DIFERENCIABILIDAD DE LA EQUIVALENCIA TOPOLÓGICA NO AUTÓNOMA

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Néstor Jara Lagos

Noviembre 2021

Director de Tesis: **Dr. Álvaro Castañeda**

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Néstor Jara Lagos

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 27 de Diciembre de 2021.

Director de Tesis

Dr. Álvaro Castañeda ____

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Gonzalo Robledo ____

Dra. Nelda Jaque ____

DEDICATORIA

A mi hermana, por ayudarme a ser mejor.

BIOGRAFÍA

Nací el 11 de marzo de 1995, en Santiago. Desde temprana edad tuve un buen rendimiento en matemáticas, pero no fue hasta la enseñanza media en que, al enfrentarme a los desafíos del CMAT, descubrí que esta me resultaba intrigante y apasionante. Durante esos años descubrí que también disfrutaba de enseñar tanto como de aprender.

Inicié mi formación profesional el año 2013 al ingresar a la Pedagogía en Física y Matemáticas en la Facultad de Ciencias, trasladandome posteriormente a la Facultad de Filosofía. Durante ese tiempo, gracias a la guía de un docente del Departamento de Matemáticas y al apoyo continuo de mi familia, cursé varios ramos matemáticos extra. Esto me permitió que, una vez completada mi formación pedagógica, ingresé y egresé de la Licenciatura en Matemáticas en el año 2019, y al año siguiente me matriculé en el programa de Magister.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres y mis abuelos, por enseñarme e inspirarme. A mi hermana, por mantener la vara tan alta y poner mi próximo escalón siempre más arriba.

A mi profesora Angélica Hermosilla, por darme confianza desde que entré a una sala de clases. A mi profesor Juan Carlos Muñoz, quien estuvo conmigo en mis primeros campeonatos de matemáticas y gritó como un gol de la selección mi primera medalla.

Al profesor Patricio Gonzalez, quien me convenció de estudiar más matemática, me incitó a elegir los cursos apropiados mientras estudiaba pedagogía y no se rindió hasta saber que estaba matriculado en la Licenciatura en Matemáticas.

A mi Director de Tesis Álvaro Castañeda, por ayudarme a entender el problema que resolvemos hoy, abriendo de paso las puertas a un aspecto de la matemática que no conocía y por sobre todo a enseñarme cómo investigar. A los profesores Marius Mantoiu y Gonzalo Robledo, con quienes pasé muchas horas alfabetizandome en matemática, entendiendo cuánto no entendía y cuánto más hay por saber.

Finalmente, agradezco a la Universidad de Chile, por darme las oportunidades de estudiar y a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo, por becarme y financiar mis estudios.

RESUMEN

Gracias al trabajo de K. J. Palmer, conocemos condiciones suficientes para construir un homeomorfismo de equivalencia topológico entre dos sistemas diferenciales no autónomos, uno lineal y una perturbación no lineal de este. Este resultado ha sido generalizado en muchas direcciones, admitiendo dicotomías más generales y condiciones menos restrictivas sobre la perturbación no lineal. En esta tesis presentamos una familia de dicotomías y perturbaciones sobre $\mathbb{R}^+$ que nos permite garantizar que dicho homeomorfismo es de hecho un difeomorfismo de clase C^1 o de clase C^2. Nuestra familia de condiciones incluye tanto a la dicotomía exponencial como a la dicotomía exponencial no uniforme.

Posteriormente, estudiamos los análogos a estos resultados en el contexto de ecuaciones en diferencia, es decir, estudiamos dicotomías y perturbaciones no lineales sobre $\mathbb{Z}^+$ de modo que el sistema lineal y su perturbación sean topológicamente equivalentes y el homeomorfismo que dicte dicha equivalencia sea un difeomorfismo de clase C^1 o C^2. Tanto en el caso continuo como en el discreto, logramos este objetivo sin recurrir a condiciones espectrales sobre los sistemas. Finalmente, entregamos una propuesta de cómo generalizar estos resultados a derivadas de orden superior.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Revisión Histórica

El concepto de equivalencia topológica entre dos sistemas, lineal y no lineal, ha jugado un importante rol en el estudio de ecuaciones diferenciales, principalmente, debido a la dificultad que en general se presenta al buscar soluciones analíticas para ellas. Ha mostrado ser más fructifero estudiar un sistema lineal y más simple, desde el cual obtener información que pueda ser llevada a un sistema no lineal. Algunas propiedades que se pueden obtener son la búsqueda de soluciones acotadas y la caracterización de su comportamiento asintótico. El método consiste en establecer una correspondencia continua entre las soluciones de ambos sistemas.

El problema de linearización del flujo de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas empezó en la década de 1960, con el clásico teorema de P. Hartman [21], el cual asegura la existencia de un homeomorfismo local entre un sistema no lineal y su linealización alrededor de un punto fijo, bajo la suposición de que el sistema satisface una condición de hiperbolicidad. Durante la siguiente década, el resultado fue generalizado a la construcción de un homeomorfismo global, gracias a C. Pugh [34] y A. Reinfelds [37].

En 1973, K.J. Palmer [26] fue el primero en generalizar el resultado de P. Hartman hacia el marco no autónomo, es decir, estableció una correspondencia continua entre las soluciones de una ecuación lineal no autónoma y una perturbación no autónoma de ella. Para esto, empleó un concepto que generalizaría al de la hiperbolicidad y representaría una importante revolución en el estudio de ecuaciones no lineales: las dicotomías.

El homeomorfismo que obtuvo K.J. Palmer, con sus propiedades, se conoce como el concepto de equivalencia topológica o conjugación topológica, lo cual es una útil herramienta para describir el comportamiento asintótico de soluciones, incluso cuando pueden ser desconocidas, por ejemplo, para encontrar atractores locales o glocales, o de manera más general, variedades estables e inestables. Sin embargo, hay más propiedades dinámicas que no pueden ser descritas con herramientas puramente topológicas y por ello requieren el estudio de la diferenciabilidad de dichos homeomorfismos.

Contemporáneamente a K. J. Palmer, ya se estaba desarrollando la teoría análoga en el marco discreto (referimos al lector a C. Coffman [13]). Estas contribuciones fueron retomadas a fines de los 80's e inicios de los 90's, momento en el cual el trabajo de G. Papaschinopoulos ([28], [29], [30], [31]) fue prominente y ayudó a caracterizar dicotomías y comportamiento asintótico de soluciones. Actualmente, J. Chu [12] ha desarrollado herramientas para estudiar qué tipo de perturbaciones pueden ser aplicadas a un sistema lineal. Referimos al lector al trabajo de S. Elaydi [19], quien ha escrito un libro describiendo una exhaustiva introducción a las ecuaciones en diferencias.

En la década de 1990, varios autores volvieron a estudiar el problema de K. J. Palmer en su version continua, admitiendo cada vez más amplias hipótesis. Entre ellos destacamos las contribuciones de Z. Lin y Y-X. Lin [24], L. Jiang [22] y J.L. Shi y K.Q. Xiong [39] (destacamos que todos los autores recién mencionados son miembros de la Universidad de Fuzhou, China). También remarcamos a L. Barreira y C. Valls ([4], [5], [6]), quienes a inicios de los años 2000 extendieron la familia de dicotomías, introduciendo el concepto de dicotomía no uniforme. Durantes la décadas siguientes estos conceptos han sido usados por varios autores, tanto en el marco discreto [15], como en el continuo [7], e incluso en contextos integrados, como son las ecuaciones impulsivas [20].

El estudio de la suavidad del homeomorfismo de equivalencia topológica ha sido un problema con vasto análisis tanto en el ámbito autónomo como en el no autónomo. En el marco autónomo, S. Sternberg [40, 41] demostró que el sistema dinámico dado por un difeomorfismo de clase C^r puede ser C^k-linelizado localmente alrededor de puntos fijos hiperbólicos que satisfacen una condición de no resonancia sobre su espectro. Estos resultados fueron mejorados luego por G. R. Belickiĭ [2, 3], aún localmente, pero dando condiciones más explíciticas sobre las derivadas de la conjugación. S. van Strein [42] fue el primero en obtener un resultado similar sin imponer condiciones de no resonancia, pero su demostración, tal como lo mostró V. Rayskin [35], resultó ser erronea.

Hasta donde hemos podido investigar, el estudio de la diferenciabilidad de la conjugación topológica entre un sistema lineal y uno quasi lineal no autonomo, fue atendido por primera vez en 2015 gracias al trabajo [11] de Á. Castañeda y G. Robledo, quienes aseguraron que dicho homeomorfismo es un difeomorfismo de clase C^2 que preserva orientación si el sistema lineal es exponencialmente asintóticamente estable en $\mathbb{R}$ y verifica ciertas condiciones técnicas. Este resultado fue mejorado posteriormente en [8] para incluir razones de decaimiento más generales que la exponencial, pero restringiendose a $\mathbb{R}^+$. En estos resultados los autores pudieron construir un difeomorfismo global, en el mismo estilo que K. J. Palmer.

L. V. Cuong *et. al.* [16] obtuvo un resultado de linealización suave en un estilo similar a S. Sternberg, cuando la parte lineal admite una dicotomía exponencial en toda la linea real, aún considerando una condición relacionada al espectro de Sacker–Sell; para más detalles en el espectro mencionado referimos al lector a [38] y [23, Chapter 5]. Recientemente, D. Dragičević *et. al.* [18] han mostrado que la afirmación de van Strein [42] (respecto a la existencia de una conjugación topológica suave sin condiciones espectrales, para el caso autónomo) era correcta y además, la han extendido al caso no autónomo, simultaneamente, mejorando el resultado de Cuong, bajo la suposición de que el sistema lineal satisface una hiperbolicidad no uniforme y otras condiciones técnicas, las cuales no incluyen condiciones de no resonancia, pero sí imponen cotas espectrales. En [17], los mismos autores investigaron una linealización suave de clase C^1 en el marco discreto, asumiendo una dicotomía exponencial fuerte no uniforme en la parte lineal. La idea principal en ese trabajo es convertir la parte lineal del sistema no autónomo a un sistema lineal para obtener cotas espectrales sobre la linealización de clase C^1 para la ecuación en diferencia no autónoma.

En esta tesis, desarrollamos ideas que guardan gran similitud con el trabajo de Á. Castañeda, P. Monzón and G. Robledo [10], pues en ambos se estudia la equivalencia de un sistema lineal y uno cuasi lineal en el semi eje real positivo. Aquí se mejora el resultado mencionado en dos sentidos: primero presentamos una familia más amplia de dicotomías aceptadas para el sistema lineal, incluyendo tanto la exponencial y exponencial no uniforme bajo ciertas condiciones técnicas, que serán expresadas más tarde. En segundo lugar, admitimos la existencia de variedades inestables no vacías para el sistema lineal. No imponemos condiciones de no resonancia o cotas espectrales, sino que sólo nos basamos en la combinación de las propiedades de hiperbolicidad no autónoma de la parte lineal y la Lipschitzianidad y dominación de las no linealidades. De todos modos, cabe mencionar que este trabajo no estudia la continuidad del homeomorfismo como una función de dos variables, una propiedad que Á. Castañeda *et al.* llamaron equivalencia topológica continua [10, Definition 1.4]. Tampoco obtenemos una equivalencia topológica fuerte, lo cual es una caracterización introducida por Shi [39, Definition 2.4], y corresponde a la continuidad uniforme del homeomorfismo, resultado que también fue obtenido en [10, Theorem

2.1]. No obstante, como un subproducto de la existencia de una cota uniforme para la derivada del homeomorfismo en cada tiempo fijo, obtenemos una versión más debil de esto.

De la misma manera, este trabajo tiene bases en la versión discreta de estos resultados realizada en [9]. La principal diferencia entre este trabajo y [9], en términos de la diferenciabilidad, es que permitimos la existencia de variedades inestables no vacías para el sistema lineal.

1.2. Teorema de Linealización de Palmer

Para estudiar el problema de linealización continua en el marco no autónomo, consideremos el siguiente par de sistemas continuos:

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{x} \tag{1.1}$$

y

$$\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{f}(t, \mathfrak{y}), \tag{1.2}$$

donde $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ y $t \mapsto \mathfrak{A}(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ es un mapeo matricial continuo sobre toda la recta real y $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continua.

Antes de continuar, fijemos las notaciones que utilizaremos a lo largo de este trabajo:

Notación 1.2.1. *Denotaremos:*

- $|x|$*, la norma euclideana para un vector* $x \in \mathbb{R}^d$.
- $\|A\|$*, la norma de una matriz* $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ *actuando sobre el espacio de Hilbert* $\mathbb{R}^d$.
- $\|g\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{R}^+} |g(s)|$*, la norma del supremo para una función real acotada.*
- $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^+} |g(s)|ds$*, la norma 1 para una función absolutamente integrable.*
- $\|r\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |r_j|$*, la norma del supremo para una sucesión acotada.*
- $\|r\|_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |r_j|$*, la norma 1 para una sucesión absolutamente sumable.*
- $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

Para imitar la condición de hiperbolicidad del marco autónomo, necesitamos un concepto que establezca la existencia de variedades estables e inestables asociadas a las soluciones del sistema lineal no autónomo, es decir, una *dicotomía* de soluciones.

Definición 1.2.2. *Diremos que la ecuación (1.1) admite una dicotomía exponencial sobre el intervalo* $J \subset \mathbb{R}$*, si para una matriz fundamental* $\mathfrak{X}(t)$ *existen constantes* $\mathfrak{K}, \mathfrak{a} > 0$ *y una proyección* $\mathfrak{P}$ *tales que*

$$\begin{aligned} \left\|\mathfrak{X}(t)\mathfrak{P}\mathfrak{X}^{-1}(s)\right\| &\leq \mathfrak{K}e^{-\mathfrak{a}(t-s)} \text{ , para } s \leq t, \text{ con } s,t \in J \\ \left\|\mathfrak{X}(t)(I-\mathfrak{P})\mathfrak{X}^{-1}(s)\right\| &\leq \mathfrak{K}e^{-\mathfrak{a}(s-t)} \text{ , para } t \leq s, \text{ con } s,t \in J. \end{aligned} \tag{1.3}$$

El concepto de dicotomía exponencial apareció por primera vez en 1930 gracias al trabajo de O. Perron [32], pero no fue hasta 1973 en que K.J. Palmer publicó por primera vez un resultado que establecía una correspondencia de soluciones de (1.1) y (1.2). K.J Palmer desarrolló su argumento a través de los resultados que estudiamos a continuación.

Observación 1.2.3. *En los siguientes resultados, asociados al trabajo de K.J. Palmer [26], el intervalo de definición de la dicotomía siempre será* $J = \mathbb{R}$.

Lema 1.2.4. *Suponga el sistema (1.1) tiene una dicotomía exponencial como en (1.3). Sea* $\mathfrak{h} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*, una función continua para la cual existen* $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} > 0$ *tales que:*

$$|\mathfrak{h}(t, \mathfrak{y}, \eta)| \leq \mathfrak{u}$$

y

$$|\mathfrak{h}(t, \mathfrak{y}_1, \eta) - \mathfrak{h}(t, \mathfrak{y}_2, \eta)| \leq \mathfrak{v}|\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2|,$$

para todos $t \in \mathbb{R}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \eta \in \mathbb{R}^d$*. Entonces, si* $2\mathfrak{v}\mathfrak{K} \leq \mathfrak{a}$*, la ecuación diferencial*

$$\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{h}(t, \mathfrak{y}, \eta) \tag{1.4}$$

tiene, para cada $\eta \in \mathbb{R}^d$*, una única solución acotada* $\mathfrak{y}(t) = \chi(t, \eta)$*. Más aún,* $\chi(t, \eta)$ *es continua en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *y* $|\chi(t, \eta)| \leq 2\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$*.*

Demostración. Sea $\eta \in \mathbb{R}^d$ fijo. Sea $\mathfrak{T}$ la transformación que toma funciones acotadas y continuas y las lleva a funciones continuas dada por:

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{y})(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{X}(t)\mathfrak{P}\mathfrak{X}^{-1}(s)\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}(s), \eta)ds - \int_{t}^{\infty} \mathfrak{X}(t)(I - \mathfrak{P})\mathfrak{X}^{-1}(s)\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}(s), \eta)ds.$$

Es continua, pues como $\mathfrak{h}$ es continua y acotada, basta con aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Por simple diferenciación podemos notar que

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{T}(\mathfrak{y})(t) = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{T}(\mathfrak{y}) + \mathfrak{h}(t, \mathfrak{y}, \eta).$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}(\mathfrak{y})(t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} \left\| \mathfrak{X}(t)\mathfrak{P}\mathfrak{X}^{-1}(s) \right\| |\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}(s), \eta)|ds \\
&\quad + \int_{t}^{\infty} \left\| \mathfrak{X}(t)(I - \mathfrak{P})\mathfrak{X}^{-1}(s) \right\| |\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}(s), \eta)|ds \\
&\leq \mathfrak{u}\mathfrak{K} \left(\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathfrak{a}(t-s)}ds + \int_{t}^{\infty} e^{-\mathfrak{a}(s-t)}ds \right) \leq 2\mathfrak{u}\mathfrak{K}\mathfrak{a}^{-1},
\end{aligned}$$

por lo que la transformación es acotada, es decir, el espacio de funciones continuas y acotadas es un invariante de $\mathfrak{T}$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}(\mathfrak{y}_1)(t) - \mathfrak{T}(\mathfrak{y}_2)(t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} \left\| \mathfrak{X}(t)\mathfrak{P}\mathfrak{X}^{-1}(s) \right\| |\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}_1(s), \eta) - \mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}_2(s), \eta)|ds \\
&\quad + \int_{t}^{\infty} \left\| \mathfrak{X}(t)(I - \mathfrak{P})\mathfrak{X}^{-1}(s) \right\| |\mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}_1(s), \eta) - \mathfrak{h}(s, \mathfrak{y}_2(s), \eta)|ds \\
&\leq \mathfrak{v}\mathfrak{K} \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathfrak{a}(t-s)}|\mathfrak{y}_1(s) - \mathfrak{y}_2(s)|ds \\
&\quad + \mathfrak{v}\mathfrak{K} \int_{t}^{\infty} e^{-\mathfrak{a}(s-t)}|\mathfrak{y}_1(s) - \mathfrak{y}_2(s)|ds \\
&\leq 2\mathfrak{K}\mathfrak{v}\mathfrak{a}^{-1} \|\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2\|_\infty < \|\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

Como t fue escogido de manera arbitraria, tenemos $\left\|\mathfrak{T}(\mathfrak{y}_1)-\mathfrak{T}(\mathfrak{y}_2)\right\|_\infty < \|\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_2\|_\infty$, es decir, hemos mostrado que $\mathfrak{T}$ es contractiva. Por el Teorema del punto fijo de Banach concluimos que tiene un único punto fijo, es decir, existe una única función $t \mapsto \mathfrak{y}(t)$ acotada tal que $\mathfrak{T}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y}$ y por tanto $\mathfrak{y}(t) = \chi(t, \eta)$ es solución de (1.4) y cumple con la cota establecida. Además, el Teorema de convergencia dominada nos entrega la continuidad.

■

Lema 1.2.5. *Suponga que el sistema (1.1) tiene una dicotomía exponencial como en (1.3) y que* $\mathfrak{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *es una función continua que satisface:*

$$|\mathfrak{f}(t, \mathfrak{x})| \leq \mathfrak{u}$$

y

$$|\mathfrak{f}(t, \mathfrak{x}_1) - \mathfrak{f}(t, \mathfrak{x}_2)| \leq \mathfrak{v}|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|$$

para todos $t \in \mathbb{R}, \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \mathbb{R}^d$. *Suponga que* $\mathfrak{g}$ *es otra función que satisface las mismas condiciones de* $\mathfrak{f}$. *Entonces, si* $4\mathfrak{v}\mathfrak{K} \leq \mathfrak{a}$, *existe una única función continua* $\mathfrak{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *que satisface:*

i) Si $\mathfrak{x}(t)$ *es una solución de (1.2), entonces* $\mathfrak{H}[t, \mathfrak{x}(t)]$ *es solución de la ecuación diferencial:*

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{x} + \mathfrak{g}(t, \mathfrak{x}). \tag{1.5}$$

ii) Para todo $(t, \mathfrak{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *se tiene* $|\mathfrak{H}(t, \mathfrak{x}) - \mathfrak{x}| \leq 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$.

Demostración. Denotemos $\mathfrak{x}(t, \tau, \xi)$ la única solución de (1.2) tal que $\mathfrak{x}(\tau) = \xi$. Definamos

$$\mathfrak{h}(t, \mathfrak{z}, (\tau, \xi)) = \mathfrak{g}[t, \mathfrak{x}(t, \tau, \xi) + \mathfrak{z}] - \mathfrak{f}[t, \mathfrak{x}(t, \tau, \xi)],$$

luego, $\mathfrak{h}$ es continua y satisface:

$$|\mathfrak{h}(t, \mathfrak{z}, (\tau, \xi))| \leq 2\mathfrak{u}$$

y

$$|\mathfrak{h}(t, \mathfrak{z}_1, (\tau, \xi)) - \mathfrak{h}(t, \mathfrak{z}_2, (\tau, \xi))| \leq \mathfrak{v}|\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|,$$

para todos $t \in \mathbb{R}, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{R}^d, (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Se sigue del Lema 1.2.4 que la ecuación diferencial

$$\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z} + \mathfrak{h}(t, \mathfrak{z}, (\tau, \xi)) \tag{1.6}$$

tiene para cada (τ, ξ) una única solución acotada $\mathfrak{z}(t) = \chi(t, (\tau, \xi))$. Más aún, χ es continua y

$$|\chi(t, (\tau, \xi))| \leq 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$$

de manera uniforme. Definimos $\mathfrak{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ por:

$$\mathfrak{H}(\tau, \xi) = \xi + \chi(\tau, (\tau, \xi)),$$

entonces $\mathfrak{H}$ es continua en todo su dominio, pues χ lo es por el Lema anterior, y

$$|\mathfrak{H}(\tau, \xi) - \xi| \leq 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}.$$

Ahora, sea $\mathfrak{x}(t)$ una solución de (1.2). Luego:

$$\mathfrak{H}[t, \mathfrak{x}(t)] = \mathfrak{x}(t) + \chi(t, (t, \mathfrak{x}(t))),$$

donde $\chi(s, (t, \mathfrak{x}(t)))$ es la única solución acotada a la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds} = \mathfrak{A}(s)\mathfrak{z} + \mathfrak{h}[s, \mathfrak{z}, (t, \mathfrak{x}(t))],$$

pero por la forma en que se define $\mathfrak{h}$ tenemos

$$\mathfrak{h}[s,\mathfrak{z},(t,\mathfrak{x}(t))] = \mathfrak{h}[s,\mathfrak{z},(0,\mathfrak{x}(0))],$$

pues $\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{x}(t)) = \mathfrak{x}(s,0,\mathfrak{x}(0))$, por la unicidad de las soluciones de (1.2). Por lo tanto

$$\chi(s,(t,\mathfrak{x}(t))) = \chi(s,(0,\mathfrak{x}(0))),$$

para todo s. En particular

$$\chi(t,(t,\mathfrak{x}(t))) = \chi(s,(0,\mathfrak{x}(0))),$$

es decir

$$\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)] = \mathfrak{x}(t) + \chi(t,(0,\mathfrak{x}(0))),$$

así, por simple diferenciación se concluye que $\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)]$ es una solución de (1.5).

En resumen, $\mathfrak{H}$ satisface las condiciones i) y ii). Suponga que existe otro mapeo $\mathfrak{I}(t,x)$ que satisface i) y ii). Entonces, para todo τ y ξ, $\mathfrak{I}[t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi)]$ es una solución de (1.5). Denotemos $\mathfrak{z}(t) = \mathfrak{I}[t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi)] - \mathfrak{x}(t,\tau,\xi)$. Derivando obtenemos que $\mathfrak{z}(t)$ es solución de (1.6). Más aún, $\mathfrak{z}(t)$ es acotada pues $\mathfrak{I}$ satisface ii). Entonces, por la unicidad de soluciones acotadas de (1.6) debemos tener $\mathfrak{z}(t) = \chi(t,(\tau,\xi))$. Por tanto, para todo τ y ξ tenemos

$$\mathfrak{I}[t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi)] = \mathfrak{x}(t,\tau,\xi) + \chi(t,(\tau,\xi)).$$

Tomando $t=\tau$ se obtiene

$$\mathfrak{I}(t,\xi) = \xi + \chi(\tau,(\tau,\xi)) = H(\tau,\xi),$$

de donde se obtiene la unicidad de $\mathfrak{H}$ y concluimos la demostración del lema. ■

Teorema 1.2.6. *[26, Teorema p. 754] Suponga que el sistema (1.1) tiene una dicotomía exponencial como en (1.3) y que $\mathfrak{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ es una función continua que satisface:*

$$|\mathfrak{f}(t,\mathfrak{x})| \le \mathfrak{u}$$

y

$$|\mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}_1) - \mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}_2)| \le \mathfrak{v}|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|,$$

para todos $t\in\mathbb{R},\mathfrak{x},\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2\in\mathbb{R}^d$. Entonces, si $4\mathfrak{v}\mathfrak{K}\le\mathfrak{a}$, existe un único mapeo continuo $\mathfrak{H}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ que satisface

- *i) Si $\mathfrak{x}(t)$ es una solución de (1.2), entonces $\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)]$ es solución de (1.1).*
- *ii) Para todo $(t,\mathfrak{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ se tiene $|\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})-\mathfrak{x}|\le 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$.*
- *iii) Para cada $t\in\mathbb{R}$ fijo, el mapeo $\mathfrak{H}(t,\cdot)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Aplicando el Lema 1.2.5 con $\mathfrak{g}(t,\mathfrak{x})=0$, es claro que la ecuación (1.5) se transforma en (1.1) y tenemos que existe un único mapeo continuo $\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})$ tal que:

- i) Si $\mathfrak{x}(t)$ es solución de (1.2), entonces $\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)]$ es solución de (1.1),
- ii) Para todo $(t,\mathfrak{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ se tiene $|\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})-\mathfrak{x}|\le 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$.

Por otra parte, reemplazando todas las $\mathfrak{f}$ por 0, tomando $\mathfrak{g}$ como la $\mathfrak{f}$ original y aplicando nuevamente el Lema, se tiene que existe un único mapeo continuo $\mathfrak{G}(t,\mathfrak{x})$ tal que:

- iii) Si $\mathfrak{y}(t)$ es solución de (1.1), entonces $\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t)]$ es solución de (1.2).

iv) Para todo $(t,\mathfrak{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ se tiene$|\mathfrak{G}(t,\mathfrak{x})-\mathfrak{x}| \leq 4\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}$.

Definiendo $\mathfrak{L}(t,\mathfrak{x}) = \mathfrak{G}[t,\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})]$. Si $\mathfrak{x}(t)$ es solución de (1.2), entonces $\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)]$ es solución de (1.1), por lo que $\mathfrak{G}[t,\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t)]]$, *i.e.*, $\mathfrak{L}[t,\mathfrak{x}(t)]$, es una solución de (1.2). Además

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{L}(t,\mathfrak{x})-\mathfrak{x}| &= |\mathfrak{G}[t,\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})]-\mathfrak{x}| \\
&\leq |\mathfrak{G}[t,\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})]-\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})| + |\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})-\mathfrak{x}| \\
&\leq 8\mathfrak{K}\mathfrak{u}\mathfrak{a}^{-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, en tomando $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}$ y aplicando una vez mas el Lema 1.2.5, encontramos que $\mathfrak{M}(t,\mathfrak{x}) := \mathfrak{x}$ debe ser el único mapeo que satisface i) y ii), pero hemos mostrado que $\mathfrak{L}(t,\mathfrak{x})$ satisface i) y ii) cuando $\mathfrak{f}=\mathfrak{g}$, por lo que debemos tener $\mathfrak{L}(t,\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$. Por tanto

$$\mathfrak{G}[t,\mathfrak{H}(t,\mathfrak{x})] = \mathfrak{x},$$

para todos $t\in\mathbb{R}$ y $x\in\mathbb{R}^d$. Un argumento similar demuestra que

$$\mathfrak{H}[t,\mathfrak{G}(t,\mathfrak{x})] = \mathfrak{x},$$

es decir, $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{G}$ son inversas una de la otra para cualquier t fijo y son ambas homeomorfismos. Esto concluye la demostración del teorema. ■

Observación 1.2.7. *Usualmente una dicotomía exponencial representa hipótesis muy restrictivas, por lo que durante la siguiente década el mismo autor generalizó en [25], [27] su resultado a una más amplia familia de dicotomías y perturbaciones.*

Capítulo 2

LINEALIZACIÓN EN EL CONTEXTO CONTINUO

2.1. Equivalencia Topológica

En este capítulo buscamos reconstruir los resultados de [8], bajo hipótesis más débiles, es decir, reemplazando la contracción por una dicotomía con proyector distinto a la identidad, lo que significará que tendremos una variedad inestable de soluciones no vacía. Para ello basaremos nuestra estrategia en los trabajos [9] y [11].

