

UCH-FC
LIC-F
~~VFR2~~
C.I

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS

**Sobre el problema inverso del
Scattering a energía fija.**

INFORME DE INVESTIGACION PARA
OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN
FISICA

LEONARDO VILLARROEL SILVA

SANTIAGO DE CHILE

1971

UCH-EC
LIC-F
V722

*Distribución Oficial
Problema Inverso en la*

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias.

SOBRE EL PROBLEMA INVERSO DEL SCATTERING
A ENERGIA FIJA.

INFORME DE INVESTIGACION
PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICA

LEONARDO VILLARROEL SILVA.

SANTIAGO DE CHILE

1971

INFORME DE INVESTIGACION PARA OPTAR
AL GRADO DE LICENCIADO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICA DE LA
UNIVERSIDAD DE CHILE.

PROFESOR GUÍA:
CARLOS A. LOPEZ

1971

INFORME DE INVESTIGACION PARA OPTAR
AL GRADO DE LICENCIADO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN FÍSICA DE LA
UNIVERSIDAD DE CHILE.

PROFESOR GUÍA:
CARLOS A. LOPEZ

1971

I N D I C E

Introducción

Capítulo I. Problema inverso del Scattering

I-1. Método de Newton.....	1
a) Desarrollo Formal.....	1
b) Demostración de Existencia y Unicidad..	14
I-2. Método de Burdet, Giffon y Predazzi....	18
a) Relación de Completitud.....	18
b) Problema Inverso.....	27

Capítulo II. Comparación del Método de Newton con el de
Predazzi.....

36

Capítulo III. Influencia de un Corte sobre el eje real;
Relación de Completitud y Ortogonalidad...41

Conclusiones.....51

Apéndices.

 Apéndice A.....52

 Apéndice B.....54

Referencias.....58

Agradecimientos.....59

#

INTRODUCCION

Este trabajo tiene como finalidad exponer los métodos teóricos por medio de los cuales se resuelve el problema inverso del scattering a energía fija, tratar de establecer una relación entre ellos y, además, generalizar uno de los mismos.

Para esto se hace necesario que definamos qué entendemos por "problema inverso del scattering". Es bien conocido que para ciertos potenciales (e.g., de Coulomb y exponencial) es posible resolver la ecuación de Schrödinger en forma exacta y, en particular, conocer los corrimientos de fase δ_l . Sin embargo, como lo que experimentalmente se determina son los corrimientos de fase, es necesario establecer una teoría que nos dé información acerca del potencial que produce estos corrimientos de fase. Esto es lo que se denomina "problema inverso del scattering".

En un experimento de scattering típico, se tiene un haz de partículas incidentes y un blanco. De las partículas incidentes, que ahora y en lo sucesivo supondremos sin spin, podemos variar dos parámetros,

a saber, el momentum angular o la energía. De ahí que existan dos métodos para atacar un mismo problema. En particular, cuando se fija la energía podemos desarrollar la teoría de dos maneras, esto es, considerando sólo los valores físicos del momentum angular, o bien hacer el estudio en el plano del momentum angular complejo $\lambda = 1 + 1/2$. Estos dos métodos han sido estudiados en sendos artículos de Newton⁽¹⁾ y Burdet, Giffon y Predazzi⁽²⁾ (que en lo sucesivo citaremos como Predazzi) para potenciales esféricamente simétricos, con la salvedad de que Predazzi hace uso en forma explícita de la finitud de los dos primeros momentos absolutos del potencial.

En especial, generalizamos las relaciones obtenidas por Predazzi para el caso en que al potencial estudiado por él se le agrega un término del tipo \propto/r^2 , con $\propto > 0$. El efecto de este término es producir un corte a lo largo del eje real del plano λ .

Finalmente, es necesario notar que el hecho de fijar una energía baja para el estudio del problema inverso del scattering, es una condición que nos permitirá desarrollar una teoría consistente. Después de todo, no sólo desconocemos los corrimientos de fase

δ_c para un rango de energías de cero a infinito, sino que a altas energías, la mera suposición de que el problema puede ser resuelto con la mecánica cuántica ordinaria con conservación de partículas, es ciertamente incorrecta.

En el capítulo I se exponen y comentan los artículos de Newton y Predazzi. Luego, en el capítulo II se estudian los posibles equivalencias y analogías entre ambos trabajos. Finalmente, el capítulo III lo dedicamos a generalizar el método de Predazzi en lo que a las relaciones de completitud y ortogonalidad se refiere.

PROBLEMA INVERSO DEL SCATTERING.

METODOS DE NEWTON Y PREDAZZI.

I - 1. Método de Newton1a) Desarrollo Formal.

En esta sección lo que haremos esencialmente es seguir de cerca el análisis que Newton⁽¹⁾ hace del problema. Empezaremos con las manipulaciones formales que nos llevan de un conocimiento de los corrimientos de fase al potencial y las funciones radiales.

Para ello recordemos que la ecuación de Schrödinger es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + U(r) \Psi(\vec{r}) = \mathcal{E} \Psi(\vec{r})$$

(I-1)

la que, usando las sustituciones

$$E = \frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{E} \quad , \quad V(r) = \frac{2m}{\hbar^2} U(r), \quad k^2 = E$$

se transforma en

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = v(r) \psi(\vec{r})$$

Como es bien sabido, las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\psi_1(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

donde $\psi_1(r)$ satisface la ecuación radial

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + k^2 \psi_1(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_1(r) = v(r) \psi_1(r) \quad (\text{I-2})$$

y $Y(\theta, \varphi)$ son los esféricos armónicos. Si utilizamos un sistema de unidades tal que r se mida en unidades de λ , entonces se tiene que $k^2=1$. Luego, si escribimos la ecuación (I-2) para una partícula libre, el resultado es

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_1(r) + \psi_1(r) = 0$$

(I-3)

Las soluciones de esta ecuación las denominaremos $U_l(r)$.

En base a estas soluciones definiremos una función arbitraria $f_1(r, r')$ de la siguiente manera

$$f(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} C_l U_l(r) U_l(r') \quad (\text{I-4})$$

con coeficientes reales C_l . La ecuación diferencial (I-3) que los $U_l(r)$ satisfacen la podemos escribir en la forma

$$D_0(r)U_l(r) = l(l+1) U_l(r) \quad (\text{I-5})$$

donde D_0 es el operador diferencial

$$D_0(r) \equiv r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + 1 \right) \quad (\text{I-6})$$

Por consiguiente, la función $f(r, r')$ satisface la ecuación diferencial

$$D_0(r) f(r, r') = D_0(r') f(r, r') \quad (\text{I-7})$$

con la condición de borde

$$f(0, r') = f(r, 0) = 0$$

(I-8)

Definamos ahora la función $K(r, r')$ como solución única de la ecuación integral

$$K(r, r') = f(r, r') - \int_0^r dr'' r''^{-2} K(r, r'') f(r'', r')$$

(I-9)

es decir, supondremos y luego demostraremos, que (I-9) tiene solución y además que la solución es única. Definamos ahora la función auxiliar

$$\xi(r, r') \equiv D(r) K(r, r') - D_0(r') K(r, r')$$

(I-10)

donde

$$D(r) \equiv D_0(r) - r^2 V(r)$$

con

$$V(r) = -2 r^{-1} \frac{d}{dr} \left[r^{-1} K(r, r) \right]$$

(I-11)

La función auxiliar $\xi(r, r')$ que hemos definido en (I-10) satisface la ecuación

$$\xi(r, r') = - \int_0^r dr'' r''^{-2} \xi(r, r'') f(r'', r')$$

que es la versión homogénea de la ecuación (I-9). Esto puede ser fácilmente demostrado si llevamos a cabo las operaciones de diferenciación en (I-10), integramos por partes y hacemos uso de la ecuación (I-7) y de la condición de borde (I-8). Ya que habíamos supuesto que la solución de (I-9) era única, podemos deducir que

$$\xi(r, r') = 0$$

esto es, $K(r, r')$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$D(r) K(r, r') = D_0(r') K(r, r')$$

(I-12)

Además, las ecuaciones (I-8) y (I-9) implican que $K(r, r')$ satisface la condición de borde

$$K(r,0) = K(0,r') = 0$$

(I-13)

La idea ahora es usar la solución $K(r,r')$ de la ecuación (I-9) para definir la función

$$\varphi_1(r) = U_1(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r,r') U_1(r')$$

(I-14)

