



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

SUBSHIFTS SOBRE GRUPOS VIRTUALMENTE CÍCLICOS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MARTÍN GILABERT VIO

PROFESOR GUÍA:  
SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
SEBASTIÁN BARBIERI LEMP  
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por ANID-Subdirección de Capital Humano/Magíster Nacional/2021-22211462, CMM ANID PIA AFB170001, CMM ANID BASAL ACE210010 y CMM ANID BASAL FB210005

SANTIAGO DE CHILE

2022

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR  
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y DE LA MEMORIA PARA OPTAR  
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: MARTÍN GILABERT VIO  
FECHA: 2022  
PROF. GUÍA: SEBASTIÁN DONOSO FUENTES

## SUBSHIFTS SOBRE GRUPOS VIRTUALMENTE CÍCLICOS

El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades dinámicas de los subshifts de tipo finito definidos sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . Éstos son una clase de grupos finitamente generados caracterizados por una condición geométrica que impone una estructura algebraica muy explícita. Buena parte de los resultados obtenidos siguen de recodificar subshifts sobre estos grupos como subshifts unidimensionales equipados con un grupo finito de homeomorfismos. El trabajo revela una teoría similar a la dinámica simbólica unidimensional, y distingue esta clase de objetos de los SFTs sobre  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$  donde fallan caracterizaciones tan explícitas e intervienen nociones de computabilidad.

El primer capítulo expone nociones generales de teoría de grupos y dinámica simbólica, junto con detallar propiedades de los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . El segundo capítulo detalla el proceso de recodificación de un  $G$ -subshift con  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  en un  $\mathbb{Z}$ -subshift equipado con finitos homeomorfismos. Además, se entregan algunos resultados generales para  $\mathbb{Z}$ -SFTs de este tipo inspirados en [AKM85, KLP03], junto con construir una extensión de Krieger adecuada en este contexto para  $G$ -subshifts sóficos. El tercer capítulo estudia una noción de transitividad adecuada para estos sistemas y muestra que poseen una única medida de entropía máxima. El cuarto capítulo generaliza al grupo diédrico infinito un teorema de B. Marcus [Mar79], que afirma que los  $\mathbb{Z}$ -SFTs con entropía  $\geq \log N$  son extensiones del full-shift en  $N$  símbolos. En el quinto capítulo se estudian las funciones zeta de sistemas con una acción de  $T \times \mathbb{Z}$  donde  $T$  es un grupo finito, y se calculan las funciones zeta de  $T \times \mathbb{Z}$ -subshifts de tipo finito y sóficos. También se prueba una versión de la fórmula de producto para sistemas con una acción de  $T \times \mathbb{Z}$  donde  $T$  es abeliano.

Se incluye también un apéndice que define una noción de splittings y amalgamaciones en subshifts sobre grupos finitamente generados arbitrarios. En este contexto se prueba una versión general del teorema de Williams, y se entrega un formalismo matricial inspirado en [Sch08] que describe este proceso en  $G$ -SFTs de tipo nearest-neighbour.

*A Vicente. De tu corazón abierto brota la primavera.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer primero a mis padres Macarena y Horacio por darme la oportunidad de estudiar y por apoyarme en mis proyectos personales y académicos, a mis herman@s Trinidad y Diego por acompañarme en todas las circunstancias, y a Rayén por el amor que no se marchita. Ustedes fueron fundamentales para superar la pandemia.

Atesoro profundamente la amistad de Ignacio, Raimundo, Borja y Vicente. Me asombra y me emociona compartir mi vida con ustedes. La amistad improbable de Eugenio y Claudia también es un regalo que agradezco todos los días.

Agradezco a mis compañeros de carrera por la amistad, la buena onda y el interés compartido en las matemáticas: Ignacio, Foli, Fulapa, Francisco de las Mercedes, Juanco, Vicho y Cami. Estudiar a su lado estos años ha sido profundamente estimulante. También agradezco a varios estudiantes de otras generaciones que me han ayudado al responder dudas de cualquier tipo o simplemente conversando: a Álvaro, Basti, Camilo y Edo, gracias.

Agradezco haber encontrado a lo largo de mis estudios a profesores que me formaron de una manera u otra: Miguel Ángel Jiménez, Luis Orlandini, Jorge Díaz, Jaime San Martín, Cristián Reyes, Michael Schraudner, Sebastián Donoso, Alejandro Maass y Martín Matamala.

Agradezco a Michael Schraudner y Sebastián Donoso por haber dirigido la primera y segunda parte de esta tesis respectivamente. Muchas gracias por compartir sus intuiciones conmigo. Agradezco también a los profesores que aceptaron ser parte de la comisión: a Sebastián Barbieri y Alejandro Maass, gracias.

Finalmente, agradezco a Natacha Astromujoff y Sebastián Donoso (de nuevo) por sus consejos y paleteadas administrativas, junto con el apoyo de Óscar Mori, Eterin Jaña y Gladys Cavallone.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Presentaciones y productos de grupos . . . . .	4
1.2 Grafos de Cayley . . . . .	7
1.3 Grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . . . . .	11
1.4 Dinámica simbólica sobre grupos . . . . .	16
1.5 Entropía en grupos amenables . . . . .	20
1.6 Splittings y amalgamaciones en $\mathbb{Z}$ -SFTs . . . . .	23
<b>2 <math>G</math>-subshifts como <math>\mathbb{Z}</math>-subshifts</b>	<b>25</b>
2.1 Acciones 1-bloque . . . . .	25
2.2 Recodificación como $\mathbb{Z}$ -subshifts . . . . .	30
2.3 Extensiones de Krieger . . . . .	37
<b>3 Mezcla y la medida de entropía máxima</b>	<b>43</b>
3.1 Resultados previos . . . . .	43
3.2 Hipótesis de mezcla . . . . .	44
3.3 La medida de entropía máxima . . . . .	49
<b>4 Extensiones de full-shifts sobre <math>D_\infty</math></b>	<b>53</b>
4.1 Resultados previos . . . . .	53
4.2 Teorema principal . . . . .	54
<b>5 Funciones zeta sobre <math>T \times \mathbb{Z}</math></b>	<b>63</b>
5.1 Resultados previos . . . . .	63
5.2 Funciones zeta de full-shifts . . . . .	66
5.3 Fórmulas de producto . . . . .	70
5.4 Funciones zeta de SFTs . . . . .	72
5.5 Funciones zeta de sóficos . . . . .	76
<b>Conclusión</b>	<b>82</b>
<b>A Splittings y amalgamaciones en <math>G</math>-subshifts</b>	<b>84</b>
A.1 Resultados previos . . . . .	84
A.2 Descomposición de conjugaciones . . . . .	86
A.3 Formalismo matricial para $G$ -NNSFTs . . . . .	92
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# Introducción

La dinámica simbólica es una subárea de la disciplina matemática de los sistemas dinámicos. En resumidas cuentas, su principal objeto de estudio consiste en acciones expansivas  $G \curvearrowright^\sigma X$  de un grupo finitamente generado  $G$  en un espacio métrico compacto y totalmente disconexo  $X$ . Estas acciones corresponden exactamente a los  $G$ -subshifts, es decir a los sistemas  $G \curvearrowright^\sigma X \subseteq \mathcal{A}^G$  donde  $\mathcal{A}$  es un conjunto finito,  $\sigma: G \rightarrow \text{Homeo}(\mathcal{A}^G, \mathcal{A}^G)$  es la acción de shift definida por

$$\sigma_h((x_g)_{g \in G}) = (x_{h^{-1}g})_{g \in G} \text{ para todo } h \in G$$

y  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es un subconjunto  $\sigma$ -invariante y cerrado para la topología prodiscreta de  $\mathcal{A}^G$ .

Esta área surge como una herramienta potente en la dinámica topológica “tradicional”, que estudia sistemas  $(X, T)$  donde  $X$  es un espacio métrico compacto y  $T: X \rightarrow X$  es un homeomorfismo que determina una acción de  $\mathbb{Z}$  en  $X$ . A cualquier partición finita  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  de  $X$  se puede asociar un  $\mathbb{Z}$ -subshift  $X_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  donde  $x' \in X_{\mathcal{P}}$  ssi existe un  $x \in X$  tal que  $T^i x \in \mathcal{P}_{x'_i}$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Esto significa que  $X_{\mathcal{P}}$  está compuesto por la codificación de las órbitas de  $(X, T)$  vistas desde la resolución de la partición  $\mathcal{P}$ , y dependiendo de  $\mathcal{P}$  las propiedades del sistema  $(X, T)$  se reflejan en las de  $(X_{\mathcal{P}}, \sigma)$ . La Figura 1 muestra un esquema de este procedimiento.

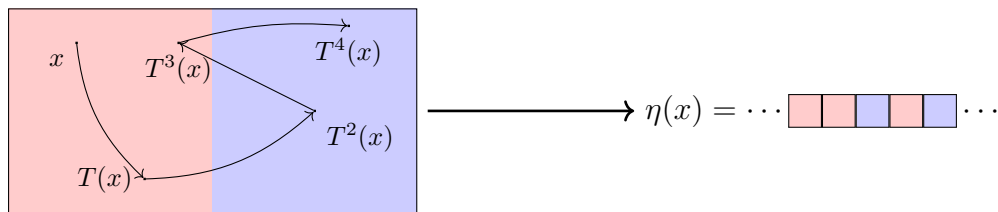


Figura 1: Codificación de la órbita de un punto  $x \in X$  como una secuencia  $\eta(x) \in \{\text{red}, \text{blue}\}^{\mathbb{Z}}$ .

Dentro de la enorme variedad de subsistemas  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , la clase de subshifts determinados por un conjunto finito de palabras prohibidas, llamados  $\mathbb{Z}$ -subshifts de tipo finito o  $\mathbb{Z}$ -SFTs, es importante por dos razones: primero, muchos sistemas caóticos en algún sentido admiten particiones que lo codifican como un  $\mathbb{Z}$ -subshift de este tipo [KH95]. Segundo, muchas preguntas sobre esta clase de  $\mathbb{Z}$ -subshifts se pueden resolver directamente con la ayuda de herramientas básicas de álgebra lineal, teoría de grafos y teoría de la información [LM95, Kit98]. Otra clase destacada (por motivos similares) de  $\mathbb{Z}$ -subshifts son los  $\mathbb{Z}$ -sóficos, que consisten en imágenes de  $\mathbb{Z}$ -SFTs por funciones que dependen de una ventana de información finita.

Pese a que nacen como herramientas para estudiar  $\mathbb{Z}$ -sistemas provenientes de la teoría clásica de sistemas dinámicos, estas definiciones y construcciones hacen sentido para acciones de grupos numerables arbitrarios. En las últimas dos décadas se ha suscitado un interés considerable en esta dirección [Pia08, HM10, Coh14, CSC10]. Sin embargo, ya para acciones de  $\mathbb{Z}^2$  muchas preguntas sobre  $\mathbb{Z}^2$ -SFTs que son fáciles de responder para  $\mathbb{Z}$ -SFTs se vuelven extremadamente complicadas, y la gama de comportamientos se amplía considerablemente. La posibilidad de simular una máquina de Turing prohibiendo finitos patrones en una coloración de  $\mathbb{Z}^2$  implica que la teoría de  $\mathbb{Z}^d$ -SFTs,  $d \geq 2$ , está firmemente ligada a la teoría de la computabilidad. Un ejemplo espectacular de este fenómeno es la caracterización, por Hochman y Meyerovitch [HM10], de los reales que se pueden realizar como entropías de  $\mathbb{Z}^2$ -SFTs. Estos resultan ser una clase definida por condiciones de computabilidad, mientras que la clase correspondiente en  $\mathbb{Z}$  está caracterizada por restricciones algebraicas [Lin84].

Este comportamiento no es exclusivo a  $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$ : por ejemplo, en [BS19] se exploran otras clases de grupos finitamente generados cuyos SFTs exhiben características ajenas a la teoría unidimensional. Una manera (muy vaga) de explicar este fenómeno es pensar que la geometría de estos grupos, es decir, la geometría de sus grafos de Cayley, es similar a la de  $\mathbb{Z}^2$  en el sentido que ambas contienen suficiente “espacio” para albergar el historial de computaciones de una máquina de Turing. Esta heurística no es completamente absurda: la dinámica simbólica de los SFTs sobre grupos libres, cuyos grafos de Cayley son esencialmente árboles, parece ser más cercana a la teoría unidimensional que a la teoría multidimensional [Pia08].

El propósito de esta tesis es dar algún fundamento al principio que afirma que la geometría de un grupo tiene una influencia decisiva en la dinámica simbólica de sus SFTs. Para ello estudiamos SFTs sobre grupos cuya geometría a gran escala es la de  $\mathbb{Z}$ , es decir, una recta. Esta condición geométrica se traduce en una condición algebraica, debida a Freudenthal y Hopf, que afirma que esta clase de grupos coincide con los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  (aquellos que contienen un subgrupo de índice finito isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ). Un resultado adicional de Epstein y Wall entrega una clasificación algebraica muy explícita para grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ , que los describe como extensiones finitas de  $\mathbb{Z}$  o del diédrico infinito  $D_\infty$  y que nos permite recodificar sus subshifts como  $\mathbb{Z}$ -subshifts dotados de un grupo finito de homeomorfismos. Este procedimiento propicia la generalización de varios teoremas clásicos para  $\mathbb{Z}$ -SFTs y  $\mathbb{Z}$ -sóficos a este contexto, y unifica el estudio previo de algunas clases de  $\mathbb{Z}$ -subshifts dotados de acciones ligeramente más sofisticadas que el shift a la derecha [LPS06, KR13, KLP03, AKM85, BRY16].

La tesis está estructurada en cinco capítulos y un apéndice.

- En el primer capítulo se entregan las definiciones y el contexto necesario para leer el resto de la tesis. Exponemos algunas construcciones elementales en teoría de grupos y dinámica simbólica sobre grupos finitamente generados, junto con detallar propiedades útiles de los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  y algunos resultados en dinámica simbólica sobre  $\mathbb{Z}$ .
- El segundo capítulo describe el proceso de recodificación de  $G$ -subshifts a  $\mathbb{Z}$ -subshifts, donde  $G$  es un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ . También se entrega un procedimiento inverso, que construye un  $G$ -subshift a partir de una acción adecuada en un  $\mathbb{Z}$ -subshift. Esta

correspondencia permite representar  $G$ -SFTs como  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices dotados de una acción de un grupo finito por homeomorfismos determinados a partir de una acción del grupo en un grafo. Una adaptación de la extensión de Krieger [Kri84] de un  $\mathbb{Z}$ -sófico permite construir extensiones  $G$ -SFTs de  $G$ -sóficos con la misma entropía.

- El tercer capítulo propone una generalización leve de la noción de positiva transitividad a acciones de grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  y prueba que la densidad de puntos fuertemente periódicos y la unicidad de la medida de entropía máxima se satisfacen en este contexto.
- El cuarto capítulo estudia el problema de construir factores desde un  $G$ -SFT  $X$  al full- $N$ -shift sobre  $G$  cuando  $X$  tiene entropía no menor a  $\log N$ . Se generaliza un teorema clásico de B. Marcus [Mar79] a  $D_\infty$ -SFTs, y se indica el camino a una generalización para grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  generales.
- En el quinto capítulo se generalizan las fórmulas clásicas de funciones zeta para  $\mathbb{Z}$ -SFTs y  $\mathbb{Z}$ -sóficos a  $T \times \mathbb{Z}$ -SFTs y  $T \times \mathbb{Z}$ -sóficos para cualquier grupo finito  $T$ . Se entrega además una fórmula de producto para las funciones zeta de  $T \times \mathbb{Z}$ -sistemas donde  $T$  es abeliano.
- El apéndice desarrolla un formalismo de splittings y amalgamaciones para subshifts sobre grupos finitamente generados arbitrarios. El resultado principal es un teorema de descomposición de Williams para este contexto. También se expone un formalismo matricial para splittings y amalgamaciones de SFTs de tipo nearest-neighbour inspirado en [Sch08], que resulta ser adecuado cuando el grafo de Cayley del grupo es un árbol (en particular, para cierta presentación de  $D_\infty$ ).



# Capítulo 1

## Preliminares

El propósito de este capítulo es entregar el contexto que motiva esta tesis. Se asume que el lector tiene nociones básicas de teoría de grupos, de topología de espacios métricos compactos y de teoría de la medida.

En la primera sección se define el grupo libre con el objetivo de construir productos amalgamados, y se entrega una definición del producto semidirecto a partir de primeros principios. Esto es necesario para describir la clase de grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . En la segunda sección se entrega el vocabulario básico de teoría de grafos y la definición del grafo de Cayley de un grupo finitamente generado. Después de algunos ejemplos representativos de grafos de Cayley se define el número de ends de un grupo. Esta noción junto con el Teorema de Freudenthal-Hopf pone en relevancia la clase de grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ .

La tercera sección está dedicada a describir una caracterización de los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ , junto con algunas de sus propiedades elementales. La notación definida en esta sección será utilizada consistentemente en los capítulos posteriores. La cuarta sección entrega las nociones básicas de dinámica simbólica sobre grupos. En la quinta sección se define la clase de grupos amenables, se construyen secuencias de Følner explícitas para grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  y se introduce las nociones de entropía amenable, en sus versiones topológica y medible. La sexta sección repasa brevemente el formalismo de splittings y amalgamaciones en  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices.

Aparte de la última sección de este capítulo, no repasaremos en detalle las propiedades específicas a  $\mathbb{Z}$ -SFTs puesto que las iremos introduciendo en el resto del texto a medida que las vayamos generalizando a nuestro contexto.

### 1.1. Presentaciones y productos de grupos

Partiremos recordando algunas definiciones y construcciones fundamentales en teoría de grupos. Siempre denotaremos el neutro de un grupo por  $e$ .

**Definición 1.1** *Sea  $G$  un grupo y  $S \subseteq G$ .*

Definimos  $\langle S \rangle \leq G$ , el **subgrupo generado por  $S$** , como el subgrupo de  $G$  más pequeño que contiene a  $S$ . Equivalentemente,  $\langle S \rangle$  queda definido por

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subseteq H \leq G} H = \{s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ y } \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}.$$

Diremos que  $S$  **genera** a  $G$  o que  $S$  es un **generador** de  $G$  si  $\langle S \rangle = G$ , y que  $G$  es un grupo **finitamente generado** si  $G$  admite un generador finito.

Definiremos a continuación una noción central en teoría de grupos. La idea es, dado un conjunto  $S$  cualquiera, definir un grupo  $F(S)$  generado por  $S$  donde los elementos de  $S$  sean tan independientes entre sí como sea posible.

Primero necesitamos fijar la notación de palabras en  $S$ . Sea  $S$  un conjunto no vacío y sea  $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$  el conjunto de inversos formales de  $S$ . El **monoide de palabras sobre  $S$**  es el conjunto

$$W(S) = (S \cup S^{-1})^* = \{s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ y } \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\},$$

equipado de la operación de concatenación de palabras. El **largo** de una palabra  $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in W(S)$  es el entero  $n \in \mathbb{N}$ . La relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $W(S)$  se define como  $w \sim v$  ssi  $w$  se obtiene de  $v$  eliminando o agregando pares de símbolos de la forma  $ss^{-1}$  o  $s^{-1}s$  con  $s \in S$ . Decimos que una palabra  $w \in W(S)$  es **reducida** si tiene largo minimal en su clase de equivalencia  $[w]_{\sim}$ .

**Definición 1.2** Sea  $S$  un conjunto. El **grupo libre**  $F(S)$  con generador  $S$  es el grupo con conjunto subyacente  $W(S)/\sim$  y operación  $[w]_{\sim}[v]_{\sim} = [wv]_{\sim}$  para cada  $w, v \in F(S)$ . Diremos que  $|S|$  es el **rango** de  $F(S)$ , y si  $|S| = n \in \mathbb{N}_+$  es finito escribiremos  $F_n = F(S)$ .

Los elementos de  $F(S)$  normalmente se escriben como  $w$  y no  $[w]_{\sim}$ . Este grupo queda caracterizado por la siguiente propiedad universal (que es directa para  $F_1 \cong \mathbb{Z}$ ), que además muestra que los grupos libres están clasificados por su rango.

**Proposición 1.3** (ver [Hal59]) Sean  $S$  un conjunto,  $F(S)$  el grupo libre generado por  $S$  y  $\iota: S \rightarrow F(S)$  la inclusión canónica. Para cada grupo  $G$  y función  $\theta: S \rightarrow G$ , existe un único morfismo de grupos  $\hat{\theta}: F(S) \rightarrow G$  tal que  $\hat{\theta} \circ \iota = \theta$ .

En particular, si  $G$  es un grupo generado por  $S \subseteq G$ , la inclusión  $\iota: S \rightarrow F(S)$  se extiende a un morfismo de grupos  $\hat{\iota}: F(S) \rightarrow G$  que es sobreyectivo pues  $S \subseteq \hat{\iota}(F(S))$ . El primer teorema de isomorfismo implica entonces que existe un subgrupo normal  $N = \text{Ker}(\hat{\iota}) \trianglelefteq F(S)$  tal que  $F(S)/N$  es isomorfo a  $G$ .

**Definición 1.4** Sea  $G$  un grupo, y sean  $S \subseteq G$  un generador de  $G$  y  $R \subseteq F(S)$ .

Decimos que  $\langle S \mid R \rangle$  es una **presentación** de  $G$  (o que  $G = \langle S \mid R \rangle$ ) si  $G$  es isomorfo a  $F(S)/\langle R \rangle_{\trianglelefteq}$  donde

$$\langle R \rangle_{\trianglelefteq} = \bigcap_{R \subseteq H \trianglelefteq F(S)} H = \{(g_1 r_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1})(g_2 r_2^{\varepsilon_2} g_2^{-1}) \cdots (g_n r_n^{\varepsilon_n} g_n^{-1}) \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, g_i \in F(S) \\ \text{y } \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\}.$$

es la **clausura normal** de  $R$ , es decir, el subgrupo normal de  $F(S)$  más pequeño que incluye a  $R$ . Los elementos de  $R$  se llaman las **relaciones** de  $G$ .

Diremos que  $G$  es **finitamente presentado** si existen  $S \subseteq G$ ,  $R \subseteq F(S)$  finitos tales que  $G = \langle S \mid R \rangle$ .

Notemos que si  $G = \langle S \mid R \rangle$ , entonces todas las relaciones no triviales (en el sentido de que no se cumplen en cualquier grupo con generador  $S$ ) que se tienen entre elementos de  $S$  en  $G$  son consecuencia de las relaciones en  $R$ . Esto permite construir nuevos grupos con propiedades deseables a partir de otros grupos. Sin embargo, el problema de deducir las propiedades de un grupo a partir de sus presentaciones es muy difícil en general.

**Ejemplo 1.5** 1. Todo grupo  $G$  tiene una presentación (usualmente excesiva)  $G = \langle G \mid N \rangle$  donde  $N \trianglelefteq F(G)$  es tal que  $F(G)/N \cong G$ , pero normalmente interesan aquellas presentaciones donde los generadores y relaciones sean lo más pequeños posible.

2. Todo grupo finito  $K$  es finitamente presentado: basta tomar como generador a todo  $K$  y como relaciones la tabla completa de multiplicación de  $K$  dada por

$$\{k_1 k_2 (k_3)^{-1} \mid k_i \in K, k_1 k_2 = k_3\}.$$

3. Para cualquier conjunto  $S$ , el grupo libre  $F(S)$  tiene presentación  $F(S) = \langle S \mid \emptyset \rangle$ .

Ahora definiremos los dos tipos de producto de grupos que permiten describir los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . El primero es el producto amalgamado, que permite “pegar” dos grupos por un subgrupo común.

**Definición 1.6** Sean  $G_1, G_2, T$  grupos con presentaciones  $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$  y  $\alpha_1: T \rightarrow G_1$ ,  $\alpha_2: T \rightarrow G_2$  morfismos inyectivos. El **producto amalgamado** de  $G_1$  y  $G_2$  por  $T$  es el grupo

$$G_1 *_T G_2 = \langle G_1 \cup G_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{\alpha_1(t)\alpha_2(t)^{-1}\}_{t \in T} \rangle.$$

Si  $T = \{e\}$  es trivial diremos que  $G_1 *_T G_2$  es el **producto libre** de  $G_1$  y  $G_2$ , y lo denotaremos por  $G_1 * G_2$ .

Una propiedad universal del producto amalgamado, similar a la Proposición 1.3, muestra que la clase de isomorfismo del producto amalgamado de dos grupos no depende de las presentaciones de éstos que se escojan. Normalmente identificaremos a  $G_1, G_2, T$  con sus copias isomorfas en  $G_1 *_T G_2$ .

**Proposición 1.7** (ver [Bus16]) Sean  $G_1, G_2$  grupos y  $T \leq G_1, G_2$  un subgrupo común.

El subgrupo  $T \leq G_1 *_T G_2$  es normal ssi  $T$  es normal en  $G$  y  $H$ . En tal caso,

$$(G_1 *_T G_2)/T \cong (G_1/T) * (G_2/T)$$

y cada elemento  $g \in G_1 *_T G_2$  se escribe de manera única como  $g = th_1 h_2 \cdots h_n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$  y la secuencia de  $h_i$  alterna entre  $G_1 \setminus T$  y  $G_2 \setminus T$ .

La segunda clase de productos es el producto semidirecto, que corresponde a una generalización del producto directo donde uno de los componentes actúa sobre el otro.

**Definición 1.8** Sean  $G, H$  grupos y sea  $\Psi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$  un morfismo de grupos. El **producto semidirecto**  $G \rtimes_{\Psi} H$  es el grupo cuyo conjunto subyacente es también  $G \times H$  y cuya multiplicación es

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\Psi(h_1)(g_2), h_1h_2) \text{ para cada } g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H. \quad (1.1)$$

Alternativamente, si  $G, H$  son grupos con presentaciones  $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ ,  $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ , podemos definir el producto semidirecto  $G \rtimes_{\Psi} H$  como

$$G \rtimes_{\Psi} H = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{s_2^{-1}s_1s_2(\Psi(s_2)(s_1))^{-1}\}_{s_1 \in S_1, s_2 \in S_2} \rangle.$$

En la definición anterior,  $\Psi$  es el morfismo trivial ssi la multiplicación en el producto directo  $G \times H$  y en el semidirecto  $G \rtimes_{\Psi} H$  coinciden. La siguiente proposición explica por qué es natural esta definición.

**Proposición 1.9** (ver [Hal59]) Sea  $G$  un grupo que posee subgrupos  $T \trianglelefteq G$ ,  $H \leq G$  tales que  $TH = G$  y  $T \cap H = \{e\}$ . Entonces  $G \cong T \rtimes_{\Psi} H$ , donde  $\Psi: H \rightarrow \text{Aut}(T)$  envía cada  $h \in H$  a la **conjugación** ( $\Psi_h: t \in T \mapsto hth^{-1} \in T$ ). El morfismo  $\Psi$  es trivial ssi  $H \trianglelefteq G$ .

Recíprocamente, en un producto semidirecto  $G = T \rtimes_{\Psi} H$  el subgrupo  $T \times \{e\}$  es normal en  $G$ , y se tienen las condiciones  $(T \times \{e\})(\{e\} \times H) = G$  y  $(T \times \{e\}) \cap (\{e\} \times H) = \{e\}$ .

Si  $G$  es un grupo y  $\Psi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(G)$ , entonces  $\Psi$  queda determinada por  $\psi = \Psi(1) \in \text{Aut}(G)$ . Luego escribiremos  $G \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  en lugar de  $G \rtimes_{\Psi} \mathbb{Z}$  por comodidad.

El ejemplo a continuación es fundamental. Es representativo de una clase de grupos **virtualmente- $\mathbb{Z}$ , es decir, grupos que contienen un subgrupo de índice finito isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .**

**Ejemplo 1.10** Definimos el **grupo diédrico infinito**  $D_{\infty}$  como  $\mathbb{Z} \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  donde  $\psi(m) = -m$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ . Identificando los símbolos  $r, s$  con  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  se puede probar que

$$D_{\infty} = \langle s, r \mid s^2, srsr \rangle = \{r^n, r^n s \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Otra presentación natural de  $D_{\infty}$  es como el producto libre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : si  $a = s, b = rs$  entonces

$$D_{\infty} = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle = \{(ab)^n, (ab)^n s \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Un modelo geométrico para  $D_{\infty}$  es el grupo de isometrías de los enteros, y el isomorfismo entre ambos grupos viene dado por

$$t \mapsto \text{traslación en } +1 \quad \text{y} \quad s \mapsto \text{reflexión en torno al origen.}$$

## 1.2. Grafos de Cayley

En esta sección y las siguientes,  $G$  será un grupo finitamente generado. La construcción que nos interesa asocia a cada conjunto generador  $S$  de  $G$  un grafo infinito sobre el que  $G$

actúa de manera canónica por isometrías. Dado que muchos grupos interesantes surgen como grupos de simetría de objetos geométricos, es interesante notar que uno puede asociar un objeto geométrico a un grupo finitamente generado (junto con un generador) que refleje las propiedades del grupo.

Antes de la definición principal fijamos el vocabulario de teoría de grafos que usaremos.

**Definición 1.11** *Un grafo dirigido  $\Gamma$  es una tupla  $(V, E, \iota, \tau)$  donde  $V$  y  $E$  son conjuntos numerables cuyos elementos se llaman **vértices** y **aristas** respectivamente, y  $\iota: E \rightarrow V, \tau: E \rightarrow V$  son funciones que a cada arista asocian su **vértice inicial** y **terminal** respectivamente. Para todo  $e \in E$  los vértices  $\iota(e), \tau(e)$  se dicen **adyacentes**.*

*Un grafo dirigido y etiquetado  $\Gamma$  es una tupla  $(V, E, \iota, \tau, \lambda)$  donde  $(V, E, \iota, \tau)$  es un grafo dirigido y  $\lambda: E \rightarrow \mathcal{A}$ , la **función de etiquetado**, es una función de las aristas a un conjunto finito  $\mathcal{A}$  de etiquetas.*

Sea  $\Gamma = (V, E, \iota, \tau)$  un grafo. Diremos que  $\Gamma$  es **simple** si no hay aristas múltiples entre vértices (es decir,  $\iota \times \tau: E \rightarrow V \times V$  es inyectiva). En tal caso,  $\Gamma$  se puede recuperar a partir de su **matriz de adyacencia**  $\Gamma(B) \in M_{V,V}(\{0, 1\})$  definida por

$$\Gamma(B) = (\mathbf{1}_{u,v \text{ son adyacentes}})_{u,v \in V}.$$

Un **camino dirigido de largo**  $n \in \mathbb{N}_+$  en  $\Gamma$  es una secuencia de aristas  $e_1 \cdots e_n$  tal que  $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$  para cada  $1 \leq i \leq n-1$ . Un **camino no dirigido** es un camino dirigido en el grafo  $\Gamma_0$  obtenido al ignorar la orientación de las aristas en  $\Gamma$ . Un **ciclo** es un camino dirigido  $e_1 \cdots e_n$  tal que  $\iota(e_1) = \tau(e_n)$ . El grafo  $\Gamma$  se dirá **fuertemente** (resp. **débilmente**) **conexo** si existe un camino dirigido (resp. no dirigido) entre cada par de vértices de  $V$ . Un **subgrafo** de  $\Gamma$  es un grafo  $\Gamma' = (V', E', \iota', \tau')$  donde  $V' \subseteq V, E' \subseteq E, \iota' = \iota|_{E'}, \tau' = \tau|_{E'}$  y  $\tau'(E'), \iota'(E') \subseteq V'$ . El subgrafo  $\Gamma'$  se dice **inducido por**  $V'$  si  $E' = \{e \in E \mid \iota(e), \tau(e) \in V'\}$ . Una **componente irreducible**  $C \subseteq V$  de  $\Gamma$  es un conjunto de vértices que inducen un subgrafo fuertemente conexo maximal en  $\Gamma$ .

Esta notación permite definir el grafo de Cayley de un grupo  $G$  con respecto a un generador finito. Este es un refinamiento importante del teorema clásico de Cayley que realiza a cada grupo como un subgrupo de un grupo de permutaciones.

**Definición 1.12** *Sea  $S \subset G \setminus \{e\}$  un conjunto generador finito de  $G$ . Definimos el **grafo de Cayley derecho**  $\mathcal{G}_{G,S}$  de  $G$  con respecto a  $S$  como el grafo dirigido y etiquetado simple  $(V, E, \iota, \tau, \lambda)$  cuyo conjunto de vértices  $V$  es  $G$ , cuyas aristas  $E$  son  $\{(g, gs)\}_{s \in S, g \in G}$  y donde los vértices iniciales, vértices finales y el etiquetado se definen por*

$$\iota((g, gs)) = g, \quad \tau((g, gs)) = gs, \quad \lambda((g, gs)) = s$$

*respectivamente para cada  $g \in G, s \in S$ .*

El grafo  $\mathcal{G}_{G,S}$  siempre es débilmente conexo, y la distancia  $d_S$  que entrega el largo mínimo de un camino no dirigido entre dos vértices de  $\mathcal{G}_{G,S}$  metriza la topología discreta en  $\mathcal{G}_{G,S}$ . La **acción regular por la izquierda**  $G \curvearrowright^\alpha \mathcal{G}_{G,S}$  definida por  $\alpha_g: h \in G \mapsto g^{-1}h \in G$  actúa por  $d_S$ -isometrías que además preservan la adyacencia entre vértices y las etiquetas de las

aristas. Escribiremos  $B_S(g, n) = \{h \in G \mid d_S(g, h) \leq n\}$  como la bola de centro  $g \in G$  y radio  $n \in \mathbb{N}$ .

Notemos que  $d_S$  también se puede escribir de la forma

$$d_S(g, h) = d_S(e, g^{-1}h) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existen } s_1, s_2, \dots, s_n \in S \cup S^{-1} \text{ con } s_1 \cdots s_n = g^{-1}h\},$$

y por eso  $d_S$  a veces se llama la **métrica de palabras en  $G$**  con respecto a  $S$ .

**Ejemplo 1.13** Las Figuras 1.1, 1.3, 1.2 y 1.4 muestran los grafos de Cayley de distintos grupos infinitos. En lugar de dibujar dos veces las aristas asociadas a generadores de orden 2 se acostumbra dibujarlas sin dirección.

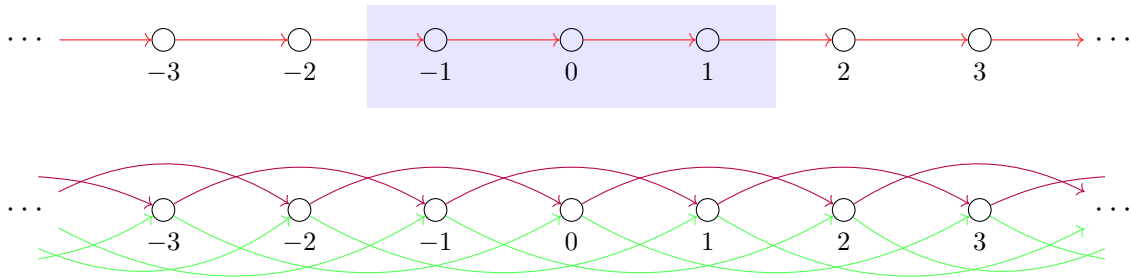


Figura 1.1: Fragmento del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$  con generadores  $\{1\}$  (arriba) y  $\{2, 3\}$  (abajo). Las aristas rojas, púrpuras y verdes corresponden a los generadores 1, 2 y 3 respectivamente. Notemos que remover el conjunto de vértices con fondo azul desconecta ambos grafos.

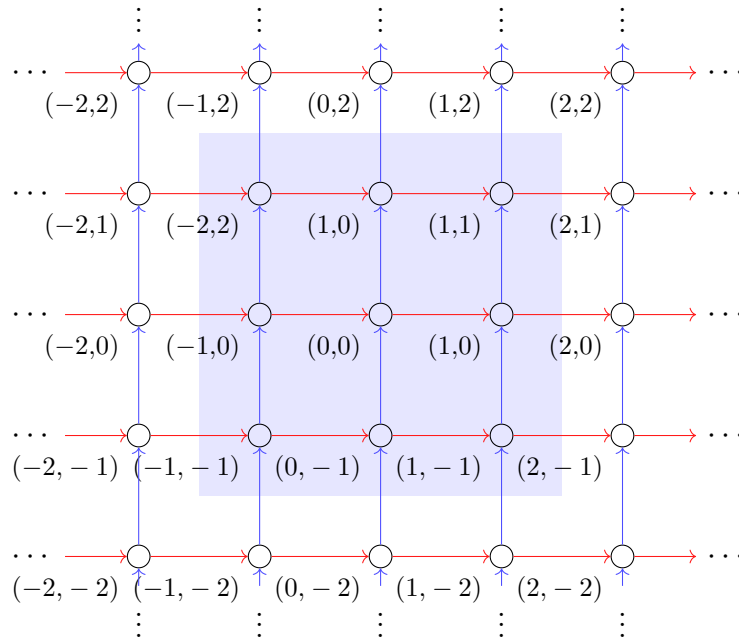


Figura 1.2: Fragmento del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con generador  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ . Las aristas rojas y azules corresponden a los generadores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente. Notemos que remover el conjunto de vértices con fondo azul no desconecta el grafo.

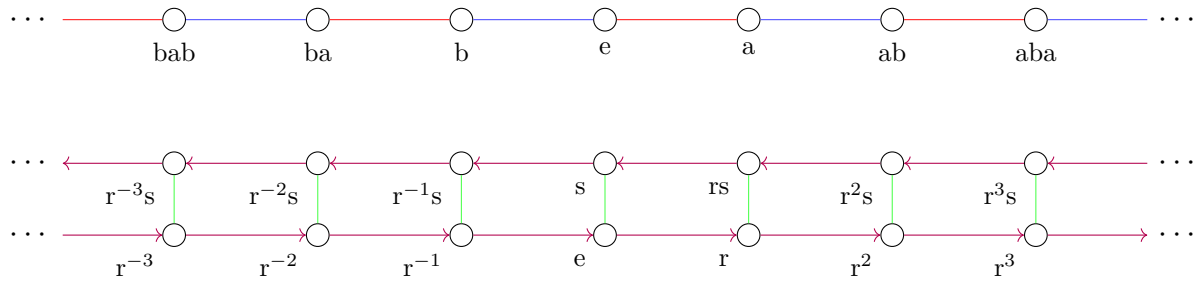


Figura 1.3: Fragmento del grafo de Cayley de  $D_\infty$  con generadores  $\{a, b\}$  (arriba) y  $\{r, s\}$  (abajo). Las aristas rojas, azules, verdes y púrpuras corresponden a los generadores  $a, b, s$  y  $r$  respectivamente.

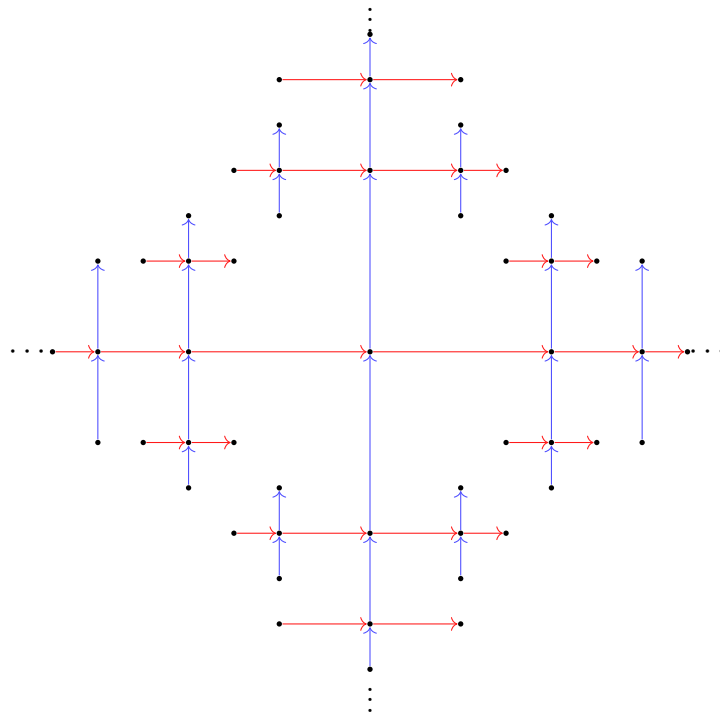


Figura 1.4: Fragmento del grafo de Cayley de  $F_2 = \langle a, b \rangle$  con respecto a  $\{a, b\}$ . Las aristas rojas y azules corresponden a los generadores  $a$  y  $b$  respectivamente. La etiqueta de un vértice  $w \in F_2$  se obtiene concatenando las etiquetas de las aristas en el camino de  $w$  a  $e$  en el centro del grafo.

La definición y el aspecto de  $\mathcal{G}_{G,S}$  dependen del generador  $S$  de  $G$ . Sin embargo, hay una cierta geometría gruesa o a gran escala que se preserva al cambiar el generador  $S$  de  $G$  y estudiar las propiedades de  $\mathcal{G}_{G,S}$  (ver [DK18]). No ahondaremos en esta dirección, pero basta saber que la siguiente propiedad de un grafo de Cayley no depende del generador  $S$  del grupo. Esta cuantifica el número de trozos en los que se descompone el grafo al extraer bolas suficientemente grandes.

**Definición 1.14** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S \subset G$  un generador finito. Para

cada  $r \in \mathbb{R}^+$ , definimos  $C(r) \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$  como el número de componentes conexas del subgrafo de  $\mathcal{G}_{G,S}$  inducido por  $G \setminus B_S(e, r)$ .

El **número de ends** de  $G$  es el entero  $\text{ends}(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) \in \mathbb{N} \cup \infty$ .

Como está implícito en la definición, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n)$  siempre existe. Es claro que si  $T$  es un grupo finito entonces  $\text{ends}(T) = 0$ . Por otro lado, las Figuras 1.1, 1.2 y 1.4 permiten encontrar visualmente el número de ends de estos grupos representativos. Vemos que  $\text{ends}(F_2) = \infty$  y

$$\text{ends}(\mathbb{Z}^d) = \begin{cases} 2 & \text{si } d = 1 \\ 1 & \text{si } d \geq 2. \end{cases}$$

El siguiente teorema muestra que estas son todas las opciones.

**Teorema 1.15** (Freudenthal-Hopf, ver [DK18]) *Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Entonces  $\text{ends}(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$  y además*

1.  $\text{ends}(G) = 0$  ssi  $G$  es finito, y
2.  $\text{ends}(G) = 2$  ssi  $G$  es virtualmente- $\mathbb{Z}$ .

### 1.3. Grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$

El Teorema 1.15 muestra que los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  se caracterizan por una condición geométrica, mientras que el siguiente resultado de Epstein y Wall los realiza como extensiones de  $\mathbb{Z}$  o  $D_\infty$  por un grupo finito. Esta clasificación, que sigue de consideraciones puramente algebraicas, es fundamental para lo que sigue.

**Teorema 1.16** (Epstein-Wall, ver [LGG13]) *Sea  $G$  un grupo numerable. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1.  $G$  es virtualmente- $\mathbb{Z}$ , es decir existe un subgrupo  $H \leq G$  de índice finito e isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .
2.  $G$  contiene un subgrupo normal finito  $T$  tal que  $G/T$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  o a  $D_\infty$ , es decir  $G$  es una extensión de  $\mathbb{Z}$  o  $D_\infty$  por un grupo finito  $T$ .
3.  $G$  es isomorfo a un grupo de la forma
  - (a)  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  donde  $T$  es un grupo finito y  $\psi \in \text{Aut}(T)$ , o
  - (b)  $G_1 *_T G_2$  donde  $G_1, G_2$  y  $T$  son grupos finitos con  $[G_1 : T] = [G_2 : T] = 2$ .

Los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  de la forma  $G = T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  descrita en el ítem (3.a) del teorema anterior se llaman **grupos de tipo I**, y los grupos  $G = G_1 *_T G_2$  del ítem (3.a) se llaman **grupos de tipo II**. Estas clases son excluyentes: para verlo basta notar que en los grupos de



tipo II existen pares de elementos  $g_1, g_2 \in G$  de orden finito tal que  $g_1 g_2$  tiene orden infinito, y esta situación no puede ocurrir en los grupos de tipo I (ver la Proposición 1.21).

Supongamos ahora que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II y que  $g_1 \in G_1 \setminus T, g_2 \in G_2 \setminus T$ . Ambos elementos tienen orden par, y reemplazando cada  $g_i$  por una potencia adecuada podemos asumir que  $g_1^2 = g_2^2 = e$ . Como  $T$  es normal en cada  $G_1, G_2$  pues tiene índice 2, tenemos que las conjugaciones por  $g_1, g_2$  inducen automorfismos  $\psi_{g_1}, \psi_{g_2}: T \rightarrow T$  de orden 2. Notando que  $T \cup \{g_i\}$  genera  $G_i$  y  $T \trianglelefteq G_i$ , la Proposición 1.9 implica que

$$G_i \cong T \rtimes_{\psi_{g_i}} \langle g_i \rangle \cong T \rtimes_{\psi_{g_i}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

para  $i = 1, 2$ . En general  $G_1 \not\cong G_2$  (ver la Proposición 1.22).

Los elementos  $g_1, g_2$  cumplen el rol de que cumplen los generadores  $a, b \in D_\infty$ . Sin embargo, usaremos como generadores “naturales” de  $G_1 *_T G_2$  a los elementos  $g_1 g_2, g_1$ , en analogía a la presentación de  $D_\infty$  con generadores  $r, s$ . Esta elección es irrelevante, pero ahorra un poco de notación.

**Definición 1.17** Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ ,  $T$  un grupo finito y  $L \subset T$  un generador de  $T$ .

1. Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I. Diremos que  $S \subset G$  es un **generador natural** de  $G$  si  $S = (L \times \{0\}) \cup \{(e, 1)\}$ .
2. Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, y sean  $g_i \in G_i \setminus T, i = 1, 2$  de orden 2. Diremos que  $S \subset G$  es un **generador natural** de  $G$  si  $S = L \cup \{r, s\}$  donde  $r = g_1 g_2, s = g_1$ . Cada vez que hablemos de un grupo de tipo II, notaremos  $r, s$  a dos elementos definidos de esta forma.

En cualquier caso, el subgrupo  $T \leq G$  se llama el **subgrupo transversal** a  $G$ .

**Ejemplo 1.18** Los grafos de Cayley  $\mathcal{G}_{G,S}$  de  $G$  con respecto a un generador natural se pueden dibujar como en las Figuras 1.5 y 1.6, y se asemejan a los de  $\mathbb{Z}$  y  $D_\infty$  respectivamente salvo un ensanchamiento vertical. La Figura 1.7 muestra el grafo de Cayley de un grupo de tipo II cuando se eligen generadores de la forma  $L \cup \{g_1, g_2\}$ . En los ejemplos  $K_4 = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$  es el grupo de Klein y  $D_6 = \langle t, s \mid s^2, tsts \rangle$  es el grupo diédrico de orden 6. El subgrupo transversal  $T$  se muestra con un fondo rojo en cada caso.

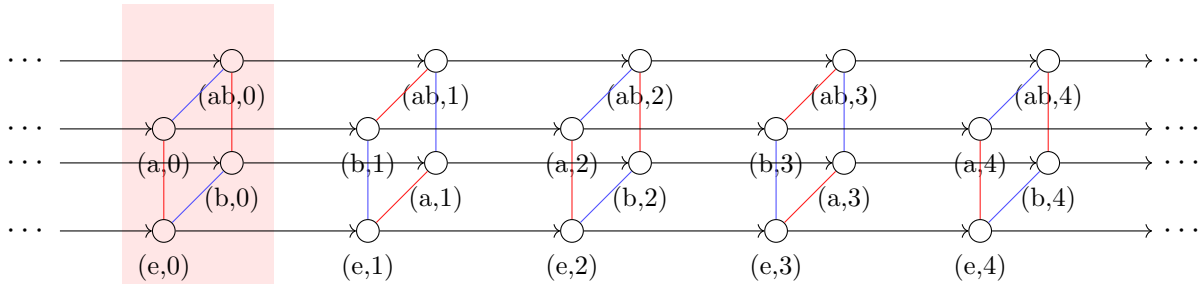


Figura 1.5: Grafo de Cayley de  $K_4 \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  con respecto al generador natural  $\{(a, 0), (b, 0), (e, 1)\}$ , que corresponden a aristas rojas, azules y negras respectivamente. El automorfismo  $\psi$  queda determinado por  $\psi(a) = b, \psi(b) = a$ .

