UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS Y FARMACEUTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

SUMAS DE CUADRADOS DE FORMAS HOMOGENEAS II.

Tesis para optar al Grado
de Licenciado en Ciencias
con mención en Matemáticas

Prof. Guía: Dr. Ricardo Baeza R.

MANUEL O'RYAN LERMANDA

1983.

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N.

La motivación de este trabajo ha sido el estudio de las siguientes invariantes:

- La primera invariante es:

Dado un anillo conmutativo A , su número de Pitágoras, $p(A)$, es el mínimo entero r tal que toda suma de cuadrados en A se escribe como suma de a lo más r cuadrados en A .

En general el cálculo del número de Pitágoras es un problema bastante complicado y no resuelto completamente para cualquier anillo. Algunos resultados con respecto a esta invariante se pueden encontrar por ejemplo en [CDLR] , [CLRR] .

Un problema un poco más complejo que calcular el número de Pitágoras de un anillo, es el siguiente:

Sea A un anillo conmutativo con número de Pitágoras finito y M una A-álgebra, finitamente generada como A-módulo. ¿Existe una cota para el número de Pitágoras de M , $p(M)$, en función del número de Pitágoras de A y de otras invariantes de M?

Esta pregunta tiene una respuesta afirmativa si A es un cuerpo (= k), la demostración de este hecho (que aparece en [CDLR]) se sigue de considerar la siguiente invariante de un anillo conmutativo A:

- $g_A(n)$ es el menor entero tal que toda suma de cuadrados de formas lineales n-arias sobre A, se escribe como suma de a lo más $g_A(n)$ de cuadrados de tales formas. Así se demuestra que si $\dim_k M = n$ entonces $p(M) \leq g_k(n) \leq n \cdot p(k)$ (si $p(k) < \infty$).

La invariante $g_k(n)$ puede ser generalizada de la siguiente manera:

Sea $g_A^d(n)$ el menor entero tal que toda forma homogénea de grado $2d$, que es suma de cuadrados de formas homogéneas de grado d, en n variables sobre A, se escribe como suma de a lo más $g_A^d(n)$ cuadrados de tales formas.

En este trabajo calcularemos g_k^d explícitamente para ciertos cuerpos; como por ejemplo: k un cuerpo global o k una extensión puramente trascendente sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

En el Capítulo II veremos que el cálculo de g_k^d se reduce a encontrar $g_k^1 = g_k$, invariante que llamaremos "número Pitagórico lineal" o simplemente g-invariante.

Los únicos valores conocidos de la g-invariante que hay en la literatura son los encontrados por Mordell ([M]) donde calcula $g_{\mathbb{Q}}(n)$ y $g_{\mathbb{Z}}(2)$.

En el Capítulo IV se obtiene el valor de $g_{\mathbb{Q}}(n)$ como consecuencia de un teorema mas general sobre la g-invariante de cuerpos globales formales-reales. También en este Capítulo se calcula la g-invariante para cuerpos globales no reales y para $\mathbb{R}(t)$.

En general, el cálculo de la g-invariante de un cuerpo, gracias a los resultados que aparecen en el Capítulo II, se reducen a considerar relaciones entre formas cuadráticas, cuya teoría general se expone en el Capítulo I. En el Capítulo III aparecen algunos resultados sobre cuerpos globales (como por ejemplo el teorema de Hasse-Minkowski, etc).

En el Capítulo V se calcula la g-invariante para extensiones puramente trascendentes de un cuerpo algebraicamente cerrado; y en el Capítulo VI se obtienen algunas interesantes relaciones entre la u-invariante y la g-invariante de un cuerpo no real.

Los resultados de los Capítulos II, IV, V y VI han sido obtenidos conjuntamente con Juan Pablo Prieto.

Deseo expresar mis agradecimientos al Profesor Ricardo Baeza por haberme invitado a trabajar en este tema y haberme entregado la formación necesaria para poder realizarlo.

También deseo agradecer a mi compañero Juan Pablo Prieto por sus valiosos aportes a este trabajo.

R E F E R E N C I A S.

[CDLR] : Choi, M.D., Dai, Z.D., Lam, T.Y. and Reznick, B., The Phytagoras Number of Some Affine Algebras and Local Algebras. J. Reine Angew. Math. 336 45-82 (1982).

[CLRR] : Choi, M.D., Lam, T.Y., Reznick, B. and Rosenberg, A. Sums of Squares in Some Integral Domains. J. Algebra 65, 234-256 (1980).

[EL I] : Elman, R. and Lam, T.Y., Quadratic Forms and the u-Invariant I, Math. Zeit. 131 283-304 (1973).

[EL II] : Elman, R. and Lam, T.Y., Quadratic Forms and the u-Invariant II, in vent. Math, 21 125-137 (1973).

[G] : Greenberg, M., Lectures on Forms in Many Variables. M.L.N. Benjamin, (1969).

[H] : Hsia, J.S., On the Witt Ring and Some Arithmetical Invariants of Quadratics Forms. J. Number Theory V. 5 N° 5, 339-355 (1973).

[L] : Lam, T.Y., The Algebraic Theory of Quadratic Forms M.L.N., Benjamin, (2nd. Printing), (1980).

[M] : Mordell, L., On the Representation of a Binary Quadratic Form as a Sum of Squares of Linear Forms, Math. Zeit. 35 1-15 (1932).

[K] : Knight, J.T., Quadratic Forms Over $\mathbb{R}(t)$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 62, 197-205, (1966).

[O] : O'Meara, O.T., Introduction to Quadratic Forms, Springer-Verlag, New York (1963).

[P] : Prieto, J.P., Sumas de Cuadrados de Formas Homogéneas I, Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas, Universidad de Chile (1983).

I. PRELIMINARES.

En este Capítulo introduciremos conceptos básicos de la Teoría de Formas Cuadráticas sobre cuerpos con característica distinta de dos.

Todos los resultados de este Capítulo los daremos sin demostración; estas se pueden encontrar por ejemplo en [L] , [O] .

§ 1. Conceptos Básicos.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k , $car(k) \neq 2$, consideremos una forma bilineal simétrica, $B : V \times V \to k$.

Definamos $q : V \to k$ como

$$q(x) := B(x,x) \qquad \forall\, x \in V$$

el par (V,q) se llama espacio cuadrático.

Cuando no se preste a confusión, diremos que q es una forma cuadrática sobre k y omitiremos el espacio vectorial V .

Las siguientes propiedades son inmediatas:

a) $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$, $\alpha \in k$, $x \in V$

b) $B(x,y) = \frac{1}{2}[\,q(x+y) - q(x) - q(y)]$; $x,y \in V$

Si $V = ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n$ y $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ entonces

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 q(e_i) + 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j B(e_i, e_j)$$

Nota: Una forma cuadrática también puede ser vista como un polinomio homogéneo de grado 2. En este caso se puede obtener la forma bilineal, que diremos asociada a q , B_q , a partir de la identidad dada por (b).

A cada forma cuadrática q se asocia una matriz simétrica, a saber, la matriz M , definida por la forma bilineal B_q . Esto es, si $V = ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n$, entonces

$$M = (B_q(e_i, e_j)) \in M_n(k) \ .$$

Sea (V,q) espacio cuadrático y A,B matrices asociadas a q con respecto a dos bases de V , entonces se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$A = C^t BC \qquad (*)$$

donde $C \in GL(n,k)$ es la matriz de cambio de base y C^t denota su transpuesta.
Cuando dos matrices A,B satisfacen la ecuación (*) decimos que ellas son equivalentes.

Definición: Si (V,q) y (V',q') son espacios cuadráticos sobre k , decimos que son isométricos, si existe un isomorfismo lineal $\sigma : V \xrightarrow{\sim} V'$ tal que $q(x) = q'(\sigma x)$, $\forall\, x \in V$ y en tal caso ponemos $q \cong q'$.

Observación: $q \cong q'$ si y sólo si sus matrices asociadas son equivalentes.

Definición: 1) Sea (V,q) un espacio cuadrático sobre k , definimos la dimensión de la forma cuadrática q , $\dim q$, como la dimensión de V sobre k .

2) Llamaremos a la clase del determinante de A en $k^*/_{k^{*2}} \cup \{0\}$, donde A es cualquier matriz asociada a la forma cuadrática q , el determinante de q , y lo denotaremos por $d(q)$.

Observación: $d(q)$ es una invariante para la forma cuadrática q , en virtud de (*) .

Si $q \cong q'$ entonces $d(q) = d(q')$.

El determinante permite distinguir las formas cuadráticas en dos tipos:

a) $d(q) = 0$

b) $d(q) \neq 0$

En el caso (a) decimos que q es singular y en el caso (b) decimos que q es regular (o no singular).

Operaciones entre espacios cuadráticos.

Suma ortogonal:

Sean (V,q) , (V',q') dos espacios cuadráticos, definimos la suma ortogonal de ellos, como el espacio cuadrático $(V \oplus V', q \perp q')$, donde:

$$q \perp q' : V \oplus V' \to k$$

$$(x \oplus y) \to q(x) + q'(y)$$

Definición: 1) Sea (V,q) un espacio cuadrático, sean $x,y \in V$, decimos que x es ortogonal a y si $B_q(x,y) = 0$.
2) Sea $U \subseteq V$ subespacio vectorial ((V,q) induce una estructura de espacio cuadrático sobre U).

Definimos el complemento ortogonal de U como:

$$U^{\perp} = \{x \in V / B_q(x,y) = 0 \quad \forall\, y \in U\}$$

Notación: Sea $W = U_1 \oplus U_2$ suma directa de espacios cuadráticos y tal que $B_q(x,y) = 0 \quad \forall\, x \in U_1, y \in U_2$ se dice que esta descomposición es ortogonal y anotamos $W = U_1 \perp U_2$.

Proposición 1: Sea (V,q) espacio cuadrático $U \subset V$ subespacio tal que $(U, q|_U)$ sea regular, entonces $V = U \perp U^{\perp}$.

Con esto se obtiene el siguiente teorema de diagonalización:

Teorema 2: Sea (V,q) un espacio cuadrático entonces V tiene una base ortogonal, esto es: $V = ke_1 \perp \ldots \perp ke_n$.

<u>Notación</u>: Si (ke,q) es un espacio cuadrático con $q(e) = a$, anotamos $q := \langle a \rangle$. Para un espacio $V = ke_1 \perp \ldots \perp ke_n$, con $q(e_i) = a_i$, ponemos

$$q := \langle a_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle a_n \rangle$$
$$:= \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$$

Así $\quad d(q) = \overline{a_1 \ldots a_n} \in k^*/_{k^{*2}} \cup \{0\}$.

Además para un vector $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x_i \in k$ se tiene

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 .$$

En adelante toda forma cuadrática la anotaremos en su forma diagonal.

Con esta notación se tiene la siguiente propiedad para la suma ortogonal: Si $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $q' = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ entonces:

$$q \perp q' = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle$$

y por lo tanto

$$d(q \perp q') = d(q) \cdot d(q') .$$

La forma $q \perp \ldots \perp q$ la anotaremos por $n \times q$.

<u>Producto tensorial</u>: Sean (V,q) y (V',q') espacios cuadráticos sobre k , definimos el producto tensorial entre

ellos, de la siguiente manera:

$$(V,q) \otimes (V',q') := (V \otimes_k V', q \otimes q') ,$$

donde $q \otimes q' : V \otimes_k V' \to k$

$$x \otimes y \to q(x) \cdot q'(y) .$$

Así, si $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $q' = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$, entonces $q \otimes q' = \langle a_1 b_1, \ldots, a_1 b_m, \ldots, a_n b_m \rangle$.

La forma $\bigotimes_{i=1}^{n} \langle 1, a_i \rangle$ se dice una n-forma de Pfister y la anotaremos por $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$.

Si Φ es una n-forma de Pfister, entonces $\Phi = \langle 1 \rangle \perp \Phi'$.

Llamaremos a Φ' la subforma pura de Φ .

Cuando no se preste a confusión, la forma $q \otimes q'$ la anotaremos por qq' .

Extensión de escalares:

Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión de k y (V,q) un espacio cuadrático sobre k . Construyamos el K-espacio cuadrático $(V \otimes_k K, q_K)$ de la siguiente manera:

$$V \otimes_k K = Ke_1 \oplus \ldots \oplus Ke_n ,$$

si $\qquad V = ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n$

y definimos:

$$q_K : V \otimes K \to K$$

$$(x \otimes \lambda) \to \lambda^2 q(x)$$

Daremos ahora algunas definiciones usuales:

1) Decimos que una forma cuadrática q representa a $d \in k^*$ si existe un vector x tal que $q(x) = d$.
   El conjunto de elementos, distintos de 0, representados por la forma q sobre k, lo denotaremos por $D_k(q)$, es decir,

$$D_k(q) = \{q(x) \neq 0 \ / \ x \in V\} \subseteq k^* .$$

2) Decimos que una forma es universal si $D_k(q) = k^*$.

3) Una forma cuadrática q se dice isótropa si existe un vector $x \neq 0$, con $q(x) = 0$. Asi mismo una forma se dice anisótropa si no existe un tal vector.

4) Sean q, q' formas cuadráticas, decimos que q' es subforma de q (y anotamos $q' \leq q$) si existe una forma r tal que $q' \perp r \cong q$.

