede llevarse a cabo en el caso lineal y en el caso asintótico una aproximación interna exacta para la forma independiente de Takagi-Sugeno a través de la maximización de estos.

Anexo B

Estabilidad Lyapunov

La teoría de estabilidad es una de las propiedades más importantes que se utiliza en este documento, empleadas en el diseño de las diversas estrategias propuestas. En este apéndice, se define diversos conceptos asociadas a la estabilidad para plantear formalmente los teoremas asociados a estabilidad de Lyapunov [25, 37].

Antes de formular las características de la ecuación de Lyapunov, es necesario definir un punto de equilibrio, para esto, considere un sistema autónomo $x_{t+1} = f(x, t)$, el estado \bar{x} es un estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema, si una vez que $x(t)$ es igual a \bar{x} sigue siendo igual a \bar{x} a lo largo del tiempo. Matemáticamente, esto significa que el vector constante \bar{x} satisface:

$$0 = f(\bar{x}, t) \tag{B.1}$$

Así que, para un sistema lineal de tiempo invariante $x_{t+1} = A_t x_t$, siempre que A no sea singular; si $0 = A\bar{x}$, entonces $\bar{x} = 0$ es el punto de equilibrio único. Por otro lado, los sistemas no lineales pueden tener múltiples puntos de equilibrio aislados.

Esencialmente, la estabilidad en el sentido de Lyapunov significa que la trayectoria del sistema puede mantenerse cerca del punto de equilibrio, comenzando suficientemente cerca de él. Así que se define la estabilidad local como:

Definición 6 [46] Se dice que el estado de equilibrio $x = 0$ es estable si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $h > 0$, de tal manera que si $\|x_0\| < h$ entonces las trayectorias $\|x(t, x_0)\| < \epsilon$ para todo $k > 0$. De lo contrario, el equilibrio El punto es inestable.

Además, la estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov [46] significa que el equilibrio es estable, y además, si los estados comenzaron alrededor del punto de equilibrio, éstos van a converger hacia el punto de equilibrio cuando $k \rightarrow \infty$.

Definición 7 [46] Un punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable si es estable, y si además existe algo de $\epsilon > 0$ tal que $\|x(0)\| < \epsilon$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ como $k \rightarrow \infty$.

En cualquier sistema, un punto de equilibrio $x = 0$ es localmente asintóticamente estable, si existe una región abierta \mathbb{X} que contenga el origen y una función escalar $V(x)$ continua y diferenciable de manera que:

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad x \neq 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{dV}{dt}(x) < 0, \quad t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad (\text{B.3})$$

$$V(0) = 0 \quad (\text{B.4})$$

La función $V(x)$ se llama función Lyapunov [25].

En el caso de los sistemas de tiempo discreto, los puntos de equilibrio cumplen $\bar{x} = f(\bar{x})$, el teorema de estabilidad de Lyapunov ahora se afirma como:

Teorema 16 [47] *Un sistema de tiempo discreto $x_{k+1} = f(x_k)$ de manera que $0 = f(0)$ es localmente asintóticamente estable si existe una región abierta \mathbb{X} que contenga el origen y una función escalar continua $V(x)$ tal que:*

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad x \neq 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\Delta V(x) < 0, \quad k \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad (\text{B.6})$$

$$V(0) = 0 \quad (\text{B.7})$$

Por ejemplo, si se propone una función cuadrática $V(x) = x^T P x$ como función Lyapunov, en la que P es una matriz positiva definida, es decir, $P \succ 0$, la condición $\Delta V(x) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x^T P x < 0$ asegura la estabilidad de un sistema discreto [17].

Anexo C

Desigualdades Matriciales Lineales

En este apéndice se describe a las desigualdades matriciales lineales, para mayor información revisar [17].

Una desigualdad matricial lineal o LMI (por su nombre en inglés, *linear matrix inequality*) tiene la siguiente forma,

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (\text{C.1})$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ es la variable y $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $i = 0, \dots, m$ son matrices simétricas conocidas. El símbolo \succ en (C.1) significa que $F(x)$ es positiva definida, es decir, $u^T F(x) u > 0$ para todo los $u \in \mathbb{R}^n$ distintos de cero. Se dirá además que una LMI es no estricta si en (C.1) el símbolo es \succeq . La LMI expresada en (C.1) es equivalente al conjunto de m inecuaciones polinomiales en función de x .

La LMI (C.1) es una restricción convexa en x , es decir, el conjunto $\{x : F(x) > 0\}$ es convexo. Esta LMI puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en x , como las que surgen en la teoría del control; Lyapunov y otras.

