



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**DINÁMICA NO LINEAL DE MAGNETIZACIÓN DE UN NANO-ALAMBRE
MAGNETIZADO TRANSVERSALMENTE**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

JAVIERA ESTRELLA GAMONAL PÉREZ

PROFESOR GUÍA:

Rodrigo Enrique Arias Federici

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

Álvaro Núñez Vásquez

Sebastián Allende Prieto

Este trabajo ha sido financiado por:

FONDECYT 1200829

SANTIAGO DE CHILE

2022

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS,
MENCIÓN FÍSICA
POR: **JAVIERA ESTRELLA GAMONAL PÉREZ**
FECHA: 2022
PROF. GUÍA: RODRIGO ENRIQUE ARIAS FEDERICI

DINÁMICA NO LINEAL DE MAGNETIZACIÓN DE UN NANO-ALAMBRE MAGNETIZADO TRANSVERSALMENTE

Los nano-osciladores de efecto Hall de spin (SNHO) son ampliamente estudiados debido a su gran aplicabilidad en la spintrónica, por ejemplo, en las memorias MRAM. Su dinámica puede ser estudiada mediante la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert Slonczewski (LLGS), la cual es altamente no lineal. En la presente tesis se desarrollan cálculos para encontrar auto-oscilaciones en un dispositivo SHNO con geometría de alambre unidimensional, el cual se encuentra bajo el efecto de un campo magnético constante transversal y una corriente directa longitudinal. Se calcula el corrimiento en frecuencia debido a las contribuciones no lineales para un modelo macro-spin (MS), donde la magnetización del material es homogénea y para el modo cuasi-uniforme (QUM) de oscilación, donde la magnetización depende de la posición. Existen diversos estudios donde se ha demostrado experimental y teóricamente que es posible la sincronización de SHNOs mediante diversos mecanismos. Se desarrollan cálculos para determinar si es posible sincronizar dichos dispositivos a través de una interacción de tipo dipolar. El estudio se realiza mediante la ecuación de dinámica para la diferencia de fase entre los osciladores. Se encuentra que es posible sincronizarlos y que existen soluciones en fase y contra-fase. También se encuentra que la distancia máxima para lograr sincronización disminuye a medida que la diferencia entre las frecuencias naturales de los osciladores aumenta. Este resultado se puede extender a la sincronización de más nano-alambres que permitan potenciar las señales generadas y reducir el ancho de banda en los dispositivos spintrónicos.

Tabla de Contenido

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Contexto | 1 |
| 1.2. Antecedentes | 2 |
| 1.3. Objetivos | 3 |
| 1.4. Metodología | 4 |
| 1.5. Organización de la tesis | 5 |
| 2. Del origen del magnetismo a la ecuación de LLGS | 7 |
| 2.1. Magnetismo | 7 |
| 2.1.1. Momentos magnéticos | 7 |
| 2.1.2. Tipos de materiales magnéticos | 8 |
| 2.2. Efecto Spin-Órbita | 9 |
| 2.3. Efecto Hall de Spin | 10 |
| 2.4. Torque de Transferencia de Spin | 11 |
| 2.5. Micromagnetismo | 11 |
| 2.5.1. Energía de Zeeman | 12 |
| 2.5.2. Energía de intercambio | 13 |
| 2.5.3. Energía de anisotropía magnetocristalina | 14 |
| 2.5.4. Energía demagnetizante | 15 |
| 2.6. Ecuación de Landau Lifshitz Gilbert Slonczewski | 15 |
| 2.6.1. Torque de transferencia de Spin | 17 |
| 2.6.2. Disipación | 17 |
| 3. Modos normales de oscilación | 19 |
| 3.1. Soluciones a orden lineal | 20 |
| 3.2. Correcciones no lineales | 22 |
| 4. Auto-oscilaciones | 25 |
| 4.1. Modelo para la corriente | 25 |
| 4.2. Desarrollo de la ecuación de dinámica | 26 |
| 4.3. Soluciones a orden lineal | 29 |
| 4.4. Modelo universal de auto-osciladores | 30 |
| 4.4.1. Dinámica del auto-oscilador autónomo | 31 |
| 4.4.1.1. Regimen estacionario de generación | 31 |
| 4.5. Aplicación del modelo universal | 33 |
| 4.5.1. Desarrollo lineal | 34 |
| 4.5.1.1. Corriente crítica | 35 |
| 4.5.2. Desarrollo no lineal | 35 |

| | |
|--|-----------|
| 4.5.2.1. Solución con amplitud no nula | 38 |
| 5. Resultados numéricos | 39 |
| 5.1. Modelo Macro-spin | 39 |
| 5.1.1. Modo normal de oscilación | 40 |
| 5.1.2. Coeficiente de corrimiento no lineal de la frecuencia | 40 |
| 5.1.3. Auto-oscilador y corriente crítica | 41 |
| 5.1.4. Tasas de disipación y solución para la amplitud | 42 |
| 5.1.5. Aproximación al plano infinito en modelo macro-spin | 44 |
| 5.1.6. Variación del ancho del nano-alambre | 44 |
| 5.2. Modo Cuasi-Uniforme | 46 |
| 6. Sincronización de dos auto-osciladores | 50 |
| 6.1. Dinámica de la fase del auto-oscilador perturbado | 50 |
| 6.1.1. Fase de un auto-oscilador | 50 |
| 6.1.2. Dinámica de fase para el auto-oscilador perturbado | 51 |
| 6.2. Sincronización en osciladores de spin | 53 |
| 7. Sincronización de SHNO en geometría nano-alambre | 55 |
| 7.1. Campo de interacción dipolar | 56 |
| 7.2. Ecuación para la fase de un auto-oscilador | 58 |
| 7.3. Auto-osciladores con interacción dipolar a orden no lineal | 59 |
| 7.4. Ecuación para la fase perturbada | 61 |
| 7.5. Aplicación al modelo Macro-spin | 62 |
| 7.6. Resultados numéricos del modelo Macro-spin | 63 |
| 7.7. Sincronización en función de la distancia entre los osciladores | 65 |
| 8. Conclusiones | 67 |
| 9. Bibliografía | 69 |
| Anexos | 73 |
| Anexo A. Energía Libre | 73 |
| A.1. Energía de Zeeman | 73 |
| A.2. Energía de intercambio | 73 |
| A.3. Energía de anisotropía cristalina | 74 |
| A.4. Energía demagnetizante | 74 |
| Anexo B. Integrales | 78 |
| B.1. Orden lineal | 78 |
| B.2. Orden no lineal | 78 |
| B.2.1. Definiciones | 78 |
| B.2.2. Desarrollo de las integrales | 79 |

Índice de Tablas

| | | |
|------|---|----|
| 5.1. | Constantes utilizadas en los resultados numéricos | 39 |
| 7.1. | Caracterización de los diferentes osciladores a sincronizar | 64 |
| 7.2. | Soluciones estacionarias a la ecuación dinámica para la diferencia de fase para diferentes pares de osciladores | 65 |

Índice de Ilustraciones

| | | |
|------|--|----|
| 1.1. | Esquema del auto-oscilador con geometría de alambre, magnetizado transversalmente. La flecha negra esquematiza la magnetización del material en un punto de éste, la cual precesa en torno a una posición de equilibrio paralela al campo externo aplicado, representada por una flecha morada. La flecha en la interfaz de los materiales representa la polarización de la corriente de spin generada por el SHE. | 4 |
| 2.1. | Representación del efecto de cada componente de la ecuación de LLGS. La componente conservativa mantiene la magnetización en el ciclo límite, el STT lo saca del equilibrio hacia afuera, y la disipación lo acerca a la posición de equilibrio determinada por el campo externo. | 16 |
| 5.1. | Solución para la potencia generada por el modo MS en función de la corriente aplicada al nano-alambre para generar las auto oscilaciones. La corriente toma valores entre I_{th} y $1.5I_{th}$ | 43 |
| 5.2. | Soluciones para la potencia $ b_0 ^2$ del modo MS para distintos anchos del nano-alambre. En todos los casos existe solución auto sostenida. | 45 |
| 5.3. | Soluciones para la potencia $ b_0 ^2$ del modo MS para distintos anchos del nano-alambre. En ninguno de los casos existe solución auto sostenida. | 45 |
| 5.4. | Frecuencias de los primeros 15 modos normales de oscilación del nano-oscilador | 46 |
| 5.5. | a) Modo normal de borde (EM). b) modo normal cuasi-uniforme de oscilación (QUM) | 47 |
| 5.6. | Modo cuasi-uniforme del auto oscilador | 48 |
| 5.7. | Tasas de disipación positiva y negativa para el modo de oscilación cuasi-uniforme. El punto donde ambas curvas se intersectan corresponde a la solución para la potencia de la oscilación. | 49 |
| 7.1. | Esquemmatización del arreglo de 2 nano-alambres posicionados de forma paralela a una distancia s | 55 |
| 7.2. | factor demagnetizante generado por el nano-alambre 1, cuya posición es representada por la zona sombreada, en función de la posición normalizada. | 58 |
| 7.3. | Dinámica de la diferencia de fase. Los puntos rojos representan las primeras dos soluciones para las cuales la diferencia de fase entre los dos osciladores es constante en el tiempo. | 64 |
| 7.4. | Ecuación para: Izquierda: $\dot{\Psi}_{3,4}$ para tres valores diferentes para la distancia entre los dos osciladores; 10, 20, 45 veces el valor de c (la mitad del ancho). Derecha: $\dot{\Psi}_{1,5}$ para tres valores diferentes para la distancia entre los dos osciladores; 8, 10, 15 veces el valor de c | 66 |

Capítulo 1

Introducción

Los nano-osciladores de spin son un tópico ampliamente estudiados debido a sus diversas aplicaciones como detectores o generadores de señales , así como también en la spintrónica [1-6]. Comprender la física detrás de estos dispositivos requiere de un extenso marco teórico en magnetismo, el cuál será desarrollado en el segundo capítulo de la presente tesis. En este capítulo se introducirá el tema de los nano-osciladores de efecto Hall de spin SHNO desde una perspectiva histórica, con el descubrimiento del efecto Hall de spin (SHE), y la presentación de la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert Slonczewski (LLGS), la cual describe la dinámica de la magnetización de un material ferromagnético en un modelo de micromagnetismo. También se presentarán los antecedentes encontrados en estudios previos, los objetivos de la investigación, la metodología y la organización de la tesis.

1.1. Contexto

El efecto Hall de spin (SHE) ocurre cuando una corriente eléctrica circula por un material paramagnético con un fuerte acoplamiento spin-órbita, generando corrientes puras de spin transversales a la dirección de la corriente eléctrica. En 1974, Dyakonov y Perel [7] calculan una densidad de spin en la superficie de un material conductor por el cual circula una corriente eléctrica. Esta acumulación de spin ocurre en las superficies paralelas a la dirección de la corriente aplicada. Posteriormente, en 1999, Hirsh [8] describe lo que él llama efecto Hall de Spin, debido a que al hacer circular una corriente eléctrica por un material paramagnético con un fuerte acople spin-órbita, se genera un desbalance de spin transversal a la corriente, dando origen a un voltaje Hall de Spin. De forma inversa, al hacer circular una corriente de spin por este material, se generará un voltaje Hall eléctrico, en ausencia de corrientes de cargas externas y campos magnéticos externos. Este efecto ha sido observado experimentalmente en materiales conductores [9], e incluso en materiales semiconductores [10].

Al considerar un material ferromagnético cuasi bidimensional adyacente a un material que presenta SHE, se ha demostrado que la inyección de corrientes de spin desde el material con SHE hacia el material ferromagnético puede inducir un torque sobre su magnetización [11-12]. Este torque se suma generalmente a torques de otro origen que afectan directamente la dinámica de la magnetización del material ferromagnético: la derivada temporal de la magnetización es proporcional al torque neto. En los Osciladores de Efecto Hall de Spin (SHOs) la magnetización de un material ferromagnético oscila en régimen vía la compensación entre un torque inducido por el SHE y el torque disipativo usual que relaja la magnetización hacia su estado de equilibrio estacionario. Generar torques de transferencia de spin (STT)

con SHE resulta mucho más conveniente que hacerlo con corrientes eléctricas polarizadas en spin que pasen por el material ferromagnético como suelen hacerlo los nano-osciladores de torque de transferencia de spin (STNOs), debido a la temperatura que puede alcanzar el material ferromagnético [13].

Para tener auto-oscilaciones se debe tener un elemento activo, un elemento resonante y un elemento disipativo [14]. Los SHOs utilizan como elemento activo el SHE, descrito anteriormente, en la interfaz con un material ferromagnético, donde este último actúa como el elemento resonante. La acumulación de spin en la interfaz produce un SOT que actúa como una anti-disipación (elemento activo) en la dinámica de magnetización del material ferromagnético. Esto junto con la disipación de energía natural (elemento disipativo), modelada usualmente por la ecuación de LLGS, da pie a estados de auto-oscilación a una frecuencia dada, en que la resonancia ocurre en la compensación, en promedio, entre la disipación natural con la anti-disipación generada por el SHE [4,14]. Esta ecuación es altamente no lineal y se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -|\gamma|\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} + |\gamma|4\pi J\vec{M} \times (\vec{M} \times \hat{p}) + \alpha \frac{\vec{M}}{M_0} \times \frac{d\vec{M}}{dt}, \quad (1.1)$$

donde \vec{M} corresponde a la magnetización del material, M_0 es la magnetización de saturación, γ es el factor giromagnético, \vec{H}_{eff} es el campo magnético efectivo, J es la densidad de corriente, \hat{p} es la polarización de la corriente pura de spin inyectada en el material ferromagnético y α es la constante de Gilbert. Esta ecuación se estudia en detalle en la sección 6 del capítulo 2.

Existen diversas aplicaciones para los SHNO [1-6], entre ellas se encuentra el uso en STT-MRAM (Spin-transfer-torque magnetic random access memory) o SOT-MRAM (Spin-orbit-torque magnetic random access memory) las cuales guardan la información en la orientación de la magnetización de elementos ferromagnéticos de escalas nanométricas, y son capaces de guardar la información a lo largo del tiempo. El STT brinda un mecanismo de escritura de información, que a su vez puede ser leída midiendo la resistencia variable del dispositivo que depende de la orientación de la magnetización (efecto magnetoresistencia gigante GMR). Usar SHE como mecanismo generador de STT no requiere corrientes eléctricas en el material ferromagnético, lo cual da la ventaja de crear dispositivos con caminos diferentes de lectura y escritura. Otras aplicaciones de osciladores que usan STT consisten en la generación y detección de señales, así como también la computación neuromórfica.

Los SHNOs presentan una serie de ventajas por sobre los STNOs, la primera de ellas es la necesidad de contar con dos capas de materiales, a diferencia de las tres necesarias para los STNOs. Además resulta un desafío ver su magnetización sin modificarla [15]. Finalmente, en los SHOs se puede leer la dirección de su magnetización no sólo de forma eléctrica y magnética, sino también óptica, a diferencia de los STNO que no pueden leerse de forma óptica por tener la capa ferromagnética entre dos materiales paramagnéticos [16].

1.2. Antecedentes

Se ha demostrado experimentalmente que se pueden excitar modos auto oscilatorios coherentes en dispositivos de spin, mediante la inyección de corrientes puras de spin [4,16-18]. Los dispositivos pueden tener diversas geometrías, entre ellas geometrías de nano-discos, nano-alambres, nano-contactos, entre otras.

Los estados oscilatorios coherentes han presentado un alto comportamiento no lineal, dicho

fenómeno produce que los modos magnéticos dinámicos se vean incrementados o suprimidos [17].

El oscilador a estudiar corresponde a un nano-alambre con las dimensiones presentadas en uno de los auto osciladores utilizados en el trabajo de Duan *et al.* [19-20]. El oscilador está compuesto por una capa de Platino (Pt) y una de Permalloy (Py). El largo de la capa de Py corresponde a aproximadamente $60\mu m$ extendido en el eje \hat{z} , con un grosor de $2b = 25nm$ en el eje \hat{y} y un ancho de $2c = 1.18\mu m$ en el eje \hat{x} . La capa de Pt tiene las mismas dimensiones, excepto por el grosor que es de $2nm$. El nano-alambre es magnetizado transversalmente por un campo magnético constante $\vec{H} = H_0\hat{x}$, como se puede ver en la figura (1.1). Se hace circular una corriente eléctrica en el eje \hat{z} por el material paramagnético (Pt), en el cual ocurre el SHE que genera un SOT en el material ferromagnético (Py) adyacente.

En estudios previos de esta geometría se demostró [18-19] experimental y teóricamente que es posible excitar auto-oscilaciones en la geometría descrita. incluso paraméricamente [20]. Lo interesante y novedoso fue que se obtienen auto-oscilaciones de algunos modos en una muestra en que una de las dimensiones no está en el rango nanométrico, i.e. la dimensión longitudinal de los nano-alambres.

Los modos normales de oscilación de la magnetización se obtienen al resolver a orden lineal la ecuación de Landau Lifshitz en esta geometría. Allí se consideraron las contribuciones de la energía de Zeeman por el campo magnético externo, la energía dipolar o de demagnetización y la energía de intercambio. En esta escala los efectos de las interacciones de intercambio y dipolar deben ser considerados simultáneamente dado que sus contribuciones energéticas son similares para ondas de spin. En dicho estudio se usaron tanto condiciones de borde libre como condiciones de borde fijas, y se concluye que la condición de borde libre es suficientemente buena para la geometría establecida en un caso ideal (los modos de "volumen" son menos sensibles a las condiciones de borde) [19].

Existen algunos experimentos interesantes relacionados a la geometría estudiada. Uno se refiere al logro de auto-oscilaciones en estas estructuras cuasi-1D en el caso de que el material ferromagnético es aislante, i.e. en estructuras YIG/Pt (tiene la ventaja extra que YIG es un material con muy baja disipación intrínseca) [21]. El otro estudio se refiere a haber mostrado un cambio de comportamiento entre estructuras cuasi-1D a cuasi-2D al ensanchar los nanohilos: se ve que el comportamiento auto-oscilatorio desaparece al ir a una estructura cuasi-2D, y la interpretación es que se abren múltiples canales de decaimiento de las oscilaciones al ir a 2D [22].

1.3. Objetivos

El objetivo general de la tesis consiste en estudiar la dinámica de magnetización de un dispositivo de spin con geometría de nano-alambre descrita anteriormente. El nano-alambre es magnetizado por un campo externo constante transversal al alambre, y además perpendicular a la interfaz de ambos materiales. Además se hace pasar una corriente por el material paramagnético para generar un SHE, el cual provocará un SOT en el material ferromagnético, generando así las condiciones para la aparición de estados oscilatorios auto sostenidos.

Para llevar a cabo el objetivo general se realizarán estudios teóricos y numéricos de la dinámica. Los objetivos específicos en el estudio de dicha dinámica se pueden enumerar de la siguiente forma:

1. Encontrar las correcciones no lineales a la frecuencia de oscilación en un modelo macro-

spín y en el modo cuasi-uniforme de oscilación, donde la magnetización del material depende de la posición transversal.

2. Encontrar las correcciones no lineales a las auto-oscilaciones, es decir, la corriente crítica para excitar un modo de oscilación, así como también, la potencia asociada a las soluciones, tanto en el modelo macro-spín como en el modo cuasi-uniforme.
3. Desarrollar los cálculos para la sincronización de dos nano-alambres vía interacción dipolar.
4. Encontrar un límite para la existencia de soluciones sincronizadas al variar la distancia entre los osciladores, considerando un modelo macro-spín.

1.4. Metodología

La presente tesis se dedica a estudiar las auto-oscilaciones generadas en un SHNO con geometría de nano-alambre, como se muestra en la figura (1.1). Para generar auto-oscilaciones vía SHE, se hace pasar una corriente en la capa paramagnética paralela al eje \hat{z} , esto produce una acumulación de spin con orientación en $-\hat{x}$ en la interfaz de ambos materiales provocada por el SHE. En la figura se puede apreciar que la magnetización del material ferromagnético precesa en torno a la posición de equilibrio definida por el campo externo. La precesión sostenida sucede debido a la compensación exacta entre el SOT generado por la acumulación de spin en la interfaz y la disipación magnética propia del material.

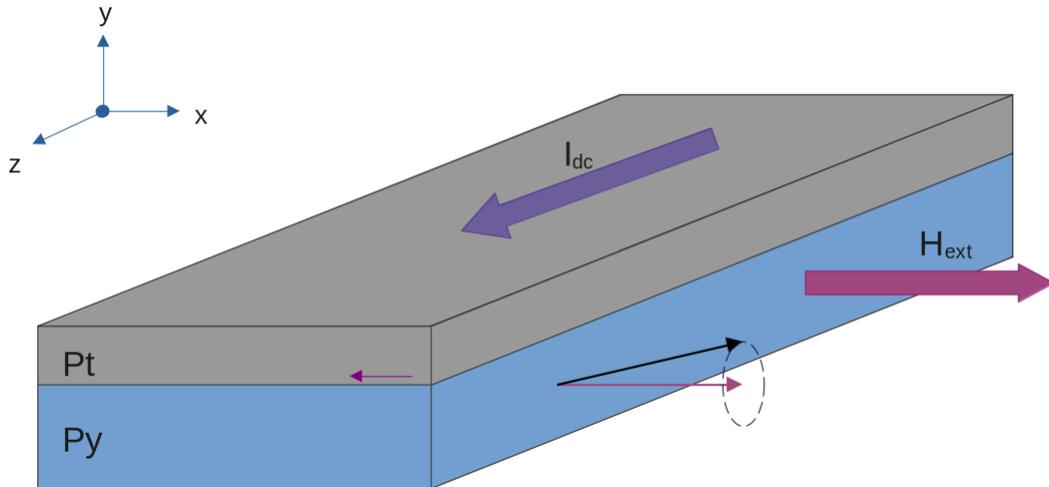


Figura 1.1: Esquema del auto-oscilador con geometría de alambre, magnetizado transversalmente. La flecha negra esquematiza la magnetización del material en un punto de éste, la cual precesa en torno a una posición de equilibrio paralela al campo externo aplicado, representada por una flecha morada. La flecha en la interfaz de los materiales representa la polarización de la corriente de spin generada por el SHE.

Para cumplir los objetos mencionados anteriormente se trabajará bajo la teoría del micro-magnetismo, por lo tanto se describirá la magnetización del material ferromagnético mediante la ecuación de Landau Lifshitz Gilbert Slonczewski

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -|\gamma|\vec{M} \times \vec{H}_{eff} + |\gamma|4\pi J\vec{M} \times (\vec{M} \times \hat{p}) + \alpha \frac{\vec{M}}{M_0} \times \frac{d\vec{M}}{dt}. \quad (1.2)$$

Esta ecuación se trabajará con el cambio de variables de Holstein-Primakoff, a y a^* , definidas vía

$$m_x = 1 - aa^* \quad (1.3)$$

$$m_y = -\frac{i}{2}(a - a^*)\sqrt{2 - aa^*} \quad (1.4)$$

$$m_z = \frac{1}{2}(a + a^*)\sqrt{2 - aa^*}, \quad (1.5)$$

de forma inversa,

$$a = \frac{m_z + im_y}{\sqrt{1 + m_x}} \quad a^* = \frac{m_z - im_y}{\sqrt{1 + m_x}}. \quad (1.6)$$

En un inicio se calculan los modos normales de oscilación del nano-alambre para comparar los resultados obtenidos con los publicados por Duan *et al.* en 2015 [19]. A ese modelo se le añaden las correcciones no lineales para el corrimiento de frecuencia como se postula en el modelo universal de auto-osciladores no lineales de Slavin & Tiberkevich, publicado en 2009 [14].

Posterior a ello se calculan las tasas de disipación positiva y negativa presentadas en el modelo universal, con las cuales se obtiene la corriente crítica necesaria para generar auto-oscilaciones en el SHNO, así también la amplitud de la oscilación. Con ello queda determinada por completo la solución para la variable compleja asociada al modo excitado, la cual tiene la siguiente forma:

$$b_0(t) = \sqrt{p_0}e^{-i\omega_0 t + i\phi_0}, \quad (1.7)$$

donde p_0 es la potencia de la amplitud, ω_0 es la frecuencia y ϕ_0 es una fase arbitraria.

Finalmente, la sincronización se lleva a cabo considerando interacciones dipolares entre los nano-alambres. El estudio de la dinámica de oscilación se realiza con la ecuación para la diferencia de fase entre los osciladores. Se estudia como cambian las soluciones y su existencia al variar la distancia que separa a los osciladores.

Todos los cálculos numéricos se desarrollan con Python3. Las unidades a usar en la presente tesis corresponden al sistema CGS.

1.5. Organización de la tesis

La presente tesis se organiza de la siguiente forma: El capítulo 2 contiene el marco teórico de la investigación, el cual abarca los fundamentos del magnetismo, el efecto spin-órbita, el SHE, la teoría de micromagnetismo y las energías libres de los sistemas magnéticos, para finalizar con la ecuación de LLGS y el modelo planteado por Slavin & Tiberkevich [14] para auto osciladores universales. En el capítulo 3 se muestran las soluciones a la ecuación de LL, con ello el desarrollo de modos normales del nano-alambre tanto a orden lineal (análogo al desarrollo de Duan *et al.* [19]) como a orden no lineal (orden mayor o igual a 2 en la variable

de Holstein-Primakoff), considerando el modelo de Slavin & Tiberkevich [14]. En el capítulo 4 se trata el problema de las auto-oscilaciones, con ello el cálculo de la corriente crítica y la búsqueda de soluciones de auto-oscilaciones. En el capítulo 5 se trabaja con el modelo macro-spin y se presentan los resultados numéricos asociados a los capítulos anteriores para el modo cuasi-uniforme. En el capítulo 6 se desarrolla un marco teórico de la sincronización, para luego desarrollar las ecuaciones correspondientes al dispositivo con geometría de nano-alambre en el capítulo 7. Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de la investigación.

Capítulo 2

Del origen del magnetismo a la ecuación de LLGS

En este capítulo se desarrolla el marco teórico necesario para comprender, desde los conceptos más generales, la ecuación de LLGS, la cual es necesaria para encontrar auto-oscilaciones en el dispositivo a estudiar.

2.1. Magnetismo

2.1.1. Momentos magnéticos

El objeto fundamental del magnetismo corresponde al momento magnético. Clásicamente se puede pensar como un pequeño bucle de área $|dS|$ por el cual circula una corriente I , de modo que el momento magnético μ viene dado por

$$d\vec{\mu} = Id\vec{S}. \quad (2.1)$$

El momento magnético tiene unidades $[Am^2]$, y apunta en la dirección normal al bucle, determinado por el sentido en que circula la corriente. También se puede pensar como un dipolo magnético, dado que es equivalente al dipolo eléctrico, en este caso con dos monopolos magnéticos de carga magnética opuesta separados por una distancia pequeña.

Para bucles de área finita se pueden sumar los momentos magnéticos en el área, de modo que la corriente de los bucles elementales internos se cancela y sobrevive la corriente del borde del bucle finito, del siguiente modo:

$$\vec{\mu} = I \int d\vec{S} \quad (2.2)$$

Con el momento magnético podemos definir la magnetización \vec{M} como la suma de los momentos magnéticos por unidad de volumen. Al ser \vec{M} un límite continuo, se puede considerar como un campo vectorial suave, continuo en todas partes excepto en los bordes del volumen del medio magnético.

El momento magnético se relaciona directamente con el momento angular orbital de la partícula con carga que genera la corriente en el bucle. La constante de proporcionalidad que relaciona ambas cantidades se conoce como factor giromagnético, denotado por la letra γ .

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L} \quad (2.3)$$

Para átomos reales, el momento angular orbital depende del estado cuántico del electrón. Para definir el estado cuántico se utilizan los números cuánticos usuales; el número cuántico principal n , el número cuántico azimutal l , el número cuántico magnético m_l y el número cuántico del spin s . El momento angular orbital a lo largo de un eje fijo, que suele ser el eje \hat{z} , es $m_l \hbar$, donde \hbar es la constante de Planck reducida, y su magnitud corresponde a $\sqrt{l(l+1)}\hbar$. Por lo tanto, siguiendo la ecuación (2.3) la componente en dicho eje del momento magnético es $-m_l \mu_B$ donde μ_B es el magnetón de Bohr ($\mu_B \equiv e\hbar/2m_e$, donde e es la carga del electrón, y m_e es la masa del electrón, de modo que el factor giromagnético para un electrón es $\gamma = -e/2m_e$). El signo menos se debe a la carga negativa del electrón. Finalmente, la magnitud del momento magnético es $\sqrt{l(l+1)}\mu_B$.

Sin embargo el electrón también posee un momento angular intrínseco conocido como spin, caracterizado por el número cuántico s , el cual tiene un valor de $1/2$ para el electrón. El momento angular asociado al spin puede tomar $2s + 1$ posibles valores entre $s\hbar$ y $-s\hbar$ equidistantes una cantidad \hbar . La componente en el eje \hat{z} se escribe $m_s \hbar$. Para un electrón los posibles valores corresponden a $\pm\hbar/2$, ambas posibilidades se denominan como “up” y “down”. La magnitud del momento angular de spin es $\sqrt{s(s+1)}\hbar$, en el caso del electrón el valor es de $\sqrt{3}\hbar/2$. El momento magnético asociado al spin tiene una componente a lo largo del mismo eje igual a $-g\mu_B m_s$ y una magnitud igual a $\sqrt{s(s+1)}g\mu_B$, donde g es conocido como factor g y tiene un valor aproximado de 2 para el electrón.

