



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

MODELO HISTERÉTICO DE BARRAS DE ACERO DE REFUERZO SUSCEPTIBLES  
AL PANDEO LOCAL Y GLOBAL

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN INGENIERÍA  
ESTRUCTURAL, SÍSMICA Y GEOTÉCNICA

JOSÉ ENRIQUE ROSA RIBERA

PROFESOR GUÍA:  
LEONARDO MASSONE SÁNCHEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
MATÍAS HUBE GINESTAR  
FABIÁN ROJAS BARRALES

SANTIAGO DE CHILE  
2021

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE:** MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN INGENIERÍA ESTRUCTURAL,  
SÍSMICA Y GEOTÉCNICA  
**POR:** JOSÉ ENRIQUE ROSA RIBERA  
**FECHA:** 2021  
**PROF. GUÍA:** LEONARDO MASSONE SÁNCHEZ

## MODELO HISTERÉTICO DE BARRAS DE ACERO DE REFUERZO SUSCEPTIBLES AL PANDEO LOCAL Y GLOBAL

El presente estudio presenta un modelo matemático no iterativo que captura la respuesta tensión-deformación de una barra de acero de refuerzo susceptible al pandeo local, ante cargas monotónicas y cíclicas. Además, se adapta la solución del modelo no iterativo de pandeo local para presentar un modelo tensión-deformación que incluye los efectos del pandeo global ante cargas monotónicas. El pandeo del acero de refuerzo es una variable importante a considerar en el diseño de elementos de hormigón sometidos a compresión, dado que puede influir perjudicialmente en la capacidad de carga y de disipación de energía ante cargas cíclicas. Observaciones experimentales indican que los muros de corte presentan fallas de compresión por falta de confinamiento en los elementos de borde. Por tanto, un adecuado detallamiento del refuerzo transversal otorga mayor ductilidad, capacidad de carga y mejora la estabilidad del refuerzo longitudinal (previniendo el pandeo). Estudios y modelos que evalúan el comportamiento de barras de acero de refuerzo coinciden en que se produce una importante pérdida de capacidad a compresión en barras con relaciones de esbeltez “ $L/d$ ” mayores a 6. Distinguiendo también dos mecanismos de falla: pandeo local y pandeo global. Con el propósito de capturar la influencia del pandeo en el comportamiento tensión-deformación, algunos modelos intentan incorporar la no linealidad geométrica, producto del pandeo de la barra, y la no linealidad de material, puesto que el pandeo de la barra se produce más allá del rango elástico. Mediante un modelo de plasticidad concentrada y el análisis seccional basado en un modelo de fibras (considerando la hipótesis de Bernoulli), es posible incorporar las no linealidades al problema. Sin embargo, resolver el equilibrio y la compatibilidad en el problema no lineal involucra métodos de solución complejos y poco eficientes a nivel computacional (p. ej. en los modelos de Massone & Moroder (2009) y Massone & López (2014). A partir del análisis seccional del modelo de Gomes & Appleton (1997) se consiguió deducir una expresión cuadrática que relaciona la deformación unitaria axial en el extremo más comprimido de la sección transversal de la barra ( $\varepsilon_{cmax}$ ) y la curvatura ( $\phi_p$ ). Esta expresión permite reducir la ecuación de compatibilidad de los modelos de Massone & Moroder (2009) y Massone & López (2014) a una expresión lineal que hace posible evitar resolver el problema no lineal mediante métodos iterativos. La expresión que relaciona “ $\varepsilon_{cmax}$ ” y “ $\phi_p$ ” se calcula solo en función de los parámetros geométricos del problema (longitud y diámetro del refuerzo longitudinal). En el modelo no iterativo de pandeo global, se estima el modo de pandeo (número de espacios entre estribos) mediante el método de Dhakal & Maekawa (2002). La respuesta tensión-deformación de los modelos no iterativos propuestos, fue validada mediante la comparación con valores experimentales y con las respuestas tensión-deformación obtenidas de los modelos iterativos de Massone & Moroder (2009) y Massone & López (2014).



*Dedicatoria:*

*A mi madre y hermana.*

*A mi novia y futura esposa.*



# Agradecimientos

Nunca hubiera logrado recorrer este camino académico sin apoyo de las personas más importante en mi vida. En primer lugar, agradezco profundamente el apoyo de mi madre, Glady Ribera Guzmán, y el de mi hermana, Korali Rosa Ribera, quienes me acompañaron a diario a pesar de la distancia. A Yésica Aguilera Fernández, que compartió conmigo días de estudio e investigación, y estuvo a mi lado en mis errores y aciertos.

A mi profesor guía, Leonardo Massone Sánchez, por su confianza y disposición en todo momento. A los profesores miembros de la comisión, Fabián Rojas Bardarles y Matías Hube Ginestar, por su disposición y acertadas recomendaciones.

Agradezco también el apoyo del PRONABEC PERÚ y a los especialistas que me brindaron soporte en todo momento.

No puedo olvidar a los amigos que conocí en esta experiencia, en especial a David Gallardo, Alejandro Ramírez, Paul Añazco y Dayana Trevisan, por los buenos momentos y los grandes recuerdos que quedan. A todos ellos, gracias mil.

Y gracias a todos los amigos, profesores y colegas que influyeron en mi vida académica y profesional.



# Tabla de Contenido

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 0.1. Fundamentación general . . . . .   | 1         |
| 0.2. Objetivos . . . . .  | 5         |
| 0.2.1. Objetivo general . . . . .   | 5         |
| 0.2.2. Objetivos específicos . . . . .  | 5         |
| 0.2.3. Hipótesis . . . . .  | 5         |
| <b>1. Modelo de pandeo local</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1. Modelo de Massone & Moroder (2009) . . . . .   | 7         |
| 1.1.1. Comportamiento monotónico y cíclico . . . . .  | 7         |
| 1.1.2. Modelo geométrico . . . . .  | 10        |
| 1.1.3. Equilibrio . . . . .   | 10        |
| 1.1.4. Compatibilidad . . . . .   | 12        |
| 1.1.5. Implementación del modelo . . . . .  | 13        |
| 1.2. Modelo de Gomes & Appleton (1997) . . . . .  | 14        |
| 1.2.1. Modelo geométrico . . . . .  | 14        |
| 1.2.2. Equilibrio . . . . .   | 14        |
| 1.2.3. Compatibilidad . . . . .   | 16        |
| 1.2.4. Implementación del modelo . . . . .  | 17        |
| 1.3. Modelo propuesto . . . . .   | 18        |
| 1.3.1. Análisis monotónico en compresión . . . . .  | 18        |
| 1.3.2. Compatibilidad . . . . .   | 20        |
| 1.3.3. Equilibrio . . . . .   | 29        |
| 1.3.4. Implementación del modelo . . . . .  | 29        |
| 1.3.5. Verificación del modelo . . . . .  | 37        |
| 1.3.6. Fatiga . . . . .   | 44        |
| <b>2. Modelo de pandeo global</b>   | <b>52</b> |
| 2.1. Modelo de Massone & López (2014) . . . . .   | 53        |
| 2.1.1. Equilibrio . . . . .   | 53        |
| 2.1.2. Compatibilidad . . . . .   | 58        |
| 2.1.3. Implementación del modelo . . . . .  | 58        |
| 2.2. Modelo Propuesto . . . . .   | 59        |
| 2.2.1. Comparación entre el modelo de pandeo global de Massone & López (2014) y el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) . . . . . | 59        |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.2.2. Método para determinar el modo de pandeo de Dhakal & Maekawa (2002) . . . . . | 60        |
| 2.2.3. Compatibilidad . . . . .  | 65        |
| 2.2.4. Equilibrio . . . . .  | 68        |
| 2.2.5. Implementación del modelo . . . . .   | 68        |
| 2.2.6. Verificación del modelo . . . . .   | 69        |
| <b>Conclusión</b>  | <b>80</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>83</b> |

# Índice de Tablas

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1. | Propiedades mecánicas de barras de acero de refuerzo tipo 300E y 500E (Tripathi et al., 2018)[32] . . . . .   | 22 |
| 1.2. | Coefficientes $C_0$ , $C_1$ y $C_2$ para distintos $L/d$ y $\bar{\varepsilon}_S = 0 - 20\%$ . . . . .   | 26 |
| 1.3. | Comparación de la energía disipada entre el modelo de Massone & Moroder (2009)[23] y el Modelo Propuesto afectado por el factor de ajuste “ $m$ ” . . . . .   | 31 |
| 1.4. | Propiedades mecánicas de barras de acero de refuerzo ASTM A706 Grado 80 (Egger, 2020) [11] . . . . .  | 39 |
| 1.5. | Comparación de los tiempos de cálculo computacional alcanzados en MATLAB, entre el Modelo de Massone & Moroder (ITERATIVO) y el Modelo Propuesto (NO ITERATIVO) . . . . .   | 42 |
| 1.6. | Cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ) y amplitud de deformación promedio ( $\varepsilon_a Prom$ ) en las fibras más traccionada y más comprimida, calculados a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32] . . . . . | 50 |
| 2.1. | Set de ensayos de pandeo global . . . . .   | 60 |
| 2.2. | Propiedades mecánicas del refuerzo longitudinal de los ensayos de pandeo global   | 61 |
| 2.3. | Propiedades mecánicas del refuerzo transversal de los ensayos de pandeo global  | 61 |
| 2.4. | Propiedades mecánicas del hormigón de los ensayos de pandeo global . . . . .  | 62 |
| 2.5. | Valores de $k_{eq}$ para distintos modos de pandeo. Dhakal & Maekawa (2002) [7]   | 65 |
| 2.6. | Modos de pandeo. Calculados mediante el método de Dhakal & Maekawa (2002) [7] . . . . .   | 66 |
| 2.7. | Cálculo del “ $\varepsilon_{corr}$ ” para el set de ensayos de pandeo global . . . . .  | 67 |

# Índice de Ilustraciones

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1.    | Pandeo local (Massone & Moroder, 2009)[23] . . . . .   | 4  |
| 1.1.  | Modelo constitutivo para el acero en tracción (Mander, 1984)[20] . . . . .   | 7  |
| 1.2.  | Formación de la estricción en una barra de acero de refuerzo en tracción (Massone & Moroder, 2009)[23] . . . . .   | 8  |
| 1.3.  | Comportamiento cíclico de una barra de acero de refuerzo (Lacaze, 2009)[18]  | 9  |
| 1.4.  | Modelo de plasticidad concentrada del pandeo de una barra de refuerzo con imperfección inicial (Massone & Moroder, 2009)[23] . . . . .   | 10 |
| 1.5.  | Análisis del equilibrio en la barra pandeada (Massone & Moroder, 2009)[23] .   | 11 |
| 1.6.  | Procedimiento iterativo para calcular la respuesta tensión deformación (Massone & Moroder, 2009)[23] . . . . .   | 13 |
| 1.7.  | Modelo de plasticidad concentrada del pandeo de una barra de refuerzo (Gomes & Appleton, 1997)[12] . . . . .   | 14 |
| 1.8.  | Análisis del equilibrio en una mitad de la barra (Gomes & Appleton, 1997)[12]  | 15 |
| 1.9.  | Distribución de tensiones en una rótula plástica (Gomes & Appleton, 1997)[12]  | 15 |
| 1.10. | Modelo de plasticidad Concentrada considerando 4 rótulas plásticas (G-A Modificado) . . . . .  | 16 |
| 1.11. | Incorporación de la relación $\bar{\sigma}_S - \bar{\varepsilon}_S$ en el comportamiento global tensión - deformación (Gomes & Appleton, 1997) [12] . . . . .                          | 17 |
| 1.12. | Barra pandeada (Brown & Kunnath, 2000)[5] . . . . .  | 18 |
| 1.13. | Comportamiento monotónico compresión. Barra tipo 500E, $L/d=6$ y $\bar{\varepsilon} = 5\%$   | 19 |
| 1.14. | Comportamiento monotónico en compresión. Barra tipo 500E, $L/d=15$ y $\bar{\varepsilon} = 5\%$   | 20 |
| 1.15. | Identificación de $\varepsilon_{corr}$ en un caso cíclico. Curvas obtenidas mediante el modelo de Massone & Moroder (2009) [23] . . . . .  | 22 |
| 1.16. | Identificación de $\varepsilon_{corr}$ con distintas relaciones de esbeltez $L/d$ . Curvas obtenidas mediante el modelo de Massone & Moroder (2009) [23] . . . . .                     | 23 |
| 1.17. | Valores de $\varepsilon_{corr}$ para distintas relaciones de esbeltez $L/d$ y para aceros tipo 300E y 500E. Valores obtenidos mediante el modelo de Massone & Moroder (2009) . . . . . | 24 |
| 1.18. | Estimación de $\varepsilon_{corr}$ . . . . .   | 24 |
| 1.19. | Curvas $\phi_p$ d vs $\varepsilon_{max}$ para distintos valores de $L/d$ y $\bar{\varepsilon}_S = 0 - 20\%$ . . . . .  | 25 |
| 1.20. | Coeficiente $C0$ vs $L/d$ . . . . .  | 27 |
| 1.21. | Coeficiente $C1$ vs $L/d$ . . . . .  | 27 |
| 1.22. | Coeficiente $C2$ vs $L/d$ . . . . .  | 28 |

|   |    |
|---|----|
| 1.23. Modelo Propuesto versus Modelo de Massone & Moroder (2009). (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .   | 30 |
| 1.24. Modelo Propuesto (usando $L/d_{real}$ y $L/d_{calibrado}$ ) versus Modelo de Massone & Moroder (2009) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . . | 32 |
| 1.25. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución no lineal de $\phi_p$ en la FASE DE RECARGA. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .                           | 33 |
| 1.26. Solución análoga al modelo constitutivo del acero de Menegotto & Pinto (1973) [24], para acotar los valores de $\phi_p$ . . . . .   | 33 |
| 1.27. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución linealizada de $\phi_p$ en la FASE DE RECARGA. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .                         | 34 |
| 1.28. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución linealizada de $\phi_p$ en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .            | 36 |
| 1.29. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Varios ciclos. Solución linealizada de $\phi_p$ en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .           | 36 |
| 1.30. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en tracción. Varios ciclos. Solución linealizada de $\phi_p$ en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y $L/d = 12$ . . . . .             | 38 |
| 1.31. Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al. (2018)[32]. Barras de acero de refuerzo del tipo 300E. . . . .  | 39 |
| 1.32. Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al. (2018)[32]. Barras de acero de refuerzo del tipo 500E. . . . .  | 40 |
| 1.33. Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de tesis Egger (2020)[11]. Barras de acero de refuerzo del ASTM A706 Grado 80. . . . .   | 41 |
| 1.34. (a) Respuesta tensión - deformación promedio con $L/d = 15$ y, (b) Respuesta tensión - deformación promedio con $L/d = 18$ . Registro sintético. Ciclos con $\varepsilon_a$ variable. $\varepsilon_{max} = 5\%$ y $\varepsilon_{min} = -5\%$ . Barra Tipo 500E . . . . .        | 42 |
| 1.35. (a) Respuesta tensión - deformación promedio con $L/d = 15$ y, (b) Respuesta tensión - deformación promedio con $L/d = 18$ . Registro sintético. Ciclos con $\varepsilon_a$ variable. $\varepsilon_{max} = 5\%$ y $\varepsilon_{min} = -4\%$ . Barra Tipo 500E . . . . .        | 43 |
| 1.36. Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al.(2018)[32]. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E. $L/d = 15$ , $\varepsilon_a = 4\%$ , $2Nf = 11$ . . . . .   | 44 |

|   |    |
|---|----|
| 1.37. Respuesta tensión - deformación en cada fibra “i” discretizada. Modelo propuesto. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E. $L/d = 15$ , $\varepsilon_a = 4\%$ , $2Nf = 11$  | 45 |
| 1.38. Respuesta tensión - deformación en la fibra más traccionada y en la fibra más comprimida. Modelo propuesto. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E. $L/d = 15$ , $\varepsilon_a = 4\%$ , $2Nf = 11$  | 46 |
| 1.39. Respuesta tensión - deformación en los lados cóncavo (más comprimido) y convexo (más traccionado), $L/d = 6$ . Rodríguez et al. (1999) [29]   | 47 |
| 1.40. Amplitud de deformación promedio ( $\varepsilon_a Prom$ ) fibras, calculados a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32]                                      | 48 |
| 1.41. Ejemplo de patrón de deformaciones aleatorio (ASTM E-1049).   | 49 |
| 1.42. Superficie de fractura observada en ensayos cíclicos en barras de acero de refuerzo corrugadas. Kashani et al. (2015) [13]  | 50 |
| 1.43. Acumulación de daño por ciclo las fibras más traccionada y más comprimida. Calculado a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32]                              | 51 |
|   |    |
| 2.1. Esquema del modelo de pandeo global. Massone & López (2014) [22]   | 54 |
| 2.2. Esquema para determinar el equilibrio de fuerzas. Massone & López (2014) [22]  | 54 |
| 2.3. Distribución de fuerzas en los estribos. Massone & López (2014) [22]   | 56 |
| 2.4. Dirección del pandeo. Massone & López (2014) [22]  | 56 |
| 2.5. Localización del refuerzo transversal ( $x_j$ ) y su desplazamiento ( $y_j$ ). Massone & López (2014) [22]   | 57 |
| 2.6. Esquema para el pandeo de un grupo de barras. Massone & López (2014) [22]  | 58 |
| 2.7. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980)[31]  | 62 |
| 2.8. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13LD4S70 de Kikukawa et al. (1994) [16]   | 63 |
| 2.9. (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47 de Ooya & Kato (1994) [26]   | 63 |
| 2.10. Diagrama de flujo para determinar el largo de pandeo. Dhakal & Maekawa (2002) [7]   | 64 |
| 2.11. Idealización geométrica del pandeo global de la barra de acero de refuerzo longitudinal. Dhakal & Maekawa (2002) [7]  | 64 |
| 2.12. Estimación lineal para calcular “ $\varepsilon_{corr}$ ”  | 67 |
| 2.13. Modelo Propuesto (usando $L/d$ $L/d_{calibrado}$ ) versus Modelo de Massone & López (2014) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31] | 69 |

|  |    |
|--|----|
| 2.14. Modelo Propuesto (usando $L/d_{calibrado}$ y solución de la ecuación de compatibilidad linealizada) versus Modelo de Massone & López (2014) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31] . . . . . | 70 |
| 2.15. Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16HD6S35 de Kato et al. (1995) [15] . . . . .   | 71 |
| 2.16. Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16LD6S35 de Kato et al. (1995) [15] . . . . .   | 71 |
| 2.17. Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47 de Ooya & Kato (1994) [26] . . . . .   | 72 |
| 2.18. Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47I de Ooya & Kato (1994) [26] . . . . .  | 72 |
| 2.19. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31] . . . . .   | 73 |
| 2.20. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4A6-15 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31] . . . . .  | 74 |
| 2.21. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4B4-20 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31] . . . . .  | 74 |
| 2.22. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 12 de Scott et al. (1982) [30] . . . . .   | 75 |
| 2.23. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 13 de Scott et al. (1982) [30] . . . . .   | 75 |
| 2.24. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 14 de Scott et al. (1982) [30] . . . . .   | 76 |
| 2.25. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 15 de Scott et al. (1982) [30] . . . . .   | 76 |
| 2.26. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 20 de Scott et al. (1982) [30] . . . . .   | 77 |
| 2.27. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16D6S70 de Kato et al. (1995) [15] . . . . .  | 77 |
| 2.28. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D13D4S47 de Kato et al. (1995) [15] . . . . .  | 78 |
| 2.29. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D13D4S35I de Ooya & Kato (1994) [26] . . . . .  | 78 |
| 2.30. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13D6S47T de Masamoto et al. (1993) [21] . . . . .   | 79 |
| 2.31. Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13LD4S70 de Kikukawa et al. (1994) [21] . . . . .   | 79 |



# Introducción

## 0.1. Fundamentación general

De particular interés y complejidad es el estudio del comportamiento de los elementos de hormigón armado, susceptibles al daño debido a solicitaciones sísmicas importantes, por ejemplo: las ocurridas en los terremotos de Chile (2010) o Nueva Zelanda (2011). Algunos de los efectos que se han observado son fallas de compresión en los elementos de borde de muros de hormigón armado, producidas por un inadecuado detallamiento del refuerzo. Esto ha generado un creciente interés en el estudio de modelos que logren caracterizar el comportamiento de los materiales (como el hormigón o el acero de refuerzo) y elementos estructurales (como muros o columnas).

La literatura dispone de diversas investigaciones en las que se estudia el comportamiento de los muros y columnas de hormigón armado ante cargas cíclicas. El desarrollo de nuevos estudios, analíticos y experimentales, permite proveer de un importante aporte en la actualización de las normas vigentes de diseño. Por ejemplo, en el trabajo de Abdullah & Wallace (2019)[2] se calcula la capacidad de deriva de muros estructurales especiales, cuya expresión es adoptada en la norma de diseño ACI 318-19[1] en el apartado 18.10.6.2b (ecuación 1) de la citada norma.

$$\frac{\delta_c}{h_w} (\%) = 4 - \frac{\lambda_b}{50} - \frac{V_{max}}{0,68\sqrt{f'_c}A_{cv}} \quad (1)$$

Donde  $\lambda_b = (l_w/b)(c/b)$ , siendo  $l_w/b$  el relación entre la longitud y el espesor del muro,  $c/b$  es la relación entre la profundidad del eje neutro en la zona de compresión y el espesor del muro,  $V_{max}$  es la fuerza cortante máxima que se desarrolla en el muro,  $f'_c$  es la resistencia a la compresión del hormigón y  $A_{cv} = l_w \cdot b$ . Sin embargo, para este ejemplo en particular, no existen investigaciones que identifiquen el mecanismo que describa la influencia de  $\lambda_b$  con respecto a la capacidad de deriva, y así se valide el modelo de Abdullah & Wallace (2019)[2]. Tampoco existe una expresión analítica que determine la dependencia de  $\lambda_b$  con el pandeo de las barras de acero de refuerzo. De particular interés son las pruebas experimentales de Dhakal & Su (2017) [9] donde se ensayan columnas cortas de hormigón armado bajo una combinación de carga axial constante y carga lateral cíclica, observando fallas provocadas por el pandeo del refuerzo longitudinal y, por consiguiente, la reducción de la capacidad de deformación de la columna debido al pandeo del acero de refuerzo. Por lo tanto, el modelamiento de materiales o elementos de hormigón armado que incorporen fenómenos como el pandeo, se ha convertido

en un aspecto importante de la investigación.

El estudio del pandeo del acero de refuerzo es uno de los factores a considerar en el estudio y diseño de los elementos de hormigón armado sometidos a compresión, dado que el pandeo puede influir perjudicialmente en la capacidad de carga y disipación de energía ante solicitaciones sísmicas importantes. Así, solo algunas normas de diseño como el Eurocódigo 8 y el Estándar de Diseño en Concreto de Nueva Zelanda, incluyen disposiciones separadas para revisar el confinamiento y la eficacia del refuerzo transversal para evitar el pandeo. Adicionalmente, otros códigos como el ACI 318-19[1], incluyen restricciones que permiten inhibir los efectos perjudiciales del pandeo en columnas y muros, basándose en espaciamientos máximos, los cuales son menores cuando se trata de aceros de mayor resistencia ( $f_y \geq 550MPa$ ), también establece diámetros mínimos del refuerzo transversal en relación al diámetro de las barras longitudinales. Esta última restricción también se puede verificar en otros códigos de diseño, como el E060 del RNE de Perú. Estas recomendaciones normativas se basan en la experiencia e investigación existente; sin embargo, no se cuentan con expresiones analíticas de diseño que respondan a estudio del comportamiento no lineal debido al pandeo.

Bresler & Gilbert (1961)[4], Papia et al. (1968)[28] y Pantazopoulou et al. (1998)[27], describen el mecanismo de la falla y brindan criterios para evitar la falla por pandeo. Entre los mecanismos de falla se distinguen dos escenarios para el problema: el pandeo que ocurre una longitud igual al espacio entre dos estribos consecutivos (pandeo local) y el que ocurre en una longitud igual al espacio entre más de dos estribos consecutivos (pandeo global). Ante solicitaciones sísmicas, el pandeo del acero de refuerzo longitudinal inicia luego de la descarga de fuerzas de tracción, cuando el hormigón del recubrimiento ya se encuentra fisurado. Desestimando el aporte que brinda el hormigón en restringir el pandeo, se puede estimar el comportamiento de una barra apoyada entre dos estribos consecutivos (pandeo local) mediante el estudio de una barra desnuda con los extremos restringidos al desplazamiento transversal. Considerando esta suposición se han desarrollado diversos modelos que capturan el comportamiento tensión-deformación de la barra. Por ejemplo, Monti & Nuti (1992)[25], Dhakal & Maekawa (2002a)[8] y Zhou et al. (2016)[34] presentan modelos que determinan tensiones y deformaciones en función de reglas definidas en distintas etapas de carga y descarga de la barra, identificando la influencia de la relación de esbeltez ( $L/d$ ) y la tensión de fluencia ( $f_y$ ). Gomes & Appleton (1997)[12] y Yang (2016)[33], mediante análisis seccional y un modelo de plasticidad concentrada, definen la envolvente en compresión de la curva tensión – deformación cuando se produce el pandeo inelástico, los modelos son sencillos y eficientes a nivel computacional. Rodríguez et al. (1999)[29], a partir de estudios experimentales, propone un procedimiento para predecir el inicio del pandeo inelástico, además, identifica que se producen mayores deformaciones en la cara cóncava o interna de la barra pandeada. Massone & Moroder (2009)[23] proponen un modelo de plasticidad concentrada y análisis a nivel de fibras para capturar la respuesta tensión – deformación ante cargas monotónicas y cíclicas, sin embargo, su implementación es compleja debido a que requiere métodos iterativos para resolver la no linealidad de material y geométrica del problema.

El pandeo influye dentro de los estudios fenomenológicos de la fatiga del acero de refuerzo longitudinal. Kunnath et al. (2009)[17] incorpora la degradación por fatiga en el modelo de pandeo local de Dhakal & Maekawa (2002a)[8], observando una mayor degradación y menor vida a la fatiga cuando la relación de esbeltez ( $L/d$ ) es grande. Kashani et al. (2015a)[14]

y Kashani et al. (2015b)[13], basados en análisis de elementos finitos, proponen modelos de pandeo local incorporando la degradación por fatiga de bajos ciclos, estos estudios identifican que la vida a la fatiga de bajos ciclos es mayor en barras lisas con respecto a las barras corrugadas, no obstante, su degradación es mayor debido al pandeo inelástico. Mediante fractografía, Kashani et al. (2015a)[14] identifican que la fractura siempre empieza en la cara interior (cóncava) de la barra pandeada. Tripathi et al. (2018)[32] proponen modelos de vida a la fatiga de bajos ciclos, identificando la influencia de la amplitud de deformación ( $\epsilon a$ ), la relación de esbeltez ( $L/d$ ) y la tensión de fluencia ( $f_y$ ).

Como se ha observado, la mayoría de estudios se enfocan en comportamiento de una barra desnuda para el modelamiento y experimentación. Sin embargo, existen muchos estudios, como los de Scott et al. (1982) [30], Ooya & Kato (1994) [26], Kato et al. (1995)[15] y Pantazopoulou et al. (1998)[27], que se han centrado en la investigación analítica y experimental del pandeo global a partir de ensayos en columnas cortas de hormigón armado sometidas a una carga axial monotónica de compresión. Algunos de estos estudios han enfatizado en la importancia del espaciamiento, distribución y características de las barras de refuerzo transversal y la expansión del núcleo del hormigón. Así, Dhakal & Maekawa (2002)[7] proponen un método analítico sencillo para predecir el número de espacios entre estribos consecutivos (modo) donde ocurrirá el pandeo, tomando en cuenta las propiedades mecánicas del refuerzo longitudinal y transversal. Massone & López (2014)[22], adaptan el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009)[23], para capturar el comportamiento tensión – deformación del refuerzo longitudinal, resolviendo el problema para distintos modos de pandeo y escogiendo el modo que entrega el máximo de tensiones más bajo.

Dada la investigación existente, se puede identificar que algunos modelos son de compleja implementación, para su uso en análisis y diseño, o no consideran la influencia de agentes externos (como la rigidez que aporta el refuerzo transversal y el núcleo de hormigón en el caso del pandeo global). Aunque se ha dedicado una investigación considerable a la implementación de modelos fenomenológicos, se ha prestado bastante menos atención a modelos basados en análisis seccional mediante discretización en fibras. Mediante el análisis basado en fibras es posible incorporar, de forma precisa, la no linealidad de material en la respuesta del elemento estructural. Por ejemplo, asignando leyes constitutivas exactas en cada fibra y mediante el análisis de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, se consiguen determinar las funciones de forma que definen el nivel de deformaciones y tensiones en la sección. Así, ante un caso histerético, es posible estimar los niveles de deformación alcanzados y el daño asociado en cada fibra. Por lo tanto, una de las ventajas de un modelo basado en discretización en fibras, consiste en la posibilidad de estudiar analíticamente el daño por fatiga a nivel de fibras; mientras que la mayoría de modelos de fatiga se basan en estudios experimentales.

Hasta ahora, algunos de los modelos en los que se implementa el análisis seccional a nivel de fibras, fueron desarrollados en los trabajos de Massone & Moroder (2009)[23] y Massone & López (2014)[22]; sin embargo, estos modelos presentan el inconveniente de no ser computacionalmente eficientes, ya que requieren métodos iterativos para resolver una ecuación de no lineal de equilibrio.

En la Fig. 1(a) se muestra el modelo de plasticidad concentrada para una barra susceptible a pandearse bajo cargas axiales  $p$ , también se asume que las rotaciones y momentos son iguales

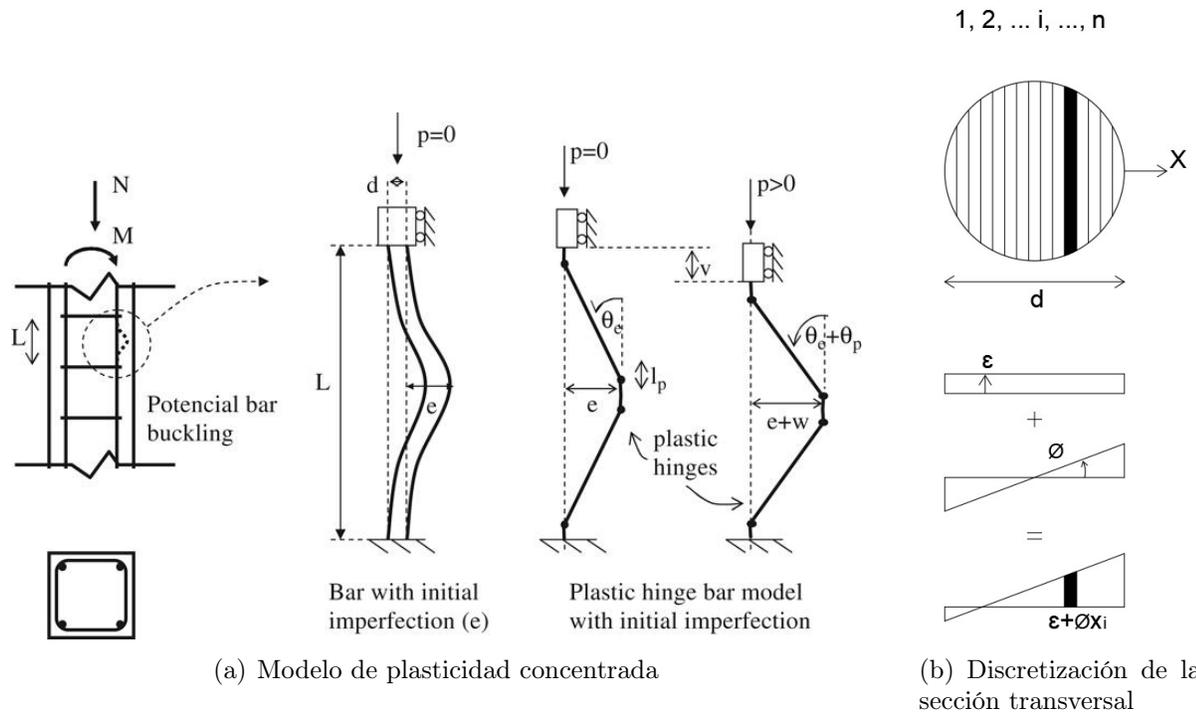


Figura 1: Pandeo local (Massone & Moroder, 2009)[23]

en las cuatro rótulas plásticas. En la Fig. 1(b) se muestra la sección trasversal de la barra con las deformaciones unitarias  $\varepsilon_i$  y tensiones axiales  $\sigma_i$  de cada fibra  $i$ , a la que le corresponde un área  $A_i$  y están ubicadas a una distancia  $x_i$  con respecto al centroide de la barra. Así, en la ecuación de equilibrio (ecuación 2) están incluidas la no linealidad de material (acero) y geométricas (desplazamiento transversal).

$$\sum_i \sigma_i A_i x_i - p \left( \frac{e + \omega}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

Por lo tanto, el propósito de esta investigación consiste en proponer modelos constitutivos de sencilla implementación y computacionalmente eficientes, que incorporen el pandeo local y global. Se pretende lograr este objetivo encontrando soluciones que permitan simplificar o evitar resolver la ecuación no lineal de equilibrio (ecuación 2) en la implementación de los modelos de Massone & Moroder (2009)[23] y Massone & López (2014)[22]. Considerando las similitudes en la idealización geométrica del problema, se podrían aplicar algunos de los supuestos sobre el comportamiento plástico del acero disponibles en el modelo de Gomes & Appleton (1997)[12].

## 0.2. Objetivos

### 0.2.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo no iterativo tensión-deformación que incorpore el pandeo local y global. Se espera que simplifique o evite resolver la ecuación no lineal de equilibrio (ecuación 2) de los modelos de Massone & Moroder (2009)[23] y Massone & López (2014)[22].

### 0.2.2. Objetivos específicos

- Encontrar una expresión entre los parámetros del problema de pandeo que simplifique o evite la complejidad de resolver una ecuación no lineal de equilibrio (ecuación 2) de los modelos de Massone & Moroder (2009)[23] y Massone & López (2014)[22].
- Proponer un modelo histerético tensión-deformación no iterativo que incorpore los efectos del pandeo local en barras de acero de refuerzo longitudinal.
- Proponer un modelo monotónico tensión-deformación no iterativo que incorpore los efectos del pandeo global en barras de acero de refuerzo longitudinal.
- Analizar el daño por fatiga con base al análisis seccional de una barra de acero longitudinal mediante la discretización en fibras.

### 0.2.3. Hipótesis

Sobre la base de los modelos de pandeo local y pandeo global desarrollados por Massone & Moroder (2009)[23], Massone & López (2014)[22] y el modelo de Gomes & Appleton (1997)[12], se propone establecer una correlación entre la deformación unitaria axial  $\varepsilon$  y la curvatura  $\phi$  (en las rótulas plásticas) u otros parámetros relevantes. Con la calibración de los parámetros se consigue simplificar o evitar resolver la ecuación no lineal de equilibrio (ecuación 2), permitiendo implementar un modelo que capture el comportamiento tensión-deformación de una barra de acero de refuerzo susceptible a pandearse (pandeo local o global).

# Capítulo 1

## Modelo de pandeo local

En esta sección se desarrolla el modelo constitutivo de una barra de acero de refuerzo longitudinal susceptible al pandeo local. La solución se basa en los supuestos establecidos en los siguientes estudios:

- Modelo de pandeo de Massone & Moroder (2009)[23]. Permite capturar la respuesta tensión-deformación de una barra sometida a carga axial y susceptible al pandeo. La idealización de la barra pandeada se basa en un modelo de plasticidad concentrada con 4 rótulas plásticas e incluye una imperfección inicial. El análisis de la sección transversal se realiza mediante su discretización en fibras y considerando la hipótesis de Bernoulli.
- Tesis de Lacaze (2009)[18]. Propone una modificación a la ecuación de compatibilidad presentada en el modelo de pandeo de Massone & Moroder (2009)[23]. La modificación supone que la deformación axial en la barra se distribuye en toda la barra y no solo en las rótulas plásticas.
- Modelo tensión - deformación de barras de acero de refuerzo incluido el pandeo, de Gomes & Appleton (1997)[12]. Modifica el modelo histerético de Menegotto-Pinto trazando una envolvente que representa el comportamiento tensión-deformación de la barra pandeada. La idealización de la barra pandeada se basa en un modelo de plasticidad concentrada con 3 rótulas plásticas y supone una distribución uniforme de tensiones en la sección de las rótulas.

El modelo de pandeo Massone & Moroder (2009)[23] incluyendo la modificación propuesta en la Tesis de Lacaze (2009)[18], permite simular la respuesta tensión-deformación de una barra pandeada con una buena precisión frente a datos experimentales. Para obtener esta respuesta se requiere iterar sobre la curvatura para resolver el equilibrio en el sistema. Mediante el mecanismo planteado en el modelo de Gomes & Appleton (1997)[12] es posible calibrar la curvatura con la longitud, diámetro y deformación unitaria en el extremo más comprimido de la sección transversal de la barra pandeada. Así, el modelo propuesto de pandeo local implementa la calibración de la curvatura en el mecanismo de pandeo del modelo de Massone & Moroder (2009)[23], con el objetivo de evitar el procedimiento iterativo.

## 1.1. Modelo de Massone & Moroder (2009)

Massone & Moroder (2009) desarrollan un modelo que calcula la respuesta tensión - deformación representando los efectos del pandeo inelástico en una barra de acero de refuerzo longitudinal con una imperfección inicial. El modelo se basa en la idealización geométrica de la barra de refuerzo pandeada mediante un modelo de plasticidad concentrada, se considera además una imperfección inicial, asumiendo que no existen tensiones residuales antes de la aplicación de la carga axial. La barra cuenta con 4 rótulas plásticas, la sección transversal de la rótula plástica es analizada mediante una discretización a nivel de fibras (bajo la hipótesis de Bernoulli: secciones planas se mantienen planas después de la deformación) y resolviendo una ecuación no lineal de equilibrio.

Para el análisis se toman en cuenta: el comportamiento monotónico del acero descrito en el modelo de Mander (1984)[20] y el ajuste en zona de compresión propuesto por Dodd & Restrepo (1995) [10], en el comportamiento cíclico se considera el efecto Bauschinger.

### 1.1.1. Comportamiento monotónico y cíclico

El modelo utiliza como base la respuesta tensión deformación monotónica en tracción del acero del modelo de Mander (1984) [20], mostrado en la Fig. 1.1. Este modelo se caracteriza por: una respuesta es lineal elástica con pendiente " $E_s$ " hasta alcanzar la fluencia ( $\varepsilon_y, f_y$ ); la tensión y deformación unitaria alcanzadas en la fluencia se mantienen constantes hasta el inicio del endurecimiento ( $\varepsilon_{sh}, f_y$ ), en este punto la pendiente de la tangente es " $E_{sh}$ ", el endurecimiento se produce hasta alcanzar el punto de tensión máxima ( $\varepsilon_m, f_m$ ) seguido por una degradación lineal hasta el punto ( $\varepsilon_u, f_u$ ).