Por lo tanto, en esta sección volveremos a trabajar con los sistemas (1.1) y (1.2), los cuales, permitanos recordar, están respectivamente dados por

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{x},$$

y

$$\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{y} + \mathfrak{f}(t, \mathfrak{y}),$$

cuyas soluciones son en cada caso una función $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^d$, y denotamos $t \mapsto \mathfrak{x}(t, \tau, \xi)$ y $t \to \mathfrak{y}(t, \tau, \eta)$ a las soluciones de (1.1) y (1.2) que pasan por ξ y η respectivamente en $t = \tau$. Denotamos también $\mathfrak{X}(t, s)$ a la matriz de transición de (1.1) que en $t = s$ es la identidad. Además $\mathfrak{A} : \mathbb{R}_0^+ \to M_{d\times d}(\mathbb{R})$ es un mapeo matricial y $\mathfrak{f} : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un mapeo vectorial continuo.

Además impondremos sobre estos sistemas las siguientes hipótesis:

(c0) $\mathfrak{A} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ es un mapeo matricial continuo, no singular y uniformemente acotado, es decir, existe $M > 1$ tal que

$$\text{máx}\left\{\sup_{s\in\mathbb{R}_0^+}\left\|\mathfrak{A}(s)\right\|, \sup_{s\in\mathbb{R}_0^+}\left\|\mathfrak{A}^{-1}(s)\right\|\right\} = M.$$

(c1) El sistema (1.1) tiene una dicotomía no uniforme, es decir, existen dos proyectores invariantes complementarios $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ tales que $\mathfrak{P}(t)+\mathfrak{Q}(t) = I$ para todo $t \geq 0$, una función continua $\mathfrak{K} : [0, +\infty[\to [0, \infty[$ y una función decreciente de clase C^1 $\mathfrak{h} : [0, \infty[\to]0, 1]$, con $\mathfrak{h}(0) = 1$ y $\text{lím}_{t\to\infty} \mathfrak{h}(t) = 0$ tales que

$$\begin{cases} \left\|\mathfrak{X}(t, s)\mathfrak{P}(s)\right\| \leq \mathfrak{K}(s)\left(\dfrac{\mathfrak{h}(t)}{\mathfrak{h}(s)}\right), & \forall\, t \geq s \geq 0 \\[2ex] \left\|\mathfrak{X}(t, s)\mathfrak{Q}(s)\right\| \leq \mathfrak{K}(s)\left(\dfrac{\mathfrak{h}(s)}{\mathfrak{h}(t)}\right), & \forall\, 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

(c2) Existen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ funciones tales que para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$ y para cada par $(\mathfrak{y}, \tilde{\mathfrak{y}}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ se tiene

$$\left|\mathfrak{f}(t,\mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(t,\tilde{\mathfrak{y}})\right| \leq \mathfrak{v}(t)\,|\mathfrak{y} - \tilde{\mathfrak{y}}| \ ; \ \left|\mathfrak{f}(t,\mathfrak{y})\right| \leq \mathfrak{u}(t).$$

(c3) La función $\mathfrak{u}$ definida antes verifica

$$\int_0^t \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\| \mathfrak{u}(s)ds + \int_t^\infty \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\right\| \mathfrak{u}(s)ds \leq \mathfrak{p} < \infty \text{ , para todo } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

(c4) La función $\mathfrak{v}$ definida antes verifica

$$\int_0^t \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\| \mathfrak{v}(s)ds + \int_t^\infty \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\right\| \mathfrak{v}(s)ds \leq \mathfrak{q} < 1 \text{ , para todo } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

(c6) El mapeo $u \mapsto \mathfrak{f}(t,u)$ y sus derivadas respecto a u hasta el orden r $(r \geq 1)$ son funciones continuas de $(t,u) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d$ y $\sup_{u\in\mathbb{R}^d} \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(t,u)\right\| < +\infty$ es acotado.

(c7) Para todo $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo, las funciones $\mathfrak{K}, \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{v}$ satisfacen

$$\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right) < +\infty.$$

Observación 2.1.1. *No es accidental que no tengamos condición **(c5)**. En el siguiente capítulo encontraremos la relación entre estas condiciones y las que debemos imponer para establecer distintos tipos de equivalencias entre sistemas y por ello nos es conveniente dejar disponible este índice.*

Observación 2.1.2. *Los proyectores $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ han sido llamados invariantes para (1.1), lo que significa que para cada $t, s \in \mathbb{R}_0^+$ verifican:*

$$\mathfrak{P}(t)\mathfrak{X}(t,s) = \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s) \ \text{ y } \ \mathfrak{Q}(t)\mathfrak{X}(t,s) = \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s).$$

En particular, una consecuencia de esto es que los rangos de $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ se mantienen invariante, lo cual motiva este adjetivo.

Observación 2.1.3. *Es un hecho ampliamente estudiado en la literatura que la condición **(c0)** implica que el sistema (1.1) satisface la condición de crecimiento uniforme, es decir, que existe una constante $K > 0$ tal que:*

$$\left\|\mathfrak{X}(t,s)\right\| \leq Ke^{M|t-s|}, \qquad \forall\ t,s \geq 0. \tag{2.1}$$

Definición 2.1.4. *El operador de Green asociado al sistema (1.1) y la dicotomía **(c1)** es la función matricial $\mathscr{G} : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ dada por:*

$$\mathscr{G}(t,s) = \begin{cases} \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s) & \forall\ t \geq s \geq 0, \\ \\ -\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s) & \forall\ 0 \leq t < s, \end{cases}$$

y se deduce fácilmente que satisface

$$\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial t}(t,s) = \mathfrak{A}(t)\mathscr{G}(t,s) \quad y \quad \frac{\partial \mathscr{G}}{\partial s}(t,s) = -\mathscr{G}(t,s)\mathfrak{A}(s).$$

Observación 2.1.5. *Incorporando esta notación, las condiciones **(c3)** y **(c4)** se pueden reescribir como:*

(c3) *La función* $\mathfrak{u}$ *definida antes verifica*

$$\int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u}(s)ds \leq \mathfrak{p} < \infty \text{ , para todo } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

(c4) *La función* $\mathfrak{v}$ *definida antes verifica*

$$\int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)ds \leq \mathfrak{q} < 1 \text{ , para todo } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Definición 2.1.6. *Sea* $\mathfrak{J} \subset \mathbb{R}$ *un intervalo. Los sistemas (1.1) y (1.2) son* $\mathfrak{J}$*-topológicamente equivalentes si existe una función* $\mathfrak{H} : \mathfrak{J} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *que satisface*

i) Si $\mathfrak{x}(t)$ *es solución de (1.1), entonces* $\mathfrak{H}[t, \mathfrak{x}(t)]$ *es solución de (1.2).*

ii) $\mathfrak{H}(t,u) - u$ *es acotado en* $\mathfrak{J} \times \mathbb{R}^d$*.*

iii) Para cada $\tau \in \mathfrak{J}$ *fijo, el mapeo* $u \mapsto \mathfrak{H}(\tau,u)$ *es un homeomorfismo de* $\mathbb{R}^d$*.*

Además, la función $u \mapsto \mathfrak{G}(\tau,u) = \mathfrak{H}^{-1}(\tau,u)$ *tiene las propiedades ii) y iii) y mapea soluciones de (1.2) en soluciones de (1.1).*

Observación 2.1.7. *Note que es una generalización de la caracterización que obtuvimos en el Teorema 1.2.6, de K. J. Palmer [26], para establecer una equivalencia entre sistemas.*

Teorema 2.1.8. *Si se cumplen las condiciones* ***(c0)-(c4)****, entonces los sistemas (1.1) y (1.2) son topológicamente equivalentes en* $\mathbb{R}_0^+$*.*

Demostración. Realizaremos la demostración en varios pasos.

Paso 1: Funciones auxiliares. Se define el mapeo $\mathfrak{w}^* : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^d$ para $(\tau,\eta) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d$ dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}^*(t;(\tau,\eta)) &= -\int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds \\ &= -\int_0^t \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds + \int_t^\infty \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Note que para asegurar su buena definición necesitamos saber que las soluciones de (1.2) se pueden continuar hacia atrás, lo cual se sabe por resultados clásicos. Definimos también $\mathfrak{T} : BC(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}^d) \to BC(\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}^d)$ para $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d$ dado por

$$\mathfrak{T}(\phi)(t;(\tau,\xi)) = \int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + \phi(s))ds.$$

Se tiene que $\mathfrak{T}$ queda bien definida por las condiciones **(c2)** y **(c3)**. Notamos también que utilizando las condiciones **(c2)** y **(c4)** se obtiene

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{T}(\phi)(t;(\tau,\xi)) - \mathfrak{T}(\psi)(t;(\tau,\xi))\right| &\leq \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \left|\phi(s) - \psi(s)\right| \mathfrak{v}(s)ds \\ &\leq \mathfrak{q}\|\phi - \psi\|_\infty , \end{aligned}$$

y por tanto, utilizando el Teorema de punto fijo de Banach, obtenemos la existencia de un único punto fijo

$$\mathfrak{z}^*(t;(\tau,\xi)) = \int_0^{\infty} \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi)+\mathfrak{z}^*(s;(\tau,\xi)))ds.$$

Note que es fácil verificar que el mapeo $t \mapsto \mathfrak{w}^*(t;(\tau,\eta))$ es solución al problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{w}}(t) &=& \mathfrak{A}(t)\mathfrak{w}(t) - \mathfrak{f}(t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)) \\ \\ \mathfrak{w}(0) &=& -\displaystyle\int_0^{\infty} \mathfrak{X}(0,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds, \end{cases}$$

y $t \mapsto \mathfrak{z}^*(t;(\tau,\xi))$ es solución respectivamente al problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{z}}(t) &=& \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z}(t) + \mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi)+\mathfrak{z}(t)) \\ \\ \mathfrak{z}(0) &=& -\displaystyle\int_0^{\infty} \mathfrak{X}(0,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi)+\mathfrak{z}^*(s;(\tau,\xi)))ds, \end{cases}$$

además, es fácil ver que, utilizando **(c2)** y **(c3)**, los mapeos $t \mapsto \mathfrak{w}^*(t;(t,\eta))$ y $t \mapsto \mathfrak{z}^*(t;(t,\xi))$ son uniformemente acotados.

Paso 2: Construir los mapeos $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{G}$. Por la unicidad de soluciones tenemos

$$\mathfrak{x}(t,\tau,\xi) = \mathfrak{x}(t,s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi)) \text{ , para todo } t,s,\tau \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.3}$$

y del mismo modo

$$y(t,\tau,\xi) = y(t,s,y(s,\tau,\xi)) \text{ , para todo } t,s,\tau \in \mathbb{R}_0^+. \tag{2.4}$$

Ahora, sea $\hat{s} \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrario. Llamemos $v(t) = \mathfrak{z}^*(t;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))$, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi)) + v(s;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))))ds\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\mathfrak{x}(\tau,\tau,\xi)) + v(s;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))))ds\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + v(s;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))))ds\right) \\ &= \mathfrak{X}(t,t)\mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi) + v(t;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi)))) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{f}\left(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + v\left(s;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))\right)\right)\right)ds \\ &= \mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi) + v(t;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi)))) \\ &\quad + \int_0^t \mathfrak{A}(t)\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{f}\left(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + v\left(s;(\hat{s},\mathfrak{x}(\hat{s},\tau,\xi))\right)\right)ds \\ &= \mathfrak{A}(t)v(t) + \mathfrak{f}(t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi) + v(t)). \end{aligned}$$

Sea ahora $\overline{s} \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrario y considere $v^*(t) = \mathfrak{z}^*(t; (\overline{s}, \mathfrak{x}(\overline{s}, \tau, \xi))$. Definiendo $\mathfrak{g}(t, \mathfrak{z}) = \mathfrak{f}(t, \mathfrak{x}(t, \tau, \xi) + \mathfrak{z})$, obtenemos claramente una función continua. Así, de manera análoga al argumento anterior, obtenemos que tanto v como v^* son soluciones a la ecuación diferencial

$$\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{A}(t)\mathfrak{z} + \mathfrak{g}(t, \mathfrak{z}).$$

Además $v(0) = 0 = v^*(0)$. Así, por unicidad de soluciones, podemos concluir que ambas funciones coinciden, es decir, para todos $\overline{s}, \hat{s} \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\mathfrak{z}^*(t; (\overline{s}, \mathfrak{x}(\overline{s}, \tau, \xi))) = \mathfrak{z}^*(t; (\hat{s}, \mathfrak{x}(\hat{s}, \tau, \xi))), \tag{2.5}$$

o equivalentemente

$$\mathfrak{z}^*(t; (\tau, \xi)) = \mathfrak{z}^*(t; (s, \mathfrak{x}(s, \tau, \xi))) \text{ , para todo } t, s, \tau \in \mathbb{R}_0^+. \tag{2.6}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$ fijo construimos los mapeos $\mathfrak{H}(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y $\mathfrak{G}(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dados por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{H}(t, \xi) & = & \xi + \displaystyle\int_0^\infty \mathscr{G}(t, s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{x}(s, t, \xi) + \mathfrak{z}^*(s; (t, \xi)))ds \\ & = & \xi + \mathfrak{z}^*(t; (t, \xi)) \end{array} \right. \tag{2.7}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathfrak{G}(t, \eta) & = & \eta - \displaystyle\int_0^\infty \mathscr{G}(t, s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, t, \eta))ds \\ & = & \eta + \mathfrak{w}^*(t; (t, \eta)), \end{array} \right. \tag{2.8}$$

de esto, utilizando **(c3)**, se sigue inmediatamente que $\mathfrak{H}(t, \xi) - \xi$ y $\mathfrak{G}(t, \eta) - \eta$ son acotados en $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d$, por lo que $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{G}$ satisfacen la condición ii) de la Definición 2.1.6. Para estudiar otras propiedades de $\mathfrak{G}$, note que, a partir de la fórmula de variación de parámetros tenemos que para $\tau \geq t$

$$\mathfrak{y}(t, \tau, \eta) = \mathfrak{X}(t, \tau)\eta - \int_t^\tau \mathfrak{X}(t, s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))ds,$$

o equivalentemente, multiplicando por $\mathfrak{X}(\tau, t)$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(\tau, t)\mathfrak{y}(t, \tau, \eta) & = & \eta - \displaystyle\int_t^\tau \mathfrak{X}(\tau, s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))ds \\ & = & \eta - \displaystyle\int_t^\tau \mathfrak{X}(\tau, s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))ds - \displaystyle\int_t^\tau \mathfrak{X}(\tau, s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))ds, \end{array}$$

en particular, para $t=0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(\tau,0)\mathfrak{y}(0,\tau,\eta) &= \eta-\int_0^\tau \mathfrak{X}(\tau,s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds-\int_0^\tau \mathfrak{X}(\tau,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&= \eta-\int_0^\tau \mathfrak{X}(\tau,s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&\quad +\int_\tau^\infty \mathfrak{X}(\tau,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds-\int_0^\infty \mathfrak{X}(\tau,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&= \eta-\int_0^\infty \mathscr{G}(\tau,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&\quad -\mathfrak{X}(\tau,0)\int_0^\infty \mathfrak{X}(0,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&= \mathfrak{G}(\tau,\eta)-\mathfrak{X}(\tau,0)\mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta)),
\end{aligned}$$

de donde concluimos

$$\mathfrak{G}(\tau,\eta)=\mathfrak{X}(\tau,0)\left\{\mathfrak{y}(0,\tau,\eta)+\mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))\right\}. \tag{2.9}$$

Paso 3: $\mathfrak{H}$ mapea soluciones de (1.1) en soluciones de (1.2) y $\mathfrak{G}$ mapea soluciones de (1.2) en soluciones de (1.1). Teniendo en cuenta la unicidad de soluciones, por simple diferenciación se puede concluir

$$\mathfrak{H}[t,\mathfrak{x}(t,\tau,\xi)]=\mathfrak{y}(t,\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi)) \tag{2.10}$$

y

$$\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]=\mathfrak{x}(t,\tau,\mathfrak{G}(\tau,\eta))=\mathfrak{X}(t,\tau)\mathfrak{G}(\tau,\eta), \tag{2.11}$$

de donde concluimos que ambos mapeos satisfacen correspondientemente la condición i) de la Definición 2.1.6.

Paso 4: $u\mapsto\mathfrak{G}(t,u)$ y $u\mapsto\mathfrak{H}(t,u)$ son biyectivas para todo $t\geq 0$ fijo.

Primero mostraremos que $\mathfrak{H}(t,\mathfrak{G}(t,\eta))=\eta$ para todo $t\geq 0$. En efecto, utilizando (2.7) y (2.8)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}(t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]) &= \mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]\\
&\quad +\int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)])+\mathfrak{z}^*(s;(t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)])))\\
&= \mathfrak{y}(t,\tau,\eta)-\int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))ds\\
&\quad +\int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)])+\mathfrak{z}^*(s;(t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]))).
\end{aligned}$$

Definimos $\omega(t)=\left|\mathfrak{H}[t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]]-\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)\right|$. Note que

$$\omega(t)\leq\left|\mathfrak{H}[t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]]-\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]\right|+\left|\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]-\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)\right|<\infty,$$

pues $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{G}$ satisfacen la condición ii) de la Definición 2.1.6. Así, usando **(c1)**, **(c2)** y **(c4)**, en conjunto con la expresión anterior y las identidades (2.6), (2.7) y (2.11), para $t \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \left|\int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\left\{\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]) + \mathfrak{z}^*(s;(t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]))) - \mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\} ds\right| \\
&\leq \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)\left|\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)]) + \mathfrak{z}^*(s;(t,\mathfrak{G}[t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)])) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\right| ds \\
&\leq \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)\left|\mathfrak{x}(s,t,\mathfrak{x}(t,\tau,\mathfrak{G}(\tau,\eta))) + \mathfrak{z}^*(s;(t,\mathfrak{x}(t,\tau,\mathfrak{G}(\tau,\eta)))) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\right| ds \\
&\leq \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)\left|\mathfrak{x}(s,\tau,\mathfrak{G}(\tau,\eta)) + \mathfrak{z}^*(s;(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\mathfrak{G}(\tau,\eta)))) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\right| ds \\
&= \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)\left|\mathfrak{H}[s,\mathfrak{G}[s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)]] - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\right| ds \\
&= \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s)\omega(s) ds \leq \mathfrak{q}\cdot \sup_{s\in\mathbb{R}^+}\{\omega(s)\}.
\end{aligned}$$

Así, tomando supremo en la izquierda tenemos que $\omega(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, pues de otro modo obtenemos una contradicción con $0 < \mathfrak{q} < 1$. En particular, tomando $t = \tau$ se tiene $H(\tau, G(\tau,\eta)) = \eta$.

Ahora mostraremos $G(t, H(t,\xi)) = \xi$. De hecho, utilizando (2.8), (2.10), (2.4) y (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
G[t,H[t,x(t,\tau,\xi)]] &= H[t,x(t,\tau,\xi)] - \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,y(s,t,H[t,x(t,\tau,\xi)]))ds \\
&= H[t,x(t,\tau,\xi)] - \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,y(s,t,y(t,\tau,H(\tau,\xi))))ds \\
&= H[t,x(t,\tau,\xi)] - \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,y(s,\tau,y(\tau,\tau,H(\tau,\xi))))ds \\
&= H[t,x(t,\tau,\xi)] - \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))ds \\
&= x(t,\tau,\xi) + \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,x(s,t,x(t,\tau,\xi)) + \mathfrak{z}^*(s;(t,x(t,\tau,\xi))))ds \\
&\quad - \int_0^\infty \mathcal{G}(t,s) f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))ds.
\end{aligned}$$

Continuando el argumento anterior, utilizando (2.3), (2.6), (2.7) y (2.10), se sigue que:

$$\begin{aligned}
G[t,H[t,x(t,\tau,\xi)]] &= x(t,\tau,\xi)+\int_0^{\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s,x(s,\tau,x(\tau,\tau,\xi))+\mathfrak{z}^*(s;(s,x(s,\tau,\xi))))ds \\
&\quad -\int_0^{\infty}\mathcal{G}(t,s)f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))ds \\
&= x(t,\tau,\xi) \\
&\quad +\int_0^{\infty}\mathcal{G}(t,s)\left\{f(s,x(s,\tau,\xi)+\mathfrak{z}^*(s;(s,x(s,\tau,\xi))))-f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))\right\}ds \\
&= x(t,\tau,\xi)+\int_0^{\infty}\mathcal{G}(t,s)\left\{f(s,H(s,x(s,\tau,\xi)))-f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))\right\}ds \\
&= x(t,\tau,\xi)+\int_0^{\infty}\mathcal{G}(t,s)\left\{f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))-f(s,y(s,\tau,H(\tau,\xi)))\right\}ds \\
&= x(t,\tau,\xi).
\end{aligned}$$

Así, evaluando en $t=\tau$ se obtiene $\mathfrak{G}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))=\xi$. En consecuencia, para todo $t\geq 0$, $\mathfrak{H}(t,\cdot)$ es una biyección y $\mathfrak{G}(t,\cdot)$ es su inversa.

Paso 5: $u\mapsto\mathfrak{G}(t,u)$ *es un mapeo continuo.*

Es suficiente mostrar que $\eta\mapsto\mathfrak{w}^*(t;(t,\eta))$ es un mapeo continuo para cada $t\geq 0$, pues $\mathfrak{G}(t,\eta)=\eta+\mathfrak{w}^*(t;(t,\eta))$.

Sea $\eta\in\mathbb{R}^d$ fijo y una sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^d$ tal que $\lim_{n\to\infty}\eta_n=\eta$. Sean $t,\tau\in\mathbb{R}_0^+$ fijos. Definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones en $\mathbb{R}_0^+$ definidas por

$$a_n(s)=\mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta_n)),$$

note que, por **(c2)**, satisfacen

$$|a_n(s)|\leq\left\|\mathscr{G}(t,s)\right\|\mathfrak{u}(s)\text{ , para todo } s\in\mathbb{R}_0^+ \text{ y } n\in\mathbb{N},$$

lo cual, por **(c3)**, sabemos que cumple

$$\int_0^{\infty}\left\|\mathscr{G}(t,s)\right\|\mathfrak{u}(s)ds<+\infty.$$

Por otra parte, como $u\mapsto\mathfrak{f}(s,u)$ y $\xi\mapsto\mathfrak{y}(s,\tau,\xi)$ son continuas, entonces es claro que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $a:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}^d$ dada por

$$a(s)=\mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)).$$

Así, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathfrak{w}^*(t;(\tau,\eta_n)) &= \lim_{n\to\infty}-\int_0^{\infty}\mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta_n))ds \\
&= -\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}a_n(s)ds=-\int_0^{\infty}a(s)ds=\mathfrak{w}^*(t;(\tau,\eta)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(t;(\tau,\eta))$ es continuo, y en particular lo es $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(t;(t,\eta))$, de donde concluimos que $\mathfrak{G}$ es continua.

Paso 6: $u \mapsto \mathfrak{H}(t,u)$ es un mapeo continuo.

Es suficiente mostrar que $\xi \mapsto \mathfrak{z}^*(t;(t,\xi))$ es un mapeo continuo para cada $t \geq 0$, pues $\mathfrak{H}(t,\xi) = \xi + \mathfrak{z}^*(t;(t,\xi))$.

Sea $\xi \in \mathbb{R}^d$ fijo y una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ tal que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$. Considere también $u \mapsto \phi(t;(\tau,u))$, una función continua para cada $t,\tau \in \mathbb{R}^+$ fijos. Ahora, para $t,\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijos definimos:

$$b_n(s) = \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi_n) + \phi(s;(\tau,\xi_n))),$$

note que, por **(c2)**, satisface

$$|b_n(s)| \leq \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u}(s) \text{ , para todo } s \in \mathbb{R}_0^+ \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

lo cual, por **(c3)**, sabemos que cumple

$$\int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u}(s)ds < +\infty.$$

Por otra parte, note que como $\zeta \mapsto \mathfrak{x}(s,\tau,\zeta)$, $\zeta \mapsto \phi(s;(\tau,\zeta))$ y $\zeta \mapsto \mathfrak{f}(s,\zeta)$ son continuos, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n(s) = \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + \phi(s;(\tau,\xi))).$$

Así, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{T}\phi)(t;(\tau,\xi_n)) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi_n) + \phi(s;(\tau,\xi_n)))ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty b_n(s)ds \\
&= \int_0^\infty \mathscr{G}(t,s)\mathfrak{f}(s,\mathfrak{x}(s,\tau,\xi) + \phi(s;(\tau,\xi)))ds \\
&= (\mathfrak{T}\phi)(t;(\tau,\xi))
\end{aligned}$$

Por tanto $\xi \mapsto (\mathfrak{T}\phi)(t;(\tau,\xi))$ es un mapeo continuo y por ende también lo es su punto fijo, es decir $\xi \mapsto \mathfrak{z}^*(t;(\tau,\xi))$ es continuo, y en particular lo es $\xi \mapsto \mathfrak{z}^*(t;(t,\xi))$, de donde concluimos que $\mathfrak{H}$ es continua y por tanto un homeomorfismo. Así, los sistemas (1.1) y (1.2) son topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}^+$. ■

2.2. Diferenciabilidad de la Equivalencia Topológica

Obtener que el homeomorfismo de equivalencia topológica que estudiamos en la sección anterior es un difeomorfismo de clase C^r ha mostrado tener buenas propiedades, en particular cuando se busca mostrar la estabilidad de (1.2). Es por esto que nos interesa introducir la siguiente definición, tal como se hizo en [11].