La energía de un momento magnético expuesto a un campo magnético externo \vec{B} está dada por:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (2.4)$$

por lo tanto la energía se minimiza cuando los momentos magnéticos del material se encuentran alineados con el campo magnético externo.

2.1.2. Tipos de materiales magnéticos

Paramagnetismo y Diamagnetismo

Un material se puede clasificar en función de la respuesta de sus momentos magnéticos cuando se le aplica un campo magnético externo. Si la respuesta de este efecto es lineal, entonces se dice que estamos frente a un *material lineal*, los cuales cumplen con la siguiente relación:

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (2.5)$$

donde \vec{H} es el campo magnético que incluye la magnetización del material y χ se conoce como susceptibilidad magnética. Si χ es negativo llamamos al material *diamagnético*. Este tipo de materiales alinean sus momentos magnéticos de forma antiparalela a la dirección en que es aplicado el campo. Por otro lado si χ es positivo entonces estamos frente a un material cuyos momentos magnéticos se alinean de forma paralela con el campo externo. A estos materiales se les denomina *paramagnéticos*.

Ferromagnetismo

Los materiales paramagnéticos o diamagnéticos interactúan únicamente con el campo magnético externo. Sin embargo se podría considerar una interacción entre los momentos magnéticos propios del material. Esta interacción se denomina interacción de intercambio, y es propia de una nueva clasificación; los materiales *ferromagnéticos*. La interacción de intercambio busca alinear los spin vecinos de los átomos del material, generando magnetización espontánea del material, sin la necesidad de un campo magnético externo aplicado.

La energía asociada a esta interacción corresponde a:

$$E = -2 \sum_{i \neq j} J_{ij} \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j, \quad (2.6)$$

donde $\vec{\mu}_i$ es el momento magnético en la posición i -ésima del material, por lo que el término $\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j$ representa la interacción entre momentos magnéticos vecinos, J_{ij} corresponden a integrales de intercambio. Si el coeficiente J_{ij} es positivo nos encontramos frente a un material *ferromagnético*, por lo tanto los spin vecinos se alinean de forma paralela.

El orden de los momentos magnéticos a baja temperatura es auto-sostenido incluso sin un campo magnético externo aplicado, sin embargo, al aumentar la temperatura, las fluctuaciones térmicas comienzan a destruir progresivamente la magnetización hasta que se llega a una temperatura crítica donde el orden es destruido. Esta temperatura de transición es conocida como temperatura de Curie.

2.2. Efecto Spin-Órbita

Dado un sistema caracterizado por un momento angular y spin, se puede definir el momento angular total \mathbf{J} como la suma de los dos momentos angulares mencionados. El momento angular \mathbf{L} y el spin \mathbf{S} no son conservados de forma separada dentro de un sistema, pero sí lo es el momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

El momento angular y el spin no son independientes entre ellos, sino que se acoplan a través del efecto Spín-Órbita. Este efecto se puede considerar como una perturbación en la mayoría de los casos (para átomos con número atómico Z pequeño). El valor de expectación de la energía de interacción se puede calcular en relación a:

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \left(J(J+1) - L(L+1) - S(S+1) \right). \quad (2.7)$$

Los autoestados no perturbados se pueden etiquetar con los valores de S y L , sin embargo cuando la perturbación separa los autoestados al aplicarse un campo magnético externo, estos quedan etiquetados con los valores de J . A esta separación de los autoestados se le llama estructura fina del átomo.

Cuando el átomo en cuestión tiene un Z alto, no se puede tratar este efecto como una perturbación del hamiltoniano, dado que la interacción es proporcional a Z^4 para átomos tipo Hidrógeno, y Z^2 para átomos neutros. En dicho caso la interacción se conoce como acople j-j, donde la interacción Spín-Órbita es la energía dominante, y se debe acoplar cada electrón por separado.

El origen de este acoplamiento viene dado por la corriente, y con ella el campo magnético que genera el electrón al encontrarse orbitando al núcleo atómico. Este campo magnético interactúa con el spin del electrón, la energía asociada corresponde a:

$$H_{SO} = -\frac{1}{2}\vec{m} \cdot \vec{B} = \frac{e\hbar^2}{2m_e c^2 r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L}, \quad (2.8)$$

donde $V(r)$ corresponde a la energía potencial del electrón respecto al núcleo. m_e y e son la masa y carga del electrón respectivamente, c es la velocidad de la luz y r es la distancia entre núcleo y electrón. Para la segunda igualdad se tiene $\vec{m} = (ge\hbar/2m)\vec{S}$ y $\hbar\vec{L} = m_e\vec{r} \times \vec{v}$. Para un campo de Coulomb en un átomo tipo Hidrógeno:

$$\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} = \frac{Z^4 e^2 \hbar^2 \langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle}{4\pi\epsilon_0 a_0^3 n^3 l(l+1/2)(l+1)}, \quad (2.9)$$

donde Z es el número atómico, ϵ_0 es la permitividad del vacío, a_0 es el radio de Bohr, n, l son los números cuánticos que identifican al electrón.

2.3. Efecto Hall de Spin

El efecto Hall de Spin (SHE) es un fenómeno que ocurre en materiales paramagnéticos con alto acople spín-órbita y consiste en la generación de corrientes puras de spin transversales al campo eléctrico aplicado incluso en la ausencia de campos magnéticos. Una corriente pura de spin se puede pensar como una combinación de dos corrientes de electrones, una con spin *up* en un sentido y una con spin *down* en el sentido opuesto [10].

En 1971, D'yakonov y Perel [7] predicen una acumulación de spin en la superficie de un material por el cual circula una corriente.

Posteriormente en 1999, Hirsh [8] considera materiales metálicos paramagnéticos por los cuales circula una corriente, y dado el mismo mecanismo de *scattering* presente en el efecto Hall anómalo en el caso magnético, se producirán corrientes puras de spin en la dirección perpendicular a la dirección de la corriente, con spin *up* en un sentido y spin *down* en el opuesto. Del mismo modo se puede producir el efecto contrario, al hacer pasar una corriente pura de spin por el material, se producirán corrientes eléctricas en la dirección perpendicular a la primera. Se bautiza este fenómeno como efecto Hall de Spin por la similitud con el efecto Hall. En dicha publicación se propone un modelo experimental para medir el voltaje generado por el SHE, y se calcula analíticamente el valor esperado.

En 2004, Kato *et al.* [10], realizan la primera observación de SHE en semiconductores usando microscopía de rotación de Kerr. Posteriormente Kimura *et al.* en 2007 [23], detectan eléctricamente tanto la acumulación de spin por el SHE y la acumulación de cargas por el SHE inverso en un alambre de platino. Obtienen que a temperatura ambiente la conductividad de Hall de spin resulta ser 10^4 veces más fuerte que en los sistemas semiconductores reportados hasta ese momento. En 2008, Koong Chee Weng *et al.* [24] realizan un experimento comparable al propuesto por Hirsh en Pt, confirmando la presencia del SHE en dicho material incluso a temperatura ambiente. En el mismo año, G. Y. Guo *et al.* [25] demuestran que el gran SHE encontrado en el Platino resulta ser puramente gracias al fuerte acople spin-órbita presente en este material, y no depende del *scattering* de impurezas, por lo tanto el efecto es intrínseco.

La dirección de la corriente de spin orientados según \hat{s} , \vec{I}_s está dada por $\vec{I}_s = -\hat{s} \times \vec{I}_c$, donde \vec{I}_c es la corriente eléctrica [23]. En la geometría de nano-alambre a estudiar, la corriente aplicada sobre el material paramagnético es $\vec{I}_c = I_c \hat{z}$, esto genera que la acumulación de spin en la interfaz esté dada por spin que apuntan en la dirección $-\hat{x}$, como muestra la figura

(1.1).

2.4. Torque de Transferencia de Spin

Cuando una corriente de spin entra en un material ferromagnético, ocurre una transferencia de momento angular entre el spin de los electrones de conducción y la magnetización del cuerpo ferromagnético para cumplir la conservación de momento angular. Esto se conoce como efecto de transferencia de spin.

El concepto de torque de transferencia de spin es desarrollado de forma simultánea e independiente por Berger [26] y Slonczewski [27] en 1996. El torque se propone como un mecanismo para generar precesión en la magnetización de un material ferromagnético.

La primera demostración experimental de excitación de ondas de spin generadas con un STT ocurre en 1998 [28]. Un año más tarde, Myers *et al.* [29] demuestra experimentalmente que el proceso puede ser reversible, como había sido predicho por Slonczewski, abriendo las puertas a aplicaciones como las memorias magnéticas de acceso aleatorio (MRAM).

Para el caso de multicapas y osciladores de torque de spin, el STT se puede explicar de la siguiente manera: Se considera una estructura de tres capas compuesta por materiales ferromagnético (F1) / no magnético (NM) / ferromagnético (F2), donde F1 es muy delgado en comparación a F2, este material juega el papel de capa libre (será el material ferromagnético al que se le quiere generar la precesión en su magnetización) y F2 más grueso en comparación a F1, llamado capa fija. Asumiremos que la magnetización inicial de F1, \vec{M}_1 , apunta en una dirección distinta a la de F2, \vec{M}_2 , por ende entre ambas magnetizaciones existe un ángulo. Cuando se aplica una diferencia de voltaje positivo, los electrones se inyectan desde F2 hacia F1, por lo tanto se inyectan electrones en F1 cuyos spin tienen un ángulo respecto a \vec{M}_1 , estos electrones se alinean con la dirección de \vec{M}_1 , produciendo un torque en \vec{M}_1 , es decir, la rotación en la magnetización \vec{M}_1 es inducida por un torque dada la inyección de una corriente de spin. Este proceso de transferencia actúa como un torque mecánico en la magnetización M1, donde la dirección del torque está dado por $\vec{M}_1 \times (\vec{M}_1 \times \vec{M}_2)$. Si la diferencia de voltaje aplicada es negativa, entonces los electrones fluyen de F1 a F2 y el proceso no resulta interesante debido a que el alto grosor de la capa F2 permite despreciar el torque ejercido sobre su magnetización. El cambio en la polarización permite que la dirección del torque se pueda revertir.

El STT es el torque ocupado en los STNO, sin embargo, en SHNO, se utilizan torques de spin-órbita (SOT). El SOT es un torque que puede ser generado por dos efectos asociados al acople spin-órbita, siendo estos el efecto Hall de Spin y el efecto interfacial Rashba-Edelstein. El torque se genera cuando existe una acumulación de spin en la interfaz entre un material con fuerte acople spin-órbita y un material ferromagnético. Se produce una transferencia de momentum angular entre la corriente de spin generada por el SHE y la magnetización del material ferromagnético, generando un torque en esta última. El SOT puede ser modelado matemáticamente con un torque de Slonczewski, al igual que el STT [30].

2.5. Micromagnetismo

El micromagnetismo es una teoría que surge con las publicaciones de Landau y Lifshitz (1935) [31] y W. F. Brown (1940) [32]. Corresponde a una teoría semiclásica aplicable a escalas nanométricas, donde los momentos magnéticos adyacentes son casi paralelos. En esta teoría se considera la magnetización de un material $\vec{M} = M_0 \hat{m}(\vec{r})$ con magnitud M_s constante, pero

cuya dirección varía continuamente con la posición.

El problema del micromagnetismo se reduce a encontrar la función que minimiza la energía del sistema [33]. Esta teoría resulta una buena aproximación para describir procesos a temperatura ambiente dada una fuerte interacción de intercambio, siempre y cuando la temperatura ambiente sea menor a la temperatura de Curie.

La evolución temporal del vector magnetización en la aproximación micromagnética se puede describir con la ecuación de torque:

$$\frac{d\hat{m}}{dt} = -\gamma\hat{m} \times \vec{H}_{\text{eff}} + \sum_i \vec{T}_{i,NC}, \quad (2.10)$$

donde $\gamma = g\mu_B/\hbar$ es el factor giromagnético y \vec{H}_{eff} corresponde al campo magnético efectivo aplicado a la muestra. El segundo término de la ecuación (2.10) corresponde a la suma sobre todos los torques no conservativos que no pueden ser derivados a partir de un potencial. La precesión de la magnetización será en torno a este campo efectivo, el cual está compuesto de cuatro contribuciones, el campo de zeeman, de intercambio, anisotropía y demagnetizante. A cada uno de estos campos se les puede asociar una energía por unidad de volumen, y en general, al campo efectivo se le puede asociar una energía total que representa la suma sobre todas las interacciones magnéticas presentes de modo que el campo se pueda escribir de la siguiente forma. en términos de una derivada funcional:

$$\vec{H}_{\text{eff}}(\vec{r}) = -\frac{\delta E(\vec{r})}{\delta \vec{M}(\vec{r})}. \quad (2.11)$$

Describiremos cada una de estas energías de forma general más adelante.

2.5.1. Energía de Zeeman

El término de Zeeman describe la interacción entre la magnetización de un material con un campo magnético externo aplicado, de modo que la energía por unidad de momento magnético ε_i será

$$\varepsilon_i = -\mu_i \cdot \vec{H}_{\text{ext}}, \quad (2.12)$$

donde \vec{H}_{ext} es el campo magnético.

Notemos que esta energía es la misma a la presentada en la ecuación (2.4). De aquí podemos deducir que la energía total de Zeeman corresponderá a la suma de las energías de cada momento magnético dentro de un volumen V , por lo tanto, en un elemento dV se tendrá una cantidad $d\varepsilon$:

$$d\varepsilon_Z = -\left(\frac{1}{dV} \sum_i \vec{\mu}_i\right) \cdot \vec{H}_{\text{ext}} dV. \quad (2.13)$$

Integrando en todo el volumen, y notando que el paréntesis es la definición de magnetización, se obtiene:

$$\mathbb{E}_Z = -\int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_{\text{ext}} dV. \quad (2.14)$$

2.5.2. Energía de intercambio

La energía de intercambio representa el acoplamiento entre momentos magnéticos locales vecinos, lo cual permite un orden magnético espontáneo. Esta interacción es de origen cuántico, y no posee analogía clásica. La expresión cuántica para la energía de intercambio para un spin se puede modelar por el hamiltoniano de Heisenberg:

$$\varepsilon_i = -2 \sum_{j \in \Omega_i} J_{i,j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -2 \sum_{j \in \Omega_i} J_{i,j} S^2 \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (2.15)$$

donde la suma de los $j \in \Omega_i$ corresponde a los vecinos cercanos del spin i , modelado por \vec{S}_i . El parámetro $J_{i,j}$ indica si la configuración que minimiza la energía es paralela para $J_{i,j} > 0$, es decir, un material ferromagnético. Si la constante cumple $J_{i,j} = J$ entonces se trata de un caso isotrópico, que será el caso que consideraremos en el estudio de esta tesis. Sumando sobre todos los spin, se obtiene la energía total de intercambio:

$$\varepsilon_{EX} = -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \Omega_i} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (2.16)$$

el factor $1/2$ aparece para corregir no sumar dos veces sobre cada spin. Para desarrollar una teoría clásica, se asumen los spin como vectores clásicos, por lo tanto el producto punto arrojará un $\cos(\phi_{ij})$ donde ϕ_{ij} corresponde al ángulo entre los dos vectores. Además podemos considerar que este ángulo es pequeño por la misma interacción entre los spin vecinos que busca alinearlos, de modo de expandir en Taylor:

$$\varepsilon_{EX} = -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \Omega_i} \cos(\phi_{ij}) \approx -JS^2 \sum_i \sum_{j \in \Omega_i} \left(1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2}\right), \quad (2.17)$$

el primer término corresponde a una constante por lo tanto puede ser ignorado en el cálculo, dado que refiere a la energía del estado completamente alineado. Para ángulos pequeños se puede aproximar $|\phi_{ij}| \approx |\vec{m}_i - \vec{m}_j|$. Considerando además que $\vec{m}_i = \vec{m}(\vec{r}_i)$, por lo tanto, en la posición j se puede escribir $\vec{m}_j = \vec{m}(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_j)$, donde $\delta\vec{r}_j$ es el vector que une $\vec{r}_j - \vec{r}_i$, si aplicamos una expansión en Taylor a primer orden en torno a \vec{r}_i se obtiene:

$$\vec{m}(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_j) \approx \vec{m}(\vec{r}_i) + \delta\vec{r}_{j,l} \frac{\partial \vec{m}}{\partial r_l}(\vec{r}_i), \quad (2.18)$$

donde $l = 1, 2, 3$ las tres coordenadas del plano cartesiano. Reemplazando esto en la expresión para la energía

$$\begin{aligned} \varepsilon_{EX} &= \frac{JS^2}{2} \sum_i \sum_{j \in \Omega_i} \left| \delta\vec{r}_{j,l} \frac{\partial \vec{m}}{\partial r_l}(\vec{r}_i) \right|^2, \\ \varepsilon_{EX} &= \frac{JS^2}{2} \sum_i \sum_{j \in \Omega_i} \sum_l \sum_n \sum_k \delta\vec{r}_{j,l} \frac{\partial \vec{m}_k}{\partial r_l}(\vec{r}_i) \delta\vec{r}_{j,n} \frac{\partial \vec{m}_k}{\partial r_n}(\vec{r}_i), \end{aligned} \quad (2.19)$$

nuevamente, l, n, k toman los valores de las tres coordenadas espaciales.

Para una red cúbica simple, cada átomo contiene seis vecinos cercanos (dos en cada eje), por lo tanto al sumar en los vecinos cercanos para cada uno de los ejes, por ejemplo, para el eje \hat{x} aparece un factor 2 y se usa $l = n = \hat{x}$. Además usando la constante de red $\delta r_{jl} = a$ se obtiene

$$\varepsilon_{EX} = JS^2 a^2 \sum_i^3 \sum_l^3 \sum_k^3 \frac{\partial m_k}{\partial r_l}(\vec{r}_i) \frac{\partial m_k}{\partial r_l}(\vec{r}_i) = JS^2 a^2 \sum_i (\vec{\nabla} \vec{m}(\vec{r}_i))^2. \quad (2.20)$$

Como deseamos una teoría continua, se convierten las sumas en integrales y se divide por el volumen de la celda:

$$\mathbb{E}_{EX} = \frac{JS^2 a^2}{a^3} \int (\vec{\nabla} \vec{m}(\vec{r}))^2 dV = A \int \left((\vec{\nabla} \vec{m}_x)^2 + (\vec{\nabla} \vec{m}_y)^2 + (\vec{\nabla} \vec{m}_z)^2 \right) dV, \quad (2.21)$$

donde A se denomina constante de intercambio, y tiene un valor $A = JS^2/a$ para una red cúbica simple. Esta constante se puede medir experimentalmente y se relaciona con la longitud de intercambio $l_{ex} = \sqrt{A/(2\pi M_s^2)}$, la cual corresponde a una estimación de la longitud donde la energía de intercambio es dominante, por lo tanto, dentro de ella, la magnetización se espera espacialmente uniforme. Para el caso del Permalloy, que es el que nos interesa, $A = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ erg/cm}$, donde si consideramos una magnetización de saturación $M_s = 790G$ se obtiene $l_{ex} \approx 5nm$, valor que comprueba que esta interacción es dominante en el corto alcance.

2.5.3. Energía de anisotropía magnetocristalina

La anisotropía magnetocristalina es causada por el efecto spin-órbita. Las órbitas de los electrones están relacionadas con la estructura cristalográfica, y esta interacción hace que los spin prefieran alinearse con los ejes bien definidos por la estructura del cristal. Por lo tanto existen direcciones en el espacio en las cuales es más fácil magnetizar un cristal que otras, y por lo tanto una magnetización en esa dirección minimizará la energía. Esta diferencia puede ser expresada como una energía dependiente de las direcciones, generalmente se escriben como expresiones fenomenológicas que son expansiones en series que consideran la simetría del cristal, y los coeficientes se encuentran de forma experimental [34].

Para el caso de anisotropía uniaxial para un momento magnético del material, la energía se puede describir

$$\varepsilon_A = -K_1 \cos^2(\theta) + K_2 \cos^4(\theta), \quad (2.22)$$

donde θ corresponde al ángulo entre la magnetización \vec{m} y el eje fácil \hat{n}_V . K_1 y K_2 son constantes de anisotropía que dependen de la temperatura. Podemos escribir el primer término de la expresión anterior para un volumen, obteniéndose:

$$\mathbb{E}_A^V = -K_V \int (\vec{m} \cdot \hat{n}_V)^2 dV, \quad (2.23)$$

esta expresión corresponde a una anisotropía de volumen, K_V es la constante de anisotropía de volumen. También se puede tener anisotropías de superficie, la cual a primer orden se puede escribir de forma análoga,

$$\mathbb{E}_A^S = -K_S \int (\vec{m} \cdot \hat{n}_S)^2 dS, \quad (2.24)$$

donde \hat{n}_S corresponde al vector normal a la superficie, y K_S es la constante de anisotropía de superficie. Esta expresión muestra que la anisotropía depende solamente de la forma de la

superficie.

Puede suceder que el eje fácil no sea el mismo para el volumen que para la superficie del material [34].

2.5.4. Energía demagnetizante

También conocida como interacción dipolo-dipolo, la interacción demagnetizante es una interacción de largo alcance que acopla a todos los momentos magnéticos del sistema, dicho de otra forma, cada momento magnético del material interactúa con el campo magnético creado por todos los otros momentos magnéticos del material, por lo tanto, la energía asociada se puede calcular a partir de la ecuación (2.4), donde el campo magnético externo será el campo dipolar efectivo $\vec{H}_D(\vec{r}_i)$. Luego, para un momento magnético se tiene:

$$\varepsilon_i = -\vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{H}_D(\vec{r}_i) = -\vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \cdot \sum_{j \neq i} \vec{H}^j(\vec{r}_i), \quad (2.25)$$

por lo tanto, en un volumen dV se tendrá una energía $d\varepsilon$

$$d\varepsilon_D = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{dV} \sum_i \vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \right) \cdot \sum_{j \neq i} \vec{H}^j(\vec{r}_i) dV, \quad (2.26)$$

donde el 1/2 aparece por la doble suma dado que $\vec{\mu}_i(\vec{r}_i) \cdot \vec{H}^j(\vec{r}_i) = \vec{\mu}_j(\vec{r}_j) \cdot \vec{H}^i(\vec{r}_j)$. Integrando y usando el campo \vec{H}_D se obtiene

$$\mathbb{E}_D = -\frac{1}{2} \int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_D(\vec{r}) dV. \quad (2.27)$$

El campo dipolar se deriva a partir de un potencial magnetostático, el cual considera contribuciones tanto de las cargas magnéticas de la superficie del cuerpo como las del volumen, es decir,

$$\vec{H}_D(\vec{r}) = -\nabla \Phi_m(\vec{r}), \quad (2.28)$$

donde

$$\Phi_m(\vec{r}) = \frac{M_s}{4\pi} \left(\int dV' \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int dS' \frac{\rho_S(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (2.29)$$

Las cargas magnéticas se definen en base a la magnetización,

$$\rho_V(\vec{r}) = -\nabla \cdot \hat{m}(\vec{r}); \quad \rho_S(\vec{r}) = \hat{m}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}), \quad (2.30)$$

donde $\hat{n}(\vec{r})$ es el vector normal a la superficie del sistema. La interacción dipolar es de largo alcance.

2.6. Ecuación de Landau Lifshitz Gilbert Slonczewski

La ecuación de LLGS determina cómo evoluciona la magnetización del material ferromagnético, y tiene la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -|\gamma|\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} + |\gamma|4\pi J\vec{M} \times (\vec{M} \times \hat{p}) + \alpha \frac{\vec{M}}{M_0} \times \frac{d\vec{M}}{dt}, \quad (2.31)$$

donde \vec{M} corresponde a la magnetización del material, M_0 es la magnetización de saturación, γ es el factor giromagnético, \vec{H}_{eff} es el campo magnético efectivo, J es proporcional a la densidad de corriente, \hat{p} es la polarización de la corriente pura de spin inyectada en el material ferromagnético y α es la constante de Gilbert. El primer término de esta ecuación corresponde al término conservativo, el segundo término corresponde al STT y el tercer término es la disipación de Gilbert. En la figura (2.1) se puede apreciar el efecto de cada uno de estos términos sobre el vector de la magnetización. La contribución de la parte conservativa apunta en la dirección normal al plano que contiene la magnetización del material y la posición de equilibrio determinada por el campo efectivo. El torque de transferencia de spin aleja a la magnetización del equilibrio mientras que la disipación o relajación magnética lo acerca. La compensación exacta de estas dos últimas resulta en ciclos límites de oscilación, por lo tanto en curvas cerradas de precesión en torno al equilibrio.

La ecuación se puede escribir de forma normalizada si se considera $\vec{M} = M_0\vec{m}$ y $\vec{H}_{\text{eff}} = 4\pi M_0\vec{h}_{\text{eff}}$, obteniéndose:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma|4\pi M_0\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} + |\gamma|4\pi JM_0\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x}) + \alpha\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} \quad (2.32)$$

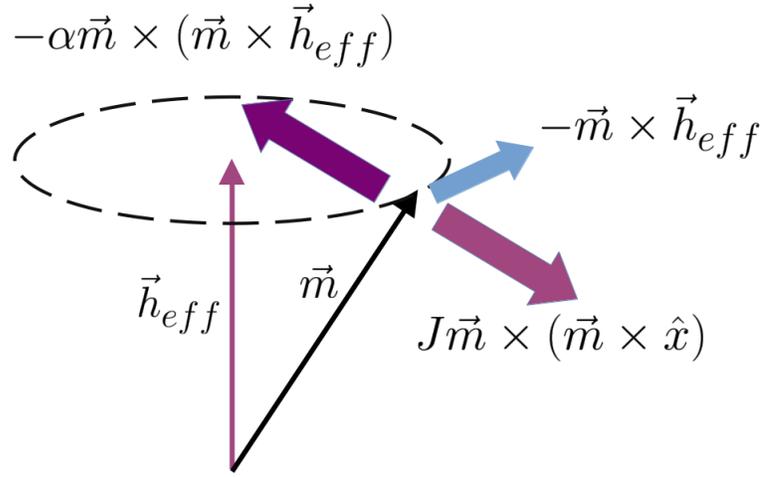


Figura 2.1: Representación del efecto de cada componente de la ecuación de LLGS. La componente conservativa mantiene la magnetización en el ciclo límite, el STT lo saca del equilibrio hacia afuera, y la disipación lo acerca a la posición de equilibrio determinada por el campo externo.

Definiendo $\tau = (4\pi M_0|\gamma|)t$ esta ecuación toma la forma:

$$\frac{d\vec{m}}{d\tau} = -\vec{m} \times \vec{h}_{\text{eff}} + J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x}) + \alpha\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{d\tau} \quad (2.33)$$

2.6.1. Torque de transferencia de Spin

El STT corresponde al segundo término del lado derecho de la ecuación de dinámica de la magnetización, este actúa contrarrestando a la disipación magnética del material y es proporcional a la corriente aplicada, por lo tanto existe una corriente crítica para la cual el STT es capaz de contrarrestar de forma exacta la disipación magnética, y se generan auto-oscilaciones de la magnetización en torno a la posición de equilibrio definida por el campo magnético efectivo.

Como se mencionó anteriormente para el caso de los STNO el torque tiene dirección $\vec{M}_1 \times (\vec{M}_1 \times \vec{M}_2)$, si se aplica a este caso tendríamos $\vec{M}_1 = \vec{m}$ y $\vec{M}_2 = -\hat{x}$, por lo tanto el STT se escribe:

$$\vec{T}_{STT} = |\gamma|4\pi M_0 J \vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x}). \quad (2.34)$$

2.6.2. Disipación

La relajación magnética permite a la configuración micromagnética alcanzar el estado de equilibrio donde la magnetización está orientada paralela al campo magnético efectivo. Existen dos descripciones de disipación, una desarrollada por Gilbert [35] y otra por Landau y Lifshitz [31]. En esta sección se enunciarán ambas y se verá que son matemáticamente equivalentes.

Gilbert propone que la relajación puede ser descrita mediante un término fenomenológico: un término de disipación viscosa, análogo a la fricción en sistemas mecánicos, donde la magnitud de la fuerza de roce es proporcional a la velocidad del cuerpo, es decir,

$$\vec{T}_G = \alpha \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt}, \quad (2.35)$$

donde α es una constante de disipación adimensional. Este torque asociado a la relajación magnética es matemáticamente equivalente al propuesto por Landau y Lifshitz, el cual tiene la siguiente forma:

$$\vec{T}_{LL} = -\gamma \lambda \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}}), \quad (2.36)$$

donde λ es una constante adimensional de disipación. Para comprobar que son equivalentes consideremos la ecuación de dinámica amortiguada para la magnetización:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma \vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}} + \alpha \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt}, \quad (2.37)$$

Al aplicar $\vec{m} \times$ a ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}}) + \alpha \vec{m} \times (\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt}). \quad (2.38)$$

El segundo término del lado derecho se le aplica la regla del triple producto cruz $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, por lo tanto se obtiene $\vec{m} \times (\vec{m} \times d\vec{m}/dt) = (\vec{m} \cdot d\vec{m}/dt)\vec{m} - d\vec{m}/dt(\vec{m} \cdot \vec{m})$, en esta expresión el primer término es nulo y el segundo término es igual a $d\vec{m}/dt$ debido a que $\vec{m} \cdot \vec{m} = 1$. Luego,

$$\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}}) - \alpha \frac{d\vec{m}}{dt}. \quad (2.39)$$

Al reemplazar esta expresión para el término disipativo en la ecuación de dinámica de la magnetización:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}} - \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha^2} \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}}), \quad (2.40)$$

se obtiene el término disipativo de Landau Lifshitz. Si bien ambas expresiones son equivalentes, las consecuencias físicas para altos valores de disipación son diferentes, pues la formulación de Landau y Lifshitz no tiene límite superior para la magnitud de la disipación. Para materiales como el Permalloy ambas expresiones son equivalentes dado que la constante α es pequeña, por lo que el término α^2 puede ser despreciado.

