

40-F
2282

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA
UNIVERSIDAD DE CHILE

UNIVERSIDAD DE CHILE



3 5601 15883 8338

EL ENIGMA DE LA ENERGIA RADIADA POR UNA
CARGA EN REPOSO EN UN SISTEMA DE REFERENCIA
UNIFORMEMENTE ACELERADO.

TESIS PARA OPTAR AL
GRADO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS CON MEN-
CION EN FISICA.

Profesor Guía: Carlos A. López.

JORGE A. ZANELLI IGLESIAS

1977

A Pilar, Daniel
Claudio y
Silvana

ESQUEMA GENERAL DE TRABAJO

i) Notación

ii) Introducción

I : El estado actual de la teoría.

- 1) Prehistoria; electrodinámica de Maxwell, formalismo covariante, potenciales retardados y campo ($F^{\mu\nu}$).
- 2) $T^{\mu\nu}$; la separación de Teitelboim, definiciones de $\overset{b}{p}^{\mu}$ y $\overset{r}{p}^{\mu}$ y condición asintótica, ecuación de Lorentz-Dirac, separación alternativa.
- 3) Radiación; tratamiento standard, definición de Synge, comparación con la separación de Teitelboim.

II : Partícula en movimiento hiperbólico.

- 1) $F^{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$, cálculo en $t=0$.
- 2) 1^{era} versión de la paradoja (Pauli) y crítica de Rohrlich.

III: Geometría del espacio-tiempo vista desde el sistema uniformemente acelerado (S.U.A.).

- 1) Transformación de coordenadas.
- 2) $g^{\mu\nu}$, $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$, $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, singularidad.
- 3) Geodésicas nulas y efecto de la frontera (horizonte de los sucesos).

IV.- Electrodinámica en el S.U.A.

- 1) Formalismo de De-Witt y Brehme (resultados).
- 2) Su equivalencia con transformaciones tensoriales,
- 3) El campo.
- 4) 2ª versión ($\vec{S} = \vec{0} \Rightarrow R = 0$); Incompatibilidad con la realidad física de la radiación en términos de fotones.

V.- Discusión final.

- 1) Análisis comparativo de dos criterios de radiación y "reacción de radiación".
- 2) I en el sistema inercial (S) y en el S.U.A. significado de las zonas.
- 3) Simetría entre las observaciones en S y en el S.U.A., principio de equivalencia, cuantización del campo en coordenadas arbitrarias.

Apéndices

- A) Transformación de coordenadas entre S y el S.U.A.
- B) Cálculo para la obtención del campo en el S.U.A.
- C) Cálculo de I en distintas regiones del espacio-tiempo.

i) Notación:

El sistema de unidades se escoge de manera que $c = 1$.

La métrica del espacio de Minkowski está dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{00} = -\eta_{ij} = 1 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3; \quad i, j = 1, 2, 3)$$

Se adopta la definición

$$a_{[\mu b \nu]} = \frac{1}{2}(a^{\mu} b^{\nu} - a^{\nu} b^{\mu}) \quad \text{y} \quad a^{(\mu b \nu)} = \frac{1}{2}(a^{\mu} b^{\nu} + a^{\nu} b^{\mu})$$

Al sistema de referencia inercial lo denotaremos por $S(x^{\mu}, z^{\mu})$ y al uniformemente acelerado por $SUA(\bar{x}^{\mu}, \bar{z}^{\alpha})$ o simplemente S y SUA respectivamente.

El tensor métrico en coordenadas arbitrarias será $g_{\mu\nu}$.

En el espacio de Minkowski un punto arbitrario se denotará por $x^{\mu} = (x^0; x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$; la posición de la carga por $z^{\mu} = (z^0; z^1, z^2, z^3)$, su velocidad $u^{\mu}(\tau) = \frac{dz^{\mu}}{d\tau} = \dot{z}^{\mu}$ y su aceleración por $a^{\mu}(\tau) = \frac{d^2 z^{\mu}}{d\tau^2} = \ddot{z}^{\mu}$.

Cuando se hable de sistemas de referencias arbitrarios (Cap. IV), se utilizará la siguiente convención^(*):

índices $\mu, \nu, \lambda, \rho, \sigma$ para las cantidades evaluadas en un punto arbitrario de observación (x^{μ})

índices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ para las cantidades referidas a la posición de la carga (z^{α}).

La derivada ordinaria se reemplazará también por una coma (,) y la derivada covariante por un punto (·).

ii) Introducción.

En este trabajo estudiaremos la radiación producida por una carga puntual uniformemente acelerada. En particular, nos interesa discutir la paradoja planteada por el movimiento hiperbólico^(†). Esta paradoja tiene dos versiones de muy antiguo origen y se pueden resumir en la forma siguiente:

1era versión:

- a₁) La potencia radiada por una carga está dada por el invariante de Larmor: $R = \frac{2}{3}e^2a^2$, ($a^2 = a^\mu a_\mu$)
- b₁) R se puede calcular como el flujo del vector de Poynting a través de una esfera de radio $r = ct$ en el sistema inercial en que la carga está en reposo para $t = 0$.
- c₁) El vector de Poynting del campo producido por una carga en movimiento hiperbólico es nulo en todo el espacio, en el instante en que el referencial está momentáneamente en reposo respecto a la carga, por lo tanto $R = 0$. (Nótese que en b₁ se habla de un cálculo en el futuro, mientras que en c₁ este cálculo es en el

(†) Una definición de movimiento hiperbólico o uniformemente acelerado se da en el capítulo II de este trabajo.

presente).

d₁) La fuerza que actúa sobre la carga proveniente de su propio campo es nula ($\Gamma^\mu = 0$).

Claramente b₁ y c₁ contradicen a₁, mientras que d₁ lo fuerza a uno a preguntarse ¿cómo puede haber radiación saliendo de la carga si ésta no sufre frenado debido a la radiación?

2^a versión.

a₂) La potencia radiada por una carga es $\mathcal{Q} = \frac{2}{3} e^2 a^2$

b₂) La radiación electromagnética está constituida por partículas (fotones) que son entes físicos observables desde cualquier sistema de referencia inercial o no.

c₂) En el sistema uniformemente acelerado en que la carga está permanentemente en reposo, el campo observado es puramente electrostático, por lo tanto el vector de Poynting es nulo.

d₂) El vector de Poynting nulo implica $\mathcal{Q} = 0$.

En este caso a₂ y b₂ contradicen c₂ y d₂.

En 1909 Born calculó el campo electromagnético de una carga en movimiento hiperbólico. Pauli partiendo de este resultado da los argumentos b₁ y c₁ concluyendo que no hay radiación (W. Pauli, Enzykl

Math.Wiss, vol.5p.539 y 647, Teubner Leipzig (1918); también "Theory of Relativity", Pergamon Press.N.Y.(1958)); a esta misma conclusión llega von Laue. Otros autores (ver ref.(7)) entre los que se cuentan Schott, Milner, Drukey, Bondi y Gold rechazan los argumentos de Pauli, aceptando en cambio a_1 y concluyen que hay radiación vista desde un sistema inercial. Rohrlich comparte este punto de vista y prueba que c_1 es falaz (ver capítulo III.2, más adelante).

En cuanto a la segunda versión, Rohrlich adopta a_2 , c_2 y d_2 y luego concluye que \mathcal{R} no es invariante bajo cambios de coordenadas arbitrarias, rechazando tácitamente b_2 .

El argumento d_1 corrientemente se considera junto con el principio de equivalencia. Fulton y Rohrlich⁽⁷⁾ concluyen que a pequeñas distancias de una carga en caída libre es imposible saber si se trata efectivamente de caída libre en un campo gravitatorio o de una carga en reposo en un sistema inercial, ya que cerca de la carga no se detecta radiación; para hablar de radiación es necesario alejarse mucho de la carga

y aunque en el primer caso se detecta radiación y no en el segundo, esto no contradice el principio de

equivalencia que sólo tiene validez local. En forma totalmente equivalente, De-Witt y Brehme⁽⁹⁾ muestran que la ecuación de movimiento de una carga acelerada contiene un término adicional si se está en un campo gravitatorio debido a que el campo de la carga permite "explorar" el espacio-tiempo a grandes distancias detectando así los efectos de curvatura presentes en un campo gravitatorio genuino.

Por último respectoa b_2 se puede decir que si bien el problema aún no ha sido totalmente aclarado, se ha podido establecer que la cuantización de un campo en coordenadas arbitrarias muestra que la existencia de partículas no es una propiedad independiente del observador. En efecto, al pasar de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio plano a las coordenadas de un observador acelerado, aparecen naturalmente estados excitados del campo sin necesidad de introducir fuentes^{(11),(12),(13)}.

En nuestro trabajo adoptamos un criterio de radiación que equivale a b_1 demostrando a_1 y d_1 y probando además que c_1 es inconsistente, siguiendo el argumento de Rohrlich (cap.II). Enseguida, partiendo de un formalismo covariante general y autoconsistente se demuestra c_2 (cap.IV). Por último se generaliza a un sistema de coor

denadas arbitrario^(†) el criterio de radiación, lo que permite definir \mathcal{R} en forma invariante. Con esta generalización se tiene una idea de lo que podría estar ocurriendo con la energía en el sistema acelerado de la partícula, aunque se advierte que la situación no es del todo clara y que tal vez pueda ser cabalmente interpretada a la luz de una teoría más general.

El interés que tiene el estudio del movimiento hiperbólico proviene de su sencillez, en primer lugar, -se trata de un movimiento en que nada cambia con el tiempo. En segundo lugar, a pesar de ser un problema de relatividad especial (espacio-tiempo plano), puede servir en primera aproximación para describir un fenómeno en que intervenga la gravitación, ya que en virtud del principio de equivalencia un campo gravitatorio constante en regiones pequeñas del espacio es equivalente al campo que se tiene en un sistema uniformemente acelerado. Por ejemplo, si se llegara a entender el problema de la energía en el sistema uniformemente acelerado se podría tener

†) Siempre en el espacio tiempo plano.

esperanza en resolverlo en espacios curvos. Y en tercer lugar porque tiene interés resolver la paradoja misma que ya hemos señalado.

El trabajo está dividido en 5 capítulos o secciones (I,II....V), cada uno de los cuales está subdividido en varios apartados (1,2...) en que se trata un aspecto particular del tema del capítulo. Esto se muestra en el esquema general de trabajo.

CAPITULO IESTADO ACTUAL DE LA TEORIA.

1.- En 1864 Maxwell logró expresar en forma elegante, precisa y sistemática todas las propiedades del campo electromagnético. En el trabajo de Maxwell, que fue la culminación de medio siglo de intensa experimentación, se resumía todo un cúmulo de leyes y efectos eléctricos y magnéticos.

El núcleo de su aporte está en las ecuaciones que describen los campos eléctricos (\vec{E}) y magnético (\vec{B}) producidos por una densidad de carga ρ y una de corrientes \vec{J} . En el vacío estas son

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 4\pi\vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \end{aligned} \tag{I.1}$$

Es fácil notar que las dos últimas ecuaciones de (I.1) permiten escribir \vec{E} y \vec{B} en términos de cuatro funciones ϕ y \vec{A} según

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (I.2)$$

donde además \vec{A} y ϕ pueden elegirse de modo que satisfagan la condición de Lorentz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (I.3)$$

Reemplazando (I.2) en (I.1) y exigiendo que se cumpla (I.3), se obtienen las ecuaciones para \vec{A} y ϕ

$$\frac{1}{4\pi} \square \begin{Bmatrix} \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{J} \\ \rho \end{Bmatrix}, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (I.4)$$

Todo esto se puede resumir en un lenguaje tensorial en que, además, queda de manifiesto el carácter covariante del campo electromagnético (ver p.ej. Landau-Lifshitz, Física Teórica, Vol. II)

$$J^\mu = (\rho, \vec{J})$$

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{matrix} \uparrow & \downarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \mu & \nu & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

con esto, (I.1), (I.3) y (I.4) son

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} &= -4\pi J^{\nu} \\ \partial_{\rho} F^{\mu\nu} + \partial^{\mu} F^{\nu\rho} + \partial^{\nu} F^{\rho\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I.1')}$$

$$\partial_{\mu} \Lambda^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{, \mu} = 0 \quad \text{(I.3')}$$

$$\gamma \quad \Lambda^{\mu} = \partial_{\nu} \partial^{\nu} \Lambda^{\mu} = 4\pi J^{\mu} \quad \text{(I.4')}$$

Para una carga puntual de carga e , cuya trayectoria está dada por la función $z^{\mu}(\tau)$ que representa su posición en el instante τ de su tiempo propio, se tiene

$$J^{\mu}(x) = e \int_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \delta^4(x^{\nu} - z^{\nu}(\tau)) u^{\mu}(\tau) d\tau \quad \text{(I.6)}$$

La solución de (I.4') con J^{μ} dado por (I.6) es (ver p.ej. Rohrlich, "Classical Charged Particles")

$$A^{\mu}(x) = e \frac{u^{\mu}(\tau_r)}{R} \quad \text{(I.7),}$$

donde

τ_r = instante retardado en que se cumple

$$(t - z^0(\tau))^2 - (\vec{x} - \vec{z}(\tau))^2 = 0, \quad t > z^0 \quad \text{(I.8)}$$

$$y \quad R = u_{\mu}^{\mu}(\tau_r) [x^{\mu} - z^{\mu}(\tau_r)] \quad (I.9)$$

Definiendo $r^{\mu} = x^{\mu} - z^{\mu}(\tau_r)$, (I.8) y (I.9) se pueden escribir como

$$\tau_r = \text{solución de } r^{\mu} r_{\mu} = 0, \quad r^0 > 0 \quad (I.8')$$

$$y \quad R = u_{\mu}(\tau_r) r^{\mu} \quad (I.9')$$

Esto se ilustra en Fig.(I.1)

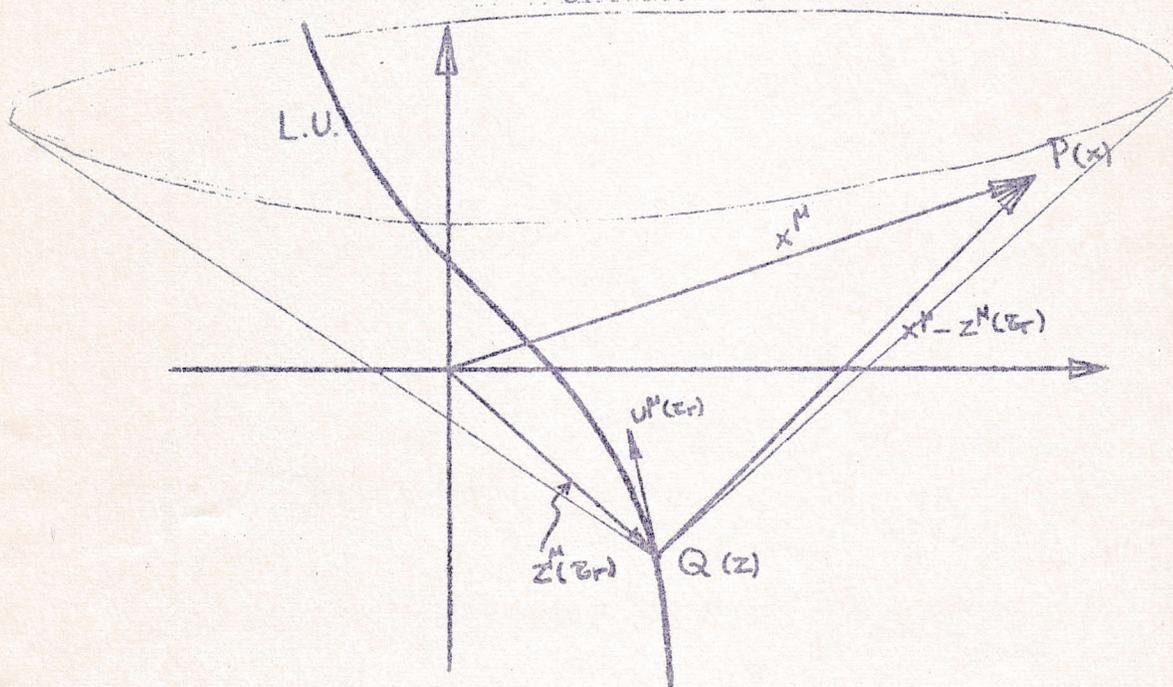


FIG. (I.1)

Punto de observación del campo (P) y de emisión (Q) sobre la línea de Universo (L.U.). $r^{\mu} = x^{\mu} - z^{\mu}$ coincide con una generatriz del cono C.

A partir de (I.7) es posible encontrar $F^{\mu\nu}$ (ver Rohrlich, op.cit.), para esto hay que recordar que r es también función de x^μ al derivar. Se obtiene, luego de reemplazar en (I.5).

$$F^{\mu\nu} = \frac{2e}{R^3} \{ R r [\mu a^\nu] - (Q-1) r [\mu u^\nu] \} \quad (I.10),$$

donde

$$Q = a_\mu r^\mu$$

2.- Es posible demostrar a partir de (I.1) que el campo electromagnético posee una densidad de energía (W) y de momento lineal ($\vec{\pi}$) dadas por

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \\ \vec{\pi} &= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (I.11)$$

Para estas cantidades es posible establecer leyes de conservación para una región V del espacio con campo electromagnético y cargas:

$$\left[\begin{array}{l} \text{aumento de } \left\{ \begin{array}{l} \text{energía} \\ \text{momento} \\ \text{lineal} \end{array} \right\} \\ \text{del campo en el in} \\ \text{terior del volumen } V \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Flujo saliente} \\ \text{de:} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{energía} \\ \text{momento} \\ \text{lineal} \end{array} \right\} \\ \text{del campo a través de} \\ \text{la superficie de } V \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Pérdida de } \left\{ \begin{array}{l} \text{energía} \\ \text{momento} \\ \text{lineal} \end{array} \right\} \\ \text{mécánico de las car} \\ \text{gas en el interior} \\ \text{de } V \end{array} \right]$$

(I.12)

La expresión matemática de (I.12) es

$$\left. \begin{aligned} \text{energía:} \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{s} &= -\vec{j} \cdot \vec{E} \\ \text{momento lineal:} \quad \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} &= -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.13})$$

donde los flujos de energía y momento lineal están representadas por

$$\left. \begin{aligned} \text{el vector} \quad \vec{s} &= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \\ \text{y la diádica}^{(+)} \quad \overset{\leftrightarrow}{T} &= \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{E} + \vec{B} \times \vec{B} - \frac{1}{2} (E^2 + B^2)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.14})$$

respectivamente.