Un ejemplo importante es el siguiente:

Sea $V = ke_1 \oplus ke_2$ y q definida por:

$$q(e_1) = 1 \ , \quad q(e_2) = -1 \quad y \quad B_q(e_1, e_2) = 0 \ ,$$

es decir $q = \langle 1, -1 \rangle$.

A esta forma la llamaremos plano hiperbólico y la denotaremos por $\mathbb{H}$.

Si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ entonces $q(x) = x_1^2 - x_2^2$.

Observemos que para $x \in k$,

$$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 ,$$

así $D_k(\mathbb{H}) = k^*$.

Claramente $\mathbb{H}$ es isótropa.

A continuación daremos los teoremas mas usuales sobre formas cuadráticas.

Proposición 3: Sea q una forma cuadrática regular, entonces q se descompone de la siguiente manera:

$$q \cong r \times \mathbb{H} \perp q_o ,$$

con q_o forma cuadrática anisótropa, $r \geq 0$.

(q anisótropa $\Rightarrow$ $r = 0$, q isótropa $\Rightarrow$ $r > 0$) .

Observación: Por la proposición anterior toda forma cuadrática isótropa es universal.

Teorema 4 (Cancelación de Witt): Si q, q_1, q_2 son formas cuadráticas, entonces: $q \perp q_1 \cong q \perp q_2 \Rightarrow q_1 \cong q_2$.

A partir de este teorema se obtiene el siguiente resultado:

Teorema (Witt): La descomposición dada en la Proposición 3 es única.

Proposición 5 (Representación): Sea q una forma cuadrática sobre k y $d \in k^*$, entonces:

1) $d \in D_k(q) \iff$ existe forma q' sobre k tal que

$$q \cong \langle d \rangle \perp q' .$$

2) $d \in D_k(q) \iff q \perp \langle -d \rangle$ es isótropa.

Proposición 6: Sean q, q' formas cuadráticas con $\dim q = \dim q' = 2$, entonces:

1) $d(q) = -1 \Rightarrow q \cong \mathbb{H}$.

2) $q \cong q' \iff d(q) = d(q')$ y $D_k(q) \cap D_k(q') \neq \emptyset$.

En lo siguiente introduciremos un concepto clásico de la teoría de formas cuadráticas.

Anillo de Witt.

Sea k un cuerpo, $car(k) \neq 2$, introduzcamos la siguiente relación de equivalencia entre formas cuadráticas sobre k.

Sean q y q' formas cuadráticas sobre k, decimos que q es equivalente a q' si existen enteros r y s tal que:

$$q \perp r \times \mathbb{H} \cong q' \perp s \times \mathbb{H}$$

Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia en el conjunto de las formas cuadráticas sobre k .

El conjunto de las clases lo denotaremos por $W(k)$, el cual posee estructura de anillo con las siguientes operaciones:

Sean $\bar{q},\bar{q}' \in W(k)$, definimos:

$$\bar{q} + \bar{q}' = \overline{q \perp q'}$$

y $$\bar{q}\cdot\bar{q}' = \overline{q \otimes q'}$$

es claro que estas operaciones están bien definidas y hacen de $W(k)$ un anillo conmutativo con unidad ($\mathbb{1} = \overline{\langle 1 \rangle}$ y $0 = \bar{\mathbb{H}}$).

Consideremos el siguiente homomorfismo:

$$\dim : W(k) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$\bar{q} \to \overline{\dim q}$$

Denotemos por I_k el núcleo de este homomorfismo, el cual es justamente el ideal de las clases de formas de dimensión par.

Observación: Para todo $n \geq 1$ el ideal I_k^n está generado por las n-formas de Pfister, como grupo abeliano.

§ 2. Invariante de Hasse.

En esta sección daremos en forma somera la construcción del grupo de Brauer de un cuerpo y la definición de la invariante de Hasse, para lo cual usaremos algunos resultados y definiciones conocidos que omitiremos.

Sean A,B dos algebras central-simples sobre un cuerpo k, decimos que ellas son equivalentes si existen enteros $r,s \geq 0$ tal que:

$$M_r(k) \otimes A \cong M_s(k) \otimes B$$

(Isomorfismo de algebras).

Es claro que esta es una relación de equivalencia en el conjunto de algebras central-simples sobre k. El conjunto de estas clases lo denotaremos por $Br(k)$.

Definamos la siguiente operación en $Br(k)$: Sean $[A], [B] \in Br(k)$,

$$[A]\cdot[B] = [A \otimes_k B]$$

y $$[A]^{-1} = [A^{op}] ,$$

donde A^{op} es el álgebra opuesta de A.

Con esta operación $Br(k)$ es un grupo abeliano, con unidad $\mathbb{1} = [M_n(k)]$, llamado grupo de Brauer de k.

Nótese la analogía que existe entre la construcción del grupo de Brauer de k y del grupo aditivo de $W(k)$.

Un ejemplo importante de algebras central-simples es el siguiente:

Sean $a,b \in k^*$, denotamos por $(a,b)_k$ la k-álgebra $k \oplus ki \oplus kj \oplus kij$, que satisface las relaciones:

$$i^2 = a \ , \quad j^2 = b \ , \quad ij = -ji \ .$$

Este tipo de algebras es llamado álgebra de cuaterniones. Veamos algunas propiedades de estas álgebras.

<u>Proposición 7</u>: Sean $a,b,c \in k^*$ entonces:

1) $(a,b)_k \cong (ax^2,by^2)_k$; $x,y \in k^*$

2) $(a,-a)_k \cong (1,a)_k \cong M_2(k)$

3) $(a,a)_k \cong (a,-1)_k$

4) $(a,1-a)_k \cong M_2(k)$, $a \neq 1$

5) $(a,b)_k \otimes_k (a,c)_k \cong (a,bc)_k \otimes M_2(k)$.

Dada el álgebra de cuaterniones $(a,b)_k$, podemos hacer de esta álgebra un espacio cuadrático sobre k , como sigue:

Sea $- : (a,b)_k \to (a,b)_k$ la conjugación

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij \to \alpha - \beta i - \gamma j - \delta ij$$

y $\quad N : (a,b)_k \to k$ la norma

$\qquad x \to x\bar{x}$

Así $((a,b)_k, N)$ es un espacio cuadrático sobre k. N es llamada la forma nórmica de $(a,b)_k$.

Observación: La forma bilineal asociada a N, B_N, está definida por $B_N(X,Y) = \frac{1}{2}(X\bar{Y} + Y\bar{X})$. Así es fácil ver que $\{1,i,j,ij\}$ es una base ortogonal del espacio cuadrático $((a,b)_k, N)$. Como además: $N(i) = -a$, $N(j) = -b$, $N(ij) = ab$, se tiene $N \cong \langle 1,-a,-b,ab\rangle = \langle\langle -a,-b\rangle\rangle$.

Proposición 8: Sean $(a,b)_k$, $(c,d)_k$ algebras de cuaterniones, entonces $(a,b)_k \cong (c,d)_k$ si y solo si sus formas nórmicas son isométricas.

Teorema 9: Para un álgebra de cuaterniones $(a,b)_k$, son equivalentes:

1) $(a,b)_k \cong M_2(k)$

2) La forma nórmica $\langle\langle -a,-b\rangle\rangle$ es isótropa.

3) La forma cuadrática $\langle a,b\rangle$ representa a 1

4) $a \in N_{k(\sqrt{b})/k}(k(\sqrt{b}))$

En cualquiera de estos casos se dice que $(a,b)_k$ se descompone o es trivial.

Interpretemos las propiedades anteriores de las álgebras de cuaterniones en el grupo de Brauer, $Br(k)$.

i) $[(a,-a)_k] = [(1,a)_k] = [(a,1-a)_k] = \mathbb{1}$

ii) $[(a,b)_k][(a,c)_k] = [(a,bc)_k]$

iii) $[(a,b)_k]^2 = \mathbb{1}$

iv) $[(a,b)_k] = \mathbb{1} \iff \langle a,b \rangle$ representa a 1.

En adelante trabajaremos con clases de álgebras de cuater - niones en $Br(k)$, y a $[(a,b)_k]$ lo denotaremos por (a,b) .

Sea $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ forma cuadrática sobre k . Asociemos a q el siguiente elemento en $Br(k)$:

$$s(q) = \prod_{i<j} (a_i, a_j) . \qquad \text{(invariante de Hasse)}$$

<u>Proposición 10</u>: $s(q)$ depende solo de la clase de isometría de q . En particular no depende de la diagonalización elegida para q .

Para ver esto usaremos el siguiente lema.

<u>Lema (Witt)</u>: Sean q,q' formas cuadráticas de dimensión n . Si $q \cong q'$ entonces existe sucesión de formas cuadráticas de dimensión n , $q_o, \ldots, q_m$ tal que $q_o = q$, $q_m = q'$ y si $q_i = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $q_{i+1} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ $(0 \leq i \leq m-1)$ entonces existen índices r,s tal que:

i) $\langle a_r, a_s \rangle \cong \langle b_r, b_s \rangle$

ii) $a_t \equiv b_t$ en k^*/k^{*2} , $t \neq r,s$

<u>Demostración de la Proposición 10</u>: Sean $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ y $q' = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ dos formas isométricas. Aplicando el lema anterior, basta demostrar:

Si $q' = \langle b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$ y $\langle b_1, b_2 \rangle \cong \langle a_1, a_2 \rangle$ entonces

$$s(q) = s(q')$$

Como $\langle b_1, b_2 \rangle \cong \langle a_1, a_2 \rangle$ tenemos que $b_1 b_2 \equiv a_1 a_2$ en k^*/k^{*2} y por lo tanto $\langle\langle -b_1, -b_2 \rangle\rangle \cong \langle\langle -a_1, -a_2 \rangle\rangle$; así $(b_1, b_2)_k \cong (a_1, a_2)_k$ (Proposición 8).

Luego $s(q) = (a_1, a_2)(a_1, a_3 \ldots a_n)(a_2, a_3 \ldots a_n) \prod_{3 \leq i < j} (a_i, a_j)$

$$= (b_1, b_2)(b_1 b_2, a_3 \ldots a_n) \prod_{3 \leq i < j} (a_i, a_j) = s(q') .$$

Veamos algunos resultados donde se aplica esta invariante.

<u>Teorema 11</u>: Sean q, q' formas cuadráticas con $\dim q = \dim q' \leq 3$, entonces

$$q \cong q' \iff d(q) = d(q') \quad \text{y}$$

$$s(q) = s(q')$$

<u>Proposición 12</u>: Sea q una forma cuadrática con $\dim q = 3$, entonces q es isótropa $\iff s(q) = (-1, -d(q))$.

<u>Observación</u>: La dimensión, el determinante y la invariante de Hasse, no caracterizan completamente las formas cuadráti-

ticas de dimensión mayor que 3. Por ejemplo, considerando las formas $q = 4 \times \langle 1 \rangle$ y $q' = 4 \times \langle -1 \rangle$ sobre $\mathbb{R}$ se tiene que: $\dim q = \dim q' = 4$, $d(q) = d(q') = 1$ y $s(q) = s(q') = 1\!\!1$. Pero $q \not\cong q'$ ya que $-1 \notin D_{\mathbb{R}}(q)$.

El siguiente teorema muestra un caso donde estras tres invariantes clasifican completamente las formas cuadráticas.

<u>Teorema 13</u> (Clasificación): Supongamos que toda forma cuadrática de dimensión ≥ 5 , sobre un cuerpo k , es isótropa. Entonces dos formas q y q' son isométricas si y solo si

$$\dim q = \dim q'$$

$$d(q) = d(q')$$

y $$s(q) = s(q') .$$

<u>Demostración</u>: Si $\dim q \leq 3$, Teorema 11 implica $q \cong q'$. Supongamos $\dim q \geq 4$, entonces $q \perp \langle -1 \rangle$ es isótropa (Hipótesis). Así q representa a 1 (Proposición 5). Luego podemos poner $q \cong \langle 1 \rangle \perp f$ y $q' \cong \langle 1 \rangle \perp f'$ (por el mismo argumento).

Es claro que $\dim f = \dim f'$, $d(f) = d(f')$ y $s(f) = s(f')$.

Usando inducción obtenemos $f \cong f'$ y así $q \cong q'$.

<u>Nota</u>: Usando el concepto de u-invariante, e.d. la máxima di-

mensión de las formas anisótropas, que introduciremos en el párrafo siguiente; este teorema clasifica las formas cuadráticas sobre cuerpos con u-invariante ≤ 4 . Como por ejemplo para los cuerpos: $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{F}_q(t)$.

§ 3. Algunas Invariantes de Cuerpos.

En esta sección introduciremos los conceptos de número de Pitágoras, nivel y u-invariante.

Definición: Sea A un anillo conmutativo, se define el número de Pitágoras de A , p(A) , como el menor entero $n \leq \infty$ tal que toda suma de cuadrados en A es suma de a lo mas n cuadrados en A .

Ejemplos:

a) $p(\mathbb{Z}) = p(\mathbb{Q}) = 4$ (Lagrange)

b) $p(\mathbb{R}) = 1$

c) $p(\mathbb{Q}(x)) = 5$ (Pourchet)

d) $p(\mathbb{Z}[x]) = \infty$ ([CDLR])

Algunos resultados sobre el número de Pitágoras se pueden encontrar en [L], [CDLR], [HJ] y [CLRR].