Definición 2.2.1. *Los sistemas (1.1) y (1.2) son C^r-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$ si son topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$ y el homeomorfismo de equivalencia topológica $u \mapsto \mathfrak{H}(t,u)$ es un difeomorfismo de clase C^r, con $r \geq 1$ para cada $t \geq 0$ fijo.*

Lema 2.2.2. *Suponga que se satisfacen **(c0)-(c4)** y **(c6)-(c7)**, y **(c6)** se cumple con $r = 1$, entonces el mapeo $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0; (\tau, \eta))$ definido en (2.2) es de clase C^1.*

Demostración. Sea $\eta \in \mathbb{R}^d$ fijo y $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión convergiendo propiamente a cero (es decir, $\delta_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Sea $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo y definimos

$$\varphi_n(s) = \mathscr{G}(0, s)\frac{\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta + \delta_n)) - \mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s, \tau, \eta)\delta_n}{|\delta_n|}.$$

Notamos que como $\eta \mapsto \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)$ es continuo, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{y}(s, \tau, \eta+\delta_n) = \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)$. Usando **(c6)** se sigue a partir del clásico resultado de diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales (ver por ejemplo Teorema 4.1 en [21]) que $\eta \mapsto \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)$ es diferenciable. Nuevamente aplicando **(c6)** obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = 0.$$

Note también, que como la norma es continua, usando **(c2)** se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s, u) \right\| &= \lim_{\delta\to 0} \frac{|\mathfrak{f}(s, u + \delta) - \mathfrak{f}(s, u)|}{|\delta|} \\ &\leq \lim_{\delta\to 0} \mathfrak{v}(s) = \mathfrak{v}(s), \end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_n(s)| &\leq \left\|\mathscr{G}(0, s)\right\| \frac{\left|\mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta + \delta_n)) - \mathfrak{f}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))\right| + \left|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s, \mathfrak{y}(s, \tau, \eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s, \tau, \eta)\delta_n\right|}{|\delta_n|} \\ &\leq \left\|\mathscr{G}(0, s)\right\| \frac{\mathfrak{v}(s)\left|\mathfrak{y}(s, \tau, \eta + \delta_n) - \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)\right| + \mathfrak{v}(s)\left|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s, \tau, \eta)\delta_n\right|}{|\delta_n|} \\ &\leq \left\|\mathscr{G}(0, s)\right\| \mathfrak{v}(s)\left(\frac{\left|\mathfrak{y}(s, \tau, \eta + \delta_n) - \mathfrak{y}(s, \tau, \eta)\right|}{|\delta_n|} + \left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s, \tau, \eta)\right\|\right). \end{aligned}$$

Con esta cota en mente para $\varphi_n(s)||$, buscaremos una estimación para el cociente al interior del paréntesis y luego acotaremos la norma de la derivada parcial que lo acompaña. Sea $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^d$. Sea $s \geq \tau$. Sabemos que

$$\mathfrak{y}(s, \tau, \eta) = \mathfrak{y}(\tau, \tau, \eta) + \int_\tau^s \dot{\mathfrak{y}}(r, \tau, \eta)dr = \eta + \int_\tau^s \dot{\mathfrak{y}}(r, \tau, \eta)dr,$$

y análogamente

$$\mathfrak{y}(s, \tau, \tilde{\eta}) = \tilde{\eta} + \int_\tau^s \dot{\mathfrak{y}}(r, \tau, \tilde{\eta})dr,$$

por lo tanto

$$\mathfrak{y}(s, \tau, \eta) - \mathfrak{y}(s, \tau, \tilde{\eta}) = \eta - \tilde{\eta} + \int_\tau^s \dot{\mathfrak{y}}(r, \tau, \eta) - \dot{\mathfrak{y}}(r, \tau, \tilde{\eta})dr.$$

Definiendo $z(s) = \dot{\mathfrak{y}}(s, \tau, \eta) - \dot{\mathfrak{y}}(s, \tau, \tilde{\eta})$, la expresión anterior implica

$$|\mathfrak{y}(s, \tau, \eta) - \mathfrak{y}(s, \tau, \tilde{\eta})| \leq |\eta - \tilde{\eta}| + \int_\tau^s |z(r)|dr.$$

Note que, como $s \mapsto \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)$ es solución de (1.2), entonces

$$\dot{\mathfrak{y}}(s,\tau,\eta) - \dot{\mathfrak{y}}(s,\tau,\tilde{\eta}) = \mathfrak{A}(s)\left[\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})\right] + \mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)) - \mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})),$$

de donde, usando la definición de $z(s)$ y **(c2)**, se sigue que

$$\begin{aligned}
|z(s)| &\leq \big\|\mathfrak{A}(s)\big\|\,|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| + |\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)) - \mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta}))| \\
&\leq \big\|\mathfrak{A}(s)\big\|\,|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| + \mathfrak{v}(s)|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| \\
&\leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big)\,|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| \\
&\leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big)\left[|\eta - \tilde{\eta}| + \int_\tau^s |z(r)|dr\right].
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{U}(s) = |\eta - \tilde{\eta}| + \int_\tau^s |z(r)|dr$. La expresión anterior se transforma en

$$\mathcal{U}'(s) \leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big)\mathcal{U}(s),$$

o, equivalentemente (pues $s > \tau \Rightarrow \mathcal{U} \neq 0$)

$$\frac{\mathcal{U}'(s)}{\mathcal{U}(s)} \leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big),$$

de donde, integrando entre τ y s obtenemos

$$\log\big(\mathcal{U}(s)\big) - \log\big(\mathcal{U}(\tau)\big) = \log\left(\frac{\mathcal{U}(s)}{|\eta - \tilde{\eta}|}\right) \leq \int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr,$$

es decir

$$|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| \leq |\eta - \tilde{\eta}| + \int_\tau^s |z(r)|dr = \mathcal{U}(s) \leq |\eta - \tilde{\eta}| \exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right),$$

por lo tanto, para $s \geq \tau$ y $\tilde{\eta} = \eta + \delta_n$, se tiene

$$\frac{|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta + \delta_n)|}{|\delta_n|} \leq \exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right),$$

lo que en particular implica

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \leq \exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right).$$

En conclusión, para $s \geq \tau$, usando **(c1)** tenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(s)| &\leq \big\|\mathscr{G}(0,s)\big\|\,\mathfrak{v}(s)\left(\frac{\big|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta + \delta_n) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\big|}{|\delta_n|} + \left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\|\right) \\
&\leq 2\big\|\mathscr{G}(0,s)\big\|\,\mathfrak{v}(s)\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right) \\
&\leq 2\mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right).
\end{aligned}$$

Por otra parte, en el compacto $[0,\tau]$ las funciones continuas $s \mapsto \dfrac{\big|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n)-\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\big|}{|\delta_n|}$ convergen puntualmente a $s \mapsto \Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\|$ cuando $n \to \infty$, que también es continua. Como el dominio $[0,\tau]$ es compacto, la sucesión de funciones converge uniformemente, es decir, existe $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq \hat{n}$ y $s \in [0,\tau]$ se tiene

$$\frac{\big|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n)-\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\big|}{|\delta_n|} + \Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\| \leq 2\Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\| + 1.$$

Así, para $n \geq \hat{n}$ y $s \in [0,\tau]$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(s)| &\leq \big\|\mathscr{G}(0,s)\big\|\,\mathfrak{v}(s)\left(\frac{\big|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n)-\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\big|}{|\delta_n|} + \Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\|\right) \\
&\leq \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\left(2\Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\| + 1\right).
\end{aligned}$$

En resumen, definiendo $\mathscr{F} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\mathscr{F}(s) = \begin{cases} \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\left(2\Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\| + 1\right) & \tau \geq s \geq 0, \\ 2\mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right) & \forall s \ \geq \tau, \end{cases}$$

se obtiene $|\varphi_n(s)| \leq \mathscr{F}(s)$ para todo $n \geq \hat{n}$. Note que usando **(c7)**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathscr{F}(s)ds &\leq \int_0^\tau \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\left(2\Big\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\Big\| + 1\right)ds \\
&\quad + 2\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Así, utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta+\delta_n)) - \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta)) + \left[\int_0^\infty \mathscr{G}(0,s)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)ds\right]\delta_n}{|\delta_n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty -\varphi_n(s)ds = -\int_0^\infty \left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s)\right)ds = 0,$$

de donde concluimos que $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$ es diferenciable. ∎

Corolario 2.2.3. *Si se tienen las condiciones* ***(c0)-(c4)*** *y* ***(c6)-(c7)****, entonces para cada* $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ *fijo se tiene*

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))}{\partial \eta} = -\int_0^\infty \mathscr{G}(0,s)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)ds.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la demostración del Lema anterior. ∎

Teorema 2.2.4. *Si se cumplen las condiciones* ***(c0)-(c4)*** *y* ***(c6)-(c7)****, y* ***(c6)*** *se cumple con* $r = 1$*, entonces los sistemas (1.1) y (1.2) son* C^1*-topológicamente equivalentes en* $\mathbb{R}^+$*.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.8 sabemos que los sistemas son topológicamente equivalentes. Por el Lema 2.2.2 tenemos que $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$ es de clase C^1 y sabemos por resultados clásicos de diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales (ver por ejemplo Teorema 4.1 en [21]) que $\eta \mapsto \mathfrak{y}(0,\tau,\eta)$ también lo es, lo que en conjunto a la expresión (2.9) nos permite concluir que $\eta \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\eta)$ es diferenciable de clase C^1.

Además, como $\mathfrak{G}$ es una equivalencia topológica, tenemos que $\xi \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\xi)-\xi$ es acotado y por tanto $\mathfrak{G}(\tau,\xi) \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$. Esto, combinado con la discusión anterior, implica, utilizando el Corolario 2.1 de [33], que $\xi \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\xi)$ es un difeomorfismo. Más aún, como $\mathfrak{G}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))=\xi$, tenemos:

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}(\tau,\xi)=I,$$

y por lo tanto $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}(\tau,\xi)=\left[\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\right]^{-1}$, lo que finaliza la demostración. ∎

Ahora revisaremos dos lemas técnicos que nos orientarán para construir corolarios de este Teorema.

Lema 2.2.5. *Suponga que el sistema (1.1) satisface **(c0)** y admite una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}_0^+$, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ y constantes $C,\lambda>0$ tales que*

$$\begin{cases} \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\| \leq Ce^{-\lambda(t-s)}, & \forall\ t\geq s\geq 0 \\ \\ \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\right\| \leq Ce^{\lambda(t-s)}, & \forall\ 0\leq t\leq s. \end{cases}$$

Entonces $M\geq\lambda$.

Demostración. Como el sistema satisface **(c0)**, sea $K>0$ que verifique (2.1). Sea $t\geq s$, observe que:

$$\begin{aligned}
1=\left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{X}^{-1}(t,s)\right\| &= \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{X}(s,t)\right\| \\
&= \left\|\mathfrak{X}(t,s)\left(\mathfrak{P}(s)+\mathfrak{Q}(s)\right)\mathfrak{X}(s,t)\right\| \\
&\leq \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{X}(s,t)\right\|+\left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\mathfrak{X}(s,t)\right\| \\
&= \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\mathfrak{X}(s,t)\right\|+\left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{X}(s,t)\mathfrak{Q}(t)\right\| \\
&\leq \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\|\cdot\left\|\mathfrak{X}(s,t)\right\|+\left\|\mathfrak{X}(t,s)\right\|\cdot\left\|\mathfrak{X}(s,t)\mathfrak{Q}(t)\right\| \\
&\leq \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\|\cdot Ke^{M|s-t|}+Ke^{M|t-s|}\cdot\left\|\mathfrak{X}(s,t)\mathfrak{Q}(t)\right\| \\
&\leq Ke^{M(t-s)}\left(\left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\|+\left\|\mathfrak{X}(s,t)\mathfrak{Q}(t)\right\|\right) \\
&\leq Ke^{M(t-s)}\left(Ce^{-\lambda(t-s)}+Ce^{\lambda(s-t)}\right) \\
&= 2KCe^{(M-\lambda)(t-s)}
\end{aligned}$$

Si $M < \lambda$, entonces tomando límite cuando $t \to +\infty$, al lado derecho obtenemos cero, es decir $1 \leq 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, esto es imposible, es decir, $M \geq \lambda$. ■

Lema 2.2.6. *Suponga que el sistema (1.1) satisface **(c0)** y admite una dicotomía exponencial no uniforme en $\mathbb{R}^+$, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ y constantes $C, \lambda, \varepsilon > 0$ tales que*

$$\begin{cases} \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\| \leq Ce^{-\lambda(t-s)+\varepsilon s}, & \forall\, t \geq s \geq 0 \\ \\ \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\right\| \leq Ce^{\lambda(t-s)+\varepsilon s}, & \forall\, 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Entonces o bien $M \geq \lambda$ ó $M + \varepsilon \geq \lambda$. En particular, $M + \varepsilon \geq \lambda$

Demostración. Como el sistema satisface **(c0)**, sea $K > 0$ que verifique (2.1). Sea $t \geq s$, observe que:

$$\begin{aligned} 1 = \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{X}^{-1}(t,s)\right\| &\leq Ke^{M(t-s)}\left(\left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\right\| + \left\|\mathfrak{X}(s,t)\mathfrak{Q}(t)\right\|\right) \\ &\leq Ke^{M(t-s)}\left(Ce^{-\lambda(t-s)+\varepsilon s} + Ce^{\lambda(s-t)+\varepsilon t}\right) \\ &= KCe^{(M-\lambda)(t-s)+\varepsilon s} + KCe^{(M+\varepsilon-\lambda)(t-s)-\varepsilon s} \end{aligned}$$

Si $M < \lambda$ y $M+\varepsilon < \lambda$, entonces tomando límite cuando $t \to +\infty$, al lado derecho obtenemos cero, es decir $1 \leq 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, esto es imposible, es decir, o bien $M \geq \lambda$ o $M + \varepsilon \geq \lambda$. En particular, $M + \varepsilon \geq \lambda$. ■

Corolario 2.2.7. *Suponga que los sistemas (1.1) y (1.2) satisfacen **(c0)** y **(c6)** con $r = 1$. Además, suponga que **(c1)** se cumple con una dicotomía exponencial clásica, es decir, $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ son proyectores complementarios invariantes, $\mathfrak{K}(s) = \mathfrak{K} > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}_0^+$ y $\mathfrak{h}(s) = e^{-\lambda s}$, con $\lambda > 0$, y **(c2)** se satisface con $\mathfrak{v}(s) = \mathfrak{v}e^{-\alpha s} > 0$ y $\mathfrak{u}(s) = \mathfrak{u} > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}_0^+$, con $\alpha > 0$. Luego, si $2\mathfrak{K}\mathfrak{v} < \lambda$ y $M + \mathfrak{v} < \lambda + \alpha$, los sistemas (1.1) y (1.2) son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$.*

Demostración. Note que para un arbitrario $t \in \mathbb{R}_0^+$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u} ds &= \int_0^t \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u} ds + \int_t^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{u} ds \\ &= \int_0^t \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}\right\| \mathfrak{u} ds + \int_t^\infty \left\|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}\right\| \mathfrak{u} ds \\ &\leq \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\mathfrak{K}\mathfrak{u} ds + \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)}\mathfrak{K}\mathfrak{u} ds \\ &\leq \mathfrak{K}\mathfrak{u}\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{\mathfrak{K}\mathfrak{u}}{\lambda} \leq \frac{2\mathfrak{K}\mathfrak{u}}{\lambda}, \end{aligned}$$

por lo que **(c3)** se cumple. Análogamente

$$\int_0^\infty \left\|\mathscr{G}(t,s)\right\| \mathfrak{v}(s) ds \leq \frac{2\mathfrak{K}\mathfrak{v}}{\lambda} < 1,$$

de donde **(c4)** se verifica. Finalmente, para un $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\tau^\infty \mathfrak{K}\mathfrak{v} e^{-(\lambda+\alpha)s} \exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(r)\| + \mathfrak{v}dr\right) ds &\leq \int_\tau^\infty \mathfrak{K}\mathfrak{v} e^{-(\lambda+\alpha)s} \exp\left(\int_\tau^s M + \mathfrak{v}dr\right) ds \\
&= \int_\tau^\infty \mathfrak{K}\mathfrak{v} e^{-(\lambda+\alpha)s} e^{(M+\mathfrak{v})(s-\tau)} ds \\
&= e^{-(M+\mathfrak{v})\tau} \mathfrak{K}\mathfrak{v} \int_\tau^\infty e^{(M+\mathfrak{v}-\lambda-\alpha)s} ds < +\infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto **(c7)** se satisface. Así, aplicando el Teorema 2.2.4, los sistemas son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$. ■

Observación 2.2.8. *En el corolario anterior, sería ideal imponer una condición más débil, como $M + \mathfrak{v} < \lambda$ y $\mathfrak{v}(s) = \mathfrak{v}$ constante, pero, como se ilustró en el Lema 2.2.5, esto es imposible. Algo similar ocurre en el Corolario 2.2.9, que se ve influenciado por el Lema 2.2.6.*

Corolario 2.2.9. *Suponga que se cumple la condición **(c0)**. Suponga también que el sistema (1.1) admite una dicotomía exponencial no uniforme, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ y constantes $C, \lambda, \varepsilon_1 > 0$ tales que*

$$\begin{cases} \|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s)\| \leq Ce^{-\lambda(t-s)+\varepsilon_1 s}, & \forall\ t \geq s \geq 0 \\ \|\mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s)\| \leq Ce^{\lambda(t-s)+\varepsilon_1 s}, & \forall\ 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Además, suponga que para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$ $u \mapsto \mathfrak{f}(t,u)$ es una función de clase C^1 tal que $u \mapsto \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(t,u)$ es un mapeo acotado que satisface

$$|\mathfrak{f}(s,u)| \leq \kappa e^{-\varepsilon_0 s} \tag{2.12}$$

y

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,u)\right\| \leq \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}, \tag{2.13}$$

para $\nu, \kappa, \alpha > 0$ y $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$ dados. Entonces, si $M < \lambda + \alpha$, para $\nu > 0$ suficientemente pequeño, los sistemas (1.1) y (1.2) son C^1-topológicamente equivalentes $\mathbb{R}_0^+$.

Demostración. La condición **(c1)** se verifica fácilmente con $\mathfrak{K}(s) = Ce^{\varepsilon_1 s}$ y $\mathfrak{h}(s) = e^{-\lambda s}$. Note que usando el Teorema del punto medio generalizado, la condición (2.13) implica:

$$|\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}) - \mathfrak{f}(s,\tilde{\mathfrak{y}})| \leq \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}|\mathfrak{y} - \tilde{\mathfrak{y}}|,$$

por lo que la condición **(c2)** se verifica con $\mathfrak{v}(s) = \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}$ y $\mathfrak{u}(s) = \kappa e^{-\varepsilon_0 s}$. Así, la condición **(c3)** se satisface inmediatamente gracias a la desigualdad $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$ y, considerando que ν es suficientemente pequeño, también se satisface **(c4)** de manera análoga a como se demostró en el Corolario 2.2.7. La condición **(c6)** se tiene inmediatamente por hipótesisis. Ahora, denote

$$\Psi_\tau(s) = \exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(r)\| + \mathfrak{v}(r)dr\right).$$

Es fácil ver que $s \geq \tau \geq t$ implica $\Psi_t(s) \leq \Psi_\tau(s)$, por lo que para un $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo

$$\Psi_\tau(s) \leq \Psi_0(s) \leq e^{(M+\nu)s}.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{v}(s)\Psi_\tau(s)ds &\leq \int_0^\infty C\nu e^{-(\lambda+\alpha)s}\Psi_0(s)ds \\ &\leq C\nu\int_0^\infty e^{(M+\nu-\lambda-\alpha)s}ds,\end{aligned}$$

lo que, como $M < \lambda+\alpha$, es finito si suponemos que ν es suficientemente pequeño, en particular, $0 < \nu < \lambda+\alpha-M$. Así, la condición **(c7)** se verifica. Aplicando el Teorema 2.2.4, el Corolario queda demostrado. ■

2.3. Segunda Derivada

Para poder estudiar la segunda derivada del homeomorfismo de equivalencia topológica, nuevamente consideramos la expresión (2.9). Tomando en cuenta los resultados clásicos de diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales (ver por ejemplo Teorema 4.1 en [21]), sabemos que el mapeo $\eta \mapsto \mathfrak{y}(0,\tau,\eta)$ es de clase C^r $(r \geq 1)$ para cada $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo si las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c6)** se satisfacen; por lo tanto, la clase de diferenciabilidad del homeomorfismo descansa en la diferenciabilidad del mapeo $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$.

Lema 2.3.1. *Suponga que se tienen las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c6)-(c7)**, donde **(c6)** se cumple con $r = 2$. También, suponga que hay funciones $\mathfrak{V} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ y $\pi_\tau : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que:*

$$\left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial u^2}(s,u)\right\| \leq \mathfrak{V}(s)\ ,\ \text{para todo } s \in \mathbb{R}_0^+ \tag{2.14}$$

y

$$\left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\| \leq \pi_\tau(s)\ ,\ \text{para todo } s \geq \tau. \tag{2.15}$$

Finalmente, suponga que para cada $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo, las funciones anteriores verifican:

$$\int_\tau^\infty \left(\mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\left\{\pi_\tau(s)\mathfrak{v}(s) + \mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2\right\}\right) ds < +\infty. \tag{2.16}$$

Entonces $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$ es un mapeo de clase C^2.

Demostración. Seguiremos la misma estrategia que utilizamos en el Lema 2.2.2. Establecimos en el Corolario 2.2.3 que para cada $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))}{\partial \eta} = -\int_0^\infty \mathscr{G}(0,s)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta),$$

lo cual podemos utilizar, ya que estamos imponiendo las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c6)-(c7)**, que garantizaban dicho resultado. Denotemos

$$\mathcal{O}_{\tau,\eta}(s) = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta) + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial u^2}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right)^2.$$

Sea $\eta \in \mathbb{R}^d$ fijo y sea $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión propiamente convergente a cero. Elija un $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ arbitrario pero fijo y definimos la sucesión de funciones $(\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta})_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}_0^+$ por:

$$\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta}(s) = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s, \mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta+\delta_n) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta).$$

Así, definimos la sucesión de funciones $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}_0^+$ por:

$$\psi_n(s) = \mathscr{G}(0,s)\frac{\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta}(s) - \mathcal{O}_{\tau,\eta}(s)\delta_n}{|\delta_n|}.$$

Aplicando la condición **(c6)**, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(j) = 0.$$

Recuerde que en la demostración del Lema 2.2.2 mostramos que para todo $s \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,u)\right\| \quad \leq \quad \mathfrak{v}(s),$$

mientras que para $s \geq \tau$

$$\frac{|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n)|}{|\delta_n|} \leq \exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(r)\| + \mathfrak{v}(r)dr\right),$$

y

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \leq \exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(r)\| + \mathfrak{v}(r)dr\right).$$

Además, a partir de las condiciones (2.14) y (2.15) es fácil ver que

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,u) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\tilde{u})\right\| \quad \leq \quad \mathfrak{V}(s)|u-\tilde{u}| \text{ , para todo } s \in \mathbb{R}_0^+$$

y

$$\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\tilde{\eta})\right\| \quad \leq \quad \pi_\tau(s)|\eta-\tilde{\eta}| \text{ , para } s \geq \tau.$$

Con esto en mente, note que para $s \geq \tau$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{O}_{\tau,\eta}(s)\| \quad &\leq \quad \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\| + \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial u^2}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2 \\ &\leq \quad \pi_\tau(s)\mathfrak{v}(s) + \mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(r)\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2.\end{aligned}$$

Por otra parte, para $s \geq \tau$

$$\begin{aligned}
\left\|\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta}(s)\right\| &\leq \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta+\delta_n) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \\
&\leq \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n))\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta+\delta_n) - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n)) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\| \\
&\leq \mathfrak{v}(s)\pi_\tau(s)|\delta_n| + \mathfrak{V}(s)|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta+\delta_n) - \mathfrak{y}(s,\tau,\eta)|\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right) \\
&\leq \left(\mathfrak{v}(s)\pi_\tau(s) + \mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2\right)|\delta_n|.
\end{aligned}$$

Ahora, considere la sucesión de funciones continuas $s \mapsto \dfrac{\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta+\delta_n)\right\|}{|\delta_n|}$ definidas sobre $[0,\tau]$. Estas convergen puntualmente cuando $n \to \infty$ a la función continua $s \mapsto \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|$. Como $[0,\tau]$ es compacto, la convergencia es uniforme, es decir, existe un $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq \hat{n}$ se tiene:

$$\frac{\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta+\delta_n)\right\|}{|\delta_n|} \leq \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\| + 2 \text{ para todo } 0 \leq s \leq \tau.$$

Con esto, podemos notar que para $0 \leq s \leq \tau$ y $n \geq \hat{n}$

$$\left\|\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta}(s)\right\| \leq \left(\mathfrak{v}(s)\left(\left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\| + 2\right) + \mathfrak{V}(s)\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2\right)|\delta_n|,$$

y es claro que, para $s \in [0,\tau]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{O}_{\tau,\eta}(s)\right\| &\leq \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\| + \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial u^2}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right\|\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2 \\
&\leq \left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|\mathfrak{v}(s) + \mathfrak{V}(s)\left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2.
\end{aligned}$$

En resumen, para $s \geq \tau$

$$\begin{aligned}
\left\|\psi_n(s)\right\| &\leq \left\|\mathscr{G}(0,s)\right\|\frac{\left\|\mathfrak{F}_{n,\tau,\eta}(s)\right\| + \left\|\mathcal{O}_{\tau,\eta}(s)\right\||\delta_n|}{|\delta_n|} \\
&\leq 2\left\|\mathscr{G}(0,s)\right\|\left(\mathfrak{v}(s)\pi_\tau(s) + \mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2\right),
\end{aligned}$$

mientras que para $s \in [0,\tau]$ y $n \geq \hat{n}$

$$\big\|\psi_n(s)\big\| \quad \leq \quad \big\|\mathscr{G}(0,s)\big\| \left(\mathfrak{v}(s)\left(2\left\|\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|+2\right)+2\mathfrak{V}(s)\left\|\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2\right).$$

Permitanos definir

$$\mathscr{F}_\tau(s) := \begin{cases} 2\big\|\mathscr{G}(0,s)\big\| \left(\mathfrak{v}(s)\left(\left\|\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|+1\right)+\mathfrak{V}(s)\left\|\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2\right) & ,0 \leq s \leq \tau \\ \\ 2\big\|\mathscr{G}(0,s)\big\| \left(\mathfrak{v}(s)\pi_\tau(s)+\mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\|+\mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2\right) & ,s \geq \tau. \end{cases}$$

Así, podemos notar que $\big\|\psi_n(s)\big\| \leq \mathscr{F}_\tau(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \geq \hat{n}$.

Ahora, observe que utilizando la condición (2.16)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathscr{F}_\tau(s)ds \quad &\leq \quad 2\int_0^\tau \big\|\mathscr{G}(0,s)\big\| \left(\mathfrak{v}(s)\left(\left\|\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\eta^2}(s,\tau,\eta)\right\|+1\right)+\mathfrak{V}(s)\left\|\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\eta}(s,\tau,\eta)\right\|^2\right)ds \\ &\quad +2\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\left(\mathfrak{v}(s)\pi_\tau(s)+\mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\|+\mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2\right)ds < +\infty.\end{aligned}$$

Así, finalmente, utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\partial\mathfrak{w}^*}{\partial\eta}(0;(\tau,\eta+\delta_n))-\frac{\partial\mathfrak{w}^*}{\partial\eta}(0;(\tau,\eta))+\left[\int_0^\infty \mathscr{G}(0,s)\mathcal{O}_{\tau,\eta}(s)ds\right]\delta_n}{|\delta_n|} \quad &= \quad -\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \psi_n(s)ds \\ &= \quad -\int_0^\infty \left(\lim_{n\to\infty}\psi_n(s)\right)=0,\end{aligned}$$

lo que implica que $\eta \mapsto \frac{\partial\mathfrak{w}^*}{\partial\eta}(0;(\tau,\eta))$ es diferenciable, es decir, $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$ es de clase C^2. ■

Corolario 2.3.2. *Si se tienen las condiciones del Lema 2.3.1, entonces para cada $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo se tiene*

$$\frac{\partial^2\mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))}{\partial\eta^2} = -\int_0^\infty \mathscr{G}(0,s)\left[\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial\eta^2}(s,\tau,\eta)+\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial u^2}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\eta}(s,\tau,\eta)\right)^2\right]ds.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la demostración del Lema anterior. ■

Teorema 2.3.3. *Si se tienen las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c7)**, **(c6)** se satisgace con $r=2$, y las condiciones del Lema 2.3.1 se cumplen, entonces (1.1) y (1.2) son C^2-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.8 sabemos que son topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$. Es más, por el Teorema 2.2.4 sabemos que dicha equivalencia topológica es de clase C^1 en $\mathbb{R}_0^+$. Por el Lema 2.3.1 $\eta \mapsto \mathfrak{w}^*(0;(\tau,\eta))$ tiene clase C^2 de diferenciabilidad para todo $\tau \in \mathbb{R}_0^+$, y, sabemos por resultados clásicos de diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales (ver por ejemplo Teorema 4.1 en [21]), que $\eta \mapsto \mathfrak{y}(0,\tau,\eta)$ es de clase C^2 para cada $\tau \in \mathbb{R}_0^+$. Utilizando la expresión (2.9) podemos concluir que $\eta \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\eta)$ es C^2 diferenciable.