Capítulo 3

Modos normales de oscilación

Los modos normales de oscilación del nano-alambre magnetizado transversalmente por un campo magnético constante $\vec{H}_{ext} = H_0 \hat{x}$ se encuentran solucionando la ecuación conservativa de Landau Lifshitz, la cual en su forma normalizada se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -|\gamma|\vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}}, \quad (3.1)$$

donde \vec{H}_{eff} considerará energía libre de Zeeman, de intercambio, de demagnetización y de anisotropía. El campo efectivo se puede escribir como una variación de una energía efectiva con respecto a la magnetización, del siguiente modo:

$$\vec{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta E_{\text{eff}}}{\delta \vec{M}}. \quad (3.2)$$

Las contribuciones a la energía efectiva E_{eff} se describen a continuación. La primera de ellas es la energía libre de Zeeman, la cual corresponde a la interacción entre la magnetización del material y el campo externo magnético aplicado, es decir,

$$E_Z = -\int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot H_0 \hat{x} dV = -\int_V M_0 H_0 m_x dV, \quad (3.3)$$

donde M_0 corresponde a la magnetización de saturación, en este caso se considerará un valor de 790 [G], valor reportado en uno de los alambres estudiados en 2015 por Duan *et al.* [19].

La segunda contribución está dada por la energía de intercambio, la cual corresponde a una interacción entre los spin vecinos, en el límite clásico se puede describir de la siguiente forma:

$$E_X = A \int_V \left((\vec{\nabla} m_x)^2 + (\vec{\nabla} m_y)^2 + (\vec{\nabla} m_z)^2 \right) dV, \quad (3.4)$$

donde $A = 1.3$ [$\mu\text{erg}/\text{cm}$] es la constante de intercambio. Se puede definir $D = 2A/M_0$ y con ello la constante normalizada $d = D/(4\pi M_0) = A/(2\pi M_0^2) = l_{ex}^2$ donde l_{ex} es la longitud de intercambio del Py, la cual en este caso tiene un valor constante de ≈ 5 [nm].

Por otro lado se tiene la anisotropía magnetocristalina asociada a las dos superficies normales a \hat{y} ,

$$E_A = -\frac{K_s}{b} \int_S dS m_y^2, \quad (3.5)$$

donde $K_s = 0.237[\text{erg}/\text{cm}^2]$. Se puede definir $k_s = K_s/(4\pi M_0^2 b)$. Finalmente la energía asociada al campo dipolar \vec{H}_D , el cual es producto de los momentos magnéticos del mismo material, se describe de la siguiente forma:

$$E_D = -\frac{1}{2} \int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_D(\vec{r}) dV. \quad (3.6)$$

Los detalles del campo dipolar \vec{H}_D se encuentran en el Anexo A.4.

Resulta útil realizar un cambio de variables por las de Holstein-Primakoff, en torno a la magnetización de equilibrio en \hat{x} , del siguiente modo,

$$m_x = 1 - aa^*, \quad (3.7)$$

$$m_y = \left(\frac{-i}{2}\right)(a - a^*)\sqrt{2 - aa^*}, \quad (3.8)$$

$$m_z = \left(\frac{1}{2}\right)(a + a^*)\sqrt{2 - aa^*}. \quad (3.9)$$

Con estas variables se puede realizar una regla de la cadena para describir las energías en función de ellas,

$$\frac{\delta E}{\delta \vec{M}} = \frac{\delta E}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta \vec{M}} + \frac{\delta E}{\delta a^*} \frac{\delta a^*}{\delta \vec{M}}, \quad (3.10)$$

donde se tiene

$$\frac{\delta a}{\delta \vec{M}} = \frac{\delta a}{\delta m_x} \hat{x} + \frac{\delta a}{\delta m_y} \hat{y} + \frac{\delta a}{\delta m_z} \hat{z}. \quad (3.11)$$

Además definiendo las constantes $U = E/4\pi M_0^2$ y $\tau = 4\pi M_0 |\gamma| t$, la ecuación dinámica se puede escribir de la siguiente forma:

$$i \frac{da}{d\tau} = \frac{\delta U}{\delta a^*}, \quad (3.12)$$

$$i \frac{da^*}{d\tau} = -\frac{\delta U}{\delta a}. \quad (3.13)$$

3.1. Soluciones a orden lineal

Se pueden calcular los modos normales de oscilación a orden lineal al considerar las cuatro contribuciones a la energía efectiva hasta orden 2 en términos de las constantes normalizadas, las derivadas funcionales toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_{eff}^{(2)}}{\delta a^*} = & h_0(\tau)a(x) - k_s[a(x) - a^*(x)] - d\nabla^2 a(x) - n_x(X)a(x) \\ & - \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 dX'(a(X') - a^*(X')) \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $n_x(X)$ corresponde al factor demagnetizante, $r = b/c$ es la razón entre el grosor y el ancho del alambre. Se ha usado $X = x/c$ longitud adimensional para el ancho del nanowire. El detalle respecto al cálculo de estas contribuciones se encuentra en el Anexo A.4.

Junto con estas ecuaciones se utilizan condiciones de borde libre,

$$\frac{\partial m_j}{\partial x} \Big|_{x=\pm c} = 0. \quad (3.15)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones presentado se realiza una expansión en modos normales con una serie de Fourier:

$$a(X, \tau) = \sum_{l=0}^N \left[a_l(\tau) \cos(l\pi X) + b_l(\tau) \sin\left(\frac{2l+1}{2}\pi X\right) \right], \quad (3.16)$$

$$a^*(X, \tau) = \sum_{l=0}^N \left[a_l^*(\tau) \cos(l\pi X) + b_l^*(\tau) \sin\left(\frac{2l+1}{2}\pi X\right) \right]. \quad (3.17)$$

Esta expansión permite que se cumpla la condición de borde $\partial a / \partial X|_{\pm 1} = 0$. Con ello las ecuaciones de movimiento para los coeficientes simétricos, que son los estudiados a lo largo de toda la presente tesis, de la expansión de Fourier se obtienen de la siguiente forma:

$$i \frac{da_l}{d\tau} = n_l \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \frac{\delta U}{\delta a^*}, \quad (3.18)$$

donde los coeficientes n_l son constantes de normalización tales que $n_0 = 1/2$ y $n_l = 1$ para $l = 1, 2, 3, \dots$. Los modos anti-simétricos se resuelven de forma análoga. Al reemplazar en la ecuación (3.14) se obtiene:

$$i \frac{da_l}{d\tau} = \sum_n \left([h_0 - k_s + \frac{d}{c^2}(n\pi)^2] \delta_{nl} a_n + k_s \delta_{nl} a_n^* - \frac{1}{4\pi r} cc_{ln} (a_n - a_n^*) - ncc_{ln} a_n \right). \quad (3.19)$$

Los coeficientes ncc_{ln} y cc_{ln} se definen de la siguiente forma:

$$cc_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \cos(l\pi X) \cos(n\pi X') \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right), \quad (3.20)$$

$$ncc_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) n_x(X), \quad (3.21)$$

y la δ_{nl} corresponde a la delta de Kronecker, la cual se define de la forma usual:

$$\delta_{nl} = \begin{cases} 1 & si \quad n = l \\ 0 & si \quad n \neq l \end{cases} \quad (3.22)$$

Para resolver la ecuación (3.19) se consideran soluciones de la siguiente forma para los coeficientes:

$$a_l(\tau) = c_l e^{-i\Omega\tau} + d_l e^{i\Omega\tau}, \quad (3.23)$$

$$a_l^*(\tau) = d_l^* e^{-i\Omega\tau} + c_l^* e^{i\Omega\tau}, \quad (3.24)$$

con $\Omega = \omega / (4\pi M_0 |\gamma|)$, por lo tanto, al considerar únicamente los términos resonantes a

$e^{-i\Omega\tau}$ se obtendrán dos ecuaciones, una para c_l y otra para d_l^* . Escritas de forma matricial se obtiene:

$$\Omega \mathbb{I} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ln} & S_{ln} \\ -S_{ln} & -R_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n^* \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad. Se definen los elementos de matriz

$$R_{ln} = [h_0 - k_s + \frac{d}{c^2}(n\pi)^2]\delta_{nl} - ncc_{ln} - \frac{1}{4\pi r}cc_{ln}, \quad (3.26)$$

$$S_{ln} = \frac{1}{4\pi r}cc_{ln} + k_s\delta_{nl}. \quad (3.27)$$

Los modos normales de este problema se encuentran al solucionar el problema de autovalores de la matriz M

$$M = \begin{pmatrix} R & S \\ -S & -R \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

La matriz de vectores propios W proporciona el cambio de variables con las amplitudes de los modos normales b_j, b_j^*

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_n^* \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} b_j \\ b_j^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n^j & -\mu_n^j \\ -\mu_n^{j*} & \lambda_n^{j*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j \\ b_j^* \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Con esto se puede escribir la ecuación para b_j a partir de multiplicar por W^{-1} por la izquierda a la ecuación de dinámica de a_n ,

$$i \begin{pmatrix} \dot{a}_n \\ \dot{a}_n^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_l \\ a_l^* \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$i \begin{pmatrix} \dot{b}_j \\ \dot{b}_j^* \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} b_l \\ b_l^* \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

es decir, $D = W^{-1}MW$, que es una matriz diagonal, los elementos de la diagonal corresponden a las frecuencias de los modos normales.

3.2. Correcciones no lineales

La evolución temporal de la variable de Holstein Primakoff a se puede separar en una parte lineal y otra no lineal de la siguiente forma:

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{da^L}{d\tau} + \frac{da^{NL}}{d\tau}, \quad (3.32)$$

donde ya se ha resuelto el primer término en la sección anterior, y el segundo queda determinado por la ecuación no lineal:

$$i \frac{da^{NL}}{d\tau} = \frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*}, \quad (3.33)$$

donde las contribuciones no lineales a la energía libre corresponden a la energía de intercambio, la energía demagnetizante y la anisotropía. La energía de Zeeman no contribuye a orden no lineal.

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*} = & -\frac{d}{2} \left(a^2 \nabla^2 a^* - a^* (\nabla a)^2 + 2a \nabla a \nabla a^* \right) + k_s a \left(a a^* - \frac{3}{4} a^{*2} - \frac{1}{4} a^2 \right) \\ & - \frac{1}{16\pi r} \int_{-1}^1 dX' [a^2(X) - 2|a|^2(X) - |a|^2(X')] (a(X') - a^*(X')) \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X - X')^2}} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi} \langle H_D^x(a a^* \hat{x}) \rangle a. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Los detalles del desarrollo para obtener dicha contribución se encuentran en el Anexo A.

El procedimiento para resolver la ecuación de dinámica no lineal es similar al caso lineal, se realiza una expansión en serie de Fourier, por lo tanto la ecuación para los coeficientes de la expansión queda de la forma:

$$i \frac{da_i^{NL}}{d\tau} = n_l \int_{-1}^1 dV \cos(l\pi X) \frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*}. \quad (3.35)$$

Al desarrollar esta ecuación, se puede escribir de la siguiente forma,

$$i \frac{da_i^{NL}}{d\tau} = G_{lnmk} a_n a_m a_k + H_{lnmk} a_n a_m a_k^* + I_{lnmk} a_n a_m^* a_k^*, \quad (3.36)$$

donde los índices repetidos indican suma sobre ellos. G_{lnmk} , H_{lnmk} , I_{lnmk} son las contribuciones no lineales reales de las energías consideradas en términos de las variables conjugadas a y a^* , las cuales se definen de la siguiente forma:

$$G_{lnmk} = -n_l \left(\frac{C_{lnmk}}{16\pi r} + \frac{k_s}{4} A_{lnmk} \right), \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} H_{lnmk} = & n_l \left[\frac{d}{2} \left(\frac{\pi}{c} \right)^2 (k^2 A_{lnmk} + nm B_{lknm} - 2mk B_{lnmk}) + (k_s + 1) A_{lnmk} \right. \\ & \left. + \frac{E_{lnmk}}{2\pi r} + \frac{C_{lnmk}}{16\pi r} + \frac{C_{lnkm}}{8\pi r} + \frac{D_{lnkm}}{16\pi r} \right], \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$I_{lnmk} = -n_l \left(\frac{C_{lnmk}}{8\pi r} + \frac{D_{lnmk}}{16\pi r} + \frac{3}{4} k_s A_{lnmk} \right), \quad (3.39)$$

donde A_{lnmk} , B_{lnmk} , C_{lnmk} , D_{lnmk} y E_{lnkm} se definen en el Anexo B. Por otro lado la ecuación para a^* se desarrolla de forma análoga y se obtiene:

$$i \frac{da_l^{*NL}}{d\tau} = -G_{lkmn} a_n^* a_m^* a_k^* - H_{lkmn} a_n a_m^* a_k^* - I_{lkmn} a_n a_m a_k^*. \quad (3.40)$$

Para encontrar el corrimiento en frecuencia de los modos normales dada la no linealidad se considera un modo normal de oscilación b_j , este se puede expresar en términos de las variables a y a^* mediante la matriz W de cambio de variables obtenida en la ecuación (3.29). La ecuación que determina la dinámica de la amplitud de los modos normales a orden lineal es

la ecuación (3.31) la cual puede ser escrita para las contribuciones no lineales de la siguiente forma:

$$\dot{b}_j^{NL} = \sum_l (W^{-1})_{jl} \begin{pmatrix} \dot{a}_l^{NL} \\ \dot{a}_l^{*NL} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Se reemplaza la ecuación (3.36) y (3.40) en la ecuación (3.41). Los productos del estilo $a_n a_m a_k$ se escriben en términos de los b_j . Si se consideran solamente los términos resonantes a $|b_j|^2 b_j$, se obtiene

$$a_n a_m a_k \approx -(\lambda_n^j [\lambda_m^j \mu_k^j + \mu_m^j \lambda_k^j] + \mu_n^j \lambda_m^j \lambda_k^j) |b_j|^2 b_j, \quad (3.42)$$

$$a_n a_m a_k^* \approx (\lambda_n^j [\lambda_m^j \lambda_k^{j*} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{j*}) |b_j|^2 b_j, \quad (3.43)$$

$$a_n a_m^* a_k^* \approx -(\lambda_n^j [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}) |b_j|^2 b_j, \quad (3.44)$$

$$a_n^* a_m^* a_k^* \approx (\mu_n^{j*} [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \lambda_n^{j*} \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}) |b_j|^2 b_j. \quad (3.45)$$

Juntando todo se obtiene la ecuación:

$$\dot{b}_j^{NL} = \tilde{\Omega}_j |b_j|^2 b_j = \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} |b_j|^2 b_j, \quad (3.46)$$

es decir,

$$\tilde{\Omega}_j = \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

donde A_l y B_l se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_l = & -G_{lnmk} (\lambda_n^j [\lambda_m^j \mu_k^j + \mu_m^j \lambda_k^j] + \mu_n^j \lambda_m^j \lambda_k^j) \\ & + H_{lnmk} (\lambda_n^j [\lambda_m^j \lambda_k^{j*} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{j*}) \\ & - I_{lnmk} (\lambda_n^j [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} B_l = & -G_{lnmk} (\mu_n^{j*} [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \lambda_n^{j*} \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}) \\ & + H_{lkmn} (\lambda_n^j [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}) \\ & - I_{lkmn} (\lambda_n^j [\lambda_m^j \lambda_k^{j*} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{j*}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Los autovalores del sistema (3.25) se ven modificados por las correcciones no lineales

$$\Omega_j = \Omega_j^0 + \tilde{\Omega}_j |b_j|^2, \quad (3.50)$$

Y con ello la frecuencia del modo oscilatorio se ve modificada por las contribuciones no lineales, vía el cambio de variables $\omega = 4\pi M_0 |\gamma| \Omega$, por lo tanto se describe por la ecuación $\omega_j = \omega_j^0 + \tilde{\omega}_j |b_j|^2$.

Capítulo 4

Auto-oscilaciones

Las auto oscilaciones se presentan cuando la oscilación de la magnetización se puede representar como un ciclo límite en el espacio de fase, por lo tanto la disipación natural del sistema debe ser compensada en promedio por algún elemento activo, el cual, en este caso, corresponde al SOT vía SHE.

4.1. Modelo para la corriente

Para generar el SHE en la capa de Pt del nano-alambre se debe hacer circular una corriente en \hat{z} . Considerando un modelo de resistencias en paralelo, se tiene $1/R = 1/R_{Pt} + 1/R_{Py}$, donde $R_{Pt(Py)}$ es la resistencia del Pt(Py). Utilizando la ley de Kirchoff $I_{Pt}R_{Pt} = I_{Py}R_{Py}$ se obtiene una relación entre las corrientes:

$$I_{Pt} = \frac{I}{1 + R_{Pt}/R_{Py}}, \quad (4.1)$$

donde I es la corriente total que circula por todo el sistema.

Usando los siguientes valores para la resistividad del platino $\rho_{Pt} = 2.19 [\mu\Omega cm]$ y el permalloy $\rho_{Py} = 65.2 [\mu\Omega cm]$ se deduce que $R_{Pt} \approx R_{Py}/3$, es decir $I_{Pt} \approx (3/4)I$.

Esta corriente genera un campo de Oersted en la capa de Permalloy, el cual se asume uniforme en toda la capa. Usando la aproximación del campo magnético generado por una capa infinita de grosor $2b$ por la que pasa una corriente, con la ley de Ampere se obtiene:

$$H_{Oe} = j_{Pt}b[A/m], \quad (4.2)$$

donde b es la mitad del grosor de la capa de Py. Considerando que la placa infinita coincide con la placa de Permalloy en un ancho $2c$, entonces en la sección coincidente se usa $j_{Pt} = I_{Pt}/(2b2c)$, y por ende $H_{Oe} = I_{Pt}/4c$. En unidades Gaussianas el campo queda:

$$H_{Oe} = \frac{2\pi I_{Pt}}{2000c}[Oe]. \quad (4.3)$$

Si se normaliza el campo magnético $h_{Oe} = H_{Oe}/(4\pi M_0) = \bar{K}I_{Pt} = KI$, donde se tiene $\bar{K} = 1/(4000cM_0)$ y $K = 66.9(3/4)/(4\pi M_0)$

4.2. Desarrollo de la ecuación de dinámica

La ecuación de LLGS que gobierna la dinámica de la magnetización escrita en su forma normalizada toma la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{m}}{d\tau} = -\vec{m} \times \vec{h}_{eff} + J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x}) + \alpha\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{d\tau}, \quad (4.4)$$

donde \vec{m} corresponde a la magnetización normalizada del material, M_0 es la magnetización de saturación, γ es el factor giromagnético, J es la densidad de corriente, α es la constante de Gilbert. y \vec{h}_{eff} es el campo magnético efectivo, el cual se puede escribir:

$$\vec{h}_{eff} = -\frac{\delta U_{eff}}{\delta \vec{m}}. \quad (4.5)$$

El primer término de la ecuación (4.4) fue desarrollado en el capítulo anterior de la presente tesis, en éste capítulo se desarrollan los últimos dos términos de la ecuación a orden lineal y no lineal en términos de las variables de Holstein-Primakoff.

Podemos reagrupar la ecuación (4.4) en dos términos, los cuales definiremos del siguiente modo:

$$\frac{d\vec{m}_1}{d\tau} = -\vec{m} \times \vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x}), \quad (4.6)$$

$$\frac{d\vec{m}_2}{d\tau} = \alpha\vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{d\tau}, \quad (4.7)$$

de modo que la ecuación (4.4) se escriba $d\vec{m}/d\tau = d\vec{m}_1/d\tau + d\vec{m}_2/d\tau$.

Para desarrollar estas ecuaciones en términos de las variables conjugadas a y a^* se usarán las siguientes propiedades vectoriales:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (4.8)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}), \quad (4.9)$$

y las siguientes identidades:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial a} = -i \frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} \times \vec{m}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} = i \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \times \vec{m}. \quad (4.11)$$

Primer término

Aplicando estas propiedades y la regla de la cadena se puede desarrollar la ecuación que contiene la parte conservativa y el torque de transferencia de spin, \vec{m}_1 , en términos de la variable a ,

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{d\tau} &= \frac{\partial a}{\partial \vec{m}_1} \frac{\partial \vec{m}_{stt}}{\partial \tau} \\
&= \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \left(-\vec{m} \times [\vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times \hat{x}] \right) \\
&= -[\vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times \hat{x}] \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \times \vec{m} \right) \\
&= -[\vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times \hat{x}] \frac{1}{i} \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \\
&= i \left(\vec{h}_{eff} \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} - J(\vec{m} \times \hat{x}) \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \right) \\
&= i \left(-\frac{\partial U_{eff}}{\partial \vec{m}} \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} - J \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} (\vec{m} \times \hat{x}) \right) \\
&= -i \frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} - iJ\hat{x} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

. El primer término obtenido corresponde a la ecuación conservativa, con la cual se desarrollaron los modos normales en el capítulo anterior. El segundo término corresponde al STT. Al desarrollar el producto cruz que aparece en él y escribiéndolo en términos de las variables complejas, se obtiene:

$$\frac{da}{d\tau} = -i \frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} + \frac{J}{2} a(2 - aa^*), \tag{4.13}$$

se puede asociar este término a un potencial de torque de transferencia de spin U_{STT} para escribir la ecuación de forma más acotada en términos de un potencial total $U_T = U_{eff} + iU_{STT}$,

$$U_{STT} = Jaa^* \left(1 - \frac{aa^*}{4} \right). \tag{4.14}$$

Con ello la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{da_1}{d\tau} = -i \left(\frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} + i \frac{\partial U_{STT}}{\partial a^*} \right) = -i \frac{\partial U_T}{\partial a^*}. \tag{4.15}$$

Segundo término

Al reemplazar la ecuación (4.6) en la ecuación (4.7) se puede escribir la contribución asociada al término disipativo de la ecuación de LLGS normalizada, la cual en términos de las variables a y a^* queda:

$$\frac{d\vec{m}_2}{d\tau} = -\alpha\vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x})), \quad (4.16)$$

por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \frac{d\vec{m}}{d\tau} \\ &= -\frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \left(\alpha\vec{m} \times [\vec{m} \times \vec{h}_{eff} - J\vec{m} \times (\vec{m} \times \hat{x})] \right) \\ &= -\alpha\vec{m} \times [\vec{h}_{eff} - J(\vec{m} \times \hat{x})] \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \times \vec{m} \right) \\ &= i\alpha \left(\vec{m} \times [\vec{h}_{eff} - J(\vec{m} \times \hat{x})] \right) \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \\ &= i\alpha [\vec{h}_{eff} - J(\vec{m} \times \hat{x})] \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) \\ &= i\alpha \left[\vec{h}_{eff} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) - i\alpha J(\vec{m} \times \hat{x}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) \right] \\ &= i\alpha \left(-\frac{\partial U_{eff}}{\partial \vec{m}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) + J \frac{\partial m_x}{\partial a^*} \right) \\ &= i\alpha \left(-\frac{\partial U_{eff}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) - \frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} \frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) + J \frac{\partial m_x}{\partial a^*} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

, donde se usa que $\vec{m} \cdot \partial \vec{m} / \partial a^* = 0$. Al calcular el resultado de los producto punto de la expresión anterior:

$$\frac{\partial a}{\partial \vec{m}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) = ia^2 \frac{4 - aa^*}{8 - 4aa^*}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial a^*}{\partial \vec{m}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial a^*} \times \vec{m} \right) = i \frac{-8 + 4aa^* - a^2 a^{*2}}{8 - 4aa^*}, \quad (4.19)$$

con ello se obtiene el término disipativo de la ecuación de dinámica:

$$\frac{da_2}{d\tau} = \alpha \left(\frac{\partial U_{eff}}{\partial a} a^2 \frac{4 - aa^*}{8 - 4aa^*} + \frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} \frac{-8 + 4aa^* - a^2 a^{*2}}{8 - 4aa^*} - iJa \right). \quad (4.20)$$

Ecuación de dinámica no lineal

La ecuación de dinámica para la variable compleja se compone del término conservativo, el STT y la disipación,

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{da_1}{d\tau} + \frac{da_2}{d\tau}, \quad (4.21)$$

se reemplazan las ecuaciones (4.15) y (4.20) en (4.21), con ello se obtiene la ecuación de dinámica para la variable compleja a orden no lineal

$$\frac{da}{d\tau} = -i\left(\frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} + i\frac{\partial U_{STT}}{\partial a^*}\right) + \alpha\left(\frac{\partial U_{eff}}{\partial a} a^2 \frac{4 - aa^*}{8 - 4aa^*} + \frac{\partial U_{eff}}{\partial a^*} \frac{-8 + 4aa^* - a^2 a^{*2}}{8 - 4aa^*} + \mathcal{O}(\alpha^2)\right), \quad (4.22)$$

al hacer una aproximación en Taylor hasta orden 3 , la ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$i\frac{da}{a\tau} = \frac{\delta U_T}{\delta a^*} + i\alpha\left(-\frac{\delta U_{eff}}{\delta a^*} + \frac{a^2}{2} \frac{\delta U_{eff}^L}{\delta a}\right), \quad (4.23)$$

donde el primer término contiene la parte conservativa y el STT, y el segundo término corresponde la parte disipativa. El superíndice ^L indica la parte lineal del término que lo contiene. De forma análoga para a^* se tiene la ecuación

$$i\frac{da^*}{d\tau} = -\frac{\delta U_T^*}{\delta a} + i\alpha\left(-\frac{\delta U_{eff}}{\delta a} + \frac{a^{*2}}{2} \frac{\delta U_{eff}^L}{\delta a^*}\right). \quad (4.24)$$

4.3. Soluciones a orden lineal

La ecuación de dinámica a orden lineal es la siguiente:

$$i\frac{da}{d\tau} = (1 - i\alpha) \frac{\delta U_T^L}{\delta a^*}, \quad (4.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\delta U_T^L}{\delta a^*} &= h_x a - k_s(a - a^*) - n_x(x)a - d\nabla^2 a + iJa \\ &- \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 dX \ln\left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(2p)^2 + (X - X')^2}}\right)(a(X') - a^*(X')), \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde $h_x = h_0 - h_{oe}$ es el campo total aplicado, compuesto del campo magnético externo y el campo magnético de Oersted generado por la corriente que se encuentra circulando en el dispositivo, $h_{oe} = KI$. La densidad de corriente se define $J = \beta I$, donde β es una constante que puede ser calculada mediante una aproximación al plano extendido (infinito). Expandiendo en modos normales de Fourier, la ecuación de evolución temporal para el coeficiente $a_l(\tau)$ es:

$$i\frac{da_l}{d\tau} = (1 - i\alpha) \sum_n \left([h_x - k_s + d\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 + iJ] \delta_{ln} a_n - ncc_{ln} a_n - \frac{cc_{ln}}{4\pi r} (a_n - a_n^*) + k_s \delta_{ln} a_n^* \right). \quad (4.27)$$

Se usa el siguiente ansatz para los coeficientes de Fourier:

$$a_l(\tau) = c_l e^{-i\Omega\tau - v\tau} + d_l e^{i\Omega\tau - v\tau}, \quad (4.28)$$

$$a_l^*(\tau) = d_l^* e^{-i\Omega\tau - v\tau} + c_l^* e^{i\Omega\tau - v\tau}, \quad (4.29)$$

donde v da cuenta de la tasa de decaimiento en el tiempo de la frecuencia. Las ecuaciones se

pueden escribir de forma matricial:

$$\gamma \mathbb{I} \begin{pmatrix} c_l \\ d_l^* \end{pmatrix} = (\Omega - i\nu) \begin{pmatrix} c_l \\ d_l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{ln} & \tilde{S}_{ln} \\ -\tilde{S}_{ln}^* & -\tilde{R}_{ln}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n^* \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

donde los elementos de matriz se definen de la siguiente forma:

$$\tilde{R}_{ln} = (1 - i\alpha) \left([h_x + d \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 - k_s + iJ] \delta_{ln} - ncc_{ln} - \frac{cc_{ln}}{4\pi p} \right), \quad (4.31)$$

$$\tilde{S}_{ln} = (1 - i\alpha) \left(\frac{cc_{ln}}{4\pi p} + k_s \delta_{ln} \right). \quad (4.32)$$

Los autovalores de esta matriz serán números complejos donde la parte real da cuenta de la frecuencia normal y la parte imaginaria da cuenta de la tasa de disipación efectiva del sistema dada una corriente. Cuando se alcanza un valor de corriente crítica I_{th} la parte imaginaria de un autovalor se iguala a cero, en ese momento el modo se encuentra en una auto oscilación dado que posee tasa efectiva de disipación nula.