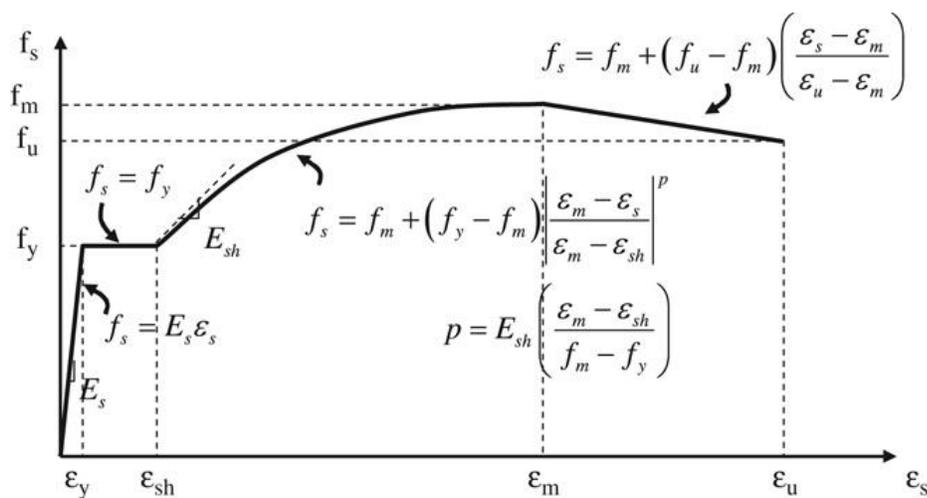


Figura 1.1: Modelo constitutivo para el acero en tracción (Mander, 1984)[20]

Es necesario indicar que también se toma en cuenta la corrección de la deformación unitaria  $\varepsilon_u$  (ecuación 1.1) en tracción, debido a la concentración de deformaciones y formación de una estricción en la barra de acero de refuerzo. (Fig. 1.2)

$$\varepsilon_{u,p} \approx \varepsilon_m + (\varepsilon_{u,g} - \varepsilon_m) \cdot \frac{l_g}{l_p} \quad (1.1)$$

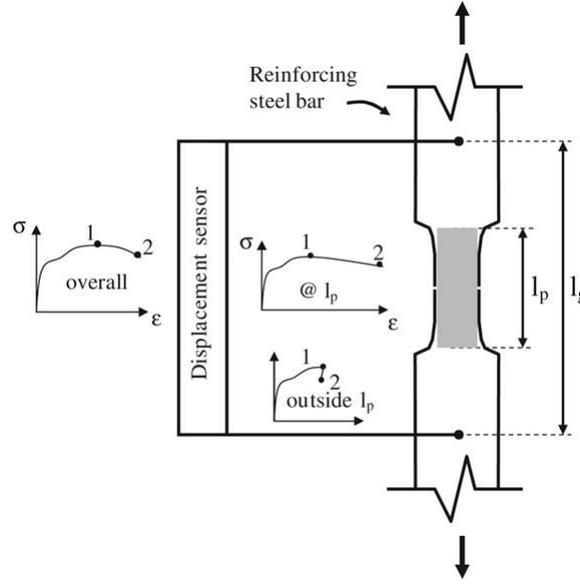


Figura 1.2: Formación de la estricción en una barra de acero de refuerzo en tracción (Massone & Moroder, 2009)[23]

Además, en la zona de compresión, las tensiones y deformaciones unitarias se reajustan de acuerdo las ecuaciones 1.2 y 1.3, establecidas en el modelo de Dodd & Restrepo (1995) [10]. Donde  $f_{s,c}$  y  $\varepsilon_{s,c}$  son la tensión y deformación unitaria en compresión,  $f_{s,t}$  y  $\varepsilon_{s,t}$  corresponden a los valores en tracción.

$$f_{s,c} = -f_{s,t} + (1 + \varepsilon_{s,t})^2 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{s,c} = -\frac{\varepsilon_{s,t}}{1 + \varepsilon_{s,t}} \quad (1.3)$$

El comportamiento cíclico se conforma a través del traslado de las envolventes monotónicas en tracción y compresión, las cuales caracterizan las fases de descarga y recarga en la barra. El modelo incorpora el efecto Bauschinger mediante una transición suavizada desde el punto de inicio y final en las fases de carga y descarga, la curva A mostrada en la Fig. 1.3 captura este efecto, y es definida por la ecuación (ecuación 1.4) de Menegotto-Pinto (Chang & Mander, 1994)[6].

$$f_s = f_0 + E_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_0) \left\{ Q + \frac{1 - Q}{\left(1 + \left[E_0 \left(\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_0}{f_f - f_0}\right)\right]^R\right)^{1/R}} \right\} \quad (1.4)$$

Donde:  $E_0$  es el módulo tangente al inicio de la curva;  $Q$  y  $R$  son parámetros que definen la forma de la curva. El parámetro  $Q$  se define en la ecuación 1.5.

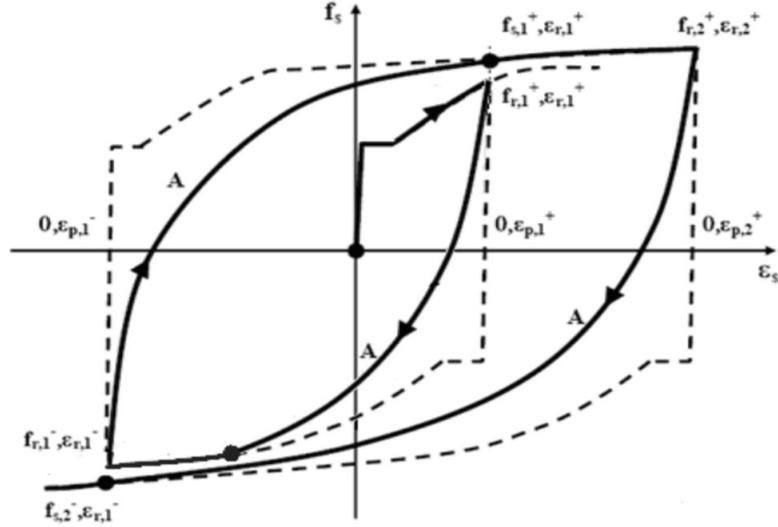


Figura 1.3: Comportamiento cíclico de una barra de acero de refuerzo (Lacaze, 2009)[18]

$$Q = \frac{E_{sec} - a}{1 - a} \quad (1.5)$$

$E_{sec}$  es el módulo secante que conecta las coordenadas de origen  $(\varepsilon_o, f_o)$  y las coordenadas  $(\varepsilon_f, f_f)$ .

$$E_{sec} = \frac{f_f - f_o}{\varepsilon_f - \varepsilon_o} \quad (1.6)$$

El parámetro  $a$  es la inversa del denominador de la ecuación de Menegotto-Pinto.

$$a = \left( 1 + \left[ \frac{E_0}{E_{sec}} \right]^R \right)^{-1/R} \quad (1.7)$$

Lacaze (2009)[18] define los parámetros  $E_0$  y  $R$  en las ecuaciones 1.8 a 1.11:

Fase de descarga:

$$E_0 = E_s (1 - 3\Delta\varepsilon) \quad (1.8)$$

$$R = 14 \left( \frac{f_y}{E_s} \right)^{1/3} (1 - 14\Delta\varepsilon) \quad (1.9)$$

Fase de recarga:

$$E_0 = E_s (1 - \Delta\varepsilon) \quad (1.10)$$

$$R = 20 \left( \frac{f_y}{E_s} \right)^{1/3} (1 - 18\Delta\varepsilon) \quad (1.11)$$

Donde:

$$\Delta\varepsilon = \frac{|\varepsilon_f - \varepsilon_0|}{2} \quad (1.12)$$

### 1.1.2. Modelo geométrico

La idealización geométrica de una barra de acero de refuerzo longitudinal se representa mediante un modelo de plasticidad concentrada (Fig. 1.4). El modelo representa una barra cuyos apoyos extremos se encuentran fijos, permitiendo el desplazamiento longitudinal  $\nu$  en el extremo superior, debido a la acción de una carga  $p$ . Sin la aplicación de carga, el modelo presenta una imperfección inicial  $e$  en el centro de la longitud de la barra. Además, se presenta también un desplazamiento transversal  $\omega$  debido a la aplicación de la carga "p" y asociado al desplazamiento longitudinal  $\nu$ .

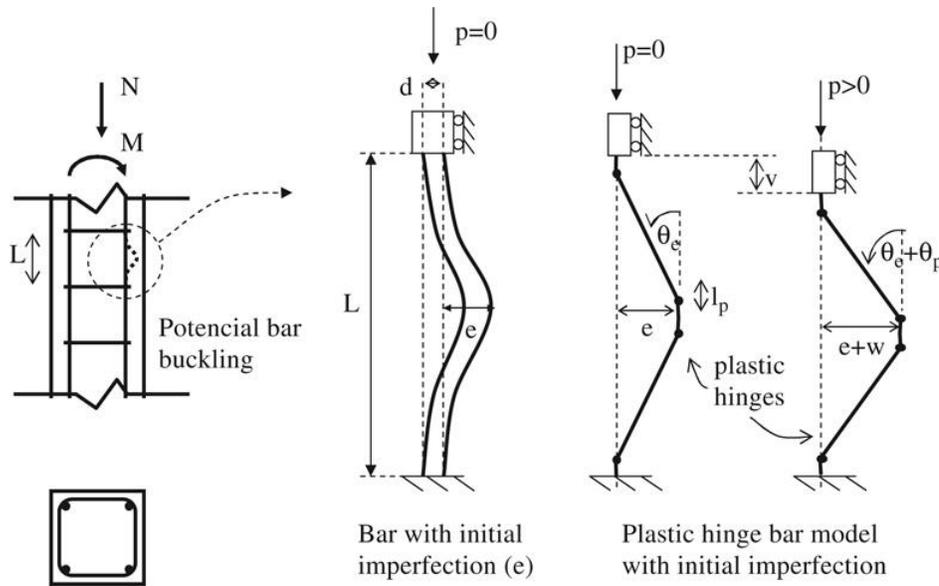


Figura 1.4: Modelo de plasticidad concentrada del pandeo de una barra de refuerzo con imperfección inicial (Massone & Moroder, 2009)[23]

Las deformaciones se concentran en cuatro rótulas plásticas, dos ubicadas en los extremos y dos en la mitad de la longitud de la barra, como se muestra en la Fig. 1.4. Se asume que la longitud de cada una de las rótula plástica " $l_p$ " es igual al valor del diámetro " $d$ " de la barra.

### 1.1.3. Equilibrio

A partir de la discretización en fibras de la sección transversal de cualquiera de la rótulas plásticas y, mediante la integración de tensiones axiales se calculan la fuerza axial " $p$ " y el momento " $m$ " resultantes. Dada la simetría geométrica del modelo de plasticidad concentrada, es posible hacer el análisis de solo una cuarta de la barra. (Fig. 1.5(b)). Se observa que la

aplicación de la carga axial “ $p$ ” genera un momento resultante en la rótula plástica pero no en la zona donde se aplica la carga axial.

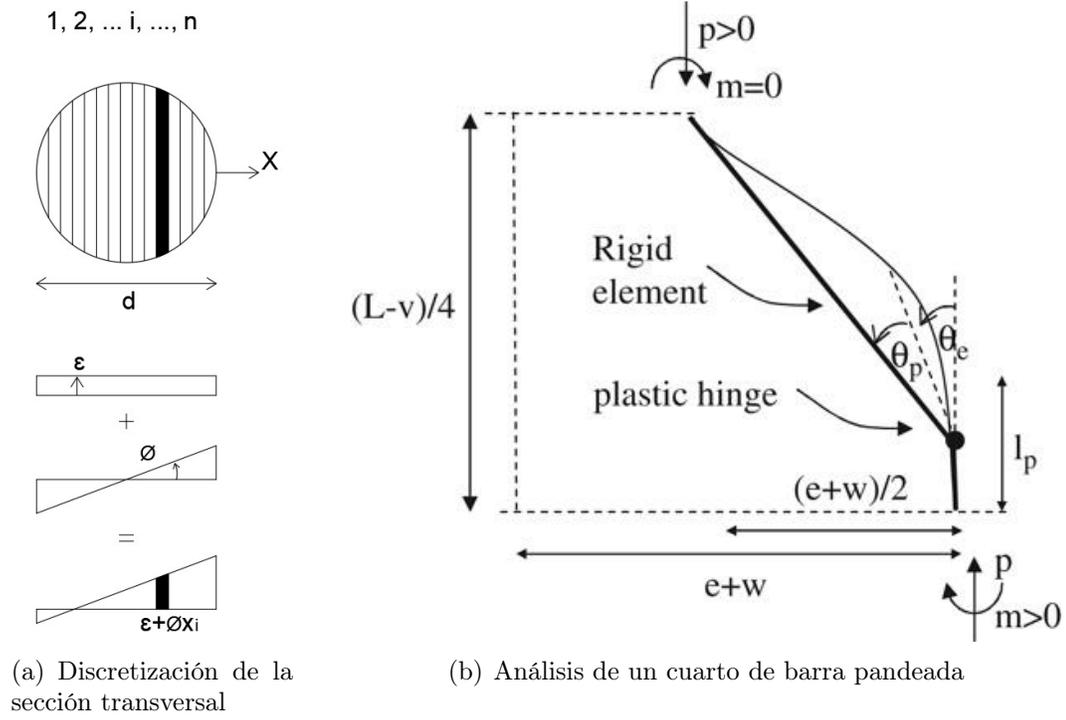


Figura 1.5: Análisis del equilibrio en la barra pandeada (Massone & Moroder, 2009)[23]

A partir de la discretización mostrada en la Fig. 1.5(a), se tiene que para cada fibra  $i$ , ubicada a una distancia  $x_i$  del centro, le corresponde un área  $A_i$  y una deformación unitaria axial  $\varepsilon_i$ . Considerando la hipótesis de Bernoulli (secciones planas se mantienen planas después de la rotación),  $\varepsilon_i$  puede expresarse mediante la ecuación 1.13, donde  $\varepsilon_o$  es la deformación unitaria axial en el centro de la barra y,  $\phi_p$  es la curvatura. Además, mediante una ley constitutiva cíclica se calculan las tensiones  $\sigma_i$  en cada fibra  $i$  (ecuación 1.14). La carga axial ( $p$ ) y momento resultante ( $m$ ) quedan definidos en las ecuaciones 1.15 y 1.16, donde “ $e$ ” es el desplazamiento transversal debido a la imperfección inicial y,  $w$  es el desplazamiento transversal debido al pandeo de la barra de acero de refuerzo.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o + \phi_p x_i \quad (1.13)$$

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i) \quad (1.14)$$

$$p = -\sum \sigma_i A_i \quad (1.15)$$

$$m = \sum \sigma_i A_i x_i \quad (1.16)$$

Luego, de acuerdo a la Fig. 1.5(b), el momento resultante queda definido en la ecuación 1.17:

$$m = p \frac{e + \omega}{2} \quad (1.17)$$

#### 1.1.4. Compatibilidad

Basándose en la geometría del modelo, mostrada en la Fig. 1.4, se puede establecer una expresión que defina el desplazamiento transversal  $\omega$  en función de los parámetros geométricos del modelo y el giro  $\theta_p$  ocasionado por la aplicación de carga axial;  $\theta_e$  representa el giro debido a la imperfección inicial transversal  $e$ .

$$e + \omega = \frac{\sin(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \left( \frac{L}{2} - l_p \right) \quad (1.18)$$

Además, se tiene la curvatura  $\phi_p$  definida en la siguiente ecuación:

$$\phi_p = -\frac{\theta_p}{l_p} \quad (1.19)$$

Por otro lado, el desplazamiento longitudinal o vertical,  $\nu$ , se compone por el descenso debido al giro  $\theta_p$  y a la deformación axial  $\varepsilon_p$  concentrada en cada una de las cuatro rótulas:

$$\nu = \nu_\phi + \nu_\varepsilon = (L - 2l_p) \left[ 1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \right] + 4l_p\varepsilon_p \quad (1.20)$$

En la tesis de Lacaze (2009)[18] se realiza una modificación a la ecuación 1.20, bajo el supuesto que las deformaciones axiales se distribuyen a lo largo de la barra y no solo en las rótulas plásticas, esta modificación mejora el comportamiento cíclico dado que en tracción no se forman rótulas plásticas; la expresión modificada se presenta en la ecuación 1.21.

$$\nu = \nu_\phi + \nu_\varepsilon = (L - 2l_p) \left[ 1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} \right] + \varepsilon_o L \quad (1.21)$$

Considerando que la deformación unitaria axial promedio  $\bar{\varepsilon}$  y la tensión axial  $\bar{\sigma}$  promedio se definen como:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\nu}{L} \quad (1.22)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{p}{\Sigma A_i} \quad (1.23)$$

Reemplazando la ecuación 1.21 en 1.22:

$$\bar{\varepsilon} = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \left[1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)}\right] + \varepsilon_o \quad (1.24)$$

### 1.1.5. Implementación del modelo

Planteados los supuestos sobre el equilibrio y compatibilidad, se tienen dos tipos de no linealidad: de material y geométrica. Por lo tanto, para resolver el equilibrio en la barra, expresado mediante las ecuaciones 1.16 y 1.17, el modelo de Massone & Moroder[23] propone iterar sobre la curvatura  $\phi_p$  para cada incremento de carga axial  $p$  o deformación unitaria axial promedio  $\bar{\varepsilon}$ . El procedimiento se muestra en la Fig. (1.6).

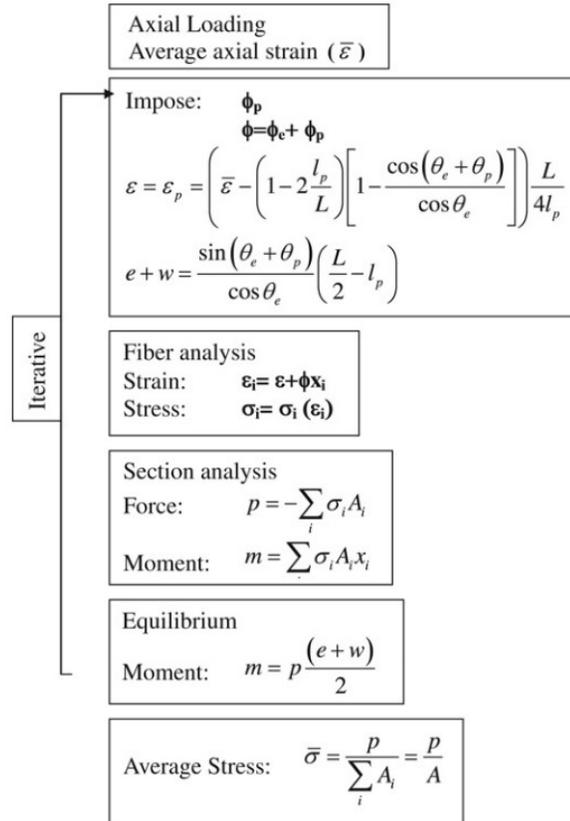


Figura 1.6: Procedimiento iterativo para calcular la respuesta tensión deformación (Massone & Moroder, 2009)[23]

## 1.2. Modelo de Gomes & Appleton (1997)

Gomes & Appleton (1997) desarrollan un modelo que simula el comportamiento tensión-deformación de barra acero de refuerzo longitudinal bajo los efectos del pandeo inelástico. El modelo se basa en una modificación al modelo cíclico de Menegotto-Pinto, incorporando el pandeo mediante un mecanismo simple de plasticidad concentrada y considerando una distribución plástica de tensiones en las rótulas plásticas formadas.

### 1.2.1. Modelo geométrico

El modelo geométrico (abreviado como “G-A” en adelante) idealiza una barra de refuerzo longitudinal entre dos estribos consecutivos mediante un modelo de plasticidad concentrada con tres rótulas plásticas, donde se concentran las deformaciones (Fig. 1.7). El modelo considera los extremo inferior fijo y permite el desplazamiento longitudinal en el extremo superior.

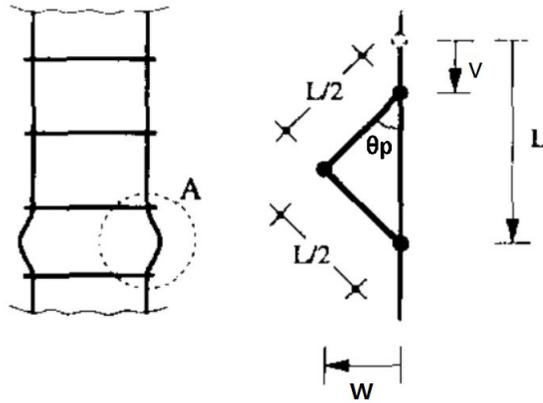


Figura 1.7: Modelo de plasticidad concentrada del pandeo de una barra de refuerzo (Gomes & Appleton, 1997)[12]

### 1.2.2. Equilibrio

Dada la simetría del modelo mostrado en la Fig. 1.7, se puede analizar el equilibrio en una mitad de la barra (Fig. 1.8), y queda expresado en la ecuación 1.25.

$$M_p = p \frac{\omega}{2} \quad (1.25)$$

El modelo considera también una distribución plástica uniforme de tensiones en la sección transversal de las rótulas plásticas. (Fig. 1.9). Así, las resultantes del momento plástico  $M_p$  y la carga axial  $p$  pueden ser calculados mediante el equilibrio de fuerzas en la sección transversal (ecuaciones 1.26 y 1.27).

$$M_p = f_y \frac{d^3}{6} \sin^3(\theta) \quad (1.26)$$

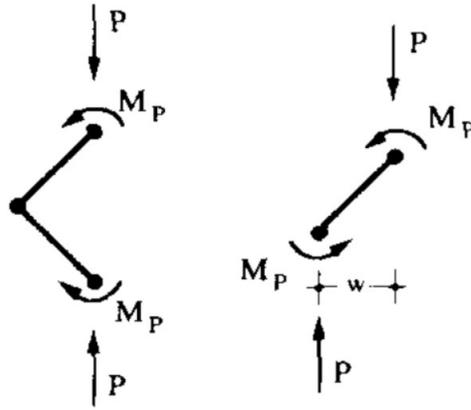


Figura 1.8: Análisis del equilibrio en una mitad de la barra (Gomes & Appleton, 1997)[12]

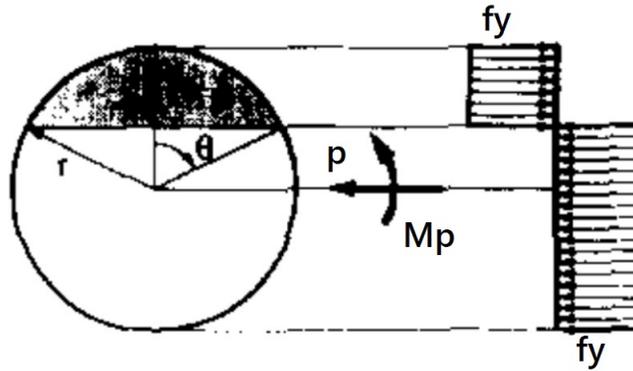


Figura 1.9: Distribución de tensiones en una rótula plástica (Gomes & Appleton, 1997)[12]

$$p = f_y \frac{d^2}{4} [\pi - 2\theta + \sin(2\theta)] \quad (1.27)$$

La tensión axial promedio se calcula en la ecuación 1.28

$$\bar{\sigma}_S = \frac{p}{A_s} \quad (1.28)$$

Donde  $A_s$  y  $d$  son el área y el diámetro de la sección transversal de la barra y  $\theta$  es el ángulo que define la ubicación del eje neutro  $c$  en la sección transversal, el cual está definido en la ecuación 1.29.

$$c = \frac{d}{2} \cos(\theta) \quad (1.29)$$

### 1.2.3. Compatibilidad

Considerando la geometría mostrada en la Fig. 1.7, se establecen las siguientes expresiones:

$$\omega = \frac{L}{2} \sin(\theta_p) \quad (1.30)$$

$$\nu = L (1 - \cos(\theta_p)) \quad (1.31)$$

Sin embargo, si el modelo adopta cuatro rótulas plásticas (abreviado como “G-A Modificado” en adelante), como se muestra en la Fig. 1.10, similar al planteado en el modelo de Massone & Moroder (2009)[23], los desplazamientos longitudinal y transversal quedan expresados en las ecuaciones 1.32 y 1.33.

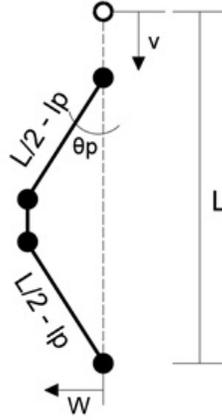


Figura 1.10: Modelo de plasticidad Concentrada considerando 4 rótulas plásticas (G-A Modificado)

$$\omega = \frac{L - 2l_p}{2} \sin(\theta_p) \quad (1.32)$$

$$\nu = (L - 2l_p) (1 - \cos(\theta_p)) \quad (1.33)$$

Linealizando las ecuaciones 1.32 y 1.33 (mediante la expansión en series de Taylor de las funciones de seno y coseno) e ignorando los términos de tercer orden y mayores, las expresiones se reducen a la ecuaciones 1.34 y 1.36.

$$\omega = \frac{L - 2l_p}{2} \theta_p \quad (1.34)$$

$$\nu = (L - 2l_p) \frac{\theta_p^2}{2} \quad (1.35)$$

Por lo tanto, la deformación axial promedio  $\bar{\varepsilon}_S$  queda definida en la ecuación 1.36:

$$\bar{\varepsilon}_S = \frac{\nu}{L} = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \frac{\theta_p^2}{2} \quad (1.36)$$

Además, la deformación unitaria axial en el centro de la barra se calcula en la ecuación 1.37.

$$\varepsilon_o = \phi_p c \quad (1.37)$$

#### 1.2.4. Implementación del modelo

El modelo de Gomes Appleton (1997) [12] incorpora los efectos del pandeo en el comportamiento cíclico tensión-deformación del modelo de Menegotto & Pinto (1973)[24]. Así, para incluir las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad que conforman la envolvente en compresión (curva CD en la Fig. 1.11), se realiza un cambio de variable expresado en la ecuación 1.38; por lo tanto, la relación  $\bar{\sigma}_S - \bar{\varepsilon}_S$  se traslada desde el origen de coordenadas ( $\bar{\varepsilon} = 0$ ) hacia el punto de tensión cero ( $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{SQ}$ ).

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_S - \varepsilon_{SQ} \quad (1.38)$$

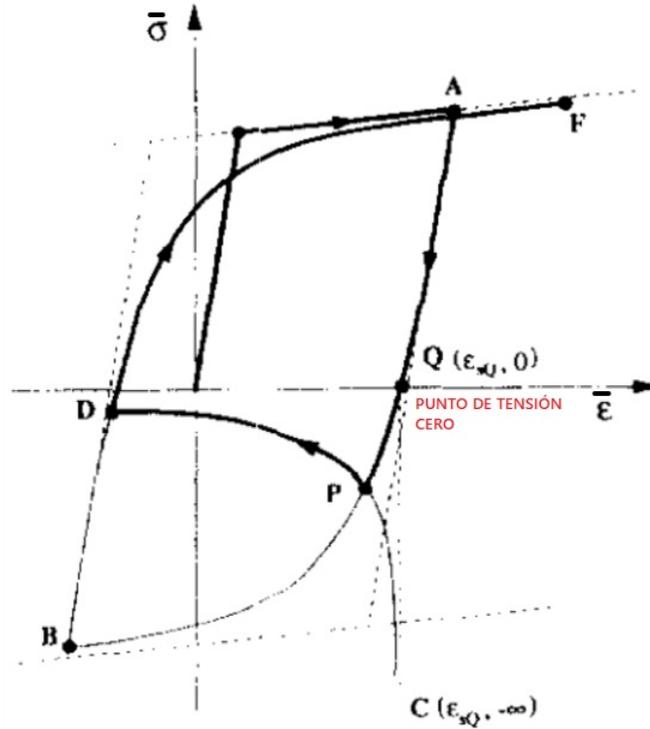


Figura 1.11: Incorporación de la relación  $\bar{\sigma}_S - \bar{\varepsilon}_S$  en el comportamiento global tensión - deformación (Gomes & Appleton, 1997) [12]

## 1.3. Modelo propuesto

El modelo propuesto de pandeo local permite simular el comportamiento tensión - deformación monotónico y cíclico de una barra de acero de refuerzo longitudinal susceptible al pandeo inelástico, sin la necesidad de utilizar métodos iterativos. El modelo propuesto tiene como base los supuestos indicados en los trabajos de Massone & Moroder (2009)[23] y Gomes & Appleton (1997)[12] (asumiendo el modelo geométrico G-A Modificado de la Fig. 1.10). Ambos modelos presentan una idealización geométrica similar, salvo la imperfección inicial que se plantea en el modelo de Massone & Moroder (2009)[23]. La diferencia más importante se presenta en el análisis de la sección transversal de la rótula plástica; Gomes & Appleton (1997) [12] asumen que la rótula fluye suponiendo una distribución uniforme de tensiones en compresión y tracción (Fig. 1.9), siendo la única variable la ubicación del eje neutro (ecuación 1.29); mientras que, Massone & Moroder (2009)[23] resuelven la distribución de tensiones y ubicación del eje neutro en la sección transversal para cada estado de carga axial (ecuaciones 1.13 a 1.17).

### 1.3.1. Análisis monotónico en compresión

Se revisa el comportamiento monotónico en compresión calculado a partir de los modelos de Massone & Moroder (2009)[23] y Gomes & Appleton (1997)[12]. Mediante la representación de una barra pandeada en la Fig. 1.12, es posible identificar la ubicación de las fibras más comprimida y más traccionada, respectivamente. Así, en las Figuras 1.13 y 1.14 se muestra la comparaciones del comportamiento tensión-deformación y el comportamiento de las curvaturas versus las deformaciones unitarias axiales en el centro, el lado cóncavo o el extremo más comprimido y el lado convexo o el extremo más traccionado de la barra pandeada.

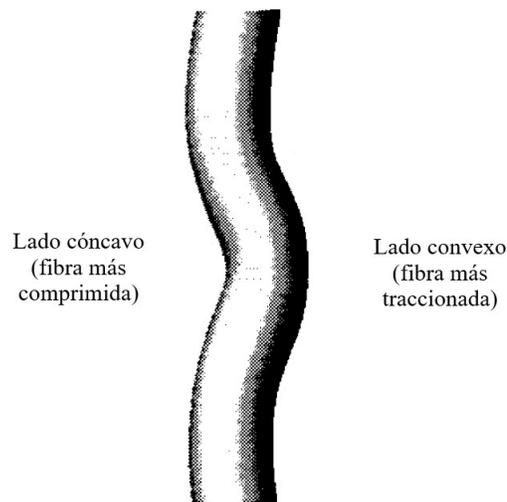


Figura 1.12: Barra pandeada (Brown & Kunnath, 2000)[5]

Tomando en cuenta la hipótesis de Bernoulli, las deformaciones unitarias en los extremos más comprimido ( $\varepsilon_{cmax}$ , ecuación 1.39) y más traccionado ( $\varepsilon_{tmax}$ , ecuación 1.40) de la sección transversal de la barra, se pueden calcular a partir de la expresión 1.13.

$$\varepsilon_{cmax} = \varepsilon_o + \phi_p \frac{d}{2} \quad (1.39)$$

$$\varepsilon_{tmax} = \varepsilon_o - \phi_p \frac{d}{2} \quad (1.40)$$

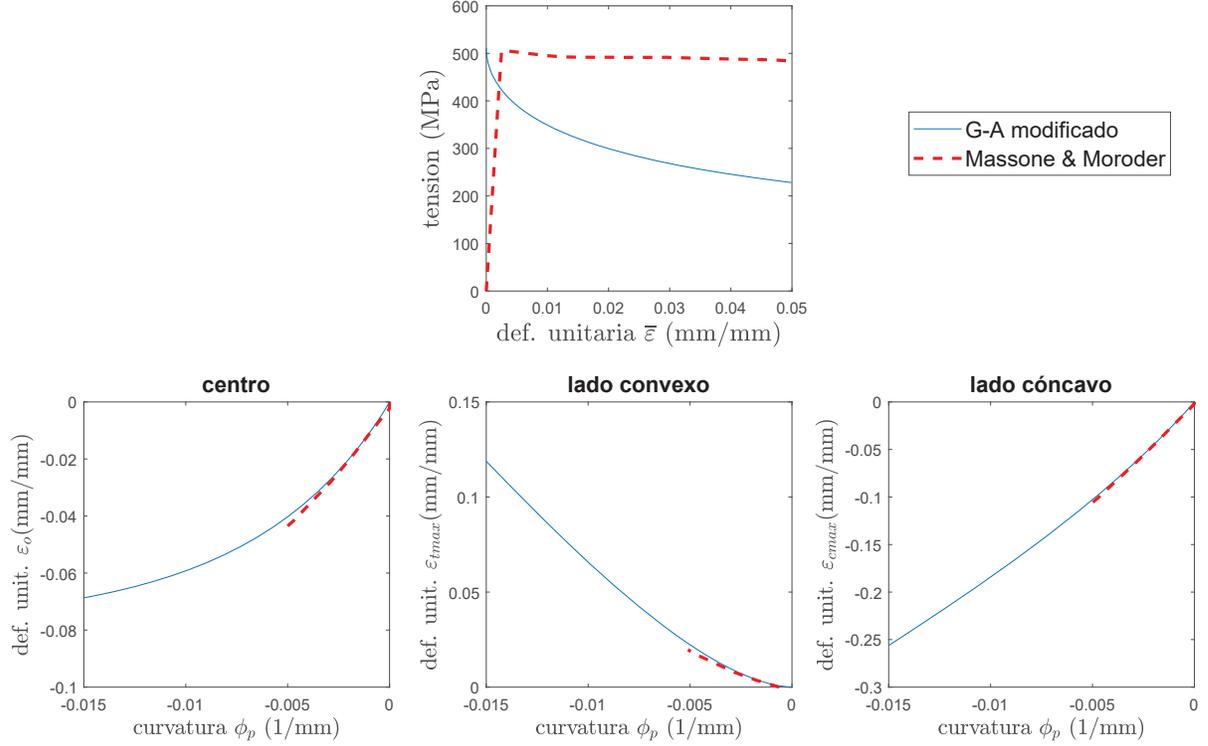


Figura 1.13: Comportamiento monotónico compresión. Barra tipo 500E,  $L/d=6$  y  $\bar{\varepsilon} = 5\%$

De acuerdo a las Figuras 1.13 y 1.14, en la comparación de las curvaturas versus deformaciones unitarias, se observan dos fenómenos: 1) la pendiente a lo largo de las curvas se mantiene casi constante en el lado cóncavo (extremo más comprimido de la barra) y, 2) las curvas de los modelos G-A Modificado y Massone & Moroder (2009)[23] se ajustan más en el lado cóncavo de la barra. Este comportamiento tiende a ser el mismo para distintas relaciones de esbeltez.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que, para un mismo nivel de deformaciones unitarias promedio ( $\bar{\varepsilon} = 5\%$ ), los valores alcanzados de  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  con el modelo G-A Modificado son aproximadamente el doble de los alcanzados con el modelo de Massone & Moroder (2009)[23]; en otras palabras, se observa una mayor degradación con el modelo G-A Modificado. Este fenómeno se debe a que en el modelo G-A Modificado se asume que las rótulas se encuentran plastificadas desde el inicio de la aplicación de la carga axial de compresión (es decir, la barra comienza a pandearse inmediatamente). Otra característica importante consiste en que los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  calculados con el modelo G-A Modificado (Figuras 1.13 y 1.14) no dependen de las propiedades mecánicas del acero (por ejemplo: la tensión de fluencia  $f_y$ ). No obstante, esta característica no se considera inconveniente, dado que estos mismos

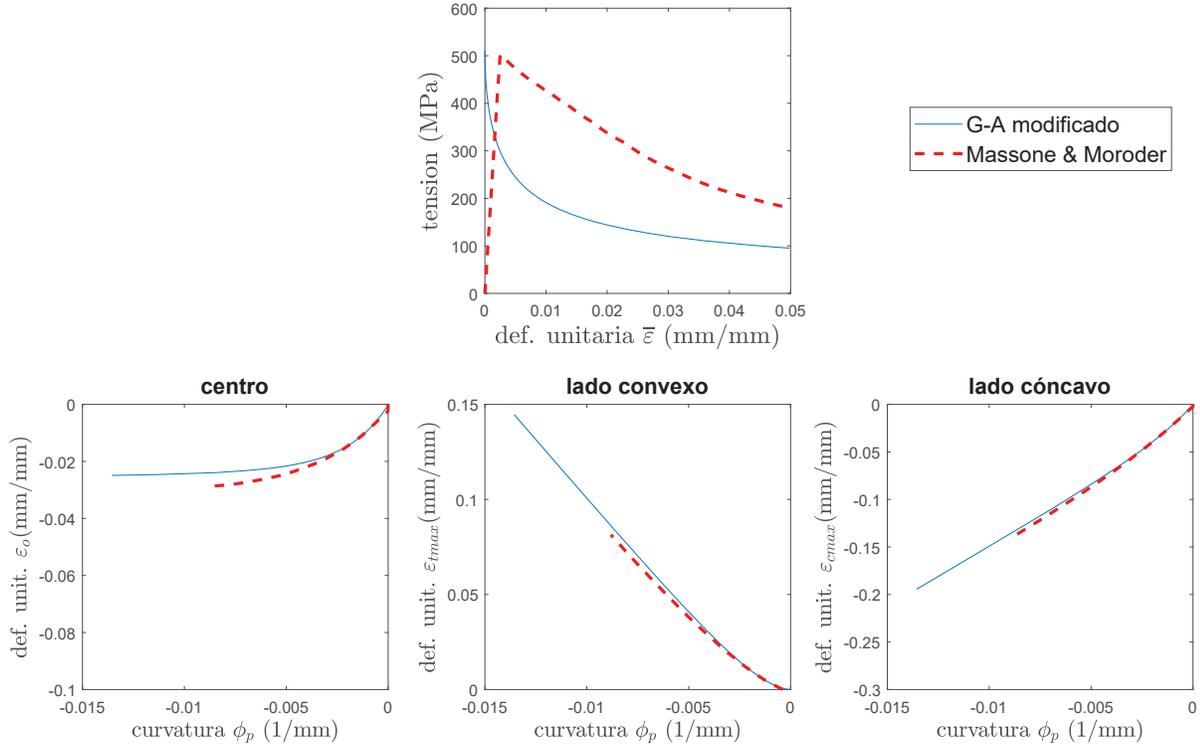


Figura 1.14: Comportamiento monotónico en compresión. Barra tipo 500E, L/d=15 y  $\bar{\varepsilon} = 5\%$

parámetros, calculados mediante el modelo de Massone & Moroder (2009)[23], no sufren variaciones importantes ante diferentes propiedades mecánicas del acero.

### 1.3.2. Compatibilidad

Con base al comportamiento observado en las Figs. 1.13 y 1.14, se destaca que los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  pueden ser calculados mediante el modelo G-A Modificado sin la necesidad de utilizar métodos iterativos. Por lo tanto, incorporando los supuestos del modelo G-A Modificado, con el fin de reducir las variables de la ecuación de compatibilidad del modelo de Massone & Moroder (2009)[23] (ecuación 1.24), se podría evitar la utilización de métodos iterativos para cumplir con las ecuaciones de equilibrio del modelo Massone & Moroder (2009)[23].

Tomando como punto de partida la ecuación de compatibilidad del modelo de Massone & Moroder (2009)[23] (ecuación 1.24), se propone eliminar la influencia de la imperfección inicial ( $\theta_e = 0$ ) y eliminar los términos de tercer orden y mayores de la serie de Taylor de la función coseno, con el fin de reducir la ecuación. Por tanto, la ecuación de compatibilidad queda reducida a la expresión 1.41. Sin olvidar que  $\theta_p = -\phi_p l_p$  y, se asume  $l_p = d$ .

$$\bar{\varepsilon} = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + \varepsilon_o \quad (1.41)$$

Por otro lado, asumiendo, en el modelo G-A Modificado, que la deformación unitaria axial

en el centro de la barra  $\varepsilon_o$  se distribuye de manera uniforme a lo largo de la barra, la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado (originalmente ecuación 1.36) quedaría actualizada en la expresión 1.42. A pesar que las expresiones 1.41 y 1.42 son idénticas, se debe recordar que la ecuación de compatibilidad del modelo de Massone & Moroder (2009)[23] es aplicable con deformaciones unitarias axiales ( $\bar{\varepsilon}$ ) de tracción y compresión. Mientras que en la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado,  $\bar{\varepsilon}_S$  solo adopta deformaciones unitarias axiales de compresión.

$$\bar{\varepsilon}_S = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + \varepsilon_o \quad (1.42)$$

De acuerdo a la implementación del modelo G-A Modificado (ecuación 1.38), es necesario trasladar el origen de coordenadas de las deformaciones unitarias axiales  $\bar{\varepsilon}_S$  para conseguir incorporar la envolvente de compresión en el comportamiento global tensión - deformación ( $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ ) de la barra. Por lo tanto, para implementar un modelo no iterativo (estimando los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{max}$  bajos los supuestos del modelo G-A Modificado) a partir del modelo iterativo de Massone & Moroder (2009)[23], es necesario convertir las coordenadas de deformaciones unitarias axiales  $\bar{\varepsilon}$  a las coordenadas de  $\bar{\varepsilon}_S$  (ecuación 1.38). Sin embargo, se tiene el inconveniente de calcular la deformación unitaria correspondiente al punto de tensión cero (Figura 1.11), lo que involucraría un procedimiento iterativo.