El cálculo de esta invariante, en general no es un problema sencillo como se puede apreciar en los trabajos citados. Un resultado conocido que usaremos es el siguiente:

Teorema 14 (Pfister): Sea k un cuerpo y q una n-forma de Pfister sobre k, entonces:

$D_k(q)$ es un grupo bajo la multiplicación.

En particular, para $q = 2^n \times \langle 1 \rangle$ se tiene la siguiente representación:

$$(u_1^2 + \ldots u_{2^n}^2)\cdot(v_1^2 + \ldots + v_{2^n}^2) = (u_1v_1 + \ldots + u_{2^n}v_{2^n})^2 + \\ + w_2^2 + \ldots + w_{2^n}^2$$

con ciertos $w_i \in k$.

Definición: El nivel de un anillo A, conmutativo con unidad 1, se define como:

$$s(A) = \operatorname{Min}\{n / -1 = a_1^2 + \ldots + a_n^2\}$$

Si -1 no es suma de cuadrados en A, ponemos $s(A) = \infty$.

Ejemplos:

a) $s(\mathbb{Q}(\sqrt{-7})) = 4$

b) $s(\mathbb{Q}) = \infty$

c) $s(\mathbb{F}_q) = 1,2$ si $q \equiv 1,3 \pmod 4$ respectivamente.

Como consecuencia del teorema 14 se obtiene el siguiente resultado acerca del nivel de un cuerpo.

Teorema 15 (Pfister): Sea k un cuerpo con $s(k) < \infty$, entonces $s(k) = 2^n$, para cierto $n \geq 0$.

Demostración: Sea t tal que

$$2^t \leq s < 2^{t+1} \quad , \quad s = s(k) .$$

Supongamos $s > 2^t$, sean $a_i \in k^*$, $1 \leq i \leq s$ con $1 + a_1^2 + \ldots + a_s^2 = 0$. Así tenemos:

$$-(1 + a_1^2 + \ldots + a_{2^t-1}^2) = a_{2^t}^2 + \ldots + a_s^2 \neq 0$$

y por lo tanto

$$-1 = \frac{(a_{2^t}^2 + \ldots a_s^2)(1 + a_1^2 + \ldots + a_{2^t-1}^2)}{(1 + a_1^2 + \ldots + a_{2^t-1}^2)^2}$$

y así -1 es suma de a lo más 2^t cuadrados en k , ya que $D_k(2^t \times \langle 1 \rangle)$ es un grupo (teorema 14), contradicción.

Observación: 1) Toda potencia de 2 se puede realizar como nivel de cierto cuerpo. En efecto, el cuerpo:

$$k = \mathbb{R}(X_1, \ldots, X_{2^t})[\sqrt{-(X_1^2 + \ldots X_{2^t}^2)}]$$

tiene nivel 2^t .

2) El teorema anterior no es válido para anillos, por ejemplo:

$$s(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 3 .$$

En el siguiente teorema se relacionan el número de Pitágoras y el nivel de un anillo.

<u>Teorema 16</u>: Sea A un anillo con $s = s(A) < \infty$, entonces

a) $s \leq p(A) \leq s + 2$

b) Si 2 es invertible en A entonces $s \leq p(A) \leq s + 1$

y todo elemento de A es suma de cuadrados.

<u>Demostración</u>:

a) Sea $a = \sum_i a_i^2$, $a_i \in A$ y $b = \sum_i a_i + \sum_{i<j} a_i a_j$

Luego se tiene la siguiente expresión para a:

$$a = (1 + \sum_i a_i)^2 - 1 - 2b = (1 + \sum_i a_i)^2 + b^2 - (b + 1)^2$$

Como -1 es suma de s cuadrados, obtenemos que a es suma de a lo más $s + 2$ cuadrados.

b) Sea $-1 = b_1^2 + \ldots + b_s^2$, entonces: $\forall\, a \in A$:

$$a = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 +$$

$$+ (b^2 + \ldots + b_s^2)\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 .$$

Los siguientes ejemplos muestran que las cotas dadas por el teorema no pueden ser mejoradas en general:

a) $A = \mathbb{Z}[i]$, $i^2 = -1$

$s(A) = 1$ y $p(A) \leq 3$.

Considerando el elemento $2(i - 1) = (1 + i)^2 + i^2 + i^2$;

tenemos que $p(A) = 3$, ya que $2(i - 1)$ no es suma de 2 cuadrados (ver por ejemplo, J.R. Joly: Sommes des carrés dans certains anneaux principaux, Bull. Sc. Math., 2e. série, 94, 1970, 85-95).

b) $A = \mathbb{F}_3[X]$; $s(A) = 2$ y $p(A) = 3$

En efecto, es fácil ver que el elemento $x - 1$ no es suma de 2 cuadrados.

En adelante usaremos la siguiente notación

$$S_r(A) = \{ \sum_{i=1}^{r} a_i^2 / a_i \in A\} = D_A(r \times \langle 1 \rangle) .$$

$$S(A) = \bigcup_{r \geq 1} S_r(A)$$

Con esta notación el número de Pitágoras de A , es el mínimo r tal que $S(A) \subseteq S_r(A)$.

Decimos que: un cuerpo k es pitagórico si $p(k) = 1$,
por ejemplo: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}((t))$.
Un cuerpo k es formal real si $s(k) = \infty$
(de otro modo decimos que k es no real),
por ejemplo: $\mathbb{Q}(X)$ es formal real,
$\mathbb{Q}(X)(\sqrt{-(x^2 + 1)})$ es no real.

<u>Definición</u>: Sea k un cuerpo. Se define la u-invariante de k , $u(k)$ como:

$u(k)$ = Min{n/toda forma cuadrática con dimensión mayor que n es isótropa sobre k}

$u(k)$ = Min{n/toda forma cuadrática con dimensión mayor o igual que n es universal sobre k}

Si existen formas anisótropas de cualquier dimensión, ponemos $u(k) = \infty$; como es el caso de cuerpos formal real, ya que la forma $m \times \langle 1 \rangle$ es anisótropa $\forall\, m \geq 1$.

Observación: La u-invariante no proporciona ninguna información de los cuerpos formal real, pero R. Elman y T.Y. Lam, ([E.L.I.]) dieron una definición más general para la u-invariante, a saber,

$$\tilde{u}(k) = \text{Máx}\{\dim q/q \text{ forma anisótropa, } \bar{q} \in W_t(k)\}$$

Con esta definición, $\tilde{u}(k)$ no es en general infinito para k formal real; por ejemplo: $\tilde{u}(\mathbb{R}((t_1))((t_2))((t_3))) = 0$. En el caso de un cuerpo k no real, $u(k) = \tilde{u}(k)$ pues $W_t(k) = W(k)$.

En este trabajo no usaremos la definición dada en [E.L.I.]

Algunos ejemplos:

a) $u(\mathbb{F}_q) = 2$, $2 \nmid q$

b) $u(\mathbb{Q}_p) = 4$

c) $u(\mathbb{C}((t_1)) \ldots ((t_n))) = 2^n$

d) $u(k) = 1 \iff k^* = k^{*2}$

Nota: Kaplanski ha conjeturado que la u-invariante de un cuerpo es siempre potencia de 2, o infinito.

Acerca de esta conjetura se tiene el siguiente resultado:

Proposición 17: Para un cuerpo k , $u(k) \neq 3,5,7$.

Proposición 18: Para un cuerpo k , $u(k) \leq 2$ si y solo si

$$I_k^2 = 0$$

Observación: 1) La proposición anterior implica que si $u(k) = 4$, entonces existe una 2-forma de Pfister anisótropa,

2) Se conjetura que $I_k^3 = 0 \Rightarrow u(k) < \infty$, pero hasta el momento no ha sido demostrado.

Otros resultados sobre la u-invariante, al igual que las demostraciones de las proposiciones 17 y 18, se pueden encontrar en [E.L.I.], [E.L.II.] y [L].

II RESULTADOS GENERALES SOBRE LA g-INVARIANTE.

§ 1. Resultados preliminares.

En este capítulo expondremos nuestros primeros resultados sobre la g-invariante, algunos de los cuales son esenciales para nuestros cálculos posteriores.

Recordemos que la g-invariante o número pitagórico lineal de un anillo conmutativo A , $g_A(n)$, se define como el mínimo entero r tal que toda suma de cuadrados de A-formas lineales en n-variables se representa como suma de a lo más r cuadrados de tales formas.

A partir de esta definición, el siguiente es el único resultado conocido para la g-invariante de un cuerpo cualquiera y se debe a [CDLR] .

Teorema 1: Sea k un cuerpo con $p = p(k) < \infty$, entonces $g_k(n) \leq n\cdot p$.

Demostración: Sean $\ell_i(x_1, \ldots, x_n)$ formas lineales n-arias sobre k , $1 \leq i \leq m$.

Consideremos la forma cuadrática

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \ell_i(x_1, \ldots, x_n)^2 \qquad (*)$$

Diagonalizando la forma q se tiene

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j(x_1, \ldots, x_n)^2$$

con $a_j \in k$ (y posiblemente 0 para algún j) y $L_j(x_1, \ldots, x_n)$ $1 \leq j \leq n$ son formas lineales independientes sobre k.

Vemos que $a_j \in S(k) \subseteq S_p(k)$, $1 \leq j \leq n$: considerando para cada j un vector $v_j \in k^n$ tal que $L_j(v_j) = 1$ y $L_i(v_j) = 0$, $i \neq j$ y comparando (*) con su forma diagonal, obtenemos que $a_j \in S(k)$. Por lo tanto

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (a_{j1}^2 + \ldots a_{jp}^2) L_j(x_1, \ldots, x_n)^2$$

Es decir q es suma de a lo más np cuadrados de formas lineales y así $g_k(n) \leq np(k)$.

<u>Observación</u>: 1) Con este argumento, estudiar sumas de cuadrados de formas lineales es equivalente a estudiar formas cuadráticas tal que los coeficientes de alguna (y por lo tanto de toda) diagonalización sean sumas de cuadrados en k.

2) Si k es no real, todo elemento es suma de cuadrados y por lo tanto toda forma cuadrática es suma de cuadrados de formas lineales; lo que no ocurre en el caso real.

3) Sea q una forma cuadrática de dimensión n. Si q es suma de m cuadrados de formas lineales, con $m < n$, entonces fácilmente se puede ver que q es singular.

4) En adelante, para el estudio de la g-invariante consideraremos sólo formas regulares, ya que las formas singulares pueden ser vistas como formas regulares de menor dimensión.

La siguiente proposición nos proporciona cotas inferiores para la g-invariante.

Proposición 2: La forma cuadrática: $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = n \times \langle 1 \rangle$ es suma de exactamente n cuadrados de formas lineales n-arias.

Demostración: Sean $\ell_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Entonces

$$n \times \langle 1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x_1, \ldots, x_n)^2 .$$

Supongamos que $n \times \langle 1 \rangle$ es suma de $n-1$ cuadrados de formas lineales:

$$n \times \langle 1 \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} L_i(x_1, \ldots, x_n)^2$$

con $\quad L_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$

Así tenemos:

$$n \times \langle 1 \rangle = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)^2$$

Comparando coeficientes obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}^2 \qquad\qquad 1 \leq j \leq n$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ir} a_{is} \qquad r \neq s$$

Esto es, existen n vectores ortogonales con respecto a la forma $(n - 1) \times \langle 1 \rangle$ que representan a 1, contradicción.

Corolario 3: Sea k un cuerpo, entonces:

a) $p(k) \leq g_k(n) \qquad \forall\, n \geq 1 \qquad (p(k) = g_k(1))$

b) $n \leq g_k(n) \qquad \forall\, n \geq 1$

c) $g_k(n) \leq g_k(m) \qquad \forall\, m \geq n \geq 1$

Notación: Sea k un cuerpo, $r,s > 0$ enteros. Definamos

$L_r^s(k) = \{q$ forma cuadrática/dim $q = s$
y q es suma de r cuadrados de formas
lineales s-arias$\}$

Observando la demostración del Teorema 1. obtenemos fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 4: Sea k un cuerpo, entonces k pitagórico (e.d. $p(k) = 1$) si y sólo si

$$g_k(n) = n \qquad \forall\, n \geq 1$$

Por ejemplo, esto se aplica cuando k es: real cerrado, cuadráticamente cerrado o algebraicamente cerrado.

§ 2. Un ejemplo.