Notemos que $\varphi_1(r)$ se comporta igual que $U_1(r)$ cuando $r \rightarrow 0$. Puede demostrarse en forma algo elaborada (ver apéndice A) que $\varphi_1(r)$ satisface la ecuación diferencial

$$D(r) \varphi_1(r) = 1 (1 + 1) \varphi_1(r)$$

(I-15)

que no es más que la ecuación de Schrödinger para las soluciones $\varphi(r)$ regulares en el origen, es decir, con $\varphi(0) = 0$. Sin embargo, antes de continuar es

conveniente que resumamos lo que hemos hecho: Hemos construido, a través de la ecuación (I-14), las soluciones regulares de la ecuación radial de Schrödinger (I-15) para todo valor de l , empezando con una función $\xi(r, r')$ arbitraria que satisface (I-7) y (I-8). La tarea a la cual debemos avocarnos ahora es establecer una relación entre los C_l (que forman un conjunto infinito de números reales) de (I-4) con los corrimientos de fase δ_l . Con este objeto substituyamos (I-4) en (I-9):

$$K(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \left\{ U_l(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_l(r') \right\} U_l(r')$$

lo cual implica que podemos definir

$$K_l^x(r) = U_l(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_l(r')$$

pero, por (I-14) vemos que $K_l^x(r) = \psi_l^x(r)$, es decir,

$$K(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \psi_l^x(r) U_l(r')$$

(I-16)

si este resultado lo usamos en (I-14) obtenemos

$$\varphi_{1l}(r) = U_{1l}(r) - \sum_{l'} L_{1l'l}(r) C_{l'} \varphi_{1l'}(r)$$

(I-17)

donde

$$L_{1l'l}(r) = \int_0^r dr' r'^{-2} U_{1l}(r') U_{1l'}(r')$$

(I-18)

La ecuación (I-17) representa un conjunto infinito de ecuaciones algebraicas acopladas equivalente a la ecuación integral (I-9).

Para ver entonces qué relación existe entre los $C_{l'}$ y los corrimientos de fase, tomemos el límite $r \rightarrow \infty$ en (I-17). Entonces

$$\varphi_{1l} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A_{1l} \text{sen} \left(r - \frac{1}{2} \pi l + \delta_{1l} \right) = \varphi_{1l}^{(\infty)}(r)$$

$$U_{1l} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \text{sen} \left(r - \frac{1}{2} \pi l \right) = \varphi_{10l}^{(\infty)}(r)$$

$$L_{1l'l} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} L_{1l'l}^{(\infty)}$$

(I-19)

y (I-17) se transforma en

$$\varphi_1^{(\infty)}(r) = \varphi_{01}^{(\infty)}(r) - \sum_{1'} L_{11'}^{(\infty)} C_{1'} \varphi_{1'}^{(\infty)}(r)$$

(I-20)

La matriz $L_{11'}^{(\infty)}$ puede ser fácilmente calculada en forma explícita si notamos que $L_{11'}^{(\infty)}$ es la integral del Wronskiano de U_1 y $U_{1'}$. En efecto, la ecuación (I-5) para U_1 y $U_{1'}$ nos da

$$r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + 1 \right) U_1(r) = 1(1+1) U_1(r),$$

$$r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + 1 \right) U_{1'}(r) = 1'(1'+1) U_{1'}(r)$$

multiplicando la primera por $U_{1'}(r)$ y la segunda por $U_1(r)$ y luego restando la última de la primera e integrando, resulta:

$$\int_0^r U_1 U_{1'} r^{-2} dr = \frac{1}{1'(1'+1) - 1(1+1)} \int_0^r (U_{1'}'' U_1 - U_1'' U_{1'}) dr$$

y en virtud de (I-18)

$$L_{11'} = \frac{U_1 U_{1'} - U_{1'} U_1}{1'(1'+1) - 1(1+1)}$$

si ahora reemplazamos (I-19) en esta expresi3n, obtenemos

$$L_{11'}^{(\infty)} = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi (1' - 1)}{(1' - 1)(1'+1+1)} ; (1 \neq 1') \quad (\text{I-21})$$

si hacemos $1 = 1'$ en (I-18) queda:

$$L_{11}^{(\infty)} = \int_0^{(\infty)} dr' \left\{ J_1(r') \right\}^2 = \frac{\frac{1}{2} \pi}{21 + 1} \quad (\text{I-22})$$

Usando el hecho de que $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ podemos escribir

$$O_{11}^{(\infty)}(r) = \frac{A1}{2i} \left(e^{i(r - \frac{1}{2} \pi 1 + \delta 1)} - e^{-i(r - \frac{1}{2} \pi 1 + \delta 1)} \right)$$

$$O_{101}^{(\infty)}(r) = \frac{1}{2i} \left(e^{i(r - \frac{1}{2} \pi 1)} - e^{-i(r - \frac{1}{2} \pi 1)} \right)$$

y reemplazando esto en la ecuaci3n (I-20) e igualando los coeficientes de e^{ir} y e^{-ir} separadamente, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$e^{i\delta_1} A_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{l+1} C_1\right) = 1 - \sum_{l \neq l'} L_{ll'}^{(\infty)}(i)^{l-l'} C_1 e^{i\delta_{l'}} A_{l'} \quad (\text{I-23})$$

y otro conjunto de ecuaciones que, como los C_1 son reales, es simplemente la compleja conjugada de (I-23), Ahora, como el conocer la amplitud de Scattering nos proporciona el corrimiento de fase δ_ρ pero no los A_1 , nos interesa encontrar una fórmula que nos dé los A_1 . Con este fin observemos que, para $l' \neq l$ la ecuación (I-21) es

$$L_{ll'}^{(\infty)}(i)^{l-l'} = -i M_{ll'} ,$$

donde

$$M_{ll'} = \begin{cases} \left\{ (l'-1)(l'+l+1) \right\}^{-1} & , \text{ si } l'-l \text{ es impar} \\ 0 & , \text{ si } l'-l \text{ es par} \end{cases}$$

En consecuencia, de (I-23)

$$A_1 e^{i\delta_1} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{l+1} \frac{C_1 A_1 e^{i\delta_1}}{2l+1} + i \sum_{l'=0}^{\infty} M_{ll'} b_{l'} e^{i(\delta_{l'} - \delta_1)} , \quad \Rightarrow$$

$$A_1 = e^{-i\delta_1} - \frac{1}{2} \pi \frac{be}{2l+1} + i \sum_{l'=0}^{\infty} M_{11l'} b_{l'} e^{i(\delta_{1'} - \delta_1)} \quad (\text{I-24})$$

donde

$$b_1 = C_1 A_1 \quad (\text{I-25})$$

La ecuación (I-24) es un sistema de ecuaciones que debemos resolver para los grupos infinitos de números reales b_1 y A_1 . Podemos efectuar una separación de los dos conjuntos si consideramos en forma separada las partes real e imaginaria de (I-24). La parte imaginaria es

$$\text{sen } \delta_1 = \sum_{l'} M_{11l'} b_{l'} \cos (\delta_{1'} - \delta_1) \quad (\text{I-26})$$

en tanto que la parte real es

$$A_1 = \cos \delta_1 - \frac{1}{2} \pi \frac{b_1}{2l+1} - \sum_{l'} M_{11l'} b_{l'} \text{sen}(\delta_{1'} - \delta_1) \quad (\text{I-27})$$

Vemos entonces que el problema se reduce a resolver el conjunto infinito de ecuaciones algebraicas lineales y acopladas (I-26) y (I-27) para b_1 y A_1 . Una vez conocido A_1 podemos conocer C_1 explícitamente a través de la definición de $b_1 = C_1 A_1$.

En todas las deducciones anteriores se ha trabajado con sumatorias infinitas, sin embargo, en general al físico sólo le interesan los primeros valores del momentum angular, pues son ellos los que contribuyen en forma apreciable a la sección eficaz de Scattering.

Resumiendo, el procedimiento a seguir conociendo los datos experimentales δ_l es éste: resolvemos las ecuaciones (I-26) y (I-27) para los b_1, A_1 y, usando la ecuación (I-25) encontramos los C_1 . La ecuación (I-4) nos da $f(r, r')$ en función de los C_1 , de modo que podemos resolver la ecuación integral (I-9) para $K(r, r')$. Finalmente (I-11) nos da el potencial y (I-14), las funciones de onda para todo l .

Debemos aquí decir unas palabras de precaución. Se puede demostrar⁽¹⁾ que el grupo de ecuaciones (I-26) admite una solución que no es única. Específicamente, existe una solución no trivial aún cuando todos los δ_l sean nulos. En otras palabras, se

ve que existe al menos un potencial distinto de cero que, a una energía dada, no produce scattering.

1.b) Demostración de Existencia y Unicidad de la Solución de Ecuación (I-9).

