



# **Mercados de Matching Multilaterales: Taxonomía para la Estabilidad y Teoría de Precios en Plataformas**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN ECONOMÍA

Alumno: Jorge Ignacio Arenas Molina  
Profesor Guía: Juan Pablo Torres-Martínez

Santiago, abril 2022

# Mercados de *Matching* Multilaterales: Taxonomía para la Estabilidad y Teoría de Precios en Plataformas\*

Jorge Arenas  
Universidad de Chile  
Email: jarenasmo@fen.uchile.cl

Abril 2022

## Resumen

En esta tesis se estudian mercados en los cuales existen múltiples grupos de agentes que buscan emparejarse. Se propone una taxonomía para las estructuras de las preferencias en mercados trilaterales con el fin de describir en detalle la literatura sobre existencia de estabilidad, y a la vez se aporta en esta literatura con resultados de existencia para un tipo de estructura particular. Por otro lado, se analiza el problema de la asignación de precios de una plataforma monopolística de emparejamientos en mercados multilaterales. Bajo una condición de ordinalidad para el proceso de *matching* de la plataforma, se encuentra que desbalances en el tamaño de los grupos no afectan las asignaciones óptimas del nivel de precios. Además, se estudia el problema de la fijación del nivel de precios óptimo mediante simulaciones computacionales.

## Introducción

El estudio de la teoría de *matching* tiene importantes aplicaciones en diversos problemas económicos y sociales. Mercados matrimoniales, donación y trasplantes de órganos, admisión a colegios/universidades son solo algunas de estas aplicaciones. La idea es emparejar agentes según sus preferencias, catalogados en grupos por características comunes. El modelo clásico de *matching* bilateral consta de dos grupos de agentes, en donde cada uno de estos posee preferencias por aquellos del otro grupo. Un *matching* es una colección de parejas compuestas por un agente de cada grupo, y una de sus propiedades más importante es la estabilidad: que no exista una pareja de agentes que prefiera emparejarse entre sí a seguir con sus parejas bajo el *matching*. Uno de los resultados más relevantes en esta literatura corresponde al de Gale y Shapley (1962), en el cual se demuestra la existencia de al menos un *matching* estable para cualquier mercado bilateral, y además se propone un algoritmo para encontrarlo.

Sin embargo, cuando el mercado posee un tercer grupo de agentes se compromete este resultado de existencia. Knuth (1976) fue quien primero motivó el estudio de estos mercados trilaterales, planteando que el resultado de existencia de Gale y Shapley (1962) podría dejar de cumplirse. Lo anterior resultó cierto, ya que Alkan (1988) mostró un ejemplo en el cual un mercado con tres agentes en cada uno de los tres grupos, no posee *matchings* estables.

---

\*Agradezco a mi Profesor guía, Juan Pablo Torres-Martínez, por su inmenso apoyo brindado a lo largo de todo el proceso.

En esta tesis se estudian mercados en los cuales existen más de dos grupos de agentes que buscan emparejarse. Por un lado, se estudian condiciones sobre las preferencias que garanticen la existencia de *matchings* estables en mercados trilaterales. Estas condiciones hacen referencia a los grupos de agentes sobre los cuales se definen los perfiles de preferencias. De esta forma, cada mercado trilateral posee una estructura derivada de la dirección de las preferencias de los agentes en cada grupo. Entonces, para caracterizar los tipos de estructuras y describir en detalle los resultados sobre existencia de estabilidad, se propone una taxonomía que agrupa todos estos tipos.

Con esta taxonomía se contabiliza un total de siete tipos de estructuras, que agrupan 52 mercados particulares. En la literatura se ha estudiado la existencia de *matchings* estables, y condiciones que aseguren esta, en solo seis de estos tipos (43 mercados) (Alkan, 1988; Danilov, 2003; Lahiri, 2008; Pashkovich y Poirrier, 2020; Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu, 2019; Zhang y Zhong, 2021; Zhong y Bai, 2019). Para los nueve mercados de la categoría restante, en esta tesis se demuestra la existencia de al menos un *matching* estable cuando el número de agentes por grupo es exactamente igual a dos, pero este resultado deja de cumplirse cuando se tienen como mínimo tres agentes en cada grupo (Teorema 1). No obstante, se establecen condiciones sobre los perfiles de preferencias que permiten recuperar la existencia de estabilidad (Teorema 2).

Con estos resultados se completa la literatura sobre existencia de *matchings* estables en mercados trilaterales. Pero la taxonomía propuesta se puede extender para estudiar mercados con más de tres grupos de agentes. Ahora bien, la complejidad del problema crece conforme aumentan los grupos en el mercado. A modo de ejemplo, para el caso cuadrilateral el número de mercados a analizar supera los 30,000.

Por otro lado, en esta tesis también se estudian problemas de asignación y fijación de precios para una plataforma monopolística de emparejamientos en mercados multilaterales. Estas plataformas funcionan proporcionando una interacción entre agentes de distintos grupos para llevar a cabo cierto servicio, a cambio de tarifas de acceso o bien contingentes a la transacción. Poseen como gran ventaja la reducción de los costos de búsqueda y de transacción entre los agentes de un mercado al momento de realizar un emparejamiento (Hagiu, 2006).

Han cobrado relevancia últimamente por la variedad de servicios en que pueden operar: plataformas de viajes compartidos, de citas, de búsqueda de empleo, de financiamiento compartido, etc.; como también por el tipo de modelo de negocios, con varios ejemplos de plataformas exitosas: Facebook, Google, eBay, Uber, por nombrar algunas. Por lo mismo, se ha intensificado el estudio del funcionamiento de estas plataformas (Evans y Schmalensee, 2016; McIntyre y Srinivasan, 2017), y particularmente el relacionado a la

teoría de precios (Rochet y Tirole, 2003, 2006; Weyl, 2010).<sup>1</sup>

La literatura sobre teoría de precios en estas plataformas se ha enfocado principalmente en mercados de dos grupos, en los cuales los emparejamientos son entre muchos agentes a la vez,<sup>2</sup> y estos agentes poseen determinadas correlaciones en sus preferencias por sus potenciales parejas (Armstrong, 2006; Caillaud y Jullien, 2003; Rochet y Tirole, 2006). Estas dos últimas características hacen que el proceso de *matching* que establece la plataforma no juegue un rol fundamental en el problema de asignación de precios, y por lo mismo no sea considerado en esa literatura (Weyl, 2010).

Sin embargo, cuando existe exclusividad en los emparejamientos, cada agente está interesado por la identidad de sus potenciales compañeros, y por tanto el proceso de *matching* cobra relevancia (Marx y Schummer, 2021). Por ejemplo, en Damiano y Li (2007) se plantea un modelo de plataforma monopolística y se detallan condiciones sobre el proceso de *matching* para obtener una maximización de beneficios eficiente, cuando los emparejamientos son exclusivos y la plataforma ofrece un menú de tarifas de acceso. Por otro lado, Aoyagi y Yoo (2019) estudian los mecanismos óptimos que posee una plataforma para inducir reportes veraces de las preferencias, concluyendo que en mercados bilaterales con exclusividad en los emparejamientos, estos mecanismos no coinciden necesariamente con aquellos que maximizan beneficios (Aoyagi y Yoo, 2019). En contextos de subastas también se han analizado mecanismos de emparejamiento exclusivos en plataformas monopolísticas (véase Fershtman y Pavan (2017, 2022); Johnson (2013)).

En lo que respecta al problema de fijación de precios, Marx y Schummer (2021) desarrollan un modelo en el cual una plataforma cobra a los agentes de un mercado bilateral tarifas de entrada para generar emparejamientos exclusivos. Bajo condiciones de racionalidad individual y ordinalidad para la función de *matchings* que implementa la plataforma, los autores muestran que, cuando las preferencias son heterogéneas, desbalances en el número de agentes por grupo no afectan las tarifas óptimas que se le cobra a cada lado (Teorema 1 en Marx y Schummer (2021)). Esto es relevante puesto que está documentado que aquellos individuos del lado corto del mercado reciben en promedio pagos más altos que aquellos del lado largo, al participar en un proceso de *matching* estable (Ashlagi, Kanoria, y Leshno, 2017). Entonces, la plataforma no posee incentivos para extraer este excedente, debido a la heterogeneidad en las preferencias y a la exclusividad de los emparejamientos.

En esta tesis se extiende el modelo de Marx y Schummer (2021) para mercados multilaterales, manteniendo la exclusividad de los *matchings* y las preferencias

---

<sup>1</sup>En cuanto a investigación empírica, existe poca pero destaca el estudio de Duch-Brown (2017) en el cual se caracteriza la estructura de mercado de cuatro tipos de plataformas online.

<sup>2</sup>Esto es, los *matchings* son *muchos-a-muchos* o *muchos-a-uno*.

heterogéneas. Con este modelo se estudia el problema de la asignación de un nivel fijo de precios entre los múltiples lados del mercado. La heterogeneidad en las preferencias se interpreta como agentes diferenciados horizontalmente, y se consideran casos en los cuales estos agentes poseen valoraciones medidas con la misma escala entre los grupos, como también casos con diferentes escalas de valoración.

Se encuentra que el resultado de independencia de estas asignaciones óptimas con respecto a desbalances en el tamaño de los grupos se mantiene bajo las mismas condiciones para la función de *matchings* (Proposición 1). Sin embargo, para tener asignaciones óptimas simétricas entre los múltiples lados se necesita que todos los agentes del mercado valoren con la misma escala el emparejarse (Teorema 3). En cambio, si hay grupos cuyos individuos poseen una escala de valoración mayor que aquellos de otro grupo, entonces la plataforma carga las asignaciones del nivel de precios hacia estos grupos con mayor escala en la valoración (Teorema 4).

Por último, se analiza también el problema de la fijación del nivel de precios óptimo, restringiendo la atención a mercados bilaterales y a funciones de *matchings* estables. Debido a la dificultad analítica para determinar una expresión cerrada del número esperado de parejas que se forman en un *matching* estable en función de factores que truncan las preferencias por parejas admisibles,<sup>3</sup> se ataca este problema mediante simulaciones computacionales. Con esto, se logra dilucidar que, cuando los grupos poseen el mismo tamaño, el nivel de precios óptimo es creciente con este tamaño del mercado. Sin embargo, estas simulaciones no son concluyentes con respecto al efecto del desbalance en el tamaño de los grupos sobre el nivel de precios óptimo.

La organización de esta tesis es la siguiente. La Sección 1 es para mercados de *matching* trilaterales. Primero se define la taxonomía que agrupa los distintos tipos de estructuras. Luego se analiza para cada uno de estos tipos la literatura existente sobre estabilidad de los *matchings*. Posteriormente, se presentan resultados de existencia de estabilidad para un tipo de mercado particular. Y esta sección termina mostrando que la taxonomía puede ser extendida para analizar mercados con más de tres grupos de agentes. En la Sección 2 se estudian problemas de asignación y fijación de precios en plataformas de emparejamientos multilaterales. Se parte detallando el modelo de plataforma monopolística, para luego presentar resultados sobre el problema de la asignación de un nivel de precios entre los múltiples lados. Por último, se discute sobre el nivel de precios óptimo sobre la base de las simulaciones computacionales.

---

<sup>3</sup>Estos factores corresponden a las asignaciones del nivel de precios que se distribuyen entre los grupos del mercado, y determinan las parejas admisibles para cada agente.

# 1. Mercados de *matching* trilaterales

En esta sección se presenta una taxonomía que agrupa las estructuras de los mercados trilaterales derivadas de la dirección de las preferencias de los agentes. Cada tipo de estructura se motiva con ejemplos prácticos, y se presenta la literatura existente sobre estabilidad. Luego, se analiza un tipo particular de estructura que no se ha estudiado en la literatura, y se presentan resultados de existencia de *matchings* estables.

## Modelo de *matching* trilateral

Considere un mercado de tres lados que está compuesto por los conjuntos disjuntos, finitos y con la misma cantidad de agentes,  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Un problema de *matching* es caracterizado por un perfil de preferencias  $P = (P_{a,X}, P_{b,Y}, P_{c,Z})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ , donde  $P_{h,H}$  denota las preferencias estrictas de un agente  $h \in A \cup B \cup C$  por los agentes (o grupos de agentes) en  $H$ . Por ejemplo,  $P_{a,B}$  denota la relación de preferencias estricta del agente  $a \in A$  por los agentes en  $B$ , mientras que  $P_{a,B \times C}$  denota una preferencia estricta de  $a \in A$  por los pares de agentes  $B \times C$ .

Se define un *matching*  $\mu$  como un subconjunto de  $A \times B \times C$  cuyas proyecciones sobre  $A$ ,  $B$  y  $C$  son biyectivas. Entonces, dadas dos triplas distintas  $(a, b, c), (a', b', c') \in \mu$ , se tiene que  $a \neq a', b \neq b',$  y  $c \neq c'$ . Así, dado un agente  $a \in A$  y un *matching*  $\mu$ , se denota por  $(\mu_B(a), \mu_C(a)) \in B \times C$  al único par  $(b, c)$  tal que  $(a, b, c) \in \mu$ . La definición para  $(\mu_A(b), \mu_C(b)) \in A \times C$  y  $(\mu_A(c), \mu_B(c)) \in A \times B$  es análoga.

Una **tripleta de bloqueo** para el *matching*  $\mu$  se define como aquella tripleta  $(a, b, c) \notin \mu$ , tal que todos sus integrantes prefieren a estos nuevos compañeros que a aquellos que tenían en el *matching*  $\mu$ . Para el caso de un mercado trilateral *estándar*, en el sentido de que todos los agentes poseen preferencias conjuntas por las parejas de agentes de los otros dos grupos, y por tanto el perfil de preferencias queda caracterizado por  $P = (P_{a,B \times C}, P_{b,A \times C}, P_{c,A \times B})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ ; la tripleta  $(a, b, c) \notin \mu$  bloquea el *matching*  $\mu$  si se cumple lo siguiente:

- $(b, c) P_{a,B \times C} (\mu_B(a), \mu_C(a)),$
- $(a, c) P_{b,A \times C} (\mu_A(b), \mu_C(b)),$
- $(a, b) P_{c,A \times B} (\mu_A(c), \mu_B(c)).$

Un *matching*  $\mu$  se dice **estable** cuando no existe una tripleta que lo bloquee.

## Taxonomía para la estabilidad

El resultado negativo de Alkan (1988) sobre existencia de estabilidad para estos mercados trilaterales *estándar* motivó el estudio de condiciones que aseguren existencia. La literatura se ha enfocado en restricciones a las preferencias de los agentes, ya sea

en la estructura misma de estos perfiles (Danilov, 2003; Lahiri, 2008), como también restricciones relacionadas a la dirección de las preferencias, es decir, sobre cuál(es) grupo(s) de agentes se definen (Pashkovich y Poirrier, 2020; Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu, 2019; Zhang y Zhong, 2021; Zhong y Bai, 2019). La siguiente taxonomía permite comprender estas restricciones a la dirección de las preferencias.

Los perfiles de preferencias de los agentes se modelan de tres formas: preferencias por agentes de solo un grupo, preferencias *separadas* por agentes de dos grupos, y preferencias *conjuntas* por parejas de agentes. Se asume que todos estos perfiles de preferencias son estrictos, y se distinguen por la dirección o grupo sobre el cual se definen. De esta forma, los mercados trilaterales quedan con cierta estructura.

Cada mercado puede ser representado por un diagrama, en el cual cada grupo conforma un vértice y de este pueden salir flechas hacia otro vértice, o bien hacia el punto medio del trazo que se forma al unir los otros dos vértices. Estas flechas indican sobre qué grupo(s) se tienen preferencias. Por ejemplo, si del vértice  $A$  sale solo una flecha hacia el vértice  $B$ , esto se interpreta como que cada agente en  $A$  posee preferencias sobre los agentes de  $B$ , y no posee preferencias sobre los agentes de  $C$ . En cambio, si del vértice  $A$  salen dos flechas, una hacia el vértice  $B$  y otra hacia el vértice  $C$ , entonces cada agente en  $A$  posee preferencias sobre los agentes en  $B$ , y además sobre los agentes en  $C$ , de forma separada. Por último, si del vértice  $A$  sale una flecha hacia el punto medio del trazo formado por los vértices  $B$  y  $C$ , entonces cada agente en  $A$  posee preferencias por las parejas  $(b, c) \in B \times C$ .

Se define un **diagrama completo** como aquel diagrama que cumple con las siguientes tres condiciones:

- (1) De cada vértice debe salir al menos una flecha.
- (2) Desde un vértice no sale ninguna flecha hacia otro vértice si y sólo si sale una flecha hacia el punto medio del lado opuesto al vértice.
- (3) Directa o indirectamente, cada vértice debe recibir al menos una flecha.

Estas reglas para los diagramas reflejan que ningún grupo puede ser excluido del mercado, vale decir, los agentes de cada grupo deben poseer al menos un perfil de preferencias por agentes de otro grupo del mercado, y a la vez les deben interesar a agentes de al menos uno de los otros grupos.

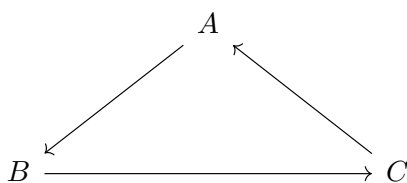


Figura 1: Ejemplo diagrama completo.