Múltiples LMIs $F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x) > 0$ pueden ser expresadas en una sola LMI como $\mathbf{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$ y cuando se tienen desigualdades no lineales pueden ser convertidas a LMI usando el complemento de Schur, el cual se presenta a continuación.

Considere las matrices $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$ y $S(x)$ dependiente linealmente de x , el complemento de Schur establece que la desigualdad matricial lineal

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{C.2})$$

es equivalente a la desigualdad matricial (C.3) o, equivalentemente a (C.4). En otras palabras, la desigualdad no lineal (C.2) puede ser representada como una de las siguientes LMIs:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S^T(x)R^{-1}(x)S(x) > 0, \quad (\text{C.3})$$

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0. \quad (\text{C.4})$$

Anexo D

Procedimiento S

En este apéndice se describe el Procedimiento S para funciones cuadráticas con desigualdades no estrictas, y para formas cuadráticas con desigualdades estrictas, para mayor información revisar [17].

D.1. El procedimiento S para funciones cuadráticas y desigualdades no estrictas

Considere F_0, \dots, F_p funciones cuadráticas de la variable $\zeta \in \mathbb{R}^n$:

$$F_i(\zeta) = \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i, \quad i = 0, \dots, p \quad (\text{D.1})$$

donde $T_i = T_i^T$.

Luego si existen $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$ que cumplan con

$$\forall \zeta, \quad F_0(\zeta) - \sum_{i=1}^p \tau_i F_i(\zeta) \succeq 0, \quad (\text{D.2})$$

entonces se cumple para F_0, \dots, F_p que,

$$F_0(\zeta) \succeq 0, \quad \text{para todo } \zeta \text{ de tal manera que } F_i(\zeta) \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.3})$$

D.2. El procedimiento S para formas cuadráticas y desigualdades estrictas

Considere $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices simétricas. Luego si existen $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_p \geq 0$ que cumplan con

$$T_0(\zeta) - \sum_{i=1}^p \alpha_i T_i(\zeta) \succ 0, \quad (\text{D.4})$$

entonces se cumple para T_0, \dots, T_p que,

$$\zeta^T T_0 \zeta \succ 0, \quad \text{para todo } \zeta \neq 0 \text{ de tal manera que } \zeta^T T_i \zeta \succ 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{D.5})$$

Anexo E

Estabilidad de leyes de control de realimentación difusas con y sin incerteza aditiva

En este anexo se presentan las condiciones que deben cumplir leyes de realimentación difusas para estabilizar un sistema difuso con y sin incerteza aditiva.

Teorema 17 *El equilibrio del sistema difuso global (3.2) bajo una ley de control de realimentación difusa $u_k = \sum_{j=1}^L h^j K^j x_k$ del tipo PDC es asintóticamente estable si existe una matriz común P_x definida positiva tal que*

$$\left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l + B^l K^j) \right)^T P_x \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l + B^l K^j) \right) - P_x < 0. \quad (\text{E.1})$$

DEMOSTRACIÓN. Considere la función de Lyapunov cuadrática $V(x) = x^T P_x x$ con $P_x \succ 0$. $V(x)$ será una función decreciente si se cumple que:

$$\Delta V(x) = V(x^+) - V(x) < 0.$$

Luego, la función de Lyapunov será decreciente y asegura que ley de control $u_k = \sum_{j=1}^L h^j K^j x_k$ estabiliza asintóticamente al sistema (3.2). Reemplazando la dinámica del sistema difuso (3.2) y la ley de control $u_k = \sum_{j=1}^L h^j K^j x_k$ en la condición de descenso, se obtiene (E.1). ■

Teorema 18 *El equilibrio del sistema difuso global (4.4) bajo una ley de control $u_k = \sum_{j=1}^L h^j K^j x_k$ es asintóticamente estable si existe una matriz común P_x definida positiva tal que*

$$1 - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l + B^l K^j) x_k + D^l w_k \right)^T P^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l + B^l K^j) x_k + D^l w_k \right) \geq \alpha (1 - x_k^T P^{-1} x_k). \quad (\text{E.2})$$

DEMOSTRACIÓN. Para que el sistema difuso global (4.4) bajo la ley de control $u_k = \sum_{j=1}^L h^j K^j x_k$ sea asintóticamente estable para cualquier posible realización de la incerteza aditiva, se tiene

que cumplir que si $x \in \mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P^{-1} x \leq 1\}$ entonces $x^+ \in \mathcal{E}_x$. Esto es equivalente a que si $1 - x^T P_x^{-1} x \geq 0$, entonces $1 - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Phi^{lj} x + D^l w) \right)^T \times P_x^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (\Phi^{lj} x + D^l w) \right) \succeq 0$.