Es posible expresar también esto en lenguaje covariante definiendo el tensor $T^{\mu\nu}$ cuyas componentes sean

$$T^{00} = W, \quad T^{0i} = (\vec{\pi})_i, \quad T^{i0} = (\vec{s})_i, \quad T^{ij} = [\overset{\leftrightarrow}{T}]_{ij}$$

se tiene
se tiene en lugar de (I.13),

$$T^{\mu\nu}_{, \mu} = \frac{1}{c} J^{\rho\nu} \quad (\text{I.15})$$

(+) $\overset{\leftrightarrow}{T}$ puede visualizarse como una matriz 3×3 cuyas componentes son

$$[\overset{\leftrightarrow}{T}]_{ij} = \frac{1}{4\pi} [E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2)] \quad (\text{ver p.ej. Jackson, Electrodinámica clásica.})$$

Notemos que el hecho de ser $\vec{\pi} = \vec{s}$ -y que garantiza la simetría de $T^{\mu\nu}$ -es un reflejo de que, por ser la electrodinámica una teoría "naturalmente" relativista, se cumple que la densidad de momento lineal del campo es igual a la densidad de flujo de energía del mismo. (En mecánica relativista $\vec{p} = E\vec{V}$, luego para un fluido cualquiera que se desplace a velocidad v , el momento lineal y la energía contenidos en el interior de un elemento de volumen $A.v.dt$ serán $p = \pi.A.vdt$ y $E = s.A.dt$; por lo tanto $p = Ev \Rightarrow \pi = s$).

La expresión de $T^{\mu\nu}$ en términos de $F^{\mu\nu}$ se puede encontrar a partir de (I.14) como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu} - \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} \right] \quad (I.16)$$

Reemplazando (I.10) en (I.16) se tiene la forma explícita para $T^{\mu\nu}$ cuando la fuente del campo es una carga puntual:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R^6} \left\{ 2Rr(\mu_u\nu) - r^{\mu}r^{\nu} - \frac{1}{2}R^2\eta^{\mu\nu} \right\} + \\ & + \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R^6} \left\{ 2R^2r(\mu_a\nu) - 2QRr(\mu_u\nu) + 2Qr^{\mu}r^{\nu} \right\} \\ & - \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R^6} (a^2R^2 + Q^2)r^{\mu}r^{\nu} \end{aligned} \quad (I.17)$$

Llamando r al módulo de la parte espacial de r^μ ($r^\mu = (r, \vec{r})$, $r^2 = \vec{r}^2$), vemos que los términos del lado izquierdo de (I.17) se comportan como r^{-6} , r^{-3} y r^{-2} respectivamente. Si recordamos que el elemento de superficie de una esfera es $\sqrt{r^2} d\Omega$, resulta claro que sólo el último término contribuirá a la energía que se va al infinito. Esto sugiere que hay dos partes dinámicamente independientes de $T^{\mu\nu}$; una representa la energía que se queda acompañando a la partícula mientras que la otra es la energía radiada que se independiza de la carga. En efecto, en 1969 Teitelboim⁽¹⁾ mostró que es posible hacer la siguiente separación de $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_b + T^{\mu\nu}_r \quad (I.18)$$

que satisface las propiedades siguientes:

- i) $T^{\mu\nu}_b \sim r^{-3}$, r^{-4} ; $T^{\mu\nu}_r \sim r^{-2}$
- ii) $T^{\mu\nu}_{b,\mu} = T^{\mu\nu}_{r,\mu} = 0$ (conservación independiente de cada parte)
- iii) $T^{\mu\nu}_r$ da flujo nulo a través de un cono de luz con vértice en $z^\mu(\tau_r)$
(i.e. $T^{\mu\nu}_r r_\mu = 0$, puesto que la normal a un cono de luz es proporcional a r_μ)
- iv) $T^{\mu\nu}_b$ y $T^{\mu\nu}_r$ son tensores simétricos.

Las expresiones de $\overset{b}{T}^{\mu\nu}$ y $\overset{r}{T}^{\mu\nu}$ son

campo ligado, "bound":

$$\overset{b}{T}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R^6} \{ 2R^2 r^{(\mu} a^{\nu)} - 2R(Q-1) r^{(\mu} u^{\nu)} + (2Q-1) r^{\mu} r^{\nu} - \frac{1}{2} R^2 \eta^{\mu\nu} \}$$

(I.19)

campo de radiación: $\overset{r}{T}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{R^6} (a^2 R^2 + Q^2) r^{\mu} r^{\nu}$

Las propiedades ii) e iv) aseguran que es posible identificar cada parte en la separación como energía-momento del campo con independencia mutua. Por otra parte, i) indica que una parte ($\overset{r}{T}^{\mu\nu}$) corresponde a radiación mientras que la otra ($\overset{b}{T}^{\mu\nu}$) no; por último, iii) reafirma lo anterior garantizando dos cosas: que la energía radiada por la carga viaja a la velocidad de la luz ("se va por los conos") y que ésta energía que llega al infinito es la misma que sale de la carga. Para ilustrar esto último consideremos una región Λ del espacio-tiempo encerrada por dos superficies cilíndricas Σ_1 y Σ_2 y dos conos de luz c_1 y c_2 emitidos en $z(\tau_1)$ y $z(\tau_2)$ respectivamente:

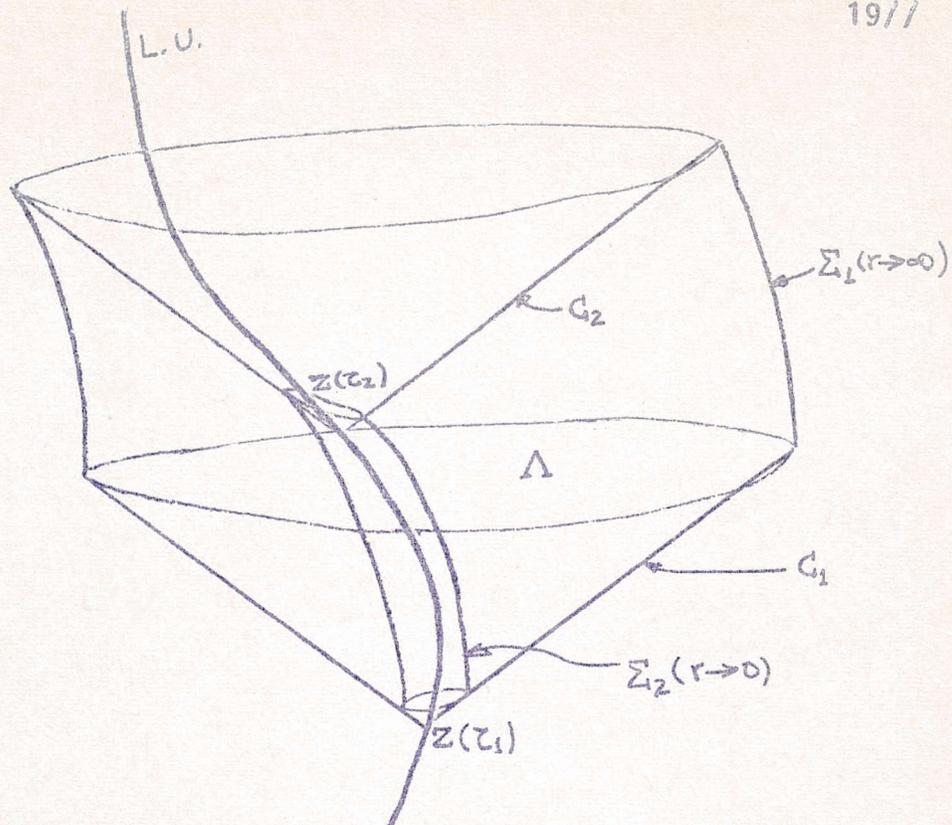


FIG. (I.2)

Intersección de dos conos de luz con vértices en $z(\tau_1)$ y $z(\tau_2)$ respectivamente, con dos tubos tipo tiempo encerrando el volumen Λ . La conservación de $T^{\mu\nu}$ en el interior de Λ y el flujo nulo de $T^{\mu\nu}$ a través de los conos garantizan que el flujo de energía a través de $\Sigma_1 (r \rightarrow \infty)$ sea igual a la energía que abandona a la partícula (flujo a través de $\Sigma_2 (r \rightarrow 0)$).

Aplicando el teorema de Gauss a $T^{\mu\nu}$ en la región Λ ,

$$0 = \int_{\Lambda} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu}{}_{, \mu} d^3x = \int_{\Sigma_2} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu}^{(2)} - \int_{\Sigma_1} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu}^{(1)} - \int_{C_1} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} dC_{\mu}^{(1)} + \int_{C_2} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} dC_{\mu}^{(2)}$$

por iii),

$$\int_{C_1} = \int_{C_2} = 0, \text{ por lo tanto,}$$

$$\int_{\Sigma_1} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu}^{(1)} = \int_{\Sigma_2} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} d\Sigma_{\mu}^{(2)} \quad (I.20)$$

En otras palabras, $\left[\begin{array}{l} \text{flujo de 4-momento} \\ \text{hacia infinito pro-} \\ \text{ducido por la carga} \\ \text{entre } \tau_1 \text{ y } \tau_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{flujo de 4-momento} \\ \text{radiado por la car-} \\ \text{ga entre } \tau_1 \text{ y } \tau_2 \end{array} \right],$

en el límite en que Σ_2 coincide con la línea de universo.

La interpretación de $\overset{F}{T}{}^{\mu\nu}$ como energía de radiación del campo y $\overset{b}{T}{}^{\mu\nu}$ como energía de tipo coulombiano atada a la partícula, queda definitivamente establecida al considerar el cuádrimomento del campo asociado a cada parte. Estos fueron definidos por Teitelboim como

$$\overset{F}{P}{}^{\mu}(\tau) = \int_{\sigma(\tau)} \overset{F}{T}{}^{\mu\nu} d\sigma_{\nu} \quad ; \quad \overset{b}{P}{}^{\mu}(\tau) = \int_{\sigma_0(\tau)} \overset{b}{T}{}^{\mu\nu} d\sigma_{\nu} \quad (I.21)$$

donde $\sigma(\tau)$ es una hipersuperficie tipo espacio arbitraria que corta la línea del universo en $z^{\mu}(\tau)$ y $\sigma_0(\tau)$ es el

hiperplano ortogonal a $u^\mu(\tau)$ que intersecta la trayectoria de la carga en $z^\mu(\tau)$. Ambas integrales representan el contenido de energía y momento lineal de cada campo en todo el espacio producido por la carga. La expresión de $\overset{r}{P}^\mu(\tau)$ resulta ser una función de toda la historia pasada de la partícula, mientras que $\overset{b}{P}^\mu(\tau)$ sólo depende de $u^\mu(\tau)$ y $\overset{b}{a}^\mu(\tau)$ (Ec.(I.23)). Que esto deba ser así es claro si entendemos $\overset{r}{P}^\mu(\tau)$ como la suma de todas las contribuciones radiativas de la carga dispersas en todo el espacio- y por tanto producidas en toda su historia pasada- y $\overset{b}{P}^\mu$ como el cuadrimomento que la acompaña, como una nube rígida.

La definición (I.19) permite encontrar las siguientes expresiones para $\frac{d\overset{b}{P}^\mu}{d\tau}$ y $\frac{d\overset{r}{P}^\mu}{d\tau}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\overset{b}{P}^\mu}{d\tau}(\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^2}{2\epsilon} \overset{b}{a}^\mu(\tau) - \frac{2}{3} e \overset{b}{\dot{a}}^\mu(\tau) \right); \quad \overset{b}{\dot{a}}^\mu(\tau) = \frac{d\overset{b}{a}^\mu}{d\tau}(\tau) \\ \frac{d\overset{r}{P}^\mu}{d\tau}(\tau) &= \frac{2}{3} e^2 \overset{r}{a}^2(\tau) u^\mu(\tau) \quad ; \quad \overset{r}{a}^2 = a^\mu a_\mu \end{aligned} \right\} \quad (I.22)$$

a partir de las cuales es posible definir $\overset{r}{P}^\mu$ y $\overset{b}{P}^\mu$:

$$\left. \begin{aligned} \overset{b}{P}^{\mu}(\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^2}{2\epsilon} u^{\mu}(\tau) - \frac{2e^2 a^{\mu}(\tau)}{3} \right) \\ \overset{r}{P}^{\mu}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{2e^2 a^2(\tau') u^{\mu}(\tau') d\tau'}{3} \end{aligned} \right\} \quad (I.23)$$

Sin embargo, tanto (I.22) como (I.23) se obtienen imponiendo la condición asintótica ad-hoc:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} a^{\mu}(\tau) = 0 \quad (I.24)$$

Aunque la suficiencia de tal condición para poder escribir (I.23,24) resulta clara, no lo es tanto la necesidad^(†).

La separación de Teitelboim provee además la ecuación dinámica para el movimiento de una carga puntual en un campo $F_{ext}^{\mu\nu}(x)$ en forma natural:

$$\frac{dP_{mac}^{\mu}}{d\tau} + \frac{d\overset{b}{P}^{\mu}}{d\tau} + \frac{d\overset{r}{P}^{\mu}}{d\tau} = e F_{ext}^{\mu\nu} u_{\nu} \quad (I.25),$$

que en forma explícita es

$$m a^{\mu} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^2}{2\epsilon} a^{\mu} - \frac{2e^2 a^{\mu}}{3} - \frac{2e^2 a^2 u^{\mu}}{3} \right) = e F_{ext}^{\mu\nu} u_{\nu} \quad (I.26)$$

(†) Es usual, y aparentemente correcto, extender la validez de (I.22), por ejemplo, a ciertos casos particulares como el del movimiento hiperbólico, en que la condición (I.24) no se satisface. Este problema se trata en ref(3).

Esta es la bien conocida ecuación de Lorentz-Dirac, Dirac⁽²⁾, mediante un tratamiento distinto obtuvo la ecuación

$$\left[\frac{e^2}{2\epsilon} - k(\epsilon) \right] a^\mu - \frac{2}{3} e^2 (a^\mu + a^2 u^\mu) = e F_{\text{ext}}^{\mu\nu} u_\nu \quad (I.26')$$

en que $k(\epsilon)$ es una constante de integración y que se elige en la forma $k(\epsilon) = \frac{e^2}{2\epsilon} - m$.

Teitelboim por su parte, muestra que lo correcto es interpretar esto como renormalización de la masa, definiendo como la masa física de la carga a

$m_0 = m + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^2}{2\epsilon}$ en (I.26), incluyendo así, además de una parte mecánica (masa desnuda), la contribución a la energía en reposo debida a la inercia del campo. Quedan así sólo tres términos al lado izquierdo de (I.26): $m_0 a^\mu$ y dos más, conocidos como los términos de Schott y de Larmor respectivamente. El segundo de ellos (Schott) representa la reacción del campo ligado sobre la carga y el tercero (Larmor) la fuerza ejercida sobre la carga por la radiación emitida. Estos dos últimos términos se denominan corrientemente aunque en forma impropia, "reacción de radiación", aunque no podemos identificar

$\Gamma^\mu = \frac{2}{3} e^2 [a^2 u^\mu + a^\mu]$ con radiación. En efecto, basta situar

se en un sistema en que la carga está en reposo instantáneamente para ver que la potencia ($u^\mu \Gamma_\mu$) asociada a esta "reacción" es $\frac{2}{3}e^2 [a^2 + \dot{a}^0]$, y aunque a^2 es siempre negativo (energía perdida por la carga), el otro término cambia de signo dependiendo de la naturaleza del movimiento (es energía que puede ser nuevamente reabsorbida por la carga). En un movimiento periódico por ejemplo, \dot{a}^0 no produce un aporte neto a incrementar la energía del campo, mientras que a^2 sí.