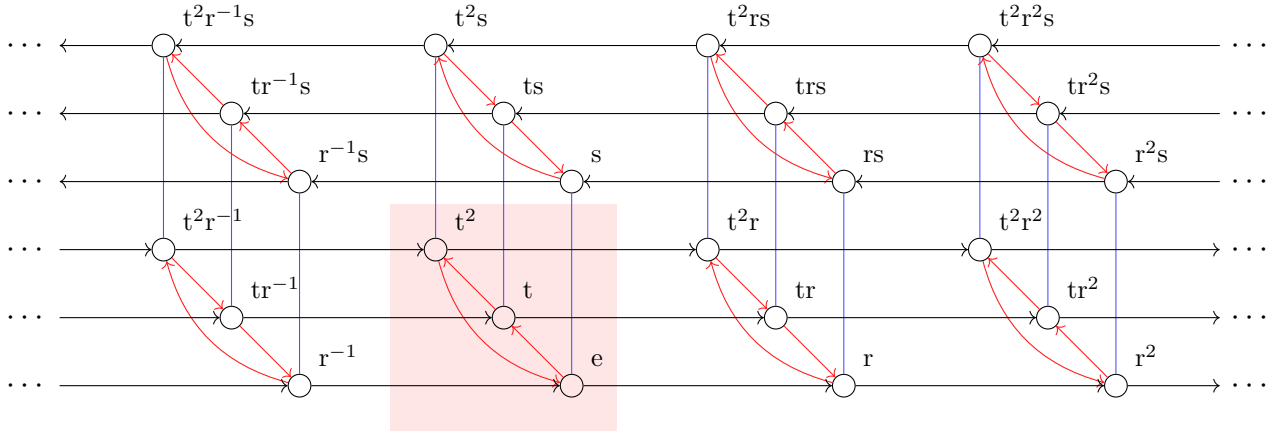


Figura 1.6: Grafo de Cayley de  $D_6 *_T \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  donde  $T = \langle t \rangle = \langle 2 \rangle$  y con generador natural  $\{t, s, r\}$ , que corresponden a aristas rojas, azules y negras respectivamente.

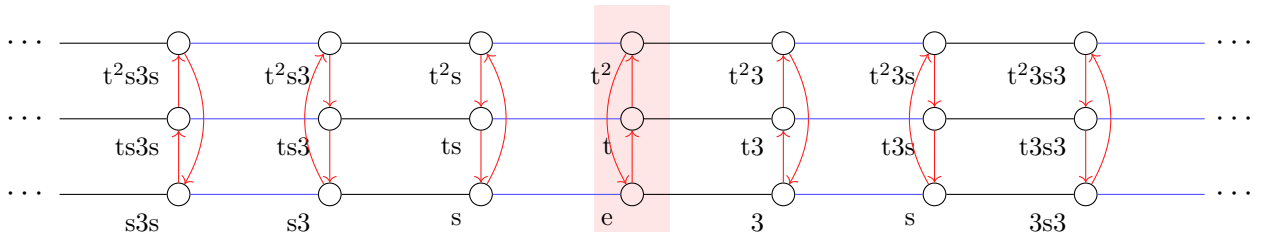


Figura 1.7: Grafo de Cayley de  $D_6 *_T \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  donde  $T = \langle t \rangle = \langle 2 \rangle$  y con generador  $\{r, s, 3\}$ , que corresponden a aristas rojas, azules y negras respectivamente.

A continuación deduciremos algunas propiedades básicas de esta clase de grupos. La primera es una forma normal para los elementos de un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.19** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ .*

1. Si  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  con  $T$  un grupo finito y  $\psi \in \text{Aut}(T)$ , entonces cada elemento  $g \in G$  se escribe de manera única como un producto  $g = (t, 0)(e, n)$  donde  $t \in T$  y  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Sea  $G = G_1 *_T G_2$  con  $G_1, G_2, T$  grupos finitos y  $T$  de índice 2 en  $G_1$  y  $G_2$ . Entonces cada elemento  $g \in G$  se escribe de manera única como  $g = tr^n$  o  $tr^n s$  con  $t \in T, n \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sigue de las proposiciones 1.9 y 1.7. □

Podemos escribir la forma normal del producto de dos elementos en  $G$  a partir de la forma normal de éstos: para  $G$  de tipo I, esto es exactamente la definición de la multiplicación en el producto semidirecto escrita en (1.1). Para  $G$  de tipo II necesitamos un poco de notación: notemos que  $T \leq G_1, G_2$  es normal en cada  $G_1, G_2$  pues tiene índice 2 en cada uno. Sean  $\psi_s, \psi_r: T \rightarrow T$  los automorfismos de  $T$  dados por la conjugación por  $s, r$  respectivamente, de

modo que  $st = \psi_s(t)s$  y  $rt = \psi(t)r$  para todo  $t \in T$ . Esta notación junto con la identidad  $r^n s = sr^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  permiten computar los productos y las inversas explícitas en este caso. La Tabla 1.1 muestra las formas para los dos tipos.

$G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$	
Productos	Inversas
$(t, n)(t', n') = (t\psi^n(t'), n + n')$	$(t, n)^{-1} = (\psi^{-n}(t^{-1}), -n)$
$G = G_1 *_T G_2$	
$(tr^n)(t'r^{n'}) = t\psi^n(t')r^{n+n'}$	$(tr^n)^{-1} = \psi^{-n}(t^{-1})r^{-n}$
$(tr^n)(t'r^{n'}s) = t\psi^n(t')r^{n+n'}s$	$(tr^n s)^{-1} = \psi^n \circ \psi_s(t)r^n s$
$(tr^n s)(t'r^{n'}) = t\psi^n \circ \psi_s(t')r^{n-n'}s$	
$(tr^n s)(t'r^{n'}s) = t\psi^n \circ \psi_s(t')r^{n-n'}$	

Tabla 1.1: Productos e inversas explícitas de los elementos un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  de tipo I (arriba) y de tipo II (abajo). Aquí  $n, n' \in \mathbb{Z}$ ,  $t, t' \in T$  son arbitrarios.

Una primera consecuencia de esta descripción es la siguiente.

**Proposición 1.20** *Sea  $G = G_1 *_T G_2$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  de tipo II. Entonces  $G$  es isomorfo a  $T \rtimes_{\nu} D_{\infty}$  donde la acción de  $\nu$  está definida por  $\nu(r) = \psi$  y  $\nu(s) = \psi_s$ .*

DEMOSTRACIÓN. La función  $\Theta: G \rightarrow T \rtimes_{\nu} D_{\infty}$  definida por  $\Theta(tr^n) = (t, r^n)$  y  $\Theta(tr^n s) = (t, rs)$  está bien definida por la forma normal en  $G_1 *_T G_2$ , y es un isomorfismo de grupos por la Tabla 1.1.  $\square$

En particular, el isomorfismo  $\Theta$  de la proposición anterior se restringe a un isomorfismo entre  $T\langle r \rangle = \{tr^n \in G_1 *_T G_2 \mid t \in T, n \in \mathbb{Z}\} \leq G_1 *_T G_2$  y  $T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$ . Es decir, lo único que diferencia a los grupos de tipo II de los de tipo I es la presencia del “flip”  $s$ .

La Tabla 1.1 también permite determinar los órdenes de todos los elementos de  $G$ .

**Proposición 1.21** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $g \in G$ .*

1. Si  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I, los elementos que generan subgrupos de índice finito en  $G$  son  $T \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ , y cualquier subgrupo  $H \leq G$  de índice infinito es un subgrupo de  $T \times \{0\}$ .
2. Si  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, los elementos que generan subgrupos de índice finito en  $G$  son  $T\langle r \rangle \setminus T$ , y cualquier subgrupo de índice infinito es subgrupo de  $T\langle r^n s \rangle$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ .

Además, el orden de  $g = tr^n s \in T\langle r \rangle s$  es  $2\text{ord}(\psi^n \circ \psi_s(t))$ .

En particular, todos los subgrupos de índice infinito en  $G$  son finitos.

DEMOSTRACIÓN. 1. La segunda afirmación sigue de la primera, y ésta sigue de la igualdad  $[G : \langle (t, n) \rangle] = |n||T|$  cuando  $(t, n) \in T \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ .

2. Sea  $g = tr^n s \in T\langle r \rangle s$ , entonces

$$g^2 = t\psi^n \circ \psi_s(t) \in T$$

y por lo tanto  $g^2$  tiene orden finito. Luego  $g$  tiene orden finito, y éste no puede ser impar pues si  $g^{2m+1} = e$  entonces  $g = g^{2m+1}(g^{2m})^{-1} \in T$ , una contradicción.

Concluimos que  $g$  tiene el orden requerido. Esto muestra además que los elementos que generan subgrupos de orden infinito en  $G$  están en  $T\langle r \rangle \setminus T$ , y se tiene la igualdad por el ítem anterior y porque  $[G : T\langle r \rangle] = 2$ .

Para probar la segunda afirmación, sea  $H \leq G$  un subgrupo de índice infinito. Todos los  $h \in H$  son de la forma  $h = t \in T$  o  $h = tr^n s$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Si existiesen dos elementos  $h, h' \in H$  con  $h = tr^n s$ ,  $h' = tr^{n'} s$  y  $t, t' \in T$ ,  $n \neq n' \in \mathbb{Z}$  entonces

$$hh' = tr^n st' r^{n'} s = t\psi^n \circ \psi_s(t') r^{n-n'}.$$

Luego  $n = n'$  pues de otro modo  $\langle hh' \rangle$  tendría índice finito en  $G$ . Concluimos que existe un  $n \in \mathbb{Z}$  con  $H \leq T\langle r^n s \rangle$ .  $\square$

Recordemos que si  $G$  es virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $H \leq G$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y de índice finito, entonces existe un subgrupo  $K \leq H$  de índice finito en  $G$  con  $K \trianglelefteq G$ . Como  $K \leq H \cong \mathbb{Z}$ , también tendremos que  $K \cong \mathbb{Z}$ . Sin embargo, este subgrupo  $K$  no siempre coincide con  $\langle (e, 1) \rangle$  (resp.  $\langle r \rangle$ ). Terminamos esta sección entregando una caracterización de cuándo  $\langle (e, 1) \rangle$  (resp.  $\langle r \rangle$ ) son normales. Si  $G$  es de tipo II, obtenemos una presentación de  $G$  análoga a la escritura de  $D_\infty$  como  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Proposición 1.22** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ .*

1. Si  $G = T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  es de tipo I, entonces  $\langle (e, 1) \rangle$  es normal en  $G$  ssi  $\psi = id_T$ . En tal caso  $G \cong T \times \mathbb{Z}$ .
2. Si  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, entonces  $\langle r \rangle$  es normal en  $G$  ssi  $\psi = id_T$  ssi  $\psi_{g_1} = \psi_{g_2}$ . En tal caso  $G_1 \cong G_2$  y además  $G \cong \mathbb{Z} \rtimes_\eta G_1$  donde  $\eta: G_1 \rightarrow Aut(\mathbb{Z})$  está definida por  $\eta(t) = id_{\mathbb{Z}}$  y  $\eta(ts) = (m \in \mathbb{Z} \mapsto -m \in \mathbb{Z})$  para todo  $t \in T$ .

DEMOSTRACIÓN. 1. Si  $\langle (e, 1) \rangle \trianglelefteq G$ , en particular

$$(t, 0)(e, 1)(t, 0)^{-1} = (t\psi(t^{-1}), 1) \in \langle (e, 1) \rangle$$

para cada  $t \in T$ . Luego  $t\psi(t^{-1}) = e$ , es decir  $\psi = id_T$ .

Si  $\psi = id_T$ , entonces

$$(t, m)(e, 1)^n (t, m)^{-1} = (t, m)(e, n)(t^{-1}, -m) = (e, n) \in \langle (e, 1) \rangle$$

para todo  $(t, m) \in G$ . Luego  $\langle (e, 1) \rangle \trianglelefteq G$ . En particular,  $T, \langle (e, 1) \rangle$  son subgrupos normales de  $G$  con intersección igual a  $\{e\}$  y  $T\langle (e, 1) \rangle = G$ . La Proposición 1.9 muestra que  $G \cong T \times \langle (e, 1) \rangle \cong T \times \mathbb{Z}$  (recordemos que  $(e, 1)$  tiene orden infinito).

2. Veamos la primera equivalencia: si  $\langle g_1 g_2 \rangle \trianglelefteq G$ , en particular

$$\text{tr}t^{-1} = t\psi(t^{-1})r \in \langle r \rangle$$

para cada  $t \in T$ . La forma normal de  $G$  muestra que necesariamente  $\psi(t) = t$ , es decir  $\psi = \text{id}_T$ . Recíprocamente, si  $\psi = \text{id}_T$ , entonces las potencias de  $r$  conmutan con los elementos de  $T$ . Luego

$$(\text{tr}^m)r^n(\text{tr}^m)^{-1} = r^n \in \langle r \rangle \quad \text{y} \quad (\text{tr}^m s)r^n(\text{tr}^m s)^{-1} = s r^n s = r^{-n} \in \langle r \rangle$$

para todo  $t \in T$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  y concluimos que  $\langle r \rangle \trianglelefteq G$ .

La segunda equivalencia sigue de notar que  $\psi = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$  y que  $\psi_{g_1}, \psi_{g_2}$  siempre tienen orden 2. Además, la igualdad  $\psi_{g_1} = \psi_{g_2}$  muestra que

$$G_1 \cong T \rtimes_{\psi_{g_1}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = T \rtimes_{\psi_{g_2}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong G_2.$$

En este caso,  $G_1, \langle r \rangle$  son subgrupos de  $G$  con intersección igual a  $\{e\}$ ,  $G_1 \langle r \rangle = G$  y además  $\langle r \rangle \trianglelefteq G$ . Como también tenemos la relación  $srs = r^{-1}$ , la Proposición 1.9 muestra que  $G \cong \langle r \rangle \rtimes_{\eta} G_1 \cong \mathbb{Z} \rtimes_{\eta} G_1$ .  $\square$

## 1.4. Dinámica simbólica sobre grupos

Un  $G$ -sistema dinámico topológico (o  $G$ -sistema) es una acción  $G \curvearrowright^{\alpha} X$  en un espacio métrico compacto  $X$  por homeomorfismos. A veces escribiremos  $(X, G)$  en lugar de  $G \curvearrowright^{\alpha} X$ . El punto de partida de la dinámica simbólica es el **full-shift** sobre  $G$ , que corresponde al  $G$ -sistema  $G \curvearrowright^{\sigma} \mathcal{A}^G$  donde el **alfabeto**  $\mathcal{A}$  es un conjunto finito de **símbolos**,  $\mathcal{A}^G$  está dotado de la topología prodiscreta y la acción de  $G$  en un punto  $x \in \mathcal{A}^G$  está dada por

$$((\sigma_g x)_h)_{h \in G} = (x_{g^{-1}h})_{h \in G} \text{ para cada } g \in G.$$

Los objetos fundamentales de estudio son los  $G$ -subsistemas de los full-shifts, llamados  $G$ -**subshifts**. Estos son los  $G$ -sistemas  $G \curvearrowright^{\sigma} X$  donde  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es cerrado e invariante bajo la acción  $\sigma$ .

Nuestra definición de  $\sigma_g$  implica que  $\sigma$  es una acción de grupo por la izquierda. Si  $G = \mathbb{Z}$  entonces la acción de  $1 \in \mathbb{Z}$  mueve una configuración a la derecha, pensando en el grafo de Cayley con  $+\infty$  a la derecha y  $-\infty$  a la izquierda como en la Figura 1.1.

La notación usual para hablar de abiertos en subshifts es la siguiente.

**Definición 1.23** *Sea  $F \subseteq G$  un conjunto finito.*

1. Un  $w \in \mathcal{A}^F$  se dice **patrón** con **soporte**  $F$ . Un **cilindro** es un conjunto de la forma

$$[w]_g = \{x \in \mathcal{A}^G \mid x_{gh} = w_h \text{ para cada } h \in F\} \subset \mathcal{A}^G$$

para algún  $g \in G$ . Normalmente escribimos  $[w]_e$  como  $[w]$ .

2. El **lenguaje** de un  $G$ -subshift  $X$  es el conjunto de patrones que aparecen en elementos de  $X$ , es decir  $\mathcal{L}(X) = \{w \text{ patrón} \mid [w]_e \cap X \neq \emptyset\}$ . También escribimos  $\mathcal{L}_F(X) = \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}^F$ .

Cuando  $G = \mathbb{Z}$  usamos las notaciones  $\mathcal{L}_n(X) = \mathcal{L}_{\{1, \dots, n\}}(X)$  y  $\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{L}_n(X)$ .

El conjunto de abiertos  $\{[w]_e \cap X \mid w \in \mathcal{L}(X)\}$  es una base de la topología de  $\mathcal{A}^G$ .

3. Dados un patrón  $w$  y una configuración  $x \in \mathcal{A}^G$ , escribimos  $w \sqsubset x$  si  $x \in [w]_g$  para algún  $g \in G$ .

También definimos el **conjunto de sucesores en la dirección de**  $s \in S$  en  $X$  de un símbolo  $a \in \mathcal{A}$  como

$$\text{Suc}_s(a) = \{a' \in \mathcal{A} \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } x_e = a, x_s = a'\},$$

y el **conjunto de predecesores en la dirección de**  $s \in S$  en  $X$  de un símbolo  $a \in \mathcal{A}$  como

$$\text{Pred}_s(a) = \{a' \in \mathcal{A} \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } x_e = a, x_{s^{-1}} = a'\},$$

Los morfismos naturales en dinámica topológica son los mapeos continuos que conmutan con las acciones de  $G$  en cada espacio. Hay una caracterización combinatorial de éstos en dinámica simbólica.

**Teorema 1.24** (Curtis-Lyndon-Hedlund, ver [CSC10]) Sean  $X \subseteq \mathcal{A}^G$ ,  $Y \subseteq (\mathcal{A}')^G$  subshifts sobre el mismo grupo y sea  $\phi: X \rightarrow Y$  una función continua y  $G$ -equivariante, es decir, tal que

$$\phi \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \phi \text{ para todo } g \in G.$$

Entonces existe un conjunto finito  $F \subset G$  y una asignación  $\Phi: \mathcal{A}^F \rightarrow \mathcal{A}'$  tal que

$$\phi(x)_g = \Phi(\sigma_{g^{-1}}(x)|_F) \text{ para todo } g \in G$$

y escribimos  $\phi = \Phi^\infty$ .

Recíprocamente, las funciones de este tipo son continuas y  $G$ -equivariantes.

Las funciones de la forma  $\phi = \Phi^\infty$  se llaman **códigos de ventana deslizante** con **función local**  $\Phi$ , y un código de ventana deslizante sobreyectivo (resp. inyectivo, biyectivo) se llama **factor** (resp. **incrustación**, **conjugación**). Si el dominio de  $\Phi$  es  $\mathcal{A}^F$ , decimos que  $\phi$  es  **$F$ -bloque** o  **$|F|$ -bloque**, y que tiene **memoria** o **ventana**  $F$ . Cuando  $G = \mathbb{Z}$  y  $\phi$  es un código  $\{-m, -m+1, \dots, 0, \dots, a-1, a\}$ -bloque con  $m, a \in \mathbb{N}$ , diremos que  $\phi$  tiene **memoria**  $m$  y **anticipación**  $a$ .

Si  $\phi: X \subseteq \mathcal{A}^G \rightarrow Y \subseteq (\mathcal{A}')^G$  es un código de ventana deslizante cuya memoria es  $\{e\}$  y cuya inversa tiene memoria  $\{e\}$ , entonces diremos que  $\phi$  es de **renombramiento**. Un código de renombramiento corresponde a una biyección entre los alfabetos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$ .

**Definición 1.25** Sea  $X$  un  $G$ -subshift y  $F \subset G$  finito con  $e \in F$ . La **presentación  $F$ -higher-block** de  $X$  es el  $G$ -subshift

$$X^{[F]} = \{x \in (\mathcal{A}^F)^G \mid ((x_g)_e)_{g \in G} \in X \text{ y } (x_g)_f = (x_{gf})_e \text{ para cada } h \in F.\}$$

El código  $F$ -**higher-block** es la conjugación  $\phi_F: X \rightarrow X^{[F]}$  cuya función local  $\Phi_F: \mathcal{A}^F \rightarrow \mathcal{A}^F$  es la identidad. La inversa de  $\phi_F$  es el código de ventana deslizante asociado a la función local  $\Phi_F: w \in \mathcal{A}^F \mapsto w_e \in \mathcal{A}$  que proyecta  $w \in \mathcal{A}^F$  al símbolo  $w_e$ .

Los códigos higher-block permiten recodificar cualquier código de ventana  $\alpha$  deslizante a un código 1-bloque en un  $G$ -subshift cuyo alfabeto consiste en bloques del tamaño de la ventana de  $\alpha$ .

**Proposición 1.26** (ver [Bar17]) Sean  $X, Y$   $G$ -subshifts y  $\alpha: X \rightarrow Y$  un código de ventana deslizante  $F$ -bloque donde  $e \in F$ . Entonces  $\alpha_F = \alpha \circ \phi_F: X^{[F]} \rightarrow Y$  es 1-bloque.

$$\begin{array}{ccc} X^{[F]} & \xrightarrow{\phi_F} & X \\ & \searrow \alpha_F & \downarrow \alpha \\ & & Y \end{array}$$

El siguiente resultado es clásico y muestra que un subshift queda especificado por su lenguaje.

**Proposición 1.27** (ver [Bar17]) Dada  $\mathcal{F}$  una familia de patrones en un full-shift  $\mathcal{A}^G$ , definimos  $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$  como el conjunto

$$\mathbf{X}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^G \mid (w \sqsubset x) \implies (w \notin \mathcal{F})\}.$$

Entonces  $\mathbf{X}_{\mathcal{F}}$  es un  $G$ -subshift, y todo  $G$ -subshift  $X$  sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$  es de la forma  $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$  para alguna familia de patrones  $\mathcal{F}$ .

Dado  $X$ , la familia  $\mathcal{F}$  de la proposición anterior no es única: por ejemplo, cualquier familia  $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$  que verifica que para cada elemento  $F' \in \mathcal{F}'$  existe un  $F \in \mathcal{F}$  con  $F' \sqsubseteq F$  es tal que  $\mathbf{X}_{\mathcal{F}'} = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ . Sin embargo, la clase de subshifts que admiten un tal  $\mathcal{F}$  finito es fundamental en la teoría.

**Definición 1.28** Sea  $G$  un grupo y  $S \subset G$  un generador finito.

1. Un  $G$ -subshift  $X$  se dice **de tipo finito** (o decimos que  $X$  es un  $G$ -**SFT**) si existe una familia finita de patrones  $\mathcal{F}$  tal que  $X = \mathbf{X}_{\mathcal{F}}$ .
2. Un  $G$ -SFT  $X$  se dice de tipo **nearest-neighbour** con respecto a  $S$ , o un  $G$ -**NNSFT**, si puede ser definido por una familia finita de patrones  $\mathcal{F}$  cuyos soportes son de la forma  $\{e, s\}$  con  $s \in S$ .

Equivalentemente, existen matrices  $A_s \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  tales que el subshift  $\mathbf{X}_{\{A_s\}_{s \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  definido por

$$\mathbf{X}_{\{A_s\}_{s \in S}} = \{x \in \mathcal{A}^G \mid (A_s)_{x_g, x_{gs}} = 1 \text{ para cada } s \in S\}$$

es igual a  $X$ . Decimos que las matrices  $\{A_s\}_{s \in S}$  **presentan** a  $X$ .

Una matriz  $A_s$ ,  $s \in S$  se dice **esencial** si cada par  $a, a' \in \mathcal{A}$  con  $(A_s)_{a, a'} = 1$  verifica que existe un  $x \in X$  y un  $g \in G$  tal que  $x_g = a$  y  $x_{gs} = a'$ . El conjunto de matrices  $\{A_s\}_{s \in S}$  se dice **esencial** si cada  $A_s$  lo es.

Dado un  $G$ -NNSFT  $X$  con respecto a un generador  $S \subset G$  definido por una familia de patrones  $\mathcal{F}$  con soportes de la forma  $\{e, s\}$ ,  $s \in S$ , las matrices  $\{A_s\}_{s \in S}$  del punto 2. de la Definición 1.28 se pueden construir como

$$(A_s)_{a,a'} = \begin{cases} 0 & \text{si existe un } F \in \mathcal{F} \text{ con } F(e) = a, F(s) = a' \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para cada  $a, a' \in \mathcal{A}$  y  $s \in S$ . Esta definición no asegura que  $\{A_s\}_{s \in S}$  sea esencial.

**Ejemplo 1.29** 1. El  $G$ -subshift de Fibonacci  $X_{Fib} \subset \{0, 1\}^G$  es el  $G$ -NNSFT definido por las matrices  $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Este subshift corresponde a todos los coloreos de los vértices de  $\mathcal{G}_{G,S}$  que no contienen 1's adyacentes entre sí.

2. Un **graph-coloring subshift**  $X_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^G$  es un  $G$ -NNSFT definido por las matrices  $(A_s) = (\mathbf{1}_{a \neq b})_{a,b \in \mathcal{A}}$ . Este subshift corresponde a todos los coloreos de los vértices de  $\mathcal{G}_{G,S}$  que no contienen símbolos adyacentes e idénticos.

3. Un  $\mathbb{Z}$ -NNSFT  $X = \mathbf{X}_B \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  corresponde a los vértices de los caminos dirigidos biinfinitos en el grafo  $\Gamma(B)$ , y el criterio que decide si  $B \in M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\{0, 1\})$  es esencial corresponde a que  $B$  no tenga filas ni columnas nulas. Estos subshifts se llaman  **$\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices**. Usaremos la notación  $X = X_B$  o  $Y = Y_B$ , y escribiremos  $Suc_B(b)$  en lugar de  $Suc_1(b)$ . Notemos que en este caso el conjunto de sucesores  $Suc_B(b)$  es todo  $\{b' \in \mathcal{B} \mid B_{b,b'} = 1\}$ .

La propiedad de ser SFT es una invariante de conjugación, pero la propiedad de ser un NNSFT con respecto a un generador  $S$  no lo es. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.30** (ver [Bar17]) Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Si  $X$  e  $Y$  son  $G$ -subshifts conjugados y  $X$  es un  $G$ -SFT, entonces  $Y$  también es un  $G$ -SFT.

Por otro lado, si  $G$  es generado por un conjunto  $S \subseteq G$  finito, entonces todo  $G$ -SFT es conjugado a un  $G$ -NNSFT con respecto a  $S$ .

Otra clase importante de  $G$ -subshifts son los  $G$ -subshifts **sóficos**: un  $G$ -subshift  $Y$  se dice sófico si existe un  $G$ -SFT  $X$  y un código de ventana deslizante  $\phi$  tal que  $Y = \phi(X)$ .

Terminamos esta sección con las nociones fundamentales de periodicidad y mezcla en dinámica topológica. Recordemos que, dada una acción  $G \curvearrowright^\alpha X$  en un conjunto cualquiera  $X$  la **órbita** de un punto  $x \in X$  es  $\text{Orb}_\alpha(x) = \{\alpha_g(x) \mid g \in G\}$ , y su **estabilizador** es  $\text{Stab}_\alpha(x) = \{g \in G \mid \alpha_g(x) = x\} \leq G$ . Es conocido que  $[G : \text{Stab}_\alpha(x)] = |\text{Orb}_\alpha(x)|$ .

**Definición 1.31** Sea  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema.

1. Decimos que un punto  $x \in X$  es **débilmente periódico** si  $\text{Stab}_\alpha(x) \leq G$  es no trivial.
2. Decimos que un punto  $x \in X$  es **fuertemente periódico** si  $\text{Stab}_\alpha(x) \leq G$  es de índice finito. Equivalentemente,  $\text{Orb}_\alpha(x) \subseteq X$  es finito.

También usaremos una notación no del todo estándar: dados dos conjuntos  $U, V \subseteq X$  definimos  $N(U, V) = \{g \in G \mid \alpha_g^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset\} \subseteq G$ . Esto permite rephrasing las nociones de transitividad de manera compacta.



**Definición 1.32** Sea  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema.

1.  $(X, G)$  se dice **transitivo** si  $N(U, V)$  es no vacío para cada par de abiertos  $U, V \subseteq X$ . Esto equivale a la existencia de un  $x \in X$  tal que  $\text{Orb}_\alpha(x) = X$ .
2.  $(X, G)$  se dice **mezclador** si para cada par de abiertos  $U, V \subseteq X$  existe un conjunto finito  $F \subset G$  tal que  $N(U, V) = G \setminus F$ .
3. Supongamos que  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es un  $G$ -subshift.  $(X, G)$  se dice **fuertemente irreducible** si existe un conjunto finito  $F \subset G$  tal que para cada par de patrones  $p, q \in \mathcal{L}(X)$ , la igualdad  $\text{sop}(p) \cap \text{sop}(q)F = \emptyset$  implica que  $[p] \cap [q] \cap X \neq \emptyset$ .

## 1.5. Entropía en grupos amenables

La entropía topológica y medible son invariantes numéricas clásicas en dinámica topológica y teoría ergódica. La clase de grupos para las cuales se puede definir esta invariante de manera “simple” es la siguiente.

**Definición 1.33** Un grupo numerable  $G$  se dice **amenable** si existe una secuencia  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos finitos de  $G$ , llamada **secuencia de Følner**, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g\Lambda_n \Delta \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0$$

para cada  $g \in G$ .

La anterior es una de varias caracterizaciones conocidas de la amenabilidad de un grupo numerable, y dice que existen subconjuntos de  $G$  arbitrariamente invariantes bajo la acción regular por la izquierda. Para ver que una secuencia  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de Følner, se puede probar que basta tener la convergencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s\Lambda_n \setminus \Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0. \quad (1.2)$$

para todo  $s \in S \cup S^{-1}$ , donde  $S \subset G$  es un generador de  $G$ .

El siguiente lema construye secuencias de Følner de un grupo amenable  $G$  a partir de la secuencia de Følner de un subgrupo normal amenable  $Q \leq G$  de índice finito.

**Lema 1.34** ([Wei01]) Sea  $T$  un grupo finito,  $Q$  un grupo amenable y  $G$  una extensión de  $T$  por  $Q$ , es decir existe una secuencia exacta

$$1 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1.$$

Sea  $\pi: G \rightarrow Q$  el epimorfismo canónico de  $G$  en  $G/T$ .

Si  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una secuencia de Følner en  $Q$  y  $\{\widetilde{\Lambda}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que cada  $\widetilde{\Lambda}_n \subset G$  es un levantamiento de  $\Lambda_n$  (es decir,  $\pi(\widetilde{\Lambda}_n) = \Lambda_n$  y  $\pi$  es inyectiva en  $\widetilde{\Lambda}_n$ ), entonces  $\{T\widetilde{\Lambda}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una secuencia de Følner en  $G$ .

**Ejemplo 1.35** 1. *Cualquier grupo finito  $G$  es amenable, tomando como secuencia de Følner  $\{\Lambda_n = G\}_{n \in \mathbb{N}}$ .*

2. *Los grupos  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}_+$  son amenable: la secuencia  $\{\Lambda_n^d = \{-n, \dots, n\}^d\}_{n \in \mathbb{N}}$  satisface para cada vector canónico  $\vec{e}_i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $1 \leq i \leq d$  y  $n \in \mathbb{N}$  la igualdad*

$$\frac{|(\vec{e}_i + \Lambda_n^d) \setminus \Lambda_n^d|}{|\Lambda_n^d|} = \frac{(2n+1)^{d-1}}{(2n+1)^d} = \frac{1}{2n+1},$$

*cuyo lado derecho tiende a 0 cuando  $n$  tiende a infinito. En el caso  $d = 1$  podemos escribir también para cada  $n \in \mathbb{N}$  una partición  $\{(2n+1)m + \Lambda_n^1\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{Z}$ .*

3. *El grupo  $D_\infty = \langle a, b \mid \{a^2, b^2\} \rangle = \langle s, r \mid \{s^2, srsr\} \rangle$  es amenable y admite dos secuencias de Følner naturales. Sea  $\{\Lambda_n^{a,b}\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por*

$$\Lambda_n^{a,b} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \leq n\} = B_{\{a,b\}}(e, n).$$

*Luego la expresión*

$$\frac{|a\Lambda_n^{a,b} \setminus \Lambda_n^{a,b}|}{|\Lambda_n^{a,b}|} = \frac{|b\Lambda_n^{a,b} \setminus \Lambda_n^{a,b}|}{|\Lambda_n^{a,b}|} = \frac{1}{2n+1}$$

*converge a 0 cuando  $n$  tiende a infinito. Esta secuencia es simétrica en el grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{D_\infty, \{a,b\}}$  (ver la Figura 1.8), y además para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos una partición de  $D_\infty$*

$$\{g\Lambda_n^{a,b} \mid g \in D_\infty, d_{\{a,b\}}(g, e) = (2n+1)m, \text{ para } m \in \mathbb{Z}\}.$$

*Otra secuencia de Følner natural es  $\{\Lambda_n^{s,r}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde  $\Lambda_n^{s,r} = \{r^m, r^m s \mid -n \leq m \leq n\}$ . Es de Følner por el Lema 1.34 tomando  $T = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $Q = \mathbb{Z}$ . Nuevamente  $\Lambda_n^{s,r}$  es simétrica en el grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{D_\infty, \{s,r\}}$  (ver la Figura 1.8), y para cada  $n \in \mathbb{N}$  también tenemos una partición  $\{r^{(2n+1)m}\Lambda_n^{s,r}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de  $D_\infty$ .*

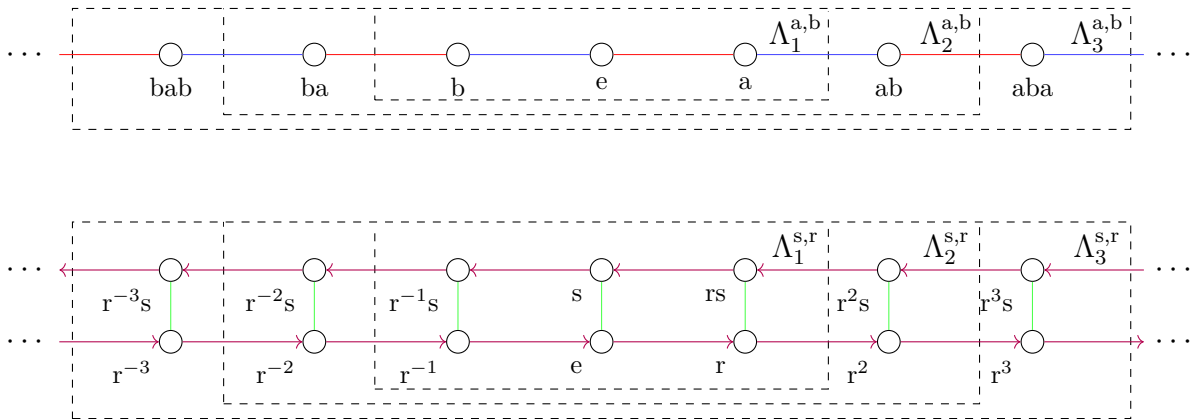


Figura 1.8: Secuencias de Følner  $\Lambda_n^{a,b}$  (arriba) y  $\Lambda_n^{s,r}$  (abajo) en dos grafos de Cayley de  $D_\infty$ .

Este ejemplo permite encontrar secuencias de Følner explícitas para grupos  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$ : si  $T$  es un subgrupo transversal a  $G$ , entonces  $G/T \cong \mathbb{Z}$  o  $G/T \cong D_\infty$  dependiendo de si

$G$  es de tipo I o II. Luego las secuencias  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del Ejemplo 1.35 tienen levantamientos

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_n^1 &= \{(e, m)\}_{-n \leq m \leq n} && \text{si } G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z} \text{ es de tipo I,} \\ \widetilde{\Lambda}_n^{a,b} &= \{w \in \{g_1, g_2\}^*\}_{|w| \leq n} && \text{si } G = G_1 *_T G_2 \text{ es de tipo II,} \\ \widetilde{\Lambda}_n^{s,r} &= \{r^m, r^m s\}_{-n \leq m \leq n} && \text{si } G = G_1 *_T G_2 \text{ es de tipo II,} \end{aligned}$$

y  $G$  tiene secuencia de Følner dada por  $T\widetilde{\Lambda}_n$ . Notemos que  $|T\widetilde{\Lambda}_n^1| = |T\widetilde{\Lambda}_n^{a,b}| = (2n+1)|T|$  y  $|T\widetilde{\Lambda}_n^{s,r}| = 2(2n+1)|T|$ .

Para poder hablar de entropía medible necesitamos definir las medidas compatibles con la acción de  $G$ .

**Definición 1.36** *Sea  $G \curvearrowright^{\alpha} X$  un  $G$ -sistema. Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre los Borelianos de  $X$  se dice **invariante** si  $\mu(\alpha_g B) = \mu(B)$  para cualquier  $g \in G$  y  $B \subseteq X$  Boreliano. Su **soporte** es el menor cerrado contenido en  $X$  que tiene medida 1. El conjunto de las medidas invariantes se denota  $M(X, G)$ .*

Un resultado clásico asegura que  $M(X, G) \neq \emptyset$  cuando  $G$  es amenable.

Ahora podemos definir la entropía topológica y medible en  $G$ -subshifts. Estas miden el crecimiento exponencial del número de  $\Lambda_n$ -órbitas desde el punto de vista topológico y medible respectivamente.

**Definición 1.37** *Supongamos que  $G$  es amenable con secuencia de Følner  $\{\Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y que  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es un  $G$ -subshift.*

1. La **entropía topológica de  $X$**  es

$$h_{\text{top}}(X, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{L}_{\Lambda_n}(X)|}{|\Lambda_n|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log |\mathcal{L}_{\Lambda_n}(X)|}{|\Lambda_n|}.$$

2. Sea  $\mu \in M(X, G)$ . Definimos la partición de  $X$  en cilindros  $\mathcal{P} = \{[a]_e \cap X\}_{a \in \mathcal{A}}$  y  $\mathcal{P}_{\Lambda_n} = \{\bigcap_{g \in \Lambda_n} \sigma_g^{-1}(C_g) \mid C_g \in \mathcal{P}\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La **entropía medible de  $X$  con respecto a  $\mu$**  es

$$h_{\mu}(X, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{C \in \mathcal{P}_{\Lambda_n}} -\mu(C) \log \mu(C) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{C \in \mathcal{P}_{\Lambda_n}} -\mu(C) \log \mu(C).$$

Las definiciones anteriores se pueden formular para  $G$ -sistemas generales, donde se prueba que no dependen de la secuencia de Følner escogida. No necesitaremos explicitar esta definición más general, y nos basta saber que si  $H \leq G$  es un subgrupo de índice finito entonces

$$h_{\text{top}}(X, H) = [G : H] h_{\text{top}}(X, G) \text{ y } h_{\mu}(X, H) = [G : H] h_{\mu}(X, G). \quad (1.3)$$

En esta tesis nos interesará también el caso en que  $H \cong \mathbb{Z}$  y  $X$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift. En tal situación la ecuación (1.3) se puede tomar como la definición de la entropía de un  $G$ -sistema.

La relación entre ambas nociones es un principio variacional que vale en un  $G$ -sistema cualquiera.

**Teorema 1.38** (Principio variacional, ver [Oll85]) *Sea  $G$  un grupo amenable y  $X$  un  $G$ -sistema. Entonces*

$$h_{top}(X, G) = \sup_{\mu \in M(X, G)} h_{\mu}(X, G).$$

En el caso de un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $X = X_B$  presentado por una matriz esencial  $B$ , la entropía topológica es  $h_{top}(X, \mathbb{Z}) = \log \lambda$ , donde  $\lambda$  es el valor propio positivo de  $B$  de módulo máximo. Un teorema de D. Lind [Lin84] caracteriza los números obtenidos de esta manera. Decimos que un entero algebraico<sup>1</sup>  $\lambda \geq 1$  es **de Perron** si todas las raíces de su polinomio minimal tienen módulo estrictamente menor a  $\lambda$ . Las entropías de los  $\mathbb{Z}$ -SFTs mezcladores resultan ser exactamente los logaritmos de números de Perron, y se deduce que las entropías de los  $\mathbb{Z}$ -SFTs son

$$\{\log \lambda \mid \lambda^n \text{ es de Perron para algún } n \in \mathbb{N}_+\}.$$

El primer indicio de que la dinámica de SFTs sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  es extremadamente similar a la dinámica de  $\mathbb{Z}$ -SFTs es el siguiente.

**Teorema 1.39** ([Bar21]) *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ . Entonces los números realizables como entropías de  $G$ -SFTs son exactamente los números realizables como entropías de  $\mathbb{Z}$ -SFTs.*

## 1.6. Splittings y amalgamaciones en $\mathbb{Z}$ -SFTs

Los splittings son operaciones realizadas sobre un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$  que entregan un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  conjugado a  $Y$  tal que cada símbolo  $b' \in \mathcal{B}'$  “guarda” información de sucesores o predecesores. Son fundamentales en la construcción de códigos de estado finito y en la clasificación de  $\mathbb{N}$ -subshifts de vértices (ver [Kit98]).

**Proposición 1.40** *Sea  $Y = Y_B$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices y para cada  $v \in \mathcal{L}_1(Y)$  sea  $\mathcal{P}^v = \{P_1^v, \dots, P_{n_v}^v\}$  una partición de  $Suc_B(v)$ . Definimos*

1.  $\mathcal{B}' = \{v^l \mid v \in \mathcal{A}, 1 \leq l \leq n_v\}$ ,
2.  $\Delta: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  la función sobreyectiva dada por  $\Delta(v^l) = v$ , y
3.  $\Phi: \mathcal{L}_2(Y) \rightarrow \mathcal{B}'$  la función local dada por  $\Phi(vu) = v^l$  donde  $vu \in \mathcal{L}_2(Y)$  y  $1 \leq l \leq n_v$  queda determinado únicamente por  $u \in P_l^v$ .

Entonces  $\phi = \Phi^{\infty}$  es un homeomorfismo a su imagen  $Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  con inversa  $\phi^{-1} = \Delta^{\infty}$ .

Llamamos al subshift  $Y'$  de la proposición anterior un **out-splitting** de  $Y$ . Un **in-splitting** se define de manera análoga, salvo que se usan particiones de los predecesores

---

<sup>1</sup>Decimos que un número complejo  $\lambda$  es un **entero algebraico** si anula un polinomio mónico a coeficientes enteros. En tal caso, llamamos polinomio minimal de  $\lambda$  al único polinomio mónico irreducible y de grado minimal que satisface  $\lambda$ .

$\text{Pred}(v)$  de cada símbolo. Decimos que un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$  es una **out-amalgamación** (resp. **in-amalgamación**) de un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y'$  si  $Y'$  es un out-splitting de  $Y$ . La conjugación natural de  $Y$  a  $Y'$  se llama **códigos de splitting**, y la conjugación de  $Y'$  a  $Y$  se llama **código de amalgamación**. Un teorema clásico de Williams recalca la importancia de estas operaciones.

**Teorema 1.41** ([Wil73]) *Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices y  $\psi: X \rightarrow Y$  una conjugación. Entonces  $\psi$  se escribe como composición finita de códigos de splitting seguidos de códigos de amalgamación.*

Los splittings y amalgamaciones se pueden ver como operaciones sobre la matriz (o el grafo que representa) que presenta un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices. El formalismo matricial es más adecuado para la extensión que presentaremos en el apéndice. Diremos que una matriz  $D \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  es de **división** si cada columna de  $D$  contiene exactamente un 1 y cada fila de  $D$  contiene al menos un 1. Una matriz de **amalgamación** es la traspuesta de una matriz de división.

**Proposición 1.42** (ver [LM95]) *Sea  $Y = Y_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices, y sea  $Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  un out-splitting de  $Y$  definido por las particiones  $\{\mathcal{P}^v\}_{v \in \mathcal{B}}$  de los sucesores de los símbolos de  $Y$ . Definimos las matrices  $D \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\{0, 1\})$  por*

$$D = (\mathbf{1}_{v=w})_{v \in \mathcal{B}, w^j \in \mathcal{B}'} \quad \text{y} \quad E = (\mathbf{1}_{v \in P_j^w})_{w^j \in \mathcal{B}', v \in \mathcal{B}}.$$

*Entonces  $DE = B$ , y la matriz  $ED$  presenta a  $Y'$ . Recíprocamente, cualquier par de matrices  $D, E$  a entradas en  $\{0, 1\}$  tales que  $B = DE$  y  $D$  es de división definen la matriz de adyacencia de un out-splitting  $Y' = Y_{\mathcal{B}'}$  de  $Y$  por  $B' = ED$ .*

*Una afirmación similar vale para in-splittings, reemplazando  $D$  por una matriz de amalgamación  $C$ .*

# Capítulo 2

## $G$ -subshifts como $\mathbb{Z}$ -subshifts

En este capítulo mostramos una manera de recodificar  $G$ -subshifts para  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}$ -subshifts equipado con una acción de un grupo finito de homeomorfismos, aprovechando el grosor finito de los grafos de Cayley de  $G$ . Este enfoque es la base de los resultados de capítulos posteriores.

Primero se prueban algunas consideraciones generales que sobre estas acciones en  $\mathbb{Z}$ -subshifts, y luego se muestra la equivalencia entre ambas nociones. Finalmente, se construyen extensiones de Krieger adecuadas en este contexto para  $G$ -subshifts sóficos. Varios de los resultados están inspirados en trabajo previo sobre clases de sistemas similares [AKM85, KLP03, KR13]. Pese a introducir notación engorrosa, éste es el contexto natural en el que viven estos sistemas y unifica de cierta manera el lenguaje con el que se estudian.

### 2.1. Acciones 1-bloque

Antes de entregar la codificación de  $G$ -subshifts como  $\mathbb{Z}$ -subshifts, daremos algunas definiciones y resultados generales sobre los  $\mathbb{Z}$ -subshifts que resultarán de la sección siguiente. Buena parte de esta sección consiste en generalizaciones de observaciones en [AKM85]. Normalmente solo probaremos los resultados para grupos  $G$  de tipo II, pues la demostración de este caso “contiene” a la de los grupos de tipo I.

**Definición 2.1** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ ,  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift y  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción por homeomorfismos.*

1. *Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I. Diremos que  $\sigma$  es **1-bloque** si  $\sigma_{(e,1)}$  es el shift a la derecha en  $Y$  y si para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y  $t \in T$  el símbolo  $\sigma_{(t,0)}(y)_n$  depende solo de  $y_n$ .*
2. *Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. Diremos que  $\sigma$  es **1-bloque** si  $\sigma_r$  es el shift a la derecha en  $Y$  y si para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y  $t \in T$ , los símbolos  $\sigma_t(y)_n$  y  $\sigma_{ts}(y)_n$  solo dependen de  $y_n$  e  $y_{-n}$  respectivamente.*

Los homeomorfismos de un  $\mathbb{Z}$ -SFT en sí mismo que conmutan con una potencia del shift (como los  $\sigma_{(t,0)}$  de la definición anterior) se conocen en la literatura como **automorfismos estabilizados**. Los homeomorfismos  $\theta$  de orden 2 de un  $\mathbb{Z}$ -shift  $(Y, \sigma)$  en sí mismo que verifican  $\theta \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \theta$  (como  $\sigma_s$  en la definición anterior) se conocen como **flips** o **reversores**, y su existencia implica que  $Y$  es reversible en el tiempo. Para ambas clases de homeomorfismos se puede probar una variante del teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon 1.24.

**Proposición 2.2** ([HKS21, KLP03]) *Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{Z}$ -subshifts.*

1. Si  $\gamma: X \rightarrow Y$  es una función continua que conmuta con una potencia del shift  $\sigma^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_+$ , entonces existen  $N \in \mathbb{N}$  y  $m$  funciones locales  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{m-1}: \mathcal{L}_{2N+1}(X) \rightarrow \mathcal{L}_1(Y)$  tales que  $\gamma(x)_n = \Gamma^n \text{ mód } m(x_{[n-N, n+N]})$  para  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
2. Si  $\theta: X \rightarrow Y$  es una función continua tal que  $\theta \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \theta$ , entonces existe una función local  $\Theta: \mathcal{L}_{2N+1}(X) \rightarrow \mathcal{L}_1(Y)$  tal que  $\theta(x)_n = \Theta(x|_{[-n-N, \dots, -n+N]})$  para  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Esta proposición permite presentar las acciones 1-bloque mediante un conjunto finito de permutaciones del alfabeto.

