



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

**ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS QUE CONTROLAN  
EL MOVIMIENTO FUERTE DEL SUELO DURANTE TERREMOTOS**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS,  
MENCIÓN GEOFÍSICA

**VALENTÍN DIEGO RETAMAL BELLO**

PROFESOR GUÍA:  
SERGIO RUIZ TAPIA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RODRIGO ASTROZA EULUFÍ  
FRANCISCO ORTEGA CULACIATI  
CÉSAR PASTÉN PUCHI

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR:  
FONDECYT N°1190995

SANTIAGO, CHILE  
2021

## **ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LOS PARÁMETROS QUE CONTROLAN EL MOVIMIENTO FUERTE DEL SUELO DURANTE TERREMOTOS**

En la presente Memoria, se evalúa la dependencia de un modelo generador de sismogramas sintéticos, respecto de los parámetros que definen cada evento particular. La piedra angular de este trabajo es responder qué tan preciso debe ser el conocimiento sobre aquellos valores en aras de simular de forma realista un sismo, para lo cual se estudiará de forma sistemática la sensibilidad de dicho modelo. Con un apronte probabilista-estadístico, se busca conocer la varianza de la respuesta ante la incerteza del *input*, lo que permitirá dar prioridad a la calibración de aquellas con mayor incidencia en el *output*. Esto permite conocer nuevos aspectos de las variables de las que se vale el modelo y optimizar sus aplicaciones futuras, además de simplificar problemas paralelos, como la inversión de estos parámetros.

Se mostrará la teoría que sirve de base para el Análisis de Sensibilidad de una función con respecto a sus variables; se definirá lo que se considera que dicha función sea más o menos sensible a un determinado parámetro; se propondrá un umbral bajo el cual esta categorización cobra sentido y se mostrará su aplicación a la simulación de movimientos fuertes del suelo a partir de eventos sísmicos, tomando como referencia una réplica del terremoto  $M_w$  9.0 de 2011: el sismo interplaca  $M_w$  6.9 localizado frente a la región de Tohoku, Japón en junio del mismo año. Las variables a considerar, serán la magnitud de momento ( $M_w$ ), la velocidad de onda P ( $\alpha$ ), velocidad de onda S ( $\beta$ ) y densidad del medio ( $\rho$ ) entorno a la fuente, los factores de calidad del medio respecto del paso de una onda ( $Q_P$  y  $Q_S$ ), el factor de decaimiento espectral de la onda ( $\gamma$ ) y la caída de esfuerzos ( $\Delta\sigma$ ).

Complementariamente, se muestra la convergencia de los métodos usados, lo que justifica la validez de lo presentado en cuanto a la caracterización de las variables y a la suficiencia de información empleada. Debido a que el modelo utilizado da como respuesta una serie de tiempo, se utilizarán funciones medibles más simples, como el error cuadrático medio (RMS), la aceleración máxima del suelo (PGA) y la bondad de ajuste (GOF), para comparar la diferencia entre una señal real y su contraparte sintética. Se concluye que, de manera persistente, el decaimiento espectral  $\gamma$ , la magnitud de momento  $M_w$  y la caída de esfuerzos  $\Delta\sigma$  inciden en mayor proporción a la varianza de estas funciones en el rango de periodos 0.05 – 1 [s]. Se dará especial atención a  $\gamma$ , en pro de contrastar el resultado empírico con la base teórica señalada en la Introducción. Consecuentemente, se propone que las variables restantes tienen un nivel de sensibilidad que permite estimarlos de forma gruesa, basados en los cálculos anteriores y en la interacción de pares de variables.

*A quienes quieren y a veces no creen,  
se puede.*

# Agradecimientos

En primer lugar, este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT N°1190995, y no habría sido posible sin el patrocinio de mi Profesor Guía Sergio Ruiz quien, junto con César Pastén y Rodrigo Astroza, puso en mis manos parte de su proyecto, periodo en el cual pude aprender muchísimo y durante el que recibí consejos y ánimos para continuar, teniendo como punto cúlmine obtener una beca de colaboración para ir a Strasbourg, Francia. Solía soñar con la posibilidad de un viaje así; hoy es un recuerdo increíble. También debo buena parte de este documento a Bertrand Potin, Sebastián Arriola, Javier Ojeda y Miguel Quilaqueo, que me socorrieron cuando mi inhabilidad bloqueó mi progreso. En la misma mención, deseo incluir a todos quienes fueron profesores en mi carrera, tanto en el Departamento de Geofísica, como en Ingeniería Civil Matemática y Plan Común. A ustedes debo todo lo que aprendí y llegué a decidir durante mi paso por la universidad.

Quisiera comenzar agradeciendo a mi familia: mi mamá y papá (por quienes llegué a la vida); mi hermana (por quien continuó en ella); a mi gata Mochi; mi hermano, mi cuñada y sobrina, a quienes veo apenas cada lustro; mis tíos y primos, con quienes compartí mi infancia; a mis abuelas, abuelos y mi tía Tota, cuyo amor trasciende esta vida. A todos ustedes, jamás alcanzaré a decirles todo cuanto los amo.

Agradezco a Camila San Martín, quien me enseñó que el amor fraternal no está en la sangre. A mis amigas y amigos de los colegios Carmen McPhee y The English Institute; a los colegios mismos, por darme los años que con más cariño recuerdo. A mis profesores, especialmente a Sir Ricardo, Sir Pato y Mr. Villagrán, quienes despertaron mi pasión por las ciencias, la pedagogía y la música. A mis amigos de la universidad, Pancho Muena, Luppy y Pato Mallea, quienes fueron un apoyo permanente y a quienes admiro profundamente. A Marcelo Leseigneur, profesor nato y con quien aprendí, trabajé, reí y rabié. A mi generación de compañeros y auxiliares en Geofísica; son las personas más hermosas y geniales que pueden existir. Ustedes son la primera razón por la que agradezco mi decisión de entrar a la carrera.

Doy mi sincera gratitud a Ángeles, en quien encuentro una amiga de años y a quien debo mi amor por los animales y el inicio de mi búsqueda por lo que quise hacer en mi vida. Con orgullo veo todo lo que has logrado, y agradezco que ambos lo hayamos conseguido.

A Andrea le agradezco su compañía en mi peor y mejor momento, y con quien nos debemos el final de nuestros respectivos procesos, además de haber conocido el amor y compañía incondicionales. Espero para ti simplemente lo mejor que pueda ofrecerte la vida.

Agradezco a Ariel y Sensei Raúl, amigos y mentores en mis buenos y malos momentos. A Gaby y Will, quienes además de ser lo anterior, fueron mi familia cuando sentí que perdía la mía, o a mí mismo. Viví con ustedes aventuras de película, los mejores McFlurry y la peor noche posible en un auto.

A mis vecinos Michel, Henrique, Danissa y Natalia, con quienes compartí disgustos, demandas, risas, empanadas y karaokes. A Tiare, mi compañera de aventuras, sueños, llantos y enojos; quien incluso en el odio me apoyó y me permitió apoyarla, y quien entre libros, cartas, abrazos, palabras y silencios llegó más allá de mi vida. Todos ustedes, fueron auténticos tesoros que tuve la fortuna de encontrar contra la tendencia que impuso la pandemia en nuestras vidas.

Finalmente, a quienes se mantuvieron a mi lado, gracias por haberse quedado. A quienes no pudieron seguir conmigo, gracias por haber estado. A quienes decidieron marcharse, gracias por haberse ido. Y, sobre todo, gracias a mí.

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.2.1. Objetivos generales . . . . .	2
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	3
1.3. Hipótesis . . . . .	3
1.4. Simbología . . . . .	3
<b>2. Modelo de Generación de Acelerogramas</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Generación de acelerogramas sintéticos . . . . .	6
2.3. Resultados esperados . . . . .	10
<b>3. Métodos del Análisis de Sensibilidad</b>	<b>12</b>
3.1. Motivación . . . . .	12
3.2. Métodos de muestreo . . . . .	13
3.2.1. Muestreo Monte Carlo . . . . .	13
3.2.2. Muestreo de Hipercubo Latino . . . . .	14
3.2.3. Muestreo Factorial . . . . .	16
3.3. Métodos para el Análisis de Sensibilidad . . . . .	19
3.3.1. Método de Sobol-Saltelli . . . . .	19
3.3.2. Método de Borgonovo . . . . .	22
3.3.3. Método de Morris-Campolongo . . . . .	24
3.4. Convergencia en el Análisis de Sensibilidad . . . . .	26
<b>4. Aplicación del Análisis de Sensibilidad</b>	<b>28</b>
4.1. Introducción . . . . .	28
4.2. Cálculo de acelerogramas sintéticos . . . . .	28
4.3. Variables a analizar . . . . .	29
4.4. Cálculo de índices . . . . .	32
<b>5. Resultados y discusión</b>	<b>44</b>
5.1. Convergencia de los métodos . . . . .	44
5.2. Índices aceptados . . . . .	44

5.3. Interpretación . . . . .	45
5.4. Conclusiones . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>Anexo A. Cálculos realizados</b>	<b>51</b>
A.1. Definiciones . . . . .	51
A.2. Demostración de resultados . . . . .	52
A.B.1. Motivación . . . . .	52
A.B.2. Muestreo Factorial . . . . .	52
A.B.3. Método de Sobol-Saltelli . . . . .	54
A.B.4. Método de Borgonovo . . . . .	56
A.B.5. Método de Morris-Campolongo . . . . .	57

# Índice de Tablas

4.1.	Variables que recibe MGA. . . . .	30
4.2.	Grupos de estaciones utilizadas. . . . .	34
4.3.	Soporte de cada función densidad. . . . .	34
5.1.	Índices de sensibilidad promedio aceptados para MGA. . . . .	45

# Índice de Ilustraciones

2.1.	Esquema de cómo se definen los ángulos de partida e incidencia de las ondas desde una subfalla $(i, j)$ a una estación $m$ . Modificado de [Ruiz et al., 2018]. . . . .	8
2.2.	Acelerogramas generados (gris) y observados (negro) en la estación IWTH21 para la réplica del 23 de junio de 2011, en Tohoku, Japón. En a) y c), el número indica la aceleración máxima. En b) y d), se grafica el espectro de amplitud como función del periodo del movimiento. Modificado de [Ruiz et al., 2018]. . . . .	10
3.1.	Comparación entre MC (izq.) y QMC (der.) . . . . .	13
3.2.	Esquema de muestreo estratificado, aprovechado en LHS. . . . .	15
3.3.	Posible elección de $\Delta$ . Cada punto azul puede escogerse como inicial de una trayectoria. . . . .	17
4.1.	GOF para periodos determinados, donde hay mejor ajuste en la banda 0,05–1[s]. Modificado de [Ruiz et al., 2018]. . . . .	32
4.2.	Distribución de estaciones utilizadas (Grupo 1). Hacia el norte, el epicentro de la réplica (estrella roja) y Grupo 2 (elipse azul); hacia el sur, el Grupo 3 (elipse amarilla). Modificado de [Ruiz et al., 2018]. . . . .	33
4.3.	Convergencia de índices de primer orden (Sobol-Saltelli) como función del número de muestras en estaciones representativas según distancia a la fuente. De arriba hacia abajo, campo cercano, campo intermedio y campo lejano. . . . .	35
4.4.	Convergencia de índices de orden total (Sobol-Saltelli) como función del número de muestras en estaciones representativas según distancia a la fuente. De arriba hacia abajo, campo cercano, campo intermedio y campo lejano. . . . .	36
4.5.	Valor (promedio) aceptado para las funciones objetivo PGA y RMS, según método de Sobol-Saltelli. . . . .	37
4.6.	Valor aceptado para la función GOF en Grupo 2 en superficie, por periodo explorado, según método de Borgonovo. . . . .	37
4.7.	Valor aceptado para la función GOF en Grupo 2 en <i>borehole</i> , por periodo explorado, según método de Borgonovo. . . . .	38
4.8.	Valor aceptado para la función GOF en Grupo 3 en superficie, por periodo explorado, según método de Borgonovo. . . . .	39
4.9.	Valor aceptado para la función GOF en Grupo 3 en <i>borehole</i> , por periodo explorado, según método de Borgonovo. . . . .	40
4.10.	Índices de segundo orden (Sobol-Saltelli) por pares de parámetros para PGA y RMS. Colores cálidos indican un nivel de interacción menor al 5%. . . . .	41

4.11.	Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable $\gamma$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo). . . . .	42
4.12.	Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable $M_w$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo). . . . .	42
4.13.	Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable $\Delta\sigma$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo). . . . .	43

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Un modelo físico-matemático pretende representar fenómenos reales a través de expresiones sencillas y globales. Éstos se suelen describir a través de funciones definidas en un conjunto de parámetros y cuyo resultado es la magnitud física de interés. Es esperable que dicho resultado sea comparado con datos observados, a fin de establecer la precisión del modelo.

Una vez aceptado, el modelo es implementado de forma intensiva para explorar las situaciones que pueden darse al variar los parámetros que se utilizan de entrada. Esto puede plantear en sí mismo un problema en tanto el tiempo empleado para computar dichas soluciones, dado que los modelos (sobre todo aquellos basados en la resolución de ecuaciones diferenciales) pueden ser bastante complejos. Vale la pena, entonces, preguntarse si existen parámetros cuya variación no afectan significativamente el resultado, ya que en el caso positivo dichos parámetros pueden fijarse como constantes, de este modo localizando las mayores fuentes de incertidumbre en el problema, simplificando el dominio de la función utilizada y reduciendo con ello el costo asociado a implementar con precisión el algoritmo o a la inversión de sus parámetros.

La idea de conocer la varianza que genera cada parámetro no es un ejercicio meramente en pos de la economía de la implementación del programa. A modo de ejemplo, desde que se popularizó el uso de leyes de potencia para modelar el comportamiento espectral de ciertos fenómenos físicos, los modelos de campo lejano para el estudio de la fuente sísmica han dependido fuertemente de una ley de decaimiento en la frecuencia que, en su concepción, se formuló como un factor que atenuaba la amplitud espectral según  $f^{-2}$  (Aki, 1967; Brune, 1970). Sin embargo, la globalidad de esta escala ha ido quedando obsoleta en virtud de la capacidad de registro con que se cuenta desde la última década en prácticamente todo el dominio espectral (Vidale et al., 1995; Madariaga et al. 2019). Esto supone que, ante el desconocimiento de una ley de potencia universal para modelar la fuente sísmica en campo lejano, se deba incorporar el decaimiento espectral como una variable a determinar. Pero, en el contexto de este trabajo, la pregunta más natural es qué nivel de importancia tiene esta

determinación. ¿Es posible aproximar de forma laxa esta ley sin alterar significativamente la señal simulada, o dar precisión a su valor es crítico en el resultado del modelo? ¿Es este nivel de sensibilidad invariante dado un contexto, o hay situaciones en las que sobredeterminar un valor sensible no representa una ganancia en lo que se espera del modelo? ¿Existen propiedades cualitativas no físicas inherentes a un contexto sísmico?

Se buscará contestar lo anterior para un modelo que genera acelerogramas sintéticos según el esquema estocástico expuesto en [Boore, 2003] y que se ha implementado de forma exitosa en [Otarola & Ruiz, 2016] y [Ruiz et al. 2018], para terremotos de magnitud media a alta en campo lejano. De acuerdo con los resultados ahí reportados, existe un rango de frecuencias para el cual el modelo tiene un nivel de ajuste mejor en relación con los sismogramas observados. Por lo tanto, se estudiará la varianza en la respuesta de este modelo respecto de un conjunto de parámetros físicos, y se extenderá este estudio para indagar sobre cuánto varía tal dependencia según la frecuencia. Para hacer factible la resolución del problema planteado, se usarán medidas de similitud entre los sismogramas generados por el modelo y los observados en un evento particular, como el error cuadrático medio, la aceleración máxima y la bondad de ajuste.

El método de análisis se basa en el uso de distribuciones de probabilidad *a priori* que se tiene sobre el conjunto de parámetros, que en un principio se asumen independientes, con el fin de explorar los posibles escenarios que permite el modelo. Gracias a una serie de resultados teóricos (revisados en el Capítulo 3), es posible descomponer la varianza del modelo como suma de varianzas *ceteris paribus*, es decir, en términos que cuantifican la varianza con respecto a parámetros específicos, dejando los demás invariables. Así, se tiene una idea del nivel de impacto que tiene una variable (o un grupo de ellas) en el resultado. Definiendo un umbral, se puede caracterizar tal variable según qué tan sensible sea el modelo a ella.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivos generales

Dado el modelo que gobierna la generación de acelerogramas sintéticos, el cual será descrito en el Capítulo 2, se busca establecer formas de cuantificar tanto la varianza del resultado debida a la incerteza de sus parámetros como el umbral de varianza para determinar si un parámetro es calificable como sensible o no. Se definirá un esquema teórico que permita realizar formalmente este análisis y concluir qué variables deberían considerarse prioritarias en una calibración del modelo, y cuál es el costo de asumir dicha simplificación. Es también parte del objetivo dar evidencia cuantitativa suficiente para justificar el criterio de simplificación empleado, es decir, para respaldar el que se asuma el *trade-off* inherente.

## 1.2.2. Objetivos específicos

En este trabajo se busca:

- Definir los índices de sensibilidad según el método de Sobol-Saltelli, el método de Morris-Campolongo y el método de Borgonovo.
- Definir el modelo que genera acelerogramas sintéticos y establecer las variables útiles para el análisis.
- Definir funciones medibles sobre el modelo a las que aplicar el análisis de sensibilidad.
- Estimar la sensibilidad del modelo de acelerogramas respecto de las variables consideradas, la distancia hasta la fuente y el periodo del movimiento.
- Demostrar la compatibilidad entre los métodos utilizados, su convergencia y concluir sobre la agilidad de los análisis.

## 1.3. Hipótesis

Para el desarrollo de este trabajo, se asumirá que las variables que dan forma al modelo son distribuidas de forma independiente, siguiendo leyes uniformes en intervalos que abarcan valores aceptados típicos en eventos de magnitud media. Además, se asumirá que las frecuencias para las que el modelo aproxima bien un evento real están en el rango de 1 a 20 [Hz]. Finalmente, puesto que existe una discretización del plano de falla, será necesario asumir que es posible variar parámetros como la magnitud sin alterar este aspecto geométrico, dada la dificultad técnica que supondría aleatorizarlo e implementarlo de forma útil.

## 1.4. Simbología

En lo que sigue, se usará la simbología

- $p_Z(\cdot)$  para denotar una función densidad para una variable aleatoria  $Z$ .
- $p|_{X_i}(\cdot)$  para denotar una función densidad marginal con respecto a las variables indicadas.
- $\mathbb{E}_Z[\cdot]$  para denotar la esperanza de una función medible según la distribución de la variable aleatoria  $Z$ .
- $\mathbb{E}_Z[\cdot | X_i = x_i]$  para denotar la esperanza, condicional a que la variable aleatoria  $X_i$  adopte el valor  $x_i$ .
- $\mathbb{V}_Z[\cdot]$  para denotar la varianza de una función medible según la distribución de la variable aleatoria  $Z$ .

- $\mathbb{V}_Z[\cdot \mid X_i = x_i]$  para denotar la varianza, condicional a que la variable aleatoria  $X_i$  adopte el valor  $x_i$ .
- $x_{*i}$  (resp.  $X_{*i}$ ) para denotar todas las variables (resp. variables aleatorias), excepto  $x_i$  (resp.  $X_i$ ).
- $\Omega_i$  (resp.  $\Omega_{*i}$ ) para denotar el dominio de la variable  $x_i$  (resp. el dominio de todas las variables, excepto  $x_i$ ).
- $\hat{e}_i$  para representar el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$  para denotar el producto cartesiano usual de dos vectores. También se denota  $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ .

# Capítulo 2

## Modelo de Generación de Acelerogramas

### 2.1. Introducción

A continuación, se presenta la construcción de todas las herramientas teóricas de las que se vale este trabajo. Esto se separa en dos capítulos que en conjunto se subdividen en tres grandes secciones, dedicadas a la descripción del modelo de generación de acelerogramas sintéticos que será objeto de estudio, las técnicas de muestreo que alimentan el análisis y a las propias técnicas para estimar sensibilidad.

En este capítulo, se explica y desarrolla el modelo de generación de acelerogramas sintéticos que será puesto a prueba con respecto a las variables que utiliza. Se describe el tipo de resultados que se espera obtener de él y se introduce las variables físicas y numéricas que le dan forma. Éstas serán susceptibles de ser analizadas, dependiendo de la practicabilidad en ello, lo cual será planteado en el Capítulo 4.

Las dos siguientes partes, anidadas en el Capítulo 3, tienen por objetivo formalizar la manera de medir la varianza del modelo cuando los parámetros varían en su dominio. Si bien el propósito de cada uno de los métodos que se verá es estimar niveles de sensibilidad, la heurística a partir de la que se definen es distinta, y esto incide en que también difieran en la forma que se obtienen puntos del espacio de parámetros para proveer de suficiencia a sus resultados. Por ello, estas secciones dan sentido a la manera en que se construye los índices, además de proveer de sugerencias para decidir sobre el tamaño de la muestra a generar. Se define, además, las nociones de método local y global, índice de sensibilidad, estabilidad y convergencia de los métodos.