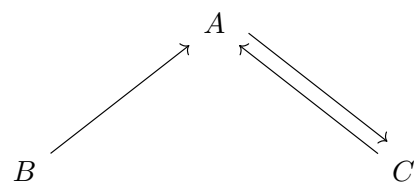


Figura 2: Ejemplo diagrama incompleto.

Para ejemplificar lo anterior, considere el diagrama de la Figura 1. Este representa una situación en la cual los agentes del grupo  $A$  poseen preferencias solo por los agentes de  $B$ , los agentes de  $B$  poseen preferencias solo por los agentes de  $C$ , y estos agentes de  $C$  poseen preferencias solo por los agentes de  $A$ . Este diagrama se dice que es completo ya que los agentes de cada grupo poseen preferencias por agentes de al menos otro grupo del mercado, y al mismo tiempo para los agentes de cada grupo existen agentes de otro grupo que poseen preferencias sobre ellos.

Pero el diagrama de la Figura 2 no es completo. Si bien este diagrama cumple con que los agentes de cada grupo poseen al menos un perfil de preferencias por agentes de otro grupo del mercado, el problema está en que el grupo  $B$  no recibe ninguna flecha de algún otro grupo. Esto significa que ni los agentes del grupo  $A$  ni los agentes del grupo  $C$  poseen preferencias por los agentes de  $B$ , por lo que dejan a este grupo excluido del mercado.

En lo que sigue se trabaja con diagramas completos para mantener la conformación trilateral del mercado.

## Codificación

Los diagramas se codifican por vectores de tres componentes, donde cada componente representa qué tipo de preferencias poseen los agentes del grupo correspondiente. Dado vértices  $A, B, C$ , la primera componente de los vectores de codificación representa las preferencias de los agentes del grupo  $A$ , la segunda componente las preferencias de los agentes del grupo  $B$ , y la tercera componente las preferencias de los agentes del grupo  $C$ .

Las cuatro situaciones posibles para las preferencias de los agentes se denotan según los símbolos  $\rightarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow$  y  $\longleftrightarrow$ , los cuales representan lo siguiente:

- $\rightarrow$  : preferencias sobre los agentes de solo un grupo, y corresponde al grupo siguiente según el orden  $A, B, C$ .
- $\leftarrow$  : preferencias sobre los agentes de solo un grupo, y corresponde al grupo anterior según el orden  $A, B, C$ .
- $\leftarrow \oplus \rightarrow$  : preferencias sobre los agentes de los otros dos grupos *por separado*.
- $\longleftrightarrow$  : preferencias *conjuntas* sobre las parejas de agentes de los otros dos grupos.

A modo de ejemplo, un mercado en donde cada agente de un grupo posee preferencias conjuntas por las parejas de agentes de los otros dos grupos se representa por  $[\longleftrightarrow, \longleftrightarrow, \longleftrightarrow]$ . Otro ejemplo es un mercado en que cada agente de un grupo solo posee preferencias por los agentes del grupo siguiente según el orden  $A, B, C$ , el cual se representa por  $[\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ . Otro caso es cuando los agentes de un grupo ( $B$ ) poseen preferencias de forma separada por los agentes de los otros dos grupos ( $A$  y  $C$ ), y en estos



dos grupos restantes los agentes poseen preferencias solo por los agentes del grupo  $B$ . El mercado descrito anteriormente se representa por  $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ .

## Número de diagramas

Se tienen tres grupos y cuatro posibles escenarios para las preferencias de los agentes de cada uno. Por lo tanto existen  $4^3 = 64$  posibles diagramas. Sin embargo, 12 de estos 64 diagramas no son completos. En particular, si la representación de un diagrama posee los símbolos  $\rightarrow$  y  $\leftarrow$  en coordenadas contiguas, en ese orden, entonces este diagrama no cumple la condición de que cada vértice debe recibir, directa o indirectamente, al menos una flecha. Como existen tres formas de tener una representación con símbolos  $\rightarrow$  y  $\leftarrow$  en coordenadas contiguas ( $[\rightarrow, \leftarrow, \cdot]$ ,  $[\cdot, \rightarrow, \leftarrow]$  y  $[\leftarrow, \cdot, \rightarrow]$ ), y para la coordenada restante hay cuatro posibles casos, se tiene que  $3 \cdot 4 = 12$  diagramas no son completos. Por lo tanto, el número de diagramas completos a analizar es 52.

## Tipos de estructuras

A continuación se presentan siete tipos de estructuras que agrupan los 52 mercados totales. Para cada tipo de estructura se analiza la literatura relacionada con la existencia de *matchings* estables. A modo de resumen, en el Cuadro 1 se presentan estos siete tipos, la representación de todos los mercados en cada una de estos, y también la literatura existente para cada estructura.

Tipo	Mercados	Referencias	Estabilidad
I	$[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$	Alkan (1988); Danilov (2003); Lahiri (2008).	Con restricciones
II	$[\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$	Boros, Gurvich, Jaslar, y Krasner (2004); Eriksson, Sjöstrand, y Strimling (2006); Pashkovich y Poirrier (2020).	Con restricciones
III	$[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$	Zhong y Bai (2019).	Siempre
IV	$[\leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$	Zhang y Zhong (2021).	Siempre
V	$[\leftarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$	Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019).	Siempre
VI	$[\leftarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$	Zhang y Zhong (2021).	Siempre
VII	$[\leftarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow]$ $[\rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$	Nuestros resultados.	Con restricciones

Cuadro 1: Resumen de los tipos de estructuras para las preferencias. Se destaca en azul aquellos mercados particulares que se analizan en las referencias respectivas.

**Tipo I:**  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$

En mercados de este tipo los agentes de cada grupo poseen preferencias conjuntas sobre las parejas conformadas por los agentes de los otros dos grupos. El diagrama de la

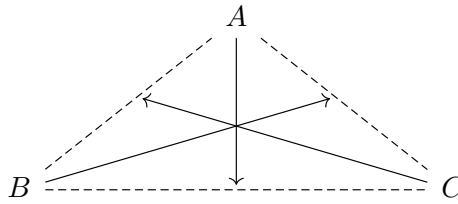


Figura 3: [ $\leftarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\leftarrow$ ].

Figura 3 muestra gráficamente este tipo de mercados.

Estos mercados se pueden considerar como aquellos sin ninguna restricción sobre las preferencias. Como ejemplo considere un mercado de espacios publicitarios, en el cual un grupo de anunciantes busca proporcionar espacios publicitarios para que se efectúen transacciones entre empresas y usuarios. Un *matching* en este ejemplo es una colección de transacciones compuestas por un anunciante, una empresa y un usuario. Si cada anunciante rankea a las posibles parejas empresa-usuario, ya que le interesa el tipo específico de transacción que resulta entre la empresa y el usuario; cada empresa rankea a las posibles parejas anunciante-usuario, porque su estrategia de ventas se diseñó pensando en cada combinación anunciante-usuario; y cada usuario rankea a las posibles parejas anunciante-empresa, puesto que su utilidad depende del producto/servicio que recibe en la transacción, y también de dónde obtuvo la información; entonces diagramas como el de la Figura 3 pueden representar esta estructura en la dirección de las preferencias.

El resultado de Alkan (1988) plantea que no siempre existen *matchings* estables para este tipo de mercados. Sin embargo, en la literatura se han estudiado algunas restricciones para las preferencias que permiten la existencia de *matchings* estables. Danilov (2003, Proposición 1) establece preferencias lexicográficas para los agentes de dos grupos entre sí, y demuestra la existencia de *matchings* estables. Por otro lado, Lahiri (2008, Teorema 1) demuestra existencia mediante preferencias lexicográficas para los agentes de solo un grupo, más una condición de diferentes “mejores” para las preferencias de los agentes de otro grupo al comparar distintas parejas compuestas por agentes del primer grupo (aquellos con preferencias lexicográficas) y agentes del tercer grupo.<sup>4</sup>

Este tipo de estructura agrupa solo un diagrama ( $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ ), ya que cualquier re-etiquetado de los grupos o simetría del diagrama lleva a la misma situación.

**Tipo II:** [ $\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow$ ]

Mercados tales que los grupos se ordenan de alguna forma, y los agentes de cada grupo solo tienen preferencias por los agentes del grupo siguiente según el orden establecido, se

<sup>4</sup>Lahiri (2008) llama a esta condición *Technical Specialization*, y la define como, considerando al grupo  $A$  como aquel con preferencias lexicográficas, la existencia de una función  $f : A \times B \rightarrow C$ , inyectiva, tal que para todo  $a \in A, b \in B$  y  $c \in C$ ,  $b$  prefiere a  $(a, f(a, b))$  por sobre  $(a, c)$ .

representan en este tipo de estructura.

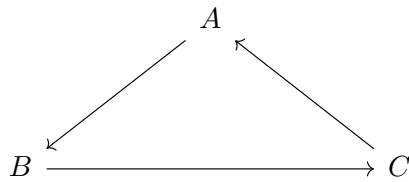


Figura 4:  $[\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ .

Estos mercados son aquellos que han recibido más atención en la literatura por las múltiples aplicaciones en distintos contextos. Por ejemplo, algunos programas de intercambio de riñón (como *New England Program*<sup>5</sup> y *The National Matching Scheme of the UK*<sup>6</sup>) permiten que los pares donador-receptor incompatibles por razones médicas sean vistos como un tercer grupo cuyas preferencias se determinan de acuerdo con parámetros especiales de los riñones aceptables (Biró y McDermid, 2010). Otra aplicación de este tipo de mercados trilaterales se presenta en el área de sistemas de redes computacionales. Cui y Jia (2013) modelan redes de tres lados en las cuales los datos se recolectan de sensores, y a través de un grupo de servidores se envían a los usuarios. La estructura cíclica de las preferencias viene dada porque los usuarios prefieren recibir los mejores servicios de las fuentes de datos (sensores), las fuentes de datos prefieren a los servidores más eficientes en la entrega de datos, y los servidores intentan satisfacer a más usuarios (Cui y Jia, 2013).

En la literatura relacionada a la estabilidad de los *matchings* en estos mercados se ha llegado a demostrar existencia imponiendo restricciones sobre el número de agentes en cada grupo. Boros, Gurvich, Jaslar y Krasner (2004, Teorema 1) mostraron que con solo tres agentes en cada grupo siempre existen *matchings* estables. Luego, Eriksson, Sjöstrand y Strimling (2006, Teorema 1) extendieron lo anterior para mercados con a lo más cuatro agentes por grupo. Recientemente, Pashkovich y Poirrier (2020, Teorema 3) demuestran que incluso con cinco agentes por grupo también siempre existe al menos un *matching* estable. Sin embargo, en esta misma literatura no se ha podido demostrar existencia independiente del número de agentes por grupo, por lo que este resultado está planteado como conjetura (Eriksson, Sjöstrand y Strimling, 2006; Pashkovich y Poirrier, 2020).

Como los grupos pueden ordenarse de dos formas distintas para formar un ciclo, este tipo de estructura agrupa dos diagramas:  $[\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$  y  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ .

**Tipo III:**  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$

Se consideran los mercados tales que los agentes de dos grupos no se interesan entre sí, mientras que en el tercer grupo sus agentes poseen preferencias por aquellos de los primeros dos grupos de forma separada.

<sup>5</sup>New England Program for Kidney Exchange. <http://www.nepke.org>.

<sup>6</sup>UK Transplant. <http://www.uktransplant.org.uk>.

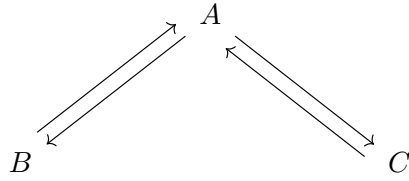


Figura 5:  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ .

En Zhong y Bai (2019) se analizan estos casos, y se motivan con el ejemplo de doctores ( $A$ ), enfermeros ( $B$ ) y anestelistas ( $C$ ) al conformar el equipo médico para una intervención. Se demuestra que siempre existe al menos un *matching* estable (Teorema 1 en Zhong y Bai (2019)), el cual se puede encontrar emparejando primeramente los grupos  $A$  y  $B$  mediante el algoritmo de Aceptación Diferida (AD) propuesto por Gale y Shapley (1962), y luego emparejar estos pares  $(a, b) \in A \times B$  con los agentes de  $C$ , siguiendo las preferencias de  $a$  para las parejas  $(a, b)$ , mediante el mismo algoritmo de AD.

En este tipo de estructura hay tres formas de tener dos grupos tales que sus agentes no se interesen entre sí, y que en el tercero sus agentes posean preferencias por aquellos de los otros dos grupos de forma separada. Estos tres diagramas se representan por:  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ ,  $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$  y  $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ .

Además, cabe destacar que estas situaciones se pueden extender y agregar perfiles de preferencias para los agentes de los grupos que no se interesan entre sí. Estos nuevos perfiles de preferencias se interpretan como “información extra” en el mercado, y por lo tanto no comprometen la existencia de *matchings* estables.<sup>7</sup> Entonces, se desprenden otras seis situaciones en las cuales cada agente de un grupo que en un principio no se interesaba por los agentes del otro grupo, ahora sí lo hace. Estos diagramas se representan por:  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ ,  $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$  y  $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ . Pero también los agentes de estos dos grupos podrían interesarse mutuamente, llegando a una situación con preferencias bidireccionales completas, cuyo diagrama se representa por:  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ . Juntando todo lo anterior, en este tipo de estructura se agrupan diez diagramas.

**Tipo IV:**  $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$

Estas estructuras se discuten en Zhang y Zhong (2021), y se les llama por preferencias mixtas ya que entre dos grupos hay preferencias mutuas, pero además los agentes de uno de estos grupos tienen preferencias por los agentes del tercer grupo.

Las aplicaciones de este tipo de estructura son aquellas que poseen el componente cíclico

<sup>7</sup>Suponga por contradicción que no es así. Es decir, existe una tripleta  $(a, b, c)$  que bloquea el *matching* en el mercado con información extra. Si este es el caso, entonces las condiciones que debe cumplir esta tripleta de bloqueo incluyen necesariamente a las condiciones que hacen que la misma tripleta bloquee el *matching* en el mercado original, lo cual es una contradicción. Esto porque se añaden perfiles de preferencias, pero no se quitan otros.

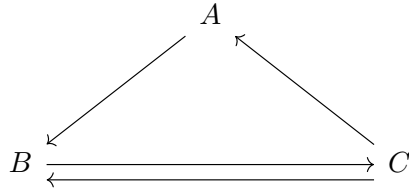


Figura 6:  $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ .

(como en el Tipo II), pero además a los agentes de un grupo les interesan aquellos del grupo anterior según el orden del ciclo. Por ejemplo, si en el sistema de redes de Cui y Jia (2013) los servidores, además de satisfacer a los usuarios, poseen restricciones sobre el tipo de sensores que recolectan los datos, entonces el problema de redes posee una estructura como la representada por el diagrama de la Figura 6.

La existencia de *matchings* estables se demuestra mediante la aplicación del algoritmo de AD dos veces (Teorema 2 en Zhang y Zhong (2021)). Primero entre los agentes de los grupos  $B$  y  $C$ . Luego, las parejas  $(b, c)$  poseen preferencias sobre los agentes de  $A$  como las de  $c$ , y entonces se aplica nuevamente AD entre las parejas  $(b, c)$  y los agentes  $a \in A$ .

Hay seis formas para que agentes de dos grupos tengan preferencias entre sí, y que además en uno de estos grupos los agentes tengan adicionalmente preferencias por los agentes del tercer grupo (de forma separada). Esto porque hay tres diagramas en que dos grupos tienen agentes con preferencias mutuas entre ellos, y al cambiar la dirección de las preferencias de los agentes del tercer grupo se tienen otros tres diagramas. Por lo tanto, estos seis diagramas se representan por:  $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ ,  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ , y  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ .

Cabe destacar que en este tipo de estructura no se consideran los diagramas en los cuales se añaden perfiles de preferencias, puesto que estos ya están considerados en las estructuras del Tipo III.

**Tipo V:**  $[\leftarrow\rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$

Estos mercados se caracterizan porque hay solo un grupo en que sus agentes poseen preferencias conjuntas por las parejas de agentes de los otros dos grupos. Y los agentes de estos otros dos grupos poseen preferencias solo por los agentes del grupo con preferencias conjuntas.

Tomando de ejemplo aquella situación en la cual un equipo médico se conforma entre doctores ( $A$ ), enfermeros ( $B$ ) y anestesistas ( $C$ ), anteriormente se motivó estableciendo que los doctores poseen preferencias sobre enfermeros y anestesistas de forma separada, y que entre enfermeros y anestesistas no hay interés mutuo. Sin embargo, se podría considerar que entre enfermeros y anestesistas hay cierta complementariedad que afecta la intervención, pero aún fijando que entre ellos no hay preferencias. De esta forma, los

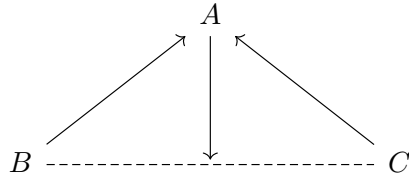


Figura 7: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ].

doctores deberían evaluar cada pareja enfermero-anestesiista. Así entonces, un diagrama como el de la Figura 7 representa una situación de este tipo.

Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019) analizan mercados con esta estructura, y les llaman por preferencias híbridas puesto que mezclan preferencias conjuntas por parejas con preferencias por agentes de solo un grupo. Los autores proponen un algoritmo para encontrar *matchings* estables (Algoritmo 1 en Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019)), el cual se detalla en el Anexo II. La idea de este algoritmo es que los agentes de un grupo que no poseen preferencias conjuntas hacen primeramente las propuestas. Luego, los agentes con preferencias conjuntas son aquellos que reciben las propuestas y tienen la opción de aceptar/rechazar estas, para luego proponer a los agentes del grupo restante considerando todas las parejas admisibles en cada ronda de propuestas. Así entonces, al aplicar este algoritmo, siempre se obtiene un *matching* estable (Teorema 1 en Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019)).

Los tres diagramas en que los agentes de solo un grupo poseen preferencias conjuntas, y en los dos grupos restantes hay agentes con preferencias solo por aquellos del primer grupo, se representan por: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ], [ $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ] y [ $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ]. Pero también se consideran aquellos diagramas en que se agregan perfiles de preferencias para los agentes de los grupos que no se interesan mutuamente, lo cual añade seis diagramas más, representados por: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ], [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ], [ $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ], [ $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ], [ $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ] y [ $\leftarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ]. Además, hay tres situaciones en las cuales los agentes de los grupos que inicialmente no se interesan entre sí, ahora lo hacen mutuamente. Estos últimos tres diagramas se representan por: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ], [ $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ] y [ $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ]. Por lo tanto, se tienen 12 diagramas agrupados en este tipo de estructura.

**Tipo VI:** [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ]

Este tipo de estructura es tal que los agentes de un solo grupo poseen preferencias conjuntas por parejas conformadas por los agentes de los otros dos grupos. Además, los integrantes de los otros dos grupos son tales que, para el segundo grupo, solo poseen preferencias por los agentes del tercer grupo. Mientras que los agentes de este tercer grupo poseen preferencias solo por los agentes con preferencias conjuntas, es decir, aquellos del primer grupo.

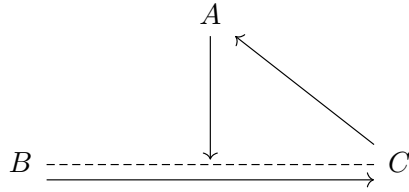


Figura 8:  $[\leftarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ .

Una aplicación de este tipo de estructura consiste en problemas de asignación de personal. En la literatura especializada se han diseñado mecanismos para la asignación de personal según criterios múltiples, pero considerando elecciones bidireccionales (Liu y Ma, 2015; Yu y Xu, 2020). Estos mercados trilaterales permiten ampliar la asignación considerando tres partes interesadas. Por ejemplo, considere una empresa que busca generar equipos de trabajo compuestos por tres tipos de gerentes: de alta dirección, medios y de primera línea. En esta empresa, la supervisión de actividades es lo únicamente relevante para definir preferencias. De esta forma, la alta dirección ( $B$ ) supervisa solo a la gerencia media ( $C$ ), esta gerencia media supervisa solo a la de primera línea ( $A$ ), y estos últimos gerentes deben responder conjuntamente a los lineamientos de la alta dirección, como también a los objetivos operacionales de la gerencia intermedia. Por lo tanto, esta estructura de preferencias se representa por el diagrama de la Figura 8.

En Zhang y Zhong (2021, Teorema 3) se demuestra que en contextos de este tipo siempre existe al menos un *matching* estable. Para encontrar estos *matchings*, los autores proponen un algoritmo (Algoritmo 2 en Zhang y Zhong (2021)), que se detalla en el Anexo I. En este algoritmo quienes parten proponiendo son los agentes de  $B$ . Luego, solo los agentes de  $C$  que reciben propuestas pueden hacer las suyas a los agentes de  $A$ , y estos últimos son quienes pueden aceptar/rechazar las propuestas que reciben considerando todas las parejas admisibles en esa ronda.

Mercados de este tipo se pueden obtener de seis formas distintas, ya que de las tres formas en que solo un grupo tiene agentes con preferencias conjuntas, hay dos maneras de ordenar la dirección de las preferencias de los agentes de los dos grupos restantes. Estos seis diagramas se representan por:  $[\leftarrow, \rightarrow, \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ ,  $[\rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ ,  $[\rightarrow, \rightarrow, \leftarrow]$  y  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ . Luego, se puede también agregar perfiles de preferencias para los agentes del grupo que inicialmente prefieren a los agentes con preferencias conjuntas. Así entonces, se tienen otros seis diagramas representados por:  $[\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$ ,  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow]$ ,  $[\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow]$ ,  $[\rightarrow, \leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow]$  y  $[\leftarrow \oplus \rightarrow, \leftarrow, \leftarrow]$ . Por lo tanto, en este tipo de estructura se agrupan 12 diagramas.

**Tipo VII:** [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ]

Estos mercados son tales que los agentes de uno de los tres grupos poseen perfiles de preferencias definidos sobre solo uno de los otros dos grupos, dejando así a los agentes del tercer grupo sin importancia para ellos. Mientras que los agentes de los otros dos grupos poseen preferencias *conjuntas* por parejas de agentes.

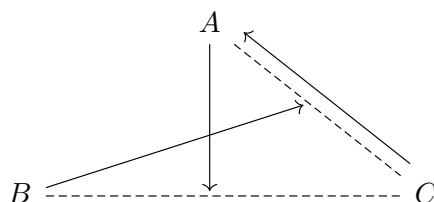


Figura 9: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ].

Considere a modo de ejemplo un mercado de entrega de alimentos compuesto por consumidores ( $C$ ), empresas ( $A$ ) y repartidores ( $B$ ). Entiéndase un *matching* como una colección de transacciones efectuadas por una empresa y un consumidor, y la entrega del producto la realiza un repartidor. Normalmente, las empresas son quienes definen los plazos de entrega, junto con que en prácticamente todas las aplicaciones online de entregas el usuario no puede escoger *ex-ante* el repartidor que la realizará. De esta forma, los consumidores solo poseen preferencias definidas sobre el conjunto de empresas, y no les interesa qué tipo de repartidor llevará a cabo la entrega. Por el lado de las empresas, estas tienen preferencias definidas sobre el conjunto de parejas repartidor-consumidor, ya que, además de con quién efectuarán la transacción, les interesa que la entrega de sus productos sea lo más eficiente. De la misma forma, los repartidores poseen preferencias definidas sobre el conjunto de parejas empresa-consumidor, ya que la distancia entre la empresa y el consumidor es una de las variables más importantes a la hora de escoger qué entrega realizar.

En este tipo de estructura se agrupan nueve diagramas. Esto porque hay tres formas de tener dos grupos con agentes con preferencias conjuntas por parejas, y como para el tercer grupo hay dos maneras de tener preferencias de sus agentes por solo los de otro grupo, se tienen seis diagramas representados por: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ], [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ], [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ], [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ], [ $\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ] y [ $\leftarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ]. Además, al añadir perfiles de preferencias adicionales para el grupo con agentes que no poseen preferencias conjuntas, se tienen otros tres diagramas. Es decir, estos tres diagramas son tales que en dos grupos hay agentes con preferencias conjuntas, y en el tercer grupo hay agentes con preferencias por los agentes de los dos primeros grupos pero de forma separada. Estos últimos diagramas se representan como: [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ], [ $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ] y [ $\leftarrow \oplus \rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ,  $\leftarrow\rightarrow$ ].

Para este tipo de estructura se presenta en el siguiente apartado resultados sobre la existencia de *matchings* estables.



## Modelo de *matching* para mercados Tipo VII

Los mercados que se analizan son tales que hay dos grupos cuyos agentes poseen preferencias conjuntas sobre las parejas formadas por los agentes de los otros dos grupos. Y para el tercer grupo sus agentes solo tienen preferencias por los agentes de uno de los grupos anteriores. Por lo tanto, el perfil de preferencias bajo esta estructura es  $P = (P_{a,B \times C}, P_{b,A \times C}, P_{c,A})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ . En la Figura 9 se presenta gráficamente esta estructura de preferencias.

### Resultados

En este apartado se presentan resultados acerca de la existencia de *matchings* estables para los mercados anteriormente caracterizados. Primero, se demuestra que cuando hay exactamente dos agentes en cada grupo, siempre es posible encontrar al menos un *matching* estable. Sin embargo, cuando el número de agentes en cada grupo es estrictamente mayor que dos, se pierde este resultado de existencia. Para esto último se muestra como ejemplo un mercado en el cual no existen *matchings* estables. Luego, para recuperar el resultado existencia, se establecen preferencias lexicográficas para los agentes que en un principio tienen preferencias conjuntas por parejas, con lo cual se logra demostrar existencia de estabilidad recurriendo a distintos algoritmos desarrollados en la literatura.

**Teorema 1.** *Considere un mercado trilateral con  $n$  agentes en cada grupo, caracterizado por el perfil de preferencias  $P = (P_{a,B \times C}, P_{b,A \times C}, P_{c,A})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ . Si  $n = 2$  entonces siempre existe al menos un *matching* estable para cualquier mercado de este tipo, pero si  $n \geq 3$  entonces no es posible asegurar la existencia de estos *matchings*.*

*Demostración.* La demostración para el caso con  $n = 2$  se encuentra en el Anexo III. Esta demostración consiste en utilizar las preferencias de los agentes del grupo  $C$  con tal de formar contradicciones entre la existencia de tripletas de bloqueo y las características de los perfiles de preferencias estrictas de los agentes del grupo  $A$ .

Luego, para mostrar que cuando  $n \geq 3$  no es posible asegurar la existencia de *matchings* estables, considere el siguiente mercado con tres agentes por grupo:  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ . Las preferencias se representan en el Cuadro 2.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
$(b_3, c_2)$	+	$(b_3, c_3)$	$(a_1, c_1)$	$(a_1, c_3)$	$(a_3, c_3)$	$a_1$	$a_1$	$a_1$
$(b_3, c_3)$		$(b_2, c_1)$	$(a_1, c_2)$	$(a_1, c_2)$	$(a_1, c_2)$	$a_3$	$a_3$	$a_3$
$(b_2, c_3)$		$(b_1, c_3)$	$(a_1, c_3)$	$(a_3, c_1)$	+	$a_2$	$a_2$	$a_2$
$(b_3, c_1)$		$(b_1, c_1)$	$(a_3, c_3)$	$(a_2, c_1)$				
$(b_2, c_2)$		$(b_2, c_3)$	$(a_3, c_1)$	+				
$(b_2, c_1)$		+	$(a_2, c_1)$					
$(b_1, c_1)$			+					
$(b_1, c_2)$								
$(b_1, c_3)$								

Cuadro 2: Preferencias mercado trilateral. El símbolo + se refiere a que el orden de las parejas omitidas puede ser cualquiera.

En este mercado ninguno de los 36 posibles *matchings* es estable.<sup>8</sup> Para ver esto considere aquellos en que el agente  $a_1$  no queda con su mejor opción.

- Si queda junto con  $(b_3, c_3)$ , o junto con  $(b_2, c_3)$ , o junto con  $(b_3, c_1)$ , siempre bloqueará el *matching* con la pareja  $(b_3, c_2)$ .
- Si queda junto con  $(b_2, c_2)$ , siempre bloqueará el *matching* con la pareja  $(b_2, c_3)$ .
- Si queda junto con  $(b_2, c_1)$ , o junto con  $(b_1, c_1)$ , siempre bloqueará el *matching* con la pareja  $(b_2, c_2)$ .
- Si queda junto con  $(b_1, c_2)$ , o junto con  $(b_1, c_3)$ , siempre bloqueará el *matching* con la pareja  $(b_1, c_1)$ .

Pero en los cuatro *matchings* en que  $a_1$  queda junto con su mejor opción,  $(b_3, c_2)$ , siempre existe una tripleta de bloqueo:

- $\mu_1 = \{(a_1, b_3, c_2), (a_2, b_1, c_1), (a_3, b_2, c_3)\}$ , es bloqueado por  $(a_3, b_1, c_1)$ .
- $\mu_2 = \{(a_1, b_3, c_2), (a_2, b_1, c_3), (a_3, b_2, c_1)\}$ , es bloqueado por  $(a_3, b_3, c_3)$ .
- $\mu_3 = \{(a_1, b_3, c_2), (a_2, b_2, c_1), (a_3, b_1, c_3)\}$ , es bloqueado por  $(a_3, b_2, c_1)$ .
- $\mu_4 = \{(a_1, b_3, c_2), (a_2, b_2, c_3), (a_3, b_1, c_1)\}$ , es bloqueado por  $(a_3, b_1, c_3)$ .

De esta forma se muestra que no es posible tener *matchings* estables en este mercado. Por último, se pueden agregar individuos a cada grupo respetando la estructura de estas preferencias para mostrar la no existencia en mercados con  $n > 3$ .  $\square$

<sup>8</sup>Con tres agentes en cada uno de los tres grupos, se tienen 27 tripletas distintas. Pero como el orden de las tripletas dentro de los *matching* no importa, se fija un orden tal que la primera tripleta del *matching* contiene al agente  $a_1$ , la segunda al agente  $a_2$ , y la tercera al agente  $a_3$ . Por lo tanto, la primera tripleta puede ser elegida de nueve formas distintas. Luego, la segunda tripleta a elegir debe ser tal que no contenga ningún agente de la primera tripleta. Entonces, el primer agente de la primera tripleta hace que nueve de las 27 tripletas se descarten. El segundo agente de la primera tripleta hace que otras seis tripletas sean descartadas. Y el tercer agente de la primera tripleta hace que otras cuatro tripletas se descarten. Por lo tanto, esta segunda tripleta se puede elegir de cuatro formas distintas. Por último, teniendo ya dos tripletas en el *matching*, la tercera queda directamente determinada. Entonces, existen 36 posibles *matching*.

Las preferencias del ejemplo antes presentado tienen ciertas particularidades. Primero, se observa que no es necesario especificar el perfil de preferencias del agente  $a_2$ , y al mismo tiempo solo para el agente  $a_1$  junto con los agentes del grupo  $C$  se necesita especificar completamente sus perfiles de preferencias. Por otro lado, necesariamente los agentes del grupo  $C$  no deben diferir en sus primeras opciones, ya que en caso contrario se podría fácilmente construir un *matching* tal que cada uno de los agentes en  $C$  queda junto a su mejor opción, y por tanto este *matching* será estable por la imposibilidad de que alguno de estos agentes mejore en una hipotética tripleta de bloqueo. Además, note que estos perfiles de preferencias se diferencian de aquellos presentados por Alkan (1988) para mercados trilaterales *estándar*.<sup>9</sup> Esto porque no es posible desprender directamente un perfil de preferencias definido sobre agentes de solo uno de los grupos del mercado desde aquellas preferencias conjuntas de los agentes en el mercado de Alkan (1988).

En cuanto al resultado de existencia para mercados con dos agentes en cada grupo, su aplicación es razonable solo en ciertos contextos. Por ejemplo en organizaciones pequeñas con exactamente dos gerentes en cada nivel de gerencia. Pero para mercados como el de entrega de alimentos no es pertinente considerar esta cantidad de agentes. Por lo mismo, el no tener asegurada la existencia de *matchings* estables para mercados con más de dos agentes por grupo, se hace necesario imponer restricciones sobre las preferencias de los agentes del grupo  $A$ , o bien de aquellos del grupo  $B$ . En lo que sigue, se demuestra existencia bajo preferencias lexicográficas para los agentes de alguno de estos grupos.

### Existencia bajo preferencias lexicográficas

Para asegurar la existencia de al menos un *matching* estable en mercados de este tipo, basta con asumir preferencias lexicográficas para los agentes de al menos uno de los dos grupos con preferencias conjuntas.

Se dice que los agentes del grupo  $A$  poseen preferencias  $B$ -lexicográficas si, para cada  $a \in A$ , existe un único perfil  $P_{a,B}$  (definido sobre  $B$ ) tal que la proyección natural  $B \times C \rightarrow B$  es compatible con el perfil de preferencias conjuntas  $P_{a,B \times C}$  (definido sobre  $B \times C$ ). Es decir, cada agente en  $A$  tiene prioridad por los agentes de  $B$  sobre los de  $C$ . Análogamente se pueden definir preferencias  $C$ -lexicográficas, y  $A$ -lexicográficas para los agentes de  $B$ .