Además, como $\mathfrak{G}$ es una equivalencia topológica, sabemos que $\xi \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\xi) - \xi$ es acotado y por tanto $\mathfrak{G}(\tau,\xi) \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$. Esto, combinado con la clase de diferenciabilidad de $\mathfrak{G}$ implica, por el Colorario 2.1 de [33], que $\xi \mapsto \mathfrak{G}(\tau,\xi)$ es un difeomorfismo de clase C^2. Más aún, como $\mathfrak{G}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi)) = \xi$, tenemos

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}(\tau,\xi) = I,$$

y por lo tanto $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}(\tau,\xi) = \left[\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\right]^{-1}$, mientras que, derivando respecto a ξ, tenemos:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \xi^2}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}(\tau,\xi)\right]^2 + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \xi^2}(\tau,\xi) = 0,$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial \xi^2}(\tau,\xi) = -\left[\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\right]^{-1}\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial \xi^2}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\left[\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi}(\tau,\mathfrak{H}(\tau,\xi))\right]^{-2},$$

lo que concluye nuestra demostración. ∎

En lo que prosigue de esta sección estudiaremos una serie de Lemas y Corolarios técnicos que nos llevarán a establecer un Teorema que dará un ejemplo concreto de nuestro resultado principal.

Lema 2.3.4. *Suponiendo que se cumplen las condiciones* **(c0)-(c4)** *y* **(c6)** *se cumple con* $r = 2$*, entonces*

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}(s,\tau,\eta).$$

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathfrak{X}(s,\tau)\eta + \int_\tau^s \mathfrak{X}(s,r)\mathfrak{f}(r,\mathfrak{y}(r,\tau,\eta))dr\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathfrak{X}(s,\tau) + \frac{\partial}{\partial \eta}\int_\tau^s \mathfrak{X}(s,r)\mathfrak{f}(r,\mathfrak{y}(r,\tau,\eta))dr\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathfrak{X}(s,\tau) + \int_\tau^s \mathfrak{X}(s,r)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(r,\mathfrak{y}(r,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(r,\tau,\eta)dr\right).
\end{aligned}$$

Note que la última igualdad se verifica a través del Teorema de la Convergencia Dominada, ya que, utilizando **(c6)**, esta derivada parcial se trata de un límite de funciones continuas que convergen a una función continua sobre un intervalo compacto, por lo que la convergencia es uniforme.

Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta) &= \mathfrak{A}(s)\mathfrak{X}(s,\tau)+\int_\tau^s \mathfrak{A}(s)\mathfrak{X}(s,r)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(r,\mathfrak{y}(r,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(r,\tau,\eta)dr\\
&\quad +\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\\
&= \mathfrak{A}(s)\left(\mathfrak{X}(s,\tau)+\int_\tau^s \mathfrak{X}(s,r)\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(r,\mathfrak{y}(r,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(r,\tau,\eta)dr\right)\\
&\quad +\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\\
&= \mathfrak{A}(s)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)\\
&= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mathfrak{A}(s)\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)+\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}(s,\tau,\eta).
\end{aligned}
$$

■

Corolario 2.3.5. *Suponiendo que se cumplen las condiciones* ***(c0)-(c4)*** *y* ***(c6)*** *se cumple con* $r=2$, *entonces* $\eta \mapsto \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(t,\tau,\eta)$ *está bien definido para todo* $t \geq \tau$ *y* $t \mapsto z(t,\tau,\eta) := \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(t,\tau,\eta)$ *es solución del problema de valores iniciales matricial:*

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
z'(t) &=& \left[\mathfrak{A}(t)+\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(t,\mathfrak{y}(t,\tau,\eta)\right]z(t)\\
\\
z(\tau) &=& I.
\end{array}
\right.
\tag{2.17}
$$

Demostración. Basta con notar que a partir de

$$
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}(s,\tau,\eta)=\mathfrak{A}(s)\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)+\mathfrak{f}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)),
$$

derivando respecto a η obtenemos:

$$
\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}(s,\tau,\eta)=\mathfrak{A}(s)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta),
$$

de donde, aplicando el Lema 2.3.4

$$
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)=\left[\mathfrak{A}(s)+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right]\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta),
$$

además, es claro que $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(\tau,\tau,\eta)=\frac{\partial}{\partial \eta}\eta = I$. ■

Lema 2.3.6. *Suponiendo que se cumplen las condiciones* ***(c0)-(c4)*** *y* ***(c6)*** *se cumple con* $r=2$. *Si* $s \mapsto \mathfrak{V}(s)$ *satisface (2.14), entonces para* $s \geq \tau$

$$
\left\|\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta)\right\| \leq \exp\left(\int_\tau^s \|\mathfrak{A}(p)\|+\mathfrak{v}(p)dp\right)\cdot\int_\tau^s\left\{\mathfrak{V}(p)\exp\left(2\int_\tau^p\|\mathfrak{A}(r)\|+\mathfrak{v}(r)dr\right)\right\}dp.
$$

Demostración. Sean $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^n$ y $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo. Sean $s \mapsto z(s,\tau,\eta) := \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\eta)$ y $s \mapsto z(s,\tau,\tilde{\eta}) := \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\tilde{\eta})$. Sabemos por el Corolario 2.3.5 que:

$$z'(s,\tau,\eta) = \left[\mathfrak{A}(s) + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right] z(s,\tau,\eta),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
z'(s,\tau,\eta) - z'(s,\tau,\tilde{\eta}) &= \mathfrak{A}(s)\big(z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big) + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))z(s,\tau,\eta) \\
&\quad -\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta}))z(s,\tau,\tilde{\eta}) \\
&= \mathfrak{A}(s)\big(z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big) \\
&\quad +\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))z(s,\tau,\eta) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))z(s,\tau,\tilde{\eta}) \\
&\quad -\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta}))z(s,\tau,\tilde{\eta}) + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))z(s,\tau,\tilde{\eta}) \\
&= \left[\mathfrak{A}(s) + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta))\right]\big(z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big) \\
&\quad + \left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta}))\right] z(s,\tau,\tilde{\eta}).
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\big\|z'(s,\tau,\eta) - z'(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| &\leq \left\|\mathfrak{A}(s) + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)\right\| \big\|z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| \\
&\quad + \left\|\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\eta)) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta}))\right\| \big\|z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| \\
&\leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big)\big\|z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| \\
&\quad + \mathfrak{V}(s)\left|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})\right| \big\|z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\|.
\end{aligned}$$

Recuerde que en la demostración del Lema 2.2.2 mostramos que para todo $s \geq \tau$

$$\big\|z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| = \left\|\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \eta}(s,\tau,\tilde{\eta})\right\| \leq \exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)$$

y

$$|\mathfrak{y}(s,\tau,\eta) - \mathfrak{y}(s,\tau,\tilde{\eta})| \leq |\eta - \tilde{\eta}| \exp\left(\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right).$$

Juntando esta información obtenemos

$$\begin{aligned}
\big\|z'(s,\tau,\eta) - z'(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| &\leq \Big(\big\|\mathfrak{A}(s)\big\| + \mathfrak{v}(s)\Big)\big\|z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta})\big\| \\
&\quad + \mathfrak{V}(s)\exp\left(2\int_\tau^s \big\|\mathfrak{A}(r)\big\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)|\eta - \tilde{\eta}|,
\end{aligned}$$

o equivalentemente, para $p \in [\tau, s]$

$$\begin{aligned}
\frac{\left\| z'(p,\tau,\eta) - z'(p,\tau,\tilde{\eta}) \right\|}{|\eta - \tilde{\eta}|} &\leq \left(\left\| \mathfrak{A}(p) \right\| + \mathfrak{v}(p) \right) \frac{\left\| z(p,\tau,\eta) - z(p,\tau,\tilde{\eta}) \right\|}{|\eta - \tilde{\eta}|} \\
&\quad + \mathfrak{V}(p) \exp\left(2 \int_\tau^p \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right).
\end{aligned}$$

Note también que

$$\begin{aligned}
z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta}) &= z(\tau,\tau,\eta) + \int_\tau^s z'(p,\tau,\eta)dp - z(\tau,\tau,\tilde{\eta}) - \int_\tau^s z'(p,\tau,\tilde{\eta})dp \\
&= \int_\tau^s z'(p,\tau,\eta) - z'(p,\tau,\tilde{\eta})dp,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\left\| z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta}) \right\| \leq \int_\tau^s \left\| z'(p,\tau,\eta) - z'(p,\tau,\tilde{\eta}) \right\| dp$, o equivalentemente

$$\phi(s) := \frac{\left\| z(s,\tau,\eta) - z(s,\tau,\tilde{\eta}) \right\|}{|\eta - \tilde{\eta}|} \leq \int_\tau^s \frac{\left\| z'(p,\tau,\eta) - z'(p,\tau,\tilde{\eta}) \right\|}{|\eta - \tilde{\eta}|} dp,$$

de esto concluimos

$$\phi(s) \leq \int_\tau^s \left\{ \left(\left\| \mathfrak{A}(p) \right\| + \mathfrak{v}(p) \right) \phi(p) + \mathfrak{V}(p) \exp\left(2 \int_\tau^p \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right) \right\} dp,$$

o alternativamente, escribiendo para $s \geq \tau$

$$\alpha(s) = \left\| \mathfrak{A}(s) \right\| + \mathfrak{v}(s)$$

y

$$\beta_\tau(s) = \mathfrak{V}(s) \exp\left(2 \int_\tau^s \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right),$$

escribimos

$$\phi(s) \leq \int_\tau^s \alpha(p)\phi(p) + \beta_\tau(p)dp$$

o bien, considerando

$$\theta(s) = \int_\tau^s \beta_\tau(p)dp,$$

la cual, podemos observar que es creciente para $s \geq \tau$. Tenemos

$$\phi(s) \leq \theta(s) + \int_\tau^s \alpha(p)\phi(p)dp,$$

de donde, utilizando la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$\begin{aligned}
\phi(s) &\leq \theta(s) \exp\left(\int_\tau^s \alpha(p)dp \right) \\
&= \int_\tau^s \left\{ \mathfrak{V}(p) \exp\left(2 \int_\tau^p \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right) \right\} dp \cdot \exp\left(\int_\tau^s \left\| \mathfrak{A}(p) \right\| + \mathfrak{v}(p) dp \right),
\end{aligned}$$

lo que, por la definición de $\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta) \right\|$, concluye la demostración. ■

Corolario 2.3.7. *Suponiendo que se cumplen las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c6)** se cumple con $r = 2$. Si en **(c2)** se tiene $\mathfrak{v}(s) = \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}$ y $\mathfrak{V}(s) = \zeta e^{-(\varepsilon_2+\beta)s}$ satisface (2.14), con $\alpha, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \nu, \zeta > 0$, entonces para $s \geq \tau$:*

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta) \right\| \leq \frac{\zeta e^{-3\tau(M+\nu)}}{2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)} \left[e^{\left(3(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)s} - e^{\left(2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)\tau+(M+\nu)s} \right].$$

Demostración. Utilizando el Lema 2.3.6, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \eta^2}(s,\tau,\eta) \right\| &\leq \exp\left(\int_\tau^s \left\| \mathfrak{A}(p) \right\| + \mathfrak{v}(p) dp \right) \cdot \int_\tau^s \left\{ \mathfrak{V}(p) \exp\left(2 \int_\tau^p \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right) \right\} dp \\
&\leq e^{(s-\tau)(M+\nu)} \int_\tau^s \left\{ \zeta e^{-(\varepsilon_2+\beta)p} e^{2(p-\tau)(M+\nu)} \right\} dp \\
&= e^{(s-\tau)(M+\nu)} \zeta e^{-2\tau(M+\nu)} \int_\tau^s e^{\left(2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)p} dp \\
&= \zeta e^{(s-3\tau)(M+\nu)} \frac{e^{\left(2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)s} - e^{\left(2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)\tau}}{2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)} \\
&= \frac{\zeta e^{-3\tau(M+\nu)}}{2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)} \left[e^{\left(3(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)s} - e^{\left((2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)\tau+(M+\nu)s} \right]
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.8. *Suponga que se tiene la condición **(c0)**. Suponga también que el sistema (1.1) admite una dicotomía exponencial no uniforme, es decir, hay dos proyectores complementarios invariates $\mathfrak{P}(\cdot)$ y $\mathfrak{Q}(\cdot)$ y constantes $C, \lambda, \varepsilon_1 > 0$ tales que*

$$\begin{cases} \left\| \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{P}(s) \right\| \leq Ce^{-\lambda(t-s)+\varepsilon_1 s}, & \forall\ t \geq s \geq 0 \\ \left\| \mathfrak{X}(t,s)\mathfrak{Q}(s) \right\| \leq Ce^{\lambda(t-s)+\varepsilon_1 s}, & \forall\ 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

Además, suponga que para cada $s \in \mathbb{R}_0^+$, $u \mapsto \mathfrak{f}(s,u)$ es una función de clase C^2 tal que

$$|\mathfrak{f}(s,u)| \leq \kappa e^{-\varepsilon_0 s},$$

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,u) \right\| \leq \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}$$

y

$$\left\| \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,u) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}(s,\tilde{u}) \right\| \leq \zeta e^{-(\varepsilon_2+\beta)s}|u-\tilde{u}|, \tag{2.18}$$

para $\kappa, \nu, \zeta > 0$ y $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$ dados. Entonces, si $3M < \lambda+\varepsilon_2+\beta+\alpha$, $2M < \lambda+\beta+\varepsilon_2-\varepsilon_1$ y $M < \lambda+\alpha$, para $\nu > 0$ suficientemente pequeño, los sistemas (1.1) y (1.2) son C^2-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$.

Demostración. Por el Corolario 2.2.9 sabemos que se cumplen las condiciones **(c0)-(c4)** y **(c6)-(c7)** y por tanto los sistemas son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}_0^+$. En particular, **(c4)** se cumple con $\mathfrak{v}(s) = \nu e^{-(\varepsilon_1+\alpha)s}$.

Es fácil ver que la hipótesis (2.18) implica la condición (2.14) del Lema 2.3.1, con $\mathfrak{V}(s) = \zeta e^{-(\varepsilon_2+\beta)s}$. Ahora aplicaremos la misma estrategia que utilizamos en la demostración del Corolario 2.2.9. Tal como en esa ocasión, denote

$$\Psi_\tau(s) = \exp\left(\int_\tau^s \left\| \mathfrak{A}(r) \right\| + \mathfrak{v}(r) dr \right),$$

y nuevamente notamos que $s \geq \tau \geq t$ implica $\Psi_t(s) \leq \Psi_\tau(s)$, por lo que para un $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ fijo

$$\Psi_\tau(s) \leq \Psi_0(s) \leq e^{(M+\nu)s},$$

y en consecuencia

$$\Psi_\tau(s)^2 \leq \Psi_0(s)^2 \leq e^{2(M+\nu)s}.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{V}(s)\Psi_\tau(s)^2 ds &\leq \int_0^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{V}(s)\Psi_0(s)^2 ds \\ &\leq C\zeta \int_0^\infty e^{\left(-\lambda-\varepsilon_2-\beta+\varepsilon_1+2(M+\nu)\right)s} ds.\end{aligned}$$

Como $2M < \lambda + \beta + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, entonces, para ν suficientemente pequeño se tiene

$$\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\mathfrak{V}(s)\left[\exp\left(\int_\tau^s \left\|\mathfrak{A}(r)\right\| + \mathfrak{v}(r)dr\right)\right]^2 ds < +\infty. \tag{2.19}$$

Ahora, por el Corolario 2.3.7, sabemos que

$$\pi_\tau(s) := \frac{\zeta e^{-3\tau(M+\nu)}}{2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)}\left[e^{\left(3(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)s} - e^{\left(2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)\right)\tau+(M+\nu)s}\right],$$

satisface la condición (2.15) del Lema 2.3.1. Ahora note que

$$\int_\tau^\infty \mathfrak{K}(s)\mathfrak{h}(s)\pi_\tau(s)\mathfrak{v}(s)ds = \int_\tau^\infty K_\tau \left[e^{\left(3(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta+\lambda+\alpha)\right)s} - \frac{e^{(M+\nu-\lambda-\alpha)s}}{e^{\left((\varepsilon_2+\beta)-2(M+\nu)\right)\tau}}\right] ds < +\infty,$$

para ν suficientemente pequeño, pues $3M < \varepsilon_2 + \beta + \lambda + \alpha$, donde $K_\tau = \frac{C\zeta\nu e^{-3\tau(M+\nu)}}{2(M+\nu)-(\varepsilon_2+\beta)}$. Así, el argumento anterior junto con (2.19) implican que la condición (2.16) del Lema 2.3.1 se satisface. Finalmente, aplicando el Teorema 2.3.3 obtenemos el resultado. ■

Observación 2.3.9. *En el resultado anterior, si $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 := \varepsilon$ y $\alpha = \beta$, entonces las condiciones $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$, $3M < \lambda + \varepsilon_2 + \beta + \alpha$, $2M < \lambda + \beta + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ y $M < \lambda + \alpha$, se pueden resumir con $2M < \lambda + \alpha$, puesto que, como se mostró en el Lema 2.2.6, siempre se tiene $\lambda \leq M + \varepsilon$.*

Capítulo 3

LINEALIZACIÓN EN EL CONTEXTO DISCRETO

3.1. Equivalencia Topológica

En esta sección entregaremos las definiciones y principales hipótesis bajo las cuales trabajaremos, analizando cual es su origen y principales aplicaciones. Estudiamos los sistemas discretos no autónomos:

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{3.1}$$

y

$$y(k+1) = A(k)y(k) + f(k, y(k)), \tag{3.2}$$

donde $A : \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ y $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, satisfaciendo propiedades que serán especificadas más tarde. Sus soluciones son en cada caso una función $x, y : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^d$, y denotaremos $n \mapsto x(n, k, \xi)$ y $n \to y(n, k, \eta)$ para las soluciones de (3.1) y (3.2) que pasen por ξ y η respectivamente en $n = k$.

Definición 3.1.1. *Una matriz fundamental para el sistema (3.1) es una función matricial $\Phi : \mathbb{Z}^+ \to M_d(\mathbb{R})$ tal que sus columnas forman una base de soluciones de (3.1) y satisface la ecuación matricial en diferencias*

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n).$$

Definición 3.1.2. *La matriz de transición (3.1) es la función matricial $\Phi : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ dada por:*

$$\Phi(k,n) = \begin{cases} A(k-1)A(k-2)\cdots A(n) & \textit{si} \quad k > n \\ I & \textit{si} \quad k = n \\ A^{-1}(k)A^{-1}(k+1)\cdots A^{-1}(n-1) & \textit{si} \quad k < n. \end{cases}$$

Definición 3.1.3. *Dos proyecciones complementarias P y Q se dicen invariantes para (3.1) si para cada $k, n \in \mathbb{Z}^+$ satisfacen:*

$$P(k)\Phi(k,n) = \Phi(k,n)P(n) \ \textit{y} \ Q(k)\Phi(k,n) = \Phi(k,n)Q(n).$$

Para nuestro estudio vamos a considerar las siguientes propiedades:

(d0) $A : \mathbb{Z}^+ \to M_{d\times d}(\mathbb{R})$ es no singular (*i.e.* tiene imágenes invertibles) y es uniformemente acotada, es decir, existe $M > 1$ tal que

$$\text{máx}\left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^+}\left\|A(k)\right\|, \sup_{k\in\mathbb{Z}^+}\left\|A^{-1}(k)\right\|\right\} = M.$$

(d1) El sistema (3.1) admite una dicotomía no uniforme, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ tales que $P(n) + Q(n) = I$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, una sucesión no negativa D y una sucesión monótona decreciente convergente a cero h con $h(0) = 1$ tal que

$$\begin{cases} \big\|\Phi(k,n)P(n)\big\| \leq D(n)\left(\dfrac{h(k)}{h(n)}\right), & \forall\; k \geq n \geq 0 \\ \\ \big\|\Phi(k,n)Q(n)\big\| \leq D(n)\left(\dfrac{h(n)}{h(k)}\right), & \forall\; 0 \leq k \leq n, \end{cases}$$

donde $\Phi(k,n)$ es la matriz de transición de (3.1).

(d2) Existen $\mu, \gamma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ sucesiones tales que para todos $k \in \mathbb{Z}^+$ y cada par $(y, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tenemos:

$$|f(k,y) - f(k,\tilde{y})| \leq \gamma(k)|y - \tilde{y}| \;;\; |f(k,y)| \leq \mu(k).$$

(d3) La sucesión μ definida antes verifica:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(k,j+1)\big\|\,\mu(j) \leq p < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+,$$

donde $\mathcal{G}$ es el operador de Green asociado a la dicotomía establecida en **(d1)**.

(d4) La sucesión γ definida antes verifica:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(k,j+1)\big\|\,\gamma(j) \leq q < 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

(d5) La sucesión γ y la función matricial A verifican

$$\Big\|A^{-1}(k)\gamma(k)\Big\| < 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

(d6) El mapeo $u \mapsto f(k,u)$ y sus derivadas respecto a u hasta el orden r ($r \geq 1$) son funciones continuas de $(k,u) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^d$ y $\sup_{u \in \mathbb{R}^d}\Big\|\frac{\partial f}{\partial u}(k,u)\Big\| < +\infty$ es acotada.

(d7) Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo, las sucesiones D, h y γ satisfacen:

$$\sum_{j=m}^{\infty}\left(D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\left[\prod_{p=m}^{j-1}\big\|A(p)\big\| + \gamma(p)\right]\right) < +\infty.$$

Observación 3.1.4. *Se sabe, por el Lema 2.2 de [1], que la condición* ***(d0)*** *es equivalente a las siguientes propiedades:*

a) El sistema (3.1) tiene crecimiento acotado en $\mathbb{Z}^+$, es decir:

$$\big\|\Phi(n,\ell)\big\| \leq M^{|n-m|}\;,\; \textit{para todos } n,m \in \mathbb{Z}^+.$$

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ existe un $\delta := \delta(k,\epsilon) > 0$ tal que para $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, con $|\xi - \eta| < \delta$, se sigue que:

$$|\Phi(n,m)(\xi - \eta)| < \epsilon \textit{ para todos } n,m \in \mathbb{Z}^+ \textit{ que cumplan } |n - m| < k.$$

En [14] se exploran en detalle las propiedades sobre el crecimiento acotado. Además, la invertibilidad de $A(\cdot)$ es una propiedad escencial en la literatura de linealización topológica.

Observación 3.1.5. *Note cómo la condición **(d1)** generaliza a la dicotomía exponencial que mostramos en la Definición 1.2.2, claramente siendo adaptada para el contexto discreto. En efecto, considerando D constante y $h(n) = \theta^n$, con $\theta \in (0,1)$ recuperamos la definición de dicotomía exponencial discreta.*

Note también que hemos llamado no homogénea a nuestra dicotomía. Este nombre hace referencia al hecho de que podemos considerar una sucesión D no constante.

Observación 3.1.6. *El operador de Green para el sistema (3.1) asociado a la dicotomía **(d1)**, que fue mencionado antes, es la función matricial $\mathcal{G} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ dada por:*

$$\mathcal{G}(k,n) = \begin{cases} \Phi(k,n)P(n) & \forall\ k \geq n \geq 0 \\ \\ -\Phi(k,n)Q(n) & \forall\ 0 \leq k < n, \end{cases}$$

y se puede verificar fácilmente que satisface:

$$\mathcal{G}(k+1,n) = A(k)\mathcal{G}(k,n) \text{ and } \mathcal{G}(n,n) = I + A(n-1)\mathcal{G}(n-1,n).$$

Observación 3.1.7. *Los proyectores P y Q han sido llamados invariantes para (3.1), lo que significa que para cada $k,n \in \mathbb{Z}^+$ verifican:*

$$P(k)\Phi(k,n) = \Phi(k,n)P(n) \text{ y } Q(k)\Phi(k,n) = \Phi(k,n)Q(n).$$

Observación 3.1.8. *La condición **(d5)** fue utilizada en [9] por A. Castañeda, P. González y G. Robledo como una suposición técnica que asegura que toda solución $n \mapsto y(n,k,\eta)$ del sistema no homogéneo (3.2) que pasa por $\eta \in \mathbb{R}^d$ cuando $n = k$ puede extenderse retrospectivamente hasta cualquier $n \in \{0,\ldots,k-1\}$. En efecto, note que $y(k-1,k,\eta)$ puede ser visto como el único punto fijo del mapeo $\Upsilon_{k-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dado por $\Upsilon_k(u) = A^{-1}(k-1)\eta - A^{-1}(k-1)f(k-1,u)$, y de manera análoga se pueden encontrar $y(n.k,\eta)$ para $n \in \{0,\ldots,k-2\}$. Esta condición ya había sido considerada anteriormente en [36]. Note finalmente que la condición **(d4)** implica que:*

$$\left\|Q(\ell)A^{-1}(\ell)\gamma(\ell)\right\| < q - \sum_{j=0, j\neq\ell}^{\infty} \left\|\mathcal{G}(\ell,j+1)\gamma(j)\right\| < q < 1,$$

*lo que es una versión más débil de **(d5)**.*

Observación 3.1.9. *Hemos notado que algunos autores ([17], por ejemplo) asumen que esta continuación retrospectiva se puede encontrar de manera única incluso sin cumplir la condición **(d5)**, por lo que en futuros trabajos exploraremos la posibilidad de eliminar o transformar esta hipótesis.*

Observación 3.1.10. *Note como nuestras condiciones **(d0)-(d7)** imitan a las que estudiamos en la sección 2.1, siendo adaptadas para el marco discreto. En la sección 2.1 no necesitabamos imponer una condición de continuación retrospectiva de soluciones, pues en el marco continuo esta propiedad es conocida, no obstante, al pasar al marco discreto debemos considerarla.*

Definición 3.1.11. *Sea $J \subset \mathbb{Z}$ un intervalo de números enteros. Los sistemas (3.1) y (3.2) son J-topológicamente equivalentes si existe una función $H : J \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que satisface:*

i) Si $x(k)$ es una solución de (3.1), entonces $H[k,x(k)]$ es una solución de (3.2).

ii) $H(k,u)-u$ *es acotada sobre* $J\times\mathbb{R}^d$.

iii) *Para cada* $k\in J$ *fijo, el mapeo* $u\mapsto H(k,u)$ *es un homeomorfismo de* $\mathbb{R}^d$.

Más aún, la función $u\mapsto G(k,u)=H^{-1}(k,u)$ *satisface ii) y iii) y mapea soluciones de (3.2) en soluciones de (3.1).*

Observación 3.1.12. *Note que esta definición imita a la caracterización que nos entregó el Teorema 1.2.6, con la única diferencia que ahora nuestra variable temporal está indexada por un intervalo* $J\subset\mathbb{Z}$ *en vez de el cuerpo continuo* $\mathbb{R}$.