Algunas definiciones provenientes del Análisis Funcional o Teoría de la Medida serán dadas en el Anexo A. Las afirmaciones y resultados que no sean triviales o puedan ser demasiado extensos, serán usados sin demostración en el cuerpo del capítulo, relegando también su explicación al Anexo A.

## 2.2. Generación de acelerogramas sintéticos

Para obtener registros sintéticos debidos a movimiento fuerte, se usa el método propuesto por Ruiz et al. (2018) para realizar la simulación estocástica de ondas P, SV y SH, el cual depende, *grosso modo*, de:

- i) Los ángulos incidentales y azimutales obtenidos de la trayectoria de ondas P y S en un modelo de deslizamiento para una falla discretizada finitamente, a través de una corteza estratificada para la cual se tiene un modelo de velocidades.
- ii) Factores de la superficie libre.
- iii) La partición de la energía.
- iv) El efecto del sitio en que se emplazan las estaciones.

La aleatoriedad de parte de la simulación de los sismogramas responde al carácter estocástico que Hanks y McGuire (1981) propone para las altas frecuencias en los movimientos fuertes. Esto se da como un ruido blanco gaussiano estándar, modulado en una ventana temporal dada por

$$w(t) = a \left( \frac{t}{t_\eta} \right)^b e^{-c \frac{t}{t_\eta}} \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \left( \frac{e}{\varepsilon} \right)^b \\ b &= -\frac{\varepsilon \ln(\eta)}{1 + \varepsilon(\ln(\varepsilon) - 1)} \\ c &= \frac{b}{\varepsilon} \\ t_\eta &= f_{T_{gm}} \cdot T_{gm} \end{aligned}$$

$\varepsilon$ ,  $\eta$  y  $f_{T_{gm}}$  son constantes, cuyo valor depende de la referencia utilizada;  $T_{gm}$  es la duración del movimiento del suelo debido a las ondas SH como función de la magnitud, que se extiende para ondas P y SV.

El desplazamiento en campo lejano queda dado por

$$u^P(\vec{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^P \dot{M} \left( t - \frac{R_{hyp}}{V_P} \right)}{4\pi\rho\alpha^3 R_{hyp}} \cdot \hat{I} \quad (2.2)$$

$$u^{SV}(\vec{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^{SV} \dot{M} \left( t - \frac{R_{hyp}}{V_S} \right)}{4\pi\rho\beta^3 R_{hyp}} \cdot \hat{p} \quad (2.3)$$

$$u^{SH}(\vec{x}, t) = \frac{\mathcal{F}^{SH} \dot{M} \left( t - \frac{R_{hyp}}{V_S} \right)}{4\pi\rho\beta^3 R_{hyp}} \cdot \hat{\varphi} \quad (2.4)$$

donde  $\hat{I}$ ,  $\hat{p}$  y  $\hat{\varphi}$  son vectores unitarios en la dirección de propagación de la onda correspondiente. Si se denota por  $W$  a cualquiera de los tres tipos de onda (P, SV o SH),  $\mathcal{F}^W$  representa

los patrones de radiación;  $M$  es la función fuente temporal;  $R_{hyp}$  la menor distancia de la fuente al observador;  $\rho$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son la densidad, la velocidad de onda P y onda S entorno a la fuente, respectivamente;  $V_P$  y  $V_S$  son la velocidad de onda P y S promedio entre la fuente y  $\vec{x}$ .

Habiendo reparametrizado el campo de desplazamiento para expresarlo en componentes radial, tangencial y vertical, se puede obtener el contenido espectral de la aceleración siguiendo un esquema similar al de Boore (2003):

$$A_{r_{ijml}}^P(f) = \mathcal{S}(f, P, r_{ijml}) \cdot \mathcal{P}(f, P) \cdot \mathcal{G}(f, P) \cdot \mathcal{I}(f) \quad (2.5)$$

$$A_{z_{ijml}}^P(f) = \mathcal{S}(f, P, z_{ijml}) \cdot \mathcal{P}(f, P) \cdot \mathcal{G}(f, P) \cdot \mathcal{I}(f) \quad (2.6)$$

$$A_{r_{ijml}}^{SV}(f) = \mathcal{S}(f, SV, r_{ijml}) \cdot \mathcal{P}(f, SV) \cdot \mathcal{G}(f, SV) \cdot \mathcal{I}(f) \quad (2.7)$$

$$A_{z_{ijml}}^{SV}(f) = \mathcal{S}(f, SV, z_{ijml}) \cdot \mathcal{P}(f, SV) \cdot \mathcal{G}(f, SV) \cdot \mathcal{I}(f) \quad (2.8)$$

$$A_{t_{ijml}}^{SH}(f) = \mathcal{S}(f, SH, t_{ijml}) \cdot \mathcal{P}(f, SH) \cdot \mathcal{G}(f, SH) \cdot \mathcal{I}(f) \quad (2.9)$$

donde se ha descompuesto cada espectro en una contribución asociada a la fuente ( $\mathcal{S}$ ), otra a la trayectoria ( $\mathcal{P}$ ), otra al sitio ( $\mathcal{G}$ ) y otra al tipo de movimiento medido ( $\mathcal{I}$ ), dadas respectivamente por:

$$\mathcal{S}(f, W, \xi_{ijml}) = \frac{\langle R^W \rangle_{ijm} F S_{\xi_{ijm}}^W E P_{\xi_{ijm}}^W M_{0,ij}}{4\pi\rho\nu_W^3} \cdot \frac{1}{1 + (f/f_{c,ij}^W)^\gamma} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}(f, W) = G(R_{ijm}) \cdot \exp\left(-\frac{\pi R_{ijm}}{Q_W(f)\nu_W}\right) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{G}(f, W) = \exp(-\pi f \kappa_m) \cdot \text{amp}(f)_{ml} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{I}(f) = (2\pi f)^2 \quad (2.13)$$

Aquí,  $ij$  denota una subfalla (como elemento de una grilla),  $m$  denota una estación y  $l$  indica si el sensor está en superficie (S, por *surface*) o bajo ésta (B, por *borehole*).  $M_{0,ij}$  es el momento sísmico de una subfalla;  $G(R_{ijm})$  es la dispersión geométrica entre una subfalla y una estación;  $\kappa_m = 0,03$  [s] es un factor de atenuación y  $\text{amp}(f)_{ml}$  es la amplificación del suelo bajo una estación, dada por  $\text{amp}(f)_{mB} = 1$  ó  $\text{amp}(f)_{mS} = \text{SATF}_m$ , que es la función de transferencia de amplificación del suelo.  $\langle R^W \rangle_{ijm}$  es el promedio de coeficientes de radiación;  $F S_{\xi_{ijm}}^W$  y  $E P_{\xi_{ijm}}^W$  son factores de la superficie libre y de la partición de la energía, respectivamente;  $f_{c,ij}^W$  es la frecuencia esquina dinámica;  $\gamma$  es el factor de decaimiento espectral;  $Q_W(f)$  son los factores de calidad del medio y  $\nu_W$  es velocidad de onda ( $\alpha$  o  $\beta$ ) entorno a la falla.

A partir del trabajo desarrollado en Otarola y Ruiz (2016), se usa para las frecuencias

esquina

$$f_{c,ij}^S = 4,9 \cdot 10^6 \beta \left( \frac{\Delta\sigma}{M_0 \cdot \min \left\{ \frac{N_R}{N}, F_{\text{pulso}} \right\}} \right)^{1/3} \quad (2.14)$$

$$f_{c,ij}^P = \frac{\alpha}{\beta} f_{c,ij}^S \quad (2.15)$$

donde  $\Delta\sigma$  es la caída de esfuerzos;  $M_0$  es el momento sísmico;  $N$  y  $N_R$  son el número de la subfalla en la grilla y el número de subfallas activas a tiempo  $t$ , respectivamente, y  $F_{\text{pulso}}$  es el máximo porcentaje de subfallas activas en la grilla durante la ruptura.

Para los factores de calidad, se utiliza la relación dada por Udías (1999, p. 260)

$$\frac{1}{Q_P} = \frac{4}{3} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{1}{Q_S} \quad (2.16)$$

en que  $Q_S(f)$  está dada como función por tramos en Ghofrani et al. (2013).

Para los patrones de radiación promedio, se usa los valores propuestos por Onishi y Horike (2004) para ondas P, S y SH de alta frecuencia:

$$\langle R^P \rangle_{ijm} = \sqrt{\frac{4}{15}} \quad (2.17)$$

$$\langle R^{SV} \rangle_{ijm} = \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2(\lambda) \left( \frac{14}{15} + \frac{1}{3} \sin^2(2\delta) \right) + \cos^2(\lambda) \left( \frac{4}{15} + \frac{2}{3} \cos^2(\delta) \right)} \quad (2.18)$$

$$\langle R^{SH} \rangle_{ijm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} \sin^2(\lambda) (1 + \cos^2(2\delta)) + \frac{2}{3} \cos^2(\lambda) (1 + \sin^2(\delta))} \quad (2.19)$$

en que  $\delta$  es el ángulo de manteo (o *dip*) y  $\lambda$  es el ángulo de deslizamiento (o *rake*). Se asumen patrones de radiación promedio iguales para todas las subfallas y estaciones.

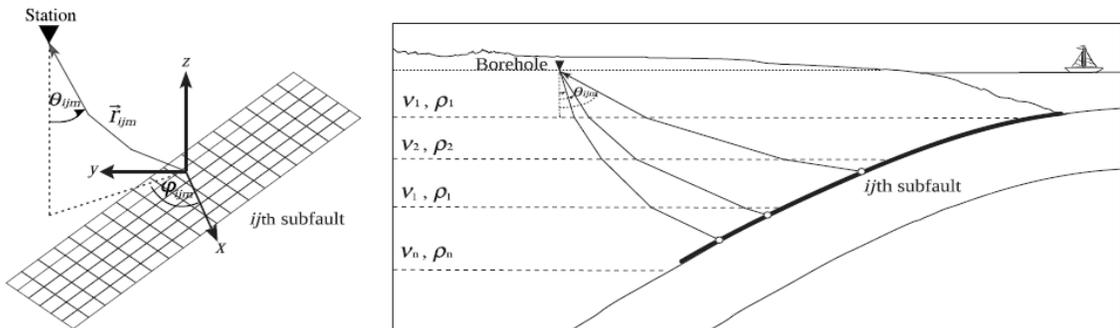


Figura 2.1: Esquema de cómo se definen los ángulos de partida e incidencia de las ondas desde una subfalla  $(i, j)$  a una estación  $m$ . Modificado de [Ruiz et al., 2018].

Los factores de superficie libre para la onda SH siempre se consideran iguales a 2, mientras que para las ondas P y SV su valor depende de  $\theta_{ijm}$  (ángulo de incidencia en la estación  $m$  para un rayo proveniente de la subfalla  $ij$ ), cuya expresión está dada en el trabajo de Jiang et al. (1998). La partición de la energía está dada por

$$EP_{r_{ijm}}^P = -\sin(\theta_{ijm}) \quad (2.20)$$

$$EP_{z_{ijm}}^P = \cos(\theta_{ijm}) \quad (2.21)$$

$$EP_{r_{ijm}}^{SV} = \cos(\theta_{ijm}) \quad (2.22)$$

$$EP_{z_{ijm}}^{SV} = \sin(\theta_{ijm}) \quad (2.23)$$

$$EP_{t_{ijm}}^{SH} = 1 \quad (2.24)$$

Se introduce los factores de escala para conservar la energía radiada total. Aquí, se resume las ecuaciones con el índice W para los casos en que la onda sea P o S:

$$H_{ij}^W = \frac{M_0}{M_{0,ij}} \sqrt{\frac{1 \sum f_k \left[ \frac{f_k^2}{1+(f_k/f_c^W)^\gamma} \right]^2}{N \sum f_k \left[ \frac{f_k^2}{1+(f_k/f_{c,ij}^W)^\gamma} \right]^2}} \quad (2.25)$$

donde  $f_k$  es la  $k$ -ésima frecuencia discretizada y  $f_c^W$  es la frecuencia esquina para el espectro de onda P o S. El valor de  $\gamma$  (el decaimiento espectral) determina el modelo sísmico utilizado (por ejemplo, Brune (1970) considera que  $\gamma = 2$ ).

Se invierte las amplitudes calculadas en 2.5 – 2.36 y se evalúan en el tiempo de fase correspondiente al retraso de la onda P y S:

$$\Delta t_{ijm}^W = t_{R_{ij}} + t_{ijm}^W \quad (2.26)$$

$$a_{r_{ijm}}^P(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_{r_{ijml}}^P \right] (t + \Delta t_{ijm}^P) \cdot H_{ij}^P \quad (2.27)$$

$$a_{z_{ijm}}^P(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_{z_{ijml}}^P \right] (t + \Delta t_{ijm}^P) \cdot H_{ij}^P \quad (2.28)$$

$$a_{r_{ijm}}^{SV}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_{r_{ijml}}^{SV} \right] (t + \Delta t_{ijm}^{SV}) \cdot H_{ij}^{SV} \quad (2.29)$$

$$a_{z_{ijm}}^{SV}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_{z_{ijml}}^{SV} \right] (t + \Delta t_{ijm}^{SV}) \cdot H_{ij}^{SV} \quad (2.30)$$

$$a_{t_{ijm}}^{SH}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ A_{t_{ijml}}^{SH} \right] (t + \Delta t_{ijm}^{SH}) \cdot H_{ij}^{SH} \quad (2.31)$$

Luego, se rotan para obtener la aceleración en un sistema orientado según las direcciones este-oeste (EO), norte-sur (NS) y vertical (UD), a partir del ángulo azimutal con que llega cada rayo,  $\phi_{ijm}$  (Figura 2.1):

$$\begin{bmatrix} a_{ijm}^{W-NS} \\ a_{ijm}^{W-EO} \\ a_{ijm}^{W-UD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_{ijm}) & -\sin(\phi_{ijm}) & 0 \\ \sin(\phi_{ijm}) & \cos(\phi_{ijm}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{r_{ijm}}^W \\ a_{t_{ijm}}^W \\ a_{z_{ijm}}^W \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Finalmente, se suma la contribución de todas las ondas en todas las subfallas de la grilla, para obtener la aceleración en cada componente, en cada estación  $m$ :

$$a_m^{NS}(t) = \sum_{i,j} a_{ijm}^{P-NS} + a_{ijm}^{SV-NS} + a_{ijm}^{SH-NS} \quad (2.33)$$

$$a_m^{EO}(t) = \sum_{i,j} a_{ijm}^{P-EO} + a_{ijm}^{SV-EO} + a_{ijm}^{SH-EO} \quad (2.34)$$

$$a_m^{UD}(t) = \sum_{i,j} a_{ijm}^{P-UD} + a_{ijm}^{SV-UD} \quad (2.35)$$

### 2.3. Resultados esperados

Como se puede inferir del resultado anterior, los acelerogramas sintéticos corresponden a series de tiempo que aproximan una señal dados ciertos parámetros de un terremoto. Esto puede esquematizarse contrastando un sismograma real con el generado por el modelo, tal como en la Figura 2.2.

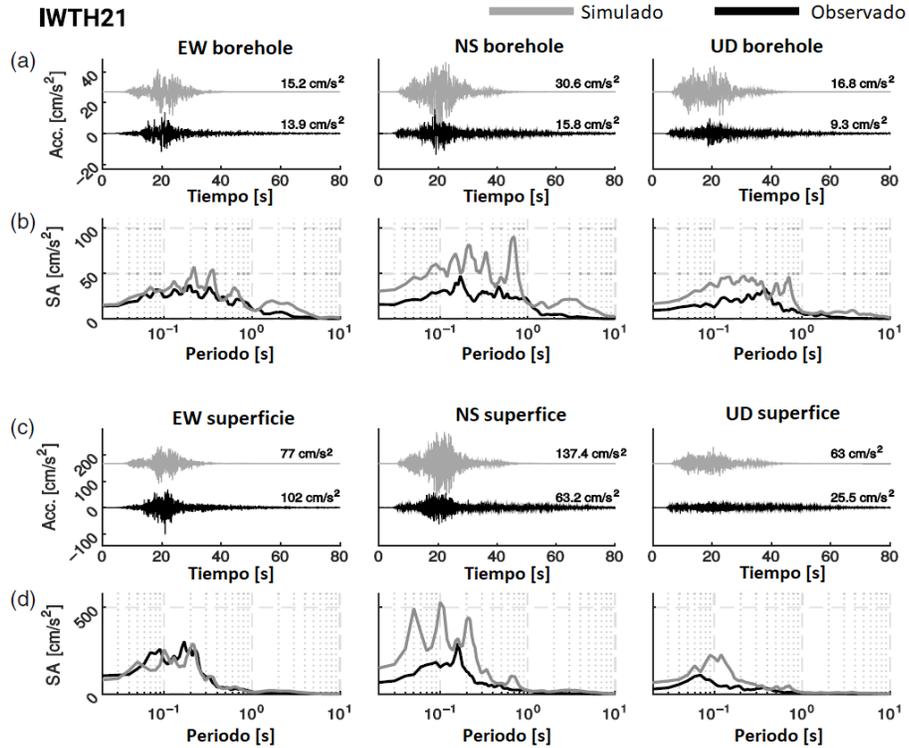


Figura 2.2: Acelerogramas generados (gris) y observados (negro) en la estación IWTH21 para la réplica del 23 de junio de 2011, en Tohoku, Japón. En a) y c), el número indica la aceleración máxima. En b) y d), se grafica el espectro de amplitud como función del periodo del movimiento. Modificado de [Ruiz et al., 2018].

En ella, se puede observar cómo en el espacio temporal el modelo no concuerda con la señal real en aspectos cuantitativos aunque sí cualitativos, como el inicio del movimiento y la ocurrencia de máximos de aceleración. Por otro lado, en el espacio de frecuencias (graficado mediante la contraparte del periodo) sí hay coincidencias notables en cuanto al espectro de amplitud que contienen ambas señales, lo que motiva que también se analice el modelo en esta etapa de la simulación.

Lo observado aquí sirve como pie para proponer funciones objetivo del análisis más allá de la serie de tiempo completa y, más aún, restringen el espacio de observación para ello pues, como se puede apreciar en la misma Figura 2.2, en el espacio temporal el comportamiento cualitativo puede analizarse por diferencia simple entre la simulación y la señal observada, mientras que en el espacio de frecuencias existe un rango de periodos para los que se obtiene mejor concordancia cuantitativa.

# Capítulo 3

## Métodos del Análisis de Sensibilidad

### 3.1. Motivación

Sea  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función cuyo dominio  $\Omega$  es conocido. Existen al menos dos formas de dar incerteza a los valores que puede retornar  $f$ : la primera, es asumir que un valor para cada componente  $x_i$  de  $\vec{x} \in \Omega$  es una variable aleatoria  $X_i$  cuya función densidad y distribución son conocidas; la segunda, es considerar calcular un símil discreto de la derivada de  $f$  con respecto a cada una de sus variables. Ambos aprontes son válidos y resumen *grosso modo* cómo se originan los métodos de análisis de sensibilidad.

Para el caso particular de la primera alternativa, una muestra  $X \in \Omega$  puede verse como un vector aleatorio con una densidad y distribución conjuntas conocidas. Tales densidades *a priori* determinan qué valores son más propensos a ocurrir con mayor frecuencia y, por lo tanto, también permiten obtener una densidad empírica para  $f(X)$ . Luego, mediante el empleo de métodos de muestreo, se podrá conocer estadísticamente esta nueva variable aleatoria. En ocasiones específicas, se asumirá por simplicidad que las variables aleatorias  $X_i$  tienen distribución marginal uniforme ya que, en otro caso, se tiene el siguiente resultado:

**Lema 3.1** (Transformación integral de probabilidad) *Sea  $Z$  una variable aleatoria continua cuya función distribución es  $F_Z$ . Luego, la variable aleatoria definida por*

$$W = F_Z(Z)$$

*tiene distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ .*

Así, para recuperar valores correspondientes al espacio de parámetros original, basta aplicar a cada  $\tilde{X}_i$  transformado la función inversa  $F_{X_i}^{-1}$ , cuando esto sea posible.

Las dos formas de enfrentar el análisis (la probabilista y la diferencial) poseen otra diferencia sustancial que las clasifica como análisis de sensibilidad global y local, respectivamente. Mientras que el primero permite recorrer todo el espacio de parámetros, el segundo sólo explora una vecindad de un punto central dada la necesidad de mantener las muestras dentro

del espacio de parámetros. Esto supone que el análisis global requiera una muestra más densa en favor de caracterizar con mayor completitud el modelo, y que el análisis local exija menor cantidad de muestras a costo de no llegar a conocer zonas del espacio de parámetros más allá de los que se impone *a priori*.