**Lema 2.3** *Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  una acción 1-bloque.*

1. Supongamos que  $G = T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  es de tipo I. Entonces existe una acción  $T \curvearrowright^\pi \mathcal{B}$  por permutaciones tal que

$$\sigma_{(t,0)}(y)_n = \pi_{\psi^{-n}(t)}(y_n) \quad (2.1)$$

para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2. Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. Entonces existe una acción  $G_1 \curvearrowright^\pi \mathcal{B}$  por permutaciones tal que

$$\sigma_t(y)_n = \pi_{\psi^{-n}(t)}(y_n) \quad y \quad \sigma_s(y)_n = \pi_s(y_{-n}) \quad (2.2)$$

para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. Sea  $m \in \mathbb{N}$  el orden de  $\psi$ . Como cada  $\sigma_t$  conmuta con  $\sigma_t^m$ , la Proposición 2.2 muestra que existen funciones locales  $\Gamma_t^0, \dots, \Gamma_t^{m-1}$  de radio  $N_t \in \mathbb{N}$  tales que  $\sigma_t(y)_n = \Gamma_t^n \text{ mód } m(y_{[n-N_t, n+N_t]})$  para cada  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $\sigma$  es 1-bloque podemos asumir  $N_t = 0$  para todo  $t \in T$ . La igualdad

$$\Gamma_t^0(y_0) = \sigma_t(y)_0 = \sigma_{t^n} \circ \sigma_t(y)_n = \sigma_{\psi^n(t)} \circ \sigma_t(y)_n = \Gamma_{\psi^n(t)}^n \text{ mód } m(y_0)$$

para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  indica que (tras cambiar variables en  $t \in T$ )  $\Gamma_t^n \text{ mód } m = \Gamma_{\psi^{-n}(t)}^0$ . Si definimos  $\pi_t = \Gamma_t^0$ , entonces los  $\pi_t$  satisfacen (2.2). Notando que para cada  $t, t' \in T$ ,  $y \in Y$  se tiene

$$\pi_t \circ \pi_{t'}(y_0) = \sigma_t \circ \sigma_{t'}(y)_0 = \sigma_{tt'}(y)_0 = \pi_{tt'}(y_0)$$

vemos que  $\pi$  define una acción de  $T$  en  $\mathcal{B}$ .

Por otro lado, como  $\sigma_r \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_r^{-1}$ , la Proposición 2.2 implica que existe una función local de radio  $\Theta$  de radio  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma_s(y)_n = \Theta(y|_{[-n-M, \dots, -n+M]})$  para todo  $y \in Y, n \in \mathbb{Z}$ . Nuevamente, como  $\sigma$  es 1-bloque tomamos  $M = 0$ . Definimos  $\pi_{ts} = \pi_t \circ \Theta$  para todo  $t \in T$ . Las igualdades

$$\pi_s \circ \pi_t \circ \pi_s(y_0) = \sigma_s \circ \sigma_t \circ \sigma_s(y)_0 = \sigma_{\psi_s(t)}(y)_0 = \pi_{\psi_s}(y_0)$$

y  $\pi_s \circ \pi_s(y_0) = \sigma_s \circ \sigma_s(y)_0 = y_0$  para todo  $y \in Y$ , junto con la presentación de  $G_1$  como  $T \rtimes_{\psi_s} \langle s \rangle$ , muestran que  $\pi$  define una acción de  $G_1$  en  $\mathcal{B}$ .  $\square$

La presencia de  $\psi^{-n}(t)$  y no  $\psi^n(t)$  en (2.1) y (2.2) es una consecuencia desafortunada pero irrelevante de nuestra elección de  $\sigma_{(e,1)}$  (resp.  $\sigma_r$ ) como el shift a la derecha. Esta elección sigue de considerar acciones de  $G$  en  $\mathcal{A}^G$  por la izquierda.

**Observación 2.4** *Cabe preguntarse qué sistemas admiten una acción 1-bloque de  $G$ . En [AKM85] se prueba que si  $Y$  es un sófico de entropía positiva, entonces admite una acción fiel de  $T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  donde  $T, \psi$  son arbitrarios. Sin embargo, existen  $\mathbb{Z}$ -SFTs que no admiten reversores [LPS06] y no se conoce un algoritmo para decidir si un  $\mathbb{Z}$ -SFT es reversible. Se conocen algunas condiciones suficientes para que sistemas unidimensionales substitutivos sean reversibles [BRY16].*

**Definición 2.5** *Sea  $G \curvearrowright^{\sigma} Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  una acción 1-bloque, y  $T \curvearrowright^{\pi} \mathcal{B}$  la acción construida en el Lema 2.3. Diremos que  $\pi$  **determina** la acción  $\sigma$ .*

*Si  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por una matriz esencial  $B \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\{0, 1\})$ , diremos que el par  $(B, \pi)$  **determina** la acción  $\sigma$ .*

En el caso de acciones sobre  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices, los homeomorfismos de orden finito de  $\sigma$  imponen simetrías en la matriz que presenta el subshift.

**Proposición 2.6** *Sea  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por  $B \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\{0, 1\})$ .*

1. *Sea  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción 1-bloque determinada por  $(B, \pi)$ . Entonces  $B$  satisface*

$$P_{\pi_t}^{\top} B P_{\pi_{\psi^{-1}(t)}} = B \quad \text{para todo } t \in T \quad (2.3)$$

$$P_{\pi_s} B P_{\pi_s} = B^{\top} \quad \text{si } G \text{ es de tipo II.} \quad (2.4)$$

2. *Recíprocamente, sea  $G_1 \curvearrowright^{\pi} \mathcal{B}$  una acción por permutaciones tal que*

$$P_{\pi_t}^{\top} B P_{\pi_{\psi^{-1}(t)}} \geq B \quad \text{para todo } t \in T \quad (2.5)$$

$$P_{\pi_s} B P_{\pi_s} \geq B^{\top} \quad \text{si } G \text{ es de tipo II.} \quad (2.6)$$

*Entonces  $\pi$  determina una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  por (2.1) y (2.2).*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. Notemos primero que las condiciones (2.3) y (2.4) son equivalentes a (2.5) y (2.6). Para la implicancia no trivial basta notar que estas matrices son a entradas no negativas y entonces

$$P_{\pi_{t-1}}^{\top} B P_{\pi_{\psi^{-1}(t-1)}} \leq P_{\pi_{t-1}}^{\top} P_{\pi_t}^{\top} B P_{\pi_{\psi^{-1}(t)}} P_{\pi_{\psi^{-1}(t-1)}} = B,$$



y lo mismo ocurre con  $P_s$ .

Probemos 1. Fijemos  $t \in T$ . Sean  $a, b \in \mathcal{B}$  tal que  $B_{a,b} = 1$ . Como  $B$  es esencial, podemos encontrar  $y \in Y$  con  $y_0 = a$ ,  $y_1 = b$ . Luego  $\sigma_t(y) \in Y$  es tal que  $\sigma_t(y)_0 = \pi_t(y_0)$  y  $\sigma_t(y)_1 = \pi_{\psi^{-1}(t)}(y_1)$ , y por lo tanto

$$1 = B_{\pi_t(y_0), \pi_{\psi^{-1}(t)}(y_1)} = B_{\pi_t(a), \pi_{\psi^{-1}(t)}(b)} = (P_{\pi_t}^\top B P_{\pi_{\psi^{-1}(t)}})_{a,b}.$$

Concluimos que  $B \leq P_{\pi_t}^\top B P_{\pi_{\psi^{-1}(t)}}$ .

Finalmente, notemos que  $\sigma_s(y)_0 = \pi_s(y_0) = \pi_s(a)$ ,  $\sigma_s(y)_{-1} = \pi_s(y_1) = \pi_s(b)$  y luego

$$1 = B_{\pi_s(y_1), \pi_s(y_0)} = (P_{\pi_s}^\top B P_{\pi_s})_{b,a},$$

es decir  $P_{\pi_s} B P_{\pi_s} \geq B^\top$ .

Para la recíproca, notemos que las ecuaciones (2.1) y (2.2) efectivamente definen una acción  $\sigma$  1-bloque de  $G$  en  $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ . Las desigualdades (2.5) y (2.6) implican que  $\sigma$  se restringe a una acción en  $Y$ .  $\square$

El último resultado de esta sección muestra que cualquier acción  $G \curvearrowright^\sigma Y$  con  $\sigma_{(e,1)}$  (resp.  $\sigma_r$ ) igual al shift a la derecha en  $\mathbb{Z}$  es conjugada a una acción 1-bloque. Para ello necesitamos extender un poco el formalismo de splittings a este contexto.<sup>1</sup> En el caso de un grupo de tipo II, debe realizarse un in-splitting y un out-splitting simultáneamente para obtener una acción 1-bloque en el subshift conjugado.

**Lema 2.7** *Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque. Para cada  $v \in \mathcal{B}$  sea  $\mathcal{P}^v = \{P_1^v, \dots, P_{n_v}^v\}$  una partición de  $\text{Suc}(v)$ , los sucesores de  $v$ .*

1. *Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I y que para cada  $t \in T$ ,  $v \in \mathcal{B}$  y  $1 \leq l \leq n_v$  se tiene que  $\pi_{\psi^{-1}(t)}(P_l^v) \in \mathcal{P}^{\pi_t(v)}$ .*

*Definimos*

(a)  $\mathcal{B}' = \{v^l \mid v \in \mathcal{A}, 1 \leq l \leq n_v\}$ ,

(b)  $\Delta: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  la función sobreyectiva dada por  $\Delta(v^l) = v$ , y

(c)  $\Phi: \mathcal{L}_2(Y) \rightarrow \mathcal{B}'$  la función local (con anticipación 1) dada por  $\Phi(vu) = v^l$  donde  $vu \in \mathcal{L}_2(Y)$  y  $1 \leq l \leq n_v$  queda determinado únicamente por  $u \in P_l^v$ .

2. *Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, y que para cada  $v \in \mathcal{B}$  tenemos  $\mathcal{Q}_v = \{Q_1^v, \dots, Q_{m_v}^v\}$  una partición de  $\text{Pred}_1(v)$ , los predecesores de  $v$ .*

*Supongamos que para cada  $t \in T$ ,  $v \in \mathcal{B}$  y  $1 \leq l \leq n_v$ ,  $1 \leq l' \leq k_v$  se tiene que  $\pi_{\psi^{-1}(t)}(P_l^v) \in \mathcal{P}^{\pi_t(v)}$  y  $\pi_{\psi(t)}(Q_{l'}^v) \in \mathcal{Q}^{\pi_t(v)}$ . Supongamos que además, para cada  $v \in \mathcal{B}$  y  $1 \leq l \leq n_v$ ,  $1 \leq l' \leq m_v$  se tiene que  $\pi_s(P_l^v) \in \mathcal{Q}^{\pi_s(v)}$  y  $\pi_s(Q_{l'}^v) \in \mathcal{P}^{\pi_s(v)}$ .*

*Definimos*

(a)  $\mathcal{B}' = \{v_l^{l'} \mid v \in \mathcal{B}, 1 \leq l \leq n_v, 1 \leq l' \leq m_v\}$ ,

---

<sup>1</sup>Este formalismo es distinto al que se presenta en el Apéndice A.

- (b)  $\Delta: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  la función sobreyectiva dada por  $\Delta(v_l^l) = v$ , y  
(c)  $\Phi: \mathcal{L}_3(Y) \rightarrow \mathcal{B}'$  la función local (con anticipación y memoria 1) definida por  $\Phi(wvu) = v_l^l$ , donde  $wvu \in \mathcal{L}_3(Y)$  y  $1 \leq l \leq n_v$ ,  $1 \leq l' \leq m_v$  quedan determinados únicamente por las condiciones  $u \in P_l^v$  y  $w \in Q_{l'}^v$ .

Entonces  $\phi = \Phi^\infty(Y) \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  es un homeomorfismo a su imagen, la acción inducida  $\sigma' = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$  por  $\sigma$  en  $\phi(Y)$  es 1-bloque, y además  $\Delta^\infty = \phi^{-1}$ .

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. La función  $\phi = \Phi^\infty$  es claramente inyectiva y es un código de ventana deslizante, de modo que es una conjugación entre los  $\mathbb{Z}$ -subshifts  $Y$  y  $Z = \phi(Y)$ . Luego la acción  $G \curvearrowright^{\sigma'} Z$  inducida por  $\sigma$  verifica que  $\sigma'_t$  es el shift a la derecha. Además, de la definición sigue inmediatamente que  $\Delta^\infty = \phi^{-1}$ .

Veamos que  $\sigma'$  es 1-bloque. Sea  $y \in Y$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , y definamos  $z = \phi(y)$ ,  $v = y_{-n}$ . Escribamos  $z_{-n} = v_l^l$  donde  $1 \leq l \leq n_v$ ,  $1 \leq l' \leq m_v$  están determinados por las condiciones  $y_{-n-1} \in P_l^v$  y  $y_{-n+1} \in Q_{l'}^v$ . Definamos  $f(l), g(l')$  por

$$\pi_s(P_l^v) = Q_{f(l)}^{\pi_s(v)} \in \mathcal{Q}^{\pi_s(v)} \quad \text{y} \quad \pi_s(Q_{l'}^v) = P_{g(l')}^{\pi_s(v)} \in \mathcal{P}^{\pi_s(v)}.$$

Notemos que  $v, f(l)$  y  $g(l')$  solo dependen de  $z_{-n}$ .

Luego

$$\sigma'_s \circ \phi(y)_n = \phi \circ \sigma_s(y)_n = \Psi(\pi_s(y_{-n+1})\pi_s(y_{-n})\pi_s(y_{-n-1})) = \pi_s(v)_{f(l)}^{g(l')}$$

y vemos que  $\sigma'_s(z)_n$  solo depende de  $z_{-n}$ .

Sea ahora  $t \in T$ , y sean nuevamente  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y  $z = \phi(y)$ . Para los propósitos de esta conclusión conviene redefinir  $v = y_n$  y  $z_n = v_l^l$  donde  $1 \leq l \leq n_v$ ,  $1 \leq l' \leq m_v$  están determinados por las condiciones  $y_{n-1} \in P_l^v$  y  $y_{n+1} \in Q_{l'}^v$ . Definamos  $h(l), q(l')$  por

$$\pi_{\psi^{-(n+1)}}(P_l^v) = P_{h(l)}^{\pi_{\psi^{-(n+1)}}(v)} \in \mathcal{P}^{\pi_{\psi^{-(n+1)}}(v)} \quad \text{y} \quad \pi_{\psi^{-(n+1)}}(Q_{l'}^v) = Q_{q(l')}^{\pi_{\psi^{-(n+1)}}(v)} \in \mathcal{Q}^{\pi_{\psi^{-(n+1)}}(v)}.$$

Nuevamente  $v, h(l)$  y  $q(l')$  se pueden leer de  $z_n$ . Calculamos

$$\sigma'_t \circ \phi(y)_n = \phi \circ \sigma_t(y)_n = \Psi(\pi_{\psi^{-(n+1)}(t)}(y_{n-1})\pi_{\psi^{-(n+1)}(t)}(y_n)\pi_{\psi^{-(n+1)}(t)}(y_{n+1})) = \pi_{\psi^{-(n+1)}(t)}(v)_{q(l')}^{h(l)}$$

y vemos que  $\sigma'_t(z)_n$  solo depende de  $z_n$ . Luego  $\sigma'$  es 1-bloque.  $\square$

**Observación 2.8** *Es claro que en el ítem 1 del lema anterior podemos intercambiar el rol de los sucesores de un símbolo con los predecesores de éste.*

Además, si  $Y = Y_B \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices, entonces  $Z = \phi(Y) \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  también lo es. Cuando  $G$  es de tipo I,  $Z$  es un out-splitting particular de  $Y$  y tiene matriz de adyacencia  $B' \in M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  dada por

$$B'_{v^l, u^j} = \mathbf{1}_{u \in P_l^v} \quad \text{para todo } v^l, u^j \in \mathcal{B}'.$$

Cuando  $G$  es de tipo II,  $Z$  es el resultado de hacer un out-splitting seguido de un in-splitting de  $Y$ , y tiene matriz de adyacencia  $B' \in M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  dada por

$$B'_{v_l^l, u_{j'}^j} = \mathbf{1}_{v \in Q_{j'}^v, u \in P_l^v} \quad \text{para todo } v_l^l, u_{j'}^j \in \mathcal{B}'.$$

**Proposición 2.9** *Sea  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift y  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción por homeomorfismos de un grupo  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  tal que  $\sigma_{(e,1)}$  (resp.  $\sigma_r$ ) es el shift a la derecha en  $Y$ . Entonces existe un  $\mathbb{Z}$ -subshift  $Z$  conjugado a  $Y$  tal que la acción  $\sigma'$  inducida por  $\sigma$  en  $Z$  es 1-bloque.*

*Si  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices, entonces  $Z$  también se puede escoger como un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. La idea es simplemente ampliar el alfabeto de  $Y$ .

Para cada  $y \in Y$  definimos  $(y)$  como la tupla  $(\sigma_t(y)_0, \sigma_{ts}(y)_0)_{t \in T} \in \mathcal{B}^{G_1}$ . Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto finito  $\{(y) \mid y \in Y\}$  y  $\phi: Y \rightarrow \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$  dada por

$$y \mapsto \phi(y) = ((\sigma_{r^n} y))_{n \in \mathbb{Z}} = ((\sigma_{tr^n}(y)_0, \sigma_{tr^{-n}s}(y)_0)_{t \in T})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Es claro que  $\phi$  es continua (los  $\sigma_t, \sigma_{ts}$  son continuos), inyectiva y que conmuta con el shift a la derecha.

Sea  $Z = \phi(Y)$ . Veamos que la acción  $G \curvearrowright^{\sigma'} Z$  es 1-bloque. Tomemos  $t' \in T$ ,  $y \in Y$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Si definimos  $\pi_{t'}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  por  $\pi_{t'}((a_t, a_{ts})_{t \in T}) = (a_{tt'}, a_{t\psi_s(t')_s})_{t \in T}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma'_{t'} \circ \phi(y)_n &= \phi \circ \sigma_{t'}(y)_n = (\sigma_{r^n t'} y) = (\sigma_{t\psi^n(t')_r^n}(y)_0, \sigma_{t\psi_s \circ \psi^n(t')_t^{-n}s}(y)_0)_{t \in T} \\ &= \pi_{\psi^{-n}(t')}(\phi(y)_n). \end{aligned}$$

Similarmente, si definimos  $\pi_s: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  por  $\pi_s((a_t, a_{ts})_{t \in T}) = ((a_{ts}, a_t)_{t \in T})$ , obtenemos la igualdad

$$\sigma'_s \circ \phi(y)_n = \phi \circ \sigma_s(y)_n = (\sigma_{r^n s} y) = ((\sigma_{tr^n s} y)_0, (\sigma_{tr^{-n} y})_0)_{t \in T} = \pi_s(\phi(y)_{-n}).$$

Luego  $(Z, G)$  es el sistema requerido.

Supongamos que además tenemos que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices. Entonces sabemos que  $Z$  necesariamente es un  $\mathbb{Z}$ -SFT, pero no necesariamente es de vértices. Sin embargo, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que la presentación  $\{-N, \dots, N\}$ -higher-block de  $Z$  sí es de vértices. En la notación del Lema 2.7 podemos tomar todas las particiones  $\mathcal{P}^v, \mathcal{Q}_v, v \in \mathcal{D}$  lo más finas posibles (es decir, compuestas por singletons) y entonces las hipótesis del lema se satisfacen. Luego obtenemos un  $\mathbb{Z}$ -subshift  $Z_1$  que coincide salvo renombramiento con la presentación  $\{-1, 0, 1\}$ -higher-block de  $Z$  tal que la acción de  $G$  en  $Z_1$  es 1-bloque. Repitiendo este procedimiento  $N$  veces obtenemos el subshift  $Z_N$  deseado.  $\square$

## 2.2. Recodificación como $\mathbb{Z}$ -subshifts

El resultado principal de esta sección y capítulo construye a partir de un  $G$ -subshift  $(X, G)$  con  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  conjugada a  $(X, G)$ . El  $\mathbb{Z}$ -subshift  $Y$  resulta ser un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices cuando  $X$  es de tipo nearest neighbour. La idea básica es tomar los patrones de  $T$  (resp.  $G_1$ ) como el alfabeto de  $Y$ .

**Proposición 2.10** Sea  $G \curvearrowright^{\sigma'} X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -subshift con  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$ .

1. Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I. Definamos  $\mathcal{B} = \mathcal{L}_T(X)$  y las permutaciones  $\pi_{t'}$  por

$$\pi_{t'}((a_t)_{t \in T}) = (a_{t'^{-1}t})_{t \in T}. \quad (2.7)$$

2. Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II. Definamos  $\mathcal{B} = \mathcal{L}_{G_1}(X)$ , y las permutaciones  $\pi_{t'}, \pi_s$  por

$$\pi_{t'}((a_t, a_{ts})_{t \in T}) = (a_{t'^{-1}t}, a_{t'^{-1}ts})_{t \in T} \quad y \quad \pi_s((a_t, a_{ts})_{t \in T}) = (a_{\psi_s(t)s}, a_{\psi_s(t)})_{t \in T}. \quad (2.8)$$

Entonces el sistema  $G \curvearrowright^{\sigma'} X$  es conjugado a una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\sigma} Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  determinada por  $\pi$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos solamente el ítem 2, pues el primero es idéntico.

Sea  $\phi: X \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la función definida en cada  $x \in X$  por  $\phi(x) = y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  donde cada  $y_n = (x_{\psi^n(t)r^n}, x_{\psi^n(t)r^ns})_{t \in T}$ . La función  $\phi$  está bien definida pues para cada  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$y_n = (x_{\psi^n(t)r^n}, x_{\psi^n(t)r^ns})_{t \in T} = \sigma_{r^{-n}}(x)|_{G_1} \in \mathcal{L}_{G_1}(X) = \mathcal{B}.$$

Esta igualdad muestra también que  $\phi \circ \sigma'_r = \sigma_r \circ \phi$  (recordemos que definimos  $\sigma_r$  como el shift a la derecha en  $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ ), ya que cuando  $x \in X$  tenemos que

$$\phi \circ \sigma'_r(x)_n = \sigma'_{r^n} \circ \sigma'_{r^{-1}}(x)|_{G_1} = \sigma'_{r^{-n+1}}(x)|_{G_1} = \phi(x)_{n-1} = \sigma_r \circ \phi(x)_n$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

La aplicación  $\phi$  es continua pues lo es por coordenadas, y además es una biyección con su imagen  $Y = \phi(X)$ . Luego es un homeomorfismo pues  $X$  es compacto. Para concluir lo requerido basta probar que  $\phi \circ \sigma'_g = \sigma_g \circ \phi$  donde  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  es la acción 1-bloque determinada por  $\pi$ .

Afirmamos que  $\phi \circ \sigma'_{t'} = \sigma_{t'} \circ \phi$ : en efecto, tomemos  $x \in X$ , escribamos  $\phi(x) = y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  y calculemos para cada  $n \in \mathbb{Z}$  la expresión

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma'_{t'}(x)_n &= \phi((x_{t'^{-1}tr^m}, x_{t'^{-1}tr^ms})_{t \in T, m \in \mathbb{Z}})_n \\ &= (x_{t'^{-1}\psi^n(t)r^n}, x_{t'^{-1}\psi^n(t)r^ns})_{t \in T} \\ &= (x_{\psi^n(\psi^{-n}(t'^{-1}t)r^n}, x_{\psi^n(\psi^{-n}(t'^{-1}t)r^ns)})_{t \in T} \\ &= ((y_n)_{\psi^{-n}(t')^{-1}t}, (y_n)_{\psi^{-n}(t')^{-1}ts})_{t \in T} = \sigma_{t'}(y)_n \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad sigue de notar que

$$((y_n)_t, (y_n)_{ts})_{t \in T} = (x_{\psi^n(t)r^n}, x_{\psi^n(t)r^ns})_{t \in T}.$$

Veamos ahora que  $\phi \circ \sigma'_s = \sigma_s \circ \phi$ . Tomemos  $x \in X$ , escribamos  $\phi(x) = y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Notemos que para cada  $n \in \mathbb{Z}, t \in T$  tenemos la igualdad  $str^n = \psi_s(t)r^{-n}s$ , de modo que

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma'_s(y)_n &= \phi((x_{\psi_s(t)r^{-m}s}, x_{\psi_s(t)r^{-m}})_{t \in T, m \in \mathbb{Z}})_n \\ &= (x_{\psi_s \circ \psi^n(t)r^{-n}s}, x_{\psi_s \circ \psi^n(s)r^{-n}})_{t \in T} \\ &= (x_{\psi^{-n} \circ \psi_s(t)r^{-n}s}, x_{\psi^{-n} \circ \psi_s(t)r^{-n}})_{t \in T} \\ &= ((y_{-n})_{\psi_s(t)s}, (y_{-n})_{\psi_s(t)})_{t \in T} = \sigma_s(y)_n. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 2.11** *Sea  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -SFT de tipo nearest-neighbour con respecto a un generador natural  $S$  de  $G$ . Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la acción 1-bloque construida en la Proposición 2.10 a partir de  $G \curvearrowright^{\sigma'} X$ . Entonces  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_{T} G_2$  es de tipo II. Para ver que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -shift de vértices basta probar que si  $a \in \mathcal{B}$  y  $u, v \in \mathcal{L}(Y)$  son palabras finitas con  $ua, av \in \mathcal{L}(Y)$  entonces  $uav \in \mathcal{L}(Y)$ . Sean  $x, y \in X$  tales que  $\phi(x)_{[-|u|, 0]} = ua$  y  $\phi(y)_{[0, |v|]} = av$ , y recordemos que  $a \in \mathcal{B} = \mathcal{L}_{G_1}(X)$  es un patrón de  $X$ . La definición de  $\phi$  muestra que  $x|_{G_1} = y|_{G_1} = a$ .

Sean  $G^+, G^- \subset G$  dados por

$$G^+ = \{tr^n, tr^n s \mid t \in T, n > 0\} \quad \text{y} \quad G^- = \{tr^n, tr^n s \mid t \in T, n < 0\}.$$

Como  $X$  es de tipo nearest-neighbour y quitar  $G_1 = T \cup Ts$  del grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{G,S}$  lo desconecta en las dos componentes  $G^+$  y  $G^-$ , el punto  $z \in \mathcal{A}^G$  definido por  $z|_{G^-} = x|_{G^-}$ ,  $z|_{G^+} = y|_{G^+}$ ,  $z|_{G_1} = a$  está en  $X$ . Por último,  $\phi(z)_{[-|u|, |v|]} = uav \in \mathcal{L}(Y)$ , pues la definición de  $\phi(z)_n$  solo depende de la clase lateral  $r^n G_1$ .  $\square$

**Definición 2.12** *Sean  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $X$  un  $G$ -subshift. Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y$  la acción 1-bloque construida en la Proposición 2.10. Diremos que  $\sigma$  **representa** a  $(X, G)$  en  $\mathbb{Z}$ .*

**Ejemplo 2.13** *Veamos cómo se ve el  $G$ -subshift de Fibonacci representado en  $\mathbb{Z}$  según la Proposición 2.10.*

1. Sea  $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  la involución determinada por  $\psi(1) = 2$ . Consideremos el subshift de Fibonacci  $X_{\text{Fib}}$  sobre  $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  con generadores  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ , y  $G \curvearrowright^\sigma Y \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la acción 1-bloque que lo representa en  $\mathbb{Z}$ .

Recordemos que el alfabeto de  $Y$  es

$$\mathcal{L}_T(X_{\text{Fib}}) = \{0^{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}\} \cup \{(\mathbf{1}_{j=k})_{j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}\}_{k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$$

que reetiquetaremos en ese orden como  $\{0, 1_0, 1_1, 1_2\}$ . La Figura 2.1 muestra cómo se escribe una configuración  $y = \phi(x) \in Y$  a partir de un  $x \in X$ . Es importante notar que el grafo de  $T = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  se voltea al avanzar de izquierda a derecha y que esto afecta la codificación. Por ejemplo, la imagen de  $x|_{(0, -1)\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  y  $x|_{(0, 2)\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  son distintas. Este “twist” proviene de  $\psi$ .

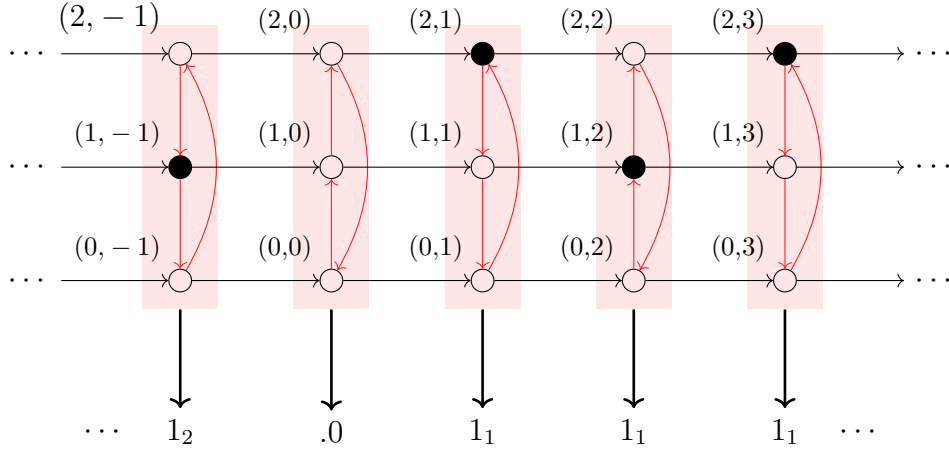
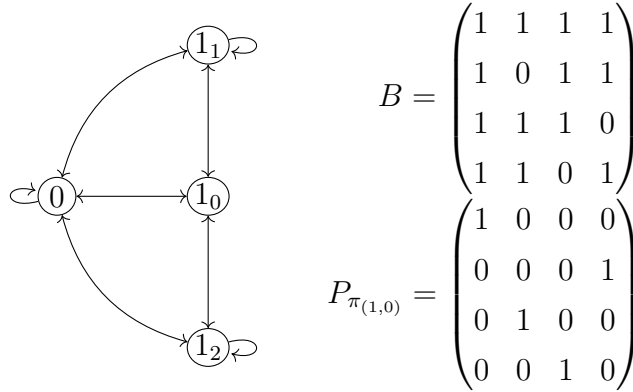


Figura 2.1: Codificación de  $x \in X_{\text{Fib}} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \psi\mathbb{Z}}$  a  $y = \phi(x) \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ . Las aristas rojas y negras corresponden a los generadores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  respectivamente.

El grafo  $\Gamma(B)$  que presenta  $Y$  es



y es directo verificar que  $P_{\pi_{\psi^{-1}(1,0)}} B P_{\pi(1,0)} = P_{\pi(1,0)}^2 B P_{\pi(1,0)} = B$ .

- Recordemos que  $D_6 = \langle t, s \mid t^3 = s^2 = tsts = e \rangle$ . Al identificar  $t = 2 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  podemos definir  $G = D_6 *_T \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  donde  $T = \langle t \rangle = \langle 2 \rangle$ . Un generador natural de  $G$  es  $S = \{t = 2, s, r = s^3\}$ . Los automorfismos  $\psi_s, \psi_r = \psi_{s^3} \in \text{Aut}(T)$  son la identidad y el automorfismo determinado por  $\psi_r(t) = t^{-1}$  respectivamente.

Consideremos ahora el subshift de Fibonacci  $X_{\text{Fib}}$  sobre  $G$  con generador  $S$ . Notemos que al representar  $X_{\text{Fib}}$  en  $\mathbb{Z}$  tenemos la opción de escribir  $G$  como  $D_6 *_T \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_T D_6$ . Tomaremos la primera.

El alfabeto de  $Y$  es

$$\mathcal{L}_T(X_{\text{Fib}}) = \{0^{D_6}\} \cup \{(\mathbf{1}_{h=g})_{h \in D_6}\}_{g \in D_6} \cup \{(\mathbf{1}_{h=t^k \vee h=t^{k+1}s})_{h \in D_6}, (\mathbf{1}_{h=t^k \vee h=t^{k+2}s})_{h \in D_6}\}_{k=0,1,2}$$

que reetiquetaremos en ese orden como  $\{0\} \cup \{1_g\}_{g \in D_6} \cup \{2_{k,k+1}, 2_{k,k+2}\}_{k=0,1,2}$ . La Figura 2.2 muestra cómo se escribe una configuración  $y = \phi(x) \in Y$  a partir de un  $x \in X$ .

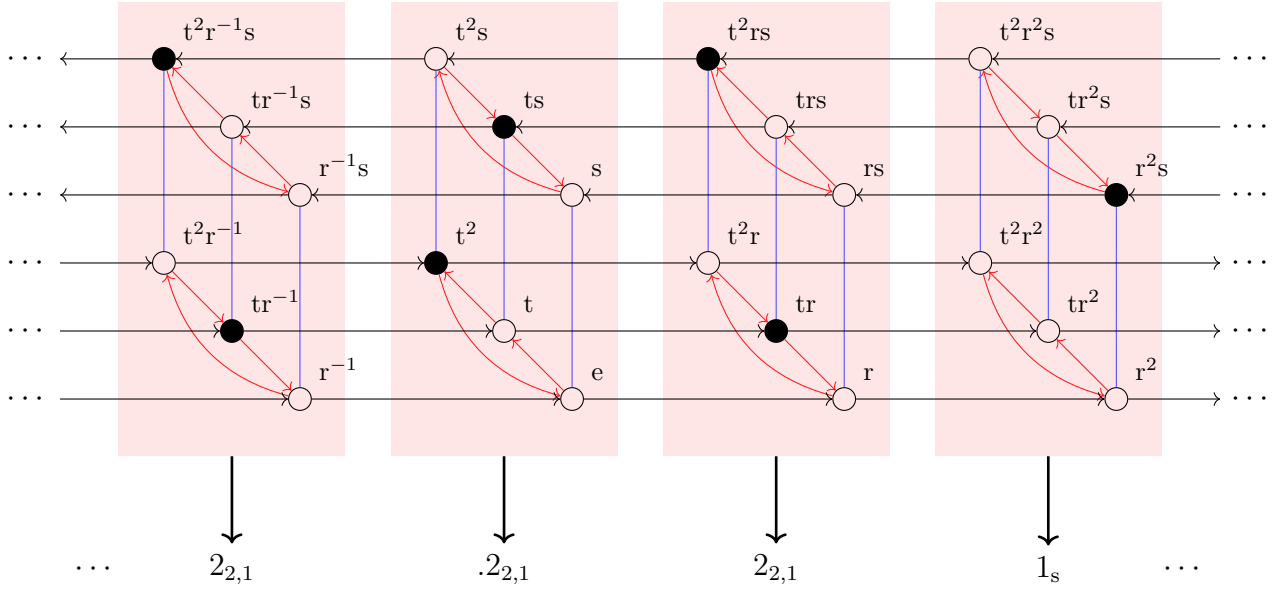


Figura 2.2: Codificación de  $x \in X_{\text{Fib}} \subset \{0, 1\}^{D_6 * T \mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}}$  a  $y = \phi(x) \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ . Las aristas rojas, azules y negras corresponden a los generadores  $r$ ,  $s$  y  $t$  respectivamente.

Ahora mostraremos un procedimiento opuesto al enunciado en la Proposición 2.10: dado una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Y$  construiremos un  $G$ -subshift conjugado a  $(Y, G)$  que resulta ser un SFT cuando  $Y$  lo es. Esta construcción no es exactamente la inversa del proceso delineado en la Proposición 2.10. Por ejemplo, el  $G$ -subshift  $X$  que resulta de la Proposición 2.14 en general no es de tipo nearest-neighbour aún cuando  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices. De todas maneras, ambas proposiciones prueban que los  $G$ -subshifts y las acciones 1-bloque son básicamente el mismo objeto.

**Proposición 2.14** *Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  una acción 1-bloque. Entonces existe un conjunto finito  $\mathcal{A}$  y un  $G$ -subshift  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $G \curvearrowright^\sigma Y$  es conjugado a  $(X, G)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Una manera rápida de probar el enunciado es notar que  $G \curvearrowright^\sigma Y$  es una acción expansiva en un espacio métrico compacto totalmente desconexo, y entonces es conjugada a un  $G$ -subshift. Pese a ello, mostraremos cómo construir este  $G$ -subshift explícitamente. Esto servirá después para probar que el  $G$ -subshift resultante es un SFT cuando  $Y$  lo es.

Haremos el caso en que  $G = G_1 *_{T} G_2$  es de tipo II. Sea  $G_1 \curvearrowright^\pi \mathcal{B}$  tal que  $\sigma$  es determinada por  $\pi$ . Primero probaremos el caso en que la acción  $\pi$  es transitiva.

Fijemos  $\bar{b} \in \mathcal{B}$  y tomemos  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ . La idea detrás de la demostración es notar que cualquier acción transitiva  $G_1 \curvearrowright^\pi \mathcal{B}$  es conjugada a la acción por multiplicación izquierda  $G_1 \curvearrowright G_1 / \text{Stab}_{G_1}(\bar{b})$ , y que  $G_1 / \text{Stab}_{G_1}(\bar{b})$  se puede escribir naturalmente como un subconjunto de  $\mathcal{A}^{G_1}$ .

Sea  $\phi: Y \rightarrow \mathcal{A}^G$  definida en cada  $y \in Y$  por

$$\phi(y) = (x_{tr^n}, x_{tr^{n_s}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \text{ donde } (x_{tr^n}, x_{tr^{n_s}}) = (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t_s)}(\bar{b})=y_n}).$$

La función  $\phi$  es continua pues lo es por coordenadas. Además es inyectiva: la acción  $\pi$  es transitiva y entonces, para cada  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  existe un  $t \in T$  tal que  $\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b}) = y_n$  o  $\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b}) = y_n$ . Luego  $y$  se puede recuperar a partir de  $\phi(y)$ . Como en proposiciones anteriores, concluimos que  $\phi$  es un homeomorfismo entre  $Y$  y su imagen  $\phi(Y) = X$ .

Para concluir que  $X$  es un  $G$ -subshift basta probar que  $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi$ . Veamos que  $\phi \circ \sigma_r = \sigma_r \circ \phi$ : sea  $y \in Y$  y  $x = \phi(y) \in X$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_r \circ \phi(y) &= (x_{\psi^{-1}(t)r^{n-1}}, x_{\psi^{-1}(t)r^{n-1}s})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n-1)} \circ \psi^{-1}(t)}(\bar{b})=y_{n-1}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n-1)} \circ \psi^{-1}(t)s}(\bar{b})=y_{n-1}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b})=y_{n-1}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b})=y_{n-1}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= \sigma_r \circ \phi(y). \end{aligned}$$

Ahora veamos la igualdad  $\phi \circ \sigma_{t'} = \sigma_{t'} \circ \phi$  para  $t' \in T$ . Definiendo  $y, x$  como antes, podemos calcular

$$\begin{aligned} \sigma_{t'} \circ \phi(y) &= (x_{t'^{-1}t r^n}, x_{t'^{-1}t r^n s})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'^{-1}t)}(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'^{-1}t)s}(\bar{b})=y_n})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t')}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t')}(y_n)})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= \phi \circ \sigma_{t'}(y). \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que  $\phi \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \phi$  calculando

$$\begin{aligned} \sigma_s \circ \phi(y) &= (x_{\psi_s(t)r^{-n}s}, x_{\psi_s(t)r^{-n}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi_s^n \circ \psi_s(t)s}(\bar{b})=y_{-n}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi_s^n \circ \psi_s(t)}(\bar{b})=y_{-n}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi_s \circ \psi^{-n}(t)s}(\bar{b})=y_{-n}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi_s \circ \psi^{-n}(t)}(\bar{b})=y_{-n}})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b})=\pi_s(y_{-n})}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b})=\pi_s(y_{-n})})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}} \\ &= \phi \circ \sigma_s(y). \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos usado que  $\psi_s \circ \psi^{-n}(t)s = s\psi^{-n}(t)$ . Luego  $X$  es un  $G$ -subshift.

Para el caso en que  $\pi$  no es transitiva, escribamos  $\mathcal{B}$  como una unión finita y disjunta de órbitas  $\cup_{i=1}^l \text{Orb}_{G_1}(\bar{b}_i)$  con cada  $\bar{b}_i \in \mathcal{B}$ . Definamos  $\mathcal{A} = \{0, 1\}^l$ . Sea  $\phi: Y \rightarrow \mathcal{A}^G$  definida en cada  $y \in Y$  por

$$\phi(y) = (x_{tr^n}, x_{tr^n s})_{t \in T, n \in \mathbb{Z}}$$

donde los vectores  $x_{tr^n}, x_{tr^n s} \in \mathcal{A}$  quedan determinados por

$$(x_{tr^n})_i = \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b}_i)=y_n} \quad y \quad (x_{tr^n s})_i = \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b}_i)=y_n}$$

para todo  $1 \leq i \leq l$ . Exactamente el mismo argumento que en el caso transitivo muestra que  $\phi$  es continua y conmuta con las acciones adecuadas. Ahora también  $\phi$  es inyectiva, pues para todo  $y \in Y$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  existen  $t \in T$  y  $1 \leq i \leq l$  tales que  $\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b}_i) = y_n$  o  $\pi_{\psi^{-n}(t)s}(\bar{b}_i) = y_n$ . Es decir,  $y$  se puede recuperar a partir de  $\phi(y)$ . Concluimos que  $\phi$  es una conjugación en este caso también.  $\square$



**Proposición 2.15** Sea  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -SFT y  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción 1-bloque. Sea  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  el  $G$ -subshift construido en la Proposición 2.14. Entonces  $X$  es un  $G$ -SFT.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad,  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices. Sea  $G_1 \curvearrowright^{\pi} cB$  tal que  $\pi$  presenta a  $\sigma$ , y sea  $\phi: Y \rightarrow X$  la conjugación construida en la Proposición 2.14. Para no complicar la notación, nuevamente probaremos primero el caso en que  $\pi$  es transitiva.

Veremos que  $X = X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$ , donde  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  son conjuntos finitos de patrones definidos como sigue.

1. Sea  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^{G_1}$  el conjunto de patrones  $p$  tales que no existe  $b \in \mathcal{B}$  con

$$p = (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=b}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=b})_{t \in T}.$$

Estos patrones fuerzan a que las configuraciones  $x \in X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$  sean de la forma  $\phi(y)$  para  $y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ .

2. Sea  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{A}^{G_1 \cup rG_1}$  el conjunto de patrones  $p'$  tales que no existe  $bb' \in \mathcal{L}_2(Y)$  con

$$(p_t, p_{ts})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=b}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=b})_{t \in T} \quad \text{y} \quad (p_{tr}, p_{trs})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)}(\bar{b})=b'}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)s}(\bar{b})=b'})_{t \in T}.$$

Estos patrones fuerzan a que la secuencia  $y \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  con  $\phi(y) = x$  esté en  $Y$ .

Veamos entonces  $X = X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$ . Para la inclusión hacia la izquierda, tomemos  $x = \phi(y) \in X$  y un patrón  $p \in \mathcal{A}^{G_1}$  tal que  $p \sqsubset x$ . Esto significa que existe  $g \in G$  con  $x_{gh} = p_h$  para todo  $h \in G_1$ . Supongamos que  $g$  es de la forma  $t'r^n$ . Entonces

$$\begin{aligned} (p_t, p_{ts})_{t \in T} &= (x_{t'r^n t}, x_{t'r^n ts})_{t \in T} \\ &= (x_{t'\psi^n(t)r^n}, x_{t'\psi^n(t)r^n s})_{t \in T} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'\psi^n(t))}(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'\psi^n(t))s}(\bar{b})=y_n})_{t \in T} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)})_{t \in T} \end{aligned} \quad (2.9)$$

y en particular  $p \notin \mathcal{F}$ . Si  $g$  es de la forma  $t'r^n s$ , entonces

$$\begin{aligned} (p_t, p_{ts})_{t \in T} &= (x_{t'r^n st}, x_{t'r^n sts})_{t \in T} \\ &= (x_{t'\psi^n \circ \psi_s(t)r^n s}, x_{t'\psi^n \circ \psi_s(t)r^n})_{t \in T} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'\psi^n \circ \psi_s(t))s}(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t'\psi^n \circ \psi_s(t))}(\bar{b})=y_n})_{t \in T} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_{st}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{sts}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)})_{t \in T} \\ &= (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)})_{t \in T} \end{aligned} \quad (2.10)$$

y tampoco  $p \notin \mathcal{F}$  en este caso.

Ahora sea  $p \in \mathcal{A}^{G_1 \cup rG_2}$  tal que  $p \sqsubset x$ , y sea  $g \in G$  con  $x_{gh} = p_h$  para todo  $h \in G_1$ . Supongamos nuevamente que  $g$  es de la forma  $t'r^n$ . El cálculo (2.9) implica que

$$(p_t, p_{ts})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)})_{t \in T}, \quad (2.11)$$

y además

$$\begin{aligned}
(p_{tr}, p_{trs})_{t \in T} &= (x_{t' \psi^n(t) r^{n+1}}, x_{t' \psi^n(t) r^{n+1} s})_{t \in T} \\
&= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n+1)}(t' \psi^n(t))}(\bar{b})=y_{n+1}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n+1)}(t' \psi^n(t))_s}(\bar{b})=y_{n+1}})_{t \in T} \\
&= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-(n+1)}(t'-1)}(y_{n+1})}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)_s}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-(n+1)}(t'-1)}(y_{n+1})})_{t \in T}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Como  $\pi_{\psi^{-n}(t'-1)}(y_n) \pi_{\psi^{-(n+1)}(t'-1)}(y_{n+1}) = \sigma_{t'-1}(y)|_{[n, n+1]}$  está en  $\mathcal{L}_2(Y)$ , vemos que  $p \notin \mathcal{F}'$ .

Supongamos ahora que  $g$  es de la forma  $t' r^n s$ . El cálculo (2.10) muestra que

$$(p_t, p_{ts})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=\pi_{s\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=\pi_{s\psi^{-n}(t'-1)}(y_n)})_{t \in T},$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
(p_{tr}, p_{trs})_{t \in T} &= (x_{t' \psi^n \circ \psi_s(t) r^{k-1} s}, x_{t' \psi^n \circ \psi_s(t) r^{n-1} s})_{t \in T} \\
&= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n-1)}(t' \psi^n \circ \psi_s(t))_s}(\bar{b})=y_{n-1}}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-(n-1)}(t' \psi^n \circ \psi_s(t))}(\bar{b})=y_{n-1}})_{t \in T} \\
&= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi \circ \psi_s(t)_s}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-(n-1)}(t'-1)}(y_{n-1})}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi \circ \psi_s(t)}(\bar{b})=\pi_{\psi^{-(n-1)}(t'-1)}(y_{n-1})})_{t \in T} \\
&= (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)}(\bar{b})=\pi_{s\psi^{-(n-1)}(t'-1)}(y_{n-1})}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-1}(t)_s}(\bar{b})=\pi_{s\psi^{-(n-1)}(t'-1)}(y_{n-1})})_{t \in T}.
\end{aligned}$$

Notando que

$$\pi_{s\psi^{-n}(t'-1)}(y_n) \pi_{s\psi^{-(n-1)}(t'-1)}(y_{n-1}) = \sigma_s \circ \sigma_{t'-1}(y)|_{[-n, -n+1]} \in \mathcal{L}_2(Y),$$

obtenemos que  $p \notin \mathcal{F}'$  en este caso. Concluimos que  $x \in X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$ .

Para la otra inclusión tomemos  $x \in X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$ . La ecuación (2.9) con  $t' = e$  prueba que para cada  $n \in \mathbb{Z}$  existe un símbolo  $y_n \in \mathcal{B}$  tal que

$$(x_{\psi^n(t) r^n}, x_{\psi^n(t) r^n s})_{t \in T} = (x_{r^n t}, x_{r^n t s})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_t(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{ts}(\bar{b})=y_n})_{t \in T},$$

es decir

$$(x_{tr^n}, x_{tr^n s})_{t \in T} = (\mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)}(\bar{b})=y_n}, \mathbf{1}_{\pi_{\psi^{-n}(t)_s}(\bar{b})=y_n})_{t \in T}. \tag{2.13}$$

A su vez, las igualdades (2.11) y (2.12) con  $t' = e$  muestran que  $y_n y_{n+1} \in \mathcal{L}_2(Y)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices, vemos que  $y \in Y$ . Ahora (2.13) implica que  $x = \phi((y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) \in \phi(Y) = X$ . Concluimos que  $X = X_{\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'}$ . Esto muestra el caso en que  $\pi$  es transitiva.