El siguiente ejemplo muestra que es posible, usando métodos "elementales", calcular la g-invariante en algunos casos. Consideremos un cuerpo finito con $q = p^r$ elementos, $2 \neq p$, que denotaremos por $\mathbb{F}_q$. Se sabe que si f es una forma cuadrática sobre $\mathbb{F}_q$, entonces:

$$f \cong \begin{cases} \langle 1, \ldots, 1 \rangle \\ ó \\ \langle 1, \ldots, 1, e \rangle & \text{donde } e \notin \mathbb{F}_q^{*2} \end{cases}$$

Se tienen dos casos:

i) Si $f \cong \langle 1, \ldots, 1 \rangle = z_1^2 + \ldots + z_n^2$ entonces f es suma de exactamente n cuadrados de formas lineales.

ii) Si $f \cong \langle 1, \ldots, 1, e \rangle$; sean $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ tal que $e = a^2 + b^2$, luego

$$f \cong \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + (az_n)^2 + (bz_n)^2$$

esto es $f \in L_{n+1}^n(\mathbb{F}_q)$. Veamos que $f \notin L_n^n(\mathbb{F}_q)$ supongamos que sí, entonces existen n formas lineales: $\ell_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \ell_n(z_1, \ldots, z_n)$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(z_1, \ldots, z_n)^2$$

Sea $\quad \ell_i(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$

Por lo tanto:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \qquad\qquad 1 \leq j \leq n - 1$$

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ir}a_{is} = 0 \qquad\qquad r \neq s$$

Poniendo estas ecuaciones en forma matricial tenemos:

Sea

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

entonces por las ecuaciones anteriores obtenemos

$$A^tA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & e \end{vmatrix}$$

Tomando determinantes se tiene: $\det(A)^2 = e$, contradicción pues $e \notin \mathbb{F}_q^{*2}$.

Así, como la forma $\langle 1, \ldots, 1, e \rangle$ es suma de $n + 1$ cuadrados de formas lineales y no de menos. Tenemos el siguiente:

Teorema 5: Sea $q = p^r$, p primo impar, entonces

$$g_{\mathbb{F}_q}(n) = n + 1 .$$

Observación: 1) El argumento anterior solo es aplicable cuando se tiene $g_k(n) \leq n + 1$.

2) El teorema 5 lo obtendremos en el párrafo siguiente como consecuencia de un resultado más general.

§ 3. Resultados fundamentales.

En este párrafo obtendremos resultados que nos permiten reducir el estudio de las sumas de cuadrados de formas lineales, a considerar relaciones entre formas cuadráticas.

Lema 6 (Fundamental): Sea k un cuerpo. Sea $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ forma cuadrática sobre k , $a_i \in k^*$. Entonces: q es suma de m cuadrados de formas lineales si y solo si q es subforma de $m \times \langle 1 \rangle$

Demostración: $\Rightarrow$ Supongamos

$$q = \sum_{j=1}^{m} \ell_j(x_1, \ldots, x_n)^2$$

sean $\ell_j(x_1, \ldots, x_n) = a_{1j}x_1 + \ldots a_{nj}x_n$, $1 \leq j \leq m$

Así $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \sum_{j=1}^{m} (a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n)^2$

Comparando coeficientes tenemos

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} a_{rj}a_{sj} = 0 \qquad \forall\, r \neq s$$

Esto es, $m \times \langle 1 \rangle$ representa ortogonalmente a $a_1, \ldots, a_n$;
así $m \times \langle 1 \rangle \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \perp q'$.
Luego $q \leq m \times \langle 1 \rangle$

$\Leftarrow$ Sea $\Phi = m \times \langle 1 \rangle$, B_Φ la forma bilineal asociada a Φ ,

$$B_\Phi(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} X_iY_i \ .$$

Supongamos que $q \leq m \times \langle 1 \rangle$ entonces existen vectores
$v_1, \ldots, v_n$ tal que $\Phi(v_i) = a_i$ y $B_\Phi(v_i, v_j) = 0 \ \ \forall\, i \neq j$.
Pongamos $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$.

Definamos $\ell_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i$.

Se tiene

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_j(X_1, \ldots, X_n)^2 = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}X_i)^2 + 2 \sum_{i<k} a_{ij}a_{kj}X_iX_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2)X_i^2 + 2 \sum_{i<k} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_{kj}X_iX_k$$

Como $B_\Phi(v_i, v_k) = 0$, $i \neq k$ resulta

$$\sum_{j=1}^{m} \ell_j(X_1, \ldots, X_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Phi(v_i)X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2 = q .$$

Observación: Así $g_k(n)$ es el mínimo entero r tal que toda suma de cuadrados de formas lineales n-arias (o equivalente, toda forma cuadrática $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ con $a_i \in S(k)$) es subforma de $r \times \langle 1 \rangle$

El siguiente resultado nos proporciona una buena cota para la g-invariante de un cuerpo con u-invariante finita.

Teorema 7 (Fundamental): Sea k un cuerpo con $u(k) < \infty$, entonces:

$$g_k(n) \leq n + u(k) - 1 \qquad \forall\, n \geq 1 .$$

Demostración: Como $u(k) < \infty$, k es no real. Por lo tanto toda forma cuadrática es suma de cuadrados de formas lineales.

Inducción sobre n .

Para $n = 1$ toda forma cuadrática sobre k

$$q = \langle a \rangle \leq p(k) \times \langle 1 \rangle \leq u(k) \times \langle 1 \rangle$$

Supongamos que el teorema vale para $m < n$:

Sea $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \perp \langle a_n \rangle$

Por hipótesis inductiva (y usando el Lema 6):

$$\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \leq (n + u(k) - 2) \times \langle 1 \rangle$$

entonces existe forma cuadrática h sobre k con $\dim h = u(k) - 1$ tal que

$$\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \perp h \cong (n + u(k) - 2) \times \langle 1 \rangle$$

Así $\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \perp h \perp \langle 1 \rangle \cong (n + u(k) - 1) \times \langle 1 \rangle$

Pero $h \perp \langle 1 \rangle$ es universal, luego $h \perp \langle 1 \rangle \cong \langle a_n \rangle \perp h'$, con cierta h'. Por lo tanto $q \perp h' \cong (n + u(k) - 1) \times \langle 1 \rangle$.

Corolario 8: Sea k un cuerpo con $u(k) = p(k) < \infty$, entonces $g_k(n) = n + u(k) - 1$.

Demostración: A priori

$$g_k(n) \leq n + u(k) - 1 \qquad \text{(Teorema 7)}.$$

Así basta encontrar, para cada n, una forma cuadrática de dimensión n, que no sea subforma de $(n + u(k) - 2) \times \langle 1 \rangle$.
Si $u(k) = 1$ entonces k es pitagórico. Por Proposición 4 $g_k(n) = n$.

Supongamos $u(k) > 1$. Sea $a \in k^*$ tal que a es suma de $p(k)$ cuadrados y no menos.
Consideremos $q = \langle a \rangle \perp (n - 1) \times \langle 1 \rangle$, supongamos

$$q \leq (n + u(k) - 2) \times \langle 1 \rangle ,$$

esto es, existe forma cuadrática h , $\dim h = u(k) - 2$, tal que $q \perp h \cong (n + u(k) - 2) \times \langle 1 \rangle$.
Cancelando obtenemos:

$$\langle a \rangle \perp h \cong (u(k) - 1) \times \langle 1 \rangle ,$$

por lo tanto a es suma de $u(k) - 1$ $(= p(k) - 1)$ cuadrados en k , contradicción.
Así $g_k(n) = n + u(k) - 1$.

Observación: 1) El valor de la g-invariante para $\mathbb{F}_q$, que obtuvimos en el párrafo 2, es consecuencia inmediata del Corolario 8., ya que $p(\mathbb{F}_q) = u(\mathbb{F}_q) = 2$.
Otros cuerpos donde se puede aplicar el Corolario anterior son, por ejemplo $\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{Q}_2$.

2) Como veremos más adelante, en el Teorema 7. no es posible obtener la igualdad, al menos para $n < u(k) - 1$.

3) El Teorema 7 muestra que $p(k)\cdot n$ no es una buena cota para $g_k(n)$, al menos para cuerpos con u-invariante finita.

§ 4. g - invariante generalizada.

Definición: Definamos la g-invariante generalizada, $g_k^d(n)$, como el mínimo entero m de modo que toda suma de cuadrados de formas de grado d en n variables se representa como suma de a lo más m cuadrados de tales formas.

Queremos reducir el problema de calcular g_k^d al cálculo de g_k .

Sea f una forma de grado d en n-variables, i.e.

$$f = f(X_1, \ldots, X_n) .$$

Sean M_i , $1 \leq i \leq r$ los r monomios distintos de grado d en n-variables $\left(r = \binom{n+d-1}{n-1}\right)$, podemos escribir

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{r} a_i M_i$$

Consideremos la forma lineal r-aria

$$h(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{i=1}^{r} a_i z_i ,$$

entonces $f(X_1, \ldots, X_n) = h(M_1, \ldots, M_r)$.

Sean

$$f_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} M_i , \quad 1 \leq j \leq m$$

m formas de grado d en n variables.

Consideremos la forma de grado $2d$:

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{m} f_j(X_1, \ldots, X_n)^2$$

Sean $h_j(z_1, \ldots, z_r) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} z_i \quad , \quad 1 \leq j \leq m$

m formas lineales en r variables.

Por definición de g_k :

$$\sum_{j=1}^{m} h_j(z_1, \ldots, z_r)^2 = \sum_{j=1}^{g_k(r)} L_j(z_1, \ldots, z_r)^2$$

L_j formas lineales r-arias.

Reemplazando z_i por M_i , $1 \leq i \leq r$ se tiene

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{g_k(r)} L_j(M_1, \ldots, M_r)^2$$

por lo tanto

$$g_k^d(n) \leq g_k(r) ,$$

donde

$$r = \binom{n+d-1}{n-1}.$$

El siguiente teorema resuelve completamente el problema de calcular g_k^d conociendo el valor de g_k .

<u>Teorema 9</u>: Sea k un cuerpo, entonces

$$g_k^d(n) = g_k(r) \quad , \quad r = \binom{n+d-1}{n-1}$$

<u>Demostración</u>: Basta demostrar que existe una forma de grado $2d$ en n variables, que es suma de $g_k(r)$ cuadrados de

formas de grado d y no de menos.

Sea

$$q(z_1, \dots, z_r) = \sum_{j=1}^{g_k(r)} L_j(z_1, \dots, z_r)^2$$

una forma cuadrática que es suma de exactamente $g_k(r)$ cuadrados de formas lineales.

Construyamos la siguiente forma de grado $2d$:

$$\Phi(M_1, \dots, M_r) = \sum_{j=1}^{g_k(r)} L_j(M_1, \dots, M_r)^2$$

es suma de $g_k(r)$ cuadrados de formas de grado d .

Supongamos $\Phi(M_1, \dots, M_r)$ es suma de $g_k(r) - 1$ cuadrados de formas de grado d , es decir

$$\Phi(M_1, \dots, M_r) = \sum_{j=1}^{g_k(r)-1} \ell_j(M_1, \dots, M_r)^2$$

donde $\ell_j(M_1, \dots, M_r) = \sum_{i=1}^{r} b_{ij}M_i$ son formas de grado d en n variables.

Luego $\ell_j(z_1, \dots, z_r)$ son formas lineales en las variables z_i .

Así

$$\sum_{j=1}^{g_k(r)-1} \ell_j(z_1, \dots, z_r)^2 = \Phi(z_1, \dots, z_r) = q(z_1, \dots, z_r)$$

contradicción, pues $q(z_1, \dots, z_r)$ no es suma de $g_k(r) - 1$ cuadrados de formas lineales.

III CUERPOS GLOBALES.

El propósito de este Capítulo es recopilar resultados sobre formas cuadráticas en cuerpos globales (como por ejemplo el conocido Teorema de Hasse-Minkowski), para tener las herramientas necesarias para el cálculo de la g-invariante de un cuerpo global.

Definición: Sea k un cuerpo, decimos que k es un cuerpo global si k es una extensión finita de $\mathbb{Q}$ o una extensión finita de $\mathbb{F}_q(t)$.

Para un cuerpo global k , sea Ω_k el conjunto de todas las valuaciones (arquimedeanas y no arquimedeanas) de k .

Observación: Es conocido que los primos de k , es decir los ideales primos del anillo de enteros de k , están en correspondencia biunívoca con las valuaciones no arquimedeanas de k .

Sea $p \in \Omega_k$, la completación de k en p , la denotaremos por k_p .

Es sabido que si $p \in \Omega_k$ es no arquimedeano, entonces k_p es un cuerpo p-ádico o de series de Laurent sobre un cuerpo finito y si p es arquimedeano k_p es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$; este último caso se tiene sólo si k es un cuerpo de números (es decir una extensión finita de $\mathbb{Q}$).

Sea q una forma cuadrática sobre un cuerpo global k . Denotaremos por q_p la forma $q \otimes k_p$.

§ 1. Principio local-global.

A continuación mencionaremos algunos resultados clásicos sobre cuerpos globales, que dejaremos sin demostración, para no alargar demasiado estos preliminares. Ver [L], [O] para los detalles.

Teorema 1 (Aproximación): Sea k un cuerpo global, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ y $p_1, \ldots, p_n \in \Omega_k$, entonces: dado $\varepsilon > 0$ existe $a \in k$ tal que

$$|\alpha_i - a|_{p_i} < \varepsilon \quad , \qquad 1 \leq i \leq n$$

(donde $| \ |_{p_i}$ denota la norma asociada a la valuación p_i)

Observación: Como k_p^{*2} es abierto $\forall\, p \in \Omega_k$, en el teorema anterior siempre es posible encontrar $a \in k$ (ε suficientemente pequeño) tal que

$$a \in \alpha_i k_p^{*2} \quad , \qquad 1 \leq i \leq n \ .$$

Teorema 2 (Cuadrado global): Sea k un cuerpo global. Sea

$a \in k^*$, entonces $a \in k^{*2}$ si y sólo si $a \in k_p^{*2}$ $\forall\ p \in \Omega_k$.