No hemos discutido aún un punto importante referente a la separación de Teitelboim, la unicidad de tal separación. Es posible demostrar que la separación (I.18) en efecto no es única^(v), por el contrario se puede dar la siguiente separación alternativa a (I.19):

$$\begin{aligned} \frac{b}{T_*^{\mu\nu}} &= \frac{b}{T^{\mu\nu}} - \frac{e^2}{4\pi R^6} \{ R^2 r^{\mu\alpha} v^\nu - QRr^{\mu u} v^\nu + 2Qr^{\mu} r^{\nu} \} \\ &= \frac{e^2}{4\pi R^6} \{ QRr^{\mu u} v^\nu - (2Q+1)r^{\mu} r^{\nu} - \frac{1}{2}R^2 \eta^{\mu\nu} \} r^{-6}, r^{-3} \\ \frac{\tilde{x}}{T_*^{\mu\nu}} &= \frac{\tilde{x}}{T^{\mu\nu}} + 2\frac{e^2}{4\pi R^6} \{ R^2 r^{\mu\alpha} v^\nu - \frac{1}{2}QRr^{\mu u} v^\nu + 2Qr^{\mu} r^{\nu} \} \quad (I.27) \\ &= 2\frac{e^2}{4\pi R^6} \{ R^2 r^{\mu\alpha} v^\nu - QRr^{\mu u} v^\nu - \frac{1}{2}(a^2 R^2 - 2Q + Q^2)r^{\mu} r^{\nu} \} r^{-3} \text{ y } r^{-2} \end{aligned}$$

Esta separación satisface las mismas propiedades que (I.19) excepto i). Sin embargo vemos que $\overset{F}{T}_{\mu\nu}$ y $\overset{b}{T}_{\mu\nu}$ difieren de $\overset{F}{T}^{\mu\nu}$ y $\overset{b}{T}^{\mu\nu}$ en una cantidad proporcional a r^{-4} , por lo que el comportamiento asintótico no se afecta y arroja los mismos resultados que (I.19) ya expuestos. Sin embargo hay razones de peso para preferir (I.27) antes que (I.19). Aunque el término extra en $\overset{F}{T}_{\mu\nu}$ no contribuye a $\overset{F}{P}^{\mu}$, sí da contribución al momento angular radiado por la carga^(s). Esto se debe a que $M^{\lambda\mu\nu} = x^{\lambda}T^{\mu\nu} - x^{\mu}T^{\lambda\nu}$ contiene un término $\sim r$ adicional que disminuye la rapidez de decaimiento para $r \rightarrow \infty$ con respecto a la de $T^{\mu\nu}$. El término en que difiere $\overset{F}{T}_{\mu\nu}$ de $\overset{F}{T}^{\mu\nu}$ cumple con que

- no da flujo por los conos,
- se conserva fuera de la línea de universo de la carga
- decae más rápido que r^{-2} en infinito ;

luego este tensor, que no contribuye al flujo en infinito, por un argumento idéntico al usado para (I.20), tampoco debe representar energía o momento lineal perdidos por la partícula.

- 3.- Corrientemente se identifica la radiación con "la energía que escapa al infinito", esto es, la energía que da flujo finito sobre una esfera de radio infinito. En términos

más precisos, se trata de la contribución aportada por los términos del vector de Poynting que decaen a lo más como r^{-2} para $r \rightarrow \infty$ (ver por ejemplo Jackson, op.cit; Panofsky Phillips, "Classical Electricity and Magnetism").

Sin embargo esta definición, si bien es inequívoca, tiene el defecto de ser no local. Esto significa que para conocer la energía radiada por la carga aquí y ahora, debemos observar el campo "en los confines del espacio al final de los tiempos"- afortunadamente esto significa en la mayoría de los casos prácticos situarse a distancias grandes comparadas con las dimensiones del sistema físico que produce la radiación (antena). Resulta por esto conveniente definir un criterio de radiación que sea local, i.e. que sea suficiente conocer el movimiento de la carga para saber si esta radia o no. En principio esto debería ser posible ya que el campo depende nada más que de z^μ , u^μ y a^μ .

Synge⁽⁶⁾ estableció una definición basada en la idea convencional de radiación como flujo del vector de Poynting pero en lenguaje covariante. Si uno piensa cuánticamente en la radiación como un proceso en que se emite fotones, debe aceptar que se trata de un efecto verificable por cualquiera observador inercial, en particular por uno (S_0) que se encuentra en reposo respecto a la carga en el instante τ_T . Para él el flujo del

vector de Poynting será

$$I = \hat{n} \cdot \vec{s} = T^{0i}(\hat{n})_i \quad (I.28)$$

Definiendo n^μ como un vector tipo espacio y unitario ($n^\mu n_\mu = -1$) que coincida con $(0; \hat{n})$ en S_0 y como para $s_0, u^\mu = (1; \vec{0})$, tenemos que

$$I = -T^{\mu\nu} u_\mu n_\nu \quad (I.29)$$

Esta última expresión define un invariante de Lorentz que da el flujo de densidad de energía por unidad de superficie a través de un elemento de área unitario sobre una esfera centrada en la posición retardada de la carga. Este invariante es una función de punto y depende de las cantidades retardadas sobre la línea de universo de la carga, pero para decidir sobre la existencia o no de radiación, debemos calcular la integral de I sobre toda la superficie bidimensional de la esfera en el límite $r \rightarrow \infty$:

$$Q = - \int T^{\mu\nu} u_\mu n_\nu d^2\sigma \quad (\text{en el límite } r \rightarrow \infty, r_T \text{ fijo})^{(7)} \quad (I.30)$$

Aunque aparentemente esto no signifique progreso alguno frente al tratamiento convencional, el método permite conocer ya sea la potencia total radiada por la carga (q) en términos de las variables de la trayectoria, o bien explorar la existencia de radiación en cualquier punto del espacio-tiempo (I).

Según las definiciones de u^μ y n^μ tenemos las siguientes relaciones:

$$u^\mu u_\mu = 1, \quad n^\mu n_\mu = -1, \quad n^\mu u_\mu = 0 \quad (I.31a)$$

además, como
tendrá

$$R = u^\mu r_\mu, \quad \text{en el sistema } S_0 \text{ se}$$

$$r^\mu = R(1, \hat{n}) = R(u^\mu + n^\mu),$$

luego en cualquier sistema de referencia inercial

$$n^\mu = \frac{r^\mu}{R} - u^\mu \quad (I.31b)$$

$$\begin{aligned} \text{Por otra parte, } d^2\sigma &= r^2 d\Omega \quad \text{en } S_0 \\ &= R^2 d\Omega \quad \text{en general} \end{aligned} \quad (I.31c)$$

$$\text{con (I.31a y 31.b) tenemos } I = -T^{\mu\nu} u_\mu \left(\frac{r_\nu}{R} - u_\nu \right), \quad (I.32)$$

Es interesante notar que

$$\overset{x}{T}^{\mu\nu} u_{\mu} n_{\nu} = \frac{e^2}{4\pi R^3} (a^2 R + Q^2) \quad (\text{I.33})$$

y

$$\overset{b}{T}^{\mu\nu} u_{\mu} n_{\nu} = 0$$

En otras palabras, el criterio de radiación de Synge coincide con la separación de Teitelboim en que $\overset{b}{T}^{\mu\nu}$ no representa radiación, aunque al parecer el hecho pasó inadvertido para Synge.

Se puede realizar fácilmente la integración de (I.33) con (I.31c) para obtener \mathcal{Q} . El resultado es la conocida expresión de Larmor.

$$\mathcal{Q} = -\frac{2}{3} e^2 a^2 \quad (\text{I.34})$$

En todo caso, y aunque los resultados se mantengan inalterados, como ya hemos explicado (I.27) parece ser una separación más apropiada que (I.19), de modo que vale la pena conocer las expresiones correspondientes:

$$\left. \begin{aligned} \overset{b}{T}_*^{\mu\nu} u_{\mu} n_{\nu} &= \frac{2\mathcal{Q}e^2}{4\pi R^3} \quad (\sim r^{-3}) \\ \overset{x}{T}_*^{\mu\nu} u_{\mu} n_{\nu} &= \frac{e^2}{4\pi R^3} [a^2 R^2 - 2\mathcal{Q} + R^2] \quad (\sim r^{-2}, r^{-3}) \end{aligned} \right\} (\text{I.35})$$

En el presente trabajo se adoptará la definición (I.29) como criterio de radiación puesto que presenta varias ventajas:

- a) I indica el flujo de energía en cada punto del espacio de Minkowski.
- b) Coincide con la definición convencional (def.(I.30)).
- c) Coincide con el criterio local de radiación ($\mathcal{R} \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 0$, (I.34)).
- d) Es naturalmente invariante Lorentz (lo que hace simple la generalización a sistemas no-inerciales).
- e) No necesita de la condición asintótica.
- f) No es un criterio integral como sucede con \mathcal{R} .
- g) Permite encontrar directamente \mathcal{R} , sin recurrir a $\frac{dP^\mu}{d\tau}$ como lo hace Rohrlich ya que esto, como ya dijimos, requiere la condición asintótica.

La importancia de c), d) y f) se entenderá al trabajar en el S.U.A. (Sección IV).

CAPITULO II

PARTICULA EN MOVIMIENTO.HIPERBOLICO.

1.- Para conocer el campo de una partícula cargada, uniformemente acelerada, debemos conocer su línea de universo, esto es su posición, velocidad y aceleración en cada instante.

Una partícula uniformemente acelerada es aquella que en cualquier punto de su trayectoria presenta una aceleración constante $g\hat{z}$ para un observador inercial instantáneamente en reposo respecto a ella (S_0).

En general, la 4-velocidad y 4-aceleración de una partícula son

$$\begin{aligned} u^\mu &= \gamma(1; \vec{v}) \\ a^\mu &= (\gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}; \gamma^3 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}), \end{aligned} \quad (II.1)$$

donde la trayectoria está dada por $z^\mu = (z^0, \vec{z})$, y

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{z}}{dz^0} \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{z}}{d(z^0)^2} \\ \gamma &= (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Para el sistema S_0 , $\vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{a} = +g\hat{z}$, por lo que

$$\begin{aligned} u^\mu &= (1; \vec{0}) \\ a^\mu &= (0; g\hat{z}) \end{aligned}$$

como $a^\mu a_\mu$ es un invariante, podemos escribir en cualquier sistema inercial

$$\gamma^0 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^0 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 v^2 - 2\gamma^0 (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^0 \vec{a}^2 = -g^2.$$

Con esto último, y aprovechando que el movimiento es unidimensional se tiene

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = g dz^0$$

Integrando (I.2) con la condición inicial $v = 0$ en $z^0 = 0$,

$$v = \frac{gz^0}{\sqrt{1+g^2(z^0)^2}} \quad (\text{II.2})$$

Integrando nuevamente con $z^3 = \alpha$ en $z^0 = 0$, tenemos

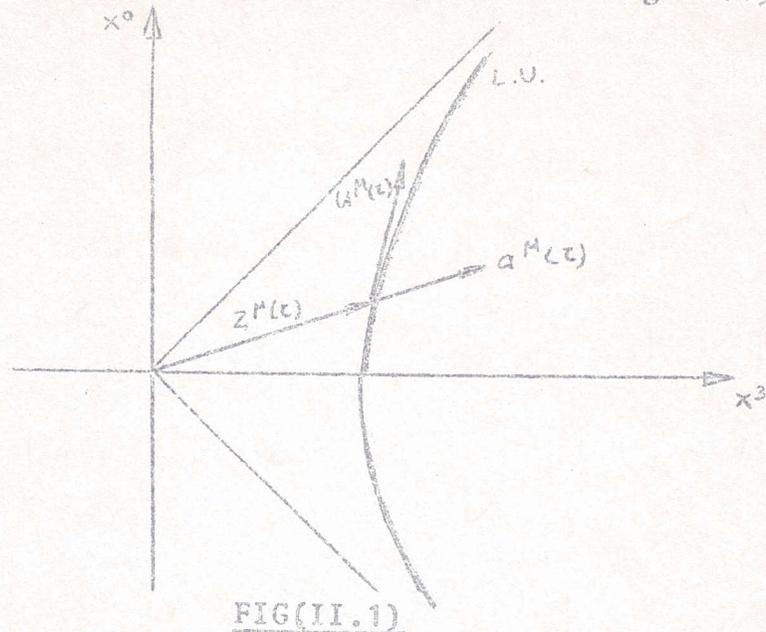
$$z^3 = \frac{1}{g} \left[\sqrt{1+g^2(z^0)^2} - 1 \right] + \alpha,$$

que es la ecuación de una hipérbola y que justifica el nombre de movimiento hiperbólico.

Es más cómodo escoger α de modo que la hipérbola tenga asíntotas en las rectas $x^0 = \pm x^3$; $\alpha = \frac{1}{g}$:

$$z^3 = \alpha \sqrt{1 + \left[\frac{z^0}{\alpha} \right]^2}, \quad \text{o bien}$$

$$(z^3)^2 - (z^0)^2 = a^2 \quad (\text{II.3}). \quad \text{Ver Fig. II.1)}$$



FIG(II.1)

Movimiento de una carga con aceleración uniforme $\frac{1}{a}$ en la dirección del eje x^3 . Se ve que $v \rightarrow 1$ para $x^0 \rightarrow \pm\infty$.

De (II.2) se ve que la velocidad tiende a la de la luz en $x^0 = \pm\infty$.

El tiempo propio es (definiendo $\tau = 0$ para $z^0 = 0$),

$$\tau = \int_0^{z^0} \gamma^{-1} dz^0 = a \ln \left| \frac{1+v}{1-v} \right|, \text{ de donde}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \tanh \left[\frac{\tau}{a} \right] \\ \gamma &= \cosh \left[\frac{\tau}{a} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$z^3 = a \cosh \left[\frac{\tau}{a} \right]$$

$$z^0 = a \sinh \left[\frac{\tau}{a} \right]$$

(II.4)

Con esto,

$$\left. \begin{aligned} z^\mu &= \alpha \left(\sinh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right]; 0, 0, \cosh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right] \right) \\ u^\mu &= \left(\cosh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right]; 0, 0, \sinh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right] \right) \\ a^\mu &= \frac{1}{\alpha} \left(\sinh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right]; 0, 0, \cosh \left[\frac{\tau}{\alpha} \right] \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.5})$$

Poniendo τ_r en lugar de τ en (II.5), podemos escribir el campo (I.10).

Reemplazando

$$r^\mu = (x^0 - z^0(\tau_r); x^1, x^2, x^3 - z^3(\tau_r))$$

$$R = x^0 \cosh \left[\frac{\tau_r}{\alpha} \right] - x^3 \sinh \left[\frac{\tau_r}{\alpha} \right]$$

$$Q = \frac{1}{\alpha} (x^0 \sinh \left[\frac{\tau_r}{\alpha} \right] - x^3 \cosh \left[\frac{\tau_r}{\alpha} \right]) + 1$$

en

$$F^{\mu\nu} = \frac{2e}{R^3} \{ Ra [\mu + (Q-1)u [\mu]_r^\nu] \}, \text{ se tiene}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\alpha R} \left[\begin{array}{ccc} 0 & x^3 x^1 & x^3 x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} x^3 (x^3 - z^3_r) - x^0 (x^0 - z^0_r) \\ -x^0 x^1 \\ -x^0 x^2 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II.6})$$

Se observa que en $x^0 = 0$, $F^{ik} = 0$ ($\vec{B} = 0$)
y que por lo tanto el vector de Poynting es nulo:

$$\begin{aligned} (\vec{S})_i &= T^{0i} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{0\rho} F_{\rho}^i - \frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \eta^{0i} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{ck} F_k^i = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

2.- El sistema de referencia inercial (S) que hemos usado es aquel en que la carga está instantáneamente en reposo en $x^0 = 0$, y vemos que en ese instante el vector de Poynting se anula en todo el espacio visto desde este sistema. Podemos notar entonces que en general si un sistema inercial cualquiera (S') está en reposo con respecto a la carga instantáneamente, en ese momento el vector de Poynting se anulará en todo el espacio visto desde ese sistema.

Para aclarar esto podemos usar el hecho de que S y S' están conectadas por una transformación de Lorentz en el plano (x^0, x^3) que deja invariante la forma cuadrática $z^\mu z_\mu = -\alpha^2$ (II.3), de modo que en S' podemos escribir

$$(z'^3)^2 - (z'^0)^2 = \alpha^2 \quad (\text{II.3}')$$

que es la misma trayectoria vista por S. Esto se ilustra en Fig.(II.2).

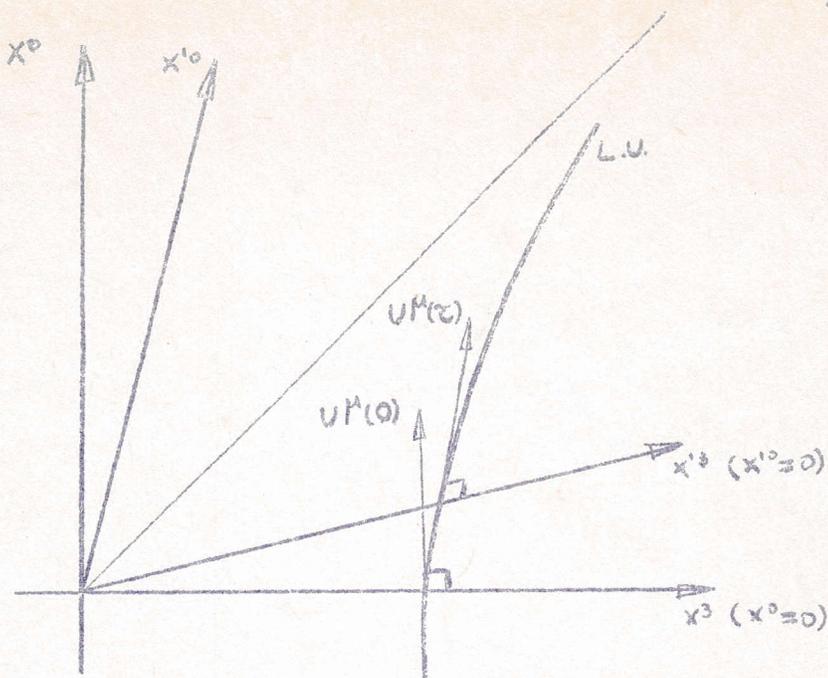


FIG. (II.2)

El sistema $S(x^0, x^3)$ ve en reposo la carga en $x^0 = \tau = 0$, mientras que $S'(x'^0, x'^3)$ la ve en reposo $x'^0 \neq 0$, $\tau \neq 0$. $u^\mu(0)$ es ortogonal al espacio de S , $u^\mu(\tau)$ es ortogonal al espacio de S' .