**Teorema 2.** *Considere un mercado trilateral con  $n \geq 3$  agentes en cada grupo, caracterizado por el perfil de preferencias  $P = (P_{a,B \times C}, P_{b,A \times C}, P_{c,A})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ . Si los agentes del grupo  $A$  poseen preferencias  $B$ -lexicográficas, o bien si los agentes del grupo  $B$  poseen preferencias  $A$ -lexicográficas, o  $C$ -lexicográficas; entonces siempre existe al menos un *matching* estable para cualquier mercado de este tipo.*

*Demostración.* Considere primero el caso en donde los agentes de  $A$  poseen preferencias

<sup>9</sup>En los cuales todos los individuos poseen preferencias conjuntas por parejas de agentes

$B$ -lexicográficas. Sea el mercado trilateral *ficticio* caracterizado por el perfil de preferencias  $(P_{a,B}, P_{b,A \times C}, P_{c,A})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ , donde  $(P_{a,B})_{a \in A}$  son los perfiles de preferencias de los agentes del grupo  $A$  que se derivan de sus preferencias  $B$ -lexicográficas. Luego, por el Teorema 3 en Zhang y Zhong (2021) se sabe que el *matching*  $\mu$  que se obtiene al aplicar el Algoritmo 2 propuesto por estos autores (Anexo I) es estable en este mercado *ficticio*. Ahora se demuestra que este mismo *matching*  $\mu$  es estable para el mercado trilateral original. Para ver esto suponga que no es así. Entonces, la tripleta que bloquee,  $(a, b, c) \notin \mu$ , debe cumplir con estas tres condiciones,

$$(1) (b, c) P_{a, B \times C} (\mu_B(a), \mu_C(a))$$

$$(2) (a, c) P_{b, A \times C} (\mu_A(b), \mu_C(b))$$

$$(3) a P_{c, A} \mu_A(c).$$

Luego, si  $b \neq \mu_B(a)$ , la tripleta  $(a, b, c)$  bloquee el *matching*  $\mu$  en el mercado trilateral *ficticio*, donde los agentes de  $A$  poseen los perfiles  $(P_{a,B})_{a \in A}$ , lo cual contradice la estabilidad de  $\mu$  en ese mercado. En el otro caso, cuando  $b = \mu_B(a)$ , se tiene que la tripleta  $(a, b, \mu_C(a)) \in \mu$ . Luego, como  $(a, b, c) \notin \mu$ , por el Algoritmo 2, debió ser tal que, o bien  $c$  nunca propuso a  $a$ , por tanto  $\mu_A(c) P_{c, A} a$ , y entonces  $(a, b, c)$  no puede ser una tripleta de bloqueo; o bien  $c$  propuso a  $a$ , pero la propuesta de  $(a, c)$  por  $b$  fue rechazada. Entonces, se desprende que  $(\mu_A(b), \mu_C(b)) P_{b, A \times C} (a, c)$ , por lo que tampoco sería una tripleta de bloqueo  $(a, b, c)$ .

El caso en que los agentes de  $B$  poseen preferencias  $C$ -lexicográficas es análogo al anterior.

Por último, en el caso en donde los agentes de  $B$  poseen preferencias  $A$ -lexicográficas, considere el mercado *ficticio* caracterizado por el perfil de preferencias  $(P_{a, B \times C}, P_{b, A}, P_{c, A})_{(a,b,c) \in A \times B \times C}$ . Por el Teorema 1 en Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019), el *matching*  $\mu$  que se obtienen al aplicar el Algoritmo 1 propuesto por estos autores (Anexo II) es estable para este mercado *ficticio*. Este *matching*  $\mu$  también es estable para el mercado original, ya que si no fuera así, se podría encontrar una tripleta  $(a, b, c) \notin \mu$  de bloqueo. Considere el caso en el cual  $\mu_A(b) \neq a$ . Entonces, la tripleta  $(a, b, c)$  bloquee  $\mu$  en el mercado trilateral *ficticio* que se desprende de las preferencias  $A$ -lexicográficas, lo cual contradice la estabilidad de  $\mu$  en ese mercado. En el otro caso, se tiene que  $\mu_A(b) = a$  y por lo tanto  $(a, b, \mu_C(b)) \in \mu$ . Entonces, para que  $a$  prefiera a  $(b, c)$  por sobre  $(b, \mu_C(b))$ , debió ser tal que en el Algoritmo 1, o bien  $a$  nunca propuso a  $c$ , y entonces no es cierto que  $(b, c) P_{a, B \times C} (b, \mu_C(b))$ , o bien  $a$  propuso a  $c$ , pero este no aceptó, y entonces tampoco es cierto que  $a P_{c, A} \mu_A(c)$ .  $\square$

El resultado anterior permite obtener existencia bajo preferencias lexicográficas. Considerando un mercado de entrega de alimentos, las preferencias lexicográficas para los repartidores indican que prefieren en primer lugar a las empresas, y luego a los usuarios. Esto es razonable de suponer en contextos tales que existen facilidades desde la

empresa hacia los repartidores, como por ejemplo atención preferencial al momento de retirar el pedido, o bien lugares de aparcamiento especial.

Así entonces, estos resultados aportan a la literatura sobre existencia de estabilidad en mercados del Tipo VII. De esta forma, la taxonomía para mercados trilaterales queda completa en el sentido de tener resultados de existencia para los siete tipos de estructuras.

### **Extensión: taxonomía para mercados multilaterales**

La taxonomía presentada en la sección anterior se puede extender para clasificar mercados con más de tres grupos de agentes. Para esto, lo relevante es considerar las nuevas direcciones de las preferencias producto de tener grupos adicionales en el mercado.

A modo de ejemplo, considere un mercado con cuatro grupos. Para estos mercados existen 14 formas posibles de modelar los perfiles de preferencias de los agentes:

- Una forma es cuando poseen preferencias *conjuntas* por tripletas.
- Otras tres formas son cuando poseen preferencias *conjuntas* por parejas de agentes de otros dos grupos (se pueden elegir de tres maneras los conjuntos para las parejas).
- Tres formas más son cuando, además del punto anterior, poseen preferencias por los agentes del tercer grupo (que no se contempla en las preferencias *conjuntas* por parejas).
- Una formas más es cuando poseen preferencias por los agentes de los otros tres grupos, pero *separadamente*.
- Otras tres formas son cuando poseen preferencias por agentes de otros dos grupos, y también de manera *separada*.
- Y las últimas tres formas son cuando poseen preferencias por agentes de solo un grupo del mercado.

Entonces, como los vectores de codificación tienen cuatro componentes para indicar el tipo de preferencias de cada grupo, al contabilizar el número de diagramas que son completos para luego realizar el agrupamiento en casos, este número crece exponencialmente.

El número total de diagramas que se pueden formar con estos 14 tipos de preferencias son  $14^4 = 38,416$ . Pero no todos estos son completos. Un diagrama no será completo cuando a uno de los grupos se le excluye del mercado. En particular, hay cuatro formas en que el tipo de preferencias de los agentes de solo un grupo excluyen a otro del mercado: dos formas son cuando prefieren solo a los agentes de alguno de los otros dos grupos, otra forma es cuando prefieren separadamente a los agentes de los otros dos grupos, y la otra forma es cuando prefieren conjuntamente a los agentes de los otros dos grupos. Por lo

tanto, hay  $4^3 = 64$  formas para que los tres grupos excluyan al cuarto del mercado. Pero el grupo que se excluye puede ser cualquiera de los cuatro, por lo que hay  $4 \cdot 64 = 256$  formas en que cualquiera de los cuatro grupos quede excluido del mercado. Por último, como para el grupo excluido hay 14 formas posibles para la dirección de las preferencias de sus agentes, en total hay  $256 \cdot 14 = 3,584$  diagramas que no son completos.

Esto resulta finalmente en que el número total de diagramas completos a analizar sea 34,832, una cantidad difícilmente tratable para lo que se hizo anteriormente.

## 2. Plataformas de *matching* en mercados multilaterales

*En esta sección se estudia el problema de la asignación y fijación de precios de una plataforma que genera emparejamientos entre agentes de múltiples grupos. Se extiende el modelo de plataforma monopolística de Marx y Schummer (2021) para mercados multilaterales, y se presentan resultados sobre la asignación de un nivel fijo de precios. Adicionalmente, se estudia el problema de la fijación del nivel de precios óptimo mediante simulaciones, y cómo este se ve afectado por el tamaño del mercado.*

### Modelo de plataforma monopolística

Considere un mercado compuesto por  $n \geq 2$  grupos de agentes, representados por los conjuntos disjuntos y finitos  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ . Sea  $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ . Se define un *matching* como una correspondencia  $\mu : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{A}$  tal que:

- (1) Para todo  $h, h' \in \mathcal{A}$  se tiene que,  $h \in \mu(h')$  si y solamente si  $h' \in \mu(h)$ .
- (2) Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para cada  $h \in \mathcal{A}_i$  se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:
  - Para todo  $k \neq i$ ,  $|\mu(h) \cap \mathcal{A}_k| = 1$ . Además,  $\mu(h) \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$ .
  - $\mu(h) = \{h\}$ .

Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de todos los *matchings*. Se asume que cada agente  $h \in \mathcal{A}$  posee preferencias representables por una función  $u_h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $u_h(\mu) = u_h(\eta)$  cuando  $\mu(h) = \eta(h)$ . Esto es, no hay externalidades, pues a cada agente solo le interesa el grupo con el que está emparejado.

Sea  $I(h, \mu) = \{\eta \in \mathcal{M} : \eta(h) = \mu(h)\}$  el conjunto de *matchings* que dejan al agente  $h$  con el mismo grupo que tiene en  $\mu$ . Las valoraciones que los agentes le dan a los diferentes *matchings* se determinan a través de variables aleatorias  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ , tales que  $u_h(\mu) = X_h^{I(h, \mu)}$  para todo  $\mu \in \mathcal{M}$ . Se asume que para cada  $h \in \mathcal{A}_i$  las variables  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$  son independientes e igualmente distribuidas según una función de distribución  $F_i$ , con densidad  $f_i$  continuamente diferenciable y cuyo soporte es el intervalo  $[0, c_i]$ , con  $c_i > 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Estos parámetros  $\{c_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$

determinan la escala de las valoraciones que poseen los agentes del grupo  $\mathcal{A}_i$  respectivo.

En este mercado existe una plataforma monopolística que establece una función de *matchings* con el objetivo de aunar a los agentes del mercado. La plataforma cobra precios  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$  como tarifas de entrada, donde  $p_i$  es el precio que paga cada agente del grupo  $\mathcal{A}_i$ . Luego de anunciar los precios, los agentes determinan si es individualmente racional participar en la plataforma. Sea  $\bar{\mu}$  la función de *matchings* que establece la plataforma, de forma tal que cuando los precios son  $p$  y las utilidades son caracterizadas por los valores  $u = (u_h)_{h \in \mathcal{A}}$ , resulta en el *matching*  $\mu = \bar{\mu}_{p,u} \in \mathcal{M}$ .

Por ahora no se detalla explícitamente cuál es esta función de *matchings* que establece la plataforma, sino que se determinan las condiciones que debe cumplir para maximizar los ingresos.<sup>10</sup>

Los agentes que entran a la plataforma y logran conformar una tupla obtienen como pago la diferencia entre su utilidad y el precio correspondiente a su lado del mercado. Esto es, cada  $h \in \mathcal{A}_i$  que decide entrar a la plataforma obtiene como pago  $u_h(\mu) - p_i$ .

En este contexto, se dice que una tupla  $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mu$ , es **compatible** a precios  $p$  y valores  $u$ , si

$$u_{h_i}(\mu) - p_i \geq 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Considerando lo anterior, se define el **factor de incompatibilidad**  $I(p)$  como la probabilidad de que una tupla arbitraria  $(h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mu$  no sea compatible a precios  $p$ . Esto es,

$$I(p) = I(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^n [u_{h_i}(\mu) < p_i] \right\} = \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{i=1}^n [X_{h_i}^{I(h_i, \mu)} < p_i] \right\}.$$

Esta probabilidad se puede expresar de la siguiente forma de acuerdo con el principio de inclusión-exclusión,

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left\{ X_{h_i}^{I(h_i, \mu)} < p_i \right\} - \sum_{i,j: i < j} \mathbb{P} \left\{ [X_{h_i}^{I(h_i, \mu)} < p_i] \cap [X_{h_j}^{I(h_j, \mu)} < p_j] \right\} \\ &+ \sum_{i,j,k: i < j < k} \mathbb{P} \left\{ [X_{h_i}^{I(h_i, \mu)} < p_i] \cap [X_{h_j}^{I(h_j, \mu)} < p_j] \cap [X_{h_k}^{I(h_k, \mu)} < p_k] \right\} \\ &- \dots + (-1)^{n-1} \cdot \mathbb{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^n [X_{h_i}^{I(h_i, \mu)} < p_i] \right\}. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Esto porque los resultados sobre el problema de la asignación de precios no requieren especificar una determinada función de *matchings*. Sin embargo, cuando se analiza el problema del nivel de precios se establece que esta función entrega resultados estables.

Luego, al considerar la independencia de los valores  $\{X_h^{I(h,\mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ , el factor de incompatibilidad se puede expresar también en función de las distribuciones marginales,<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}
I(p) &= \sum_{i=1}^n F_i(p_i) - \sum_{i,j: i < j} [F_i(p_i)] \cdot [F_j(p_j)] \\
&+ \sum_{i,j,k: i < j < k} [F_i(p_i)] \cdot [F_j(p_j)] \cdot [F_k(p_k)] \\
&- \dots + (-1)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n F_i(p_i).
\end{aligned}$$

Note que este factor de incompatibilidad solo depende de las asignaciones de precios, y no de la compatibilidad de alguna otra tupla. Esto debido a que los agentes dentro de un mismo grupo comparten la misma función de distribución marginal.

En cuanto a la función de *matchings* que implementa la plataforma, se restringe la atención a aquellas en que el resultado solo es sensible a la ordinalidad y no a la cardinalidad en los perfiles de preferencias de los agentes.

**Condición A.** La función de *matchings*  $\bar{\mu}$  cumple con **Ordinalidad**: para todo par de vectores de precios  $p, p'$  y utilidades  $u, u'$ , se tiene que  $\bar{\mu}_{p,u} = \bar{\mu}_{p',u'}$  cuando se cumple lo siguiente:

- (1) Toda tupla  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  compatible a precios  $p$  y utilidades  $u$ , es también compatible a precios  $p'$  y utilidades  $u'$ , y viceversa.
- (2) Para todas las tuplas  $(h, \mu(h)), (h, \eta(h))$  compatibles a precios  $p$  y utilidades  $u$ , se cumple que

$$u_h(\mu(h)) \geq u_h(\eta(h)) \iff u'_h(\mu(h)) \geq u'_h(\eta(h)).$$

Un ejemplo de función de *matchings* que satisface esta propiedad es aquella que implementa el *Serial Dictatorship matching*. Este *matching* se define de la siguiente manera. Dado precios  $p$  y utilidades  $u$ , se parte escogiendo un grupo cualquiera, por ejemplo  $\mathcal{A}_1$ , y según un orden arbitrario, cada agente  $h$  de este grupo escoge a su tupla  $(h_2, h_3, \dots, h_n)$  mejor ranqueada entre aquellas que, junto a él, son compatibles a precios  $p$  y valores  $u$ , y aún no conforman alguna tupla. Así, la tupla resultante se forma, y se continúa al siguiente agente del grupo  $\mathcal{A}_1$  según el orden preestablecido. Esta función de *matchings* cumple con

---

<sup>11</sup>Como ejemplo, para un mercado trilateral ( $n = 3$ ) el factor de incompatibilidad toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
I(p) &= F_1(p_1) + F_2(p_2) + F_3(p_3) - F_1(p_1) \cdot F_2(p_2) - F_1(p_1) \cdot F_3(p_3) - F_2(p_2) \cdot F_3(p_3) \\
&+ F_1(p_1) \cdot F_2(p_2) \cdot F_3(p_3).
\end{aligned}$$



ser ordinal ya que en escenarios donde se mantienen las mismas tuplas compatibles, y el ranking dentro de las preferencias de cada agente sobre sus tuplas compatibles no cambia, entonces se llega al mismo resultado en ambos escenarios.

Con este esquema, se analiza a continuación el problema de la asignación de precios entre los distintos grupos del mercado.

## Problema de la Asignación de Precios

Para analizar la asignación de precios a través de los lados del mercado, considere que la plataforma primeramente fija un nivel de precios  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i$ , y luego busca aquellas asignaciones  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  que maximicen su ingreso esperado. Para la plataforma, los ingresos esperados vienen dados por la multiplicación entre el nivel de precios y el número esperado de tuplas que se forman bajo la función de *matchings* que implementa esta plataforma. Sea la variable aleatoria  $\mathcal{T}_p$  el número de tuplas formadas cuando la plataforma cobra precios  $p$ . El problema de la asignación de precios, dado un nivel de precios  $\bar{p}$  fijo, se representa por el siguiente problema de optimización

$$\max_{p=(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i} \mathbb{E}[\mathcal{T}_p].$$

Lo relevante para resolver este problema es determinar cómo las asignaciones de precios afectan la distribución de la variable  $\mathcal{T}_p$ . Para aquellos *matchings* que resultan de funciones de *matchings* ordinales, la distribución de las tuplas conformadas en estos solo depende de dos cosas: (1) de la distribución sobre los conjuntos de tuplas compatibles a ciertos precios, y (2) de la distribución sobre las preferencias ordinales. Por lo tanto, dos vectores de precios distintos  $p$  y  $p'$ , hacen que las variables  $\mathcal{T}_p$  y  $\mathcal{T}_{p'}$  tengan la misma distribución si inducen la misma distribución sobre (1) y (2). Luego, para que sea cierto (1), basta con que  $I(p) = I(p')$ . Mientras que (2) se cumple directamente por la independencia en las extracciones de los valores  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ .<sup>12</sup>

Entonces, se desprende de lo anterior que las asignaciones del nivel de precios entre los grupos del mercado son independientes del tamaño de estos, cuando entre los grupos los agentes poseen valoraciones con la misma escala. Para ver lo anterior, considere un mercado trilateral ( $n = 3$ ) con los siguientes agentes en cada grupo:  $\mathcal{A}_1 = \{a_1\}$ ,

<sup>12</sup>Dados precios  $p$ , como los valores  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}$  son independientes, la probabilidad de que una tupla arbitraria  $(h, \mu(h))$  sea compatible a precios  $p$  es  $1 - I(p)$ , independiente de cualquier otra tupla compatible a los mismos precios. Luego, la probabilidad de que un conjunto arbitrario  $M \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$  sea el conjunto de tuplas compatibles a precios  $p$  es

$$(1 - I(p))^{|M|} \cdot I(p)^{(\prod_{i=1}^n |\mathcal{A}_i|) - |M|},$$

y como  $I(p) = I(p')$ , se tiene que los precios  $p$  y  $p'$  inducen la misma distribución sobre todos los conjuntos de tuplas compatibles  $M \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ . Por otro lado, fijando un conjunto  $M$ , como los valores  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}$  son extraídos aleatoriamente, se concluye que, condicional a este conjunto  $M$ ,  $p$  y  $p'$  inducen la misma distribución (uniformemente aleatoria) sobre las preferencias ordinales. Por lo tanto, como la función de *matchings* es ordinal, se tiene que  $\mathcal{T}_p$  y  $\mathcal{T}_{p'}$  poseen la misma distribución.