4.4. Modelo universal de auto-osciladores

El modelo propuesto por Slavin & Tiberkevich [14] describe la dinámica para la amplitud de un modo normal de oscilación en presencia de disipación y un elemento activo que la contrarreste, de modo que la ecuación se escribe:

$$\frac{db}{dt} + i\omega(|b|^2)b - \Gamma_-(|b|^2)b + \Gamma_+(|b|^2)b = 0, \quad (4.33)$$

donde b corresponde a la amplitud de las coordenadas normales que describen al auto-oscilador y Γ_{\pm} son las disipaciones positivas o negativas asociadas. Para que el modelo sea válido se requiere:

- 1) Sólo un modo de oscilación debe ser excitado en el sistema auto-oscilatorio. Esto es para usar solo la amplitud compleja b . No necesariamente un modo uniforme espacialmente.
- 2) El sistema auto-oscilatorio es débilmente no conservativo, es decir, la amplitud $|b_j|$ tiene un rango para variar muy pequeño en un período. Esta es una condición sobre la debilidad del amortiguamiento, permite despreciar términos no resonantes. Esto es concordante con que α , la constante de Gilbert, tenga un valor del orden de $10^{-2} \sim 10^{-3}$, el error relativo introducido por esta aproximación será del orden α^2 , por ende se desprecia.
- 3) La excitación de auto-oscilaciones es crítica o "suave", es decir, las auto-oscilaciones comienzan con amplitud cero y comienzan a crecer a medida que se incrementa un parámetro de control. Esto es para que la amplitud del modo sea físicamente interpretable como potencia.

Se pueden escribir las tasas Γ en función de $p = |b_j|$, donde Γ_+ corresponde a la tasa de disipación y Γ_- es la tasa de anti-disipación generada por el SHE. Se puede hacer una expansión en Taylor si la potencia es pequeña $p \ll 1$:

$$\omega(p) \approx \omega^0 + \tilde{\omega}p, \quad (4.34)$$

$$\Gamma_+(p) \approx \Gamma_G(1 + Qp), \quad (4.35)$$

$$\Gamma_-(p) \approx \sigma I(1 - fp). \quad (4.36)$$

Cuando esta expansión no provee suficiente precisión, la dependencia en p de $\omega(p)$ y las tasas $\Gamma(p)$ se pueden calcular numéricamente con simulaciones micromagnéticas.

4.4.1. Dinámica del auto-oscilador autónomo

El oscilador autónomo es aquel que cumple exactamente con la ecuación (4.33), donde el lado derecho de la ecuación es igual a cero, por lo tanto la auto-oscilación es generada sin la presencia de una fuerza externa. Se estudiarán las soluciones estacionarias de esta ecuación.

4.4.1.1. Regimen estacionario de generación

Se escribe la ecuación (4.33) en un sistema de dos ecuaciones al definir la potencia $p = |b|$ y la fase $\phi = \arg(b)$;

$$\frac{dp}{dt} = -2[\Gamma_+(p) - \Gamma_-(p)]p, \quad (4.37)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega(p). \quad (4.38)$$

Notar que la primera ecuación, correspondiente a la potencia, se encuentra desacoplada de la ecuación de la fase, por lo tanto será la primera por resolver.

I) Potencia estacionaria

Existen dos soluciones a la potencia estacionaria, condicionadas por $dp/dt = 0$: la solución trivial $p = 0$ que representa la ausencia de oscilaciones y la solución no trivial $p = p_0$.

La solución trivial permite linealizar la ecuación de la potencia cerca de esta solución, obteniendo

$$\frac{dp}{dt} = -2[\Gamma_+(0) - \Gamma_-(0)]p. \quad (4.39)$$

La solución a la ecuación es estable y físicamente realizable dado el signo del lado derecho. La condición $\Gamma_+(0) = \Gamma_-(0)$ determina el límite de la corriente necesaria para la aparición de oscilación con potencia no nula.

Usando la aproximación en Taylor de los Γ se obtiene que la corriente crítica vale:

$$I_{th} = \frac{\Gamma_G}{\sigma}, \quad (4.40)$$

el segundo tipo de solución $p = p_0$ queda determinada por la condición

$$\Gamma_+(p_0) = \Gamma_-(p_0). \quad (4.41)$$

Esta condición establece que la pérdida de energía dada la disipación natural es compensada de forma exacta por la energía inyectada por la fuente de energía externa, por lo tanto la disipación efectiva del sistema es nula. Generalmente, a medida que p se incrementa la disipación (relajación magnética) aumenta y la anti-disipación, generada por el STT) va

disminuyendo, por lo tanto la solución es única. Al igualar las aproximaciones en Taylor, expresadas en las ecuaciones (4.35) y (4.36), para las tasas de disipación, se puede calcular el valor de p_0 :

$$p_0 = \frac{\zeta - 1}{f\zeta + Q}, \quad (4.42)$$

donde $\zeta = I/I_{th}$ se denomina parámetro supercrítico adimensional. En el límite de generación de auto oscilaciones $\zeta = 1$ se tendrá $p = 0$, y ambos aumentarán de forma conjunta de modo que cuando $\zeta \rightarrow \infty$, $p_\infty = 1$, sin embargo en este límite las aproximaciones en Taylor pierden validez.

Para estudiar la estabilidad de la solución p_0 se debe considerar pequeñas desviaciones para la potencia $\delta p = p - p_0$ en la ecuación para la potencia:

$$\frac{d\delta p}{dt} = -2[G_+ - G_-]p_0\delta p = -2\Gamma_p\delta p, \quad (4.43)$$

donde los parámetros G_\pm se definen:

$$G_\pm = \frac{d\Gamma_\pm(p)}{dp}, \quad (4.44)$$

Y Γ_p se define como la tasa de disipación para pequeñas desviaciones

$$\Gamma_p = (G_+ - G_-)p_0. \quad (4.45)$$

Con ello se puede establecer que las soluciones serán estables si $\Gamma_p > 0$ o de forma equivalente $G_+ > G_-$. Usando las expansiones en Taylor se obtiene que

$$\Gamma_p = (\zeta - 1)\Gamma_G. \quad (4.46)$$

II) Frecuencia estacionaria

Dada la solución estacionaria para la potencia $p = p_0$ se puede calcular la frecuencia de la auto-oscilación mediante la ecuación (4.38), al considerar $\omega_g = \omega(p_0)$, y con ello la fase de la oscilación queda determinada por:

$$\phi(t) = -\omega_g t + \phi_0 = -\omega(p_0)t + \phi_0, \quad (4.47)$$

donde ϕ_0 es una fase arbitraria inicial.

Determinada la fase y la amplitud para las auto oscilaciones se puede escribir la solución completa estacionaria $b_0(t)$ para la amplitud compleja del modo normal excitado b :

$$b_0(t) = \sqrt{p_0}e^{-i\omega_g t + i\phi_0}. \quad (4.48)$$

Esta solución puede ser el punto de partida para estudiar la dinámica de un oscilador perturbado débilmente.

Es importante notar que la fase inicial ϕ_0 no se encuentra determinada por la ecuación de dinámica del auto oscilador, contrario a la potencia estacionaria p_0 , esto implica que la solución estacionaria es absolutamente estable respecto a las fluctuaciones de la potencia pero sólo marginalmente estable con respecto a fluctuaciones de la fase. Esto significa que incluso pequeñas perturbaciones pueden llevar a cambios sustanciales de la dinámica de la fase a largo plazo. Esta característica es inherente a los auto osciladores y hace posible la

sincronización de fase con fuentes externas débiles, o la sincronización entre ellos [14,36].

Se puede obtener una expresión explícita para la frecuencia generada con la forma de p_0 y la expansión en Taylor de $\omega(p)$:

$$\omega_g = \omega_0 + \tilde{\omega} \frac{\zeta - 1}{\zeta + Q}, \quad (4.49)$$

donde $\tilde{\omega}$ corresponde coeficiente no lineal de corrimiento de frecuencia.

4.5. Aplicación del modelo universal

La ecuación de dinámica para las variables de Holstein-Primakoff asociadas al modelo del nano auto-oscilador en estudio se escribe:

$$\frac{da}{d\tau} = -(i + \alpha) \frac{\delta U_T}{\delta a^*} + \alpha \frac{a^2}{2} \frac{\delta U_{eff}^L}{\delta a}. \quad (4.50)$$

Se puede separar dicha ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{da}{d\tau} = \left(\frac{da}{d\tau} \right)_{cons} + \left(\frac{da}{d\tau} \right)_{STT} + \left(\frac{da}{d\tau} \right)_{damp}. \quad (4.51)$$

De esta forma la ecuación entrega por separado las diferentes contribuciones. El primer término corresponde a la parte conservativa y se denota con *cons* (estudiado en el capítulo anterior), el torque de transferencia de spin *STT* y por último la disipación o relajación magnética *damp*.

Se pueden encontrar las expresiones para las tasas de disipación Γ_{\pm} descritas en el modelo universal, en términos de las variables $a_l^{(*)}$, coeficientes de la expansión en modos normales de Fourier expresados en las ecuaciones (5.27) y (5.28), La ecuación que describe la dinámica para la amplitud b_j de las auto-oscilaciones del modo normal excitado es:

$$\frac{db_j}{dt} + i\omega(p)b_j - \Gamma_-(p)b_j + \Gamma_+(p)b_j = 0. \quad (4.52)$$

El primer término de ellos corresponde a la frecuencia de oscilación, compuesta de una frecuencia normal ω_0 y un corrimiento en frecuencia $\tilde{\omega}$ como se muestra en la ecuación (4.34), es decir,

$$\omega(p) = \omega_0 + \tilde{\omega}|b_j|^2, \quad (4.53)$$

donde $\tilde{\omega}$ fue encontrada para el dispositivo estudiado en el capítulo anterior. Expresado en términos de los autovalores del problema matricial:

$$\Omega_j(p) = \Omega_j + \tilde{\Omega}p, \quad (4.54)$$

donde $p = |b_j|^2$ y de la ecuación (3.47) se tiene

$$\tilde{\Omega} = W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Las expresiones para las tasas de disipación positiva y negativa se desarrollan en las siguientes secciones, en términos de las variables $a_l^{(*)}$. Al igualar las tasas a orden lineal se puede

encontrar la corriente crítica para la generación de auto oscilaciones para el primer modo excitado, mientras que a orden no lineal se encuentra la solución estacionaria para la potencia de la auto oscilación.

4.5.1. Desarrollo lineal

A orden lineal la ecuación de dinámica para la variable de Holstein-Primakoff queda descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{da}{d\tau} = -(i + \alpha) \frac{\delta U_T}{\delta a^*}, \quad (4.56)$$

la cual puede ser escrita en términos de los coeficientes de la expansión en modos normales de Fourier, donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{da_l}{d\tau} + (i + \alpha) \left([h_x + d \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 - k_s] \delta_{ln} a_n + k_s \delta_{ln} a_n^* \right. \\ \left. - ncc_{ln} a_n - \frac{1}{4\pi r} cc_{ln} (a_n - a_n^*) \right) - J \delta_{ln} a_n = 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

El término proporcional a $J = \beta I$ es el asociado a la disipación negativa generada por el SHE, y el proporcional a α a la relajación magnética.

Esta ecuación debe ser escrita en términos de b_j con el cambio de variables expuesto en la ecuación (3.29) y la ecuación (3.41). A continuación se calculan las tasas de disipación negativa y positiva a orden lineal.

Torque de transferencia de Spin

La tasa de disipación negativa $\Gamma_-(p)$ se define vía:

$$\left(\frac{db_j}{d\tau} \right)_{STT} = \Gamma_-(p) b_j, \quad (4.58)$$

a orden lineal se obtiene:

$$\Gamma_-^L(p) b_j = \sum_l W_{jl}^{-1} J \begin{pmatrix} a_l \\ a_l^* \end{pmatrix} = J b_j. \quad (4.59)$$

Notar que $\Gamma_-^L(p) = \Gamma_-(0)$, la tasa evaluada en la solución trivial. Por lo tanto se obtiene:

$$\boxed{\Gamma_-(0) = J}. \quad (4.60)$$

En términos de la expansión en Taylor expuesta en la ecuación (4.36), $\Gamma_-(p) = \sigma I(1 - fp)$, se define σ de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{\Gamma_-(0)}{I} = \frac{J}{I} = \beta. \quad (4.61)$$

Disipación

El término disipativo en la ecuación (4.57) es proporcional a α . La tasa de disipación positiva a orden lineal será $\Gamma_+^L = \Gamma_+(0)$, y se obtiene al calcular:

$$\Gamma_+(0)b_j = -\left(\frac{db_j^L}{d\tau}\right)_{damp} = -\sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{a}_l \\ \dot{a}_l^* \end{pmatrix}_{damp} = \alpha \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} i\dot{a}_l \\ -i\dot{a}_l^* \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

donde \dot{a}_l hace referencia al sistema lineal no perturbado, es decir, los modos normales de oscilación. Estos términos pueden ser expresados de forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} i\dot{a}_l \\ -i\dot{a}_l^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ln} & S_{ln} \\ S_{ln} & R_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_n^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} R_{ln} & S_{ln} \\ S_{ln} & R_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^j \\ -\mu_n^{j*} \end{pmatrix} b_j. \quad (4.63)$$

Se han considerado solamente los términos resonantes a $e^{-i\Omega_j\tau}$, con $\Omega_j = D_{jj} = [W^{-1}MW]_{jj}$ el autovalor asociado al modo normal j -ésimo.

Notar que si se considera la ecuación de autovalores y autovectores de la fila de la matriz de modos normales del modo b_j

$$\begin{pmatrix} R_{ln} & S_{ln} \\ -S_{ln} & -R_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^j \\ -\mu_n^{j*} \end{pmatrix} b_j = \Omega_j \begin{pmatrix} \lambda_n^j \\ -\mu_n^{j*} \end{pmatrix} b_j, \quad (4.64)$$

si se multiplica la segunda ecuación por (-1) se obtiene

$$\begin{pmatrix} R_{ln} & S_{ln} \\ S_{ln} & R_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_n^j \\ -\mu_n^{j*} \end{pmatrix} b_j = \Omega_j \begin{pmatrix} \lambda_n^j \\ \mu_n^{j*} \end{pmatrix} b_j, \quad (4.65)$$

con ello se puede reescribir la tasa de disipación positiva lineal $\Gamma_+(0)$, y por lo tanto la contribución lineal Γ_G de la expansión en Taylor

$$\Gamma_+(0) = \sum_l \Omega_j \alpha W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_l^j \\ \mu_l^{j*} \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Esta expresión determina también la constante Γ_G de la expansión en Taylor de Γ_+ , expuesta en la ecuación $\Gamma_+(p) = \Gamma_G(1 + Qp)$ (4.35).

4.5.1.1. Corriente crítica

La solución trivial corresponde a tener oscilaciones con amplitud nula, es decir $b_j = 0$, la cual se obtiene cuando se inyecta la corriente exacta para compensar la relajación magnética del dispositivo. La corriente crítica I_{th} puede ser calculada al igualar $\Gamma_-(0) = \Gamma_+(0)$, lo cual da como resultado la siguiente ecuación:

$$I_{th} = \frac{\Gamma_G}{\sigma}. \quad (4.67)$$

4.5.2. Desarrollo no lineal

La contribución no lineal de la ecuación de dinámica para a corresponde a:

$$\frac{da^{NL}}{d\tau} = -i \frac{\delta U_T^{NL}}{\delta a^*} - \alpha \frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*} + \frac{\alpha}{2} a^2 \frac{\delta U_{eff}^L}{\delta a}. \quad (4.68)$$

Se realiza una expansión en modos normales de Fourier. Los coeficientes de dicha expansión evolucionan de acuerdo a la ecuación:

$$\left(\frac{da_i^{NL}}{d\tau} \right)_{STT} = n_l \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \frac{\delta U_{STT}^{NL}}{\delta a^*}. \quad (4.69)$$

El procedimiento para calcular las tasas no lineales de disipación es análogo al presentado en la sección 3.2.

Torque de transferencia de spin

La contribución no lineal del STT de la ecuación de dinámica es:

$$\left(\frac{da^{NL}}{d\tau} \right)_{STT} = \frac{\delta U_{STT}^{NL}}{\delta a^*} = \left(-J \frac{a^2 a^*}{2} \right), \quad (4.70)$$

con ello se puede calcular la tasa de disipación negativa no lineal vía

$$\Gamma_{-(p)}^{NL} b_j = \left(\frac{db_j^{NL}}{d\tau} \right)_{STT} = \sum_l W_{jl}^{-1} \left(\dot{a}_l^{NL} \right)_{STT}. \quad (4.71)$$

Se reemplazan las expresiones para $\dot{a}_l^{(*NL)}$, cuyos términos se expresan en términos de las variables $b_j^{(*)}$, vía el cambio de variables expuesto en (3.29), y considerando solamente los términos resonantes, se obtiene:

$$\Gamma_{-}^{NL} = \sum_l \frac{1}{2} W_{jl}^{-1} n_l J \begin{pmatrix} -A_{lnmk} (\lambda_n^j [\lambda_m^j \lambda_k^{*j} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{*j}) \\ A_{lkmn} (\lambda_n^j [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}) \end{pmatrix} \equiv J \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}, \quad (4.72)$$

donde los subíndices repetidos n, m, k indican suma sobre ellos, y donde se ha definido C_l y D_l de la siguiente forma:

$$C_l = -\frac{n_l}{2} A_{lnmk} (\lambda_n^j [\lambda_m^j \lambda_k^{*j} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{*j}), \quad (4.73)$$

$$D_l = \frac{n_l}{2} A_{lkmn} (\lambda_n^j [\mu_m^{j*} \lambda_k^{j*} + \lambda_m^{j*} \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \mu_m^{j*} \mu_k^{j*}), \quad (4.74)$$

por lo tanto se puede escribir la tasa de disipación negativa obteniéndose:

$$\Gamma_{-(p)} = J \left[1 + \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} |b_j|^2 \right], \quad (4.75)$$

donde se ha añadido también el término lineal. Si se usa la expresión de la expansión en Taylor desarrollada en la ecuación (4.36), $\Gamma_{-}(|b_j|^2) = J(1 - f|b_j|^2)$ se define f de la siguiente forma:

$$f = -\frac{\Gamma_{-}^{NL}}{J} = -\sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Disipación

La ecuación para la disipación está determinada por la siguiente expresión

$$\left(\frac{da^{NL}}{d\tau}\right)_{damp} = -\alpha\left(\frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*} - \frac{a^2}{2}\frac{\delta U_{eff}^L}{\delta a}\right) = -\alpha\left(\frac{\delta U_{eff}^{NL}}{\delta a^*} + \frac{a^2}{2}i\dot{a}^*\right). \quad (4.77)$$

Al expandir la en modos normales de Fourier, sus coeficientes cumplirán con la siguiente ecuación:

$$(\dot{a}_l^{NL})_{damp} = -\alpha(G_{lnmk}a_n a_m a_k + H_{lnmk}a_n a_m a_k^* + I_{lnmk}a_n a_m^* a_k^*) + \alpha\frac{n_l}{2}a_n a_m (-i\dot{a}_k^*) A_{lnmk}, \quad (4.78)$$

donde G_{lnmk} , H_{lnmk} y I_{lnmk} están definidos en el capítulo anterior.

El último término (proporcional a A_{lnmk}) puede ser escrito en función del autovalor del j -ésimo modo normal Ω_j al realizar el cambio a las variables normales expresado en la ecuación (3.29) y su derivada temporal. Si se consideran solamente los términos resonantes, es decir, proporcionales a $|b_j|^2 b_j$, se obtiene que dicho término se puede escribir de la siguiente forma:

$$-i\alpha\frac{n_l}{2}A_{lnmk}a_n a_m \dot{a}_k^* = \alpha\frac{n_l}{2}A_{lnmk}\Omega_j(\lambda_n^j[\lambda_m^j \lambda_k^{j*} + \mu_m^j \mu_k^{j*}] + \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{j*}). \quad (4.79)$$

De acuerdo con el cambio de variables obtenido de los modos normales de oscilación del nano-alambre en la ecuación (3.29) y la ecuación para el modo normal b_j (3.41), se calcula el valor de la tasa no lineal de disipación positiva:

$$\left(\frac{db_j^{NL}}{d\tau}\right)_{damp} = -\Gamma_+^{NL}(|b_j|^2)b_j = \sum_l \alpha W_{jl}^{-1} \left(\frac{-i\dot{a}_l^{NL} - ia^2 \dot{a}^*/2}{i\dot{a}_l^{*NL} + ia^{*2} \dot{a}/2} \right) = -\sum_l \alpha W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l - E_l \\ -(B_l + F_l) \end{pmatrix} |b_j|^2 b_j, \quad (4.80)$$

donde A_l y B_l corresponden a la misma definición utilizada en la ecuación (3.48) y (3.49) y E_l y F_l se definen de la siguiente forma:

$$E_l = \frac{n_l}{2}\Omega_j A_{lnmk}(\lambda_n^j[\lambda_m^j \lambda_k^{j*} - \mu_m^j \mu_k^{j*}] - \mu_n^j \lambda_m^j \mu_k^{j*}), \quad (4.81)$$

$$F_l = \frac{n_l}{2}\Omega_j A_{lnmk}(\mu_n^{j*}[\mu_m^{j*} \mu_k^j - \lambda_m^{j*} \lambda_k^j] - \lambda_n^{j*} \mu_m^{j*} \lambda_k^j), \quad (4.82)$$

es decir,

$$\Gamma_+(p) = \alpha \sum_l \Omega_j W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_l^j \\ \mu_l^{j*} \end{pmatrix} + \alpha \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l - E_l \\ -(B_l + F_l) \end{pmatrix} |b_j|^2. \quad (4.83)$$

La tasa de disipación positiva puede ser descrita como $\Gamma_+(p) = \Gamma_G(1+Qp) = \Gamma_G + \Gamma_+^{NL}|b_j|^2$ donde $p = |b_j|^2$. Por lo tanto se define Q de la siguiente manera:

$$Q = \frac{\Gamma_+^{NL}(p)}{\Gamma_G}. \quad (4.84)$$

4.5.2.1. Solución con amplitud no nula

La solución no trivial de la ecuación que describe la evolución temporal de la potencia del modo normal excitado descrita en (2.46) está dada por la condición:

$$\Gamma_+(p_0) - \Gamma_-(p_0) = 0, \quad (4.85)$$

es decir, cuando la disipación efectiva del sistema sea nula. Este valor se puede encontrar de forma analítica, en términos de las variables del modelo universal;

$$p_0 = \frac{\zeta - 1}{f\zeta + Q}, \quad (4.86)$$

donde $\zeta = I/I_{th}$. En términos de las tasas que se han encontrado en las secciones anteriores:

$$p_0 = \frac{J - \alpha \sum_l \Omega_j W_{jl}^1 \begin{pmatrix} \lambda_l^j \\ \mu_l^{j*} \end{pmatrix}}{\alpha \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} A_l - E_l \\ -(B_l + F_l) \end{pmatrix} - J \sum_l W_{jl}^{-1} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}}. \quad (4.87)$$

Esta solución es estable si Γ_p definido en la ecuación (4.46) es positivo. La expresión

La frecuencia a la que oscila este modo excitado será la expresión en la ecuación (4.49), que en este caso se puede calcular como

$$\omega_g = \omega_0 + \tilde{\omega} p_0. \quad (4.88)$$

Capítulo 5

Resultados numéricos

Los resultados numéricos se obtienen usando Python3. Las constantes que caracterizan al nano-alambre son las siguientes:

Tabla 5.1: Constantes utilizadas en los resultados numéricos

| variable | significado | valor |
|----------|---|---------------------------------------|
| 2b | grosor (\hat{y}) | $2.5 \cdot 10^{-6}$ [cm] |
| 2c | ancho (\hat{x}) | $11.8 \cdot 10^{-5}$ [cm] |
| γ | razón giromagnética | -0.0179 [(Oe ns) $^{-1}$] |
| M_0 | magnetización de saturación | 790 [emu cm $^{-3}$] |
| A | rigidez de intercambio | $1.3 \cdot 10^{-6}$ [erg cm $^{-1}$] |
| H_0 | campo externo | 3000 [Oe] |
| K_s | constante de anisotropía | 0.237 [erg cm $^{-2}$] |
| α | Constante de Gilbert | 0.023 |
| β | coeficiente densidad de corriente $J = \beta I$ | 0.00795 |

Donde la constante β se determina a partir del modelo macro-spin para un nano-alambre cuyo ancho tiende a infinito. En dicho modelo la densidad de corriente crítica se escribe $J_{th} = \mathcal{A} = \beta I_{th}$ donde $\mathcal{A} = h_0 - k_s + 1/2$ y $I_{th} = 2.25$ [19,37], con ello se establece una ecuación para β , obteniéndose el valor reportado en la tabla (5.1).

En las siguientes secciones se exponen los resultados numéricos para el modelo macro-spin y para el modo cuasi uniforme de oscilación. En cada caso se calculará el corrimiento en frecuencia dada la naturaleza no lineal de la ecuación de LL, así como también las soluciones para la generación de auto oscilaciones, lo que incluye la corriente crítica de generación, y la solución para $|b|^2$, vía el cálculo de las tasas de disipación expuestas en su forma analítica en el capítulo anterior.

5.1. Modelo Macro-spin

El modelo Macro-spin (MS) corresponde a considerar una magnetización uniforme en toda la muestra, de forma que las variables $a(X, \tau) = a(\tau)$, de forma análoga con $a^*(\tau)$. Esto significa considerar solamente el término cero de la expansión en serie de Fourier utilizada en (5.27) y (5.28).

5.1.1. Modo normal de oscilación

El modo de oscilación tipo marco-spin queda determinado por la siguiente ecuación matricial:

$$\Omega_0 \mathbb{I}_{2x2} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{00} & S_{00} \\ -S_{00} & -R_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0^* \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde $R_{00} = h_0 - k_s - cc_{00}/(4\pi r) - ncc_{00}$ y $S_{00} = cc_{00}/(4\pi r) + k_s$, \mathbb{I}_{2x2} es la identidad de tamaño $2x2$. Al resolver dicho sistema se encuentra que la frecuencia del modo de oscilación. En unidades de [GHz], corresponde definir $\nu = \omega/(2\pi)$, y con ello, $\nu = 15.86$ [GHz].

La matriz de autovectores queda definida por

$$W_{00} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\mu_0 \\ -\mu_0^* & \lambda_0^* \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

donde los elementos de dicha matriz se pueden calcular al resolver el sistema de ecuaciones del problema de autovectores,

$$\begin{pmatrix} R_{00} - \Omega_0 & S_{00} \\ -S_{00} & -R_{00} - \Omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ -\mu_0^* \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (5.3)$$

Además se utiliza la normalización $|\lambda_0|^2 - |\mu_0|^2 = 1$, De modo que se obtiene una expresión analítica para los elementos de matriz:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \Omega_0}{2\Omega_0}} \quad \mu_0 = -\sqrt{\frac{\mathcal{A} - \Omega_0}{2\Omega_0}}, \quad (5.4)$$

y la matriz inversa se escribe:

$$W_{00}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0^* & \mu_0 \\ \mu_0^* & \lambda_0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

5.1.2. Coeficiente de corrimiento no lineal de la frecuencia

El corrimiento en frecuencia analítico para el modelo macro-spin viene dado por las contribuciones no lineales del campo efectivo, las cuales están dadas por la energía libre de anisotropía y el campo dipolar, las cuales en el modelo macro-spín se escriben de la siguiente forma:

$$U_{0,eff}^{NL} = \frac{1}{4} \int dV k_s \left(-a_0^3 a_0^* + 2|a_0|^4 - a_0 a_0^{*3} \right) + \frac{1}{4\pi r} \int dV a_0^2 a_0^{*2} cc_{00} + \frac{1}{16\pi r} \int dV \left(-a_0^3 a_0^* + 2a_0^2 a_0^{*2} - a_0 a_0^{*3} \right) cc_{00}. \quad (5.6)$$

por lo tanto, las variaciones respecto a la variable a_0^* es

$$\frac{\delta U_{0,eff}^{NL}}{\delta a_0^*} = k_s \left(-\frac{3}{4}|a_0|^2 a_0^* + |a_0|^2 a_0 - \frac{1}{4}a_0^3 \right) + \frac{1}{2\pi r} a_0 a_0^{*2} c c_{00} + \frac{1}{16\pi r} \left(-a_0^3 + 4a_0^2 a_0^* - 3a_0 a_0^{*2} \right) c c_{00}, \quad (5.7)$$

utilizando la ecuación (3.47) se obtiene el corrimiento en frecuencia para el modelo MS, es decir,

$$i b_0^{NL} = -i \left[W_{00}^{-1} \begin{pmatrix} i \dot{a}_0^{NL} \\ i \dot{a}_0^{*NL} \end{pmatrix} \right]_0 = -i \tilde{\Omega}_0 |b_0|^2 b_0, \quad (5.8)$$

por lo tanto, el coeficiente de corrimiento es

$$\tilde{\Omega}_0 = 6 \left(\frac{k_s}{4} + \frac{c c_{00}}{16\pi r} \right) (\lambda_0 \mu_0 + \lambda_0^* \mu_0^*) (|\lambda_0|^2 + |\mu_0|^2) + \left(k_s + n c c_{00} + \frac{4c c_{00}}{16\pi r} \right) (|\lambda_0|^4 + 4|\lambda_0|^2 |\mu_0|^2 + |\mu_0|^4), \quad (5.9)$$

donde se ha usado que $C_{0000} = D_{0000} = E_{0000} = 2c c_{00} = (n c c_{00} - 1)4\pi r$. Con un poco de álgebra se puede escribir $\tilde{\Omega}_0$ de la siguiente forma

$$\tilde{\Omega}_0 = -\frac{3}{2} \left(k_s + \frac{c c_{00}}{4\pi r} \right) \mathcal{A} \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - \Omega_0^2}}{\Omega_0^2} + \left(k_s + n c c_{00} + \frac{4c c_{00}}{16\pi r} \right) \frac{3\mathcal{A}^2 - \Omega_0^2}{2\Omega_0^2}. \quad (5.10)$$

Este valor se calcula numéricamente y se obtiene $\tilde{\Omega}_0 = -0.12$, en términos de la variable de frecuencia; $\tilde{\nu}_{MS} = -3.38$ representando un corrimiento al rojo en la frecuencia. Una vez obtenida la amplitud de la oscilación se podrá calcular $\omega(p) = \omega_0 + \tilde{\omega}p$, bien, en unidades de [GHz], $\nu(p) = \nu_0 + \tilde{\nu}p$

5.1.3. Auto-oscilador y corriente crítica

El modelo para el auto oscilador debe añadir las contribuciones de disipación asociado a la relajación magnética y el STT vía SHE, la ecuación matricial que se obtiene es la siguiente:

$$(\Omega - i\nu) \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{00} & \tilde{S}_{00} \\ -\tilde{S}_{00}^* & -\tilde{R}_{00}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0^* \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0^* \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

La matriz se puede diagonalizar de forma analítica, y al imponer que los autovalores obtenidos sean completamente reales, es decir, $\nu = 0$, para la generación de auto oscilaciones, se obtiene una ecuación para la corriente crítica

$$I_{th} = \frac{\alpha}{\beta} \left(h_x - k_s - n c c_{00} - \frac{1}{4\pi r} c c_{00} \right) \equiv \frac{\alpha}{\beta} \mathcal{A}, \quad (5.12)$$

donde $\mathcal{A} \equiv R_{00}$. Al introducir esta ecuación en Python3 se obtiene el valor $I_{th} \approx 2.09mA$. Este mismo valor se puede obtener utilizando la ecuación (4.67), la cual es equivalente a igualar las tasas de disipación positiva y negativa, como se desarrolla a continuación:

$$J = \alpha \left[W_{00}^{-1} \Omega_0 \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0^* \end{pmatrix} \right]_0, \quad (5.13)$$

donde W_{00}^{-1} corresponde a la primera fila de la matriz inversa calculada en la sección anterior.