Es evidente que lo que es válido para S es igualmente válido para S' . Habiendo observado esto uno puede argumentar que la carga no emite radiación en ningún instante, puesto que para cada instante siempre es posible situar un detector en el sistema inercial acompañante ($S'(\tau)$) no observando radiación alguna. Este argumento, dado por Pauli (Enzykl. Math, Wiss, vol 5, p 647,

Teubner, Leipzig (1918); "Theory of Relativity", Pergamon Press, (1958)) es incorrecto y así lo hace notar Rohrlich ("Classical charged particles", secc.5.3).

El argumento, según Rohrlich, falla ya que no es suficiente conocer el vector de Poyting en cada punto del espacio en cierto instante (hiperplano $x^0 = 0$), -que correspondería a la emisión de distintos instantes en la línea de universo de la carga-, para hallar la radiación emitida por la carga. Para saber si una carga emite o no radiación en cierto instante τ , es necesario explorar $T^{\mu\nu}$ sobre el cono de luz con vértice en $z^\mu(\tau)$, en especial en el límite $r \rightarrow \infty$.

Esto concuerda con el criterio adoptado por nosotros (I.20). Por otra parte, se podría agregar que el que $\vec{S} = \vec{0}$ en $x^0=0$ no significa que $\vec{S} = 0$ en otro momento, así como el que un oscilador esté en reposo en cierto instante no significa que no se mueva. En realidad \vec{S} cambia su sentido en $x^0=0$ pasando instantáneamente por cero.

Aunque el argumento de Pauli no demuestra que no exista radiación, se basa en una observación cierta: en ningún plano tipo espacio que corte ortogonalmente la línea de universo de la carga se detectará radia-

ción. Se puede ver que esto que Rohrlich llama una curiosidad, está estrechamente ligado al hecho de que el 4-momento del campo es el de un campo coulombiano. En efecto, se puede mostrar^(*) que el contenido de energía y momento lineal del campo- $P^\mu = \overset{r}{P}^\mu + \overset{b}{P}^\mu$ para este caso es

$$P^\mu(\tau) = \frac{e^2}{2\epsilon} u^\mu(\tau) \quad (\text{II.8})$$

Esto se debe a que hay una cancelación de $\overset{r}{P}^\mu$ con una parte (la no-coulombiana) de $\overset{b}{P}^\mu$. Los términos que faltan son justamente aquellos que dan lugar a Γ^μ en la ecuación de Lorentz-Dirac (I.26).

Pero esto último no es novedad ya que en el movimiento hiperbólico se ve de (II.5),

$$a^2 u^\mu + \dot{a}^\mu = 0 \quad (\text{II.9}) ,$$

de manera que el término de Schott cancela idénticamente al de Larmor. El significado de (II.9) se estudiará más en detalle en el capítulo V de este trabajo.

CAPITULO III

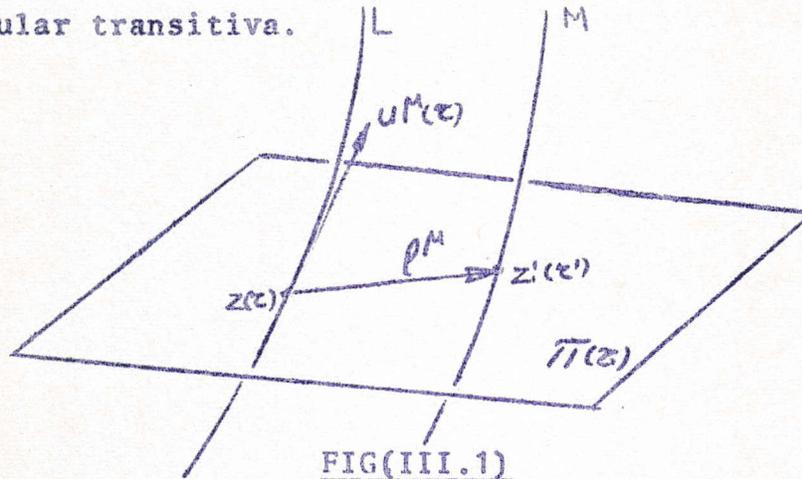
GEOMETRIA DEL ESPACIO-TIEMPO VISTA DESDE EL SISTEMA UNIFORMEMENTE ACELERADO.

En la sección anterior estudiamos la radiación de una carga en movimiento hiperbólico observada desde un sistema inercial. Es de interés también saber qué ocurre con los campos en el sistema propio (no inercial) de la carga, esto es, el sistema uniformemente acelerado (S.U.A.). Este sistema por ser no inercial requiere un tratamiento distinto que hace necesario salirse del marco de la relatividad especial y tomar algunos elementos del formalismo de la relatividad general^(†).

Definiremos el S.U.A como aquel sistema de referencia internamente rígido en el cual la carga esté siempre en reposo en el origen. Por "internamente rígido" entenderemos un referencial que satisface la definición de Synge (ver Synge, op.cit. apéndice G): es aquel en el que cada par de líneas de universo esté rígidamente conectado en el sentido de que un hiperplano que corte ortogonalmente una de ellas, también corta ortogonalmente la otra y el vector que une los dos puntos de intersección tiene siempre la misma norma, cualquiera sea el instante τ en la intersección con la primera línea. En la Fig.(III.1) se muestra esto; L y M: líneas de universo de dos puntos sobre el sistema rígido; $\pi(\tau)$; hiperplano que corta

(†) Esto no significa que el problema en estudio pertenezca a la relatividad general, ya que asignaremos "relatividad general" a la teoría de la gravitación de Einstein y por "relatividad especial" a la geometría del espacio-tiempo plano. Ver p.ej. L.Gomberoff et al^(*).

ortogonalmente a L en $z(\tau)$, (cualquier vector en $\pi(\tau)$ es ortogonal a la velocidad $u^\mu(\tau)$); $z'(\tau')$: punto en que $\pi(\tau)$ intersecta a M ; $l^\mu = z'^\mu(\tau') - z^\mu(\tau)$, $l^\mu l_\mu = -l^2 = \text{cte.}$ Como se desprende de su definición, "estar rígidamente conectado con" es una relación de equivalencia, y en particular transitiva.



Distancia entre líneas de universo de un sistema internamente rígido.

Para construir el sistema de coordenadas rígido que llamamos S.U.A., encontraremos la línea de universo de un punto fuera del origen conectado rígidamente a la carga e impondremos como condición de borde que S coincida con el S.U.A. en $\bar{x}^0 = x^0 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= \bar{x}^1 \\ x^2 &= \bar{x}^2 \\ x^3 &= \bar{x}^3 + \alpha \end{aligned} \right\} \text{ en } x^0 = \bar{x}^0 = 0 \quad (\text{III.1})$$

Es una peculiaridad del movimiento hiperbólico que z^μ y u^μ sean ortogonales, luego $\pi(\tau)$ será un plano que contenga a $z^\mu(\tau)$:

$$\pi(\tau) : (\lambda z^0(\tau); x^1, x^2, \lambda z^3(\tau)),$$

$$\lambda, x^1, x^2 \in \mathbb{R} \text{ arbitrarios} \quad (\text{III.2})$$

Como la familia de planos $\pi(\tau)$ pasa por el origen de S' , vemos que todas las líneas de universo de los puntos sobre el S.U.A. deben ser ortogonales a su vector posición en cada instante. Consideremos un punto P cualquiera sobre el S.U.A.; si en el instante x^0 tiene coordenadas $x^1 = x^2 = 0, x^3$, podemos decir que su velocidad será

$$u^\mu(P) = \frac{1}{(x^3)^2 - (x^0)^2} (x^3; 0, 0, x^0) = \frac{d}{d\tau} (x^0; 0, 0, x^3)$$

$$(\text{III.3})$$

Esta ecuación se puede integrar con las condiciones de borde (III.1). La solución es (ver apéndice A).

$$(x^3)^2 - (x^0)^2 = (\bar{x}^3 + \alpha)^2 \quad (\text{III.4})$$

Para completar la transformación, se define el tiempo coordenado (\bar{x}^0) en el S.U.A. como el mismo

para todos los puntos del plano $\pi(\tau=x^0)$.

Como se muestra en el apéndice A, esto conduce a la transformación de coordenadas

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \\ x^1 &= \bar{x}^1 \\ x^2 &= \bar{x}^2 \\ x^3 &= [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{cosh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5}).$$

2.- A partir de (III.5) es posible conocer toda la geometría del S.U.A.

Tensor métrico: El elemento invariante de arco ds^2 es

$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ en coordenadas de Minkowski. Luego, en el S.U.A. es

$$ds^2 = \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^2 (d\bar{x}^0)^2 - (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2 .$$

De aquí se tiene

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Se puede ver que la métrica es la de un campo estático, i.e. $g_{\mu\nu}$ no depende de \bar{x}^0 y las componentes g_{0i} son todas nulas^(†). Esto último asegura que es posible elegir un tiempo universal; en efecto \bar{x}^0 es el tiempo universal.

Conexión afín: Conociendo $g_{\mu\nu}$ se puede encontrar la conexión afín (símbolos de Christoffel de 2ª especie).

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right], \text{ se tiene}$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{[\bar{x}^3 + \alpha]}, \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha^2}, \text{ el resto nulos}$$

(III.7)

Curvatura: Se puede comprobar asimismo, que el tensor de curvatura $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} \equiv 0$. Esto

no podría haber sido de otra manera ya que la curvatura es una propiedad intrínseca del espacio, que no puede anularse o dejar de ser nula mediante un cambio de coordenadas. Siendo plano el espacio de Minkowski ninguna transformación de coordenadas. - (III.5) u otra-sería capaz de producir curvatura^(††).

(†) Los campos cuya métrica sólo es independiente del tiempo se denominan gravitatorios constantes.

(††) Debemos aclarar que se trata de curvatura en 4-dimensiones, ya que un cambio de coordenadas puede producir curvatura tridimensional como es el caso de un disco giratorio.

Singularidad de la métrica: Es importante darse cuenta de que (III.5) carece de sentido si $\bar{x}^3 < -\alpha$, ya que para $\bar{x}^3 = -\alpha$ no es posible invertir la transformación y $\bar{x}^3 < -\alpha$ corresponde a la otra rama de la hipérbola (III.4), que se obtendría si la aceleración fuese $-g\hat{z}$; se puede mostrar que una interpretación alternativa posible para esta rama es que se trata de una carga de signo contrario que produce un campo avanzado (ver Rohrlich "Classical Charged Particles", p.118). Esta limitación es física por cuanto, como se muestra en (A.1), un punto de coordenada $\bar{x}^3 = -\alpha$ viajaría a la velocidad de la luz, de modo que no sería posible realizar materialmente el S.U.A. más allá de esta frontera. Sin embargo los puntos geométricos del espacio-tiempo sí existen más allá de $\bar{x}^3 = -\alpha$, sólo que no puede haber observadores en reposo sobre el S.U.A. en ellos. Esta limitación física tiene el mismo sentido que el radio $r = \frac{1}{\omega}$ en un disco giratorio con velocidad angular ω , ya que puntos ubicados a esta distancia del centro viajarían a la velocidad de la luz.

Esta frontera es un límite en el espacio-tiempo de la región a la que tiene acceso un observador en el S.U.A.; él no puede saber nada de lo que ocurre más allá de este horizonte, llamado también horizonte de los eventos ("event horizon") por esta misma razón. En el sistema S el hiperplano $\bar{x}^3 = -a$ corresponde a los hiperplanos $x^0 = \pm x^3$ (ver III.4)) con lo que podemos formar el siguiente esquema:

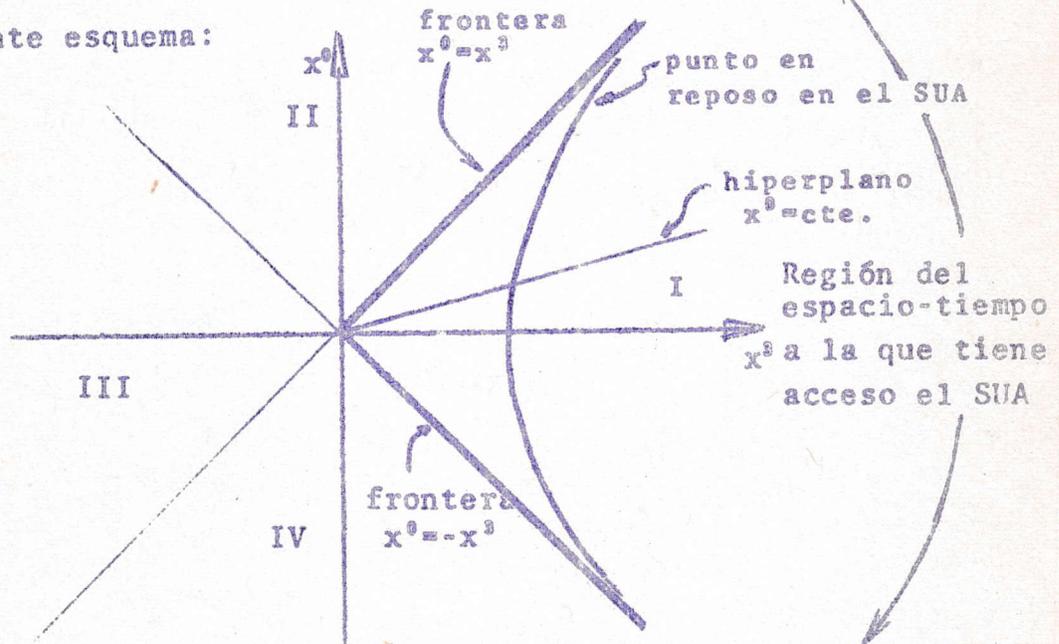


FIG. (III.2)

Espacio de Minkowski separado en 4 zonas; I: zona cubierta por el SUA; II: zona que puede recibir información del SUA pero no enviarle información; III: zona desconectada absolutamente del SUA; IV: zona que puede enviar información al SUA pero no recibir información desde él.

Hay que aclarar que esta "singularidad" es consecuencia de usar un sistema particular de coordenadas, y no se trata de un accidente en la estructura geométrica del espacio-tiempo.

- 3.- Para terminar este capítulo completaremos nuestro conocimiento de la estructura del espacio-tiempo en el SUA estudiando la forma que tiene un cono de luz en este sistema. Nos interesará conocer cómo ve las geodésicas nulas un observador acelerado. Estudiaremos únicamente las que parten del origen en $\bar{x}^0 = 0$ por ser las trayectorias que seguirían los fotones emitidos por la carga en caso que hubiese radiación.

Usaremos la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (\text{III.8})$$

o su forma alternativa (ver Landau-Lifschitz, Física Teórica, vol.II. 87),

$$\frac{d}{d\lambda} \left[g_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Además el elemento de arco de una geodésica nula es en este caso

$$g_{00} (d\bar{x}^0)^2 - (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2 = 0 \quad (\text{III.10})$$

Como las coordenadas \bar{x}^1 y \bar{x}^2 son equivalentes entre sí (hay simetría de rotación en torno a \bar{x}^3), podemos

ignorar una de ellas y representar a la otra por $\bar{\rho}$ - también puede ser $\bar{\rho} = \sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}$ e ignoran el ángulo ϕ en torno al eje \bar{x}^3 . Usando (III.8) para $x^\mu = \bar{\rho}$, tenemos mediante (III.7)

$$\frac{d^2 \bar{\rho}}{d\lambda^2} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Por otra parte, usando (III.9) con $\mu = 0$ se tiene

$$\frac{d}{d\lambda} \left[g_{00} \frac{d\bar{x}^0}{d\lambda} \right] = 0,$$

o bien

$$\frac{d\bar{x}^0}{d\lambda} = \frac{\kappa \alpha^2}{[\bar{x}^3 + \alpha]^2} \quad (\text{III.12})$$

donde

$$k = \left. \frac{d\bar{x}^0}{d\lambda} \right|_{\bar{x}^3=0}$$

Por último (III.10) es

$$\left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^2 (d\bar{x}^0)^2 - (d\bar{\rho})^2 - (d\bar{x}^3)^2 = 0 \quad (\text{III.13})$$

La expresión (III.11) permite escoger como parámetro λ a \bar{g} ; eliminando esta ecuación, el sistema a resolver queda

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \dot{\bar{x}}^0 = \frac{\kappa \alpha^2}{[\bar{x}^3 + \alpha]^2} \\ \text{b) } \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^2 (\dot{\bar{x}}^0)^2 - (\dot{\bar{x}}^3)^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{III.14})$$

donde el punto indica derivación con respecto a \bar{p} ,

$$k = \left. \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{x}^0} \right|_{\bar{x}^0=0}$$

Notemos que $\frac{1}{k} = \left. \frac{d\bar{p}}{dx^0} \right|_{\bar{x}^0=0} < 1$ (III.15)

Reemplazando \bar{x}^0 de a) en b) e integrando con la condición de borde dada, se tiene

$$[\bar{p} - \alpha\sqrt{\kappa^2 - 1}]^2 + [\bar{x}^3 + \alpha]^2 = \kappa^2 \alpha^2 \quad (\text{III.16})$$

Esta ecuación representa una familia de circunferencias ($1 < \kappa < \infty$) de radio $\kappa\alpha$ con centro en $\bar{p} = \alpha\sqrt{\kappa^2 - 1}$, $\bar{x}^3 = -\alpha$ (ver Fig. (III.3)). Como $\left. \frac{\dot{\bar{x}}^3}{\bar{x}^0} \right|_{\bar{x}^0=0}$ representa la dirección de la tangente a cada geodésica en el origen, θ representa el ángulo $\text{arccot } \sqrt{\kappa^2 - 1}$ en el dibujo.