Revisando la respuesta mediante el modelo de Massone & Moroder (2009)[23] en la Figura 1.15, se observa un corrimiento (denominado en adelante  $\varepsilon_{corr}$ ) desde el punto de deformación unitaria axial máxima promedio en tracción ( $\varepsilon_{max}$ ) hasta el punto de deformación unitaria axial promedio donde se asume que inicio el pandeo (es decir, que la curvatura deja de ser cero). Así, se asume trasladar las coordenadas de las deformaciones unitarias axiales  $\bar{\varepsilon}_S$  al punto donde inicia el pandeo, cuya deformación unitaria axial es igual a “ $\varepsilon_{max} - \varepsilon_{corr}$ ” (ecuación 1.43).

$$\bar{\varepsilon}_S = \bar{\varepsilon} - (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{corr}) \quad (1.43)$$

### Estimación de $\varepsilon_{corr}$

De acuerdo a la Figura 1.16, se verifica que  $\varepsilon_{corr}$  varía con distintas relaciones de esbeltez.

Considerando las propiedades mecánicas (Tabla 1.1) de los dos tipos de aceros estudiados en el trabajo de Tripathi et al. (2018)[32], se analizan los valores de  $\varepsilon_{corr}$  que se obtienen para distintas relaciones de esbeltez (Fig. 1.17). Se observa que a partir de relaciones de esbeltez  $L/d$  mayores a 10,  $\varepsilon_{corr}$  se mantiene constante, esta tendencia se mantiene con distintas deformaciones unitarias axiales máximas en tracción  $\varepsilon_{max}$ .

En la Figura 1.17 se observa que los valores de  $\varepsilon_{corr}$ , con relaciones de esbeltez  $L/d$  menores a 10, son dispersos entre distintos tipos de acero. Sin embargo, mediante una regresión lineal, se puede estimar un valor aproximado de  $\varepsilon_{corr}$  cuando  $L/d$  es menor que 10 (Fig. 1.18). Además, se asume un valor constante del  $\varepsilon_{corr}$  cuando  $L/d$  es mayor que 10.

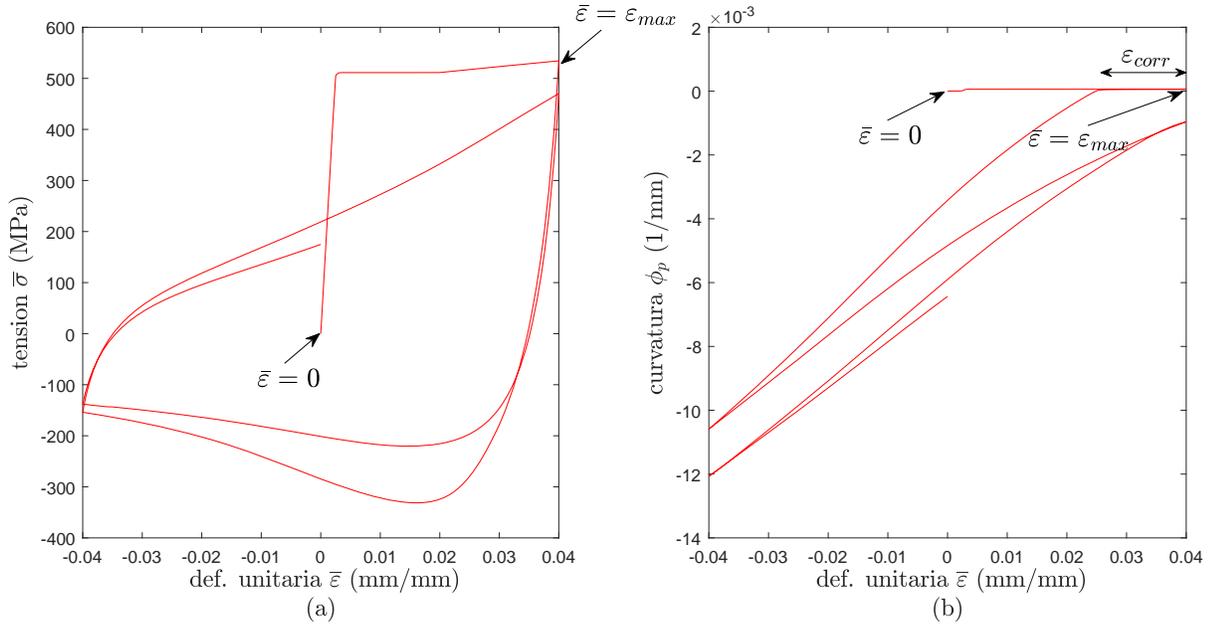


Figura 1.15: Identificación de  $\epsilon_{corr}$  en un caso cíclico. Curvas obtenidas mediante el modelo de Massone & Moroder (2009) [23]

| Tipo de Refuerzo                  | 300E    | 500E    |
|-----------------------------------|---------|---------|
| Tensión de fluencia $f_y$ (MPa)   | 311.45  | 511.3   |
| Deformación fluencia $\epsilon_y$ | 0.0015  | 0.0026  |
| Módulo de Elasticidad $E_s$ (MPa) | 206,946 | 203,662 |
| Tensión última $f_u$ (MPa)        | 427.5   | 611.2   |
| Deformación última $\epsilon_u$   | 0.269   | 0.142   |

Tabla 1.1: Propiedades mecánicas de barras de acero de refuerzo tipo 300E y 500E (Tripathi et al., 2018)[32]

### Relación entre $\phi_p$ y $\epsilon_{cmax}$

A partir del modelo de G-A Modificado se pueden calcular de forma sencilla la curvatura ( $\phi_p$ ) y la deformación unitaria en el extremo más comprimido ( $\epsilon_{cmax}$ ). Por consiguiente, se propone expresar la ecuación de compatibilidad (ecuación 1.42) en función de los parámetros  $\phi_p$  y  $\epsilon_{cmax}$ . De tal manera, reemplazando la ecuación 1.39 en 1.42, se tiene:

$$\bar{\epsilon}_S = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + \epsilon_{cmax} - \phi_p \frac{d}{2} \quad (1.44)$$

Despejando  $\theta_p$  ( $\theta_p = -\phi_p d$ ) en la ecuación 1.42 y reemplazando este parámetro en la ecuación 1.34, se obtiene el ajuste para el desplazamiento transversal  $\omega$  (ecuación 1.45).

$$\omega = \left(\frac{(\bar{\epsilon} - \epsilon_o)L(L - 2l_p)}{2}\right)^{1/2} \quad (1.45)$$

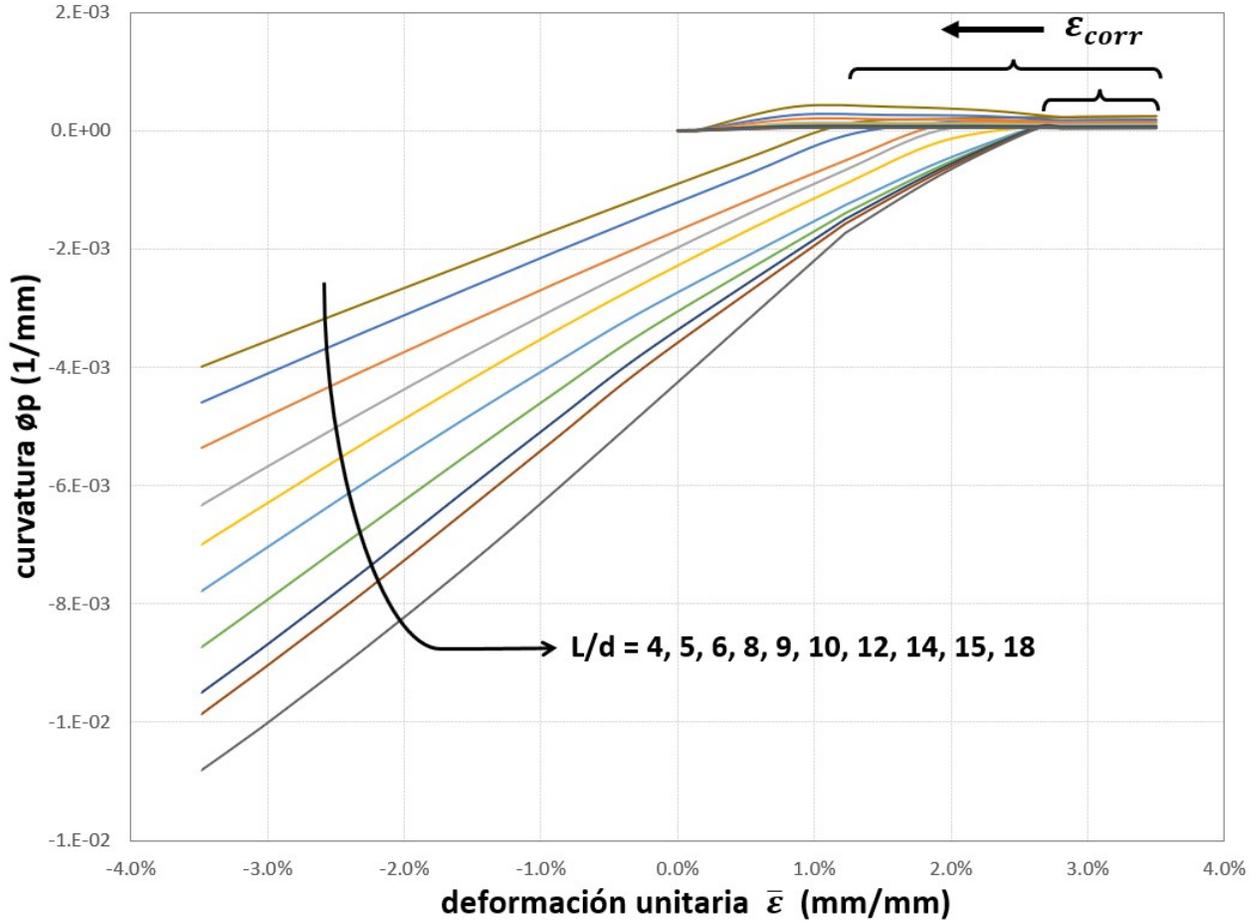


Figura 1.16: Identificación de  $\varepsilon_{corr}$  con distintas relaciones de esbeltez  $L/d$ . Curvas obtenidas mediante el modelo de Massone & Moroder (2009) [23]

Reemplazando  $\omega$  en la ecuación de equilibrio del modelo G-A (ecuación 1.25), se puede deducir una expresión que relacione (en una función 1 a 1) un valor de curvatura  $\phi_p$  para cada valor que adopte el ángulo  $\theta$  (ángulo que determina la posición del eje neutro en la sección transversal de la rótula plástica, según la Fig. 1.9). Además, cabe notar que, al reemplazar las expresiones que definen el momento plástico " $M_p$ " (ecuación 1.26) y la carga axial " $p$ " (ecuación 1.27) en la ecuación de equilibrio (ecuación 1.25), se elimina el término  $f_y$  (tensión de fluencia de acero). Por lo tanto, la estimación de la curvatura ( $\phi_p$ ) no dependería de las propiedades mecánicas del acero.

$$\phi_p = \frac{-8 \sin(\theta)^3}{(3\pi + 3\sin(2\theta) - 6\theta)(L - 2d)} \quad (1.46)$$

A su vez, reemplazando las ecuaciones 1.29 y 1.37 en la ecuación 1.39, es posible expresar  $\varepsilon_{cmax}$  en función de  $\theta$ . Así,  $\varepsilon_{cmax}$  tampoco estaría en función de las propiedades mecánicas del acero.

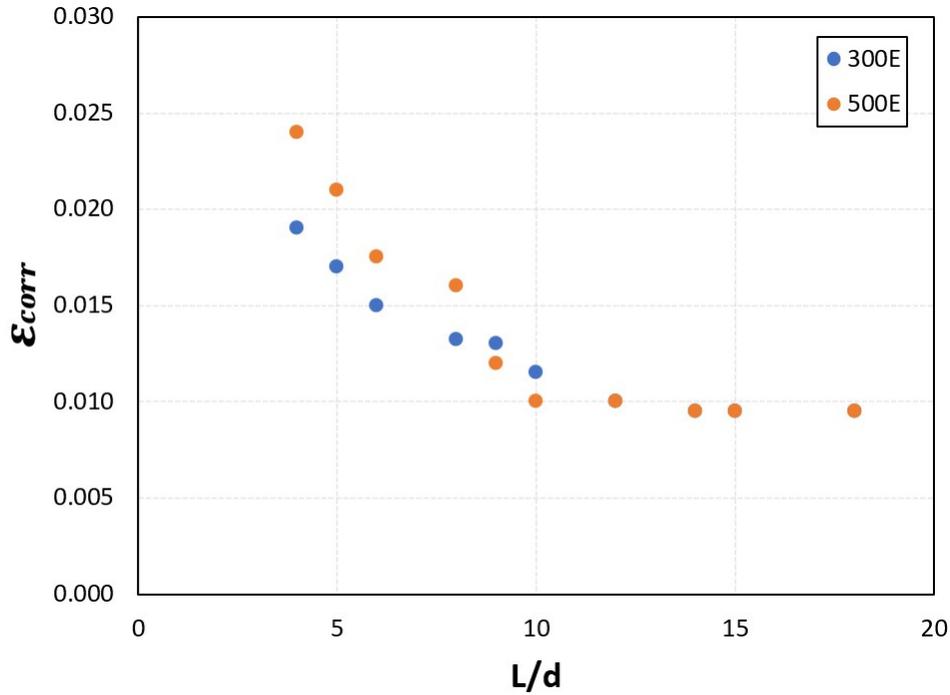


Figura 1.17: Valores de  $\varepsilon_{corr}$  para distintas relaciones de esbeltez  $L/d$  y para aceros tipo 300E y 500E. Valores obtenidos mediante el modelo de Massone & Moroder (2009)

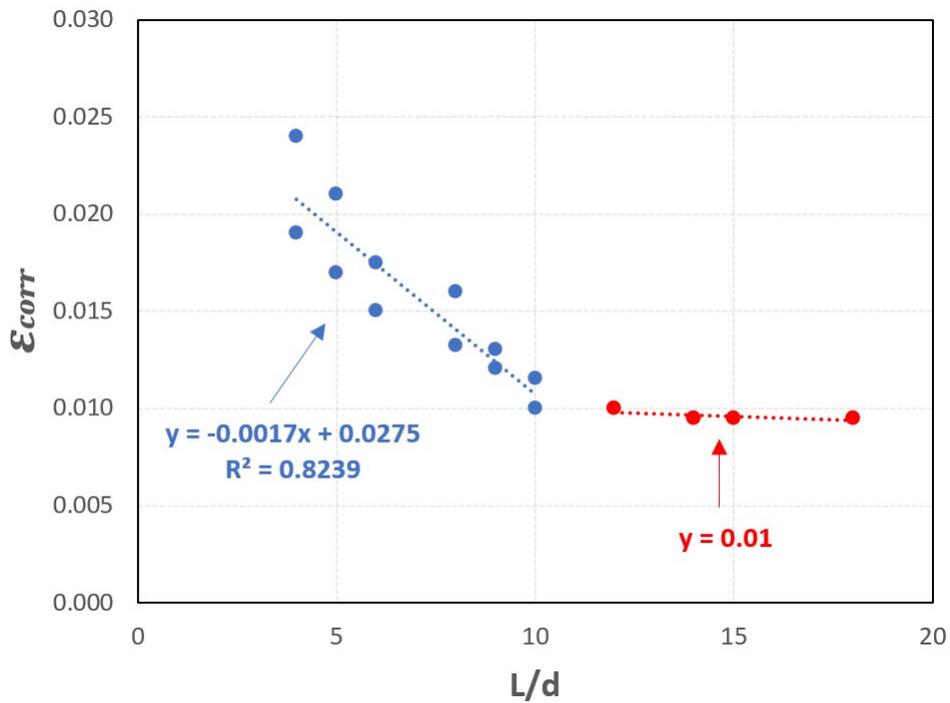


Figura 1.18: Estimación de  $\varepsilon_{corr}$

$$\varepsilon_{cmax} = \phi_p \frac{d}{2} (\cos(\theta) + 1) \quad (1.47)$$

En resumen, se tiene:  $\phi_p = \phi_p(\theta, L/d)$  y  $\varepsilon_{cmax} = \varepsilon_{cmax}(\phi_p, \theta)$ .

En la Fig. 1.19 se grafican los valores obtenidos de  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  para diferentes relaciones de esbeltez, con el fin de buscar una relación entre estos (usando las ecuaciones 1.46 y 1.47). Se toman en cuenta valores de  $\theta$  equivalentes a deformaciones unitarias promedio  $\bar{\varepsilon}_S$  de hasta el 20% (en compresión). A partir de las curvas observadas en la Fig. 1.19, se puede asumir que la relación entre  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  tiene una forma cuadrática (ecuación 1.48). Cabe resaltar que, tomando valores muy grandes de  $\bar{\varepsilon}_S$  se perderá precisión en la calibración entre  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  y, considerando valores muy pequeños para  $\bar{\varepsilon}_S$  la calibración entregará raíces negativas ( $\sqrt{-1}$ ) cuando se reemplace la relación  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  (ecuación 1.48) en la ecuación de compatibilidad expresada en 1.44.

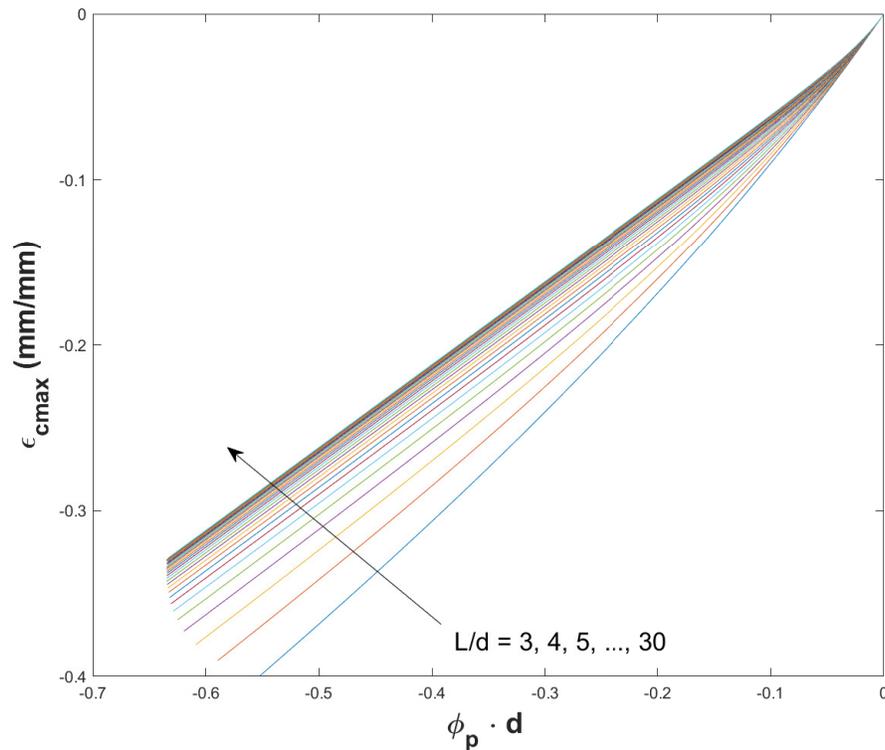


Figura 1.19: Curvas  $\phi_p d$  vs  $\varepsilon_{cmax}$  para distintos valores de  $L/d$  y  $\bar{\varepsilon}_S = 0 - 20\%$

$$\varepsilon_{cmax} = C0 + C1(\phi_p d) + C2(\phi_p d)^2 \quad (1.48)$$

Los coeficientes  $C0$ ,  $C1$  y  $C2$  se calculan mediante una regresión lineal de los datos que conforman las curvas obtenidas en la Figura 1.19. En la Tabla 1.2 se muestran los coeficientes obtenidos con relaciones de esbeltez en un rango de 3 a 30.

| <b>L/d</b> | <b>C0</b> | <b>C1</b> | <b>C2</b> | <b>R<sup>2</sup></b> |
|------------|-----------|-----------|-----------|----------------------|
| <b>3</b>   | -0.000541 | 0.9540    | 0.2735    | 1                    |
| <b>4</b>   | -0.001238 | 0.9091    | 0.3553    | 0.9999               |
| <b>5</b>   | -0.001957 | 0.8635    | 0.3705    | 0.9997               |
| <b>6</b>   | -0.002501 | 0.8239    | 0.3624    | 0.9994               |
| <b>7</b>   | -0.002862 | 0.7911    | 0.3473    | 0.9990               |
| <b>8</b>   | -0.003083 | 0.7644    | 0.3310    | 0.9987               |
| <b>9</b>   | -0.003213 | 0.7422    | 0.3147    | 0.9985               |
| <b>10</b>  | -0.003278 | 0.7236    | 0.2996    | 0.9983               |
| <b>11</b>  | -0.003299 | 0.7079    | 0.2859    | 0.9981               |
| <b>12</b>  | -0.003292 | 0.6944    | 0.2734    | 0.9980               |
| <b>13</b>  | -0.003267 | 0.6826    | 0.2619    | 0.9979               |
| <b>14</b>  | -0.003231 | 0.6722    | 0.2511    | 0.9978               |
| <b>15</b>  | -0.003186 | 0.6631    | 0.2413    | 0.9977               |
| <b>16</b>  | -0.003135 | 0.6550    | 0.2324    | 0.9977               |
| <b>17</b>  | -0.003080 | 0.6478    | 0.2244    | 0.9976               |
| <b>18</b>  | -0.003022 | 0.6413    | 0.2170    | 0.9976               |
| <b>19</b>  | -0.002966 | 0.6353    | 0.2098    | 0.9976               |
| <b>20</b>  | -0.002910 | 0.6299    | 0.2032    | 0.9976               |
| <b>21</b>  | -0.002855 | 0.6249    | 0.1970    | 0.9976               |
| <b>22</b>  | -0.002798 | 0.6204    | 0.1915    | 0.9976               |
| <b>23</b>  | -0.002743 | 0.6162    | 0.1864    | 0.9976               |
| <b>24</b>  | -0.002691 | 0.6123    | 0.1813    | 0.9976               |
| <b>25</b>  | -0.002641 | 0.6087    | 0.1764    | 0.9976               |
| <b>26</b>  | -0.002589 | 0.6054    | 0.1723    | 0.9976               |
| <b>27</b>  | -0.002541 | 0.6022    | 0.1681    | 0.9976               |
| <b>28</b>  | -0.002495 | 0.5992    | 0.1638    | 0.9976               |
| <b>29</b>  | -0.002450 | 0.5964    | 0.1600    | 0.9977               |
| <b>30</b>  | -0.002403 | 0.5940    | 0.1569    | 0.9977               |

Tabla 1.2: Coeficientes  $C0$ ,  $C1$  y  $C2$  para distintos  $L/d$  y  $\bar{\varepsilon}_S = 0 - 20\%$

Además, luego de graficar los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  versus la relación de esbeltez  $L/d$  en las Figuras 1.20, 1.21 y 1.22, se puede observar una clara dependencia y un buen ajuste de las curvas. Por lo tanto, mediante regresiones lineales, se establecen expresiones analíticas que relacionen  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  con  $L/d$  (ecuaciones 1.49 a la 1.52). Cabe recordar que, los coeficientes son calculados para un nivel de deformación unitaria axial  $\bar{\varepsilon}_S = 20\%$ .

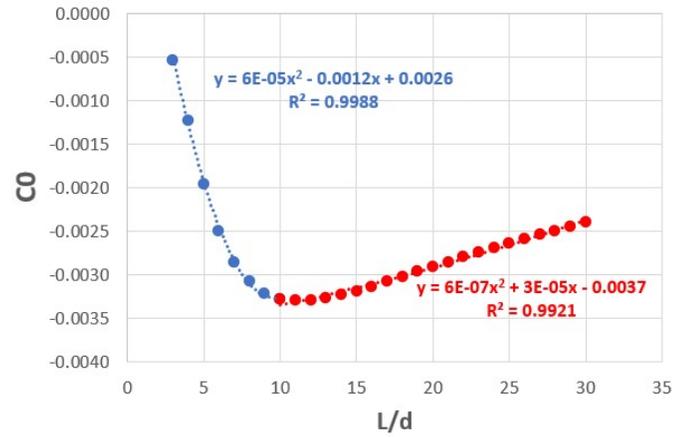


Figura 1.20: Coeficiente  $C_0$  vs  $L/d$ .

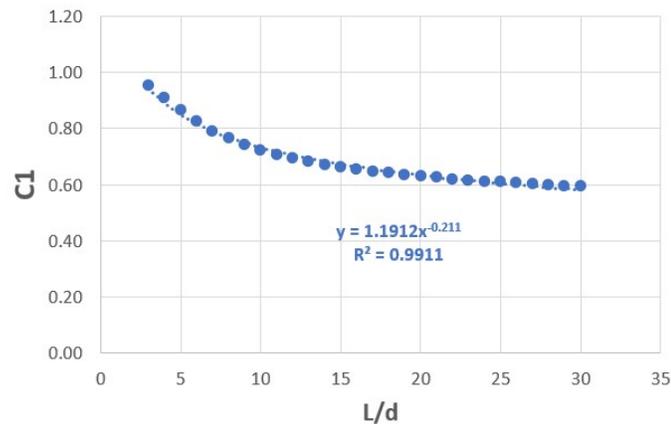


Figura 1.21: Coeficiente  $C_1$  vs  $L/d$ .

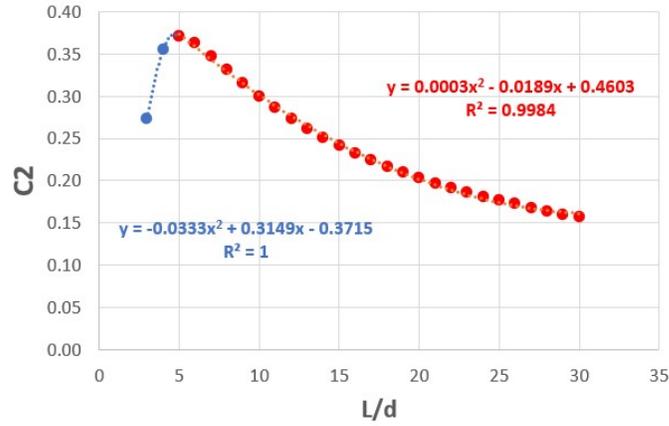


Figura 1.22: Coeficiente  $C2$  vs  $L/d$ .

- Coeficiente  $C0$ :

- Quando  $L/d < 10$

$$C0 = 0,00006(L/d)^2 - 0,0012(L/d) + 0,0026 \quad (1.49)$$

- Quando  $L/d \geq 10$

$$C0 = 0,0000006(L/d)^2 + 0,00003(L/d) - 0,0037 \quad (1.50)$$

- Coeficiente  $C1$ :

$$C1 = 1,1912(L/d)^{-0,211} \quad (1.51)$$

- Coeficiente  $C2$ : A pesar que en la Figura 1.22 se distinguen dos tramos de  $L/d$ , se observan mejores resultados aplicando solo la regla del segundo tramo para los casos en que se pandea la barra de refuerzo longitudinal.

$$C2 = 0,0003(L/d)^2 - 0,0189(L/d) + 0,4603 \quad (1.52)$$

## Solución de la ecuación de compatibilidad

Habiendo conseguido calibrar el parámetro  $\varepsilon_{max}$  en función de  $\phi_p$ , es posible reemplazar la expresión 1.48 en la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado (ecuación 1.44).

$$\bar{\varepsilon}_S = \left(1 - \frac{2d}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + C0 + C1(\phi_p d) + C2(\phi_p d)^2 - \phi_p \frac{d}{2} \quad (1.53)$$

Se observa que la ecuación 1.53 se convierte en una expresión cuadrática, donde las variables son los parámetros  $\bar{\varepsilon}_S$  y  $\phi_p$ . Sin embargo, para utilizar la calibración del modelo G-A Modificado (comportamiento solo en compresión) en el modelo de Massone & Moroder (comportamiento cíclico), es necesario referenciar las coordenadas de las deformaciones unitarias axiales  $\bar{\varepsilon}_S$  al sistema de coordenadas  $\bar{\varepsilon}$  mediante la ecuación 1.43. De tal modo, la ecuación de compatibilidad se expande a la expresión cuadrática (con la forma  $a\phi_p^2 + b\phi_p + c = 0$ ) mostrada en la ecuación 1.54.

$$\left(1 - \frac{2d}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + C0 + C1(\phi_p d) + C2(\phi_p d)^2 - \phi_p \frac{d}{2} + (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{corr}) - \bar{\varepsilon} = 0 \quad (1.54)$$

Se consideran que los parámetros  $L/d$ ,  $\varepsilon_{max}$  y  $\varepsilon_{corr}$  son constantes en un mismo ciclo histerético. Por lo tanto, la solución de la ecuación cuadrática queda expresada en una función no lineal (ecuación 1.55). Se observa que solo el coeficiente “c” (de la forma cuadrática  $a\phi_p^2 + b\phi_p + c = 0$ ) incluye a la deformación unitaria axial  $\bar{\varepsilon}$  como variable.

$$\phi_p = \phi_p(\bar{\varepsilon}) \quad (1.55)$$

Donde:

$$\phi_p(\bar{\varepsilon}) = \frac{-b - \sqrt{\text{discr}(\bar{\varepsilon})}}{2a} \quad (1.56)$$

$$\text{discr}(\bar{\varepsilon}) = b^2 - 4 a c(\bar{\varepsilon}) \quad (1.57)$$

### 1.3.3. Equilibrio

El modelo propuesto evita la necesidad de resolver las ecuaciones de equilibrio del modelo Massone & Moroder (2009)[23]: ecuaciones 1.16 y 1.17.

### 1.3.4. Implementación del modelo

Mediante la solución de la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado se puede estimar la curvatura  $\phi_p$  (ecuación 1.56) para cada valor de deformación unitaria axial  $\bar{\varepsilon}$ . Por

lo tanto, si se reemplaza el valor calculado de  $\phi_p$  en la ecuación de compatibilidad del modelo de Massone & Moroder (2009)[23] (ecuación 1.24), se puede calcular  $\varepsilon_o$  (def. unitaria axial en el centro de barra). Además, considerando la hipótesis de Bernoulli, se pueden calcular las deformaciones en cada fibra discretizada de la barra (ecuación 1.13). Finalmente, siguiendo las ecuaciones 1.14, 1.15 y 1.23 del modelo de Massone & Moroder (2009)[23], se calculan las tensiones en cada fibra ( $\sigma_i$ ), la carga axial ( $p$ ) y la tensión promedio en la barra ( $\bar{\sigma}$ ), respectivamente.

Sin embargo, es necesario tomar en cuenta determinadas consideraciones para cada caso de análisis en particular.

### Caso monotónico en compresión

Según el análisis monotónico en compresión, en el modelo G-A Modificado se asume que las rótulas se encuentran plastificadas cuando inicia la aplicación de la carga axial. Es decir, no se considera el comportamiento elástico de la barra. Por tanto, en el Modelo Propuesto se considera que  $\phi_p = 0$  cuando las deformaciones unitarias axiales  $\bar{\varepsilon}$  sean menores a la deformación unitaria de fluencia, tal como se muestra en la Figura 1.23(b). Con la aplicación de esta regla, se restringe el pandeo de la barra en el rango elástico. Por lo tanto, en este caso se asume que el corrimiento  $\varepsilon_{corr} = 0$ .

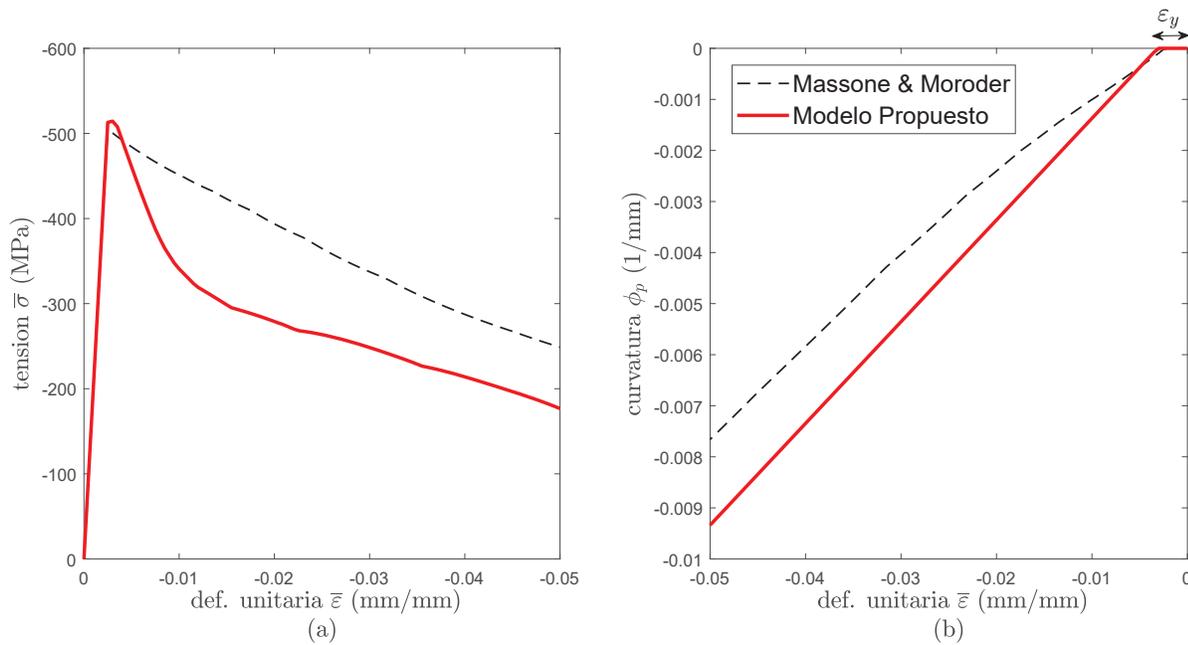


Figura 1.23: Modelo Propuesto versus Modelo de Massone & Moroder (2009). (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

Por otro lado, en la Figura 1.23(a) y (b), se observa que el Modelo Propuesto presenta una mayor degradación en la respuesta. El principal factor geométrico que influye en la degradación de la respuesta tensión - deformación ( $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ ) de la barra, es la relación de esbeltez (A mayor  $L/d$ , mayor degradación y viceversa). Por consiguiente, para conseguir una mejor aproximación del Modelo Propuesto al modelo de Massone & Moroder (2009)[23],

|                            |             | Massone<br>& Moroder | Modelo propuesto<br>$m = 4$ |           | Modelo propuesto<br>$m = 3.5$ |           | Modelo propuesto<br>$m = 3$ |           |
|----------------------------|-------------|----------------------|-----------------------------|-----------|-------------------------------|-----------|-----------------------------|-----------|
| L/d real                   | $f_y$ (MPa) | $\Delta W$           | $\Delta W$                  | Error (%) | $\Delta W$                    | Error (%) | $\Delta W$                  | Error (%) |
| 6                          | 300         | 15.38                | 16.86                       | 9.6 %     | 16.62                         | 8 %       | 16.27                       | 5.8 %     |
| 7                          | 300         | 14.79                | 16.27                       | 10.0 %    | 15.80                         | 7 %       | 15.41                       | 4.2 %     |
| 8                          | 300         | 14.17                | 15.41                       | 8.8 %     | 14.93                         | 5 %       | 14.48                       | 2.2 %     |
| 9                          | 300         | 13.53                | 14.48                       | 7.0 %     | 13.98                         | 3 %       | 13.50                       | -0.2 %    |
| 10                         | 300         | 12.87                | 13.50                       | 4.9 %     | 13.06                         | 1 %       | 12.62                       | -2.0 %    |
| 11                         | 300         | 12.23                | 12.62                       | 3.2 %     | 12.17                         | 0 %       | 11.75                       | -3.9 %    |
| 12                         | 300         | 11.59                | 11.75                       | 1.4 %     | 11.35                         | -2 %      | 10.94                       | -5.6 %    |
| 13                         | 300         | 11.00                | 10.94                       | -0.5 %    | 10.54                         | -4 %      | 10.12                       | -8.0 %    |
| 14                         | 300         | 10.44                | 10.12                       | -3.0 %    | 9.71                          | -7 %      | 9.31                        | -10.8 %   |
| 15                         | 300         | 9.91                 | 9.31                        | -6.1 %    | 8.91                          | -10 %     | 8.53                        | -13.9 %   |
| 6                          | 500         | 23.99                | 26.56                       | 10.7 %    | 26.19                         | 9 %       | 25.50                       | 6.3 %     |
| 7                          | 500         | 22.99                | 25.50                       | 10.9 %    | 24.87                         | 8 %       | 24.09                       | 4.8 %     |
| 8                          | 500         | 21.96                | 24.09                       | 9.7 %     | 23.46                         | 7 %       | 22.85                       | 4.1 %     |
| 9                          | 500         | 20.92                | 22.85                       | 9.2 %     | 22.13                         | 6 %       | 21.54                       | 3.0 %     |
| 10                         | 500         | 19.89                | 21.54                       | 8.3 %     | 20.95                         | 5 %       | 20.24                       | 1.8 %     |
| 11                         | 500         | 18.87                | 20.24                       | 7.3 %     | 19.55                         | 4 %       | 18.90                       | 0.2 %     |
| 12                         | 500         | 17.88                | 18.90                       | 5.7 %     | 18.26                         | 2 %       | 17.61                       | -1.5 %    |
| 13                         | 500         | 16.93                | 17.61                       | 4.0 %     | 16.97                         | 0 %       | 16.31                       | -3.7 %    |
| 14                         | 500         | 16.05                | 16.31                       | 1.6 %     | 15.65                         | -2 %      | 15.01                       | -6.5 %    |
| 15                         | 500         | 15.22                | 15.01                       | -1.4 %    | 14.38                         | -6 %      | 13.76                       | -9.6 %    |
| <b>Promedio</b>            |             |                      |                             | 5.1 %     |                               | 1.7 %     |                             | -1.7 %    |
| <b>Desviación estándar</b> |             |                      |                             | 5.0 %     |                               | 5.5 %     |                             | 5.9 %     |

Tabla 1.3: Comparación de la energía disipada entre el modelo de Massone & Moroder (2009)[23] y el Modelo Propuesto afectado por el factor de ajuste “ $m$ ”

se puede reducir la relación de esbeltez afectándola por un factor de ajuste “ $m$ ”, como se propone en la expresión 1.58.

$$L/d_{calibrado} = L/d_{real} - m \quad (1.58)$$

Un método sencillo para estimar un valor adecuado de “ $m$ ” consiste en comparar la energía disipada  $\Delta W$  (área bajo la curva de la respuesta  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  de la barra) con distintos factores “ $m$ ”. En la tabla 1.3 se muestra la comparación de  $\Delta W$  con distintos tipos de acero (300E y 500E), relaciones de esbeltez en el rango de 6 a 15 y una deformación unitaria axial máxima en compresión  $\bar{\varepsilon} = 5\%$ .

Según los valores promedio y al desviación estándar del  $Error(\%)$  en la tabla 1.3, se verifica que valores de “ $m$ ” entre 3 y 4 entregan una buena aproximación de la energía liberada en el Modelo Propuesto con respecto al modelo de Massone & Moroder (2009)[23]. Por lo tanto, se considera razonable adoptar como factor de ajuste “ $m = 3,5$ ”. En la Figura 1.24(b) se observa que, con el  $L/d_{calibrado}$ , la respuesta de las curvaturas  $\phi_p$  versus la deformación unitaria  $\bar{\varepsilon}$  es bastante aproximado al modelo de Massone & Moroder (2009)[23]; es preciso señalar que, el comportamiento tensión - deformación tiene una gran sensibilidad a los variación de los valores de curvatura  $\phi_p$ , tal como se observa en la Figura 1.24(a).