Si  $\pi$  no fuese transitivo, los mismos patrones prohibidos  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ , redefinidos de manera natural en el nuevo alfabeto  $\mathcal{A}$  de la Proposición 2.14 y los mismos cálculos que antes prueban que  $X$  es un SFT.  $\square$

## 2.3. Extensiones de Krieger

Pese a que no es el tema central de la tesis, mostraremos que la relación entre los  $G$ -sóficos y los  $\mathbb{Z}$ -sóficos dotados de una acción 1-bloque es análoga a la relación entre  $G$ -SFTs y  $\mathbb{Z}$ -SFTs

dotados de una acción 1-bloque. Para ello, necesitaremos construir a partir de un  $\mathbb{Z}$ -sófico  $Y$  una extensión  $\hat{Y}$   $\mathbb{Z}$ -SFT dotada de una acción 1-bloque. Las extensiones de Krieger (ver [Kri84]) están definidas de manera intrínseca y son aptas para este propósito. Esta idea fue usada en [KR13] para calcular la función zeta de acciones 1-bloque de  $D_\infty$  en  $\mathbb{Z}$ -sóficos.

**Definición 2.16** Sea  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift. Dado  $z \in Y$ , definimos

1.  $z^+ = z|_{[1, \infty)}$  y  $z^- = z|_{(-\infty, -1]}$ ,
2.  $\omega^+(z^-) = \{\rho \in \mathcal{B}^{[0, \infty)} \mid z^- \cdot \rho \in Y\}$  y  $\omega^-(z^+) = \{\lambda \in \mathcal{B}^{(-\infty, 0]} \mid \lambda|_{(-\infty, -1]} \cdot \lambda_0 z^+ \in Y\}$  el **futuro** y el **pasado** de  $z$  respectivamente, y
3.  $\mathcal{C}^+ = \{\omega^+(y^-) \mid y \in Y\}$  y  $\mathcal{C}^- = \{\omega^-(y^+) \mid y \in Y\}$  el **conjunto de futuros y pasados** de  $Y$  respectivamente.

Es conocido (ver [Kit98]) que un  $\mathbb{Z}$ -subshift es sófico ssi su conjunto de futuros y su conjunto de pasados son finitos. Esto motiva la próxima definición.

**Definición 2.17** Sea  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -sófico.

1. Sean

- (a)  $\hat{\mathcal{B}}^+$  el conjunto finito  $\{(b, \omega^+(\lambda)) \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}^+ \mid \omega^+(\lambda b) \neq \emptyset\}$ ,
- (b)  $\mathcal{L}^+ : \hat{\mathcal{B}}^+ \rightarrow \mathcal{B}$  dada por  $\mathcal{L}^+((b, \omega^+(\lambda))) = b$  y
- (c)  $\hat{B}^+ \in M_{\hat{\mathcal{B}}^+, \hat{\mathcal{B}}^+}(\{0, 1\})$  la matriz esencial definida por

$$\hat{B}_{(b_1, \omega^+(\lambda_1)), (b_2, \omega^+(\lambda_2))}^+ = 1 \text{ ssi } \omega^+(\lambda_1 b_1) = \omega^+(\lambda_2).$$

Definimos la **extensión derecha de Krieger**  $\hat{Y}^+$  de  $Y$  como el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $\hat{Y}^+ = Y_{\hat{\mathcal{B}}^+} \subseteq (\hat{\mathcal{B}}^+)^{\mathbb{Z}}$  equipado del factor 1-bloque  $(\mathcal{L}^+)^{\infty} : \hat{Y}^+ \rightarrow Y$ .

2. Sean

- (a)  $\hat{\mathcal{B}}$  el conjunto finito  $\{(\omega^-(\rho), b, \omega^+(\lambda)) \in \mathcal{C}^- \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}^+ \mid \omega^+(\lambda b) \neq \emptyset, \omega^-(b\rho) \neq \emptyset\}$ ,
- (b)  $\mathcal{L} : \hat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$  dada por  $\mathcal{L}((\omega^-(\rho), b, \omega^+(\lambda))) = b$  y
- (c)  $\hat{B} \in M_{\hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{B}}}(\{0, 1\})$  la matriz esencial definida por

$$\hat{B}_{(\omega^-(\rho_1), b_1, \omega^+(\lambda_1)), (\omega^-(\rho_2), b_2, \omega^+(\lambda_2))} = 1 \text{ ssi } \omega^-(\rho_1) = \omega^-(b_2 \rho_2) \text{ y } \omega^+(\lambda_1 b_1) = \omega^+(\lambda_2).$$

Definimos la **extensión bilateral de Krieger**  $\hat{Y}$  de  $Y$  como el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $\hat{Y} = Y_{\hat{\mathcal{B}}} \subseteq \hat{\mathcal{B}}^{\mathbb{Z}}$  equipado del factor 1-bloque  $(\mathcal{L})^{\infty} : \hat{Y} \rightarrow Y$ .

Dados  $X \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}, Y \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  dos  $\mathbb{Z}$ -subshifts y un factor 1-bloque  $\Phi^{\infty} : X \rightarrow Y$ , diremos que  $\Phi^{\infty}$  es **resolvente a la derecha** si para cada  $b \in \mathcal{B}$ ,  $\Phi$  restringida a  $\text{Suc}_1(b)$  es inyectiva. Tales factores preservan la entropía [Kit98].

**Proposición 2.18** ([Kri84]) *Sea  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -sófico y  $\hat{Y}^+, \hat{Y}$  sus extensiones de Krieger. Entonces*

1. *las matrices  $\hat{B}^+, \hat{B}$  están bien definidas,*
2. *los códigos  $(\mathcal{L}^+)^\infty, (\mathcal{L})^\infty$  efectivamente definen factores a  $Y$ , y*
3.  *$(\mathcal{L}^+)^\infty, (\mathcal{L})^\infty$  son resolventes a la derecha.*

*En particular,  $h_{top}(\hat{Y}^+, \mathbb{Z}) = h_{top}(\hat{Y}, \mathbb{Z}) = h_{top}(Y, \mathbb{Z})$ .*

**Proposición 2.19** *Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque presentada por  $\pi$ , donde  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -sófico. Entonces la extensión bilateral de Krieger  $\hat{Y}$  admite una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\hat{\sigma}} \hat{Y}$  tal que  $(\mathcal{L})^\infty$  es un factor entre  $G$ -sistemas.*

*Si  $G$  es de tipo I, entonces lo mismo vale con la extensión a la derecha de Krieger  $\hat{Y}^+$ .*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, y entonces solo consideraremos la extensión bilateral. El argumento para la extensión a la derecha en grupos de tipo I es idéntico, pero no funciona en grupos de tipo II pues  $\hat{Y}^+$  no admite un flip 1-bloque natural en general (ver la Observación 2.21).

Definamos primero acción  $G_1 \curvearrowright^{\hat{\pi}} \hat{\mathcal{B}}$  que determinará a  $\hat{\sigma}$ . Definimos

1. para  $t \in T$  la permutación  $\hat{\pi}_t$  por

$$\hat{\pi}_t((\omega^-(\rho), b, \omega^+(\lambda))) = (\omega^-(\sigma_t(\rho)), \pi_t(b), \omega^+(\sigma_t(\lambda)))$$

donde  $\sigma_t(\rho) = (\pi_{\psi^{-n(t)}(\rho_n)})_{n \in \mathbb{N}_+} \in Y^+$  y  $\sigma_t(\lambda) = (\pi_{\psi^{-n(t)}(\lambda_n)})_{n \in -\mathbb{N}_+} \in Y^-$ , y

2. la permutación  $\hat{\pi}_s$  por

$$\hat{\pi}_s((\omega^-(\rho), b, \omega^+(\lambda))) = (\omega^-(\sigma_s(\lambda)), \pi_s(b), \omega^+(\sigma_s(\rho)))$$

donde  $\sigma_s(\lambda) = (\pi_s(\lambda_{-n}))_{n \in \mathbb{N}_+} \in Y^+$  y  $\sigma_s(\rho) = (\pi_s(\rho_{-n}))_{n \in -\mathbb{N}_+} \in Y^-$ .

El pasado  $\omega^-(\sigma_t(\rho))$  está bien definido: si  $\omega^-(\rho_1) = \omega^-(\rho_2)$ , cualquier  $\bar{\lambda} \in \omega^-(\sigma_t(\rho_1))$  verifica  $\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]} \cdot \bar{\lambda}_0 \sigma_t(\rho_1) \in Y$  y entonces

$$\sigma_{t-1}(\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]}) \cdot \pi_{t-1}(\bar{\lambda}_0) \rho_1 \in Y.$$

Luego  $\sigma_{t-1}(\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]}) \cdot \pi_{t-1}(\bar{\lambda}_0) \in \omega^-(\rho_1) = \omega^-(\rho_2)$  y deshaciendo estos pasos obtenemos

$$\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]} \cdot \bar{\lambda}_0 \sigma_t(\rho_2) \in Y,$$

es decir  $\bar{\lambda} \in \omega^-(\sigma_t(\rho_2))$ . Reemplazando  $\rho_1$  por  $\rho_2$  vemos que  $\omega^-(\sigma_t(\rho_1)) = \omega^-(\sigma_t(\rho_2))$ . El mismo argumento muestra que  $\omega^+(\sigma_t(\lambda))$  está bien definido. Similarmente  $\omega^+(\sigma_t(\lambda))\pi_t(b)$  y  $\omega^-(\pi_t(b)\sigma_t(\rho))$  son no vacíos pues  $\omega^+(\lambda b), \omega^-(b\rho)$  no lo son. Esto muestra que  $\hat{\pi}_t$  está bien definido, y un argumento análogo prueba lo mismo para  $\hat{\pi}_s$ .

De las ecuaciones

$$\hat{\pi}_s^2 = \text{id}_{\hat{\mathcal{B}}}, \quad \hat{\pi}_t \circ \hat{\pi}_{t'} = \hat{\pi}_{tt'} \quad \text{y} \quad \hat{\pi}_s \circ \hat{\pi}_t \circ \hat{\pi}_s = \hat{\pi}_{\psi_s(t)} \quad \text{para todo } t, t' \in T$$

(que se verifican usando sus contrapartes en  $\pi$ ) sigue que  $\hat{\pi}$  es una acción de  $G_1$  en  $\hat{\mathcal{B}}$ .

Ahora sean  $\hat{b}_i = (\omega^-(\rho_i), b_i, \omega^+(\lambda_i)) \in \hat{\mathcal{B}}$ ,  $i = 1, 2$  tales que  $\hat{B}_{\hat{b}_1, \hat{b}_2} = 1$ . Afirmamos que  $\hat{B}_{\hat{\pi}_t(\hat{b}_1), \hat{\pi}_{\psi^{-1}(t)}(\hat{b}_2)} = 1$ : esto se reduce a probar que

$$\omega^-(\sigma_t(\rho_1)) = \omega^-(\pi_{\psi^{-1}(t)}(b_2)\sigma_{\psi^{-1}(t)}(\rho_2)) \quad \text{y} \quad \omega^+(\sigma_t(\lambda_1)\pi_t(b_1)) = \omega^+(\sigma_{\psi^{-1}(t)}(\lambda_2)).$$

Sea entonces  $\bar{\lambda} \in \omega^-(\sigma_t(\rho_1))$ , de modo que como antes  $\sigma_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]}) \cdot \pi_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_0)\rho_1 \in Y$ , es decir

$$\sigma_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]}) \cdot \pi_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_0) \in \omega^-(\rho_1) = \omega^-(b_2\rho_2).$$

Luego

$$\sigma_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]}) \cdot \pi_{t^{-1}}(\bar{\lambda}_0)b_2\rho_2 \in Y$$

y vemos que

$$\bar{\lambda}_{(-\infty, -1]} \cdot \bar{\lambda}_0 \pi_t(b_2)\sigma_{\psi^{-1}(t)}(\rho_2) \in Y,$$

o  $\bar{\lambda} \in \omega^-(\hat{\pi}_{\psi^{-1}(t)}(b_2)\sigma_{\psi^{-1}(t)}(\rho_2))$ . Todos los pasos anteriores han sido equivalencias, de modo que  $\omega^-(\sigma_t(\rho_1)) = \omega^-(\hat{\pi}_{\psi^{-1}(t)}(b_2)\sigma_{\psi^{-1}(t)}(\rho_2))$ . Exactamente el mismo argumento muestra la otra igualdad entre los futuros correspondientes. Hemos probado que  $\hat{B} \leq P_{\hat{\pi}_t}^\top \hat{B} P_{\hat{\pi}_{\psi^{-1}(t)}}$ .

Veamos que también  $\hat{B}_{\hat{\pi}_s(\hat{b}_2), \hat{\pi}_s(\hat{b}_1)} = 1$ . Esto se reduce a las ecuaciones

$$\omega^-(\sigma_s(\lambda_2)) = \omega^-(\pi_s(b_1)\sigma_s(\lambda_1)) \quad \text{y} \quad \omega^+(\sigma_s(\rho_2)\pi_s(b_2)) = \omega^+(\sigma_s(\rho_1)),$$

que se verifican con el mismo argumento que en el párrafo anterior. Luego hemos probado  $\hat{B} \leq P_{\hat{\pi}_s} \hat{B} P_{\hat{\pi}_s}$ .

La Proposición 2.6 muestra que  $\hat{\pi}$  define una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\hat{\sigma}} \hat{Y}$ . Las igualdades

$$\pi_t \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \hat{\pi}_t \quad \text{y} \quad \pi_s \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \hat{\pi}_s$$

implican que  $(\mathcal{L})^\infty$  también es un factor de  $G$ -sistemas. □

Se puede probar que la acción  $\hat{\sigma}$  definida en la proposición anterior es la única acción 1-bloque en  $\hat{Y}$  ( $\hat{Y}^+$  respectivamente) tal que  $\mathcal{L}^\infty$  ( $(\mathcal{L}^+)^\infty$  respectivamente) es un factor entre  $G$ -sistemas. No necesitaremos esto para lo que sigue.

**Ejemplo 2.20** Sea  $G$  de tipo II y  $X_{\leq 1} \subset \{0, 1\}^G$  el sunny-side up shift

$$X_{\leq 1} = \{x \in \{0, 1\}^G \mid |\{g \in G \mid x_g = 1\}| \leq 1\}.$$

Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y \subset \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la acción 1-bloque que representa a  $X_{\leq 1}$  en  $\mathbb{Z}$ . Recordemos que

$$\mathcal{B} = \mathcal{L}_{G_1}(X_{\leq 1}) = \{(\mathbf{1}_{h=g})_{h \in G_1} \in \{0, 1\}^{G_1} \mid h \in G_1\} \cup \{0^{G_1}\},$$

y entonces podemos suponer que  $\mathcal{B}$  es  $\{0\} \cup G_1$  para ver que

$$Y = \{0^\infty\} \cup \bigcup_{h \in G_1} \text{Orb}_{\sigma_r}(0^\infty.h0^\infty).$$

La acción  $G_1 \curvearrowright^\pi \mathcal{B}$  que determina a  $\sigma$  fija a 0 y actúa libremente en  $G_1 \subset \mathcal{B}$  por  $\pi_h(g) = hg$ .

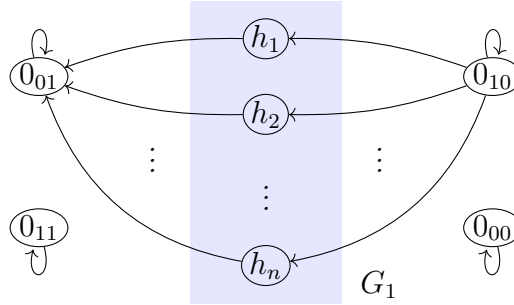
Veamos la extensión bilateral de Krieger  $\hat{Y}$ . Notemos que los futuros y pasados de  $Y$  son

$$\begin{aligned} C_0^+ &= \omega^+(0^\infty.) = \{.0^\infty, .0^n h 0^\infty \mid n \in \mathbb{N}, h \in G_1\}, & C_1^+ &= \omega^+(0^\infty e.) = \{0^\infty\}, \text{ y} \\ C_0^- &= \omega^-(.0^\infty) = \{0^\infty., 0^\infty h 0^n \mid n \in \mathbb{N}, h \in G_1\}, & C_1^- &= \omega^-(.e0^\infty) = \{0^\infty\} \end{aligned}$$

respectivamente. El alfabeto  $\hat{\mathcal{B}}$  resulta ser

$$\{(C_0^-, 0, C_0^+), (C_0^-, 0, C_1^+), (C_1^-, 0, C_0^+), (C_1^-, 0, C_1^+)\} \cup \{(C_0^-, g, C_0^+)\}_{g \in G_1}$$

y lo reescribimos como  $\{0_{00}, 0_{01}, 0_{10}, 0_{11}\} \cup G_1$ . Luego  $\hat{Y}$  es el conjunto de caminos biinfinitos del grafo  $\Gamma(\hat{\mathcal{B}})$  a continuación.



Las permutaciones  $\hat{\pi}$  actúan libremente en los símbolos  $G_1$  coloreados en azul y fijan a  $0_{00}$  y  $0_{11}$ . Los  $\hat{\pi}_t$  fijan  $0_{01}, 0_{10}$  y  $\hat{\pi}_s$  los intercambia.

La extensión derecha de Krieger es más adecuada para presentar este subshift. Salvo renombramiento, se puede ver que  $\hat{Y}^+$  coincide con conjunto de caminos biinfinitos del subgrafo de  $\Gamma(\hat{\mathcal{B}})$  inducido por  $\{0_{01}, 0_{10}\} \cup G_1$ . Estos vértices son  $\hat{\pi}$ -invariantes, y luego  $\hat{\pi}$  determina una acción 1-bloque en  $\hat{Y}^+$ .

**Observación 2.21** El ejemplo anterior sugiere que  $\hat{Y}^+$  (para  $Y$  general) podría dotarse de una acción 1-bloque natural de  $G$ . El problema surge al definir  $\hat{\pi}_s^+$ . Esencialmente la única definición sensible de  $\hat{\pi}_s^+$  (que de hecho coincide con la entregada en el ejemplo anterior) es

$$\hat{\pi}_s^+((b, \omega^+(\lambda))) = (\pi_s(b), \omega^+(\sigma_s(\rho)))$$

donde  $\rho \in \omega^+(\lambda)$  es arbitrario y  $\sigma_s(\rho) = (\pi_s(\rho_{-n}))_{n \in -\mathbb{N}_+} \in Y^-$ .

Esta definición depende en general de la elección de  $\rho \in \omega^+(\lambda)$ : consideremos el  $\mathbb{Z}$ -sófico  $S_{\text{even}} = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid 10^{2n+1}1 \not\sqsubset y \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}\}$ . Este subshift admite una acción de cualquier  $G$  de tipo II fijando  $\pi \equiv \text{id}_{\{0,1\}}$ . Sus futuros son

$$C^+ = \{\omega^+(0^\infty.), \omega^+(0^\infty 1.), \omega^+(0^\infty 10.)\}$$

y entonces  $.10^\infty, .0^\infty \in \omega^+(0^\infty.)$  pero  $\omega^+(0^\infty 1.) \neq \omega^+(0^\infty.)$ .

**Corolario 2.22** *Todo  $G$ -sófico es conjugado a una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Y$  donde  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -sófico. En particular, todo  $G$ -sófico posee una extensión  $G$ -SFT de la misma entropía.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $X$  un  $G$ -sófico y  $G \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la acción 1-bloque que representa a  $(X, G)$  en  $\mathbb{Z}$ . Sea  $\bar{X}$  un  $G$ -SFT tal que existe un factor  $\phi: \bar{X} \rightarrow X$ , y sea  $G \curvearrowright^{\bar{\sigma}} \bar{Y} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  la acción 1-bloque que representa a  $(\bar{X}, G)$  en  $\mathbb{Z}$ . Del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\cong} & \bar{X} \\ & & \downarrow \phi \\ Y & \xleftarrow{\cong} & X \end{array}$$

vemos que  $Y$  es factor de  $\bar{Y}$  como  $\mathbb{Z}$ -sistemas, es decir  $Y$  es  $\mathbb{Z}$ -sófico.

Por la Proposición 2.19, la extensión bilateral de Krieger  $\hat{Y}$  admite una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\hat{\sigma}} \hat{Y}$ . Sea  $\hat{X}$  el  $G$ -SFT construido en la Proposición 2.14 a partir de  $\hat{Y}$ . Como  $\hat{Y}$  e  $Y$  tienen la misma entropía como  $\mathbb{Z}$ -sistemas,  $\hat{X}$  y  $X$  tienen la misma entropía como  $G$ -sistemas. El diagrama de  $G$ -sistemas

$$\begin{array}{ccc} \hat{Y} & \xleftarrow{\cong} & \hat{X} \\ \mathcal{L}^\infty \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

muestra que  $\hat{X}$  también es una extensión de  $X$ . □

**Corolario 2.23** *Sea  $X$  un  $G$ -SFT ( $G$ -sófico respectivamente). Entonces el grupo de automorfismos de  $X$  es isomorfo a un subgrupo del grupo de automorfismos de un  $\mathbb{Z}$ -SFT ( $\mathbb{Z}$ -sófico respectivamente).*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $X$  es un  $G$ -subshift. La Proposición 2.10 muestra que  $X$  es conjugado a una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Y$ . Luego  $\text{Aut}_G(X) \cong \text{Aut}_\sigma(Y) \leq \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(Y)$ . Si  $X$  es un  $G$ -SFT, la Proposición 2.11 implica que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -SFT. Si  $X$  es un  $G$ -sófico, el Corolario 2.22 implica que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -sófico. □

**Observación 2.24** *El corolario anterior impone algunas restricciones a  $\text{Aut}_G(X)$  cuando  $X$  tiene entropía nula. Por ejemplo, ningún grupo finitamente generado con elementos exponencialmente distorsionados puede ser subgrupo de  $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(Y)$  [CFKP18].*

Por otro lado, Meyerovitch ha probado en un trabajo no publicado [Tom] que cuando  $X$  es un  $G$ -SFT de entropía positiva con  $G$  amenable, entonces  $\text{Aut}_G(X)$  contiene la suma directa de cualquier colección numerable de grupos finitos. Esto impone una cota inferior a la complejidad de  $\text{Aut}_G(X)$  cuando  $G$  es virtualmente- $\mathbb{Z}$ . Queda abierto el problema de embeber el grupo libre  $F_2$  o la suma directa de numerables copias de  $\mathbb{Z}$  en  $\text{Aut}_G(X)$  cuando  $X$  es un  $G$ -SFT de entropía positiva para  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Esto no ocurre en cualquier grupo amenable  $G$ . Por ejemplo, si  $G$  es localmente finito entonces es amenable y  $\text{Aut}_G(X)$  también es localmente finito.

# Capítulo 3

## Mezcla y la medida de entropía máxima

En este capítulo estudiamos algunas consecuencias de imponer condiciones naturales de transitividad topológica en  $G$ -SFTs. Estas consecuencias son exactamente las mismas que en  $\mathbb{Z}$ -SFTs positivamente transitivos.

Primero se entregan los resultados clásicos para  $\mathbb{Z}$ -SFTs positivamente transitivos sobre la densidad de puntos periódicos y la medida de Parry. Luego se propone una condición de positiva transitividad en  $G$ -sistema y se prueban algunas consecuencias generales. Con estas herramientas se muestra la densidad de puntos  $\mathbb{Z}$ -periódicos y la unicidad de la medida de entropía máxima para  $G$ -SFTs positivamente transitivos.

### 3.1. Resultados previos

Buena parte de los resultados fundamentales sobre la dinámica de  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices conciernen a  $\mathbb{Z}$ -subshifts de la siguiente categoría.

**Definición 3.1** Sea  $(X, T)$  un  $\mathbb{Z}$ -sistema.

1.  $(X, T)$  se dice **positivamente transitivo** si para cada par de abiertos no vacíos  $U, V \subseteq X$ ,  $\mathbb{N}_+ \cap N(U, V) \neq \emptyset$ .
2.  $(X, T)$  se dice **no-errante** si para cada abierto no vacío  $U \subseteq X$ ,  $\mathbb{N}_+ \cap N(U, U) \neq \emptyset$ .

Diremos que una matriz  $B \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\{0, 1\})$  es **irreducible** si el grafo que representa es fuertemente conexo. Diremos  $B$  que es **aperiódica** si es irreducible y el **período** del grafo  $\Gamma(B)$ , definido por

$$\text{mcd}\{j \in \mathbb{N}_+ \mid \text{existe un ciclo de largo } j \text{ en } \Gamma(B)\}$$

es 1. La relación entre estas definiciones es la siguiente.

**Proposición 3.2** (ver [Kit98]) Sea  $Y = Y_B \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por la matriz  $B$ .



1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a)  $(Y, \mathbb{Z})$  es positivamente transitivo.
- (b)  $(Y, \mathbb{Z})$  es transitivo y no-errante.
- (c)  $B$  es irreducible.

En tal caso  $(Y, \mathbb{Z})$  tiene puntos periódicos densos y una única medida de entropía máxima, que además tiene soporte completo.

2.  $(Y, \mathbb{Z})$  es mezclador ssi  $B$  es aperiódica.

La medida de entropía máxima  $\mu$  de un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y = Y_B \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  se llama **medida de Parry**, y se construye como sigue. Sea  $\lambda$  el valor propio positivo de módulo máximo de  $B$ , y sean  $l, r \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{B}}$  vectores propios positivos izquierdo y derecho respectivamente asociados a  $\lambda$ . Supongamos que  $l, r$  están normalizados de modo que  $\sum_{b \in \mathcal{B}} l_b r_b = 1$ . Definimos  $p \in (0, 1]^{\mathcal{B}}$ ,  $P \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}([0, 1])$  por

$$p_b = l_b r_b \quad \text{y} \quad P_{b,b'} = B_{b,b'} \frac{r_{b'}}{\lambda r_b} \quad \text{para todo } b, b' \in \mathcal{B}.$$

Un cálculo muestra que  $P$  es una matriz estocástica y  $p$  es un vector de probabilidad estacionario para  $P$ .<sup>1</sup> El par  $(p, P)$  define una medida  $\mu = \mu_{(p,P)} \in M(Y, \mathbb{Z})$  de Markov por

$$\mu_{(p,P)}([w_0 w_1 \dots w_n]_m) = p_{w_0} P_{w_0, w_1} P_{w_1, w_2} \dots P_{w_{n-1}, w_n} = \frac{l_{w_0} r_{w_0}}{\lambda^n} > 0$$

en cada cilindro  $[w_0 w_1 \dots w_n]_m$  de  $Y$ . Se puede probar que  $h_{\mu_{(p,P)}}(Y, \mathbb{Z}) = \log \lambda$ .

## 3.2. Hipótesis de mezcla

Necesitamos decidir cuál es la noción de positiva transitividad en acciones de grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . En analogía al caso  $G = \mathbb{Z}$ , podemos partir de una definición de sistema no-errante.

**Definición 3.3** Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema.

- 1. Decimos que  $(X, G)$  es **no-errante** si para cada abierto no vacío  $U \subseteq X$ , existe al menos un  $g \in N(U, U)$  de orden infinito.
- 2. Decimos que  $(X, G)$  es **positivamente transitivo** si es transitivo y no-errante.

Otra definición plausible de sistema no-errante es que  $N(U, U)$  sea infinito para todo  $U$  abierto (y esta definición hace más sentido en un  $G$ -sistema donde  $G$  es de torsión). Para grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  esta distinción es irrelevante.

<sup>1</sup>Una **matriz estocástica** es una matriz  $P$  a entradas en  $[0, 1]$  cuyas filas suman a 1. Un **vector de probabilidad**  $p$  es un vector fila a entradas en  $[0, 1]$  que suma 1, y  $p$  se dice **estacionario** para  $P$  si  $pP = p$ .

**Lema 3.4** Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema. Entonces  $(X, G)$  es no-errante ssi para cada abierto no vacío  $U \subseteq X$  el conjunto  $N(U, U)$  es infinito. Además, en tal caso tenemos que

1. si  $G = T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  es de tipo I, para cada abierto no vacío  $U \subseteq X$  los conjuntos  $(\{e\} \times \mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  y  $(\{e\} \times -\mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  son infinitos, y
2. si  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, entonces para cada abierto no vacío  $U \subseteq X$ , los conjuntos

$$\{r^n \in N(U, U) \mid n > 0\} \quad y \quad \{r^n \in N(U, U) \mid n < 0\}$$

son infinitos.

DEMOSTRACIÓN. 1. Supongamos que  $G = T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  es de tipo I y que  $(X, G)$  es no-errante. Como  $\alpha_g^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$  ssi  $\alpha_g^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$  y la Proposición 1.21 muestra que los elementos de orden infinito en  $G$  son  $(T \times \mathbb{Z}) \setminus (T \times \{0\})$ , podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $(T \times \mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  es no vacío para todo  $U \subseteq X$  abierto no vacío.

Sea  $U \subseteq X$  un tal abierto no vacío. Definimos  $U_0 = U$ , y escogemos inductivamente para cada  $n \geq 1$  un  $g_n \in T \times \mathbb{N}_+$  tal que el abierto  $U_n = \alpha_{g_n}^{-1}(U_{n-1}) \cap U_{n-1} \subseteq U$  es no vacío.

Sea  $\Pi: G \rightarrow T$  la proyección en la primera coordenada, y escribamos  $g_n = (t_n, j_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}_+$ . El principio de palomar implica que existen  $n' < n$  tales que  $\Pi(g_1 \cdots g_n) = \Pi(g_1 \cdots g_{n'})$ , y por lo tanto

$$t_1 \psi^{j_1}(t_2) \psi^{j_1+j_2}(t_3) \cdots \psi^{j_1+\cdots+j_{n-1}}(t_n) = t_1 \psi^{j_1}(t_2) \psi^{j_1+j_2}(t_3) \cdots \psi^{j_1+\cdots+j_{n'-1}}(t_{n'}),$$

es decir

$$\psi^{j_1+\cdots+j_{n'}}(t_{n'+1} \psi^{j_{n'+1}}(t_{n'+2}) \psi^{j_{n'+1}+j_{n'+2}}(t_{n'+3}) \cdots \psi^{j_{n'+1}+\cdots+j_{n-1}}(t_n)) = e \quad (3.1)$$

Notemos que

$$\alpha_{g_n}^{-1}(U_{n-1}) \cap U_{n-1} \subseteq \alpha_{g_{n-1}g_n}^{-1}(U_{n-2}) \cap \alpha_{g_n}^{-1}(U_{n-2}) \cap \alpha_{g_{n-1}}^{-1}(U_{n-2}) \cap U_{n-2} \subseteq \alpha_{g_{n-1}g_n}^{-1}(U_{n-2}) \cap U_{n-2}$$

y desenrollando la definición de  $U_n$  obtenemos que

$$\alpha_{g_n}^{-1}(U_{n-1}) \cap U_{n-1} \subseteq \alpha_{g_{n'+1} \cdots g_n}^{-1}(U_{n'}) \cap U_{n'} \subseteq \alpha_{g_{n'+1} \cdots g_n}^{-1}(U) \cap U,$$

es decir  $g_{n'+1} \cdots g_n \in N(U, U)$ . Ahora la ecuación (3.1) muestra que

$$\Pi(g_{n'+1} \cdots g_n) = t_{n'+1} \psi^{j_{n'+1}}(t_{n'+2}) \psi^{j_{n'+1}+j_{n'+2}}(t_{n'+3}) \cdots \psi^{j_{n'+1}+\cdots+j_{n-1}}(t_n) = e.$$

Concluimos que  $(\{e\} \times \mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  es no vacío para cualquier  $U \subseteq X$  abierto no vacío. Luego podemos repetir la construcción anterior eligiendo  $g_n \in \{e\} \times \mathbb{N}_+ \cap N(U, U)$ . Notando que

$$\alpha_{g_1 \cdots g_n}^{-1}(U) \cap U \supseteq U_{n-1} \neq \emptyset$$

vemos que  $(\{e\} \times \mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  es infinito, y por simetría  $(\{e\} \times -\mathbb{N}_+) \cap N(U, U)$  también.

Recíprocamente, como solo hay finitos elementos de orden finito en  $G$  vemos que si  $N(U, U)$  es infinito entonces necesariamente contiene un elemento de orden finito.

2. Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I y que  $(X, G)$  es no-errante. Como los elementos de orden infinito de  $G$  son exactamente  $T\langle r \rangle \setminus T$  por la Proposición 1.21 y  $T\langle r \rangle \cong T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  de tipo I, el ítem anterior muestra que  $N(U, U)$  es infinito para cada  $U \subseteq X$  abierto no vacío. El ítem anterior también implica que

$$\{r^n \in N(U, U) \mid n > 0\} \quad \text{y} \quad \{r^n \in N(U, U) \mid n < 0\}$$

son infinitos en este caso.

Recíprocamente, supongamos que  $N(U, U)$  es infinito para cada  $U \subseteq X$  abierto no vacío. Sea  $U \subseteq X$  un abierto no vacío. Supongamos hacia una contradicción que  $T\langle r \rangle \cap N(U, U)$  es finito. Entonces existe al menos un  $g' \in T\langle r \rangle \cap N(U, U)$ . Definimos  $W$  como el abierto no vacío  $\alpha_{g'}^{-1}(U) \cap U$ , de modo que  $N(W, W)$  es infinito.

Si  $T\langle r \rangle \cap N(W, W)$  fuese infinito tendríamos una contradicción, pues en tal caso  $\alpha_g^{-1}(U) \cap U \supseteq \alpha_g^{-1}(W) \cap W \neq \emptyset$  sería no vacío para infinitos  $g \in T\langle r \rangle \cap N(W, W)$ . Luego  $T\langle r \rangle \cap N(W, W)$  es finito. Ahora si  $g \in T\langle r \rangle \cap N(W, W)$ , vemos que

$$\alpha_{g'g}^{-1}(U) \cap U = \alpha_g^{-1}(\alpha_{g'}^{-1}(U)) \cap U \supseteq \alpha_g^{-1}(W) \cap W \neq \emptyset$$

es no vacío, pero entonces  $\{g'g \mid g \in T\langle r \rangle \cap N(W, W)\} \subseteq T\langle r \rangle \cap N(W, W)$  es infinito. Nuevamente llegamos a una contradicción. Concluimos que  $T\langle r \rangle \cap N(U, U)$  es infinito para todo  $U \subseteq X$  abierto no vacío, y en particular contiene un elemento de orden infinito.  $\square$

**Lema 3.5** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  y  $G \curvearrowright^{\alpha} X$  un  $G$ -sistema positivamente transitivo.*

1. *Supongamos que  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$  es de tipo I. Entonces para cada par de abiertos no vacíos  $U, V \subseteq X$  existe un  $t \in T$  tal que los conjuntos  $(\{t\} \times \mathbb{N}_+) \cap N(U, V)$  y  $(\{t\} \times -\mathbb{N}_+) \cap N(U, V)$  son infinitos.*
2. *Supongamos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, y sean  $U, V \subseteq X$  abiertos no vacíos.*

(a) *Si existe  $t \in T$  tal que  $t\langle r \rangle \cap N(U, V)$  es no vacío, entonces los conjuntos*

$$\{tr^n \in N(U, V) \mid n > 0\} \quad \text{y} \quad \{tr^n \in N(U, V) \mid n < 0\}$$

*son infinitos.*

(b) *Si existe  $t \in T$  tal que  $t\langle r \rangle \cap N(U, V)$  es no vacío, entonces los conjuntos*

$$\{tr^n s \in N(U, V) \mid n > 0\} \quad \text{y} \quad \{tr^n s \in N(U, V) \mid n < 0\}$$

*son infinitos.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G$  es de tipo II, pues la demostración de los ítems (2.a) y (1) son idénticas.

Sean  $U, V \subseteq X$  abiertos no vacíos. Si existen  $t \in T, n \in \mathbb{Z}$  tal que  $tr \in N(U, V)$ , tenemos que

$$\alpha_{g'g}^{-1}(U) \cap V = \alpha_g^{-1}(\alpha_{g'}^{-1}(U)) \cap V \supseteq \alpha_g^{-1}(W) \cap W \neq \emptyset$$

es no vacío para todo  $g \in \langle r \rangle \cap N(W, W)$ , y entonces

$$\{g'g \mid g \in \langle r \rangle \cap N(W, W), g = r^j \text{ con } j > |n|\} \subseteq \{\text{tr}^n \in N(U, V) \mid n > 0\}$$

y

$$\{g'g \mid g \in \langle r \rangle \cap N(W, W), g = r^j \text{ con } j < -|n|\} \subseteq \{\text{tr}^n \in N(U, V) \mid n < 0\}$$

son infinitos por el Lema 3.4.

Si en cambio  $\text{trs} \in N(U, V)$ , la misma demostración que el párrafo anterior reemplazando  $T\langle r \rangle$  por  $T\langle r \rangle_s$  entrega el resultado.  $\square$

Estas conclusiones son idénticas al caso  $G = \mathbb{Z}$ , salvo que para un grupo  $G = G_1 *_T G_2$  de tipo II pueden existir abiertos no vacíos  $U, V$  tales que  $N(U, V) \subseteq T\langle r \rangle_s$ . Exactamente el mismo método que en  $\mathbb{Z}$  muestra que un  $G$ -sistema positivamente transitivo contiene un  $G_\delta$  denso de puntos cuyas órbitas positivas y negativas son densas.

Ahora podemos entregar las primeras consecuencias de estas condiciones de transitividad en  $G$ -SFTs.

**Proposición 3.6** *Sea  $G$  virtualmente- $\mathbb{Z}$ ,  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices y  $G \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $(B, \pi)$ .*

1.  $(Y, G)$  es mezclador ssi  $B$  es una matriz aperiódica.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes.
  - (a)  $(Y, G)$  es no-errante
  - (b) El grafo  $\Gamma(B)$  es una unión de componentes irreducibles.
  - (c)  $(Y, G)$  tiene puntos fuertemente periódicos densos.
3. Las siguientes condiciones son equivalentes.
  - (a)  $(Y, G)$  es positivamente transitivo.
  - (b) El grafo  $\Gamma(B)$  es una unión de componentes irreducibles, y para toda componente irreducible  $C$  de  $\Gamma(B)$  y  $b \in \mathcal{B} \setminus C$  existe un  $h \in T$  (resp.  $h \in G_1$ ) tal que  $\pi_h(b) \in C$ .

DEMOSTRACIÓN. Supondremos que  $G = G_1 *_T G_2$  es de tipo II, y escribiremos  $m = \text{ord}(\psi)$ .

1. Si  $(Y, G)$  es mezclador entonces la subacción  $(Y, \mathbb{Z})$  también lo es, y por lo tanto  $B$  es aperiódica. Supongamos ahora que  $B$  es aperiódica, de modo que  $(Y, \mathbb{Z})$  es mezclador. Como  $[G : \mathbb{Z}]$  es finito, es directo ver que  $(Y, G)$  también es mezclador.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Sea  $(X, G)$  un  $G$ -sistema y  $H \leq G$  un subgrupo de índice finito tal que  $(X, H)$  es mezclador. Tomemos  $U, V$  abiertos no vacíos de  $X$  y  $\{g_1, \dots, g_m\}$  un sistema de representantes de clases laterales derechas de  $H$  en  $G$ . Entonces para cada  $1 \leq i \leq m$  existe un conjunto finito  $F_i \subset H$  tal que  $\sigma_h^{-1}(\sigma_{g_i}^{-1}U) \cap V \neq \emptyset$  para  $h \in H \setminus F_i$ . Luego  $\sigma_g^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$  para  $g \in \bigcup_i g_i(H \setminus F_i) = G \setminus (\bigcup_i g_i F_i)$ . Luego  $(X, G)$  es mezclador.

2. Es claro que (2.b)  $\implies$  (2.c). Veamos que (2.c)  $\implies$  (2.a): sea  $U \subseteq X$  un abierto no vacío. Si  $(X, G)$  tiene puntos fuertemente periódicos densos, entonces existe  $y \in U$  fuertemente periódico. Tal  $y$  tiene estabilizador infinito pues  $G$  es infinito, y entonces  $\sigma_g y = y \in U \cap \sigma_g^{-1}(U)$  para todo  $g \in \text{Stab}_G(y)$ . Luego  $(X, G)$  es no-errante por el Lema 3.4.

Probemos la implicancia restante (2.a)  $\implies$  (2.b). Dados  $a, b \in \mathcal{B}$ , escribiremos  $a \rightsquigarrow_n b$  si existe un camino dirigido de largo  $n$  (es decir, con  $n$  aristas) en  $\Gamma(B)$  de  $a$  a  $b$ . Como  $B$  es esencial, esto es equivalente a que exista  $y \in Y$  con  $y_{-n} = a$ ,  $y_0 = b$ .

Sean  $a \neq b \in \mathcal{B}$  con  $b \rightsquigarrow_n a$  para algún  $n \in \mathbb{N}_+$ . Luego  $[a]_0 \cap \sigma_{r^n}^{-1}[b]_0 \cap Y \neq \emptyset$ . El Lema 3.5 muestra que existe un  $r^{-n'} \in G$  con  $n' > 0$  tal que

$$[a]_0 \cap \sigma_{r^{-n'}}^{-1}[b]_0 \cap Y = [a]_0 \cap \sigma_{r^{n'}}[b]_0 \cap Y \neq \emptyset,$$

es decir  $\sigma_{r^{n'}}^{-1}[a]_0 \cap [b]_0 \cap Y \neq \emptyset$ . Luego  $a \rightsquigarrow_{n'} b$ . Esto muestra que la componente débilmente conexa de  $\Gamma(B)$  que contiene a  $a$  es irreducible.

3. Supongamos que  $(Y, G)$  es positivamente transitivo. Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de componentes irreducibles de  $\Gamma(B)$ . Por el ítem anterior,  $\Gamma(B)$  es la unión de las componentes irreducibles  $\mathcal{C}$ . Tomemos  $C \in \mathcal{C}$  y  $b \in \mathcal{B} \setminus C$  arbitrarios, y sea  $b' \in C$ . La transitividad muestra que existe un  $g \in G \setminus \{e\}$  tal que  $[b]_0 \cap \sigma_g^{-1}([b']_0) \neq \emptyset$ .

Si  $g = tr^n$  con  $t \in T, n \in \mathbb{Z}$  entonces existe  $y \in Y$  tal que  $y_0 = b$  y  $\pi_t(y_{-n}) = b'$ , y concluimos la condición deseada notando que  $\pi_{\psi^{-n}(t)}(y_0) \in C$  pues

$$\pi_t(y_{-n}) = \sigma_{tr^n}(y)_0 \rightsquigarrow_n \sigma_{tr^n}(y)_n = \pi_{\psi^{-n}(t)}(y_0) \in Y$$

y  $C$  es irreducible. De la misma manera, si  $g = tr^n s$  entonces existe  $y \in Y$  tal que  $y_0 = b$  y  $\pi_t \circ \pi_s(y_n) = b'$ , y concluimos la condición deseada notando que  $\pi_{\psi^{-n}(t)} \circ \pi_s(y_0) \in C$  pues

$$\pi_t \circ \pi_s(y_n) = \sigma_{tr^n s}(y)_0 \rightsquigarrow_n \sigma_{tr^n s}(y)_n = \pi_{\psi^{-n}(t)} \circ \pi_s(y_0) \in Y$$

y  $C$  es irreducible.

Veamos la recíproca y supongamos que se cumplen las condiciones en (3.b). El ítem anterior muestra que  $(Y, G)$  es no-errante. Veamos que  $(Y, G)$  es transitivo: sean  $p^1, p^2 \in \mathcal{L}_{2N+1}(Y)$  patrones en  $Y$  centrados en 0. Sea  $C \in \mathcal{C}$  la componente irreducible que contiene a todos los símbolos que aparecen en  $p^1$ , y sea  $h \in G_1$  tal que  $\pi_h(p_{-N}^2) \in C$ .

Si  $h = t \in T$ , la secuencia

$$\pi_t(p_{-N}^2) \pi_{\psi^{-1}(t)}(p_{-N+1}^2) \cdots \pi_{\psi^{-2N}(t)}(p_N^2)$$

define un camino en  $C$ . Luego existe un  $n \geq 2N$  y un  $y \in Y$  tal que

$$y|_{[-N, N]} = p^1 \quad \text{y} \quad y|_{[-N-n, N-n]} = \pi_t(p_{-N}^2) \pi_{\psi^{-1}(t)}(p_{-N+1}^2) \cdots \pi_{\psi^{-2N}(t)}(p_N^2),$$

y entonces

$$\sigma_{\psi^{-N}(t-1)r^n}(y)|_{[-N, N]} = p_{-N}^2 p_{-N+1}^2 \cdots p_N^2,$$

es decir  $y \in [p^1] \cap \sigma_{\psi^{-N}(t-1)r^n}^{-1}[p^2]$ .

Si  $h = ts \in G_1 \setminus T$ , la secuencia

$$\pi_{\psi^{2N}(t)s}(p_N^2) \pi_{\psi^{2N-1}(t)s}(p_{N-1}^2) \cdots \pi_{ts}(p_{-N}^2)$$

define un camino en  $C$ . Luego existe un  $n \geq 2N$  y un  $y \in Y$  tal que

$$y|_{[-N, N]} = p^1 \quad \text{y} \quad y|_{[-N-n, N-n]} = \pi_{\psi^{2N}(t)s}(p_N^2) \pi_{\psi^{2N-1}(t)s}(p_{N-1}^2) \cdots \pi_{ts}(p_{-N}^2),$$

y entonces

$$\sigma_{s\psi^N(t^{-1})r^n}(y)|_{[-N, N]} = p_{-N}^2 p_{-N+1}^2 \cdots p_N^2,$$

es decir  $y \in [p^1] \cap \sigma_{s\psi^N(t^{-1})r^n}^{-1}[p^2]$ . □

### 3.3. La medida de entropía máxima

**Lema 3.7** (ver [Oll85]) *Sea  $G$  un grupo amenable y  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema con entropía  $h_{\text{top}}(X, G)$  finita.*

1. (Afinidad de la entropía) *Si  $\mu_1, \dots, \mu_n \in M(X, G)$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  son tales que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , entonces*

$$h_{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i}(X, G) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h_{\mu_i}(X, G).$$

2. *Si  $(X, G)$  es expansivo, existe una medida  $\mu \in M(X, G)$  tal que  $h_\mu(X, G) = h_{\text{top}}(X, G)$ .*

**Proposición 3.8** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ ,  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices y  $G \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque y positivamente transitiva.*

*Entonces existe una única medida  $\mu \in M(Y, G)$  de entropía máxima. Esta medida es a soporte completo.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos el caso en que  $G$  es de tipo II. Sea  $(B, \pi)$  el par que determina a  $\sigma$ , y sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de componentes irreducibles de  $\Gamma(B)$ .

La existencia de una medida  $\mu \in M(Y, G)$  de entropía máxima está dada por el Lema 3.7. Sea  $\mu$  una tal medida, y veamos que está determinada únicamente. Sea  $C \in \mathcal{C}$  y supongamos que  $\mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}}) = 0$ . Luego  $\mu([a]_0) = 0$  para todo  $a \in C$ . Sea  $b \in \mathcal{B}$  arbitrario y sea  $h \in G_1$  tal que  $\pi_h(b) \in C$ . Luego

$$\mu([b]_0) = \mu(\sigma_h[b]_0) = \mu([\pi_h(b)]_0) = 0,$$

y como  $b \in \mathcal{B}$  era arbitrario vemos que  $\mu(Y) = 0$ , una contradicción. Concluimos que  $\mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}}) > 0$  para cualquier  $C \in \mathcal{C}$ , y obtenemos que  $\mu = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \mu_C$  donde  $\lambda_C = \mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}}) > 0$  y  $\mu_C = \mu|_{Y \cap C^{\mathbb{Z}}} / \lambda_C \in M(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ . Notemos que  $\sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C = 1$ .