Teorema 3 (Norma de Hasse): Sea F una extensión cuadrática de un cuerpo global k . Un elemento $a \in k$ es una norma de la extensión F si y sólo si a es una norma en cada completación de k .

Observación: Es fácil ver, aplicando el Teorema 9.I. que el resultado anterior es equivalente a:

Sea A un álgebra de cuaterniones sobre k . Entonces A se descompone sobre k si y sólo si A se descompone sobre k_p , $\forall\ p \in \Omega_k$.

Los tres teoremas anteriores los aplicaremos a la demostración del resultado central de este Capítulo.

Teorema 4 (Hasse-Minkowski): Sea q una forma cuadrática sobre un cuerpo global k , entonces q es isótropa sobre k si y sólo si q_p es isótropa sobre k_p , $\forall\ p \in \Omega_k$.

Demostración: $\Rightarrow]$ Trivial.

$\Leftarrow]$ Sea $n = \dim q$.

Supongamos $n = 2$, sin restricción podemos escribir

$$q = \langle 1, -a \rangle$$

q_p isótropa sobre cada $k_p \Rightarrow a \in k_p^{*2}$, $\forall\ p \in \Omega_k$.

Teorema 2 $\Rightarrow$ $a \in k^{*2}$ y así q es isótropa sobre k .

Sea $n = 3$. Podemos suponer $q = \langle 1,-a,-b \rangle$ con $a,b \notin k^{*2}$.

q_p isótropa $\forall\ p \in \Omega_k$ $\Rightarrow$ $\langle 1,-a \rangle_p$ representa b en k_p , esto es, $b \in N(k_p(\sqrt{a}))$, $\forall\ p \in \Omega_k$, así $b \in N(k(\sqrt{a}))$ (Teorema 3). Por lo tanto q es isótropa sobre k .

Sea $n = 4$. Pongamos $q = \langle 1,a,b,c \rangle$, distingamos dos casos:

i) $d(q) \in k^{*2}$ entonces $q \cong \langle 1,a,b,ab \rangle$. Por hipótesis el álgebra $(-a,-b)_{k_p}$ es trivial $\forall\ p \in \Omega_k$, ya que q_p es la forma nórmica. Por lo tanto el álgebra $(-a,-b)_k$ es trivial (Teorema 3), así q es isótropa.

ii) $d(q) = d \notin k^{*2}$. Sea $F = k(\sqrt{d})$ (extensión cuadrática), así sobre F

$$q \cong \langle 1,a,b,ab \rangle$$

Como q_p es isótropa $\forall\ p \in \Omega_k$ entonces q_p es isótropa $\forall\ p \in \Omega_F$.

Luego por (i) q es isótropa sobre F .

Sea $x + y\sqrt{d}$ un vector isótropo, no cero.

$$q(x + y\sqrt{d}) = q(x) + dq(y) = 2\sqrt{d}B_q(x,y) = 0$$

Por lo tanto

$$q(x) = -dq(y) \qquad y \qquad B_q(x,y) = 0$$

Si $q(x) = 0$ entonces $q(y) = 0$, como x e y no pueden ser simultáneamente cero, se tiene q isótropa sobre k.

Supongamos $q(x), q(y)$ distintos de cero. Así podemos poner:

$$q \cong \langle -dq(y) \rangle \perp \langle q(y) \rangle \perp q'$$

ya que x e y son ortogonales.

Comparando determinantes $q' \cong \mathbb{H}$.

Supongamos ahora $n \geq 5$. Inducción en n.

Pongamos $\quad q = \langle a,b \rangle \perp q_1 \quad , \quad \dim q_1 \geq 3$

y $\quad q_1 = \langle a_1, \ldots, a_{n-2} \rangle$.

Para $1 \leq i \leq n-2$ sean

$$T_i = \{p \in \Omega_k / a_i \text{ no es unidad en } k_p\} ,$$

es conocido que T_i es finito

Consideremos $\quad T = \{p \in \Omega_k / p \text{ diádico}\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} T_i\right)$

el cual también es conjunto finito. Para cada $p \in \Omega_k - T$, q_{1p} es isótropa, pués a_i es una unidad en k_p y $\dim q_{1p} \geq 3$ ([L], pág. 150). Como q_p es isótropa para cada $p \in \Omega_k$, en particular q_p es isótropa para cada $p \in T$, entonces elijamos $z_p \in k_p$ tal que $\langle a,b \rangle_p$ representa a z_p y q_{1p} representa a $-z_p$.

Por Teorema 1 existen $x, y \in k$ tal que aproximan a x_p, y_p respectivamente y de modo que si

$$z_p = x_p^2 a + y_p^2 b$$

y $$z = x^2 a + y^2 b$$

entonces z está en la misma clase de cuadrados que z_p en k_p .

Si $z = 0$ entonces $\langle a,b \rangle$ es isótropa y por lo tanto q también.

Supongamos $z \neq 0$, luego podemos escribir

$$q = \langle zab \rangle \perp \langle z \rangle \perp q_1 \; .$$

Para cada $p \in T$, q_{1p} representa a $-z_p$ y $\langle z \rangle_p \cong \langle z_p \rangle$ y así $\langle z \rangle_p \perp q_{1p}$ es isótropa $\forall \; p \in \Omega_k$.

Usando hipótesis inductiva $\langle z \rangle \perp q_1$ es isótropa sobre k y por lo tanto q .

Corolario 5: Sea k un cuerpo global. q, q' dos formas cuadráticas sobre k , entonces q es subforma de q' sobre k si y sólo si q_p es subforma de q'_p sobre k_p $\forall \; p \in \Omega_k$.

Demostración: $\Rightarrow\rfloor$ Trivial.

$\Leftarrow\rfloor$ Inducción sobre $\dim q$.

Supongamos $\dim q = 1$, entonces $q = \langle \alpha \rangle$, $\alpha \in k^*$.

Por hipótesis q'_p representa a α , $\forall \; p \in \Omega_k$, entonces $\langle -\alpha \rangle_p \perp q'$ es isótropa $\forall \; p \in \Omega_k$, por lo tanto

$\langle -\alpha \rangle \perp q'$ es isótropa sobre k .

Supongamos $\dim q > 1$. Sea $\alpha \in D_k(q)$ entonces

$$\alpha \in D_{k_p}(q_p) \subseteq D_{k_p}(q'_p) \qquad \forall\ p \in \Omega_k ,$$

así $\qquad q' \cong \langle \alpha \rangle \perp f'$

f' forma sobre k .

Como $q \cong \langle \alpha \rangle \perp f$, f forma cuadrática sobre k , pasando a las completaciones, cancelando y usando la hipótesis inductiva, obtenemos $f \leq f'$ sobre k y así $q \leq q'$.

<u>Corolario 6</u>: Mismas hipótesis anteriores, entonces $q \cong q'$ sobre k si y sólo si $q_p \cong q'_p$ sobre k_p , $\forall\ p \in \Omega_k$.

<u>Demostración</u>: $\Rightarrow\rfloor$ Trivial.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $f = q' \perp \langle -1 \rangle q$. Por hipótesis f_p es hiperbólica sobre k_p , $\forall\ p \in \Omega_k$. Así, por Teorema 4, f debe ser hiperbólica sobre k .

Usando el Corolario 5 se puede obtener una demostración más directa de este hecho.

§ 2. <u>Algunas invariantes de cuerpos globales</u>.

Veamos algunas propiedades de cuerpos globales no reales.

<u>Teorema 7</u>: Sea k un cuerpo global no real, entonces $u(k) = 4$.

Demostración: Por Teorema de Hasse-Minkowski $u(k) \leq 4$, pués

$$u(k_p) \leq 4 \qquad \forall\, p \in \Omega_k .$$

Sea $p \in \Omega_k$ no arquimedeano, entonces la forma $\langle\langle -u,-\pi \rangle\rangle$ es anisótropa sobre k_p , donde π es un uniformizante de k_p y u cierta unidad de k_p ([L] pág. 156).

Por la densidad de k en k_p , existen $a,b \in k^*$ tal que $a \in -\pi k_p^{*2}$ y $b \in -uk_p^{*2}$. Entonces la forma $\langle\langle a,b \rangle\rangle$ es anisótropa sobre k , y así $u(k) = 4$.

Veamos ahoras las invariantes $p(k)$ y $s(k)$ para un cuerpo global k no real.

Como $u(k) = 4$, se tiene $s(k) \leq 4$ y tenemos así tres casos posibles:

a) $s(k) = 1$, entonces $1 \leq p(k) \leq 2$, como k no es cuadráticamente cerrado, se tiene $p(k) = 2$.

b) Si $s(k) = 2$, entonces $p(k) = 3$. En efecto: Supongamos $p(k) = 2$, esto es, la forma cuadrática $\langle 1,1,-a \rangle$ es isótropa $\forall\, a \in k^*$ ó equivalentemente

$$\mathbb{1} = s(\langle 1,1,-a \rangle) = (-1,a) \qquad \forall\, a \in k^* ,$$

es decir, $(-1,a)_k$ es trivial $\forall\, a \in k^*$.

Sea $p \in \Omega_k$ tal que $-1 \notin k_p^{*2}$ (siempre existe tal p pues

$s(k) = 2)$ y k_p no diádico.

Sea π un uniformizante de k_p . Como k es denso en k_p existe $a \in k^*$ tal que $-a \in \pi k_p^{*2}$ y así la forma $\langle\langle 1,-a\rangle\rangle$ sobre k es isomorfa a $\langle 1,1,\pi,\pi\rangle$ sobre k_p , la cual es anisótropa sobre k_p . Así $\langle\langle 1,-a\rangle\rangle$ es anisótropa sobre k (Teorema 4.) y por lo tanto el álgebra $(-1,a)_k$ es no trivial. Así $p(k) = 3$.

c) $s(k) = 4 \Rightarrow p(k) = 4$ pués $u(k) = 4$.

<u>Observación</u>: El nivel de un cuerpo de números no real se puede caracterizar a partir de las completaciones diádicas de la siguiente manera:

Si k es un cuerpo de números no real y $-1 \notin k^{*2}$, entonces:

i) $s(k) = 2 \iff [k_p : \mathbb{Q}_2]$ es par $\forall\, p \in \Omega_k$, p diádico.

ii) $s(k) = 4 \iff [k_p : \mathbb{Q}_2]$ es impar para algún $p \in \Omega_k$ diádico.

Por ejemplo, ver [H] .

Calculemos el número de Pitágoras de un cuerpo global formal real k .

Sea $a \in k^*$ suma de cuadrados, entonces la forma $4 \times \langle 1\rangle \perp \langle -a\rangle$ es isótropa en todas las completaciones (incluyendo $\mathbb{R}$), así $P(k) \leq 4$.

<u>Proposición 8</u>: Sea k un cuerpo global formal real, entonces $P(k) > 2$.

<u>Demostración</u>: Supongamos $p(k) = 2$.

Sea $\mathcal{p} \in \Omega_k$ no arquimedeano tal que $-1 \notin k^{*2}$ y no diádico. Sea π un uniformizante de $k_{\mathcal{p}}$ como vimos anteriormente, existe $b \in k^*$ tal que $b \in \pi k_{\mathcal{p}}^{*2}$.

Sea $\varepsilon > 0$, $a \in k^*$ tal que

$$|a - 1|_{\mathcal{p}_i} < \varepsilon \qquad \forall\ \mathcal{p}_i \in \Omega_k$$

tal que $k_{\mathcal{p}_i} \cong \mathbb{R}$ (sólo hay un número finito de tales $\mathcal{p}_i$) y $|a - b|_{\mathcal{p}} < \varepsilon$.

Así tenemos que a es totalmente positivo y además $a \in \pi k_{\mathcal{p}}^{*2}$ (basta elegir ε suficientemente pequeño). Así al igual que antes el álgebra $(-1,-a)_k$ es no trivial (pués en $k_{\mathcal{p}}$ $(-1,\pi)_{k_{\mathcal{p}}}$ es no trivial). Luego a no es suma de dos cuadrados.

Así se tiene $p(k) = 3,4$ con k global y formal real.

Estos dos casos se pueden caracterizar considerando las completaciones diádicas de estos cuerpos, de la siguiente manera:

<u>Teorema 9</u>: Sea k un cuerpo global y formal real, entonces $p(k) = 3$ si y sólo si $\forall\ \mathcal{p} \in \Omega_k$ tal que $k_{\mathcal{p}}$ es diádico $[k_{\mathcal{p}} : \mathbb{Q}_2]$ es par.

<u>Demostración</u>: $\underline{\Rightarrow]}$ Supongamos existe $\mathcal{p} \in \Omega_k$ con $[k_{\mathcal{p}} : \mathbb{Q}_2]$ impar, como $s(\mathbb{Q}_2) = 4$ por Teorema de Springer $s(k_{\mathcal{p}}) = 4$.

Sea $a \in k^*$ tal que a está suficientemente cerca de 1 en todas las completaciones reales, es decir, a es totalmente positivo, y suficientemente cerca de -1 en k_p.