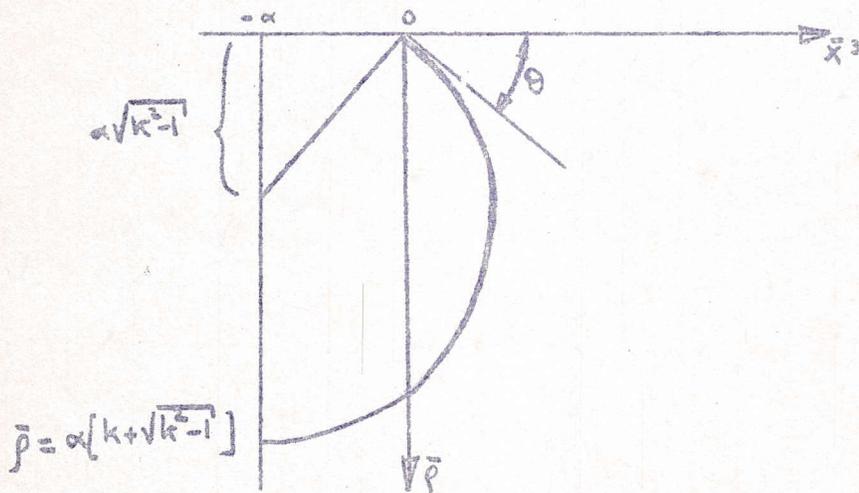


FIG. (III.3)

Proyección sobre el plano (\bar{x}^3, \bar{p}) de una geodésica nula en el S.U.A.

Reemplazando (III.16) en a), se tiene

$$\bar{x}^0(\bar{\rho}) = \frac{\alpha}{2} \ln \left[\frac{\alpha + \bar{\rho}(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1})}{\alpha - \bar{\rho}(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1})} \right] \quad (\text{III.17})$$

sustituyendo ahora $\bar{\rho}$ de (III.16) en esta última expresión se tiene

$$\bar{x}^0(\bar{x}^3) = \frac{\alpha}{2} \ln \left[\frac{\alpha\kappa + \sqrt{\kappa^2\alpha^2 - (\bar{x}^3 + \alpha)^2} \cdot \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}{\alpha\kappa - \sqrt{\kappa^2\alpha^2 - (\bar{x}^3 + \alpha)^2} \cdot \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}} \right] \quad (\text{III.18})$$

Se ve que para $\kappa \rightarrow \infty$ (movimiento en el plano (\bar{x}^0, \bar{x}^3)) (III.18) no es aplicable. Este caso correspondee a integrar (III.13) con $d\bar{\rho} = 0$. El resultado es

$$\bar{x}^0 = \left| \ln \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \right| \quad (\text{III.19})$$

Con todo esto es posible hacer un diagrama aproximado del "cono" de luz; Fig. (III.4).

Es importante notar que todas las geodésicas, excepto aquella que viaja exactamente según el eje $+\bar{x}^3$, empiezan en la carga y terminan en la frontera $\bar{x}^3 = -\alpha$. En efecto, en (III.18) $\bar{x}^0 = \infty \Rightarrow \alpha\kappa - \sqrt{\kappa^2\alpha^2 - (\bar{x}^3 + \alpha)^2} = 0$ y esto sólo tiene como solución $\bar{x}^3 = -\alpha$. Vemos así que la frontera del S.U.A. no sólo impide saber lo que ocurre

al otro lado, sino que además sería un sumidero de toda la radiación, si la hubiera.

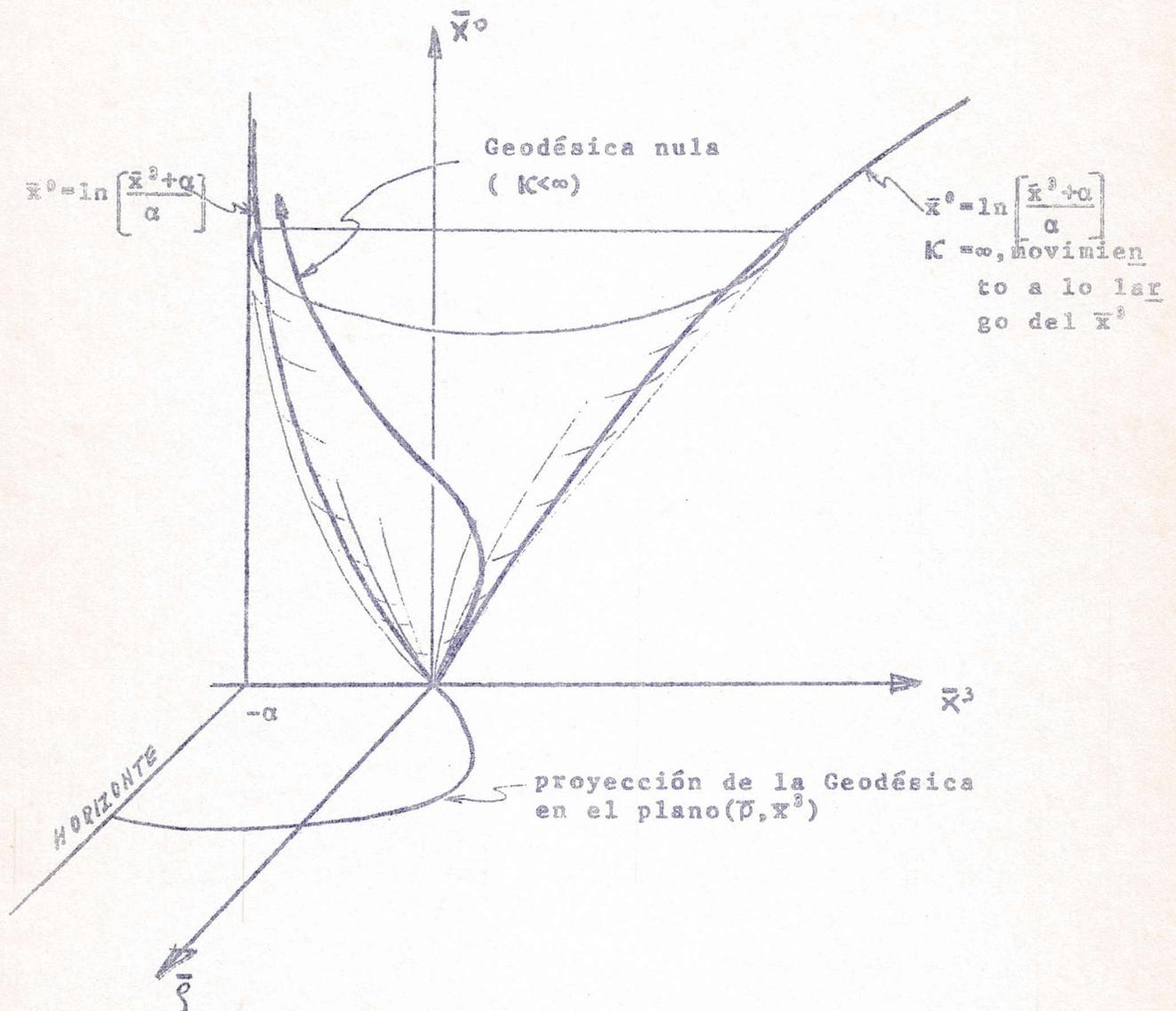


FIG. (III.4)

Cono de luz y geodésica nula típica vista desde el S.U.A.

CAPITULO IVEL CAMPO ELECTROMAGNETICO EN EL S.U.A.

1.- En la sección II de este trabajo presentamos el campo de una carga en movimiento hiperbólico visto por un observador inercial. La conclusión fue que la carga radía aunque el contenido de energía-momento lineal del campo en cada instante es el de un campo coulombiano y consecuentemente $\Gamma^H = 0$.

Como explicamos en la sección III, es de interés conocer el campo así como $T^{\mu\nu}$ en el SUA con el fin de averiguar algo respecto a la radiación de la carga en ese sistema. La pregunta natural es cómo calcular las expresiones del potencial, del campo, etc. Para responder a esto, hay dos procedimientos posibles; el primero consiste en suponer que los 4-vectores y tensores definidos en la sección I para representar la posición, velocidad, aceleración, potencial, tensor de energía-momento y el campo mismo, no sólo transforman tensorialmente bajo transformaciones de Lorentz, sino también bajo cambios de referencial que incluyan aceleraciones. La segunda forma de proceder consiste en obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell en coordenadas arbitrarias la forma del campo. El primer método es sugerido

por la covariancia de las ecuaciones de Maxwell bajo transformaciones conformes- que incluyen cambios a sistemas uniformemente acelerados así como transformaciones de Lorentz-, pero presenta varios inconvenientes: i) sabemos que objetos que son vectores tensores bajo transformaciones de Lorentz, no lo son bajo la transformación (III.5). Por ejemplo para la posición de un punto del campo x^μ relativa a la carga en z^μ , $r^\mu = x^\mu - z^\mu$, se tiene $\bar{r}^\mu \neq \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} r^\nu$, lo cual puede comprobarse directamente usando los coeficientes de una transformación tensorial asociada a (III.5):

$$\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} = \frac{\alpha}{\bar{x}^3 + \alpha} \cosh \left(\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right), \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^3} = -\frac{\alpha}{\bar{x}^3 + \alpha} \sinh \left(\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right), \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^0} = -\sinh \left(\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} = \cosh \left(\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right); \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^0} = 0, \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = \delta^i_k, \quad i, k = 1, 2 \quad (\text{IV.1})$$

ii) Suponiendo que fuese correcto realizar una transformación vectorial de A^μ por ejemplo, en el nuevo sistema de coordenadas se tendrá una función definida en cada punto del espacio-tiempo, pero se habrá perdido la interpretación física en cuanto a la dependencia del campo en las variables dinámicas de la carga.

iii) Las transformaciones conformes mismas no son tensoriales y resultan mucho más difíciles de interpretar que éstas puesto que entes físicos como el tiempo propio, la longitud de una varilla y la masa no son invariantes⁽⁹⁾.

El segundo procedimiento es más seguro en tanto que no necesita hipótesis especiales a la vez que permite conservar la interpretación física siguiéndoles el rastro a las variables dinámicas de la carga en las expresiones del campo. Este es el procedimiento que seguiremos, tomando algunos resultados que por este camino han encontrado De-Witt y Brehme⁽¹⁰⁾, quienes resuelven las ecuaciones de Maxwell en un espacio de Riemann arbitrario con una métrica dada. Para estudiar este problema, estos autores hacen uso de los bitensores que nosotros reseñaremos brevemente y que resulta sea el lenguaje natural en este caso.

El campo electromagnético es un ente fundamentalmente no local, por lo que resulta imprescindible poder definir cantidades que no dependen de un sólo punto, sino de dos como la posición relativa entre un observador y la fuente del campo. La dificultad principal al trabajar en coordenadas arbitrarias- aun en un espacio plano, si las coordenadas no son de Minkowski- proviene del hecho que la diferencia entre dos vectores (o tensores) evaluados en distintos puntos no es por lo general otro vector

(o tensor). Esto se debe a que en general los coeficientes $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ en un cambio de coordenadas arbitrario son funciones de la posición; esto es lo que hace necesario la introducción de la derivada covariante en relatividad general. En efecto, consideraremos dos vectores, A^μ y B^α , evaluados en los puntos $P(x^\nu)$ y $Q(z^\rho)$ respectivamente y un cambio de coordenadas $(x, z) \rightarrow (\bar{x}, \bar{z})$:

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$$

$$z^\alpha \rightarrow \bar{z}^\alpha$$

(IV.2)

$$A^\mu(x) \rightarrow \bar{A}^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x)$$

$$B^\alpha(z) \rightarrow \bar{B}^\alpha(\bar{z}) = \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\beta} B^\beta(z)$$

Es claro que la resta componente a componente de los vectores A y B no es un vector si los coeficientes de la transformación dependen de las coordenadas de P y Q . Para poder comparar A y B en una forma que sea independiente del sistema de coordenadas es necesario trasladar paralelamente B desde P hasta Q (o vice-versa) de manera de restar dos vectores en un mismo punto. Esto se puede realizar definiendo un objeto que lleve a cabo la operación de trasladar paralelamente a sí mismo un vector de un punto a otro a lo largo de una geodésica; se define $B^{\parallel}(x)$ como el vector $B(z)$ transportado paralelamente a sí mismo de z a x :

$$B^{*\mu}(x) = g^{*\mu}_\alpha(x, z) B^\alpha(z) \quad (\text{IV.3})$$

Las cantidades $g^{*\mu}$ son funciones de los puntos $P(x)$ y $Q(z)$ y de la geometría del espacio. Exigiendo que B^* sea un vector genuino en x , se tiene para $g^{*\mu}_\alpha$:

$$\bar{g}^{*\nu}_\beta(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial z^\alpha}{\partial \bar{z}^\beta} g^{*\mu}_\alpha(x, z) \quad (\text{IV.4})$$

y

$$\left. \begin{aligned} g^{*\mu}_\alpha(x, z) &= g_{\mu\nu}(x) g^{*\nu\nu}_\alpha(x, z) \\ g^{*\mu}_\alpha(x, z) &= g^{\alpha\beta}(z) g^{*\mu}_\beta(x, z) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.5})$$

La ley de transformación (IV.4) define lo que llamamos un bivector: un objeto que depende de dos puntos y que frente a cambios de coordenadas se comporta como vector en cada punto simultáneamente. Este concepto es generalizable a bitensores de rango arbitrario, pero no nos preocuparemos de esto aquí. De lo anterior (IV.3) resulta claro que en el espacio plano en coordenadas de Minkowski se tiene

$$g^{*\mu}_\alpha(x, z) = g^\mu_\alpha \quad (\text{IV.6})$$

Si observamos las definiciones de A^μ , $F^{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$ de la sección I, veremos que en todos ellos aparecen cantidades como u^μ o a^μ que están definidas en la

posición de la carga, de manera que los tensores contruidos a partir de ellos deberían estar definidos en base a las cantidades trasladadas $g^{*\mu}_{\alpha} u^{\alpha}$ y $g^{*\mu}_{\alpha} a^{\alpha}$. Algo peor ocurre con r^{μ} ya que ni x^{μ} ni z^{μ} son vectores (recordemos que en el espacio euclidiano \vec{x} no transforma como vector al cambiar de coordenadas cartesianas a polares por ejemplo). En este caso se procede a generalizar el concepto de distancia entre dos puntos, esto es, el intervalo entre dos eventos medido a lo largo de la geodésica que los une

$$s(x, z) = \int_{\Gamma(z)}^{P(x)} ds, \quad \Gamma = \text{geodésica que une } P \text{ y } Q. \quad (\text{IV.7})$$

Esta cantidad es un escalar, luego la derivada parcial-ordinaria o covariante- con respecto a x^{μ} o a z^{α} es un vector genuino. Como en el espacio de Minkowski

$$s^2 = (x^{\mu} - z^{\mu})(x_{\mu} - z_{\mu}), \quad \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} = \frac{x_{\mu}}{s},$$

luego

$$\left(s \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}}\right) \left(s \frac{\partial s}{\partial x^{\nu}}\right) g^{\mu\nu} = s^2 \quad (\text{IV.8})^{(\dagger)}$$

Por analogía con este caso se define

$$\sigma =: \frac{1}{2}s^2 \text{ de modo que } \sigma^{*\mu} = s s^{*\mu} \text{ es lo que en el espacio}$$

(†) $r^{\mu} = (x^{\mu} - z^{\mu})$ no tiene por que cumplir la condición de retardo $r^{\mu} r_{\mu} = 0$ puesto que se trata de puntos x y z arbitrarios y no necesariamente a lo largo de una misma geodésica nula.

(*) Aunque $\sigma^{*\mu} \equiv s^{*\mu}$, usaremos la derivada invariante(.) por homogeneidad en los cálculos.

de Minkowski corresponde a $r^\mu = x^\mu - z^\mu$,

$$\sigma^\mu \sigma_{,\mu} = \sigma^\alpha \sigma_{,\alpha} \quad (\text{IV.9})$$

El significado de (IV.9) es el siguiente: $\sigma^\mu (\sigma^\alpha)$ es una cantidad que depende de x y z , que transforma como vector en $x(z)$ y como escalar en $z(x)$, que apunta de z a x (x a z) y cuya norma coincide con el intervalo geodésico entre ambos puntos.

Con estos elementos basta para entender los resultados que obtienen De-Witt y Brehme. Estos autores, a partir de la ecuación de ondas para el campo electromagnético en un espacio de Riemann

$$g^{\mu\nu} A_{\sigma,\mu\nu} + R_\sigma{}^\nu A_\nu = J_\sigma \quad (\text{IV.10}),$$

donde J_σ es la 4-corriente de una carga puntual

$$J_\mu = e \int d\tau \delta^4 \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \dot{z}^\alpha \delta^4 (\sigma \cdot v) \quad (\text{IV.11}),$$

obtienen

$$A_\mu = \frac{e}{4\pi} \frac{u_{\mu\alpha} \dot{z}^\alpha}{\sigma \cdot \beta \dot{z}^\beta} \Big|_{\tau_r} + e \int_{-\infty}^{\tau_r} v_{\mu\alpha} \dot{z}^\alpha d\tau \quad (\text{IV.12})$$

Aquí se ha introducido las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tau_r &= \text{solución de } \sigma(x, z(\tau)) = 0 \\ \delta^* &= \det [g^{\mu\alpha}] \end{aligned}$$

$$u_{\mu\alpha} = \left[\frac{\sqrt{|-g_{\nu\beta}|}}{\sqrt{|-g^*_{\rho\gamma}|}} \right] g^*_{\mu\alpha}$$

$$\dot{z}^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\tau}, \quad \ddot{z}^\alpha = \frac{dz^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{z}^\beta \dot{z}^\gamma$$

y $v_{\mu\alpha}$ es un bivector que es idénticamente nulo en espacios planos.