Luego utilizando el procedimiento S definido en [17], disponible en Anexo D, para $1 - x^T P_x^{-1} x \geq 0$ cada combinación de (l, j, a) implica una única desigualdad

$$1 - (\Phi^{lj} x + D^l w^a)^T P_x^{-1} (\Phi^{lj} x + D^l w^a) \geq \alpha_{l,j,a} (1 - x^T P_x^{-1} x), \quad (\text{E.3})$$

$$l, j = 1, \dots, L \text{ y } a = 1, \dots, v_a$$

que es una condición necesaria para la invarianza. Luego al tomar α como el mínimo valor de $\alpha_{l,j,a} \forall l, j, a$, se tiene la condición,

$$1 - \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Phi^{lj} x + D^l w^a) \right)^T P_x^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a (\Phi^{lj} x + D^l w^a) \right) \geq \alpha (1 - z^T P_z^{-1} z), \quad (\text{E.4})$$

con lo que se obtiene (E.2). ■

Anexo F

Diseño de leyes de realimentación difusas

Sistema difuso sin incerteza

Esta sección presenta el diseño de las leyes de control de realimentación difusa estabilizante para el modelo Takagi-Sugeno discreto sin incerteza aditiva (3.2) sujeto a las restricciones (3.3).

Primero, se presenta el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (3.2) usando las condiciones de estabilidad del Teorema 17. Después, se resuelve el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (3.2) y que maximiza el volumen del elipsoide invariante $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$ con $P \succ 0$ para las restricciones (3.3).

Para la condición de estabilidad (E.1) de la ley de control $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$, se multiplica a la izquierda y a la derecha por P^{-1} , se tiene que

$$\left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l X + B^l K^j X) \right)^T X^{-1} \left(\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j (A^l X + B^l K^j X) \right) X - X < 0. \quad (\text{F.1})$$

Luego, al definir nuevas variables $X = P_x^{-1}$ y $M^j = K^j P_x^{-1}$ y aplicando el complemento de Schur, se obtiene la siguiente desigualdad matricial lineal difusa:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L h^l h^j \begin{bmatrix} X & & A^l X + B^l M^j \\ X A^{lT} + M^{jT} B^{lT} & & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{F.2})$$

De esta forma, las ganancias K^j de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabilizan el sistema (3.2) deben cumplir con las relajaciones de Pólya de (F.2) para un grado de complejidad d .

Ahora para que las ganancias K^j sean tales que la ley de control difusa maximice el volumen del elipsoide $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$ con $P \succ 0$, considere que las restricciones (3.3)

bajo la ley de control difusa de realimentación son de la forma:

$$\sum_{j=1}^L h^j (F + GK^j)x \leq 1, \quad (\text{F.3})$$

o equivalentemente, bajo el cambio de variables $X = P_x^{-1}$ y $M^j = K^j P_x^{-1}$

$$\sum_{j=1}^L h^j (F + GM^j X^{-1})x \leq 1 \quad (\text{F.4})$$

Luego, bajo el procedimiento mostrado en el Teorema 4, la condición (F.4) es escrita como una desigualdad matricial lineal difusa, de la forma

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W & FX + GM^j \\ XF + M^{jT}G & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j w_{ii}^j \leq 1 \quad (\text{F.5})$$

Finalmente, el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (3.2) y que maximiza el volumen del elipsoide invariante $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x x \leq 1\}$, $P \succ 0$ para las restricciones (3.3), está dado por:

$$\begin{aligned} & \max_{X, M^j} \log \det(X) \\ & \text{s a :} \\ & \{\mathfrak{P}^d(\text{F.2}) \text{ y } \mathfrak{P}^d(\text{F.5})\} \end{aligned}$$

donde se han incluido las relajaciones de Pólya para las FLMI (F.2) y (F.5). Luego, las ganancias están dadas por $K^j = M^j X^{-1}$.

Sistema difuso con incerteza aditiva

Esta sección presenta el diseño de las leyes de control de realimentación difusa estabilizante para el modelo Takagi-Sugeno discreto con incerteza aditiva (4.1) sujeto a las restricciones (4.5).

Primero, se presenta el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (4.1) usando las condiciones de estabilidad del Teorema 18. Después, se resuelve el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (4.1) y que maximiza el volumen del elipsoide invariante $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$, $P \succ 0$ para las restricciones (4.5).