$\mathcal{A}_2 = \{b_1, b_2\}$ ,  $\mathcal{A}_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ . Los valores  $\{X_h^{I(h,\mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$  (preferencias) quedan determinados por extracciones *i.i.d* de una distribución uniforme en  $[0, 1]$  para los tres grupos. Esto último muestra que entre los grupos los agentes poseen la misma escala para su utilidad. La plataforma implementa el *matching* si al menos una tripleta resulta compatible a precios  $p$ . Así, para cualquiera de las siguientes tres asignaciones,

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right),$$

la plataforma recibe el mismo ingreso esperado. Esto porque como solamente se puede formar a lo más una tripleta, los ingresos esperados vienen dados por

$$(p_1 + p_2 + p_3) \cdot \mathbb{E}[\mathcal{T}_p] = (p_1 + p_2 + p_3) \cdot [1 \cdot \mathbb{P}\{\mathcal{T}_p = 1\} + 0 \cdot \mathbb{P}\{\mathcal{T}_p = 0\}]$$

Entonces, como las tres asignaciones son permutaciones sin repetición entre sus elementos, el nivel de precios es siempre el mismo (e igual a 1). Luego, la probabilidad de que se genere solo una tripleta también es la misma entre estas asignaciones, esto por la independencia en la extracciones y la idéntica distribución marginal. De esta forma, los ingresos esperados de la plataforma son iguales a

$$(p_1 + p_2 + p_3) \cdot \mathbb{P}\{\mathcal{T}_p = 1\} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^6$$

Con esto, la plataforma recibe el mismo ingreso esperado cargando las asignaciones al lado largo ( $\mathcal{A}_3$ ) o a cualquiera de los lados cortos ( $\mathcal{A}_1$  o  $\mathcal{A}_2$ ).

Note que es relevante que entre los grupos los agentes tengan la misma escala de valoración por el *matching*. Por lo tanto, para formalizar el resultado del ejemplo anterior, se define una condición sobre la escala de valoración de los agentes y sus distribuciones marginales.

**Condición B.** Las preferencias de los agentes del mercado poseen la misma escala de valoración por el *matching*:  $c_i = c$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Además, estos agentes poseen las mismas distribuciones marginales,  $F_i = F$ .

**Proposición 1.** Considere que se cumplen las condiciones **A** y **B**. Dado precios  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  y  $p' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_n)$ , tales que las asignaciones de  $p'$  son permutaciones sin repetición de las asignaciones de  $p$ , entonces  $p$  y  $p'$  entregan el mismo ingreso esperado a la plataforma.

*Demostración.* Como las asignaciones de  $p'$  son permutaciones sin repetición de las asignaciones de  $p$ , y todos los agentes tienen utilidades medidas con la misma escala e idénticas distribuciones marginales, se cumple que por la simetría de  $I(\cdot)$  en sus argumentos,  $I(p) = I(p')$ . Entonces, ambos precios inducen la misma distribución sobre  $\mathcal{T}_p$  y  $\mathcal{T}_{p'}$ . Por lo tanto, dado un nivel de precios  $\bar{p}$  fijo, los precios  $p$  y  $p'$  entregan a la plataforma

el mismo ingreso esperado. □

Sin embargo, por ahora no se garantiza que las asignaciones óptimas sean simétricas entre los lados del mercado. Para obtener este resultado, se debe imponer una condición de monotonía fuerte sobre la función *matchings* que establece la plataforma.

**Condición C.** La función de *matchings*  $\bar{\mu}$  es **fuertemente monótona**: si el valor esperado del número de tuplas formadas es estrictamente decreciente en precios: para cada par de precios  $p \not\leq p'$ , se tiene que  $\mathbb{E}_u[\mathcal{T}_p] > \mathbb{E}_u[\mathcal{T}_{p'}]$ .

Con esta condición para la función de *matchings* se puede determinar una relación entre maximizar los ingresos esperados con minimizar el factor de incompatibilidad, para obtener las asignaciones óptimas.

**Lema 1.** Considere que se cumplen las condiciones A y C. Para cualquier nivel de precios  $\bar{p}$ , tal que  $0 < \bar{p} < \sum_{i=1}^n c_i$ , aquellas asignaciones  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  que maximizan los ingresos esperados de la plataforma cuando fija un nivel de precios  $\bar{p}$ , son las mismas que minimizan el factor de incompatibilidad  $I(p)$  sujeto a la restricción  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i$ .

*Demostración.* Dado un nivel fijo de precios  $\bar{p}$ , con  $0 < \bar{p} < \sum_{i=1}^n c_i$ , las asignaciones  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  maximizan los ingresos esperados de la plataforma si y solo si maximizan el valor esperado del número de tuplas creadas sujeto a la restricción  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i$ . Luego, se sabe que por la independencia de los valores  $\{X_h^{I(h,\mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ , el valor esperado del número de tuplas creadas es solo función de  $I(p)$ . Por último, la monotonía fuerte de la función de *matchings* permite que, dados precios  $p \not\leq p'$ ,

$$\mathbb{E}[\mathcal{T}_p] > \mathbb{E}[\mathcal{T}_{p'}] \iff 0 \leq I(p) < I(p') \leq 1.$$

Es decir, maximizar los ingresos esperados es equivalente a minimizar el factor de incompatibilidad. □

El lema anterior permite trabajar con el factor de incompatibilidad en lugar del número esperado de tuplas, cuando se pretende resolver el problema de la asignación de precios. Esto es relevante ya que el factor de incompatibilidad posee una expresión analítica, mientras que esto ocurre para el número esperado de tuplas. Si se quisiera determinar una expresión para este número esperado, se debe primero especificar el tipo de función de *matchings* que establece la plataforma, y en el caso de que se especifique una función de *matchings* con resultados estables, no es para nada trivial determinar esta expresión. En el apartado sobre la fijación del nivel de precios se discute más sobre esto.

Otro resultado importante que permite caracterizar las asignaciones óptimas se presenta en el siguiente lema.

**Lema 2.** Considere que se cumplen las condiciones **A** y **C**. Si el nivel fijo de precios  $\bar{p}$  induce asignaciones óptimas interiores,  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) \in (0, c_1) \times (0, c_2) \times \dots \times (0, c_n)$ , entonces estas asignaciones quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones, donde  $z_i(p_i) = \frac{f_i(p_i)}{1-F_i(p_i)}$  es el hazard rate de la distribución  $f_i$ ,

$$z_i(p_i^*) = z_j(p_j^*) \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i^*.$$

*Demostración.* Por el Lema 1, se tiene que resolver el problema de la asignación de precios es equivalente a minimizar el factor de incompatibilidad sujeto a la restricción del nivel de precios. Entonces, al resolver el problema,

$$\min_{p=(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{++}^n: \bar{p}=\sum_{i=1}^n p_i} I(p) = I(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

las condiciones de primer orden se traducen al siguiente sistema de  $(n + 1)$  ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(p)}{\partial p_1} &= f_1(p_1) \left[ 1 - \sum_{j \neq 1} F_j(p_j) + \sum_{j, k: j \neq 1, j < k} F_j(p_j) \cdot F_k(p_k) - \dots + (-1)^{n-1} \prod_{j \neq 1} F_j(p_j) \right] = \lambda \\ \frac{\partial I(p)}{\partial p_2} &= f_2(p_2) \left[ 1 - \sum_{j \neq 2} F_j(p_j) + \sum_{j, k: j \neq 2, j < k} F_j(p_j) \cdot F_k(p_k) - \dots + (-1)^{n-1} \prod_{j \neq 2} F_j(p_j) \right] = \lambda \\ &\vdots \\ \frac{\partial I(p)}{\partial p_n} &= f_n(p_n) \left[ 1 - \sum_{j=1}^{n-1} F_j(p_j) + \sum_{j, k: j < k} F_j(p_j) \cdot F_k(p_k) - \dots + (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} F_j(p_j) \right] = \lambda \\ &\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

El parámetro  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange respectivo. Note que las primeras  $n$  ecuaciones se pueden escribir genéricamente como

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p_i} = f_i(p_i) \left[ 1 - \sum_{j \neq i} F_j(p_j) + \sum_{j, k: j \neq i, j < k} F_j(p_j) \cdot F_k(p_k) - \dots + (-1)^{n-1} \prod_{j \neq i} F_j(p_j) \right] = \lambda,$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . A la vez, esta expresión se puede factorizar para llegar a lo siguiente<sup>13</sup>

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p_i} = f_i(p_i) \cdot \prod_{j \neq i} (1 - F_j(p_j)) = \lambda, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

<sup>13</sup>La equivalencia se puede mostrar fácilmente mediante inducción.

Luego, como el nivel de precios  $\bar{p}$  induce asignaciones óptimas interiores, se tiene que  $\lambda > 0$ . Por lo tanto, tomando la división entre cualquier par de las primeras  $n$  ecuaciones anteriores, se llega finalmente a lo buscado

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial I(\mathbf{p})}{\partial p_i}}{\frac{\partial I(\mathbf{p})}{\partial p_j}} &= \frac{f_i(p_i) \cdot \prod_{k \neq i} (1 - F_k(p_k))}{f_j(p_j) \cdot \prod_{k \neq j} (1 - F_k(p_k))} = 1 \\ \frac{f_i(p_i) \cdot (1 - F_j(p_j))}{f_j(p_j) \cdot (1 - F_i(p_i))} &= 1 \\ \frac{f_i(p_i)}{1 - F_i(p_i)} &= \frac{f_j(p_j)}{1 - F_j(p_j)} \iff z_i(p_i) = z_j(p_j), \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

Con los resultados de los dos lemas anteriores es posible concluir que, cuando los agentes poseen valoraciones con la misma escala, y además las distribuciones marginales de los valores  $\{X_h^{I(h, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$  poseen *hazard rates* estrictamente crecientes, las asignaciones óptimas son simétricas entre los lados del mercado. Esta condición para los *hazard rates* se utiliza para mostrar que las asignaciones óptimas, además de ser simétricas, son únicas.

**Teorema 3.** *Considere que se cumplen las condiciones A, B y C. Cuando el hazard rate de la distribución  $F$  es estrictamente creciente, el problema de asignación de precios tiene una única solución  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ , que cumple con  $p_i^* = \bar{p}/n$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , para cualquier nivel de precios  $0 < \bar{p} < n \cdot c$ .*

*Demostración.* Por el Lema 1 se tiene que resolver el problema de la asignación de precios es equivalente a minimizar el factor de incompatibilidad sujeto a la restricción del nivel de precios. Luego, como el soporte de la densidad  $f$  es el intervalo  $[0, c]$ , cualquier precio  $p'$  que tenga una asignación  $p_i \geq c$  implica que  $I(p') = 1$ , mientras que cualquier otro precio con asignaciones estrictamente menores asegura  $I(\cdot) < 1$ . Por otro lado, la restricción del nivel de precios permite que, cuando un precio  $p'$  tiene una asignación  $p_i = 0$ , es posible aumentar marginalmente esta asignación  $p_i$  y reducir otra asignación  $p_k$ , con tal de disminuir  $I(\cdot)$  y seguir cumpliendo la restricción del nivel de precios. Entonces, se desprende que la solución  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  es interior. Además, como entre los grupos del mercado se tiene la misma escala de valoración, se tiene que  $z_i = z$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Así, por el Lema 2, como este *hazard rate* es estrictamente creciente, la única solución al problema de la asignación de precios queda caracterizada por

$$z(p_i^*) = z(p_j^*) \iff p_i^* = p_j^* \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i^* \Rightarrow p_i^* = \frac{\bar{p}}{n} \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

□

Estos resultados muestran que, por un lado, desbalances en el número de agentes en cada grupo no afectan la asignación del nivel de precios entre los múltiples lados del mercado. Al igual que en Marx y Schummer (2021), la principal razón de esto es la independencia de los valores  $\{X_h^{I(h,\mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ , que determinan las utilidades de los agentes. Por otro lado, el resultado de asignaciones óptimas simétricas entre los grupos, cuando estos poseen la misma escala de valoración e idénticas distribuciones marginales, también se mantiene al estudiar estos mercados multilaterales.

No obstante, para justificar asignaciones óptimas asimétricas basta con considerar grupos diferenciados en la escala de valoración de sus agentes. De esta forma, no es necesario introducir algunas correlaciones en las preferencias (como en Damiano y Li (2007); Marx y Schummer (2021); Weyl (2010)). Además, al seguir teniendo agentes heterogéneos, se mantiene el resultado de independencia del desbalance del número de agentes por grupo. Así entonces, en lo que sigue se presentan resultados considerando agentes con distinta escala para sus valoraciones.

### Utilidades con distinta escala

Si en un mercado bilateral la valoración por emparejarse de los agentes de un grupo es el doble que la de aquellos del otro grupo, no es claro pensar que las asignaciones óptimas sean simétricas, ya que la plataforma podría extraer algo más de excedente a los individuos del grupo con mayor escala en sus valoraciones.

Tomando la idea del ejemplo anterior, considere un mercado bilateral compuesto por los siguientes grupos de agentes:  $\mathcal{A}_1 = \{a_1\}$  y  $\mathcal{A}_2 = \{b_1, b_2\}$ . La utilidad del agente  $a_1$  queda determinada por extracciones *i.i.d.* de una distribución uniforme en  $[0, 1]$ , mientras que las utilidades de los agentes de  $\mathcal{A}_2$  son también extracciones *i.i.d.*, pero de una uniforme en  $[0, c]$ , con  $c > 1$ . La plataforma implementa un *matching* si al menos una pareja resulta compatible a precios  $p$ . Por la Proposición 1, se sabe que las asignaciones óptimas  $(p_1^*, p_2^*)$  son tales que, dado un nivel de precios  $0 < \bar{p} < c + 1$ , minimizan el factor de incompatibilidad,

$$\min_{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2: \bar{p} = p_1 + p_2} p_1 + \frac{p_2}{c} - p_1 \cdot \frac{p_2}{c}$$

Entonces, al resolver este problema se tienen las asignaciones óptimas

$$p_1^* = \max \left\{ 0, \frac{\bar{p}}{2} - \frac{c-1}{2} \right\}, \quad p_2^* = \min \left\{ \bar{p}, \frac{\bar{p}}{2} + \frac{c-1}{2} \right\}.$$

Según se observa, estas asignaciones no son simétricas, y la diferencia es siempre a favor de aquel grupo de agentes con la escala de valoración más alta,  $p_2^* - p_1^* = \min\{\bar{p}, c - 1\}$ . Además, se observa también que estas asignaciones son independientes del tamaño relativo de cada grupo, resultado que se mantiene principalmente por la independencia de las extracciones que determinan las utilidades de los agentes.

Otra observación relevante es que las asignaciones óptimas pueden no ser interiores, es decir, podría ser óptimo para la plataforma emparejar gratis a los individuos del grupo con menor escala en la valoración. En el ejemplo anterior, existen valores para el nivel de precios  $\bar{p}$  que inducen una asignación óptima  $p_1^* = 0$ . La intuición de este resultado es que, cuando entre los grupos los agentes tienen valoraciones con distinta escala, y el nivel de precios no supera el valor de la diferencia en las valoraciones ( $\bar{p} < c - 1$ ), de tal forma que es demasiado bajo como para distribuirlo entre los grupos, entonces es óptimo cobrarle todo este precio al lado que posee la escala de valoración más alta.

Para formalizar esto, considere la función  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  continuamente diferenciable, que cumple con  $\int_0^1 f(x)dx = 1$ . Esta función define las densidades de las extracciones que determinan las utilidades de los agentes de cada grupo. Así, para cada  $h_i \in \mathcal{A}_i$ , los valores  $\{X_{h_i}^{I(h_i, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$  se extraen según las densidades

$$f_i(x) = \begin{cases} \alpha_i \cdot f(x) & \text{si } x \in [0, c_i] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Los parámetros  $\{c_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  reflejan la escala de las utilidades de los agentes en cada grupo, mientras que  $\{\alpha_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  son parámetros de ajuste a la función  $f$  con tal de construir densidades  $f_i(x)$ . Sin pérdida de generalidad, se asume que  $c_1 = \alpha_1 = 1$ , y que  $c_i > 1$  para todo  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ . De esta forma, la escala de las utilidades queda relativa a la del grupo  $\mathcal{A}_1$ , y los parámetros de ajuste se determinan por  $\alpha_i = (1 + \int_1^{c_i} f(x)dx)^{-1}$ .

Lo que interesa es conocer la relación entre la escala relativa de las utilidades de los agentes cada grupo y las asignaciones óptimas. La intuición del ejemplo anterior es tal que las asignaciones dependen positivamente de esta escala, cargando estas asignaciones a aquel lado con mayor escala en las valoraciones de sus agentes. Esto último se formaliza en el siguiente teorema.