## 3.2. Métodos de muestreo

En esta sección, se trata la forma en que se puede obtener muestras aleatorias de puntos en que se evaluará un modelo. En general, estos métodos responden a la manera en que luego se realiza el análisis de sensibilidad, por lo que es poco probable que los métodos de muestreo sean intercambiables entre distintos análisis. Se mencionará luego qué clase de muestreo se aplica en cada esquema de análisis.

### 3.2.1. Muestreo Monte Carlo

Los métodos Monte Carlo (MC) son formas de realizar paseos aleatorios por el espacio de parámetros en que se define una función, basados en un sistema de aceptación-rechazo según si las muestras satisfacen alguna condición respecto de la función densidad de las variables aleatorias asociadas a la muestra. En este caso, el único requisito de aceptación de una muestra es que cada una de ellas esté en el dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

El objetivo de obtener estos valores suele reducirse a poder aproximar integrales mediante una suma con comportamiento asintótico. Para una integral simple de una variable, esto puede significar calcular una cantidad de términos del orden de miles. Como será visto, en un análisis completo en que la función posee  $n$  variables, la cantidad de integrales a evaluar asciende a  $2^n$ , por lo que es necesario tener una estrategia para reducir la cantidad de muestras a recolectar. La que se utiliza en este trabajo fue presentado por Saltelli (2002) como una mejora al trabajo original de Sobol (1990). El método de obtención puede denominarse MC o QMC (por cuasi-Monte Carlo), dependiendo de si la forma de obtener las muestras es aleatoria o cuasi-aleatoria. Para efectos de la uniformidad de las mismas, se suele recomendar QMC (Figura 3.1).

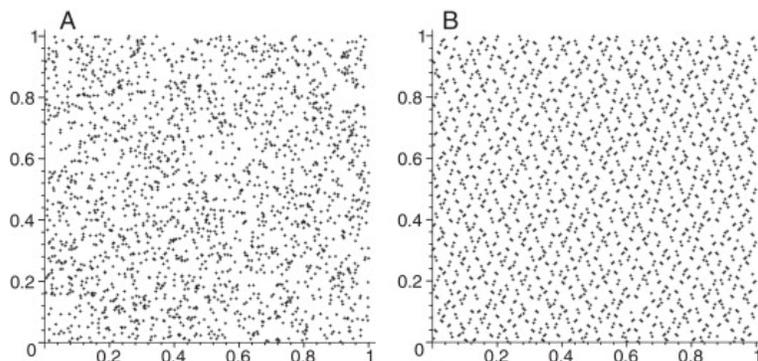


Figura 3.1: Comparación entre MC (izq.) y QMC (der.)

**Definición 3.1** (Saltelli) Sean  $n$  la dimensión del espacio de parámetros (es decir,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ) y  $M$  un número entero que represente el tamaño de la muestra (es decir, en un muestreo  $\vec{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  sería la  $i$ -ésima muestra, para  $1 \leq i \leq M$ ). Sea  $j$  un entero, con  $1 \leq j \leq n$ . Se define una secuencia MC (resp. QMC) para la variable  $x_j$  mediante la siguiente construcción:

1. Se genera una matriz de dimensiones  $(M, 2n)$  con valores aleatorios (resp. cuasi-aleatorios), la cual se subdivide en dos matrices de iguales dimensiones  $(M, n)$  como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_j^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_j^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(M)} & x_2^{(M)} & \dots & x_j^{(M)} & \dots & x_n^{(M)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots & x_{n+j}^{(1)} & \dots & x_{2n}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} & x_{n+2}^{(2)} & \dots & x_{n+j}^{(2)} & \dots & x_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n+1}^{(M)} & x_{n+2}^{(M)} & \dots & x_{n+j}^{(M)} & \dots & x_{2n}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

2. Se define una matriz que contiene las columnas de  $B$ , con excepción de su  $j$ -ésima columna, la cual se reemplaza por la  $j$ -ésima columna de  $A$ :

$$C^j = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots & x_j^{(1)} & \dots & x_{2n}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} & x_{n+2}^{(2)} & \dots & x_j^{(2)} & \dots & x_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n+1}^{(M)} & x_{n+2}^{(M)} & \dots & x_j^{(M)} & \dots & x_{2n}^{(M)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Lo que distingue una muestra aleatoria de una cuasi-aleatoria, es que en el primer caso la muestra sigue fielmente la función densidad que se provee para sus variables, pudiendo dejar zonas del dominio sin recorrer, mientras que en el segundo caso la muestra es forzada a espaciarse con cierto grado de libertad aleatorio, de forma que se pueda representar de mejor forma todo el espacio de parámetros limitando el número de muestras que se debe generar. Además, como las muestras pueden estar en todo el espacio de parámetros, hay que hacer énfasis en que este método de muestreo se utiliza en análisis de sensibilidad global.

### 3.2.2. Muestreo de Hipercubo Latino

Uno de los problemas al realizar muestras aleatorias, sobre todo al usar métodos del estilo Monte Carlo, es que no hay garantía de que se explorará efectivamente todo el espacio de parámetros, en el sentido de que la muestra no necesariamente será representativa de todo el dominio. Esto sucede con poca probabilidad si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, pero su ocurrencia puede tener efectos en el análisis que se realizará, además del costo

que implica digerir un muestreo mayor. El llamado “muestreo estratificado” provee una forma de paliar esta consecuencia, definiendo subconjuntos del espacio de parámetros de los cuales siempre se obtendrá una muestra. Es decir, se pretende crear una colección de subconjuntos disjuntos dentro del dominio, de forma tal que el muestreo fuerza tener puntos dentro de cada subconjunto. En general, se suele usar que en cada subconjunto haya exactamente un punto, por lo que se determina que el tamaño de la muestra es la cantidad de subconjuntos definidos.

Esta partición puede hacerse de forma determinista, para luego elegir aleatoriamente un punto en cada subconjunto, es decir, la cantidad de subconjuntos es forzada por quien realiza el muestreo. Este procedimiento se llama “estratificación”, y se denomina como “estrato” a cada corte<sup>1</sup> a través del dominio de cada variable. Por la forma en que se definen, cada estrato está determinado por su probabilidad de ocurrencia. Así, para evitar el problema de representatividad de la muestra, la partición debe ser relativamente densa. En consecuencia, no obstante la simpleza de la motivación del muestreo estratificado, una posible limitación con este tipo de muestreo es la dimensionalidad del espacio de parámetros, puesto que generar una partición del dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  supone definir un conjunto de tamaño  $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ . Numéricamente, y para un análisis suficientemente robusto, esto puede derivar en que sea impracticable realizar muestreos de forma intensiva, lo que es crucial si se quiere mostrar que un análisis en particular converge<sup>2</sup>.

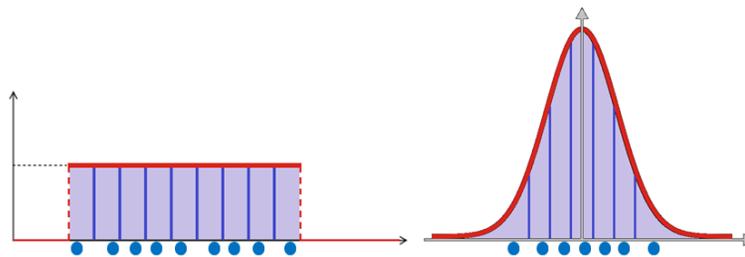


Figura 3.2: Esquema de muestreo estratificado, aprovechado en LHS.

El muestreo del hipercubo latino (LHS) descrito por Helton y Davis (2003) pretende resolver esta dificultad reuniendo bondades de la estratificación y de la aleatorización, con el fin común de generar un punto en cada subconjunto de una partición dada. Al igual que el muestreo estratificado, genera una partición densa del dominio y, al igual que el muestreo aleatorizado, esta partición se realiza sin necesidad de determinar la probabilidad de ocurrencia de cada subconjunto.

**Definición 3.2** (Helton) Sean  $n$  variables independientes entre sí y  $M > 0$  un número entero. Se define una muestra de hipercubo latino de tamaño  $M$  por medio del siguiente procedimiento iterativo:

<sup>1</sup> Se conoce como un corte a través del dominio de la variable  $x_j$  a un conjunto de la forma  $\Omega_j^i = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_j^i, \beta_j^i] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , con  $a_j \leq \alpha_j^i \leq \beta_j^i < b_j$ .

<sup>2</sup> Se verá más adelante en este capítulo qué se quiere decir con *convergencia*.

1. Se particiona el dominio de cada parámetro,  $x_i$ , en  $M$  subintervalos con igual probabilidad, es decir, son tales que la medida<sup>3</sup> cubierta por la función densidad de dicho parámetro en todos los subintervalos es igual. Éstos se denotan  $I_i^{(k)}$ , para  $1 \leq k \leq M$ .
2. Dentro de cada subintervalo  $I_i^{(k)}$  para el parámetro  $x_i$ , se escoge al azar un valor  $x_i^{(k)}$ .
3. Cada valor  $x_1^{(k_1)}$  se combina con un valor  $x_2^{(k_2)}$ , elegido al azar y sin reemplazo. Este par de valores se combina con un valor  $x_3^{(k_3)}$ , elegido al azar y sin reemplazo.
4. El procedimiento finaliza habiendo hecho todas las combinaciones con elección al azar y sin reemplazo de los  $M$  valores de las  $n$  variables.

Mediante los pasos anteriores, la muestra tiene un total de  $M$  puntos que exploran la partición completa del espacio de variables, sin repetir en ningún parámetro valores ya explorados entre una muestra y otra. Esto último garantiza que los puntos de la muestra siempre presenten dispersión no nula (es decir, que tengan varianza) y que se realice combinaciones de valores que tal vez con alta probabilidad difícilmente podrían darse en un muestreo aleatorio simple. Junto con este hecho, hay por lo menos otras dos ventajas del uso de este método: existe un total de  $M^n$  puntos distintos posibles de generar en un muestreo de tamaño  $M$  a través de este procedimiento, lo que para valores de  $M$  suficientemente grandes permite concluir con mayor evidencia la convergencia del análisis en que se use estas muestras. Además, por la forma en que se particiona el dominio de los parámetros, no es estrictamente necesario utilizar el lema 3.1 y se puede trabajar directamente con la distribución deseada para cada variable.

### 3.2.3. Muestreo Factorial

El propósito de este método, es el de explorar el espacio de parámetros a través de trayectorias, las cuales se construyen a partir de un punto inicial y se recorren variando el valor de una sola coordenada en cada paso. Debido a ello, esta forma de muestrear y los métodos que la utilizan se suelen denominar OAT (*one at a time*).

Al momento de usar esta estrategia, se puede elegir la cantidad de trayectorias, denotada por  $r$ . En un modelo que depende de  $n$  parámetros, considerando el punto inicial, la muestra será de tamaño  $r(n + 1)$ . En adelante, se describirá la forma en que Morris (1991) define cómo el método elige el punto inicial, las trayectorias y qué implicancias tiene esto en su aplicación, para el caso en que  $\Omega = [0, 1]^n$ .

**Definición 3.3** (Morris) *Sea  $p > 1$  un número entero positivo. Para el hipercubo  $[0, 1]^n$ , se define una grilla  $n$ -dimensional de  $p$  niveles como el conjunto discreto*

$$\omega_p^n = \left\{ 0, \frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \dots, \frac{p-2}{p-1}, 1 \right\}^n \quad (3.4)$$

<sup>3</sup> Se puede entender por medida un hipervolumen (para una, dos y tres dimensiones, esta noción corresponde a longitud, área y volumen, respectivamente).

Queda claro que  $|\omega_p^n| = p^n$ . La idea es que los puntos de la muestra sean elegidos de este conjunto de forma aleatoria, pero que entre dos puntos consecutivos se satisfaga la premisa OAT, lo que implica que, para algún valor  $\Delta > 0$ , se cumpla

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta \hat{e}_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

Para asegurar que el punto sucesor al inicial esté dentro del espacio de parámetros, se escoge el primer valor  $\vec{x}_0$  de forma que

$$\vec{x}_0 \in \omega_p^n \Big|_{\Delta} \doteq \left\{ 0, \frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \dots, \frac{k}{p-1} \mid \frac{k}{p-1} \leq 1 - \Delta \right\}^n$$

En la elección anterior, cada coordenada puede tomar cualquiera de dichos valores con igual probabilidad. A partir de este punto, se puede definir la muestra con sus  $r$  trayectorias.

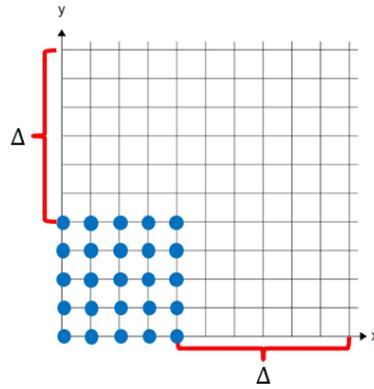


Figura 3.3: Posible elección de  $\Delta$ . Cada punto azul puede escogerse como inicial de una trayectoria.

**Definición 3.4** (Morris) Sea  $\omega_p^n$  una grilla  $n$ -dimensional de  $p$  niveles. Se define una trayectoria u orientación desde un punto inicial  $\vec{x}_0 \in \omega_p^n \Big|_{\Delta}$  a partir del siguiente procedimiento:

1. Se define la matriz trapezoidal inferior  $B$  de dimensiones  $(n+1) \times n$  como

$$[B]_{ij} = \begin{cases} 1 & , i > j \\ 0 & , i \leq j \end{cases}$$

2. Se define la matriz diagonal  $D^*$  de dimensiones  $n \times n$  como aquella tal que cada  $[D^*]_{ii}$  puede ser  $\pm 1$  con igual probabilidad.
3. Sea la matriz  $J_{m,n}$  de dimensiones  $m \times n$  cuyas celdas son todas  $[J_{m,n}]_{ij} = 1$ . Se define la matriz  $L^*$  de dimensiones  $(n+1) \times n$  por

$$L^* = \frac{1}{2} [(2B - J_{n+1,n})D^* + J_{n+1,n}]$$

4. Sea una matriz de permutación aleatoria  $P^*$  de dimensiones  $n \times n$ . Las  $n!$  posibles elecciones para  $P^*$  son igualmente probables. Se define la orientación (aleatoria) de  $B$  por

$$B^* = (J_{n+1,1} \vec{x}_0 + \Delta \cdot L^*) P^* \quad (3.5)$$

donde las elecciones de  $\vec{x}_0$ ,  $D^*$  y  $P^*$  son independientes entre sí.

Los pasos anteriores generan una secuencia aleatoria de vectores, dados por las filas de  $B^*$ , en que cada par de vectores sucesivos sólo difieren en una coordenada. Indistintamente, se puede denominar como trayectoria a la matriz  $B^*$  completa. Si se desea obtener  $r$  trayectorias independientes, basta con aplicar el procedimiento anterior  $r$  veces.

Finalmente, si la dimensión del espacio de parámetros es muy grande, una forma eficiente de escoger las  $r$  mejores trayectorias (descartando las demás) es calcular una cantidad  $M$  suficiente de éstas, por ejemplo,  $M = 10n$  trayectorias. Campolongo et al. (2010) propone seleccionar las  $r$  con la mayor dispersión, en el siguiente sentido:

**Definición 3.5** (Campolongo) Sean  $M$  trayectorias definidas como en el procedimiento de Morris 3.4, y sean  $B_m^*$  y  $B_l^*$  dos de estas trayectorias, que serán denotadas por  $m$  y  $l$ . En la trayectoria  $m$  (resp.  $l$ ), sea un punto  $\vec{x}^{(k_m)}$  (resp.  $\vec{x}^{(k_l)}$ ) en ella. De dicho punto, sea una de sus coordenadas  $x_i^{(k_m)}$  (resp.  $x_i^{(k_l)}$ ). Se define la métrica entre las dos trayectorias como

$$d_{m,l} = \sum_{k_m=1}^{n+1} \sum_{k_l=1}^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n \left( x_i^{(k_m)} - x_i^{(k_l)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Por definición, si  $m = l$  se tendrá que  $d_{m,l} = 0$ .

<sup>4</sup>Dado un número  $r \leq M$  deseado de trayectorias, existe un total de  $\binom{M}{r}$  combinaciones para  $d_{m,l}$  que involucran  $r$  trayectorias. Para una combinación de trayectorias  $\{m_1, \dots, m_r\}$ , se calcula su dispersión como

$$D = \left[ \sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^r d_{m_j, m_k}^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

que involucra  $\frac{r(r-1)}{2}$  términos. De todos los posibles conjuntos de  $r$  trayectorias, se escoge aquel que maximiza  $D$ .

Este método y los demás OAT pueden ser utilizados en análisis de sensibilidad global o local, por la capacidad de recorrer vecindades acotadas del espacio de parámetros, según la elección del paso  $\Delta$ .

<sup>4</sup> Las cantidades mencionadas aquí se demuestran en el Anexo A.

### 3.3. Métodos para el Análisis de Sensibilidad

A continuación, se desarrolla la herramienta central en este estudio, que permitirá definir índices para cuantificar la sensibilidad de un modelo a sus parámetros, además de deducciones de segundo orden entorno a las interacciones de los parámetros entre sí. Tales índices dependen de la forma de muestrear el espacio de parámetros y del tamaño de la muestra usada.

En términos estadísticos, este tipo de estudios se realiza sobre funciones para poner a prueba la hipótesis nula de que depende por completo de todas sus variables. La hipótesis alternativa sería, entonces, que existen variables de las que se puede prescindir sin que esto afecte significativamente el resultado.

Por simplicidad, se usará que la dimensión del espacio de llegada  $m$  es 1, ya que los métodos siguientes pueden extenderse al caso más general de campos vectoriales aplicándolos a cada función componente. Al igual que antes, se especificará cuando  $\Omega = [0, 1]^n$  y la distribución *a priori* de las variables sea uniforme.

#### 3.3.1. Método de Sobol-Saltelli

**Teorema 3.1** (Sobol) *Sea  $f \in L^1(\Omega)$ , con  $\Omega$  tal que la medida de cada  $\Omega_j$  es 1 (por ejemplo, un intervalo de largo unitario)<sup>5</sup>. Existe una única descomposición de  $f$  de la forma*

$$f(\vec{x}) = \tilde{f}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j(x_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n \tilde{f}_{j,k}(x_j, x_k) + \dots + \tilde{f}_{1,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.8)$$

tal que

$$\int_{\Omega_{i_k}} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq s \quad (3.9)$$

Esta descomposición se conoce como ANOVA (*Analysis of Variances*). Se desprende de su definición que cada par de términos distintos de la descomposición es ortogonal y que la descomposición puede escribirse explícitamente por recurrencia, encontrando cada función en términos de las funciones de menor dimensión:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= \int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} \\ \tilde{f}_j(x_j) &= \int_{\Omega_{*j}} f(\vec{x}) dx_{*j} - \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_{j,k}(x_j, x_k) &= \int_{\Omega_{*(j,k)}} f(\vec{x}) dx_{*(j,k)} - \tilde{f}_0 - \tilde{f}_j(x_j) - \tilde{f}_k(x_k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

<sup>5</sup> En el Anexo A se define los espacios  $L^p(\Omega)$  y se generaliza este teorema al caso en que  $\Omega$  es arbitrario.

El procedimiento termina con  $\tilde{f}_{1,\dots,n}(\vec{x})$ , dado simplemente por la ecuación 3.8. A partir de estas funciones, y asumiendo además que  $f \in L^2(\Omega)$ , se puede elevar 3.8 al cuadrado; gracias a la ortogonalidad de los términos de la descomposición, se obtiene

$$\int_{\Omega} f^2(\vec{x}) d\vec{x} = \tilde{f}_0^2 + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega_j} \tilde{f}_j^2(x_j) dx_j + \dots + \int_{\Omega} \tilde{f}_{1,\dots,n}^2(\vec{x}) d\vec{x} \quad (3.10)$$

Haciendo el símil con una función evaluada en un vector aleatorio de distribución uniforme en  $\Omega$ , se define de forma natural las varianzas de  $f$ :

**Definición 3.6** (Sobol) *Sean una función  $f \in L^2(\Omega)$  y su descomposición ANOVA dada por los términos  $\tilde{f}_{i_1,\dots,i_s}$ . Se define la varianza total y las varianzas parciales de  $f$  de orden  $s$ , respectivamente, como las cantidades*

$$D = \int_{\Omega} f^2(\vec{x}) d\vec{x} - \tilde{f}_0^2$$

$$D_{i_1,\dots,i_s} = \int_{\Omega_{(i_1,\dots,i_s)}} \tilde{f}_{i_1,\dots,i_s}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_1} \dots dx_{i_s}$$

Si lo anterior es normalizado con respecto a  $D$ , se obtiene los índices de sensibilidad global de orden  $s$ :

$$S_{i_1,\dots,i_s} = \frac{D_{i_1,\dots,i_s}}{D} \quad (3.11)$$

De su definición, cada índice de sensibilidad global es una cantidad positiva, mientras que la suma de todos ellos es exactamente 1. Además,  $S_{i_1,\dots,i_s} = 0$  si y sólo si  $\tilde{f}_{i_1,\dots,i_s} \equiv 0$ . Esto no necesariamente implica que  $f$  no depende de  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ , pues en un sólo índice se contempla las interacciones de las variables que ahí aparecen y no caracteriza dichas variables por completo. Sin embargo,

**Definición 3.7** (Sobol)  *$f$  se dice independiente de  $x_j$  si en todos los índices  $S_{i_1,\dots,i_s}$  en que algún  $i_k = j$ , se tiene que  $S_{i_1,\dots,i_s} = 0$ .*

El problema que surge con esta definición, es que se precisa conocer todos los índices para poder caracterizar el nivel de dependencia de la función, es decir, se debe calcular un total de  $2^n$  cantidades, lo que se vuelve prohibitivo si el número de parámetros es grande y se desea realizar un análisis robusto. Por ello, estos índices se suelen aproximar mediante una estimación numérica de las integrales involucradas vía un método MC o QMC, como fue descrito en la sección anterior. En consecuencia, y ya que las evaluaciones de  $f$  y su descomposición ANOVA son aleatorias, se considera  $X$  como vector aleatorio con densidad conjunta  $p_X(\vec{x})$  en  $\Omega$  y se denota  $Y = f(X)$ .