Con la igualdad anterior se obtiene la expresión para la corriente crítica de la siguiente forma:

$$I_{th} = \frac{\alpha}{\beta} \Omega_0 (\lambda_0^* \quad \mu_0) \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0^* \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\beta} \mathcal{A}. \quad (5.14)$$

Notar que se recupera la corriente crítica $I_{th} = (\alpha/\beta)\mathcal{A}$, por lo tanto ambas teorías coinciden en el valor para la corriente crítica en el modelo MS.

5.1.4. Tasas de disipación y solución para la amplitud

En esta sección se analizarán las condiciones para obtener una solución real para la amplitud de oscilación para el modelo MS.

La disipación asociada al STT se desarrolla a partir de la ecuación

$$\left(\frac{db_0}{d\tau} \right)_{STT} = \left[W_{00}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{a}_0 \\ \dot{a}_0^* \end{pmatrix} \right]_{STT} = \left[W_{00}^{-1} J \begin{pmatrix} (1 - a_0 a_0^*/2) a_0 \\ (1 - a_0 a_0^*/2) a_0^* \end{pmatrix} \right]. \quad (5.15)$$

Esta expresión se puede desarrollar utilizando el cambio de variables de la ecuación (3.29), y $J = \beta I$ es la densidad de corriente, donde $I = 2.15$ [mA] es ligeramente superior a la corriente crítica de generación. De forma concisa, se obtiene:

$$\Gamma_-(|b_0|^2) = J \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{2\Omega_0} |b_0|^2 \right), \quad (5.16)$$

donde $\mathcal{A} = J_{th}/\alpha$ definida en la ecuación (5.12) y Ω_0 corresponde al autovalor correspondiente al modo normal de oscilación.

Por otro lado, la disipación positiva, asociada a la relajación magnética, se desarrolla a partir de la ecuación

$$\Gamma_+(|b_0|^2) = \alpha W_{00}^{-1} \begin{pmatrix} i\dot{a}_0^N L - (1/2)a_0^2(-i\dot{a}_0^{*L}) \\ -i\dot{a}_0^* - (1/2)a_0^{*2}(i\dot{a}_0^L) \end{pmatrix} = \alpha \left[\Omega_0 W_{00}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0^* \end{pmatrix} + W_{00}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 - E_0 \\ -B_0 - F_0 \end{pmatrix} \right], \quad (5.17)$$

obteniéndose:

$$\Gamma_+(|b_0|^2) = \alpha \left(\mathcal{A} + \left[\Gamma_1 - \frac{3\Omega_0^2 - \mathcal{A}^2}{4\Omega_0} \right] |b_0|^2 \right), \quad (5.18)$$

donde

$$\Gamma_1 = -6 \left(\frac{k_s}{4} + \frac{cc_{00}}{16\pi r} \right) \left(\frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - \Omega_0^2}}{2\Omega_0} \right) + \left(k_s + 1 + 12 \frac{cc_{00}}{16\pi r} \right) \frac{\mathcal{A}}{\Omega_0}. \quad (5.19)$$

La corriente que se aplica al sistema es mayor a la corriente crítica, por lo que se puede definir $J = \lambda J_{th}$ donde $\lambda > 1$. Por otro lado, la solución a la amplitud de oscilación se obtiene de igualar las tasas de disipación. Si además se define $-B_{\pm}|b_0|^2 = \Gamma_{\pm}^{NL}$, la igualación de tasas queda escrita

$$\begin{aligned}
\Gamma_+(|b_0|^2) &= \Gamma_- (|b_0|^2) \\
J_{th} - B_+ |b_0|^2 &= J - B_- |b_0|^2 \\
(B_- - B_+) |b_0|^2 &= J - J_{th} = (\lambda - 1) J_{th},
\end{aligned} \tag{5.20}$$

por lo tanto para que $|b_0|^2 > 0$ se debe cumplir $B_- > B_+$. Al analizar dicha desigualdad se encuentra una para λ

$$\lambda > \frac{3\Omega_0^2}{2\mathcal{A}^2} - \frac{1}{2} - 2\frac{\Omega_0\Gamma_1}{\mathcal{A}^2} \equiv \lambda_c. \tag{5.21}$$

Para que la cantidad $|b_0|^2$ sea positiva se debe cumplir $\lambda > 1$. Numéricamente, con los datos de la tabla 5.1, se obtiene $\lambda_c = 0.96$. cuando la corriente tiene un valor de $I = 2.15$ [mA], lo cual asegura la existencia de auto-oscilaciones.

Al intersectar las curvas correspondientes a las tasas de disipación se encuentra una solución para la amplitud. Esta solución es siempre positiva para corrientes superiores a la corriente crítica presentada. Al graficar la solución obtenida versus la corriente aplicada se obtiene la siguiente curva mostrada en la figura (5.1).

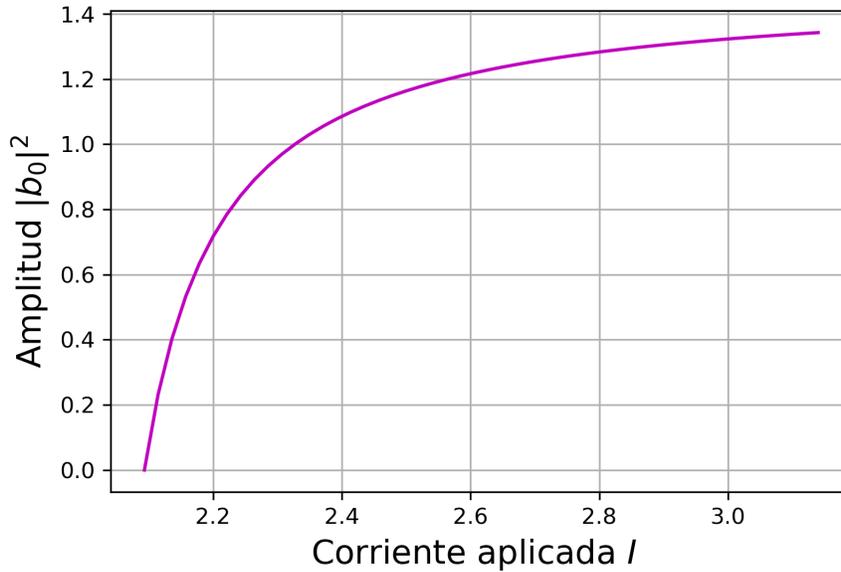


Figura 5.1: Solución para la potencia generada por el modo MS en función de la corriente aplicada al nano-alambre para generar las auto oscilaciones. La corriente toma valores entre I_{th} y $1.5I_{th}$.

En la figura se puede ver que la amplitud de oscilación es nula cuando la corriente aplicada iguala a la corriente crítica, dado que en dicho punto se genera la compensación exacta entre la disipación positiva generada por la relajación magnética y la disipación negativa asociada al STT generado por el SHE. A medida que la corriente aplicada aumenta, la potencia asociada a la solución también aumenta.

Al fijar la corriente $I = 2.15$ [mA] se puede calcular el valor de la amplitud de la oscilación, obteniéndose $|b_{MS}|^2 = p_{MS} = 0.306$. Con ello se puede calcular el corrimiento en frecuencia

dado que $\tilde{\Omega}_{MS} = -0.12$, en unidades de frecuencia $\tilde{\nu}_{MS} = -3.38$. Por lo tanto la frecuencia de oscilación es

$$\nu_{MS}(p) = \nu_{MS}^0 + \tilde{\nu}_{MS} \cdot p_{MS} = 15.86 - 3.38 \cdot 0.306 = 14.83[\text{GHz}], \quad (5.22)$$

es decir,

$$\boxed{\nu_{MS}(p) = 14.83[\text{GHz}]}. \quad (5.23)$$

Se puede apreciar un corrimiento al rojo en la frecuencia de oscilación dadas las correcciones no lineales.

5.1.5. Aproximación al plano infinito en modelo macro-spin

En esta sección se considerará el caso cuando el ancho del nano-alambre tiende a infinito, es decir, un plano infinito, y bajo un modelo MS para la magnetización. En este caso los términos asociados al campo dipolar se aproximarán del siguiente modo: $ncc_{00} \rightarrow 0$ dado que ya no habrá bordes normales a \hat{x} y dado que $cc_{00}/(2\pi p) = ncc_{00} - 1 \rightarrow -1$.

La matriz para los modos normales será

$$M = \begin{pmatrix} h_0 - k_s + 1/2 & k_s - 1/2 \\ 1/2 - k_s & -h_0 + k_s - 1/2 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

la cual posee autovalores $\Omega_{MSI} = \pm\sqrt{h_0(h_0 + 2k_s + 1)}$.

El corrimiento en frecuencia puede ser calculado utilizando la ecuación (5.10), utilizando $\mathcal{A} = h_0 - k_s + 1/2$ obteniéndose

$$\tilde{\Omega}_{MSI} = \frac{1}{2\Omega_{MSI}} \left(\frac{1}{2} - k_s \right) \left[3h_x \left(\frac{1}{2} - k_s \right) - \Omega_{MSI}^2 \right], \quad (5.25)$$

mientras que las tasas de disipación negativa y positiva quedan determinadas según las ecuaciones (5.16), (5.18), donde Γ_1 definido en la ecuación (5.19) queda

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4\Omega_{MSI}} \left(\frac{1}{2} - k_s \right) \left[4h_x - k_s + \frac{1}{2} \right]. \quad (5.26)$$

Al igualar las tasas de disipación para encontrar la solución para la amplitud $|b_{MSI}|^2$, se encuentran soluciones negativas, por lo que no son posibles las auto oscilaciones en este modelo.

5.1.6. Variación del ancho del nano-alambre

Las soluciones auto-oscilatorias no existen en los sistemas 2D, pero sí en los 1D. Se varía el ancho del nano-alambre para estudiar el modelo MS.

La razón entre el grosor y el ancho del nano-alambre, denotado por $r = b/c$ puede ser considerado como el parámetro para encontrar límites para la existencia de auto-oscilaciones en dichos dispositivos. El grosor del nano-alambre se mantiene constante, e igual a $2b = 2 \cdot 1.25 \cdot 10^{-6}$ [cm]. Para variar r se modifica el ancho del nano-alambre.

En la figura (5.2) se muestran distintas curvas con diferentes valores de r . Cada curva relaciona la potencia de la solución $|b_0|^2$ con la corriente eléctrica aplicada al sistema, la

cual posee valores en el intervalo $[I_{th}, 1.5I_{th}]$ para cada uno de los alambres. El dispositivo estudiado a lo largo de la tesis posee un $r \approx 0.0212$.

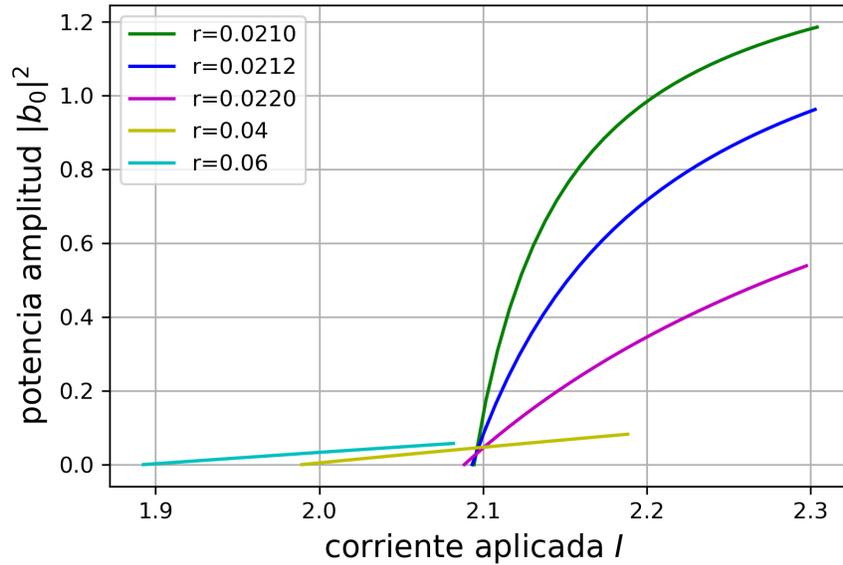


Figura 5.2: Soluciones para la potencia $|b_0|^2$ del modo MS para distintos anchos del nano-alambre. En todos los casos existe solución auto sostenida.

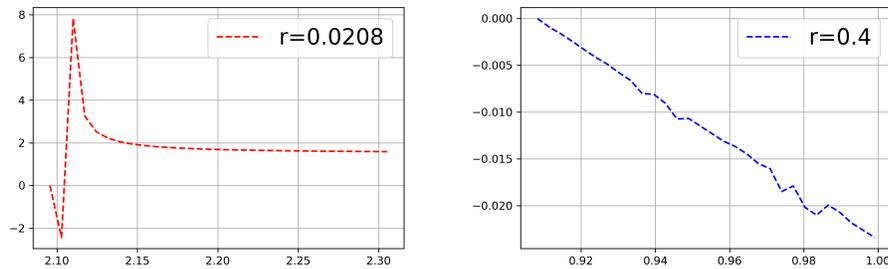


Figura 5.3: Soluciones para la potencia $|b_0|^2$ del modo MS para distintos anchos del nano-alambre. En ninguno de los casos existe solución auto sostenida.

La figura (5.3) muestra los límites del ancho para la existencia de las auto-oscilaciones. Se puede apreciar que para los valores $r = 0.4$ y $r = 0.0208$ las potencias $|b_0|^2$ dejan de ser positivas, por lo tanto no es posible generar auto oscilaciones. Valores cercanos de r a los reportados corresponden a los límites inferior y superior para la relación grosor-ancho del nano-alambre.

El límite inferior para r corresponde al límite del plano infinito, es decir, el ancho del nano-alambre es demasiado grande para permitir auto-oscilaciones, pues se convierte en un dispositivo 2D. Este resultado es concordante con los estudios experimentales presentados en 2020 por Smith *et al.* [22]. El valor crítico corresponde a $r = 0.0208$.

Por otra parte, a medida que el ancho del nano-alambre disminuye (y el valor de r aumenta) la curva presenta pendientes menores, hasta finalmente perderse el comportamiento esperado,

como se aprecia en la figura cuando $r = 0.4$. Esto se debe a que el modelo deja de ser aplicable cuando la longitud del grosor es comparable a la del ancho, debido a que ya no se puede asumir que la magnetización dependa únicamente de la posición a lo largo del ancho del alambre.

5.2. Modo Cuasi-Uniforme

El modo cuasi uniforme está determinado por el modo de oscilación con menor variación espacial obtenido cuando se realiza la expansión en serie de Fourier:

$$a(X, \tau) = \sum_{l=0}^{30} [a_l(\tau) \cos(l\pi X) + b_l(\tau) \sin\left(\frac{2l+1}{2}\pi X\right)], \quad (5.27)$$

$$a^*(X, \tau) = \sum_{l=0}^{30} [a_l^*(\tau) \cos(l\pi X) + b_l^*(\tau) \sin\left(\frac{2l+1}{2}\pi X\right)]. \quad (5.28)$$

Se consideran únicamente los modos simétricos, al igual que en las secciones anteriores.

Modos normales

Los resultados numéricos se resuelven con el lenguaje de programación Python3. Las frecuencias obtenidas se aprecian en la figura (5.4).

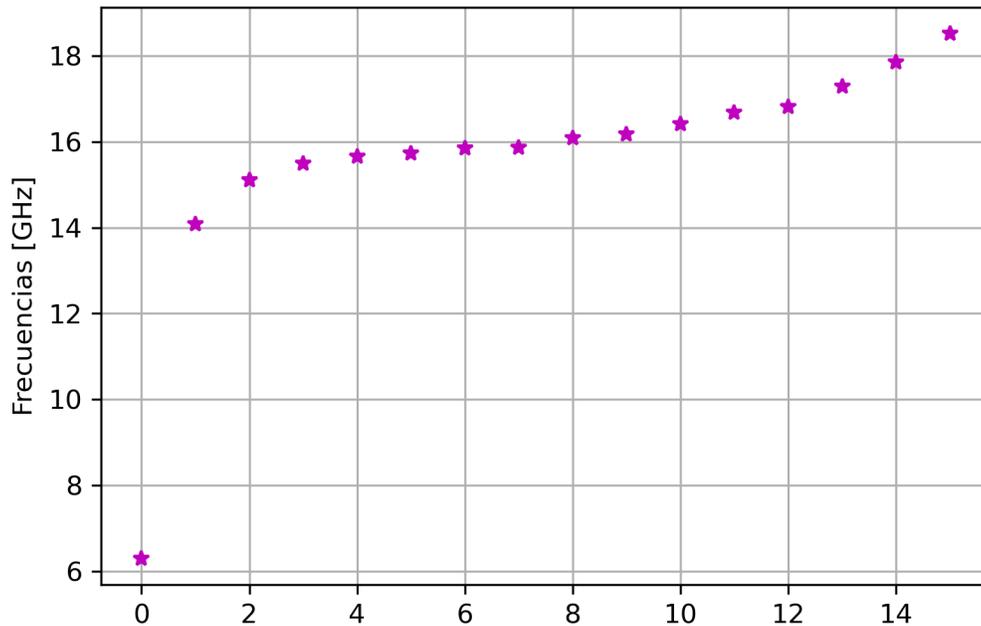


Figura 5.4: Frecuencias de los primeros 15 modos normales de oscilación del nano-oscilador

Existen dos modos de oscilación de especial interés, el primero de ellos corresponde al modo de borde (EM), llamado así debido a que la mayor contribución de la amplitud de la

oscilación se concentra en el borde de la muestra, además es el que presenta la frecuencia más baja. El segundo modo de interés, por ser más fácil de comprobar experimentalmente, corresponde al modo cuasi-uniforme (QUM) el cual presenta frecuencia $\nu = 16.68[\text{GHz}]$. ($\Omega = 0.607$ es el autovalor asociado). Ambos modos normales de oscilación se encuentran representados en la figura (5.5), donde se muestra la magnetización del material en el eje \hat{z} .

El perfil de la magnetización en \hat{z} a lo largo del ancho del alambre se puede calcular mediante el cambio de variables planteado en la ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} M_z &= M_0 \left(\frac{1}{2} \right) (a + a^*) \sqrt{2 - aa^*} \\ &\approx M_0 \sqrt{2} \text{Re}(a) \\ &\approx M_0 \left(C_R(X) \cos(\Omega\tau) + S_I \cos(\Omega\tau) \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde C_R y S_I son la parte real e imaginaria de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} C(X) &= \sqrt{2} \sum_{l=0}^{30} (c_l + d_l) \cos(l\pi X), \\ S(X) &= \sqrt{2} \sum_{l=0}^{30} (c_l - d_l) \cos(l\pi X). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se puede definir la elipticidad de dichas oscilaciones como $\epsilon = 1 - |m_{\text{mín}}|^2 / |m_{\text{máx}}|^2 = 1 - |S_R(X)|^2 / |C_R(X)|^2$ [19]. En el caso del modo cuasi-uniforme se obtiene un valor $\epsilon \approx 0.76$ a lo largo de todo el ancho, mientras que para el modo de borde la elipticidad oscila entre $\epsilon \approx 0.5$ y $\epsilon \approx 1$ a lo largo del ancho.

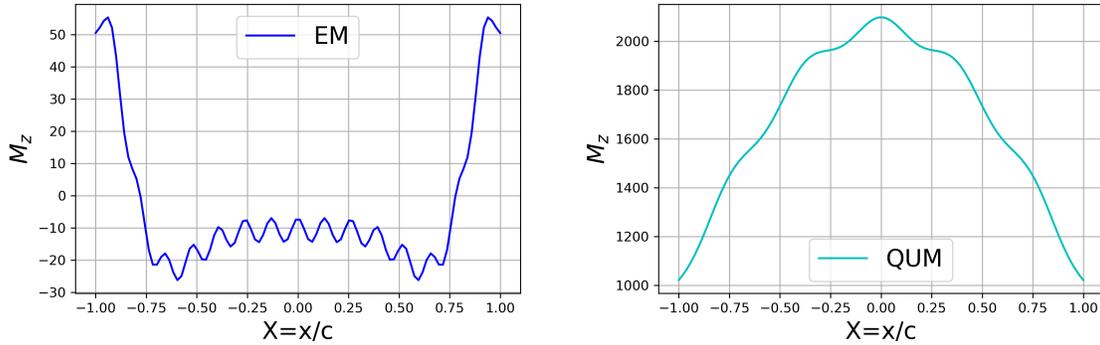


Figura 5.5: a) Modo normal de borde (EM). b) modo normal cuasi-uniforme de oscilación (QUM)

Al añadir los términos asociados al STT generado por una corriente circulante de $I = 2.20$ [mA] y la relajación magnética, el modo cuasi-uniforme presenta una frecuencia de 16.29 [GHz]. La corriente crítica para presentar auto oscilaciones según el modelo universal corresponde a $I_{th} = 2.19$ [mA]. El perfil del QUM se aprecia en la figura (5.6), donde se representa, nuevamente, la magnetización en el eje \hat{z} de la muestra.

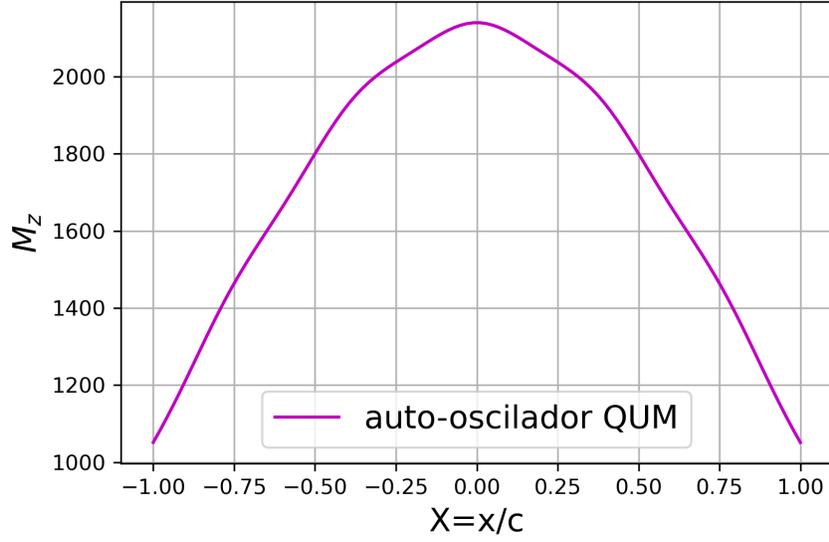


Figura 5.6: Modo cuasi-uniforme del auto oscilador

El corrimiento en frecuencia para dicho modo corresponde a $\tilde{\Omega}_{QUM} = -0.15$, en unidades de frecuencia es $\tilde{\nu}_{QUM} = -4.38[\text{GHz}]$ correspondiente a un refshift en la frecuencia. La solución para la potencia $p_{QUM} = |b_{QUM}|^2$ correspondiente al punto donde las tasas de disipación positiva y negativa se encuentran tiene un valor de $p_{QUM} = 0.032$.

Tasas de disipación

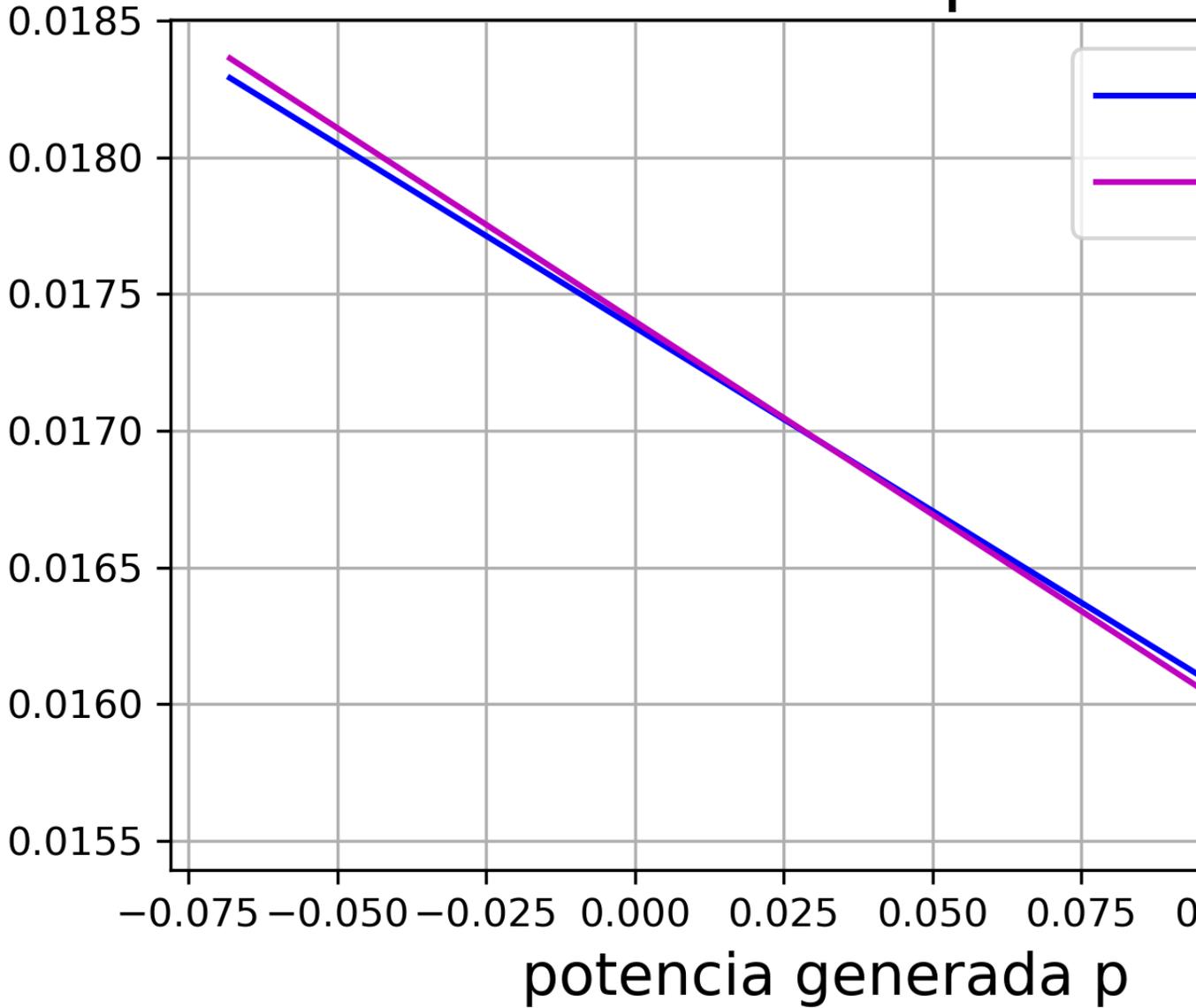


Figura 5.7: Tasas de disipación positiva y negativa para el modo de oscilación cuasi-uniforme. El punto donde ambas curvas se intersectan corresponde a la solución para la potencia de la oscilación.

Por lo tanto la frecuencia de oscilación del modo cuasi-uniforme es

$$\nu_{QUM}(p) = \nu_{QUM}^0 + \tilde{\nu}_{QUM} \cdot p_{QU} = 16.68 - 4.38 \cdot 0.032 = 16.54[GHz], \quad (5.31)$$

es decir,

$$\boxed{\nu_{QUM}(p) = 16.54[GHz]}. \quad (5.32)$$

Por lo tanto se puede apreciar un corrimiento al rojo en la frecuencia tanto en el modo cuasi-uniforme de oscilación como en el modelo más básico: el modelo MS.