En esta sección queremos demostrar que para la ecuación integral (I-9) existe una solución y además que esta es única. Con este fin supongamos que la versión homogénea de la ecuación (I-9) admite una solución no trivial $x(r, r')$:

$$x(r, r') = - \int_0^r dr'' r''^{-2} x(r, r'') f(r'', r') \quad (\text{I-28})$$

sustituyendo $f(r, r')$ por su definición (I-4), resulta

$$x(r, r') = - \sum_1 C_1 \int_0^r dr'' r''^{-2} x(r, r'') U_1(r'') U_1(r')$$

y entonces

$$x(r, r') = \sum_1 C_1 X_1(r) U_1(r') \quad (\text{I-29})$$

donde

$$X_1(r) = - \int_0^r dr'' r''^{-2} x(r, r'') U_1(r'')$$

$$X_1(r) = - \int_0^r dr'' r''^{-2} X(r, r'') U_1(r'') \quad (\text{I-30})$$

Multiplicando por $C_1 X_1(r)$ y sumando sobre l nos da, usando (I-29)

$$\sum_l C_1 X_1^2(r) = - \int_0^r dr' r'^{-2} X^2(r, r') \quad (\text{I-31})$$

diferenciando esta expresión, concluimos que

$$\sum_l 2 \cdot C_1 X_1(r) X_1'(r) = - \int_0^r dr'' r''^{-2} \cdot 2 \cdot X(r, r'') \frac{\partial X(r, r'')}{\partial r} - r^{-2} X(r, r'')$$

Por otra parte, diferenciando (I-30), multiplicando el resultado por $2C_1 X_1(r)$ y sumando sobre l , se obtiene:

$$\sum_l 2 \cdot C_1 X_1(r) X_1'(r) = - \int_0^r dr'' r''^{-2} \cdot 2 X(r, r'') \frac{\partial X(r, r'')}{\partial r} - 2 \cdot r^{-2} X^2$$

Si comparamos estas dos últimas expresiones, vemos que

$$X(r, r) = 0 \quad (\text{I-32})$$

Enseguida, diferenciamos (I-28) con respecto a r . Debido a (I-32), se cumple que $\partial X / \partial r$ es también una solución de la ecuación homogénea (I-28). Luego debe cumplirse que

$$\lim_{r \rightarrow r'} \frac{\partial X(r, r')}{\partial r} = 0$$

Y, porque

$$0 = \frac{d X(r, r)}{dr} = \left. \frac{\partial X(r, r')}{\partial r} \right|_{r'=r} + \left. \frac{\partial X(r, r')}{\partial r'} \right|_{r=r'}$$

sigue que

$$\lim_{r' \rightarrow r} \frac{\partial}{\partial r'} X(r, r') = 0$$

Este proceso puede ser repetido n veces, cumpliéndose que

$$\lim_{r' \rightarrow r} \frac{\partial^n}{\partial r'^n} X(r, r') = 0, \forall n \geq 0.$$

(I-33)

Debido a la analiticidad de las funciones $U_1(r)$ para todo r finito, $f(r, r')$ es una función

regular y analítica de r y r' para todo r y r' finito. Como consecuencia de esto, es claro que todas las soluciones $X(r,r')$ de (I-28) son funciones analíticas de r' y regulares para todo r' . Esto significa que podemos justificar la diferenciación de (I-28) con respecto a r bajo el signo integral.

El hecho de que todas las derivadas, de $X(r,r')$ con respecto a r' se anulen en $r'=r$, además de que $X(r,r')$ es analítica, nos permite concluir que

$$X(r,r') = 0$$

Luego, la versión homogénea de (I-29) no tiene soluciones no triviales. Entonces, podemos concluir que si (I-9) tiene una solución ésta debe ser única. La existencia de esta solución está garantizada por la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm siempre y cuando $f(r,r')$ sea acotada para todo valor finito de r y r' .

Finalmente es necesario señalar que Newton⁽¹⁾ con el objeto de justificar las diferenciaciones bajo los signos de integral, asimismo como la existencia de estas derivadas, ha hecho ciertas suposiciones acerca de los coeficientes C_1 . En realidad, este no nos parece suficientemente claro.

I-2. Método de Predazzi.2.a) Relación de Completitud.

En esta sección expondremos la deducción de la relación de completitud para el conjunto de funciones $f(\lambda, -k, r)/r$ donde $f(\lambda, -k, r)$ es la solución de Jost de la ecuación de Schrödinger para potencia -les cuyos dos primeros momentos absolutos son finitos, esto es

$$\int_0^{\infty} dr \cdot r \cdot |V(r)| < \text{constante},$$

$$\int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \cdot |V(r)| < \text{constante.} \quad (\text{I-34})$$

Las restricciones impuestas al potencial nos garantizan su regularidad ($r^2 |V(r)| < \text{const.}$), como asimismo ciertas propiedades de las soluciones y función de Jost que expondremos más adelante.

El método empleado para encontrar la relación de completitud citada es el habitual, esto es, debemos evaluar la integral

$$I(k, r) = \int_{\sqrt{r}}^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{\infty} h(r') \frac{-G(\lambda, k, r, r')}{r r'} dr' \quad (\text{I-35})$$

donde $G(\lambda, k, r, r')$ es la función de Green, mediante la cual podemos expresar una solución $X(\lambda, k, r)$ de la ecuación radial de Schrödinger en términos de la solución $X_0(\lambda, k, r)$ de la misma, pero con $V(r)=0$

$$X(\lambda, k, r) = X_0(\lambda, k, r) + \int_0^{\infty} G(\lambda, k, r, r') V(r') X_0(\lambda, k, r') dr'.$$

$G(\lambda, k, r, r')$ puede ser expresada en términos de las bien conocidas soluciones de la ecuación de Schrödinger definidas por:

$$\varphi(\lambda, k, r) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} r^{\lambda+1/2}$$

$$f(\lambda, k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ik \cdot r}$$

(I-36)

entonces

$$G(\lambda, k, r, r') = \frac{-\varphi(\lambda, k, r <) f(\lambda, -k, r >)}{f(\lambda, -k)}$$

donde $f(\lambda, -k)$ es la función de Jost definida por

$$f(\lambda, -k) = W [f(\lambda, -k, r), \varphi(\lambda, k, r)]$$

en que W denota el Wronskiano de las funciones f y φ ; $h(r)$ es una función arbitraria de cuadrado integrable. Bajo las condiciones, expresadas por (I-34) para el potencial, sabemos que ⁽³⁾ $\varphi(\lambda, k, r)$ es una función holomorfa en el semiplano derecho $\text{Re } \lambda \geq 0$ y $f(\lambda, -k, r)$ es una función entera en el plano λ de tal manera que $f(\lambda, -k)$ es una función holomorfa en $\text{Re } \lambda \geq 0$. Por lo tanto el contorno Γ de integración en (I-35) lo escogemos compuesto del eje imaginario λ más un semicírculo C de radio infinito en el semiplano $\text{Re } \lambda \geq 0$, como muestra la figura 1.

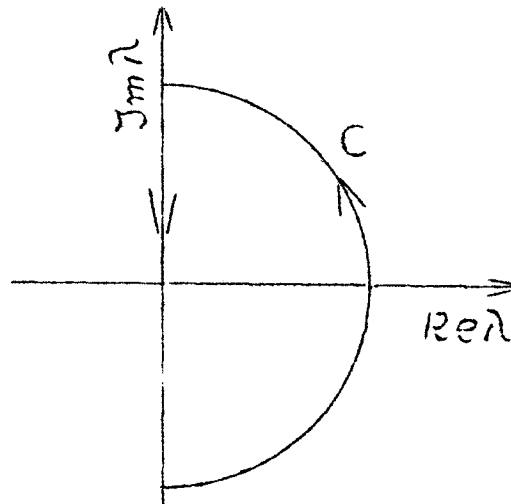


Fig. 1.

La integral $I(k,r)$ se calculará primero por el método de los residuos de Cauchy y luego la expresaremos en función de sus diversas contribuciones; entonces igualando ambos resultados obtendremos lo deseado.