Si la presupuesta descomposición ANOVA de la ecuación 3.8 se multiplica por  $p_X(\vec{x})$  y se procede como se ha desarrollado hasta ahora, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_0 &= \mathbb{E}_X[ Y ] \\
\tilde{f}_j(x_j) &= \mathbb{E}_X[ Y \mid X_j = x_j ] - \tilde{f}_0 \\
\tilde{f}_{j,k}(x_j, x_k) &= \mathbb{E}_X[ Y \mid X_j = x_j, X_k = x_k ] - \tilde{f}_j(x_j) - \tilde{f}_k(x_k) - \tilde{f}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Usando la definición de varianza y aplicando el operador  $\mathbb{V}_X[ \cdot ]$  a lo anterior, dado que la varianza de una constante es cero resulta:

$$\mathbb{V}_X[ Y ] = \mathbb{E}_X[ Y^2 ] - \tilde{f}_0^2 \quad (3.12)$$

$$\mathbb{V}_X[ \tilde{f}_j(X_j) ] = \mathbb{V}_X[ \mathbb{E}_X[ Y \mid X_j ] ] \quad (3.13)$$

$$\mathbb{V}_X[ \tilde{f}_{j,k}(X_j, X_k) ] = \mathbb{V}_X[ \mathbb{E}_X[ Y \mid X_j, X_k ] ] - \mathbb{V}_X[ \tilde{f}_j(X_j) ] - \mathbb{V}_X[ \tilde{f}_k(X_k) ] \quad (3.14)$$

⋮

De esta forma, los índices de sensibilidad global quedan redefinidos en términos de varianzas en todo rigor:

**Definición 3.8** (Sobol) *Sean una función  $f \in L^2(\Omega)$  y su descomposición ANOVA tales que  $Y = f(X)$  y  $\tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1, \dots, i_s})$  son la evaluación de una muestra aleatoria uniformemente distribuida. Se define la varianza total y las varianzas parciales de  $f$  de orden  $s$ , respectivamente, como las cantidades  $\mathbb{V}_X[ Y ]$  y  $\mathbb{V}_X[ \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) ]$  definidas por recurrencia en las ecuaciones 3.12.*

*Si lo anterior es normalizado con respecto a la varianza total, se obtiene los índices de sensibilidad global de Sobol de orden  $s$ :*

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{\mathbb{V}_X[ \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) ]}{\mathbb{V}_X[ Y ]} \quad (3.15)$$

Es esclarecedor para la interpretación de los índices mencionar que las varianzas de primer orden cuantifican el efecto de una variable de forma aislada, mientras que las varianzas de orden superior cuantifican el efecto de las variables asociadas cuando éstas interactúan entre sí.

Ya que ahora se está tratando con variables aleatorias, se puede definir un último índice que será de utilidad para el análisis de sensibilidad. Éste considera el efecto de una variable por sí sola y sus interacciones con todas las demás variables, por lo que caracteriza su nivel de influencia en un todo.

**Definición 3.9** (Sobol) *Sean una función  $f \in L^2(\Omega)$  y su descomposición ANOVA tales que  $Y = f(X)$  y  $\tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1, \dots, i_s})$  son la evaluación de una muestra aleatoria uniformemente*

distribuida. Se define el índice de efecto total para el parámetro  $x_j$  como

$$S_j^T = \frac{\mathbb{E}_X[ \mathbb{V}_X[ Y | X_{*j} ] ]}{\mathbb{V}_X[ Y ]} = 1 - \frac{\mathbb{V}_X[ \mathbb{E}_X[ Y | X_{*j} ] ]}{\mathbb{V}_X[ Y ]} \quad (3.16)$$

Finalmente, y para ilustrar cómo se puede realizar computacionalmente una primera evaluación de los índices de primer orden y de orden total, se utiliza las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C^j$  definidas como 3.1, 3.2 y 3.3, respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{y}_A &= [f(A_{1\bullet}), \dots, f(A_{M\bullet})]^T \\ \vec{y}_B &= [f(B_{1\bullet}), \dots, f(B_{M\bullet})]^T \\ \vec{y}_{C^j} &= [f(C_{1\bullet}^j), \dots, f(C_{M\bullet}^j)]^T \end{aligned}$$

$$S_j = \frac{\mathbb{V}_X[ \mathbb{E}_X[ Y | X_j ] ]}{\mathbb{V}_X[ Y ]} = \frac{y_A \cdot y_{C^j} - f_0^2}{y_A \cdot y_A - f_0^2} \quad (3.17)$$

$$S_j^T = 1 - \frac{\mathbb{V}_X[ \mathbb{E}_X[ Y | X_{*j} ] ]}{\mathbb{V}_X[ Y ]} = 1 - \frac{y_B \cdot y_{C^j} - f_0^2}{y_A \cdot y_A - f_0^2} \quad (3.18)$$

donde

$$f_0^2 = \frac{1}{M^2} \|y_A\|^2$$

### 3.3.2. Método de Borgonovo

Se puede notar que el método ya visto conduce al estudio de distribuciones *a posteriori*, con su esperanza y varianza asociadas. En aplicaciones intensivas, estas medidas suelen caracterizar de buena forma los parámetros de los que depende un modelo. Sin embargo, siempre existe el riesgo de cometer errores estadísticos de tipo I o II, dependiendo de cómo se caracteriza una variable, y esto se debe a que se está aproximando una cantidad finita de momentos<sup>6</sup> asociados a variables aleatorias cuyo comportamiento real es desconocido. Haciendo referencia a los problemas de los momentos de Hausdorff, de Stieltjes y de Hamburger<sup>7</sup>, esta información no es suficiente para determinar la naturaleza estadística de los parámetros, más allá de asumir suficiencia de información y consistencia entre los resultados obtenidos con distintos métodos.

Ante este hecho, Borgonovo (2006) presenta una forma de estimar índices de sensibilidad global que no dependen de momentos estadísticos y que dan cuenta de correlaciones entre las variables. Considerando que el resultado del modelo  $Y$  tiene su propia función densidad cuando los parámetros recorren su dominio, es natural también considerar una función densidad

<sup>6</sup> Se entiende por  $n$ -ésimo momento de una distribución como la cantidad  $\mu_n = \mathbb{E}_X[ X^n ]$ , con  $n$  un entero positivo.

<sup>7</sup> Éstos serán descritos en el Anexo A.

condicional para  $Y$  cuando se fija una variable  $X_i$  a un valor  $x_i$ .

**Definición 3.10** (Borgonovo) *Sean  $p_Y$  la función densidad de  $Y = f(X)$  y  $p_{Y|X_i=x_i}$  la función densidad de  $Y|_{X_i=x_i} = f(X | X_i = x_i)$  (independiente de  $X_i$ ). Se define el cambio (o shift) entre los estados  $Y$  y  $Y|_{X_i=x_i}$  como la función*

$$s(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} |p_Y(y) - p_{Y|X_i=x_i}(y)| dy \quad (3.19)$$

Del mismo modo, se puede definir el shift cuando se fija más variables:

$$s(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) = \int_{-\infty}^{\infty} |p_Y(y) - p_{Y|X_{i_1}, \dots, X_{i_s}}(y)| dy \quad (3.20)$$

Los *shift* recién definidos son efectivamente funciones de las variables que se fijan, que en el caso de un modelo unidimensional representan cuánto varía la medida bajo la distribución incondicional cuando se fija un parámetro a un determinado valor. Luego, volviendo a denotar las variables fijas como variables aleatorias, se puede calcular el valor esperado del *shift* asociado:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{X_i} [ s(X_i) ] &= \int_{\Omega_i} s(x_i) \cdot p_{X_i}(x_i) dx_i \\ \mathbb{E}_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}} [ s(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) ] &= \int_{\Omega_{(i_1, \dots, i_s)}} s(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \cdot p_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_1} \dots dx_{i_s} \end{aligned}$$

donde

$$p_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}} = \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_s)}} p_X(x) dx_{*(i_1, \dots, i_s)}$$

representa la densidad marginal conjunta de las variables  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})$ .

**Definición 3.11** (Borgonovo) *Se define el índice de sensibilidad (independiente de momento) para el parámetro  $x_j$  con respecto al modelo  $Y$  como*

$$\delta_j = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{X_j} [ s(X_j) ] \quad (3.21)$$

Del mismo modo, se define el índice de sensibilidad para los parámetros  $X_{i_1}, \dots, X_{i_s}$  como

$$\delta_{i_1, \dots, i_s} = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}} [ s(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) ] \quad (3.22)$$

De la definición, se tiene que cada valor  $\delta_j$  está acotado entre 0 (que es el caso en que no hay variación debida al parámetro  $x_j$ ) y 1, mientras que  $\delta_{1, \dots, n} = 1$ . Además, en los cálculos anteriores sólo se hace uso de la distribución conjunta, por lo que no es necesario asumir independencia entre las variables.

Es de suponer que estos índices se parezcan en cierto grado a los definidos por Sobol. La diferencia yace en el hecho de que estos últimos indican los parámetros que más reducen

la varianza de  $Y$  (precisar mejor el valor de aquellos con mayor índice de sensibilidad, precisa mejor el valor del modelo), mientras que los propuestos por Borgonovo identifican los parámetros que más influyen la distribución de  $Y$  completa.

### 3.3.3. Método de Morris-Campolongo

Una forma muy natural de cuantificar la sensibilidad de una función con respecto a una de sus variables es, simplemente, calcular su derivada parcial. Por supuesto, un modelo general es una caja negra en que los parámetros actúan de forma compleja, lo que suele imposibilitar cálculos analíticos. El método de Morris aborda este problema mediante el uso de evaluaciones del modelo en un esquema similar al de una derivada numérica (razón por la que pertenece a la categoría OAT), pero en un sentido más laxo. Esto ya que el método se plantea para el análisis de sensibilidad global, lo que restringe qué tan bien se puede llegar a aproximar una variación en un paso muy fino, por limitaciones computacionales.

La finalidad de este método es validar resultados que otros análisis de sensibilidad puedan dar puesto que, como se verá, éste permite identificar qué variables contribuyen significativamente a la incerteza del *output*. Esta clase de métodos se conoce como Selectivos (o *Screening*), ya que pretenden calificar los parámetros como influyentes o no influyentes, más que calcular el valor su sensibilidad, y dar un ordenamiento (o *ranking*) en términos de su influencia.

**Definición 3.12** (Morris) *Sea  $f \in BV(\Omega)$ , el espacio de funciones de variación acotada<sup>8</sup> en  $\Omega$ . Dados  $\vec{x} \in \Omega$  y un valor  $\Delta_j > 0$ , se define el efecto elemental de la componente  $x_j$  como*

$$EE_j = \frac{f(\vec{x} + \Delta_j \hat{e}_j) - f(\vec{x})}{\Delta_j} \quad (3.23)$$

Si se pudiese conocer los valores que adquieren los efectos elementales en todo el espacio de parámetros, se podría tener una idea del comportamiento de algo similar a la derivada de  $f$  y, con ello, estimar su sensibilidad con respecto a sus variables. Con este objetivo, se utiliza puntos obtenidos de un muestreo factorial. Así, se puede aplicar este método en  $n$  parámetros, usando  $p$  niveles y con  $r$  trayectorias.

Una vez se tiene las matrices  $B_i^*$  como en 3.5, con  $1 \leq i \leq r$ , se puede agrupar aquellos pares de filas de cada  $B_i^*$  en que sólo varía  $x_j$  y con ello calcular una muestra de valores  $EE_j$ . Luego,  $EE_j$  puede verse como una variable aleatoria, de la cual se puede estimar un valor medio y una dispersión:

**Definición 3.13** (Morris) *Dada una muestra de tamaño  $r$  para  $EE_j$ , obtenida a partir de la definición 3.4, se define el estimador para su promedio y el estimador para su desviación*

<sup>8</sup> Ver espacios  $BV(\Omega)$  en Anexo A.

estándar, respectivamente, como

$$\mu_j = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r EE_j^{(k)} \quad (3.24)$$

$$\sigma_j = \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^r \left( EE_j^{(k)} - \mu_j \right)^2 \quad (3.25)$$

Por simplicidad, Morris (1991) propone escoger  $p$  un número par y que  $\Delta$  sea un múltiplo de  $\frac{1}{p-1}$ . En particular, trabajó con el valor  $\Delta = \frac{p}{2(p-1)}$  debido a que esto simplifica el total<sup>9</sup> de posibles valores que puede adoptar cada  $EE_j$  a  $\frac{p^n}{2}$ .

Similar al caso del índice de primer orden  $S_j$  del método de Sobol-Saltelli, el sólo uso de  $\mu_j$  puede conducir a errores de interpretación. Para este esquema, existe el riesgo de que un modelo que depende de un parámetro de forma no monótona puede tener efectos elementales de distinto signo, ocultando parte del efecto total. Por ello, en Campolongo et al. (2006) se define una medida adicional que reduce esa posibilidad.

**Definición 3.14** (Campolongo) *Dada una muestra de tamaño  $r$  para  $EE_j$ , obtenida a partir de la definición 3.23, se define*

$$\mu_j^* = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left| EE_j^{(k)} \right| \quad (3.26)$$

En términos estadísticos, la ventaja que supone complementar  $\mu_j$  con el cálculo de  $\mu_j^*$  es que éste último es menos propenso a errores de tipo II, en el sentido de que si por el uso de  $\mu_j^*$  se concluye que el parámetro correspondiente no es influyente, es poco probable que se identifique como influyente a través de otra medida. Además, existe evidencia empírica (Campolongo et al., 2006) de que es un buen complemento de  $S_j^T$  dado en 3.16 e incluso puede aplicarse previamente al método de Sobol para reducir el número de variables a considerar (Saltelli et al., 2007, pp. 38-39) si su cálculo es demasiado costoso.

Como  $\mu_j^*$  es una alternativa eficiente, para casos en que la dimensión del espacio de parámetros es muy grande, Campolongo et al. (2010) utiliza la estrategia planteada como *addendum* al final del método factorial, en la definición 3.5.

La forma de interpretar estos resultados depende casi íntegramente del contexto, aunque en ocasiones es posible aventurar conjeturas basados en las relaciones entre  $\mu_j$  y  $\sigma_j$ .  $\mu_j^*$  puede ser comparado con  $\mu_j$  para obtener información sobre la monotonicidad del parámetro.

**Definición 3.15** (Morris) *Dada una muestra de tamaño  $r$ , para una estimación de  $\mu_j$  (o  $\mu_j^*$ ) y  $\sigma_j$ , se define el error estándar de la media como*

$$SEM_j = \frac{\sigma_j}{\sqrt{r}} \quad (3.27)$$

<sup>9</sup> La derivación de este resultado se da en el Anexo A.

y el coeficiente de variación como

$$CV_j = \frac{\sigma_j}{\mu_j} \quad (3.28)$$

La manera usual de clasificar los parámetros es considerar el plano cartesiano, con  $\mu$  en la abscisa y  $\sigma$  en la ordenada, y graficar los puntos  $\{(\mu_i, \sigma_i)\}_{i=1}^r$  para compararlos con rectas de la forma  $CV_j = k$ , donde  $k$  es algún valor constante. Aquellos parámetros agrupados dentro de la cuña definida por las rectas dadas por  $k = \pm 1$  y cerca del origen son considerados no influyentes; aquellos que yacen dentro de la cuña y lejos del origen, tienen un comportamiento que se espera sea lineal o aditivo; los demás parámetros, tienen un comportamiento que se espera no lineal o de alta interacción con otros parámetros.

### 3.4. Convergencia en el Análisis de Sensibilidad

Todos los métodos vistos tienen sus ventajas y limitaciones. Dentro de las bondades que éstos presentan, las que determinan que se usen en este trabajo son su sencillez de implementación e interpretación. Es inevitable advertir que todos los resultados están sujetos al riesgo de cometer errores estadísticos que lleven a categorizar equivocadamente los parámetros. Ante esto, la posibilidad más inmediata que se presenta a quien use estas herramientas de análisis es que se realice un paso previo a las conclusiones que pueda hacerse, llamado estudio de convergencia.

Un método puede presentar convergencia de tres formas (Awad et al., 2019), dependiendo de qué clase de resultados provee:

- i) Convergencia del valor de los índices de sensibilidad: se alcanza cuando el valor los índices permanece estable, es decir, a partir de cierto número de muestras, la sensibilidad evidenciada permanece relativamente constante.
- ii) Convergencia del *ranking* de los parámetros: se alcanza cuando el ordenamiento de los parámetros relativo a su nivel de influencia permanece estable, es decir, a partir de cierto número de muestras, el *ranking* elaborado permanece constante.
- iii) Convergencia de la categorización de los parámetros: se alcanza cuando la partición del conjunto de parámetros entre aquellos a los que el modelo es sensible y aquellos a los que es insensible es estable. Esta forma de convergencia, a diferencia de los anteriores, depende de un umbral definido por quien realiza la investigación, el cual define la partición mencionada.

La convergencia de los métodos permite reforzar los resultados de los que se hará uso de dos maneras:

1. Permite asegurar que los índices calculados se estabilizan en algún valor bien definido. Esto indica que el modelo a analizar tiene un comportamiento numérico consistente con los supuestos que usan los métodos (por ejemplo, integrabilidad o variación acotada).

2. Simplifica implementaciones futuras en el modelo, dando una cota mínima de muestras  $M$  a partir de la que el resultado no varía demasiado. Esto significa que no será necesario usar una muestra de mayor tamaño que  $M$  para dar más robustez al estudio, puesto que los resultados no serán significativamente distintos.

Para este trabajo, se presentará una evaluación de la convergencia de los métodos utilizados en función del tamaño  $M$  de las muestras, con el fin de proveer un tamaño mínimo aceptable, a ser usado en los futuros análisis.

# Capítulo 4

## Aplicación del Análisis de Sensibilidad

### 4.1. Introducción

Vistos ya los métodos a utilizar y el modelo al cual se aplicarán, se mostrará cómo se formuló el análisis. Esto incluye mostrar qué variables requiere el modelo para calcular un sismograma sintético y, de dichas variables, cuáles serán sometidas al análisis de sensibilidad. Dado lo anterior, se contextualiza el uso del modelo al terremoto que sirvió de referencia en todo el estudio. Además, se especifica las decisiones que fue necesario adoptar para que el análisis fuera viable y de utilidad, como la elección de las funciones objetivo que serán sometidas al análisis.

Al final de este capítulo, se habrá evaluado la sensibilidad de cada variable considerada, se contrastará lo obtenido entre todos los métodos utilizados y se justificará la robustez de los resultados mediante el estudio de la convergencia del problema. Esto se realiza en distintos periodos, con la esperanza de tener respuestas interesantes como función tanto de éstos como de la ubicación de las estaciones; periodo y distancia serán metaparámetros del problema.

### 4.2. Cálculo de acelerogramas sintéticos

La siguiente sección resume el uso del código que permite calcular sismogramas sintéticos (aquí abreviado como MGA, por Modelo de Generación de Acelerogramas), desarrollado y optimizado por Sebastián Arriola (CSN, Universidad de Chile) del cual se obtiene series de tiempo para aceleración y velocidad.