Entonces a no es suma de tres cuadrados en k_p, por lo tanto a no es suma de tres cuadrados en k. Así $p(k) = 4$.

$\Leftarrow$] Supongamos $[k_p : \mathbb{Q}_2]$ es par $\forall p$ con k_p diádico. Entonces $s(k\ ) \leq 2$, pués k_p descompone el álgebra $(-1,-1)_{k_p}$ y así $3 \times \langle 1 \rangle$ es isótropa sobre k_p.

Sea $a \in S(k)$, entonces $\langle 1,1,1 \rangle$ representa a a en k, pués lo representa en todas las completaciones.

IV LA g-INVARIANTE PARA CUERPOS GLOBALES.

En este Capítulo calcularemos la g-invariante por medio de un principio local-global, para cuerpos globales y para $\mathbb{R}(t)$.

§ 1. Caso Global.

A lo largo de este párrafo designaremos por k un cuerpo global.

Haremos uso de los resultados sobre la g-invariante para cuerpos p-ádicos y de series de Laurent obtenidos en [P].
En primer lugar estudiaremos el caso no real.

Teorema 1: Sea k no real, entonces:

$$g_k(n) = n + 3 \quad , \quad \forall\, n \geq 3$$

y $$g_k(2) = 4 \quad , \quad \text{si} \quad s(k) = 1,2$$

Si $s(k) = 4$ entonces $g_k(2) = 5$.

Demostración:

i) Supongamos $s(k) = 4$, entonces $p(k) = 4 = u(k)$ y así $g_k(n) = n + 3$, $\forall\, n$. (Corolario 8.II.).

ii) Supongamos $s(k) = 2$, entonces $p(k) = 3$, (pág. 45)

Calculemos primero $g_k(2)$:

Sea q una forma cuadrática sobre k , $\dim q = 2$. Como

$$q \perp \langle -1 \rangle q \cong 2 \times \mathbb{H}$$

y $$2 \times \mathbb{H} \cong 4 \times \langle 1 \rangle \quad (\text{pués } s(k) = 2) ,$$

entonces por Lema 6.II., $g_k(2) \leq 4$.

Sea $a \in k^*$ suma de 3 cuadrados y no menos. Pongamos $q = \langle 1,a \rangle$, y supongamos $q \in L_3^2(k)$, esto es $q \leq 3 \times \langle 1 \rangle$ y en consecuencia

$$q \perp \langle a \rangle = \langle 1,a,a \rangle \cong 3 \times \langle 1 \rangle$$

Cancelando obtenemos $a \in S_2(k)$, contradicción. Así $g_k(2) = 4$.

Veamos $g_k(3)$, a priori $g_k(3) \leq 6$ (Teorema 7.II.).

Sea a como arriba, consideremos la forma $q = \langle -1,a,a \rangle$ y supongamos $q \in L_5^3(k)$, es decir, existen $e,d \in k^*$ tal que

$$\langle -1,a,a \rangle \perp \langle e,d \rangle \cong 5 \times \langle 1 \rangle$$

Comparando determinantes $\langle e,d \rangle \cong \langle e,-e \rangle \cong \mathbb{H}$ y además $5 \times \langle 1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle -1,1,1 \rangle$, pués $s(k) = 2$. Por lo tanto $q \cong \langle -1,1,1 \rangle$ y así $a \in S_2(k)$, contradicción.

Luego $g_k(3) = 6$.

En general tomemos la forma:

$$q' = q \perp (n - 3) \times \langle 1 \rangle ,$$

es fácil ver que $q' \notin L^{n}_{n+2}(k)$, ya que si $q' \in L^{n}_{n+2}(k)$

$$q' \perp \langle e,d \rangle \cong (n + 2) \times \langle 1 \rangle ,$$

cancelando volvemos al caso de dimensión tres. Por lo tanto

$$g_k(n) = n + 3 , \qquad \forall\, n \geq 3 .$$

iii) Supongamos $s(k) = 1$, entonces $p(k) = 2$.

Por Teorema 8.III. existe una 2-forma de Pfister $\langle\langle a,b \rangle\rangle$, anisótropa. Igual que en el caso (ii) $g_k(2) \leq 4$. Pongamos $q = \langle a,b \rangle$, si $q \in L^{2}_{3}(k)$, entonces

$$q \perp \langle ab \rangle \cong 3 \times \langle 1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle$$

(pués $s(k) = 1$), contradicción. Así $g_k(2) = 4$.

En dimensiones mayores consideremos la forma

$$q = \langle a,b,ab \rangle \perp (n - 3) \times \langle 1 \rangle$$

Sabemos que $q \in L^{n}_{n+3}(k)$, (aplicando Teorema 7.II. y Lema 6.II.), usando el mismo argumento que en (ii) obtenemos

$$g_k(n) = n + 3 \quad , \quad \forall\, n \geq 3 .$$

Para terminar el caso global, consideremos cuerpos globales formal reales. Como en este caso la u-invariante es infinita, no es posible aplicar el Teorema 7.II. Pero entonces haciendo uso del principio local-global, obtenemos la misma cota para $g_k(n)$.

Teorema 2: Sea k formal real, entonces

$$g_k(n) = n + 3 \quad , \quad \forall\, n \geq 3$$

y $$g_k(2) = 5 \quad \text{si} \quad p(k) = 4$$

y $$g_k(2) = 4 \quad \text{si} \quad p(k) = 3 \; .$$

Demostración: Sea $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ forma cuadrática sobre k tal que a_i es suma de cuadrados en k , $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$q_{p} \leq (n + 3) \times \langle 1 \rangle_{p}$$

$\forall\, p \in \Omega_k$ no arquimediano (por [P]) y para p arquimediano

$$q_{p} \cong n \times \langle 1 \rangle_{p} \, ,$$

ya que en este caso $k_p \cong \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (ya que k es formal real), y por lo tanto $q_p \leq (n + 3) \times \langle 1 \rangle_p \qquad \forall\, p \in \Omega_k$.

Usando el Corolario 5.III., obtenemos

$$q \leq (n + 3) \times \langle 1 \rangle \; .$$

Luego $\quad g_k(n) \leq n + 3 \quad , \quad \forall\, n \geq 1$.

i) Supongamos $p(k) = 4$. Sea $a \in k^*$, suma de cuatro cuadrados y no menos, entonces la forma

$$q = \langle a \rangle \perp (n - 1) \times \langle 1 \rangle \notin L^n_{n+2}(k) \ .$$

En efecto, si $q \in L^n_{n+2}(k)$ entonces por Lema 6.II.

$$q \leq (n + 2) \times \langle 1 \rangle \ ,$$

así existe forma cuadrática h , $\dim h = 2$, de modo que

$$q \perp h \cong (n + 2) \times \langle 1 \rangle \ .$$

Cancelando obtenemos

$$\langle a \rangle \perp h \cong 3 \times \langle 1 \rangle \ ,$$

contradicción, pues $a \notin S_3(k)$.

Con esto $\quad g_k(n) = n + 3 \quad , \quad n \geq 1$.

ii) Supongamos $p(k) = 3$.

Sea $\quad q = \langle a_1, a_2 \rangle$, con a_1, a_2 suma de cuadrados en k .
En todas las completaciones reales de k se tiene que

$$q \cong \langle 1,1 \rangle \leq 4 \times \langle 1 \rangle \ .$$

Como $s(k_p) \leq 2$ en todas las completaciones p-ádicas de k , incluyendo las diádicas (por Teorema 9.III. y la observación de la página 39), se tiene:

$$q_p \perp \langle -1 \rangle q_p \cong 2 \times \mathbb{H} \cong 4 \times \langle 1 \rangle$$

Luego $q_p \leq 4 \times \langle 1 \rangle$ en todas las completaciones de k. Así usando Corolario 5.III., $q \leq 4 \times \langle 1 \rangle$ y entonces $g_k(2) \leq 4$.

Para ver la igualdad, consideremos la forma $q = \langle 1,a \rangle$, con a suma de tres cuadrados y no menos.

Es fácil ver que $q \notin L_3^2(k)$, pués como $a \notin S_2(k)$ entonces $\langle 1,a \rangle$ no puede ser subforma de $3 \times \langle 1 \rangle$.

Así $\quad g_k(2) = 4$.

Calculemos $g_k(3)$.

Por [P] existen $p \in \Omega_k$ tal que $\langle u,\pi,u\pi \rangle$ no es subforma de $5 \times \langle 1 \rangle$ en k_p donde $\pi \in k$ uniformizante y $u \in U_{k_p}$ cierta unidad de k_p.

Sea $p \in \Omega_k$ uno de éstos, usando el Teorema 1.III., podemos encontrar $a,b \in k^*$ totalmente positivos y de modo que $a \in uk_p^{*2}$ y $b \in \pi k_p^{*2}$, entonces la forma

$$\langle a,b,ab \rangle_p \cong \langle u,\pi,u\pi \rangle$$

Luego $\langle a,b,ab \rangle_p$ no es subforma de $5 \times \langle 1 \rangle$ en k_p y así tampoco en k por lo tanto $g_k(3) = 6$.

Para $n > 3$ consideremos la forma

$$q = \langle a,b,ab \rangle \perp (n-3) \times \langle 1 \rangle ,$$

la cual por lo anterior no pertenece a $L^n_{n+2}(k)$. En consecuencia

$$g_k(n) = n+3 \quad , \quad \forall\, n \geq 3 .$$

Nota: Con estos resultados se generaliza el trabajo de Mordel [M] , en el cual demuestra que:

$$g_{\mathbb{Q}}(n) \leq n+3 \quad , \quad \forall\, n .$$

§ 2. Formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}(t)$.

En el resto de este Capítulo nos dedicaremos a calcular la g-invariante para $\mathbb{R}(t)$ (cuerpo de funciones racionales en una variable sobre $\mathbb{R}$).

Basándonos en un trabajo de Knight ([K]), usaremos un principio local-global para $\mathbb{R}(t)$.

Necesitamos entonces conocer las completaciones de $\mathbb{R}(t)$ y caracterizar las formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}(t)$, vía sus completaciones.

Sea K un cuerpo cualquiera y $K(t)$ el cuerpo de funciones racionales en una variable sobre K . Hay esencialmente dos tipos de valuaciones sobre $K(t)$, triviales en K :

i) $v_\infty : K(t) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definida por:

Sea $g \in K(t)$, entonces $g = \frac{f}{h}$ con $f,h \in K[t]$ y

$(f,h) = 1$; entonces

$$v_\infty(g) = v_\infty\left(\frac{f}{h}\right) = gr(h) - gr(f) .$$

La uniformizante asociada a v_∞ es $1/t$ y entonces el cuerpo residual es $K(\infty) \cong K$.

ii) Valuaciones finitas:

Sea $\pi \in K[t]$ un polinomio mónico irreducible, así todo $g \in K(t)$ se escribe únicamente de la forma $g = \pi^n \frac{f}{h}$, con $f,h \in K[t]$ y $(\pi, fh) = 1$. Entonces definimos:

$$v_\pi : K(t) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

poniendo $v_\pi(g) = n$.

En este caso la uniformizante es π y el cuerpo residual es

$$K(\pi) = K[t]/_{(\pi)} .$$

<u>Notación</u>: Por Ω denotaremos el conjunto de valuaciones finitas de $\mathbb{R}(t)$.

Usaremos, para conocer las completaciones de $\mathbb{R}(t)$, el siguiente teorema de estructura:

<u>Teorema 3</u>: Sea A un anillo de valuación discreta completo, con cuerpo residual $\bar{K}$. Supongamos que A y $\bar{K}$ tienen la misma característica y que $\bar{K}$ es perfecto, entonces

$$A \cong \bar{K}[\![T]\!] \ .$$

Para una demostración ver [G].

Especializando estos dos hechos a $\mathbb{R}(t)$, tenemos que los cuerpos residuales de las completaciones de $\mathbb{R}(t)$ son $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Así se tiene que las completaciones obtenidas de las valuaciones definidas en (ii) son $\mathbb{R}((T))$ ó $\mathbb{C}((T))$.

Estudiemos un poco estos cuerpos.

Teorema 4: Sea K un cuerpo formal real, entonces $p(K[\![T]\!]) = p(K)$.

Demostración: Sea f una suma de cuadrados en $K[\![T]\!]$, sin restricción podemos suponer

$$f = a_o T^{2d} + a_1 T^{2d+1} + \ldots$$

con $a_i \in K$, $a_o \in K^*$ y suma de cuadrados, poniendo

$$f = a_o T^{2d}(1 + a_o^{-1} a_1 T + \ldots) \ .$$

Se tiene que $f \in a_o (K[\![T]\!])^2$, ya que

$$1 + a_o^{-1} a_1 T + a_o^{-1} a_2 T^2 + \ldots \in (K[\![T]\!])^2 \ ,$$

por Lema de Hensel (ver por ejemplo [G]), y así obtenemos

$$p(K[\![T]\!]) = p(K) \ .$$

<u>Corolario 5</u>: $p(\mathbb{R}) = p(\mathbb{R}[\![T]\!]) = p(\mathbb{R}((T))) = 1$

<u>Demostración</u>: Sea A un anillo de integridad, es fácil ver que:

$$p(\mathrm{Quot}(A)) \leq p(A) .$$

Como $\mathbb{R}((T)) := \mathrm{Quot}(\mathbb{R}[\![T]\!])$

tenemos $p(\mathbb{R}((T))) = 1$ (usando Teorema 4.)