Capítulo 6

Sincronización de dos auto-osciladores

Cuando dos objetos oscilantes se encuentran ligados mediante una débil interacción, se puede observar que sus ritmos de oscilación se ajustan. A este fenómeno se le llama sincronización. Cada oscilador tiene su movimiento determinado por su estructura interna, por lo que al ser perturbado, después de un periodo transitorio, éste retoma su movimiento propio. Sin embargo, en el caso del acople entre dos osciladores, por débil que la interacción sea, se alteran sus frecuencias, y estas se sincronizan, a este fenómeno se le llama entrelazamiento de frecuencias. Este fenómeno es diferente al de resonancia debido a que en este último no existe un ajuste de la frecuencia propia del oscilador, como si ocurre en el fenómeno de la sincronización.

En las siguientes secciones se desarrollará la teoría presentada en el libro *"Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences"* [36], la cual será aplicada al caso de los dispositivos estudiados en la presente tesis.

6.1. Dinámica de la fase del auto-oscilador perturbado

6.1.1. Fase de un auto-oscilador

El auto-oscilador se puede describir mediante el sistema de M ecuaciones diferenciales ordinarias para sus variables

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (6.1)$$

donde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M)$. Si existe una solución estable periódica $\vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(t + T_0)$ donde en el espacio de fase se ve como una trayectoria cerrada aislada y atractiva, entonces dicha solución se denomina *ciclo límite*. Un punto que se mueve dentro de dicha trayectoria representa una *oscilación auto sostenida*. El propósito es describir éste movimiento en términos de la fase ϕ , como una coordenada a lo largo del ciclo límite, donde la fase cumple con la ecuación

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega_0, \quad (6.2)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ es la frecuencia natural de las auto oscilaciones.

Ejemplo: Ecuación compleja para la amplitud

Se considera la ecuación de Landau-Stuart o el modelo "lambda-omega" descrita a continuación

$$\frac{dA}{dt} = (1 + i\eta)A - (1 + i\alpha)|A|^2 A, \quad (6.3)$$

donde A es la amplitud compleja del auto oscilador, η y α son parámetros del sistema. Se puede ver que se trata de una ecuación esencialmente análoga a la que describe el sistema auto oscilatorio expuesto en la ecuación (4.52). Si se escribe esta ecuación en coordenadas polares $A = Re^{i\theta}$ se obtiene una ecuación para R y θ .

$$\frac{dR}{dt} = R(1 - R^2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \eta - \alpha R^2. \quad (6.4)$$

La ecuación para la amplitud nos indica que el ciclo límite se encuentra cuando $R = 1$ (y $R = 0$ la solución trivial) y las soluciones para condiciones iniciales arbitrarias $R_0 = R(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$ son

$$R(t) = \left(1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2}\right)^{-1/2}, \quad (6.5)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln\left(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2t}\right). \quad (6.6)$$

En el ciclo límite θ rota con velocidad angular constante $\omega_0 = \eta - \alpha$, por ende se puede considerar como la fase del sistema. Sin embargo si amplitud inicial se desvía de $R = 1$, el corrimiento en la fase es proporcional a α , por lo que para definir la fase en todo el plano (R, θ) se usa la definición:

$$\phi(R, \theta) = \theta - \alpha \ln(R), \quad (6.7)$$

la cual cumple $\dot{\phi} = \eta - \alpha$, por lo tanto se puede considerar como la fase del sistema.

6.1.2. Dinámica de fase para el auto-oscilador perturbado

Se estudia el caso de la sincronización de dos auto osciladores. La ecuación para el primer oscilador con periodo T_1 , expresada en la ecuación (6.1), en presencia de la interacción débil con un segundo oscilador con periodo T_2 , se ve modificada de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{x}^{(1)}}{dt} = \vec{f}^{(1)}(\vec{x}^{(1)}) + \varepsilon \vec{p}^{(1)}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, t), \quad (6.8)$$

donde $\vec{p}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, t) = \vec{p}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, t + T_2)$, donde generalmente T_2 , el periodo del segundo oscilador, es diferente a T_1 , el periodo natural del primer sistema. ε da cuenta de la pequeñez de la interacción. Esta interacción lleva la trayectoria del movimiento fuera del ciclo límite, pero como es pequeña y el ciclo es estable, la nueva trayectoria se desvía poco de la solución $\vec{x}_0^{(1)}(t)$, quedando en la vecindad del ciclo límite. Por lo tanto, las perturbaciones a la amplitud del movimiento son pequeñas y luego de un tiempo vuelve a su estado sin perturbar. Lamentablemente no sucede lo mismo con la fase, las perturbaciones a la fase la pueden llevar lejos del ciclo. Esto permite que se pueda describir la dinámica perturbada solo en términos

de la fase del sistema. Sin embargo la fase, como se ha definido hasta ahora, solo existe dentro del ciclo límite, y su definición debe cambiar para poder hablar de fase en la vecindad del ciclo límite.

La idea principal es que la nueva definición de fase siga comportándose de acuerdo a la ecuación (6.2). Para ello se deben definir las *isocronas*. Considerando un punto en la vecindad o dentro del ciclo límite, se puede mapear de acuerdo al periodo del ciclo límite mediante $\Phi(\vec{x})$:

$$\vec{x}^{(1)}(t) \rightarrow \vec{x}^{(1)}(t + T_1) \equiv \Phi^{(1)}(\vec{x}^{(1)}). \quad (6.9)$$

Dicho mapeo permite que todos los puntos sean atraídos o bien, pertenezcan al ciclo límite, con esto se pueden definir las *isócronas*. Éstas corresponden a hipersuperficies (M-1) dimensionales tales que si se considera un punto \vec{x}^* perteneciente al ciclo límite, todos los puntos en su vecindad que son atraídos hacia \vec{x}^* componen la isocrona. Por lo tanto en cada punto del ciclo límite hay una isocrona que lo atraviesa. Con esta definición, cada isocrona puede estar parametrizada por la fase ϕ , correspondiente al punto que pertenece al ciclo límite, por lo tanto son hipersuperficies con fase constante.

La ecuación para la fase generalizada para el sistema no perturbado será

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} \frac{dx_k^{(1)}}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} f_k^{(1)}(\vec{x}^{(1)}) = -\omega_1, \quad (6.10)$$

si se añade la interacción la ecuación se ve modificada

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} (f_k^{(1)}(\vec{x}^{(1)}) + \varepsilon p_k^{(1)}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})) = -\omega_1 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}} p_k^{(1)}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}). \quad (6.11)$$

Como la perturbación es proporcional a ε , a primer orden, el término perturbativo puede ser evaluado dentro del ciclo límite

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dt} = -\omega_1 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x_k^{(1)}}(\vec{x}_0^{(1)}) p_k^{(1)}(\vec{x}_0^{(1)}, \vec{x}_0^{(2)}) \equiv -\omega_1 + \varepsilon Q_1(\phi_1, \phi_2), \quad (6.12)$$

donde se ha definido $Q_1(\phi_1, \phi_2, t)$ para representar la interacción, es dependiente de ϕ_i gracias a la correspondencia entre la fase y los puntos pertenecientes al ciclo límite. Q_i es una función 2π periódica en ϕ y periódica en t con periodo T .

La función $Q(\phi_1, \phi_2)$ se puede escribir como una doble serie de Fourier gracias a su periodicidad, es decir,

$$Q_1(\phi_1, \phi_2) = \sum_{k,l} a_1^{k,l} e^{ik\phi_1 + il\phi_2} \quad Q_2(\phi_1, \phi_2) = \sum_{k,l} a_2^{k,l} e^{ik\phi_1 + il\phi_2}. \quad (6.13)$$

A orden cero $\phi_i = -\omega_i t$. La condición de resonancia viene dada por $k\omega_1 + l\omega_2 \approx 0$, todos los otros términos de la serie son rápidos. Por lo tanto si se considera que las frecuencias se encuentran cercanas a la condición de resonancia, es decir, $\omega_1/\omega_2 \approx m/n$, entonces los términos resonantes corresponden a $k = nj$ y $l = -mj$. La ecuación de dinámica queda

$$\frac{d\phi_1}{dt} = -\omega_1 + \varepsilon \sum_j a_1^{nj, -mj} e^{ij(n\phi_1 - m\phi_2)} = -\omega_1 + \varepsilon q_1(n\phi_1 - m\phi_2), \quad (6.14)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = -\omega_2 + \varepsilon \sum_j a_2^{mj, -nj} e^{ij(m\phi_2 - n\phi_1)} = -\omega_2 + \varepsilon q_2(m\phi_2 - n\phi_1), \quad (6.15)$$

se puede definir la diferencia de fase $\psi = n\phi_1 - m\phi_2$, y la ecuación para dicha variable

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi), \quad (6.16)$$

donde $\nu = n\omega_1 - m\omega_2$, $q(\psi) = nq_1(\psi) - mq_2(-\psi)$. En el caso de que exista sincronización, existirá un punto fijo estable ψ_0 y las frecuencias observadas en los osciladores son

$$\Omega_{1,2} = \langle \dot{\phi}_{1,2} \rangle = -\omega_{1,2} + \varepsilon q_{1,2}(\pm\psi_0). \quad (6.17)$$

Dentro de la zona de sincronización las frecuencias observadas cumplirán con la relación $\Omega_1/\Omega_2 = m/n$. Se puede considerar el caso particular donde $m = n = 1$, y donde el acople es simétrico, es decir $q_1(\psi) = q_2(\psi)$, por lo tanto $q(\psi) = -q(-\psi)$. En dicho caso la función más sencilla con dicha paridad es seno, por lo tanto la ecuación para la diferencia de fase se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin(\psi). \quad (6.18)$$

Dependiendo del signo de ε la interacción puede ser atractiva (en fase $\varepsilon < 0$) o repulsiva (contra-fase $\varepsilon > 0$). La sincronización en este desarrollo aparece como un *phase - locking* perfecto, dado que los osciladores no solo tienen la misma frecuencia sino que existe un corrimiento entre las fases que es constante $\phi_1 = \phi_2 + \psi_0$ en la aproximación realizada.

6.2. Sincronización en osciladores de spin

El fenómeno de la sincronización en auto-osciladores es un tópico bastante estudiado en la comunidad científica, en particular para los osciladores de spin dado que reduce el ancho de banda y se potencian las señales generadas por los dispositivos. Existen estudios de sincronización de auto-osciladores de spin con señales externas [16], así como también de sincronización entre auto-osciladores [39-42].

Existen diversos experimentos en la literatura que demuestran que es posible sincronizar auto osciladores de spin por diferentes vías, una de ellas es la sincronización de varios osciladores mediante una corriente aplicada común, como es el caso del estudio, publicado en 2016 por A. A. Awad *et al.* [39], el cual muestra sincronización de nano-constricciones dispuestas a lo largo de un nano-alambre, logrando sincronizar hasta 9 nano-constricciones con una separación de $300nm$ entre ellas y dos nano-constricciones separadas una distancia de hasta $1.2\mu m$, distancia que puede ser aumentada hasta $4\mu m$ cambiando la geometría del nano-alambre.

Otra vía de interacción a considerar es el campo dipolar generado por los auto osciladores, se han realizado diversos estudios teóricos y simulaciones al respecto. En 2016 Doo Hyung Kang *et al.* [40] demuestran mediante cálculos teóricos y simulaciones que es posible sincronizar nano-osciladores de spin basados en SHE mediante acople dipolar. En dicho

estudio se utilizan osciladores con forma de nano-alambres de ancho $100nm$, grosor $1nm$ y largo de $3\mu m$. El arreglo para la sincronización se hace en paralelo, es decir, se apilan los osciladores uno encima del otro. La sincronización de los osciladores se realiza mediante el tensor demagnetizante. Utilizando el modelo macro-spín se obtienen los límites de los estados de sincronización en función de la distancia entre los osciladores, encontrando un valor de distancia máxima para la zona de sincronización. Vasil S. Tiberkevich *et al.* [41] presentan en 2013 un artículo donde se desarrolla un modelo de sincronización de auto osciladores con señales externas y con otros osciladores que permite encontrar el ancho de banda para el fenómeno de *entrelazamiento de frecuencias*, así también la región de estabilidad de las auto-oscilaciones. El modelo permite considerar un tiempo de retraso en el traspaso de energía desde el elemento activo al auto-oscilador pasivo.

También se puede añadir a la interacción dipolar, la energía de interacción entre spin vecinos como vía para la sincronización, como se muestra en el artículo publicado en 2020 por Zahedinejad *et al.* [42] donde se sincronizan arreglos en dos dimensiones de SHNO en geometría de nano-constricciones variando la cantidad de osciladores en el arreglo y la distancia entre ellos.

En particular, no se encuentra en la literatura, el estudio de sincronización de nano-alambres vía interacción dipolar en la disposición espacial a estudiar en la presente tesis. La disposición de los osciladores se esquematiza en la figura (7.1). En vista de los antecedentes expuestos, se realizará un estudio del alcance del campo dipolar generado por un nano-alambre para decidir cómo variar la distancia entre nano-alambres para estudiar la sincronización de estos.

Capítulo 7

Sincronización de SHNO en geometría nano-alambre

En esta sección se describe la sincronización para 2 nano-osciladores casi idénticos magnetizados transversalmente por un campo magnético constante, dispuestos de forma paralela en el eje \hat{x} como se muestra en la figura (7.1). En ella se puede ver la posición de los bordes de los nano-osciladores en el eje X correspondiente al largo normalizado del los nano-osciladores, y que la separación entre los centros de los alambres corresponde a una constante s la cual normalizada se denota $S = s/c$.

La sincronización de los nano-osciladores se llevará a cabo a partir del la interacción dipolar entre ellos, por lo tanto en una primera instancia se calculará el campo dipolar de interacción. Luego se analizará la ecuación de fase expuesta en el capítulo anterior.

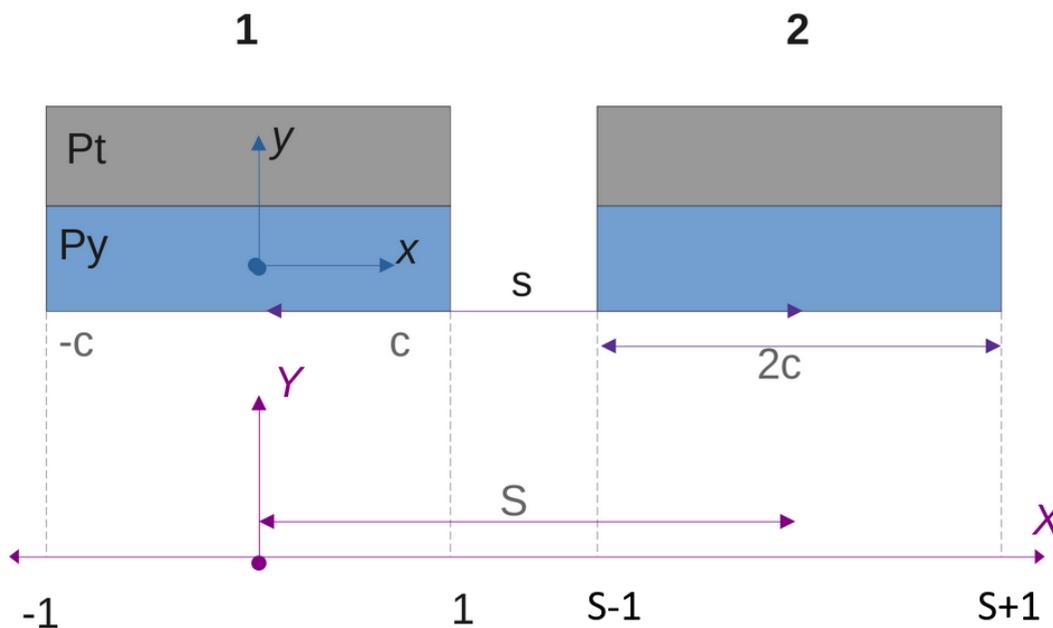


Figura 7.1: Esquematización del arreglo de 2 nano-alambres posicionados de forma paralela a una distancia s .

7.1. Campo de interacción dipolar

La energía asociada a la interacción entre el campo dipolar producido por la magnetización y esta misma al considerar los dos nano-alambres corresponde a

$$U_D = -\frac{1}{8\pi} \int dV \vec{H}_D(\vec{m}_1 + \vec{m}_2) \cdot (\vec{m}_1 + \vec{m}_2). \quad (7.1)$$

Los términos que asocian $\vec{H}_D(\vec{m}_i) \cdot \vec{m}_i$ con $i = 1, 2$ son los estudiados en las secciones anteriores, mientras que los términos $\vec{H}_D(\vec{m}_i) \cdot \vec{m}_j$ son los correspondientes a la interacción entre los dos nano-osciladores, estos corresponden a dos términos iguales, por lo que usando el teorema de reciprocidad se pueden escribir como uno sólo:

$$U_D^I = -\frac{1}{4\pi} \int dV_1 \vec{H}_D(\vec{m}_2) \cdot \vec{m}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int dV_2 \vec{H}_D(\vec{m}_1) \cdot \vec{m}_2. \quad (7.2)$$

Se desarrolla el campo producido por el nano-alambre 1 ubicado en el centro del sistema de referencia para encontrar la contribución a la ecuación para el nano-alambre 2. La contribución del nano-alambre 2 sobre la dinámica del primero se desarrolla de forma análoga.

Se separa el campo dipolar según las componentes de la magnetización que lo generan y se promedia en el grosor del nano-alambre dado que el modelo utilizado asume que la magnetización es uniforme en el grosor, de modo que el potencial puede escribirse de la siguiente forma:

$$U_{D,2}^I = -\frac{1}{4\pi} \int dV_2 \langle H_D^x(m_{1x}\hat{x}) \rangle m_{2x} - \frac{1}{4\pi} \int dV_2 \langle H_D^y(m_{1y}\hat{y}) \rangle m_{2y}. \quad (7.3)$$

La componente en \hat{x} se puede descomponer en una parte lineal y otra no lineal,

$$\langle H_D^x(m_{1x}\hat{x}_1) \rangle = \langle H_D^x(\hat{x}_1) \rangle - \langle H_D^x(a_1 a_1^* \hat{x}_1) \rangle, \quad (7.4)$$

las contribuciones son las mismas que se han calculado anteriormente, sin embargo la notación se hará más explícita:

$$\langle H_D^x(\hat{x}_1) \rangle = -4\pi n_x (X + S) \quad (7.5)$$

$$\langle H_D^x(a_1 a_1^* \hat{x}_1) \rangle = -\frac{2}{r} \int_{-1}^1 dX' a_1(X') a_1^*(X') \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right) \quad (7.6)$$

$$\langle H_D^y(m_{1y}\hat{y}) \rangle = \frac{2}{r} \int_{-1}^1 dX' m_{1y}(X') \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right), \quad (7.7)$$

donde $X = x/c$ la variable del eje \hat{x} normalizada, $n_x^{(1)}$ es el mismo factor demagnetizante utilizado en el capítulo 3 de modos normales. Reemplazando en la ecuación (7.3) y usando las variables de Holstein-Primakoff para la magnetización, y aplicando Taylor sobre la raíz $\sqrt{2 - aa^*}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
U_D^I &= - \int dV_2 n_x(X+S)(a_2 a_2^* + a_1 a_1^*) \\
&+ \frac{1}{2\pi r} \int dV_2 \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) a_1(X') a_1^*(X') (a_2(X) a_2^*(X)) \\
&+ \frac{1}{4\pi r} \int dV_2 \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) (a_1(X') - a_1^*(X')) (a_2(X) - a_2^*(X)) \times \\
&\times \left(1 - \frac{a_1(X') a_1^*(X')}{4} \right) \left(1 - \frac{a_2(X) a_2^*(X)}{4} \right).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Notar que esta expresión es simétrica para intercambios de los subíndices $i = 1, 2$, por lo tanto corresponde a una representación adecuada de la energía de interacción dipolar. Variando con respecto a la variable a_2^* se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U_D^I}{\delta a_2^*} &= -n_x(X+S)a_2(X) + \frac{1}{2\pi r} \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) a_1(X') a_1^*(X') a_2(X) \\
&+ \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) (a_1(X') - a_1^*(X')) \times \\
&\times \left(-1 + \frac{|a_1(X')|^2}{4} - \frac{a_2^2(X)}{4} + \frac{|a_2(X)|^2}{2} \right),
\end{aligned} \tag{7.9}$$

por otro lado, al variar respecto a la variable a_2 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U_D^I}{\delta a_2} &= -n_x(X+S)a_2^*(X) + \frac{1}{2\pi r} \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) a_1(X') a_1^*(X') a_2^*(X) \\
&+ \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X+S-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X+S-X')^2}} \right) (a_1(X') - a_1^*(X')) \times \\
&\times \left(1 - \frac{|a_1(X')|^2}{4} + \frac{a_2^{*2}(X)}{4} - \frac{|a_2(X)|^2}{2} \right).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

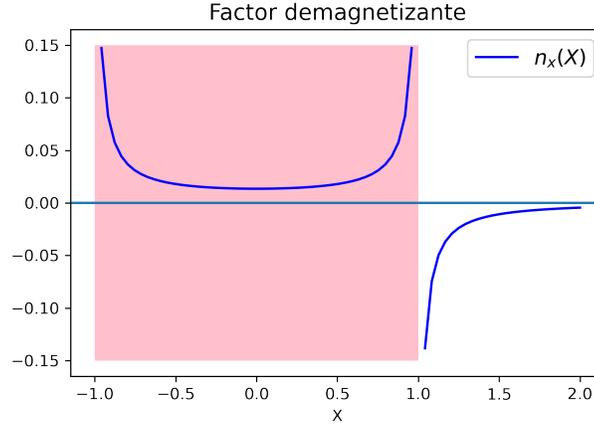


Figura 7.2: factor demagnetizante generado por el nano-alambre 1, cuya posición es representada por la zona sombreada, en función de la posición normalizada.

7.2. Ecuación para la fase de un auto-oscilador

Dada la ecuación para el auto-oscilador definida por el modelo universal utilizado en el capítulo 4 de la presente, se busca escribir dicho modelo en términos del ejemplo planteado en la sección (6.1.1.) para obtener una ecuación para la fase análoga a (6.7), con los parámetros ya estudiados de nuestro modelo.

Por lo tanto buscamos escribir la ecuación del modelo universal de forma análoga a la ecuación (6.3), es decir, tomar la siguiente ecuación:

$$\frac{db_j}{d\tau} = -i(\omega_0 + \tilde{\omega}|b_j|^2)b_j - \Gamma_G(1 + Q|b_j|^2)b_j + \sigma I(1 - f|b_j|^2)b_j = 0, \quad (7.11)$$

y escribirla de la forma

$$\frac{db}{d\tau} = -i(\omega_0 - \delta|b|^2)b + (\gamma - \xi|b|^2)b, \quad (7.12)$$

donde se ha omitido el subíndice j y se define $\delta = -\tilde{\omega}$, $\gamma = -\Gamma_G + \sigma I$ y $\xi = \Gamma_G Q + f\sigma I$.

Se sigue el mismo procedimiento del ejemplo, con ello se obtienen dos ecuaciones al escribir $b = Re^{i\theta}$, las cuales corresponden a

$$\dot{R} = (\gamma - \xi R^2)R, \quad \dot{\theta} = -\omega_0 + \delta R^2, \quad (7.13)$$

definiendo así la fase del oscilador vía

$$\phi = \theta + \frac{\delta}{\xi} \ln(R), \quad (7.14)$$

la cual cumple con una derivada temporal constante y por ende se pueden definir curvas isócronas definidas por $\dot{\phi} = -\omega_0 + (\delta/\xi)\gamma = \text{cte}$. Por lo tanto, la solución a esta ecuación es

$$\phi = \theta + \frac{\delta}{\xi} \ln(R) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{b^*}{b}\right) + \frac{\delta}{2\xi} \ln(bb^*), \quad (7.15)$$

donde se ha usado que, dado $b = Re^{i\theta}$, se obtiene $\theta = (i/2)\ln(b^*/b)$ y $R = \sqrt{bb^*}$.

7.3. Auto-osciladores con interacción dipolar a orden no lineal

La dinámica de oscilación de la magnetización es descrita por la ecuación (4.23) para la variable a , la cual considera tanto el STT, generado por el SHE, como la relajación magnética del sistema. Si un auto-oscilador, descrito por dicha ecuación, se encuentra en presencia del campo dipolar generado por otro auto-oscilador, su ecuación dinámica se ve modificada, pues se añade el término $\delta U_D^I/\delta a_2^*$, el cual contiene la interacción entre la magnetización del oscilador (2) con el campo dipolar creado por la magnetización del otro alambre (1), de modo que la ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{da_2}{d\tau} + i\frac{\delta U_T^{(2)}}{\delta a_2^*} + \alpha\left(\frac{\delta U_{eff}^{(2)}}{\delta a_2^*} - \frac{a_2^2}{2}\frac{\delta U_{eff}^{(2)}}{\delta a_2}\right) = -i\frac{\delta U_D^I}{\delta a_2^*}. \quad (7.16)$$

Para resolver la ecuación de fase para dicha interacción se deben expandir en series de Fourier ambos osciladores, es decir:

$$a_1 = a_{10} + \sum_{l=1}^N \left[a_{1l} \cos(l\pi X) + b_{1l} \sin\left(\frac{2l-1}{2}\pi X\right) \right], \quad (7.17)$$

$$a_2 = a_{20} + \sum_{l=1}^N \left[a_{2l} \cos(l\pi X) + b_{2l} \sin\left(\frac{2l-1}{2}\pi X\right) \right], \quad (7.18)$$

con ello, al considerar sólo modos simétricos (y no los anti simétricos), el término de interacción en términos de los coeficientes es

$$\begin{aligned} \frac{da_{2l}^I}{d\tau} = & ince_{ln}a_{2n} + \frac{i}{4\pi p}cce_{ln}(a_{1n} - a_{1n}^*) - i\frac{n_l}{16\pi p} \left[8E_{lnmk}^S a_{2n}a_{1m}a_{1k}^* \right. \\ & \left. + D_{lnmk}^S a_{1n}(a_{1m} - a_{1m}^*)a_{1k}^* - C_{lnmk}^S a_{2n}(a_{2m} - 2a_{2m}^*)(a_{1k} - a_{1k}^*) \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde las integrales nce_{ln} , cce_{ln} , C_{lnmk}^S , D_{lnmk}^S y E_{lnmk}^S se definen en el apéndice B. Los índices repetidos indican suma sobre ellos. Al realizar el cambio de variables para dejar las ecuaciones en términos de los modos normales de cada uno de los sistemas sin interacción:

$$\begin{pmatrix} a_{in} \\ a_{in}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{in}^j & -\mu_{in}^j \\ -\mu_{in}^{*j} & \lambda_{in}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ij} \\ b_{ij}^* \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

donde $i = 1, 2$ es el número del oscilador, y j representa el modo normal de oscilación estudiado. Si los dos osciladores se encuentran sincronizados entonces ambos tendrán la misma frecuencia de oscilación $\omega_1 = \omega_2 = \omega_s$. Si se consideran solamente los términos resonantes a $e^{-i\omega_s\tau}$, los términos que aparecen en la ecuación (7.19) quedan:

$$a_{2n}a_{1m}a_{1k}^* \approx \lambda_{2n}(\lambda_{1m}\lambda_{1k}^* + \mu_{1m}\mu_{1k}^*)|b_{1j}|^2b_{2j} + \mu_{2n}\lambda_{1m}\mu_{1k}^*(b_{1j})^2b_{2j}^*, \quad (7.21)$$

$$a_{1n}(a_{1m} - a_{1m}^*)a_{1k}^* \approx \left((\lambda_{1m} + \mu_{1m}^*)(\lambda_{1n}\lambda_{1k}^* + \mu_{1n}\mu_{1k}^*) + \lambda_{1n}\mu_{1k}^*(\mu_{1m} + \lambda_{1m}^*) \right) |b_{1j}|^2 b_{1j}, \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} a_{2n}(a_{2m} - 2a_{2m}^*)(a_{1k} - a_{1k}^*) &\approx -\lambda_{2n}(\lambda_{2m} + 2\mu_{2m}^*)(\mu_{1k} + \lambda_{1k}^*)(b_{2j})^2 b_{1j}^* \\ &\quad - (\lambda_{2n}(\mu_{2m} + 2\lambda_{2m}^*) + \mu_{2n}[\lambda_{2m} + 2\mu_{2m}^*])(\lambda_{1k} + \mu_{1k}^*) |b_{2j}|^2 b_{1j}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

don ello la ecuación (7.19) para $\dot{a}_{(2)l}^I$ queda:

$$\dot{a}_{(2)l}^I = J_{2l}^2 b_{2j}^0 + J_{2l}^1 b_{1j}^0 + K_{2l}^{12} (b_{1j}^0)^2 b_{2j}^{0*} + K_{2l}^{21} (b_{2j}^0)^2 b_{1j}^{0*}, \quad (7.24)$$

donde se define

$$J_{2l}^2 = ince_{ln} \lambda_{2n}^j - i \frac{n_l}{2\pi r} E_{lnmk}^S \lambda_{2n}^j (\lambda_{1m}^j \lambda_{1k}^{*j} + \mu_{1m}^j \mu_{1k}^{*j}) |b_{1j}|^2, \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} J_{2l}^1 &= i \frac{cce_{ln}}{4\pi r} (\lambda_{1n}^j + \mu_{1n}^{*j}) \\ &\quad - i \frac{n_l}{16\pi r} D_{lnmk}^S \left((\lambda_{1m} + \mu_{1m}^*)(\lambda_{1n}\lambda_{1k}^* + \mu_{1n}\mu_{1k}^*) + \lambda_{1n}\mu_{1k}^*(\mu_{1m} + \lambda_{1m}^*) \right) |b_{1j}|^2 \\ &\quad - i \frac{n_l}{16\pi r} C_{lnmk}^S \left(\lambda_{2n}^j (\mu_{2m}^j + 2\lambda_{2m}^{*j}) + \mu_{2n}^j (\lambda_{2m}^j + 2\mu_{2m}^{*j}) \right) (\lambda_{1k}^j + \mu_{1k}^{*j}) |b_{2j}|^2, \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$K_{2l}^{12} = -i \frac{n_l}{2\pi r} E_{lnmk}^S \mu_{2n}^j \lambda_{1m}^j \mu_{1k}^{*j}, \quad (7.27)$$

$$K_{2l}^{21} = -i \frac{n_l}{16\pi r} C_{lnmk}^S \lambda_{2n}^j (\lambda_{2m}^j + 2\mu_{2m}^{*j}) (\mu_{1k}^j + \lambda_{1k}^{*j}). \quad (7.28)$$