Por lo dicho anteriormente acerca de las propiedades de $\varphi(\lambda, k, r)$ y $f(\lambda, -k, r)$ estamos en condiciones de afirmar que los únicos polos del integrando son los ceros simples de la función de Jost en $\lambda = o\zeta i$. Entonces, por el teorema de los residuos de Cauchy

$$I(k,r) = 2\pi i \sum_i \int_0^\infty dr' \frac{h(r')}{rr'} \frac{\varphi(o\zeta i, k, r') f(o\zeta i, -k, r)}{\left. \frac{\partial f(\lambda, -k)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=o\zeta i}} \quad (\text{I-37})$$

El denominador puede expresarse así (ver apéndice B),

$$\left. \frac{\partial f(\lambda, -k)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=o\zeta i} = - \frac{i}{k} f(o\zeta i, k) M^2(o\zeta i, k) \quad (\text{I-38})$$

con

$$M^2(o\zeta i, k) = o\zeta i \int_0^\infty \frac{f^2(o\zeta i, -k, r)}{r^2} dr$$

Además, es bien conocido que⁽³⁾:

$$\varphi(\lambda, k, r) = \frac{1}{2ik} \left\{ f(\lambda, k) f(\lambda, -k, r) - f(\lambda, -k) f(\lambda, k, r) \right\}$$

Evaluando esta relación en $\lambda = \sigma i$ y, recordando que $f(\sigma i, -k) = 0$, tenemos

$$\varphi(\sigma i, k, r) = \frac{1}{2ik} f(\sigma i, k) f(\sigma i, -k, r)$$

(I-39)

Entonces, utilizando (I-38) y (I-39), nuestra integral queda:

$$I(k, r) = i\pi \sum_i \int_0^{\infty} \frac{h(r')}{rr'} \frac{f(\sigma i, -k, r) f(\sigma i, -k, r')}{M^2(\sigma i, k)} dr'$$

(I-40)

Calculemos explícitamente las diversas contribuciones a $I(k, r)$. La debida al eje imaginario es fácil de evaluar, para ello sólo es necesario recordar que $f(\lambda, k, r)$ es una función par en λ y que⁽³⁾:

$$f(\lambda, -k, r) = \frac{1}{2\lambda} \left\{ f(\lambda, -k) \varphi(-\lambda, k, r) - f(-\lambda, -k) \varphi(\lambda, k, r) \right\}$$

(I-41)

El resultado es:

$$I(k,r) \Big|_{\substack{\text{eje} \\ \text{imag.}}} = -2 \int_0^{i\infty} \lambda^2 d\lambda \int_0^{\infty} \frac{h(r')}{rr'} \frac{f(\lambda, -k, r) f(\lambda, -k, r')}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)} dr' \quad (\text{I-42})$$

Finalmente, para encontrar el aporte a la integral del semicírculo grande debemos recordar que⁽³⁾:

$$\varphi(\lambda, k, r) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{\sim} \varphi_0(\lambda, k, r) \sim r^{\lambda+1/2}$$

$$f(\lambda, -k) \underset{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ |\arg \lambda| < \pi}}{\sim} f_0(\lambda, -k) \sim 2\sqrt{\lambda k} \left(\frac{2\lambda}{ek} \right)^{\lambda} e^{\frac{i\pi\lambda}{4} - \frac{i\pi}{4}} \quad (\text{I-43})$$

y, por (I-41)

$$f(\lambda, -k, r) \underset{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ |\arg \lambda| < \pi}}{\sim} \sqrt{\frac{kr}{\lambda}} e^{i\frac{\pi\lambda}{2}} \left[\left(\frac{2\lambda}{ek} \right)^{\lambda} \frac{e^{-i\pi/4}}{r^{\lambda}} - \left(\frac{ek}{2\lambda} \right)^{\lambda} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot r^{\lambda} \right]$$

Con estos conocimientos y después de una serie de cálculos que no detallaremos por ser demasiado tediosos concluimos que la contribución del semicírculo grande de radio R es:

$$I(k, r) \Big|_{\text{semi círculo}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{h(r') dr'}{\sqrt{rr'}} \left[\int_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} \theta(r-r') + \left(\frac{r}{r'}\right)^{\lambda} \theta(r'-r) \right]$$

(I-44)

donde

$$\theta(r-r') = \begin{cases} 1, & \text{si } r > r' \\ 0, & \text{si } r < r' \end{cases}$$

Ahora bien, la función $\left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda}$ no tiene polos en el dominio encerrado por nuestra trayectoria de integración Γ , luego según el teorema de los residuos de Cauchy:

$$\int_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda + \int_{-iR}^{-iR} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda = \int_{-iR}^{iR} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{-iR}^{iR} e^{\lambda \ln\left(\frac{r'}{r}\right)} d\lambda = \frac{1}{\ln\left(\frac{r'}{r}\right)} e^{\lambda \ln\left(\frac{r'}{r}\right)} \Big|_{-iR}^{iR}$$

$$\int_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda = \frac{2i}{\ln\left(\frac{r'}{r}\right)} \operatorname{sen} \left[R \ln\left(\frac{r'}{r}\right) \right] \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\lambda} d\lambda = 2i\pi \int \left\{ \ln\left(\frac{r'}{r}\right) \right\}$$

pues, es sabido que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } R x}{x} = \pi \int (x) \quad (\text{I-45})$$

Pero,

$$\int \left\{ \ln \left(\frac{r'}{r} \right) \right\} = r \int (r'-r) \quad (\text{I-46})$$

luego,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \left(\frac{r'}{r} \right)^{\lambda} = 2i \pi r \int (r'-r), \quad \text{análogamente}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \left(\frac{r}{r'} \right)^{\lambda} = 2i \pi r \int (r-r')$$

Entonces, de (I-44)

$$I(k,r) \Big|_{\substack{\text{eje} \\ \text{imag.}}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} i\pi r \int \frac{h(r') dr'}{\sqrt{rr'}} \int (r'-r) \left\{ \theta(r-r') + \theta(r'-r) \right\}$$

\parallel
 \uparrow

\Rightarrow

$$I(k,r) \Big|_{\text{eje imag.}} = i\pi h(r) \quad (\text{I-47})$$

Ahora, de (I-40), (I-42) y (I-47) obtenemos

que:

$$h(r) = \int_0^{\infty} h(r') dr' \left[\sum_i \frac{f(\alpha_i, -k, r)}{r} \frac{f(\alpha_i, -k, r')}{r'} M^{-2}(\alpha_i, k) + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \int_0^{i\infty} \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} \frac{f(\lambda, -k, r')}{r'} \frac{\lambda^2 d\lambda}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)} \right]$$

\Rightarrow

$$\sum_i \frac{f(\alpha_i, -k, r)}{r} \frac{f(\alpha_i, -k, r')}{r'} M^{-2}(\alpha_i, k) + \\ + \frac{2i}{\pi} \int_0^{i\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)} \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} \frac{f(\lambda, -k, r')}{r'} = \mathcal{J}(r-r')$$

(I-4)

que es la relación de completitud buscada. Ella se puede escribir como una integral de Stieltjes. Para ello definimos la función espectral $\mathcal{P}_k(\lambda)$ a través de

$$\frac{d\mathcal{P}_k(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{2i}{\pi} \frac{\lambda^2}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)} & , \text{ para } \lambda \in [\bar{0}, i\infty] \\ \sum_i \frac{\mathcal{J}(\lambda - \alpha_i)}{M^2(\alpha_i, k)} & , \text{ para los ceros de } f(\lambda, -k) \end{cases}$$

(I-4)

Entonces,

$$\int \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} \frac{f(\lambda, -k, r')}{r'} d\mathcal{P}_k(\lambda) = \mathcal{J}(r-r')$$

(I-5)

que es una expresión más elegante de (I-48).

2.b.) Problema Inverso.

La finalidad de esta sección es establecer ecuaciones análogas a las de Gelfand y Levitan o Marchenko para las funciones $f(\lambda, -k, r)/r$. Para esto consideremos la función

$$J(\lambda, k, r) = \int d\rho_k^{(1)}(\lambda') \frac{f(\lambda', -k, r)}{r} \int_r^{\infty} \frac{f^1(\lambda', -k, r') f^1(\lambda, -k, r')}{r'^2} \quad (\text{I-51})$$

donde las funciones con superíndice 1 se refieren a un potencial dado $V^1(r)$ y aquellas sin superíndice se refieren al potencial desconocido $V(r)$. Ambos potenciales satisfacen (I-34). Usando la relación (demostrada en el apéndice B)

$$\frac{d}{dr} \left\{ W \left[\bar{f}(\lambda'), f(\lambda) \right] \right\} = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{r^2} f(\lambda') f(\lambda) \quad (\text{I-52})$$

en la expresión (I-50), se obtiene

$$J(\lambda, k, r) = \int d\rho_k^1(\lambda') \frac{f(\lambda', -k, r)}{r} \frac{1}{\lambda^2 - \lambda'^2} W [f^1(\lambda, -k, r), f^1(\lambda', -k, r)]$$

Pero, debido a que el comportamiento asintótico en r de las soluciones de Jost es independiente de λ , el valor del Wronskiano en el infinito es cero, entonces

$$J(\lambda, k, r) = - \int d\rho_k^1(\lambda') \frac{f(\lambda', -k, r)}{r} \frac{W [f^1(\lambda, -k, r), f^1(\lambda', -k, r)]}{\lambda^2 - \lambda'^2} \quad (\text{I-53})$$

Si ahora sustituimos (I-49) en esta última expresión, obtenemos

$$J(\lambda, k, r) = \frac{i}{\lambda} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{W [f^1(\lambda, -k, r), \varphi^1(\lambda', k, r)] f(\lambda', -k, r) \lambda' d\lambda'}{r^2 (\lambda^2 - \lambda'^2) f^1(\lambda', -k)}$$

$$- \sum_i \frac{f(o \zeta_i, -k, r) W [f^1(\lambda, -k, r), f^1(o \zeta_i, -k, r)]}{r(o \zeta_i^2 - \lambda^2) M^2(o \zeta_i, k)} \quad (\text{I-54})$$

donde hemos tomado en cuenta las propiedades de simetría de las soluciones de Jost. En esta última expresión hemos designado por ζ_i a los ceros de $f^1(\lambda, -k)$

y tomamos λ levemente fuera del eje imaginario en el semiplano derecho.