También se debe indicar que, el  $L/d_{calibrado}$  también afecta a la estimación de los coeficientes **C0**, **C1** y **C2** en la relación entre  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$ .

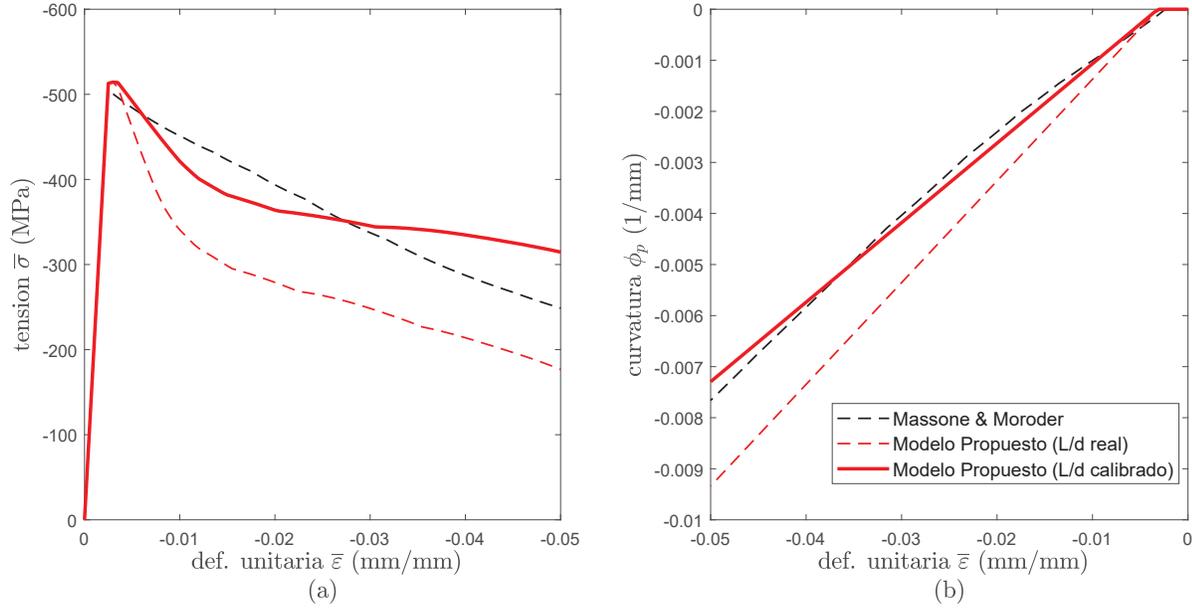


Figura 1.24: Modelo Propuesto (usando  $L/d_{real}$  y  $L/d_{calibrado}$ ) versus Modelo de Massone & Moroder (2009) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

### Caso cíclico con inicio en compresión

En los casos histeréticos se absorben las consideraciones del caso monotónico en compresión, tales como: asumir que se asume que  $\phi_p = 0$  en el rango elástico y la utilización del  $L/d_{calibrado}$  en lugar del  $L/d_{real}$ . Asimismo, en la implementación del Modelo Propuesto en el caso cíclico, se identifican restricciones a tomar en cuenta en dos segmentos de análisis: PRIMER CICLO y RESTO DE CICLOS.

#### PRIMER CICLO:

1. FASE DE CARGA: Mientras que  $\varepsilon_y \leq \bar{\varepsilon} \leq 0$ , se asume que  $\phi_p = 0$  y  $\varepsilon_{corr} = 0$ .
2. FASE DE CARGA: tramo  $\varepsilon_{min} \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y$ , donde  $\varepsilon_{min}$ : máxima deformación unitaria axial de compresión. Se asume  $\varepsilon_{corr} = 0$ . Se adopta la solución de la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado  $\phi_p = \phi_p(\bar{\varepsilon})$ . Cabe resaltar que esta solución (ecuación 1.55) es no lineal.
3. FASE DE RECARGA: tramo  $\varepsilon_{min} \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_{max}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr} = 0$ . En este tramo se presenta el primer inconveniente al aplicar la ecuación la solución no lineal de la ecuación 1.55, dado que  $\phi_p$  comienza a tomar valores positivos, como se muestra en la Figura 1.25(b).

Este comportamiento provoca una degradación en la la respuesta tensión - deformación,  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ , de la envolvente en tracción. Por tanto, se propone corregir este comportamiento acotando el valor máximo que se puede asignar a  $\phi_p$ . Tomando como referencia el modelo constitutivo del acero de Menegotto & Pinto (1973) [24], se plantea el trazado de asíntotas que restrinjan los valores que adopte  $\phi_p$  (Figura 1.26(b)).

Sin embargo, la ecuación que define la asíntota con pendiente  $m_\phi$  es una ecuación

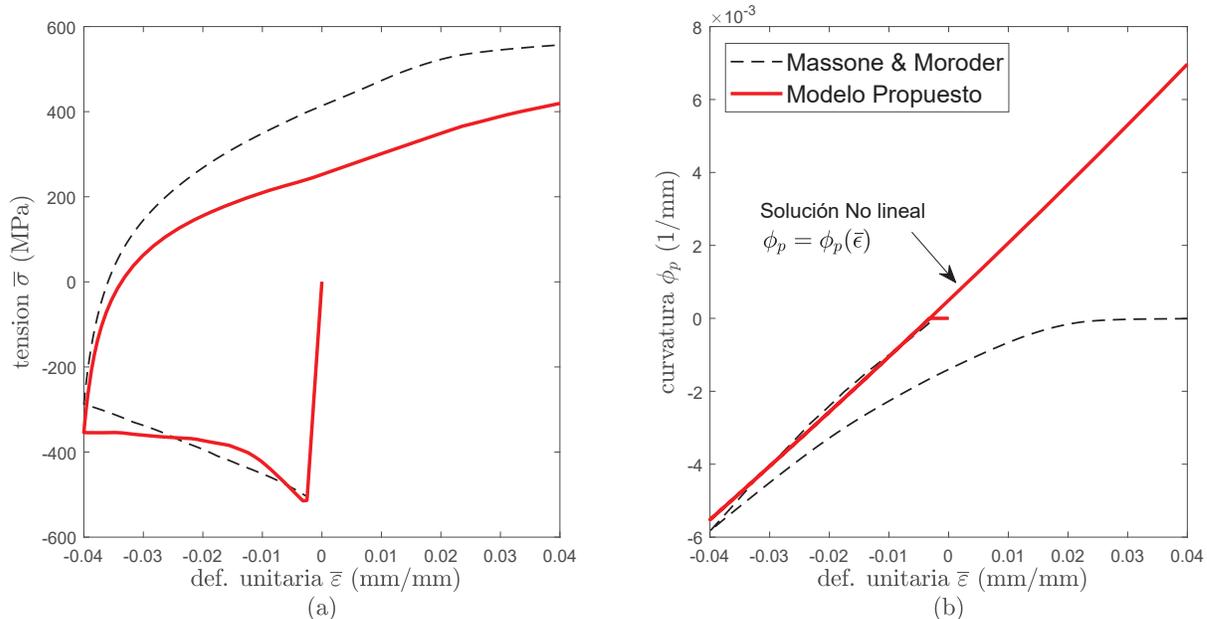


Figura 1.25: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución no lineal de  $\phi_p$  en la FASE DE RECARGA. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

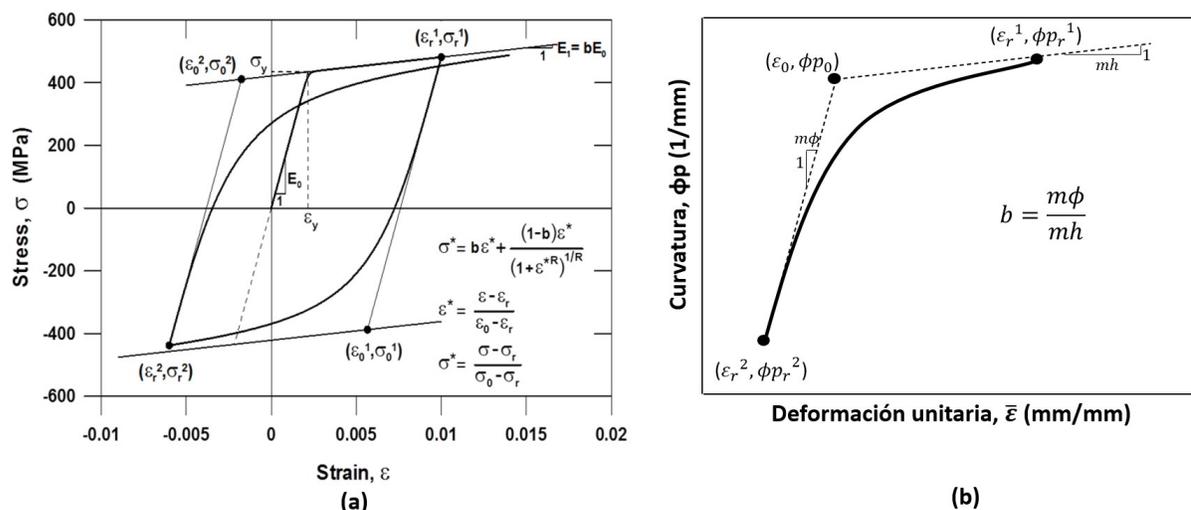


Figura 1.26: Solución análoga al modelo constitutivo del acero de Menegotto & Pinto (1973) [24], para acotar los valores de  $\phi_p$

no lineal (ecuación 1.56). Considerando un punto de referencia ( $\bar{\epsilon}_{ref}$ ) se plantea una aproximación lineal (ecuación 2.25) de la ecuación 1.56. Es importante definir el valor que adoptará el punto de referencia ( $\bar{\epsilon}_{ref}$ ), puesto que desde ese punto se proyectará la recta tangente a la función no lineal (ecuación 1.56). Por lo tanto, asumiendo que  $\bar{\epsilon}_{ref}=0$ , se proyecta la recta tangente de la función no lineal desde el origen de coordenadas.

$$\phi_p(\bar{\epsilon}) = \frac{-b - \sqrt{\text{discr}(\bar{\epsilon}_{ref})}}{2a} + \frac{2L(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{ref})}{\sqrt{\text{discr}(\bar{\epsilon}_{ref})}} \quad (1.59)$$

Por consiguiente, las ecuaciones 1.60 a la 1.62, definen los valores de la curvatura  $\phi_p$  en la FASE DE RECARGA del PRIMER CICLO.

$$\varepsilon^* = \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{r,2}} \quad (1.60)$$

$$\phi^* = \frac{\varepsilon^*}{(1 + \varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad (1.61)$$

$$\phi_p = \phi^* (\phi_{p0} - \phi_{p,r,2}) + \phi_{p,r,2} \quad (1.62)$$

Donde:

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{min} \quad (1.63)$$

$$\phi_{p,r,2} = \phi_{min} \quad (1.64)$$

$$\phi_{p0} = 0 \quad (1.65)$$

Además,  $\phi_{min}$  es el valor de curvatura correspondiente a la deformación máxima axial de compresión  $\varepsilon_{min}$ .  $\varepsilon_0$  es el valor de  $\bar{\varepsilon}$  correspondiente a  $\phi_p = 0$ , en la solución linealizada mostrada en la ecuación 2.25. Considerando el parámetro  $R = 3$ , se evitan discontinuidades bruscas en la respuesta tensión - deformación ( $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$ ). En la Figura 1.27 se muestra el comportamiento con la implementación propuesta.

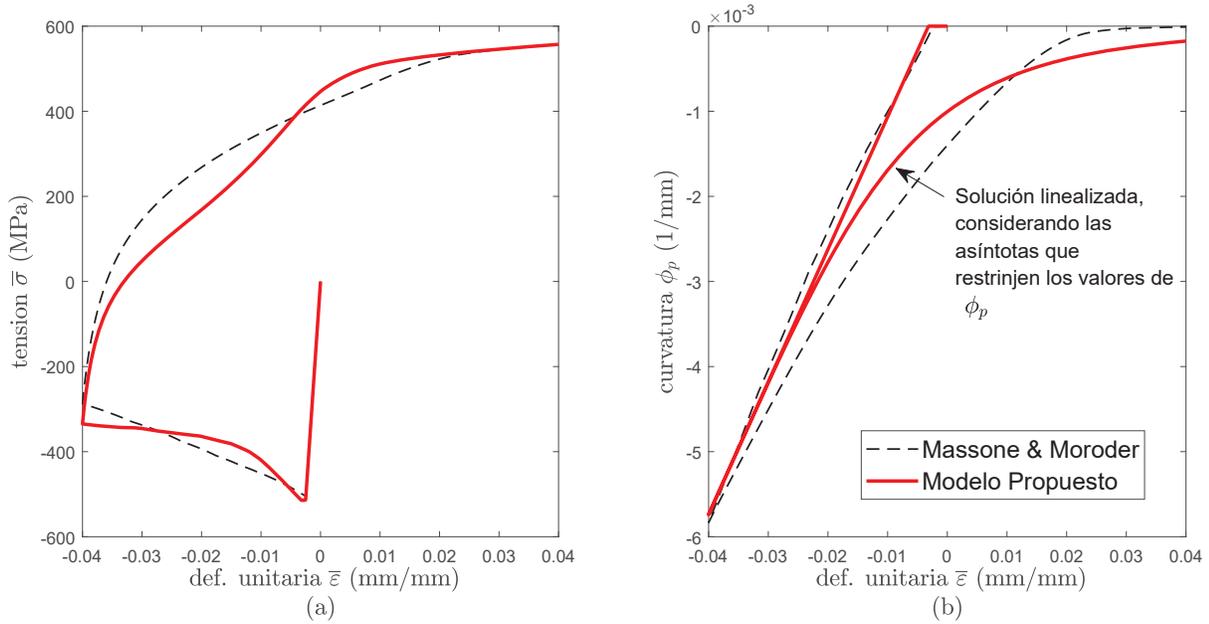


Figura 1.27: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución linealizada de  $\phi_p$  en la FASE DE RECARGA. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

4. FASE DE DESCARGA: tramo  $\varepsilon_{max} \geq \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_{min}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. En este tramo, se plantea restringir los valores de la curvatura mediante la asíntota horizontal (Figura 1.26 (b)), cuya pendiente es  $mh$ . Para evitar que la solución sea indefinida, se evita que  $mh = 0$ . Con un valor bastante pequeño, como  $m = 10^{-10}$  se consiguen evadir las indefiniciones en la solución. Tomando en cuenta estas consideraciones, se definen los valores de la curvatura  $\phi_p$  mediante las ecuaciones 1.66 a la 1.68. La implementación se presenta en la Figura 1.28.

$$\varepsilon^* = \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{r1}} \quad (1.66)$$

$$\phi^* = b \varepsilon^* + \frac{(1 - b) \varepsilon^*}{(1 + \varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad (1.67)$$

$$\phi_p = \phi^* (\phi p_0 - \phi p_{r1}) + \phi p_{r1} \quad (1.68)$$

Donde:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{max} \quad (1.69)$$

$$\phi p_{r1} = \phi_{max} \quad (1.70)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{corr} \quad (1.71)$$

$$\phi p_0 = \phi p_{r1} - mh (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_0) \quad (1.72)$$

RESTO DE CICLOS:

1. FASE DE RECARGA: Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. Luego, se implementa el modelo definiendo la curvatura  $\phi_p$  mediante las ecuaciones 1.60 a la 1.62.
2. FASE DE DESCARGA: Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. Luego, se implementa el modelo definiendo la curvatura  $\phi_p$  mediante las ecuaciones 1.66 a la 1.68. Sin embargo, ya que el análisis está fuera del PRIMER CICLO, es necesario calcular un nuevo valor de  $\varepsilon_0$ . Donde el punto de coordenadas  $(\varepsilon_0, \phi_0)$  corresponde a la intersección de las asíntotas mostradas en la Figura 1.26 (b). Estableciendo  $\varepsilon_0$  a través de la ecuación 1.73.

En la Figura 1.29 se muestra la respuesta con base a las consideraciones descritas para el RESTO DE CICLOS.

$$\varepsilon_0 = \frac{\phi p_{r1} - \phi_{min} - \varepsilon_{r1} mh + \varepsilon_{min} m\phi}{m\phi - mh} \quad (1.73)$$

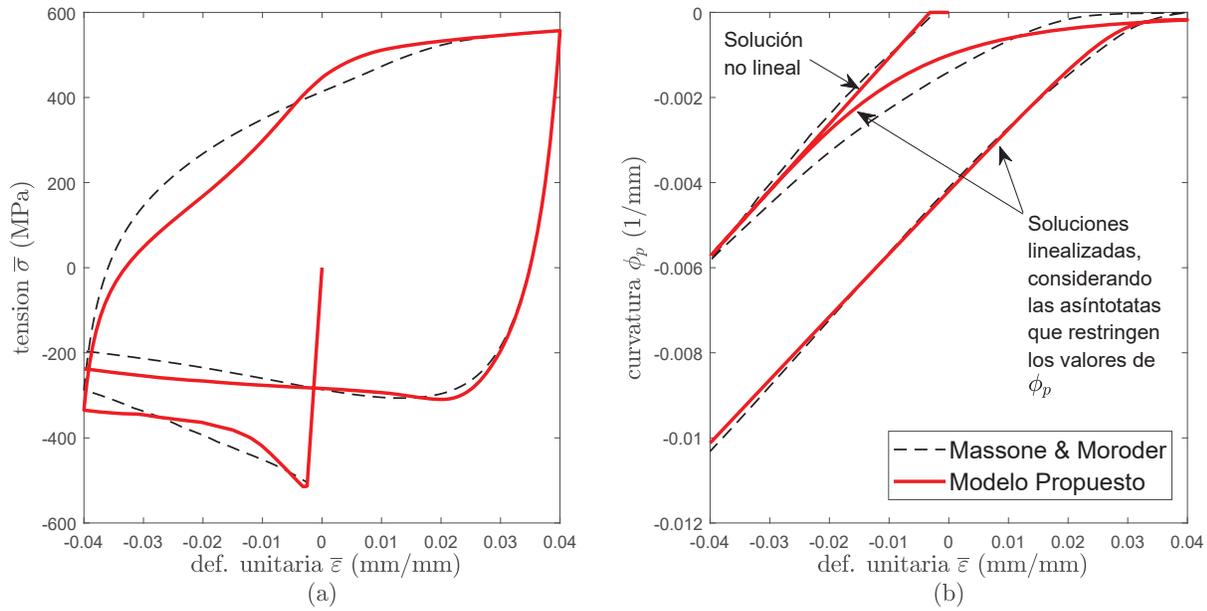


Figura 1.28: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Primer ciclo. Solución linealizada de  $\phi_p$  en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

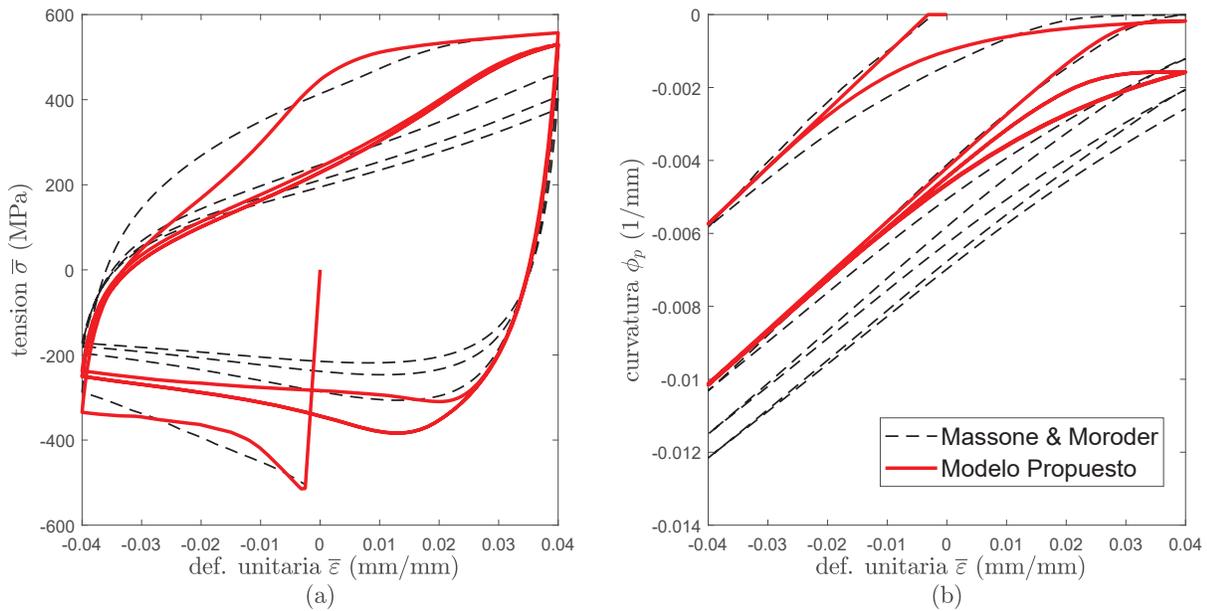


Figura 1.29: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en compresión. Varios ciclos. Solución linealizada de  $\phi_p$  en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

### Caso cíclico con inicio en tracción

En este casos histeréticos se considera la la utilización del  $L/d_{calibrado}$  en lugar del  $L/d_{real}$ . Además, se debe tener en cuenta que, cuando la barra es sometida a fuerzas de tracción al inicio de la carga, esta se alarga y no se produce pandeo. Por tanto, mientras dure el inicio

de la aplicación de la carga, hasta la máxima deformación de tracción  $\varepsilon_{max}$ , se asume que la curvatura  $\phi_p = 0$ .

Para la implementación del Modelo Propuesto, se identifican dos segmentos de análisis: PRIMER CICLO y RESTO DE CICLOS.

PRIMER CICLO:

1. FASE DE CARGA: tramo  $0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_{max}$ , se asume que  $\phi_p = 0$  y  $\varepsilon_{corr} = 0$ .
2. FASE DE DESCARGA: tramo  $\varepsilon_{max} \geq \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_{min}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. La implementación es similar a la FASE DE DESCARGA del PRIMER CICLO del **caso cíclico con inicio en compresión**. Ecuaciones 1.66 a la 1.68.
3. FASE DE RECARGA: tramo  $\varepsilon_{min} \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_{max}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. La implementación es similar a la FASE DE RECARGA del PRIMER CICLO del **caso cíclico con inicio en compresión**. Ecuaciones 1.60 a la 1.62.

RESTO DE CICLOS:

1. FASE DE DESCARGA: tramo  $\varepsilon_{max} \geq \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_{min}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. La implementación es similar a la FASE DE DESCARGA del RESTO DE CICLOS del **caso cíclico con inicio en compresión**. Ecuaciones 1.66 a la 1.68. Considerando calcular  $\varepsilon_0$  mediante la ecuación 1.73.
2. FASE DE RECARGA: tramo  $\varepsilon_{min} \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_{max}$ . Se asume  $\varepsilon_{corr}$  de acuerdo a la estimación mostrada en la Figura 1.18. La implementación es similar a la FASE DE RECARGA del RESTO DE CICLOS del **caso cíclico con inicio en compresión**. Ecuaciones 1.60 a la 1.62.

En la Figura 1.30 se muestra la respuesta con base a las consideraciones descritas para el caso cíclico con inicio en tracción.

### 1.3.5. Verificación del modelo

Con el propósito de verificar la implementación del Modelo Propuesto, se realiza la comparación con datos experimentales disponibles en la literatura. Tripathi et al. (2018)[32] presentan una serie de ensayos, llevados a cabo en barras de acero de refuerzo con diámetro de 12mm del tipo 300E y 500E, comunes en armaduras de hormigón armado en Nueva Zelanda. Las propiedades mecánicas se muestran en la Tabla 1.1. Los ensayos se realizaron considerando relaciones de esbeltez  $L/d$  de 6, 9, 12 y 15, y con amplitudes de deformación ( $\varepsilon_a$ ) constantes.

Donde,  $\varepsilon_a$  en cada ciclo se define como:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{2} \quad (1.74)$$

En las Figuras 1.31 y 1.32 se presentan los resultados del Modelo Propuesto versus datos

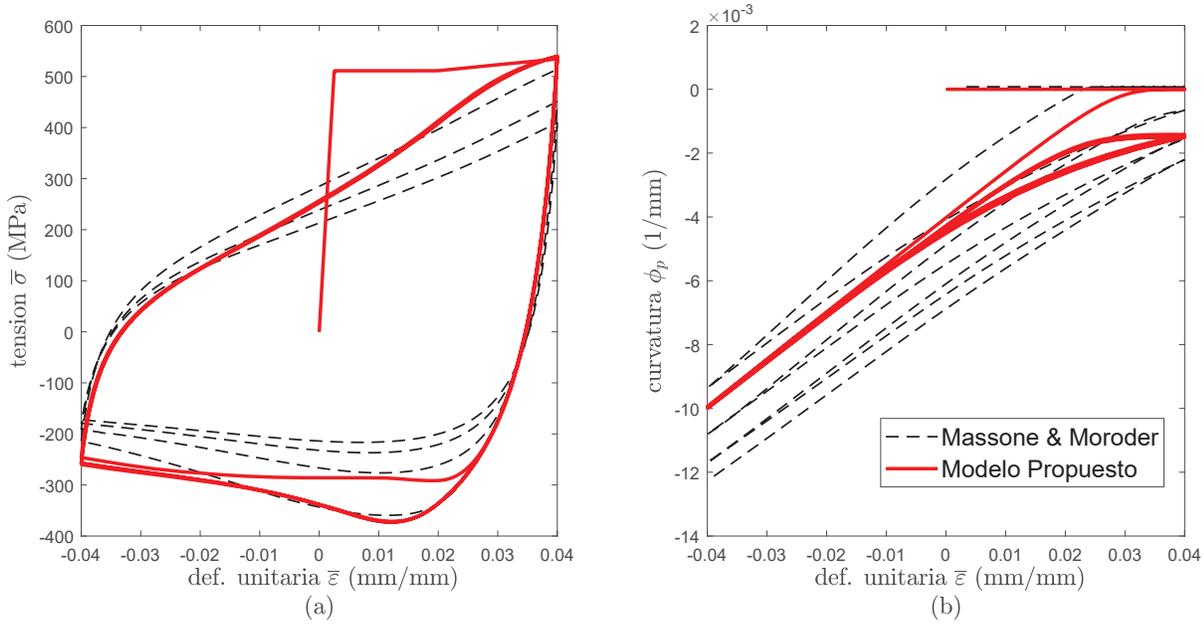


Figura 1.30: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso cíclico con inicio en tracción. Varios ciclos. Solución linealizada de  $\phi_p$  en las FASES DE RECARGA y DESCARGA. Barra Tipo 500E y  $L/d = 12$

experimentales de Tripathi et al. (2018)[32]. El Modelo Propuesto utiliza un  $L/d_{calibrado}$  en lugar del  $L/d_{real}$ . El factor de ajuste utilizado para todos los caso es  $m = 3,5$ . Cabe resaltar que, el  $L/d_{calibrado}$  se aplica en todos los cálculos necesario para obtener la respuesta, tales como: cálculos geométricos, estimación de  $\epsilon_{corr}$  y la obtención de los coeficientes de la ecuación cuadrática que relaciona  $\phi_p$  y  $\epsilon_{max}$ .

En la Figura 1.32, se verifica que el Modelo Propuesto otorga una aceptable precisión, mostrando la degradación de la respuesta tensión - deformación por el pandeo de la barra. Sin embargo, vale considerar la sobrestimación de la tensión máxima de compresión en el punto de máxima deformación unitaria axial de compresión ( $\epsilon_{min}$ ). La sobrestimación es más notoria en las Figuras 1.31 (a) y 1.32 (a), cuando  $L/d = 6$ . Se podría mejorar la precisión de la respuesta ante relaciones de esbeltez pequeñas, asumiendo valores del factor de ajuste “ $m$ ” más pequeños. El Modelo Propuesto tampoco consigue capturar el punto de máxima tensión en compresión que se observa en las Figuras 1.31 (b) (c) (d) y 1.32 (b) (c) (d); puesto que, luego de conseguir la máxima deformación unitaria axial en tracción ( $\epsilon_{max}$ ), la tensión degrada rápidamente hacia el punto de máxima deformación unitaria axial en compresión ( $\epsilon_{min}$ ). Este fenómeno ocurre porque el Modelo Propuesto no considera una descarga elástica después de que la barra consigue su máxima deformación en tracción ( $\epsilon_{max}$ ). En las Figuras 1.31 (b) (c) (d) y 1.32 (b) (c) (d), también se observa que el Modelo Propuesto sobrestima las envolventes en tracción. De acuerdo al comportamiento descrito en la Figura 1.30 (b), en la fase de recarga de cada ciclo, la curvatura alcanza un mismo valor en el punto de deformación unitaria axial máxima en tracción ( $\epsilon_{max}$ ). Se podría mejorar este comportamiento implementando un factor de reducción por fatiga que afecte las tensiones obtenidas en cada ciclo histerético.

En la Figura 1.33 se compara el Modelo Propuesto con resultados experimentales de los

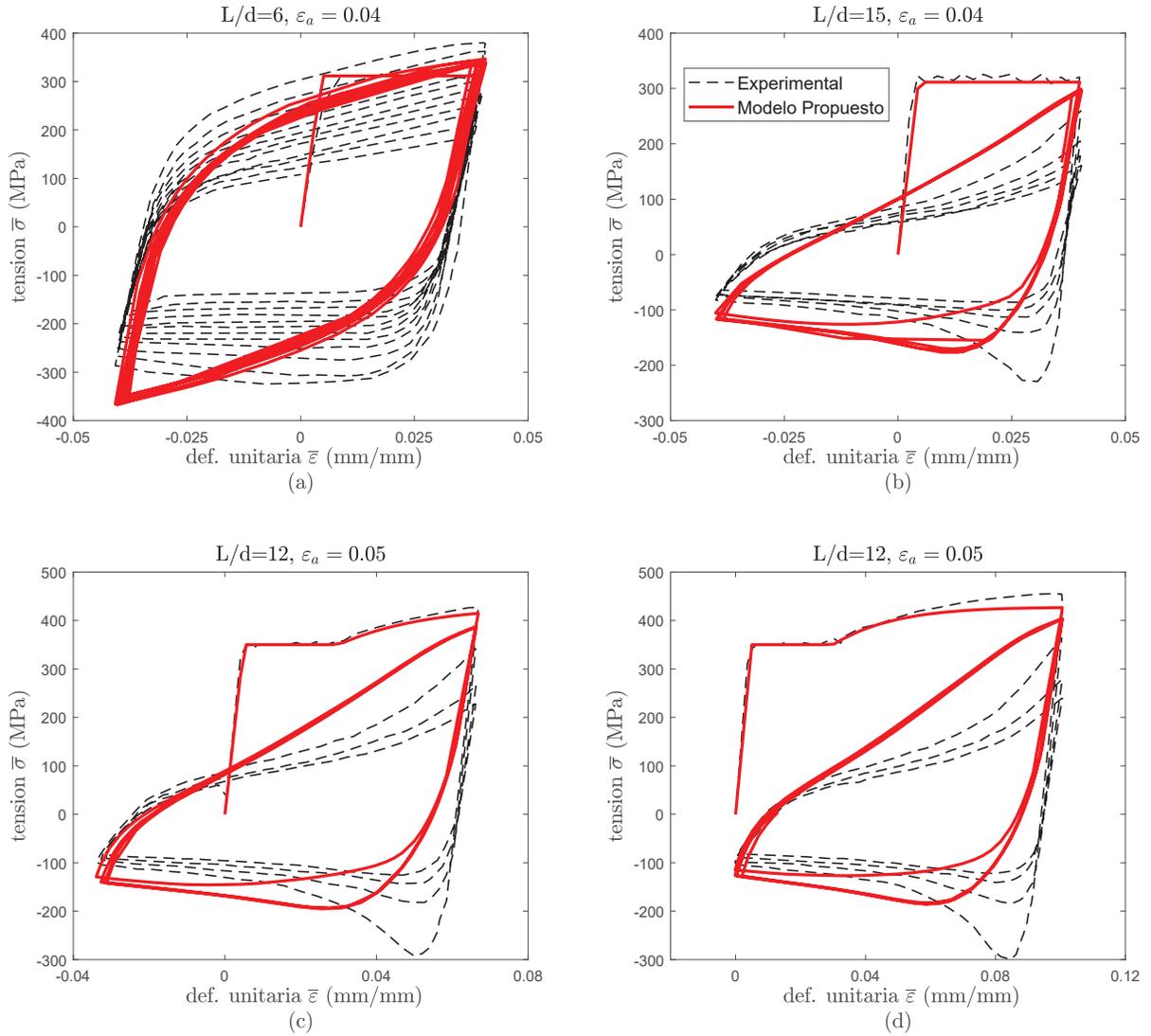


Figura 1.31: Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al. (2018)[32]. Barras de acero de refuerzo del tipo 300E.

ensayos a fatiga de la tesis Egger (2020)[11]. Las barras de acero de refuerzo son de alta resistencia y que cumplen con las especificaciones ASTM A706 Grado 80, con un diámetro de 12mm y propiedades mecánicas mostradas en la Tabla 1.4.

| Tipo de Refuerzo                     | A706 G80 |
|--------------------------------------|----------|
| Tensión de fluencia $f_y$ (MPa)      | 535.7    |
| Deformación fluencia $\varepsilon_y$ | 0.0028   |
| Módulo de Elasticidad $E_s$ (MPa)    | 193059   |
| Tensión última $f_u$ (MPa)           | 714.9    |
| Deformación última $\varepsilon_u$   | 0.113    |

Tabla 1.4: Propiedades mecánicas de barras de acero de refuerzo ASTM A706 Grado 80 (Egger, 2020) [11]

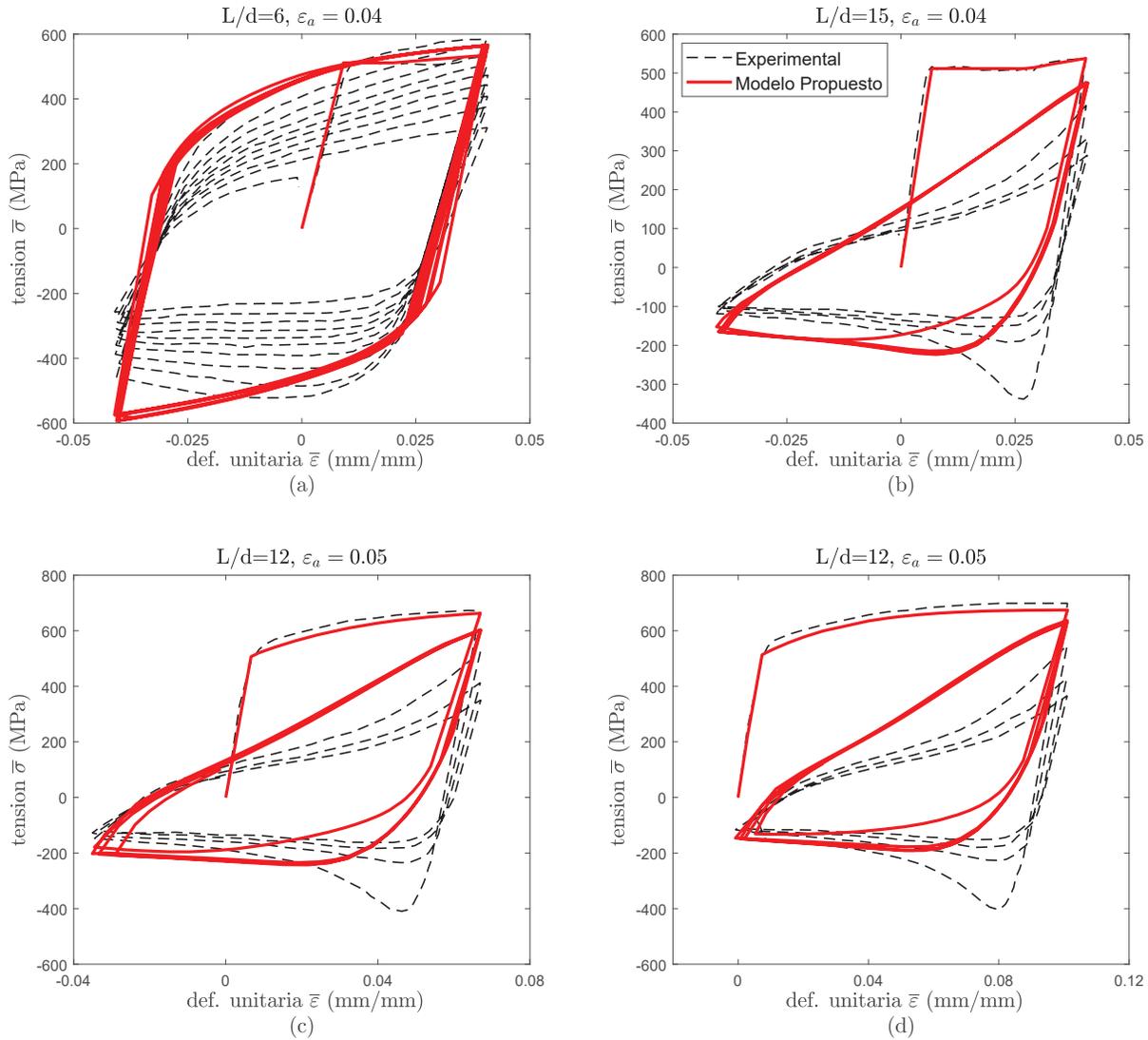


Figura 1.32: Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al. (2018)[32]. Barras de acero de refuerzo del tipo 500E.

Los ensayos de la tesis Egger (2020)[11], se realizan con relaciones de esbeltez  $L/d$  de 5, 10 y 15, y amplitudes de deformación ( $\epsilon_a$ ) de aproximadamente 3,1 % y 4,5 %. En el Modelo Propuesto se utiliza el  $L/d_{calibrado}$  (con  $m = 3,5$ ). En las Figuras 1.33(c), (d), (e) y (f) se observa que la respuesta registrada mediante el Modelo Propuesto es mayor que la respuesta experimental. Este fenómeno puede deberse a que aceros de mayor resistencia degradan más rápido en su respuesta debido al pandeo inelástico.