El término integral que aparece en (IV.12) - llamado cola (tail) - y que no aparece en un espacio plano, representa la contribución al campo debida a las irregularidades ("bumps") del espacio-tiempo en las que el campo se refleja dispersándose. Este campo dispersado queda como una estela, producto de toda su historia a medida que la partícula se mueve.

- 2.- Cuando el espacio es plano como es el caso del S.U.A., todas las cantidades que aparecen en la expresión (IV.12) se pueden calcular a partir de sus valores en coordenadas de Minkowski puesto que estamos seguros del carácter covariante de cada una de ellas. Esto se muestra en la siguiente tabla:

TABLA(IV.1).TRANSFORMACION DE LAS VARIABLES
DINAMICAS.

| Expresion general en coordenadas en arbitrarias | Expresión en coordenadas de Minkowski(S) | Expresión en el sistema uniformemente acelerado (SUA) |
|---|---|--|
| $g^{\mu\nu}(x)$ | $\eta^{\mu\nu}$ | $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\sigma} \eta^{\rho\sigma}$ |
| $g^{\alpha\beta}(z)$ | $\eta^{\alpha\beta}$ | $\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\gamma} \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\delta} \eta^{\gamma\delta}$ |
| $\sigma \cdot \mu$ | $r^\mu = x^\mu - z^\mu$ | $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} r^\nu$ |
| $\sigma \cdot \alpha$ | $-r^\alpha = z^\alpha - x^\alpha$ | $-\frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\beta} r^\beta$ |
| σ | $\frac{1}{2} r^\mu r_\mu = \frac{1}{2} r^\alpha r_\alpha$ | $\frac{1}{2} r^\mu r_\mu = \frac{1}{2} r^\alpha r_\alpha$ |
| $g^{*\mu}_\alpha$ | δ^μ_α | $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\alpha} \delta^\nu_\beta$ |
| $\delta^* = \det [g^{*\mu}_\alpha]$ | 1 | 1 |
| $g^* = \det [-g^{*\mu}_\alpha]$ | 1 | 1 |
| $g^{*\mu}_\alpha \cdot \nu$ | 0 | 0 |
| $\sigma \cdot \mu\alpha$ | $-\eta^{\mu\alpha}$ | $-\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{z}^\alpha}{\partial z^\beta} \eta^{\nu\beta}$ |
| $\sigma \cdot \alpha \dot{z}^\alpha$ | -R | -R |
| $\sigma \cdot \alpha \ddot{z}^\alpha$ | -Q | -Q |

La consecuencia obvia de lo expuesto es que también el potencial debe transformar como un vector al pasar de S al S.U.A.

$$\bar{A}^\mu(\text{SUA}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(\text{S}) \quad (\text{IV.13})$$

Aparentemente todo lo que se ha hecho está de más pues (IV.13) podría haberse establecido con solo saber que existía una ecuación covariante general para el potencial (IV-10), ya que por ser covariante, su solución debe serlo también y como debe coincidir con A^μ en coordenadas de Minkowski, se tiene forzosamente que cumplir (IV.13). Sin embargo, hemos obtenido de paso la dependencia explícita del campo en las variables dinámicas de la carga lo que hace posible interpretar las cantidades que ahora reemplazan a las variables dinámicas como cantidades relativas al observador. Vemos por ejemplo que se puede hacer la siguiente identificación al pasar de coordenadas de Minkowski a coordenadas arbitrarias:

$$\left. \begin{aligned} r^\mu &\rightarrow \sigma \cdot \mu \\ u^\mu &\rightarrow g^{*\mu}{}_\alpha \dot{z}^\alpha \\ a^\mu &\rightarrow g^{*\mu}{}_\alpha \ddot{z}^\alpha \\ R &\rightarrow -\sigma_{,\alpha} \dot{z}^\alpha (+) = \sigma_{,\mu} g^{*\mu}{}_\alpha \dot{z}^\alpha \\ Q &\rightarrow -\sigma_{,\alpha} \ddot{z}^\alpha = \sigma_{,\mu} g^{*\mu}{}_\alpha \ddot{z}^\alpha \end{aligned} \right\} (\text{IV.14})$$

3.- Calculemos ahora $\bar{F}^{\mu\nu}$ y $\bar{T}^{\mu\nu}$ en el S.U.A.. A partir de (IV.12) tenemos

(+) Esto vale ya que $\sigma \cdot \mu = -g^{*\mu}{}_\alpha c \cdot \alpha$

$$\bar{A}^\mu(\bar{x}) = \frac{e}{4\pi} \frac{g^{*\mu}{}_\alpha \dot{z}^\alpha}{\sigma_{,\beta} \dot{z}^\beta} \quad (\text{IV.9}') (*)$$

Para obtener $\bar{F}^{\mu\nu}(\bar{x}) = \bar{A}^{\nu,\mu}(\bar{x}) - \bar{A}^{\mu,\nu}(\bar{x})$, se deriva usando la condición de retardo $\sigma=0$, de donde $\sigma_{,\mu} + \sigma_{,\alpha} \dot{z}^\alpha \tau_{,\mu}^R = 0$, o

bien

$$\tau_{,\mu} = -\frac{\sigma_{,\mu}}{\sigma_{,\alpha} \dot{z}^\alpha} = \frac{\sigma_{,\mu}}{R} \quad (\text{IV.15})$$

El resultado se obtiene directamente y es

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \frac{2e}{4\pi} \left\{ \frac{(Q-1)}{R^3} \dot{z}^\alpha g^{*\mu}{}_\alpha [\mu_{\alpha\sigma} \cdot \nu] - \frac{\dot{z}^\alpha}{R^2} g^{*\mu}{}_\alpha [\mu_{\alpha\sigma} \cdot \nu] \right\} \\ &= \frac{2e}{4\pi R^3} \left\{ (Q-1) \dot{z}^\alpha g^{*\mu}{}_\alpha - R \dot{z}^\alpha g^{*\mu}{}_\alpha \right\} \sigma_{,\nu} \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Vemos que este resultado es idéntico al que se obtendría haciendo el reemplazo (IV.14) en la expresión de $F^{\mu\nu}$ en la sección I.

Basándonos en Tabla (IV.1), obtenemos (ver

apéndice b)

$$g^{*\mu}{}_\alpha = \begin{matrix} \alpha \rightarrow \\ \mu \downarrow \\ \alpha = \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\bar{x}^0 + \alpha} \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\bar{x}^0 + \alpha} \sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] & 0 & 0 & \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}^\alpha &= (1, 0) \\ \dot{\bar{z}}^\alpha &= (0; 0, 0, \frac{1}{\alpha}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.18})$$

(*) Usaremos $g^{*\mu}{}_\alpha, \sigma_{,\beta}, \dot{z}^\alpha$, etc. en lugar de $\bar{g}^{*\mu}{}_\alpha, \bar{\sigma}_{,\beta}, \dot{\bar{z}}^\alpha$ al referirnos al SUA y $r\delta^\mu_\alpha, -r_\beta$, etc. al referirnos a S ya que no hay ambigüedad en el sistema de referencia que se emplea.

$$\sigma^{\cdot\mu} = \left(\frac{\alpha^2}{\bar{x}^3 + \alpha} \sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right]; \bar{x}^1, \bar{x}^2, [\bar{x}^3 + \alpha] - \alpha \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \right)$$

$$-\sigma^{\cdot\alpha} = \left(|\bar{x}^3 + \alpha| \sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right]; \bar{x}^1, \bar{x}^2, [\bar{x}^3 + \alpha] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] - \alpha \right) \quad (\text{IV.19})$$

Como se muestra en el apéndice B, el cálculo de $\bar{F}^{\mu\nu}$ arroja lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^{0i} &= \frac{e\bar{x}^i}{4\pi} \frac{8\alpha^3}{\xi^3} \quad (i=1,2), \quad \bar{F}^{03} = \frac{e4\alpha[\bar{x}^3 + \alpha]}{4\pi\xi^3} (\alpha^2 + \bar{\rho}^2 - [\bar{x}^3 + \alpha]^2) \\ \bar{F}^{ik} &= 0 \quad (i,k;1,2,3) \quad (\vec{B} \equiv \vec{0}), \quad \xi^2 =: 4\alpha^2 \bar{\rho}^2 + [\alpha^2 - \bar{\rho}^2 - [\bar{x}^3 + \alpha]^2]^2 \\ &\quad \bar{\rho} = \sqrt{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2} \end{aligned} \right\} (\text{IV.20})$$

(IV.20) muestra que el campo presente las siguientes características:

- i) es estático
- ii) no tiene inducción magnética (\vec{B}) en ningún punto del espacio y en ningún instante
- iii) es un campo culombiano deformado.

Esto coincide con la imagen intuitiva que uno se puede hacer: una carga perpetuamente en reposo no puede producir campo magnético. Esto implica que $\bar{T}^{0i} = 0$ ($\vec{S} = \vec{0}$): "un campo estático y sin campo magnético no puede radiar".

4.- Mediante un formalismo riguroso y bien fundamentado hemos llegado en esta sección a concluir que el campo electromagnético es sólo electrostático; es un campo culombiano deformado a causa del campo gravitatorio aparente que existe en este sistema. Se observa además que el vector de Poynting es nulo en todo el espacio. Esto induciría a pensar que no existe flujo de energía en ningún punto del espacio en ninguna dirección en el S.U.A. Al tratar de aclarar este punto surgen de inmediato varias dificultades:

- Cómo definir energía (o flujo de ella) en un sistema no inercial. La dificultad aquí radica en que no es inmediato relacionar, como en coordenadas de Minkowski, la conservación de $T^{\mu\nu}$ con el teorema de Gauss para definir el flujo ($T^{\mu\nu}_{,\mu} = 0 \Rightarrow$ identidad entre el flujo entrante y el saliente en un volumen Λ) ya que en el teorema de Gauss interviene la derivada ordinaria, mientras que en la conservación de $\bar{T}^{\mu\nu}$ aparece la derivada covariante.

- El remoto futuro en el S.U.A. coincide con el plano $\bar{x}^3 = -\alpha$, luego para observar radiación tendríamos que situar detectores en la singularidad de la métrica. Esto se puede ver también del hecho que todas las geodésicas nulas terminan en la frontera $\bar{x}^3 = -\alpha$ (ver sección III,3).

-La existencia real de la radiación se puede entender al hablar de fotones, que aparecen de la cuantización del campo electromagnético, postulando invariancia del espacio bajo el grupo de Poincaré. Pero vemos que si la métrica es una función de la posición, como en nuestro caso, no es clara la existencia de simetría bajo traslaciones. Este es el objeto de estudio de los trabajos más recientes sobre la cuantización del campo gravitatorio.

Se puede intentar subsanar la primera dificultad generalizando el criterio de Synge ya que en él sólo se emplea cantidades invariantes y no se hace referencia al teorema de Gauss. Es claro que por ser I un invariante, la potencia radiada en el S.U.A. debería definirse como

$$Q = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma} IR^2 d\Omega \quad (\text{IV.21})$$

z^α fijo

donde σ es la intersección de un cono con vértice en $z^\alpha(x^0)$ con un plano(*) cuya normal es $g^{\mu\alpha} z^\alpha(x^0)$ y $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido, $\sin\theta d\theta d\phi$, en que θ y ϕ son parámetros con que se rotula cada geodésica nula (corresponde a los ángulos polares de la tangente en el

(*) Puede no ser un plano sino una hipersuperficie más complicada.

origen). Sin embargo se puede ver en Fig.(IV.1) que la operación de límite en (IV.21) necesariamente implica salirse del S.U.A.

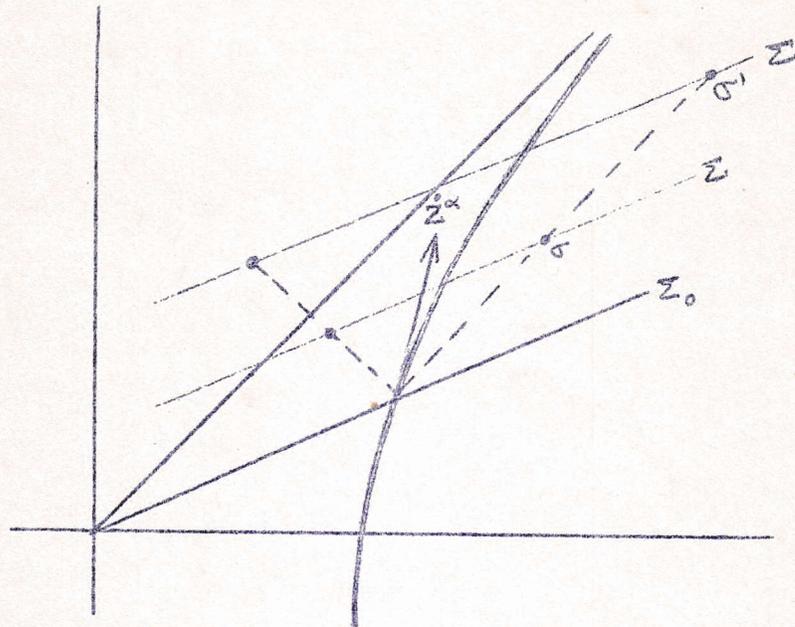


FIG. (IV.1)

Planos tipo espacio en que se evalúa la integral para el criterio de Synge.

En efecto, el límite $R \rightarrow \infty$ implica que Σ debe desplazarse hacia arriba, de modo que en algún momento estará en la posición de Σ' con lo que la intersección con el cono de luz se sale de la región que corresponde al S.U.A.

Como en todo caso persiste la duda sobre si I representa o no algo identificable como radiación,

convendría abordar el problema desde otro punto. A partir de $\bar{T}^{\mu\nu}$ podemos definir un bivector en el S.U.A. contrayendo un índice con $g^{*\mu}_\alpha$;

Sea

$$S^{\alpha\mu} = g_\nu^{*\alpha} \bar{T}^{\mu\nu} \quad (\text{IV.22})$$

como

$$g_{\nu\cdot\mu}^{*\alpha} = 0, \text{ tenemos}$$

$$S^{\alpha\mu}_{\cdot\mu} = g^{*\alpha}_\nu \bar{T}^{\mu\nu}_{\cdot\mu} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Por otra parte, como $S^{\alpha\mu}$ es un vector en el punto x ,

$$S^{\alpha\mu}_{\cdot\mu} = S^{\alpha\mu}_{\cdot\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\mu} S^{\alpha\rho} \quad (\text{IV.24})$$

y por una propiedad de la conexión afín (ver Landau-Lifschitz, op.cit p86),

$$S^{\alpha\mu}_{\cdot\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\sqrt{|g|} S^{\alpha\mu} \right]_{\cdot\mu} \quad (\text{IV.24'})$$

por lo tanto

$$0 = \bar{T}^{\mu\nu}_{\cdot\mu} \Leftrightarrow \left[\sqrt{|g|} S^{\alpha\mu} \right]_{\cdot\mu} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

De manera que podemos aplicar el teorema de Gauss:

$$0 = \int_\Lambda \left[\sqrt{|g|} g_\nu^{*\alpha} \bar{T}^{\mu\nu} \right]_{\cdot\mu} d\Sigma_\mu = \oint_{S(\Lambda)} \sqrt{|g|} g_\nu^{*\alpha} \bar{T}^{\mu\nu} d\Sigma_\mu \quad (\text{IV.26}),$$

Pudiendo así visualizar el flujo de energía del campo como el flujo de $\sqrt{|g|} g_\nu^{*\alpha} \bar{T}^{\mu\nu}$ a través de una hipersuperficie y se tiene ahora la posibilidad de reproducir los

los resultados de la sección I, sin embargo este problema es muy delicado y se requeriría ampliar más nuestro estudio desviándonos del objetivo que nos hemos trazado. A modo de ejemplo se podría considerar la siguiente definición, inspirada por la forma en que se relacionan los criterios de radiación de Rohrlich y Sygne:

$$\mathcal{R} =: \int_{\sigma} \sqrt{|g|} g^*_{\nu}{}^{\alpha} \bar{T}^{\mu\nu} n_{\alpha} g^*_{\mu\beta} \dot{z}^{\beta} d^2\sigma \quad (\text{IV.27}),$$

en que $n_{\alpha} = -(\frac{\sigma_{,\alpha}}{R}) + \dot{z}^{\alpha}$ es un vector radial unitario en la posición de la carga y σ la intersección del cono de luz que parte de la carga hacia el futuro con cualquier hipersuperficie tipo tiempo que rodee la línea de universo de la carga o cualquier hipersuperficie tipo espacio que corte el cono. Es notable que esta expresión sea equivalente a la que se integra en (IV.21). En efecto, $d^2\sigma = |J|R^2 d\Omega$ donde J es el jacobiano de la transformación (III.5); pero $|J|^4 = \sqrt{|g|}$, luego $\sqrt{|g|} d^2\sigma = R^2 d\Omega$. La región de integración en (IV.22) es la intersección de un plano como el cono con vértice en la carga, pero como lo advierte el mismo Sygne, la operación de límite en (IV.22) puede omitirse sin que el resultado cambie. Esto es claro pues como se ve en (I.32) a I sólo contribuye $\bar{T}^{\mu\nu}$.

Es fácil ver por los argumentos de Teitelboim que la integral (IV.22) no puede depender de la naturaleza de la hipersuperficie tipo espacio con que se intersecte el cono. Por último, es casi evidente que el invariante $n_{\alpha} g_{\nu}^{\alpha} \bar{T}^{\mu\nu} g_{\mu}^{\alpha} z^{\beta}$ es $I = u_{\mu} n_{\nu} T^{\mu\nu}$ que definimos en el espacio de Minkowski.