Sumando y restando al miembro derecho de esta última expresión la misma integral evaluada sobre un gran semicírculo en el semiplano derecho, éste queda como una integral sobre el mismo contorno Γ de la fig. 1, la cual evaluamos por medio del teorema de Cauchy:

$$\frac{i}{\pi} \oint_{\Gamma} \frac{W[f^1(\lambda, -k, r), \varphi^1(\lambda', k, r)] f(\lambda', -k, r) \lambda' d\lambda'}{r(\lambda'^2 - \lambda^2) f^1(\lambda', -k)} =$$

$$= \sum_i \frac{W[f^1(\lambda, -k, r), f^1(o\sigma i, -k, r)] f(o\sigma i, -k, r)}{r(o\sigma i^2 - \lambda^2) M_1^2(o\sigma i, k)} + \frac{f(\lambda, -k, r)}{r}$$

y entonces

$$J(\lambda, k, r) = \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} + \frac{i}{\pi} \oint_C \frac{W[f^1(\lambda, -k, r), \varphi^1(\lambda', k, r)] f(\lambda', -k, r) \lambda' d\lambda'}{r(\lambda'^2 - \lambda^2) f^1(\lambda', -k)}$$

La integral de esta expresión es evaluada a lo largo del gran semicírculo, sobre el cual podemos usar los comportamientos asintóticos dados por (I-43), y el resultado es:

$$- \frac{1}{2} \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r}$$

Con esto la expresión de $J(\lambda, k, r)$ se convierte en

$$J(\lambda, k, r) = \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} - \frac{1}{2} \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r}$$

(I-55)

Haciendo $h(r) = f^1(\lambda, -k, r)/r$ y usando

$$I(k, r) = \int_{\Gamma} \lambda d\lambda \int_r^{\infty} h(r') \frac{\varphi(\lambda, k, r) f^1(\lambda, -k, r')}{r r' f(\lambda, -k)} dr'$$

en vez de (I-35), se puede demostrar, empleando esencialmente los mismos métodos usados en la sección a), que

$$\frac{1}{2} \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} = \int d\rho_k(\lambda) \frac{f(\lambda', -k, r)}{r} \int_r^{\infty} \frac{f^1(\lambda, -k, r') f^1(\lambda', -k, r')}{r'^2} dr' \quad d$$

(I-56)

Las ecuaciones (I-51), (I-55) y (I-56) implican que

$$\frac{f(\lambda, -k, r)}{r} = \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} + \int_r^{\infty} \frac{f^1(\lambda, -k, r')}{r'} B_k(r, r') dr'$$

(I-57)

con

$$B_k(r, r') = \frac{f(\lambda', -k, r)}{r} \frac{f^1(\lambda', -k, r')}{r'} d \left[\rho_k(\lambda') - \rho_k(\lambda') \right] \quad (\text{I-58})$$

Notemos aquí el hecho importante de que $B_k(r, r')$ es independiente de λ . Esto es de vital importancia puesto que, como demostraremos inmediatamente, B_k nos da el potencial desconocido $V(r)$, el cual, por supuesto, debe ser independiente del experimento que efectuemos en el laboratorio, esto es, independiente del momentum angular que posea el haz de partículas incidente.

Ahora como $f(\lambda, -k, r)/r$ satisface la ecuación diferencial

$$\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} + r^2(k^2 - V(r)) - \lambda^2 + 1/4 \right\} \frac{f(\lambda, -k, r)}{r} = 0 \quad (\text{I-59})$$

entonces $B_k(r, r')$, como función de r y r' , satisface las ecuaciones

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2(k^2 - v(r)) - \lambda^2 + 1/4 \right\} B_k(r, r') = \mathcal{J}(r, r')$$

$$\left\{ r'^2 \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + 2r' \frac{\partial}{\partial r'} + r'^2(k^2 - v^1(r')) - \lambda^2 + 1/4 \right\} B_k(r, r') = \mathcal{J}(r - r')$$

respectivamente. Por lo tanto, $B_k(r, r')$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\left\{ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2(k^2 - v(r)) \right\} B_k(r, r') =$$

$$= \left\{ r'^2 \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + 2r' \frac{\partial}{\partial r'} + r'^2(k^2 - v^1(r')) \right\} B_k(r, r')$$

(I-60)

si sustituimos (I-56) en (I-59) y usamos (I-60), el resultado es

$$r^2 \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} \{v(r) - v^1(r)\} =$$

$$= \int_r^\infty \frac{f^1(\lambda, -k, r')}{r'} \left\{ r'^2 \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + 2r' \frac{\partial}{\partial r'} + r'^2(k^2 - v(r')) - \lambda^2 + 1/4 \right\} B_k(r, r')$$

$$- r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} \right) B_k(r, r') - r^2 \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} \left\{ \frac{\partial B_k(r, r')}{\partial r} \Big|_{r'=r} + \frac{dB_k(r, r)}{dr} + \frac{2}{r} B_k(r, r) \right\}$$

La integral que contiene las derivadas parciales puede integrarse por partes; además, tomando en cuenta el comportamiento asintótico de $B_k(r, r')$ y $\partial B_k(r, r')/\partial r$ para $r' \rightarrow \infty$ y el hecho de que $f^1(\lambda, -k, r)/r$ satisface una ecuación similar a (I-59) para el potencial $V^1(r)$, obtenemos la siguiente expresión

$$V(r) - V^1(r) = -r \frac{2f^1(\lambda, -k, r)}{r} \left\{ \frac{\partial B_k(r, r')}{\partial r} \Big|_{r'=r} + \frac{\partial B_k(r, r')}{\partial r'} \Big|_{r'=r} + \frac{dB_k(r, r)}{dr} + \frac{2}{r} B_k(r, r) \right\}$$

(I-61)

Pero,

$$\frac{dB_k(r, r)}{dr} = \frac{\partial B_k(r, r')}{\partial r} \Big|_{r'=r} + \frac{\partial B_k(r, r')}{\partial r'} \Big|_{r'=r}$$

luego, (i-61) nos dice que:

$$\frac{dB_k(r, r)}{dr} + \frac{1}{r} B_k(r, r) = \frac{1}{2} \{V^1(r) - V(r)\}$$

(I-62)

Ahora, si multiplicamos (I-57) por $\frac{f^1(\lambda, -k, r'')}{r''}$ e integramos sobre la función de peso $\left\{ \rho_{R'}^1(\lambda) - \rho_{R''}^1(\lambda) \right\}$,

$$B_k(r, r'') = J(k, r, r'') + \int_r^{\infty} J(k, r', r'') B_k(r, r') dr' \quad (\text{I-63})$$

donde

$$J(k, r, r') = \int \frac{f^1(\lambda, -k, r)}{r} \cdot \frac{f^1(\lambda, -k, r')}{r'} d \left\{ \rho_k^+(\lambda) - \rho_k^-(\lambda) \right\} \quad (\text{I-65})$$

Notemos que la solución de la ecuación (I-63) está definida por la condición de borde $B_k(r, \infty) = 0$, por lo tanto, esta ecuación es de tipo Volterra para un r fijo y su solución es única.

En resumen, el conocimiento de la función espectral $\rho_k^-(\lambda)$ determina el núcleo $B_k(r, r')$ mediante (I-63) y (I-65). El potencial $V(r)$ fluye de (I-62) y la solución de Jost de (I-57). La función espectral queda determinada, de acuerdo a (I-49), por el conocimiento de la función de Jost, es decir, por el conocimiento del espectro continuo y el discreto, quedando este último definido una vez que la posición de los \mathcal{U}_i y las constantes de normalización $M^2(\mathcal{U}_i, k)$ están dado.