**Teorema 4.** *Considere que se cumplen las condiciones A y C. Si estas densidades  $\{f_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$  poseen hazard rates estrictamente crecientes, entonces para todo nivel de precios  $\bar{p}$  que asegure soluciones interiores, se tiene que las asignaciones óptimas  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  cumplen con lo siguiente:*

$$(1) \quad p_1^* < p_i^* \leq p_j^*, \text{ para todo } i, j \text{ tales que } c_i \leq c_j.$$

Además, si  $n \leq 4$ , se cumple que:

$$(2) \quad \frac{\partial p_i^*}{\partial c_i} > 0 \text{ y } \frac{\partial p_i^*}{\partial c_j} < 0, \text{ para todo } i \neq j.$$

*Demostración.* Primero se demuestra (1), es decir, que las asignaciones óptimas interiores están cargadas a los grupos con agentes con mayor escala en sus utilidades. Por el Lema 2 se sabe que las asignaciones óptimas interiores cumplen con

$$z_i(p_i^*) = z_j(p_j^*) \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Note que lo que caracteriza a los *hazard rate* son los parámetros  $\{\alpha_i\}_{i \in \{1,2,3,\dots,n\}}$ . Entonces, se desprende de forma directa que  $p_i^* = p_j^*$  si  $c_i = c_j$ . Luego, considere la siguiente función  $\bar{z} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\bar{z}(\alpha, p) = \frac{\alpha \cdot f(p)}{1 - \alpha \cdot F(p)},$$

la cual es una extensión de los *hazard rates* pero considerando a los parámetros  $\alpha$  como variables. Esta función cumple con

- $\frac{\partial \bar{z}(\alpha, p)}{\partial p} > 0$ , por la monotonía estricta de los *hazard rates*,
- $\frac{\partial \bar{z}(\alpha, p)}{\partial \alpha} = \frac{f(p) \cdot (1 - \alpha \cdot F(p)) + \alpha \cdot f(p) \cdot F(p)}{(1 - \alpha \cdot F(p))^2} > 0$ .

Por lo tanto, dado que  $c_i < c_j \iff \alpha_j < \alpha_i$ , si  $p_j^* \leq p_i^*$  se tiene que  $z_i(p_i^*) > z_j(p_j^*)$ , entonces para cumplir con  $z_i(p_i^*) = z_j(p_j^*)$  se necesita que  $p_i^* < p_j^*$ . Juntando todo lo anterior, y considerando que  $c_1 < c_i$  para todo  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , se tiene que  $p_1^* < p_i^* \leq p_j^*$ , para todo  $i, j$  tales que  $c_i \leq c_j$ .

La demostración de (2) se presenta en el Anexo IV. En aquella demostración, se utiliza el Teorema de la función implícita para caracterizar las derivadas parciales de interés, calculando manualmente la matriz que agrupa estas derivadas para los casos con  $n \leq 4$ . □

Así entonces, las asignaciones óptimas están cargadas a aquellos lados del mercado con agentes que valoran con una escala mayor el emparejarse. Al mismo tiempo, cuando esta escala crece para los agentes del algún grupo, aquellos de los otros grupos se benefician ya que la plataforma aprovecha esta mayor escala y reasigna el nivel de precios aumentando la asignación para aquel grupo que subió su escala de valoración.

Cabe destacar del Teorema 4 que se requiere que el nivel de precios induzca asignaciones óptimas interiores. Esto porque, como se vió en el ejemplo introductorio, podrían existir asignaciones iguales a cero para algún grupo, y con esto se pierden la complementariedad estricta del resultado (2).

Por otro lado, interesa conocer el efecto sobre estas asignaciones del número de grupos en el mercado. Se podría pensar que mientras más grupos haya en el mercado, y que por tanto para formar un *matching* se necesiten más agentes, la plataforma al dividir el nivel de precios entre más grupos, cada uno se beneficie al recibir una asignación menor. Sin embargo, esto dependerá de la política de fijación del nivel de precios, ya que al aumentar el número de grupos en el mercado, el nivel de precios también debería cambiar para mantener asignaciones interiores.

Para mostrar las dos consideraciones anteriores, a continuación se resuelve el problema de la asignación de precios cuando las utilidades de los agentes quedan determinadas por extracciones de distribuciones uniformes, con distinto soporte para los agentes de



distintos grupos. Con esto, se llega a expresiones cerradas para las asignaciones óptimas, lo que permite determinar cómo se mueven estas ante cambios en el número de grupos en el mercado, analizar el rango para el nivel de precios que induce asignaciones interiores, y cómo estas dos cosas interactúan entre sí.

### Caso con utilidades uniformes

Cuando la función  $f$  es una función constante e igual a la unidad,  $f(x) = 1$ , todas las utilidades quedan determinadas por extracciones de distribuciones uniformes. Esto es, para cada  $h_i \in \mathcal{A}_i$ , sus valoraciones quedan determinadas por extracciones de los valores  $\{X_{h_i}^{I(h_i, \mu)}\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ , según una distribución uniforme en el rango  $[0, c_i]$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , con  $c_1 = 1$ .

En este caso es posible determinar una expresión analítica para las asignaciones óptimas del problema de asignación de precios. Al considerar soluciones interiores, el siguiente sistema de ecuaciones determina estas soluciones.

$$\frac{f(p_1)}{1 - F(p_1)} = \frac{\alpha_j \cdot f(p_j)}{1 - \alpha_j \cdot F(p_j)}, \quad \text{para todo } j \in \{2, 3, \dots, n\},$$

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Luego, al reemplazar las densidades y funciones de distribución uniformes, se tiene que

$$\frac{1}{1 - p_1} = \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_j \cdot p_j},$$

$$p_j = \frac{1 - \alpha_j}{\alpha_j} + p_1.$$

Por último, utilizando la ecuación del nivel de precios, junto con que para las distribuciones uniformes se cumple que  $\alpha_i = 1/c_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se obtiene que

$$p_j^* = c_j \left( \frac{n-1}{n} \right) - \frac{\sum_{i \neq j} c_i - \bar{p}}{n}, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Note que como  $p_1^* < p_j^*$  para todo  $j \in \{2, 3, \dots, n\}$  (Teorema 4), la condición que garantiza asignaciones interiores es  $\bar{p} > \sum_{i=1}^n c_i - n$ . De esta forma, el rango de niveles de precios que la plataforma puede cobrar con tal de asegurar asignaciones interiores es  $\bar{p} \in (\sum_{i=1}^n c_i - n, \sum_{i=1}^n c_i)$ .

Además, se observa que cuando el mercado crece y entran nuevos grupos de agentes, dependerá de la política de fijación del nivel de precios el resultado sobre las asignaciones óptimas.

Esto es, si la plataforma decide fijar un nivel de precios  $\bar{p}$  levemente superior al

valor que garantiza asignaciones interiores,  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n c_i - n + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  pequeño, se tiene que las asignaciones óptimas son decrecientes en el número de grupos en el mercado, y en el límite a cada grupo se le cobra la diferencia entre las escalas de valoración de los agentes de ese grupo, y los agentes del grupo  $\mathcal{A}_1$ ,<sup>14</sup>

$$p_j^* = c_j - 1 + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \frac{\partial p_j^*}{\partial n} < 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^* = c_j - 1.$$

En cambio, si el nivel de precios es demasiado alto,  $\bar{p} = \sum_{i=1}^n c_i - \varepsilon$ , las asignaciones óptimas crecen cuando al mercado entran nuevos grupos de agentes, llegando en el límite a cobrarles la máxima valoración a los agentes de cada grupo,

$$p_j^* = c_j - \frac{\varepsilon}{n}, \quad \frac{\partial p_j^*}{\partial n} > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j^* = c_j.$$

En esta parte de la tesis se estudió el problema de la asignación del nivel de precios entre los múltiples lados del mercado, para una plataforma de emparejamientos. Independiente de si los agentes poseen utilidades medidas con la misma escala, desbalances en el número de agentes en cada grupo no afectan las asignaciones óptimas de la plataforma. Ahora bien, cuando la escala de valoración es común entre los grupos, las asignaciones óptimas son simétricas. En cambio, cuando los agentes de ciertos grupos valoran el emparejamiento con una escala mayor que los agentes de otros grupos, entonces la plataforma carga las asignaciones a los agentes de los grupos con mayor valoración. En lo que sigue se analiza el problema de la fijación del nivel de precios.

## Nivel de precios: simulaciones para mercados bilaterales

Los resultados del apartado anterior permiten dilucidar cómo se debe distribuir óptimamente el nivel de precios entre los lados del mercado. Sin embargo, queda por determinar cuál es el nivel de precios óptimo.

Con las hipótesis que se han planteado hasta ahora no es posible determinar una distribución específica para el número de tuplas creadas bajo la función de *matchings* que establece la plataforma, sino que se necesita especificar algo más sobre esta función. Naturalmente, se puede pensar que la plataforma está interesada en que los resultados de su función de *matchings* sean estables, en el sentido que le interesa que las uniones entre los agentes no se rompan fácilmente, o no al menos en el corto plazo.

Así entonces, ahora se estudia el problema de la fijación del nivel de precios de una

<sup>14</sup>Recuerde que en un principio se estableció que las escalas de valoración  $\{c_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  están relativas a la escala de los agentes del grupo  $\mathcal{A}_1$ , por lo que la expresión  $c_j - 1$  se puede interpretar como la diferencia porcentual entre las escalas de valoración de los agentes de  $\mathcal{A}_j$  con respecto a los agentes de  $\mathcal{A}_1$ .

plataforma en un mercado bilateral, que especifica una función de *matchings* estable. Concretamente, se dice que la función de *matchings*  $\bar{\mu}$  es estable cuando para todo nivel de precios  $p$  y utilidades  $u$ ,  $\mu = \bar{\mu}_{p,u}$  es estable, en el sentido de que no existe una pareja de agentes que prefiera emparejarse entre sí a seguir con sus compañeros bajo  $\mu$ .

Esto se analiza para mercados bilaterales ya que ciertos resultados de la literatura sobre existencia y caracterización de *matchings* estables se utilizan para entender el problema de la fijación del nivel de precios. Particularmente, se utiliza el resultado de existencia de Gale y Shapley (1962) para mercados bilaterales (junto con el algoritmo de Aceptación Diferida propuesto por estos autores), y también el Teorema del Hospital Rural (Gale y Sotomayor, 1985), para que los resultados de esta parte sean extensibles a cualquier función de *matchings* estable y no dependan del algoritmo particular que se utiliza para encontrar estos.<sup>15</sup>

Trabajos previos se han aproximado a este problema mediante el análisis de una expresión cerrada para la distribución del número de parejas formadas bajo ciertas funciones de *matchings*. Por ejemplo, Marx y Schummer (2021) encuentran una expresión para el número esperado de parejas formadas cuando se implementa un *Serial Dictatorship matching*. Otro ejemplo son los cálculos en Dzierzawa y Oméro (2000) sobre la distribución del número de agentes que quedan sin pareja en *matchings* estables.

Sin embargo, esta literatura no ha resuelto directamente el problema de la fijación del nivel de precios óptimo cuando la función de *matchings* es estable. La principal dificultad radica en determinar una expresión analítica para el número esperado de parejas que se forman en estos *matchings*. Si bien el número de parejas formadas en cualquier *matching* estable es invariante para un mismo mercado (Gale y Sotomayor, 1985), no es trivial cuantificar el efecto que poseen las asignaciones del nivel de precios al truncar las preferencias de los agentes por sus parejas admisibles. Por lo mismo, Marx y Schummer (2021) estudian una función de *matchings* que no posee resultados estables.

En esta parte se ataca el problema de una forma distinta, ya que no se pretende determinar una expresión analítica para el número esperado de parejas que se forman en *matchings* estables, sino que mediante simulaciones de preferencias se dilucida la interrogante sobre cuál es el nivel de precios óptimo, y también sobre cómo este nivel de precios es afectado por el tamaño del mercado y por desbalances en el número de agentes en cada grupo.

---

<sup>15</sup>Note que se podría utilizar la taxonomía de la Sección 1 para considerar ciertos tipos de mercados trilaterales en los cuales siempre existen *matchings* estables, y así estudiar el problema de la fijación del nivel de precios en estos mercados de tres partes. Pese a lo anterior, no es directo que también se siga cumpliendo el Teorema del Hospital Rural (Gale y Sotomayor, 1985) en mercados trilaterales.

## Simulaciones

Cada simulación de preferencias consiste en crear un mercado bilateral tal que los agentes de los grupos  $A$  y  $B$  poseen preferencias determinadas por extracciones i.i.d. de distribuciones uniformes en  $[0, 1]$ . Así, para cada nivel de precios  $p \in \{0.01, 0.02, 0.03, \dots, 2\}$  se simulan 100 mercados bilaterales, y en cada uno se divide este nivel de precios simétricamente entre los dos grupos (por el Teorema 3). Luego, se truncan las preferencias de cada agente según esta asignación del nivel de precios con tal de considerar solamente potenciales parejas admisibles. Posteriormente, se aplica el algoritmo de Aceptación Diferida (Gale y Shapley, 1962) con los agentes del grupo  $A$  haciendo las propuestas, para emparejar de forma estable a estos agentes, y después contabilizar los ingresos de la plataforma como la multiplicación entre el nivel de precios y el número de parejas formadas,  $Ingresos = p \cdot \mathcal{T}_p$ . De esta forma, para cada nivel de precios se tienen 100 ingresos simulados. Por último, se computa el promedio de estos ingresos para cada nivel de precios.<sup>16</sup> En el Anexo V se presenta el código con el que se realizaron estas simulaciones.

En la Figura 10 se grafican las 100 simulaciones de los ingresos de la plataforma para mercados bilaterales balanceados con 100 agentes en cada grupo. Esta figura ilustra la idea de las simulaciones puesto que es posible determinar aquel nivel de precios que maximiza los ingresos esperados. Precisamente, este nivel de precios es  $p^* = 1.55$ , lo que se traduce en asignaciones óptimas  $p_A^* = p_B^* = 0.775$ . En otras palabras, la plataforma maximiza sus ingresos esperados cuando la probabilidad *ex-ante* de que una pareja cualquiera no resulte compatible es 94.94 % (factor de incompatibilidad).

Si bien estos valores puntuales obtenidos con las simulaciones solo sirven de ejemplo, pareciera ser que la plataforma tolera una alta probabilidad de incompatibilidad producto de que el mercado es relativamente grande. Dicho esto, interesa conocer cómo responde el nivel de precios cuando varía el tamaño del mercado.

Intuitivamente, fijado el nivel de precios, un mercado más grande lleva a que en promedio se generen más parejas en un *matching* estable. Ahora bien, si la plataforma está maximizando ingresos y observa que el mercado está creciendo, se enfrenta a un *tradeoff* si decide subir el precio. Por un lado incrementan sus ingresos nominales, pero a la vez este mayor nivel de precios al dividirse equitativamente entre los grupos, induce

---

<sup>16</sup>El principal supuesto sobre el cual recae la validez de estas simulaciones es la Ley Débil de los Grandes Números (WLLN, por sus siglas en inglés), también conocida como Ley Débil de Khintchine (véase Pollard (2001)). Considere la secuencia de variables aleatorias  $\{\mathcal{T}_{p,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $\mathcal{T}_p$  es el número de parejas formadas en un *matching* estable. Si bien no se conoce la distribución de esta variable, se infiere que por las extracciones i.i.d. de las preferencias de los agentes, esta secuencia  $\{\mathcal{T}_{p,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  también será i.i.d. Luego, considerando mercados con un número finito de agentes se tiene que el primer momento de  $\mathcal{T}_p$  también será finito,  $\mathbb{E}[\mathcal{T}_p] < \infty$ . Entonces, la WLLN garantiza convergencia en probabilidad del promedio muestral,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{p,i}}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[\mathcal{T}_p].$$

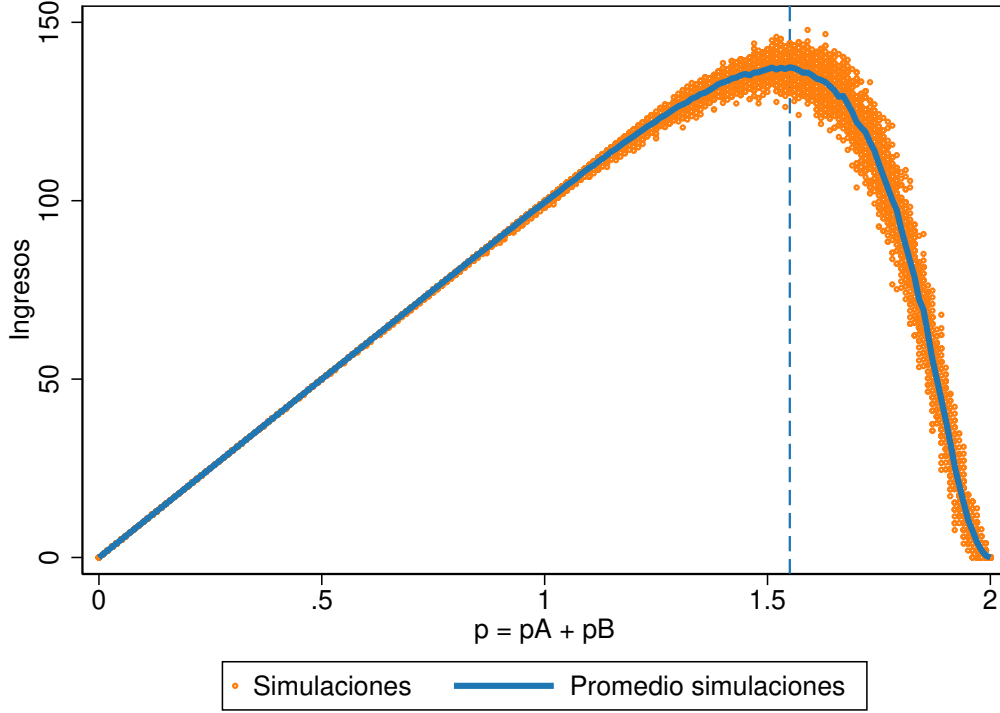


Figura 10: 100 simulaciones de ingresos para mercados bilaterales con  $\#A = \#B = 100$  agentes en cada grupo.

un acortamiento del conjunto de parejas admisibles para cada agente, y con esto una reducción en el número esperado de parejas formadas.