<u>Proposición 6</u>: Sea $F = \mathbb{R}((T))$ entonces $F^*/_{F^{*2}} = \{1,-1,T,-T\}$.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in F^*$, como F es un cuerpo local con uniformizante T , $f = T^r u$, u cierta unidad de $\mathbb{R}[\![T]\!]$, es decir $T \nmid u$.

Entonces pongamos $u = a + Tg$ con $g \in F$ y $a \in \mathbb{R}^*$.

i) $a > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^{*2} \Rightarrow u \in F^{*2}$ (por Lema de Hensel).
Luego $f \in T^r(F^{*2})$.

Si r es par, $f \in F^{*2}$ y si r impar $f \in T \cdot F^{*2}$.

ii) $a < 0 \Rightarrow -a \in \mathbb{R}^{*2} \Rightarrow -u \in F^{*2} \Rightarrow f \in -T^r . F^{*2}$.

Así $f \in -F^{*2}$ ó $f \in -T \cdot F^{*2}$ si r es par o impar.

Para el caso $\mathbb{C}((T))$ se tienen los siguientes resultados:

<u>Proposición 7</u>: Sea $F = \mathbb{C}((T))$, entonces $p(F) = 2$ y $F^*/_{F^{*2}} = \{1,T\}$.

Demostración: Como $s(F) = 1$, se tiene $p(F) \leq 2$, pero $T \notin F^{*2}$, así $p(F) = 2$.

Sea $f \in F$, $f = T^r u$, u unidad. Como $\mathbb{C}$ es cuadráticamente cerrado, $u \in F^{*2}$. Así $f \in F^{*2}$ si r par y $f \in T \cdot F^{*2}$ si r es impar.

Observación: La Proposición 6 también vale si cambiamos $\mathbb{R}$ por un cuerpo real cerrado. En la Proposición 7 podemos cambiar $\mathbb{C}$ por un cuerpo cuadráticamente cerrado y así obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 8: Sea $F = K((T))$, donde K es un cuerpo cuadráticamente cerrado, entonces $u(F) = 2$.

Demostración: Sea $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in F^*$ y $n \geq 3$. Por Proposición 7 $a_i \equiv 1,T \quad (F^{*2}) \quad 1 \leq i \leq n$. Como $n \geq 3$ podemos suponer $a_1 \equiv a_2 \quad (F^{*2})$, por lo tanto

$$a_1 + a_2(\sqrt{-1})^2 = 0 ,$$

así q es isótropa.

Corolario 9: Sea F como arriba, sea q forma cuadrática regular sobre F , entonces $d(q)$ y $\dim(q)$ caracterizan completamente a q .

Observación: Sea q una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}(t)$, entonces sin restricción podemos suponer $q = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$

con $f_i \in R[t]$, $1 \leq i \leq n$. Denotaremos por

$$q_a = \langle f_1(a), \ldots, f_n(a) \rangle$$

la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}$, obtenida evaluando f_i en $a \in \mathbb{R}$, si a no es una raíz de f_i , $1 \leq i \leq n$.

Notación: El símbolo $\forall'$ indicará "para todo excepto un número finito".

La demostración de la siguiente proposición (debida a Witt) no la daremos por salirse del contexto de este trabajo. Esta se basa en ciertos resultados acerca de curvas algebraicas sobre $\mathbb{R}$ y álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{R}(x,y)$. La proposición en su forma más general se puede encontrar en el trabajo "Zerlegung reeller algebraischer funktionen in quadrate schiefkorper uber reellem funktionenkorper" Crelle J. 171 (1934).

Proposición 10 (Witt): Sea q una forma cuadrática regular sobre $\mathbb{R}(t)$, con $\dim q \geq 3$, entonces q es isótropa sobre $\mathbb{R}(t)$ si y sólo si q_a es isótropa sobre $\mathbb{R}$, $\forall' a \in \mathbb{R}$.

La importancia de la proposición anterior se debe a la siguiente observación:

1) Las completaciones finitas y reales de $\mathbb{R}(t)$, provienen de considerar valuaciones asociadas a polinomios del tipo $\pi = t - a$, $a \in \mathbb{R}$. Además, por el Teorema 3, estas comple-

taciones son series formales de Laurent sobre $\mathbb{R}$, por lo tanto son de la forma $\mathbb{R}((t - a))$.

2) Sea $f(t) \in \mathbb{R}[t]$, miremos $f(t)$ en cada completación $\mathbb{R}((t - a))$, donde $f(a) \neq 0$. (Esto se satisface $\forall' a \in \mathbb{R}$).
Desarrollando $f(t)$ en serie, se tiene:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + f''(a)\frac{(t - a)^2}{2!} + \ldots$$

$$= f(a)(1 + f(a)^{-1}f'(a)(t - a) + \ldots)$$

como $$(1 + f(a)^{-1}f'(a)(t - a) + \ldots) \in \mathbb{R}((t - a))^2$$

(Lema de Hensel), tenemos que:

$$f(t) = f(a)h^2 \quad , \quad h \in \mathbb{R}((t - a)) \ .$$

Así tenemos el siguiente principio local-global:

Teorema 11: Sea q una forma cuadrática regular sobre $\mathbb{R}(t)$, entonces: q es isótropa si y sólo si q_π es isótropa, $\forall\ \pi \in \Omega$ (q_π es la extensión de escalares de q a la completación determinada por π).

Demostración: Sólo necesitamos probar: Si q_π es isótropa $\forall\ \pi \in \Omega$ entonces q es isótropa.
Si $\dim q = 2$, entonces $d(q_\pi) = -1$, $\forall\ \pi \in \Omega$, por lo tanto $d(q) = -1$. Así q es isótropa.

Supongamos $\dim q \geq 3$.

Sea $\qquad q = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle , \quad f_i \in \mathbb{R}[t]$

Por hipótesis q_π es isótropa $\forall\ \pi \in \Omega$. En particular $\forall\ \pi \in \Omega$ real, por la observación anterior: $q_\pi = q_a$, donde $\pi = t - a$ y a no es raíz de f_i , $1 \leq i \leq n$.

Así q_a es isótropa $\forall' a \in \mathbb{R}$, luego por Proposición 10, q es isótropa sobre $\mathbb{R}(t)$.

Teorema 12: Sean q, q' formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}(t)$, entonces:

$$q \leq q' \iff q_\pi \leq q'_\pi \qquad \forall\ \pi \in \Omega .$$

Demostración: $\Rightarrow$] Es inmediato.

$\Leftarrow$] Inducción sobre la dimensión de q .

Supongamos $\dim q = 1$, $q = \langle f \rangle$, $f \in \mathbb{R}[t]$ entonces f está representado por q'_π , $\forall\ \pi \in \Omega$, así $\langle -f \rangle_\pi \perp q'_\pi$ es isótropa $\forall\ \pi \in \Omega$. Por teorema anterior $\langle -f \rangle \perp q'$ es isótropa, por lo tanto $\langle f \rangle \leq q'$.

Supongamos $\dim q > 1$.

Sea $\qquad f \in D(q) \subseteq D(q_\pi) \subseteq D(q'_\pi) \qquad \forall\ \pi \in \Omega$.

Por lo anterior $f \in D(q')$.

Así tenemos $q \cong \langle f \rangle \perp r$, $q' \cong \langle f \rangle \perp r'$

como $\qquad q_\pi \leq q'_\pi \qquad \forall\ \pi \in \Omega$, se tiene $r_\pi \leq r'_\pi$ y $\dim r < \dim r'$.

Por hipótesis inductiva $r \leq r'$ y así $q \leq q'$.

Así tenemos el siguiente corolario:

<u>Corolario 13</u>: Sean q,q' dos formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}(t)$, entonces $q \cong q'$ si y sólo si $q_\pi \cong q'_\pi$ $\forall\ \pi \in \Omega$.

Ahora estamos en condiciones de calcular la g-invariante de $\mathbb{R}(t)$. Para esto veamos la g-invariante para las completa - ciones finitas de $\mathbb{R}(t)$.

En el caso complejo, como vimos, las completaciones son del tipo $F = \mathbb{C}((T))$. Como $u(F) = p(F) = 2$ podemos aplicar el Corolario 8.II para obtener

$$g_F(n) = n + 1 \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

Cuando las completaciones son del tipo $F = \mathbb{R}((T))$ se tiene $g_F(n) = n$, pués F es pitagórico.

Así toda forma cuadrática sobre $\mathbb{R}(t)$, que es suma de cuadrados de formas lineales, es subforma de $(n + 1) \times \langle 1 \rangle$ sobre $\mathbb{R}(t)$, en virtud del Lema 6.II y del Teorema 12. Luego

$$g_{\mathbb{R}(t)}(n) \leq n + 1 \ ,$$

además como $p(\mathbb{R}(t)) = 2$, se tiene

$$g_{\mathbb{R}(t)}(n) = n + 1 \quad , \quad n \geq 1 \ .$$

Tenemos así

Teorema 14: $g_{\mathbb{R}(t)}(n) = n + 1 \quad , \quad \forall\, n \geq 1$.

Observación: En general para un cuerpo k que satisface el principio de Hasse-Minkowski se tiene la siguiente desigualdad

$$g_k(n) \leq \text{máx}\ \{g_{k_p}(n)/k_p \text{ completaciones de } k\} .$$

V CALCULO DE LA g-INVARIANTE PARA CUERPOS DE FUNCIONES.

Ahora trataremos el caso de extensiones trascendentes sobre cuerpos algebraicamente cerrados. A lo largo de este capítulo K designará un cuerpo algebraicamente cerrado. Necesitaremos del siguiente teorema para calcular la u-invariante de algunos cuerpos.

<u>Teorema 1 (Tsen-Lang)</u>: Sea F un cuerpo de grado de trascendencia n sobre K, entonces $u(F) \leq 2^n$.

Una demostración de este teorema en una forma más general se puede encontrar en [G].

Veamos primero el caso más sencillo:

Sea F un cuerpo de grado de trascendencia 1 sobre K, entonces $u(F) = 1,2$. Si $u(F) = 1$ entonces $g_F(n) = n$.
Si $u(F) = 2$ entonces $p(F) = 2$, por lo tanto $g_F(n) = n + 1$.
Por ejemplo, en el caso $F = K(X)$, tenemos $g_F(n) = n + 1$.

El próximo lema lo usaremos para calcular la u-invariante de extensiones puramente trascendentes de K.

<u>Lema 2</u>: Sea F un cuerpo y q_1, q_2 formas cuadráticas anisótropas sobre F.

Entonces $q_1 \perp \langle X \rangle q_2$ es anisótropa sobre la extensión puramente trascendente $F(X)$.

Demostración: Sea $q_1 = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$, $q_2 = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle$ supongamos $q_1 \perp \langle X \rangle q_2$ isótropa sobre $F(X)$. Esto es, existen

$$f_1(X), \ldots, f_r(X) , g_1(X), \ldots, g_s(X) \in F[X]$$

tal que:

$$a_1 f_1(X)^2 + \ldots + a_r f_r(X)^2 + X b_1 g_1(X)^2 + \ldots +$$
$$+ X b_s g_s(X)^2 = 0$$

haciendo $X = 0$, se obtiene:

$$a_1 f_1(0)^2 + \ldots + a_r f_r(0)^2 = 0$$

como q_1 es anisótropa sobre F se tiene $X/f_i(X)$, $1 \leq i \leq r$. Pongamos $f_i(X) = Xh_i(X)$, reemplazando en la ecuación original, tenemos:

$$X[X \sum_{i=1}^{r} a_i h_i(X)^2 + \sum_{i=1}^{s} b_i g_i(X)^2] = 0$$

Por lo tanto

$$X \sum_{1}^{r} a_i h_i(X)^2 + \sum_{1}^{s} b_i g_i(X)^2 = 0$$

Reiterando este argumento de descenso podemos suponer en la ecuación original que $X \nmid f_i(X)$, cierto i ó $X \nmid g_j(X)$, cierto j , y con esto se obtiene que q_1 ó q_2 es isótropa sobre F , contradicción.

Aplicando este resultado a las extensiones puramente trascendentes obtenemos:

Proposición 3: Sea $F = K(X_1, \ldots, X_n)$ una extensión puramente trascendente sobre K , entonces $u(F) = 2^n$.

Demostración: Inducción sobre n . Considerar

$$F_i = K(X_1, \ldots, X_{i-1})(X_i)$$

y usar lema anterior, junto con Teorema 1.

Así para la g-invariante tenemos:

Teorema 4: Sea $F = K(X_1, \ldots, X_n)$, entonces

i) $\qquad g_F(m) = m + 2^n - 1 \;, \quad m \geq 2^n - 1$

ii) $\qquad g_F(m) = 2m \qquad\qquad , \quad m \leq 2^n - 1$

Demostración: i) Por Lema 2 $\Phi_n = \langle\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\rangle$ es anisótropa sobre F .