Observación 3.1.13. *Las condiciones **(d2)**, **(d3)** y **(d4)** son hipótesis estándar en la literatura de linearización. Note estas son una generalización de las exigidas en el Teorema 1.2.6, acondicionadas para el contexto discreto. Estas tres condiciones, tal como antes, se utilizan para garantizar la existencia y unicidad de soluciones a sistemas auxiliares que permiten constuir el homeomorfismo de equivalencia topológica.*

*Cabe mencionar que estas no son la única configuración de hipótesis que permiten construir dicho homeomorfismo, pues, como se mencioó en la introducción, gran parte del trabajo en teoría de linealización durante las últimas décadas se ha tratado de buscar condiciones que las generalicen. En efecto, en [17] se ataca un problema similar al nuestro, pero la hipótesis **(d3)** no se considera y **(d2)** sólo se impone parcialmente. Referimos al lector al trabajo de W. Coppel [14] para una revisión más profunda de las distintas posibilidades de hipótesis que se han impuesto con este fin en el contexto continuo.*

Ahora presentaremos uno de los resultados más importantes para el desarrollo de este trabajo, algunas de sus consecuencias y casos particulares.

Teorema 3.1.14. *[9, Theorem 2.1] Si se satisfacen las condiciones **(d0)-(d5)**, Entonces los sistemas (3.1) y (3.2) son* $\mathbb{Z}^+-$*topológicamente equivalentes.*

Demostración. Desarrollaremos la demostración en varios pasos.

Paso 1: Construcción de funciones auxiliares. Sean $k\mapsto x(k,m,\xi)$ y $k\mapsto y(k,m,\eta)$ las respectivas soluciones de (3.1) y (3.2) con condiciones iniciales ξ y η en $k=m$. Ahora, permítanos introducir el siguiente mapeo:

$$\begin{aligned} w^*(k;(m,\eta)) &= -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,m,\eta)) \\ &= -\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)P(j+1)f(j,y(j,m,\eta)) \\ &\quad +\sum_{j=k}^{\infty}\Phi(k,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,m,\eta)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Note que la extensión retrospectiva mencionada en la Observación 3.1.8 en este trabajo una hipótesis necesaria para que el mapeo $k\mapsto w^*(k;(m,\eta))$ este bien definido. Es fácil verificar que este mapeo es solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} w(k+1) &= A(k)w(k)-f(k,y(k,m,\eta)) \\ w(0) &= -\sum_{j=0}^{\infty}\Phi(0,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,m,\eta)) \end{cases}.$$

Por otra parte, para cada $(m,\xi) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^d$ definimos el mapeo $\Theta : \ell^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^d) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^d)$ dado por:

$$(\Theta\phi)(k;(m,\xi)) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}(k,j+1) f(j, x(j,m,\xi) + \phi(j;(m,\xi))),$$

el cual queda bien definido gracias a las condiciones **(d2)** y **(d3)**.

Ahora, considere $k \mapsto \phi(k;(m,\xi))$ y $k \mapsto \psi(k;(m,\xi))$ sucesiones en $\ell^\infty(\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^d)$ y funciones continuas de ξ. Estas son herramientas auxiliares para definir

$$F(j,m,\xi) := f(j, x(j,m,\xi) + \phi(j;(m,\xi))) - f(j, x(j,m,\xi) + \psi(j;(m,\xi))),$$

el cual es a su vez una herramienta para desarrollar el siguiente argumento. Usando las condiciones **(d1)-(d2)-(d4)** podemos notar que

$$\begin{aligned}
|(\Theta\phi)(k;(m,\xi)) - (\Theta\psi)(k;(m,\xi))| &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} |\mathcal{G}(k,j+1)F(j,m,\xi)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma(j) \cdot \big\|\mathcal{G}(k,j+1)\big\| \cdot \|\phi - \psi\|_\infty \\
&\leq q\|\phi - \psi\|_\infty .
\end{aligned}$$

Así, usando el Teorema de punto fijo de Banach concluimos la existencia de un único punto fijo:

$$z^*(k;(m,\xi))) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{G}(k,j+1) f(j, x(j,m,\xi) + z^*(j;(m,\xi))), \tag{3.4}$$

y se verifica fácilmente que este mapeo es solución del problema de valores iniciales:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
z(k+1) &=& A(k)z(k) + f(k, x(k,m,\eta) + z(k)) \\
\\
z(0) &=& -\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \Phi(0,j+1)Q(j+1) f(j, x(j,m,\eta) + z^*(j;(m,\xi))).
\end{array}\right. \tag{3.5}$$

Paso 2: Construir H y $G = H^{-1}$. Por la unicidad de soluciones tenemos

$$x(k,m,\xi) = x(k,p,x(p,m,\xi)) \text{ , para todo } k,p,m \in \mathbb{Z}^+, \tag{3.6}$$

y de manera análoga se puede verificar que

$$z^*(k;(m,\xi)) = z^*(k;(p,x(p,m,\xi))) \text{ , para todo } k,p,m \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.7}$$

Para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo construimos los mapeos $H(k,\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y $G(k,\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dados por

$$\left\{\begin{array}{rcl}
H(k,\xi) &=& \xi + \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{G}(k,j+1) f(j, x(j,k,\xi) + z^*(j;(k,\xi))) \\
\\
&=& \xi + z^*(k;(k,\xi))
\end{array}\right. \tag{3.8}$$

y

$$\begin{cases} G(k,\eta) &=& \eta - \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{G}(k,j+1) f(j, y(j,k,\eta)) \\ \\ &=& \eta + w^*(k;(k,\eta)). \end{cases} \tag{3.9}$$

Como $k \mapsto z^*(k;(k,\xi))$ y $k \mapsto w^*(k;(k,\eta))$ son sucesiones uniformemente acotadas, entonces tanto H como G cumplen la condición ii) de la Definición 3.1.11. Ahora, para estudiar otras propiedades adicionales de G considere el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y(n+1) &=& A(n)y(n) + f(n, y(n)) \\ \\ y(k) &=& \eta. \end{cases} \tag{3.10}$$

Si $n < k$ tenemos

$$y(n,k,\eta) = \Phi(n,k)\eta - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n,j+1) f(j, y(j,k,\eta)), \tag{3.11}$$

lo que, multiplicando por izquierda por $\Phi(k,n)$, es equivalente a

$$\begin{aligned} \Phi(k,n)y(n,k,\eta) &= \eta - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(k,j+1) f(j, y(j,k,\eta)) \\ &= \eta - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(k,j+1)\{P(j+1) + Q(j+1)\} f(j, y(j,k,\eta)) \\ &= \eta - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(k,j+1) P(j+1) f(j, y(j,k,\eta)) \\ &\quad - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(k,j+1) Q(j+1) f(j, y(j,k,\eta)). \end{aligned}$$

En particular, para $n=0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(k,0)y(0,k,\eta) &= \eta - \sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)P(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&= \eta - \sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k,j+1)P(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&\quad + \sum_{j=k}^{\infty}\Phi(k,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\infty}\Phi(k,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&= \eta - \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\infty}\Phi(k,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta)) \\
&= G(k,\eta) - \Phi(k,0)\sum_{j=0}^{\infty}\Phi(0,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta)).
\end{aligned}$$

Así, utilizando la definición del mapeo $n \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ podemos deducir que:

$$\begin{aligned}
G(k,\eta) &= \Phi(k,0)\left\{y(0,k,\eta) + \sum_{j=0}^{\infty}\Phi(0,j+1)Q(j+1)f(j,y(j,k,\eta))\right\} \\
&= \Phi(k,0)\left\{y(0,k,\eta) + w^*(0;(k,\eta))\right\}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Paso 3: H mapea soluciones de (3.1) en soluciones de (3.2) y G mapea soluciones de (3.2) en soluciones de (3.1).

Utilizando (3.6), (3.7) y (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}
H[k,x(k,m,\xi)] &= x(k,m,\xi) + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi)+z^*(j;(m,\xi))) \\
&= x(k,m,\xi) + z^*(k;(m,\xi)),
\end{aligned}$$

lo que alternativamente podemos describir como

$$H[k,x(k,m,\xi)] = x(k,m,\xi) + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,H[j,x(j,m,\xi)]).$$

La identidad anterior, combinada con que $k \mapsto x(k,m,\xi)$ es solución de (3.1), $k \mapsto z^*(k;(m,\xi))$ es solución de (3.5), y usando el hecho de que $\mathcal{G}(k+1,j+1) = A(k)\mathcal{G}(k,j)$, podemos demostrar que

$$\begin{aligned} H[k+1,x(k,m,\xi)] &= x(k+1,m,\xi)+z^{*}(k+1;(m,\xi)) \\ &= A(k)\{x(k,m,\xi)+z^{*}(k;(m,\xi))\} \\ &\quad +f(k,x(k,m,\xi)+z^{*}(k;(m,\xi))) \\ &= A(k)H[k,x(k,m,\xi)]+f(k,H[k,x(k,m,\xi)]), \end{aligned}$$

lo que nos permite concluir que $k \mapsto H[k,x(k,m,\xi)]$ es solución de (3.2) pasando por $H(m,\xi)$ en $k=m$. Además, por la unicidad de soluciones, obtenemos

$$H[k,x(k,m,\xi)] = y(k,m,H(m,\xi)).$$

Podemos resumir las diversas caracterizaciones de $H[k,x(k,m,\xi)]$:

$$H[k,x(k,m,\xi)] = \begin{cases} x(k,m,\xi)+z^{*}(k;(m,\xi)) \\ x(k,m,\xi)+\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,H[j,x(j,m,\xi)]) \\ y(k,m,H(m,\xi)). \end{cases} \tag{3.13}$$

Similarmente, la unicidad de soluciones implica la identidad

$$y(k,m,\eta) = y(k,p,y(p,m,\eta)) \text{ para todo } k,p,m \in \mathbb{Z}^{+}, \tag{3.14}$$

lo que nos permite deducir

$$w^{*}(k;(m,\eta)) = w^{*}(k;(p,y(p,m,\eta))) \text{ para todo } k,p,m \in \mathbb{Z}^{+}. \tag{3.15}$$

De la expresión anterior podemos deducir

$$\begin{aligned} G[k,y(k,m,\eta)] &= y(k,m,\eta)-\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,m,\eta)) \\ &= y(k,m,\eta)+w^{*}(k;(m,\eta)). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} G[k+1,y(k+1,m,\eta)] &= y(k+1,m,\eta)+w^{*}(k+1;(m,\eta)) \\ &= A(k)\{y(k,m,\eta)+w^{*}(k;(m,\eta))\} \\ &\quad +f(k,y(k,m,\eta))-f(k,y(k,m,\eta)) \\ &= A(k)G[k,y(k,m,\eta)], \end{aligned}$$

por lo tanto, $k \mapsto G[k,y(k,m,\eta)]$ es solución de (3.1) que pasa por $G(m,\eta)$ en $k=m$. Adicionalmente

$$G[k,y(k,m,\eta)] = x(k,m,G(m,\eta)) = \Phi(k,m)G(m,\eta),$$

que alternativamente, considerando la unicidad de soluciones y utilizando (3.12) y (3.15), se puede formular como

$$G[k,y(k,m,\eta)]=\Phi(k,0)\{y(0,m,\eta)+w^{*}(0;(m,\eta))\}.$$

Así, podemos nuevamente resumir las diversas caracterizaciones de $G[k,y(k,m,\eta)]$:

$$G[k,y(k,m,\eta)]=\begin{cases} y(k,m,\eta)+w^{*}(k;(m,\eta)) \\ \\ x(k,m,G(m,\eta))=\Phi(k,m)G(m,\eta) \\ \\ \Phi(k,0)\{y(0,m,\eta)+w^{*}(0;(m,\eta))\}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Paso 4: $u\mapsto G(k,u)$ y $u\mapsto H(k,u)$ son biyectivas para cada $k\in\mathbb{Z}^{+}$ fijo.

Usando la descripción de $H[k,x(k,m,\xi)]$, combinada con las identidades (3.13) y (3.14), nos permite deducir

$$\begin{aligned} G[k,H[k,x(k,m,\xi)]] &= H[k,x(k,m,\xi)] \\ &\quad -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,k,H[k,x(k,m,\xi)])) \\ &= x(k,m,\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(j+1,k)f(j,H[j,x(j,m,\xi)]) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,k,H[k,x(k,m,\xi)])) \\ &= x(k,m,\xi). \end{aligned}$$

Ahora, para estudiar $H[k,G[k,y(k,m,\eta)]]$, la primera identidad de (3.13) nos permite verificar

$$\begin{aligned} H[j,x(j,k,G[k,y(k,m,\eta)])] &= x(j,k,G[k,y(k,m,\eta)])+z^{*}(j;(k,G[k,y(k,m,\eta)])) \\ &=: L[j,y(k,m,\eta)]. \end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando (3.6), y dos veces la segunda identidad de (3.16), obtenemos

$$\begin{aligned} H[j,x(j,k,G[k,y(k,m,\eta)])] &= H[j,x(j,k,x(k,m,G(m,\eta)))] \\ &= H[j,x(j,m,G(m,\eta))] \\ &= H[j,G[j,y(j,m,\eta)]]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En conjunto estas afirmaciones establecen la identidad

$$H[j,G[j,y(j,m,\eta)]]=L[j,y(k,m,\eta)].$$

Ahora, utilizando la segunda identidad de (3.16), la segunda identidad de (3.13) y la expresión anterior

$$\begin{aligned}
H[k,G[k,y(k,m,\eta)]] &= H[k,x(k,m,G(m,\eta))] \\
&= x(k,m,G(m,\eta)) + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,H[j,x(j,m,G(m,\eta))]) \\
&= G[k,y(k,m,\eta)] + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,H[j,G[k,y(k,m,\eta)]]) \\
&= G[k,y(k,m,\eta)] + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,L[j,y(k,m,\eta)]),
\end{aligned}$$

lo que, aplicando la primera identidad de (3.16) y la definición del mapeo w^* dada en (3.3) nos permite escribir

$$\begin{aligned}
H[k,G[k,y(k,m,\eta)]] &= y(k,m,\eta) - \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,y(j,m,\eta)) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,L[j,y(k,m,\eta)]) \\
&= y(k,m,\eta) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)\{f(j,y(j,m,\eta)) - f(j,L[j,y(k,m,\eta)])\}.
\end{aligned}$$

Ahora, definamos la función

$$w(k) = |H[k,G[k,y(k,m,\eta)]] - y(k,m,\eta)|.$$

Note que utilizando las hipótesis **(d2)** y **(d3)**, tenemos

$$\begin{aligned}
w(k) &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(k,j+1)\big\| \cdot \big\{|f(j,L[j,y(k,m,\eta)])| + |f(j,y(j,m,\eta))|\big\} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(k,j+1)\big\| \cdot 2\mu(j) \leq 2p < \infty,
\end{aligned}$$

con lo que concluimos que $w \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}^d)$. Además, las igualdades anteriores nos permiten obtener:

$$\begin{aligned} w(k) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \cdot |f(j,L[j,y(k,m,\eta)]) - f(j,y(j,m,\eta))| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(j) \left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \cdot |L[j,y(k,m,\eta)] - y(j,m,\eta)| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(j) \left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \cdot |H[j,G[j,y(j,m,\eta)]] - y(j,m,\eta)| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \gamma(j) w(j), \end{aligned}$$

de donde, utilizando la hipótesis **(d4)**, concluimos que $\|w\|_\infty \leq q \cdot \|w\|_\infty$. De modo que $\|w\|_\infty > 0$ implica $q \geq 1$, lo cual es una contradicción. Es decir, $w(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y por lo tanto:

$$H[k, G[k, y(k,m,\eta)]] = y(k,m,\eta) \ , \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

En particular, para $k = m$:

$$H(m, G(m,\eta)) = \eta.$$

Y así concluimos que $u \mapsto H(k,u)$ es una biyección para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y $u \mapsto G(k,u)$ es su inversa.

Paso 5: G es un mapeo continuo.

Por (3.12), basta con verificar que $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ y $\eta \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ son funciones continuas para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Ya establecimos en (3.11) que

$$y(n,k,\eta) = \Phi(n,k)\eta - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n,j+1) f(j, y(j,k,\eta)),$$

y así, aplicando la Observación 3.1.8 tenemos

$$y(k-1,k,\eta) = A^{-1}(k-1)\eta - A^{-1}(k-1) f(k-1, y(k-1,k,\eta)).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |y(k-1,k,\eta) - y(k-1,k,\tilde{\eta})| &\leq \left\|A^{-1}(k-1)\right\| \cdot |\eta - \tilde{\eta}| \\ &\quad + \left\|A^{-1}(k-1)\gamma(k-1)\right\| \cdot |y(k-1,k,\eta) - y(k-1,k,\tilde{\eta})|. \end{aligned}$$

Así, en conjunto con la hipótesis **(d5)**, implica

$$|y(k-1,k,\eta) - y(k-1,k,\tilde{\eta})| \leq \frac{\left\|A^{-1}(k-1)\right\|}{1 - \left\|A^{-1}(k-1)\gamma(k-1)\right\|} |\eta - \tilde{\eta}|. \tag{3.18}$$

Similarmente, se sigue

$$|y(k-2,k,\eta) - y(k-2,k,\tilde{\eta})| \leq \frac{\left\|A^{-1}(k-2)\right\|}{1 - \left\|A^{-1}(k-2)\gamma(k-2)\right\|} |y(k-1,k,\eta) - y(k-1,k,\tilde{\eta})|,$$

que en conjunto con (3.18) nos permite establecer

$$|y(k-2,k,\eta)-y(k-2,k,\tilde{\eta})| \leq \left\{ \prod_{p=k-2}^{k-1} \frac{\left\|A^{-1}(p)\right\|}{1-\left\|A^{-1}(p)\gamma(p)\right\|} \right\} |\eta-\tilde{\eta}|.$$

Así, inductivamente podemos deducir

$$|y(k-j,k,\eta)-y(k-j,k,\tilde{\eta})| \leq \left\{ \prod_{p=k-j}^{k-1} \frac{\left\|A^{-1}(p)\right\|}{1-\left\|A^{-1}(p)\gamma(p)\right\|} \right\} |\eta-\tilde{\eta}|.$$

Para $n<k$, definimos:

$$\mathcal{C}_k(n) = \prod_{p=n}^{k-1} \frac{\left\|A^{-1}(p)\right\|}{1-\left\|A^{-1}(p)\gamma(p)\right\|}, \tag{3.19}$$

lo que nos permite escribir para $n<k$:

$$|y(n,k,\eta)-y(n,k,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{C}_k(n)|\eta-\tilde{\eta}|, \tag{3.20}$$

y en particular:

$$|y(0,k,\eta)-y(0,k,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{C}_k(0)|\eta-\tilde{\eta}|. \tag{3.21}$$

Así, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ es un mapeo continuo. Más aún, para $n>k$, la desigualdad de Gronwall discreta implica

$$|y(n,k,\eta)-y(n,k,\tilde{\eta})| \leq |\eta-\tilde{\eta}| \prod_{p=k}^{n-1} \Big(\left\|A(p)-I\right\| + \gamma(p) \Big), \tag{3.22}$$

en particular, para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $\eta \mapsto y(j,0,\eta)$ es una función continua.

Ahora, verifiquemos que $\eta \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ es un mapeo continuo para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo. Para ello, considere $\eta \in \mathbb{R}^d$ y una sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset \mathbb{R}^d$ que converge a η. Adicionalmente, definimos:

$$a_n(j) = \mathcal{G}(0,j+1)f(j,y(j,0,\eta_n)).$$

Por la hipótesis **(d2)**, para cada $n,j \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$|a_n(j)| \leq \left\|\mathcal{G}(0,j+1)\right\| \mu(j),$$

que gracias a la hipótesis **(d3)** satisface

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\|\mathcal{G}(0,j+1)\right\| \mu(j) < +\infty.$$

Por otra parte, de el hecho de que $v \mapsto f(j,v)$ y $\eta \mapsto y(j,0,\eta)$ son funciones continuas para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} a_n(j) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(0,j+1)f(j,y(j,0,\eta_n)) = \mathcal{G}(0,j+1)f(j,y(j,0,\eta))\ ,\ \forall j \in \mathbb{Z}^+,$$

desde donde, aplicando el Teorema de convergencia dominada tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} w^*(0;(k,\eta_n)) &= \lim_{n\to\infty} -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)f(j,y(j,0,\eta_n))\\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} a_n(j)\\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)f(j,y(j,0,\eta))\\ &= w^*(0;(k,\eta)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eta \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ es continuo. Como $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ es continua, se sigue que G es continua.

Paso 6: H es un mapeo continuo.

Con la finalidad de estudiar la continuidad de H, probaremos que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ el mapeo $\xi \mapsto z^*(k;(k,\xi))$ es continuo, pues $H(k,\xi) = \xi + z^*(k;(k,\xi))$.

Para ello, sea $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ que converge a ξ y $\xi \mapsto \phi(j;(m,\xi))$ un mapeo continuo para cada $m, j \in \mathbb{Z}^+$ fijos. Para $k, m \in \mathbb{Z}^+$ fijos definimos:

$$b_n(j) = \mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi_n) + \phi(j;(m,\xi_n))).$$

Por la hipótesis **(d2)** se sigue

$$|b_n(j)| \leq \left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \mu(j) \ , \forall n, j, k \in \mathbb{Z}^+,$$

que por la hipótesis **(d3)** satisface:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\| \mu(j) < +\infty.$$

Por otra parte, a la luz de la Observación 3.1.4, el mapeo $\xi \mapsto x(j,m,\xi)$ es continuo para cada $j, m \in \mathbb{Z}^+$ fijos. Esto, en combinación con que $\xi \mapsto \phi(j;(m,\xi))$ y $v \mapsto f(j,v)$ son continuos, nos permite concluir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n(j) &= \lim_{n\to\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi_n)+\phi(j;(m,\xi_n)))\\ &= \mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi)+\phi(j;(m,\xi))).\end{aligned}$$

Así, por el Teorema de convergencia dominada tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\Theta\phi)(k;(m,\xi_n)) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi_n)+\phi(j;(m,\xi_n)))\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_n(j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(k,j+1)f(j,x(j,m,\xi)+\phi(j;(m,\xi)))\\ &= (\Theta\phi)(k;(m,\xi)),\end{aligned}$$

con lo que concluimos que $\xi \mapsto (\Theta\phi)(k;(m,\xi))$ es continua y por tanto su punto fijo

$$\xi \mapsto z^*(k;(m,\xi))$$

es una función continua también. Así, en particular $\xi \mapsto z^*(k;(k,\xi))$ y $\xi \mapsto \xi + z^*(k;(k,\xi)) = H(k,\xi)$ es continua.

En conclusión, H y G son biyecciones continuas e inversas entre si, lo que concluye la demostración. ■

Observación 3.1.15. *Enfatizamos la simplicidad de la caracterización del mapeo $\eta \mapsto G(k,\eta)$ dada por (3.12) en vez de la clásica dada por (3.9). Hasta donde hemos podido estudiar esta caracterizacion es una novedad de [9]*

Corolario 3.1.16. *Los mapeos w^* y z^* definidos en (3.3) y (3.4) satisfacen:*

$$\begin{aligned} w^*(k;(m,\eta)) + z^*(k;(m,G(m,\eta))) &= 0 \\ z^*(k;(m,\eta)) + w^*(k;(m,H(m,\eta))) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. En efecto, usando la identidad $H[k,G[k,y(k,m,\eta)]] = y(k,m,\eta)$, combinada con (3.8), la primera y segunda identidad de (3.16) y (3.7), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= H[k,G[k,y(k,m,\eta)]] - y(k,m,\eta) \\ &= G[k,y(k,m,\eta)] + z^*(k;(k,,G[k,y(k,m,\eta)])) - y(k,m,\eta) \\ &= w^*(k;(m,\eta)) + z^*(k;(k,G[k,y(k,m,\eta)])) \\ &= w^*(k;(m,\eta)) + z^*(k;(k,x(k,m,G(m,\eta)))) \\ &= w^*(k;(m,\eta)) + z^*(k;(m,G(m,\eta))), \end{aligned}$$

de donde se sigue la primera identidad. Para deducir la segunda basta con reemplazar η por $H(m,\xi)$ en la primera identidad y utilizar que $G(m,H(m,\xi)) = \xi$. ■

Corolario 3.1.17. *[9, Corollary 1] Los mapeos G y H de la $\mathbb{Z}^+$-equivalencia topológica satisfacen las siguientes propiedades de punto fijo:*

$$\begin{aligned} G(k,\eta) &= \eta - z^*(k;(k,G(k,\eta))) \\ H(k,\xi) &= \xi - w^*(k;(k,H(k,\xi))). \end{aligned}$$

Demostración. Basta con considerar el caso $k = m$ en el Corolario 3.1.16. ■

Observación 3.1.18. *El Corolario anterior provee una caracterización de $\eta \mapsto G(k,\eta)$ y $\xi \mapsto H(k,\xi)$ en términos de puntos fijos, la cual, hasta donde sabemos, es una novedad de [9].*

Corolario 3.1.19. *[9, Corollary 2] Suponga que el sistema (3.1) satisface **(d0)-(d1)**. Sea $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función que satisface **(d2)-(d5)**. Entonces los sistemas no homogéneos:*

$$y(k+1) = A(k)y(k) + g(k,y(k))$$

y (3.2) son $\mathbb{Z}^+$-topológicamente equivalentes.