Para el diseño de la ley de control $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$, cabe destacar que la condición de estabilidad (E.2) del Teorema 18, es similar a la expresada en (4.17). Luego, utilizando los mismos desarrollos que en el Teorema 10, es posible demostrar que la condición es equivalente

a:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} P_x & (A^l + B^l K^j) P_x & D^l w^a \\ P_x (A^l + B^l K^j)^T & \alpha P_x & 0 \\ w^{aT} D^{lT} & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (\text{F.6})$$

y reemplazando con $K^j = Y^j P^{-1}$, se tiene que:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \sum_{a=1}^{v_a} h^l h^j h^a \begin{bmatrix} P_x & A^l P_x + B^l Y^j & D^l w^a \\ P A^{lT} + Y^{jT} B^{lT} & \alpha P_x & 0 \\ w^{aT} D^{lT} & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (\text{F.7})$$

De esta forma, las ganancias K^j de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabilizan el sistema (4.1) deben cumplir con las relajaciones de Pólya de (F.7) para un grado de complejidad d .

Ahora para que las ganancias K^j sean tales que la ley de control difusa maximice el volumen del elipsoide $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$ con $P \succ 0$, considere que las restricciones (4.5) bajo la ley de control difusa de realimentación son de la forma:

$$F x + G u \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^L h^j (F + G K^j) x \leq 1, \quad (\text{F.8})$$

luego, las restricciones (F.8) pueden ser expresadas como una desigualdad matricial lineal difusa, de acuerdo al desarrollo que se presentó en el Teorema 4, obteniendo:

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W & [F + G K^j] P_x \\ P_x [F + G K^j]^T & P_x \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j w_{ii}^j \leq 1, \quad (\text{F.9})$$

reemplazando con $K^j = Y^j P^{-1}$,

$$\sum_{j=1}^L h^j \begin{bmatrix} W & F P_x + G Y^j \\ P_x F^T + Y^{jT} G^T & P_x \end{bmatrix} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^L h^j w_{ii}^j \leq 1. \quad (\text{F.10})$$

Finalmente, el problema de diseñar de la ley de control difusa $u = \sum_{j=1}^L h^j K^j x$ que estabiliza el sistema (4.1) y que maximiza el volumen del elipsoide invariante $\mathcal{E}_x = \{x \mid x^T P_x^{-1} x \leq 1\}$, $P \succ 0$ para las restricciones (4.5) para un $\alpha > 0$, esta dado por:

$$\max_{P_x, Y^j} \log \det(P_x)$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(\text{F.7}) \text{ y } \mathcal{P}^d(\text{F.5})\}$$

donde se han incluido las relajaciones de Pólya para las FLMI's (F.7) y (F.10). Luego, las ganancias están dadas por $K^j = Y^j P_x^{-1}$.

Anexo G

Algoritmos de control predictivo con dinámica optimizada para modelos difusos Takagi-Sugeno con y sin incerteza aditiva

G.1. MPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno

Algorithm 9: MPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KD-LND con compensación distribuida en paralelo para sistemas difusos sin incerteza aditiva (DOPDC).

Etapas Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar las ganancias K^j de la ley de control base difusa para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 17.
3. Diseñar M^l , L y P_z con el cambio de variable (3.70) al resolver

$$(X^*, Y^*, H^{j*}, T^*, \Upsilon^*) = \underset{X, Y, H^j, T, \Upsilon}{\operatorname{argmax}} \log \det(Y)$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(3.68) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.69)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(3.72)$.

Etapas Online:

while $k > 0$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ sujeto a que $z_{k|k} \in \mathcal{E}_z$.
 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L (K^j x_k + L v_k^*)$
 4. Actualizar, $k = k + 1$
-

Algorithm 10: MPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KND-LD con compensación distribuida en paralelo para sistemas difusos sin incerteza aditiva (DOPDC).

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar la ganancia K de la ley de control base para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 17.
3. Diseñar M^l , L^j y P_z con el cambio de variable (3.77) al resolver

$$(X^*, Y^*, H^{l*}, T^{j*}, \Upsilon^*) = \underset{X, Y, H^l, T^j, \Upsilon}{\operatorname{argmax}} \log \det(Y)$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(3.75) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.76)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(3.79)$.

Etapa Online:

while $k > \theta$ **do**

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Medir (o estimar) x_k 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k k}^T \mathcal{W} z_{k k}$ sujeto a que $z_{k k} \in \mathcal{E}_z$. 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L (K x_k + L^j v_k^*)$ 4. Actualizar, $k = k + 1$ |
|--|

Algorithm 11: MPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KND-LND con compensación distribuida en paralelo para sistemas difusos sin incerteza aditiva (DOPDC).