De forma análoga para la variable $a_{(2)l}^*$, la ecuación dinámica:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{2l}^{*I} &= i \frac{cce_{ln}}{4\pi r} (a_{1n} - a_{1n}^*) - ince_{ln} a_{2n}^* + i \frac{n_l}{16\pi r} \left[8E_{lnmk}^S a_{2n}^* a_{1m} a_{1k}^* \right. \\ &\quad \left. - D_{lnmk}^S a_{1n} (a_{1m} - a_{1m}^*) a_{1k}^* + C_{lnmk}^S a_{2m}^* (a_{2n}^* - 2a_{2n}) (a_{1k} - a_{1k}^*) \right], \end{aligned} \quad (7.29)$$

la cual con el cambio de variables y con definiciones análogas a las usadas en la ecuación (7.24) queda

$$\dot{a}_{2l}^{*I} = L_{2l}^2 b_{2j}^0 + L_{2l}^1 b_{1j}^0 + M_{2l}^{12} (b_{1j})^2 b_{2j}^{*} + M_{2l}^{21} (b_{2j})^2 b_{1j}^{*}, \quad (7.30)$$

donde se define

$$L_{2l}^2 = ince_{ln} \mu_{2n}^{*j} - i \frac{n_l}{2\pi r} E_{lnmk}^S \mu_{2n}^{*j} (\lambda_{1m}^j \lambda_{1k}^{*j} + \mu_{1m}^j \mu_{1k}^{*j}) |b_{1j}|^2, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned}
L_{2l}^1 &= i \frac{c c e_{ln}}{4\pi r} (\lambda_{1n}^j + \mu_{1n}^{*j}) \\
&- i \frac{n_l}{16\pi r} D_{lnmk}^S \left((\lambda_{1m} + \mu_{1m}^*) (\lambda_{1n} \lambda_{1k}^* + \mu_{1n} \mu_{1k}^*) + \lambda_{1n} \mu_{1k}^* (\mu_{1m} + \lambda_{1m}^*) \right) |b_{1j}|^2 \\
&- i \frac{n_l}{16\pi r} C_{lnmk}^S \left(\lambda_{2m}^{*j} (2\lambda_{2n}^j + \mu_{2n}^{*j}) + \mu_{2m}^{*j} (2\mu_{2n}^j + \lambda_{2n}^{*j}) \right) (\lambda_{1k}^j + \mu_{1k}^{*j}) |b_{2j}|^2,
\end{aligned} \tag{7.32}$$

$$M_{2l}^{12} = -i \frac{n_l}{2\pi r} E_{lnmk}^S \lambda_{2n}^{*j} \mu_{1m}^{*j} \lambda_{1k}^j, \tag{7.33}$$

$$M_{2l}^{21} = -i \frac{n_l}{16\pi r} C_{lnmk}^S \mu_{2m}^{*j} (2\lambda_{2n}^j + \mu_{2n}^{*j}) (\mu_{1k}^j + \lambda_{1k}^{*j}). \tag{7.34}$$

7.4. Ecuación para la fase perturbada

Al considerar la ecuación (6.11), la ecuación para la fase del modo j del i -ésimo oscilador puede ser descrita según

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = -\Omega_i + \frac{\partial\phi_i}{\partial b_{ij}^I} \dot{b}_{ij}^I + \frac{\partial\phi_i}{\partial b_{ij}^{*I}} \dot{b}_{ij}^{*I}, \tag{7.35}$$

donde $\Omega_i = \Omega_i^0 - (\delta_i/\epsilon_i)\gamma_i$ definen las isócronas para el oscilador i -ésimo no perturbado. Dada la solución encontrada en la ecuación (7.15), las derivadas son:

$$\frac{\partial\phi}{\partial b} = -\frac{i}{2b} + \frac{\delta}{2\xi b} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial b^*} = \frac{i}{2b^*} + \frac{\delta}{2\xi b^*}. \tag{7.36}$$

Por lo tanto, la parte asociada a la interacción para la fase del segundo oscilador es:

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \frac{1}{2} \left(-i + \frac{\delta_2}{\epsilon_2} \right) \frac{\dot{b}_2^I}{b_2} + c.c. = \frac{1}{2} \left(-i + \frac{\delta_2}{\epsilon_2} \right) \frac{1}{b_2} \sum_l (W_2^{-1})_{jl} \begin{pmatrix} \dot{a}_{2l}^I \\ \dot{a}_{2l}^{*I} \end{pmatrix} + c.c., \tag{7.37}$$

al considerar las expresiones desarrolladas en la sección anterior,

$$\dot{a}_{(2l)}^I = J_{2l}^2 b_{2j} + J_{2l}^1 b_{1j} + K_{2l}^{12} (b_{1j})^2 b_{2j}^* + K_{2l}^{21} (b_{2j})^2 b_{1j}^*, \tag{7.38}$$

$$\dot{a}_{2l}^{*I} = L_{2l}^2 b_{2j} + L_{2l}^1 b_{1j} + M_{2l}^{12} (b_{1j})^2 b_{2j}^* + M_{2l}^{21} (b_{2j})^2 b_{1j}^*. \tag{7.39}$$

Además al considerar la aproximación $b_{1,2} = |b_{1,2}^0| e^{i\phi_{1,2}}$, es decir, a sus valores en los ciclos no perturbados. Y al definir la diferencia de fase $\Psi = \phi_1 - \phi_2$, la ecuación para la fase del segundo oscilador queda escrita en función de Ψ ,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_2^I}{dt} &= \frac{1}{2} \left(-i + \frac{\delta_2}{\epsilon_2} \right) \frac{\dot{b}_2^I}{b_2} + c.c. \\
&= C_2 W_{2jl}^{-1} \begin{pmatrix} J_{2l}^2 + J_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} e^{i\Psi} + K_{2l}^{12} |b_1^0|^2 e^{i2\Psi} + K_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0| e^{-i\Psi} \\ L_{2l}^2 + L_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} e^{i\Psi} + M_{2l}^{12} |b_1^0|^2 e^{i2\Psi} + M_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0| e^{-i\Psi} \end{pmatrix} + c.c.,
\end{aligned} \tag{7.40}$$

donde se ha definido $C_2 = (1/2)(-i + \delta_2/\epsilon_2)$ (análogo para C_1). De forma análoga se puede describir la ecuación para la fase del primer oscilador ϕ_1 .

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1^I}{dt} &= \frac{1}{2}(-i + \frac{\delta_1}{\epsilon_1})\frac{\dot{b}_1^I}{b_1} + c.c. \\ &= C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\begin{array}{l} J_{1l}^1 + J_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} e^{-i\Psi} + K_{1l}^{21} |b_2^0|^2 e^{-i2\Psi} + K_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0| e^{i\Psi} \\ L_{1l}^1 + L_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} e^{-i\Psi} + M_{1l}^{21} |b_2^0|^2 e^{-i2\Psi} + M_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0| e^{i\Psi} \end{array} \right) + c.c.. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Con ello la ecuación para la diferencia de fase Ψ se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d\Psi}{dt} = D + F \cos \Psi + G \sin \Psi + H \cos (2\Psi) + I \sin (2\Psi), \quad (7.42)$$

donde

$$D = -\Omega_1 + \Omega_2 + \left[C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\frac{J_{1l}^1}{L_{1l}^1} \right) + c.c. \right] - \left[C_2 W_{2jl}^{-1} \left(\frac{J_{2l}^2}{L_{2l}^2} \right) + c.c. \right], \quad (7.43)$$

$$F = \left[C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\frac{J_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + K_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0|}{L_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + M_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0|} \right) + c.c. \right] - \left[C_2 W_{2jl}^{-1} \left(\frac{J_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} + K_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0|}{L_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} + M_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0|} \right) + c.c. \right], \quad (7.44)$$

$$G = \left[i C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\frac{-J_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + K_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0|}{-L_{1l}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + M_{1l}^{12} |b_2^0 b_1^0|} \right) + c.c. \right] - \left[i C_2 W_{2jl}^{-1} \left(\frac{J_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} - K_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0|}{L_{2l}^1 \frac{|b_1^0|}{|b_2^0|} - M_{2l}^{21} |b_1^0 b_2^0|} \right) + c.c. \right], \quad (7.45)$$

$$H = \left[C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\frac{K_{1l}^{21}}{M_{1l}^{21}} \right) |b_2^0|^2 + c.c. \right] - \left[C_2 W_{2jl}^{-1} \left(\frac{K_{2l}^{12}}{M_{2l}^{12}} \right) |b_1^0|^2 + c.c. \right], \quad (7.46)$$

$$I = \left[-i C_1 W_{1jl}^{-1} \left(\frac{K_{1l}^{21}}{M_{1l}^{21}} \right) |b_2^0|^2 + c.c. \right] - \left[i C_2 W_{2jl}^{-1} \left(\frac{K_{2l}^{12}}{M_{2l}^{12}} \right) |b_1^0|^2 + c.c. \right], \quad (7.47)$$

donde $\Omega_k = \Omega_k^L + \Omega_k^{NL} |b_k^0|^2$ es la frecuencia de oscilación del k-ésimo oscilador, incluyendo su contribución no lineal.

7.5. Aplicación al modelo Macro-spin

Para aplicar el modelo de sincronización a una magnetización uniforme en dos osciladores, se definen las constantes de la sección (7.2):

$$\begin{aligned} \delta_k &= -\Omega_i^{NL} \\ \epsilon_k &= \Gamma_G Q + f\sigma I = \Gamma_+^{NL} - \Gamma_-^{NL} \\ \gamma_k &= \sigma I - \Gamma_G = \Gamma_-^L - \Gamma_+^L \end{aligned} \quad (7.48)$$

donde los coeficientes Γ_{\pm} fueron calculados en la sección (5.1.3), $k=1,2$ índice que indica el k -ésimo oscilador.

La ecuación de diferencia de fase de los dos osciladores queda determinada por la ecuación (7.42), donde los coeficientes D, F, G, H e I obtenidos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$D = -\Omega_1 + \Omega_2 + nce_{00} \left(\frac{\mathcal{A}_1}{\Omega_1} - \frac{\mathcal{A}_2}{\Omega_2} \right) - \frac{cce_{00}}{2\pi p} \frac{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2}{\Omega_1 \Omega_2} (|b_2^0|^2 - |b_1^0|^2), \quad (7.49)$$

$$H = \frac{cce_{00}}{2\pi r} \lambda_{10}^* \mu_{10} \lambda_{20} \mu_{20}^* \left[\left(1 - i \frac{\delta_2}{\epsilon_2} \right) |b_1^0|^2 - \left(1 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1} \right) |b_2^0|^2 \right] + c.c., \quad (7.50)$$

$$I = \frac{cce_{00}}{2\pi r} \left(\lambda_{10}^* \mu_{10} \lambda_{20} \mu_{20}^* \left[\left(i - \frac{\delta_1}{\epsilon_1} \right) |b_2^0|^2 - \left(i + \frac{\delta_2}{\epsilon_2} \right) |b_1^0|^2 \right] + c.c. \right), \quad (7.51)$$

$$F = \frac{1}{2} \left(-i + \frac{\delta_1}{\epsilon_1} \right) \left[\lambda_{10}^* (J_{10}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + K_{10}^{12} |b_2^0| |b_1^0|) + \mu_{10} (L_{10}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + M_{10}^{12} |b_2^0| |b_1^0|) \right] + c.c - (1 \leftrightarrow 2), \quad (7.52)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(1 + i \frac{\delta_1}{\epsilon_1} \right) \left[\lambda_{10}^* (-J_{10}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + K_{10}^{12} |b_2^0| |b_1^0|) + \mu_{10} (-L_{10}^2 \frac{|b_2^0|}{|b_1^0|} + M_{10}^{12} |b_2^0| |b_1^0|) \right] + c.c + (1 \leftrightarrow 2), \quad (7.53)$$

donde

$$J_{10}^2 = i \frac{cce_{00}}{16\pi r} \left[4(\lambda_{20} + \mu_{20}^*) - 2 \left(\lambda_{10} \mu_{10} + \frac{\mathcal{A}_{10}}{\Omega_{10}} \right) (\lambda_{20} + \mu_{20}^*) |b_1^0|^2 - \left(\frac{\mathcal{A}_{20}}{\Omega_{20}} (\lambda_{20} + \mu_{20}^*) + \lambda_{20} \mu_{20}^* (\mu_{20} + \lambda_{20}^*) \right) |b_1^0|^2 \right], \quad (7.54)$$

$$L_{10}^2 = i \frac{cce_{00}}{16\pi r} \left[4(\lambda_{20} + \mu_{20}^*) - 2 \left(\lambda_{10}^* \mu_{10}^* + \frac{\mathcal{A}_{10}}{\Omega_{10}} \right) (\mu_{20}^* + \lambda_{20}) |b_1^0|^2 - \left(\frac{\mathcal{A}_{20}}{\Omega_{20}} (\lambda_{20} + \mu_{20}^*) + \lambda_{20} \mu_{20}^* (\lambda_{20}^* + \mu_{20}) \right) |b_2^0|^2 \right], \quad (7.55)$$

$$K_{10}^{12} = -i \frac{cce_{00}}{16\pi r} \lambda_{10} (\lambda_{10} + 2\mu_{10}^*) (\mu_{20} + \lambda_{20}^*), \quad (7.56)$$

$$M_{10}^{12} = -i \frac{cce_{00}}{16\pi r} \mu_{10}^* (\mu_{10}^* + 2\lambda_{10}) (\mu_{20} + \lambda_{20}^*), \quad (7.57)$$

donde $J_{th,k} = \alpha \mathcal{A}_k$ para cada oscilador. Ω_k corresponde al autovalor del sistema matricial representante de la ecuación del modo normal del modelo MS, descrito en la ecuación (5.1). Notar que $\mathcal{A}_k / \Omega_{k0} = |\lambda_{k0}|^2 + |\mu_{k0}|^2$. La auto-oscilación del oscilador k -ésimo está descrita por la solución $b_k = |b_k^0| e^{i\phi_k}$.

7.6. Resultados numéricos del modelo Macro-spin

Para obtener osciladores casi idénticos se modificará el valor de la constante de anisotropía, pues esta constante caracteriza la estructura del cristal, por lo que, ante apariciones de defectos en la red, la constante varía entre un dispositivo y otro. Además las ecuaciones no

se ven modificadas al variar este parámetro. El cambio en esta constante genera pequeñas diferencias en las características de ambos nano-alambres, como la frecuencia, la corriente crítica, entre otros.

Se trabajará con cinco osciladores diferentes que se sincronizarán de a pares. La constante de anisotropía K_s variará entre 0.220 y 0.275 [erg/cm²], pues permite generar pequeñas diferencias en las frecuencias naturales de los osciladores. Notar que el valor utilizado en las secciones anteriores es 0.237 [erg/cm²]. A todos los osciladores se les aplica una corriente DC correspondiente a $I_{dc} = 2.1$ [mA] $> I_{th}$, valor levemente mayor a la corriente crítica para generar auto-oscilaciones. Las diferencias entre los osciladores se aprecia en la tabla (7.1).

Tabla 7.1: Caracterización de los diferentes osciladores a sincronizar

| N ^o | K_s | ν_{j0} [GHz] | $\tilde{\Omega}_{j0}$ | $ b_j^0 ^2$ |
|----------------|-------|------------------|-----------------------|-------------|
| 1 | 0.200 | 15.909 | -0.1203 | 0.1073 |
| 2 | 0.230 | 15.868 | -0.1197 | 0.1251 |
| 3 | 0.237 | 15.858 | -0.1195 | 0.1295 |
| 4 | 0.245 | 15.847 | -0.1194 | 0.1348 |
| 5 | 0.275 | 15.806 | -0.1188 | 0.1600 |



Figura 7.3: Dinámica de la diferencia de fase. Los puntos rojos representan las primeras dos soluciones para las cuales la diferencia de fase entre los dos osciladores es constante en el tiempo.

Dados los dos osciladores etiquetados por el índice 3 y 4, se realiza una gráfica de la función $\dot{\Psi}_{3,4}$, la cual se encuentra representada en la figura (7.3). El gráfico muestra que existen valores de $\Psi = \phi_3 - \phi_4$ para los cuales $\dot{\Psi} = 0$, es decir, la diferencia de fase entre ambos osciladores se mantiene constante, lo cual demuestra una sincronización en las fases de los osciladores.

Repitiendo el mismo procedimiento de la ecuación de dinámica para la diferencia de fase del par (3,4) para los pares de osciladores: (2,3), (1,2), (1,4) y (1,5) se obtienen las siguientes soluciones de Ψ para los cuales sucede el fenómeno de sincronización. Los resultados se resumen en la tabla (7.2). Resulta interesante notar que existen dos soluciones para la sincronización de auto-osciladores bajo un modelo MS. La solución $\Psi_{j,k}^{(fase)}$ corresponde a la sincronización *en fase*, dado que $\phi_j \approx \phi_k$. Por otra parte la solución $\Psi_{j,k}^{(contra-fase)}$ corresponde a una sincronización *contra-fase* dado que $\phi_j - \phi_k \approx \pi$. Ambas soluciones mencionadas aparecen independiente de los osciladores a sincronizar.

No se logra generar osciladores con frecuencias suficientemente diferentes, vía cambios en su constante de anisotropía, como para que los estados sincronizados desaparezcan. A futuro se podrían cambiar otros parámetros de los osciladores para generar mayores diferencias y lograr encontrar el límite para la generación de estados sincronizados en función de la diferencia de las frecuencias naturales de los dispositivos

Tabla 7.2: Soluciones estacionarias a la ecuación dinámica para la diferencia de fase para diferentes pares de osciladores

| Par | $ \nu_{j0} - \nu_{k0} $ | $\Psi_{j,k}^{(fase)}$ | $\Psi_{j,k}^{(contra-fase)}$ |
|--------------|-------------------------|-----------------------|------------------------------|
| $\Psi_{2,3}$ | 0.010 | 0.000000 | 3.141505 |
| $\Psi_{3,4}$ | 0.011 | 0.000005 | 3.141495 |
| $\Psi_{1,2}$ | 0.041 | -0.000034 | 3.141209 |
| $\Psi_{1,4}$ | 0.062 | -0.000029 | 3.141025 |
| $\Psi_{1,5}$ | 0.103 | 0.000031 | 3.140672 |

7.7. Sincronización en función de la distancia entre los osciladores

Se varia la distancia entre los osciladores para encontrar límites para la existencia de soluciones de la ecuación $\dot{\Psi} = 0$. Se consideran dos pares de osciladores con diferentes valores de $|\nu_{j0} - \nu_{k0}|$ para poder comparar la distancia máxima a la que se pueden separar para encontrar soluciones. Se considera la ecuación para $\dot{\Psi}_{3,4}$ y $\dot{\Psi}_{1,5}$.

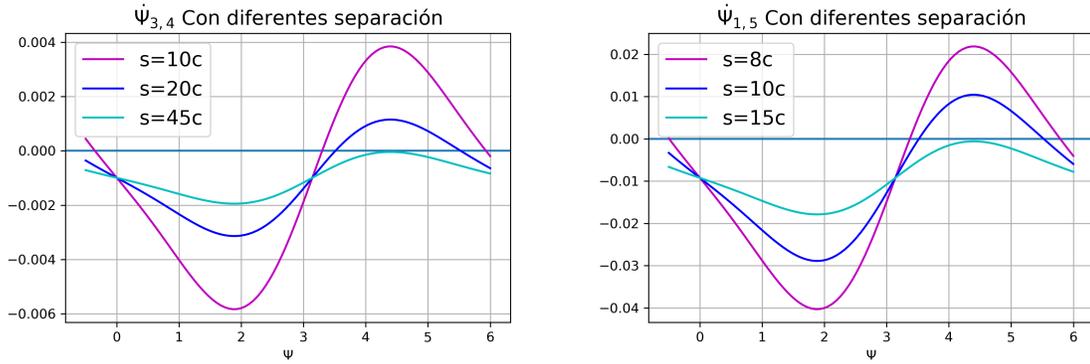


Figura 7.4: Ecuación para: Izquierda: $\dot{\Psi}_{3,4}$ para tres valores diferentes para la distancia entre los dos osciladores; 10, 20, 45 veces el valor de c (la mitad del ancho). Derecha: $\dot{\Psi}_{1,5}$ para tres valores diferentes para la distancia entre los dos osciladores; 8, 10, 15 veces el valor de c .

En la figura (7.4, Izquierda) se puede apreciar que las soluciones para la ecuación se van corriendo a medida que los osciladores se separan, y se encuentra una distancia máxima de aproximadamente 45 veces la mitad del ancho del nano-alambre, que corresponde a $45 \cdot 5.9 \cdot 10^{-5}[\text{cm}] = 2.655 \cdot 10^{-3}[\text{cm}] \approx 26.6[\mu\text{m}]$. Además se puede apreciar que la primera solución en desaparecer es la solución *en fase*, mientras que la *contra-fase* tiene un rango de existencia mucho mayor a medida que se separan los alambres.

En la figura (7.4, Derecha) se realiza el mismo procedimiento anterior. Se puede ver que esta vez la separación máxima que puede existir entre los dos alambres corresponde a aproximadamente 15 veces la mitad del ancho del oscilador, es decir $15 \cdot 5.9 \cdot 10^{-5}[\text{cm}] = 8.85 \cdot 10^{-4}[\text{cm}] \approx 8.85[\mu\text{m}]$.

Se puede ver que a medida que los osciladores presentan frecuencias naturales más disímiles, la distancia máxima a la cual es posible sincronizarlos disminuye.

Capítulo 8

Conclusiones

Los nano-osciladores de efecto Hall de Spin (SHNO) son dispositivos ampliamente estudiados en los últimos años debido a su gran aplicabilidad en el desarrollo de dispositivos de spintrónica. En la presente tesis se estudia un SHNO con geometría de nano-alambre de dimensiones 25 [nm] de grosor y 1.18 [μm] de ancho. El alambre se encuentra magnetizado por un campo externo constante de 3[kOe] paralelo a su ancho. Se soluciona la ecuación de Landau Lifshitz a orden lineal para encontrar los modos normales de oscilación. Luego se desarrollan los términos no lineales de dicha ecuación, lo que permite calcular coeficiente del corrimiento en frecuencia debido a las correcciones no lineales.

Para generar auto-oscilaciones se hace circular una corriente continua por la dirección del largo del alambre, de modo que se compense de forma exacta a la relajación magnética, vía un torque de transferencia de Spin (STT) generado por un Efecto Hall de Spin (SHE) en el material paramagnético adyacente. Se determinan las tasas de disipación positiva y negativa, definidas en el modelo universal de auto-osciladores presentado por Slavin & Tiberkevich en 2009 [14] a orden no lineal para encontrar con ello la corriente crítica para la cual se generan auto-oscilaciones y la amplitud de éstas $|b_j|^2$.

Los resultados numéricos para un modelo macro-spin (donde la magnetización no depende de la posición en el ancho) entregan una frecuencia de 15.86 [GHz], la cual al considerar contribuciones no lineales y una corriente de 2.15[mA] baja a 14.83[GHz].

Por otro lado para el modo cuasi-uniforme de oscilación, al considerar una expansión en 30 modos normales de Fourier, se obtiene una frecuencia 16.68[GHz], la cual al considerar las correcciones no lineales baja hasta un valor de 16.54 [GHz], cuando se aplica una corriente de 2.20[mA].

La sincronización de dos nano-alambres se puede realizar mediante una interacción dipolar, es decir, considerando el campo dipolar que genera uno de los osciladores sobre el otro alambre. Los osciladores a sincronizar deben ser casi idénticos, por lo que se modelan cinco osciladores con diferentes constantes de anisotropía y se analiza la sincronización cuando se encuentran a una distancia igual a (1/8) del ancho de los osciladores. Se prueban 4 combinaciones diferentes para estudiar cómo se comportan las soluciones para la ecuación de dinámica de la diferencia de fase de ambos osciladores, encontrándose que incluso los osciladores más diferentes siguen presentando sincronización.

Las soluciones estacionarias a la ecuación de diferencia de fase, es decir $\dot{\Psi} = \dot{\phi}_j - \dot{\phi}_k = 0$, son dos. Se identifica una solución "en fase" donde las fases evolucionan en paralelo, y una solución "contra-fase" donde las fases de los osciladores evolucionan de forma antiparalela de forma sostenida en el tiempo. Para encontrar el límite para la existencia de estados sincronizados en

función de la diferencia de frecuencias naturales de los osciladores autónomos, se deben variar más parámetros además de la constante de anisotropía, para generar cambios significativos en la frecuencia natural.

Finalmente se puede apreciar que la distancia máxima a la que se presentan soluciones estacionarias para la ecuación de dinámica de la diferencia de fase aumenta si la diferencia de las frecuencias naturales aumenta. En el caso de los osciladores con frecuencias más similares, la distancia entre ellos para que sigan existiendo soluciones de sincronización se extiende hasta $26.6 [\mu\text{m}]$, mientras que en el caso que las frecuencias sean más diferentes la distancia máxima para sincronizarlos corresponde a $8.85 [\mu\text{m}]$.

Se puede extender los resultados de la sincronización a arreglos con más de dos osciladores, dado el alto alcance de las soluciones sincronizadas, para generar una señal más potente y un ancho de banda más reducido, de modo de mejorar la detección y generación de señales.

Capítulo 9

Bibliografía

1. Fuji, Y., Higashi, Y., Kaji, S., Masunishi, K., Nagata, T., Yuzawa, A., Okamoto, K., Baba, S., Ono, T. and Hara, M., “*Highly sensitive spintronic strain-gauge sensor and Spin-MEMS microphone*”, Jpn. J. Appl. Phys. **58**, SD0802 (2019).
2. Barman, A., Gubbiotti, G., Ladak, S., Adeyeye, A. O., Krawczyk, M., Grafe, J., Adelman, C., Cotofana, S., Naeemi, A., Vasyuchka, V. I., Hillebrands, B., Nikitov, S. A., Yu, H., Grundler, D., Sadovnik, A. V., Grachev, A. A., Sheshukova, S. E., Duquesne, J. Y., Marangolo, M., Csaba, G., Porod, W., Demidov, V. E., Urazhdin, S., Demokritov, S. O., Albisetti, E., Petti, D., Bertacco, R., Schultheiss, H., Kruglyak, V. V., Poimanov, V. D., Sahoo, S., Sinha, J., Yang, H., Münzenberg, M., Moriyama, T., Mizukami, S., Landeros, P., Gallardo, R. A., Carlotti, G., Kim, J. V., Stamps, R. L., Camley, R. E., Rana, B., Otani, Y., Yu, W., Yu, T., Bauer, G. E., Back, C., Uhrig, G. S., Dobrovolskiy, O. V., Budinska, B., Qin, H., Van Dijken, S., Chumak, A. V., Khitun, A., Nikonov, D. E., Young, I. A., Zingsem, B. W. and Winklhofer, M., “*The 2021 Magnonics Roadmap*”, J. Phys. Condens. Matter **33**, 413001 (2021).
3. Hoffmann, A. and Bader, S. D., “*Opportunities at the Frontiers of Spintronics*”, Phys. Rev. Applied **4**, 047001 (2015).
4. Chen T., Dumas, R. Y., Eklund, A., Muduli, P. K., Houshang, A., Awad, A. A., Dürrfeld, P., Malm, G., Rusu, A. and Åkerman, J., “*Spin-Torque and Spin-Hall Nano-Oscillators.*”, Proc. IEEE Inst Electr Electron Eng **104**, 1919 (2016).
5. Kent A. D., Worledge D. C., “*A new Spin on magnetic memories*”, Nat Nanotechnol **10**, 187 (2015).
6. Locatelli N., Cros V., Grollier J., “*Spin-torque building blocks*”, Nat. Mater. **13**, 11 (2014).
7. D’Yakonov, M.I. and Perel’, V.I., “*Possibility of orienting electron spins with current*”, J. Exp. Theor. Phys. **13**, 467 (1971).
8. Hirsch J. E., “*Spin Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **83**, 1834 (1999).
9. Niimi, Y. and Otani, Y., “*Reciprocal spin Hall effects in conductors with strong spin-orbit coupling: a review*”, Rep. Prog. Phys. **78**, 124501 (2015).