Ahora  $\mu \in M(Y, G)$  también está en  $M(Y, \mathbb{Z})$ . Como  $\lambda_C > 0$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , la desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C h_{\text{top}}(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) &\geq \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C h_{\mu_C}(Y, \mathbb{Z}) = h_\mu(Y, \mathbb{Z}) = 2|T|h_\mu(Y, G) = 2|T|h_{\text{top}}(Y, G) \\ &= h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) = \max_{C \in \mathcal{C}} h_{\text{top}}(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

muestra que  $h_{\text{top}}(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) = h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) = h_{\mu_C}(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ . En particular,  $\mu_C$  es de entropía máxima para el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices irreducible  $(Y \cap C^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ . Luego  $\mu_C$  es la medida de Parry de  $Y \cap C^{\mathbb{Z}}$ . Esta tiene soporte completo en  $Y \cap C^{\mathbb{Z}}$ , y entonces  $\mu$  tiene soporte completo en  $Y$ .

Para concluir basta probar que los coeficientes  $\lambda_C$  quedan únicamente determinados por  $\Gamma(B)$ . Fijemos  $C \neq C' \in \mathcal{C}$  y  $c \in C, h \in G_1$  tales que  $\pi_h(c) \in C'$ . Sea  $m = \text{ord}(\psi)$  y  $C_0, \dots, C_{m-1} \subset C$  definidos por

$$C_i = \{a \in C \mid \text{existe un camino dirigido de } c \text{ hacia } a \text{ cuyo largo es } \equiv_m i\}$$

para todo  $0 \leq i \leq m-1$ . Definimos  $C_i$  para  $i \in \mathbb{Z}$  tomando el subíndice  $i$  módulo  $m$ .

Supongamos que  $C_{l_1} \cap C_{l_2} \neq \emptyset$  para algún  $0 \leq l_1 < l_2 \leq m-1$ , y sea  $a \in C_{l_1} \cap C_{l_2}$ . Sean  $w_{l_1}, w_{l_2}$  caminos en  $C$  entre  $c$  y  $a$  cuyos largos son congruentes módulo  $m$  a  $l_1, l_2$  respectivamente. Como  $C$  es irreducible,  $w_{l_1}$  se puede extender a un ciclo  $w_{l_1}w$  centrado en  $c$  cuyo largo es congruente módulo  $m$  a 0. Luego  $w_{l_2}w$  es un ciclo centrado en  $c$  cuyo largo es congruente módulo  $m$  a  $l_2 - l_1$ , y concatenando este ciclo con cualquier camino de  $c$  a un vértice cualquiera en  $C$  obtenemos que

$$C_{i+(l_2-l_1)j} = C_{i+(l_2-l_1)(j-1)} \text{ para todo } i, j \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Sea  $d = \text{mcd}\{1 \leq l \leq m-1 \mid C_0 \cap C_l \neq \emptyset\}$  (tomamos  $\text{mcd}(\emptyset) = 1$ ). Asumiremos la siguiente extensión del lema de Bézout.

**Lema 3.9** *Sean  $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_+$  y  $d = \text{mcd}\{l_1, \dots, l_n\}$ . Entonces existe una constante  $M > 0$  tal que para todo  $q \geq M$  existen  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}_+$  tales que  $q_1 a_1 + \dots + q_n a_n = qd$ .*

Este lema junto con la igualdad (3.2) implican que

$$C = \cup_{j=0}^{d-1} C_{j+id} \text{ para todo } 0 \leq i \leq m/d - 1.$$

Supongamos primero que  $h = t \in T$ . La invarianza de  $\mu$  bajo  $\sigma_r$  y  $\sigma_t$  muestra que

$$\mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}})m/d = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a \in C_i} \mu([a]_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a \in C_i} \mu([a]_i) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a \in C_i} \mu([\pi_{\psi^{-i}(t)}(a)]_i). \quad (3.3)$$

Definimos  $C'_i = \pi_{\psi^{-i}(t)}(C_i) \subset \mathcal{B}$  para todo  $0 \leq i \leq m-1$ . Notemos que  $C'_i \subseteq C'$  pues si  $a \in C_i$  existe un  $y \in Y$  y un  $l \in \mathbb{N}_+$  con  $y_0 = c, y_{ml+i} = a$ , de modo que  $c' = \pi_t(y_0) \rightsquigarrow_{ml+i} \pi_{\psi^{-i}(t)}(a)$ . Esto también muestra que

$$C'_i \subseteq \{a' \in C' \mid \text{existe un camino dirigido de } c' \text{ hacia } a' \text{ cuyo largo es } \equiv_m i\}. \quad (3.4)$$

Afirmamos que se tiene la igualdad en (3.4). Para probarlo, tomemos  $a' \in C'$  tal que existe un camino  $w$  en  $C'$  de  $c'$  hacia  $a'$  cuyo largo  $n \in \mathbb{N}_+$  es congruente módulo  $m$  a  $i$ . Luego  $\pi_{\psi^{-i}(t)-1}(a') \in C_i$  pues  $\pi_{t-1}(w_0)\pi_{\psi^{-1}(t)-1}(w_1) \cdots \pi_{\psi^{-i}(t)-1}(w_n)$  es un camino en  $C$  entre  $a$  y  $\pi_{\psi^{-i}(t)-1}(a')$  de largo  $n$ . Concluimos que  $a' \in C'_i$ .

El mismo argumento que usamos para los conjuntos  $C_i \subseteq C$  muestra que  $C' = \cup_{j=0}^{d'-1} C'_{j+id'}$  para todo  $0 \leq i \leq m/d' - 1$ , donde  $d' = \text{mcd}\{1 \leq l \leq m-1 \mid C'_0 \cap C'_l \neq \emptyset\}$ .

De (3.3) sigue que

$$\begin{aligned} \mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}})m/d &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a \in C_i} \mu([\pi_{\psi^{-i}(t)}(a)]_i) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a' \in C'_i} \mu([a']_i) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{a' \in C'_i} \mu([a']_0) \\ &= \mu(Y \cap C'^{\mathbb{Z}})m/d'. \end{aligned}$$

Concluimos la igualdad

$$\lambda_{C'} = \mu(Y \cap C'^{\mathbb{Z}}) = \mu(Y \cap C^{\mathbb{Z}})d'/d = \lambda_C d'/d. \quad (3.5)$$

Si en cambio  $h = st \in G_1 \setminus T$ , definimos  $C'_i = \pi_s \circ \pi_{\psi^{-i}(t)}(C_i)$  para  $0 \leq i \leq m-1$ . El mismo argumento que antes implica que en este caso

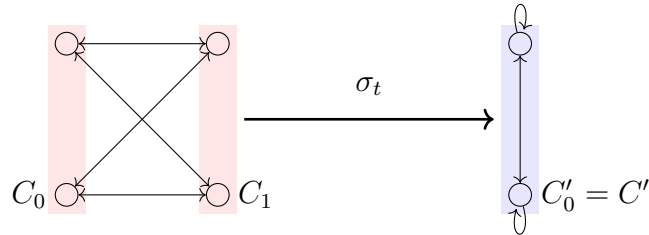
$$C'_i = \{a' \in C' \mid \text{existe un camino dirigido de } a' \text{ hacia } c' \text{ cuyo largo es } \equiv_m i\},$$

y nuevamente se deduce la ecuación (3.5).  $\square$

**Observación 3.10** *La constante  $d \in \mathbb{N}_+$  asociada a una componente irreducible  $C \in \mathcal{C}$  también se puede calcular como  $\text{mcd}\{m, l\}$  donde  $m = \text{ord}(\psi)$  como antes y  $l$  es el período del grafo  $\Gamma(C)$ .*

*La demostración anterior se simplifica considerablemente cuando  $\psi = \text{id}$ . En tal caso,  $\mu = 1/|\mathcal{C}| \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu_C$  es la única medida de entropía máxima y todos los subgrafos  $\Gamma(C)$  son isomorfos o anti-isomorfos entre sí (un anti-isomorfismo entre dos grafos dirigidos es una biyección entre los vértices que revierte la orientación de las aristas). Usando el teorema de Perron-Frobenius se puede probar que el vector  $p_C \in [0, 1]^C$  y la matriz  $P_C \in M_{C,C}([0, 1])$  que definen la medida de Parry  $\mu_C = \mu_{(p_C, P_C)}$  satisfacen ciertas simetrías respecto a  $\pi$ , y estas condiciones permiten probar directamente que  $\mu$  es  $\sigma$ -invariante. En el caso de  $\pi_s$ , estas simetrías generalizan ligeramente la noción clásica de reversibilidad en cadenas de Markov y ya han sido estudiadas en [LPS06].*

*En cambio, cuando  $\psi \neq \text{id}$  puede ocurrir que dos componentes irreducibles distintas no tengan el mismo tamaño. Necesariamente tendrán la misma entropía por la demostración de la proposición anterior, pero puede ocurrir una situación como sigue, donde  $m = 2$ ,  $\pi_t(C_0) = \pi_{\psi^{-1}(t)}(C_1) = C'_0 = C'$  y  $\pi_{t-1}(C') = C_0$ ,  $\pi_{\psi^{-1}(t)-1}(C') = C_1$ .*



Un  $G$ -sistema  $(X, G)$  se dice **entropy-minimal** si cualquier  $G$ -subsistema estricto de  $(X, G)$  tiene entropía topológica estrictamente menor a  $h_{\text{top}}(X, G)$ . El mismo argumento que en el caso unidimensional muestra que los sistemas con una única medida de entropía máxima a soporte completo son entropy-minimal.



**Proposición 3.11** *Sea  $(Y, G)$  un  $G$ -sistema expansivo que posee una única medida de entropía máxima. Si esta medida es a soporte completo, entonces  $(Y, G)$  es entropy-minimal.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(Z, G)$  un subsistema propio de  $(Y, G)$ . Como  $(Z, G)$  también es expansivo, el Lema 3.7 muestra que existe una medida de entropía máxima  $\mu_Z \in M(Z, G)$ . La medida  $\mu_Z$  se extiende naturalmente a una medida  $G$ -invariante en  $(Y, G)$  que no puede tener soporte completo pues  $Y \setminus Z$  es un abierto no vacío. Sea  $\mu \in M(Y, G)$  la única medida de entropía máxima en  $(Y, G)$ . Luego  $\mu_Z$  no coincide con  $\mu$ , y la unicidad de la medida de entropía máxima en  $(Y, G)$  implica que  $h_{\mu_Z}(Y, G) < h_{\mu}(Y, G) = h_{\text{top}}(Y, G)$ . Concluimos recordando que  $h_{\text{top}}(Y, G) = h_{\mu_Z}(Y, G) = h_{\mu_Z}(Z, G)$ .  $\square$

**Corolario 3.12** *Sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ ,  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices y  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción 1-bloque y positivamente transitiva.*

*Entonces  $(Y, G)$  es entropy-minimal.*

# Capítulo 4

## Extensiones de full-shifts sobre $D_\infty$

En este capítulo se demuestra una versión para acciones de  $D_\infty$  de un teorema clásico de B. Marcus, que afirma que los  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices con entropía  $\log N$  son extensiones del  $\mathbb{Z}$ -full-shift en  $N$  símbolos. Varias versiones de este teorema para otros grupos amenables requieren hipótesis de mezcla muy fuertes en el subshift para obtener la misma conclusión.

Primero, se entrega un historial de resultados de este tipo en distintos grupos. Luego, se prueba el teorema principal en dos pasos, que consisten en adaptaciones de la misma demostración para  $\mathbb{Z}$ -SFTs. Finalmente, se discuten algunas extensiones posibles del teorema.

### 4.1. Resultados previos

La motivación detrás del resultado central de este capítulo es el siguiente teorema.

**Teorema 4.1** ([Mar79]) *Sea  $N \in \mathbb{N}_+$  e  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -SFT con entropía  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) = \log N$ . Entonces existe un código factor  $\phi: Y \rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$  al full-shift en  $N$  símbolos sobre  $\mathbb{Z}$ .*

Las ideas ocupadas en la demostración son la base de la construcción de códigos de estado finito, y permiten extender el resultado al caso en que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -SFT con  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) \geq \log N$  o  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -sófico con  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) > \log N$  (ver [LM95] para una exposición). Ocuparemos el mismo método para probar nuestra generalización.

La demostración del Teorema 4.1 sigue el siguiente esquema: dado un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$  presentado por una matriz irreducible  $B$  con entropía  $\log N$ , se encuentra un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  conjugado a  $Y$  y presentado por una matriz  $B'$  cuyas filas suman  $N$ . Esto se logra a través de una secuencia de out-splittings de  $Y$ , guiados por un vector propio de  $B$  con valor propio  $N$ . Para construir el código factor deseado se fijan biyecciones  $\{\Phi_b: \text{Suc}_{B'}(b) \rightarrow \{1, \dots, N\}\}_{b \in \mathcal{B}'}$ , y entonces el código 2-bloque  $\phi = \Phi^\infty: Y' \rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$  donde  $\Phi(ab) = \Phi_a(b)$  para  $ab \in \mathcal{L}_2(Y')$  es sobreyectivo.

Una generalización a  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$  no es directa: en [BPS10] se construyen  $\mathbb{Z}^d$ -SFTs mezcladores con entropía arbitrariamente grande que no son extensiones de ningún full-shift sobre

$\mathbb{Z}^d$ . Sin embargo, al requerir una condición de mezcla más fuerte en  $Y$  se recupera una versión del Teorema 4.1 sobre  $\mathbb{Z}^d$ .

**Teorema 4.2** ([Des09]) *Sean  $N, d \in \mathbb{N}_+$  e  $Y$  un  $\mathbb{Z}^d$ -SFT fuertemente irreducible con entropía  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}^d) > \log N$ . Entonces existe un código factor  $\phi: Y \rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}^d}$  al full-shift en  $N$  símbolos sobre  $\mathbb{Z}^d$ .*

Recientemente se ha probado otra generalización a grupos amenables generales, que generaliza la demostración del Teorema 4.2 a través de la maquinaria de tilings de grupos amenables desarrollada en [DHZ15].

**Teorema 4.3** ([HK21]) *Sea  $G$  un grupo amenable de crecimiento subexponencial y sea  $N \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $Y$  es un  $G$ -subshift fuertemente irreducible con entropía  $> \log N$  que además verifica la siguiente propiedad de aperiodicidad: para cada subconjunto finito  $F \subset G$  existe un patrón  $p \in \mathcal{L}(X)$  tal que para todo  $f \in F$  existe un  $g \in \text{sop}(p)$  con  $gf \in \text{sop}(p)$  y  $p(gf) \neq p(g)$ .*

*Entonces existe un código factor  $\phi: Y \rightarrow \{1, \dots, N\}^G$  al full-shift en  $N$  símbolos sobre  $G$ .*

La condición de aperiodicidad del  $G$ -subshift  $Y$  en el teorema anterior dice que existen bloques  $F$ -aperiódicos para cualquier conjunto finito de períodos  $F$ . Esta hipótesis elimina la siguiente obstrucción a la existencia del factor  $\phi$ : supongamos que cada punto  $y \in Y$  tiene un estabilizador no trivial, de modo que cada  $\phi(y) \in \{1, \dots, N\}^G$  también tiene un estabilizador no trivial. Como existen configuraciones aperiódicas en  $\{1, \dots, N\}^G$  cuando  $N \geq 2$  (ver [ABT19]) vemos que  $\phi$  no puede existir.

Esta obstrucción es relevante en subshifts sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ : si  $G = T \rtimes_{\psi} \mathbb{Z}$ , dado cualquier  $\mathbb{Z}$ -SFT  $Y$  definimos una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^{\sigma} Y$  donde  $T$  actúa trivialmente en  $Y$ . El  $G$ -SFT  $X$  construido a partir de  $Y$  en la Proposición 2.14 verifica que  $\text{Stab}_{\sigma}(x) \geq T \times \{0\}$  para todo  $x \in X$ , y entonces  $X$  no puede ser una extensión de un  $G$ -full-shift. En  $\mathbb{Z}^d$  no ocurre este fenómeno, pues cualquier  $\mathbb{Z}^d$ -subshift periódico en una dirección fija tiene entropía nula.

Cuando no se cumple la condición de aperiodicidad, lo mejor que se puede esperar es el siguiente resultado, que ya había sido probado por A. Johnson y K. Madden para  $\mathbb{Z}^d$  [JM05].

**Teorema 4.4** ([BH20]) *Sean  $N \in \mathbb{N}_+$ ,  $G$  un grupo amenable y  $X$  un  $G$ -subshift fuertemente irreducible con entropía  $h_{\text{top}}(X, G) > \log N$ . Entonces existe un  $G$ -subshift  $X'$  con la misma entropía que  $(X, G)$  y factores  $\phi': X' \rightarrow X$ ,  $\phi: X' \rightarrow \{1, \dots, N\}^G$ .*

## 4.2. Teorema principal

Sea  $B \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\{0, 1\})$  una matriz cuadrada y  $N \in \mathbb{N}_+$ . Un  $(B, N)$ -casi vector propio es un vector  $r \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}}$  tal que  $Br \geq Nr$ . Una matriz  $B$  posee un  $(B, N)$ -casi-vector propio ssi su valor propio de módulo máximo  $\lambda$  es  $\geq N$  (ver [LM95]).

Probaremos una versión del Teorema 4.1 para  $D_\infty$  (que no requiere hipótesis fuertes de mezcla) adaptando cada paso de la demostración original a acciones 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y_B$ . La primera etapa corresponde a “esparcir” las componentes de un  $(B, N)$ -casi-vector propio en otro  $(B', N)$ -casi-vector propio tal que existe una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y_{B'}$  conjugada a  $(Y_B, D_\infty)$ . La manera de hacerlo en  $\mathbb{Z}$  es a través de out-splittings de  $B$  bien escogidos, pero en  $D_\infty$  cada out-splitting debe ir acompañado de un in-splitting para obtener una acción 1-bloque en el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices obtenido (ver el Lema 2.7). Un lema combinatorial de la demostración en  $\mathbb{Z}$  también sirve en este caso para guiar estos splittings.

**Lema 4.5** ([Mar79]) *Sean  $N \in \mathbb{N}_+$ ,  $\mathcal{B}$  un conjunto finito con  $|\mathcal{B}| > N$  y  $r \in \mathbb{N}^{\mathcal{B}}$ . Entonces existe un conjunto  $E \subset \mathcal{B}$  no vacío tal que  $|E| \leq N$  y  $\sum_{b \in E} r_b \equiv_N 0$ .*

**Lema 4.6** *Sean  $N \in \mathbb{N}_+$  y  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  una acción 1-bloque positivamente transitiva en un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$ , determinada por  $(B, \pi)$ . Sea  $r \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}}$  un  $(B, N)$ -casi-vector propio, y supongamos que existe un  $c \in \mathcal{B}$  tal que  $r_c > 1$ .*

*Entonces existe una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  determinada por  $(B', \pi')$  y conjugada a  $(Y, D_\infty)$ , tal que existe un  $(B', N)$ -casi-vector propio  $r' \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}'}$  que verifica alguna de las siguientes condiciones:*

1.  $\max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'} < \max_{b \in \mathcal{B}} r_b$ , o
2.  $\max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'} = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b$  y  $|\{a' \in \mathcal{B}' \mid r'_{a'} = \max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'}\}| < |\{a \in \mathcal{B} \mid r_a = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b\}|$ , o
3.  $\max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'} = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b$ ,  $|\{a' \in \mathcal{B}' \mid r'_{a'} = \max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'}\}| = |\{a \in \mathcal{B} \mid r_a = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b\}|$  y  $|\{a' \in \mathcal{B}' \mid r'_{a'} = \max_{b' \in \mathcal{B}'} r'_{b'}, r'_{\pi'_s(a')} = r'_{a'}\}| < |\{a \in \mathcal{B} \mid r_a = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b, r_{\pi_s(a)} = r_a\}|$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $M = \max_{b \in \mathcal{B}} r_b$ . El grafo  $\Gamma(B)$  está compuesto por (a lo más dos) componentes irreducibles. Si  $C$  es una componente irreducible de  $\Gamma(B)$  tal que  $r_c = M$  para todo  $c \in C$ , entonces  $r' \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}}$  definido en cada  $b \in \mathcal{B}$  por

$$r'_b = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in C \\ r_b & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es un  $(B, N)$ -casi-vector propio que verifica la primera o la segunda condición del enunciado.

Luego podemos asumir que existe un  $c \in C$  tal que  $r_c = M$  y  $c$  tiene un sucesor  $a \in \text{Suc}_B(c)$  tal que  $r_a < r_c$ . Como

$$\sum_{b \in \text{Suc}_B(c)} r_b \geq N r_c$$

y  $r_c \geq r_b$  para todo  $b \in \text{Suc}_B(c)$  con desigualdad estricta para al menos un sucesor, vemos que  $|\text{Suc}_B(c)| > N$ . El Lema 4.5 muestra que existe un subconjunto estricto  $E \subset \text{Suc}_B(c)$  no vacío con  $\sum_{b \in E} r_b \equiv_N 0$ . Definimos los conjuntos  $E^1 = E$ ,  $E^2 = \text{Suc}_B(c) \setminus E^1$  que particionan  $\text{Suc}_B(c)$ , y el entero  $q = 1/N \sum_{b \in E^1} r_b \in \mathbb{N}^+$ . Notemos que la desigualdad

$$N r_c \geq \sum_{b \in \text{Suc}_B(c)} r_b > \sum_{b \in E^1} r_b$$

implica que  $q < r_c$ .

Definiremos a continuación una matriz  $B'$  que presenta el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y' \subseteq (\mathcal{B}')^{\mathbb{Z}}$  que resulta de hacer un out-splitting seguido de un in-splitting en  $B$ . Estos splittings particionan los seguidores de  $c$  según  $E_1, E_2$ , los predecesores de  $\pi_s(c)$  según  $\pi_s(E_1), \pi_s(E_2)$  y no tienen otro efecto en  $\mathcal{B}$ . El Lema 2.7 muestra que  $Y'$  está dotado de una acción 1-bloque natural de  $D_\infty$  determinada por  $(B', \pi')$  que es conjugada a  $(Y, D_\infty)$ . La definición concreta de  $B'$  es menos importante que la intuición de cuáles son los sucesores de cada símbolo de  $\mathcal{B}'$ .

Supongamos primero que  $\pi_s(c) = c$ . Definimos el conjunto finito

$$\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{c\}) \cup \{c_j^i \mid 1 \leq i, j \leq 2\}$$

y el vector  $r' \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}'}$  por

$$r'_{b'} = \begin{cases} r_{b'} & \text{si } b' \in \mathcal{B} \setminus \{c\} \\ q & \text{si } b' = c_j^1, j = 1, 2 \\ r_c - q & \text{si } b' = c_j^2, j = 1, 2 \end{cases}$$

para todo  $b' \in \mathcal{B}'$ . Sea  $B' \in M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  la matriz de transición obtenida al hacer un out-splitting en  $c$  según la partición  $E^1, E^2$ , seguida de un in-splitting de  $c^1, c^2$  según la partición  $\pi_s(E^1), \pi_s(E^2)$ . Concretamente,

$$B'_{b'_1, b'_2} = \begin{cases} B_{b'_1, b'_2} & \text{si } b'_1, b'_2 \in \mathcal{B} \setminus \{c\} \\ \mathbf{1}_{b'_2 \in E^i} & \text{si } b'_1 = c_j^i, i, j = 1, 2 \text{ y } b'_2 \in \mathcal{B} \setminus \{c\} \\ \mathbf{1}_{b'_1 \in \pi_s(E^j)} & \text{si } b'_2 = c_j^i, i, j = 1, 2 \text{ y } b'_1 \in \mathcal{B} \setminus \{c\} \\ \mathbf{1}_{c \in E^i, c \in \pi_s(E^{j'})} & \text{si } b'_1 = c_j^i, b'_2 = c_{j'}^{i'}, i, j, i', j' = 1, 2 \end{cases}$$

para todo  $b'_1, b'_2 \in \mathcal{B}'$ .

Afirmamos que  $r'$  es un  $(B', N)$ -casi-vector propio. Probaremos la desigualdad  $B'r' \geq Nr'$  por coordenadas.

1. Veamos la desigualdad para  $a \in \mathcal{B} \setminus \{c\}$ . Si  $c \in \text{Suc}_B(a)$ , sea  $i \in \{1, 2\}$  tal que  $a \in \pi_s(E^i)$ . Entonces  $c_j^1, c_j^2 \in \text{Suc}_{B'}(a)$ , y como  $r'_{c_j^1} + r'_{c_j^2} = r_c$  tenemos

$$\sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(a)} r'_{b'} = r'_{c_j^1} + r'_{c_j^2} + \sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(a) \setminus \{c_j^1, c_j^2\}} r_{b'} = \sum_{b \in \text{Suc}_B(a)} r_b \geq Nr_a = Nr'_a.$$

Si en cambio  $c \notin \text{Suc}_B(a)$ , los sucesores de  $a$  en  $Y_B$  y  $Y_{B'}$  son los mismos y por lo tanto

$$\sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(a)} r'_{b'} = \sum_{b \in \text{Suc}_B(a)} r_b \geq Nr_a = Nr'_a.$$

2. Veamos la desigualdad para  $c_j^1, j = 1, 2$ . Si  $c \in E^1$ , entonces  $c \in \pi_s(E^1)$  y  $c_1^1, c_1^2 \in \text{Suc}_{B'}(c_j^1)$ . Luego

$$\sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(c_j^1)} r'_{b'} = r'_{c_1^1} + r'_{c_1^2} + \sum_{b \in E^1 \setminus \{c\}} r'_b = \sum_{b \in E^1} r_b = Nr'_{c_j^1}.$$

Si en cambio  $c \in E^2$  o  $c \notin \text{Suc}_B(c)$ , los sucesores de  $c_j^1$  son  $E^1$ , y por lo tanto

$$\sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(c_j^1)} r'_{b'} = \sum_{b \in E^1} r_b = Nr'_{c_j^1}.$$

3. Veamos la desigualdad para  $c_j^2$ ,  $j = 1, 2$ . Si  $c \in E^2$ , entonces  $c \in \pi_s(E^2)$  y  $c_1^2, c_2^2 \in \text{Suc}_{B'}(c_j^2)$ . Luego

$$\begin{aligned} \sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(c_j^2)} r'_{b'} &= r'_{c_1^2} + r'_{c_2^2} + \sum_{b \in E^2 \setminus \{c\}} r'_b = \sum_{b \in E^2} r_b = \sum_{b \in \text{Suc}_B(c)} r_b - \sum_{b \in E^1} r_b \\ &\geq Nr_c - Nq = Nr'_{c_j^2}. \end{aligned}$$

Si en cambio  $c \in E^1$  o  $c \notin \text{Suc}_B(c)$ , los sucesores de  $c_j^2$  son  $E^2$  y como antes tenemos

$$\sum_{b' \in \text{Suc}_{B'}(c_j^2)} r'_{b'} = \sum_{b \in E^2} r_b = \sum_{b \in \text{Suc}_B(c)} r_b - \sum_{b \in E^1} r_b \geq Nr_c - Nq = Nr'_{c_j^2}.$$

Concluimos la desigualdad deseada. Las componentes de  $r'$  asociadas a  $c_j^i$ ,  $i, j = 1, 2$  son estrictamente menores que  $M$ , y por lo tanto  $r'$  cumple la primera o la segunda condición del enunciado.

Supongamos en cambio que  $\pi_s(c) \neq c$ . Definimos el conjunto finito

$$\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{c, \pi_s(c)\}) \cup \{c^1, c^2, \pi_s(c)_1, \pi_s(c)_2\},$$

y el vector  $r' \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}'}$  por

$$r'_{b'} = \begin{cases} r_{b'} & \text{si } b' \in \mathcal{B} \\ r_{\pi_s(c)} & \text{si } b' = \pi_s(c)_j, j = 1, 2 \\ q & \text{si } b' = c^1 \\ r_c - q & \text{si } b' = c^2 \end{cases}$$

para todo  $b' \in \mathcal{B}'$ . Sea  $B' \in M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(\{0, 1\})$  la matriz de transición que resulta de  $B$  tras hacer un out-splitting en  $c$  según la partición  $E^1, E^2$ , seguida de un in-splitting de  $\pi_s(c)$  según la partición  $\pi_s(E^1), \pi_s(E^2)$ .

Afirmamos nuevamente que  $r'$  es un  $(B', N)$ -casi-vector propio, y la demostración es idéntica al caso anterior. Sigue de notar que, cuando  $a \in \mathcal{B} \setminus \{c, \pi_s(c)\}$ ,

1. si  $c \in \text{Suc}_B(a)$  (resp.  $E^1, E^2, \text{Suc}_B(\pi_s(c))$ ) entonces  $c^1, c^2 \in \text{Suc}_{B'}(a)$  (resp.  $\text{Suc}_{B'}(c^1), \text{Suc}_{B'}(c^2), \text{Suc}_{B'}(\pi_s(c)_j), j = 1, 2$ ) y además  $r'_{c^1} + r'_{c^2} = r_c$ , y
2. si  $\pi_s(c) \in \text{Suc}_B(a)$  (resp.  $E^1, E^2, \text{Suc}_B(\pi_s(c))$ ), entonces exactamente un  $\pi_s(c)_i$  está en  $\text{Suc}_{B'}(a)$  (resp.  $\text{Suc}_{B'}(c^1), \text{Suc}_{B'}(c^2), \text{Suc}_{B'}(\pi_s(c)_j), j = 1, 2$ ) y además  $r'_{\pi_s(c)_j} = r_{\pi_s(c)}$ .

Esto prueba la desigualdad deseada.

Si  $r_{\pi_s(c)} < r_c$ , entonces  $r'$  tiene menos componentes de tamaño  $r_c = M$  que  $r$ , y entonces  $r'$  cumple la primera o la segunda condición del enunciado. Si  $r_{\pi_s(c)} = r_c$ , entonces  $r'$  tiene la misma cantidad de componentes de valor  $M$  que  $r$ . Sin embargo, en este caso los pares  $\{\pi_s(c)_i = \pi'_s(c^i), c^i\}$  para  $i = 1, 2$  verifican  $r'_{\pi_s(c)_i} > r'_{c^i}$  y además el resto de los símbolos de  $\mathcal{B}'$  no cambia su valor de  $r$ . Luego  $r'$  cumple la tercera condición del enunciado.  $\square$

Antes de la demostración del teorema principal, necesitamos construir un objeto combinatorial que nos ayudará a definir factores al full- $N$ -shift que conmuten con la acción de  $s \in D_\infty$ .

#### Definición 4.7

1. Un **cuadrado latino de orden**  $n \in \mathbb{N}_+$  es una matriz  $M \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}(\mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{A}$  es un conjunto finito de tamaño  $n$ , tal que cada fila y cada columna de  $M$  contienen exactamente una aparición de cada elemento de  $\mathcal{A}$ , esto es

$$\{M_{a,b} \mid b \in \mathcal{A}\} = \{M_{b,a} \mid b \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

para todo  $a \in \mathcal{A}$ . También decimos que  $M$  es un **cuadrado latino sobre**  $\mathcal{A}$ .

2. Sean  $M_1 \in M_{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_1)$ ,  $M_2 \in M_{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2}(\mathcal{A}_2)$  dos cuadrados latinos. Su **producto tensorial**  $M_1 \otimes M_2 \in M_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  es el cuadrado latino de orden  $|\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|$  definido por

$$(M_1 \otimes M_2)_{(a_1, a_2), (b_1, b_2)} = ((M_1)_{a_1, b_1}, (M_2)_{a_2, b_2})$$

para todo  $a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1, a_2, b_2 \in \mathcal{A}_2$ .

Dada una involución  $\eta \in S_{\mathcal{A}}$ , una matriz cuadrada  $M \in M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\mathcal{A})$  se dice  **$\eta$ -simétrica** si  $M_{b,b'} = \eta(M_{b',b})$  para todo  $b, b' \in \mathcal{B}$ . En lo que resta de esta sección usaremos la notación  $[N] = \{1, \dots, N\}$ . No habrá confusión pues no hablaremos de patrones.

**Lema 4.8** ([Lee]) *Sea  $N \in \mathbb{N}_+$  y sea  $\eta \in S_{[N^2]}$  una involución con  $N$  puntos fijos.*

*Entonces existe un cuadrado latino  $M \in M_{[N^2], [N^2]}([N^2])$  de orden  $N^2$  que además es  $\eta$ -simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Dada una involución  $\eta$  como en el enunciado, para concluir el resultado basta encontrar un cuadrado latino  $M'$  sobre un conjunto finito  $\mathcal{A}$  de tamaño  $N^2$  y una involución  $\eta' \in S_{\mathcal{A}}$  con el mismo número de puntos fijos que  $\eta$  y tal que  $M'$  es  $\eta'$ -simétrico. En efecto, si  $\nu: [N^2] \rightarrow \mathcal{A}$  es una biyección que manda ciclos de largo 2 de  $\eta$  en ciclos de largo 2 de  $\eta'$  entonces  $\eta = \nu^{-1} \circ \eta' \circ \nu$ , y el cuadrado latino sobre  $[N^2]$  definido por  $M_{n,m} = \nu^{-1}(M'_{\nu(n), \nu(m)})$  cumple lo requerido.

La observación fundamental es la siguiente. Sean  $\eta_1 \in S_{\mathcal{A}_1}, \eta_2 \in S_{\mathcal{A}_2}$  involuciones con  $m_1$  y  $m_2$  puntos fijos respectivamente. Sean  $M_1, M_2$  cuadrados latinos sobre  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  y  $\eta_1, \eta_2$ -simétricos respectivamente. Entonces  $M_1 \otimes M_2$  es un cuadrado latino de orden  $|\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2|$  que

verifica para todo  $a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1, a_2, b_2 \in \mathcal{A}_2$  la igualdad

$$\begin{aligned} (M_1 \otimes M_2)_{(a_1, a_2), (b_1, b_2)} &= ((M_1)_{a_1, b_1}, (M_2)_{a_2, b_2}) = (\eta_1((M_1)_{b_1, a_1}), \eta_2((M_2)_{b_2, a_2})) \\ &= \eta_1 \otimes \eta_2((M_1 \otimes M_2)_{(b_1, b_2), (a_1, a_2)}) \end{aligned}$$

donde  $\eta_1 \otimes \eta_2 \in S_{m_1 m_2}$  es una involución con exactamente  $m_1 m_2$  puntos fijos. Es decir,  $M_1 \otimes M_2$  es  $\eta_1 \otimes \eta_2$ -simétrico.

Supongamos primero que  $N = 2$ . Podemos construir directamente el cuadrado requerido

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que es  $\eta$ -simétrico donde  $\eta \in S_4$  es la involución con dos puntos fijos definida por  $\eta(0) = 1$ .

Si  $N \geq 3$  es impar, consideremos los cuadrados latinos  $Q_1, Q_2$  sobre  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  definidos por

$$(Q_1)_{n,m} = n + m \quad \text{y} \quad (Q_2)_{n,m} = n - m$$

para todo  $n, m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . El cuadrado  $Q_1$  es  $\eta_1$ -simétrico para  $\eta_1 = \text{id}_{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$  una involución con  $N$  puntos fijos, y el cuadrado  $Q_2$   $\eta_2$ -simétrico con  $\eta_2: n \mapsto -n$ . Notemos que  $\eta_2$  tiene exactamente un punto fijo pues la ecuación  $n = -n$  en  $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  implica  $2n = 0$ , y como 2 es coprimo a  $N$  obtenemos  $n = 0$ . Luego  $M_N = Q_1 \otimes Q_2$  es un cuadrado latino de orden  $N^2$  y  $\eta_1 \otimes \eta_2$ -simétrico, donde  $\eta_1 \otimes \eta_2$  tiene exactamente  $N$  puntos fijos.

Si  $N \geq 4$  es par, escribamos  $N = 2^m N'$  con  $m \geq 1$  y  $N'$  impar. Entonces el cuadrado latino  $(\otimes^m M_2) \otimes M_{N'}$  es de orden  $4^m (N')^2 = N^2$  y es  $(\otimes^m \eta_2) \otimes \eta_{N'}$ -simétrico, donde la involución  $(\otimes^m \eta_2) \otimes \eta_{N'}$  posee  $2^m N' = N$  puntos fijos.  $\square$

**Teorema 4.9** *Sea  $X$  un  $D_\infty$ -SFT con entropía  $h_{\text{top}}(X, D_\infty) \geq \log N$ . Entonces existe un factor  $\phi: (X, D_\infty) \rightarrow (\{1, \dots, N\}^{D_\infty}, D_\infty)$  al full-shift en  $N$  símbolos sobre  $D_\infty$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.10 podemos encontrar una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  conjugada a  $(X, D_\infty)$ . La misma proposición muestra que el full-shift  $([N]^{D_\infty}, D_\infty)$  es conjugado a una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^{\sigma^Z} Z$  determinada por  $\pi^Z$ , donde  $Z$  es el  $\mathbb{Z}$ -full-shift con símbolos

$$\mathcal{B}_Z = \mathcal{L}_{\{e, s\}}([N]^{D_\infty}) = \left\{ \binom{i}{j} \mid 1 \leq i, j \leq N \right\}$$

y

$$\pi_s^Z \left( \binom{i}{j} \right) = \binom{j}{i} \text{ para todo } \binom{i}{j} \in \mathcal{B}_Z.$$

Renombrando los símbolos asumiremos que  $Z = [N^2]^{\mathbb{Z}}$ , que  $\pi_s^Z$  es una involución de  $\{1, \dots, N^2\}$  con exactamente  $N$  puntos fijos y que 1 es uno de ellos.

Sean  $(B, \pi)$  el par que determina a  $\sigma$ . Notemos que el valor propio de Perron de  $B$  es  $e^{h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z})} = N^2$ , y que  $\pi$  actúa en las componentes irreducibles de  $\Gamma(B)$  por isomorfismos o anti-isomorfismos de grafos.



Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $(Y, D_\infty)$  es positivamente transitivo: sea  $C$  una componente irreducible de  $\Gamma(B)$  de entropía maximal, y sean  $\Gamma_C, \Gamma_{\pi_s(C)}$  los grafos inducidos en  $\Gamma(B)$  por las componentes irreducibles  $C, \pi_s(C)$ . Definimos  $\Gamma'$  como la unión de  $\Gamma_C, \Gamma_{\pi_s(C)}$ .<sup>1</sup>  $\Gamma'$  es  $\pi$ -invariante, y entonces presenta a un  $D_\infty$ -subsistema  $Y' \subseteq Y$  positivamente transitivo y con la misma entropía que  $Y$ . Cualquier factor  $\phi' = \Phi'^\infty: (Y', D_\infty) \rightarrow (Z, D_\infty)$   $n$ -bloque se extiende a un factor  $\phi = \Phi^\infty: (Y, \mathbb{Z}) \rightarrow (Z, \mathbb{Z})$  definiendo

$$\Phi(w) = \begin{cases} \Phi'(w) & \text{si } w \in \mathcal{L}_n(Y') \\ 1 & \text{si } w \in \mathcal{L}_n(Y) \setminus \mathcal{L}_n(Y'). \end{cases}$$

El factor  $\phi$  conmuta con la acción de  $s$ , ya que  $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{L}_n(Y) \setminus \mathcal{L}_n(Y')$  ssi  $\pi_s(w_n) \dots \pi_s(w_1) \in \mathcal{L}_n(Y) \setminus \mathcal{L}_n(Y')$ , y además  $\pi_s^{\mathbb{Z}}(1) = 1$ .

Asumimos entonces que  $(Y, D_\infty)$  es positivamente transitivo. Sea  $r \in (\mathbb{N}_+)^{\mathcal{B}}$  un  $(B, N^2)$ -casi-vector propio, cuya existencia está garantizada por la desigualdad  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) \geq \log N^2$ . Si  $\max_{b \in \mathcal{B}} r_b > 1$  podemos aplicar repetidamente el Lema 4.6 para encontrar una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y'$  conjugada a  $(Y, D_\infty)$ , donde  $Y'$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por una matriz  $B'$  con un  $(B', N^2)$ -casi-vector propio tal que  $\max_{b \in \mathcal{B}} r'_b = 1$ .

Por lo tanto podemos asumir que  $\max_{b \in \mathcal{B}} r_b = 1$ . Luego  $r_b = 1$  para todo  $b \in \mathcal{B}$ , y de la desigualdad  $Br \geq N^2 r$  sigue que  $|\text{Suc}_B(b)| \geq N^2$  para todo  $b \in \mathcal{B}$ . Notemos que además

$$B^\top r = B^\top P_{\pi_s} r = P_{\pi_s} B r \geq N^2 P_{\pi_s} r = N^2 r,$$

de modo que también  $|\text{Pred}_B(b)| \geq N^2$  para todo  $b \in \mathcal{B}$ .

Definiremos un código 3-bloque  $\phi = \Phi^\infty: (Y, D_\infty) \rightarrow (Z, D_\infty)$  donde  $\Phi: \mathcal{L}_3(Y) \rightarrow [N^2]$  es una función local con memoria y anticipación 1. La condición que debe satisfacer  $\Phi$  para que  $\phi$  conmute con la acción de  $s$  es

$$\Phi(\pi_s(c)\pi_s(b)\pi_s(a)) = \pi_s^{\mathbb{Z}} \circ \Phi(abc) \quad (4.1)$$

para todo  $abc \in \mathcal{L}_3(Y)$ , pues entonces

$$\phi \circ \sigma_s(y)_n = \Phi(\pi_s(y_{-n+1})\pi_s(y_{-n})\pi_s(y_{-n-1})) = \pi_s^{\mathbb{Z}}(\Phi(y_{-n-1}y_{-n}y_{-n+1})) = \sigma_s^{\mathbb{Z}} \circ \phi(y)_n$$

para todo  $y \in Y, n \in \mathbb{Z}$ . Para asegurar que  $\phi$  es sobreyectivo, construiremos  $\Phi$  de tal manera que para todo  $ab, bc \in \mathcal{L}_2(Y)$  se tenga la igualdad

$$\{\Phi(abc') \mid c' \in \text{Suc}_B(b)\} = \{\Phi(a'bc) \mid a' \in \text{Pred}_B(b)\} = [N^2]. \quad (4.2)$$

En tal caso, cualquier  $z \in Z$  tiene una preimagen  $y \in Y$  construida como sigue: sea  $y_{-1}y_0y_1 \in \mathcal{L}_3(Y)$  tal que  $\Phi(y_{-1}y_0y_1) = z_0$ . Usando la propiedad (4.2) elegimos inductivamente símbolos  $y_n, y_{-n} \in \mathcal{B}$  tales que  $\Phi(y_{n-2}y_{n-1}y_n) = z_{n-1}$ ,  $\Phi(y_{-n}y_{-n+1}y_{-n+2}) = y_{-n+1}$  para todo  $n \geq 2$ . Luego  $\phi(y) = z$ .

Diremos que una palabra  $abc \in \mathcal{L}_3(Y)$  está **centrada en torno a  $b$** . Definiremos  $\Phi$  por etapas, donde cada paso define a  $\Phi$  sobre las palabras centradas en algún  $b \in \mathcal{L}_1(Y)$ .

---

<sup>1</sup> $\Gamma'$  no necesariamente coincide con el grafo  $\Gamma''$  inducido por  $C \cup \pi_s(C)$ : podría haber una arista entre  $C$  y  $\pi_s(C)$  que aparece en  $\Gamma''$  pero no en  $\Gamma'$ .

Sea  $b \in \mathcal{L}_1(Y)$ , y supongamos que  $\pi_s(b) = b$ . Luego

$$l = |\text{Pred}_B(b)| = |\text{Suc}_B(b)| \geq N^2$$

y podemos fijar biyecciones  $\nu_P: \text{Pred}_B(b) \rightarrow [l], \nu_S: \text{Suc}_B(b) \rightarrow [l]$  tales que  $\nu_S = \nu_P \circ \pi_s$ . Para cada  $a \in \text{Pred}_B(b), c \in \text{Suc}_B(b)$  definimos  $\Phi(abc) = M_{\nu_P(a), \nu_S(c)}$  donde  $M \in M_{[l], [l]}([N^2])$  es una matriz que construiremos ahora para satisfacer (4.1) y (4.2). Para cumplir (4.1), debe ocurrir que

$$M_{\nu_P(a), \nu_S(c)} = \Phi(abc) = \pi_s^Z(\pi_s(c)\pi_s(b)\pi_s(a)) = \pi_s^Z(M_{\nu_P \circ \pi_s(c), \nu_S \circ \pi_s(a)}) = \pi_s^Z(M_{\nu_S(c), \nu_P(a)}),$$

es decir  $M$  debe ser  $\pi_s^Z$ -simétrica. Como  $\pi_s^Z$  tiene exactamente  $N$  puntos fijos, podemos definir  $M|_{[N^2], [N^2]}$  como el cuadrado latino  $Q$  sobre  $[N^2]$  que entrega el Lema 4.8, y en el resto de las coordenadas

$$M_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } N^2 < i \leq l, 1 \leq j \leq N^2 \\ \pi_s^Z(i) & \text{si } 1 \leq i \leq N^2, N^2 < j \leq l \\ 1 & \text{si } N^2 < i, j \leq l. \end{cases}$$

Un esquema de la matriz  $M$  es el siguiente.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & \pi_s^Z(1) & \cdots & \pi_s^Z(1) \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & Q & & \pi_s^Z(N^2) & \cdots & \pi_s^Z(N^2) \\ \hline 1 & \cdots & N^2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & N^2 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

La matriz completa  $M$  es  $\pi_s^Z$ -simétrica (pues 1 es un punto fijo de  $\pi_s^Z$ ) y además cada fila y columna contiene todos los enteros en  $[N^2]$ . Es decir, se verifican (4.1) y (4.2) para las palabras en  $b$ .

Supongamos que en cambio  $\pi_s(b) \neq b$ , y que  $\Phi$  no se ha definido todavía sobre las palabras centradas en  $\pi_s(b)$  ni  $b$ . Sean  $l_S = |\text{Pred}_B(b)|, l_P = |\text{Suc}_B(b)|$  (recordemos que  $l_S, l_P \geq N^2$  y tomemos biyecciones  $\nu_P: \text{Pred}_B(b) \rightarrow [l_P], \nu_S: \text{Suc}_B(b) \rightarrow [l_S]$ . Para cada  $a \in \text{Pred}_B(b), c \in \text{Suc}_B(b)$  definimos  $\Phi(abc) = M_{\nu_P(a), \nu_S(c)}$  donde  $M \in M_{[l_P], [l_S]}([N^2])$  está definida como sigue:  $M|_{[N^2], [N^2]}$  es un cuadrado latino arbitrario y en los otros índices tomamos

$$M_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } N^2 < i \leq l_P, 1 \leq j \leq N^2 \\ i & \text{si } 1 \leq i \leq N^2, N^2 < j \leq l_S \\ 1 & \text{si } N^2 < i \leq l_P, N^2 < j \leq l_S. \end{cases}$$

La matriz  $M$  la misma estructura que en el caso anterior, salvo que ahora no necesariamente es cuadrada. Además, contiene a todos los enteros de  $[N^2]$  en cada una de sus filas y columnas y por lo tanto se cumple (4.2) para las palabras centradas en  $b$ . Podemos definir  $\Phi$  en las

palabras centradas en  $\pi_s(b)$  por la ecuación (4.1), y entonces también se cumple (4.2) para estas palabras.

Luego tal  $\Phi$  existe. Esto termina la demostración.  $\square$

**Observación 4.10** *La demostración del teorema anterior admite una generalización a grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  generales que no demostraremos en este texto. Para fijar ideas, sea  $G$  un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  de tipo I. Sea  $G \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $(B, \pi)$  tal que la acción  $\pi$  es libre en  $\mathcal{L}_1(Y)$  y  $h_{\text{top}}(Y, \mathbb{Z}) \geq N^{|T|}$ . Si  $v$  es un  $(B, N^{|T|})$ -casi-vector propio, no es difícil ver que  $r = \max_{t \in T} P_{\pi_t} v$  es un  $(B, N^{|T|})$ -casi-vector propio fijado por todas las matrices  $P_{\pi_t}$ .*

El Lema 4.5 se adapta a este contexto usando la misma idea que en  $G = \mathbb{Z}$ , salvo que ahora hay que realizar out-splittings en toda la órbita  $\text{Orb}_\pi(b)$  de un símbolo  $b \in \mathcal{L}_1(Y)$ . Para esto es fundamental que:

1. el estabilizador  $\text{Stab}_\pi(b)$  sea trivial, y
2. el  $(B, N^{|T|})$ -casi-vector propio  $r$  que guía el out-splitting sea  $P_{\pi_t}$ -invariante para todo  $t \in T$ .

La acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Y'$  es determinada por  $(B', \pi')$  donde la acción  $\pi'$  también es libre en  $\mathcal{L}_1(Y)$ , y el  $(B, N^{|T|})$ -casi-vector propio  $r'$  que resulta de los out-splittings también es  $P_\pi$ -invariante.

Repitiendo este procedimiento se puede asumir que en el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$  cada vértice tiene al menos  $N^{|T|}$  sucesores, y hay que probar la existencia de un factor 2-bloque  $\phi = \Phi^\infty: (Y, G) \twoheadrightarrow (Z, G)$  al  $\mathbb{Z}$ -full-shift en  $N^{|T|}$  símbolos  $Z$  equipado de una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Z$  determinada por  $\pi^Z$ . Para construir un  $\Phi$  tal que commute con cada  $\sigma_{(t,0)}^Z$ , tomando un  $b \in \mathcal{L}_1(Y)$  arbitrario se escoge una sobreyección  $\Phi_b: \text{Suc}_B(b) \rightarrow [N^{|T|}]$  tal que

$$\Phi_b \circ \pi_t = \pi_t^Z \circ \Phi_b \text{ para todo } t \in T$$

(aquí nuevamente se usa que  $\pi$  es libre). Esto fuerza a tomar  $\Phi_{\pi_t(b)}: \text{Suc}_B(\pi_t(b)) \rightarrow [N^{|T|}]$  como

$$\Phi_{\pi_t(b)} = \pi_t^Z \circ \Phi_b \text{ para todo } t \in T,$$

y entonces  $\Phi(bc) = \Phi_b(c)$  queda totalmente determinado en  $\mathcal{L}_2(Y)$ .

Si en cambio partimos de una acción 1-bloque  $G \curvearrowright^\sigma Y$  determinada por  $(B, \pi)$  donde  $\pi$  no necesariamente es libre, se puede adaptar una construcción de [AKM85] para encontrar una extensión  $G \curvearrowright^\sigma Y'$  resolvente y tal que la acción  $\pi'$  en  $\mathcal{L}_1(Y')$  es libre. Como  $(Y', G)$  tiene la misma entropía que  $(Y, G)$ , el argumento anterior muestra que  $(Y, G)$  es una extensión del  $G$ -full-shift en  $N$  símbolos. Esto muestra una versión del Teorema 4.4 para grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  sin necesidad de introducir hipótesis de mezcla fuertes.

# Capítulo 5

## Funciones zeta sobre $T \times \mathbb{Z}$

En este capítulo estudiaremos en detalle las funciones zeta de  $T \times \mathbb{Z}$ -sistemas donde  $T$  es un grupo finito. Pese a que ésta es una clase restringida de grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ , esta limitación nos permite entregar fórmulas explícitas para varias clases de sistemas.

Primero, se define la función zeta de la acción de un grupo finitamente generado y se entregan resultados de trabajos previos [KLP03, KR13, Lin96]. Luego, calculamos la función zeta del full-shift sobre  $T \times \mathbb{Z}$  donde  $T$  es cualquier grupo finitamente generado y entregamos una fórmula de producto similar a la que se tiene en el caso unidimensional cuando  $T$  es abeliano. Finalmente, se encuentran fórmulas explícitas para  $T \times \mathbb{Z}$ -SFTs y sóficos cuando  $T$  es finito.

### 5.1. Resultados previos

Las funciones zeta de un  $\mathbb{Z}$ -sistema son invariantes clásicas de conjugación topológica que contienen la información de puntos periódicos de un sistema. Dado un  $\mathbb{Z}$ -sistema  $(X, T)$ , su **función zeta**  $\xi_T$  se define como la serie formal

$$\xi_T(z) = \exp \left( \sum_{n \geq 0} \frac{\text{per}_n(T)}{n} z^n \right) \quad (5.1)$$

donde  $\text{per}_n(T) = |\{x \in X \mid T^n x = x\}|$  es el número de puntos en  $X$  fijos por  $T^n$ . Esta serie determina  $\text{per}_n(T)$  por la fórmula

$$\frac{d^n}{dz^n} \log \xi_T(z) \Big|_{z=0} = n! \frac{\text{per}_n(T)}{n} = (n-1)! \text{per}_n(T) \quad (5.2)$$

donde  $\frac{d^n}{dz^n}$  es la  $n$ -ésima derivada de una serie formal.

La siguiente proposición resume algunos de los resultados básicos que se conocen para funciones zeta sobre  $\mathbb{Z}$ .

**Proposición 5.1** (ver [LM95])

1. (Fórmula de Bowen-Lanford) Sea  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por una matriz  $B$ . Entonces

$$\xi_{\sigma_B}(z) = \prod_{\omega \in \Omega} \frac{1}{1 - \omega z} = \frac{1}{\det(\text{Id} - zB)} \quad (5.3)$$

donde  $\Omega$  es el multiconjunto de valores propios de  $B$ . En particular, la función zeta es una invariante más fina que la entropía para  $\mathbb{Z}$ -SFTs.

2. Sea  $(Y, \sigma)$  un  $\mathbb{Z}$ -sófico. Entonces existe  $l \in \mathbb{N}$  y matrices cuadradas  $B_1, \dots, B_l$  a entradas en  $\mathbb{Z}$  tales que

$$\xi_{\sigma}(z) = \prod_{j=1}^l (\det(\text{Id} - zB_j))^{(-1)^j}. \quad (5.4)$$

3. (Fórmula de producto) Sea  $(X, T)$  un  $\mathbb{Z}$ -sistema. Entonces

$$\xi_T(z) = \prod_{\gamma \subset X \text{ órbita finita}} \frac{1}{1 - z^{|\gamma|}}. \quad (5.5)$$

En particular, las funciones zeta de  $\mathbb{Z}$ -SFTs y  $\mathbb{Z}$ -sóficos son siempre racionales. La ecuación (5.3) se puede deducir notando que el número de caminos de largo  $n \in \mathbb{N}$  en  $\Gamma(A)$  entre dos vértices  $u$  y  $v$  es  $(A^n)_{u,v}$ , y entonces  $\text{per}_n(\sigma_A) = \text{tr}(A^n) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega^n$ .

D. Lind generaliza en [Lin96] esta noción para estudiar funciones zeta de sistemas sobre  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . La definición hace sentido en cualquier grupo numerable.

**Definición 5.2** Sea  $G$  un grupo numerable y  $G \curvearrowright^{\alpha} X$  un  $G$ -sistema. La **función zeta de la acción**  $\alpha$  (siempre que exista) es la serie formal

$$\xi_{\alpha}(z) = \exp \left( \sum_{L \in \mathcal{I}} \frac{\text{per}_L(\alpha)}{|G/L|} z^{|G/L|} \right) \quad (5.6)$$

donde  $\mathcal{I}$  son los subgrupos de índice finito de  $G$  y

$$\text{per}_L(\alpha) = |\{x \in X \mid \alpha_g x = g \text{ para todo } g \in L\}|$$

es el número de puntos fijos por  $L \in \mathcal{I}$ .

**Observación 5.3** Si  $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$  es una serie formal de potencias, entonces la igualdad  $\exp(f(z)) = \sum_{n \geq 0} f(z)^n / n!$  define una serie  $\exp(f(z)) \in \mathbb{C}[[z]]$  cuando el coeficiente de  $f(z)$  asociado a  $x^0$  es nulo. Como  $|G/L| > 0$  para todo  $L \leq G$ , la exponencial de la serie formal  $\sum_{L \in \mathcal{I}} a_L z^{|G/L|}$  está bien definida.

Los subgrupos de índice finito de  $\mathbb{Z}^d$  se pueden explicitar como las imágenes de  $\mathbb{Z}^d$  por las matrices a coordenadas enteras

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1d} \\ 0 & a_2 & b_{23} & \cdots & b_{2d} \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & b_{3d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$

donde  $a_i \geq 1$  para  $1 \leq i \leq d$  y  $0 \leq b_{ij} \leq a_i - 1$  para  $i + 1 \leq j \leq d$ . Esta parametrización permite calcular  $\xi_\sigma$  para un full-shift en  $\mathbb{Z}^d$ , junto con probar una fórmula de producto que generaliza (5.5). Salvo algunos resultados sobre la frontera natural de funciones zeta de sistemas algebraicos sobre  $\mathbb{Z}^d$  [MW18], se sabe poco sobre esta clase de funciones.

**Proposición 5.4** ([Lin96]) *Sea  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 1$ .*

1. *Sea  $N \in \mathbb{N}$ . La función zeta del full- $N$ -shift sobre  $\mathbb{Z}^d$  es*

$$\xi_{N,d}(z) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - (Nz)^n)^{e_{d-1}(n)}} \quad (5.7)$$

donde  $e_d(n)$  es el número de lattices en  $\mathbb{Z}^d$  (es decir, subgrupos de  $\mathbb{Z}^d$ ) de índice  $n$ . Esta función es holomorfa en el disco  $D(0, 1/N) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/N\}$  y tiene a  $\partial D(0, 1/N) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1/N\}$  como su frontera natural.

2. *Sea  $\mathbb{Z}^d \curvearrowright^\alpha X$  un  $\mathbb{Z}^d$ -sistema. Entonces*

$$\xi_\alpha(z) = \prod_{\gamma \subset X \text{ órbita finita}} \xi_{1,d}(z^{|\gamma|}). \quad (5.8)$$

Prácticamente el único grupo (fuera de  $\mathbb{Z}$ ) para el que se ha podido calcular explícitamente esta invariante para una clase amplia de sistemas es el diédrico infinito

$$D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = srsr = 1 \rangle.$$

El primer paso para realizar los cálculos es enumerar los subgrupos índice finito de  $D_\infty$  notando que son exactamente

$$\{\langle r^i \rangle \mid i \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\langle r^i, r^j s \rangle \mid j < i \in \mathbb{N}_+\}$$

con  $[D_\infty : \langle r^i \rangle] = 2i$  y  $[D_\infty : \langle r^i, r^j s \rangle] = i$ . Dada una acción  $D_\infty \curvearrowright^\alpha X$ , si escribimos  $\text{per}_{i,j}(\alpha) \subset X$  como el número de puntos fijos por  $\langle r^i, r^j s \rangle$  entonces la función zeta  $\xi_\alpha$  es

$$\xi_\alpha(z) = \sqrt{\xi_{\alpha_r}(z^2)} \exp \left( \sum_{m \geq 1} \text{per}_{2m-1,0}(\alpha) z^{2m-1} + \frac{\text{per}_{2m,0}(\alpha) + \text{per}_{2m,1}(\alpha)}{2} z^{2m} \right)$$

donde  $\alpha_r = \alpha|_{\langle r \rangle}$  es la subacción de  $\alpha$  por  $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}$  en  $X$ .

**Proposición 5.5** ([KLP03, KR13])

1. *Sea  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque en un  $\mathbb{Z}$ -sódico  $Y$ . Entonces  $\xi_\sigma = \sqrt{\xi_{\sigma_{\mathbb{Z}}}(z^2)} \exp(g_\sigma(z))$  donde  $\xi_{\sigma_{\mathbb{Z}}}$  está definida por (5.4) y  $g_\sigma(z)$  es una función racional de  $z$ .*

2. *Sea  $D_\infty \curvearrowright^\alpha X$  un  $D_\infty$ -sistema. Sean  $\mathcal{O}_1$  y  $\mathcal{O}_2$  los conjuntos de órbitas finitas de  $\alpha$  en  $X$  cuyo estabilizador es de la forma  $\langle r^i, r^j s \rangle$  y  $\langle r^i \rangle$  respectivamente. Sea  $\mathcal{O}_T$  el conjunto de órbitas finitas de la subacción inducida por  $\mathbb{Z} \cong \langle r \rangle \leq D_\infty$  en  $X$ .*

Entonces

$$\begin{aligned}\xi_\alpha(z) &= \prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} \sqrt{\frac{1}{1-z^{2|\gamma|}}} \exp\left(\frac{z^{|\gamma|}}{1-z^{|\gamma|}}\right) \prod_{\gamma \in \mathcal{O}_2} \frac{1}{1-z^{|\gamma|}} \\ &= \prod_{\beta \in \mathcal{O}_T} \sqrt{\frac{1}{1-z^{2|\beta|}}} \prod_{\gamma \in \mathcal{O}_1} \exp\left(\frac{z^{|\gamma|}}{1-z^{|\gamma|}}\right).\end{aligned}\tag{5.9}$$

## 5.2. Funciones zeta de full-shifts

Necesitamos aclarar un poco la definición de  $\xi_\alpha(z)$  para grupos finitamente generados. La siguiente proposición resume algunas observaciones generales.

**Proposición 5.6** *Sea  $G$  un grupo numerable y  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema.*

1. *Si  $G$  es finitamente generado entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un número finito de subgrupos de índice  $n$  de  $G$ . Si además  $X$  es un  $G$ -subshift, entonces  $\text{per}_L(\alpha)$  es finito para cada  $L \in \mathcal{I}$ .*

*En particular, la suma dentro de la exponencial en (5.6) es una serie formal bien definida en este caso.*

2. *Sea  $\mathcal{H}$  un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de índice finito en  $G$ . Entonces*

$$\xi_\alpha(z) = \exp\left(\sum_{H \in \mathcal{H}} \text{per}_H(\alpha) \frac{z^{|G/H|}}{|N_G(H)/H|}\right)$$

donde  $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} \leq H\} \leq G$  es el normalizador de  $H$  en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN. 1. Cada subgrupo  $L$  de índice  $n \in \mathbb{N}$  en  $G$  queda determinado como el estabilizador de  $L$  de la acción  $G \curvearrowright G/L$  dada por  $(g, kL) \mapsto gkL$ . Como hay tantas acciones de  $G$  en  $G/L$  como mapeos de  $G$  en

$$S_{|G/L|} \cong S_n = \{\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ biyectiva}\}$$

y éstos quedan determinados por las imágenes de los finitos generadores de  $G$ , concluimos que hay finitos subgrupos de índice  $n$ .

Si  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es un  $G$ -subshift entonces también  $\text{per}_L(\alpha) \leq |\mathcal{A}|^{|G/L|}$  es finito (esta conclusión vale para cualquier acción expansiva, pero no necesitamos el caso general).

2. Si  $H, K \leq G$  son subgrupos de índice finito de  $G$  conjugados entre sí entonces  $|G/H| = |G/K|$  y además  $\text{per}_H(\alpha) = \text{per}_K(\alpha)$ : sea  $g \in G$  tal que  $gHg^{-1} = K$  y observemos que para  $x \in X, h \in H$  se verifica  $\alpha_h x = x$  ssi  $\alpha_{ghg^{-1}}(\alpha_g x) = \alpha_g \circ \alpha_h x = \alpha_g x$ . Como  $\alpha_g$  es una biyección y  $gHg^{-1} = K$  concluimos  $\text{per}_H(\alpha) = \text{per}_K(\alpha)$ .

Por otro lado, la acción de conjugación sobre  $\mathcal{H}$  dada por  $(g, H) \in G \times \mathcal{H} \mapsto \gamma_g(H) = gHg^{-1}\mathcal{H}$  satisface  $|\text{Orb}_\gamma(H)| = |G/\text{Stab}_\gamma(H)|$  para todo  $H \in \mathcal{H}$  por el teorema de órbita-estabilizador. Notando que  $|\text{Orb}_\gamma(H)|$  es el número de subgrupos de  $G$  conjugados a  $H$  y que  $\text{Stab}_\gamma(H)$  es el normalizador de  $H$  en  $G$  obtenemos

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(z) &= \exp\left(\sum_{H \in \mathcal{H}} |\text{Orb}_\gamma(H)| \text{per}_H(\alpha) \frac{z^{|G/H|}}{|G/H|}\right) = \exp\left(\sum_{H \in \mathcal{H}} |G/N_G(H)| \text{per}_H(\alpha) \frac{z^{|G/H|}}{|G/H|}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{H \in \mathcal{H}} \text{per}_H(\alpha) \frac{z^{|G/H|}}{|N_G(H)/H|}\right). \quad \square \end{aligned}$$

El primer paso para simplificar la función zeta de un  $T \times \mathbb{Z}$ -sistema es enumerar los subgrupos de índice finito de  $T \times \mathbb{Z}$ . Para ello usamos una versión del lema de Goursat sobre subgrupos de un producto directo.

**Proposición 5.7** (Lema de Goursat, ver [Hal59]) *Sean  $T, N$  grupos. Dados  $T_2 \trianglelefteq T_1 \leq T$ ,  $N_2 \trianglelefteq N_1 \leq N$  y un isomorfismo  $\phi: N_1/N_2 \rightarrow T_1/T_2$ , definimos  $\bar{L}_{(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)} \leq T \times N$  como el subgrupo*

$$\{(t, n) \in T_1 \times N_1 \mid \phi(nN_2) = tT_2\}.$$

*Entonces cada subgrupo de  $T \times N$  es un subgrupo de este tipo, y subgrupos asociados a tuplas  $(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)$ ,  $(T'_1, T'_2, N'_1, N'_2, \phi')$  distintas son distintos. Además, el índice de  $\bar{L}_{(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)}$  en  $T \times N$  es  $[T : T_1][N : N_2] = [T : T_2][N : N_1]$ .*

Las tuplas  $(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)$  se llaman **tuplas de Goursat** del subgrupo  $\bar{L}_{(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)}$ . Si en la proposición anterior tomamos  $N = \mathbb{Z}$  entonces todos los cocientes  $N_1/N_2$  son cíclicos, lo que facilita el bastante el cálculo. La información que necesitaremos sobre los subgrupos de  $T \times \mathbb{Z}$  está contenida en la siguiente proposición.

**Proposición 5.8** *Sea  $T$  un grupo.*

1. *Dados  $l \geq 1$ ,  $H \leq T$  de índice finito y un  $Hk \in N_T(H)/H$ , el conjunto*

$$L_{(l, H, Hk)} = \{(hk^m, ml) \in (\cup_{i=1}^{|\langle Hk \rangle|} Hk^{i-1}) \times l\mathbb{Z} \mid h \in H, m \in \mathbb{Z}\}$$

*es un subgrupo de  $T \times \mathbb{Z}$  de índice finito  $l[T : H]$ . Todo subgrupo de índice finito de  $T \times \mathbb{Z}$  es de esta forma, y subgrupos asociados a tuplas  $(l, H, Hk)$ ,  $(l', H', Hk')$  distintas son distintos.*

2. *Si  $\mathcal{H}$  es un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de  $T$ , entonces*

$$\mathcal{G} = \{L_{(l, H, Hk)} \mid l \geq 1, H \in \mathcal{H}, Hk \in N_T(H)/H\}$$

*es un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de  $T \times \mathbb{Z}$ .*

3. *Sea  $L_{(l, H, Hk)} \leq T \times \mathbb{Z}$  un subgrupo. Entonces  $L_{(l, H, Hk)} \cong H \rtimes_{\psi_k} \mathbb{Z}$  donde  $\psi_k \in \text{Aut}(H)$  es la conjugación por  $k$ .*



DEMOSTRACIÓN. 1. Notemos primero que la definición de  $L_{(l,H,Hk)}$  no depende del representante  $k$  de  $Hk$ .

Sea  $\bar{L}_{(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)} \leq T \times \mathbb{Z}$  con  $N_2 \trianglelefteq N_1 \leq \mathbb{Z}$ ,  $T_2 \trianglelefteq T_1 \leq T$  y un isomorfismo  $\phi: N_1/N_2 \rightarrow T_1/T_2$ , donde  $[\mathbb{Z} : N_1], [T : T_2] < \infty$ . A partir de un tal  $(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)$  construimos una tupla  $(l, H, Hk)$  como sigue.

- (a) Como  $N_1 \leq \mathbb{Z}$ , podemos definir  $l \in \mathbb{N}$  como el único natural con  $N_1 = l\mathbb{Z}$ . Notemos que  $l \geq 1$  pues  $l = [\mathbb{Z} : N_1] < \infty$ .
- (b) Sea  $H = T_2$ .
- (c) Sea  $K = T_1/H$ . Notemos que  $T_1 \leq N_T(H)$  pues  $T_1 \supseteq H$ , y entonces  $K \leq N_T(H)/H$ . Además, como  $N_1/N_2 = (l\mathbb{Z})/N_2 \cong T_1/T_2 = K$  tenemos que  $N_2 = |K|l\mathbb{Z}$ .
- (d) Sea  $Hk = \phi(l + |K|l\mathbb{Z}) \in T_1/T_2 = K$ . Si identificamos  $N_1/N_2 = (l\mathbb{Z})/(|K|l\mathbb{Z})$  con  $\mathbb{Z}/|K|\mathbb{Z}$  de la manera natural, entonces  $Hk = \bar{\phi}(1 + |K|\mathbb{Z})$  en estas coordenadas. En particular,  $|\langle Hk \rangle| = |K|$ .

Para verificar la identidad  $\bar{L}_{(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)} = L_{(l, H, Hk)}$  tomemos  $(t, n) \in \bar{L}_{(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)}$ . Como

$$\bar{L}_{(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)} \leq T_1 \times N_1 = (\cup_{i=1}^{|K|} Hk^n) \times l\mathbb{Z},$$

existen  $m, m' \in \mathbb{Z}$  y  $h \in H$  tales que  $(t, n) = (hk^m, m'l)$ . De la ecuación

$$Hhk^m = Hk^m = \phi(m'l + l|K|\mathbb{Z}) = \phi(l + l|K|\mathbb{Z})^{m'} = Hk^{m'}$$

(donde hemos usado que  $(hk^m, m'l) \in \bar{L}_{(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)}$ ) sigue que podemos tomar  $m = m'$ , es decir  $(t, n) \in L_{(l, H, Hk)}$ . Recíprocamente, cualquier  $(hk^m, ml) \in L_{(l, H, Hk)} \leq T_1 \times N_1$  cumple que  $\phi(ml + l|K|\mathbb{Z}) = Hk^m H$ . Esto prueba la igualdad deseada y adicionalmente muestra que  $L_{(l, H, Hk)}$  es un grupo. Además,  $[T \times \mathbb{Z} : L_{(l, H, Hk)}] = [\mathbb{Z} : N_1][T : T_2] = l[T : H]$ .

Podemos revertir el proceso anterior: si  $(l, H, Hk)$  es como en el enunciado, definimos una tupla  $(T_1, T_2, N_1, N_2, \phi)$  como sigue.

- (a) Sean  $N_1 = l\mathbb{Z}$ ,  $N_2 = l|\langle Hk \rangle|\mathbb{Z}$ .
- (b) Sean  $T_2 = H$  y  $T_1 \geq H_2$  el subgrupo de  $N_T(H)$  tal que  $T_1/T_2 = \langle Hk \rangle$ . El teorema de correspondencia de subgrupos muestra que tal  $T_1$  existe y es único.
- (c) Sea  $\phi: N_1/N_2 \rightarrow T_1/T_2 = K$  definida por  $\phi(l + l|\langle Hk \rangle|\mathbb{Z}) = Hk$ . La función  $\phi$  es sobreyectiva pues  $\langle Hk \rangle = T_1/T_2$ , y es inyectiva ya que el tamaño de  $N_1/N_2$  es  $|\langle Hk \rangle|$ .

Es claro que esta construcción es inversa a la que transforma  $(N_1, N_2, T_1, T_2, \phi)$  en  $(l, H, Hk)$ . El lema de Goursat y lo que acabamos de probar muestra que cualquier subgrupo de índice finito es de la forma  $L_{(l, H, Hk)}$  para una tupla  $(l, H, Hk)$  como en el enunciado, y que tuplas distintas corresponden a grupos distintos.

2. Si  $(t, n) \in T \times \mathbb{Z}$  y  $L_{(l, H, Hk)} \leq T \times \mathbb{Z}$  es arbitrario, entonces

$$(tHt^{-1})(tkt^{-1}) \in (tN_T(H)t^{-1})/(tHt^{-1}) = N_T(tHt^{-1})/(tHt^{-1})$$

y tenemos la igualdad

$$(t, n)L_{(l, H, Hk)}(t, n)^{-1} = L_{(l, tHt^{-1}, (tHt^{-1})(tkt^{-1}))}. \quad (5.10)$$

Como  $\mathcal{H}$  solo contiene elementos en clases de conjugación (por  $T$ ) distintas, 5.10 muestra que  $\mathcal{G}$  solo contiene elementos en clases de conjugación (por  $T \times \mathbb{Z}$ ) distintas. Como  $\mathcal{H}$  contiene al menos un elemento de cada clase de conjugación (por  $T$ ), 5.10 muestra que  $\mathcal{G}$  contiene al menos un elemento de cada clase de conjugación (por  $T \times \mathbb{Z}$ ).

3. Definamos  $\Theta: L_{(l,H,Hk)} \rightarrow H \rtimes_{\psi_k} \mathbb{Z}$  por  $\Theta(hk^m, ml) = (h, m)$ . La función  $\Theta$  es sobreyectiva por definición y es claramente inyectiva. Además es un morfismo, pues cuando  $(hk^m, ml), (h'k^{m'}, m'l) \in L_{(l,H,Hk)}$  entonces

$$\begin{aligned} \Theta(hk^m, ml)\Theta(h'k^{m'}, m'l) &= (h, m)(h', m') = (h\psi_k^m(h'), m + m') \\ &= \Theta(h\psi_k^m(h')k^{m+m'}, (m + m')l) \\ &= \Theta((hk^m, ml)(h'k^{m'}, h'l)). \quad \square \end{aligned}$$

En la proposición anterior consideramos clases laterales izquierdas  $Hk$  para poder escribir el isomorfismo  $\Theta$  de manera cómoda. Esto es irrelevante en lo que sigue.

**Ejemplo 5.9** Sea  $K_4 = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2 \rangle$  el grupo de Klein. La Figura 5.1 muestra el subgrupo de  $K_4 \times \mathbb{Z}$  determinado por la tupla  $(2, \langle a \rangle, \langle a \rangle b)$ .

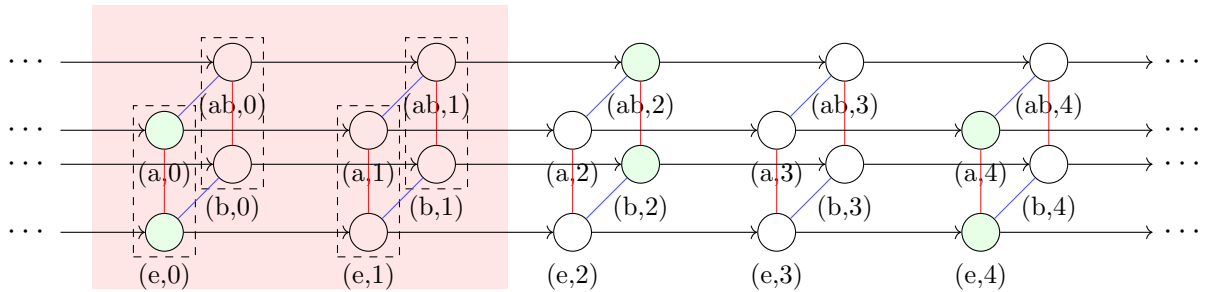


Figura 5.1: Fragmento del grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{K_4 \times \mathbb{Z}, \{(a,0), (b,0), (e,1)\}}$ . Los vértices de  $L_{(2, \langle a \rangle, \langle a \rangle b)}$  están resaltados en verde. Si  $x$  es una configuración en un  $K_4 \times \mathbb{Z}$ -subshift estabilizada por  $L_{(2, \langle a \rangle, \langle a \rangle b)}$ , un dominio fundamental de  $x$  se encuentra con fondo rojo. Los vértices en un mismo rectángulo deben tener asignado el mismo símbolo en  $x$ .

Esta parametrización permite explicitar un poco más la función zeta de un  $T \times \mathbb{Z}$ -sistema.

**Proposición 5.10** Sea  $T$  un grupo finitamente generado y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\alpha X$  un  $T \times \mathbb{Z}$ -sistema. Sea  $\mathcal{H}$  un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de  $T$ . Entonces

$$\xi_\alpha(z) = \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{Hk \in N_T(H)/H} \text{per}_{L_{(l,H,Hk)}}(\alpha) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Directo de las Proposiciones 5.6 y 5.8. □

Del cálculo anterior sigue una fórmula para la función zeta  $\xi_{N, T \times \mathbb{Z}}$  del full- $N$ -shift sobre  $T \times \mathbb{Z}$ . Basta calcular la función zeta de la acción trivial  $\xi_{1, T \times \mathbb{Z}}$  de  $T \times \mathbb{Z}$ , pues para cualquier grupo

numerable  $G$  y subgrupo  $H \in \mathcal{I}$  de índice finito tenemos que  $\text{per}_H(G \curvearrowright^\sigma \{1, \dots, N\}^G) = N^{|G/H|}$  y entonces

$$\xi_{N,G}(z) = \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{I}} \frac{(Nz)^{|G/H|}}{|G/H|} \right) = \xi_{1,G}(Nz).$$

**Proposición 5.11** *Sea  $T$  un grupo finitamente generado,  $\mathcal{H}$  un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de índice finito de  $T$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Entonces la función zeta del full- $N$ -shift sobre  $T \times \mathbb{Z}$  es*

$$\xi_{N,T \times \mathbb{Z}}(z) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \frac{1}{(1 - (Nz)^{|T/H|})}. \quad (5.11)$$

En particular, si  $\mathcal{H}$  es finito entonces  $\xi_{N,T \times \mathbb{Z}}(z)$  es la inversa de un polinomio.

DEMOSTRACIÓN. Calcularemos la función zeta de la acción trivial. Para ello basta notar que

$$\begin{aligned} \xi_{1,T \times \mathbb{Z}}(z) &= \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{Hk \in N_T(H)/H} 1 \right) \\ &= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{l \geq 1} \frac{z^{l|T/H|}}{l} \right) \\ &= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} -\log(1 - z^{|T/H|}) \right) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \frac{1}{(1 - z^{|T/H|})}. \quad \square \end{aligned}$$

Si  $T$  tiene finitos subgrupos de orden finito entonces  $\mathcal{H}$  es finito y  $\xi_{N,T \times \mathbb{Z}}(z)$  es la inversa de un polinomio. El caso extremo de esta situación es cuando  $T$  es infinito y simple, ya que en tal caso  $T$  no tiene subgrupos no triviales de índice finito (pues cualquier subgrupo de índice finito contiene un subgrupo normal de índice finito).

**Observación 5.12** *La ecuación (5.11) generaliza el resultado (5.7) al tomar  $T = \mathbb{Z}^{d-1}$ : en este caso  $\mathcal{H}$  consiste en todos los subgrupos de  $\mathbb{Z}^{d-1}$  y entonces*

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \frac{1}{(1 - (Nz)^{|\mathbb{Z}^{d-1}/H|})} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - (Nz)^n)^{e_{d-1}(n)}}.$$

### 5.3. Fórmulas de producto

Las fórmulas de producto (5.8) y (5.9) tienen la siguiente forma general.

**Lema 5.13** *Sea  $G$  un grupo numerable y  $G \curvearrowright^\alpha X$  un  $G$ -sistema. Dada una órbita finita  $\gamma \subset X$  y  $x_\gamma \in \gamma$  arbitrario definimos  $\xi_{1, \text{Stab}_\alpha(\gamma)}$  como la función zeta de la acción trivial de  $\text{Stab}_\alpha(x_\gamma)$ . Entonces*

$$\xi_\alpha(z) = \prod_{\gamma \text{ órbita finita}} \xi_{1, \text{Stab}_\alpha(\gamma)}(z^{|\gamma|}).$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que si  $x, y \in \gamma$  entonces  $\text{Stab}(x)$  es conjugado a  $\text{Stab}(y)$ , de modo que la clase de isomorfismo de  $\text{Stab}(\gamma)$  está bien definida.

Supongamos primero que  $X = \gamma$  es una órbita finita, y escribamos  $x = x_\gamma$ . Para cada  $y \in \gamma$ , fijemos  $g_y \in G$  tal que  $g_y.x = y$ . Luego

$$\xi_\alpha(z) = \exp \left( \sum_{L \in \mathcal{I}} \frac{z^{|G/L|}}{|G/L|} |\{y \in Y \mid \text{Stab}_\alpha \geq L\}| \right). \quad (5.12)$$

Como  $\text{Stab}_\alpha(y) = \text{Stab}_\alpha(g_y.x) = g_y \text{Stab}_\alpha(x) g_y^{-1}$ , tenemos que 5.12 es igual a

$$\sum_{L \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{y \in \gamma \\ g_y \text{Stab}_\alpha(x) g_y^{-1} \geq L}} \frac{z^{|G/L|}}{|G/L|} = \sum_{y \in \gamma} \sum_{\substack{L \in \mathcal{I} \\ g_y \text{Stab}_\alpha(x) g_y^{-1} \geq L}} \frac{z^{|G/L|}}{|G/L|} = \sum_{y \in \gamma} \sum_{\substack{L \in \mathcal{I} \\ \text{Stab}_\alpha(x) \geq L}} \frac{z^{|G/(g_y^{-1} L g_y)|}}{|G/(g_y^{-1} L g_y)|}.$$

Recordando que  $|G/(g_y^{-1} L g_y)| = |G/L|$  obtenemos que

$$\xi_\alpha(z) = \sum_{y \in \gamma} \sum_{\substack{L \in \mathcal{I} \\ \text{Stab}_\alpha(x) \geq L}} \frac{z^{|G/L|}}{|G/L|} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{I} \\ \text{Stab}_\alpha(x) \geq L}} |\gamma| \frac{z^{|G/L|}}{|G/L|} = \sum_{\substack{L \in \mathcal{I} \\ \text{Stab}_\alpha(x) \geq L}} \frac{z^{|G/L|}}{|\text{Stab}_\alpha(\gamma)/L|} = \xi_{1, \text{Stab}_\alpha(\gamma)}(z^{|\gamma|})$$

donde hemos usado  $|G/L| = |\gamma| |\text{Stab}_\alpha(\gamma)/L|$ .

Si  $X$  no es una órbita finita, escribiendo  $\alpha_\gamma$  como la restricción de  $\alpha$  a una órbita finita  $\gamma$  sigue que

$$\xi_\alpha(z) = \prod_{\gamma \text{ órbita finita}} \xi_{\alpha_\gamma}(z) = \prod_{\gamma \text{ órbita finita}} \xi_{1, \text{Stab}_\alpha(\gamma)}(z^{|\gamma|}). \quad \square$$

El trabajo adicional, que depende de cada grupo, consiste en reorganizar el producto sobre las órbitas según las clases de isomorfismo de  $\text{Stab}(\gamma)$ . Esto permite encontrar una fórmula de producto más explícita para acciones de  $T \times \mathbb{Z}$  con  $T$  un grupo abeliano finito, análoga a las fórmulas de producto mencionadas anteriormente. Como no tenemos (aún) una caracterización explícita de las funciones zeta de acciones triviales de todos los grupos  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  de tipo I, debemos restringirnos a  $T$  abeliano para este resultado.

**Proposición 5.14** *Sea  $T$  un grupo abeliano finito y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\alpha X$  un  $T \times \mathbb{Z}$ -sistema. Entonces*

$$\xi_\alpha(z) = \prod_{\substack{\gamma \text{ órbita finita,} \\ \text{Stab}(\gamma) = L_{(l, H, Hk)}}} \prod_{\bar{H} \in \mathcal{H}_H} \frac{1}{1 - z^{|\gamma| |H/\bar{H}|}}$$

donde para cada  $H \leq T$ ,  $\mathcal{H}_H$  es un conjunto de representantes de clases de conjugación (en  $H$ ) de subgrupos de  $H$ .

En particular, los coeficientes de  $\xi_\alpha(z)$  son enteros nonegativos.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.11 y el lema anterior basta probar que cada subgrupo  $L_{(l, H, Hk)} \leq T \times \mathbb{Z}$  es isomorfo a  $H \times \mathbb{Z}$ . Esto sigue de la Proposición 5.8 pues  $T$  es abeliano. Por otro lado, la ecuación  $1/(1 - z) = \sum_{n \geq 0} z^n$  implica que los coeficientes de  $\xi_\alpha(z)$  son enteros nonegativos.  $\square$

## 5.4. Funciones zeta de SFTs

La dinámica del sistema  $(X, \alpha)$  casi no ha intervenido en las funciones zeta  $\xi_\alpha$  en los casos que hemos estudiado hasta ahora. En efecto, la función zeta de la acción trivial de un grupo  $G$  es básicamente una clase de función generatriz de la secuencia  $\{a_n(G)\}_{n \in \mathbb{N}}$  del número de subgrupos de índice  $n$  en  $G$ .

Para obtener resultados más interesantes necesitamos considerar grupos  $T \times \mathbb{Z}$  con  $T$  finito. Calcularemos la función zeta de acciones 1-bloque  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Y$  donde  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices.

**Lema 5.15** *Sea  $T$  un grupo finito,  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $\pi$ . Sea  $H \leq T$  un subgrupo. Definimos*

1.  $\mathcal{B}^H \subseteq \mathcal{B}$  como el conjunto de símbolos fijados por las permutaciones  $\{\pi_t\}_{t \in H}$ ,
2.  $Y^H$  como el  $\mathbb{Z}$ -subshift  $Y \cap (\mathcal{B}^H)^\mathbb{Z}$ , y
3. para cada  $Hk \in N_T(H)/H$  la función  $\pi_{Hk}^H = \pi_k|_{\mathcal{B}^H}$ .

Entonces  $\pi^H$  determina una acción 1-bloque  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrowright^{\sigma^H} Y^H$ .

Si  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por la matriz  $B$ , definamos  $B^H \in M_{\mathcal{B}^H, \mathcal{B}^H}(\{0, 1\})$  como la restricción de  $B$  a los índices  $\mathcal{B}^H$ . Entonces el par  $(B^H, \pi^H)$  determina la acción 1-bloque  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrowright^{\sigma^H} Y^H$ .

Si  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -sófico,  $Y^H$  también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que las permutaciones  $\{\pi_k\}_{k \in N_T(H)}$  preservan  $\mathcal{B}^H$ : para cada  $h \in H, k \in N_T(H)$  tenemos que  $k^{-1}hk \in H$  y entonces

$$\pi_h \circ \pi_k(b) = \pi_k \circ \pi_{k^{-1}hk}(b) = \pi_k(b)$$

cuando  $b \in \mathcal{B}^H$ . Por otro lado, la definición de  $\pi_{Hk}^H$  no depende del representante  $k$ : si  $Hk = Hk' \in N_T(H)/H$  entonces  $k = hk'$  con  $h \in H$ , y luego

$$\pi_{Hk'}^H(b) = \pi_{k'}(b) = \pi_h \circ \pi_{k'}(b) = \pi_k(b) = \pi_{Hk}^H(b)$$

para todo  $b \in \mathcal{B}^H$ . Luego  $\pi_{Hk}^H: \mathcal{B}^H \rightarrow \mathcal{B}$  está bien definida. Como  $\pi|_{\mathcal{B}^H}$  es una acción de  $N_T(H)$  en  $\mathcal{B}^H$ , tenemos que  $\pi^H = \pi|_{\mathcal{B}^H}$  define una acción de  $N_T(H)/H$  en  $\mathcal{B}^H$ .

Supongamos ahora que  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices. Es claro que la matriz  $B^H$  presenta el  $\mathbb{Z}$ -subshift  $Y^H$ . Además, para  $b, b' \in \mathcal{B}^H$  y  $Hk \in N_T(H)/H$  tenemos la igualdad

$$(B^H)_{\pi_{Hk}^H(b), \pi_{Hk}^H(b')} = B_{\pi_k(b), \pi_k(b')} = B_{b, b'} = (B^H)_{b, b'}.$$

La Proposición 2.6 muestra que  $(B^H, \pi^H)$  determina una acción 1-bloque  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrowright^{\sigma^H} Y^H$ .

Finalmente, si  $Y$  es un sófico entonces la intersección  $Y^H = Y \cap (\mathcal{B}^H)^\mathbb{Z}$  también lo es pues la clase de  $\mathbb{Z}$ -sóficos es cerrada bajo la intersección (ver [LM95]).  $\square$

**Lema 5.16** Sea  $T$  un grupo finito,  $Y \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^{\sigma} Y$  una acción 1-bloque determinada por  $\pi$ . Sea  $L_{(l,H,Hk)} \leq T \times \mathbb{Z}$  un subgrupo de índice finito.

Definimos  $\Pi_{Hk,l}: \mathcal{L}_l(Y^H) \rightarrow (\mathcal{B}^H)^{\mathbb{Z}}$  en cada  $u = u_1 \cdots u_l \in \mathcal{L}_l(Y^H)$  por

$$\Pi_{Hk,l}(u) = (\pi_k^{\lfloor n/l \rfloor}(u'_{n-l\lfloor n/l \rfloor}))_{n \in \mathbb{Z}}$$

donde  $u' = (\pi_{Hk}^H)^{-1}(u_l)u_1u_2 \cdots u_l$ .

Entonces  $\text{per}_{L_{(l,H,Hk)}}(Y) = |\{u \in \mathcal{L}_l(Y^H) \mid \Pi_{Hk,l}(u) \in Y\}|$ . En particular, si  $Y$  es un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices presentado por la matriz  $B$ , entonces

$$\text{per}_{L_{(l,H,Hk)}}(\sigma) = \text{tr}((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H}).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $y \in Y$  verifica  $\text{Stab}_{\sigma}(y) \geq L_{(l,H,Hk)}$ , entonces

$$\pi_h(y_n) = \sigma_{(h,0)}(y)_n = y_n$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $h \in H$ . Luego  $y \in Y^H$ . Además, para cada  $(k^m, ml) \in L_{(l,H,Hk)}$  y  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos que

$$\pi_k^m(y_{n-ml}) = \pi_{k^m H}^H(y_{n-ml}) = \sigma_{(k^m H, ml)}(y)_n = y_n. \quad (5.13)$$

En particular  $y_l = \pi_{Hk}^H(y_0)$  e  $y$  está determinado por  $y|_{[1,l]}$ . La ecuación (5.13) también muestra que, si  $u' = (\pi_{Hk}^H)^{-1}(y_l)y_1y_2 \cdots y_l$  entonces

$$y = \cdots (\pi_k)^{-1}(u') \cdot u' (\pi_k)(u') (\pi_k)^2(u') \cdots, \quad (5.14)$$

es decir  $y = \Pi_{Hk,l}(y|_{[1,l]})$ . Recíprocamente, la ecuación (5.14) implica que cualquier  $\Pi_{Hk,l}(u) \in Y$  define un punto cuyo estabilizador contiene a  $L_{(l,H,Hk)}$ . Esto prueba la primera afirmación.

Concluimos la segunda afirmación a partir de la igualdad

$$\text{tr}((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H}) = \sum_{b \in \mathcal{B}^H} ((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H})_{b,b} = \sum_{b \in \mathcal{B}^H} (B^H)_{b, \pi_k(b)}^l = |\{w \in \mathcal{L}_{l+1}(Y^H) \mid w_l = \pi_k(w_0)\}|.$$

□

El lema anterior y la Proposición 5.10 muestran que la función zeta de una acción 1-bloque  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^{\sigma} Y$  determinada por  $(B, \pi)$  es

$$\xi_{\sigma}(z) = \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{Hk \in N_T(H)/H} \text{tr}((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H}) \right).$$

Para simplificar  $\text{tr}((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H})$  sería muy útil poder diagonalizar las matrices  $P_{\pi_{Hk}^H}$  simultáneamente. Esto solo es posible en general cuando  $T$  es abeliano. Sin embargo, podemos usar nociones de teoría de representaciones de grupos finitos para manejar el caso general.

**Definición 5.17** Sea  $T$  un grupo finito.

1. Una **representación** de  $T$  es un par  $(\rho, V)$  donde  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  y  $\rho: T \rightarrow GL_V(\mathbb{C})$  es un morfismo de grupos.
2. Una representación  $(\rho, V)$  de  $T$  se dice **trivial** si  $V$  es unidimensional y  $\rho$  es idénticamente igual a  $id_V$ .

La definición de una representación resulta natural al pensar que muchos grupos finitos de origen geométrico nacen como grupos de matrices. Es común identificar la representación  $(\rho, V)$  con el espacio  $V$  si no hay riesgo de confusión.

**Definición 5.18** Sea  $T$  un grupo finito y  $(\rho, V)$  una representación de  $T$ .

1. Una **subrepresentación** de  $(\rho, V)$  es un par  $(\rho|_W, W)$ , donde  $W \leq V$  es un subespacio vectorial invariante bajo la acción de  $\rho$  y  $\rho|_W: T \rightarrow GL_W(\mathbb{C})$ .
2. La representación  $(\rho, V)$  se dice **irreducible** si sus únicas subrepresentaciones son sí misma y  $(\rho|_{\{0\}}, \{0\})$ .
3. Un **morfismo** entre dos representaciones  $(\rho, V), (\rho', V')$  es una transformación lineal  $\theta: V \rightarrow V'$  tal que  $\theta \circ \rho = \rho' \circ \theta$ . El morfismo  $\theta$  se dice **isomorfismo** si  $\theta$  es invertible, y se dice **endomorfismo** si  $V = V'$ .
4. La **suma directa** de  $n \in \mathbb{N}_+$  representaciones  $\{(\rho_i, V_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $T$  es la representación  $(\bigoplus_{1 \leq i \leq n} \rho_i, \bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i)$ , y se escribe como  $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i$ . La suma directa de  $n$  copias de una representación  $(\rho, V)$  se escribe  $V^{\oplus n}$ .

Las construcciones de la definición anterior toman sentido en los siguientes resultados fundamentales.

**Proposición 5.19** (ver [Hal59]) Sea  $T$  un grupo finito y  $(\rho, V)$  una representación de  $T$ .

1. (Teorema de Maschke) La representación  $(\rho, V)$  es isomorfa a una suma directa

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} V_i^{\oplus n_i},$$

donde los  $V_i$  son representaciones irreducibles no isomorfas entre sí a pares y los  $n_i$  son enteros estrictamente positivos. Los  $n_i$  quedan determinados únicamente por  $(\rho, V)$ , y los  $V_i$  quedan determinados salvo isomorfismo.

Las subrepresentaciones  $V_i^{\oplus n_i}$  se llaman **componentes isotópicas** de  $(\rho, V)$ .

2. Un endomorfismo de una representación estabiliza sus componentes isotópicas.
3. Si  $(\rho, V)$  es irreducible y no trivial, entonces  $\sum_{t \in T} \rho(t) = 0$ .

El teorema de Maschke generaliza la observación que todo conjunto de matrices cuadradas  $\{P_i\}_{i=1}^n$  que conmutan entre sí son simultáneamente diagonalizables. Cuando  $(\rho, V)$  es una

representación unidimensional, el ítem 3 de la proposición anterior se reduce a la identidad conocida  $\sum_{\omega \in \Omega_n} \omega = \mathbf{1}_{n=1}$ , donde  $\Omega_n \subset \mathbb{C}$  es el conjunto de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad.

Estas consideraciones permiten calcular la función zeta de un  $T \times \mathbb{Z}$ -SFT cualquiera.

**Teorema 5.20** *Sea  $T$  un grupo finito,  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $(B, \pi)$ . Sea  $\mathcal{H}$  un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de  $T$ .*

*Para cada  $H \in \mathcal{H}$ , definimos  $V^H = \bigcap_{Hk \in N_T(H_2)/H} V^{Hk}$  donde  $V^{Hk} \subseteq \mathbb{C}^{\mathcal{B}^H}$  es el espacio propio asociado a 1 de la transformación  $P_{\pi_{Hk}^H}$ . También definimos  $\Omega^H$  como el multiconjunto de valores propios de  $B^H$  restringido a  $V^H$ .*

*Entonces la función zeta de  $\sigma$  es*

$$\xi_\sigma(z) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{\omega \in \Omega^H} \frac{1}{(1 - \omega z^{|T/H|})} = \prod_{H \in \mathcal{H}} \frac{1}{\det(\text{Id}_{V^H} - z^{|T/H|} B^H|_{V^H})}, \quad (5.15)$$

*y en particular es la inversa de un polinomio.*

DEMOSTRACIÓN. Partimos de la igualdad

$$\begin{aligned} \xi_\sigma(z) &= \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{Hk \in N_T(H)/H} \text{tr}((B^H)^l P_{\pi_{Hk}^H}) \right) \\ &= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{l \geq 1} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \text{tr} \left( (B^H)^l \sum_{Hk \in N_T(H)/H} P_{\pi_{Hk}^H} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fijemos  $H \in \mathcal{H}$ . Sea  $(\rho_H, \mathbb{C}^{\mathcal{B}^H})$  la representación de  $N_T(H)/H$  definida por  $\rho_H(Hk) = P_{\pi_{Hk}^H}$ . Notemos que  $V^H$  corresponde a la componente isotópica de la representación trivial. La Proposición 5.19 muestra que la transformación  $\sum_{Hk \in N_T(H)/H} P_{\pi_{Hk}^H}$  es nula salvo en  $V^H$ , donde (por su definición) todas las  $P_{\pi_{Hk}^H}$  actúan como la identidad. Luego

$$\sum_{Hk \in N_T(H)/H} P_{\pi_{Hk}^H} = |N_T(H)/H| Q_{V^H}$$

donde  $Q_{V^H}$  es la proyección a  $V^H$ .