Para comenzar, se debe establecer valores que permitan calcular las expresiones 2.1 - 2.35. En el caso de la ventana temporal, se utiliza los valores propuestos por Boore (2003), con  $\varepsilon = 0,2$ ,  $\eta = 0,05$  y  $f_{T_{gm}} = 2$ . Por último,

$$T_{gm} = \begin{cases} 1.5 \cdot 10^{-3+0,5 \cdot M_w} + 0,02 \cdot R_{hyp}^{1,04} & , \text{ si } M_w < 7,5 \\ 1.5 \cdot 10^{-3+0,5 \cdot M_w} + 0,51 \cdot R_{hyp}^{0,3} & , \text{ si } 7,5 \leq M_w < 8,9 \\ 97,67 + 0,128 \cdot R_{hyp} & , \text{ si } M_w > 8,9 \end{cases}$$

Lo que sigue, depende de la disposición de la falla, del terremoto, las estaciones y el modelo de capas en el trayecto mediante. En primer lugar, el evento de momento sísmico  $M_0$  se ubica en coordenadas de origen que sirven de referencia para las demás ubicaciones geográficas, mientras que su mecanismo focal indica tanto el ángulo de manteo del plano de falla en que está contenido como su dirección de deslizamiento. Consecuentemente, el plano de falla es discretizado entorno al sismo en  $N$  puntos coordenados, de los cuales  $N_R$  se activan debido al terremoto. En el plano, se asume una velocidad  $\alpha$  y  $\beta$  para las ondas P y S, respectivamente, y una densidad de medio  $\rho$ .

Las coordenadas cartesianas anteriores son transformadas a un sistema coordenado terrestre mediante el método de Gauss-Kruger, para luego ubicar estaciones en coordenadas reales. A gran escala, desde la fuente las ondas recorren un medio estratificado en capas homogéneas, las que se integran al algoritmo como un modelo de velocidades. Esto permite calcular los ángulos de incidencia desde cada subfalla, que luego dará lugar a la partición de la energía. Por otro lado, los factores de superficie libre hacen uso de estos ángulos en el esquema presentado por Jiang et al. (1998), donde se calcula la contribución a la amplitud debida a la reflexión de ondas esféricas.

Del espectro obtenido para la aceleración se puede también calcular el espectro para la velocidad. Habiendo pasado el espectro al dominio temporal, los registros se rotan según los ángulos azimutales, de forma que el sistema coordenado se desprende de la geometría de la falla. Así, se consigue una señal orientada en componentes Norte-Sur, Oeste-Este y Vertical.

### 4.3. Variables a analizar

En la tabla 4.1 se lista los parámetros de los que hace uso MGA. Es necesario hacer la distinción entre variables discretas y continuas, y aquellas contenidas en archivos, ya que es un primer criterio para seleccionar las que tiene sentido analizar.

Dentro de los parámetros listados, los llamados parámetros globales representan valores macroscópicos del evento, de la discretización temporal de la señal sintética y del filtrado de frecuencias. Incluye variables de archivo con información específica del terremoto en cuanto a la discretización de la falla y del mecanismo focal, información de la posición de las estaciones y las funciones de transferencia del sitio en que se encuentran, e información del medio a gran

escala dada por un modelo de velocidades.

Tabla 4.1: Variables que recibe MGA.

Categoría	Variable	Descripción	Tipo
Fuente	$\text{lon}_{ij}/\text{lat}_{ij}/z_{ij}$	Coord. subfalla [ $^{\circ}/^{\circ}/\text{m}$ ]	Continuo
	$\Delta u_{ij}$	<i>Slip</i> subfalla [m]	Continuo
	$\phi_{ij}/\delta_{ij}/\lambda_{ij}$	<i>Strike/Dip/Rake</i> subfalla [ $^{\circ}$ ]	Continuo
	$w_{ij}/l_{ij}$	Ancho/Largo subfalla [m]	Continuo
	$t_{ij}$	Tiempo ruptura [s]	Continuo
Estaciones	$\text{lon}_m/\text{lat}_m/z_m$	Coord. estación [ $^{\circ}/^{\circ}/\text{m}$ ]	Continuo
	$\kappa_m$	Factor atenuación empírico [s]	Continuo
	SATF <sub>m</sub>	Funciones transferencia	Archivo
Modelo estaciones	$h_{m,k}$	Espesor capa local [m]	Continuo
	$v_{P\ m,k}$	Vel. onda P [m/s]	Continuo
	$v_{S\ m,k}$	Vel. onda S [m/s]	Continuo
Modelo velocidades	$z_k$	Espesor capa [m]	Continuo
	$v_{P\ k}$	Vel. onda P [m/s]	Continuo
	$v_{S\ k}$	Vel. onda S [m/s]	Continuo
Parámetros globales	$M_w$	Magnitud de momento	Continuo
	$t_T$	Tiempo traza sintética [s]	Continuo
	$N_{ps}$	Frecuencia muestreo [1/s]	Discreto
	$\alpha$	Vel. onda P en fuente [m/s]	Continuo
	$\beta$	Vel. onda S en fuente [m/s]	Continuo
	$\rho$	Densidad en fuente [g/cm <sup>3</sup> ]	Continuo
	$\gamma$	Decaimiento espectral	Continuo
	$Q_S$	Factor calidad onda P	Continuo
	$Q_P$	Factor calidad onda S	Continuo
	$\Delta\sigma$	Caída esfuerzos [bar]	Continuo
	$\text{lon}_h/\text{lat}_h/z_h$	Coord. hipocentro [ $^{\circ}/^{\circ}/\text{km}$ ]	Continuo
	$R_0$	Distancia referencia [km]	Continuo
	filt <sub>ac</sub>	Filtrar aceleración	Booleano
	$f_{\min\ ac}/f_{\max\ ac}$	Frec. corte aceleración [Hz]	Continuo
	filt <sub>vel</sub>	Filtrar velocidad	Booleano
	$f_{\min\ vel}/f_{\max\ vel}$	Frec. corte velocidad [Hz]	Continuo
	threads	Hilos en paralelización	Discreto
	ffm	Modelo fuente	Archivo
	velmod	Modelo velocidad	Archivo
	stat	Estaciones	Archivo
	app <sub>TF</sub>	Aplica función transferencia	Booleano
	$\rho_{TF}$	Densidad global [g/cm <sup>3</sup> ]	Archivo
	$B_P$	Amort. onda P	Continuo
$B_{SV}$	Amort. onda SV	Continuo	
$B_{SH}$	Amort. onda SH	Continuo	

En este trabajo, se estudia la sensibilidad con respecto a las variables  $M_w$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $Q_S$ ,  $Q_P$  y  $\Delta\sigma$ . Esta decisión resulta de descartar aquellas variables que por su naturaleza discreta o por pertenecer a archivos completos resulta imposible considerar variarlos en el esquema propuesto, además de la impracticabilidad de manipular aspectos como la discretización del plano de falla o del rango de frecuencias (¿Qué se variará? ¿Sus límites? ¿La cantidad de puntos de discretización? ¿Son consistentes estas variaciones con el hecho de querer representar un plano o intervalo?). Por otro lado, resultó de particular interés poder estudiar los parámetros que caracterizan el trayecto de las ondas entre la fuente y las estaciones, ya que de éstas se pretende deducir propiedades que serán objeto de discusión en las conclusiones. Queda pendiente para futuras pruebas incluir el modelo de velocidades y el factor de atenuación  $\kappa_m$ , variables para las cuales se requiere planificar su aleatorización cuidadosamente.

El siguiente aspecto importante es determinar la función que será sometida al análisis. Por razones que se mencionan de inmediato, es necesario comparar los sintéticos generados con los registros de algún terremoto real. Siendo ambas series de tiempo, es absurdo pretender realizar un análisis basados en la comparación en cada instante de la serie, además de la dificultad que plantea que la tasa de medición del registro real no coincide con el del MGA. Por lo tanto, se buscó métricas significativas sobre las cuales dirigir el estudio: las funciones  $PGA_m^\xi$  (*peak ground acceleration*),  $RMS_m^\xi$  (*root mean square*) y  $GOF^\xi$  (*goodness of fit*), para una estación  $m$  y calculada en la dirección  $\xi$ .

$$PGA_m^\xi = \left| \max_t |O_m^\xi(t)| - \max_t |S_m^\xi(t)| \right| \quad (4.1)$$

$$RMS_m^\xi = \left| \left( \sum_t O_m^\xi(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_t S_m^\xi(t) \right)^{\frac{1}{2}} \right| \quad (4.2)$$

$$GOF^\xi(T) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ln \left( \frac{O_m^\xi(T)}{S_m^\xi(T)} \right) \quad (4.3)$$

La función GOF es de particular interés, puesto que permite evaluar la bondad de ajuste del MGA respecto del registro real por periodo en las  $N$  estaciones consideradas, con lo que se espera obtener respuestas más ricas en detalle. Es esta función la que exige el uso del registro observado, lo que se agrupará con el registro de todas las estaciones modeladas. Los periodos para la evaluación del GOF se seleccionaron basados en el hecho de que el MGA se ajusta particularmente bien a los registros en el intervalo  $0,05 - 1$ [s] (Ruiz et al. 2018).

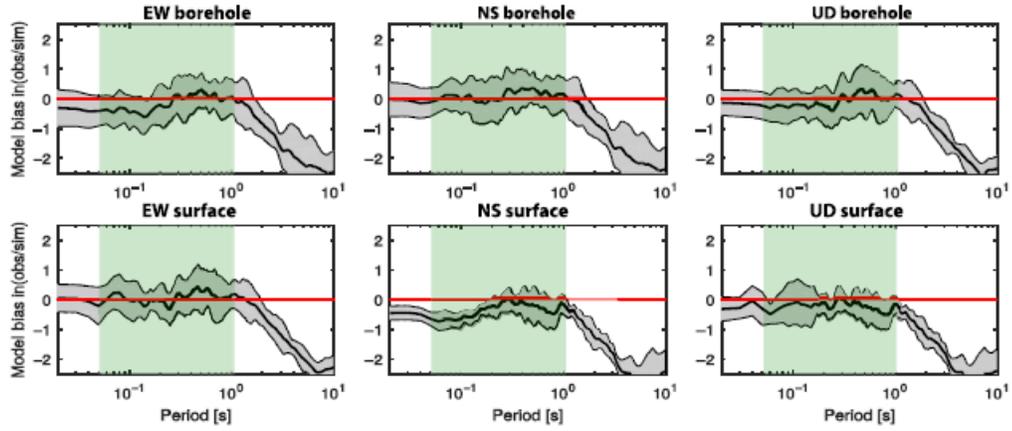


Figura 4.1: GOF para periodos determinados, donde hay mejor ajuste en la banda  $0,05 - 1$ [s]. Modificado de [Ruiz et al., 2018].

Teniendo en cuenta que cada uso del programa en un sistema de 24 núcleos (que es lo idóneo para el MGA) demora un estimado de 7 segundos con las estaciones consideradas y que la convergencia puede darse tras miles de evaluaciones, es necesario plantearse estrategias para la viabilidad del estudio y sus posibles réplicas. Como se discutió en la definición de los métodos de análisis, un primer estimador de índices de sensibilidad podría estar dado por 3.21, del método de Borgonovo. Sin embargo, es necesario cotejar que sea un indicador confiable, y esto requiere una validación mediante el método de Sobol-Saltelli.

Para realizar las evaluaciones y el posterior análisis de sensibilidad, se utilizó una distribución de Linux (donde está soportado el uso de MGA) y librerías de Python dedicadas al muestreo y cálculo de índices (SALib) y su visualización (Plotly). La evaluación se realizó de forma conjunta en varios centros de cálculo: Departamento de Geofísica y Departamento de Ingeniería Civil, de la Universidad de Chile; Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas, de la Universidad de los Andes; UAR GRICAD, de la Universidad de Grenoble; e Institut de Physique du Globe, de la Universidad de Strasbourg; a todos los cuales se debe los resultados que se presentará.

## 4.4. Cálculo de índices

Como se mencionó, la estrategia para el cálculo de índices siguió la lógica de utilizar el método de Sobol-Saltelli para todas las funciones objetivo, pudiendo evaluar si existe consistencia entre ellas. Luego, a la función que mayor cantidad de información aporta (GOF) se le aplicó el método de Borgonovo para constatar que los métodos son también consistentes. Esto se hizo en los periodos  $T = 0,05$  [s],  $T = 0,1$  [s],  $T = 0,35$  [s] y  $T = 1$  [s] para muestrear parcialmente el intervalo propuesto. Finalmente, a GOF se le aplicó el método de Morris-Campolongo para verificar que los *ranking* que se pueden deducir son consistentes.

El terremoto utilizado como referencia es el sismo  $M_w$  6.9 ocurrido en Tohoku, Japón el

23 de junio del 2011, como réplica del terremoto interplaca  $M_w$  9.0 ocurrido el 11 de marzo del mismo año. Las estaciones consideradas para realizar la simulación se encuentran en la red KiK-net y se agruparon de tres formas: el conjunto completo, aquellas más cercanas a la fuente y aquellas más lejanas (Figura 4.2).

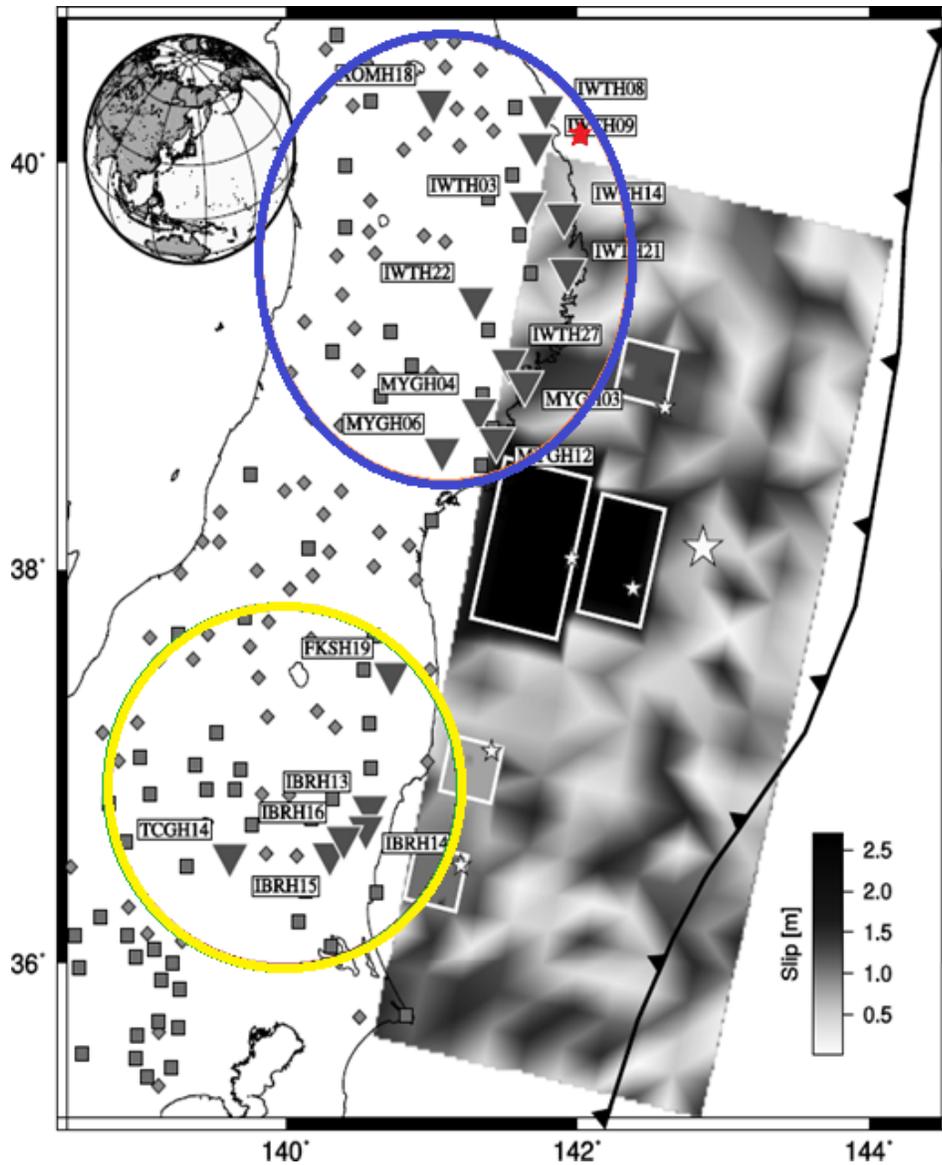


Figura 4.2: Distribución de estaciones utilizadas (Grupo 1). Hacia el norte, el epicentro de la réplica (estrella roja) y Grupo 2 (elipse azul); hacia el sur, el Grupo 3 (elipse amarilla). Modificado de [Ruiz et al., 2018].

Tabla 4.2: Grupos de estaciones utilizadas.

		<b>Estación</b>	<b>Coordenadas</b> (lon [°] · lat [°] · alt [m])		
<b>Grupo 1</b>	<b>Grupo 2</b>	AOMH18	141.014	· 40.296	· 135
		IWTH03	141.652	· 39.802	· 210
		IWTH08	141.783	· 40.268	· 75
		IWTH09	141.712	· 40.086	· 140
		IWTH14	141.908	· 39.743	· 100
		IWTH21	141.933	· 39.473	· -87
		IWTH22	141.301	· 39.334	· 160
		IWTH27	141.532	· 39.030	· -20
		MYGH03	141.637	· 38.920	· -37
		MYGH04	141.325	· 38.786	· -65
		MYGH06	141.071	· 38.590	· -80
	<b>Grupo 3</b>	FKSH19	140.722	· 37.470	· 410
		IBRH14	140.548	· 36.692	· 230
		IBRH15	140.301	· 36.556	· -62
		IBRH16	140.397	· 36.640	· -210
		TCGH14	139.615	· 36.551	· 80

Para comenzar, es necesario dotar los parámetros de un dominio con una densidad *a priori*. Pese a que, en general, los problemas de inversión de una fuente utilizan distribuciones normales o log-normales para sus variables, para que el estudio fuera lo más imparcial posible se utilizó distribuciones uniformes. El intervalo en que se definieron abarca el valor aceptado para el sismo, de la forma que se especifica en la tabla 4.3.

Tabla 4.3: Soporte de cada función densidad.

<b>Variable</b>	<b>Soporte</b>	<b>Valor aceptado</b>	
$M_w$	6.5 – 7.3	6.9	
$\alpha$	6.4 – 7.7	7.15	[km/s]
$\beta$	3.4 – 4.7	4.2	[km/s]
$\rho$	2.5 – 3.6	3.2	[g/cm <sup>3</sup> ]
$\gamma$	1.0 – 2.3	1.7	
$Q_S$	450 – 750	600	
$Q_P$	1000 – 1500	1350	
$\Delta\sigma$	2 – 20	7	[MPa]

Estos intervalos se definen a partir de considerar los valores reales correspondientes aceptados para el sismo como punto central del dominio, desde el cual se incorpora una variación que abarca valores con sentido físico y que no da especial preferencia a ninguno de ellos. También se espera que estos intervalos guarden cierta proporción de variación entre variables, de forma que no se aumente de forma artificial la varianza de alguna variable por sobre la de las demás.

Para cada prueba, se generó 20.000 muestras de cada variable, tanto para aplicar el método de Sobol-Saltelli como el de Borgonovo. Posteriormente, para la implementación del método de *ranking* de Morris-Campolongo se utilizó 900 muestras. Aunque a primera vista la diferencia de muestras es enorme, la decisión de hacerlo así se fundamenta en que los primeros dos métodos convergen para un tamaño de muestra menor a la mitad considerada, junto con el hecho de que el último método requiere menos evaluaciones para la estimación que pretende hacer.