Demostración. Note que es una consecuencia directa del Teorema 3.1.14, pues ambos son topológicamente equivalentes al sistema (3.1) en $\mathbb{Z}^+$. ■

3.2. Diferenciabilidad de la Equivalencia Topológica

Como se explicó antes, resulta ser interesante analizar qué propiedades se pueden deducir al estudiar la diferenciabilidad de este homeomorfismo. En el caso discreto la caracterización es incluso más rica que en el caso continuo, pues, dado que una ecuación en diferencia puede interpretarse como un sistema dinámico en el cual un grupo discreto actúa sobre el espacio $\mathbb{R}^d$, el espacio puede separarse en fibras, y por tanto, apenas encontremos un difeomorfismo asociado a una de estas fibras, las otras pueden ser replicadas inductivamente. Esta idea motiva la siguiente definición:

Definición 3.2.1. *Los sistemas (3.1) y (3.2) son C^r-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$ si son topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$ y $u \mapsto H(k,u)$ es un difeomorfismo de clase C^r, con $r \geq 1$, para cada $k \geq 0$ fijo.*

Observación 3.2.2. *La condición **(d6)**, si bien, no es necesaria para establecer la equivalencia topológica, si suele aparecer ([9], [8], [11], [17], [18]) cuando se busca establecer que dicho homeomorfismo sea un difeomorfismo, ya sea en el contexto discreto o continuo.*

Observación 3.2.3. *Si bien, hemos buscado enmarcar este trabajo en un contexto común con otros resultados de linealización y por eso hemos establecido las hipótesis **(d0)-(d6)**, hasta donde sabemos, la condición **(d7)** es original de este trabajo.*

Para poder dar un paso más y demostrar la C^r-equivalencia topológica, los autores Á. Castañeda, G. Robledo y P. Gonzalez tuvieron que imponer condiciones más fuertes que antes, teniendo que remitirse a la variedad estable, es decir, suponiendo que el sistema (3.1) admite una contracción no uniforme. Por tanto, la condición **(d1)** es reescrita como:

(D1) El sistema (3.1) admite una contracción no uniforme, es decir, existen una sucesión no negativa D y una sucesión monótona decreciente convergente a cero h, con $h(0) = 1$, tales que

$$\left\|\Phi(k,n)\right\| \leq D(n)\frac{h(k)}{h(n)} \text{ , } \forall\ k \geq n \geq 0.$$

Observación 3.2.4. *Note que al reemplazar **(d1)** con **(D1)**, la forma del operador de Green se simplifica y por tanto las condiciones **(d3)** y **(d4)** se transforman respectivamente en:*

(D3) *Las sucesiones D, h y μ definidas antes verifican:*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\mu(j)D(j+1)\frac{h(k)}{h(j+1)} < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

(D4) *Las sucesiones D, h y γ definidas antes verifican:*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\gamma(j)D(j+1)\frac{h(k)}{h(j+1)} := q < 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Corolario 3.2.5. *[9, Corollary 3] Si se satisfacen **(d0)-(d2)-(d5)** y **(D1)-(D3)-(D4)**, entonces los sistemas (3.1) y (3.2) son $\mathbb{Z}^+$-topológicamente equivalentes, con H y G dados por:*

$$\begin{cases} G(k,\xi) &= x(k,0,y(0,k,\xi)) = \Phi(k,0)y(0,k,\xi) \\ \\ H(k,\xi) &= y(k,0,x(0,k,\xi)). \end{cases} \tag{3.23}$$

Demostración. La equivalencia topológica es inmediata pues **(D3)** y **(D4)** son casos particulares de **(d3)** y **(d4)** respectivamente. No obstante, podemos ganar más detalles sobre G y H. De hecho, como $Q(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, de la afirmación (3.12) se sigue inmediatamente que:

$$G(k, \xi) = \Phi(k, 0)y(0, k, \xi),$$

y como esa es una solución de (3.1) pasando por $y(0, k, \xi)$ en cero, entonces lo anterior es igual a $x(k, 0, y(0, k, \xi))$. Así mismo, en este caso la biyectividad de G es más simple de probar. La inyectividad es una consecuencia inmediata de la unicidad de soluciones, pues se tiene una relación directa con la unicidad de y. De esta misma expresión, dado $z \in \mathbb{R}^d$ arbitrario, es fácil ver que

$$\begin{aligned} G(k, y(k, 0, \Phi(0, k)z)) &= \Phi(k, 0)y(0, k, y(k, 0, \Phi(0, k)z)) \\ &= \Phi(k, 0)y(0, 0, \Phi(0, k)z) \\ &= \Phi(k, 0)\Phi(0, k)z = z, \end{aligned}$$

de donde se sigue la epiyectividad. Como sabemos que

$$H(k, \xi) = G^{-1}(k, \xi)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, de (3.9) y $Q = 0$ se sigue que

$$G(k, H(k, \xi)) = \Phi(k, 0)y(0, k, H(k, \xi)) = \xi,$$

o equivalentemente:

$$y(0, k, H(k, \xi)) = \Phi(0, k)\xi = x(0, k, \xi).$$

Adicionalmente, de (3.13) combinada con la identidad anterior y considerando la unicidad de soluciones, tenemos

$$\begin{aligned} H(k, \xi) &= H(k, x(k, k, \xi)) \\ &= y(k, k, H(k, \xi)) \\ &= y(k, 0, y(0, k, H(k, \xi))) \\ &= y(0, k, x(0, k, \xi)), \end{aligned}$$

de donde se concluye el resultado. ■

Teorema 3.2.6. *[9, Lemma 2.3] Si se tienen las condiciones **(d0)**, **(D1)-(D3)-(D4)** y **(d2)-(d5)-(d6)**, entonces los sistemas (3.1) y (3.2) son C^r−topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Note que:

$$A(n) + \frac{\partial f}{\partial x}(k, y(n, k, \xi)) = A(n)\left\{I + A^{-1}(n)\frac{\partial f}{\partial x}(k, y(k, n, \xi))\right\},$$

y como tenemos la condición de acotamiento, podemos optimizar la constante de Lipschitz $\gamma(n)$ como:

$$\gamma(n) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(n, x)\right\|.$$

Usando la hipótesis **(d5)** podemos ver que

$$\left\|A^{-1}(n)\frac{\partial f}{\partial x}(n,y(n,k,\xi))\right\| \leq \left\|A^{-1}(n)\right\| \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(n,y(n,k,\xi))\right\| \leq \left\|A^{-1}(n)\right\| \gamma(n) < 1,$$

por lo tanto, $\left\{I + A^{-1}(n)\frac{\partial f}{\partial x}(k,y(k,n,\xi))\right\}$ es invertible, y por tanto $A(n) + \frac{\partial f}{\partial x}(k,y(n,k,\xi))$ también lo es.

Establecimos en (3.11) que para $n < k$

$$y(n,k,\xi) = \Phi(n,k)\xi - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n,j+1) f(j,y(j,k,\xi)),$$

en particular

$$y(k-1,k,\xi) = \Phi(k-1,k)\xi - \Phi(k-1,k) f(k-1,y(k-1,k,\xi)),$$

de donde es evidente que podemos derivar respecto a ξ, obteniendo

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(k-1,k,\xi) = A^{-1}(k-1) - A^{-1}(k-1)\frac{\partial f}{\partial x}(k-1,y(k-1,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(k-1,k,\xi),$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi}(k-1,k,\xi) &= \left\{I + A^{-1}(k-1)\frac{\partial f}{\partial x}(k-1,y(k-1,k,\xi))\right\}^{-1} A^{-1}(k-1) \\ &= \left\{A(k-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(k-1,y(k-1,k,\xi))\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Supongamos que podemos derivar $y(n,k,\xi)$ respecto a ξ para $n \in \{k-1, k-2, \ldots, k-p\}$, obtendríamos

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(n,k,\xi) = \Phi(n,k) - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n,j+1)\frac{\partial f}{\partial x}(j,y(j,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(j,k,\xi),$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi}(n+1,k,\xi) &= \Phi(n+1,k) - \sum_{j=n+1}^{k-1} \Phi(n+1,j+1)\frac{\partial f}{\partial x}(j,y(j,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(j,k,\xi) \\ &= \Phi(n+1,n)\Phi(n,k) - \sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n+1,n)\Phi(n,j+1)\frac{\partial f}{\partial x}(j,y(j,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(j,k,\xi) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(n,y(n,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(n,k,\xi) \\ &= A(n)\Phi(n,k) - A(n)\sum_{j=n}^{k-1} \Phi(n,j+1)\frac{\partial f}{\partial x}(j,y(j,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(j,k,\xi) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(n,y(n,k,\xi))\frac{\partial y}{\partial \xi}(n,k,\xi). \end{aligned}$$

Así, tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(n+1,k,\xi) \quad = \quad \left\{A(n) + \frac{\partial f}{\partial x}(n, y(n,k,\xi))\right\} \frac{\partial y}{\partial \xi}(n,k,\xi),$$

o equivalentemente:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}(n-1,k,\xi) \quad = \quad \left\{A(n-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(n-1, y(n-1,k,\xi))\right\}^{-1} \frac{\partial y}{\partial \xi}(n,k,\xi).$$

Así, inductivamente concluimos que $y(n,k,\xi)$ es derivable para $n \in \{k-1,\ldots,0\}$ y además su derivada es una matriz invertible en cada caso. En particular lo es $\xi \mapsto y(0,k,\xi)$. Así, utilizando la primera identidad de (3.23) (que es válida pues tenemos las mismas hipótesis que en el Corolario 3.2.5), obtenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,\xi) = \Phi(k,0)\frac{\partial y}{\partial \xi}(0,k,\xi) \text{ , para todo } k \in \mathbb{Z}^+,$$

y las derivadas de orden superior se pueden calcular directamente desde la identidad anterior. Más aún, la invertibilidad de $\frac{\partial y}{\partial \xi}(0,k,\xi)$ implica que

$$\det \frac{\partial G}{\partial \xi}(k,\xi) \neq 0,$$

y como G es una equivalencia topológica, tenemos que $\xi \mapsto G(k,\xi) - \xi$ es acotado y por tanto $G(k,\xi) \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$. Esto, combinado con la expresión anterior, implica, utilizando el Corolario 2.1 de [33], que $\xi \mapsto G(k,\xi)$ es un difeomorfismo. Más aún, como $G(k, H(k,\xi)) = \xi$, tenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(k, H(k,\xi))\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = I,$$

y por lo tanto $\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(k, H(k,\xi))\right]^{-1}$, lo que finaliza la demostración.

■

Corolario 3.2.7. *Bajo las condiciones* ***(d0)***, ***(d1)-(d6)***, *el mapeo $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ es C^r-diferenciable para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Se obtiene inmediatamente desde la demostración del Teorema 3.2.6. ■

Generalización a variedades inestables

En esta sección estudiamos las propiedades de diferenciabilidad de la función $\eta \mapsto w^*(0;(m,\eta))$ que definimos en la sección anterior para obtener que el homeomorfismo de equivalencia topológica es de hecho un difeomorfismo de clase C^1, de manera similar a como se hizo en el contexto continuo.

Lema 3.2.8. *Si se tienen las condiciones* ***(d0)-(d7)***, *y* ***(d6)*** *se cumple con $r = 1$, entonces $\eta \mapsto w^*(0;(m,\eta))$ es un mapeo de clase C^1.*

Demostración. Sea $\eta \in \mathbb{R}^d$ fijo y sea $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión propiamente convergente a cero. Elija un $m \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario pero fijo, definimos:

$$\psi_n(j) = \mathcal{G}(0,j+1)\frac{f(j,y(j,m,\eta+\delta_n)) - f(j,y(j,m,\eta)) - \frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\delta_n}{|\delta_n|},$$

note que como el mapeo $\eta \mapsto y(j,m,\eta)$ es continuo, entonces $\lim_{n\to\infty} y(j,m,\eta+\delta_n) = y(j,m,\eta)$.

Aplicando la condición **(d6)**, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(j) = 0.$$

Recuerde que como establecimos previamente (3.20), para todo $j < m$:

$$|y(j,m,\eta) - y(j,m,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{C}_m(j)|\eta - \tilde{\eta}|,$$

con $C_m(j)$ definida como en (3.19). Por otra parte, sabemos que

$$y(m+1,m,\eta) = A(m)\eta + f(m,\eta),$$

por lo tanto

$$y(m+1,m,\eta) - y(m+1,m,\tilde{\eta}) = A(m)(\eta - \tilde{\eta}) + f(m,\eta) - f(m,\tilde{\eta}).$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned} |y(m+1,m,\eta) - y(m+1,m,\tilde{\eta})| &\leq \big\|A(m)\big\|\,|\eta - \tilde{\eta}| + |f(m,\eta) - f(m,\tilde{\eta})| \\ &\leq \Big(\big\|A(m)\big\| + \gamma(m)\Big)\,|\eta - \tilde{\eta}|. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para $j > m$, definimos

$$\mathcal{B}_m(j) := \prod_{i=m}^{j-1} \big\|A(i)\big\| + \gamma(i), \tag{3.25}$$

que, utilizando (3.24), nos permite escribir para $j \geq m$

$$|y(j,m,\eta) - y(j,m,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{B}_m(j)|\eta - \tilde{\eta}|. \tag{3.26}$$

Ahora, definimos

$$\mathcal{A}_m(j) := \begin{cases} \mathcal{C}_m(j) & j < m \\ 1 & j = m \\ \mathcal{B}_m(j) & j > m, \end{cases} \tag{3.27}$$

por tanto, para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$|y(j,m,\eta) - y(j,m,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{A}_m(j)|\eta - \tilde{\eta}|.$$

Así, por continuidad de la norma

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| &= \lim_{\delta\to 0} \frac{|y(j,m,\eta+\delta) - y(j,m,\eta)|}{|\delta|} \\ &\leq \lim_{\delta\to 0} \mathcal{A}_m(j) = \mathcal{A}_m(j). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j,u)\right\| &= \lim_{\delta\to 0} \frac{|f(j,u+\delta) - f(j,u)|}{|\delta|} \\ &\leq \lim_{\delta\to 0} \gamma(j) = \gamma(j). \end{aligned}$$

En resumen

$$\begin{aligned}
\big\|\psi_n(j)\big\| &\leq \big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \frac{|f(j,y(j,m,\eta+\delta_n))-f(j,y(j,m,\eta))|+\left|\frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\delta_n\right|}{|\delta_n|}\\
&\leq \big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \frac{\gamma(j)|y(j,m,\eta+\delta_n)-y(j,m,\eta)|+\gamma(j)\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\||\delta_n|}{|\delta_n|}\\
&\leq \big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\left(\frac{|y(j,m,\eta+\delta_n)-y(j,m,\eta)|}{|\delta_n|}+\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\|\right)\\
&\leq 2\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\mathcal{A}_m(j).
\end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando **(d4)** y **(d7)** tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\mathcal{A}_m(j) &\leq \sum_{j=0}^{m-1}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\mathcal{C}_m(j)+\sum_{j=m}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\mathcal{B}_m(j)\\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\|\gamma(j)\max_{i<m}\mathcal{C}_m(i)\\
&\quad +\sum_{j=m}^{\infty}D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\mathcal{B}_m(j)\\
&\leq q\max_{i<m}\mathcal{C}_m(i)+\sum_{j=m}^{\infty}D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\mathcal{B}_m(j)<+\infty.
\end{aligned}$$

Así, finalmente, utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w^*(0;(m,\eta+\delta_n))-w^*(0;(m,\eta))+\left[\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)\frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right]\delta_n}{|\delta_n|}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_n(j)$$

$$=-\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\psi_n(j)\right)=0,$$

lo que implica que $\eta\mapsto w^*(0;(m,\eta))$ es diferenciable. ■

Corolario 3.2.9. *Si se tienen las condiciones* ***(d0)-(d7)****, y* ***(d6)*** *se cumple con* $r=1$*, entonces para cada* $m\in\mathbb{Z}^+$ *fijo se tiene*

$$\frac{\partial w^*(0;(m,\eta))}{\partial \eta}=-\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)\frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta).$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la demostración del Lema anterior. ■

Teorema 3.2.10. *Si se tienen las condiciones* ***(d0)-(d7)****, y* ***(d6)*** *se satisface con* $r=1$*, entonces (3.1) y (3.2) son* C^1*-topológicamente equivalentes en* $\mathbb{Z}^+$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.14 sabemos que son topológicamente equivalentes. Por el Lema 3.2.8 $\eta \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ tiene clase C^1 de diferenciabilidad para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, y, como se mencionó en el Corolario 3.2.7, $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ también tiene esta clase de diferenciabilidad. Utilizando (3.12) podemos concluir que $\eta \mapsto G(k,\eta)$ es C^1 diferenciable.

Además, como G es una equivalencia topológica, sabemos que $\xi \mapsto G(k,\xi) - \xi$ es acotado y por tanto $G(k,\xi) \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$. Esto, combinado con la expresión anterior, implica, por el Colorario 2.1 de [33], que $\xi \mapsto G(k,\xi)$ es un difeomorfismo de clase C^1. Más aún, como $G(k,H(k,\xi)) = \xi$, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = I,$$

y por lo tanto $\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\right]^{-1}$, lo que completa la demostración. ∎

Consecuencias y ejemplos

A continuación estudiaremos dos lemas técnicos que nos orientarán para construir corolarios del Teorema anterior.

Lema 3.2.11. *Suponga que el sistema 3.1 verifica **(d0)** y admite una dicotomía exponencial en $\mathbb{Z}^+$, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ y constantes $C > 0$, $\theta \in (0,1)$, tales que*

$$\begin{cases} \left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| \leq C\theta^{k-n}, & \forall\ k \geq n \geq 0 \\ \left\|\Phi(k,n)Q(n)\right\| \leq C\theta^{n-k}, & \forall\ 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Entonces $M\theta \geq 1$.

Demostración. Sea $k \geq n$, observe que:

$$\begin{aligned}
1 = \left\|\Phi(k,n)\Phi^{-1}(k,n)\right\| &= \left\|\Phi(k,n)\Phi(n,k)\right\| \\
&= \left\|\Phi(k,n)\left(P(n)+Q(n)\right)\Phi(n,k)\right\| \\
&\leq \left\|\Phi(k,n)P(n)\Phi(n,k)\right\| + \left\|\Phi(k,n)Q(n)\Phi(n,k)\right\| \\
&= \left\|\Phi(k,n)P(n)\Phi(n,k)\right\| + \left\|\Phi(k,n)\Phi(n,k)Q(k)\right\| \\
&\leq \left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| \cdot \left\|\Phi(n,k)\right\| + \left\|\Phi(k,n)\right\| \cdot \left\|\Phi(n,k)Q(k)\right\| \\
&\leq \left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| \cdot M^{|n-k|} + M^{|k-n|} \cdot \left\|\Phi(n,k)Q(k)\right\| \\
&\leq M^{k-n}\left(\left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| + \left\|\Phi(n,k)Q(k)\right\|\right) \\
&\leq M^{k-n}\left(C\theta^{k-n} + C\theta^{k-n}\right) \\
&= 2C\left(M\theta\right)^{k-n}
\end{aligned}$$

Si $M\theta < 1$, entonces tomando límite cuando $k \to +\infty$, al lado derecho obtenemos cero, es decir $1 \leq 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, esto es imposible, es decir, $M\theta \geq 1$. ■

Lema 3.2.12. *Suponga que el sistema (3.1) verifica **(d0)** y admite una dicotomía exponencial no uniforme en $\mathbb{Z}^+$, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ y constantes $C, \lambda, \varepsilon > 0$ tales que*

$$\begin{cases} \left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| \leq Ce^{-\lambda(k-n)+\varepsilon n}, & \forall\ k \geq n \geq 0 \\ \\ \left\|\Phi(k,n)Q(n)\right\| \leq Ce^{\lambda(k-n)+\varepsilon n}, & \forall\ 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Entonces o bien $Me^{-\lambda} \geq 1$ ó $Me^{-\lambda+\varepsilon} \geq 1$. En particular $Me^{-\lambda+\varepsilon} \geq 1$.

Demostración. Sea $k \geq n$, observe que:

$$\begin{aligned} 1 = \left\|\Phi(k,n)\Phi^{-1}(k,n)\right\| &\leq M^{k-n}\left(\left\|\Phi(k,n)P(n)\right\| + \left\|\Phi(n,k)Q(k)\right\|\right) \\ &\leq M^{k-n}\left(Ce^{-\lambda(k-n)+\varepsilon n} + Ce^{\lambda(n-k)+\varepsilon k}\right) \\ &= C\left(Me^{-\lambda}\right)^{k-n}e^{\varepsilon n} + C\left(Me^{-\lambda+\varepsilon}\right)^{k-n}e^{-\varepsilon n} \end{aligned}$$

Si $Me^{-\lambda} < 1$ y $Me^{-\lambda+\varepsilon} < 1$, entonces tomando límite cuando $k \to +\infty$, al lado derecho obtenemos cero, es decir $1 \leq 0$, lo que es una contradicción. Por tanto, esto es imposible, es decir, o $Me^{-\lambda} \geq 1$ o bien $Me^{-\lambda+\varepsilon} \geq 1$. En particular $Me^{-\lambda+\varepsilon} \geq 1$. ■

Corolario 3.2.13. *Suponga que los sistemas (3.1) y (3.2) satisfacen **(d0)** y **(d6)** con $r = 1$. Además, suponga que **(d1)** se cumple con una dicotomía exponencial, es decir, P y Q son proyectores complementarios invariantes, $D(n) = D > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $h(n) = \theta^n$, con $\theta \in (0,1)$, y **(d2)** se satisface con $\gamma(n) = \gamma a^n$, con $\gamma > 0$ y $a \in (0,1)$, y $\mu(n) = \mu > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego, si $M\gamma < 1$, $\frac{D\gamma}{1-\theta} < 1$ y $a\theta(M+\gamma) < 1$, los sistemas (3.1) y (3.2) son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Note que para un arbitrario $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos:

$$\left\|A^{-1}(n)\gamma(n)\right\| \leq M\gamma < 1,$$

por lo tanto **(d5)** se satisface. Por otra parte, para un arbitrario $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\|\mu &= \sum_{j=0}^{k-1}\left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\|\mu + \sum_{j=k}^{\infty}\left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\|\mu \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\left\|\Phi(k,j+1)P\right\|\mu + \sum_{j=k}^{\infty}\left\|\Phi(k,j+1)Q\right\|\mu \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1}\frac{\theta^k}{\theta^{j+1}}D\mu + \sum_{j=k}^{\infty}\frac{\theta^{j+1}}{\theta^k}D\mu \\
&= \theta^{k-1}\rho\mu\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^j + \theta\rho\mu\sum_{i=0}^{\infty}\theta^i \\
&= \theta^{k-1}D\mu\frac{1-\left(\frac{1}{\theta}\right)^k}{1-\frac{1}{\theta}} + \theta D\mu\frac{1}{1-\theta} \\
&= D\mu\frac{\theta^{k-1}-\frac{1}{\theta}}{1-\frac{1}{\theta}} + D\mu\frac{\theta}{1-\theta} \\
&= D\mu\frac{1+\theta-\theta^k}{1-\theta} \leq \frac{D\mu}{1-\theta},
\end{aligned}$$

por lo que **(d3)** se cumple. Análogamente

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\mathcal{G}(k,j+1)\right\|\gamma(n) \leq \frac{D\gamma}{1-\theta} < 1,$$

de donde **(d4)** se verifica. Finalmente, para un $m \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{\infty}D\gamma(j)\left(h(j+1)\left[\prod_{p=m}^{j-1}\left\|A(p)\right\|+\gamma\right]\right) &\leq \sum_{j=m}^{\infty}D\gamma\left(a^j\theta^{j+1}\left[\prod_{p=m}^{j-1}M+\gamma\right]\right) \\
&\leq D\gamma\sum_{j=m}^{\infty}a^j\theta^{j+1}(M+\gamma)^{j-m} \\
&\leq \frac{D\gamma\theta}{(M+\gamma)^m}\sum_{j=m}^{\infty}\big(a\theta(M+\gamma)\big)^j < \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto **(d7)** se satisface. Así, aplicando el Teorema 3.2.10, los sistemas son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$. ■

Observación 3.2.14. *En el corolario anterior, sería ideal imponer una condición más débil, como $\theta(M+\gamma) < 1$ y $\gamma(n) = \gamma$ constante, pero, como se ilustró en el Lema 3.2.11, esto es imposible. Algo similar ocurre en el Corolario 3.2.15, que se ve influenciado por el Lema 3.2.12.*

Corolario 3.2.15. *Suponga que se cumplen las condiciones **(d0)** y **(d5)**. Suponga también que el sistema (3.1) admite una dicotomía exponencial no uniforme, es decir, existen dos proyectores complementarios invariantes $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ y constanes $C, \lambda, \varepsilon > 0$ tales que*

$$\begin{cases} \big\|\Phi(k,n)P(n)\big\| \leq Ce^{-\lambda(k-n)+\varepsilon n}, & \forall\ k \geq n \geq 0 \\ \\ \big\|\Phi(k,n)Q(n)\big\| \leq Ce^{\lambda(k-n)+\varepsilon n}, & \forall\ 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Además, suponga que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ $u \mapsto f(k,u)$ es una función de clase C^1 tal que $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(k,u)$ es un mapeo acotado que satisface

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(k,u)\right\| \leq \nu e^{-\varepsilon(k+1)} a^k \tag{3.29}$$

y

$$|f(k,u)| \leq \kappa e^{-\tau(k+1)}, \tag{3.30}$$

para $\nu, \kappa > 0$, $a \in (0,1)$ y $\tau > \varepsilon - \lambda$ dados. Entonces, si $aMe^{-\lambda} < 1$, para $\nu > 0$ suficientemente pequeño, los sistemas (3.1) y (3.2) son C^1-topológicamente equivalentes $\mathbb{Z}^+$.

Demostración. La condición **(d1)** se verifica fácilmente con $D(n) = Ce^{\varepsilon n}$ y $h(n) = e^{-\lambda n}$. Note que usando el Teorema del punto medio generalizado, la condición (3.29) implica

$$|f(k,y) - f(k,\tilde{y})| \leq \nu e^{-\varepsilon(k+1)} a^k |y - \tilde{y}|,$$

por lo que la condición **(d2)** se verifica con $\gamma(k) = \nu e^{-\varepsilon(k+1)} a^k$ y $\mu(k) = \kappa e^{-\tau(k+1)}$. Así, la condición **(d3)** se satisface inmediatamente y, considerando que ν es suficientemente pequeño, también se satisface **(d4)** de manera análoga a como se demostró en el Corolario anterior. La condición **(d6)** se tiene inmediatamente por hipótesisis. Ahora, denote

$$\Psi_m(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \big\|A(p)\big\| + \gamma(p).$$

Es fácil ver que $m \geq n$ implica $\Psi_m(j) \leq \Psi_n(j)$, por lo que para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\Psi_m(j) \leq \Psi_0(j) \leq \left(M + \nu e^{-\varepsilon}\right)^j.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\Psi_m(j) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\Psi_0(j) \\ &\leq C\nu e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left[ae^{-\lambda}\left(M + \nu e^{-\varepsilon}\right)\right]^j, \end{aligned}$$

lo que, como $aMe^{-\lambda} < 1$, es finito si suponemos que ν es suficientemente pequeño, en particular, $0 < \nu < e^{\lambda+\varepsilon}\frac{1}{a} - Me^{\varepsilon}$. Así, la condición **(d7)** se verifica. Aplicando el Teorema 3.2.10, el Corolario queda demostrado. ■

Observación 3.2.16. *Note que para satisfacer la condición (3.30), solo requerimos que τ sea mayor que $\varepsilon - \lambda$, sin importar su signo. Esto significa que, en caso de que $\lambda > \varepsilon$, esta dicotomía incluso admite una perturbación no acotada.*

Observación 3.2.17. *El Corolario 3.2.15 ha sido inspirdo por el trabajo de D. Dragičević et. al. [17, Theorem 2]. Ambos resultados consideran la hipótesis* ***(d0)****, ambos se enmcarcan en el contexto de una dicotomía exponencial no uniforme, ambos resultados utilizan la hipótesis (3.29), que en conjunto con nuestra expresión (3.30), estaría cumpliendo la condición* ***(d2)****. Notamos también que la condición* ***(d6)*** *con $r = 1$ es exigida en ambos trabajos, la condición* ***(d4)*** *se deduce a partir de las hipótesis anteriores de la misma manera en ambos resultados y ambos son válidos para ν suficientemente pequeño.*

Pese a ello, debemos notar que también existen algunas diferencias. Como se mencionó antes, para nuestro resultado tuvimos que imponer las condiciones (3.30) y ***(d5)****, aunque como se mencionó en la Observación 3.1.9, pensamos que es posible que en futuros trabajos esta última hipótesis pueda ser descartada.*

Por otra parte, ambos resultados requieren una cierta pequeñez de la perturbación f, sin embargo, la hipótesis que ellos consideraron difiere de la nuestra y no existe una jerarquía entre ellas. En particular, la condición de pequeñez que ellos utilizaron es:

$$f(k,0) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial u}(k,0) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Por otra parte, nuestro resultado no requiere que la derivada de la perturbación satisfaga una condición de Lipschitz, lo cual si es requerido en el mencionado Teorema. En la siguiente sección, cuando estudiemos la segunda derivada de la equivalencia topológica, sí impondremos esta condición.

Una importante diferencia es que el resultado en [17, Theorem 2] estudia equivalencia topológica sobre todo $\mathbb{Z}$, mientras que nosotros nos hemos remitido a la semi recta positiva. Evidentemente, esto implica que la definición de dicotomía que ellos han considerado se extiende sobre todo el anillo entero, lo cual impone hipótesis más fuertes.

Sin embargo, la mayor diferencia que tiene nuestro trabajo con la aproximación de D. Dragičević et. al. es que ellos basaron su estrategia en propiedades espectrales de la dicotomía, es decir, estudiaron qué propiedades espectrales debe tener el operador de evolución del sistema basado en la dicotomía que satisface para poder garantizar la diferenciabilidad, mientras que la hipótesis clave en nuestra demostración es $aMe^{-\lambda} < 1$, condición que ellos no utilizaron. Más adelante, cuando estudiemos la posibilidad de generalizar este resultado volveremos sobre esta condición.

Ahora, para poder estudiar más ejemplos, mostraremos algunos lemas técnicos.