Por otro lado, como consecuencia de implementar el Modelo Propuesto (NO ITERATIVO) se espera conseguir menor tiempo de cálculo computacional con respecto al Modelo de Massone & Moroder (ITERATIVO). Así, en la tabla 1.5 se observa que, mediante el Modelo Propuesto se alcanzan tiempos de cálculo computacional entre 15 y 20 veces menores con respecto a los obtenidos mediante el modelo iterativo de Modelo de Massone & Moroder (2009). Es decir, el modelo Modelo de Massone & Moroder (2009) requiere, en promedio, entre 15 y

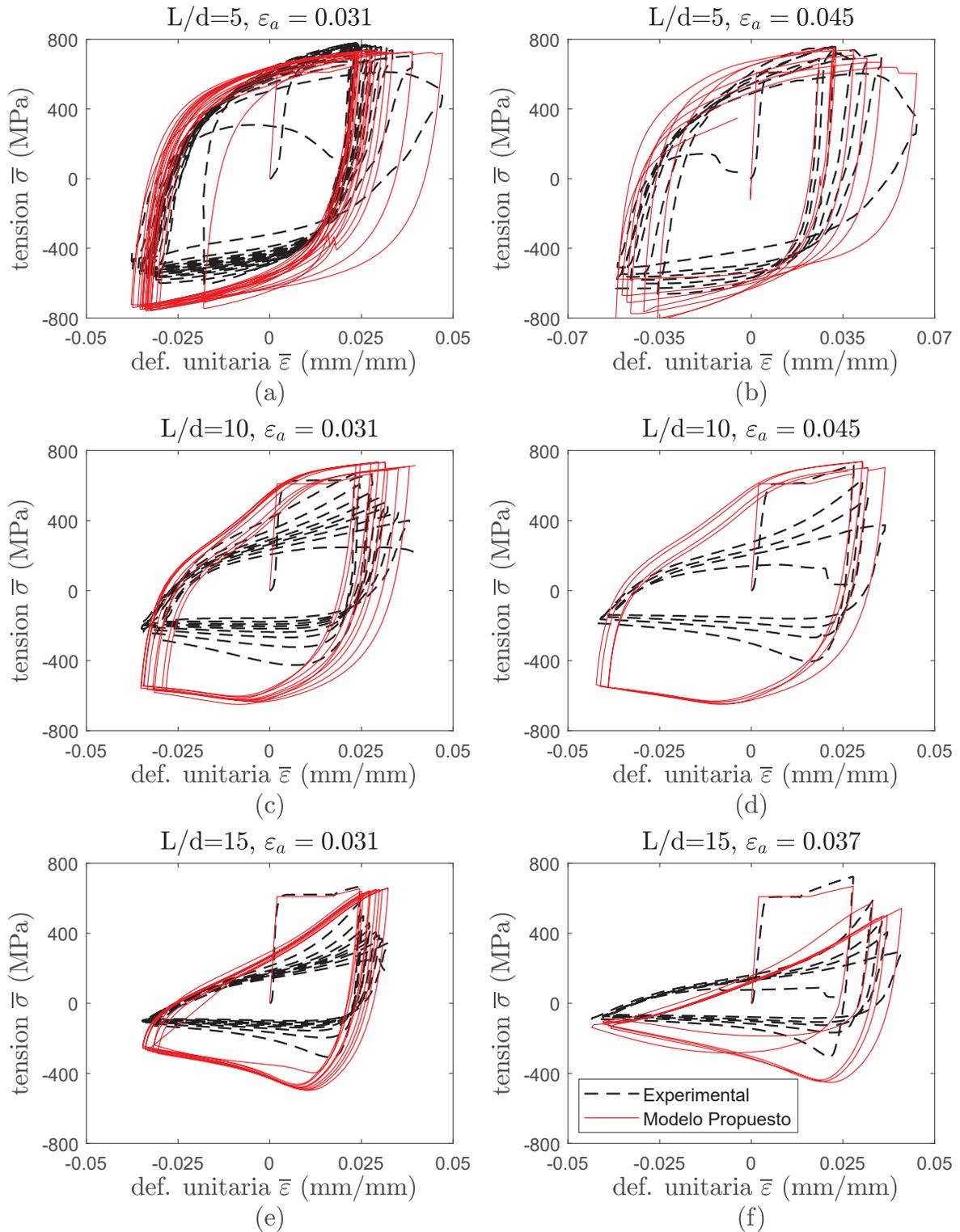


Figura 1.33: Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de tesis Egger (2020)[11]. Barras de acero de refuerzo del ASTM A706 Grado 80.

20 iteraciones para lograr la convergencia. Los tiempos de cálculo computacional se obtienen de la implementación de los modelo ITERATIVO y NO ITERATIVO en MATLAB.

| Ensayo<br>Tripathi et al (2018)                                      | No<br>de ciclos | (1)<br>Tiempo modelo<br>ITERATIVO (s) | (2)<br>Tiempo modelo<br>NO ITERATIVO (s) | Eficiencia<br>(1) / (2) |
|--|-----------------|---------------------------------------|--|-------------------------|
| 300E, L/D=12, $\varepsilon_{max} = 1\%$ , $\varepsilon_{min} = -1\%$ | 109             | 69.58                                 | 4.77                                     | 15                      |
| 300E, L/D=12, $\varepsilon_{max} = 2\%$ , $\varepsilon_{min} = -2\%$ | 31              | 28.93                                 | 1.64                                     | 18                      |
| 300E, L/D=12, $\varepsilon_{max} = 3\%$ , $\varepsilon_{min} = -3\%$ | 14              | 13.31                                 | 0.79                                     | 17                      |
| 300E, L/D=12, $\varepsilon_{max} = 4\%$ , $\varepsilon_{min} = -4\%$ | 8               | 8.94                                  | 0.44                                     | 20                      |
| 300E, L/D=12, $\varepsilon_{max} = 5\%$ , $\varepsilon_{min} = -5\%$ | 5               | 5.22                                  | 0.33                                     | 16                      |

Tabla 1.5: Comparación de los tiempos de cálculo computacional alcanzados en MATLAB, entre el Modelo de Massone & Moroder (ITERATIVO) y el Modelo Propuesto (NO ITERATIVO)

Otro aspecto a tener en el Modelo Propuesto es verificar si existen restricciones para su aplicación. Así, se puede realizar el análisis proyectando registros sintéticos de historial de deformaciones unitarias axiales ( $\bar{\varepsilon}$ ) y comparando las respuestas obtenidas mediante el Modelo Propuesto y el Modelo de Massone & Moroder (2009), tal como se muestra en la Figura 1.34.

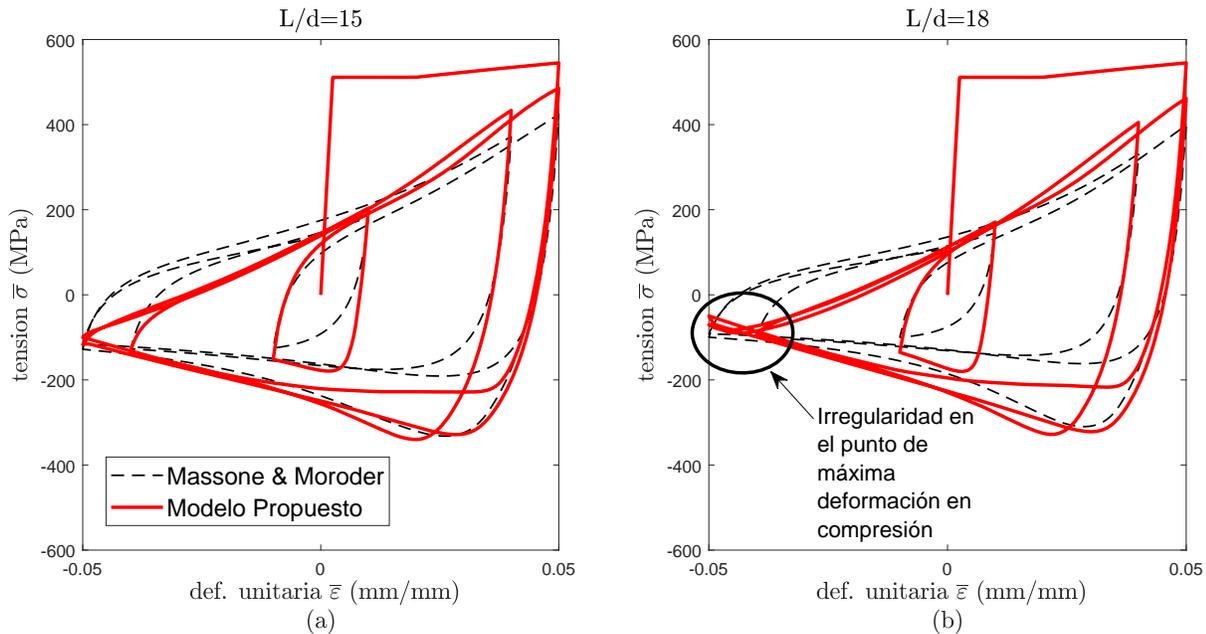


Figura 1.34: (a) Respuesta tensión - deformación promedio con  $L/d = 15$  y, (b) Respuesta tensión - deformación promedio con  $L/d = 18$ . Registro sintético. Ciclos con  $\varepsilon_a$  variable.  $\varepsilon_{max} = 5\%$  y  $\varepsilon_{min} = -5\%$ . Barra Tipo 500E

En la Figura 1.34(a) se verifica que el Modelo Propuesto también presenta una buena aproximación al modelo de Massone & Moroder (2009) [23], cuando se presentan ciclos con amplitudes de deformación variables entre sí. Sin embargo, en la Figura 1.34(b), donde se captura la respuesta en un caso con  $L/d = 18$ , se presentan irregularidades cuando se revierte el ciclo histerético en el punto de máxima deformación unitaria axial de compresión ( $\varepsilon_{min}$ ). La irregularidad se produce cuando los valores de curvatura en la etapa de recarga son mayores a los calculados en la etapa de descarga del ciclo previo. La condición se presenta en ciclos cuya diferencia entre las deformaciones unitarias máximas de compresión y tracción

de deformación, es mayor igual al 10% ( $|\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}| \geq 10\%$ ) y con relaciones de esbeltez mayores a 15 ( $L/d \geq 15$ ). Por ejemplo, en la Figura 1.35 no se presenta la irregularidad cuando  $L/d = 18$  debido a que la diferencia entre deformaciones unitarias máximas en cada ciclo no superan el 10%. Sin embargo, se propone que la aplicación del Modelo Propuesto se restringe a relaciones de esbeltez de hasta  $L/d = 15$  y amplitudes de deformación de hasta el 10% ( $|\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}| \geq 10\%$ ).

Cabe mencionar que las restricciones de aplicación del Modelo Propuesto superan algunos de los parámetros límites que se consideran en el diseño de elemento de hormigón armado. Por ejemplo, según el ACI 318-19 [1], los valores límite de la relación  $L/d$  en elementos de borde de muros son de 6 y 8. Por otro lado, según el procedimiento de ACHISINA para el diseño sísmico basado en desempeño, la deformación unitaria límite para acero de refuerzo es del 5%. Por lo tanto, a pesar de las restricciones, se tiene previsto un gran campo de aplicación del Modelo Propuesto.

Otra condición a tomar en cuenta, ocurre cuando los ciclos no superan la deformación de fluencia del acero ( $\varepsilon_y$ ). En este caso, solo se asume el comportamiento elástico de la barra, restringiendo la curvatura a cero ( $\phi_p = 0$ ). Mientras los primeros ciclos no superen  $\varepsilon_y$ , estos no se cuentan como tales; por lo tanto, se obvian las ecuaciones correspondientes a las etapas de carga, descarga y recarga. Así, el inicio del primer ciclo se traslada al primer ciclo donde se supera  $\varepsilon_y$ . Por ejemplo, esta restricción se muestra en la Figura 1.35, donde se observa un comportamiento lineal y sin disipación de energía, mientras los primeros ciclos no superen  $\varepsilon_y = 0,0026$ , correspondiente a barras de acero tipo 500E.

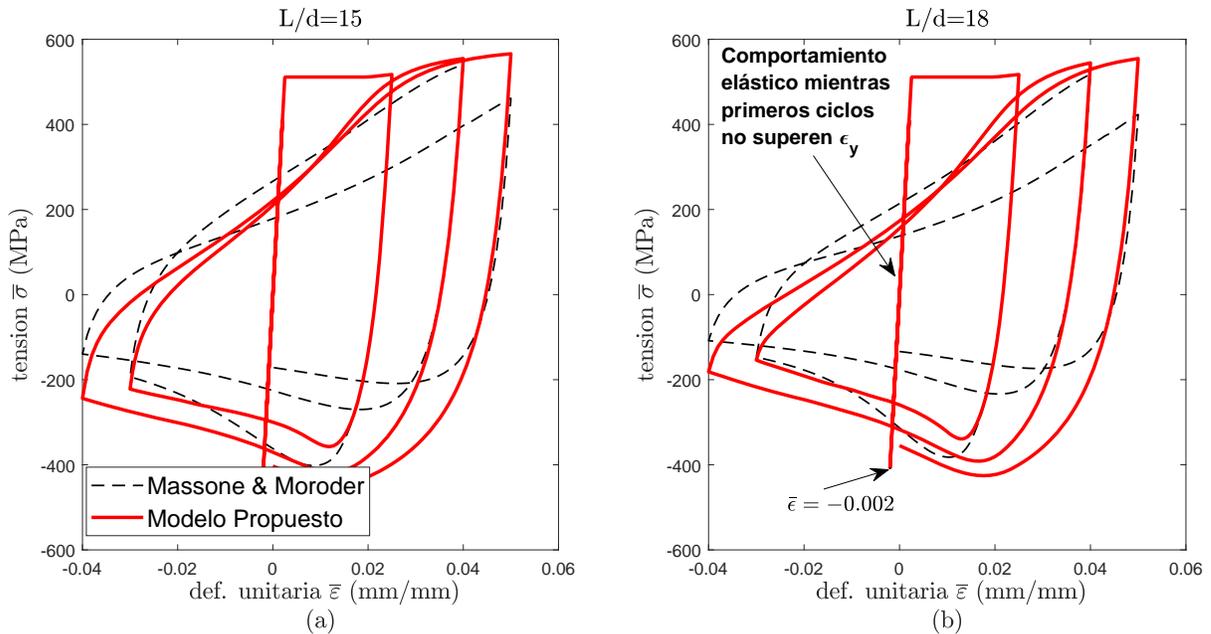


Figura 1.35: (a) Respuesta tensión - deformación promedio con  $L/d = 15$  y, (b) Respuesta tensión - deformación promedio con  $L/d = 18$ . Registro sintético. Ciclos con  $\varepsilon_a$  variable.  $\varepsilon_{max} = 5\%$  y  $\varepsilon_{min} = -4\%$ . Barra Tipo 500E

Por lo tanto, de acuerdo a la verificación de la respuesta entregada por el Modelo Propuesto, se observa que se obtienen resultados aproximados a los valores experimentales y al

modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23]. De modo que, el Modelo Propuesto consigue capturar la influencia del pandeo inelástico en la degradación de la respuesta tensión-deformación de una barra de acero de refuerzo.

### 1.3.6. Fatiga

Una de las ventajas del Modelo Propuesto y el Modelo de Massone & Moroder (2009)[23], es que basan en el análisis de la sección transversal mediante su discretización en fibras (Figura 1.5(a)). Así, estos modelos cuentan con la capacidad de determinar el comportamiento tensión-deformación en cada fibra “i” de la barra de acero de refuerzo. Por ejemplo, considerando uno de los ensayos de fatiga de bajos ciclos incluyendo los efectos del pandeo inelástico en barras de acero de refuerzo del trabajo de Tripathi et al. (2018)[32], es posible capturar la respuesta tensión - deformación mediante el Modelo Propuesto, como se verifica en la Figura 1.36.

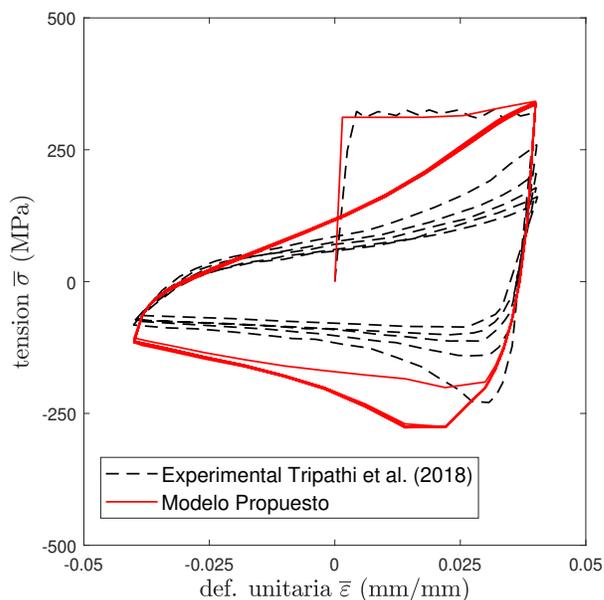


Figura 1.36: Respuesta tensión - deformación promedio. Modelo propuesto versus datos experimentales de Tripathi et al.(2018)[32]. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E.  $L/d = 15$ ,  $\varepsilon_a = 4\%$ ,  $2N_f = 11$

Además, a través del análisis de fibras del Modelo Propuesto, es posible calcular la respuesta en cada fibra discretizada de la sección transversal de la barra. Se toman como datos de entrada para el Modelo Propuesto, las propiedades mecánicas (Tabla 1.1), la amplitud de deformación ( $\varepsilon_a$ ), la relación de esbeltez ( $L/d$ ) y la cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ), registrados en Tripathi et al. (2018)[32]. En la Figura 1.37 se presenta la respuesta tensión-deformación asumiendo 20 fibras, donde la fibra 1 representa a la fibra más traccionada (lado convexo de la barra pandeada, según la Figura 1.12), y la fibra 20 representa a la fibra más comprimida (lado cóncavo de la barra pandeada, según la Figura 1.12).

En la Figura 1.37 se observa que los ciclos con mayores amplitudes de deformación ( $\varepsilon_a$ ) se producen en las fibras más traccionada (fibra 1) y más comprimida (fibra 20). La respuesta

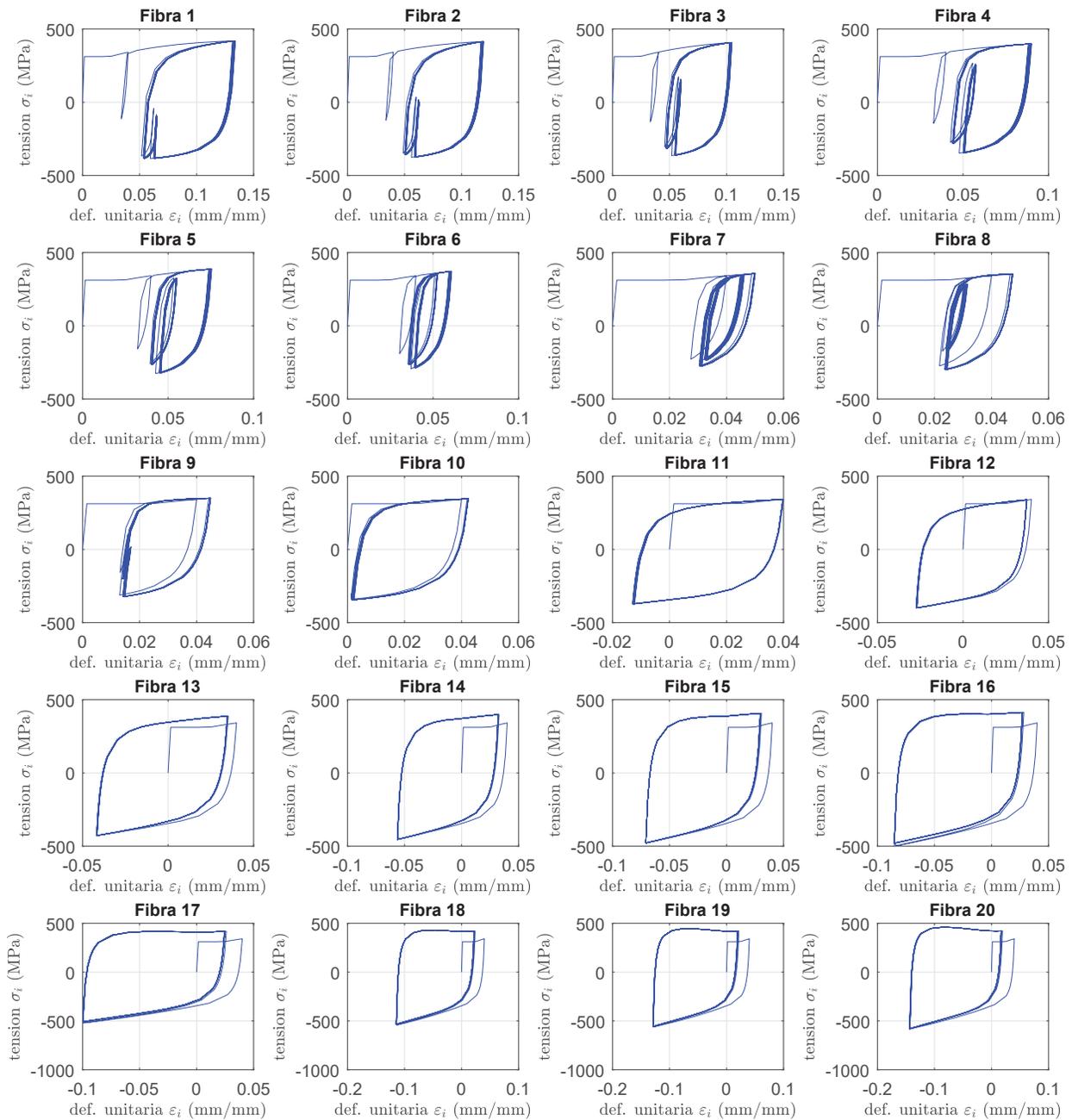


Figura 1.37: Respuesta tensión - deformación en cada fibra “i” discretizada. Modelo propuesto. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E.  $L/d = 15$ ,  $\varepsilon_a = 4\%$ ,  $2Nf = 11$

tensión - deformación en cada fibra presenta ciclos histeréticos que no necesariamente poseen una amplitud de deformación ( $\varepsilon_a$ ) constante. Sin embargo, en la Figura 1.38 se puede aproximar que la fibra más comprimida presenta una  $\varepsilon_a = 8,1\%$ , la cual representa casi el doble que la  $\varepsilon_a$  de la fibra más traccionada y más del doble que  $\varepsilon_a$  a la que fue ensayada la barra de acero de refuerzo.

De la misma forma, se pueden estimar los promedios de las amplitudes de deformación en cada fibra ( $\varepsilon_a Prom$ ) para distintos casos ensayados en Tripathi et al. (2018)[32]. En la Figura 1.40 se muestra la distribución de  $\varepsilon_a Prom$  estimadas, donde las fibras 1 y 20

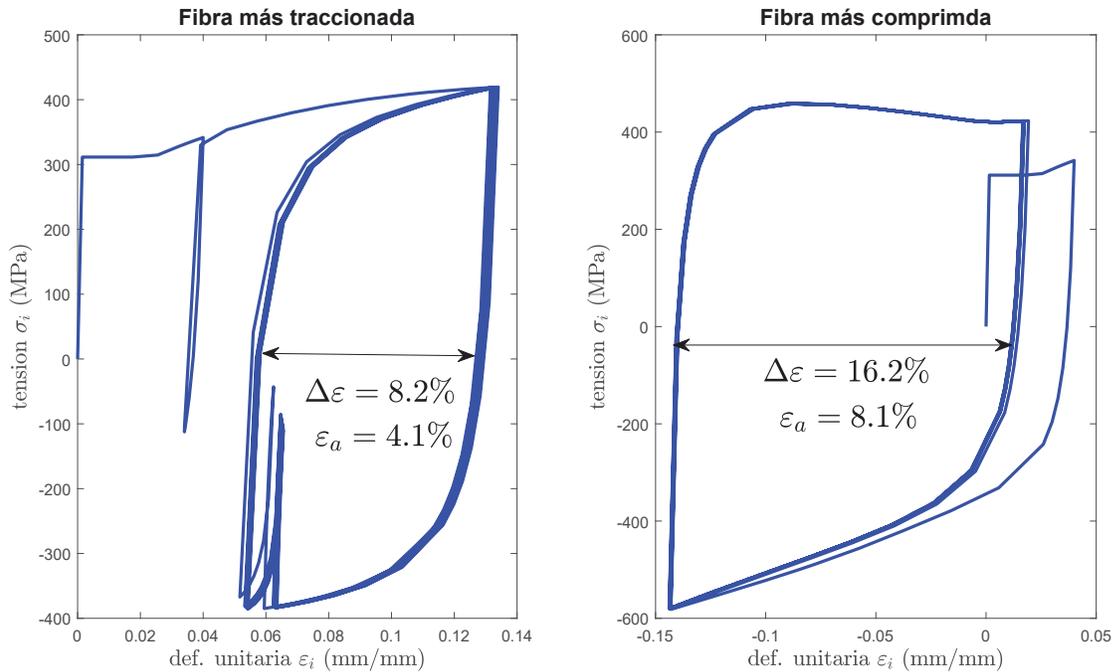
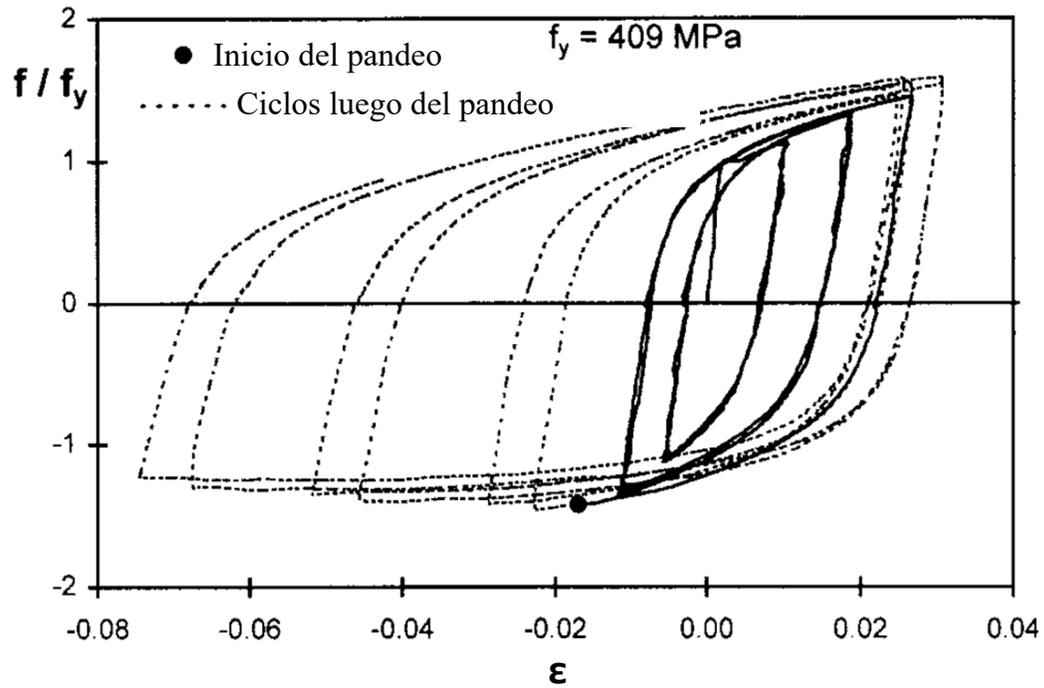


Figura 1.38: Respuesta tensión - deformación en la fibra más traccionada y en la fibra más comprimida. Modelo propuesto. Barras de acero de refuerzo Tipo 300E.  $L/d = 15$ ,  $\varepsilon_a = 4\%$ ,  $2Nf = 11$

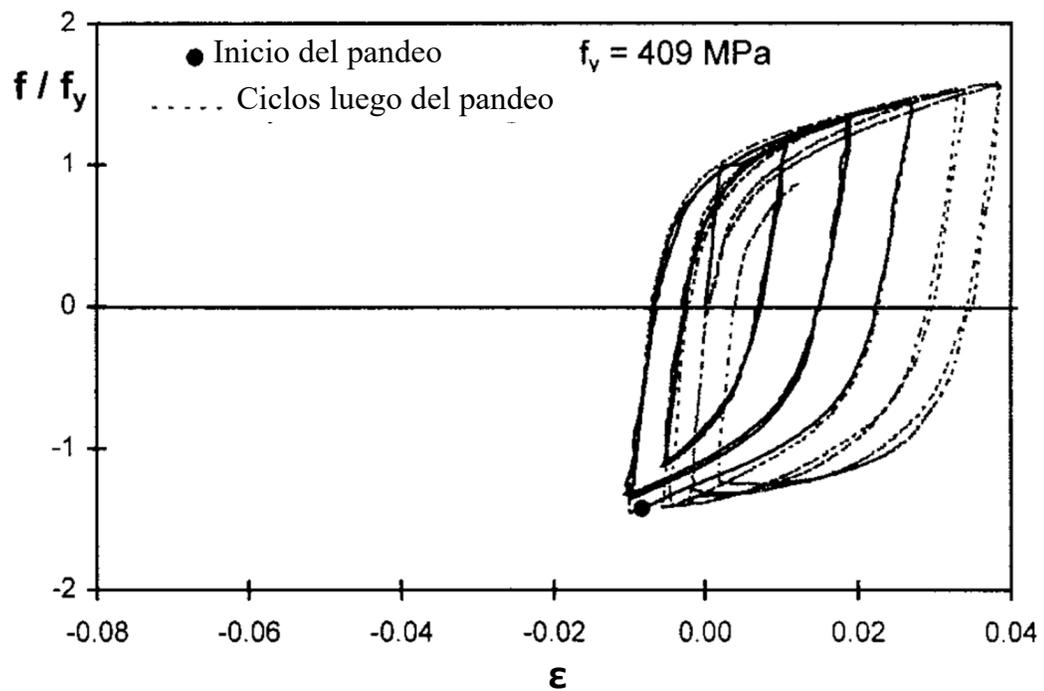
corresponden a las fibras más traccionada y más comprimida, respectivamente. Se observa que los mayores valores de  $\varepsilon_a Prom$  se presentan en las fibras más comprimidas y en barras que fueron sometidas a una mayor amplitud de deformación ( $\varepsilon_a = 5\%$ ). Es interesante notar que,  $\varepsilon_a Prom$  en la fibra más comprimida, para diferentes relaciones de esbeltez ( $L/d$ ), se aproxima a un mismo valor máximo. Sin embargo, en la fibra más traccionada, se consigue verificar que los casos analizados con relaciones de esbeltez ( $L/d$ ) más grandes, presentan  $\varepsilon_a Prom$  mayores.

Existen estudios experimentales donde se alcanza a capturar el comportamiento en los lados cóncavo (más comprimido) y convexo (más traccionado) de la barra pandeada. Por ejemplo, Rodríguez et al. (1999) [29] consiguen medir las deformaciones en lados opuestos de la barra de acero ensayada. Debido a la flexión generada cuando la barra se pandea, se generan deformaciones de compresión en lado cóncavo, las que se adicionan a las deformaciones propias por la carga axial de compresión aplicada. Asimismo, en el lado convexo, la flexión mencionada ocasiona deformaciones de tracción que restan a las ocasionadas por la carga axial de compresión. Por lo tanto, se puede indicar que el Modelo Propuesto consigue demostrar analíticamente la tendencia del comportamiento tensión - deformación presentado en el estudio experimental de Rodríguez et al. (1999) [29], mostrado en la Figura 1.39.

Dado que las respuestas mostradas en la Figura 1.38 poseen ciclos con un patrón irregular de carga, descarga y recarga, resulta conveniente la utilización de algún método de conteo de ciclos con amplitud de deformación variable. El método de Rainflow es uno de los más utilizados y su procedimiento está especificado en la norma ASTM E-1049. El procedimiento se basa en el análisis de un patrón aleatorio en un rango determinado. Para el caso de la



(a) Lado cóncavo



(b) Lado convexo

Figura 1.39: Respuesta tensión - deformación en los lados cóncavo (más comprimido) y convexo (más traccionado),  $L/d = 6$ . Rodríguez et al. (1999) [29]

respuesta tensión - deformación, se considerará la deformación como el patrón a analizar a lo largo de un tiempo o número de registros. Así, en la Figura 1.41 se muestra un ejemplo

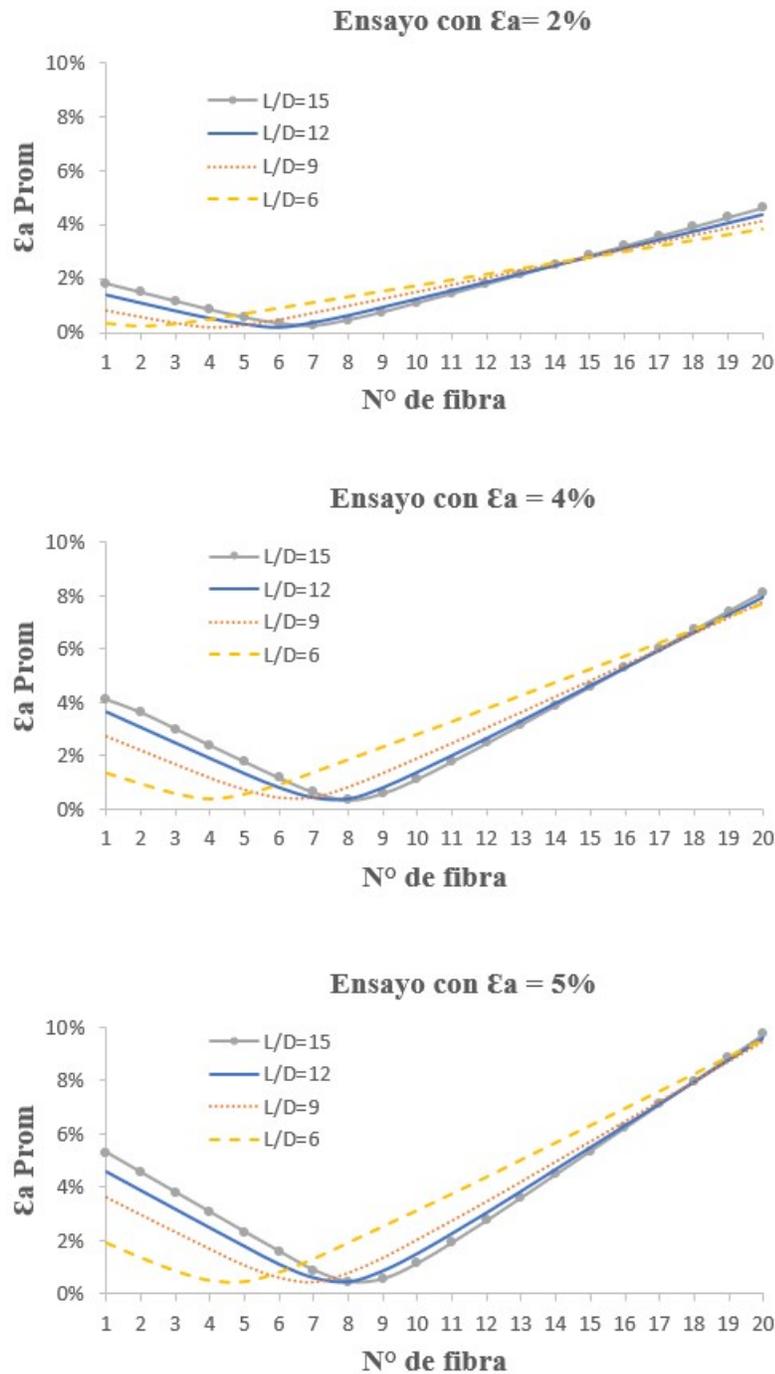


Figura 1.40: Amplitud de deformación promedio ( $\epsilon_a Prom$ ) fibras, calculados a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32]

del patrón aleatorio, donde se define X como el rango en consideración, e Y como el rango previo adyacente a X; además se define el punto S como el punto donde inicia el patrón de deformaciones.

Luego de determinar los ejes del patrón, el rango y el punto S, el procedimiento para determinar el número de ciclos se determina en los siguientes pasos:

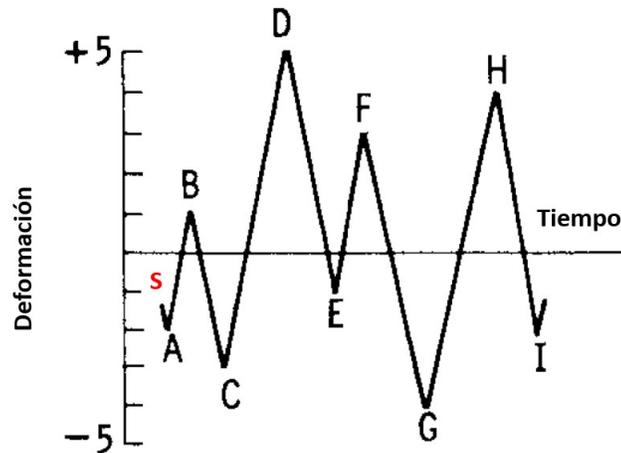


Figura 1.41: Ejemplo de patrón de deformaciones aleatorio (ASTM E-1049).

1. Leer el siguiente peak máximo o mínimo. Si no se encuentran más datos, ir al paso 6.
2. Si hay menos de tres puntos, ir al paso 1. Formar pares  $X$  e  $Y$  utilizando los peaks máximos y mínimos más recientes que no se han descartado.
3. Comparar los valores absolutos de los rangos  $X$  e  $Y$ 
  - (a) Si  $X < Y$ , ir al paso 1.
  - (b) Si  $X \geq Y$ , ir al paso 1.
4. Si el rango  $Y$  contiene el punto inicial  $S$ , ir al paso 5; caso contrario, contar el rango  $Y$  como un ciclo; descartar los peaks máximo y mínimo de  $T$ ; e ir al paso 2.
5. Contar el rango  $Y$  como medio ciclo; se descarta el primer punto (peak máximo o mínimo) en el rango  $Y$ ; mover el punto de partida al segundo punto en el rango  $Y$  e ir al paso 2.
6. Contar cada rango que no se haya contado previamente como medio ciclo.

De tal manera, mediante el método de Rainflow se determinan la cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ) de la respuesta tensión - deformación en las fibras más traccionada y más comprimida. Así, en la tabla 1.6 se muestran los resultados calculados con base en los casos experimentales analizados en Tripathi et al. (2018)[32]. Cabe resaltar que, el número de medio ciclos ( $2N_f$ ) a la falla tomados de las pruebas experimentales de Tripathi et al. (2018)[32], fueron registrados en el ciclo donde la máxima tensión en tracción se degradó en un 50% con respecto a la máxima tensión en tracción del primer ciclo. Asimismo, en la tabla 1.6 se verifica que el comportamiento en la fibra más comprimida, en los distintos casos analizados, presentan mayores amplitudes de deformación promedio ( $\varepsilon_a Prom$ ) y registran la menor cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ).