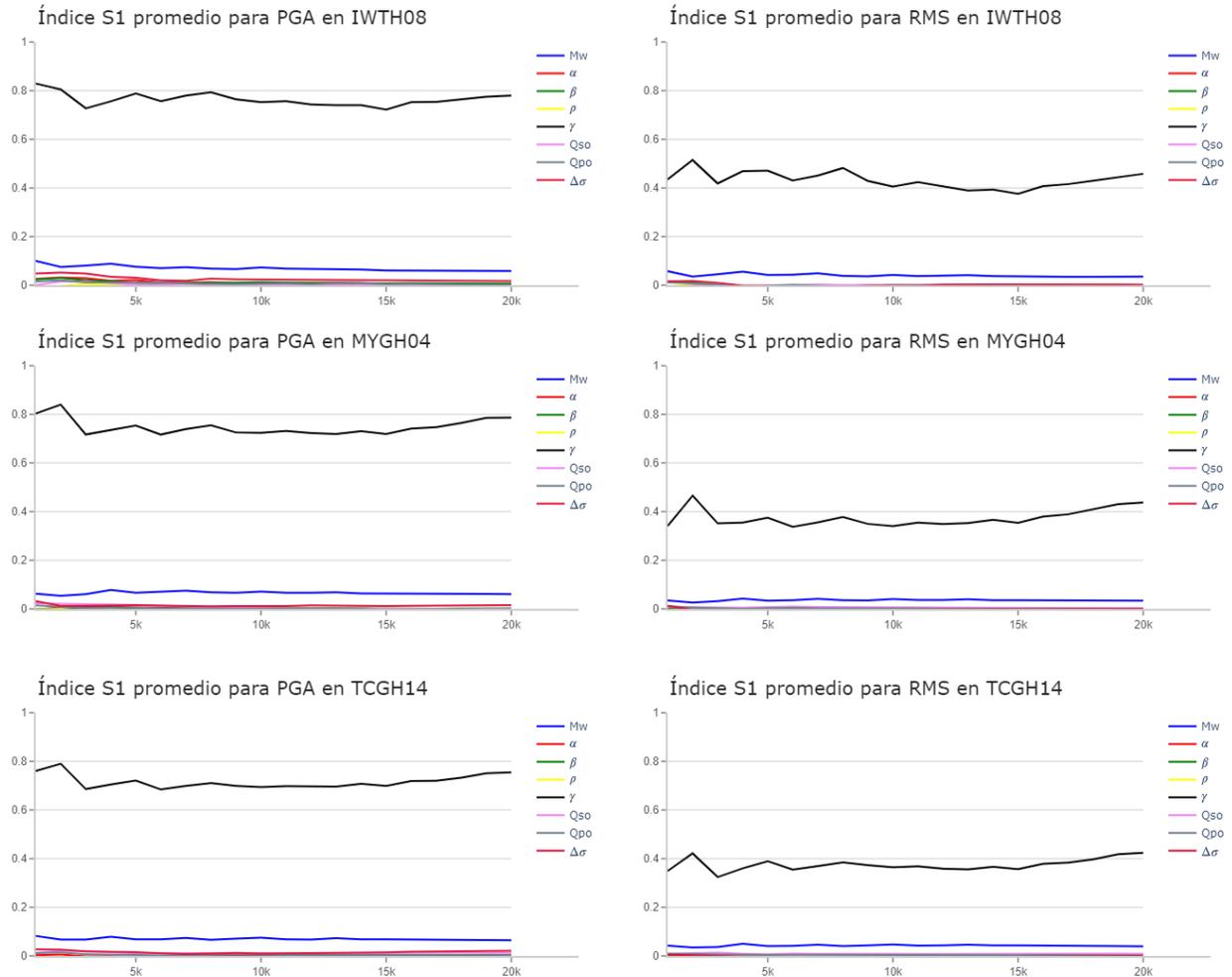


Figura 4.3: Convergencia de índices de primer orden (Sobol-Saltelli) como función del número de muestras en estaciones representativas según distancia a la fuente. De arriba hacia abajo, campo cercano, campo intermedio y campo lejano.

Se ilustra brevemente cómo convergen los índices calculados para luego pasar a un resumen de los valores de sensibilidad aceptados para cada situación, separados por grupo, componente y periodo. Además de ello, se calcula un ranking relativo entre los parámetros a través del método de Morris-Campolongo para los grupos 2 y 3, omitiendo el estudio del Grupo 1 en un todo, debido a la consistencia que existe entre todos los resultados.

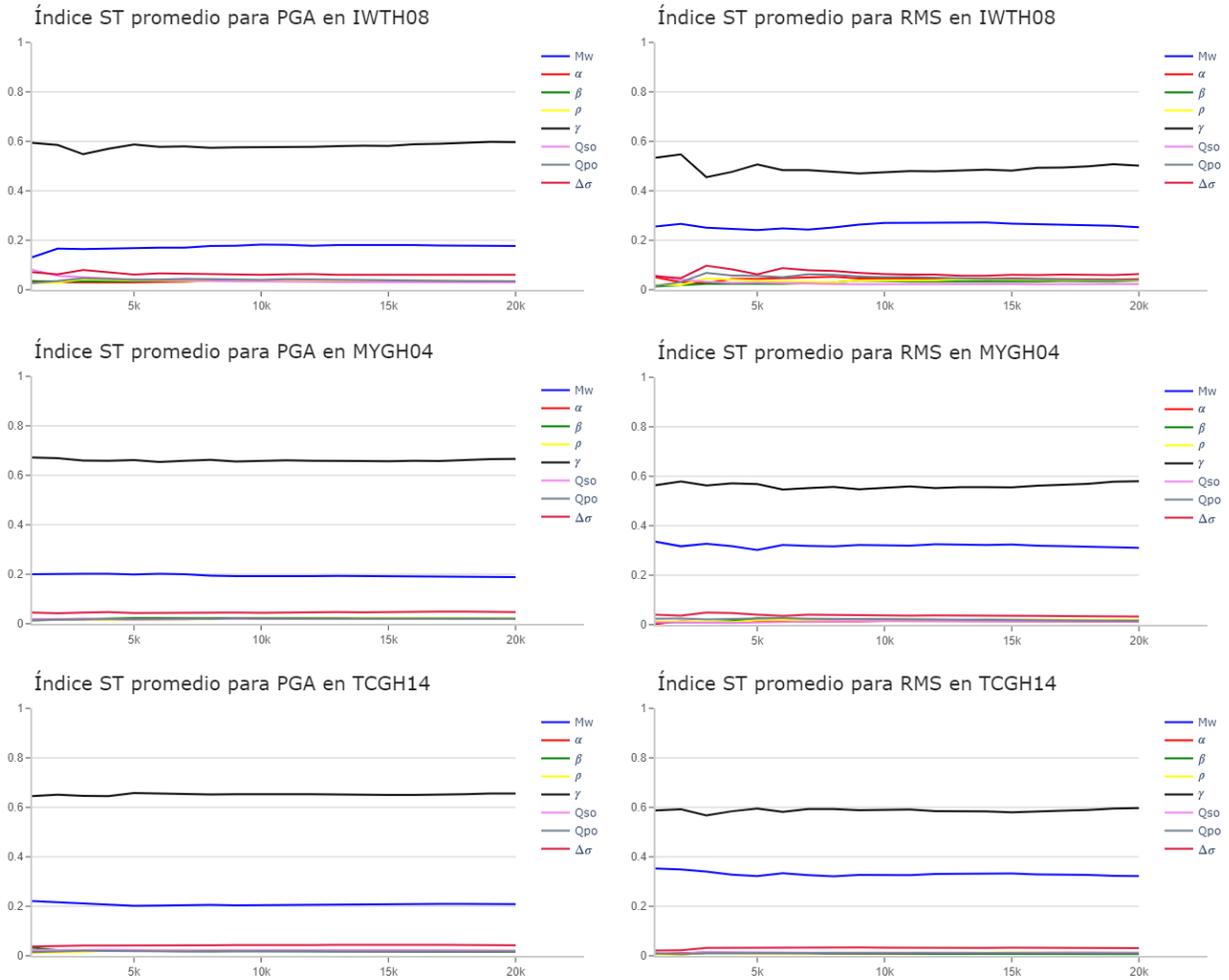


Figura 4.4: Convergencia de índices de orden total (Sobol-Saltelli) como función del número de muestras en estaciones representativas según distancia a la fuente. De arriba hacia abajo, campo cercano, campo intermedio y campo lejano.

De acuerdo con las Figuras en 4.3 y 4.4, se verifica que hay tendencia a converger a valores estables para los índices de sensibilidad de primer orden y de orden total, para estaciones ubicadas a distancias crecientes, mediante el método de Sobol-Saltelli. El último valor de índice dentro de esta serie de iteraciones se considera el valor aceptado para la sensibilidad que se quiere representar, lo cual se ilustra en la Figura 4.5. A la luz de la consistencia en los valores de convergencia para todas las estaciones consideradas, el valor aceptado es un promedio simple de los valores de convergencia individuales.

Gracias a la naturaleza acotada del logaritmo en el espacio de frecuencias, éste se comporta de forma acotada en relación con la evaluación en los máximos de las series en el espacio temporal. Con esto, el GOF converge en los periodos estudiados, con la ventaja de que representa de forma más resumida el comportamiento en todo el grupo de estaciones.

Índices promedio para PGA y RMS en estaciones representativas

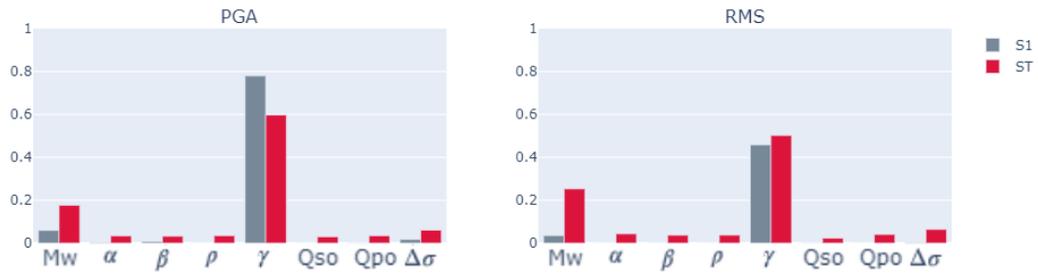


Figura 4.5: Valor (promedio) aceptado para las funciones objetivo PGA y RMS, según método de Sobol-Saltelli.

Sensibilidad para estaciones en superficie en Grupo 2

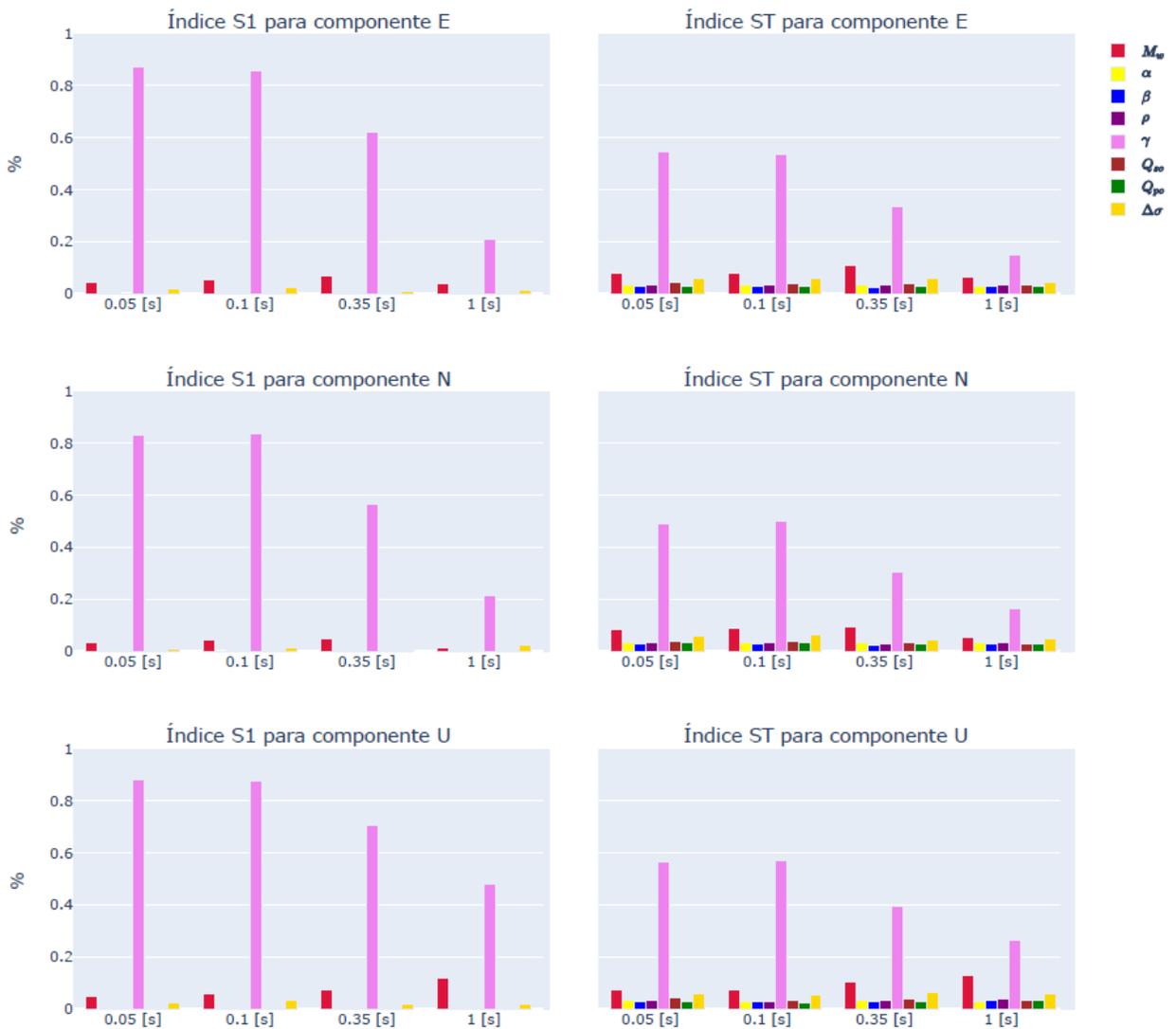


Figura 4.6: Valor aceptado para la función GOF en Grupo 2 en superficie, por periodo explorado, según método de Borgonovo.

Aplicando el análisis en los grupos 2 y 3, se obtiene los valores aceptados de las Figuras 4.6 – 4.9. En esta ocasión, y dado que la convergencia ya está garantizada, se muestra lo obtenido con el método de Borgonovo por la rapidez que éste permite en sus cálculos. Además, debido a que hay resultados cuantitativamente (aunque no cualitativamente) distintos entre las estaciones en superficie y *borehole*, se desagrega los resultados para ambos casos.

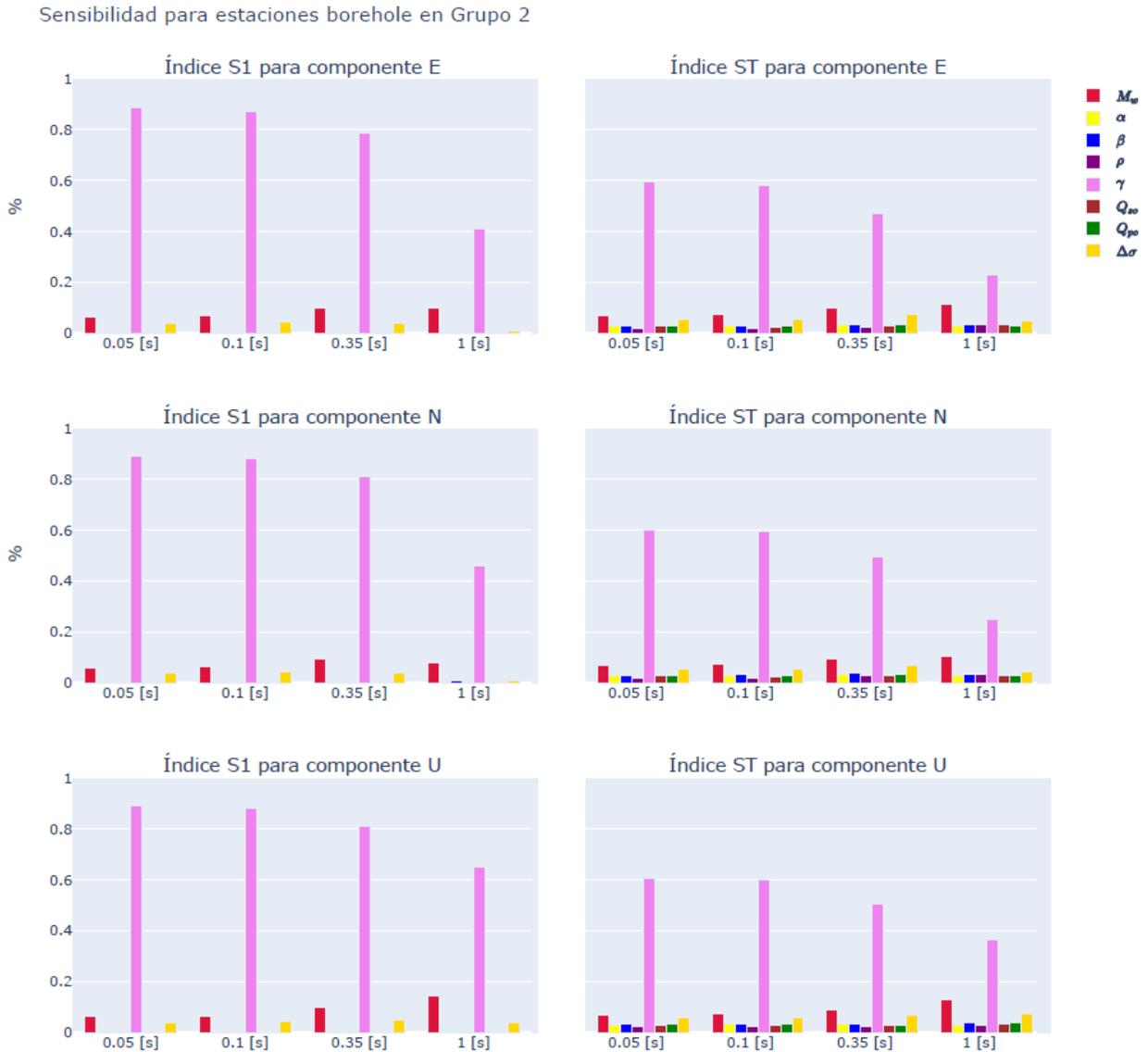


Figura 4.7: Valor aceptado para la función GOF en Grupo 2 en *borehole*, por periodo explorado, según método de Borgonovo.

Sensibilidad para estaciones en superficie en Grupo 3

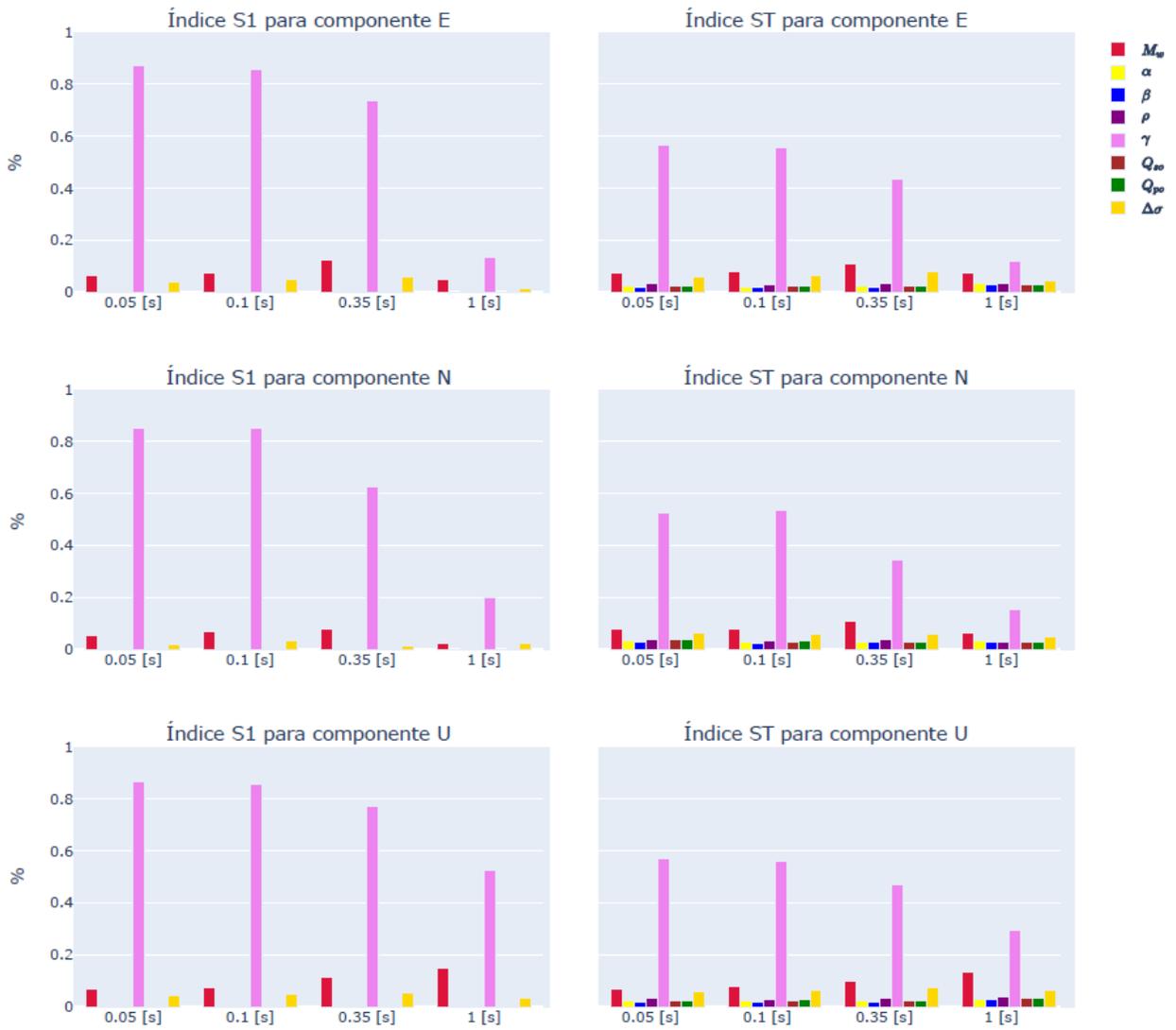


Figura 4.8: Valor aceptado para la función GOF en Grupo 3 en superficie, por periodo explorado, según método de Borgonovo.