No obstante lo anterior creemos que el problema se aclarará cuando se establezca una definición inequívoca de energía, así como la cuantización del campo electromagnético en un espacio de Riemann.

CAPITULO V

DISCUSION FINAL.

1.- En esta última sección revisaremos los conceptos empleados aquí, a fin de entender el significado y las implicancias que tienen los resultados encontrados en el capítulo anterior.

Dado que nuestro problema trata de la radiación de una carga, cabe preguntarse si es posible establecer un criterio alternativo al de Synge para la radiación que arroje un resultado distinto. Dejando a un lado los criterios no manifiestamente covariantes -que no son de interés en nuestro caso-, compararemos aquí dos criterios que designaremos por R(Rohrlich) y S(Synge), ya que constituyen definiciones de radiación para estos autores(+). Estas definiciones son

$$\left. \begin{array}{l} \text{S:} \quad \mathcal{R}_S = \int I R^2 d\Omega \\ \text{R:} \quad \mathcal{R}_R = -u_\mu \frac{dP_{rad}^\mu}{dt} \end{array} \right\} \quad (\text{V.1})$$

(+) No confundir R (el criterio) con $R = r^\mu u_\mu$.

El significado de R se obtiene a través de la construcción siguiente (Fig.(V.1): consideremos la contribución de $T^{\mu\nu}$ al flujo a través del anillo tipo espacio ($\Delta\sigma$) contenido entre dos conos de luz con vértice en puntos cercanos sobre la línea de universo de la carga

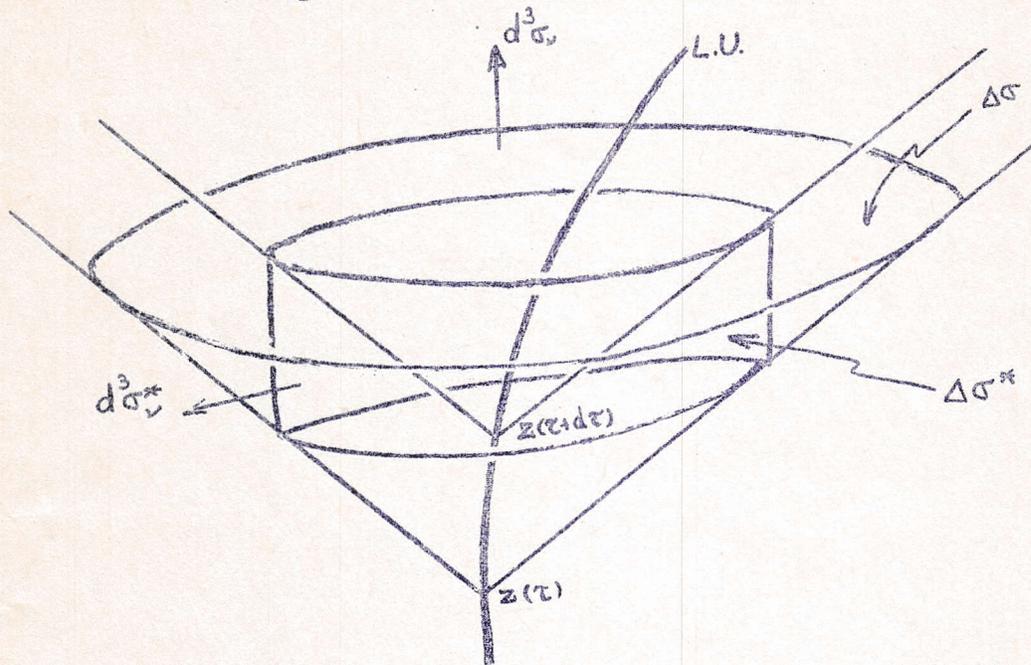


FIG. (V.1)

Superficies de integración en (V.2) y (V.3). El flujo de $T^{\mu\nu}$ a través de $\Delta\sigma$ es el mismo que a través de $\Delta\sigma^*$.

$$dP_{\text{rad}}^{\mu} = \lim_{R_{\text{mín}} \rightarrow \infty} \int_{\Delta\sigma} T^{\mu\nu} d^3\sigma_{\nu} \quad (\text{V.2})$$

en que $R_{\text{mín}}$ es el mínimo valor que toma $R = r^{\mu}u_{\mu}$ en $\Delta\sigma$

con $z(\tau) < z < z(\tau + d\tau)$, de manera que el límite prescrito corresponde a desplazar infinitamente $\Delta\sigma$ hacia el futuro distante. Es fácil ver que R y S son criterios equivalentes; notemos primero que dP_{rad}^{μ} no es otra cosa que $d\bar{P}^{\mu}$ en la formulación de Teitelboim, es decir dP_{rad}^{μ} se obtiene a partir de $\bar{T}^{\mu\nu}$, ya que sólo esta parte de $T^{\mu\nu}$ contribuye al flujo al tomar el límite $R_{\text{mín}} \rightarrow \infty$. Además vemos, siguiendo el argumento (I.20), que el cálculo debe ser independiente del límite.

Como $\bar{T}^{\mu\nu}$ no da flujo a través de los conos, el flujo a través de $\Delta\sigma$ debe ser el mismo que cruza $\Delta\sigma^*$ y tenemos

$$dP_{\text{rad}}^{\mu} \equiv d\bar{P}^{\mu} = \int_{\Delta\sigma} \bar{T}^{\mu\nu} d^3\sigma_{\nu} = \int_{\Delta\sigma^*} \bar{T}^{\mu\nu} d^3\sigma^*_{\nu} \quad (\text{V.3})$$

Ahora bien, podemos escoger $\Delta\sigma^*$ de modo que $d^3\sigma^*_{\nu} = n_{\nu} R^2 d\Omega d\tau$ luego

$$\frac{d\bar{P}^{\mu}}{d\tau} = \int \bar{T}^{\mu\nu} n_{\nu} R^2 d\Omega \quad (\text{V.4})$$

Por lo tanto, encontramos para \mathcal{R}_R

$$\mathcal{R}_R = -u_{\mu} \int \bar{T}^{\mu\nu} n_{\nu} R^2 d\Omega = \int I R^2 d\Omega \quad ,$$

con lo que

$$\boxed{\mathcal{R}_S \equiv \mathcal{R}_R}$$

(V.5)

Notemos que hemos evitado trabajar directamente con \bar{P}^μ lo que habría requerido la condición asintótica (I.24), una restricción que deja fuera precisamente el movimiento hiperbólico.

Es legítimo preguntarse por la ventaja de usar \mathcal{R}_S en lugar de \mathcal{R}_R , ya que son criterios equivalentes. El problema surge al utilizar \mathcal{R}_R en el movimiento hiperbólico ya que si no queremos que en (V.2) aparezca explícitamente el límite $R_{\min} \rightarrow \infty$ debemos usar $d\bar{P}^{\mu\nu}$; pero en este caso particular una parte de \bar{P}^μ cancela a \bar{P}^μ luego no resulta claro en este contexto el sentido de $d\bar{P}^\mu$ como radiación.

Como indicamos en el capítulo I, la "reacción de radiación" (Γ^μ) es nula para una partícula en movimiento hiperbólico. Este efecto no se debe a que la carga no radíe sino a que el campo ligado y el de radiación actúan sobre la carga cancelando sus efectos. Esto es perfectamente claro desde el punto de vista de la separación del campo en dos partes dinámicamente independientes: nada prohíbe que una de ellas anule a la otra en un punto. Visto de esta manera carece de sentido asegurar que no existe radiación (en el infinito) sólo porque "la carga no lo note".

2.- Como se deduce de su definición (I.28), IR^2 representa el flujo de energía de radiación por unidad de ángulo sólido que cruza un detector en cualquier lugar del espacio. Podemos por lo tanto explorar el espacio de Minkowski con I a fin de saber cómo se distribuye la energía radiada por la carga. Exploremos pues, las regiones I y II señaladas en Fig.(III.2). Los resultados (ver apéndice C) son

$$a) \quad IR^2 \xrightarrow[x^3 \rightarrow \infty]{x^0 \text{ fijo}} 0, \quad x^1, x^2 \text{ arbitrarios}$$

$$b) \quad IR^2 \xrightarrow[x^0, |x^3| \rightarrow \infty]{x^0 - z^0 = \frac{1}{2}(x^3 - z^3), z^0, z^3 \text{ fijos}} 0, \quad \text{Radiación hacia adelante y hacia atrás por un cono con vértice en } z.$$

$$b') \quad IR^2 \xrightarrow[\text{cono del futuro}]{\frac{e^2 \alpha^2 \text{ sen}^2 \theta}{4\pi [z^3 - z^0 \cos \theta]^2}} \frac{e^2 \alpha^2 \text{ sen}^2 \theta}{4\pi [z^3 - z^0 \cos \theta]^2}, \quad \begin{aligned} x^3 - z^3 &= (x^0 - z^0) \cos \theta \\ \rho &= (x^0 - z^0) \text{ sen} \theta \end{aligned}$$

$$\text{Máximo para } \theta_0 = \arccos \left(\frac{z^0}{z^3} \right)$$

$$c) \quad IR^2 \xrightarrow[x^1 \rightarrow \text{plano } (x^0 = -x^3)]{x^0 \rightarrow \infty} \infty, \quad \begin{aligned} z^3 \rightarrow -z^0 \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi \end{aligned}$$

$$d) \quad IR^2 \xrightarrow[x \text{ fijo}]{x^0 \rightarrow \infty} 0, \quad x^1, x^2 \text{ arbitrarios.}$$

Todas las geodésicas nulas excepto una $(x^0 - z^0 = x^3 - z^3)$, cruzan el plano $x^0 = x^3$ yéndose al

infinito en la zona II. Por otra parte vemos que la única geodésica que no cruza la frontera entre las zonas I y II no transporta energía que pueda medir un detector. Así concluimos que en la zona I no se puede medir radiación más que en dirección a la zona II. Compararemos esto con lo que se puede decir en el S.U.A.

Como se mostró en el capítulo anterior, a partir de una cantidad conservada en el S.U.A. ($\bar{T}^{\mu\nu}$) se definió otra ($\sqrt{|g|} g^*_{\nu\alpha} g^*_{\mu\beta} \bar{T}^{\mu\nu} z^\alpha \bar{n}^\beta$) cuya divergencia ordinaria era nula. Enseguida se construyó el "invariante".

$$\bar{I} = \sqrt{|g|} g^*_{\nu\alpha} g^*_{\mu\beta} \bar{T}^{\mu\nu} z^\alpha \bar{n}^\beta$$

En rigor esto no es un invariante (escalar) sino una densidad escalar debido al factor $\sqrt{|g|} = |J|^{-1}$. Sin embargo $g^*_{\nu\alpha} g^*_{\mu\beta} \bar{T}^{\mu\nu} z^\alpha \bar{n}^\beta$ sí es un escalar genuino y corresponde a la transformación mediante (III.5) de $T^{\mu\nu} u_\mu n_\nu$, que se puede representar por

$$\left. \begin{aligned} u_\mu &\rightarrow g^*_{\mu\alpha} z^\alpha \\ n_\nu &\rightarrow g^*_{\nu\beta} \bar{n}^\beta \\ T^{\mu\nu} &\rightarrow \bar{T}^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (V.6)$$

Según (I.31.b) $n_\nu = \left(\frac{r_\nu}{R} - u_\nu\right)$, por lo tanto,

$$g_{\nu\beta}^* \bar{n}^\beta = \left(\frac{\sigma \cdot v}{R} g_{\nu\beta}^* \dot{z}^\beta \right) \quad (V.7)$$

con esto definir el invariante de Larmor \bar{Q} en el SUA:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \int \sqrt{|g|} g_{\mu\alpha}^* g_{\nu\beta}^* T^{\mu\nu} \dot{z}^\alpha \bar{n}^\beta d^2\sigma \\ &= \int g_{\mu\alpha}^* g_{\nu\beta}^* \bar{T}^{\mu\nu} \dot{z}^\alpha \bar{n}^\beta R^2 d\Omega \\ &= \int T^{\mu\nu} u_\mu n_\nu R^2 d\Omega = Q \quad (V.8) \end{aligned}$$

A pesar de que Q resulta así un verdadero invariante general (frente a cambios arbitrarios de coordenadas) no es claro que se trate sólo de energía electromagnética necesariamente. Podría por ejemplo tratarse de energía del campo gravitatorio aparente que sólo existe en el SUA; algo similar al efecto del pseudotensor de energía-momento de Landau (Landau y Lifshitz, op.cit. {101}).

Como se dijo en (I.33), $I = -\frac{e^2}{4\pi R^4} (a^2 r^2 + Q^2)$, reemplazando en las cantidades calculadas en la sección III,

$$\bar{I} = \sqrt{|g|} I = \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{\left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^2 - 2 \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] + 1}{\left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right]^4 \sinh^2 \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right]} \right\} \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \quad (V.9)$$

utilizando además las expresiones de $\cosh\left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha}\right]$ y $\sinh\left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha}\right]$, tenemos

$$\bar{I}R^2 = \frac{e^2 \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha}\right] \bar{\rho}^2}{\pi \left[4\alpha^2 \bar{\rho}^2 + \left[\alpha^2 - \bar{\rho}^2 - \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha}\right]^2\right]^2}\right]^2} \quad (V.10)$$

Se ve que la integral (I.30) no resulta independiente de R antes de tomar el límite. Veamos cuánta radiación cruzaría un detector. De (V.10) se observa que

- a) $\bar{I}R^2 \rightarrow 0$ $\bar{x}^3 \rightarrow \infty, \bar{\rho}$ fijo
- b) $\bar{I}R^2 \rightarrow 0$ $\bar{\rho} \rightarrow \infty, \bar{x}^3$ fijo
- c) $\bar{I}R^2 \rightarrow 0$ $\bar{x}^3 \rightarrow -\alpha, \bar{\rho}$ fijo
- d) $\bar{I}R^2 \rightarrow 0$ $\bar{\rho} \rightarrow 0, \bar{x}^3$ fijo.

Luego en los confines del SUA no se detecta radiación, sin embargo en otros puntos parecería ser que nuestro detector muestra presencia de energía radiada. Por otra parte, para distancias pequeñas entre el punto de observación y la carga ($\bar{x}^3, \bar{\rho} \ll \alpha$),

$$\sqrt{|g|} \sim 1, g^{\mu\alpha} \sim \eta_{\mu\alpha}, \dot{z}^{\alpha} = (1; \vec{0}), n^{\beta} \sim (0; \hat{n})$$

luego

$$IR^2 \sim \Sigma \bar{T}^0 i_{r^i} \equiv 0$$

Es decir, de la carga no sale energía de radiación pero el campo gravitatorio aparente "simula" radiación a distancia finita y que no se ve llegar a los confines de SUA: no se puede hablar propiamente de radiación. El hecho de que $\bar{I}R^2 \rightarrow 0$ en $\bar{x}^3 \rightarrow -\alpha$ proviene del factor $\sqrt{|g|}$, de modo que uno podría interpretar esto como que no se trata de que la densidad de flujo de energía se anule sino que se anula el elemento de superficie $d^2\sigma$ cuando se evalúa cerca del horizonte, pero que de todas maneras como la extensión de la región integrada es infinita, el resultado neto es finito. En efecto, esto se puede ver haciendo un cambio de variables que en lugar de describir el plano singular en coordenadas del SUA como $\bar{x}^3 = -\alpha$ lo haga con coordenadas minkowskianas $x^0 = x^3$. El resultado es claramente finito: $\mathcal{R} = -\frac{2}{3}e^2 a^2$. Todo esto lo podemos resumir diciendo

- La carga en el SUA no radía
- El campo gravitatorio aparente deforma el campo estático y simula un campo de radiación.
- Este campo de radiación no da flujo en las direcciones $\bar{p} \rightarrow \infty$, $\bar{x} \rightarrow \infty$ pero da una contribución finita a través del horizonte de sucesos, $\bar{x}^3 = -\alpha$ de manera que esta "radiación" sólo sería detectable al otro lado de la frontera.

3.- Todo el mundo está familiarizado con la idea de que observadores inerciales son equivalentes en el sentido que en cada uno de ellos valen las leyes de la física y que por lo tanto mediante mediciones realizadas dentro de cada referencial inercial no es posible distinguir un sistema de otro. Similarmente, Einstein propuso que localmente al menos, no es posible distinguir un sistema inercial de uno en caída libre en un campo gravitacional, o un sistema acelerado de un campo gravitatorio. Cabe preguntarse si esto es válido para partículas cargadas.

Supongamos una carga en caída libre y un observador K cayendo junto con ella. Este observador no vería radiación proveniente de la carga pues para él se trata de una carga en reposo en un sistema inercial. Al cambiar a un observador K' que ve acelerar a la carga, se tiene que $R \neq 0$. "It is, of course, clear that the radiation rate R is Lorentz invariant, but it is not invariant under (8.20)"-ec. (II.5) en nuestra notación; (ver Rohrlich, op.cit. p.216-218). La situación que estudiamos nosotros, según el mismo autor, radía cuando se la observa desde S mientras que desde el SUA no se observa radiación" because it is that $\vec{B} = \vec{0}$ ". Es claro que para Rohrlich constituye prueba suficiente de la ausencia de radiación que $\vec{S} = 0$, sin embargo no discute cómo definir

la radiación en el SUA.