Por otro lado, es posible estimar el daño acumulado ( $D$ ) por la fatiga debida un ciclo histerético mediante la relación de Palmgren - Miner, definida en la expresión 1.75. Utilizando esta expresión a partir de la cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ), en las fibras más traccionada y más comprimida, obtenidos en la tabla 1.6, se pueden estimar los niveles de acumulación de daño por ciclo. Así, en la Figura 1.43 se observan los mayores niveles de acumulación de daño en la fibra más comprimida para todos los casos analizados en el estudio experimental de Tripathi et al. (2018) [32].

| Experimental Tripathi et al. (2018) |                 |                             | Modelo Propuesto      |     |                      |     |
|-------------------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------------|-----|----------------------|-----|
|                                     |                 |                             | Fibra más traccionada |     | Fibra más comprimida |     |
| L/d                                 | $\varepsilon_a$ | 2Nf                         |                       | 2Nf | $\varepsilon_a Prom$ | 2Nf |
|                                     |                 | No medios ciclos a la falla | $\varepsilon_a Prom$  |     |                      |     |
| 6                                   | 2.0%            | 115                         | 0.3%                  | 301 | 3.8%                 | 115 |
|                                     | 4.0%            | 24                          | 1.3%                  | 40  | 7.7%                 | 25  |
|                                     | 5.0%            | 17                          | 1.9%                  | 30  | 9.5%                 | 17  |
| 9                                   | 2.0%            | 72                          | 0.8%                  | 110 | 4.1%                 | 73  |
|                                     | 4.0%            | 22                          | 2.7%                  | 28  | 7.8%                 | 23  |
|                                     | 5.0%            | 14                          | 3.6%                  | 18  | 9.5%                 | 15  |
| 12                                  | 2.0%            | 61                          | 1.4%                  | 72  | 4.3%                 | 63  |
|                                     | 4.0%            | 16                          | 3.6%                  | 20  | 7.9%                 | 17  |
|                                     | 5.0%            | 10                          | 4.6%                  | 14  | 9.6%                 | 11  |
| 15                                  | 2.0%            | 31                          | 1.8%                  | 36  | 4.6%                 | 31  |
|                                     | 4.0%            | 11                          | 4.1%                  | 14  | 8.1%                 | 13  |
|                                     | 5.0%            | 8                           | 5.3%                  | 10  | 9.7%                 | 9   |

Tabla 1.6: Cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ) y amplitud de deformación promedio ( $\varepsilon_a Prom$ ) en las fibras más traccionada y más comprimida, calculados a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32]

$$D = \frac{1}{N_f} \quad (1.75)$$

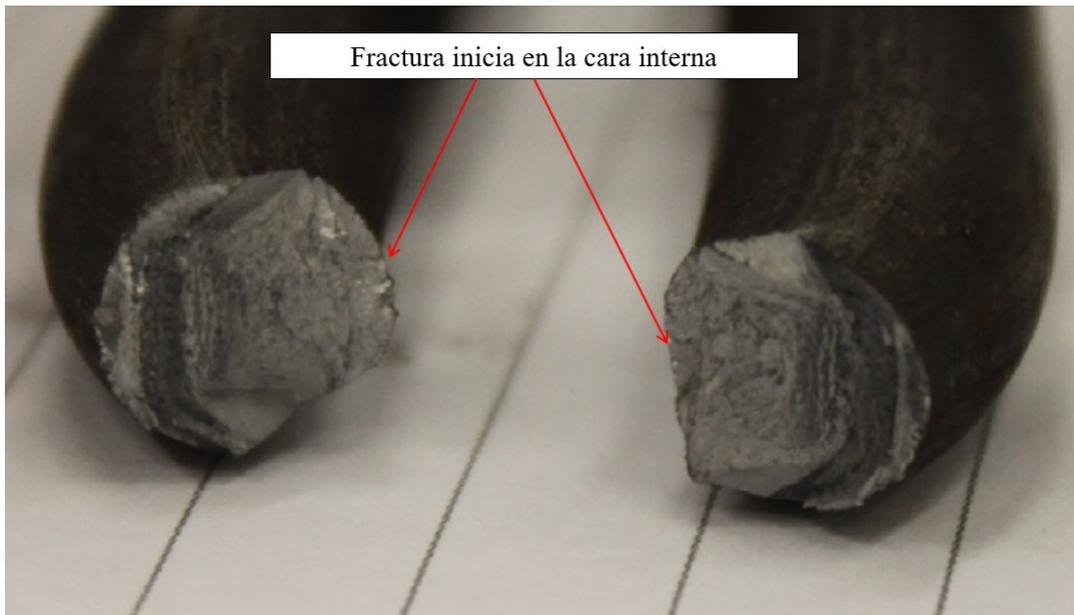


Figura 1.42: Superficie de fractura observada en ensayos cíclicos en barras de acero de refuerzo corrugadas. Kashani et al. (2015) [13]

De acuerdo a los resultado de acumulación de daño mostrados en la Figura 1.43, se podría deducir que la fractura de barra de acero de refuerzo debería empezar en la zona más compri-

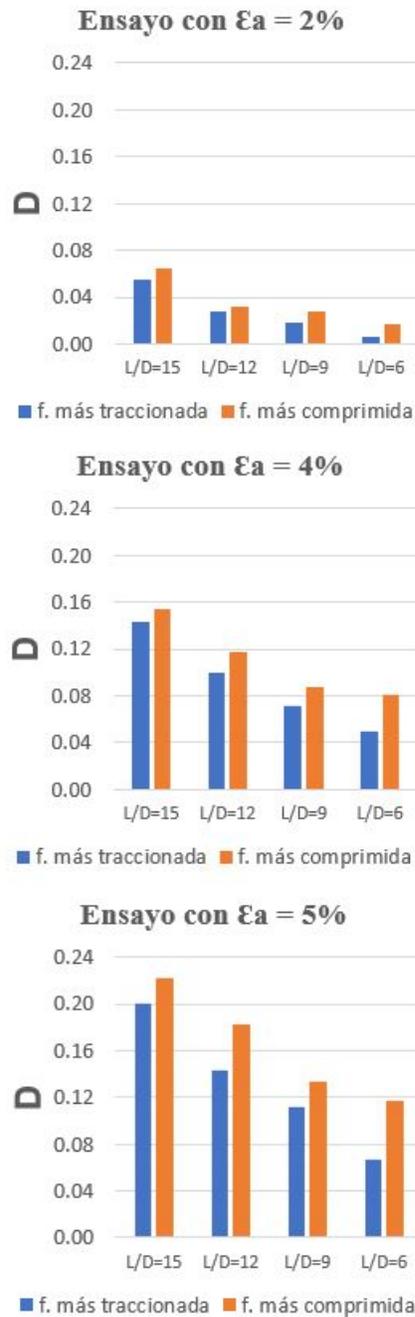


Figura 1.43: Acumulación de daño por ciclo las fibras más traccionada y más comprimida. Calculado a partir del Modelo Propuesto y con base a los datos experimentales de fatiga de bajos ciclos en barras de acero tipo 300E de Tripathi et al. (2018) [32]

mida. Según la inspección fractográfica realizada en barras de acero de refuerzo sometidas a cargas cíclicas y pandeo inelástico por Kashani et al. (2015) [13] (Figura 1.42), se determina que el inicio de la fractura comienza por la cara interna o lado cóncavo de la barra pandeada. Por lo tanto, con los resultados mostrados en la Figura 1.43, calculados mediante el análisis a nivel de fibras del Modelo Propuesto, se pueden demostrar analíticamente que la fractura inicia en la zona más comprimida de la barra de acero de refuerzo pandeada.

# Capítulo 2

## Modelo de pandeo global

En esta sección se desarrolla el modelo constitutivo de una barra de acero de refuerzo longitudinal susceptible al pandeo global, es decir, el pandeo de la barra abarcando una longitud equivalente a varios espacios entre estribos. La solución se basa en los supuestos de los siguientes estudios:

- Modelo Propuesto de pandeo local, presentado en el Capítulo 1 de la presente tesis.
- Modelo de Pandeo global de Massone & Lopez (2014) [22], que permite capturar la respuesta tensión - deformación de la barra de acero de refuerzo ante la aplicación de una carga axial monotónica en compresión.
- Método teórico para determinar la longitud de pandeo de Dhakal & Maekawa (2002)[7].

Se propone utilizar la relación entre  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  definida en el Modelo Propuesto del Capítulo 1 para evitar resolver la ecuación no lineal de equilibrio del modelo de pandeo global de Massone & Lopez (2014) [22]. Se toman en cuenta los efectos en las respuestas tensión versus deformación y curvatura versus deformación, debidos a la introducción de las fuerzas producidas por la tracción de los estribos y por la expansión lateral del núcleo de hormigón. La cantidad de espacios entre estribos donde se desarrolla la longitud de pandeo se calcula mediante el Método de Dhakal & Maekawa (2002)[7].

## 2.1. Modelo de Massone & López (2014)

El modelo de pandeo global de Massone & Lopez (2014) [22] se basa en un modelo geométrico de plasticidad concentrada considerando 4 rótulas plásticas, similar al considerado en Massone & Moroder (2009) [23]. El modelo de pandeo global de Massone & Lopez (2014) [22] permite capturar la respuesta tensión - deformación de una barra de refuerzo longitudinal simulando los efectos que producen la inclusión de las fuerzas producidas en el refuerzo transversal y por la expansión del núcleo de hormigón. El análisis seccional de la rótula plástica considera la discretización de la sección transversal en fibras (bajo la hipótesis de Bernoulli). El largo “ $L$ ” en el que se pandea la barra, queda determinado por número de espacios “ $n$ ” entre estribos, también conocido como el modo de pandeo. De tal forma, el largo queda definido como:

$$L = n S \tag{2.1}$$

Donde  $S$  es la longitud de espaciamiento entre estribos. Y el número de estribos está dado por: “ $N = i + 1$ ”.

### 2.1.1. Equilibrio

En el caso del pandeo global se necesita considerar el escenario donde el largo de pandeo es mayor al espaciamiento entre estribos. Por lo tanto, el modelo de Massone & Lopez (2014) [22] propone incorporar dos fuentes de deformación: la expansión lateral por el núcleo de hormigón confinado y tracción adicional de los estribos por el desplazamiento lateral de la barra cuando se pandea. En la Figura 2.1 se muestran la etapas que se consideran hasta el inicio del pandeo de la barra. Cuando inicia el pandeo de la barra ante la aplicación de la carga axial “P” de compresión se reduce el confinamiento lateral del recubrimiento facilitando la expansión del núcleo de hormigón dentro del largo de pandeo “ $L$ ”, manteniendo el contacto entre el núcleo y la barra longitudinal.

En la Figura 2.1(b) se considera que la deformación axial aún no lleva al pandeo de la barra, la misma que se encuentra en contacto con el núcleo de hormigón, y se asume que una deformación en los estribos “ $\varepsilon_{ct}$ ” debido a la expansión del hormigón asociada a una fuerza  $F_j^h$ . Según Dhakal & Maekawa (2002) [7] se considera que la expansión lateral del hormigón consume casi la totalidad de la deformación elástica del acero. En la Figura 2.1(c) se asume que la deformación axial induce el pandeo de la barra, ocasionando una deformación adicional en cada estribo  $\varepsilon_{wj}$ , asociada al incremento de fuerza  $\Delta F_j$ . Este incremento de fuerzas es balanceado con los momentos internos generados en las rótulas plásticas.

Para determinar el equilibrio de fuerzas se considera el problema aplicado en la mitad de la barra. En la Figura 2.2 se plantean dos casos: cantidad de estribos  $N$  par e impar. En la ecuación 2.2 se define la cantidad de estribos  $N'$  en la mitad de la barra.

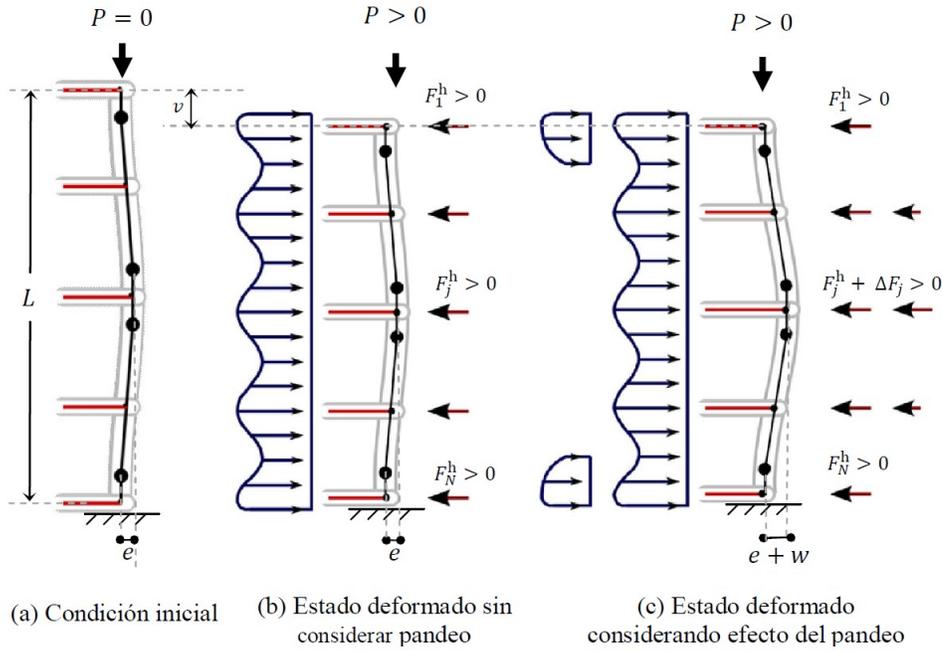


Figura 2.1: Esquema del modelo de pandeo global. Massone & López (2014) [22]

$$N' = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{cuando } N \text{ es par} \\ \frac{N+1}{2} & \text{cuando } N \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.2)$$

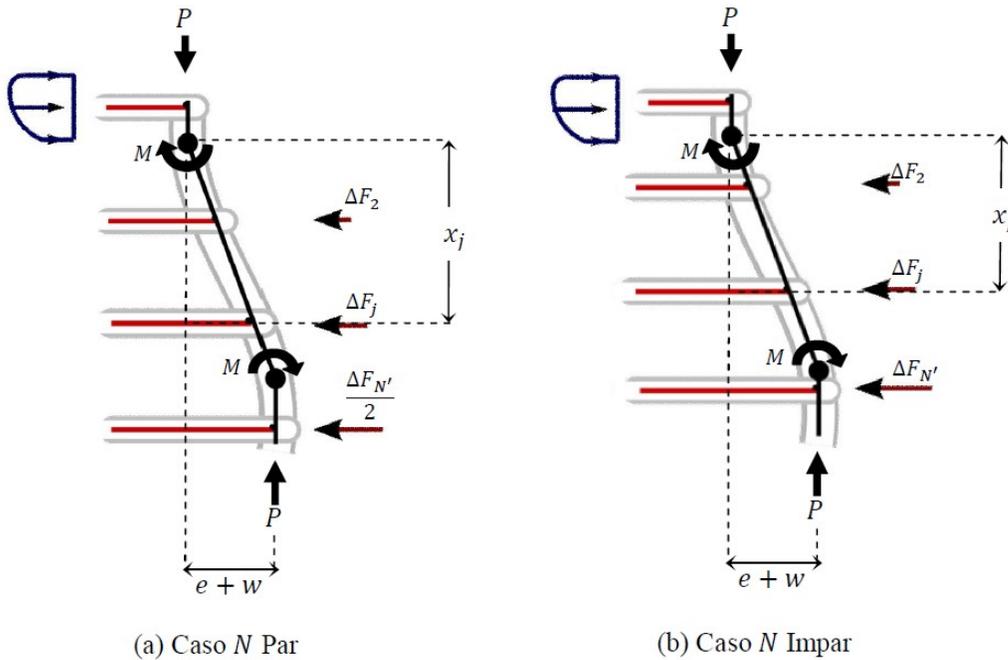


Figura 2.2: Esquema para determinar el equilibrio de fuerzas. Massone & López (2014) [22]

De tal forma, la ecuación de equilibrio en las rótulas queda establecida en la expresión

2.3. Donde  $x_j$  es la distancia vertical desde la rótula extrema superior a la fuerza  $\Delta F_j$ . Cabe resaltar que, la posición de cada estribo varía cuando el desplazamiento vertical  $\nu$  aumenta.

$$P(e + w) + \sum_{j=2}^{N'} \Delta F_j x_j - 2M = 0 \quad (2.3)$$

Se considera que  $F_j$  es la suma de las fuerzas por la expansión del hormigón  $F_j^h$  y la fuerza adicional del estribo  $\Delta F_j$ . Por lo tanto, para satisfacer la ecuación de equilibrio es necesario conocer las fuerzas  $\Delta F_j$  que introducen los estribos dentro del modelo (ecuación 2.4), y los brazos de palanca  $x_j$  (ecuación 2.11).

$$\Delta F_j = F_j - F_j^h \quad (2.4)$$

Asimismo, las fuerzas  $F_j$  pueden ser relacionadas con la deformación unitaria total ( $\varepsilon_{sj}^{total}$ ) en cada estribo. La deformación ( $\varepsilon_{sj}^{total}$ ) está compuesta por la expansión lateral del hormigón ( $\varepsilon_{ct}$ ) y la deformación unitaria lateral de la barra al pandearse ( $\varepsilon_{wj}$ ). Las fuerzas  $F_j$  se relacionan con las tensiones ( $\sigma_{st}$ ) asociadas a la deformación total de los estribos mediante una Ley Constitutiva monotónica (por ejemplo: se pueden considerar los modelos constitutivos del acero de Mander [20] o Menegotto - Pinto [24]). Además, se asume que " $A_t$ " es el área de la sección transversal de cada estribo. Así, las fuerzas  $F_j$  quedan definidas en la expresión 2.5. De forma análoga, las fuerzas  $F_j^h$  también pueden relacionarse con las tensiones " $f_{st}$ " asociadas a la deformación ( $\varepsilon_{ct}$ ) mediante de una Ley Constitutiva monotónica. Así, las fuerzas  $F_j^h$  quedan definidas en la expresión 2.6. De tal forma, en la Figura 2.3 se muestra el tramo en que se definen las fuerzas  $\Delta F_j$ .

$$F_j = A_t \sigma_{st}(\varepsilon_{wj} + \varepsilon_{ct}) \quad (2.5)$$

$$F_j^h = A_t f_{st}(\varepsilon_{ct}) \quad (2.6)$$

Las deformaciones unitarias  $\varepsilon_{wj}$  quedan definidas en la ecuación 2.7. Donde " $y_j$ " es el desplazamiento transversal de cada estribo, y  $l'_t$  es el largo efectivo del estribo según la dirección del pandeo. El largo efectivo se considera igual a longitud total " $l_t$ " cuando la columna se encuentra en flexión, o la mitad de la longitud total " $l_t/2$ " si la columna está bajo compresión axial pura.

$$\varepsilon_{wj} = \frac{y_j}{l'_t} \quad (2.7)$$

Las deformaciones unitarias  $\varepsilon_{ct}$  provocadas por la expansión lateral del hormigón consideran una distribución uniforme en altura. Estas se determinan mediante el modelo de expansión lateral del hormigón del Pantapozoulou (1998) [27]. Así,  $\varepsilon_{ct}$  queda definida en la ecuación 2.8.

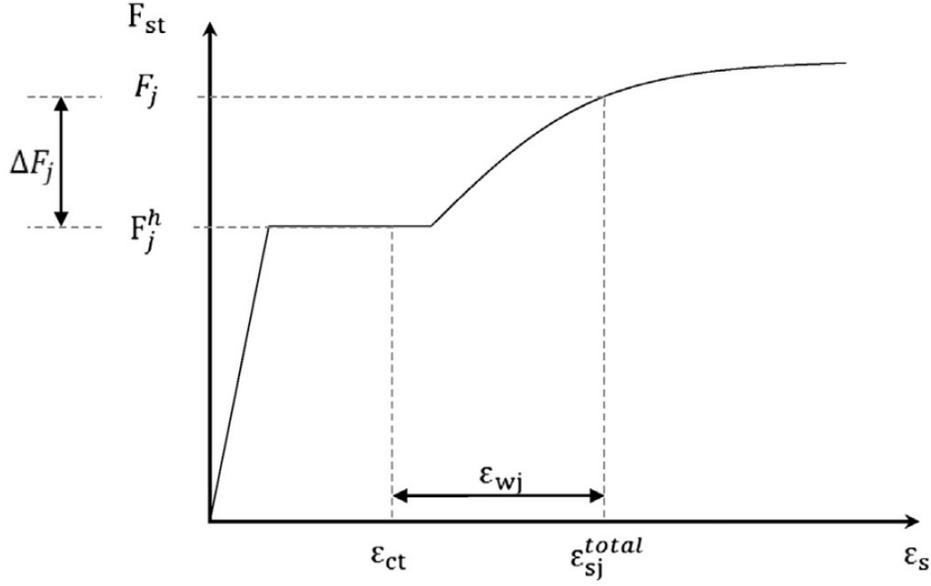


Figura 2.3: Distribución de fuerzas en los estribos. Massone & López (2014) [22]

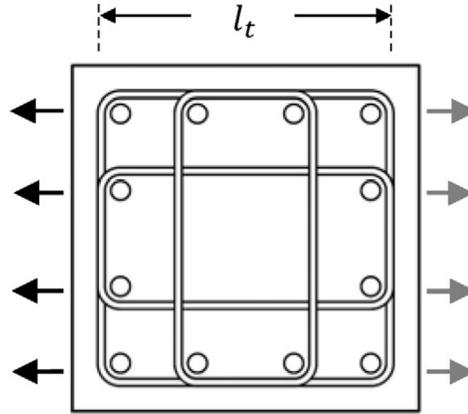


Figura 2.4: Dirección del pandeo. Massone & López (2014) [22]

$$\varepsilon_{ct} = \nu_0 \bar{\varepsilon} + k_\nu \varepsilon_{cc} \frac{(1 - 2\nu_0)}{2} \left( \frac{\bar{\varepsilon} - 0,00015/\nu_0}{\varepsilon_{cc} - 0,00015/\nu_0} \right)^2 \quad (2.8)$$

Donde  $\nu_0$  es el módulo de Poisson, asumiendo un valor igual a 0.2. El factor  $k_\nu$  se considera igual a 0.33, según la calibración realizada en Massone & López (2014) [22], con base a los datos experimentales de Bayrak & Sheikh (2001) [3].  $\varepsilon_{cc}$  es la deformación unitaria en compresión del hormigón confinado en el máximo de tensión estimado, y cuya definición queda expresada en la ecuación 2.9.

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{24,6 k_e \rho_s \sigma_{yt}}{f'_c} \right) \quad (2.9)$$

Además,  $\varepsilon_0$  es la deformación unitaria en compresión del hormigón no confinado en el máximo de tensión (ecuación 2.10).  $k_e$  es el factor de efectividad del confinamiento del hormigón, determinado según Mander et al. (1988) [19].  $\rho_s$  es la cuantía volumétrica del refuerzo transversal.  $\sigma_{st}$  es la tensión del fluencia del refuerzo transversal y  $f'_c$  es la tensión de rotura del hormigón en compresión.

$$\varepsilon_0 = 0,00078 (f'_c)^{1/4} \quad (2.10)$$

Por otro lado, de acuerdo a la Figura 2.5, la distancia “ $x_j$ ” al centroide y el desplazamiento transversal “ $y_j$ ” de cada estribo dependen de la posición del estribo analizado, en las expresiones 2.11 y 2.12 se definen estas variables. Donde “ $l_p$ ” es la longitud de la rótula plástica y cuyo valor se puede asumir igual al diámetro  $d$  de la barra. Las variables “ $\theta_e$ ” y “ $\theta_p$ ” corresponden a los giros producidos por la imperfección inicial y el pandeo de la barra, respectivamente.

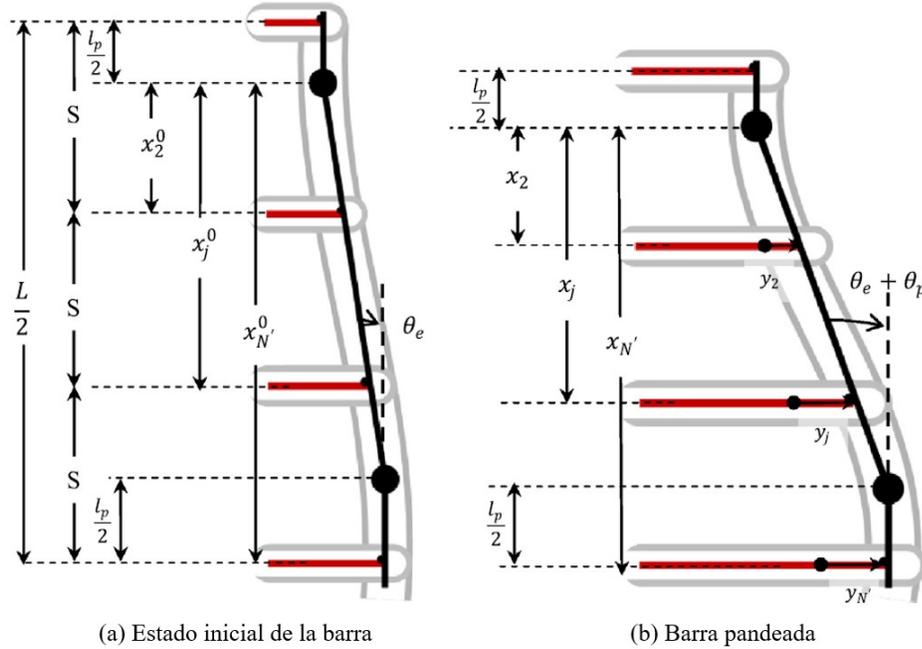


Figura 2.5: Localización del refuerzo transversal ( $x_j$ ) y su desplazamiento ( $y_j$ ). Massone & López (2014) [22]

$$x_j = \begin{cases} x_j^0 \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} & \text{si } 0 < x_j^0 < \frac{L}{2} - \frac{l_p}{2} \\ x_j^0 + \left(\frac{L}{2} - l_p\right) \left(\frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} - 1\right) & \text{si } \frac{L}{2} - \frac{l_p}{2} \leq x_j^0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$y_j = \begin{cases} x_j^0 \frac{\sin(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} - x_j^0 \tan(\theta_e) & \text{si } 0 < x_j^0 < \frac{L}{2} - \frac{l_p}{2} \\ \left(\frac{L}{2} - l_p\right) \frac{\sin(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)} - \left(\frac{L}{2} - l_p\right) \tan(\theta_e) & \text{si } \frac{L}{2} - \frac{l_p}{2} \leq x_j^0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Dentro del análisis del refuerzo longitudinal susceptible al pandeo en columnas y muros, se requiere definir el número de barras ( $nl$ ) susceptibles al pandeo en una determinada dirección, y número de ramas ( $nt$ ) de los estribos que brindan soporte dicha dirección (Figura 2.6). De tal forma que,  $nl$  y  $nt$  se convierten en factores de ponderación que afectan la ecuación de equilibrio 2.3, quedando expresada la ecuación de equilibrio, para un grupo de barras, en la ecuación 2.13.

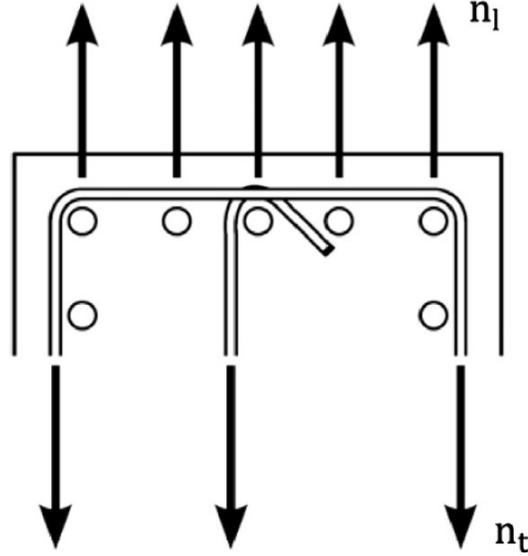


Figura 2.6: Esquema para el pandeo de un grupo de barras. Massone & López (2014) [22]

$$n_l P(e + w) + n_t \sum_{j=2}^{N'} \Delta F_j x_j - n_l 2M = 0 \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Compatibilidad

El modelo de pandeo global mantiene la ecuación de compatibilidad establecida en el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009)[23] (ecuación 2.14).

$$\bar{\varepsilon} = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \left[1 - \frac{\cos(\theta_e + \theta_p)}{\cos(\theta_e)}\right] + \varepsilon_o \quad (2.14)$$

### 2.1.3. Implementación del modelo

Este modelo también presenta la inclusión de dos fuentes de no linealidad: de material y geométrica. Por lo tanto, se requiere de métodos iterativos para resolver el equilibrio en el sistema. La implementación utiliza el mismo algoritmo que se implementa en el modelo de Massone & Moroder (2009) [23] mostrado en la Figura 1.6.

## 2.2. Modelo Propuesto

El Modelo Propuesto de pandeo global permite capturar el comportamiento tensión - deformación monotónico de una barra de refuerzo longitudinal susceptible al pandeo inelástico que se produce en una longitud equivalente a dos o más espacios entre estribos. El Modelo Propuesto de pandeo global se basa en la solución alcanzada del Modelo Propuesto de pandeo local del Capítulo 1. Es decir, para resolver la ecuación de compatibilidad se utiliza la relación entre los parámetros  $\phi_p$  (curvatura) y  $\varepsilon_{cmax}$  (deformación unitaria axial en el extremo más comprimido de la barra), calibrados a partir del Modelo G-A Modificado. También se toma en cuenta la utilización del factor de ajuste “ $m$ ”, dado que en el Modelo G-A Modificado, la degradación es más rápida porque se asume que las rótulas están plastificadas al inicio de la aplicación de la carga axial. Adicionalmente a las consideraciones tomadas en el Modelo Propuesto de pandeo local, es necesario tomar en cuenta los efectos que producen el modo de pandeo y las propiedades mecánicas del acero de refuerzo transversal (estribos).

Se evalúan los resultados con base a un set de ensayos de columnas de hormigón armado sometidas a carga axial de compresión (Tabla 2.1). Las probetas consideradas abarcan columnas cuyas secciones varían entre  $150 \times 150 \text{ mm}$  hasta  $450 \times 450 \text{ mm}$ . La cantidad de barras de refuerzo longitudinal es variables, considerando aceros de resistencia normal y de alta resistencia, usando diámetros de  $9,53 \text{ mm}$  hasta  $24 \text{ mm}$ . El set de ensayos es seleccionado con el propósito de abarcar distintos modos de pandeo (Tablas 2.1 y 2.7) y diferentes tipos de refuerzo transversal, considerado también acero de resistencia normal y de alta resistencia, y diámetros que varían entre  $4 \text{ mm}$  hasta  $10 \text{ mm}$  (Tablas 2.2, 2.3 y 2.4).

### 2.2.1. Comparación entre el modelo de pandeo global de Massone & López (2014) y el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009)

Se evalúa el comportamiento considerando las condiciones de un set de datos de ensayos experimentales disponibles en la literatura. Las condiciones geométricas, propiedades mecánicas del refuerzo longitudinal y transversal, y las propiedades del hormigón se muestran en las Tablas 2.1 a la 2.4. Se evalúa el comportamiento de las respuestas obtenidas según el modelo de pandeo global de Massone & López (2014) [22] y el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23], con el fin de evaluar el impacto de las fuerzas introducidas por los estribos.

En la Figura 2.7 se verifica que la respuesta capturada mediante el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23] presenta una mayor degradación con respecto al modelo de pandeo global de Massone & López (2014) [22]. En la Figura 2.7 se analiza el caso No. 1 de la Tabla 2.1, probeta 4C6-5 de Sheik & Uzumeri (1980) [31], asumen positivas las deformaciones y tensiones de compresión. Considerando el espaciamiento “ $S = 38,1 \text{ mm}$ ” entre estribos y el modelo de pandeo observado de 6, se obtiene un largo de pandeo  $L = 228,6 \text{ mm}$ . En el modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23] se considera como largo de pandeo:  $L = 228,6 \text{ mm}$ ; y diámetro de la barra de refuerzo longitudinal  $d = 15,9 \text{ mm}$ . Si se comparan los puntos de máxima tensión en compresión, se observa una reducción de aproximadamente 25 % en el caso del pandeo local. En la Figura 2.7(b) se observa que la curva que relaciona la curvatura con la deformación unitaria axial promedio es prácticamente paralela entre ambos

| No | Autor                   | ID          | $l_t$<br>(mm) | $nl$ | $nt$ | $S$<br>(mm) | Modo<br>observado |
|----|-------------------------|-------------|---------------|------|------|-------------|-------------------|
| 1  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 4C6-5       | 267           | 1    | 1    | 38.1        | 6                 |
| 2  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 2A6-15      | 267           | 1    | 1    | 35          | 6                 |
| 3  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 4B4-20      | 267           | 1    | 1    | 38.1        | 7                 |
| 4  | Scott et al. (1982)     | No 12       | 400           | 1    | 1    | 98          | 3                 |
| 5  | Scott et al. (1982)     | No 13       | 400           | 1    | 1    | 72          | 4                 |
| 6  | Scott et al. (1982)     | No 14       | 400           | 1    | 1    | 88          | 3                 |
| 7  | Scott et al. (1982)     | No 15       | 400           | 1    | 1    | 64          | 4                 |
| 8  | Scott et al. (1982)     | No 20       | 400           | 1    | 1    | 98          | 4                 |
| 9  | Kato et al. (1995) - A  | 4D16D6S70   | 130           | 2    | 2    | 70          | 3                 |
| 10 | Kato et al. (1995) - A  | 4D13D4S47   | 130           | 2    | 2    | 47          | 4                 |
| 11 | Kato et al. (1995) - B  | 4D16HD6S35  | 130           | 2    | 2    | 35          | 4                 |
| 12 | Kato et al. (1995) - B  | 4D16LD6S35  | 130           | 2    | 2    | 35          | 4                 |
| 13 | Ooya & Kato (1994)      | 12D10D6S47  | 130           | 4    | 2    | 47          | 4                 |
| 14 | Ooya & Kato (1994)      | 12D10D6S47I | 130           | 4    | 2    | 47          | 2                 |
| 15 | Ooya & Kato (1994)      | 12D13D4S35I | 130           | 4    | 4    | 35          | 5                 |
| 16 | Masatomo et al. (1993)  | 8D13D6S47T  | 130           | 3    | 3    | 47          | 3                 |
| 17 | Kikukawa et al. (1994)  | 8D13LD4S70  | 130           | 3    | 2    | 70          | 2                 |

Tabla 2.1: Set de ensayos de pandeo global

modelos. Además, se puede concluir que la respuesta tensión - deformación del modelo de pandeo global de Massone & Moroder (2014) [22] no degrada inmediatamente como en el caso del modelo de pandeo local, debido a un corrimiento de la curva que relaciona la curvatura  $\phi_p$  con la deformación unitaria axial promedio  $\bar{\varepsilon}$ . En adelante, a este corrimiento se le denominará “ $\varepsilon_{corr}$ ”. Se advierte un comportamiento similar en el caso 8D13LD4S70 de Kikukawa et al. (1994) [16] (Figura 2.8), que presenta un modo de pandeo observado igual a 6, y un valor similar de “ $\varepsilon_{corr}$ ”. Cabe resaltar que, según los cálculos a partir del modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23],  $\phi_p$  se mantiene igual a 0 en el tramo elástico de carga ( $\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y$ ).

Sin embargo, en algunos casos como en el 12D10D6S47 de Ooya & Kato (1994) [26] (Figura 2.9) es necesario alcanzar grandes deformaciones unitarias (de hasta el 10 %), para conseguir identificar “ $\varepsilon_{corr}$ ”. Esta diferencia con respecto a los casos observados en las Figuras 2.7 y 2.8, se debe a que se asume el modo de pandeo observado en el ensayo. Si se utiliza un criterio unificado, como el método de Dhakal & Maekawa (2002)[7] para determinar el modo de pandeo, se podrían estimar valores de “ $\varepsilon_{corr}$ ” coherentes entre sí.

### 2.2.2. Método para determinar el modo de pandeo de Dhakal & Maekawa (2002)

El método para determinar el largo crítico de pandeo asumido en el modelo de Massone & López (2013) [22] consiste en seleccionar el modo que entrega el menor valor máximo en la respuesta tensión - deformación. Este método tiene como inconveniente la necesidad de calcular la respuesta ante distintos modos de pandeo. Otro método disponible en la literatura es el propuesto por Dhakal & Maekawa (2002) [7]. Este método consiste en evaluar la rigidez total efectiva de los estribos ( $k_t$ ); luego se evalúa la rigidez transversal mínima ( $k_n$ ) para

| <b>Refuerzo longitudinal</b> |             |             |                       |                              |                              |                                   |
|------------------------------|-------------|-------------|-----------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| <b>No</b>                    | <b>ID</b>   | <b>d</b>    | <b><math>E</math></b> | <b><math>\sigma_y</math></b> | <b><math>\sigma_m</math></b> | <b><math>\varepsilon_m</math></b> |
|                              |             | <b>(mm)</b> | <b>(Gpa)</b>          | <b>(MPa)</b>                 | <b>(MPa)</b>                 |                                   |
| 1                            | 4C6-5       | 15.9        | 200                   | 372                          | 600                          | 0.05                              |
| 2                            | 2A6-15      | 15.9        | 200                   | 404                          | 650                          | 0.05                              |
| 3                            | 4B4-20      | 19.1        | 200                   | 392                          | 550                          | 0.05                              |
| 4                            | No 12       | 20          | 200                   | 434                          | 653                          | 0.06                              |
| 5                            | No 13       | 20          | 200                   | 434                          | 653                          | 0.06                              |
| 6                            | No 14       | 20          | 200                   | 434                          | 653                          | 0.06                              |
| 7                            | No 15       | 20          | 200                   | 434                          | 653                          | 0.06                              |
| 8                            | No 20       | 24          | 200                   | 394                          | 592                          | 0.06                              |
| 9                            | 4D16D6S70   | 15.9        | 200                   | 342                          | 497                          | 0.1                               |
| 10                           | 4D13D4S47   | 12.7        | 200                   | 343                          | 495                          | 0.1                               |
| 11                           | 4D16HD6S35  | 15.9        | 200                   | 739                          | 847                          | 0.1                               |
| 12                           | 4D16LD6S35  | 15.9        | 200                   | 342                          | 497                          | 0.1                               |
| 13                           | 12D10D6S47  | 9.53        | 200                   | 351                          | 479                          | 0.1                               |
| 14                           | 12D10D6S47I | 9.53        | 200                   | 351                          | 479                          | 0.1                               |
| 15                           | 12D13D4S35I | 12.7        | 200                   | 363                          | 482                          | 0.1                               |
| 16                           | 8D13D6S47T  | 12.7        | 200                   | 363                          | 482                          | 0.1                               |
| 17                           | 8D13LD4S70  | 13          | 200                   | 343                          | 495                          | 0.1                               |

Tabla 2.2: Propiedades mecánicas del refuerzo longitudinal de los ensayos de pandeo global

| <b>Refuerzo transversal</b> |             |             |                       |                              |                              |                                   |
|-----------------------------|-------------|-------------|-----------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| <b>No</b>                   | <b>ID</b>   | <b>d</b>    | <b><math>E</math></b> | <b><math>\sigma_y</math></b> | <b><math>\sigma_m</math></b> | <b><math>\varepsilon_m</math></b> |
|                             |             | <b>(mm)</b> | <b>(Gpa)</b>          | <b>(MPa)</b>                 | <b>(MPa)</b>                 |                                   |
| 1                           | 4C6-5       | 4.76        | 200                   | 510                          | 545                          | 0.0305                            |
| 2                           | 2A6-15      | 6.35        | 200                   | 498                          | 535                          | 0.0317                            |
| 3                           | 4B4-20      | 4.76        | 200                   | 544                          | 560                          | 0.023                             |
| 4                           | No 12       | 10          | 200                   | 309                          | 410                          | 0.062                             |
| 5                           | No 13       | 10          | 200                   | 309                          | 410                          | 0.062                             |
| 6                           | No 14       | 12          | 200                   | 296                          | 400                          | 0.062                             |
| 7                           | No 15       | 12          | 200                   | 296                          | 400                          | 0.062                             |
| 8                           | No 20       | 12          | 200                   | 296                          | 400                          | 0.062                             |
| 9                           | 4D16D6S70   | 6.35        | 200                   | 348                          | 470                          | 0.04                              |
| 10                          | 4D13D4S47   | 4           | 200                   | 583                          | 614                          | 0.03                              |
| 11                          | 4D16HD6S35  | 6.35        | 200                   | 761                          | 1000                         | 0.06                              |
| 12                          | 4D16LD6S35  | 6.35        | 200                   | 761                          | 1000                         | 0.06                              |
| 13                          | 12D10D6S47  | 6.35        | 200                   | 363                          | 470                          | 0.04                              |
| 14                          | 12D10D6S47I | 6.35        | 200                   | 363                          | 470                          | 0.04                              |
| 15                          | 12D13D4S35I | 4           | 200                   | 671                          | 741                          | 0.03                              |
| 16                          | 8D13D6S47T  | 6.35        | 200                   | 392                          | 520                          | 0.04                              |
| 17                          | 8D13LD4S70  | 4           | 200                   | 704                          | 725                          | 0.06                              |

Tabla 2.3: Propiedades mecánicas del refuerzo transversal de los ensayos de pandeo global

| Hormigón |             |                 |                    |         |          |      |
|----------|-------------|-----------------|--------------------|---------|----------|------|
| No       | ID          | $f'_c$<br>(MPa) | $\varepsilon_{cc}$ | $\nu_0$ | $\rho_s$ | $ke$ |
| 1        | 4C6-5       | 34.9            | 0.02               | 0.2     | 2.3%     | 89%  |
| 2        | 2A6-15      | 31.7            | 0.01               | 0.2     | 2.3%     | 88%  |
| 3        | 4B4-20      | 34.7            | 0.01               | 0.2     | 1.7%     | 90%  |
| 4        | No 12       | 24.8            | 0.01               | 0.2     | 1.4%     | 78%  |
| 5        | No 13       | 24.8            | 0.01               | 0.2     | 1.8%     | 84%  |
| 6        | No 14       | 24.8            | 0.01               | 0.2     | 2.2%     | 81%  |
| 7        | No 15       | 24.8            | 0.01               | 0.2     | 3.1%     | 86%  |
| 8        | No 20       | 24.8            | 0.01               | 0.2     | 2.9%     | 86%  |
| 9        | 4D16D6S70   | 24.9            | 0.005              | 0.2     | 1.4%     | 72%  |
| 10       | 4D13D4S47   | 25.5            | 0.005              | 0.2     | 0.8%     | 69%  |
| 11       | 4D16HD6S35  | 66              | 0.01               | 0.2     | 2.8%     | 48%  |
| 12       | 4D16LD6S35  | 66              | 0.01               | 0.2     | 2.8%     | 39%  |
| 13       | 12D10D6S47  | 27.5            | 0.01               | 0.2     | 2.1%     | 40%  |
| 14       | 12D10D6S47I | 27.5            | 0.02               | 0.2     | 4.8%     | 36%  |
| 15       | 12D13D4S35I | 27              | 0.02               | 0.2     | 2.6%     | 51%  |
| 16       | 8D13D6S47T  | 26              | 0.02               | 0.2     | 3.1%     | 53%  |
| 17       | 8D13LD4S70  | 68.8            | 0.02               | 0.2     | 0.6%     | 59%  |