La ecuación  $B^H P_{\pi_{Hk}^H} = P_{\pi_{Hk}^H} B^H$  muestra que  $B^H$  es un endomorfismo de la representación  $(\rho_H, \mathbb{C}^{\mathcal{B}^H})$ , y entonces preserva sus componentes isotópicas. Por lo tanto, para todo  $l \geq 1$  la transformación  $(B^H)^l Q_{V^H}$  es nula salvo en  $V^H$ , donde coincide con  $(B^H|_{V^H})^l$ .



De (5.16) concluimos que

$$\begin{aligned}
\xi_\sigma(z) &= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{l \geq 1} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \operatorname{tr}((B^H)^l|_{N_T(H)/H|Q_{V^H}}) \right) \\
&= \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l} \operatorname{tr}((B^H|_{V^H})^l) \right) \\
&= \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l} \sum_{\omega \in \Omega^H} \omega^l \right) \\
&= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{\omega \in \Omega^H} -\log(1 - \omega z^{l|T/H|}) \right) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{\omega \in \Omega^H} \frac{1}{(1 - \omega z^{l|T/H|})}.
\end{aligned}$$

donde hemos usado que la traza de una transformación es la suma de sus valores propios. La segunda igualdad de (5.15) sigue de recordar que el determinante de una matriz es el producto de sus valores propios.  $\square$

## 5.5. Funciones zeta de sóficos

Calcular las funciones zeta de  $T \times \mathbb{Z}$ -sóficos se reduce a aplicar la misma estrategia de conteo que se usa en  $\mathbb{Z}$  para encontrar el número de puntos periódicos de un  $\mathbb{Z}$ -sófico, junto con el cálculo llevado a cabo en el Teorema 5.20. Como hemos trabajado hasta ahora con  $\mathbb{Z}$ -subshifts de vértices y no con  $\mathbb{Z}$ -subshifts de aristas, el argumento combinatorial es un poco más complejo de enunciar que en las demostraciones clásicas.

Necesitamos enunciar un lema combinatorial previo. Dado un conjunto totalmente ordenado  $\mathcal{A}$  y una función inyectiva  $f$  definida sobre un subconjunto de  $\mathcal{A}$ , definimos su **signo** como  $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{N(f)}$  donde

$$N(f) = |\{(a, b) \in \operatorname{Dom}(f) \times \operatorname{Dom}(f) \mid a < b \text{ y } f(a) > f(b)\}|.$$

Sigue que  $\operatorname{sgn}(f \circ g) = \operatorname{sgn}(f)\operatorname{sgn}(g)$  cuando  $f, g$  son funciones inyectivas con los dominios apropiados.

**Lema 5.21** (ver [LM95]) *Sea  $\mathcal{B}$  un conjunto finito, totalmente ordenado y no vacío. Sean  $\pi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  una permutación y  $\mathcal{C} = \{E \subseteq \mathcal{B} \mid E \text{ es no vacío y } \pi(E) = E\}$ . Entonces*

$$\sum_{E \in \mathcal{C}} (-1)^{|E|+1} \operatorname{sgn}(\pi|_E) = 1.$$

**Lema 5.22** *Sea  $T$  un grupo finito,  $Y \subseteq \mathcal{B}$  un  $\mathbb{Z}$ -sófico y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrow^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $\pi$ . Sea  $L_{(l, H, H^k)} \leq T \times \mathbb{Z}$  un subgrupo de índice finito.*

*Sea  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrow^{\hat{\sigma}^H} \hat{Y}^H \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H$  la extensión derecha de Krieger de la acción  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrow^{\sigma^H} Y^H \subseteq \mathcal{B}^H$ .*

Entonces existen matrices cuadradas  $\{B_j^H \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\}) \mid 1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|\}$  y

$$\{P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j}^H \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\}) \mid 1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|, Hk \in N_T(H)/H\}$$

de dimensiones  $r_j^H \in \mathbb{N}_+$  tales que

1. tenemos la igualdad

$$\text{per}_{L_{(l, H, Hk)}}(\sigma) = \sum_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} (-1)^{j+1} \text{tr}((B_j^H)^l P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j}^H), \quad (5.17)$$

2. para cada  $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|$  la asignación

$$Hk \in N_T(H)/H \mapsto \rho_j^H(Hk) = P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j}^H$$

es una representación de  $N_T(H)/H$ , y la matriz  $B_j^H$  conmuta con  $\{P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j}^H\}_{Hk \in N_T(H)/H}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{L}^\infty: \hat{Y}^H \rightarrow Y^H$  el factor 1-bloque resolvente a la derecha entre la extensión de Krieger  $\hat{Y}^H$  e  $Y^H$ . Escribimos  $\hat{B}^H$  como la matriz que presenta a  $\hat{Y}^H$ .

Sea  $\Pi_{Hk, l}: \mathcal{L}_l(Y^H) \rightarrow (\mathcal{B}^H)^\mathbb{Z}$  la función definida en el Lema 5.16. Nos interesa estudiar  $\mathcal{D}_{Hk, l} = \{u \in (\mathcal{B}^H)^l \mid \Pi_{Hk, l}(u) \in Y^H\}$  pues  $\text{per}_{L_{(l, H, Hk)}}(\sigma) = |\mathcal{D}_{Hk, l}|$ .

Para cada  $b \in \mathcal{B}^H$  y  $\hat{b} \in \hat{\mathcal{B}}^H$ , existe a lo más un  $\hat{b}' \in \hat{\mathcal{B}}^H$  vecino de  $\hat{b}$  en el grafo  $\Gamma(\hat{B}^H)$  tal que  $\mathcal{L}(\hat{b}') = b$  pues  $\mathcal{L}$  es resolvente a la derecha. Luego cada  $b \in \mathcal{B}^H$  define una función parcial de  $\hat{\mathcal{B}}^H$  en sí mismo. Podemos extender esta definición para una palabra finita  $u \in (\hat{\mathcal{B}}^H)^*$  por composición. Notemos que la palabra  $u$  también define una función parcial de  $2^{\hat{\mathcal{B}}^H}$  en sí mismo por  $u(S) = \{u(s)\}_{s \in S}$  cuando  $u(s)$  está definido para todo  $s \in S$ .

Sea

$$\mathcal{D}'_{Hk, l} = \{u \in (\mathcal{B}^H)^l \mid \text{existe un } E \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H \text{ no vacío con } u(E) = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)\}.$$

Afirmamos que  $\mathcal{D}_{Hk, l} = \mathcal{D}'_{Hk, l}$ .

1. Veamos la inclusión a la derecha. Sea  $y = \Pi_{Hk, l}(u) \in Y^H$ , y sea

$$\hat{y} = ((y_i, \omega^+(y_{(-\infty, i-1]})))_{i \in \mathbb{Z}} \in (\hat{\mathcal{B}}^H)^\mathbb{Z}.$$

La secuencia  $\hat{y}$  verifica  $\hat{y} \in \hat{Y}^H$ ,  $\mathcal{L}^\infty(\hat{y}) = y$  y además  $\hat{\sigma}_{(l, Hk)}^H(\hat{y}) = \hat{y}$ . Como  $\mathcal{L}(\hat{y}_{[1, l]}) = y_{[1, l]} = u$  e  $\hat{y}_l = \hat{\pi}_{Hk}^H(\hat{y}_0)$ , entonces tenemos que  $E = \{\hat{y}_0\}$  verifica  $u(E) = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)$ .

2. Veamos la inclusión a la izquierda. Sea  $E \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H$  no vacío con  $u(E) = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)$ . La igualdad  $\mathcal{L} \circ \hat{\pi}^H = \pi^H \circ \mathcal{L}$  implica que  $(\pi_{Hk}^H)^{i-1}(u)((\hat{\pi}_{Hk}^H)^{i-1}(E)) = (\hat{\pi}_{Hk}^H)^i(E)$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Podemos construir una secuencia  $\hat{y} \in \hat{Y}^H$  con  $\mathcal{L}^\infty(\hat{y}) = \Pi_{Hk, l}(u)$  como sigue. Sea  $\hat{b}_0^1 \in E$ . Como  $u(E) = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)$ , existe un camino  $\hat{b}_1^1, \dots, \hat{b}_l^1$  en el grafo  $\Gamma(\hat{B}^H)$  tal que

$$\mathcal{L}(\hat{b}_1^1 \cdots \hat{b}_l^1) = u \quad \text{y} \quad \hat{b}_l^1 \in \hat{\pi}_{Hk}^H(E).$$

Como  $(\pi_{Hk}^H)(u)(\hat{\pi}_{Hk}^H(E)) = (\hat{\pi}_{Hk}^H)^2(E)$ , existe un camino  $\hat{b}_l^1, \hat{b}_1^2, \dots, \hat{b}_l^2$  en  $\Gamma(\hat{B}^H)$  tal que

$$\mathcal{L}(\hat{b}_1^2 \cdots \hat{b}_l^2) = \pi_{Hk}^H(u) \quad \text{y} \quad \hat{b}_l^2 \in (\hat{\pi}_{Hk}^H)^2(E).$$

Iterando este argumento inductivamente hacia el pasado y hacia el futuro (solo se requiere la ecuación  $(\pi_{Hk}^H)^{i-1}(u)((\hat{\pi}_{Hk}^H)^{i-1}(E)) = (\hat{\pi}_{Hk}^H)^i(E)$ ) obtenemos la secuencia requerida

$$\hat{y} = \cdots \hat{b}_1^{-1} \cdots \hat{b}_{l-1}^{-1} \hat{b}_l^{-1} \hat{b}_1^1 \cdots \hat{b}_l^1 \hat{b}_1^2 \cdots \in \hat{Y}^H.$$

El diagrama a continuación ilustra la construcción de  $\hat{y}$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{(\pi_{Hk}^H)^{-1}(u_l)} & \hat{b}_l^{-1} & \xrightarrow{u_1} & \hat{b}_1^1 & \xrightarrow{u_2} & \cdots & \xrightarrow{u_l} & \hat{b}_l^1 & \xrightarrow{\pi_{Hk}^H(u_1)} & \hat{b}_1^2 & \xrightarrow{\pi_{Hk}^H(u_2)} & \cdots \\ & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} & & \\ & & (\pi_{Hk}^H)^{-1}(u_l) & & u_1 & & u_{[2,l-1]} & & u_l & & \pi_{Hk}^H(u_1) & & \end{array}$$

Concluimos la igualdad deseada.

Para cada  $1 \leq j \leq |\hat{B}^H|$  definimos  $\hat{B}_j^H = \{S \subseteq \hat{B}^H \mid |S| = j\}$  y  $r_j^H = |\hat{B}_j^H| = \binom{|\hat{B}^H|}{j}$ . Fijamos de ahora en adelante un orden total en  $\hat{B}^H$ , de modo que para todo  $E \subseteq \hat{B}^H$  no vacío podemos definir el signo de una función inyectiva con dominio en  $E$ . Definimos entonces  $B_j^H \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\})$  por

$$(B_j^H)_{S_1, S_2} = \begin{cases} \text{sgn}(b|_{S_1}) & \text{si existe } b \in \mathcal{B} \text{ con } b(S_1) = S_2, \\ 0 & \text{si no existe tal } b \end{cases}$$

y  $P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j} \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\})$  por

$$(P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j})_{S_1, S_2} = \begin{cases} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2}) & \text{si } S_1 = \hat{\pi}_{Hk}^H(S_2), \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

para todo  $S_1, S_2 \in \hat{B}_j^H$ . La matriz  $B_j^H$  está bien definida: a lo más existe un  $b \in \mathcal{B}^H$  que verifica  $b(S_1) = S_2$  y en tal caso  $b$  (como función) es inyectiva, pues  $|S_1| = |S_2|$ .

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|\hat{B}^H|} (-1)^{j+1} \text{tr}((B_j^H)^l (P_{\hat{\pi}_{Hk}^H, j})) &= \sum_{j=1}^{|\hat{B}^H|} (-1)^{j+1} \sum_{E \in \hat{B}_j^H} (B_j^H)_{E, \hat{\pi}_{Hk}^H(E)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_E) \\ &= \sum_{\substack{E \subseteq \hat{B}^H \text{ no vacío,} \\ \text{existe } u \in (\mathcal{B}^H)^l, \\ u(E) = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)}} (-1)^{|E|+1} \text{sgn}(u|_E) \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_E) \\ &= \sum_{u \in (\mathcal{B}^H)^l} \sum_{E \in \mathcal{C}_u} (-1)^{|E|+1} \text{sgn}(u|_E) \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_E) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{C}_u = \{E \subseteq \hat{B}^H \mid E \text{ es no vacío y } (\hat{\pi}_{Hk}^H)^{-1} \circ u(E) = E\}$  es posiblemente vacío.

Fijemos  $u \in (\mathcal{B}^H)^l$  y supongamos que  $\mathcal{C}_u$  es no vacío. Sea  $\hat{\mathcal{B}}_u \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H$  el conjunto maximal tal que  $(\hat{\pi}_{Hk}^H)^{-1} \circ u(\hat{\mathcal{B}}_u) = \hat{\mathcal{B}}_u$  (la unión de dos conjuntos que satisfacen esta igualdad la satisfacen también, y al menos un conjunto  $E \in \mathcal{C}_u$  la satisface). Como  $(\hat{\pi}_{Hk}^H)^{-1} \circ u$  es una permutación de  $\hat{\mathcal{B}}_u$  y

$$\mathcal{C}_u = \{E \subseteq \hat{\mathcal{B}}_u \mid E \text{ es no vacío y } (\hat{\pi}_{Hk}^H)^{-1} \circ u(E) = E\},$$

el Lema 5.21 muestra que

$$\sum_{E \in \mathcal{C}_u} (-1)^{|E|+1} \text{sgn}(u|_E) \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_E) = \sum_{E \in \mathcal{C}_u} (-1)^{|E|+1} \text{sgn}((\hat{\pi}_{Hk}^H)^{-1} \circ u|_E) = 1.$$

Concluimos que

$$\sum_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} (-1)^{j+1} \text{tr}((B_j^H)^l (P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H})) = |\mathcal{D}'_{Hk,l}| = |\mathcal{D}_{Hk,l}| = \text{per}_{L_{(l,H,Hk)}}(\sigma).$$

Esto prueba la primera afirmación del enunciado. Para la segunda, notemos que las matrices  $P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H}$  tienen como inversa a  $P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H}^\top$ . Dados  $S_1, S_2 \in \hat{\mathcal{B}}_j^H$ , la igualdad

$$\begin{aligned} (P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H} P_{\hat{\pi}_{Hk',j}^H})_{S_1, S_2} &= \sum_{E \in \hat{\mathcal{B}}_j^H} \mathbf{1}_{S_2 = \hat{\pi}_{Hk}^H(E)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_E) \mathbf{1}_{E = \hat{\pi}_{Hk'}^H(S_2)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2}) \\ &= \mathbf{1}_{S_1 = \hat{\pi}_{Hk}^H \circ \hat{\pi}_{Hk'}^H(S_2)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{\hat{\pi}_{Hk'}^H(S_2)}) \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk'}^H|_{S_2}) \\ &= \mathbf{1}_{S_1 = \hat{\pi}_{Hkk'}^H(S_2)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hkk'}^H|_{S_2}) \\ &= (P_{\hat{\pi}_{Hkk',j}^H})_{S_1, S_2} \end{aligned}$$

muestra que  $\rho_j^H$  define una representación. Supongamos ahora que  $b \in \mathcal{B}$  es tal que  $b(S_1) = S_2$ . Luego  $\pi_{Hk}^H(b)(\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1)) = \hat{\pi}_{Hk}^H(S_2)$  y entonces

$$\begin{aligned} (P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H}^\top B_j^H P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H})_{S_1, S_2} &= \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_1}) (B_j^H)_{\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1), \hat{\pi}_{Hk}^H(S_2)} \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2}) \\ &= \text{sgn}((\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2})^{-1}) \text{sgn}(\pi_{Hk}^H(b)|_{\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1)}) \text{sgn}(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_1}) \\ &= \text{sgn}((\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2})^{-1} \circ \pi_{Hk}^H(b)|_{\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1)} \circ \hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_1}) \\ &= \text{sgn}(b|_{S_1}) = (B_j^H)_{S_1, S_2} \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$(\hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_2})^{-1} \circ \pi_{Hk}^H(b)|_{\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1)} \circ \hat{\pi}_{Hk}^H|_{S_1} = b$$

como funciones en la penúltima igualdad. Si no existe tal  $b \in \mathcal{B}$ , entonces tampoco puede existir  $b' \in \mathcal{B}$  con  $b'(\hat{\pi}_{Hk}^H(S_1)) = \hat{\pi}_{Hk}^H(S_2)$ , pues en tal caso  $(\pi_{Hk}^H)^{-1}(b')(S_1) = S_2$ , una contradicción. Luego  $P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H}^\top B_j^H P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H} = B_j^H$ . Esto termina de probar la segunda afirmación.  $\square$

**Observación 5.23** *En realidad los conjuntos  $\hat{\mathcal{B}}_j^H$  son más grandes de lo estrictamente necesario. Si definimos  $\hat{\mathcal{B}}_j^H = \{S \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H \mid |S| = j \text{ y } |\mathcal{L}(S)| = 1\}$  entonces la demostración anterior sigue valiendo. En efecto, para cualquier palabra  $u \in \mathcal{L}(Y)$  y subconjunto no vacío  $E \subseteq \mathcal{B}^H$  en el dominio de  $u$ , el conjunto  $u(E)$  verifica  $|\mathcal{L}(u(E))| = 1$ . Si además  $u(E) = \pi_{Hk}^H(E)$ , entonces  $E$  también cumple  $|\mathcal{L}(E)| = 1$ . Luego los únicos conjuntos que aportan en la suma (5.17) están en  $\hat{\mathcal{B}}_j^H$ ,  $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|$ .*

Tras este resultado combinatorial el resto del cálculo sigue exactamente los mismos pasos que el Teorema 5.20.

**Teorema 5.24** *Sea  $T$  un grupo finito,  $Y$  un  $\mathbb{Z}$ -sófico y  $T \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Y$  una acción 1-bloque determinada por  $\pi$ . Sea  $\mathcal{H}$  un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de  $T$ .*

Para cada  $H \in \mathcal{H}$ , sean

1.  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrowright^{\hat{\sigma}^H} \hat{Y}^H \subseteq \hat{\mathcal{B}}^H$  la extensión derecha de Krieger de la acción 1-bloque  $(N_T(H)/H \times \mathbb{Z}) \curvearrowright^{\sigma^H} Y^H \subseteq \mathcal{B}^H$ ,
2.  $\{B_j^H \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\}) \mid 1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|\}$  y

$$\{P_{\hat{\pi}_{Hk, j}^H} \in M_{r_j^H, r_j^H}(\{0, \pm 1\}) \mid 1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|, Hk \in N_T(H)/H\}$$

las matrices definidas en el Lema 5.22, y

3. para cada  $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|$ ,  $V_j^H = \bigcap_{Hk \in N_T(H)/H} V_j^{Hk}$  donde  $V_j^{Hk} \subseteq \mathbb{C}^{r_j^H}$  es el espacio propio asociado a 1 de la transformación  $P_{\hat{\pi}_{Hk, j}^H}$ .

Entonces la función zeta de  $\sigma$  es

$$\xi_\sigma(z) = \prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} \det(\text{Id}_{V_j^H} - z^{|T/H|} B_j^H|_{V_j^H})^{(-1)^j},$$

y en particular es racional.

DEMOSTRACIÓN. Del Lema 5.22 tenemos que

$$\xi_\sigma(z) = \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{Hk \in N_T(H)/H} \sum_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} (-1)^{j+1} \text{tr}((B_j^H)^l P_{\hat{\pi}_{Hk, j}^H}) \right)$$

Fijemos  $H \in \mathcal{H}$  y  $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|$ . Como

$$Hk \in N_T(H)/H \mapsto \rho_j^H(Hk) = P_{\hat{\pi}_{Hk, j}^H}$$

es una representación, nuevamente se verifica la igualdad

$$\sum_{Hk \in N_T(H)/H} P_{\hat{\pi}_{Hk, j}^H} = |N_T(H)/H| Q_{V_j^H}$$

donde  $Q_{V_j^H}$  es la proyección a  $V_j^H$ . Nuevamente la transformación  $B_j^H$  es un endomorfismo de  $(\rho_j^H, \mathbb{C}^{r_j^H})$ , y entonces para todo  $l \geq 1$  la transformación  $(B_j^H)^l Q_{V_j^H}$  es nula salvo en  $V_j^H$ ,

donde coincide con  $(B_j^H|_{V_j^H})^l$ . Luego

$$\begin{aligned}\xi_\sigma(z) &= \exp \left( \sum_{l \geq 1} \sum_{H \in \mathcal{H}} \frac{z^{l|T/H|}}{l|N_T(H)/H|} \sum_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} (-1)^{j+1} \text{tr} \left( (B_j^H)^l \sum_{Hk \in N_T(H)/H} P_{\hat{\pi}_{Hk,j}^H} \right) \right) \\ &= \exp \left( \sum_{H \in \mathcal{H}} \sum_{j=1}^{|\hat{\mathcal{B}}^H|} (-1)^{j+1} \sum_{l \geq 1} \frac{z^{l|T/H|}}{l} \text{tr} \left( (B_j^H|_{V_j^H})^l \right) \right)\end{aligned}$$

y obtenemos la conclusión al recordar que

$$\sum_{l \geq 1} \frac{z^{l|T/H|}}{l} \text{tr} \left( (B_j^H|_{V_j^H})^l \right) = -\log(\det(\text{Id}_{V_j^H} - z^{l|T/H|} B_j^H|_{V_j^H}))$$

para todo  $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{B}}^H|$ . □

**Observación 5.25** Sea  $(X, \sigma)$  un  $\mathbb{Z}$ -subshift cualquiera y  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright^\alpha X$  la acción definida por  $\alpha_{(1,0)} = \sigma$  y  $\alpha_{(0,1)} = \text{id}_X$ . Del cálculo de la función zeta de un full-shift sobre  $\mathbb{Z}^d$  en [Lin96] se desprende que

$$\xi_\alpha(z) = \prod_{j \geq 1} \xi_\sigma(z^j),$$

de modo que si  $\xi_\sigma$  tiene al menos una singularidad  $w \in S^1$  entonces  $\xi_\alpha$  no puede ser extendida (como función holomorfa) más allá de  $D(0,1)$ . Esta situación contrasta fuertemente con los Teoremas 5.20 y 5.24. Para marcar más esta diferencia, sería interesante encontrar un  $\mathbb{Z}$ -SFT  $X$  y un automorfismo  $\phi$  de  $X$  (distinto de la identidad) tal que se pueda calcular explícitamente la función  $\xi_\alpha$  para  $\alpha_{(1,0)} = \sigma$ ,  $\alpha_{(0,1)} = \phi$ .

# Conclusión

En esta tesis hemos estudiado los subshifts sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ , mostrando que el comportamiento de sus SFTs es muy similar a los de  $\mathbb{Z}$ . Creemos que buena parte de los problemas ya resueltos en la teoría clásica pueden adaptar sus soluciones a este nuevo contexto, y que de alguna manera los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  son la clase de grupos finitamente generados más amplia cuyos SFTs siguen las “reglas” de la dinámica simbólica unidimensional. Una conjetura en esta dirección ya fue propuesta en [CP15], que afirma que los grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  están caracterizados por no poseer SFTs sin puntos fuertemente periódicos.

Sin embargo, quedan abiertas muchas extensiones posibles de los resultados presentados.

- **Capítulo 3: Mezcla y la medida de entropía máxima.** Pese a que los resultados de este capítulo no requieren restricciones sobre el grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  considerado, falta desarrollar un lenguaje que permita estudiar sistemáticamente la acción de  $\pi$  en un grafo  $\Gamma(B)$ . Cuando  $\psi = \text{id}_T$ , la acción  $\pi$  es por isomorfismos o anti-isomorfismos de  $\Gamma(B)$ , pero en general  $\pi$  solo preserva caminos de largo  $m = \text{ord}(\pi)$  en  $\Gamma(B)$ .

Por otro lado, una construcción que parece viable es la extensión de Fischer de un  $G$ -sófico positivamente transitivo, es decir, una extensión  $G$ -SFT resolvente y positivamente transitiva. Esto permitiría extender a  $G$ -sóficos positivamente transitivos los resultados de este capítulo. Sin embargo, se puede probar [KR13] que existen acciones 1-bloque de  $D_\infty$  en un  $\mathbb{Z}$ -sófico irreducible  $Y$  tal que la extensión de Fischer bilateral no es positivamente transitiva. Se requieren más ideas en esta dirección para tratar el caso de los grupos de tipo II (para grupos de tipo I la extensión de Fischer a la derecha funciona bien).

- **Capítulo 4: Extensiones de full-shifts sobre  $D_\infty$ .**

¿Dada una acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y$  en un  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$  con entropía  $\geq \log N$ , es posible adaptar las construcciones de este capítulo para construir un factor de  $D_\infty \curvearrowright^\sigma Y$  a cualquier acción 1-bloque  $D_\infty \curvearrowright^\sigma \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ ? La respuesta es afirmativa si  $N$  es un cuadrado perfecto y  $\sigma$  es determinada por una involución  $\pi_a$  con  $\sqrt{N}$  puntos fijos, pero el caso general no está completamente resuelto.

También queda abierto el problema de encontrar una condición menos restrictiva sobre  $\pi$  para construir factores a  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ -full-shifts  $Z$  partiendo de un  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$ -SFT  $Y$  con suficiente entropía. Se puede argumentar que la condición propuesta al final del Capítulo 4 no es natural, pues permite construir factores a cualquier acción 1-bloque  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Z$  donde  $Z$  es el  $\mathbb{Z}$ -full-shift con  $N^{|T|}$  símbolos.

Un candidato para esta condición es que para cada subsistema  $(Z^H, \sigma|_{Z^H})$  de  $(Z, \sigma)$  fijado por un subgrupo  $H \leq T$  exista un subsistema  $(Y_H, \sigma|_{Y_H})$  de  $Y$  con entropía mayor o igual a la de  $Z^H$  y también fijado por  $H$ .

- **Capítulo 5: Funciones zeta sobre  $T \times \mathbb{Z}$ .**

Una extensión deseable de los resultados de este capítulo es el cálculo de funciones zeta de SFTs y sóficos sobre cualquier grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$ . Este cálculo requiere enumerar los subgrupos de índice finito de un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  arbitrario. Pese a que las funciones zeta de SFTs sobre  $D_\infty$  no son racionales, esperamos al menos que las funciones zeta de SFTs sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$  se distingan de las de  $\mathbb{Z}^2$  por admitir una extensión holomorfa a un dominio no acotado de  $\mathbb{C}$ .

La extensión más directa parece ser a la clase de grupos  $T \rtimes_\psi \mathbb{Z}$  virtualmente- $\mathbb{Z}$  de tipo I. No existe un análogo general del lema de Goursat para productos semidirectos, pero quizás se puede reducir al caso del producto directo usando que  $\psi$  tiene orden finito.

Por otro lado, no es difícil probar que la función zeta de un  $T \times \mathbb{Z}$ -SFT es una invariante más fina que la entropía. ¿Ocurre lo mismo con  $T \times \mathbb{Z}$ -sóficos?

- **Apéndice: Splittings y amalgamaciones sobre grupos finitamente generados.** ¿Existen condiciones naturales sobre el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado  $G$  y las matrices que presentan un  $G$ -NNSFT tales que nuestro formalismo matricial preserve la esencialidad de estas matrices? ¿Hay semigrupos distintos de  $F_n^+$  donde se puede decidir el problema de conjugación con las ideas desarrolladas por Williams?

También notamos varias direcciones inexploradas por completo en esta tesis.

- ¿Las técnicas que prueban el teorema de embebimiento de Krieger admiten una extensión a este contexto? ¿Los  $G$ -SFTs que además son grupos compactos admiten una clasificación como la que vale en  $\mathbb{Z}$ ?
- Como mencionamos en el Capítulo 2, queda abierto el problema de embeber el grupo libre  $F_2$  o la suma directa de una cantidad numerable de copias de  $\mathbb{Z}$  en el grupo de automorfismos de un  $G$ -SFT mezclador de entropía positiva. También parece posible probar que el centro del grupo de automorfismos es  $\langle \sigma_{(e,1)} \rangle$  (resp.  $\langle \sigma_r \rangle$ ) en este caso.
- De la reescritura de un  $G$ -subshift como un  $\mathbb{Z}$ -subshift en el Capítulo 2 sigue rápidamente que la subdinámica proyectiva de cualquier  $G$ -sófico es un  $\mathbb{Z}$ -sófico. Este formalismo quizás permita extender los resultados de Bustos [Bus16] sobre la subdinámica proyectiva de  $\mathbb{Z}$ -SFTs sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ .

Estas preguntas constituyen una posible línea de investigación posterior a este trabajo que permitiría profundizar y afianzar los resultados entregados.



# Apéndice A

## Splittings y amalgamaciones en $G$ -subshifts

En este apéndice se introduce una generalización de las operaciones de splitting y amalgamación a  $G$ -subshifts donde  $G$  es cualquier grupo finitamente generado. Después de explicar la generalización a  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFTs desarrollada en [Sch08], se entrega la definición para subshifts sobre grupos finitamente generados y se prueba una versión del teorema de Williams en este contexto. Después, se entrega un formalismo matricial que permite relacionar las matrices que presentan un out-splitting con las matrices del subshift original. Finalmente, se observa que los splittings y amalgamaciones preservan la esencialidad de las matrices involucradas cuando el grafo de Cayley subyacente es un árbol, y se entrega un ejemplo de un subshift sobre un grupo virtualmente- $\mathbb{Z}$  donde no ocurre este fenómeno.

Este desarrollo fue motivado por el deseo de comprender cómo realizar splittings en  $D_\infty$ -SFTs. La manera adecuada de hacerlo está delineada en el Lema 2.7, pero este enfoque tiene sentido en un contexto más general. En particular, el teorema de Williams es válido para subshifts sobre cualquier grupo finitamente generado.

### A.1. Resultados previos

En [Sch08] se propone una generalización de la noción de splittings y amalgamaciones a  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFTs. Esta preserva la idea de particionar los sucesores (en una dirección fija) de cada símbolo del alfabeto  $\mathcal{A}$  para que cada  $a \in \mathcal{A}$  capture información sobre los símbolos que puede ver  $a$  en esta dirección. Sin embargo, la presentación hace énfasis en un formalismo matricial asociado que permite calcular matrices que presentan el out-splitting.

**Definición A.1** Consideremos  $X = \mathbf{X}_{\{A_{e_i}\}_{i=1}^d}$  un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT definido por matrices  $A_{e_i} \in M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(\{0,1\})$ . Fijemos una dirección  $e_m$ .

1. Decimos que un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_{e_i}\}_{i=1}^d}$  es un **out-splitting de  $X$  en la dirección  $e_m$**  si existe un conjunto finito de índices  $\mathcal{A}'$ , una matriz de división  $D \in M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(\{0,1\})$

y una matriz sin filas idénticamente nulas  $E \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  con  $A_{e_m} = DE$  tales que

$$A'_{e_m} = ED \text{ y } A'_{e_i} = (D^\top A_{e_i} D) \ominus (EA_{e_i} E^\top) \text{ para cada } 1 \leq i \leq d, i \neq m.$$

2. Decimos que un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_{e_i}\}_{i=1}^d}$  es un **in-splitting** de  $X$  en la **dirección**  $e_m$  si existe un conjunto finito de índices  $\mathcal{A}'$ , una matriz de amalgamación  $C \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  y una matriz sin columnas idénticamente nulas  $E \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}(\{0, 1\})$  con  $A_{e_m} = EC$  tales que

$$A'_{e_m} = CE \text{ y } A'_{e_i} = (CA_{e_i} C^\top) \ominus (E^\top A_{e_i} E) \text{ para cada } 1 \leq i \leq d, i \neq m.$$

3. Una **out-amalgamación** (resp. **in-amalgamación**) de  $X$  es un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT  $X'$  tal que  $X$  es un out-splitting de  $X'$  (resp. in-splitting).

Pese a que la definición está formulada en términos meramente matriciales, al considerar estos out-splittings es esencial pensar como en el caso unidimensional los roles de  $D$  y  $E$ :

1. La matriz  $D$  define el conjunto  $\mathcal{A}'_a = \{a' \in \mathcal{A}' \mid D_{a,a'} = 1\}$  de símbolos  $a' \in \mathcal{A}'$  que provienen de “subdividir” un símbolo  $a \in \mathcal{A}$  según sus sucesores.
2. La matriz  $E$  especifica la partición de los sucesores de cada  $a \in \mathcal{A}$  por  $E_{a',b} = 1$  ssi  $b$  es sucesor de  $a$  en la dirección  $e_m$  (es decir,  $(A_{e_m})_{a,b} = 1$ ). La condición de que  $E$  no tenga filas (resp. columnas) idénticamente nulas se pide para no tener particiones vacías de sucesores y entonces no tener filas (resp. columnas) idénticamente nulas en la matriz  $A'_{e_m}$  del out-splitting (resp. in-splitting).

Ahora bien, la forma de las matrices  $A'_{e_i}$ ,  $i \neq m$  se debe a dos consideraciones. Para fijar ideas, supongamos que los  $A'_{e_i}$  son un resultado de un out-splitting. Sea  $\Delta: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  la función sobreyectiva definida por  $D_{a,b'} = \mathbf{1}_{a=\Delta(b')}$ .

1. El término  $D^\top A_{e_i} D$  se puede escribir

$$(D^\top A_{e_i} D)_{a',b'} = (A_{e_i})_{\Delta(a'), \Delta(b')}$$

para todo  $a', b' \in \mathcal{A}'$ . Luego las transiciones permitidas por esta matriz entre  $a', b'$  en la dirección  $e_i$  son las transiciones permitidas por los símbolos de “base”  $\Delta(a'), \Delta(b') \in \mathcal{A}$ , como se espera.

2. El término  $EA_{e_i} E^\top$  elimina aquellas transiciones entre símbolos de  $\mathcal{A}'$  cuyas ‘componentes’ en la dirección  $e_m$  no son compatibles: notemos que

$$(EA_{e_i} E^\top)_{a',b'} = \sum_{a,b \in \mathcal{A}} E_{a',a} (A_{e_i})_{a,b} E_{b',b}$$

para todo  $a', b' \in \mathcal{A}'$ , de modo que esta suma es cero exactamente cuando no existen  $a, b \in \mathcal{A}$  en las particiones que representan  $a'$  y  $b'$  respectivamente tales que la transición de  $a$  a  $b$  en la dirección  $e_i$  esté permitida.

En un in-splitting la matriz  $C$  toma el rol de  $D$ , y las observaciones anteriores son válidas haciendo ese reemplazo. En general, si las matrices  $\{A_{e_i}\}_i$  son esenciales entonces las matrices resultantes  $\{A'_{e_i}\}_i$  no necesariamente lo son (ver la Observación A.21). Sin embargo, los términos  $EA_{e_i}E^\top$  (resp.  $E^\top A_{e_i}E$ ) pueden eliminar transiciones no realizadas en el subshift conjugado  $X'$ .

La pertinencia de esta generalización proviene de los siguientes resultados.

**Proposición A.2** ([Sch08]) *Sea  $X$  un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT.*

1. *Cualquier splitting  $X'$  de  $X$  es conjugado a  $X$ .*
2. *Sea  $Y$  un  $\mathbb{Z}^d$ -NNSFT y  $\phi: X \rightarrow Y$  una conjugación. Entonces  $\phi$  se escribe como composición de splittings y amalgamaciones.*

Pese a que esta generalización del teorema de Williams se puede probar con exactamente la misma estrategia que en  $\mathbb{Z}$  como en la próxima sección, la demostración de [Sch08] utiliza un resultado auxiliar de H. Aso para escribir cada conjugación entre  $\mathbb{Z}^d$ -SFTs como composición de códigos bipartitos (ver [Aso00]). La misma estrategia fue utilizada por A. Johnson y K. Madden para probar un teorema similar sobre sistemas textiles en  $\mathbb{Z}^2$  [JM99].

## A.2. Descomposición de conjugaciones

No seguiremos la ruta de [Sch08], en el sentido que definiremos los splittings y amalgamaciones como operaciones sobre un  $G$ -subshift  $X$  cualquiera. En la próxima sección veremos cómo afecta esto a las matrices involucradas cuando  $X$  es un  $G$ -NNSFT.

En toda esta sección,  $G$  será un grupo finitamente generado y  $S \subset G \setminus \{e\}$  será un generador finito. Sin pérdida de generalidad, siempre asumiremos en este capítulo que las matrices  $\{A_l\}_{l \in S}$  que presentan un  $G$ -NNSFT no tienen filas ni columnas idénticamente nulas, pues en tal caso el símbolo correspondiente a esa fila o columna no se realiza en el subshift y lo podemos quitar del alfabeto.

**Definición A.3** *Sean  $X \subseteq \mathcal{A}^G$ ,  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  dos  $G$ -subshifts. Fijemos  $s \in S$ .*

1. *Decimos que  $X'$  es un **out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s \in S$**  si para cada  $a \in \mathcal{A}$  existe una partición  $\mathcal{P}^a = \{P_1^a, \dots, P_{n_a}^a\}$  de  $\text{Suc}_s(a)$  en partes no vacías tal que  $\phi(X) = X'$ , donde*
  - (a) *salvo renombramiento  $\mathcal{A}' = \{a^j \mid a \in \mathcal{A}, 1 \leq j \leq n_a\}$ , y*
  - (b)  *$\phi = \Phi^\infty: X \rightarrow X'$  es la conjugación definida por la función local*

$$\Phi: x_e x_s \in \mathcal{L}_{\{e,s\}}(X) \mapsto x_e^j \in \mathcal{A}' \tag{A.1}$$

donde  $1 \leq j \leq n_{x_e}$  queda definido por  $x_s \in P_j^{x_e}$ .

2. Decimos que  $X'$  es un **in-splitting** de  $X$  en la dirección de  $s \in S$  si para cada  $a \in \mathcal{A}$  existe una partición  $\mathcal{Q}^a = \{Q_1^a, \dots, Q_{m_a}^a\}$  de  $\text{Pred}_s(a)$  en partes no vacías tal que  $\phi(X) = X'$ , donde

- (a) salvo renombramiento  $\mathcal{A}' = \{a_j \mid a \in \mathcal{A}, 1 \leq j \leq m_a\}$ , y
- (b)  $\phi = \Phi^\infty: X \rightarrow X'$  es la conjugación definida por la función local

$$\Phi: x_{s^{-1}x_e} \in \mathcal{L}_{\{s^{-1}, e\}}(X) \mapsto (x_e)_j \in \mathcal{A}' \quad (\text{A.2})$$

donde  $1 \leq j \leq m_{x_e}$  queda definido por  $x_{s^{-1}} \in Q_j^{x_e}$ .

3. Decimos que  $X$  es una **out-amalgamación** (resp. **in-amalgamación**) de  $X'$  si  $X'$  es un out-splitting (resp. in-splitting) de  $X$ .

**Observación A.4** Si  $s \in S$  tiene orden 2 entonces  $\text{Suc}_s(a) = \text{Pred}_s(a)$  para cada  $a \in \mathcal{A}$ , de modo que las nociones de out-splitting e in-splitting coinciden.

**Lema A.5** Sea  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -subshift y  $s \in S$ .

1. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de un  $s \in S$  y  $\phi: X \rightarrow X'$  la conjugación definida en (A.1). Entonces la inversa de  $\phi$  es el código 1-bloque  $\alpha = \Delta^\infty: X' \rightarrow X$  donde  $\Delta: a^j \in \mathcal{A}' \mapsto a \in \mathcal{A}$ .
2. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un in-splitting de  $X$  en la dirección de un  $s \in S$  y  $\phi: X \rightarrow X'$  la conjugación definida en (A.2). Entonces la inversa de  $\phi$  es el código 1-bloque  $\alpha = \Delta^\infty: X' \rightarrow X$  donde  $\Delta: a_j \in \mathcal{A}' \mapsto a \in \mathcal{A}$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las afirmaciones para out-splittings pues las demostraciones correspondientes a in-splittings son análogas.

Si  $x_e x_s \in \mathcal{L}_{\{e, s\}}(X)$  y definimos  $1 \leq j \leq n_{x_e}$  por  $x_s \in P_j^{x_e}$ , entonces

$$\Delta(\Phi(x_e x_s)) = \Delta(x_e^j) = x_e.$$

Por otro lado, si  $x'_e, x'_s \in \mathcal{L}_{\{e, s\}}(X')$  entonces  $x'_e = a^{j_e}, x'_s = b^{j_s}$  donde  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $1 \leq j_e \leq n_a$ ,  $1 \leq j_s \leq n_b$  y  $b \in P_{j_e}^a$ . Luego

$$\Phi(\Delta(x'_e)\Delta(x'_s)) = \Phi(ab) = a^j = x'_e.$$

Concluimos que para todo  $x' \in X'$  tenemos

$$\phi \circ \alpha(x') = \phi((\Delta(x'_g))_{g \in G}) = (\Phi(\Delta(x'_g)\Delta(x'_{gs})))_{g \in G} = x',$$

y para todo  $x \in X$  tenemos

$$\alpha \circ \phi(x) = \alpha((\Phi(x_g, x_{gs}))_{g \in G}) = (\Delta(\Phi(x_g, x_{gs})))_{g \in G} = x. \quad \square$$

Nos referiremos a  $\phi$  como un **código de out-splitting** (resp. **código de in-splitting**) y a  $\alpha$  como un **código de out-amalgamación** (resp. **código de in-amalgamación**).

Como la definición de un splitting permite reetiquetar su alfabeto, cualquier código de renombramiento entre  $G$ -subshifts  $X, Y$  es un out-splitting (resp. in-splitting) en la dirección de  $s \in S$  asociado a las particiones triviales  $\mathcal{P}^a = \{\text{Suc}_s(a)\}$  (resp.  $\mathcal{Q}^a = \{\text{Pred}_s(a)\}$ ) para todo  $a \in \mathcal{A}$ . En el otro extremo tenemos a los splittings completos.

**Definición A.6** Sean  $X \subseteq \mathcal{A}^G$ ,  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  dos  $G$ -subshifts y sea  $s \in S$ .

Decimos que  $X'$  es un out-splitting (resp. in-splitting) **completo** de  $X$  en la dirección de  $s$  si es un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$  asociado a las particiones  $\mathcal{P}^a = \{\{b\}\}_{b \in \text{Suc}_s(a)}$ ,  $a \in \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{Q}^a = \{b\}_{b \in \text{Pred}_s(a)}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ).

Luego las presentaciones higher-block  $X^{\{\{e,s\}\}}$  (resp.  $X^{\{\{e,s\}\}}$ ) son out-splittings (resp. in-splittings) completos de  $X$  en la dirección de  $s$ . Recordemos del Capítulo 1 que la definición de la presentación  $F$ -higher block  $X^{[F]}$  de un  $G$ -subshift  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  es

$$X^{[F]} = \{x \in (\mathcal{A}^F)^G \mid ((x_g)_e)_{g \in G} \in X \text{ y } (x_g)_f = (x_{gf})_e \text{ para cada } f \in F\}.$$

El próximo lema muestra que cualquier presentación higher-block de un  $G$ -subshift es conjugado a éste por finitos splittings. La demostración es engorrosa pero genérica.

**Lema A.7** Sea  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -subshift y  $s \in S$ .

1. Sean  $F, N \subset G$  conjuntos finitos tales que  $e \in F \cap N$ . Entonces  $(X^{[N]})^{[F]}$  es conjugado a  $X^{[FN]}$  por un código de renombramiento.
2. Sea  $F \subset G$  un conjunto finito. Entonces para algún  $\bar{F} \supseteq F$  finito la presentación  $\bar{F}$ -higher-block  $X^{[\bar{F}]}$  de  $X$  es conjugado a  $X$  por la composición de finitos out-splittings e in-splittings.

DEMOSTRACIÓN. 1. Dado  $y \in ((\mathcal{A}^N)^F)^G$ , escribiremos por claridad  $y = ((y_g^{f,n})_{f \in F, n \in N})_{g \in G}$  en lugar de  $y = (((((y_g)_n)_{n \in N})_f)_{f \in F})_{g \in G})$ . Esto equivale a identificar  $\mathcal{A}^{N \times F}$  con  $(\mathcal{A}^N)^F$ . También escribiremos  $x = ((x_g^h)_{h \in FN})_{g \in G} \in (\mathcal{A}^{FN})^G$ .

Sea  $\Phi: \mathcal{A}^{FN} \rightarrow (\mathcal{A}^N)^F$  la función local  $\Phi((p^h)_{h \in FN}) = (p^{fn})_{f \in F, n \in N}$ , y definamos  $\phi$  como el código  $\Phi^\infty: X^{[FN]} \rightarrow ((\mathcal{A}^N)^F)^G$ . Veamos que  $\phi(X^{[FN]}) \subseteq (X^{[N]})^{[F]}$ : sean  $x \in X^{[FN]}$  e  $y = \phi(x) \in ((\mathcal{A}^N)^F)^G$ .

- (a) Afirmamos que  $((y_g^{e,n})_{n \in N})_{g \in G} \in X^{[N]}$ . En efecto,  $(y_g^{e,e})_{g \in G} = (x_g^e)_{g \in G} \in X$  pues  $x \in X^{[FN]}$ , y si  $n \in N$ ,  $g \in G$  entonces

$$y_g^{e,n} = x_g^n = x_{gn}^e = y_{gn}^{e,e}$$

donde nuevamente usamos que  $x \in X^{[FN]}$  para la segunda igualdad.

- (b) Afirmamos que para todo  $f \in F$ ,  $g \in G$  tenemos  $(y_g^{f,n})_{n \in N} = (y_{gf}^{e,n})_{n \in N}$ . En efecto,

$$(y_g^{f,n})_{n \in N} = (x_g^{fn})_{n \in N} = (x_{gfn}^e)_{n \in N} = (x_{gf}^n)_{n \in N} = (y_{gf}^{e,n})_{n \in N}$$

donde la segunda y tercera igualdad siguen de  $x \in X^{[FN]}$ .

Luego  $\phi(X^{[FN]}) \subseteq (X^{[N]})^{[F]}$ .

El código  $\phi$  admite una inversa 1-bloque. Para cada  $h \in FN$  fijamos  $f(h) \in F, n(h) \in N$  tales que  $h = f(h)n(h)$ . Sea  $\bar{\Phi}: ((\mathcal{A}^N)^F)^F \rightarrow \mathcal{A}^{FN}$  la función local

$$\bar{\Phi}((p^{f,n})_{f \in F, n \in N}) = (p^{f(h), n(h)})_{h \in FN}$$

Definamos  $\bar{\phi}$  como el código  $\bar{\Phi}^\infty: (X^{[N]})^{[F]} \rightarrow (\mathcal{A}^{FN})^G$ . Notemos que  $\bar{\phi}$  no depende realmente de las elecciones de  $f(h), n(h)$ , pues si  $h = f(h)n(h) = f'n' \in FN$  con  $f' \in F, n' \in N$  entonces para cada  $y \in (X^{[N]})^{[F]}$  y  $x = \phi(y)$  tenemos

$$\begin{aligned} x_g^h &= y_g^{f(h), n(h)} = y_{gf(h)}^{e, n(h)} && \text{pues } y \in (X^{[N]})^{[F]} \\ &= y_{gf(h)n(h)}^{e, e} && \text{pues } ((y_g^{e, n})_{n \in N})_{g \in G} \in X^{[N]} \\ &= y_{gf'n'}^{e, e} \\ &= y_{gf'}^{e, n'} && \text{pues } ((y_g^{e, n})_{n \in N})_{g \in G} \in X^{[N]} \\ &= y_g^{f', n'} && \text{pues } y \in (X^{[N]})^{[F]}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Veamos que también  $\bar{\phi}((X^{[N]})^{[F]}) \subseteq X^{[FN]}$ : sean  $y \in (X^{[N]})^{[F]}$  y  $x = \bar{\phi}(y) \in (\mathcal{A}^{FN})^G$ .