Lema 3.2.18. *Dadas dos sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no negativas, si definimos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por:*

$$\gamma_n = \frac{r_n c_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1},$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\gamma_n = r_n c_n \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} = r_n c_n \prod_{p=1}^{n-1} \frac{c_p}{\gamma_p + c_p}.$$

Demostración. Mostraremos la primera igualdad inductivamente, ya que la segunda es trivial. Es claro que

$$\gamma_1 = \frac{r_1 c_1}{1} = r_1 c_1 \left(\prod_{p=1}^{0} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1}.$$

Supongamos que la afirmación es cierta para cierto $n \in \mathbb{N}$, note que

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} &= \frac{r_{n+1}c_{n+1}}{r_n + \cdots + r_1 + 1} \\
&= \frac{r_{n+1}c_{n+1}}{r_n + \cdots + r_1 + 1}\gamma_n^{-1}\gamma_n \\
&= \frac{r_{n+1}c_{n+1}}{r_n + \cdots + r_1 + 1} \cdot \frac{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1}{r_n c_n} r_n c_n \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \\
&= r_{n+1}c_{n+1} \left(\frac{r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1} \right)^{-1} \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \\
&= r_{n+1}c_{n+1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1} + 1 \right)^{-1} \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \\
&= r_{n+1}c_{n+1} \left(\frac{\gamma_n}{c_n} + 1 \right)^{-1} \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \\
&= r_{n+1}c_{n+1} \left(\prod_{p=1}^{n} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción, el Lema queda demostrado. ∎

Lema 3.2.19. *Dada una sucesion $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no negativa, si definimos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por:*

$$\gamma_n = \frac{r_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1},$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\gamma_n = r_n \left(\prod_{p=1}^{n-1} 1 + \gamma_p \right)^{-1}.$$

Demostración. Basta con aplicar el Lema 3.2.18 con $c_n = 1$ constante. ∎

Ejemplo 3.2.20. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones tales que*

$$0 < \alpha \leq a_n, b_n \leq c_n^{-1} \leq 1 \leq c_n \leq M, \tag{3.31}$$

para $M, \alpha > 0$ dados, y suponga que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. Considere $A(n) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz diagonal dada por

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

y considere el sistema (3.1) asociado a esta sucesión de matrices. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión sumable no negativa y defina la sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\gamma_n = \frac{r_n c_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función acotada, diferenciable y Lipschitz (con constante ≤ 1), defina $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(k,x) = \gamma(k)g(x)$ y considere el sistema (3.2) asociado a esta perturbación del sistema lineal previamente definido. Entonces, si $\sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{c_{k-1}r_{k-1}}{r_{k-2}+r_{k-3}+\cdots+1} + \sum_{j=1,j\neq k-1}^{\infty} r_j < 1$, los sistemas (3.1) y (3.2) son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.

En efecto, como $0 \leq a_n, b_n \leq c_n$, tenemos que $\|A(n)\| = c_n \leq M$ y $\|A^{-1}(n)\| \leq \alpha^{-1}$, por lo que **(d0)** se cumple. Sean $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ dadas por:

$$P(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Q(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Luego, si consideramos $\Phi(m,n)$ la matriz de transición de (3.1), es claro que

$$\begin{cases} \|\Phi(k,n)P(n)\| \leq \prod_{j=n}^{k-1} \max\{a_j, b_j\}, & \forall k \geq n \geq 0 \\ \\ \|\Phi(k,n)Q(n)\| \leq \prod_{j=k}^{n-1} c_j^{-1}, & \forall 0 \leq k \leq n. \end{cases} \tag{3.34}$$

Así, definiendo $h(n) = \prod_{p=1}^{n-1} c_p^{-1}$ y $D(n) = 1$, **(d1)** se sigue. Note que **(d6)** se obtiene inmediatamente y

$$\begin{aligned} |f(k,x_1) - f(k,x_2)| &= |\gamma_k g(x_1) - \gamma_k g(x_2)| \\ &= \gamma_k |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq \gamma_k |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

mientras que

$$|f(k,x)| = |\gamma_k g(x)| \leq \gamma_k \|g\|_\infty ,$$

por lo que **(d2)** también se cumple, con $\mu_k = \gamma_k \|g\|_\infty$. Note también que

$$\left\|A(n)^{-1}\gamma(n)\right\| \leq \alpha^{-1} \frac{r_n c_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1} \leq M\alpha^{-1} r_n,$$

y como $r_n \to 0$, obtenemos **(d5)**. Por el Lema 3.2.18 tenemos

$$\gamma_j = r_j c_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1 + \frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} = r_j c_j \prod_{p=1}^{j-1} \frac{c_p}{\gamma_p + c_p}.$$

Ahora, denote

$$\Psi_m(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \|A(p)\| + \gamma_p.$$

Es fácil ver que si $m \geq n$, entonces $\Psi_m(j) \leq \Psi_n(j)$, por lo tanto, para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\Psi_m(j) \leq \Psi_1(j) \leq \prod_{p=1}^{j-1} c_p + \gamma_p.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\Psi_m(j) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} h(j+1)\gamma(j)\Psi_1(j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j) \prod_{p=1}^{j} c_p^{-1} \prod_{p=1}^{j-1} (c_p+\gamma_p) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j c_j^{-1} \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1+\frac{\gamma_p}{c_p} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} r_j c_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1+\frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} c_j^{-1} \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1+\frac{\gamma_p}{c_p} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} r_j = \|r\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

de donde concluimos que **(d7)** se satisface. Finalmente, note que para un $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \mathcal{G}(k,j+1) \right\| \gamma_j &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{h(k)}{h(j+1)} \gamma_j + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{h(j+1)}{h(k)} \gamma_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\prod_{p=j+1}^{k-1} c_p^{-1} \right) \frac{c_j r_j}{r_{j-1} + \cdots r_1 + 1} \\
&\quad + \sum_{j=k}^{\infty} r_j c_j \left(\prod_{p=k}^{j} c_p^{-1} \right) \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1+\frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\prod_{p=j+1}^{k-1} c_p^{-1} \right) \frac{c_{k-1} r_j}{r_{j-1} + \cdots r_1 + 1} \\
&\quad + \sum_{j=k}^{\infty} r_j \left(\prod_{p=0}^{k-1} 1+\frac{\gamma_p}{c_p} \right)^{-1} \left(\prod_{p=k}^{j-1} \frac{1}{c_p+\gamma_p} \right) \\
&< \frac{c_{k-1} r_{k-1}}{r_{k-2} + r_{k-3} + \cdots + 1} + \sum_{j=1, j\neq k-1}^{\infty} r_j,
\end{aligned}$$

lo que implica que se cumplen **(d4)** y **(d3)**. Aplicando el Teorema 3.2.10, hemos demostrado nuestra afirmación. □

Observación 3.2.21. *La condición* $\sup_{k\in\mathbb{Z}^+} \frac{c_{k-1} r_{k-1}}{r_{k-2}+r_{k-3}+\cdots+1} + \sum_{j=1, j\neq k-1}^{\infty} r_j < 1$ *se puede obtener, por ejmplo, si la razón de crecimiento de* (c_n) *es más pequeña que la de las sumas parciales de* (r_n) *y* $\|r\|_1 < 1$*. Otro caso más simple es* $M\|r\|_1 < 1$*.*

Ejemplo 3.2.22. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tres sucesiones como en (3.31),* $A(n)$ *como fue definida en (3.32) y el sistema (3.1) asociado a esta sucesión de matrices. Sea* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una* *sucesión no negativa sumable y definamos la sucesión* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *por:*

$$\gamma_n = \frac{r_n}{r_{n-1} + \cdots + r_1 + 1}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una función acotada, diferenciable y Lipschitz (con constante* ≤ 1*), defina* $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $f(k, x) = \gamma_k g(x)$ *y considere el sistema (3.2) asociado a esta perturbación y al sistema lineal previo.. Entonces, si* $\|r\|_1 < 1$*, los sistemas (3.1) y (3.2) son* C^1*-topológicamente equivalentes en* $\mathbb{Z}^+$*.*

En efecto, las condiciones **(d0)**, **(d1)**, **(d2)**, **(d5)** y **(d6)** se siguen fácilmente, tal como en el Ejemplo anterior, con $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ como en (3.33). Por el Lema 3.2.19 tenemos

$$\gamma_j = r_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1 + \gamma_p \right)^{-1}.$$

Denote

$$\Psi_m(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \|A(p)\| + \gamma_p.$$

Es fácil ver que si $m \geq n$, entonces $\Psi_m(j) \leq \Psi_n(j)$, por lo tanto, para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\Psi_m(j) \leq \Psi_1(j) \leq \prod_{p=1}^{j-1} c_p + \gamma_p.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\Psi_m(j) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} h(j+1)\gamma(j)\Psi_1(j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} r_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} 1 + \gamma_p \right)^{-1} \left(\prod_{p=1}^{j} c_p^{-1} \right) \left(\prod_{p=1}^{j-1} c_p + \gamma_p \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} r_j c_j^{-1} \left(\prod_{p=1}^{j-1} \frac{1 + \gamma_p c_p^{-1}}{1 + \gamma_p} \right) \\
&\leq \|r\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que **(d7)** se cumple. Finalmente note que para un $k \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{G}(k, j+1)\| \gamma_j &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h(k)}{h(j+1)} \gamma_j + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{h(j+1)}{h(k)} \gamma_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\prod_{p=j+1}^{k-1} c_p^{-1} \right) \frac{r_j}{r_{j-1} + \cdots r_1 + 1} \\
&\quad + \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{p=k}^{j} c_p^{-1} \right) \frac{r_j}{r_{j-1} + \cdots r_1 + 1} \\
&< \|r\|_1 < 1,
\end{aligned}$$

lo que demuestra **(d4)** y **(d3)** con $\mu_j = \gamma_j \|g\|_\infty$. Aplicando el Teorema 3.2.10 la afirmación queda demostrada. $\square$

Ejemplo 3.2.23. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tres sucesiones como en (3.31) y $A(n)$ como en (3.32). Sea $(E(n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices uniformemente acotadas con inversas uniformemente acotadas. Fijemos $\mathscr{E}^+$ una cota uniforme para $E(n)$ y $\mathscr{E}^-$ una cota uniforme para sus inversas. Considere $E(0) = I$ y defina $B(n) = E^{-1}(n)A(n)E(n-1)$. Sea $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión sumable no negativa.*

Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función acotada, diferenciable y Lipschitz (con constante ≤ 1) , defina $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(k,x) = \gamma_k g(x)$. Considere los sistemas:

$$x(k+1) = B(k)x(k) \tag{3.35}$$

y

$$y(k+1) = B(k)y(k) + f(k, y(k)). \tag{3.36}$$

Finalmente, suponga que existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \left(\mathscr{E}^-\mathscr{E}^+ + \delta\right)^j < \infty. \tag{3.37}$$

Entonces, si $\mathscr{E}^-\mathscr{E}^+\|\gamma\|_1 < 1$, los sistemas (3.35) y (3.36) son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.

En efecto, sin pérdida de generalidad podemos considear $\mathscr{E}^-, \mathscr{E}^+ \geq 1$. Como $0 \leq \alpha \leq a_n, b_n \leq c_n \leq M$, entonces $\|B(n)\| \leq \mathscr{E}^- M \mathscr{E}^+$ y $\|B^{-1}(n)\| \leq \mathscr{E}^-\alpha^{-1}\mathscr{E}^+$, por lo que **(d0)** se cumple.

Defina $\tilde{P}(\cdot)$ y $\tilde{Q}(\cdot)$ por:

$$\tilde{P}(n) = E^{-1}(n-1)P(n)E(n-1) \text{ , y } \tilde{Q}(n) = E^{-1}(n-1)Q(n)E(n-1),$$

donde $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ son como se definieron en (3.33). Luego, considerando $\Phi(m,n)$ como se definió en (3.34), es fácil ver que

$$\tilde{\Phi}(k,n) = E^{-1}(k-1)\Phi(k,n)E(n-1),$$

donde $\tilde{\Phi}(k,n)$ es la matriz de transición para (3.35). Entonces, utilizando la expresión (3.34) del Ejemplo 3.2.20 es inmediato que

$$\left\{\begin{array}{ccc} \left\|\tilde{\Phi}(k,n)\tilde{P}(n)\right\| & = & \left\|E^{-1}(k-1)\Phi(k,n)P(n)E(n-1)\right\| \\ & \leq & \mathscr{E}^-\left\|E(n-1)\right\| \prod_{j=n}^{k-1} \text{máx}\{a_j, b_j\} \\ & \leq & \mathscr{E}^-\left\|E(n-1)\right\| \prod_{j=n}^{k-1} c_j, \forall\ k \geq n \geq 0 \\ \left\|\tilde{\Phi}(k,n)\tilde{Q}(n)\right\| & = & \left\|E^{-1}(k-1)\Phi(k,n)Q(n)E(n-1)\right\| \\ & \leq & \mathscr{E}^-\left\|E(n-1)\right\| \prod_{j=k}^{n-1} c_j^{-1}, \forall\ 0 \leq k \leq n. \end{array}\right.$$

Así, definiendo $h(n) = \prod_{p=1}^{n-1} c_p^{-1}$ y $D(n) = \mathscr{E}^-\left\|E(n-1)\right\|$, **(d1)** se sigue. Note que **(d6)** se tiene inmediatamente, mientras que **(d2)** y **(d5)** se obtienen en la misma forma que el Ejemplo

3.2.20.

Denote

$$\tilde{\Psi}_m(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \|B(p)\| + \gamma_p.$$

Es fácil ver que si $m \geq n$ entonces $\tilde{\Psi}_m(j) \leq \tilde{\Psi}_n(j)$. Así, para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo se tiene:

$$\tilde{\Psi}_m(j) \leq \tilde{\Psi}_1(j) \leq \prod_{p=1}^{j-1} \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ c_p + \gamma_p$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\tilde{\Psi}_m(j) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\gamma(j)\tilde{\Psi}_1(j) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{E}^- \|E(j)\| \left(\prod_{p=1}^{j} c_p^{-1} \right) \gamma_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ c_p + \gamma_p \right) \\
&\leq \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j c_j^{-1} \left(\prod_{p=1}^{j-1} \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ + \gamma_p c_p^{-1} \right) \\
&\leq \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \left(\prod_{p=1}^{j-1} \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ + \gamma_p \right).
\end{aligned}$$

Como $\gamma_p \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, entonces existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_p \leq \delta$ para todo $p \geq p_0$. Por lo tanto, aplicando la condición (3.37) es fácil ver que **(d7)** se cumple. Finalmente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{G}(k, j+1)\| \gamma_j &\leq \mathscr{E}^- \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h(k)}{h(j+1)} \|E(j-1)\| \gamma_j + \mathscr{E}^- \sum_{j=k}^{\infty} \frac{h(j+1)}{h(k)} \|E(j-1)\| \gamma_j \\
&\leq \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ \sum_{j=1}^{k-1} \left(\prod_{p=j+1}^{k-1} c_p^{-1} \right) \gamma_j \\
&\quad + \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ \sum_{j=k}^{\infty} \left(\prod_{p=k}^{j} c_p^{-1} \right) \gamma_j \\
&< \mathscr{E}^- \mathscr{E}^+ \|\gamma\|_1 < 1,
\end{aligned}$$

demostrando así **(d4)** y **(d3)** con $\mu_j = \gamma_j \|g\|_\infty$. Aplicando el Teorema 3.2.10 nuestra afirmación se sigue. □

Observación 3.2.24. *Como mencionamos en la introducción, las condiciones* ***(d0)-(d6)*** *han sido usadas repetidas veces por varios autores para poder estudiar la equivalencia topológica entre los sistemas (3.1) y (3.2). Por tanto, la novedad de este trabajo es la condición* ***(d7)*** *y sus implicaciones.*

*Note que en el Corolario 3.2.13 el hecho de que esta condición se satisfaga se debe a una apropiada combinación de las propiedades de la dicotomía exponencial y de la perturbación, de hecho, tal como se explicó en la Observación 3.2.14, es imposible conseguir esta condición sólo exigiendo condiciones a la dicotomía. Mientras tanto, en los Ejemplos 3.2.20 y 3.2.22, esta condición se logra mediante una perturbación que es lo suficientemente pequeña y tiene una razón de decrecimiento suficientemente rápida, y de hecho hemos ignorado completamente la ayuda que la dicotomía podría haber presentado. Finalmente, en el Corolario 3.2.15 y en el Ejemplo 3.2.23, la condición **(d7)** se logra mediante una combinación de las contribuciones tanto de la perturbación como de la dicotomía.*

*Esto muestra que hay muchas posibilidades para obtener la condición **(d7)** y por tanto, nuestro resultado principal, el Teorema 3.2.10, es aplicable en muchas situaciones diferentes.*

3.3. Segunda Derivada

Nuevamente consideremos la expresión (3.12) para estudiar la segunda derivada del homeomorfismo de equivalencia topológica. Tomando en cuanta el Corolario 3.2.7, el mapeo $\eta \mapsto y(0,m,\eta)$ es de clase C^r $(r \geq 1)$ para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo apenas se satisfagan las condiciones **(d1)-(d4)** y **(d6)**; por lo tanto, la diferenciabilidad del homeomorfismo sólo depende de la diferenciabilidad del mapeo $\eta \mapsto w^*(0;(m,\eta))$.

Lema 3.3.1. *Suponga que se tienen las condiciones **(d0)-(d7)**, donde **(d6)** se cumple con $r=2$. También, suponga que hay funciones $\Gamma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ y $\pi_m : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que:*

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(j,u) \right\| \leq \Gamma(j) \text{ , para todo } j \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.38}$$

y

$$\left\| \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta) \right\| \leq \pi_m(j) \text{ , para todo } j \geq m. \tag{3.39}$$

Finalmente, suponga que para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo, las sucesiones anteriores verifican:

$$\sum_{j=m}^{\infty} \left(D(j+1)h(j+1) \left\{ \pi_m(j)\gamma(j) + \Gamma(j) \left[\prod_{p=m}^{j-1} \|A(p)\| + \gamma(p) \right]^2 \right\} \right) < +\infty. \tag{3.40}$$

Entonces $\eta \mapsto w^*(0;(m,\eta))$ es un mapeo de clase C^2.

Demostración. Seguiremos la misma estrategia que utilizamos en el Lema 3.2.8. Establecimos en el Corolario 3.2.9 que para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo

$$\frac{\partial w^*(0;(m,\eta))}{\partial \eta} = -\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{G}(0,j+1) \frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta)) \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta),$$

lo cual podemos utilizar, ya que estamos imponiendo las condiciones **(d0)-(d7)**, que garantizaban dicho resultado. Denotemos

$$\Omega_{m,\eta}(j) = \frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta)) \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(j,y(j,m,\eta)) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) \right)^2.$$

Sea $\eta \in \mathbb{R}^d$ fijo y sea $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ una sucesión propiamente convergente a cero. Elija un $m \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario pero fijo y definimos la sucesión de funciones $(F_{n,m,\eta})_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{Z}^+$ por:

$$F_{n,m,\eta}(j) = \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n) - \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta).$$

Así, definimos la sucesión de funciones $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{Z}^+$ por:

$$\psi_n(j) = \mathcal{G}(0,j+1)\frac{F_{n,m,\eta}(j) - \Omega_{m,\eta}(j)\delta_n}{|\delta_n|}$$

Aplicando la condición **(d6)**, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(j) = 0.$$

Recuerde que en la demostración del Lema 3.2.8 mostramos que para todo $j \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$|y(j,m,\eta) - y(j,m,\tilde{\eta})| \leq \mathcal{A}_m(j)|\eta - \tilde{\eta}|,$$

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| \quad \leq \quad \mathcal{A}_m(j)$$

y

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j,u)\right\| \quad \leq \quad \gamma(j),$$

con $\mathcal{A}_m(j)$ definido como en (3.27). Además, a partir de las condiciones (3.38) y (3.39) es fácil ver que

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j,u) - \frac{\partial f}{\partial u}(j,\tilde{u})\right\| \quad \leq \quad \Gamma(j)|u-\tilde{u}| \text{ , para todo } j \in \mathbb{Z}^+$$

y

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) - \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\tilde{\eta})\right\| \quad \leq \quad \pi_m(j)|\eta-\tilde{\eta}| \text{ , para } j \geq m.$$

Con esto en mente, note que para $j \geq m$

$$\begin{aligned} \left\|\Omega_{m,\eta}(j)\right\| &\leq \left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\right\| + \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(j,y(j,m,\eta))\right\|\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\|^2 \\ &\leq \pi_m(j)\gamma(j) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2, \end{aligned}$$

mientras que para $0 \leq j < m$

$$\left\|\Omega_{m,\eta}(j)\right\| \quad \leq \quad \left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|\gamma(j) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2.$$

Por otra parte, para $j \geq m$

$$\begin{aligned}
\left\|F_{n,m,\eta}(j)\right\| &\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n) - \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) - \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| \\
&\leq \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n))\right\|\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n) - \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| \\
&\quad + \left\|\frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta+\delta_n)) - \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j,m,\eta))\right\|\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right\| \\
&\leq \gamma(j)\pi_m(j)|\delta_n| + \Gamma(j)|y(j,m,\eta+\delta_n)-, y(j,m,\eta)|\mathcal{A}_m(j) \\
&\leq \Big(\gamma(j)\pi_m(j) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\Big)|\delta_n|
\end{aligned}$$

Ahora, sea $0 \leq j < m$ fijo, note que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) - \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n)\right\|}{|\delta_n|} = \left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|,$$

por lo tanto, existe un $n_j \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_j$ se tiene:

$$\frac{\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) - \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n)\right\|}{|\delta_n|} \leq \left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| + 2,$$

así, para $n \geq \hat{n} := \max\{n_j : 0 \leq j < m\}$ se tiene:

$$\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta) - \frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta+\delta_n)\right\| \leq \left(\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| + 2\right)|\delta_n|, \text{ para todo } 0 \leq j < m.$$

Con esto, podemos notar que y así que para $0 \leq j < m$ y $n \geq \hat{n}$

$$\left\|F_{n,m,\eta}(j)\right\| \leq \left(\gamma(j)\left(\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| + 2\right) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\right)|\delta_n|.$$

En resumen, para $j \geq m$:

$$\begin{aligned}
\left\|\psi_n(j)\right\| &\leq \left\|\mathcal{G}(0,j+1)\right\| \frac{\left\|F_{n,m,\eta}(j)\right\| - \left\|\Omega_{m,\eta}(j)\right\||\delta_n|}{|\delta_n|} \\
&\leq 2\left\|\mathcal{G}(0,j+1)\right\|\Big(\gamma(j)\pi_m(j) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\Big),
\end{aligned}$$

mientras que para $0 \leq j < m$ y $n \geq \hat{n}$:

$$\left\|\psi_n(j)\right\| \leq \left\|\mathcal{G}(0,j+1)\right\|\left(\gamma(j)\left(2\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| + 1\right) + \Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\right).$$

Permitanos definir

$$\mathcal{F}_m(j) := \begin{cases} 2\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \left(\gamma(j)\left(\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|+1\right)+\Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\right) & ,0 \leq j < m \\ 2\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \left(\gamma(j)\pi_m(j)+\Gamma(j)\mathcal{A}_m(j)^2\right) & ,j \geq m. \end{cases}$$

Así, podemos notar que $\big\|\psi_n(j)\big\| \leq \mathcal{F}_m(j)$ para todo $j \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq \hat{n}$.

Ahora, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{F}_m(j) &\leq 2\sum_{j=0}^{m-1}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \left(\gamma(j)\left(\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|+1\right)+\Gamma(j)\mathcal{C}_m(j)^2\right) \\ &\quad +2\sum_{j=m}^{\infty}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \left(\gamma(j)\pi_m(j)+\Gamma(j)\mathcal{B}_m(j)^2\right) \\ &\leq 2\sum_{j=0}^{m-1}\big\|\mathcal{G}(0,j+1)\big\| \left(\gamma(j)\left(\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\|+1\right)+\Gamma(j)\mathcal{C}_m(j)^2\right) \\ &\quad +2\sum_{j=m}^{\infty}D(j+1)h(j+1)\left\{\pi_m(j)\gamma(j)+\Gamma(j)\left[\prod_{p=m}^{j-1}\big\|A(p)\big\|+\gamma(p)\right]^2\right\} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Así, finalmente, utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\partial w^*}{\partial \eta}(0;(m,\eta+\delta_n))-\frac{\partial w^*}{\partial \eta}(0;(m,\eta))+\left[\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)\Omega_{m,\eta}(j)\right]\delta_n}{|\delta_n|}$$

$$= -\operatorname{lím}_{n\to\infty}\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\psi_n(j)$$

$$= -\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\left(\operatorname{lím}_{n\to\infty}\psi_n(j)\right) = 0,$$

lo que implica que $\eta \mapsto \frac{\partial w^*}{\partial \eta}(0;(m,\eta))$ es diferenciable, es decir, $\eta \mapsto w^*(0;(m,\eta))$ es de clase C^2. ■

Corolario 3.3.2. *Si se tienen las condiciones del Lema 3.3.1, entonces para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo se tiene*

$$\frac{\partial^2 w^*(0;(m,\eta))}{\partial \eta^2} = -\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}(0,j+1)\left[\frac{\partial f}{\partial u}(j,y(j,m,\eta))\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(j,y(j,m,\eta))\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)\right)^2\right].$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la demostración del Lema anterior. ■

Teorema 3.3.3. *Si se tienen las condiciones **(d0)-(d7)**, **(d6)** se satisface con $r = 2$, y las condiciones del Lema 3.3.1 se cumplen, entonces (3.1) y (3.2) son C^2-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.14 sabemos que son topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$. Es más, por el Teorema 3.2.10 sabemos que dicha equivalencia topológica es de clase C^1 en $\mathbb{Z}^+$. Por el Lema 3.3.1 $\eta \mapsto w^*(0;(k,\eta))$ tiene clase C^2 de diferenciabilidad para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, y, como se mencionó en el Corolario 3.2.7, $\eta \mapsto y(0,k,\eta)$ también tiene esta clase de diferenciabilidad. Utilizando (3.12) podemos concluir que $\eta \mapsto G(k,\eta)$ es C^2 diferenciable.

Además, como G es una equivalencia topológica, sabemos que $\xi \mapsto G(k,\xi) - \xi$ es acotado y por tanto $G(k,\xi) \to \infty$ cuando $|\xi| \to \infty$. Esto, combinado con la discusión anterior, implica, por el Colorario 2.1 de [33], que $\xi \mapsto G(k,\xi)$ es un difeomorfismo de clase C^2. Más aún, como $G(k,H(k,\xi)) = \xi$, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = I,$$

y por lo tanto $\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi) = \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\right]^{-1}$, mientras que derivando respecto a ξ tenemos:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(k,H(k,\xi))\left[\frac{\partial H}{\partial \xi}(k,\xi)\right]^2 + \frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}(k,\xi) = 0,$$

y por tanto

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}(k,\xi) = -\left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\right]^{-1}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}(k,H(k,\xi))\left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(k,H(k,\xi))\right]^{-2},$$

lo que concluye nuestra demostración. ■

En lo que prosigue de esta sección estudiaremos una serie de Lemas y Corolarios técnicos que nos llevarán a establecer un Teorema que dará un ejemplo concreto de nuestro resultado principal.