Predazzi afirma que los \mathcal{U}_i definen estos ligados. En realidad esta no es una interpretación

física correcta, pues podemos hablar de estados ligados solo cuando el momentum angular es real. En todo caso, lo más plausible es que los σ_i nos representen estados de resonancia.

CAPITULO II

COMPARACION DEL METODO DE
NEWTON CON EL DE PREDAZZI.

Nuestro objetivo en este capítulo es señalar las analogías que existen entre los dos tratamientos del problema expuesto en el capítulo anterior.

En primer lugar, el tratamiento de Newton hace uso de las funciones $\mathcal{Q}_{lq}(r)$ para las cuales no se establece una relación de completitud, mientras que Predazzi trabaja con las soluciones de Jost $f(\lambda, -k, r)$, estableciendo una relación de completitud para las funciones $f(\lambda, -k, r)/r$ que son las soluciones de la ecuación radial de Schrödinger.

Existe una diferencia importante entre los resultados obtenidos por ambos, pues el segundo método nos da un potencial que es único, requisito que el primer método no satisface. A lo anterior se suma el hecho de que para Predazzi el momentum angular puede tomar cualquier valor complejo, en cambio, en el estudio de Newton éste sólo toma los valores físicos, esto

es, $l=0,1,2,\dots,\infty$. Luego, la equivalencia entre ambos trabajos, de existir, no debe ser inmediata. En efecto, después de desarrollar algunas ideas en esta dirección, pudimos comprobar nuestro juicio anterior. Los desarrollos de las mismas no los expondremos, pues no obtuvimos los frutos deseados.

Para mayor claridad del lector, expondremos el desarrollo de ciertos cálculos realizados al intentar establecer las posibles analogías entre los resultados de ambos métodos.

Dado un problema específico, el potencial solución $V(r)$ debe ser independiente de la teoría empleada, entonces, por una parte Newton dice que:

$$V(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} \left\{ r^{-1}K(r,r) \right\} \quad (\text{I-11})$$

por otra parte, según Predazzi:

$$\frac{dB_k(r,r)}{dr} + \frac{1}{r}B_k(r,r) = \frac{1}{2} \left\{ V^1(r) - V(r) \right\} \quad (\text{I-62})$$

Supongamos que el potencial conocido $V^1(r)$ de (I-62)

sea el idénticamente nulo, entonces

$$V(r) = -2 \left\{ \frac{dB_k(r,r)}{dr} + \frac{1}{r} B_k(r,r) \right\} \Rightarrow$$

$$V(r) = -2r^{-1} \left\{ rB_k(r,r) \right\} \quad (\text{II-1})$$

siguiendo nuestro razonamiento, igualamos (II-1) con (I-11) y obtenemos que

$$rB_k(r,r) = \frac{1}{r} K(r,r)$$

\Rightarrow

$$B_k(r,r') = \frac{K(r,r')}{rr'} \quad (\text{II-2})$$

Entonces, la relación entre los núcleos $B_k(r,r')$ y $K(r,r')$ de las ecuaciones integrales (I-63) y (I-9), resulta bastante simple.

Si sustituimos en (I-63) $B_k(r,r')$ por su expresión dada en (II-2), concluimos que

$$\frac{K(r,r'')}{r \cdot r''} = J(k,r,r'') + \int_r^\infty J(k,r',r'') \frac{K(r,r')}{rr'} dr', \Rightarrow$$

$$K(r,r'') = r \cdot r'' J(k,r,r'') + \int_r^\infty r' r'' J(k,r',r'') \cdot \frac{K(r,r')}{r' \cdot r'} dr',$$

$$\Rightarrow$$

$$K(r, r'') = r r'' J(k, r, r'') + \int_0^{\infty} r' r'' J(k, r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr' -$$

$$- \int_0^r r' r'' J(k, r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr'$$

(II-3)

Comparando esta última expresión con la dada por Newton en la ecuación (I-9):

$$K(r, r'') = f(r, r'') - \int_0^r f(r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr'$$

debe cumplirse que

$$f(r, r'') - \int_0^r f(r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr' = r r'' J(k, r, r'') +$$

$$+ \int_0^{\infty} r' r'' J(k, r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr'$$

$$- \int_0^r r' r'' J(k, r', r'') r'^{-2} K(r, r') dr'$$

(II-4)

Luego, existe la posibilidad de que se cumpla

$$f(r, r'') = rr''J(k, r, r'') + \int_0^{\infty} r'r''J(k, r', r'')r'^{-2}K(r, r') dr'$$

(II-5)

Si esta expresión de $f(r, r'')$ se reemplaza en (I-9) vemos que ella es correcta siempre y cuando

$$\int_{\xi=0}^r \int_{\eta=0}^{\infty} d\xi d\eta \xi^{-2} K(r, \xi) \eta r'' J(k, \eta, r'') \eta^{-2} K(r, \eta) \equiv 0$$

(II-6)

Desafortunadamente, nuestros esfuerzos para establecer la validéz o no validéz de (II-6) no han tenido éxito. Queda entonces abierto este problema.

CAPITULO III

INFLUENCIA DE UN CORTE SOBRE EL EJE REAL.

RELACION DE COMPLETITUD Y ORTOGONALIDAD.

En este capítulo haremos un estudio del efecto de reemplazar el potencial $V(r)$ en la ecuación de Schrödinger por un nuevo potencial $V'(r) = V(r) + A/r^2$ (4), con $A > 0$. Matemáticamente esto equivale a introducir una cortadura a lo largo del eje real del plano complejo λ .

Sin embargo, a pesar de que el nuevo potencial $V'(r)$ no satisface los requisitos exigidos a $V(r)$ en el trabajo de Predazzi, veremos que el método puede ser usado para establecer una cuasi-relación de Completitud para las funciones $f(\tilde{\lambda}, -k, r)/r$, donde $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 - \xi^2$, con $\xi^2 = \frac{2mA}{\hbar^2}$. Además, basándonos en la referencia (5), mostraremos que el conjunto de las soluciones $f(\tilde{\lambda}, -k, r)/r$ es ortogonal.

Empezando con la ecuación de Schrödinger para el potencial $V(r)$

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left\{ k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} \right\} \psi = 0$$

y reemplazando $V(r)$ por $V'(r) = V(r) + A/r^2$ inferimos que la forma de las nuevas soluciones ψ se obtiene de las originales simplemente reemplazando $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 - \xi^2}$, con $\xi^2 = 2mA/\hbar^2$. Aparte de los ceros de la función de Jost $f(\tilde{\lambda}, -k)$ obtenemos ahora una cortadura a lo largo del eje real $\tilde{\lambda}$ de $-\xi$ a $+\xi$.

Refiriéndonos entonces al análisis hecho en la sección (I-b), consideremos la integral (I-35) en la cual reemplazamos $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$ con el contorno de integración Γ que muestra la figura 2. Esto da como resultado

$$I(k, r, \xi) = \int_{\Gamma} \sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \xi^2} d\tilde{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{h(r')}{rr'} dr' \frac{f(\sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \xi^2}, k, r_<) f(\sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \xi^2}, -k, r_>)}{f(\sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \xi^2}, -k)}$$

(III-1)

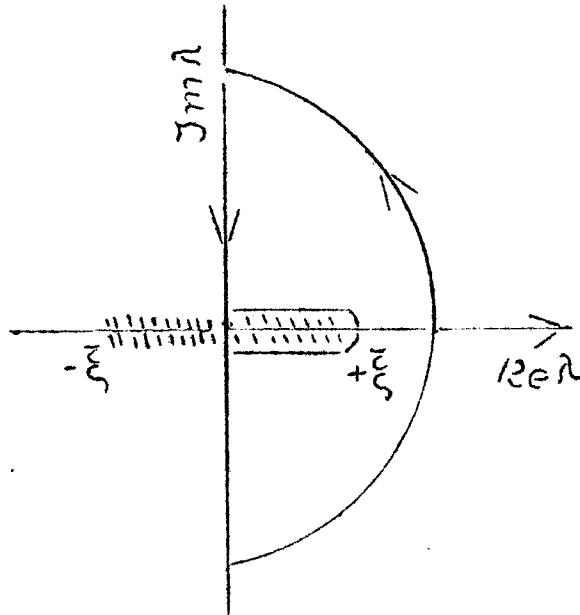


Fig. 2.