Tabla 2.4: Propiedades mecánicas del hormigón de los ensayos de pandeo global

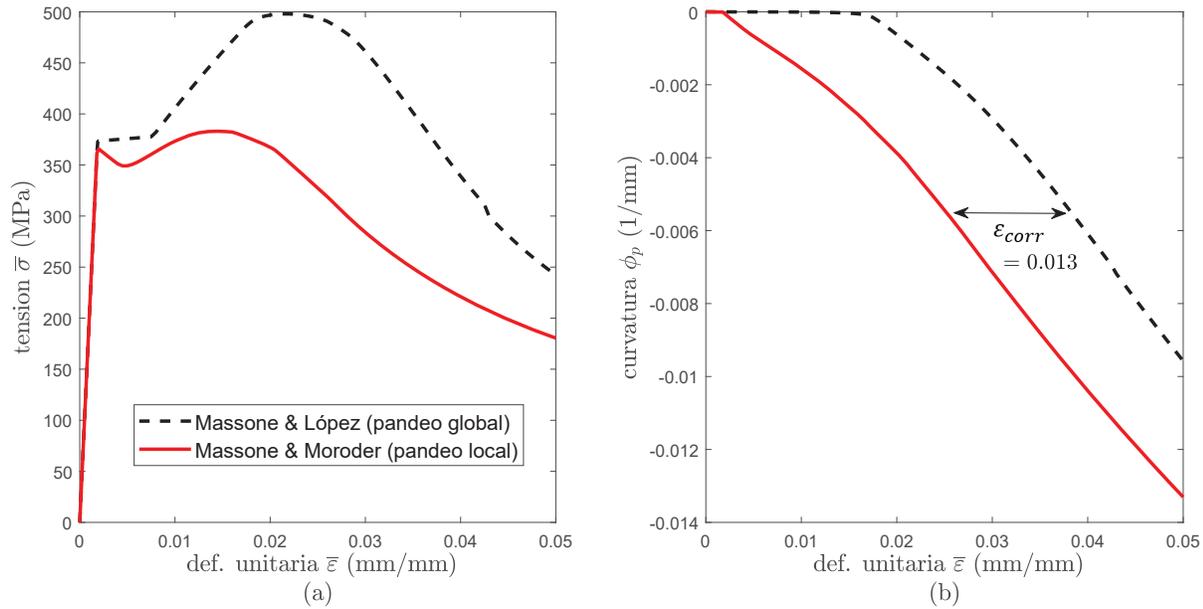


Figura 2.7: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980)[31]

sujetar la barra de refuerzo longitudinal en los diferentes modos de pandeo ( $n$ ). Así, el proceso iterativo se detiene cuando la rigidez efectiva de los estribos ( $k_t$ ) es menor que la requerida para el modo “ $n - 1$ ”, pero excede el modo “ $n$ ”, se asume que el modo “ $n$ ” es el modo estable donde la rigidez provista por los estribos consigue sostener la rigidez lateral requerida. El

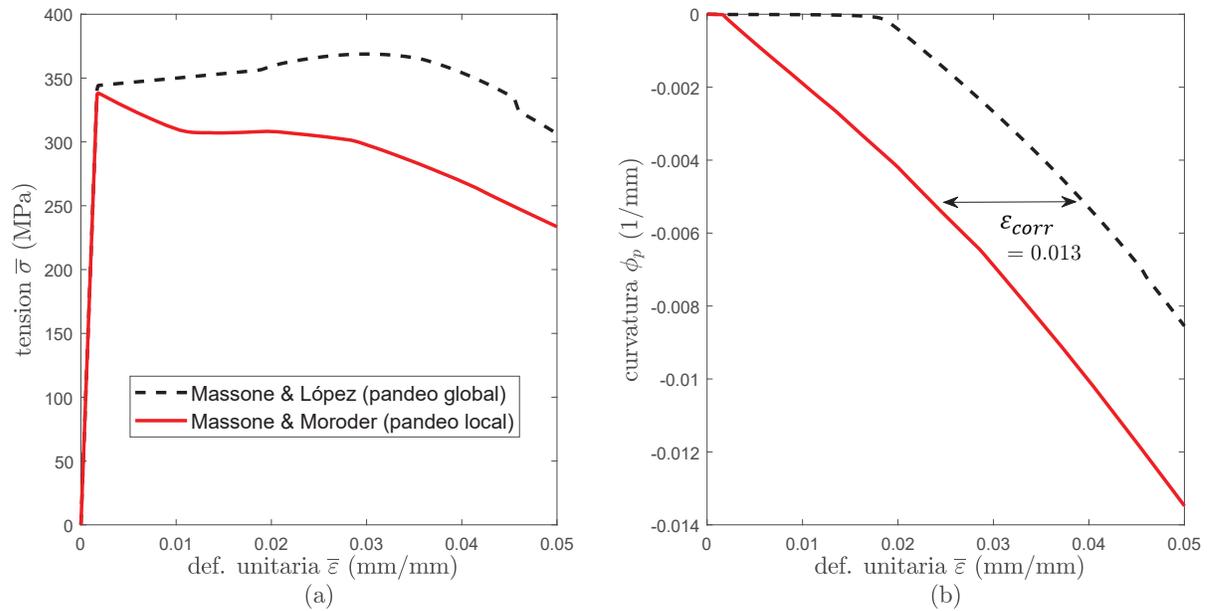


Figura 2.8: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13LD4S70 de Kikukawa et al. (1994) [16]

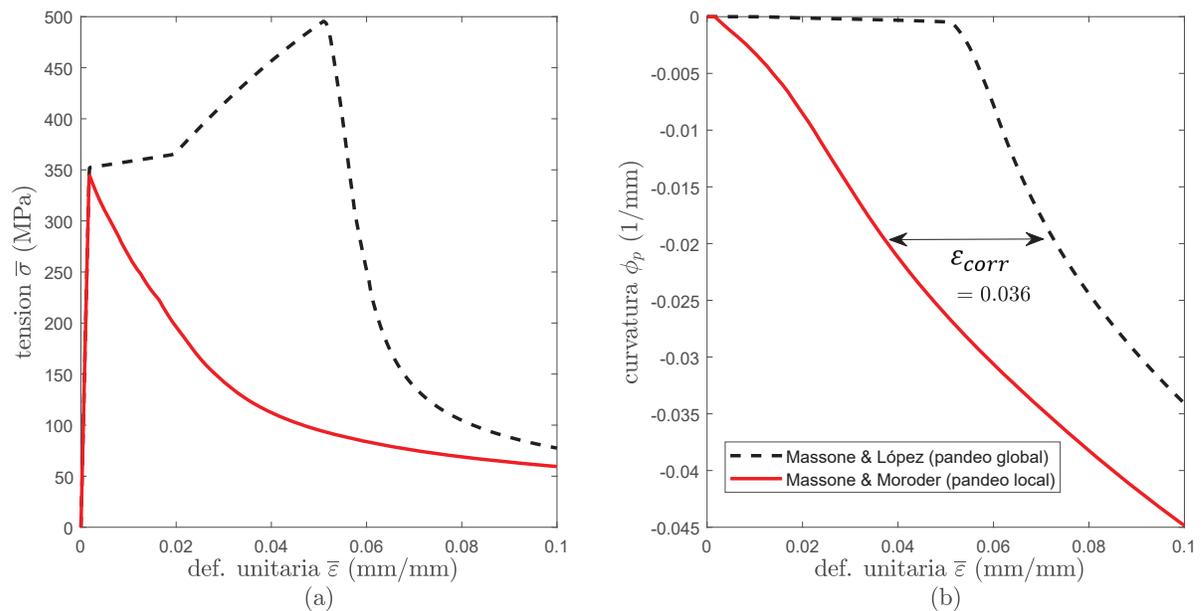


Figura 2.9: (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47 de Ooya & Kato (1994) [26]

algoritmo del método descrito sigue el procedimiento del diagrama de flujo mostrado en la Figura 2.10.

El método se basa en la idealización geométrica presentada en la Figura 2.11, donde la barra de refuerzo longitudinal muestra una forma sinusoidal dentro del largo de pandeo, y los

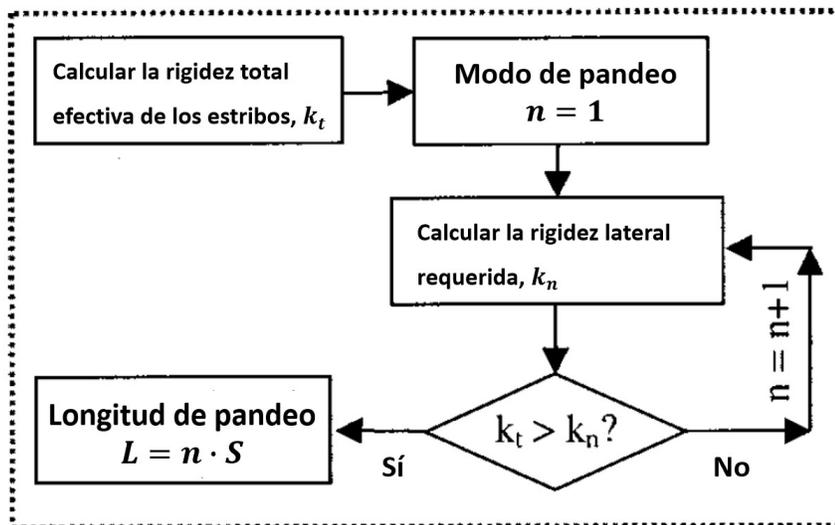


Figura 2.10: Diagrama de flujo para determinar el largo de pandeo. Dhakal & Maekawa (2002) [7]

estribos son representados mediante resortes elásticos. Así, la rigidez lateral requerida “ $k_n$ ” queda definida en la ecuación 2.15.

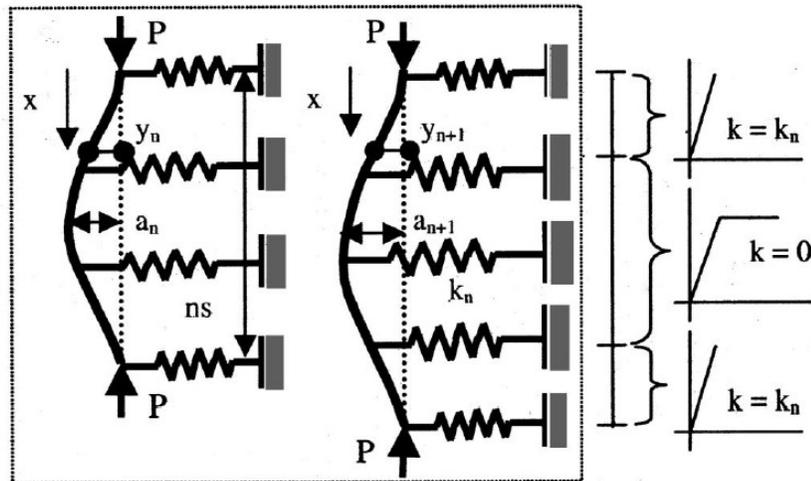


Figura 2.11: Idealización geométrica del pandeo global de la barra de acero de refuerzo longitudinal. Dhakal & Maekawa (2002) [7]

$$k_n = k_{eq} \frac{\pi^4 EI}{S^3} \quad (2.15)$$

Donde  $k_{eq}$  es la rigidez lateral equivalente, la cual depende del modo de pandeo estable (Tabla 2.5). Se asumen que la rigidez a flexión ( $EI$ ) de la barra se encuentra fuera de la zona elástica, y es calculada mediante la ecuación 2.16.

| Modo de pandeo "n" | $k_{eq}$ |
|--------------------|----------|
| 1                  | 0.7500   |
| 2                  | 0.1649   |
| 3                  | 0.0976   |
| 4                  | 0.0448   |
| 5                  | 0.0084   |
| 6                  | 0.0063   |
| 7                  | 0.0037   |
| 8                  | 0.0031   |
| 9                  | 0.0013   |
| 10                 | 0.0009   |

Tabla 2.5: Valores de  $k_{eq}$  para distintos modos de pandeo. Dhakal & Maekawa (2002) [7]

$$EI = 0,5E_s I \sqrt{\frac{f_y}{400MPa}} \quad (2.16)$$

Por otro lado, la rigidez total efectiva de los estribos ( $k_t$ ) se calcula tomando en cuenta el número de barras susceptibles al pandeo ( $nl$ ) y el número de ramas de estribos ( $nt$ ) en la dirección analizada. Así,  $k_t$  queda expresada mediante la ecuación 2.17.

$$k_t = \frac{E_t A_t nt}{l'_t nl} \quad (2.17)$$

Donde  $E_t$  y  $A_t$ , son el módulo de elasticidad y el área de la sección transversal de la barra de acero de refuerzo transversal, respectivamente.

De tal forma, en la Tabla 2.6 se presentan los modos de pandeo calculados mediante el método de Dhakal & Maekawa (2002) [7].

### 2.2.3. Compatibilidad

Según el comportamiento observado en las Figuras 2.7(b) y 2.8(b), que las curvas de pandeo local y global son paralelas y cuya separación es igual a una distancia denominada " $\varepsilon_{corr}$ ". Por lo tanto, este comportamiento amerita el cambio de coordenadas, expresado en la ecuación 2.18, para utilizar la ecuación de compatibilidad del modelo G-A Modificado (2.19).

$$\bar{\varepsilon}_S = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_{corr} \quad (2.18)$$

Donde:

$$\bar{\varepsilon}_S = \left(1 - \frac{2l_p}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + \varepsilon_o \quad (2.19)$$

| No | Autor                   | ID          | Modo<br>D & M |
|----|-------------------------|-------------|---------------|
| 1  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 4C6-5       | 5             |
| 2  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 2A6-15      | 5             |
| 3  | Sheikh & Uzumeri (1980) | 4B4-20      | 7             |
| 4  | Scott et al. (1982)     | No 12       | 2             |
| 5  | Scott et al. (1982)     | No 13       | 4             |
| 6  | Scott et al. (1982)     | No 14       | 2             |
| 7  | Scott et al. (1982)     | No 15       | 4             |
| 8  | Scott et al. (1982)     | No 20       | 4             |
| 9  | Kato et al. (1995) - A  | 4D16D6S70   | 2             |
| 10 | Kato et al. (1995) - A  | 4D13D4S47   | 4             |
| 11 | Kato et al. (1995) - B  | 4D16HD6S35  | 5             |
| 12 | Kato et al. (1995) - B  | 4D16LD6S35  | 5             |
| 13 | Ooya & Kato (1994)      | 12D10D6S47  | 2             |
| 14 | Ooya & Kato (1994)      | 12D10D6S47I | 2             |
| 15 | Ooya & Kato (1994)      | 12D13D4S35I | 5             |
| 16 | Masatomo et al. (1993)  | 8D13D6S47T  | 2             |
| 17 | Kikukawa et al. (1994)  | 8D13LD4S70  | 2             |

Tabla 2.6: Modos de pandeo. Calculados mediante el método de Dhakal & Maekawa (2002) [7]

El Modelo Propuesto de pandeo global se basa en la calibración calculada entre los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  (ecuación 1.48) para resolver la ecuación de compatibilidad en el Modelo Propuesto de pandeo local (ecuación 2.20).

$$\left(1 - \frac{2d}{L}\right) \frac{\phi_p^2 d^2}{2} + C0 + C1(\phi_p d) + C2(\phi_p d)^2 - \phi_p \frac{d}{2} + \varepsilon_{corr} - \bar{\varepsilon} = 0 \quad (2.20)$$

Así, mediante la solución de la ecuación cuadrática 2.20, se tiene que el valor de la curvatura  $\phi_p$  queda en función de deformación unitaria axial promedio  $\bar{\varepsilon}$ , siguiendo las ecuaciones 2.21 a 2.23.

$$\phi_p = \phi_p(\bar{\varepsilon}) \quad (2.21)$$

Donde:

$$\phi_p(\bar{\varepsilon}) = \frac{-b - \sqrt{\text{discr}(\bar{\varepsilon})}}{2a} \quad (2.22)$$

$$\text{discr}(\bar{\varepsilon}) = b^2 - 4 a c(\bar{\varepsilon}) \quad (2.23)$$

## Estimación de “ $\varepsilon_{corr}$ ”

Considerando el método de Dhakal & Maekawa (2002) [7] como un criterio unificado para determinar el modo de pandeo en cada uno de los casos analizados. Así, para los casos mostrados en la Tabla 2.6, es posible identificar “ $\varepsilon_{corr}$ ”, corrimiento que separa las curvas casi paralelas que relacionan a curvatura  $\phi_p$  con la deformación unitaria axial promedio  $\bar{\varepsilon}$ , entre los modelos de pandeo local y global. En la Tabla 2.7 se muestran los valores estimados de “ $\varepsilon_{corr}$ ”.

| No | Autor                  | ID          | $\varepsilon_{corr}$ |
|----|------------------------|-------------|----------------------|
| 1  | Sheik & Uzumeri (1980) | 4C6-5       | 1.30 %               |
| 2  | Sheik & Uzumeri (1980) | 2A6-15      | 1.15 %               |
| 3  | Sheik & Uzumeri (1980) | 4B4-20      | 1.15 %               |
| 4  | Scott et al. (1982)    | No 12       | 0.50 %               |
| 5  | Scott et al. (1982)    | No 13       | 0.50 %               |
| 6  | Scott et al. (1982)    | No 14       | 0.45 %               |
| 7  | Scott et al. (1982)    | No 15       | 0.50 %               |
| 8  | Scott et al. (1982)    | No 20       | 0.45 %               |
| 9  | Kato et al. (1995) - A | 4D16D6S70   | 0.65 %               |
| 10 | Kato et al. (1995) - A | 4D13D4S47   | 1.00 %               |
| 11 | Kato et al. (1995) - B | 4D16HD6S35  | 2.20 %               |
| 12 | Kato et al. (1995) - B | 4D16LD6S35  | 2.95 %               |
| 13 | Ooya & Kato (1994)     | 12D10D6S47  | 1.10 %               |
| 14 | Ooya & Kato (1994)     | 12D10D6S47I | 1.20 %               |
| 15 | Ooya & Kato (1994)     | 12D13D4S35I | 1.80 %               |
| 16 | Masatomo et al. (1993) | 8D13D6S47T  | 1.05 %               |
| 17 | Kikukawa et al. (1994) | 8D13LD4S70  | 1.25 %               |

Tabla 2.7: Cálculo del “ $\varepsilon_{corr}$ ” para el set de ensayos de pandeo global

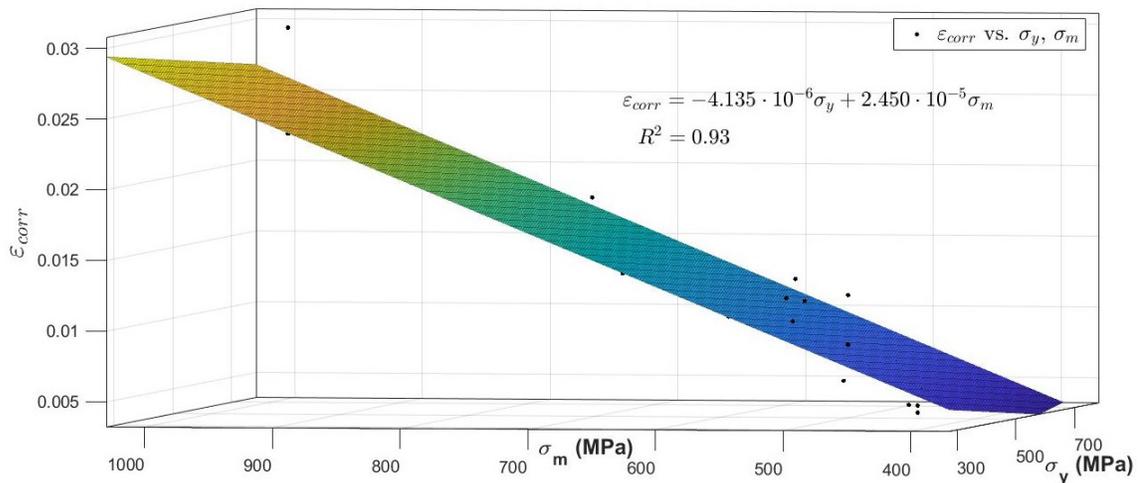


Figura 2.12: Estimación lineal para calcular “ $\varepsilon_{corr}$ ”

A diferencia del modelo de pandeo local, el valor de  $\varepsilon_{corr}$  observado en el modelo de pandeo global de Massone & López (2013) [22], no guarda relación con la deformación unitaria máxima en tracción  $\varepsilon_{max}$ , dado que en el modelo de pandeo global se analiza el caso monotónico. Algunos de los parámetros que impactan en el valor del “ $\varepsilon_{corr}$ ” son los correspondientes a las

propiedades mecánicas del acero de refuerzo transversal. Precisamente, en la Figura 2.12 se presenta la aproximación lineal que relaciona  $\sigma_y$  y  $\sigma_m$  con el “ $\varepsilon_{corr}$ ”.

De tal modo, la estimación del “ $\varepsilon_{corr}$ ” queda definida en la ecuación 2.24. Donde  $\sigma_y$  y  $\sigma_m$  están expresados en [MPa].

$$\varepsilon_{corr} = -4,135 \cdot 10^{-6} \sigma_y + 2,450 \cdot 10^{-5} \sigma_m \quad (2.24)$$

## 2.2.4. Equilibrio

El Modelo Propuesto evita resolver las ecuaciones de equilibrio del modelo de Massone & López (2014) [22]: ecuaciones 2.3 y 2.13.

## 2.2.5. Implementación del modelo

Teniendo definidos el cálculo del modo de pandeo, la solución de la ecuación de compatibilidad y la estimación de  $\varepsilon_{corr}$ ; caben las siguientes consideraciones para la implementación del Modelo Propuesto de pandeo global para casos ante cargas monotónicas de compresión.

1. Según el comportamiento del modelo de Massone & López, observado en las Figuras 2.7(b), 2.8(b) y 2.9(b), la curvatura se mantiene en un valor cercano a cero ( $\phi_p \approx 0$ ). Por lo tanto, en el tramo  $0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_y + \varepsilon_{corr}$ , se asume que  $\phi_p = 0$ . Además, dado que la calibración basada en el modelo de G-A Modificado presenta una mayor degradación en la respuesta, se considera el factor de ajuste “ $m$ ” que afecta la relación de esbeltez (ecuación 1.58).
2. Según la Figura 2.13, se verifica un cambio abrupto en la respuesta en el punto en que  $\phi_p$  deja de ser igual a cero. Es posible mitigar este cambio, tomando en cuenta la solución análoga al modelo constitutivo del acero de Menegotto & Pinto (1973) [24] (Figura 1.26(b)). Así, es necesario también utilizar la forma linealizada (ecuación 2.25) de la solución de la ecuación de compatibilidad, donde se asume que  $\varepsilon_{ref}^- = 0$ .

$$\phi_p(\bar{\varepsilon}) = \frac{-b - \sqrt{\text{discr}(\bar{\varepsilon}_{ref})}}{2a} + \frac{2L(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{ref})}{\sqrt{\text{discr}(\bar{\varepsilon}_{ref})}} \quad (2.25)$$

3. Considerando la solución linealizada, los valores de  $\phi_p$ , quedan definidos mediante las ecuaciones 2.26 a 2.28. Así, en la Figura 2.14(a) se observa un mejor comportamiento de la respuesta tensión - deformación.

$$\varepsilon^* = \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{r1}} \quad (2.26)$$

$$\phi^* = b \varepsilon^* + \frac{(1 - b) \varepsilon^*}{(1 + \varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad (2.27)$$

$$\phi_p = \phi^* (\phi_{p0} - \phi_{p_{r1}}) + \phi_{p_{r1}} \quad (2.28)$$

Donde:

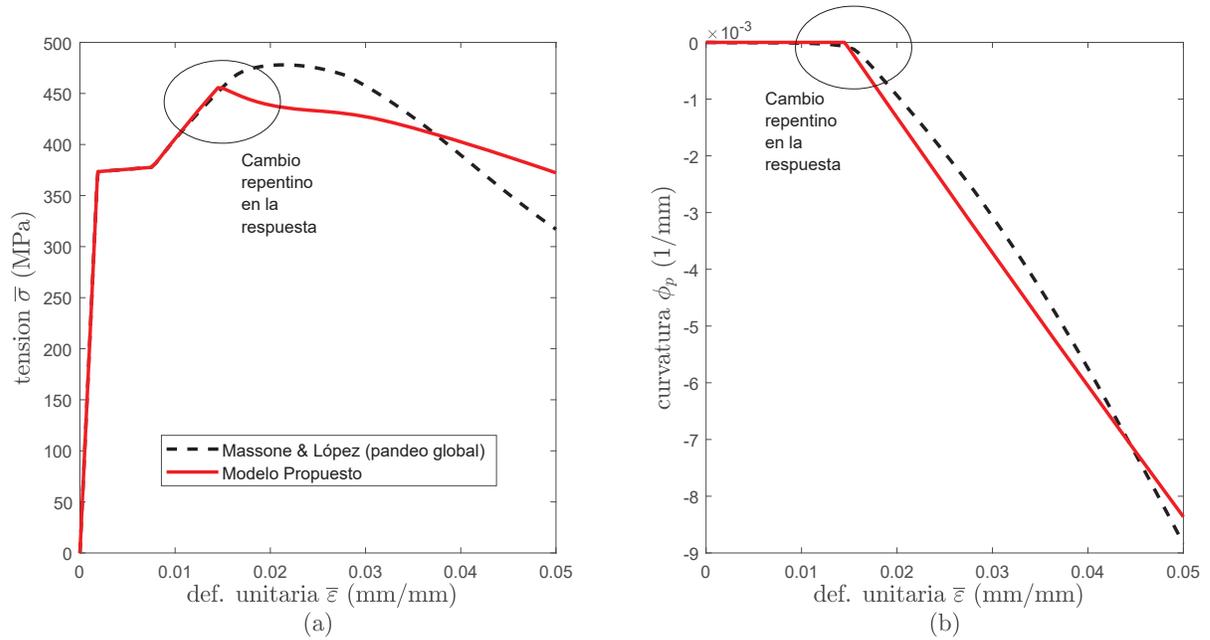


Figura 2.13: Modelo Propuesto (usando  $L/d$   $L/d_{calibrado}$ ) versus Modelo de Massone & López (2014) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31]

$$\varepsilon_{r1} = 0 \quad (2.29)$$

$$\phi p_{r1} = 0 \quad (2.30)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{corr} \quad (2.31)$$

$$\phi p_0 = \phi p_{r1} - mh (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_0) \quad (2.32)$$

## 2.2.6. Verificación del modelo

Algunos de los ensayos de los mostrados en la Tabla 2.1 cuentan con una aproximación de la respuesta tensión-deformación del refuerzo longitudinal (probetas: 4D16HD6S35, 4D16LD6S35, 12D10D6S47 y 12D10D6S47I). Para el caso de las probetas indicadas, se ensayaron especímenes idénticos con 4 barras de refuerzo longitudinal de 4 mm de diámetro, y con 12 barras de 4 mm de diámetro en el caso de la probeta 12D10D6S47I. El aporte del refuerzo longitudinal se calculó restando la respuesta de las probetas indicadas menos la respuesta en las probetas con el refuerzo longitudinal reducido. La deformación unitaria axial promedio se estimó tomando el desplazamiento vertical de la probeta y quitando a este valor el desplazamiento determinado por sensores extensiométricos colocados fuera de la zona dañada del refuerzo longitudinal.

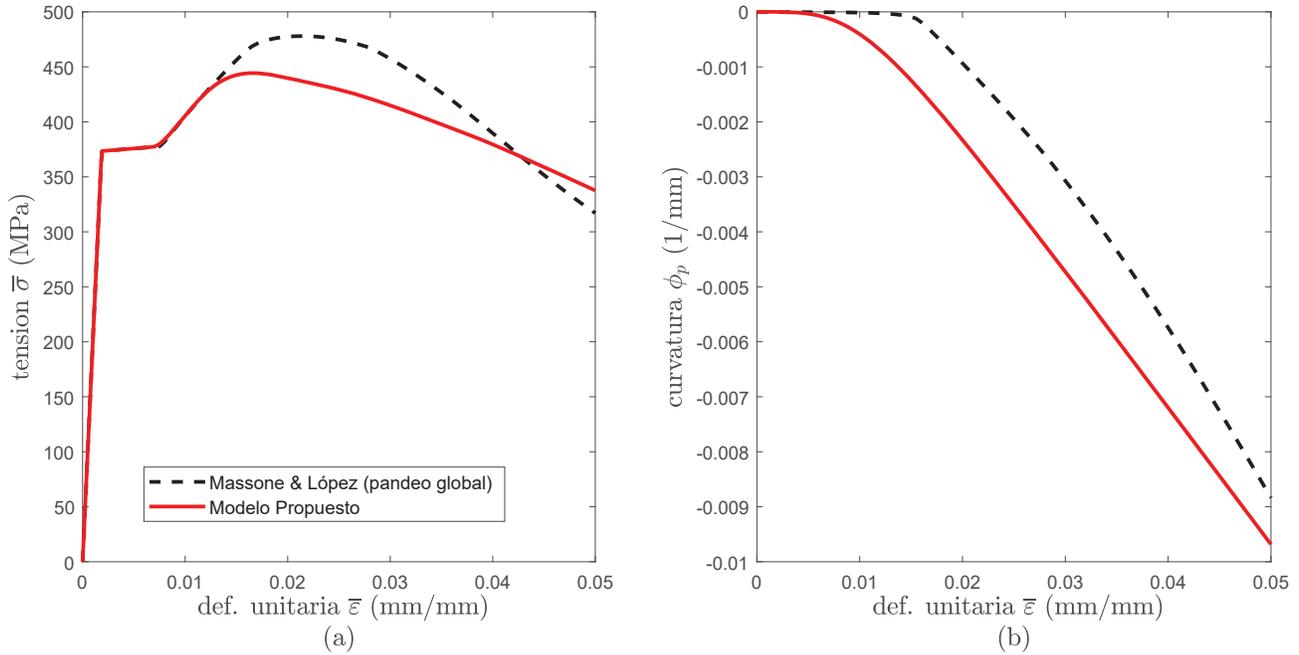


Figura 2.14: Modelo Propuesto (usando  $L/d_{calibrado}$  y solución de la ecuación de compatibilidad linealizada) versus Modelo de Massone & López (2014) (a) Respuesta tensión - deformación promedio y, (b) Curvatura versus deformación unitaria promedio. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31]

De tal modo en la Figura 2.15 se muestra la comparación de la respuestas: experimental, Modelo de pandeo global de Massone & López (2014) [22], Modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23] y Modelo Propuesto de pandeo global. Se observa que el Modelo Propuesto de pandeo global presenta una respuesta bastante aproximada a los valores experimentales, inclusive presenta un mejor comportamiento que el Modelo Massone & López luego de alcanzar la máxima tensión en compresión. Para calcular la respuesta en el Modelo de Massone & Moroder, se considera que el largo de la barra pandeada es igual al modo de pandeo ( $n$ ) multiplicado por la separación entre estribos ( $S$ ). Se verifica que el modelo de pandeo local de Massone & Moroder no consigue acercarse a los resultados experimentales, dado que su degradación ocurre inmediatamente luego de alcanzar la deformación de fluencia del acero. Por otro lado, en la Figura 2.16 se observa un comportamiento similar del Modelo Propuesto de pandeo global con respecto al Modelo de Massone & López (2014); sin embargo, las respuestas en ambos modelos van por debajo de los valores experimentales.

En las Figuras 2.17 y 2.18, se verifica que el Modelo Propuesto entrega la misma respuesta, dado que la calibración de  $\varepsilon_{corr}$  no considera otras características como el factor de efectividad de confinamiento del hormigón ( $ke$ ) o la cuantía de refuerzo transversal ( $\rho_s$ ). Sin embargo, se puede asumir que la aproximación es razonable, dado que el Modelo Propuesto de pandeo global presenta una mejor precisión que el Modelo de pandeo local. Además, el Modelo Propuesto es más eficiente a nivel computacional, puesto que evita utilizar cálculos iterativos como los modelos de Massone & Moroder (2009) [23] y Massone & López (2014) [22].

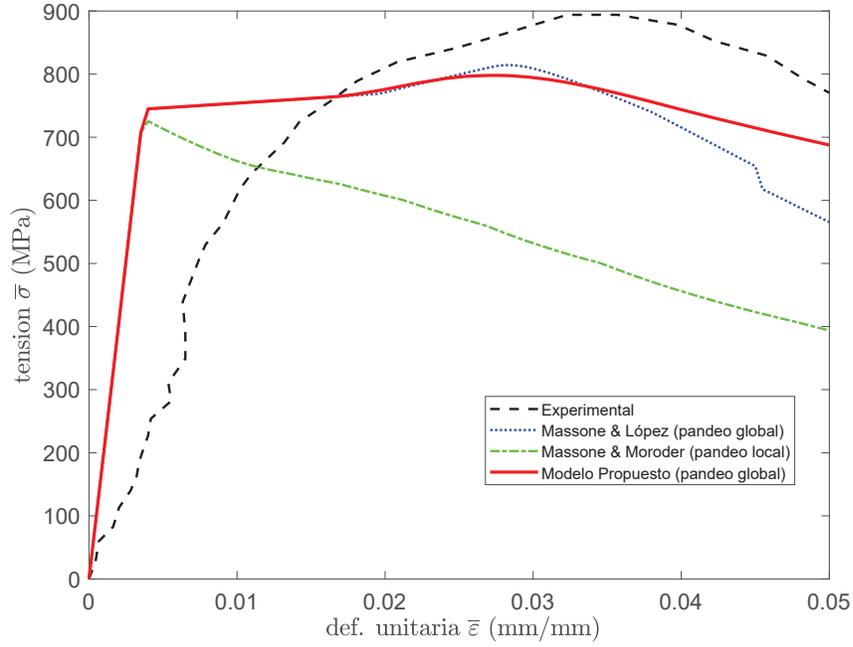


Figura 2.15: Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16HD6S35 de Kato et al. (1995) [15]

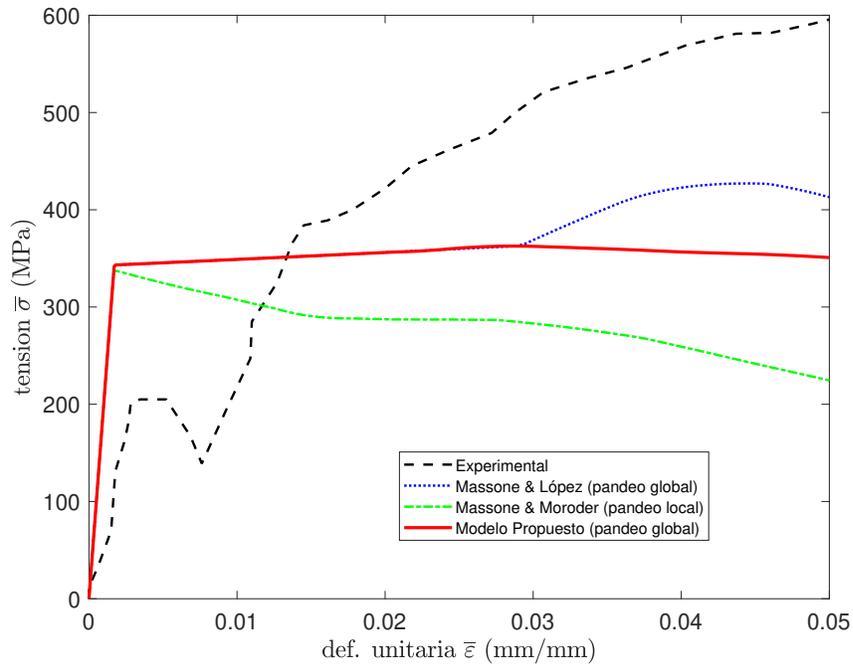


Figura 2.16: Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16LD6S35 de Kato et al. (1995) [15]

Por otro lado, en las Figuras 2.19 a la 2.31, se muestra la comparación entre la respuesta

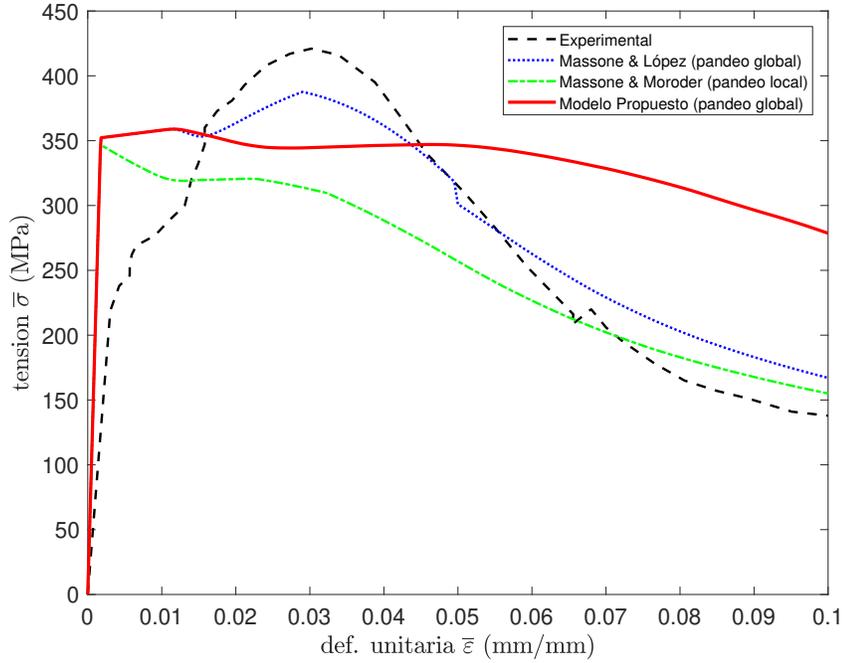


Figura 2.17: Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47 de Ooya & Kato (1994) [26]

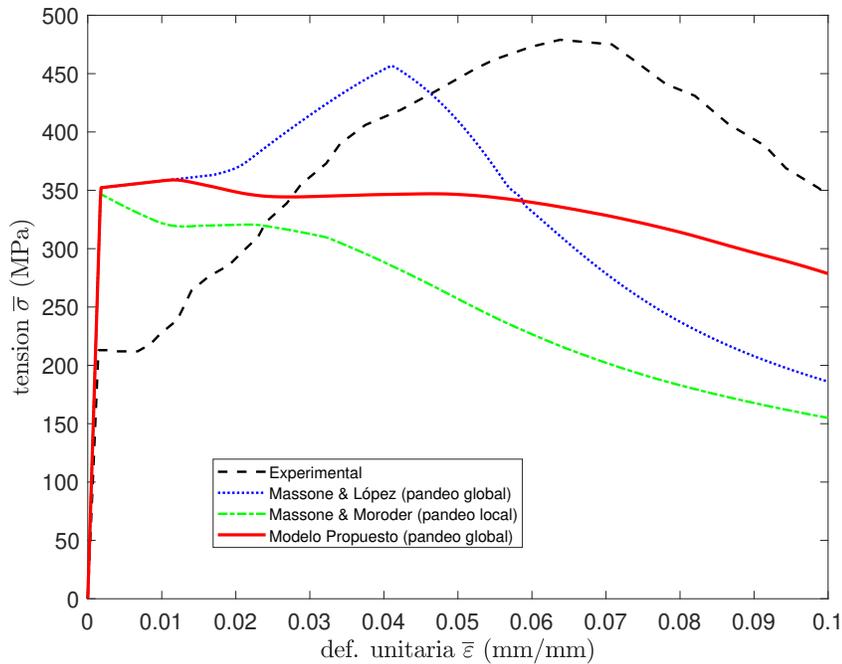


Figura 2.18: Verificación de la respuesta tensión-deformación versus valores experimentales. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D10D6S47I de Ooya & Kato (1994) [26]

obtenida del Modelo Propuesto de pandeo global versus las respuestas de los modelos de

de Massone & Moroder (2009) [23] y Massone & López (2014) [22]. Se observa una buena aproximación del Modelo Propuesto de pandeo global con respecto al Modelo de Massone & López (2014)[22].