Lema 3.3.4. *Suponga que existen 3 sucesiones $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y una constante β_0 tales que $\phi_1 \leq \beta_0$ y*

$$\phi_{j+1} \leq \alpha_j\phi_j + \beta_j,$$

entonces

$$\phi_j \leq \sum_{i=0}^{j-1}\left(\beta_i \prod_{p=i+1}^{j-1}\alpha_p\right).$$

Demostración. Razonemos por inducción. El caso base para $j = 1$ es válido por hipótesis. Suponga que la hipótesis inductiva es cierta para cierto $j > 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\phi_{j+1} &\leq \alpha_j\phi_j + \beta_j \\
&\leq \alpha_j\sum_{i=0}^{j-1}\left(\beta_i\prod_{p=i+1}^{j-1}\alpha_p\right) + \beta_j \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\left(\beta_i\prod_{p=i+1}^{(j+1)-1}\alpha_p\right) + \beta_j = \sum_{i=0}^{(j+1)-1}\left(\beta_i\prod_{p=i+1}^{(j+1)-1}\alpha_p\right).
\end{aligned}$$

Así, el Lema se sigue por el principio de inducción. ■

Lema 3.3.5. *Suponiendo que se cumplen las condiciones **(d0)-(d5)** y **(d6)** se cumple con $r = 2$. Además, suponga que existe una función $\Gamma : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisface (3.38), entonces para $j \geq m$*

$$\left\| \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j, m, \eta) \right\| \leq \sum_{i=0}^{j-m-1} \left[\Gamma(m+i) \prod_{p=m}^{m+i-1} \Big(\|A(p)\| + \gamma(p) \Big)^2 \prod_{p=m+i+1}^{j-1} \|A(p)\| + \gamma(p) \right].$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo. Sabemos que $\eta \mapsto \frac{\partial y}{\partial \eta}(j, m, \eta)$ está bien definido para todo $j \geq m$. Considere el problema de valores iniciales matricial

$$\begin{cases} z(j+1) &= \Big[A(j) + \frac{\partial f}{\partial u}(j, y(j, m, \eta) \Big] z(j) \\ \\ z(m) &= I. \end{cases} \tag{3.41}$$

De la demostración del Teorema 3.2.6, podemos deducir que $j \mapsto z(j, m, \eta) = \frac{\partial y}{\partial \eta}(j, m, \eta)$ es solución de (3.41), por lo tanto

$$z(m+1, m, \eta) = \left[A(m) + \frac{\partial f}{\partial u}(m, y(m, m, \eta)) \right] z(m, m, \eta) = A(m) + \frac{\partial f}{\partial u}(m, \eta).$$

Entonces, obtenemos

$$\big\| z(m+1, m, \eta) - z(m+1, m, \tilde{\eta}) \big\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(m, \eta) - \frac{\partial f}{\partial u}(m, \tilde{\eta}) \right\| \leq \Gamma(m) |\eta - \tilde{\eta}|,$$

o equivalentemente

$$\frac{\big\| z(m+1, m, \eta) - z(m+1, m, \tilde{\eta}) \big\|}{|\eta - \tilde{\eta}|} \leq \Gamma(m).$$

Ahora, sea $\hat{m} \geq m + 2$. Note que

$$z(\hat{m}, m, \eta) = \left[A(\hat{m} - 1) + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \eta)) \right] z(\hat{m} - 1, m, \eta),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} z(\hat{m}, m, \eta) - z(\hat{m}, m, \tilde{\eta}) &= \left[A(\hat{m} - 1) + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \eta)) \right] z(\hat{m} - 1, m, \eta) \\ &\quad - \left[A(\hat{m} - 1) + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta})) \right] z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}) \\ &= A(\hat{m} - 1) \big[z(\hat{m} - 1, m, \eta) - z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}) \big] \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \eta)) \big[z(\hat{m} - 1, m, \eta) - z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}) \big] \\ &\quad + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \eta)) - \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{m} - 1, y(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta})) \right] z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \big\| z(\hat{m}, m, \eta) - z(\hat{m}, m, \tilde{\eta}) \big\| &\leq \Big(\|A(\hat{m} - 1)\| + \gamma(\hat{m} - 1) \Big) \big\| z(\hat{m} - 1, m, \eta) - z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}) \big\| \\ &\quad + \Gamma(\hat{m} - 1) |y(\hat{m} - 1, m, \eta) - y(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta})| \big\| z(\hat{m} - 1, m, \tilde{\eta}) \big\|, \end{aligned}$$

o equivalentemente, para $\hat{m} \geq m+1$

$$\begin{aligned}
\left\|z(\hat{m}+1,m,\eta)-z(\hat{m}+1,m,\tilde{\eta})\right\| &\leq \Big(\left\|A(\hat{m})\right\|+\gamma(\hat{m})\Big)\left\|z(\hat{m},m,\eta)-z(\hat{m},m,\tilde{\eta})\right\| \\
&\quad +\Gamma(\hat{m})|y(\hat{m},m,\eta)-y(\hat{m},m,\tilde{\eta})|\left\|z(\hat{m},m,\tilde{\eta})\right\|,
\end{aligned}$$

de donde, utilizando (3.26) y (3.28), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|z(\hat{m}+1,m,\eta)-z(\hat{m}+1,m,\tilde{\eta})\right\| &\leq \Big(\left\|A(\hat{m})\right\|+\gamma(\hat{m})\Big)\left\|z(\hat{m},m,\eta)-z(\hat{m},m,\tilde{\eta})\right\| \\
&\quad +\Gamma(\hat{m})\left(\prod_{i=m}^{\hat{m}-1}\left\|A(i)\right\|+\gamma(i)\right)^2|\eta-\tilde{\eta}|,
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
\frac{\left\|z(\hat{m}+1,m,\eta)-z(\hat{m}+1,m,\tilde{\eta})\right\|}{|\eta-\tilde{\eta}|} &\leq \Big(\left\|A(\hat{m})\right\|+\gamma(\hat{m})\Big)\frac{\left\|z(\hat{m},m,\eta)-z(\hat{m},m,\tilde{\eta})\right\|}{|\eta-\tilde{\eta}|} \\
&\quad +\Gamma(\hat{m})\left(\prod_{i=m}^{\hat{m}-1}\left\|A(i)\right\|+\gamma(i)\right)^2.
\end{aligned}$$

En resumen, definiendo para $j \geq 1$:

$$\phi_{j,m}=\frac{\left\|z(m+j,m,\eta)-z(m+j,m,\tilde{\eta})\right\|}{|\eta-\tilde{\eta}|},$$

$$\alpha_{j,m}=\left\|A(m+j)\right\|+\gamma(m+j)$$

y

$$\beta_{j,m}=\Gamma(m+j)\left(\prod_{p=m}^{m+j-1}\left\|A(p)\right\|+\gamma(p)\right)^2,$$

se tiene $\phi_{1,m} \leq \Gamma(m)$ y

$$\phi_{j+1,m} \leq \alpha_{j,m}\phi_{j,m}+\beta_{j,m}.$$

Con esto, definiendo $\beta_{0,m}=\Gamma(m)$ y utilizando el Lema 3.3.4 obtenemos

$$\phi_{j,m} \leq \sum_{i=0}^{j-1}\left(\beta_{i,m}\prod_{p=i+1}^{j-1}\alpha_{p,m}\right),$$

es decir, hemos obtenido

$$\frac{\left\|z(m+j,m,\eta)-z(m+j,m,\tilde{\eta})\right\|}{|\eta-\tilde{\eta}|} \leq \sum_{i=0}^{j-1}\left(\beta_{i,m}\prod_{p=i+1}^{j-1}\alpha_{p,m}\right),$$

pero como $z(j,m,\eta)=\frac{\partial y}{\partial \eta}(j,m,\eta)$, entonces denotando $z(j+m,m,\eta)=\frac{\partial y}{\partial \eta}(k,m,\eta)$ esto implica

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(k,m,\eta)\right\| &\leq \sum_{i=0}^{k-m-1}\left(\beta_{i,m}\prod_{p=i+1}^{k-m-1}\alpha_{p,m}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k-m-1}\left[\Gamma(m+i)\prod_{p=m}^{m+i-1}\Big(\|A(p)\|+\gamma(p)\Big)^2\prod_{p=i+1}^{k-m-1}\|A(m+p)\|+\gamma(m+p)\right]\\
&= \sum_{i=0}^{k-m-1}\left[\Gamma(m+i)\prod_{p=m}^{m+i-1}\Big(\|A(p)\|+\gamma(p)\Big)^2\prod_{p=m+i+1}^{k-1}\|A(p)\|+\gamma(p)\right].
\end{aligned}
$$

■

Corolario 3.3.6. *Suponiendo que se cumplen las condiciones **(d0)-(d5)** y **(d6)** se cumple con* $r=2$. *Si **(d2)** se verifica con* $\gamma(j)=\nu e^{-\varepsilon_1(j+1)}a^j$ *y* $\Gamma(j)=\zeta e^{-\varepsilon_2(j+1)}b^j$ *satisface (3.38), con* $\nu,\zeta,\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ *y* $a,b\in(0,1)$, *entonces para* $j\geq m$*:*

$$
\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| \leq \frac{\zeta\left(e^{-\varepsilon_2}b\right)^m}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}\left[(M+\nu)^{j-m}-\Big(e^{-\varepsilon_2}b(M+\nu)^2\Big)^{(j-m)}\right].
$$

Demostración. Aplicando el Lema 3.3.5 y notando que $\|A(p)\|+\gamma(p)\leq M+\nu$ para todo $p\in\mathbb{Z}^+$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| &\leq \sum_{i=0}^{j-m-1}\left[\zeta e^{-\varepsilon_2(m+i+1)}b^{m+i}\prod_{p=m}^{m+i-1}\Big(\|A(p)\|+\nu e^{-\varepsilon_1(p+1)}\Big)^2\prod_{p=m+i+1}^{j-1}\|A(p)\|+\nu e^{-\varepsilon_1(p+1)}\right]\\
&\leq \zeta e^{-\varepsilon_2(m+1)}b^m\sum_{i=0}^{j-m-1}\left[e^{-\varepsilon_2 i}b^i\prod_{p=m}^{m+i-1}(M+\nu)^2\prod_{p=m+i+1}^{j-1}M+\nu\right]\\
&= \frac{\zeta e^{-\varepsilon_2(m+1)}b^m}{M+\nu}\sum_{i=0}^{j-m-1}\left[e^{-\varepsilon_2 i}b^i\prod_{p=m}^{j-1}(M+\nu)\prod_{p=m}^{m+i-1}(M+\nu)\right]\\
&= \zeta e^{-\varepsilon_2(m+1)}b^m(M+\nu)^{j-m-1}\sum_{i=0}^{j-m-1}\left[be^{-\varepsilon_2}(M+\nu)\right]^i\\
&= \zeta e^{-\varepsilon_2(m+1)}b^m(M+\nu)^{j-m-1}\frac{1-\left[be^{-\varepsilon_2}(M+\nu)\right]^{j-m}}{1-be^{-\varepsilon_2}(M+\nu)}\\
&= \frac{\zeta}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}\left[e^{-\varepsilon_2 m}b^m(M+\nu)^{j-m}-e^{-\varepsilon_2 j}b^j(M+\nu)^{2(j-m)}\right]\\
&= \frac{\zeta e^{-\varepsilon_2 m}b^m}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}\left[(M+\nu)^{j-m}-e^{-\varepsilon_2(j-m)}b^{j-m}(M+\nu)^{2(j-m)}\right]\\
&= \frac{\zeta\left(e^{-\varepsilon_2}b\right)^m}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}\left[(M+\nu)^{j-m}-\Big(e^{-\varepsilon_2}b(M+\nu)^2\Big)^{(j-m)}\right].
\end{aligned}
$$

■

Teorema 3.3.7. *Suponga que se tienen las condiciones* **(d0)** *y* **(d5)***. Suponga también que el sistema (3.1) admite una dicotomía exponencial no uniforme, es decir, hay dos proyectores complementarios invariates $P(\cdot)$ y $Q(\cdot)$ y constantes $C, \lambda, \varepsilon_1 > 0$ tales que*

$$\begin{cases} ||\Phi(k,n)P(n)|| \leq Ce^{-\lambda(k-n)+\varepsilon_1 n}, & \forall\ k \geq n \geq 0 \\ ||\Phi(k,n)Q(n)|| \leq Ce^{\lambda(k-n)+\varepsilon_1 n}, & \forall\ 0 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Además, suponga que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $u \mapsto f(k,u)$ es una función de clase C^2 tal que

$$|f(k,u)| \leq \kappa e^{-\varepsilon_0(k+1)},$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(k,u)\right\| \leq \nu e^{-\varepsilon_1(k+1)}a^k$$

y

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(k,u) - \frac{\partial f}{\partial u}(k,\tilde{u})\right\| \leq \zeta e^{-\varepsilon_2(k+1)}b^k|u-\tilde{u}|, \tag{3.42}$$

para $\kappa, \nu, \zeta > 0$, $a, b \in (0,1)$ y $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$ dados. Entonces, si $bM^2e^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1} < 1$, $aMe^{-\lambda} < 1$ y $e^{-\lambda-\varepsilon_2}abM^2 < 1$, para $\nu > 0$ suficientemente pequeño, los sistemas (3.1) y (3.2) son C^2-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$.

Demostración. Por el Corolario 3.2.15 sabemos que se cumplen las condiciones **(d0)-(d7)** y por tanto los sistemas son C^1-topológicamente equivalentes en $\mathbb{Z}^+$. En particular, **(d4)** se cumple con $\gamma(j) = \nu e^{-\varepsilon_1(j+1)}a^j$.

Es fácil ver que la hipótesis (3.42) implica la condición (3.38) del Lema 3.3.1, con $\Gamma(j) = \zeta e^{-\varepsilon_2(j+1)}b^j$. Ahora aplicaremos la misma estrategia que utilizamos en la demostración del Corolario 3.2.15. Tal como en esa ocasión, denote

$$\Psi_m(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \|A(p)\| + \gamma(p).$$

Y nuevamente notamos que $m \geq n$ implica $\Psi_m(j) \leq \Psi_n(j)$, por lo que para un $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo:

$$\Psi_m(j) \leq \Psi_0(j) \leq \left(M + \nu e^{-\varepsilon_1}\right)^j,$$

y en consecuencia

$$\Psi_m(j)^2 \leq \Psi_0(j)^2 \leq \left(M + \nu e^{-\varepsilon_1}\right)^{2j}.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\Gamma(j)\left[\prod_{p=m}^{j-1}\|A(p)\| + \gamma(p)\right]^2 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\Gamma(j)\Psi_0(j)^2 \\ &\leq C\zeta e^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1}\sum_{j=0}^{\infty}\left[be^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1}\left(M+\nu e^{-\varepsilon_1}\right)^2\right]^j. \end{aligned}$$

Como $bM^2e^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1} < 1$, entonces para ν suficientemente pequeño se tiene

$$be^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1}\left(M + \nu e^{-\varepsilon_1}\right)^2 < 1,$$

lo que implica

$$\sum_{j=m}^{\infty}\left(D(j+1)h(j+1)\Gamma(j)\left[\prod_{p=m}^{j-1}\|A(p)\|+\gamma(p)\right]^2\right)<+\infty. \tag{3.43}$$

Por otra parte, utilizando el Corolario 3.3.6 tenemos que para $j \geq m$

$$\left\|\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}(j,m,\eta)\right\| \leq \frac{\zeta\left(e^{-\varepsilon_2}b\right)^m}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}\left[(M+\nu)^{j-m}-\left(e^{-\varepsilon_2}b(M+\nu)^2\right)^{(j-m)}\right] =: \pi_m(j),$$

por lo tanto

$$\sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\pi_m(j)\gamma(j) \leq \sum_{j=m}^{\infty} K_m\left\{\frac{\left[e^{-\lambda}a(M+\nu)\right]^j}{(M+\nu)^m}-\frac{\left[e^{-\lambda-\varepsilon_2}ab(M+\nu)^2\right]^j}{\left[e^{-\varepsilon_2}b(M+\nu)^2\right]^m}\right\}<+\infty,$$

para ν suficientemente pequeño, donde $K_m = \dfrac{C\nu\zeta\left(e^{-\varepsilon_2}b\right)^m e^{-\lambda}}{e^{\varepsilon_2}(M+\nu)-b(M+\nu)^2}$. Así, la expresión anterior junto con (3.43) implica que la condición (3.40) del Lema 3.3.1 se satisface. Finalmente, aplicando el Teorema 3.3.3 obtenemos el resultado. ■

Observación 3.3.8. *En el resultado anterior, si $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $a = b$, entonces las condiciones $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 - \lambda$, $bM^2e^{-\lambda-\varepsilon_2+\varepsilon_1} < 1$, $aMe^{-\lambda} < 1$ y $e^{-\lambda-\varepsilon_2}abM^2 < 1$, se pueden resumir con $aM^2e^{-\lambda} < 1$.*

Observación 3.3.9. *Este teorema extiende el resultado obtenido en el Corolario 3.2.15, ya que bajo condiciones similares, hemos obtenido diferenciabilidad de clase C^2. Hemos impuesto dos hipótesis extra para lograr este objetivo. La primera es la existencia de la función Γ que acote a la segunda derivada de la perturbación. Note cómo esta la existencia de esta cota implica una condición de Lipschitz sobre la primera derivada, lo cual, como se mencionó en la Observación 3.2.17, fue utilizada por los autores en [17] para mostrar la primera clase de diferenciabilidad para la equivalencia topológica, mientras que en este trabajo hemos logrado la clase C^1 sin recurrir a ella, y al utilizarla obtenemos clase C^2.*

La segunda condición adicional es $aM^2e^{-\lambda} < 1$, la cual es más fuerte que la condición $aMe^{-\lambda} < 1$, que utilizamos en el Corolario 3.2.15, ya que de manera general la constante M es mayor a 1.

3.4. Derivadas de Orden Superior

En esta sección buscamos condiciones que generalicen nuestras hipótesis anteriores (a saber, **(d7)** y las condiciones (3.38), (3.39) y (3.40) del Lema 3.3.1) para obtener ordenadas de orden superior para el homeomorfismo.

Suponga que se verifican las condiciones **(d0)-(d6)**. Suponga también que existen funciones $\Gamma_s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\pi_{s,m} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq s \leq r$, $m \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$\left\|\frac{\partial^s f}{\partial u^s}(j,u)\right\| \leq \Gamma_s(j) \text{ , para todo } j \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.44}$$

y

$$\left\|\frac{\partial^s y}{\partial \eta^s}(j,m,\eta)\right\| \leq \pi_{s,m}(j) \text{ , para todo } j \geq m. \tag{3.45}$$

Fijemos $m \in \mathbb{Z}^+$ y considere la familia de funciones

$$\mathfrak{S}_m = \left\{ \Gamma_s \prod_{k=1}^{r} \pi_{k,m}^{e_k} : 1 \leq s \leq r, e_k \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}.$$

Considere ahora el $\mathbb{Z}-$módulo generado por dicha familia, denotado $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_m]$, y definimos el mapeo $\mathbb{Z}-$lineal $\mathbb{D}_m : \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_m] \to \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_m]$ definido por

- $\mathbb{D}_m(\Gamma_s) = \Gamma_{s+1}\pi_{1,m}$, para todo $1 \leq s < r$.
- $\mathbb{D}_m(\pi_{s,m}) = \pi_{s+1,m}$, para todo $1 \leq s < r$.
- $\mathbb{D}_m(fg) = \mathbb{D}_m(f)g + f\mathbb{D}_m(g)$, para todas $f, g \in \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_m]$ tales que $fg \in \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_m]$.

Para simplificar notaciones, supondremos la existencia de una cierta función Γ_0 tal que $\mathbb{D}_m(\Gamma_0)(j) = \Gamma_1(j)\pi_{1,m}(j)$. Bajo estas condiciones es fácil ver que

- $\mathbb{D}_m^2(\Gamma_0)(j) = \Gamma_2(j)\pi_{1,m}(j)^2 + \Gamma_1(j)\pi_{2,m}(j)$.
- $\mathbb{D}_m^3(\Gamma_0)(j) = \Gamma_3(j)\pi_{1,m}(j)^3 + 3\Gamma_2(j)\pi_{2,m}(j)\pi_{1,m}(j) + \Gamma_1(j)\pi_{3,m}(j)$.
- $\mathbb{D}_m^4(\Gamma_0)(j) = \Gamma_4(j)\pi_{1,m}(j)^4 + 6\Gamma_3(j)\pi_{2,m}(j)\pi_{1,m}(j)^2 + 4\Gamma_2(j)\pi_{3,m}(j)\pi_{1,m}(j) + \Gamma_1(j)\pi_{4,m}(j)$.

Inductivamente, a partir de la definición del operador, es fácil calcular potencias mayores de $\mathbb{D}_m$ aplicadas en Γ_0. Con esto en mente, nos gustaría introducir la siguiente condición:

(DIF,r) Suponga que se verifican las condiciones **(d0)-(d6)**. Suponga también que existen funciones $\Gamma_s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\pi_{s,m} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq s \leq r$, $m \in \mathbb{Z}^+$ que satisfacen (3.44) y (3.45) respectivamente. Finalmente, suponga que para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo se verifica

$$\sum_{j=m}^{\infty} D(j+1)h(j+1)\mathbb{D}_m^s(\Gamma_0)(j) < +\infty \text{ , para todo } 1 \leq s \leq r.$$

Observación 3.4.1. *Note que la condición **(d7)** es un caso particular de **(DIF,r)**, a saber **(DIF,1)**, con $\Gamma_1(j) = \gamma(j)$ y $\pi_{1,m}(j) = \prod_{p=m}^{j-1} \|A(p)\| + \Gamma_1(p)$. Similarmente, las condiciones del Lema 3.3.1 pueden sintetizarse como **(DIF,2)**. Note también que el Lema 3.3.5 implica que dadas Γ_1 y Γ_2, podemos encontrar $\pi_{2,m}$ como*

$$\pi_{2,m}(j) = \sum_{i=0}^{j-1} \left[\Gamma_2(m+i) \prod_{p=m}^{m+i-1} \left(\|A(p)\| + \Gamma_1(p) \right)^2 \prod_{p=m+i+1}^{m+j-1} \|A(p)\| + \Gamma_1(p) \right].$$

*Es más, la condición **(d3)** es equivalente a **(DIF,0)**, definiendo $j \mapsto \Gamma_0(j)$ como una función que domine uniformemente (sobre u) a $j \mapsto f(j,u)$, o en las notaciones de **(d3)**, $\Gamma_0(j) = \mu(j)$. Esto nos parece una extensión coherente, puesto que la clase de diferenciabilidad C^0 corresponde a la continuidad, y por tanto estamos en el contexto de un homeomorfismo, que es lo que se verifica al considerar **(d3)** (en conjunto con **(d0)-(d5)**).*

Bibliografía

[1] Aulbach, B., Siegmund, S. A spectral theory for nonautonomous difference equations. New trends in difference equations (Temuco, 2000), 45–55, Taylor & Francis, London, 2002.

[2] Belickiĭ, G. R. Functional equations and the conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class. Dokl. Akad. Nauk SSSR 202 (1972), 255–258.

[3] Belickiĭ, G. R. Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings. Uspekhi Mat. Nauk 33 (1978), 95–155, 263.

[4] Barreira, L., Fan, M., Valls, C., Zhang, J. Robustness of nonuniform polynomial dichotomies for difference equations. Topol. Methods Nonlinear Anal. 37 (2011), no. 2, 357–376.

[5] Barreira, L., Valls, C. A Grobman-Hartman theorem for nonuniformly hyperbolic dynamics. J. Differential Equations 228 (2006), no. 1, 285–310.

[6] Barreira, L., Valls, C. A simple proof of the Grobman-Hartman theorem for nonuniformly hyperbolic flows. Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 18, 7210–7225.

[7] Bento, A. J., Silva, C. M. Nonuniform $(\mu,\nu)-$dichotomies and local dynamics of difference equations. Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 1, 78–90.

[8] Castañeda, Á., Monzón, P., Robledo, G. (2018). Nonuniform contractions and density stability results via a smooth topological equivalence. arXiv:1808.07568.

[9] Castañeda, Á., González, P., Robledo, G. Topological Equivalence of nonautonomous difference equations with a family of dichotomies on the half line. Commun. Pure Appl. Anal. 20 (2021), no. 2, 511–532.

[10] Castañeda, Á., Monzón, P. Robledo, G. Smoothness of topological equivalence on the half line for nonautonomous systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 150 (2020), no. 5, 2484–2502.

[11] Castañeda, Á., Robledo, G. Differentiability of Palmer's linearization theorem and converse result for density functions. J. Differential Equations 259 (2015), no. 9, 4634–4650.

[12] Chu, J. Robustness of nonuniform behavior for discrete dynamics. Bull. Sci. Math. 137 (2013), no. 8, 1031–1047.

[13] Coffman, C. V., Schäffer, J. J. Dichotomies for linear difference equations. Math. Ann. 172 (1967), 139–166.

[14] Coppel, W. A. Dichotomies in stability theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[15] Crai, V., Aldescu, M. On $(h,k)-$dichotomy of linear discrete-time systems in Banach spaces. Difference equations, discrete dynamical systems and applications, 257–271, Springer Proc. Math. Stat., 287, Springer, Cham, 2019.

[16] Cuong, L.V., Doan, T.S., Siegmund, S. A Sternberg theorem for nonautonomous differential equations. J. Dynam. Differential Equations 31 (2019), no. 3, 1279–1299.

[17] Dragičević, D., Zhang, W., Zhang, W. Smooth linearization of nonautonomous difference equations with a nonuniform dichotomy. Math. Z. 292 (2019), no. 3-4, 1175–1193.

[18] Dragičević, D., Zhang, W., Zhang, W. Smooth linearization of nonautonomous differential equations with a nonuniform dichotomy. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 121 (2020), no. 1, 32–50.

[19] Elaydi, S. An introduction to difference equations. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2005.

[20] Fenner, J. L., Pinto, M. On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect. Nonlinear Anal. 38 (1999), no. 3, Ser. A: Theory Methods, 307–325.

[21] Hartman, P. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 5 (1960), 220–241.

[22] Jiang, L. Generalized exponential dichotomy and global linearization. J. Math. Anal. Appl. 315 (2006), no. 2, 474–490.

[23] Kloeden, P.E., Rasmussen, M. Nonautonomous Dynamical Systems. Mathematical Surveys and Monographs, 176. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[24] Lin, Z., Lin, Y. X. Linear systems exponential dichotomy and structure of sets of hyperbolic points. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.

[25] Palmer, K. J. A characterization of exponential dichotomy in terms of topological equivalence. J. Math. Anal. Appl. 69 (1979), no. 1, 8–16.

[26] Palmer, K. J. A generalization of Hartman's linearization theorem. J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 753–758.

[27] Palmer, K. J. The structurally stable linear systems on the half-line are those with exponential dichotomies. J. Differential Equations 33 (1979), no. 1, 16–25.

[28] Papaschinopoulos, G., Schinas, J. Criteria for an exponential dichotomy of difference equations. Czechoslovak Math. J. 35(110) (1985), no. 2, 295–299.

[29] Papaschinopoulos, G., Schinas, J. Structural stability via the density of a class of linear discrete systems. J. Math. Anal. Appl. 127 (1987), no. 2, 530–539.

[30] Papaschinopoulos, G. Some roughness results concerning reducibility for linear difference equations. Internat. J. Math. Math. Sci. 11 (1988), no. 4, 793–804.

[31] Papaschinopoulos, G. A linearization result for a differential equation with piecewise constant argument. Analysis 16 (1996), no. 2, 161–170.

[32] Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Math. Z. 32 (1930), no. 1, 703–728.

[33] Plastock, R. Homeomorphisms between Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 200 (1974), 169–183.

[34] Pugh, C. C. On a theorem of P. Hartman. Amer. J. Math. 91 (1969), 363–367.

[35] Rayskin, V. $\alpha-$Hölder linearization. J. Differential Equations 147 (1998), no. 2, 271–284.

[36] Reinfelds, A.; Šteinberga, D. Dynamical equivalence of quasilinear dynamic equations on time scales. J. Math. Anal. 7 (2016), no. 1, 115–120.

[37] Reĭnfel'd, A. A. Global topological equivalence of nonlinear flows. Differencial'nye Uravnenija 8 (1972), 1901–1903, 1915.

[38] Sacker, R.J., Sell, G.R. A spectral theory for linear differential systems. J. Differential Equations 27 (1978), no. 3, 320–358.

[39] Shi, J. L., Xiong, K. Q. On Hartman's linearization theorem and Palmer's linearization theorem. J. Math. Anal. Appl. 192 (1995), no. 3, 813–832.

[40] Sternberg, S. Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. Math. 79 (1957), 809–824.

[41] Sternberg, S. On the structure of local homeomorphisms of Euclidian $n-$space, II. Amer. J. Math. 80 (1958), 623–631.

[42] Van Strien, S. Smooth linearization of hyperbolic fixed points without resonance conditions. J. Differential Equations 85 (1990), no. 1, 66–90.