Calculemos la contribución a (III-1) debido a la trayectoria que rodea el corte, esta es:

$$I(k, r, \xi) \Big|_{\text{corte}} = \int_0^{\infty} \frac{h(r') dr'}{r r'} \int_0^{\xi} \frac{\varphi(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, k, r <) \cdot f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r >)}{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)} - \frac{\varphi(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, k, r <) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r >)}{f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)} \Big] d\lambda$$

donde se ha hecho uso de la paridad en λ' de la función $f(\lambda', -k, r)$. Reagrupando y haciendo uso de (I-41), obtenemos

$$I(k, r, \xi) \Big|_{\text{corte}} = - \int_0^{\infty} \frac{h(r') dr'}{r r'} \int_0^{\xi} \frac{2 \cdot (\lambda^2 - \xi^2) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r')}{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)} d\lambda$$

(III-2)

Haciendo los cambios apropiados en (I-42), concluimos que:

$$I(k, r, \xi) \Big|_{\substack{\text{eje} \\ \text{imag.}}} = -2 \int_0^{i\infty} (\lambda^2 - \xi^2) d\lambda \int_0^{\infty} \frac{h(r') dr'}{r r'} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r')}{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)}$$

(III-3)

La contribución debida al gran semicírculo la evaluamos siguiendo el análisis que nos condujo a (I-44), y obtenemos:

$$I(k, r, \xi) \Big|_{\substack{\text{semi} \\ \text{círculo}}} \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{h(r') dr'}{\sqrt{r r'}} \left\{ \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} \theta(r - r') + \left(\frac{r}{r'} \right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} \theta(r' - r) \right] d\lambda \right.$$

(III-4)

Pero, recordando el teorema de los residuos de Cauchy, podemos escribir:

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{r'}{r} \right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda = 0$$

donde la trayectoria de integración Γ es aquella señalada en la fig.1. Entonces,

$$\oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda + \int_{Ri}^{-Ri} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\lambda', \end{aligned}$$

separando nuestro intervalo de integración en tres partes, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda &= i \int_{-\infty}^{-x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\lambda' + \\ &+ i \int_x^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\lambda' + i \int_{-x}^{+x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} d\lambda', \end{aligned}$$

Supongamos que $x \gg \xi$, entonces en la primera y segunda integral despreciamos ξ^2 frente a λ'^2 . Además, haciendo un cambio de variable sencillo, obtenemos que

$$\begin{aligned} \oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}} d\lambda' &= i \int_x^\infty \left\{ \left(\frac{r'}{r}\right)^{-i\lambda'} + \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\lambda'} \right\} d\lambda' + i \int_{-x}^{+x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} d\lambda' \\ &= 2i \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_x^\eta \cos\{\lambda' \ln(\frac{r'}{r})\} d\lambda' + i \int_{-x}^{+x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} d\lambda' \\ \Rightarrow \oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}} d\lambda' &= 2i\pi r \int (r'-r) - 2i \frac{\text{sen}(x \ln(\frac{r'}{r}))}{\ln(\frac{r'}{r})} + i \int_{-x}^{+x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} d\lambda' \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Análogamente,

$$\oint_C \left(\frac{r'}{r}\right)^{\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}} d\lambda' = 2i\pi r \int (r'-r) - 2i \frac{\text{sen}(x \ln(\frac{r'}{r}))}{\ln(\frac{r'}{r})} + i \int_{-x}^{+x} \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} d\lambda' \quad (\text{III-6})$$

Nuestro paso siguiente es emplear (III-5) y (III-6) en (III-4), entonces:

$$\begin{aligned} I(k, r, \xi) \Big|_{\text{semi círculo}} &= i \frac{1}{r} h(r) - i \int_0^\infty h(r') \frac{dr'}{\sqrt{rr'}} \left[\frac{\text{sen}(x \ln(\frac{r'}{r}))}{\ln(\frac{r'}{r})} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-x}^{+x} d\lambda' \left\{ \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} \theta(r'-r) + \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda'^2 + \xi^2}} \theta(r-r') \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

Por otro lado, utilizando el teorema de los residuos de Cauchy y siguiendo el análisis que nos condujo a (I-40), obtenemos que nuestra integral es:

$$I(k, r, \xi) = i\pi \sum_i \int_0^{\infty} \frac{h(r)}{rr'} \frac{f(\sqrt{\lambda_i^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda_i^2 - \xi^2}, -k, r')}{M^2(\lambda_i, k)} dr' \quad (\text{III-8})$$

donde

$$M^2(\lambda_i, k) = \int_0^{\infty} \frac{f^2(\sqrt{\lambda_i^2 - \xi^2}, -k, r)}{r^2} dr'$$

y λ_i son los valores de λ para los cuales la función de Jost $f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)$ se anula en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$.

Finalmente, sumando los resultados obtenidos en (III-2), (III-3), (III-7) e igualando esta suma con el segundo miembro de (III-8), deducimos que nuestra relación de completitud es:

$$\sum_i \frac{f(\sqrt{\lambda_i^2 - \xi^2}, -k, r)}{r} \cdot \frac{f(\sqrt{\lambda_i^2 - \xi^2}, -k, r')}{r'} M^{-2}(\lambda_i, k) + \frac{2i}{\pi} \int_0^{i\infty} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) \cdot f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r') (\lambda^2 - \xi^2) d\lambda}{r r' f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2i}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r)}{r} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r')}{r'} \frac{(\lambda^2 - \xi^2) \cdot d\lambda}{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(x \ln(\frac{r'}{r}))}{\sqrt{rr'} \ln(\frac{r'}{r})} - \frac{1}{\pi \sqrt{rr'}} \int_{-x}^{+x} \left\{ \left(\frac{r}{r'}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \theta(r' - r) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{r'}{r}\right)^{i\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}} \theta(r - r') \right\} d\lambda' = \delta(r - r')
\end{aligned}$$

(III-9)

Esta ecuación es la cuasirelación de completitud en el plano λ para el conjunto de funciones $f(\lambda', -k, r)/r$, donde $f(\lambda', -k, r)$ es la solución de Jost para la ecuación de Schrödinger. "Cuasi" porque hemos hecho cierta aproximación en la deducción de (III-5) y (III-6). Es natural que si en ella hacemos $\xi = 0$ obtengamos (I-48), tomando su límite cuando $\chi \rightarrow \infty$.

Ahora demostraremos que el conjunto de funciones $f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r)/r$ es ortogonal.

A partir de la ecuación radial para las funciones $f(\lambda', -k, r)/r$ se deduce que

$$(\lambda^2 - \lambda'^2) \int_0^{\infty} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) \cdot f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k, r)}{r^2} dr = \left\{ f'_{\lambda} f_{\lambda'} - f_{\lambda} f'_{\lambda'} \right\}_0^{\infty} \quad (\text{III-10})$$

Entonces, para el espectro discreto,

$$(\lambda_p^2 - \lambda_{p'}^2) \int_0^{\infty} \frac{f(\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda_{p'}^2 - \xi^2}, -k, r)}{r^2} dr = \left\{ f_{\lambda_p} f'_{\lambda_{p'}} - f_{\lambda_{p'}} f'_{\lambda_p} \right\}_0^{\infty} \quad (\text{III-11})$$

donde λ_p y $\lambda_{p'}$ son ceros de la función de Jost $f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k)$ en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$. El segundo miembro se anula en virtud (I-36) y (I-41); esto prueba la ortogonalidad para $\lambda_p \neq \lambda_{p'}$. Para $\lambda_p = \lambda_{p'}$ la integral de (III-11) la evaluamos usando la siguiente relación

$$f(\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, -k, r) = - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}} f(-\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, -k) \psi(\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, k, r)$$

Así, encontramos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{f^2(\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, -k, r)}{r^2} dr = M^2(\sqrt{\lambda_p^2 - \xi^2}, k)$$

Resumiendo, podemos afirmar que la relación de ortogonalidad para el espectro discreto es

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k, r)}{r^2 M^2(\lambda, k)} dr = \delta_{\lambda \lambda'}$$

(III-12)

La relación de ortogonalidad para el espectro continuo se obtiene a partir de (III-10) y usando (I-36) y (I-41).

Ella es

$$\frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^2 - \xi^2) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k, r) dr}{r^2 f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k)} = \delta(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2} - \sqrt{\lambda'^2 - \xi^2})$$

(III-13)

similarmente encontramos que la expresión análoga a (III-13) para el espectro continuo y real de 0 á ξ es

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda^2 - \xi^2) f(\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k, r) f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k, r) dr}{r^2 f(-\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}, -k) f(\sqrt{\lambda'^2 - \xi^2}, -k)} = \delta(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} - \sqrt{\xi^2 - \lambda'^2})$$

(III-14)

Ella tiene sentido sólo para $\lambda \in [0, \xi]$.

CONCLUSIONES.