Sensibilidad para estaciones borehole en Grupo 3

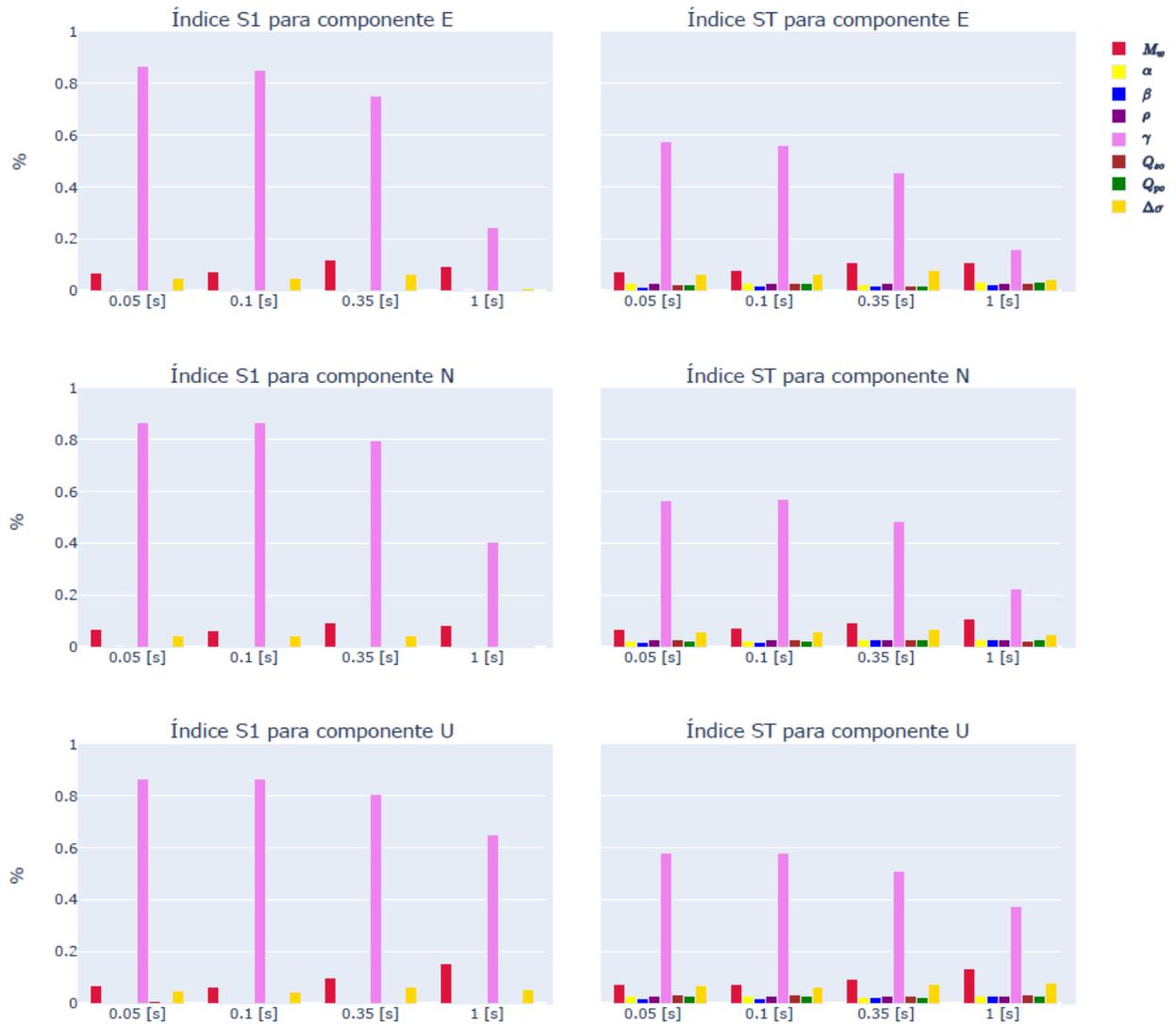


Figura 4.9: Valor aceptado para la función GOF en Grupo 3 en *borehole*, por periodo explorado, según método de Borgonovo.

Adicionalmente, se obtuvo estimaciones para índices de segundo orden para las funciones PGA y RMS, lo cual complementa la información anterior en cuanto permite saber qué nivel de interacción existe entre pares de variables. Esto supone que, mientras haya una relación de dependencia entre dos parámetros, la varianza debida a uno de ellos se verá reflejada en la varianza debida al otro. No obstante, no siempre existe una dependencia explícita que ligue pares de variables, lo cual plantea un riesgo al momento de interpretar estos resultados de mayor orden: el hecho de que dos variables se correlacionen (y esto se evidencie en la varianza conjunta que demuestran) no implica necesariamente la existencia de una causalidad en su naturaleza. Sin embargo, es interesante que, limitando el análisis a lo puramente numérico, si hay pares de variables que en primer orden no representan una alta sensibilidad para el modelo, se puede evidenciar un efecto oculto cuando se estudia su efecto conjunto. Del mismo

modo, si en segundo orden no manifiestan un efecto considerable, es poco esperable que en un todo tengan efecto sobre el modelo. Esta última afirmación se debería apoyar en el índice de sensibilidad total ST del conjunto de variables antes que en un índice de primer orden.

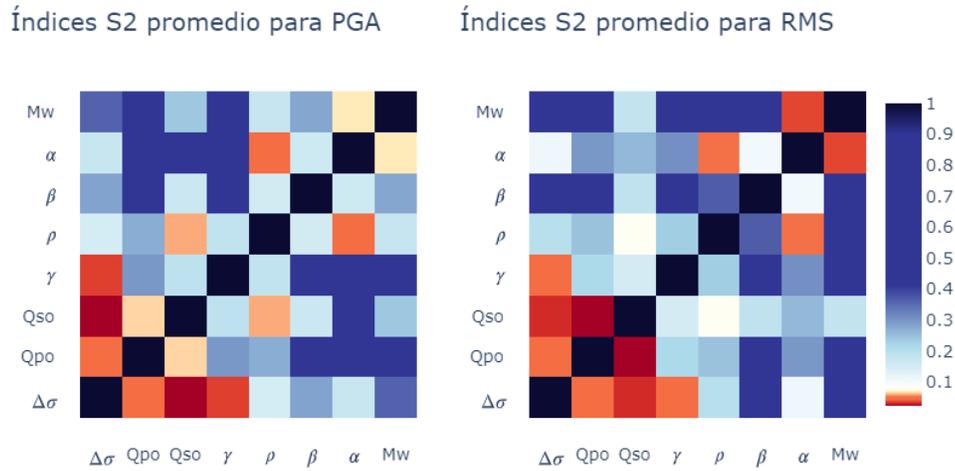


Figura 4.10: Índices de segundo orden (Sobol-Saltelli) por pares de parámetros para PGA y RMS. Colores cálidos indican un nivel de interacción menor al 5%.

Finalmente, para las variables que en primer orden obtuvieron mayor nivel de sensibilidad, se estimó un coeficiente de variación a partir del método de Morris-Campolongo. Es importante recordar que esta cantidad surge de la razón entre la varianza y la media de la distribución de efectos elementales. Luego, su interpretación radica en qué tan homogénea es la distribución de la variable en estudio: un coeficiente relativamente alto (mayor que 0.8) indica alta heterogeneidad, lo que supone una alta influencia o alta no-linealidad del modelo respecto de este parámetro, como resultado de una gran varianza.

Las Figuras 4.11 – 4.13 muestran que la dispersión ocasionada por cada variable aumenta con el periodo, además de verse afectada por la dirección. Lo primero guarda relación con el comportamiento de los índices calculados mediante los métodos de Sobol-Saltelli y Borgonovo, estableciendo una naturaleza cada vez menos lineal conforme crece el periodo; lo segundo puede atribuirse a la disposición geométrica del evento en relación con las estaciones usadas, evidenciado en el hecho de que la componente N afecta en mayor proporción al Grupo 3, ubicado hacia el sur del hipocentro y con mayor distancia latitudinal que longitudinal.

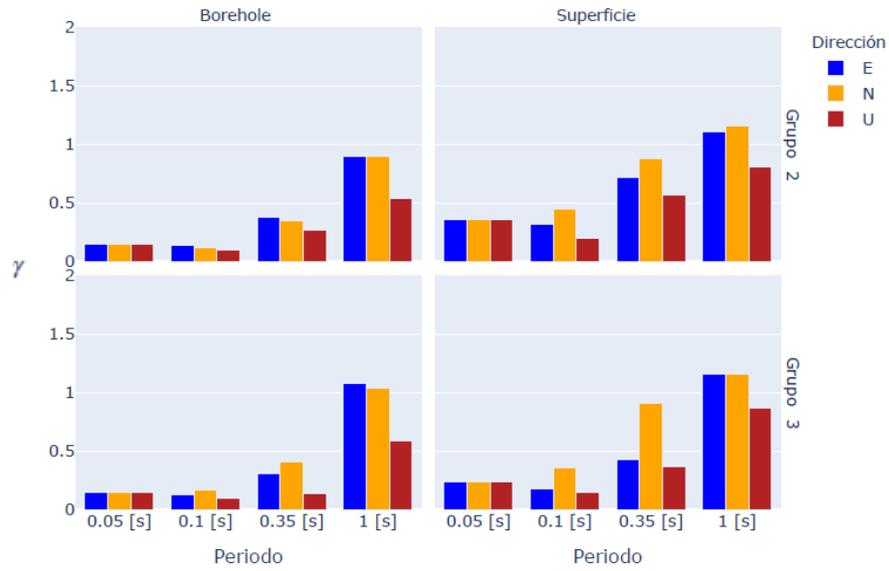


Figura 4.11: Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable  $\gamma$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo).

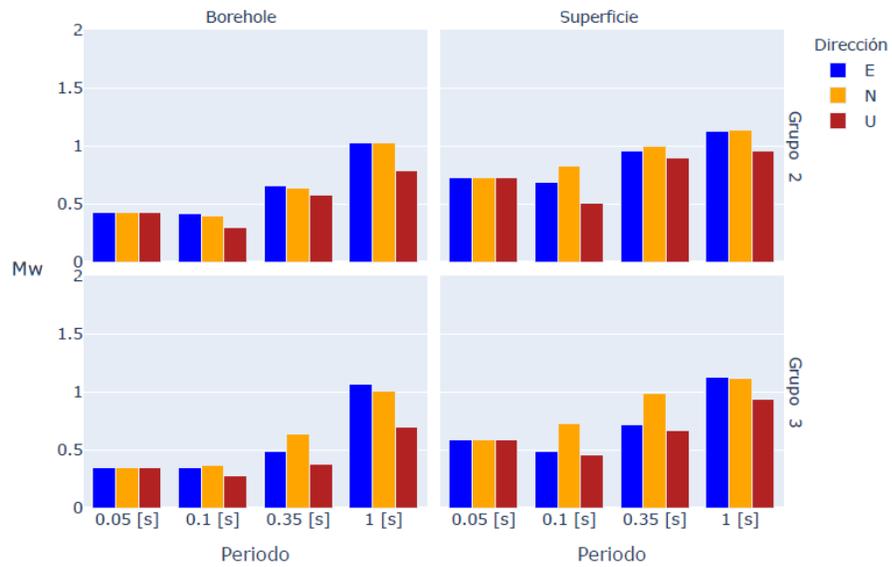


Figura 4.12: Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable  $M_w$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo).

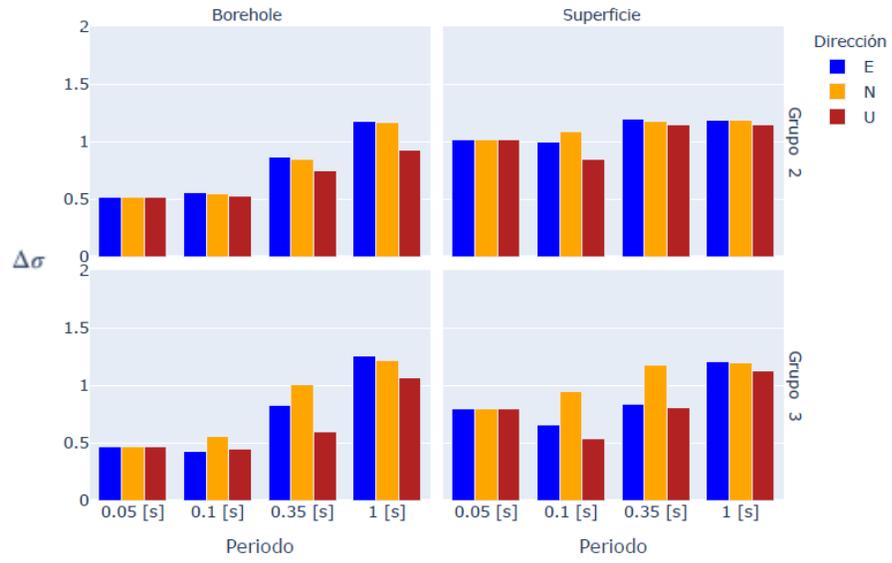


Figura 4.13: Coeficientes de variación (Morris-Campolongo) para variable  $\Delta\sigma$ , como función del periodo, dirección y distancia (según grupo).

# Capítulo 5

## Resultados y discusión

### 5.1. Convergencia de los métodos

A partir de los resultados, queda evidenciado que MGA presenta estabilidad en cuanto a la convergencia de los métodos de análisis. A partir del orden de 5.000 muestras ya se alcanza cierta estabilidad cualitativa en los métodos de Sobol-Saltelli y Borgonovo, mientras que desde las 6.000 muestras también hay estabilidad numérica.

La estabilidad cualitativa se mantiene para el método de Morris-Campolongo, el cual tiene por objetivo determinar un *ranking*, antes que evaluar una sensibilidad, propiamente tal. Es necesario mencionar que, conforme se converge en el ordenamiento que se le da a los parámetros, también se converge en la varianza de la distribución de los efectos elementales. Esto significa que, muy probablemente, los efectos elementales tienen una distribución que es estable con respecto al número de muestras.

En términos de la velocidad y calidad de la convergencia, es aparente que, en general, ésta se alcanza rápidamente y luego se estabiliza en torno a un valor sin oscilar. Esto no ocurre para el Grupo 3, sobre todo en el periodo 1[s], en las componentes E y N. Esto tiene sentido, considerando que es el grupo de estaciones más lejanas de la fuente, con lo cual la relación entre señal sintética y observada puede perder peso frente al hecho de que el modelo representa llegadas debidas a múltiples reflexiones mientras que la señal observada puede, simplemente, contener ruido.

### 5.2. Índices aceptados

Los valores promedio aceptados para los índices de sensibilidad se detallan según profundidad de emplazamiento de las estaciones (superficie o *borehole*) y método a través del cual se obtuvieron. El promedio se realiza en todo el conjunto de estaciones, por dirección y periodo. Como el carácter de los índices se demostró consistente, se adoptará este valor promedio como un indicador global para estimar la sensibilidad en las situaciones en que el modelo tiene buen desempeño.

Tabla 5.1: Índices de sensibilidad promedio aceptados para MGA.

		Sobo1-Saltelli		Borgonovo	
Profundidad	Variable	S1	ST	$\delta$	ST
Superficie	$\gamma$	0,74	0,91	0,67	0,42
	$M_w$	0,07	0,25	0,07	0,09
	$\Delta\sigma$	0,02	0,15	0,02	0,06
	$\alpha$	0,005	0,05	0,003	0,03
	$\beta$	0,003	0,05	0,004	0,03
	$Q_P$	0,002	0,05	0,002	0,03
	$Q_S$	$< 10^{-3}$	0,05	0,005	0,03
	$\rho$	$< 10^{-3}$	0,05	0,003	0,03
Borehole	$\gamma$	0,81	0,89	0,77	0,49
	$M_w$	0,07	0,18	0,09	0,09
	$\Delta\sigma$	0,05	0,09	0,03	0,06
	$Q_P$	0,003	0,02	0,003	0,03
	$\alpha$	$< 10^{-3}$	0,02	0,002	0,03
	$\beta$	$< 10^{-3}$	0,03	0,01	0,03
	$Q_S$	$< 10^{-3}$	0,02	0,002	0,02
	$\rho$	$< 10^{-3}$	0,03	0,01	0,03

Uno de los aspectos que se debe destacar, es que ambos métodos ofrecen sistemáticamente resultados similares, con la observación de que, aquellos parámetros de mayor peso tienden a ser subestimados por el método de Borgonovo. No obstante, si en una medida más conservadora estos índices siguen siendo significativos, es mayor la evidencia para categorizar los parámetros  $M_w$ ,  $\gamma$  y  $\Delta\sigma$  como aquellos para los que el modelo es más sensible. De forma análoga, el modelo es prácticamente insensible para las demás variables.

Similar al caso anterior, cuando se compara los resultados obtenidos para estaciones en superficie y *borehole* se puede notar que los parámetros de mayor sensibilidad incrementan su sensibilidad en las estaciones *borehole* mientras que los de menor sensibilidad la reducen aún más.

### 5.3. Interpretación

A partir de las figuras revisadas, en las que se ve de forma agrupada el comportamiento de los índices calculados como función del periodo en que se evaluó, se puede extraer algunas ideas interesantes respecto de las sensibilidades de primer y segundo orden. A destacar, tenemos un decrecimiento en la sensibilidad del factor  $\gamma$  en ambos índices y en todas direcciones, característica que parece ser más pronunciada en las estaciones ubicadas en superficie. Apparently, el Grupo 3 acentúa esto, pero no es una variación tan evidente. Además, para el índice ST parece haber una suerte de máximo entorno al periodo 0,1 [s], lo cual es interesante pues significa que el decaimiento espectral sería un parámetro de mayor peso en un periodo

específico.

De forma más velada, los índices calculados para la variable  $M_w$  crecen monótonamente con el periodo en la dirección U tanto para estaciones en superficie como *borehole*, lo cual tiene sentido pues las amplitudes de baja frecuencia suelen permanecer confinadas cerca de la superficie, por lo que hay mayor influencia de las interferencias en esa componente. Además, la sensibilidad de  $\Delta\sigma$  crece levemente con el periodo excepto en el último periodo usado, donde decrece abruptamente en las direcciones E y N, lo que se puede atribuir a que, para altos periodos, el comportamiento de la onda depende más del medio que de este factor (y de otros).

Vale la pena destacar que los índices S1, al aislar la dependencia de un parámetro respecto de los demás, deberían sumar 1 si se tratase de un modelo aproximadamente aditivo (es decir, aproximadamente lineal), en representación del 100 % de la variación del modelo. Es fácil notar que, en función del periodo, el modelo es cada vez menos aditivo, al presentar sumas de índices S1 inferiores a esa cota. Esto supone la existencia de interacciones complejas de órdenes no explorados entre los parámetros considerados, ya que la sola incorporación de los índices S2 y ST no permiten describir el grado de no-linealidad al que se enfrenta el análisis.

## 5.4. Conclusiones

Del trabajo realizado, se desprende que el factor  $\gamma$  a utilizar debe ser sumamente bien determinado. Al existir casos en que el valor de  $\gamma$  aceptado difiere de un valor constante (Vidale et al., 1995; Madariaga et al. 2019) como se conjetura inicialmente en la teoría expuesta en textos como [Udías, 1999], hay evidencia suficiente para advertir no sólo que tal conjetura no puede ser aceptada, sino que además es en extremo importante conocer dicho valor como una cantidad característica de cada evento y locación. De forma secundaria,  $M_w$  y  $\Delta\sigma$  explican una porción importante de la varianza en el modelo, por lo que son también variables que caracterizan la respuesta que se obtendrá de las simulaciones. Las demás variables poseen un nivel de sensibilidad individual despreciable, y una sensibilidad grupal (acumulada) discutiblemente despreciable.

Una conclusión a nivel de decisión podría ser que, al tener las demás variables una sensibilidad inferior al 5 %, podría considerarse prescindir de conocer su valor de forma demasiado precisa al momento de realizar evaluaciones para simulaciones rápidas. Esto debe probarse con la experiencia, dado que el cálculo de varianzas sigue siendo un procedimiento que evalúa sobre casos probables, por lo que en la eventualidad existirá casos que no se habrá cubierto en este trabajo. Sin embargo, dado un contexto sísmico conocido, es posible realizar este tipo de análisis con cierta certeza de que los resultados describirán con robustez la sensibilidad de MGA respecto de estas variables.