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar la ganancia K de la ley de control base para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 17.
3. Diseñar M^l , L y P_z con el cambio de variable (3.85) al resolver

$$(X^*, Y^*, H^{l*}, T^*, \Upsilon^*) = \underset{X, Y, H^l, T, \Upsilon}{\operatorname{argmax}} \log \det(Y)$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(3.83) \text{ y } \mathcal{P}^d(3.84)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(3.87)$.

Etapa Online:

while $k > \theta$ **do**

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Medir (o estimar) x_k 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k k}^T \mathcal{W} z_{k k}$ sujeto a que $z_{k k} \in \mathcal{E}_z$. 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = K x_k + L v_k^*$ 4. Actualizar, $k = k + 1$ |
|---|

G.2. RMPC con dinámica optimizada para sistemas difusos Takagi-Sugeno con incerteza aditiva

Algorithm 12: RMPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KD-LND con compensación distribuida en paralelo para sistemas difusos con incerteza aditiva (DOPDC-I).

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar las ganancias K^j de la ley de control base difusa para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 18.
3. Diseñar M^{lj} , L , S^l y P_z con el cambio de variable (4.54) al resolver

$$(\mathcal{Y}^*, \mathcal{W}^*, Z^*, \tilde{S}^{d*}, \tilde{L}^*, \Gamma^{lj*}, \alpha^*) = \underset{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}, \Gamma^{lj}, \alpha}{\operatorname{argmax}} \log \det(\mathcal{W})$$

$$\{\mathcal{P}^d(4.55) \text{ y } \mathcal{P}^d(4.56)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(4.59)$.

Etapa Online:

while $k > 0$ **do**

- | |
|--|
| 1. Medir (o estimar) x_k |
| 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k k}^T \mathcal{W} z_{k k}$ sujeto a que $z_{k k} \in \mathcal{E}_z$. |
| 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K^j x_k + L v_k^*)$ |
| 4. Actualizar, $k = k + 1$ |
-

Algorithm 13: RMPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KND-LD con compensación distribuida en paralelo para sistemas difusos con incerteza aditiva (DOPDC-I).

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar la ganancia K de la ley de control base para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 18.
3. Diseñar M^{lj} , L^j , S^l y P_z con el cambio de variable (4.63) al resolver

$$(\mathcal{Y}^*, \mathcal{W}^*, Z^*, \tilde{S}^{l*}, \tilde{L}^{l*}, \Gamma^{lj*}, \alpha^*) = \underset{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}^l, \tilde{L}^l, \Gamma^{lj}, \alpha}{\operatorname{argmax}} \log \det(\mathcal{W})$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(4.64) \text{ y } \mathcal{P}^d(4.65)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(4.68)$.

Etapa Online:

while $k > \theta$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ sujeto a que $z_{k|k} \in \mathcal{E}_z$.
 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = \sum_{j=1}^L h^j (K x_k + L^j v_k^*)$
 4. Actualizar, $k = k + 1$
-

Algorithm 14: RMPC con dinámica optimizada con una ley de control predicha KND-LND para sistemas difusos con incerteza aditiva (DO-I).

Etapa Offline:

1. Definir grado de complejidad d para la relajación de Pólya de las FLMI.
2. Diseñar la ganancia K de la ley de control base para sea óptima en algún sentido tal que cumpla el Teorema 18.
3. Diseñar M^l , L , S^l y P_z con el cambio de variable (4.73) al resolver

$$(\mathcal{Y}^*, \mathcal{W}^*, Z^*, \tilde{S}^*, \tilde{L}^*, \Gamma^*, \alpha^*) = \underset{\mathcal{Y}, \mathcal{W}, Z, \tilde{S}, \tilde{L}, \Gamma, \alpha}{\operatorname{argmax}} \log \det(\mathcal{W})$$

s a :

$$\{\mathcal{P}^d(4.74) \text{ y } (4.75)\}$$

4. Diseñar \mathcal{W} tal que cumpla $\mathcal{P}^d(4.78)$.

Etapa Online:

while $k > \theta$ **do**

1. Medir (o estimar) x_k
 2. Obtener v_k^* al minimizar $z_{k|k}^T \mathcal{W} z_{k|k}$ sujeto a que $z_{k|k} \in \mathcal{E}_z$.
 3. Aplicar la acción de control $u_k(x_k) = K x_k + L v_k^*$
 4. Actualizar, $k = k + 1$
-