Esencialmente, lo que hemos hecho es exponer los artículos de Newton y Predazzi para el estudio del problema inverso del scattering. Se ha establecido que de existir una equivalencia entre ambos trabajos, esta no es trivial. Además, hemos generalizado el trabajo de Predazzi en lo que se refiere a las relaciones de ortogonalidad y completitud para potenciales del tipo $V'(r) = V(r) + A/r^2$, donde $V(r)$ satisface las condiciones señaladas en (I-34).

Se estudió el problema de establecer analogías entre los tratamientos de Newton y Predazzi y concluimos que existe una relación simple dada por (II-2) para los núcleos $K(r, r')$ y $B(r, r')$ de las ecuaciones integrales (I-9) y (I-63) respectivamente. Sin embargo, al estudiar la posible relación entre las funciones $f(r, r')$ y $j(k, r, r')$ que intervienen en las mismas ecuaciones integrales, concluimos que podrían relacionarse en la forma indicada por (II-5) siempre y cuando se cumpla (II-6). Como la validéz o no validéz de (II-6) no fue establecida, queda entonces abierto este problema.

APENDICE A.

En este apéndice mostraremos la relación (I-15). De la definición de $D(r)$ y $\mathcal{O}_{l'}(r)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} D(r)\mathcal{O}_{l'}(r) &= \left\{ D_0(r) - r^2 V(r) \right\} \left[U_1(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_1(r') \right] \\ &= 1(1+1)U_1(r) - r^2 V(r)U_1(r) - r^2 \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_1(r') + \\ &+ r^2 V(r) \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_1(r') - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') U_1(r') \end{aligned}$$

si desarrollamos el último término y hacemos las simplificaciones posibles, además de emplear las definiciones de $D_0(r)$ y $D(r)$, nos queda

$$\begin{aligned} D(r)\mathcal{O}_{l'}(r) &= 1(1+1)U_1(r) - r^2 V(r)U_1(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} [D(r)K(r, r')] U_1(r) \\ &\quad - r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\bar{K}(r, r) r^{-2} U_1(r) \right] - \frac{\partial}{\partial r} K(r, r') \Big|_{r'=r} \cdot U_1(r) \end{aligned}$$

en el integrando del segundo miembro sustituimos $D(r)K(r,r')$ por $D_0(r')K(r,r')$ en virtud de (I-12). Entonces, integrando por parte dos veces y haciendo uso de (I-13), obtenemos

$$D(r) \underset{\ell}{\mathcal{O}}(r) = 1(1+1)U_1 - r^2 V(r)U_1(r) - \int_0^r K(r,r')U_1(r')dr' \left. \frac{\partial K(r,r')}{\partial r'} \right|_{r'=r} U_1$$

$$+ K(r,r) \left. \frac{\partial U_1(r')}{\partial r'} \right|_{r'=r} - \int_0^r dr' K(r,r') \frac{\partial^2 U_1(r')}{\partial^2 r'} -$$

$$-r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 K(r,r)U_1(r) \right] - \left. \frac{\partial}{\partial r} K(r,r') \right|_{r'=r} \cdot U_1(r)$$

Reuniendo las dos integrales y usando (I-5), (I-14) nuestra expresión se reduce a

$$D(r) \underset{\ell}{\mathcal{O}}(r) = 1(1+1) \underset{\ell}{\mathcal{O}}(r) - r^2 V(r)U_1(r) - \left. \frac{\partial K(r,r')}{\partial r'} \right|_{r'=r} \cdot U_1(r) -$$

$$\frac{\partial K(r,r')}{\partial r} \Big|_{r'=r} \cdot U_1(r) + 2 \cdot \frac{K(r,r)U_1(r)}{r} - \frac{dK(r,r)}{dr} U_1(r)$$

Pero, es bien sabido que

$$\frac{dK(r,r)}{dr} = \left. \frac{\partial K(r,r')}{\partial r} \right|_{r'=r} + \left. \frac{\partial K(r,r')}{\partial r'} \right|_{r'=r}$$

Luego, empleando esta relación y la definición de $V(r)$ dada por (I-11), concluimos que

$$D(r) \underset{\lambda}{\psi}(r) = 1(1+1) \underset{\lambda}{\psi}(r)$$

c.q.d.

APENDICE B.

En este apéndice demostraremos las relaciones (I-38) y (I-52).

Sabemos que la ecuación de Schrödinger es

$$\psi'' + \left\{ k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - v(r) \right\} \psi = 0 \quad (1)$$

sea

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

Entonces (1) implica que

$$\dot{\varphi}_1'' + \left\{ k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} - v(r) \right\} \dot{\varphi}_1 - \frac{2\lambda}{r^2} \varphi_1 = 0 \quad (2)$$

Multiplicando la primera por $\dot{\varphi}_1$, la segunda por φ_1 y restando queda

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda}{r^2} \varphi_1^2 &= \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 - \varphi_1'' \varphi_1, \quad \Rightarrow \\ 2\lambda \int_0^\infty \frac{\varphi_1^2 dr}{r^2} &= \left[\dot{\varphi}_1 \varphi_1 - \varphi_1' \dot{\varphi}_1 \right]_{r=\infty} \end{aligned} \quad (3)$$

pues, el segundo miembro se anula en $r=0$. Nos interesa evaluar (3) en $\lambda = \mathcal{O}i$, donde $\mathcal{O}i$ son los ceros de $f(\lambda, -k)$. Para ello hacemos uso de

$$\varphi_1(\lambda, k, r) = \frac{1}{2ik} \left\{ f(\lambda, k) f(\lambda, -k, r) - f(\lambda, -k) f(\lambda, k, r) \right\}$$

$$f(\alpha i, -k) = 0$$

Y

$$f(\lambda, -k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikr}$$

Entonces,

$$\dot{\psi}_1 \psi_1 - \psi_1 \dot{\psi}_1 = \frac{f(\alpha i, k)}{2ik} \frac{\partial f(\lambda, -k)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \alpha i}$$

Luego, nuestra relación (3) implica que

$$2\alpha i \int_0^{\infty} \frac{\psi^2(\alpha i, k, r)}{r^2} dr = \frac{f(\alpha i, k)}{2ik} \frac{\partial f(\lambda, -k)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \alpha i}$$

y utilizando

$$\psi_1(\alpha i, k, r) = \frac{1}{2ik} f(\alpha i, k) f(\alpha i, -k, r)$$

llegamos al resultado deseado, esto es:

$$\frac{\partial f(\lambda, -k)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \alpha i} = -\frac{i}{k} f(\alpha i, k) M^2(\alpha i, k)$$

donde

$$M^2(\alpha i, k) = \alpha i \int_0^{\infty} \frac{f^2(\alpha i, -k, r)}{r^2} dr$$

El otro resultado es inmediato, pues basta escribir la ecuación análoga a (1) para λ' , enseguida multiplicamos (1) por $\varphi(\lambda')$, la análoga por $\varphi(\lambda)$ y restamos, obteniendo:

$$\varphi''(\lambda) \varphi(\lambda') - \varphi''(\lambda') \varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{r^2} \varphi(\lambda) \varphi(\lambda'), \implies$$

$$\frac{d}{dr} \left\{ w \left[\varphi(\lambda'), \varphi(\lambda) \right] \right\} = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{r^2} \varphi(\lambda) \varphi(\lambda')$$

Análogamente,

$$\frac{d}{dr} \left\{ w \left[f(\lambda'), f(\lambda) \right] \right\} = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{r^2} f(\lambda) f(\lambda')$$

que era lo que queríamos probar.

REFERENCIAS.

- (1) Roger G. Newton: "Journal of Mathematical Physics, 3, 75 (1962).
- (2) G. Burdet, M. Giffon y E. Predazzi: "Il Nuovo Ci -
mento, 36, 1337 (1965).
- (3) A. Bottino, A.M. Longoni y T. Regge. Il Nuovo Ci -
mento, 23, 954 (1961).
- (4) C.A.López: "Nuclear Physics, 76, 672 (1966).
- (5) C.A.López y I. Saavedra: "Nuclear Physics, 87,
65 (1966).

REFERENCIAS GENERALES.

E.T.Copson: Theory of functions of a complex variable, Oxford University Press (1935).

V. De Alfaro y T. Regge: Potential Scattering, North-Holland Publishing Company (1965).

AGRADECIMIENTOS.

Deseo expresar mis agradecimientos al profesor Carlos López, bajo cuya dirección fue posible desarrollar el presente trabajo.

Además, agradezco al señor Patricio Carrazana por su colaboración en la crítica y corrección del manuscrito.

Por último, mis agradecimientos para la señorita Elsa Gatica por la cooperación prestada en la impresión de este informe.