10. Kato, Y. K., Myers, R. C., Gossard, A. C., Awschalom, D. D., “*Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors*”, Science **306**, 1910 (2004).
11. Liu, L., Moriyama, T., Ralph, D. C. and Buhrman, R. A., “*Spin-Torque Ferromagnetic Resonance Induced by the Spin Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **106**, 036601 (2011).
12. Ando K., Takahashi, S., Harii, K., Sasage, K., Ieda, J., Maekawa, S. and Saitoh, E., “*Electric Manipulation of Spin Relaxation Using the Spin Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **101**, 036601 (2008).
13. Zhang, Y., Zhanget, Z., Liu, Y., Kang, Z., Ma, B., Jin, Q. Y., “*Micromagnetic study of hotspot and thermal effects on spin transfer switching in magnetic tunnel junctions*”, J. Appl. Phys. **101**, 103905 (2007).
14. Slavin A. and Tiberkevich V. S., “*Nonlinear Auto-Oscillator Theory of Microwave Generation by Spin-Polarized Current*”, IEEE Trans. Magn. **45**, 1875 (2009).
15. Liu, L., Pai, C., Li, Y., Tseng, H. W., Ralph, D. C., Buhrman, R. A., “*Spin-Torque Switching with the Giant Spin Hall Effect on Tantalum*”, Science **336**, 555 (2012).
16. Wagner, K., Smith, A., Hache, T., Chen, J.-R., Yang, L., Montoya, E., Schultheiss, K., Lindner, J., Fassbender, J., Krivorotov, I. and Schultheiss, H., “*Injection locking of multiple auto-oscillation modes in a tapered nanowire spin Hall oscillator.*”, Sci. Rep. **8**, 16040 (2018).
17. Demidov V. E., Urazhdin, S., Ulrichs, H., Tiberkevich, V., Slavin, A., Baither, D., Schmitz, G., Demokritov, S. O., “*Magnetic Nano-oscillator driven by Pure Spin Current*”, Nat. Mat. **11**, 1028 (2012).
18. Duan Z., Smith, A., Yang, L., Youngblood, B., Lindner, J., Demidov, V. E., Demokritov, S. O. and Krivorotov, I. N., “*Nanowire spin torque oscillator driven by spin orbit torques*”, Nat. Commun. **5**, 5616 (2014).
19. Duan Z., Krivorotov, I. N., Arias, R. E., Reckers, N., Stienen, S. and Lindner, J., “*Spin wave eigenmodes in transversely magnetized thin film ferromagnetic wires*”, Phys. Rev. B **92**, 104424 (2015).
20. Yang, l., Jara, A. A., Duan, Z., Smith, A., Youngblood, B., Arias, R. E. and Krivorotov, I. N., “*Parametric resonance of spin waves in ferromagnetic nanowires tuned by spin Hall torque*”, arXiv:2112.09222 [cond-mat.mes-hall] (2021).
21. Evelt, M., Safranski, C., Aldosary, M., Demidov, V. E., Barsukov, I., Nosov, A. P., Rinkevich, A. B., Sobotkiewich, K., Li, X., Shi, J., Krivorotov, I. N. and Demokritov, S. O., “*Spin Hall-induced auto-oscillations in ultrathin YIG grown on Pt*”, Sci. Rep. **8**, 1269 (2018).
22. Smith A., Sobotkiewich, K., Khan, A., Montoya, E. A., Yang, L., Duan, Z., Schneider, T., Lenz, K., Lindner, J., An, K., Li, X. and Krivorotov, I. N., “*Dimensional Crossover in Spin Hall Oscillators*”, Phys. Rev. B. **102**, 054422 (2020).
23. Kimura, T., Otani, Y., Sato, T., Takahashi, S. and Maekawa, S., “*Room-Temperature Reversible Spin Hall Effect*”, Phys. Rev. Lett. **98**, 156601 (2007).

24. Weng K.C., Chandrasekhar N., Miniatura C., Englert B.G., “*Spin Orbit Interaction Induced Spin-Separation In Platinum Nanostructure.*”, In: Bonča J., Kruchinin S. (eds) *Electron Transport in Nanosystems. NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics.* Springer, Dordrecht. 49 (2008).
25. Guo G. Y., Murakami, S., Chen, T. W. and Nagaosa, N., “*Intrinsic spin Hall effect in platinum: First-principles calculations*”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 096401 (2008).
26. Berger, L., “*Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current*”, *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
27. Slonczewski, J. C., “*Current-driven excitation of magnetic multilayers*”, *J. Magn. Magn. Mater.* **159**, L1-L7. (1996).
28. Tsoi, M., Jansen, A., Bass, J., Chiang, W., Seck, M., Tsoi, V., Wyder, P., “*Excitation of a Magnetic Multilayer by an Electric Current*”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4281 (1998).
29. Myers, E. B., Ralph, D. C., Katine, J. A., Louie, R. N. and Buhrman, R. A., “*Current-Induced Switching of Domains in Magnetic Multilayer Devices*”, *Science* **285**, 867 (1999).
30. Han, X., Wang, X., Wan, C., Yu, G., and Lv, X., “*Spin-orbit torques: Materials, physics, and devices*”, *Appl. Phys. Lett.* **118**, 120502 (2021).
31. Landau, L. and Lifshits, E., “*On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*”, Reprinted from *Phys. Zeitsch. der Sow.* **8**, 153 (1935).
32. Brown, W. F., “*Theory of the Approach to Magnetic Saturation*”, *Phys. Rev.* **58**, 736 (1940).
33. Brown, W. F., “*Micromagnetics : Successor to domain theory?*”, *J. Phys. Radium* **20**, 101 (1959).
34. Aharoni, A., “*Introduction to the theory of Ferromagnetism*”, *Int. ser. monogr. phys.* **109**. Oxford science publications chapter 5. 83 (1996).
35. Gilbert, T. L., “*A phenomenological Theory of Damping in ferromagnetic Materials*”, *IEEE Trans. Magn.* **40**, 3443 (2004).
36. Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths, J., “*Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*”, UK, Cambridge University press 175-235 (2001).
37. Liu, Y., “*Magnetization dynamics in Pt/Ni80Fe20 nanowires induced by spin Hall effect*”, UC Irvine Electronic Theses and Dissertations (2015).
38. Urazhdin, S., Demidov, V. E., Cao, R., Divinskiy, B., Tyberkevich, V., Slavin, A., Rinkevich, A. B. and Demokritov, S. O., “*Mutual synchronization of nano-oscillators driven by pure spin current*”, *Appl. Phys. Lett.* **109**, 162402 (2016).
39. Awad, A. A., Dürrenfeld, P., Houshang, A., Dvornik, M., Iacocca, E., Dumas, R. K. and Åkerman J., “*Long-range mutual synchronization of spin Hall nano-oscillators*”, *Nat. Phys.* **13**, 292 (2016).

40. Kang, D. H., Park, S. Y., and Shin, M., “*Synchronization of Spin Hall Oscillators With Magnetodipolar Coupling*”, IEEE Trans. Magn. **52**, 1400606 (2016).
41. Tiberkevich, V. S., Khymyn, R. S., Tang, H. X., and Slavin, A. N., “*Sensitivity to external signals and synchronization properties of a non-isochronous auto-oscillator with delayed feedback*”, Sci. Rep. **4**, 3873 (2013).
42. Zahedinejad, M., Awad, A. A., Muralidhar, S., Khymyn, R., Fulara, H., Mazraati, H., Dvornik, M. and Åkerman J., “*Two-dimensional mutually synchronized spin Hall nano-oscillator arrays for neuromorphic computing*”, Nat. Nanotechnol. **15**, 47 (2020).

Anexos

Anexo A

Energía Libre

A.1. Energía de Zeeman

Dada la ecuación (3.3), esta puede ser escrita en términos de las variables de Holstein-Primakoff,

$$E_Z = -M_0 H_0 \int_V m_x dV = M_0 H_0 \int_V (1 - aa^*). \quad (\text{A.1})$$

La ecuación de dinámica para las variables a , a^* se encuentra en términos de U , por lo tanto, con el cambio de variables $U = E/4\pi M_0^2$, la expresión queda

$$U_Z = \frac{-M_0 H_0}{4\pi M_0^2} \int_V (1 - aa^*) dV, \quad (\text{A.2})$$

luego, definiendo $h_0 = H_0/4\pi M_0$ se obtiene

$$U_Z = -h_0(\tau) \int dV (1 - aa^*), \quad (\text{A.3})$$

al variar con respecto a la variable conjugada a^*

$$\frac{\delta U_Z}{\delta a^*} = h_0 a. \quad (\text{A.4})$$

La contribución completa de la energía de Zeeman es de orden lineal.

A.2. Energía de intermbambio

Se reescribe la ecuación (3.4) en términos de U_X se obtiene:

$$U_X = \frac{A}{4\pi M_0^2} \int_V [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2] = \frac{d}{2} \int_V [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2], \quad (\text{A.5})$$

donde se define $d = A/(2\pi M_0^2)$. Para escribir esta expresión en términos de las variables a y a^* se definen las siguientes cantidades:

$$m_+ = m_z + im_y, \quad m_- = m_z - im_y, \quad (\text{A.6})$$

$$m_+ = a\sqrt{2 - aa^*}, \quad m_- = a^*\sqrt{2 - aa^*}, \quad (\text{A.7})$$

de modo que la expresión para el potencial queda:

$$U_X = \frac{d}{2} \int_V dV [(\nabla m_x)^2 + \nabla m_+ \nabla m_-], \quad (\text{A.8})$$

con un poco de álgebra

$$U_X = \frac{d}{2} \int_V dV \left(\frac{a^2 (\nabla a^*)^2}{2} + \frac{a^{*2} (\nabla a)^2}{2} + 2 \nabla a \nabla a^* \right). \quad (\text{A.9})$$

La contribución a la ecuación dinámica se calcula variando respecto a la variable a^*

$$\frac{\delta U_X}{\delta a^*} = \frac{d}{2} \left(a^* (\nabla a)^2 - 2a \nabla a \nabla a^* - a^2 \nabla^2 a^* - 2 \nabla^2 a \right), \quad (\text{A.10})$$

la contribución lineal de la energía de intercambio corresponde al término:

$$\frac{\delta U_X^L}{\delta a^*} = -d \nabla^2 a. \quad (\text{A.11})$$

A.3. Energía de anisotropía cristalina

A partir de la ecuación (3.5) se puede desarrollar el potencial, definiendo la constante $k_s = K_s/(4\pi M_0^2 b)$

$$\begin{aligned} U_A &= -k_s \int_V dV m_y^2 \\ &= \frac{k_s}{4} \int_V dV \left(2a^2 - 4aa^* + 2a^{*2} - a^3 a^* + 2a^2 a^{*2} - aa^{*3} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

al variar con respecto a la variable a^* se obtiene

$$\frac{\delta U_A}{\delta a^*} = k_s \left(-a + a^* + a^2 a^* - \frac{a^3}{4} - \frac{3}{4} aa^{*2} \right), \quad (\text{A.13})$$

en particular la parte lineal corresponde a

$$\frac{\delta U_A^L}{\delta a^*} = -k_s (a - a^*). \quad (\text{A.14})$$

A.4. Energía demagnetizante

Se consideran los dos bordes significativos en la muestra, los cuales tienen superficies normales a \hat{x} y a \hat{y} , por lo tanto se tendrán campos demagnetizantes provocados por las componentes de la magnetización en esos ejes.

$$\langle \vec{h}_D(\vec{m}) \rangle(X) = \langle \vec{h}_D^y(m_y \hat{y}) \rangle(X) \hat{y} + \langle \vec{h}_D^x(m_x \hat{x}) \rangle(X) \hat{x}. \quad (\text{A.15})$$

La componente \hat{y} de la magnetización, según la referencia [16], tiene la forma:

$$\langle \vec{h}_D(m_y \hat{y}) \rangle(X) = \frac{1}{2\pi r} \int_{-1}^1 dX' m_y(X') \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right). \quad (\text{A.16})$$

mientras que para la componente en \hat{x} tendremos

$$4\pi \langle \vec{h}_D^x(m_x \hat{x}) \rangle = \langle \vec{H}_D^x(\hat{x}) \rangle - \langle \vec{H}_D^x(aa^* \hat{x}) \rangle, \quad (\text{A.17})$$

dado que $m_x = 1 - aa^*$. El primer término, al ser una magnetización uniforme, se calcula con el factor demagnetizante $n_x(x)$, de modo que $\langle \vec{H}_D(\hat{x}) \rangle = -4\pi n_x(x) \hat{x}$, el cual es calculado en la Ref. [16], y viene dado por:

$$\begin{aligned} n_x(X) = & \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{2r}{1+X} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2r}{1-X} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4\pi r} \left[(1+X) \ln \left(\frac{(1+X)^2}{(2r)^2 + (1+X)^2} \right) + (1-X) \ln \left(\frac{(1-X)^2}{(2r)^2 + (1-X)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

El término $\langle \vec{H}_D(aa^* \hat{x}) \rangle$ está asociado a cargas magnéticas de volumen $-d(a(X)a^*(X))/dx$, las cuales pueden ser pensadas como infinitos cilindros alineados con el eje \hat{z} , configuración equivalente a cargas magnéticas en un medio 2D, cuyo potencial está dado por $\phi(\vec{x}) = -2 \ln(|\vec{x} - \vec{x}'|)$, por lo tanto el campo demagnetizante correspondiente a las cargas de volumen y de superficie se escribe respectivamente de la siguiente forma:

$$H_{DV}^x(aa^* \hat{x}) = \frac{1}{L} \int d\vec{x}' \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{d}{dx'} (a(x')a^*(x')), \quad (\text{A.19})$$

$$H_{DS}^x(aa^* \hat{x}) = -\frac{1}{L} \int dS' \frac{\partial \phi}{\partial x} (a(x')a^*(x')) \hat{x} \cdot \hat{n}(x'), \quad (\text{A.20})$$

donde L es una longitud arbitraria en \hat{z} , y $\hat{x} \cdot \hat{n}(x')$ entrega la contribución de las cargas superficiales correspondientes a los bordes normales a \hat{x} ubicadas en $x = \pm c$. Se integra el primer término por partes y se usa $\partial \phi / \partial x = -\partial \phi / \partial x'$. Se suman las contribuciones de volumen y superficie, con ello se obtiene el campo total por unidad de largo

$$H_D^x(aa^* \hat{x}) = \int dy' \int dx' a(x')a^*(x') \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}. \quad (\text{A.21})$$

El campo será uniforme en el grosor del nano-alambre, por lo tanto se calcula el promedio en el grosor, el cual se puede escribir:

$$\langle H_D^x(aa^* \hat{x}) \rangle = \frac{1}{2b} \int dx' \int dy \int dy' a(x')a^*(x') \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(-2 \ln \left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) \right), \quad (\text{A.22})$$

$$\langle H_D^x(aa^* \hat{x}) \rangle = \frac{1}{b} \int dx' a(x')a^*(x') \frac{\partial}{\partial x'} \int dy \int dy' \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \quad (\text{A.23})$$

Se define la integral

$$I = \int dy \int dy' \frac{1}{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad (\text{A.24})$$

para simplificar cálculos. La doble integral en y e y' se resuelve con las variables adimensionales $Y = y/b$, $Y' = y'/b$. Se define $r = b/c$ y se realiza un cambio de variables $U = Y + Y'$, $V = Y - Y'$ de modo que $dY dY' = (1/2)dU dV$, por lo tanto,

$$I = \frac{4r}{X-X'} \tan^{-1} \left(\frac{2r}{X-X'} \right) - 2 \ln \left(\frac{\sqrt{(2r)^2 + (X-X')^2}}{|X-X'|} \right). \quad (\text{A.25})$$

El campo se escribe

$$\langle H_D^x(aa^*\hat{x}) \rangle = \frac{1}{r} \int_{-1}^1 dX' a(x') a^*(x') \frac{\partial}{\partial X'} ((X-X')I), \quad (\text{A.26})$$

donde se tiene

$$\frac{\partial}{\partial X'} ((X-X')I) = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{(2r)^2 + (X-X')^2}}{|X-X'|} \right), \quad (\text{A.27})$$

y por lo tanto el campo demagnetizante generado por aa^* promediado en el grosor se puede escribir

$$\langle H_D^x(aa^*\hat{x}) \rangle = \frac{2}{r} \int_{-1}^1 dX' (a(x') a^*(x')) \ln \left(\frac{\sqrt{(2r)^2 + (X-X')^2}}{|X-X'|} \right). \quad (\text{A.28})$$

Se debe añadir al campo un término que lo iguala a $-4\pi n_x(X)$ cuando se reemplaza $a(X')a^*(X') = 1$, por lo tanto la contribución no lineal al campo en el eje \hat{x} es:

$$\langle H_D^x(aa^*\hat{x}) \rangle = -\frac{2}{r} \int_{-1}^1 dX' (a(x') a^*(x')) \ln \left(\frac{|X-X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X-X')^2}} \right) - 4\pi a(X) a^*(X). \quad (\text{A.29})$$

Ya se posee el campo magnético generado por los momentos magnéticos de la muestra, ahora se puede definir el potencial asociado U_D . De la ecuación (3.6) se encuentra

$$\begin{aligned} U_D &= -\frac{1}{8\pi M_0^2} \int_V \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_D(\vec{r}) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_V \vec{m}(\vec{r}) \cdot \vec{h}_D(\vec{r}) dV. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Usando el teorema de reciprocidad par dos configuraciones de magnetización, se obtiene

$$\begin{aligned} U_D &= \frac{-1}{4\pi r} \int dV \int_{-1}^1 dX' m_y(X) m_y(X') \ln \left(\frac{|X-X'|}{\sqrt{(X-X')^2 + (2r)^2}} \right) \\ &\quad - \int dV n_x(X) aa^* - \frac{1}{8\pi} \int dV \langle \vec{H}_D(aa^*\hat{x}) \rangle \cdot aa^*\hat{x}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

se reemplaza $m_y(X)$ con el cambio de variables de Holstein-Primakoff y se realiza una aproximación en Taylor sobre la raíz $\sqrt{2 - aa^*}$

$$\begin{aligned}
U_D &= \frac{-1}{8\pi r} \int dV \int_{-1}^1 dX' \left(1 - \frac{a(X)a^*(X)}{4}\right) (a(X) - a^*(X))(a(X') - a^*(X')) \left(1 - \frac{a(X')a^*(X')}{4}\right) \times \\
&\quad \times \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \\
&\quad - \int dV n_x(X) a(X) a^*(X) - \frac{1}{8\pi} \int dV \langle \vec{H}_D(aa^*\hat{x}) \rangle \hat{x} \cdot aa^*\hat{x}.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Al variar con respecto a la variable a^* se obtiene la contribución de la energía dipolar:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U_D}{\delta a^*} &= \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 \left(-1 - \frac{a^2(X)}{4} + \frac{|a|^2(X)}{2} + \frac{|a|^2(X')}{4} \right) (a(X') - a^*(X')) \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \\
&\quad - n_x(X) a - \frac{1}{4\pi} \langle \vec{H}_D(aa^*\hat{x}) \rangle a,
\end{aligned} \tag{A.33}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U_D}{\delta a^*} &= \frac{1}{4\pi r} \int_{-1}^1 \left(-1 - \frac{a^2(X)}{4} + \frac{|a|^2(X)}{2} + \frac{|a|^2(X')}{4} \right) (a(X') - a^*(X')) \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \\
&\quad - n_x(X) a + \frac{1}{2\pi r} a(X) \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) a(X') a^*(X') + a^2(X) a^*(X).
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Se puede ver que se tienen términos lineales y no lineales en esta contribución, en particular la parte lineal corresponde a:

$$\frac{\delta U_D^L}{\delta a^*} = -\frac{1}{4\pi r} (a(X') - a^*(X')) \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) - n_x(X) a. \tag{A.35}$$

Anexo B

Integrales

B.1. Orden lineal

Definiciones

$$cc_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X - X')^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X'). \quad (\text{B.1})$$

$$cce_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X'). \quad (\text{B.2})$$

$$ncc_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX n_x(X) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X). \quad (\text{B.3})$$

$$nce_{ln} = n_l \int_{-1}^1 dX n_x(X + S) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X). \quad (\text{B.4})$$

B.2. Orden no lineal

B.2.1. Definiciones

$$A_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X) \cos(k\pi X). \quad (\text{B.5})$$

$$B_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \sin(m\pi X) \sin(k\pi X). \quad (\text{B.6})$$

$$C_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X) \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.7})$$

$$D_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X') \cos(m\pi X') \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.8})$$

$$E_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X') \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.9})$$

$$C_{lnmk}^S = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X) \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.10})$$

$$D_{lnmk}^S = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X') \cos(m\pi X') \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.11})$$

$$E_{lnmk}^S = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \ln \left(\frac{|X + S - X'|}{\sqrt{(2r)^2 + (X + S - X')^2}} \right) \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X') \cos(k\pi X'). \quad (\text{B.12})$$

B.2.2. Desarrollo de las integrales

Integral A

$$A_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X) \cos(k\pi X). \quad (\text{B.13})$$

Notar que el desarrollo de la integral dependerá de cuántos de sus índices sean nulos. Por lo tanto, cuando se tiene que todos los índices son nulos:

$$A_{0000} = 2. \quad (\text{B.14})$$

Además notar que corresponde a un tensor simétrico ante permutaciones de todos sus índices, por lo que basta calcular sólo un caso.

$$A_{000k} = A_{00m0} = A_{0n00} = A_{l000} = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$A_{00mk} = \delta_{nm}, \quad (\text{B.16})$$

donde δ_{nm} corresponde a la delta de Kronecker, por lo tanto cumple

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}. \quad (\text{B.17})$$

Para las siguientes componentes resulta útil definir la notación para la delta de kronecker del siguiente modo

$$\delta_{n+m+k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n + m + k = 0 \\ 0 & \text{si } n + m + k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

De forma análoga para cualquier suma en el subíndice de la delta. Usando esto se tiene:

$$A_{0nmk} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{n+m+k} + \delta_{n+m-k} + \delta_{n-m+k} + \delta_{n-m-k}). \quad (\text{B.19})$$

De forma análoga se obtiene A_{l0mk} , A_{ln0k} y A_{lnm0} . Finalmente, si ninguno de los índices es nulo.

$$A_{lnmk} = \frac{1}{4} (\delta_{l+n+m+k} + \delta_{l+n-m-k} + \delta_{l-n+m+k} + \delta_{l-n-m-k} + \delta_{l+n+m-k} + \delta_{l+n-m+k} + \delta_{l-n+m-k} + \delta_{l-n-m+k}). \quad (\text{B.20})$$

Integral B

$$B_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \sin(m\pi X) \sin(k\pi X). \quad (\text{B.21})$$

Este tensor es invariante ante permutaciones de sus dos primeros índices entre ellos, al igual que de sus dos últimos. Por otro lado, si alguno de los dos últimos índices es nulo, la integral se anula por completo pues $\sin(0) = 0$

$$B_{00mk} = \delta_{mk}, \quad (\text{B.22})$$

$$B_{0nmk} = \frac{1}{2} (\delta_{n+m-k} + \delta_{n-m+k} - \delta_{n+m+k} - \delta_{n-m-k}), \quad (\text{B.23})$$

$$B_{lnmk} = \frac{1}{2} (\delta_{l+n+m-k} + \delta_{l+n-m+k} + \delta_{l-n+m+k} + \delta_{l-n-m+k} - \delta_{l+n+m+k} - \delta_{l+n-m-k} - \delta_{l-n+m+k} - \delta_{l-n-m-k}). \quad (\text{B.24})$$

Integral C, D y E

$$C_{lnmk} = \int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \cos(l\pi X) \cos(n\pi X) \cos(m\pi X) \cos(k\pi X') \ln \left(\frac{|X - X'|}{\sqrt{(X - X')^2 + (2r)^2}} \right). \quad (\text{B.25})$$

En este caso la integral es invariante ante permutaciones de los primeros tres índices.

Para resolver este tipo de integrales se realiza un cambio de variables: $U = X + X'$, $V = X - X'$, de modo que $dXdY = \frac{1}{2}dUdV$. Los límites de integración cambian:

$$\int_{-1}^1 dX \int_{-1}^1 dX' \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dV \int_{-2-V}^{2+V} dU + \frac{1}{2} \int_0^2 dV \int_{V-2}^{2-V} dU, \quad (\text{B.26})$$

las funciones son pares en V en general, por lo que se puede juntar la suma de las integrales en una sola integral para V que va desde 0 hasta 2. Una vez realizado el cambio de variables e integrado en la variable U , el cálculo de la integral en V se realiza numericamente con ayuda de Python.

El resultado analítico de las integrales depende de la existencia de ceros en sus subíndices, por lo tanto se separará la integral en dichos casos:

C_{0000}

Cuando todos los índices son nulos se tiene:

$$C_{0000} = 2 \int_0^2 dV (2 - V) \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right). \quad (\text{B.27})$$

$C_{000k} - C_{l000}$

En el caso que se tengan tres índices nulos, independientemente de la posición de los ceros (tanto en los primeros tres índices o si el último índice es uno de los nulos) se obtiene:

$$C_{000k} = 4 \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \frac{1}{k\pi} \sin \left(\frac{k\pi(2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{k\pi V}{2} \right). \quad (\text{B.28})$$

C_{00mk}

En el caso que se tengan dos índices nulos dentro de los primeros tres índices, se tiene:

$$C_{00mk} = 2 \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[\frac{1}{a_1\pi} \sin \left(\frac{a_1\pi(2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{a_2\pi V}{2} \right) + (a_1 \leftrightarrow a_2) \right], \quad (\text{B.29})$$

donde $a_1 = m + k$ y $a_2 = m - k$. Si a_2 es nulo entonces la integral queda

$$C_{00mk} = \int_0^2 \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[(2 - V) \cos \left(\frac{a_1\pi V}{2} \right) + \frac{2}{a_1\pi} \sin \left(\frac{a_1\pi(2 - V)}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.30})$$

C_{ln00}

Si uno de los índices nulos se encuentra en la última posición se tendrá:

$$C_{ln00} = 2 \int_0^2 \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[\frac{1}{b_1 \pi} \sin \left(\frac{b_1 \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{b_1 \pi V}{2} \right) + (b_1 \rightarrow b_2) \right], \quad (\text{B.31})$$

donde $b_1 = l + n$ y $b_2 = l - n$. Si $b_2 = 0$ entonces el segundo término de la integral queda:

$$\rightarrow \int_0^2 (2 - V) \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right). \quad (\text{B.32})$$

C_{0nmk}

En el caso que se tenga sólo un cero, en uno de sus primeros tres índices:

$$C_{0nmk} = \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[\frac{1}{c_1 \pi} \sin \left(\frac{c_1 \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{c_2 \pi V}{2} \right) + \frac{1}{c_2 \pi} \sin \left(\frac{c_2 \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{c_1 \pi V}{2} \right) + (c_1 \rightarrow c_3, c_2 \rightarrow c_4) \right], \quad (\text{B.33})$$

donde $c_1 = n + m + k$, $c_2 = n + m - k$, $c_3 = n - m + k$ y $c_4 = n - m - k$. Podemos separar esta integral en dos contribuciones, la que contiene c_1, c_2 y la que contiene c_3, c_4 , si alguno de los c_i es nulo, entonces el término que lo contiene cambia, por ejemplo. si $c_2 = 0$ entonces solamente el primer término de la integral cambia por lo siguiente:

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[(2 - V) \cos \left(\frac{c_1 \pi V}{2} \right) + \frac{2}{c_1 \pi} \sin \left(\frac{c_1 \pi (2 - V)}{2} \right) \right]. \quad (\text{B.34})$$

C_{lnm0}

En el caso en que el único índice cero se encuentre en la última posición:

$$[C_{lnm0}]_i = \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \frac{1}{d_i \pi} \sin \left(\frac{d_i \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{d_i \pi V}{2} \right), \quad (\text{B.35})$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$, por lo que la integral se compone de cuatro términos, y se definen las constantes $d_1 = l + n + m$, $d_2 = l + n - m$, $d_3 = l - n + m$ y $d_4 = l - n - m$. Si alguna de estas constantes es nula, entonces el término correspondiente queda

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 (2 - V) \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right). \quad (\text{B.36})$$

C_{lnmk}

Finalmente si ninguno de los índices es nulo se tiene

$$\begin{aligned}
C_{lnmk} = & \frac{1}{2} \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[\frac{1}{e_1 \pi} \sin \left(\frac{e_1 \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{e_2 \pi V}{2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{e_2 \pi} \sin \left(\frac{e_2 \pi (2 - V)}{2} \right) \cos \left(\frac{e_1 \pi V}{2} \right) \\
& \left. + (e_1 \rightarrow e_3, e_2 \rightarrow e_4) + (e_1 \rightarrow e_5, e_2 \rightarrow e_6) + (e_1 \rightarrow e_7, e_2 \rightarrow e_8) \right], \tag{B.37}
\end{aligned}$$

donde $e_1 = l + n + m + k$, $e_2 = l + n + m - k$, $e_3 = l + n - m + k$, $e_4 = l + n - m - k$, $e_5 = l - n + m + k$, $e_6 = l - n + m - k$, $e_7 = l - n - m + k$ y $e_8 = l - n - m - k$. Si alguno de los $d_i = 0$ entonces el término que lo contiene cambia, por ejemplo, si $d_2 = 0$ entonces el primer término de la integral queda:

$$\rightarrow \frac{1}{4} \int_0^2 dV \ln \left(\frac{|V|}{\sqrt{V^2 + (2r)^2}} \right) \left[(2 - V) \cos \left(\frac{e_1 \pi V}{2} \right) + \frac{2}{e_1 \pi} \sin \left(\frac{e_1 \pi (2 - V)}{2} \right) \right]. \tag{B.38}$$

El desarrollo de las integrales D_{lnmk} y E_{lnmk} es análogo al de la integral anterior C_{lnmk} . El desarrollo de las integrales de sincronización C_{lnmk}^S , D_{lnmk}^S y E_{lnmk}^S es similar al presentado, por lo que no se dejará expresado en el anexo.