Finalmente, ya en su momento se evaluó un índice de segundo orden S2, el cual sirve como

una medida del *trade-off* entre pares de variables que establece el nivel de interacción entre ellas. Si la interacción es fuerte, decidir descartar parámetros sólo basados en los índices S1 y ST podría conducir a transferir este *trade-off* a las variables que no fueron descartadas. Es decir, los índices S1 y ST pueden subestimar la importancia de parámetros cuya acción no se ve de forma tan explícita en el modelo, sino en la forma de relacionarse con otros parámetros (como en el caso de  $M_w$  y  $\Delta\sigma$ , los cuales operan para definir un factor de escala que permite obtener aceleración como función del tiempo). Incluso sin una fórmula que los ligue, podría tenerse una correlación intrínseca al modelo que incremente este *trade-off*. Sin embargo, como se puede ver, la mayor interacción entre pares de variables se da en el par  $(\alpha, \Delta\sigma)$  siendo el primero un factor de de baja sensibilidad y el segundo de una sensibilidad discutiblemente baja. Esto podría apoyar la tesis de que las demás variables son, en efecto, despreciables en cuanto a con qué precisión se mide un valor aceptable para ser utilizado en el modelo.

# Bibliografía

- [1] Aki, K. (1967). Scaling law of seismic spectrum. *Journal of Geophysical Research*, 72 (4), 1217-1231.  
<https://doi.org/10.1029/JZ072i004p01217>
- [2] Brune, J. N. (1970). Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes. *Journal of Geophysical Research*, 75 (26), 4997-5009.  
<https://doi.org/10.1029/JB075i026p04997>
- [3] Vidale, J.E., Goes, S. y Richards P. G. (1995). Near-field deformation seen on distant broadband seismograms. *Geophysical Research Letters*, 22 (1), 1-4.  
<https://doi.org/10.1029/94GL02893>
- [4] Madariaga, R., Ruiz, S., Rivera, E., Leyton, F. y Baez, J. C. (2019). Near-field spectra of large earthquakes. *Pure and Applied Geophysics*, 176 (3), 983-1001.  
<https://doi.org/10.1007/s00024-018-1983-x>
- [5] Saltelli, A. (2002). Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145, 280-297.  
[https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(2\)00280-1](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(2)00280-1)
- [6] Sobol, I. M. (1990). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Matem. Modelirovanie*, 2 (1) (1990), 112-118 (en ruso), *MMCE*, 1(4) (1993) 407-414 (en inglés).  
<http://mi.mathnet.ru/eng/mm2320>
- [7] Morris, M. D. (1991). Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33 (2) (1991), 161-174.  
<https://doi.org/10.2307/1269043>
- [8] Campolongo, F., Saltelli, A. y Cariboni, J. (2010). From screening to quantitative sensitivity analysis. A unified approach. *Computer Physics Communications*, 182 (4) (2011), 978-988.  
<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.12.039>
- [9] Helton, J. C. y Davis, F. J. (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 81 (1) (2003), 23-69.  
[https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(03\)00058-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(03)00058-9)
- [10] Cukier, R. I., Fortuin, C. M., Shuler, K. E., Petschek, A. G. y Schaibly, J. H. (1973).

- Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory. *The Journal of Chemical Physics*, 59 (8) (1973), 3873-3878.  
<https://doi.org/10.1063/1.1680571>
- [11] Petschek, A. G. y Schaibly, J. H. (1973). Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. II Applications. *The Journal of Chemical Physics*, 59 (8) (1973), 3879-3888.  
<https://doi.org/10.1063/1.1680572>
- [12] Saltelli, A., Tarantola, S. y Chan, K. P. S. (1999). A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 41 (1) (1999), 39-56.  
<https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485594>
- [13] Borgonovo, E. (2006). A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering & System Safety*, 92 (6) (2007), 771-784.  
<https://doi.org/10.1016/j.ress.2006.04.015>
- [14] Campolongo, F., Cariboni, J. y Saltelli, A. (2006). An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environmental Modelling & Software*, 22 (10) (2007), 1509-1518.  
<https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2006.10.004>
- [15] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M. y Tarantola, S. (2007). *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. Wiley.
- [16] Awad, M., Senga Kiese, T., Assaghir, Z. y Ventura A. (2019). Convergence of sensitivity analysis methods for evaluating combined influences of model inputs. *Reliability Engineering & System Safety*, 189 (2019), 109-122.  
<https://doi.org/10.1016/j.ress.2019.03.050>
- [17] Díaz, N. (2018). Análisis de sensibilidad local y global en modelos estructurales no lineales de elementos finitos. *Memoria para optar al título de Ingeniero Civil en Obras Civiles mención Estructuras*, Universidad de los Andes.
- [18] Otarola, C., Ruiz, S. (2016). Stochastic generation of accelerograms for subduction earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 106 (6) (2019), 2511-2520.  
<https://doi.org/10.1785/0120150262>
- [19] Hanks, T. C. y McGuire, R. (1981). The character of high-frequency strong ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71 (6) (1981), 2071-2095.  
<https://pubs.geoscienceworld.org/bssa/article-pdf/71/6/2071/2703962/BSSA0710062071.pdf>
- [20] Ruiz, S., Ojeda, J., Pastén, C., Otarola, C. y Silva R. (2018). Stochastic strong-motion simulation in borehole and on surface for the 2011 Mw 9.0 Tohoku-Oki megathrust earthquake considering P, SV and SH amplification transfer functions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 108 (5A) (2018), 2333-2346.  
<http://doi.org/10.1007/PL00012553>

- [21] Boore, D.M. (2003). Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and Applied Geophysics*, 160 (3) (2003), 635-676.  
<http://doi.org/10.1007/PL00012553>
- [22] Udías, A. (1999). *Principles of Seismology*. Cambridge University Press.
- [23] Ghofrani, H., Atkinson, G. M., Goda, K. y Assatourians, K. (2013). Stochastic finite-fault simulations of the 2011 Tohoku, Japan, earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 103 (2B) (2013), 1307-1320.  
<https://doi.org/10.1785/0120120228>
- [24] Onishi, Y. y Horike, M. (2004). The extended stochastic simulation method for close-fault earthquake motion prediction and comments for its application to the hybrid method. *Journal of Structural and Construction Engineering*, 69 (586) (2004), 37-44.  
[https://doi.org/10.3130/aijs.69.37\\_5](https://doi.org/10.3130/aijs.69.37_5)
- [25] Jiang, J., Baird, G. R. y Blair, D. P. (1998). Polarization and amplitude attributes of reflected plane and spherical waves. *Geophysical Journal International*, 132 (3) (1998), 577-583.  
<https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1998.00479.x>
- [26] Hooker, G. (2007). Generalized functional ANOVA diagnostics for high-dimensional functions of dependent variables. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 16 (3) (2007), 709-732.  
<https://doi.org/10.1198/106186007X237892>

# Anexo A

## Cálculos realizados

En este capítulo anexo, se define conceptos y se demuestra los resultados teóricos utilizados y que se relegaron para esta parte. Se comienza por dar definiciones útiles, para luego dar proposiciones y resultados en orden correspondiente al orden en que se enumera los métodos de análisis de sensibilidad.

### A.1. Definiciones

**Definición A.1** Sean  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $p \geq 1$ . Se define el conjunto  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  como el espacio vectorial seminormado

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid |f|_p = \int_{\Omega} |f(\vec{x})|^p d\vec{x} < \infty \right\}$$

para  $p < \infty$ , y

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid |f|_{\infty} = \inf \{ \alpha \geq 0 : |f(\vec{x})| \leq \alpha \text{ c.t.p.} \} < \infty \right\}$$

para  $p = \infty$ . En lo anterior, una propiedad que se satisface c.t.p. (casi en todas partes) es aquella que es falsa en un conjunto de medida nula. Luego, la cantidad  $|f|_{\infty}$  se conoce como supremo esencial.

$|f|_p$  es una seminorma, puesto que hay funciones cuya integral o cuyo supremo esencial es nulo sin ser éstas necesariamente la función nula. Sea la relación de equivalencia en  $\mathcal{L}^p(\Omega)$

$$f \sim_p g \iff |f - g|_p = 0$$

**Definición A.2** Para  $p \geq 1$ , se define el espacio vectorial normado  $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim_p$ , cuyos elementos son clases de equivalencia, en que cada clase  $[f]_{\sim_p}$  se compone de funciones cuyas seminormas son idénticas.

Por simplicidad, se omite el uso de clases y se suele recurrir a algún representante de la clase, y se denota que  $f \in L^p(\Omega)$ , con norma  $\|f\|_p$ .

**Definición A.3** Para  $p = 2$ , el espacio  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert bajo el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x})g(\vec{x}) d\vec{x}$$

Dada una función  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $w > 0$ , se puede definir el espacio  $L_w^2(\Omega)$  como aquel en que sus elementos  $[f]_{\sim_2}$  satisfacen  $\|f\sqrt{w}\|_2 < \infty$ . Éste es también un espacio de Hilbert bajo el producto interno con peso

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{\Omega} f(\vec{x})g(\vec{x})w(\vec{x}) d\vec{x}$$

**Definición A.4** Se define la variación total de  $f \in L^1(\Omega)$  como

$$V_{\Omega}(f) = \sup_{\|\varphi\|_{\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} f(\vec{x}) \nabla \cdot \varphi(\vec{x}) d\vec{x} \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}$$

donde  $\mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  denota el conjunto de funciones de clase  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  con soporte compacto. Luego,

$$BV(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) \mid V_{\Omega}(f) < \infty \right\}$$

## A.2. Demostración de resultados

### A.B.1. Motivación

**Lema 2.1** (Demostración) Sean  $Z$  una variable aleatoria con función distribución  $F_Z$  y la variable aleatoria  $W$  dada por

$$W = F_Z(Z)$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathbb{P}[W \leq w] \\ &= \mathbb{P}[F_Z(Z) \leq w] \\ &= \mathbb{P}[Z \leq F_Z^{-1}(w)] \\ &= F_Z(F_Z^{-1}(w)) \\ &= w \end{aligned}$$

Así,  $F_W$  corresponde a la distribución de una variable aleatoria uniforme  $\mathcal{U}[0, 1]$ . ■

### A.B.2. Muestreo Factorial

En esta sección, se definió  $\omega_p^n$  como una discretización de  $p$  niveles del hipercubo  $[0, 1]^n$ , cuyo tamaño es  $|\omega_p^n| = p^n$ . Por otro lado, dado  $\Delta > 0$ , se definió  $\omega_p^n|_{\Delta}$  como un truncamiento de

$\omega_p^n$  determinado por la condición  $\frac{k}{p-1} \leq 1 - \Delta$ . Luego,  $|\omega_p^n|_{\Delta} = (k+1)^n$ .

Al momento de determinar las trayectorias, se debe obtener las matrices  $D^*$  y  $P^*$ , ambas determinadas de forma aleatoria con igual probabilidad. En el caso de  $D^*$ , hay un total de  $2^n$  elecciones, ya que cada una de las  $n$  celdas tiene 2 posibles valores; en el caso de  $P^*$ , hay un total de  $n!$ , dado que hay  $n$  formas de determinar la primera columna,  $n-1$  formas de determinar la segunda, etc. Luego, existen  $n!p^n$  posibles configuraciones de puntos en una trayectoria.

De aquí, se deduce que  $k+1 = (p - \Delta(p-1))$ ; por lo tanto, si sólo se desea conocer el efecto elemental de una variable (es decir, las demás no varían), hay  $p^{n-1}(p - \Delta(p-1))$  posibles efectos elementales. Esto justifica que se escoja  $\Delta$  como múltiplo de  $\frac{1}{p-1}$ , ya que así  $k+1$  está también en  $\omega_p^n$ . Además, se justifica que una elección sea  $\Delta = \frac{p}{2(p-1)}$ , ya que la cantidad de efectos elementales para una variable se simplifica a  $\frac{p^n}{2}$ . Se obtiene respectivamente  $\mu_i$  y  $\sigma_i$  como la media y dispersión de esta distribución de efectos elementales para cada variable  $x_i$ .

En combinatoria, la motivación tras la definición de la cantidad  $\binom{n}{k}$  es dar el número de combinaciones posibles al escoger  $k$  elementos de un conjunto de tamaño  $n$ , sin importar el orden en que se haga esta elección. Por lo mismo, cada trayectoria (en la que sólo importa los puntos que son recorridos y no su orden) se puede escoger de  $\binom{M}{r}$  formas distintas. Para este resultado, es importante recordar que  $d_{m,l} = d_{l,m}$  y que  $d_{m,m} = 0$ , por lo que tiene sentido plantear el problema combinatorial sin repetición. Además, la cantidad de términos en la definición de  $D$  se puede calcular como la medida del conjunto de sus índices:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^r \sum_{k=j+1}^r 1 &= \sum_{j=1}^r [r - (j+1) + 1] \\
 &= \sum_{j=1}^r (r - j) \\
 &= r \sum_{j=1}^r 1 - \sum_{j=1}^r j \\
 &= r^2 - \frac{r(r+1)}{2} \\
 &= \frac{r(r-1)}{2}
 \end{aligned}$$

La cantidad de trayectorias  $r$  para este sub-análisis puede ser elegida por el usuario para realizar la maximización en la cantidad  $D$ , y por ello se dice que se aplica un muestreo con trayectorias óptimas.

### A.B.3. Método de Sobol-Saltelli

**Teorema 2.1** (Demostración) Sean  $f \in L^1(\Omega)$  y  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . La descomposición ANOVA ya fue desarrollada y se da una expresión explícita de ésta. Para verificar que se satisface la ecuación 2.6, se procede por inducción sobre los subíndices de  $\tilde{f}$ , recordando que la medida de cada  $\Omega_j$  es 1:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_j(x_j) &= \int_{\Omega_{*j}} f(\vec{x}) dx_{*j} - \tilde{f}_0 \\ \int_{\Omega_j} \tilde{f}_j(x_j) dx_j &= \int_{\Omega_j} \left( \int_{\Omega_{*j}} f(\vec{x}) dx_{*j} - \tilde{f}_0 \right) dx_j \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x}}_{\tilde{f}_0} - \tilde{f}_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, se asume que la propiedad se cumple para todo  $j$ , con  $1 < j \leq s \leq n$  e integrando

con respecto a cualquier variable  $x_{i_k}$ , donde  $1 < i_k \leq j$ . Así, para el caso  $j = s + 1$  se tendrá

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{i_1, \dots, i_{s+1}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{s+1}}) &= \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_{s+1})}} f(\vec{x}) dx_{*(i_1, \dots, i_{s+1})} - \tilde{f}_0 \\
&\quad - \sum_{j=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq s} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_j}(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \\
\int_{\Omega_{i_k}} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_{s+1}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{s+1}}) dx_{i_k} &= \int_{\Omega_{i_k}} \left( \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_{s+1})}} f(\vec{x}) dx_{*(i_1, \dots, i_{s+1})} - \tilde{f}_0 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq s} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_j}(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right) dx_{i_k} \\
&= \int_{\Omega_{i_k}} \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_{s+1})}} \left( f(\vec{x}) - \tilde{f}_0 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq s} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_j}(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right) dx_{*(i_1, \dots, i_{s+1})} dx_{i_k} \\
&\stackrel{*}{=} \int_{\Omega_{i_k}} \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_{s+1})}} \left( f(\vec{x}) - \tilde{f}_0 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1, j \neq k}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq s} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_j}(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right) dx_{*(i_1, \dots, i_{s+1})} dx_{i_k} \\
&= \int_{\Omega_{i_k}} \int_{\Omega_{*(i_1, \dots, i_{s+1})}} \left( f(\vec{x}) - \tilde{f}_0 \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1, j \neq k}^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq s} \tilde{f}_{i_1, \dots, i_j}(x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \right) dx_{*(i_1, \dots, i_{s+1})} dx_{i_k} \\
&\quad - \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s \setminus i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s \setminus i_k}) \\
&= \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s \setminus i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s \setminus i_k}) - \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s \setminus i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s \setminus i_k}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notar las ocasiones en que la integral se manipula de forma arbitraria dadas las variables con respecto a las que se integra en contraposición con las variables de las que dependen las funciones involucradas. La igualdad con  $\stackrel{*}{=}$  hace uso de la hipótesis inductiva, ya que se integra con respecto a  $x_{i_k}$  por lo que esta variable no puede aparecer en la sumatoria extendida. En este desarrollo se ha adoptado la notación  $i_1, \dots, i_s \setminus i_k$  para denotar el uso de todas las variables con excepción de  $x_{i_k}$ .

Finalmente, la ortogonalidad en  $\Omega$  está dada por el hecho que dos funciones  $\tilde{f}$  distintas difieren en al menos un índice, índice que debe aparecer en la integral. Aplicando el teorema de Fubini, es posible realizar en primer lugar la integral con respecto a la variable con este índice, lo cual anula la integral en cuestión. ■

Para generalizar el resultado anterior, se asume que  $f \in L_p^2(\Omega)$ , donde la función de peso

para el producto interno es la densidad  $p(x)$ . Se define la descomposición ANOVA para este caso como

$$\left\{ \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \right\}_{s \leq n} = \underset{\{g_{i_1, \dots, i_s} \in L^2(\mathbb{R}^s)\}_{s \leq n}}{\operatorname{argmin}} \int_{\Omega} \left( \sum_{s \leq n} g_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) - f(\vec{x}) \right)^2 p(\vec{x}) d\vec{x}$$

bajo las condiciones de ortogonalidad jerárquica, en que para cada subconjunto de índices  $\{j_1, \dots, j_k\} \subsetneq \{i_1, \dots, i_s\}$ :

$$\int_{\Omega} \tilde{f}_{j_1, \dots, j_k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) p(\vec{x}) d\vec{x} = 0$$

Notar que la forma variacional de definir  $\tilde{f}$  implica calcular todos los términos de la descomposición ANOVA de una vez, y no mediante operaciones individuales. La existencia y unicidad de esta descomposición se demuestra con detalle en Hooker (2007), aunque un caso más sencillo y práctico (que es el aplicado en este trabajo) consiste en considerar  $\Omega$  un conjunto acotado.

El hecho de que la descomposición ANOVA conste de  $2^n$  términos deriva de que, si  $f$  depende de  $n$  variables, se requiere que cada  $\tilde{f}$  dependa de todas las combinaciones posibles de entre esos  $n$  parámetros, agrupados en cierta cantidad  $s$  de éstos. Es decir, si se denota por  $i_1, \dots, i_s$  cualquier grupo de  $s$  de estas variables y se denota  $\mathcal{N}(\tilde{f}_{i_1, \dots, i_s})$  el número de distintas  $\tilde{f}$  de  $s$  variables, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tilde{f}_0) &= 1 \\ \mathcal{N}(\tilde{f}_{i_1}) &= n \\ \mathcal{N}(\tilde{f}_{i_1, i_2}) &= \binom{n}{2} \\ &\vdots \\ \mathcal{N}(\tilde{f}_{i_1, \dots, i_s}) &= \binom{n}{s} \\ &\vdots \\ \mathcal{N}(\tilde{f}_{1, \dots, n}) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en total la descomposición ANOVA consta de  $\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} = 2^n$  términos.

#### A.B.4. Método de Borgonovo

El problema de los momentos de Hausdorff determina que es posible caracterizar de forma única una distribución de soporte acotado si y sólo si se conoce sus momentos  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y esta

secuencia satisface que

$$(-1)^k (\Delta^k \mu)_n \geq 0$$

donde

$$\begin{aligned} (\Delta^k \mu)_n &= [T - id]^k \mu_n \\ T[\mu_\ell] &= \mu_{\ell+1} \end{aligned}$$

Para distribuciones con soporte semi-acotado (correspondiente al problema de Stieltjes) o  $\mathbb{R}$  (correspondiente al problema de Hamburger), se requiere más condiciones para que no sólo se tenga existencia de una distribución, sino también su unicidad. Esto deja manifiesto que, sea cual sea el método de análisis que se utilice, sólo conociendo estimaciones de su esperanza y su varianza es imposible determinar la distribución de las variables consideradas para el estudio, lo que da una buena motivación para definir índices independientes de momentos probabilísticos.

Para ver que  $\delta \leq 1$ , basta notar que, por desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} s(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} p_{Y|X_{i_1}, \dots, X_{i_s}}(y) dy \\ &= 2 \\ \implies \mathbb{E}_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}} [s(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})] &\leq \mathbb{E}_{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}} [2] \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con el factor normalizante  $\frac{1}{2}$ , resulta que  $\delta \leq 1$ . Además,  $\delta \geq 0$  por el simple hecho de que el integrando es no-negativo.

### A.B.5. Método de Morris-Campolongo

Como cada traza de  $\omega_p^n \Big|_{\Delta}$  posee  $(k+1)$  elementos, donde  $\frac{k}{p-1} \leq 1 - \Delta$ , si  $\Delta = \frac{p}{2(p-1)}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{k}{p-1} &\leq 1 - \frac{p}{2(p-1)} \\ &= \frac{p-2}{2(p-1)} \\ \implies k &\leq \frac{p-2}{2} \\ \implies k+1 &\leq \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Como el cálculo de  $EE_j$  se realiza sobre la traza correspondiente al parámetro  $j$ , el número de configuraciones para el resto de valores en  $\omega_p^n$  es  $p^{n-1}$ , por lo que el total de efectos elementales para un parámetro es  $\frac{p^n}{2}$ .