Sea Φ' la subforma pura de Φ_n , por Teorema 7.II

$$g_F(m) \leq m + 2^n - 1$$

entonces $\qquad \Phi_n' \leq (2^{n+1} - 2) \times \langle 1 \rangle$.

Supongamos $\qquad \Phi_n' \leq (2^{n+1} - 3) \times \langle 1 \rangle$, es decir, existe h , con $\dim h = 2^n - 2$ tal que

$$\phi_n' \perp h \cong (2^{n+1} - 3) \times \langle 1 \rangle .$$

Como $s(F) = 1$, tenemos:

$$(2^{n+1} - 3) \times \langle 1 \rangle \cong (2^n - 2) \times \mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle$$

$$\cong h \perp \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle ,$$

Luego $\quad \phi_n' \cong \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle ,$

y así $\quad \phi_n \cong \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle \perp \langle 1 \rangle$

$$\cong \langle -1 \rangle h \perp \mathbb{H} \quad , \text{contradicción.}$$

Entonces $\quad g_F(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$.

Para el caso de mayor dimensión, considerando

$$q = \phi_n' \perp (m - (2^n - 1)) \times \langle 1 \rangle$$

se obtiene $\quad g_F(m) = m + 2^n - 1 \quad , \quad m \geq 2^n - 1$

ii) A priori $g_F(m) \leq 2m$, pues

$$q \perp \langle -1 \rangle q \cong (\dim q) \times \mathbb{H}$$

$$\cong 2 (\dim q) \times \langle 1 \rangle \quad ,$$

pués $s(F) = 1$ (q una forma cuadrática cualquiera.)

Sea q una forma cuadrática con $\dim q = m$, y tal que $q \leq \phi_n'$.

Supongamos $q \in L^m_{2m-1}(F)$, esto es, existe forma cuadrática h , con $\dim h = m - 1$, tal que

$$q \perp h \cong (2m - 1) \times \langle 1 \rangle$$

$$\cong (m - 1) \times \mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle \qquad \text{pués } s(F) = 1$$

$$\cong h \perp \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle$$

Cancelando, obtenemos:

$$q \cong \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle .$$

Luego $\qquad \Phi'_n \cong \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle \perp r ,$

con cierta forma cuadrática r .

Igual que en el caso (i) tendríamos Φ_n isótropa, contradicción. Por lo tanto

$$g_F(m) = 2m \quad , \quad m \leq 2^n - 1 .$$

VI RELACIONES ENTRE LA g-INVARIANTE Y LA u-INVARIANTE.

En este Capítulo mostraremos ciertos resultados que generalizan algunos casos que tratamos anteriormente, y que nos muestran una interesante relación entre la g-invariante y la u-invariante de un cuerpo.

<u>Proposición 1</u>: Sea F un cuerpo no real, entonces

$$g_F(n) = n + 1 \qquad \forall\, n \geq 1 \iff u(F) = 2$$

<u>Demostración</u>: $\underline{\Rightarrow}$ Si $g_F(n) = n + 1 \quad \forall\, n$ entonces $g_F(1) = p(F) = 2$, luego como F es no real $s(F) \leq 2$.

Sea q una forma cuadrática sobre F, con $\dim q = 3$ como $g_F(n) = n + 1$,

$$q \perp \langle d \rangle \cong 4 \times \langle 1 \rangle \cong 2 \times \mathbb{H} ,$$

con cierto $d \in F^*$. Así $q \cong \mathbb{H} \perp \langle -d \rangle$, es decir, q es isótropa, por lo tanto $u(F) \leq 2$, y luego $u(F) = 2$ (pués $p(F) = 2$).

$\underline{\Leftarrow}|$ Si $u(F) = 2$ entonces $p(F) = 2$, en efecto:

$$p(F) = 1 \Rightarrow F^* = F^{*2} \Rightarrow u(F) = 1$$

Así $u(F) = p(F) = 2$, por lo tanto por el Corolario 8.II

$$g_F(n) = n + 1 \quad , \quad \forall\, n \geq 1 .$$

Porposición 2: Sea F un cuerpo no real, entonces:

$$g_F(n) = n + 3 \quad , \quad \forall\, n \geq 3 \;\Rightarrow\; u(F) = 4$$

Demostración: $s(F) \leq p(F) \leq g_F(3) = 6$ entonces $s(F) \leq 4$, por Teorema 15.I.

Sea q forma cuadrática sobre F, $\dim q = 5$, por hipótesis $q \leq 8 \times \langle 1 \rangle$, luego existe forma cuadrática h sobre F, $\dim h = 3$ tal que

$$q \perp h \cong 8 \times \langle 1 \rangle$$

Así $\qquad q \perp h \cong 4 \times \mathbb{H} \qquad (s(F) \leq 4)$

Por lo tanto $q \cong \langle -1 \rangle h \perp \mathbb{H}$

entonces $\qquad u(F) \leq 4$.

Supongamos $u(F) < 4$, entonces por Proposición 17.I., $u(F) = 1,2$.

Si $u(F) = 1$, entonces $g_F(n) = n$, contradicción.

Si $u(F) = 2$, entonces por Proposición anterior $g_F = n + 1$, contradicción.

El recíproco de la Proposición anterior

$(u(F) = 4 \Rightarrow g_F(n) = n + 3 , \quad \forall n \geq 3)$ se tiene si suponemos $p(F) = 3$ cuando $s(F) = 2$.

En efecto: Por Teorema 7.II., $g_F(n) \leq n + 3$

$u(F) = 4 \Rightarrow s(F) \leq 4$, entonces tenemos tres casos:

i) $s(F) = 1$. Como $u(F) = 4$, por Proposición 18.I. $I_F^2 \neq 0$. Esto es, existe una 2-forma de Pfister $q = \langle\langle a,b \rangle\rangle$ anisótropa; sea $q' = \langle a,b,ab \rangle$ la subforma pura de q .

Por hipótesis $q' \leq 6 \times \langle 1 \rangle$. Supongamos $q' \leq 5 \times \langle 1 \rangle$, luego existe forma cuadrática h , $\dim h = 2$ tal que $q' \perp h \cong 5 \times \langle 1 \rangle$. Comparando determinantes se tiene $h \cong \langle 1,1 \rangle$ y entonces cancelando h obtenemos

$$q' \cong 3 \times \langle 1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle \quad , \text{ contradicción.}$$

Así $q' \notin L_5^3(F)$ y entonces considerando la forma

$$q' \perp (n - 3) \times \langle 1 \rangle ,$$

se tiene $g_F(n) = n + 3 \quad , \quad n \geq 3$.

ii) $s(F) = 2$. Como en este caso suponemos $p(F) = 3$, existe $a \in S_3(F) \setminus S_2(F)$. Consideremos la forma (anisótropa) 3-dimensional $\langle a,a,-1 \rangle$.

Usando el mismo argumento anterior, obtenenmos

$$g_F(n) = n + 3 \quad , \quad n \geq 3 .$$

iii) $s(F) = 4$. En este caso $p(F) = 4$. Usando el Corolario 8.II., se tiene:

$$g_F(n) = n + 3 \quad , \quad n \geq 1 \; .$$

Observación: Este resultado no es válido cuando $n \leq 2$, como se observa en resultados anteriores (en los casos (i), (ii) $g_F(2) = 4$).

Proposición 3: Sea F un cuerpo no real, entonces

$$g_F(n) = n + 7 \quad , \quad n \geq 7 \quad \Rightarrow \quad u(F) = 8 \; .$$

Demostración: Se tiene $s(F) \leq 14$, por lo tanto $s(F) = 1,2,4,8$ (usando Teorema 15. I.). Es conocido que $(2s(F))\cdot W(F) = 0$ (ver [L], pág. 312). Luego $16 \times \langle 1 \rangle \cong 8 \times \mathbb{H}$.

Sea q forma cuadrática, con $\dim q = 9$, entonces $q \leq 16 \times \langle 1 \rangle \cong 8 \times \mathbb{H}$, es decir, existe forma cuadrática h tal que

$$q \perp h \cong 8 \times \mathbb{H} \qquad \text{y} \qquad \dim h = 7$$

Así $$q \perp h \cong h \perp \langle -1 \rangle h \perp \mathbb{H}$$

y luego q es isótropa, por lo tanto $u(F) \leq 8$. Si $u(F) < 8$, entonces por Teorema 7.II., $g_F(n) < n + 7$, contradicción.

Las Proposiciones 1 y 2 resuelven completamente el problema de calcular la g-invariante para cuerpos con u-invariante 2 y 4 (respectivamente), ya que ellos muestran la igualdad en el Teorema 7.II. El recíproco de la Proposición 3 es sencillo para los casos $s(F) = 1,2,8$; pero si $s(F) = 4$, no hemos logrado obtener una demostración.

Una generalización de la Proposición 3 es el siguiente:

Teorema 4: Sea F un cuerpo no real, entonces:

$$g_F(n) = n + 2^k - 1 \quad , \quad n \geq 2^k - 1 \Rightarrow u(F) = 2^k$$

Demostración: Como $p(F) \leq g_F(n)$, $\forall$ n se tiene $s(F) \leq g_F(n)$, $\forall$ n . En especial, si $n = 2^k - 1$, $s(F) \leq 2^{k+1} - 2$. Así $s(F) \leq 2^k$ (por Teorema 15.I.).

Sea $s(F) = 2^\ell$, $\ell \leq k$, entonces

$$2^{\ell+1}W(F) = 0 .$$

Por lo tanto $2^{k+1} \times \langle 1 \rangle \cong 2^k \times \mathbb{H}$

Sea q una forma cuadrática, con $\dim q = 2^k + 1$. Por hipótesis

$$q \leq 2^{k+1} \times \langle 1 \rangle \cong 2^k \times \mathbb{H}$$

Por lo tanto existe una forma h sobre F , con $\dim h = 2^k - 1$ tal que $q \perp h \cong 2^k \times \mathbb{H}$. Así

$$q \perp h \cong h \perp \langle -1 \rangle h \perp \mathbb{H}$$

Luego q es isótropa y así $u(F) \leq 2^k$. Si $u(F) < 2^k$, entonces por Teorema 7.II.,

$$g_F(n) < n + 2^k - 1 \qquad , \qquad \text{contradicción.}$$

Observación: Para obtener el recíproco de este teorema, siguiendo los métodos anteriores, tendríamos que suponer

$$I_F^k = 0 \Rightarrow u(F) < 2^k ,$$

lo cual es aún un problema abierto en el caso general, y aún en el caso $k = 3$.

En el teorema anterior si suponemos $g_F(n) = n + m$, con $m \neq 2^k - 1$ la demostración dada falla.

El siguiente teorema es una aproximación a la determinación de la g-invariante para cuerpos con u-invariante finita.

Teorema 5: Sea F un cuerpo con $u(F) = u < \infty$, entonces

$$s(F) = 1 \Rightarrow \begin{cases} g_F(n) = n + u - 1 , & n \geq u - 1 \\ \\ g_F(n) = 2n , & n \leq u - 1 \end{cases}$$

Demostración: Sea q forma cuadrática sobre F , con $\dim q = u$ y anisótropa.

Como q es universal, podemos poner $q \cong \langle 1 \rangle \perp q'$, donde q' no representa a 1, sabemos $q' \in L_{2u-2}^{u-1}(F)$. Supongamos

$$q' \in L^{u-1}_{2u-3}(F) \ ,$$

es decir $\qquad q' \leq (2u - 3) \times \langle 1 \rangle$

entonces existe forma h , con $\dim h = u - 2$ tal que

$$\begin{aligned} q' \perp h &\cong (2u - 3) \times \langle 1 \rangle \\ &\cong (u - 2) \times \mathbb{H} \perp \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto $q' \perp h \cong h \perp \langle -1 \rangle h \perp \langle 1 \rangle$

Cancelando se tiene que q' representa a 1, contradicción.

Para $n > u - 1$; tomando $q' \perp (n - u + 1) \times \langle 1 \rangle$ se obtiene:

$$g_F(n) = n + u - 1 \quad , \quad n \geq u - 1 \ .$$

En general $g_F(n) \leq 2n$ pués $s(F) = 1$, si $n \leq u - 1$; considerando cualquier subforma de q' y usando el método anterior se obtiene

$$g_F(n) = 2n \quad , \quad n \leq u - 1$$

<u>Observación</u>: Entre la u-invariante generalizada, introducida en la página 22, para un cuerpo formal real, y la g-invariante, no conocemos relaciones como las obtenidas en el Capítulo II y en este Capítulo.

Sería interesante obtener en general una cota para la g-invariante de un cuerpo formal real k , que mejore la cota $p(k)n$, obtenida en el Teorema 1. II.

Un problema bastante más complicado es calcular la g-invariante para anillos con número de Pitágoras finito.

En todo caso, para un anillo de integridad A , es fácil ver que

$$g_A(n) \geq g_k(n) \quad , \quad \forall\, n \geq 1 \ ,$$

donde $k = \mathrm{Quot}(A)$.

Es claro que los métodos usados en este trabajo no permiten calcular la g-invariante de un anillo.

Algunos resultados en esta dirección son, por ejemplo:

a) Sea $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, p primo, entonces

$$g_A(n) \leq n + 3$$

b) $$g_{\mathbb{Z}}(n) = n + 3 \quad , \quad n \leq 5 \ .$$