A pesar de lo anterior, si se consideran despreciables algunos efectos de segundo orden, se tiene que el nivel de precios óptimo responde positivamente a aumentos en el tamaño del mercado. Para ilustrar esto, considere que el número esperado de parejas que se forman en un *matching* estable es una función creciente del número de agentes en cada grupo ( $N$ ), es decir,  $\mathbb{E}[\mathcal{T}_p] = g(p, N)$  con  $\frac{\partial g(p, N)}{\partial p} < 0$  y  $\frac{\partial g(p, N)}{\partial N} > 0$ . La plataforma resuelve

$$\max_{p \in \mathbb{R}_+} p \cdot g(p, N),$$

cuya solución  $p^*$  queda caracterizada por  $g(p^*, N) + p \cdot \frac{\partial g(p^*, N)}{\partial p} = G(p^*, N) = 0$ . Luego, asumiendo diferenciabilidad para la función  $g(\cdot)$ , el Teorema de la función implícita muestra que

$$\frac{\partial p^*}{\partial N} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial N}}{\frac{\partial G}{\partial p}} = -\frac{\frac{\partial g(p, N)}{\partial N} + p \cdot \frac{\partial^2 g(p, N)}{\partial N \partial p}}{2 \cdot \frac{\partial g(p, N)}{\partial p} + p \cdot \frac{\partial^2 g(p, N)}{\partial^2 p}}.$$

Entonces, al asumir efectos de segundo orden despreciables, se tiene que  $\frac{\partial p^*}{\partial N} > 0$ .

Las simulaciones apoyan esta idea. En la Figura 11 se muestra el efecto del tamaño de un mercado balanceado sobre el nivel de precios óptimo. Se observa que mientras más

grande es el mercado, el nivel de precios óptimo es también mayor.

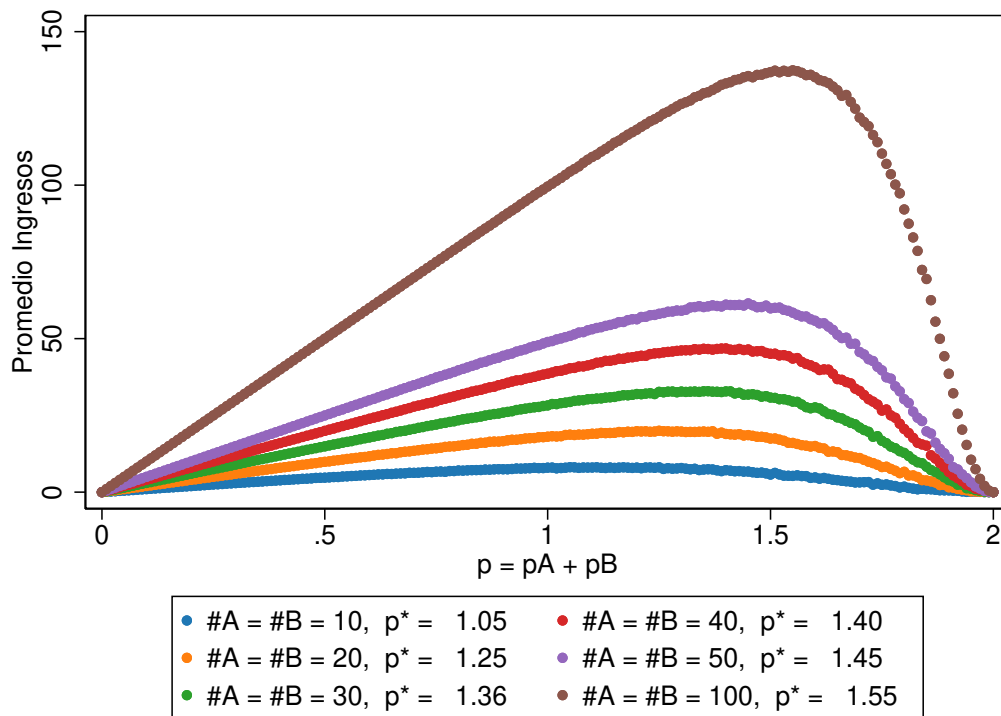


Figura 11: 100 ingresos simulados para mercados bilaterales balanceados con distintos tamaños.

En cuanto a desbalances en el número de agentes por grupo y su efecto sobre el nivel de precios óptimo, se muestra a continuación la Figura 12.

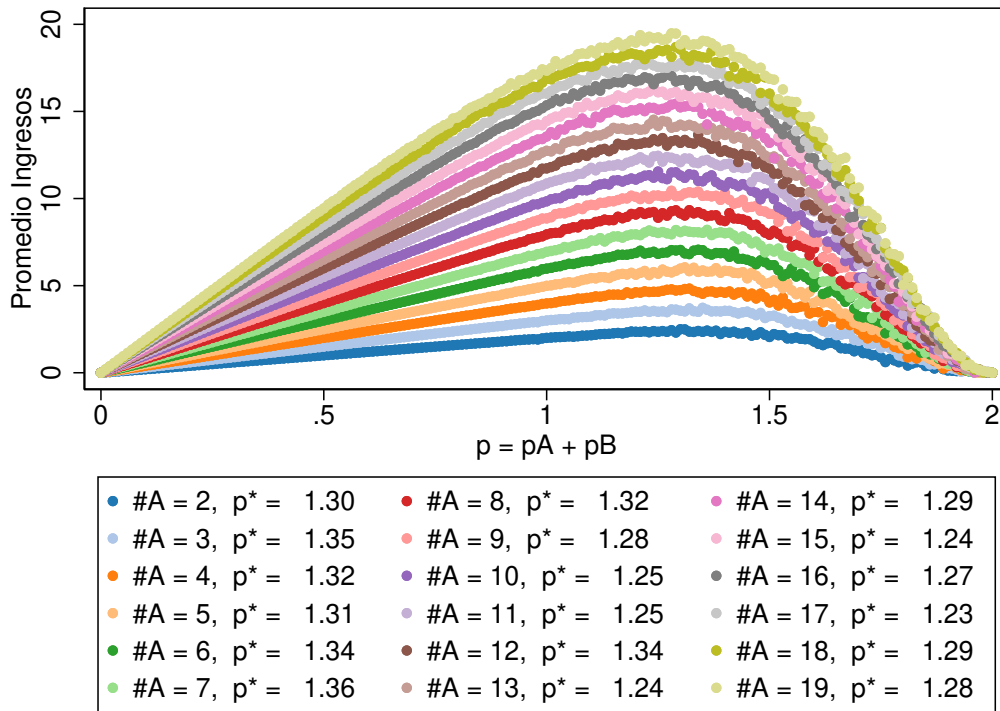


Figura 12: 100 ingresos simulados para mercados bilaterales desbalanceados, fijando  $\#B = 20$ .

En la figura anterior pareciera ser que el nivel de precios óptimo disminuye a medida que se acorta el desbalance entre los grupos. Sin embargo, no se observa una relación monótona. Una posible explicación es que hay dos efectos interactuando entre sí, y con estas simulaciones no es posible distinguir cuál es el que prima (y tampoco las condiciones para que sea el uno o el otro). El primer efecto va en línea con lo mencionado anteriormente, en el sentido de que cuando el desbalance en el mercado se va acortando, entonces hay un rango mayor de posibles parejas que se pueden formar. Por lo tanto, la plataforma tiene incentivos a subir el precio si es que se consideran irrelevantes algunos efectos de segundo orden.

No obstante, en las simulaciones cuando el desbalance se reduce es porque solamente un grupo crece y el otro queda constante. Por lo tanto, como el nivel de precios se distribuye simétricamente entre los lados, el *tradeoff* de la plataforma posee un nuevo efecto negativo de subir el precio, y es que los agentes del grupo que no varía en tamaño sí o sí verán reducidas, en promedio, sus listas por parejas admisibles. Note que en mercados balanceados esto no es necesariamente así ya que el efecto de que el tamaño aumenta puede compensar el acortamiento de las preferencias por parejas admisibles. Entonces, este segundo efecto va en la dirección contraria a subir el nivel de precios.

De esta forma, no es claro para la plataforma siempre bajar el nivel de precios cuando disminuye el desbalance en el mercado, aunque por el resultado de las simulaciones en la

Figura 12, pareciera ser que la tendencia sí lo es.

## Conclusiones

En esta tesis se analizaron dos temáticas relacionadas a modelos de *matching* en mercados multilaterales. Por un lado, se presentó una taxonomía para las estructuras resultantes de la dirección de las preferencias de los agentes en un mercado trilateral, con el fin de unificar la literatura sobre existencia de *matchings* estables. Esta taxonomía permite agrupar los 52 mercados totales en siete tipos de estructuras, de las cuales en solo seis existen resultados sobre existencia de estabilidad.

Por lo mismo, para el tipo de estructura restante se muestra que la existencia de al menos un *matching* estable solo es cierta cuando el número de agentes por grupo es exactamente igual a dos (Teorema 1). Para mercados con más de dos agentes por grupo se establecen condiciones sobre los perfiles de preferencias que recuperan la existencia de estabilidad (Teorema 2). Estos resultados cierran la taxonomía para la estabilidad en mercados trilaterales. Pero la taxonomía propuesta puede ser fácilmente extendida a modelos con más grupos de agentes. No obstante, el número de mercados particulares a analizar crece exponencialmente.

El otro tópico que se analizó en este artículo es el problema de precios de una plataforma de emparejamientos que opera en mercados multilaterales. Adaptando literatura reciente (Marx y Schummer, 2021), se logró extender para mercados con múltiples grupos el resultado de independencia de las asignaciones óptimas con respecto a desbalances en el número de agentes en cada grupo (Proposición 1). Además, al considerar la misma escala de valoración para todos los grupos, se demuestra que lo óptimo es dividir en partes iguales un nivel fijo de precios entre estos grupos (Teorema 3). En cambio, cuando esta escala de valoración difiere entre los lados, la plataforma carga las asignaciones a aquellos con la mayor escala (Teorema 4).

También se estudió el problema de la fijación del nivel óptimo de precios para estas plataformas en mercados bilaterales, usando simulaciones computacionales. Estos resultados indican que el nivel óptimo de precios es creciente con el tamaño del mercado cuando este es balanceado. Pese a que las simulaciones fueron de gran ayuda para el resultado anterior, cuando se analizó el efecto de desbalances en el número de agentes en cada grupo, las simulaciones no fueron concluyentes.

Se espera que esta tesis motive el estudio de modelos de *matchings* multilaterales, con énfasis en el diseño de mecanismos para aquellos mercados trilaterales. Para lo anterior la taxonomía propuesta puede ser de gran ayuda. Mientras que el principal desafío en el problema de fijación de precios de la plataforma está en determinar una



expresión cerrada para el número esperado de parejas formadas en un *matching* estable, y con esto resolver el problema del nivel óptimo de precios. Se pretende tratar estos temas en futuras investigaciones.

## Referencias

- Alkan, A. (1988). Nonexistence of stable threesome matchings. *Mathematical Social Sciences*, 16(2), 207-209.
- Aoyagi, M., y Yoo, S. H. (2019). Matching platforms. *Working paper ISER DP*, 1072.
- Armstrong, M. (2006). Competition in two-sided markets. *The RAND Journal of Economics*, 37(3), 668-691.
- Ashlagi, I., Kanoria, Y., y Leshno, J. D. (2017). Unbalanced random matching markets: The stark effect of competition. *Journal of Political Economy*, 125(1), 69-98.
- Biró, P., y McDermid, E. (2010). Three-sided stable matchings with cyclic preferences. *Algorithmica*, 58(1), 5-18.
- Boros, E., Gurvich, V., Jaslar, S., y Krasner, D. (2004). Stable matchings in three-sided systems with cyclic preferences. *Discrete Mathematics*, 289(1), 1-10.
- Caillaud, B., y Jullien, B. (2003). Chicken egg: Competition among intermediation service providers. *The RAND Journal of Economics*, 34(2), 309-328.
- Cui, L., y Jia, W. (2013). Cyclic stable matching for three-sided networking services. *Computer Networks*, 57(1), 351-363.
- Damiano, E., y Li, H. (2007). Price discrimination and efficient matching. *Economic Theory*, 30(2), 243-263.
- Danilov, V. (2003). Existence of stable matchings in some three-sided systems. *Mathematical Social Sciences*, 46(2), 145-148.
- Duch-Brown, N. (2017). *The competitive landscape of online platforms* (JRC Digital Economy Working Paper n.º 2017-04). Seville.
- Dzierzawa, M., y Oméro, M.-J. (2000). Statistics of stable marriages. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 287(1), 321-333.
- Eriksson, K., Sjöstrand, J., y Strimling, P. (2006). Three-dimensional stable matching with cyclic preferences. *Mathematical Social Sciences*, 52(1), 77-87.
- Evans, D. S., y Schmalensee, R. (2016). *Matchmakers: The new economics of multisided platforms*. Harvard Business Review Press.
- Fershtman, D., y Pavan, A. (2017). *Matching auctions* (CSIO Working Paper n.º 0144). Evanston, IL.
- Fershtman, D., y Pavan, A. (2022). Matching auctions. *The RAND Journal of Economics*, n/a(n/a).
- Gale, D., y Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1), 9-15.
- Gale, D., y Sotomayor, M. (1985). Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, 11(3), 223-232.

- Hagiu, A. (2006). Multi-sided platforms: From microfoundations to design and expansion strategies. *Harvard Business School, working paper*, 07(094).
- Johnson, T. (2013). Matching through position auctions. *Journal of Economic Theory*, 148(4), 1700-1713.
- Klein, T. (2017). Analysis of stable matchings in R: Package matchingmarkets. *Vignette to R package matchingMarkets. The Comprehensive R Archive Network*.
- Knuth, D. (1976). Stable marriage and its relation to other combinatorial problems: An introduction to the mathematical analysis of algorithms. *American Mathematical Soc.*, 10.
- Lahiri, S. (2008). Three-sided matchings and separable preferences. *MPRA Paper*.
- Liu, X., y Ma, H. (2015). A two-sided matching decision model based on uncertain preference sequences. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 241379.
- Marx, P., y Schummer, J. (2021). Revenue from matching platforms. *Theoretical Economics*, 16(3), 799-824.
- McIntyre, D. P., y Srinivasan, A. (2017). Networks, platforms, and strategy: Emerging views and next steps. *Strategic management journal*, 38(1), 141-160.
- Pashkovich, K., y Poirrier, L. (2020). Three-dimensional stable matching with cyclic preferences. *Optimization Letters*, 14(8), 2615-2623.
- Pollard, D. (2001). *A user's guide to measure theoretic probability*. Cambridge University Press.
- Rochet, J.-C., y Tirole, J. (2003, 06). Platform Competition in Two-Sided Markets. *Journal of the European Economic Association*, 1(4), 990-1029.
- Rochet, J.-C., y Tirole, J. (2006). Two-sided markets: a progress report. *The RAND Journal of Economics*, 37(3), 645-667.
- Weyl, E. G. (2010). A price theory of multi-sided platforms. *American Economic Review*, 100(4), 1642-72.
- Yu, D., y Xu, Z. (2020). Intuitionistic fuzzy two-sided matching model and its application to personnel-position matching problems. *Journal of the Operational Research Society*, 71(2), 312-321.
- Zhang, F., Li, J., Fan, J., Shen, H., Shen, J., y Yu, H. (2019). Three-dimensional stable matching with hybrid preferences. *Journal of Combinatorial Optimization*, 37(1), 330-336.
- Zhang, F., y Zhong, L. (2021). Three-sided matching problem with mixed preferences. *Journal of Combinatorial Optimization*, 42(4), 928-936.
- Zhong, L., y Bai, Y. (2019). Three-sided stable matching problem with two of them as cooperative partners. *Journal of Combinatorial Optimization*, 37(1), 286-292.

## Anexos

### I. Algoritmo 2 en Zhang y Zhong (2021)

A continuación se detallan los pasos del algoritmo propuesto por los autores para encontrar *matching* estables en mercados del Tipo VI: [ $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$ ].