A diferencia de lo que afirma Rohrlich, nuestra definición de \mathcal{R} es invariante general (aunque válida sólo en un espacio plano). No obstante, este invariante cuyo valor es la potencia radiada por la carga vista desde un sistema inercial, en principio el mismo número no tiene por que ser lo que mide un detector en el SUA. Para decidir sobre el significado de \mathcal{R} habría que contar con un modelo de detector ideal que diera un criterio absoluto en cualquier sistema de referencia. Por otra parte, se insinuó al final del capítulo IV que sería interesante poder cuantizar el campo electromagnético en un espacio con métrica arbitraria. Por este camino surgen de inmediato dificultades que derriban la hipótesis b_2 de la introducción. Fulling⁽¹¹⁾ demostró que al pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas de Rindler (equivalentes a las del SUA), los estados de una partícula en un sistema se transforman en estados que no son identificables como de una partícula en el otro; ni siquiera el vacío es el mismo en los dos sistemas. Por la misma línea, Davies⁽¹²⁾⁽¹³⁾ mostró que un estado sin campo visto desde S se ve como un estado excitado en el SUA en un espectro de Plack en equilibrio térmico a temperatura $\frac{1}{2\pi\alpha}$.

A P E N D I C E A . -TRANSFORMACION DE COORDENADAS ENTRE S(x) Y EL
SUA(\bar{x}).

Por (III.3) podemos escribir

$$\frac{dx^0}{dx^3} = \frac{x^3}{x^0} ,$$

que se puede integrar obteniendo

$$(x^3)^2 - (x^0)^2 = a .$$

La condición de borde (III.1) exige que $a = [\bar{x}^3 + \alpha]^2$. Por esto tenemos

$$(x^3)^2 - (x^0)^2 = [\bar{x}^3 + \alpha]^2 \quad (A.1)$$

En (III.3) esto significa además

$$\begin{aligned} u^\mu &= \left(\frac{x^3}{(x^3)^2 - (x^0)^2} ; 0, 0, \frac{x^0}{(x^3)^2 - (x^0)^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^3}{[\bar{x}^3 + \alpha]^2} ; 0, 0, \frac{x^0}{[\bar{x}^3 + \alpha]^2} \right) \quad (A.2) \end{aligned}$$

como en un sistema de coordenadas arbitrario la coordenada tiempo sólo juega un papel de rótulo, podemos llamar \bar{x}^0 a la coordenada tiempo de todos los eventos que ocurren en el SUA sobre un mismo plano $\pi(\tau=\bar{x}^0)$. De esta manera el tiempo coordinado de la carga coincide con su tiempo propio pero esto no será necesariamente cierto para cualquier otro punto sobre el SUA^(†). Así, al asignar a la trayectoria de la carga (en el origen del SUA).

$$\begin{aligned} x^0 &= z^0 = \alpha \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \\ x^3 &= z^3 = \alpha \operatorname{cosh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

correspondientemente debemos asignar al punto P

$$\begin{aligned} x^0(P) &= [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \\ x^3(P) &= [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{cosh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

sólo de esta manera se asegura que la línea universo del

(†) Como se sabe, la elección de tiempo coordinado nada tiene que ver con la posibilidad de sincronizar relojes, o el carácter estático o estacionario de la métrica.

origen y la de P sean ortogonales al mismo plano en el mismo instante coordenado \bar{x}^0 , satisfaciendo simultáneamente (A.1).

Como el espacio es homogéneo e isótropo en el plano (x^1, x^2) en ambos sistemas de coordenadas, podemos completar la transformación de coordenadas con

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 \\ \bar{x}^2 &= x^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

En general entonces,

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= [\bar{x}^0 + \alpha] \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \\ x^1 &= \bar{x}^1 \\ x^2 &= \bar{x}^2 \\ x^3 &= [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{cosh} \left[\frac{\bar{x}^0}{\alpha} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

A P E N D I C E B . -CALCULOS PARA OBTENER EL CAMPO EN EL S.U.A.

1) $g^{*\mu}_\alpha$: De la tabla (IV.1) vemos que para obtener $g^{*\mu}_\alpha$ es preciso conocer $\frac{\partial z^\alpha}{\partial z^\beta}$. Estos coeficientes se obtienen de (III.5) y son

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^0}{\partial \bar{z}^0} &= \cosh\left(\frac{\bar{z}^0}{\alpha}\right) , & \frac{\partial z^0}{\partial \bar{z}^1} &= \sinh\left(\frac{\bar{z}^0}{\alpha}\right) \\ \frac{\partial z^1}{\partial \bar{z}^0} &= \sinh\left(\frac{\bar{z}^0}{\alpha}\right) , & \frac{\partial z^1}{\partial \bar{z}^1} &= \cosh\left(\frac{\bar{z}^0}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial z^i}{\partial \bar{z}^0} = \frac{\partial z^0}{\partial \bar{z}^1} = \frac{\partial z^1}{\partial \bar{z}^1} = \frac{z^i}{\bar{z}^1} = 0 \quad (i=1,2) \text{ y } \frac{\partial z^i}{\partial z^k} \frac{\partial z^k}{\partial z^i} = \delta^i_k = \delta^k_i$$

Con esto y (IV.1) se tiene

$$\begin{aligned} g^{*0}_0 &= \left[\frac{\alpha}{\bar{x}^0 + \alpha} \right] \cosh\left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] , & g^{*0}_1 &= \left[\frac{-\alpha}{\bar{x}^0 + \alpha} \right] \sinh\left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \\ g^{*1}_0 &= -\sinh\left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] , & g^{*1}_1 &= \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] , & g^{*1}_2 &= g^{*2}_2 = 1 \end{aligned} \quad (B.2)$$

y el resto de las componentes nulas, como se muestra en (IV.17).

Reemplazando (IV.1) en las expresiones para σ^{μ} y σ^{α} de tabla (IV.1) se tiene (IV.19). Enseguida con (IV.18) y (IV.19) se puede obtener

$$R = -\alpha \cdot \alpha \dot{z}_{\alpha} = [\bar{x}^3 + \alpha] \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$Q = -\sigma \cdot \alpha \ddot{z}_{\alpha} = 1 - \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right]$$

Reemplazando (B.2), (B.3) y (IV.18) en (IV.16), se tiene para \bar{F}^{ik} :

$$\bar{F}^{ik} = 0 \quad (i, k=1, 2) \text{ ya que } g^{*i}_{\alpha} \dot{z}^{\alpha} = g^{*i}_{\alpha} \ddot{z}^{\alpha} = 0$$

$$F^{i3} = \frac{e}{4\pi R^3} \left\{ \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \bar{x}^i \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\bar{x}^3 + \alpha \right] \operatorname{senh} \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \bar{x}^i \frac{1}{\alpha} \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \right\}$$

$$= 0$$

$$\text{Luego } \vec{B} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \bar{F}^{0i} &= \frac{e}{4\pi R^3} \left\{ - \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \left[\frac{\alpha}{\bar{x}^3 + \alpha} \right] \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \bar{x}^i + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{x}^3 + \alpha) \sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] \cdot \left[\frac{\alpha}{\bar{x}^3 + \alpha} \right] \frac{1}{\alpha} \bar{x}^i \right\} \\ &= - \frac{e}{4\pi R^3} \bar{x}^i \end{aligned} \quad (B.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}^{03} &= \frac{e}{4\pi R^3} \left\{ - \left[\frac{\bar{x}^3 + \alpha}{\alpha} \right] \cosh [\%] \left[\frac{\alpha}{\bar{x}^3 + \alpha} \right] \cosh [\%] (\bar{x}^3 + \alpha - \alpha \cosh [\%]) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\alpha^2}{\bar{x}^3 + \alpha} \right] \sinh [\%] \sinh [\%] \right\} \\ &\quad - (\bar{x}^3 + \alpha) \sinh [\%] \left[\frac{-1}{\bar{x}^3 + \alpha} \sinh [\%] (\bar{x}^3 + \alpha - \alpha \cosh [\%]) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha} \cosh [\%] \left[\frac{\alpha^2}{\bar{x}^3 + \alpha} \right] \sinh [\%] \sinh [\%] \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi R^3} \left\{ \alpha \cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] - (\bar{x}^3 + \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (B.5)$$

La condición de retardo, $\sigma^{\mu\nu} \cdot \mu = 0$ conduce a que

$$\cosh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] = \frac{\alpha^2 + (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^3 + \alpha)^2}{2\alpha (\bar{x}^3 + \alpha)} \quad (B.6)$$

y por lo tanto

$$\sinh \left[\frac{\bar{x}^0 - \bar{z}^0}{\alpha} \right] = \frac{\xi}{2\alpha (\bar{x}^3 + \alpha)} \quad \begin{aligned} \xi &= : 4\alpha^2 \bar{\rho}^2 + [\alpha^2 - \bar{\rho}^2 - (\bar{x}^3 + \alpha)^2]^2 \\ \bar{\rho}^2 &= (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 \end{aligned}$$

Reemplazando (B.6) y (B.7) en (B.4) y (B.5) se obtiene finalmente

$$\bar{F}^{0i} = - \frac{e 8\alpha^3}{4\pi} \frac{\bar{x}^i}{\xi}, \quad \bar{F}^{03} = \frac{e 4\alpha + [\bar{x}^3 + \alpha] (\alpha^2 + \bar{\rho}^2 - [\bar{x}^3 + \alpha]^2)}{4\pi \xi^3} \quad (B.8)$$

A P E N D I C E C.CALCULO DE I EN DISTINTAS REGIONES DEL
ESPACIO-TIEMPO.

Nos interesa conocer el flujo de energía proveniente de la carga en distintas regiones del espacio en coordenadas de Minkowski. A partir de (I.33) tenemos

$$I = -\frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{a^2 R^2 + Q^2}{R^3} \right] \quad (C.1)$$

En nuestro caso

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{-1}{a^2} \\ R &= \frac{1}{a} (x^0 z^3 - x^3 z^0) \\ Q &= \frac{1}{a^2} (x^0 z^0 - x^3 z^3) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (C.2)$$

Reemplazando (C.2) en (C.1) se obtiene

$$IR^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{a^2 + 2(x^0 z^0 - x^3 z^3) + (x^3)^2 - (x^0)^2}{(x^0 z^3 - x^3 z^0)^2} \right] d\Omega \quad (C.3)$$

Como x^μ y z^μ están siempre sobre un mismo cono de luz, podemos usar la siguiente representación (coordenadas polares)

$$\left. \begin{aligned} x^0 - z^0 &= r \\ x^3 - z^3 &= r \cos \theta \\ \rho &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (C.4)$$

Con (C.4), (C.3) puede escribirse en la forma

$$IR^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi} d\Omega \frac{\text{sen}^2 \theta}{[z^3 - z^0 \cos \theta]^2} \quad (\text{C.5})$$

Exploraremos las siguientes regiones (ver Fig.(C.1))

- $x^3 \rightarrow \infty, x^0$, fijo
- $x^3, \rho, x^0 \rightarrow \infty$ sobre un cono de luz con vértice en z^μ (fijo)
- $x^\mu \rightarrow$ plano ($x^0 = -x^3$)
- $x^0 \rightarrow \infty, x^3, \rho$ fijos.

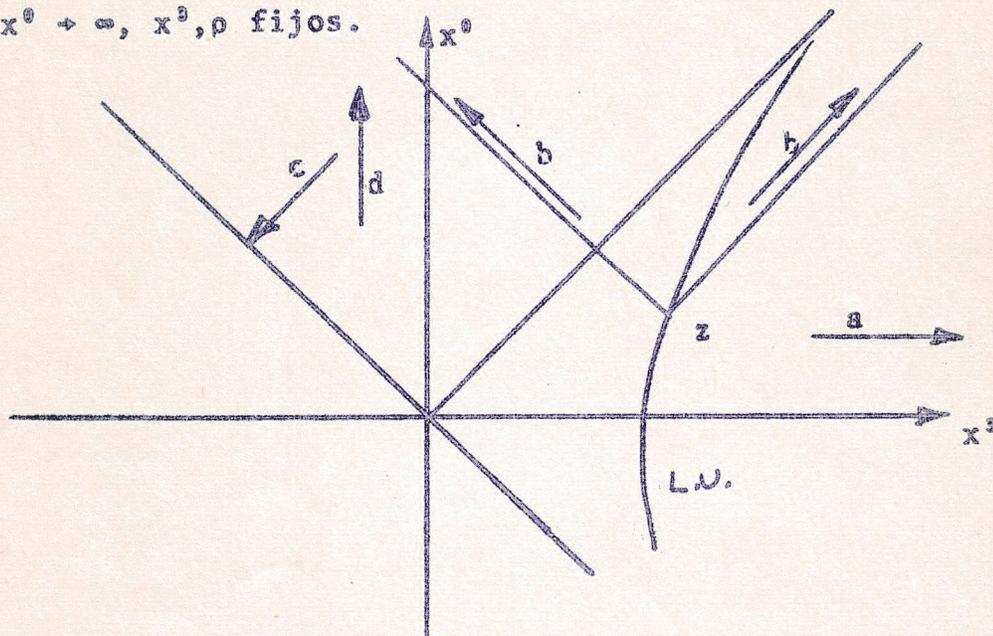


FIG.(C.1)

Regiones exploradas con el invariante I.

- a) Es claro de la Fig.(C.1) que $x^3 \rightarrow \infty, x^0$ obliga a que z^μ retroceda según $z^3 \rightarrow \infty, z^0 \rightarrow -\infty$. Más exactamente, $z^0 \sim -\frac{1}{2}x^3, z^3 \sim \frac{1}{2}x^3$.

Luego (C.3) queda

$$IR^2 d\Omega \sim \frac{e^2}{4\pi} d\Omega \frac{a^2 - x^0 x^3 - (x^0)^2}{[x^0 x^3 + (x^0)^2]^2} \rightarrow 0$$

b) Se ve que el límite $x^3, x^0, \rho \rightarrow \infty, z^0$ fijo (a lo largo de una generatriz del cono de luz) corresponde a fijar θ, z^0 y z^3 en (C.5). Luego en este "límite"

$$IR^2 d\Omega \rightarrow \frac{e^2}{4\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{[z^3 - z^0 \cos \theta]^2} d\Omega$$

Esto da un máximo para $\cos \theta = \frac{z^0}{z^3}$ y es nulo para $\theta = 0, \pi$.

c) Reemplazando nuevamente (C.4) en (C.5),

$$\begin{aligned} IR^2 d\Omega &= \frac{e^2}{4\pi} d\Omega \frac{\rho^2}{(x^0 - z^0)^2 \left[z^3 - z^0 \frac{x^3 - z^0}{x^0 - z^0} \right]^2} \\ &= \frac{e^2}{4\pi} d\Omega \frac{\rho^2}{[x^0 z^3 - x^3 z^0]^2} \end{aligned}$$

como el límite $x^0 \rightarrow -x^3$ implica $z^0 \rightarrow -z^3$, concluimos que

$IR^2 d\Omega \rightarrow \infty$ en este límite.

d) Simétricamente a lo que ocurre en a, tenemos $z^0 \sim \frac{1}{2} x^0$, $z^3 \sim \frac{1}{2} x^0$ cuando $x^0 \rightarrow \infty$. Igualmente en este caso de (C.3) se tiene

$$IR^2 d\Omega \rightarrow 0$$

AGRADECIMIENTOS

Ha sido para mí una gratísima experiencia trabajar bajo la tutela del Profesor Carlos A. López. Me siento profundamente agradecido hacia él no sólo por haberme iniciado en los secretos de este oficio, sino además por mostrar en todo momento una ejemplar actitud de honestidad científica y una generosidad insospechada.

El que este trabajo exista se debe en gran parte a que mis padres jamás dejaron de alentarme, ni aún en los momentos de mayor angustia que les tocó vivir.

Te agradezco también a tí Silvana por la cuota de silenciosa paciencia que aportaste a este trabajo.

La persona clave en la elaboración final de este trabajo ha sido sin duda la Sra. Sonia Encalada, quien con infinita dedicación emprendió la difícil tarea de hacer del manuscrito algo legible.

Agradezco, por último, a todos mis compañeros y amigos de la Facultad de Ciencias, junto a quienes he tenido el placer de vivir estos últimos cinco años.

REFERENCIAS.

- (1).-C.Teitelboim, "Sobre la validez de la relación $P^{\mu}=m_0v^{\mu}$ para una partícula cargada acelerada". Tesis de Licenciatura, Fac.de Ciencias, Univ.de Chile(1969).
- C.Teitelboim, Phys.Rev.D 1, 1572(1970); 2(1763(E)(1970).
- (2).-P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc.(London) A167, 148(1938).
- (3).-M.Hernández, "Significado de la condición asintótica en la ecuación de Lorentz-Dirac". Tesis de Licenciatura, Fac.de Ciencias (por aparecer).
- (4).-N.Schiller, "Autointeracción y momento angular ligado de una carga puntual acelerada". Tesis de Licenciatura, Fac.de Ciencias. U.de Chile(1977).
- (5).-C.A.López y D.Villarroel, Phys.Rev.D 11, 2724(1975).
- (6).-J.L.Synge, "Relativity: The Special Theory", North-Holland Pub.Co., Amsterdam (1965).
- (7).- T.Fulton F.Rohrlich, Ann. of Phys. 9, 499(1960).
- (8).-L.Gomberoff, J.Krause y C.A.López, Am..J.Phys. 37, 1040(1969).
- (9).-T.Fulton, F.Rohrlich y L.Witten, Il Nuovo Cimento, v.XXVI, 652(1962).
- (10).-B.S.De-Witt y R.Brehme, Ann. of Phys. 9, 220(1960).
- (11).- S.A.Fulling, Phys.Rev.D 7, 2850(1973).
- (12).-P.C.W.Davies, J.Phys.A, 8, 609(1975).
- (13).-P.C.W.Davies, Nature, vol.263, 377(Sept.30, 1976).