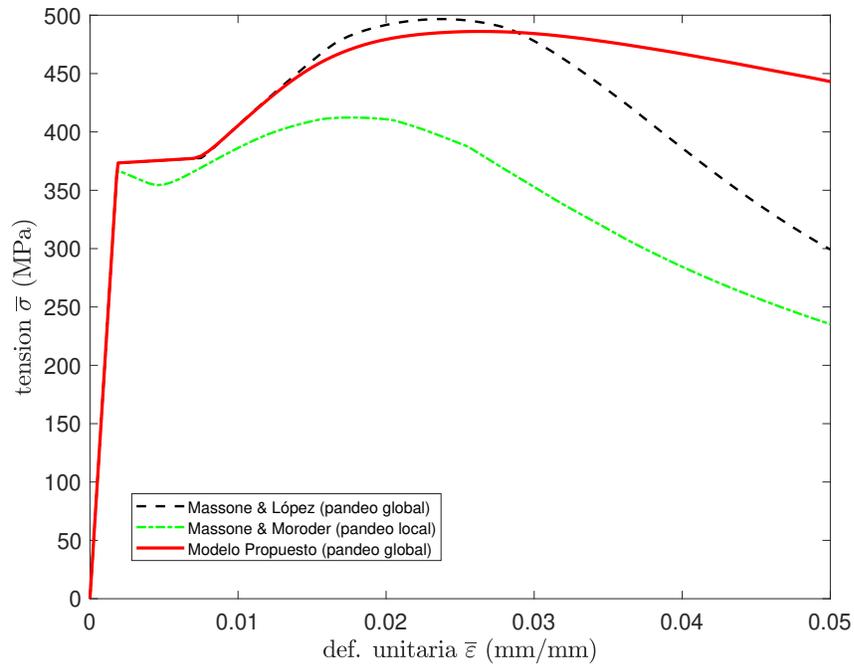


Figura 2.19: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4C6-5 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31]

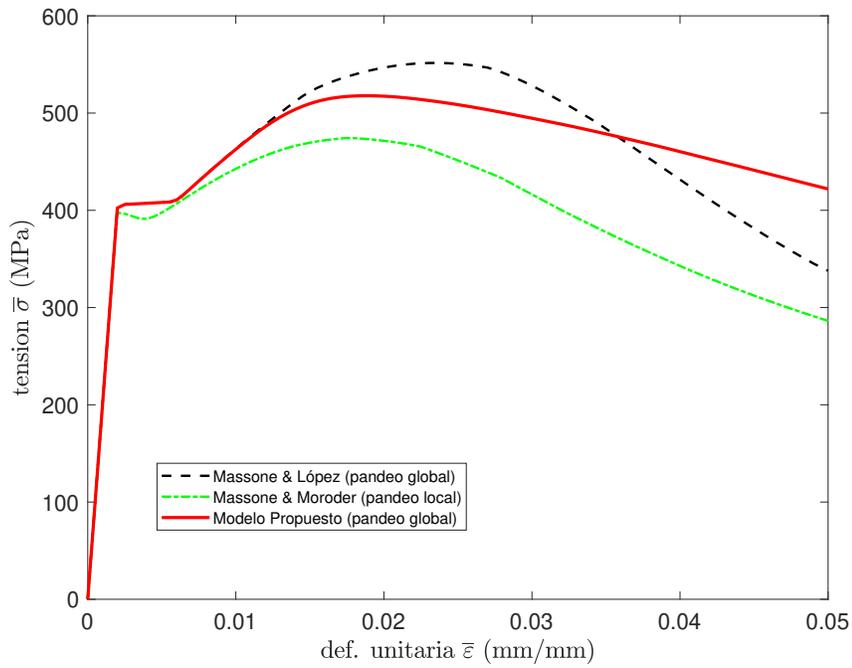


Figura 2.20: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4A6-15 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31]

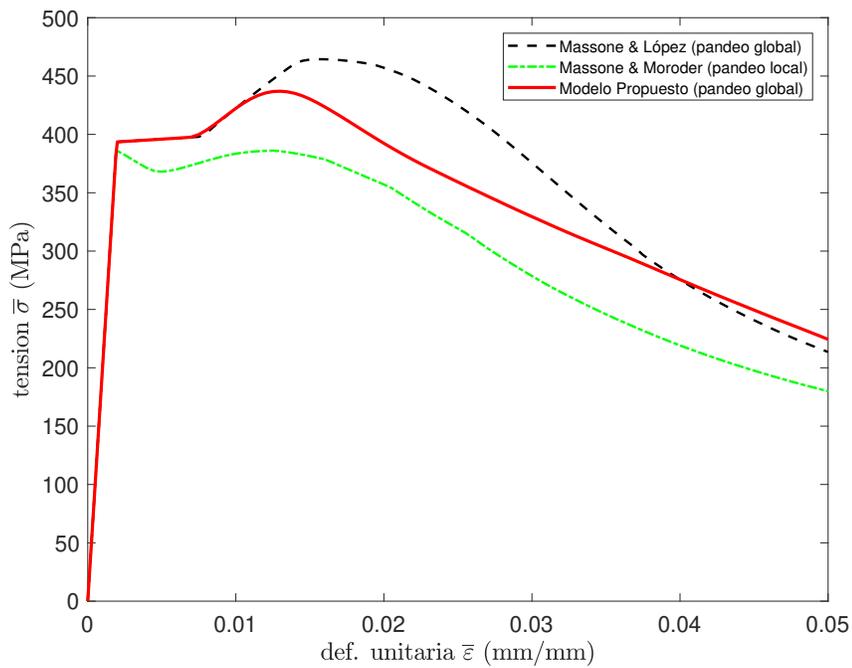


Figura 2.21: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4B4-20 de Sheikh & Uzumeri (1980) [31]

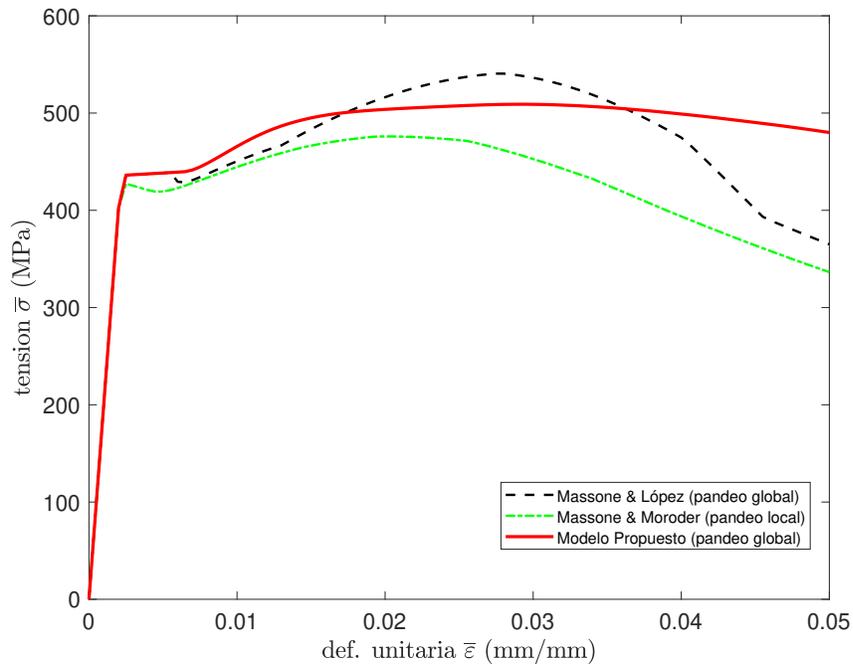


Figura 2.22: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 12 de Scott et al. (1982) [30]

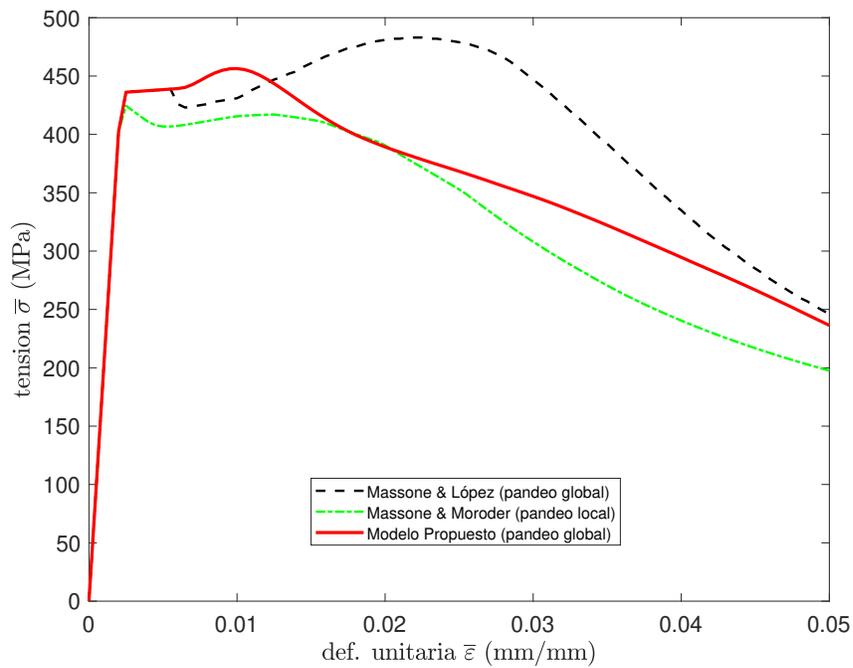


Figura 2.23: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 13 de Scott et al. (1982) [30]

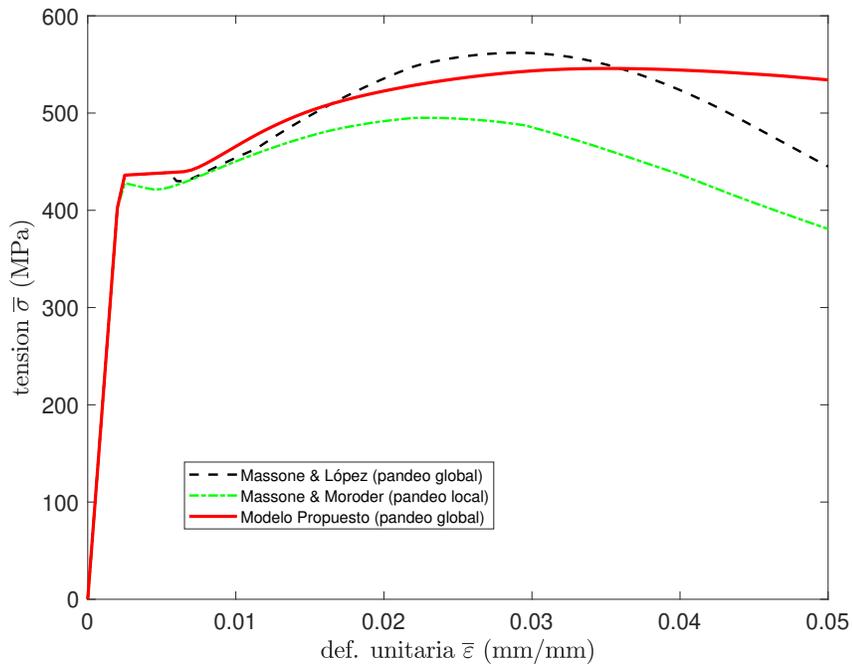


Figura 2.24: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 14 de Scott et al. (1982) [30]

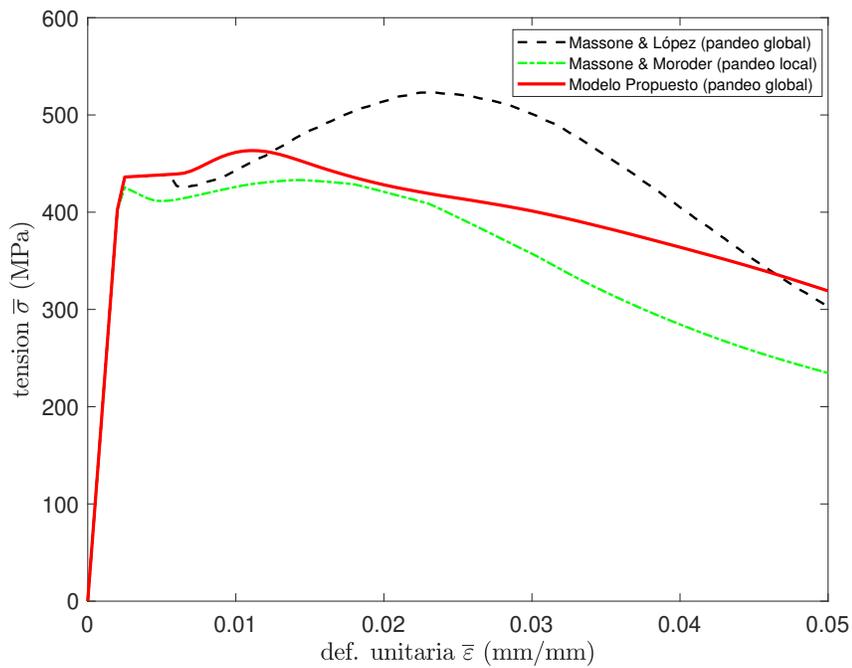


Figura 2.25: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 15 de Scott et al. (1982) [30]

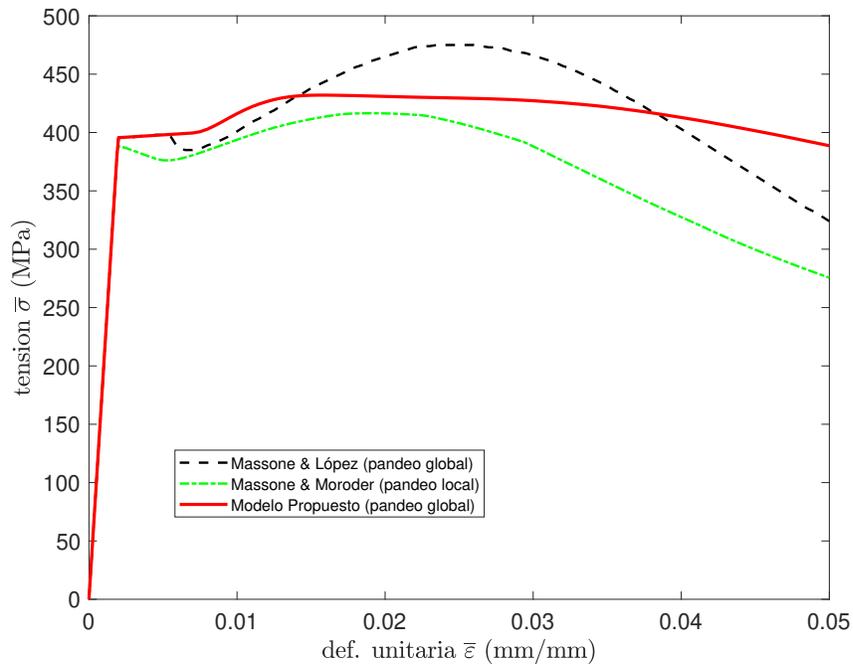


Figura 2.26: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta No 20 de Scott et al. (1982) [30]

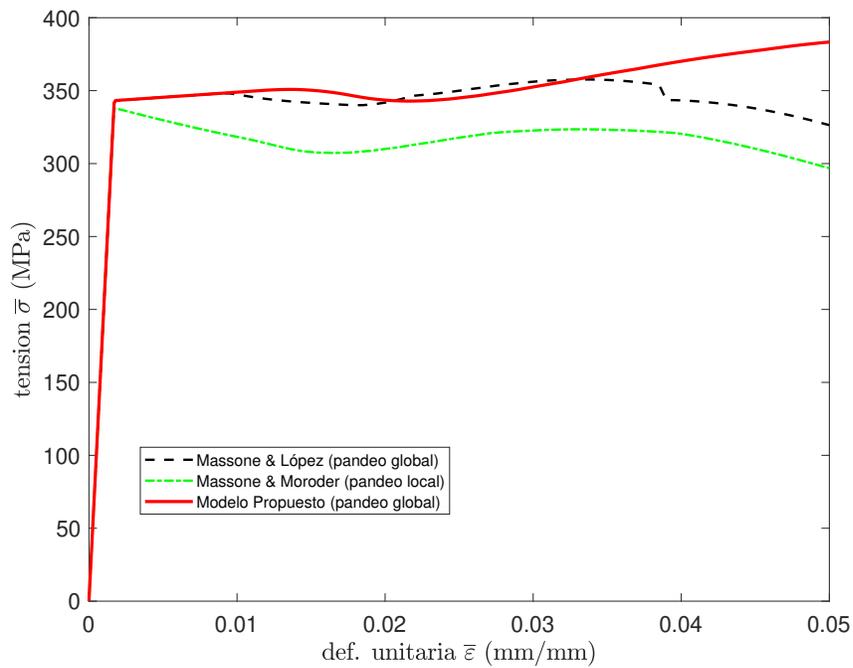


Figura 2.27: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D16D6S70 de Kato et al. (1995) [15]

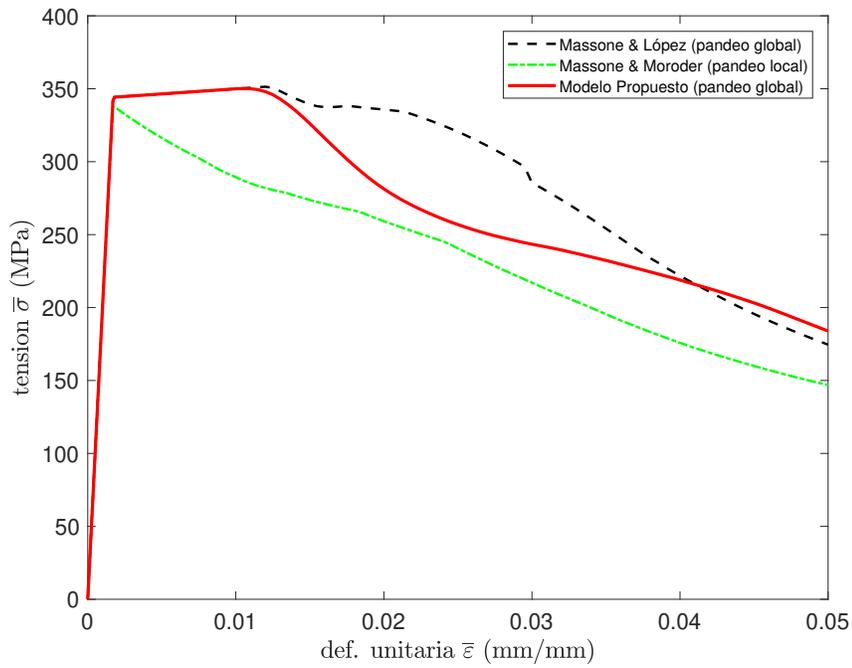


Figura 2.28: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 4D13D4S47 de Kato et al. (1995) [15]

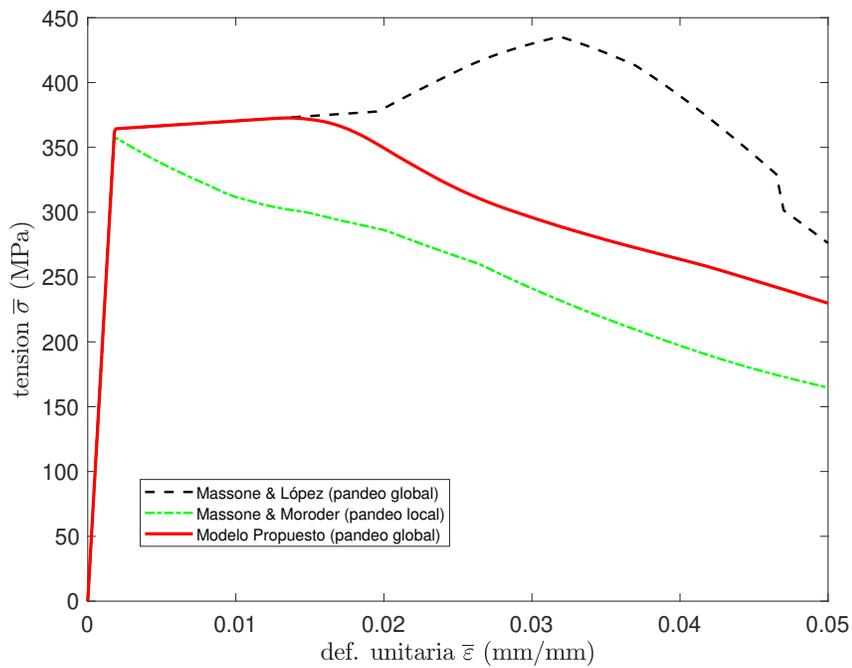


Figura 2.29: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 12D13D4S35I de Ooya & Kato (1994) [26]

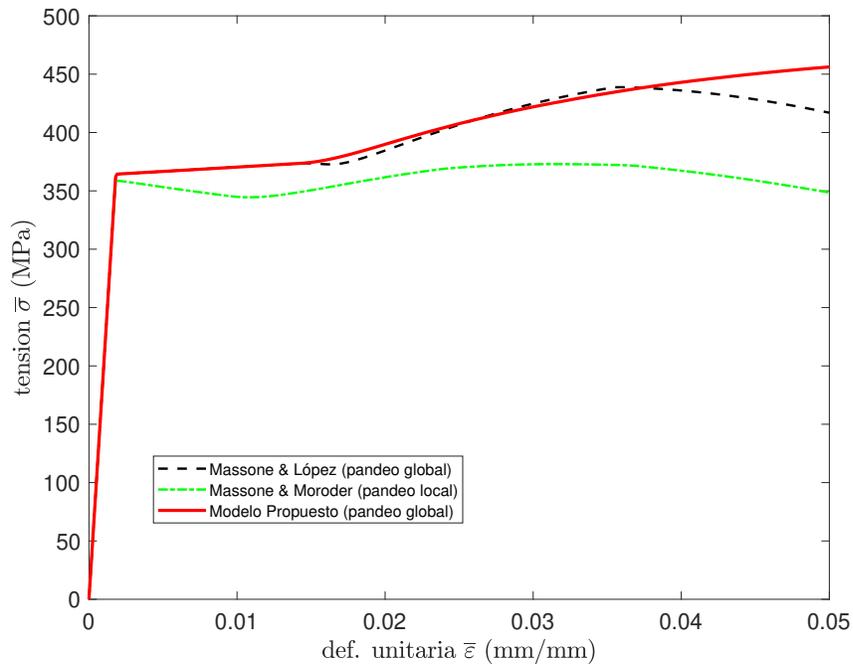


Figura 2.30: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13D6S47T de Masamoto et al. (1993) [21]

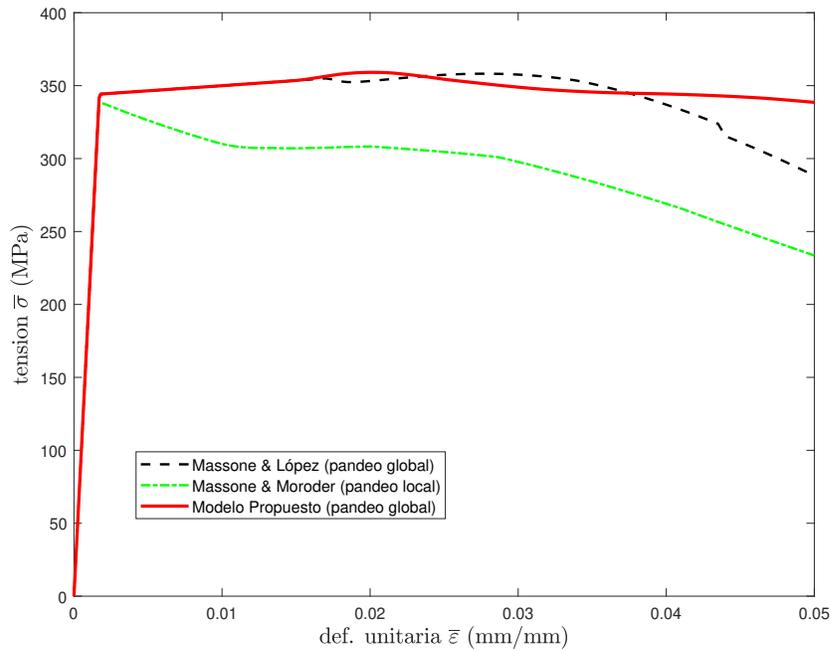


Figura 2.31: Verificación de la respuesta tensión-deformación. Caso monotónico en compresión. Probeta 8D13LD4S70 de Kikukawa et al. (1994) [21]

# Conclusión

El estudio presenta un modelo matemático no iterativo que captura la respuesta tensión-deformación de una barra de acero de refuerzo susceptible al pandeo local, ante cargas monotónicas y cíclicas. Además, se adapta la solución del modelo no iterativo de pandeo local para presentar un modelo tensión-deformación que incluye los efectos del pandeo global ante cargas monotónicas. El modelo geométrico se basa en un modelo de plasticidad concentrada con cuatro rótulas plásticas. El análisis de la sección transversal de las rótulas plásticas se realiza mediante la discretización en fibras, asumiendo la hipótesis de Bernoulli. A partir del modelo geométrico G-A Modificado de la Figura 1.10 y la distribución de tensiones en la rótula plástica (Figura 1.9) asumidos por el modelo de Gomes & Appleton (1997) [12], se consigue deducir una expresión que relaciona la curvatura ( $\phi_p$ ) y la deformación unitaria axial en extremo más comprimido de la sección de la barra ( $\varepsilon_{cmax}$ ). Esta expresión permite reducir o simplificar la ecuación de compatibilidad de los modelos de Massone & Moroder (2009) [23] y Massone & López (2014) [22]. La ecuación de compatibilidad reducida permite estimar el valor de la curvatura ( $\phi_p$ ) para cada punto de deformación unitaria axial promedio ( $\bar{\varepsilon}$ ) evaluado. Así, los modelos propuestos evitan resolver el equilibrio del sistema. Por lo tanto, también se evita la utilización de un procedimiento iterativo, consiguiendo un modelo mucho más eficiente a nivel computacional, entre 15 y 20 veces más rápido, según el análisis que se muestra en la Tabla 1.5.

En el proceso de implementación del Modelo Propuesto de pandeo local, se identifica el parámetro “ $\varepsilon_{corr}$ ”. Este parámetro determina el punto en que se inicia el pandeo de la barra en un caso histerético, cuando la aplicación de la carga axial comienza con la tracción de la barra más allá del rango elástico. La estimación de “ $\varepsilon_{corr}$ ” está definida solo en función de la relación de esbeltez ( $L/d$ ), no dependiendo de los parámetros mecánicos del acero de refuerzo. Los parámetros para establecer la relación entre  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  también se encuentran en función solo de la relación de esbeltez ( $L/d$ ). Este comportamiento se debe a que en la expresión donde se deduce  $\phi_p$  (ecuación 1.46), a partir de la ecuación de equilibrio (ecuación 1.25) del modelo de Gomes & Appleton (1997) [12], no interviene ningún parámetro correspondiente a las propiedades mecánicas de la barra. La aplicación del factor de reajuste “ $m$ ” permite disminuir la prematura degradación producto de la calibración entre los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$ . considerando  $3 \leq m \leq 4$  se obtienen resultados bastante aproximados a los valores experimentales y al modelo de Massone & Moroder (2009) [23]. Además, otro mecanismo para evitar la degradación prematura, particularmente en la fase de recarga del caso histerético, es la acotación de los valores de  $\phi_p$  mediante las asíntotas mostradas en la Figura 1.26(b). Esta solución es análoga al planteamiento utilizado en el modelo constitutivo del acero según Menegotto & Pinto (1973) [24]. Asumiendo  $R = 3$ , se observó una respuesta bastante aproxi-

mada al comportamiento presentado por el modelo de Massone & Moroder (2009) [23] (por ejemplo en la Figura 1.28). De igual manera, también se observa una buena aproximación en casos cíclicos donde la amplitud de deformación ( $\varepsilon_a$ ) es variable en cada ciclo. Respecto a la respuesta en casos donde  $L/d \geq 15$  y  $\varepsilon_a \geq 5\%$  se presentan irregularidades en los puntos de mayor deformación en compresión. Así, se recomienda restringir la aplicación del Modelo Propuesto, en los casos cíclicos, a valores de  $L/d \leq 15$  y  $\varepsilon_a \leq 5\%$ .

Una de las ventajas del Modelo Propuesto de pandeo local, al igual que el modelo de Massone & Moroder (2009) [23], es permitir calcular la respuesta tensión-deformación en cada una de las fibras en que se discretiza la sección transversal. Así, a partir de la respuesta obtenida en cada fibra es posible identificar cual fibra presenta una mayor acumulación de deformaciones. Una de las características de la respuesta a nivel de fibra consiste en presentar amplitudes de deformación ( $\varepsilon_a$ ) variable, a pesar de que el comportamiento general en la barra presente una  $\varepsilon_a$  constante. En la Figura 1.38 se advierte que la mayor  $\varepsilon_a$  se produce en la fibra más comprimida de la barra. Estos resultados analíticos son consecuentes con las observaciones experimentales realizadas por Rodríguez et al. (1999) [29]. Además, estimando el número de ciclos en la respuesta tensión-deformación de las fibras mediante el método de Rainflow, se verifica que la menor cantidad de medios ciclos ( $2N_f$ ) se presenta en las fibras más comprimidas (Tabla 1.6). Según la relación de Palmgren - Miner, se define el daño por fatiga ( $D$ ) como una función inversamente proporcional al número de ciclos hasta la falla; por lo tanto, se concluye que la mayor acumulación de daño por fatiga se produce en las fibras más comprimidas. Este comportamiento demuestra analíticamente que la fractura en la barra de acero de refuerzo inicia en extremo más comprimido de la sección. En los estudios de Kashani et al. (2015) [13], se observa experimentalmente este comportamiento.

Durante la implementación del Modelo Propuesto de pandeo global, se establece el parámetro " $\varepsilon_{corr}$ " que determina el inicio del pandeo en el caso monotónico en compresión. El corrimiento " $\varepsilon_{corr}$ " para el caso de pandeo global, queda calibrado en función de los parámetros mecánicos del refuerzo transversal ( $\sigma_y$  y  $\sigma_m$  en [MPa]). Se establece el método de Dhakal & Maekawa (2002) [7] como el algoritmo para determinar el modo de pandeo, el inconveniente de utilizar el método presentado en Massone & López (2014) [22] se reduce a la necesidad de calcular la respuesta para diferentes modos, procedimiento que no es eficiente debido a la iteración con cada modo de pandeo considerado. La relación entre los parámetros  $\phi_p$  y  $\varepsilon_{cmax}$  es la misma establecida en el Modelo Propuesto de pandeo local. De igual manera, se considera la aplicación del factor de reajuste " $m$ ", obteniendo buenas aproximaciones con el mismo rango de valores asumidos en el Modelo Propuesto de pandeo local. También se plantea la solución linealizada y la acotación entre asíntotas (Figura 1.26(b)) para calcular  $\phi_p$ , asumiendo  $R = 3$ . Son limitados los resultados experimentales que permitan comparar el modelo. El procedimiento para la obtención de los valores experimentales con los que se compara el Modelo Propuesto de pandeo global (Figuras 2.15 a la 2.18), puede conllevar imprecisiones debido a la estimación del largo del pandeo y la obtención de la respuesta (restando la repuesta de una probeta con refuerzo mínimo de la probeta analizada). Sin embargo, en las Figuras 2.15, 2.17 y 2.18 se observa una aproximación del Modelo Propuesto. Asimismo, también se verifica un buen comportamiento en los casos donde se compara el Modelo Propuesto de pandeo global con el modelo de Massone & López (2014) [22]. En todos los casos donde se verifica el modelo, se observa que el comportamiento del modelo de pandeo local de Massone & Moroder (2009) [23] (con un largo de pandeo equivalente) presenta

una degradación excesiva con respecto a los valores experimentales y al modelo de Massone & López (2014) [22]. Por tanto, el Modelo Propuesto de pandeo global se convierte en una alternativa que presenta una buena aproximación y eficiencia a nivel computacional.

La solución de los modelos constitutivos propuestos es de simple implementación, dado que no requieren procedimientos iterativos. La solución queda determinada mediante la implementación de ecuaciones sencillas que están en función de los parámetros geométricos y mecánicos de la barra de acero de refuerzo. De tal modo, es posible implementar las soluciones propuestas en programas de análisis estructural, por ejemplo: Opensees. Así, los modelos constitutivos pueden servir para el análisis de columnas, muros o elementos de hormigón sometidos a carga axial cíclica, incluyendo los efectos del pandeo inelástico del acero de refuerzo longitudinal. Para futuras investigaciones, se propone evaluar la metodología propuesta para estimar el comportamiento tensión-deformación de estructuras susceptibles al pandeo.

# Bibliografía

- [1] *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318-19) y Comentario de Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318R-19)*. American Concrete Institute, 2019.
- [2] Abdullah, S. A., & Wallace, J. W. (2019). Drift capacity of reinforced concrete structural walls with special boundary elements. *ACI Structural Journal*, 116(1):183–194.
- [3] Bayrak, O., & Sheikh, S. A. (2001). Plastic Hinge Analysis. *Journal of structural engineering*, 127(September):1092–1100.
- [4] Bresler, B., & Gilbert, P. H. (1961). Tie Requirements for Reinforced Concrete Columns. *ACI J Proc*, 58(11):555–570.
- [5] Brown, J., & Kunnath, S.K. (2000). Low-Cycle Fatigue Behavior of Longitudinal Reinforcement in Reinforced Concrete Bridge Columns. *Technical Report MCEER-00-0007*, page 126.
- [6] Chang, G.A., & Mander, J.B. (1994). Seismic Energy Based Damage Analysis of Bridge Columns: Part I - evaluation of seismic capacity. Technical report, Department of civil engineering. Technical Report NCEER-94-0006. State University of New York at Buffalo.
- [7] Dhakal, R. P., & Maekawa, K. (2002). Reinforcement stability and fracture of cover concrete in reinforced concrete members. *Journal of Structural Engineering*, 128(10):1253–1262.
- [8] Dhakal, R. P., & Maekawa, K. (2002a). Modeling for postyield buckling of reinforcement. *Journal of Structural Engineering*, 128(9):1139–1147.
- [9] Dhakal, R. P., & Su, J. (2018). Design of transverse reinforcement to avoid premature buckling of main bars. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 47(1):147–168.
- [10] Dodd, L. L., & Restrepo-Posada, J. I. (1995). Model for predicting cyclic behavior of reinforcing steel. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 121(3):433–445.
- [11] Egger, J. E. (2020). *Análisis experimental de fatiga cíclica en barras de refuerzo de acero de alta resistencia mediante fotogrametría*. Memoria para optar al título de ingeniero civil, Universidad de Chile.

- [12] Gomes, A., & Appleton, J. (1997). Nonlinear cyclic stress-strain relationship of reinforcing bars including buckling. *Engineering Structures*, 19(10):822–826.
- [13] Kashani, M. M., Barmi, A. K., & Malinova, V. S. (2015). Influence of inelastic buckling on low-cycle fatigue degradation of reinforcing bars. *Construction and Building Materials*, 94:644–655.
- [14] Kashani, M. M., Lowes, L. N., Crewe, A. J., & Alexander, N. A. (2015). Phenomenological hysteretic model for corroded reinforcing bars including inelastic buckling and low-cycle fatigue degradation. *Computers and Structures*, 156:58–71.
- [15] Kato, D., Kanaya, J., & Wakatsuki, J. (1995). Buckling strains of main bars in reinforced concrete members. *Proc., 5th East Asia and Pacific Conf. in Structural Engineering and Construction EASEC-5, Gold Coast, Australia*, pages 699–704.
- [16] Kikukawa, T., Ooya, H., Kato, D., & Wakatsuki, J. (1994). Buckling behaviors of intermediate steel bars in R/C Columns (in Japanese). *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan. Structures II*, pages 353–356.
- [17] Kunnath, S. K., Heo, Y., & Mohle, J. F. (2009). Nonlinear uniaxial material model for reinforcing steel bars. *Journal of Structural Engineering*, 135(4):335–343.
- [18] Lacaze, C. (2009). *Estudio y modelamiento del impacto del pandeo en la fatiga de bajos cilos en barras longitudinales para hormigón armado*. Memoria para optar al título de ingeniero civil, Universidad de Chile.
- [19] Mander, J. B., Priestley, M. J. N., & Park, R. (1988). Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete. *Journal of Structural Engineering*, 114(8):1804–1826.
- [20] Mander, J.B., Priestley, M. J. N., & Park, R. (1984). Seismic design of bridge piers. Technical report, Research Report No. 84-2, Univ. of Canterbury, New Zealand.
- [21] Masamoto, K., Wakatsuki, K., Ooya, H., & Kato, D. (1993). Buckling Behaviors of Steel Bars in R/C columns (in Japanese). *Summaries of technical papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan. Structures II*, pages 787–792.
- [22] Massone, L. M., & López, E. E. (2014). Modeling of reinforcement global buckling in RC elements. *Engineering Structures*, 59:484–494.
- [23] Massone, L. M., & Moroder, D. (2009). *Engineering Structures*.
- [24] Menegotto, M., & Pinto, P. E. (1973). Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. In *Proceedings, IABSE symposium*.
- [25] Monti, G., & Nuti, C. (1992). Nonlinear cyclic behavior of reinforcing bars including buckling. *Journal of Structural Engineering (United States)*, 118(12):3268–3284.
- [26] Ooya, H., & Kato, D. (1994). Experimental study on buckling behaviour of intermediate

longitudinal bars in R/C members. *Transaction of the Japan Concrete Institute*, 16:365–372.

- [27] Pantazopoulou, S. J. (1998). Detailing for Reinforcement Stability in RC Members. *Journal of Structural Engineering*, 124(6):623–632.
- [28] Papia, M., Russo, G., & Zingone, G. (1988). Instability of longitudinal bars in RC columns. *Journal of Structural Engineering*, 114(2):445–461.
- [29] Rodriguez, M., Botero, J. C., & Villa, J. (1999). Cyclic Stress-Strain Behavior of Reinforcing Steel Including Effect of Buckling. *Journal of Structural Engineering-Asce*, 125(June):605–612.
- [30] Scott, B. D., Park, R., & Priestley, M. J. N. (1982). Stress-strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates. *Journal of the American Concrete Institute*, 79:13–27.
- [31] Sheikh, S.A., & Uzumeri, S. M. (1980). Analytical model for concrete confinement in tied columns. *Journal of the Structural Division*, 108(12):2703–2722.
- [32] Tripathi, M., Dhakal, R. P., Dashti, F., & Massone, L. M. (2018). Low-cycle fatigue behaviour of reinforcing bars including the effect of inelastic buckling. *Construction and Building Materials*, 190:1226–1235.
- [33] Yang, H., Wu, Y., Mo, P., & Chen, J. (2016). Improved nonlinear cyclic stress-strain model for reinforcing bars including buckling effect and experimental verification. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(1).
- [34] Zhou, Z. H., Nuti, C., & Lavorato, D. (2016). Modified Monti-Nuti Model for Different Types of Reinforcing Bars Including Inelastic Buckling. *Applied Mechanics and Materials*, 847:166–172.