1. Todos los agentes  $b \in B$  están activos, y se define el *matching*  $\mu = \emptyset$ .
2. Cada agente  $b \in B$  activo le hace una propuesta a su mejor  $c \in C$  según su perfil de preferencias  $P_{b,C}$ , y se denota esta opción por  $c$ . Luego, todos los pares  $(b, c)$  tales que  $b$  propuso  $c$  se denotan por  $K$ , y se define  $K(c) = \{b \in B : (b, c) \in K\}$ .
3. Cada par  $(b, c) \in K$ , según el perfil de preferencias  $P_{c,A}$ , propone su mejor opción  $a \in A$ , y se denota esta opción por  $a$ . Luego, se denota por  $Q$  a todas las tripletas  $(a, b, c)$  tales que  $(b, c) \in K$  y  $(b, c)$  propuso  $a$ . Notar que para todo par de tripletas  $(a, b, c), (a', b', c') \in Q$  se cumple que  $b \neq b'$ . Sea  $R = Q \cup \mu$ , y  $R|_A = \{a \in A : (a, b, c) \in R\}$ .
4. Cada  $\bar{a} \in R|_A$  escoge su mejor opción  $(b, c)$  dentro de aquellos que propusieron  $\bar{a}$ , y se denota esta opción por  $(\bar{b}, \bar{c})$ . Para todas las otras parejas  $(b', c')$  que propusieron  $\bar{a}$ , se remueve  $\bar{a}$  del perfil de preferencias  $P_{c',A}$ .
5. Si  $\{a\}$  no conforma una triplete, el *matching* queda  $\mu := \mu \cup \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\}$ , y tanto  $\bar{b}$  como  $\bar{c}$  quedan inactivos. Si  $\bar{a}$  ya conforma una triplete, cuyos compañeros son  $(b'', c'') \neq (\bar{b}, \bar{c})$ , el *matching* queda  $\mu := \mu \cup \{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\} \setminus \{(\bar{a}, b'', c'')\}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  quedan inactivos, y tanto  $b''$  como  $c''$  son reactivados.
6. Repetir los pasos 2, 3, 4 y 5, hasta que todos los agentes  $b \in B$  estén inactivos.

### II. Algoritmo 1 en Zhang, Li, Fan, Shen H., Shen J. y Yu (2019)

A continuación se detallan los pasos del algoritmo propuesto por los autores para encontrar *matching* estables en mercados del Tipo V: [ $\leftarrow$ ,  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ ].

1. Todos los agentes  $b \in B$  están activos, y se define el *matching*  $\mu = \emptyset$ .
2. Cada agente  $b \in B$  activo le hace una propuesta a su mejor  $a \in A$  según su perfil de preferencias  $P_{b,A}$ .
3. Para cada agente activo  $a \in A$  que recibió alguna propuesta, se denota por  $K(a)$  a todos los agentes  $b \in B$  que propusieron  $a$ . Luego, cada  $a$  que recibió propuestas escoge  $(b^*, c^*)$  como aquel más preferido dentro del conjunto  $\{(b, c) \in B \times C : b \in K(a), c \in C\}$ .
  - 3.1 Si  $a$  no conforma una triplete, entonces propone  $(b^*, c^*)$ , y se denota  $T(a) = (b^*, c^*)$ .

- 3.2 Si  $a$  ya conforma una tripleta, cuyos compañeros son  $(b', c')$ , propone  $(b^*, c^*)$  solo si  $(b^*, c^*) P_{a, B \times C} (b', c')$ , y se denota  $T(a) = (b^*, c^*)$ . Luego, el *matching*  $\mu$  queda  $\mu := \mu \setminus \{a, b', c'\}$ , y  $b'$  es reactivado.
4. Para cada agente  $c^* \in C$  que recibió propuestas, sea  $L(c^*)$  todos los agentes  $a \in A$  que propusieron  $c^*$ .
- 4.1 Si  $c^*$  no conforma una tripleta, entonces  $c^*$  escoge la mejor opción dentro de  $L(c^*)$ , y se denota esta opción por  $\bar{a}$ . Si  $T(\bar{a}) = (b^*, c^*)$ , se forma la tripleta  $(\bar{a}, b^*, c^*)$ , el *matching* queda  $\mu := \mu \cup \{(\bar{a}, b^*, c^*)\}$ , y  $b^*$  queda inactivo.
- 4.1 Si  $c^*$  ya conforma una tripleta, cuyos compañeros son  $(a, b)$ , entonces  $c^*$  escoge la mejor opción dentro de  $L(c^*) \cup \{a\}$ , y se denota esta opción por  $\bar{a}$ . Cuando  $\bar{a} \neq a$ , si  $T(\bar{a}) = (b^*, c^*)$ , se forma la tripleta  $(\bar{a}, b^*, c^*)$ , el *matching* queda  $\mu := \mu \cup \{(\bar{a}, b^*, c^*)\} \setminus \{(a, b, c^*)\}$ ,  $b^*$  queda inactivo y  $b$  es reactivado.
5. Repetir los pasos 2, 3 y 4, hasta que todos los agentes  $b \in B$  estén inactivos.

### III. Demostración Teorema 1 para el caso $n = 2$

Considere tres grupos con dos agentes en cada uno:  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $B = \{b_1, b_2\}$ ,  $C = \{c_1, c_2\}$ . Lo que se demuestra a continuación es la no existencia de tripletas de bloqueo. Para esto se utilizan las preferencias de los agentes del grupo  $C$  con tal de formar contradicciones entre la existencia de tripletas de bloqueo y las características de los perfiles de preferencias estrictas de los agentes del grupo  $A$ .

Primero, suponga que las preferencias de los agentes del grupo  $C$  son las siguientes:

$c_1$	$c_2$
$a_1$	$a_2$
$a_2$	$a_1$

Es directo notar que los *matching*  $\mu_1 = \{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\}$  y  $\mu_2 = \{(a_1, b_2, c_1), (a_2, b_1, c_2)\}$  son estables, ya que ambos agentes del grupo  $C$  están junto a su mejor opción, por lo que es imposible que alguno mejore en una hipotética tripleta de bloqueo.

Considere ahora una situación tal que ambos agentes en  $C$  compartan la clasificación para los agentes de  $A$ .

$c_1$	$c_2$
$a_1$	$a_1$
$a_2$	$a_2$

Con estas preferencias, es imposible construir un ejemplo en el cual no existen *matching* estables. Para esto, se toman los cuatro posibles *matching* para este mercado:

$$(1) \{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)\}$$

$$(2) \{(a_1, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_1)\}$$

$$(3) \{(a_1, b_2, c_1), (a_2, b_1, c_2)\}$$

$$(4) \{(a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_1)\}$$

Ahora, para que ninguno de estos *matching* sea estable, se necesita que en cada uno de ellos exista al menos una tripleta de bloqueo. Entonces, para el *matching* (1), la tripleta de bloqueo debe ser tal que contenga a la pareja  $(a_1, c_2)$ , ya que el único agente en  $C$  que tiene opción de mejorar es  $c_2$ , y lo hace al juntarse con  $a_1$ . Por lo tanto, hay dos posibles tripletas de bloqueo para este *matching*:  $(a_1, b_1, c_2)$  y  $(a_1, b_2, c_2)$ . Luego, para que al agente  $a_1$  le convenga formar alguna de estas tripletas, se debe cumplir que

$$(1.1) (b_1, c_2) P_{a_1, B \times C} (b_1, c_1), \text{ o,}$$

$$(1.2) (b_2, c_2) P_{a_1, B \times C} (b_1, c_1).$$

Siguiendo la misma idea anterior, para el *matching* (2) las posibles tripletas de bloqueo son:  $(a_1, b_1, c_1)$  y  $(a_1, b_2, c_1)$ , y las condiciones sobre las preferencias de  $a_1$  son

$$(2.1) (b_1, c_1) P_{a_1, B \times C} (b_1, c_2), \text{ o,}$$

$$(2.2) (b_2, c_1) P_{a_1, B \times C} (b_1, c_2).$$

Para el *matching* (3) las posibles tripletas de bloqueo son las mismas que en el *matching* (1):  $(a_1, b_1, c_2)$  y  $(a_1, b_2, c_2)$ , pero con distintas condiciones para las preferencias de  $a_1$ ,

$$(3.1) (b_1, c_2) P_{a_1, B \times C} (b_2, c_1), \text{ o,}$$

$$(3.2) (b_2, c_2) P_{a_1, B \times C} (b_2, c_1).$$

Por último, para el *matching* (4) las posibles tripletas de bloqueo son las mismas que en el *matching* (2):  $(a_1, b_1, c_1)$  y  $(a_1, b_2, c_1)$ , pero con las siguientes condiciones para las preferencias de  $a_1$ ,

$$(4.1) (b_1, c_1) P_{a_1, B \times C} (b_2, c_2), \text{ o,}$$

$$(4.2) (b_2, c_1) P_{a_1, B \times C} (b_2, c_2).$$

Note que los siguientes pares de condiciones son contradictorias entre sí: (1,1) y (2,1), (1,2) y (4,1), (2,2) y (3,1), (3,2) y (4,2). Por lo tanto, cualquier combinación de estas condiciones contradice la transitividad del perfil de preferencias  $P_{a_1, B \times C}$ . Entonces, es imposible construir preferencias  $P_{a_1, B \times C}$  tal que para cualquier *matching* (y en particular para los cuatro anteriores) siempre exista una tripleta de bloqueo.  $\square$

#### IV. Demostración Teorema 4 (continuación)

Para mostrar la complementariedad de las asignaciones óptimas con respecto a la escala de valoración de los agentes de otro grupo, considere la siguiente función  $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} G_1(\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2) \\ G_2(\alpha_1, \alpha_3, p_1, p_3) \\ \vdots \\ G_{n-1}(\alpha_1, \alpha_n, p_1, p_n) \\ G_n(p_1, p_2, \dots, p_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1(\alpha_1, p_1) - \bar{z}_2(\alpha_2, p_2) \\ \bar{z}_1(\alpha_1, p_1) - \bar{z}_3(\alpha_3, p_3) \\ \vdots \\ \bar{z}_1(\alpha_1, p_1) - \bar{z}_n(\alpha_n, p_n) \\ \bar{p} - \sum_{i=1}^n p_i \end{pmatrix}.$$

Al suponer que el nivel de precios  $\bar{p}$  induce asignaciones óptimas interiores, por el Lema 2 se tiene que, dados  $\{\alpha_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$ , las asignaciones  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  que cumplen con  $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = (0 \cdots 0)^\top$  resuelven el problema de la asignación de precios. Luego, considere las siguientes matrices,

$$D_p G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial p_n} \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_\alpha G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial \alpha_n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Con el fin de conocer el signo de las derivadas parciales  $\left\{ \frac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j \in \{1,2,\dots,n\}}$ , la continuidad de las densidades  $\{f_i\}_{i \in \{1,2,\dots,n\}}$  permiten aplicar el teorema de la función implícita, y según este, la matriz que agrupa todas estas derivadas toma la siguiente forma

$$D_\alpha p^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1^*}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_1^*}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n^*}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_n^*}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}_{n \times n} = -[D_p G]^{-1} D_\alpha G.$$

Se corrobora que la matriz  $D_p G$  es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Para ver esto, note que el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial p_n} \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

solo admite como solución  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$ . Esto porque el sistema anterior se puede escribir como

$$x_1 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} - x_i \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial p_i} = 0, \quad \text{para todo } i \in \{2, 3, \dots, n\},$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Entonces, como los *hazard rates* son estrictamente crecientes,  $\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial p_i} > 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se tiene que necesariamente  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ , ya que caso contrario se contradice con la última ecuación.

Luego, para determinar una expresión para la matriz  $D_\alpha p^*$  se realizan los cálculos respectivos para  $n \in \{2, 3, 4\}$ , y se llega a lo siguiente:

■  $n = 2$

$$D_{\alpha} p^* = \frac{1}{\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}$$

■  $n = 3$

$$D_{\alpha} p^* = \frac{1}{\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \right) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \right) & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & -\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} \left( \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \right) \end{pmatrix}$$

■  $n = 4$

$$D_{\alpha} p^* = \frac{1}{\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4}}.$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \right) & \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & -\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} + \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \right) & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & -\frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} \left( \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial p_4} \right) & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_4}{\partial \alpha_4} \\ \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial \alpha_3} & -\frac{\partial \bar{z}_4}{\partial \alpha_4} \left( \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} + \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial p_1} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} + \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial p_2} \frac{\partial \bar{z}_3}{\partial p_3} \right) \end{pmatrix}$$

47

De las expresiones anteriores se observa que las derivadas parciales  $\frac{\partial p_i^*}{\partial \alpha_j}$  son negativas cuando  $i = j$  (elementos de la diagonal principal), y positivas en caso contrario. Entonces, como  $c_i < c_j \iff \alpha_j < \alpha_i$ , se tiene que  $\frac{\partial p_i^*}{\partial c_i} > 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , y  $\frac{\partial p_i^*}{\partial c_j} < 0$  para todo  $j \neq i$ .  $\square$

Cabe destacar que esta segunda parte del Teorema 4 se restringe a los casos con  $n \leq 4$ . Esto se debe solamente a la dificultad para calcular analíticamente la matriz  $D_{\alpha} p^*$ , y por lo mismo es bastante probable que la condición  $n \leq 4$  pueda omitirse del enunciado del teorema.



## V. Código para las simulaciones

A continuación se detalla el código utilizado para simular los ingresos esperados de la plataforma. Este código está escrito en lenguaje R, y la librería que se usa para computar el emparejamiento por Aceptación Diferida es *matchingMarkets* (Klein, 2017).

```
rm(list=ls())
#Librerias
library(dplyr)
library(matchingR)
library(Rcpp)
library(sets)
library(matchingMarkets)

setwd("C:\\\\RUTA")

#Funcion para truncar las preferencias
order_pad <- function(x, ...){
y <- order(x, ...)
n <- length(y)
k <- sum(is.na(x))
if(k>0) y[(n-k+1):n] <- NA
y
}

#Funcion para detectar errores
try2 <- function(code, silent = FALSE) {
tryCatch(code, error = function(c) {
if (!silent) {"Error"}}
else{code}})}

Mercados balanceados

for (x in c(10,20,30,40,50,100)){
ingresos <- matrix(0, nrow=201, ncol=100)

#Tamano del mercado
na <- x
nb <- na

#100 simulaciones para cada nivel de precios
for (i in 1:100){
for (p in 0:200) {
#Se divide por la mitad el nivel de precios
```

```

pa <- p/(2*100)
pb <- pa

#Se generan preferencias  $U \sim [0,1]$ 
uA = as.data.frame(matrix(runif(na*nb,0,1), nrow = nb, ncol = na))
uB = as.data.frame(matrix(runif(na*nb,0,1), nrow = na, ncol = nb))

#Se truncan las preferencias segun las asignaciones del nivel de precios
uA[uA < pa] <- NA
uB[uB < pb] <- NA
A <- apply(uA, 2, order_pad, decreasing = TRUE)
A[] <- paste0("b", A)
A[A == "bNA"] <- NA_character_
colnames(A) <- paste("a",rep(1:na), sep = "")
B <- apply(uB, 2, order_pad, decreasing = TRUE)
B[] <- paste0("a", B)
B[B == "aNA"] <- NA_character_
colnames(B) <- paste("b",rep(1:nb), sep = "")

#Se computa el numero de parejas formadas al aplicar AD
if (try2(hri(s.prefs=A, c.prefs=B, nSlots = rep(1, nb)))=="Error") {
n_par <- 0
} else {
aux <- hri(s.prefs=A, c.prefs=B, nSlots = rep(1, nb))
aux <- aux[["matchings"]]
n_par <- sum(with(aux,matching == 1))
}

#Se computan los ingresos
ingresos[p+1,i] <- (pa+pb)*n_par
}
}

#Se exportan los resultados
ingresos_df <- as.data.frame(ingresos)
write.csv(ingresos_df, file=paste0(nb, '_ingresos.csv'))
}

Mercados desbalanceados

for (x in c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19)){
ingresos <- matrix(0, nrow=201, ncol=100)

```

```

#Tamano del mercado
na <- x
nb <- 20

#100 simulaciones para cada nivel de precios
for (i in 1:100){
  for (p in 0:200) {
    #Se divide por la mitad el nivel de precios
    pa <- p/(2*100)
    pb <- pa

    #Se generan preferencias  $U \sim [0,1]$ 
    uA = as.data.frame(matrix(runif(na*nb,0,1), nrow = nb, ncol = na))
    uB = as.data.frame(matrix(runif(na*nb,0,1), nrow = na, ncol = nb))

    #Se truncan las preferencias segun las asignaciones del nivel de precios
    uA[uA < pa] <- NA
    uB[uB < pb] <- NA
    A <- apply(uA, 2, order_pad, decreasing = TRUE)
    A[] <- paste0("b", A)
    A[A == "bNA"] <- NA_character_
    colnames(A) <- paste("a",rep(1:na), sep = "")
    B <- apply(uB, 2, order_pad, decreasing = TRUE)
    B[] <- paste0("a", B)
    B[B == "aNA"] <- NA_character_
    colnames(B) <- paste("b",rep(1:nb), sep = "")

    #Se computa el numero de parejas formadas al aplicar AD
    if (try2(hri(s.prefs=A, c.prefs=B, nSlots = rep(1, nb)))=="Error") {
      n_par <- 0
    } else {
      aux <- hri(s.prefs=A, c.prefs=B, nSlots = rep(1, nb))
      aux <- aux[["matchings"]]
      n_par <- sum(with(aux,matching == 1))
    }

    #Se computan los ingresos
    ingresos[p+1,i] <- (pa+pb)*n_par
  }
}

```

```
#Se exportan los resultados  
ingresos_df <- as.data.frame(ingresos)  
write.csv(ingresos_df, file=paste0(na, '_desbalance_ingresos.csv'))  
}
```