(a) Afirmamos que  $(x_g^e)_{g \in G} \in X$ . En efecto,  $((y_g^{e, n})_{n \in N})_{g \in G} \in X^{[N]}$  implica que

$$(y_g^{e, e})_{g \in G} = (x_g^e)_{g \in G} \in X$$

ya que podemos tomar  $f(e) = n(e) = e$ .

(b) Afirmamos que  $x_g^h = x_{gh}^e$  para todo  $h \in FN, g \in G$ . En efecto,

$$\begin{aligned} x_g^h &= y_g^{f(h), n(h)} = y_g^{e, n(h)} && \text{pues } y \in (X^{[N]})^{[F]} \\ &= y_{gf(h)n(h)}^{e, e} && \text{pues } ((y_g^{e, n})_{n \in N})_{g \in G} \in X^{[N]} \\ &= x_{gh}^e. \end{aligned}$$

Finalmente, la igualdad  $\bar{\phi} \circ \phi = \text{id}_{X^{[FN]}}$  sigue de  $\bar{\Phi} \circ \Phi = \text{id}_{\mathcal{A}^{FN}}$ . La igualdad  $\phi \circ \bar{\phi} = \text{id}_{(X^{[N]})^{[F]}}$  sigue de notar que (A.3) muestra que  $\bar{\phi}$  es independiente de las elecciones  $f(h), n(h)$ , y entonces para cada  $y \in (X^{[N]})^{[F]}$  y  $g \in G$  tenemos

$$\phi \circ \bar{\phi}(y)_g = \Phi \circ \bar{\Phi}((y_g^{f, n})_{f \in F, n \in N}) = \Phi((y_g^{fn})_{f \in F, n \in N}) = (y_g^{f(n), n(fn)})_{f \in F, n \in N} = (y_g^{f, n})_{f \in N, n \in N}.$$

2. Supongamos primero que  $F$  es un singleton  $\{f\}$  con  $f = f_n f_{n-1} \cdots f_1 \in W(S)$  una palabra sobre  $S \cup S^{-1}$ . Definamos  $G$ -subshifts  $\{X_j\}_{j=0}^n$  y subconjuntos finitos  $\{F_j\}_{j=0}^n$  de  $G$  como sigue. Primero tomamos  $X_0 = X$  y  $F_0 = \{e\}$ . Para cada  $1 \leq j \leq n$ , definimos

$$F_j = F_{j-1} \cup f_j F_{j-1} \quad \text{y} \quad X_j = \begin{cases} \text{el out-splitting completo en la dirección de } f_j & \text{si } f_j \in S \\ \text{el in-splitting completo en la dirección de } f_j & \text{si } f_j \notin S. \end{cases}$$

Luego  $f \in F_n$ , y usando el ítem anterior vemos que para cada  $1 \leq j \leq n$  existe un código de renombramiento entre

$$X_j = (X_{j-1})^{\{e, f_j\}} = (X^{[F_{j-1}]})^{\{e, f_j\}} \quad \text{y} \quad X^{\{e, f_j\} F_{j-1}} = X^{F_j}.$$

En particular, existe un código de renombramiento entre  $X_n$  y el  $F_n$ -higher block subshift  $X^{[F_n]}$ . El conjunto  $\bar{F} = F_n$  cumple lo requerido.

En el caso general,  $F = \{f^i\}_{i=1}^m$  con cada  $f^i = f_{n_i}^i \cdots f_1^i \in W(S)$  y podemos repetir la misma construcción. Sean  $\{X_j^1\}_{j=0}^{n_1}$ ,  $\{F_j^1\}_{j=0}^{n_1}$  definidos como en el párrafo anterior para  $f = f_1$ . Para cada  $2 \leq i \leq m$  definimos  $G$ -subshifts  $\{X_j^i\}_{j=0}^{n_i}$  y conjuntos finitos  $\{F_j^i\}_{j=0}^{n_i}$  por:  $X_0^i = X_{n_{i-1}}^{i-1}$ ,  $F_0^i = F_{n_{i-1}}^{i-1}$  y para  $1 \leq j \leq n_i$ ,

$$F_j^i = F_{j-1}^i \cup f_j^i F_{j-1}^i \quad \text{y} \quad X_j^i = \begin{cases} \text{el out-splitting completo en la dirección de } f_j^i & \text{si } f_j^i \in S \\ \text{el in-splitting completo en la dirección de } f_j^i & \text{si } f_j^i \notin S. \end{cases}$$

Nuevamente, para todo  $1 \leq i \leq m$  tenemos que  $f^i \in F_{n_i}^i$  y usando el ítem anterior  $n_i$  veces vemos que existe un código de renombramiento entre  $X_{n_i}^i$  y  $X^{[F_{n_i}^i]}$ . Ahora el conjunto  $\bar{F} = F_{n_m}^m$  cumple lo requerido.  $\square$

Para probar un análogo del teorema de Williams en este contexto, seguiremos la misma estrategia que en el caso unidimensional. El primer paso es reducir la memoria de la inversa de una conjugación 1-bloque a través de splittings y amalgamaciones.

**Lema A.8** *Sea  $\psi = \Psi^\infty: X \rightarrow Y$  una conjugación 1-bloque entre  $G$ -subshifts  $X, Y$ . Supongamos que  $\psi^{-1}$  tiene memoria  $F \subset G$  tal que  $|F| > 1$ , y que además  $F$  es débilmente conexo en el grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{G,S}$ .*

*Entonces existe un  $f \in F \setminus \{e\}$  tal que  $F \setminus \{f\}$  es débilmente conexo en  $\mathcal{G}_{G,S}$ , y tal que existe un  $s \in S$  con  $fs^{-1} \in F$  o  $fs \in F$ . Además, existe un código de splitting  $\phi: X \rightarrow X'$  en la dirección de  $s$  y un código de amalgamación completa  $\alpha: Y' \rightarrow Y$  en la dirección de  $s$  tal que  $\psi = \phi \circ \psi' \circ \alpha$  donde  $\psi': X' \rightarrow Y'$  es un código 1-bloque cuya inversa tiene memoria  $F \setminus \{f\}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $F$  es un subgrafo débilmente conexo en  $\mathcal{G}_{G,S}$  que no es un singleton, entonces existe (ver [Die96]) un árbol generador  $\mathcal{T}$  de  $F$  con al menos dos hojas. Cualquier hoja  $f \neq e$  de  $\mathcal{T}$  verifica que  $F \setminus \{f\}$  es débilmente conexo en  $\mathcal{G}_{G,S}$ . Además, como hay al menos una arista de  $\mathcal{T}$  incidente a  $f$ , existe un  $s \in S$  con  $fs^{-1} \in F$  o  $fs \in F$ . Haremos el caso en que  $fs^{-1} \in F$ , ya que el otro caso es idéntico salvo que los in-splittings/in-amalgamaciones toman el lugar de los out-splittings/out-amalgamaciones.

Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  los alfabetos de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sea  $\alpha: Y' \rightarrow Y$  el código de out-amalgamación completa en la dirección de  $s$  y  $\phi: X \rightarrow X'$  el código de out-splitting en la dirección de  $s$  asociado a las particiones

$$\mathcal{P}^a = \{\{\bar{a} \in \mathcal{A} \mid \bar{a} \in \text{Suc}_s(a) \text{ y } \Psi(\bar{a}) = b\}\}_{b \in \mathcal{B}, a \in \mathcal{A}}.$$

Reetiquetando podemos suponer que el alfabeto  $\mathcal{A}'$  de  $X'$  es  $\mathcal{A}' = \{x_e^{\Psi(x_s)} \mid x \in X\}$  y que  $\phi = (\Phi_X)^\infty$  donde

$$\Phi_X: x_e x_s \in \mathcal{L}_{\{e,s\}}(X) \mapsto x_e^{\Psi(x_s)} \in \mathcal{A}'.$$

Análogamente podemos suponer que el alfabeto  $\mathcal{B}'$  de  $Y'$  es  $\mathcal{B}' = \{y_e^{y_s} \mid y \in Y\}$ , y que  $\alpha^{-1} = (\Phi_Y)^\infty$  donde

$$\Phi_Y: y_e y_s \in \mathcal{L}_{\{e,s\}}(Y) \mapsto y_e^{y_s} \in \mathcal{B}'.$$

El diagrama que relaciona  $\psi, \alpha, \phi$  y  $\psi'$  es el siguiente.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi' \\ Y & \xleftarrow{\alpha} & Y' \end{array}$$

Notemos que para cada  $x = (x_g)_{g \in G} \in X$  y  $x' = \phi(x) = (x_g^{\Phi(x_{gs})})_{g \in G} \in X'$  se tiene que

$$\psi'(x') = \alpha^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1}(x') = \alpha^{-1} \circ \psi(x) = \alpha^{-1}((\Psi(x_g))_{g \in G}) = (\Psi(x_g)^{\Psi(x_{gs})})_{g \in G}.$$

Luego  $\psi'$  es 1-bloque.

Afirmamos que su inversa tiene memoria  $F' = F \setminus \{f\}$ . Sean  $x' \in X', y' \in Y'$  y  $x \in X, y \in Y$  tales que  $y' = \psi'(x'), x' = \phi(x)$  e  $y = \alpha(y')$ , de modo que  $y = \psi(x)$ . Luego  $y'|_{F'}$  determina a  $y|_F$  por la definición del out-splitting completo y porque  $f \in F'$ s. El patrón  $y|_F$  a su vez determina a  $x_e$  pues  $F$  es la memoria de  $\psi^{-1}$ . Como  $x'_e = \phi(x)_e = x_e^{\Phi(x_s)}$  e  $y'_e = y_e^{y_s} = \Psi(x_e)^{\Psi(x_s)}$  concluimos que  $y'|_{F'}$  determina a  $x'_e$ . Luego  $\psi'^{-1}$  tiene memoria  $F'$ .  $\square$

**Teorema A.9** *Si  $X, Y$  son dos  $G$ -subshifts y  $\psi: X \rightarrow Y$  es una conjugación, entonces  $\psi$  se puede escribir como composición de códigos de splitting seguidos de códigos de amalgamación.*

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 1.26 muestra que para alguna presentación higher-block  $Z$  de  $X$ ,  $\psi$  es 1-bloque. El Lema A.7 asegura que podemos reemplazar  $X$  por  $Z$  para propósitos de la demostración, pues la conjugación entre  $X$  y  $Z$  se escribe como una composición de splittings.

Sea  $F$  la memoria de  $\psi^{-1}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $e \in F$  y que  $F$  es débilmente conexo en  $\mathcal{G}_{G,S}$ . El Lema A.8 muestra que existen  $f \in F$ ,  $G$ -subshifts  $X^1, Y^1$ , un splitting  $\phi_1: X \rightarrow X^1$  y una amalgamación  $\alpha_1: Y^1 \rightarrow Y$  tales que  $\psi_1 = \phi_1^{-1} \circ \psi \circ \alpha_1^{-1}$  es un código 1-bloque con conjunto de memoria  $F \setminus \{f\}$ . El lema asegura además que  $F \setminus \{f\}$  es débilmente conexo y contiene a  $e$ . Estas condiciones permiten repetir el procedimiento. El uso repetido del lema  $|F| - 1$  veces entrega un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\phi_1} & X_1 & \xrightarrow{\phi_2} & \dots & \xrightarrow{\phi_{|F|-1}} & X_{|F|-1} \\ \psi \downarrow & & \psi_1 \downarrow & & & & \psi_{|F|-1} \downarrow \\ Y & \xleftarrow{\alpha_1} & Y_1 & \xleftarrow{\alpha_2} & \dots & \xleftarrow{\alpha_{|F|-1}} & Y_{|F|-1} \end{array}$$

donde para  $2 \leq j \leq |F| - 1$  los  $X_j, Y_j$  son  $G$ -subshifts,  $\alpha_j: Y_j \rightarrow Y_{j-1}$  es un código de amalgamación,  $\phi_j: X_{j-1} \rightarrow X_j$  es un código de splitting y  $\psi_j: X_j \rightarrow Y_j$  es un código 1-bloque cuya inversa tiene memoria  $F_j \subset F$  de tamaño  $|F| - j$  con  $e \in F_j$ .

Luego  $\psi_{|F|-1}$  tiene como memoria a  $\{e\}$  y por lo tanto es un código de renombramiento. Seguir el diagrama por el camino compuesto por el borde superior,  $\psi_{|F|-1}$  y el borde inferior entrega la conclusión.  $\square$



### A.3. Formalismo matricial para $G$ -NNSFTs

Cuando  $X$  es un  $G$ -NNSFT y  $X'$  es un splitting de  $X$  podemos entregar matrices que presentan a  $X'$  a partir de las de  $X$ . Estas se escriben a partir de una representación matricial de las funciones locales  $\Phi, \Delta$ .

**Definición A.10** Sea  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -subshift y sea  $s \in S$ .

1. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$  determinado por las particiones  $\{\mathcal{P}^a\}_{a \in \mathcal{A}}$ .

Definimos las matrices  $D \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}$  por

$$D = (\mathbf{1}_{a=b})_{a \in \mathcal{A}, b_j \in \mathcal{A}'} \quad y \quad E = (\mathbf{1}_{a \in P_j^b})_{b_j \in \mathcal{A}', a \in \mathcal{A}}. \quad (\text{A.4})$$

2. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un in-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$  determinado por las particiones  $\{\mathcal{Q}^a\}_{a \in \mathcal{A}}$ .

Definimos las matrices  $C \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}$  por

$$C = (\mathbf{1}_{b=a})_{b_j \in \mathcal{A}', a \in \mathcal{A}} \quad y \quad E = (\mathbf{1}_{a \in Q_j^b})_{a \in \mathcal{A}, b_j \in \mathcal{A}'}. \quad (\text{A.5})$$

**Observación A.11** Sean  $X \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -subshift y  $X'$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s \in S$ . Tenemos tres objetos finitos que representan la información asociada al out-splitting:

1. las particiones  $\{\mathcal{P}^a\}_{a \in \mathcal{A}}$  de  $\text{Suc}_s(a)$ ,
2. las funciones locales  $\Phi, \Delta$  de la Definición A.3 y del Lema A.5, y
3. las matrices  $D, E$  definidas por (A.4).

Todos son equivalentes (en el sentido que todas se determinan entre sí), y de la definición de  $D, E$  también tenemos las igualdades

$$D = (\mathbf{1}_{a=\Delta(b_j)})_{a \in \mathcal{A}, b_j \in \mathcal{A}'} \quad y \quad E = (\mathbf{1}_{\Phi(ba)=b_j})_{b_j \in \mathcal{A}', a \in \mathcal{A}}.$$

Luego diremos que  $D, E$  (o  $\{\mathcal{P}^a\}_{a \in \mathcal{A}}$ , o  $\Phi, \Delta$ ) **determinan** el out-splitting  $X'$ .

Por otro lado, es importante notar que  $D$  es una matriz de división, es decir una matriz donde cada columna contiene exactamente un 1 y cada fila contiene al menos un 1. Como  $\mathcal{P}^a$  no tiene partes vacías, vemos también que  $E$  no tiene filas idénticamente nulas.

Estas observaciones también aplican para in-splittings: las matrices  $C, E$  que determinan un in-splitting (dadas por (A.5)) verifican que  $C^\top$  es una matriz de división y que  $E$  no tiene columnas idénticamente nulas.

**Proposición A.12** Sea  $X = \mathbf{X}_{\{A_i\}_{i \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -NNSFT con respecto a  $S$ , y sea  $s \in S$ .

1. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $D \in M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(\{0,1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}',\mathcal{A}}$  las matrices que determinan el out-splitting. Supongamos que  $A_s$  es esencial. Entonces  $A_s = DE$  y, recíprocamente, cualquier par de matrices  $D, E$  a entradas en  $\{0,1\}$  con  $D$  de división,  $E$  sin filas idénticamente nulas y  $A_s = DE$  determinan un out-splitting  $X'$  de  $X$  en la dirección de  $s$ .
2. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un in-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $C \in M_{\mathcal{A}',\mathcal{A}}(\{0,1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$  las matrices que determinan el in-splitting. Supongamos que  $A_s$  es esencial. Entonces  $A_s = EC$  y, recíprocamente, cualquier par de matrices  $C, E$  a entradas en  $\{0,1\}$  con  $C^\top$  de división,  $E$  sin columnas idénticamente nulas y  $A_s = EC$  determinan un out-splitting  $X'$  de  $X$  en la dirección de  $s$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las afirmaciones para out-splittings pues las demostraciones correspondientes a in-splittings son análogas.

Primero notemos que si  $a, b \in \mathcal{A}$  entonces

$$(DE)_{a,b} = \sum_{a' \in \mathcal{A}'} D_{a,a'} E_{a',b} = \sum_{1 \leq j \leq n_a} E_{a^j,b} = \sum_{1 \leq j \leq n_a} \mathbf{1}_{b \in P_j^a} = \mathbf{1}_{b \in \text{Suc}_s(a)}$$

pues  $\mathcal{P}^a$  es una partición de los sucesores de  $a$  en la dirección de  $s$ . Esto muestra que  $DE$  es una matriz a entradas en  $\{0,1\}$ . Como  $A_s$  es esencial,  $b \in \text{Suc}_s(a)$  ssi  $(A_s)_{a,b} = 1$ , es decir  $DE = A_s$ . Recíprocamente, sean  $\mathcal{A}'$  un conjunto finito,  $D \in M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(\{0,1\})$ ,  $E \in M_{\mathcal{A}',\mathcal{A}}(\{0,1\})$  con  $D$  de división,  $E$  sin filas idénticamente nulas y  $A_s = DE$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$ , definimos una partición de  $\text{Suc}_s(a)$  como sigue. Sea

$$\mathcal{A}'_a = \{a' \in \mathcal{A}' \mid D_{a,a'} = 1\} \subseteq \mathcal{A}'$$

y, para cada  $a' \in \mathcal{A}'_a$  sea

$$P_{a'}^a = \{b \in \text{Suc}_s(a) \mid E_{a',b} = 1\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Los conjuntos  $\mathcal{P}^a = \{P_{a'}^a\}_{a' \in \mathcal{A}'_a}$  particionan  $\text{Suc}_s(a)$ , pues si  $b \in \text{Suc}_s(a)$  entonces

$$1 = (A_s)_{a,b} = (DE)_{a,b} = \sum_{a' \in \mathcal{A}'} D_{a,a'} E_{a',b} = \sum_{a' \in \mathcal{A}'_a} E_{a',b}$$

de modo que existe exactamente un  $a' \in \mathcal{A}'_a$  con  $E_{a',b}$ . Por otro lado, la partición  $\mathcal{P}^a$  es en partes no vacías ya que  $E$  no tiene filas idénticamente nulas: si  $a' \in \mathcal{A}'_a$ , entonces existe un  $b \in \mathcal{A}$  con  $E_{a',b}$ . Como  $(A_s)_{a,b} = (DE)_{a,b} \geq D_{a,a'} E_{a',b} = 1$  y  $A_s$  es esencial, concluimos que  $b \in \text{Suc}_s(a)$  y por lo tanto  $b \in P_{a'}^a$ .

Podemos identificar los símbolos  $\{a' \in \mathcal{A}'_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  con  $\{a^j \mid 1 \leq j \leq |\mathcal{A}'_a|\}_{a \in \mathcal{A}}$ , de modo que

$$D = (\mathbf{1}_{a=\Delta(a^j)})_{a \in \mathcal{A}, a^j \in \mathcal{A}'} \quad \text{y} \quad E = (\mathbf{1}_{\Phi(ba)=b^j})_{b^j \in \mathcal{A}', a \in \mathcal{A}}$$

y por lo tanto  $D, E$  determinan el out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$  asociado a las particiones  $\{\mathcal{P}^a\}_{a \in \mathcal{A}}$ .  $\square$

**Proposición A.13** Sea  $X = \mathbf{X}_{\{A_t\}_{t \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -NNSFT con respecto a  $S$ , y sea  $s \in S$ .

1. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $D \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}$  las matrices que determinan el out-splitting.

Entonces  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$  es un  $G$ -NNSFT con  $A'_s = ED$  y  $A'_l = D^\top A_l D$  para  $l \neq s$ .

2. Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un in-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $C \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}$  las matrices que determinan el in-splitting.

Entonces  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$  es un  $G$ -NNSFT con  $A'_s = CE$  y  $A'_l = CA_l C^\top$  para  $l \neq s$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las afirmaciones para out-splittings pues las demostraciones correspondientes a in-splittings son análogas.

Primero notemos que para  $a', b' \in \mathcal{A}'$  tenemos

$$(ED)_{a', b'} = \sum_{c \in \mathcal{A}} E_{a', c} D_{c, b'} = \sum_{c \in \mathcal{A}} E_{a', c} \mathbf{1}_{c = \Delta(b')} = E_{a', \Delta(b')}$$

y cuando  $l \neq s$  también

$$(D^\top A_l D)_{a', b'} = (A_l)_{\Delta(a'), \Delta(b')},$$

es decir las matrices  $\{A'_l\}_{l \in S}$  son a entradas en  $\{0, 1\}$ .

Sea  $\phi = \Phi^\infty: X \rightarrow X'$ ,  $\alpha = \Delta^\infty: X' \rightarrow X$  los códigos de out-splitting y out-amalgamación asociados a  $X'$ . En lo que sigue (y las próximas demostraciones) usaremos constantemente que  $\Phi(ab) = a' = a^j \in \mathcal{A}'$  ssi  $D_{a, a'} = \mathbf{1}_{a = \Delta(a')} = 1$  y  $E_{a', b} = \mathbf{1}_{b \in P_j^a} = 1$ . Esto permite rephrasing los argumentos en términos de  $D, E$ .

Veamos que  $X' = \phi(X) = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ .

1. Afirmamos que  $\alpha(\mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}) \subseteq X$ . En efecto, sean  $x' \in \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ ,  $x = \alpha(x') = (\Delta(x'_g))_{g \in G} \in \mathcal{A}^G$  y  $g \in G$ . Entonces

$$\begin{aligned} (A_s)_{x_g, x_{gs}} &= (A_s)_{\Delta(x'_g), \Delta(x'_{gs})} \geq (DE)_{\Delta(x'_g), \Delta(x'_{gs})} \\ &= \sum_{a' \in \mathcal{A}'} D_{\Delta(x'_g), a'} E_{a', \Delta(x'_{gs})} \\ &= \sum_{a' \in \mathcal{A}'} \mathbf{1}_{\Delta(x'_g) = \Delta(a')} E_{a', \Delta(x'_{gs})} \\ &\geq E_{x'_g, \Delta(x'_{gs})} = (ED)_{x'_g, x'_{gs}} = (A'_s)_{x'_g, x'_{gs}} = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y si  $l \in S \setminus \{s\}$  entonces también

$$(A_l)_{\Delta(x'_s), \Delta(x'_{sl})} = (D^\top A_l D)_{x'_s, x'_{sl}} = (A'_l)_{x'_s, x'_{sl}} = 1. \quad (\text{A.7})$$

Las ecuaciones (A.6) y (A.7) muestran que  $x = \alpha(x') \in X$ .

2. Afirmamos que  $\phi(X) \subseteq \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ . En efecto, sean  $x \in X$ ,  $x' = \phi(x) = (\Phi(x_g x_{gs}))_{g \in G} \in$

$(\mathcal{A}')^G$  y  $g \in G$ . Entonces

$$\begin{aligned}
(A'_s)_{x'_g, x'_{gs}} &= (ED)_{x'_g, x'_{gs}} = (ED)_{\Phi(x_g x_{gs}), \Phi(x_{gs} x_{gs^2})} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}} E_{\Phi(x_g x_{gs}), a} D_{a, \Phi(x_{gs} x_{gs^2})} \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}} E_{\Phi(x_g x_{gs}), a} \mathbf{1}_{a = \Delta(\Phi(x_{gs} x_{gs^2}))} \\
&= E_{\Phi(x_g x_{gs}), \Delta(\Phi(x_{gs} x_{gs^2}))} = E_{\Phi(x_g x_{gs}), x_{gs}} = 1, \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

y si  $l \in S \setminus \{s\}$  entonces también

$$\begin{aligned}
(A'_l)_{x'_g, x'_{gs}} &= (D^\top A_l D)_{x'_g, x'_{gs}} = (D^\top A_l D)_{\Phi(x_g x_{gs}), \Phi(x_{gl} x_{gl^s})} = (A_l)_{\Delta(\Psi(x_g x_{gs})), \Delta(\Phi(x_{gl} x_{gl^s}))} \\
&= (A_l)_{x_g, x_{gl}} = 1. \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (A.8) y (A.9) muestran que  $x' = \phi(x) \in X$ .

Concluimos recordando que  $\alpha = \phi^{-1}$ . □

La proposición anterior (junto con el teorema de Williams general A.9) no muestra que el problema que consiste en decidir si dos  $G$ -NNSFTs con respecto a un generador  $S$  son conjugados es semidecidible: consideremos el algoritmo que toma como datos dos conjuntos de matrices  $\{A_s\}_{s \in S}$ ,  $\{B_s\}_{s \in S}$  esenciales que definen  $G$ -NNSFTs  $X = \mathbf{X}_{\{A_s\}_{s \in S}}$  y  $Y = \mathbf{X}_{\{B_s\}_{s \in S}}$ , enumera todas las secuencias de splittings y amalgamaciones posibles a partir de  $\{A_s\}_{s \in S}$  y se detiene cuando una tal secuencia entrega  $\{B_s\}_{s \in S}$ . Este algoritmo no necesariamente se detiene cuando  $X$  y  $Y$  son conjugados, puesto que no podemos asegurar en general que el conjunto de matrices que resulta de un splitting es esencial. La Proposición A.19 muestra algunos casos en que podemos asegurar esto.

Usando información de las relaciones que satisface  $S$  en  $G$  y el orden de los elementos de  $S$ , podemos elaborar la definición de  $\{A'_l\}_{l \in S}$  para borrar algunas transiciones que no se realizan en un out-splitting  $X'$ . El siguiente lema motiva esta elaboración.

**Lema A.14** *Sea  $X = \mathbf{X}_{\{A_l\}_{l \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -NNSFT con respecto a  $S$  y  $s \in S$ . Si  $A_s$  es esencial y  $s$  tiene orden finito  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $(A_s)^{n-1} \geq A_s^\top$ . En particular, si  $s$  tiene orden 2 entonces  $A_s$  es simétrica.*

DEMOSTRACIÓN. Sigue de notar que si  $a, b \in \mathcal{A}$  con  $(A_s^\top)_{a,b} = (A_s)_{b,a} = 1$  entonces existe un  $x \in X$  con  $x_{s^{-1}} = b$ ,  $x_s = a$  pues las matrices  $\{A_l\}_{l \in S}$  son esenciales. Como  $x_{s^{-1}} = x_{s^{n-1}} = b$  entonces también

$$1 = (A_s)_{x_s, x_s} (A_s)_{x_s, x_{s^2}} \cdots (A_s)_{x_{s^{n-2}}, x_{s^{n-1}}} \leq (A_s^{n-1})_{a,b}.$$

Si además  $s$  tiene orden 2 tenemos  $A_s \geq A_s^\top$ , y tomando la traspuesta de esta ecuación obtenemos la igualdad. □

Si  $\{A_l\}_{l \in S}$  son matrices cuadradas de la misma dimensión, entonces para cada  $w \in W(S)$  con  $w = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$  (donde los  $s_i \in S$ ,  $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ) denotaremos  $A_w$  por el producto  $A_{s_1^{\varepsilon_1}} A_{s_2^{\varepsilon_2}} \cdots A_{s_n^{\varepsilon_n}}$  donde

$$A_{s_i^{\varepsilon_i}} = \begin{cases} A_{s_i} & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ A_{s_i}^\top & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases}. \quad (\text{A.10})$$

Equivalentemente,  $A_w$  es la imagen de  $w$  bajo el morfismo de monoides entre  $W(S)$  y  $M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  determinado por (A.10).

**Proposición A.15** *Sea  $X = \mathbf{X}_{\{A_l\}_{l \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -NNSFT con respecto a  $S$ , y sea  $s \in S$ . Para cada  $l \in S \setminus \{s\}$  sean  $\{w_{l,i}\}_{i=1}^{m_l} \in W(S)$  tales que  $sw_{l,i} = ls$  para cada  $i$ .*

1. *Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $D \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}$  las matrices que determinan el out-splitting.*

*Entonces  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$  es un  $G$ -NNSFT con*

$$A'_s = \begin{cases} (ED) \ominus ((ED)^{n-1})^\top & \text{si } s \text{ tiene orden } n \in \mathbb{N} \\ ED & \text{si } s \text{ tiene orden infinito.} \end{cases}$$

$$A'_l = (D^\top A_l D) \ominus (EA_{w_{l,1}} E^\top) \ominus (EA_{w_{l,2}} E^\top) \ominus \cdots \ominus (EA_{w_{l,n_l}} E^\top), \quad l \neq s$$

2. *Sea  $X' \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un in-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$ . Sean  $C \in M_{\mathcal{A}', \mathcal{A}}(\{0, 1\})$  y  $E \in M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}$  las matrices que determinan el in-splitting.*

*Entonces  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$  es un  $G$ -NNSFT con*

$$A'_s = \begin{cases} (CE) \ominus ((CE)^{n-1})^\top & \text{si } s \text{ tiene orden } n \in \mathbb{N} \\ CE & \text{si } s \text{ tiene orden infinito.} \end{cases}$$

$$A'_l = (CA_l C^\top) \ominus (E^\top A_{w_{l,1}} E) \ominus (E^\top A_{w_{l,2}} E) \ominus \cdots \ominus (E^\top A_{w_{l,n_l}} E), \quad l \neq s.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las afirmaciones para out-splittings pues las demostraciones correspondientes a in-splittings son análogas.

Sea  $\phi = \Phi^\infty: X \rightarrow X'$ ,  $\alpha = \Delta^\infty: X' \rightarrow X$  los códigos de out-splitting y out-amalgamación asociados a  $X'$ . Veamos que  $X' = \phi(X) = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ .

1. Afirmamos que  $\alpha(\mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}) \subseteq X$ . En efecto, sean  $x' \in \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ ,  $x = \alpha(x') = (\Delta(x'_g))_{g \in G} \in \mathcal{A}^G$  y  $g \in G$ . Entonces, como antes, tenemos

$$\begin{aligned} (A_s)_{x_g, x_{g_s}} &= (A_s)_{\Delta(x'_g), \Delta(x'_{g_s})} \geq (DE)_{\Delta(x'_g), \Delta(x'_{g_s})} \\ &= \sum_{a' \in \mathcal{A}'} D_{\Delta(x'_g), a'} E_{a', \Delta(x'_{g_s})} \\ &= \sum_{a' \in \mathcal{A}'} \mathbf{1}_{\Delta(x'_g) = \Delta(a')} E_{a', \Delta(x'_{g_s})} \\ &\geq E_{x'_g, \Delta(x'_{g_s})} = (ED)_{x'_g, x'_{g_s}} \geq (A'_s)_{x'_g, x'_{g_s}} = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

y si  $l \in S \setminus \{s\}$  entonces también

$$(A_l)_{\Delta(x'_s), \Delta(x'_{sl})} = (D^\top A_l D)_{x'_s, x'_{sl}} \geq (A'_l)_{x'_s, x'_{sl}} = 1. \quad (\text{A.12})$$

Las ecuaciones (A.11) y (A.12) muestran que  $x = \alpha(x') \in X$ .

2. Afirmamos que  $\phi(X) \subseteq \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ . En efecto, sea  $x \in X$ ,  $x' = \phi(x) = (\Phi(x_g x_{gs}))_{g \in G} \in (A')^G$  y  $g \in G$ . Supongamos que  $s$  tiene orden  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$((ED)^{n-1})^\top = D^\top ((DE)^{n-2})^\top E^\top = D^\top (A_s^{n-2})^\top E^\top$$

y vemos que

$$\begin{aligned} (((ED)^{n-1})^\top)_{x'_g, x'_{gs}} &= (D^\top (A_s^{n-2})^\top E^\top)_{\Phi(x_g x_{gs}), \Phi(x_{gs} x_{gs^2})} \\ &= \sum_{a, b \in \mathcal{A}} D_{\Phi(x_g x_{gs}), b}^\top (A_s^{n-2})_{a, b} E_{a, \Phi(x_{gs} x_{gs^2})}^\top \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} (A_s^{n-2})_{a, \Delta(\Phi(x_g x_{gs}))} E_{\Phi(x_{gs} x_{gs^2}), a} \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} (A_s^{n-2})_{a, x_g} E_{\Phi(x_{gs} x_{gs^2}), a} \\ &\geq (A_s^{n-2})_{x_{gs^2}, x_g} E_{\Phi(x_{gs} x_{gs^2}), x_{gs^2}} \geq 1, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde hemos usado que  $(A_s^{n-2})_{x_{gs^2}, x_g} \geq 1$  ya que  $gs^2(s^{n-2}) = g$ .

En cualquier caso, las desigualdades (A.8) (con desigualdad si  $s$  tiene orden finito) y (A.13) muestran que  $(A'_s)_{x'_g, x'_{gs}} = 1$ .

Por otro lado, si  $m_l > 0$  y  $1 \leq i \leq m_l$ , entonces también

$$\begin{aligned} (EA_{w_{l,i}} E^\top)_{x'_g, x'_{gl}} &= (EA_{w_{l,i}} E^\top)_{\Phi(x_g x_{gs}), \Phi(x_{gl} x_{gl_s})} \\ &= \sum_{a, b \in \mathcal{A}} E_{\Phi(x_g x_{gs}), a} (A_{w_{l,i}})_{a, b} E_{\Phi(x_{gl} x_{gl_s}), b} \\ &\geq E_{\Phi(x_g x_{gs}), x_{gs}} (A_{w_{l,i}})_{x_{gs}, x_{gl_s}} E_{\Phi(x_{gl} x_{gl_s}), x_{gl_s}} \\ &= (A_{w_{l,i}})_{x_{gs}, x_{gs} w_{l,i}} = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En cualquier caso, las desigualdades (A.9) (con desigualdad si  $s$  tiene orden finito) y (A.14) muestran que  $(A'_l)_{x'_g, x'_{gl}} = 1$ . Luego  $x' \in \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}}$ .  $\square$

Llamaremos a las palabras  $\{w_{l,i}\}_{l,i}$  las **relaciones de conmutación** del par  $(S, s)$ .

**Observación A.16** *Las nuevas restricciones en las matrices  $A'_l$  se deben a dos consideraciones. Para fijar ideas consideramos las matrices que resultan de un out-splitting.*

1. El factor  $((ED)^{n-1})^\top$  elimina las transiciones entre  $e$  y  $s^{-1}$  de símbolos que no se pueden conectar por un camino de largo  $n-1$  en el subgrafo inducido por  $\langle s \rangle$  en  $\mathcal{G}_{G,S}$ . Por otro lado, la contrarrecíproca del Lema A.14 muestra que si  $a, b \in \mathcal{A}$  son tales que  $(A_s^{n-1})_{a,b}^\top = 0$  y  $(A_s)_{a,b} = 1$ , entonces la transición de  $a$  a  $b$  vía  $s$  no se realiza en  $X$ . El factor  $((ED)^{n-1})^\top$  asegura que esto no ocurre en el out-splitting  $X'$ .

2. Recordemos que la matriz  $E$  especifica la partición  $\mathcal{P}^a$  de  $\text{Suc}_s(a)$  de cada  $\Delta(a') = a \in \mathcal{A}$  por  $E_{a',b} = 1$  ssi  $b$  es sucesor de  $a$  en la dirección  $s$  (es decir,  $(A_s)_{a,b} = 1$ ). Entonces

$$(EA_{w_{l,i}}E^\top)_{a',b'} = \sum_{a,b \in \mathcal{A}} E_{a',a}(A_{w_{l,i}})_{a,b}E_{b',b}$$

es cero exactamente cuando no existen  $a, b \in \mathcal{A}$  en las particiones que representan  $a'$  y  $b'$  respectivamente tales que hay un camino en  $\mathcal{G}_{G,S}$  con etiqueta  $w_{l,i}$  permitido por las matrices  $\{A_l\}_{l \in S}$ . La esencialidad de  $\{A_l\}_{l \in S}$  no implica necesariamente que todas las transiciones en  $A_{w_{l,i}}$  se realicen en el subshift  $X'$ , y entonces en general el término  $EA_{w_{l,i}}E^\top$  no poda todas las transiciones no realizadas.

Cuando  $G = \mathbb{Z}^d$  el término  $EA_lE^\top$  o  $E^\top A_lE$  toma en cuenta esta anticipación, y en el caso de un grupo general hay muchos más casos posibles, determinados por todos los caminos finitos en  $\mathcal{G}_{G,S}$  entre  $s$  y  $ls$ . La Figura A.1 ilustra esta situación.

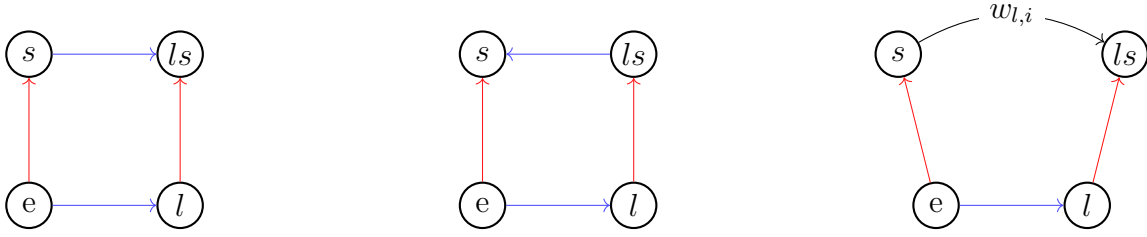


Figura A.1: Subgrafos de  $\mathcal{G}_{G,S}$  cuando  $ls = sl$  (izquierda), cuando  $ls = sl^{-1}$  (centro) y cuando  $sw_{l,i} = ls$  (derecha). Las aristas rojas y azules corresponden a los generadores  $s$  y  $l$  respectivamente. Si  $w_{l,i} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$  con los  $s_j \in S$ ,  $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$  entonces el camino que representa a  $w_{l,i}$  en  $\mathcal{G}_{G,S}$  contiene aristas  $\xrightarrow{s_j}$  orientadas positivamente cuando  $\varepsilon_j = 1$  y aristas  $\xleftarrow{s_j}$  orientadas negativamente cuando  $\varepsilon_j = -1$ .

**Observación A.17** Para fijar ideas, consideremos un  $G$ -NNSFT  $X = \mathbf{X}_{\{A_l\}_{l \in S}}$ ,  $s \in S$  con  $A_s$  esencial y  $X'$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s$  determinado por  $D, E$ .

En la práctica, podemos restringirnos a palabras  $w_{l,i} \in W(S)$  reducidas ya que éstas entregan restricciones al menos tan fuertes como las no reducidas en el siguiente sentido. Si  $w_1, w_2 \in W(S)$  son palabras cualquiera, fijemos  $l \in S$  y definamos  $w = w_1 l^{-1} l w_2 \in W(S)$ . Entonces para cada  $a', b' \in \mathcal{A}'$  tenemos que

$$\begin{aligned} (EA_w E^\top)_{a',b'} &= (EA_{w_1} A_l^\top A_l A_{w_2} E^\top)_{a',b'} = \sum_{a,b \in \mathcal{A}} (EA_{w_1})_{a',a} (A_l^\top A_l)_{a,b} (A_{w_2} E^\top)_{b,b'} \\ &\geq \sum_{a \in \mathcal{A}} (EA_{w_1})_{a',a} (A_l^\top A_l)_{a,a} (A_{w_2} E^\top)_{a,b'}. \end{aligned}$$

Como  $A_l$  no tiene columnas idénticamente nulas, existe una constante positiva  $C \in \mathbb{N}$  tal que  $(A_l^\top A_l)_{a,a} \geq C$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ , con lo que obtenemos

$$(EA_w E^\top)_{a',b'} \geq C \sum_{a \in \mathcal{A}} (EA_{w_1})_{a',a} (A_{w_2} E^\top)_{a,b'} = C (EA_{w_1 w_2} E^\top)_{a',b'},$$

es decir  $EA_w E^\top \geq C(EA_{w_1 w_2} E^\top)$  y entonces cualquier entrada nula en  $EA_w E^\top$  es nula también en  $EA_{w_1 w_2} E^\top$ . El mismo argumento y conclusión valen si definimos  $w = w_1 l l^{-1} w_2$  cambiando el rol de las columnas de  $A_l$  por sus filas.

Por razones similares también podemos restringirnos a que cada  $w_{l,i}$  no sea  $s^{-1}ls$  como palabra en  $W(S)$  (siempre tenemos  $w_{l,i} = s^{-1}ls$  en  $G$ ): supongamos que  $w_{l,i} = s^{-1}ls$  y tomemos  $a', b' \in \mathcal{A}'$ . Luego

$$\begin{aligned} (EA_{w_{l,i}} E^\top)_{a',b'} &= (EA_s^\top A_l A_s E^\top)_{a',b'} = (EE^\top D^\top A_l D E E^\top)_{a',b'} \\ &= \sum_{c', d' \in \mathcal{A}'} (EE^\top)_{a',c'} (D^\top A_l D)_{c',d'} (EE^\top)_{d',b'} \\ &\geq (EE^\top)_{a',a'} (D^\top A_l D)_{a',b'} (EE^\top)_{b',b'} \end{aligned}$$

y como  $E$  no tiene filas idénticamente nulas existe una constante positiva  $C \in \mathbb{N}$  con  $(EE^\top)_{c',c'} \geq C$  para todo  $c' \in \mathcal{A}'$ . Luego

$$(EA_{w_{l,i}} E^\top)_{a',b'} \geq C^2 (D^\top A_l D)_{a',b'}$$

y como antes vemos que cualquier entrada nula en  $EA_{w_{l,i}} E^\top$  también lo es en  $D^\top A_l D$ .

De todas maneras, estas consideraciones sobre  $w_{l,i}$  se pueden reconocer rápidamente a partir del dibujo a la derecha de la Figura A.1: si  $w_{l,i}$  es reducida entonces el camino que representa en  $\mathcal{G}_{G,S}$  no repite vértices, y si  $w_{l,i} \neq s^{-1}ls$  entonces el camino que representa en  $\mathcal{G}_{G,S}$  no es el camino en la parte baja del diagrama, que ya está considerado en el término  $D^\top A_l D$ .

**Ejemplo A.18** Consideremos el  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -subshift de Fibonacci  $X_{Fib} = \mathbf{X}_{\{A_{(1,0)}, A_{(0,1)}\}}$  donde  $A_{(1,0)} = A_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Sea  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \curvearrowright^\sigma Y \subseteq \mathcal{B}^\mathbb{Z}$  la acción que representa a  $X_{Fib}$  en  $\mathbb{Z}$  (ver el Capítulo 2). Como en el Ejemplo 2.13, tomaremos el alfabeto de  $Y$  como  $\mathcal{B} = \{0, 1_0, 1_1, 1_2\}$ . No es difícil ver que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

presenta el  $\mathbb{Z}$ -subshift de vértices  $Y$ .

Afirmamos que  $B$  se puede obtener como la matriz  $A''_{(1,0)}$  que resulta de hacer dos splittings completos de  $X_{Fib}$  en la dirección de  $(0, 1)$ , usando la relación de conmutación  $w_{(1,0)} = (1, 0)$ . En efecto, si ordenamos el alfabeto del primer out-splitting completo como  $\mathcal{A}' = \{0^0, 0^1, 1^0\}$  entonces las matrices que lo determinan son

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



de modo que el out-splitting actúa en las matrices de transición por

$$A_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D_1 E_1 \longrightarrow A'_{(1,0)} = (E_1 D_1) \ominus (D_1^\top E_1^\top)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A'_{(0,1)} = (D_1^\top A_{(0,1)} D_1) \ominus (E_1 A_{(0,1)} E_1^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ahora ordenamos el alfabeto del segundo in-splitting completo como

$$\mathcal{A}'' = \{(0^0)_{00}, (0^0)_{10}, (0^1)_{00}, (1^0)_{01}\} = \{0, 1_2, 1_1, 1_0\} = \mathcal{B}$$

entonces las matrices que lo determinan son

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego el out-splitting entrega las matrices deseadas

$$A'_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 C_2 \longrightarrow A''_{(1,0)} = (C_2 E_2) \ominus (E_2^\top C_2^\top)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A''_{(0,1)} = (C_2 A'_{(0,1)} C_2^\top) \ominus (E_2^\top A'_{(0,1)} E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que además son esenciales.

**Proposición A.19** Sea  $n \in \mathbb{N}^+$ . Sea  $\mathbf{X}_{\{A_l\}_{l \in S}} \subseteq \mathcal{A}^G$  un  $G$ -NNSFT y sea  $X' = \mathbf{X}_{\{A'_l\}_{l \in S}} \subseteq (\mathcal{A}')^G$  un out-splitting de  $X$  en la dirección de  $s \in S$  determinado por las matrices  $D, E$ . Supongamos que  $A_s = DE$ .

1. Supongamos que  $G = F_n = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$  es el grupo libre en  $n$  generadores y  $S = \{s_i\}_{i=1}^n$ . Por la Proposición A.13 podemos asumir que  $A'_s = ED$  y  $A'_l = D^\top A_l D$ ,  $l \neq s$ .

Entonces  $\{A_l\}_{l \in S}$  es esencial ssi  $\{A'_l\}_{l \in S}$  es esencial.

2. Supongamos que  $G = C_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*n} = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_1^2 = \dots = s_n^2 = e \rangle$  el producto libre de  $n$  copias de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , y que  $S = \{s_i\}_{i=1}^n$ . Por la Proposición A.15 podemos asumir que  $A'_s = (ED) \ominus (D^\top E^\top)$  y  $A'_l = D^\top A_l D$ ,  $l \neq s$ .

Si  $\{A_l\}_{l \in S}$  es esencial entonces  $\{A'_l\}_{l \in S}$  es esencial.

Si  $\{A'_l\}_{l \in S}$  es esencial y  $A_s = DE$  es simétrica, entonces  $\{A_l\}_{l \in S}$  es esencial.

DEMOSTRACIÓN. En cada caso escribiremos  $A_i, A'_i$  en lugar de  $A_{s_i}, A'_{s_i}$ . Sin pérdida de generalidad los splittings son en la dirección  $s_1$ . Sean  $\phi = \Phi^\infty: X \rightarrow X', \alpha = \Delta^\infty: X' \rightarrow X$  los códigos de out-splitting y out-amalgamación asociados a  $X'$ .

1. Supongamos que  $\{A_i\}_{i=1}^n$  es esencial. Sean  $a', b' \in \mathcal{A}'$  tales que  $(A_1)_{a', b'} = 1$ . Como  $(A'_1)_{a', b'} = (ED)_{a', b'} = E_{a', \Delta(b')}$  tenemos que

$$(A_1)_{\Delta(a'), \Delta(b')} = (DE)_{\Delta(a'), \Delta(b')} = \sum_{c' \in \mathcal{A}'} \mathbf{1}_{\Delta(a') = \Delta(c')} E_{c', \Delta(b')} \geq E_{a', \Delta(b')} = 1, \quad (\text{A.15})$$

y por lo tanto existe un  $x \in X$  con  $x_e = \Delta(a'), x_{s_1} = \Delta(b')$ .

Sea  $c \in \mathcal{A}$  tal que  $E_{b', c} = 1$ . Como

$$(A_1)_{\Delta(b'), c} = (DE)_{\Delta(b'), c} \geq E_{b', c} = 1,$$

existe un  $y \in X$  tal que  $y_{s_1} = \Delta(b'), y_{s_1^2} = c$ . Sea  $S_1 = \{w \in F_n \mid w \text{ es reducida y } w_0 = s_1\}$ . Notemos que la configuración  $z \in \mathcal{A}^{F_n}$  definida por  $z|_{S_1} = y|_{S_1}, z|_{F_n \setminus S_1} = x|_{F_n \setminus S_1}$  está en  $X$  pues éste es un NNSFT y  $(A_1)_{\Delta(a'), \Delta(b')} = 1$ . La Figura A.2 (izquierda) ilustra este argumento.

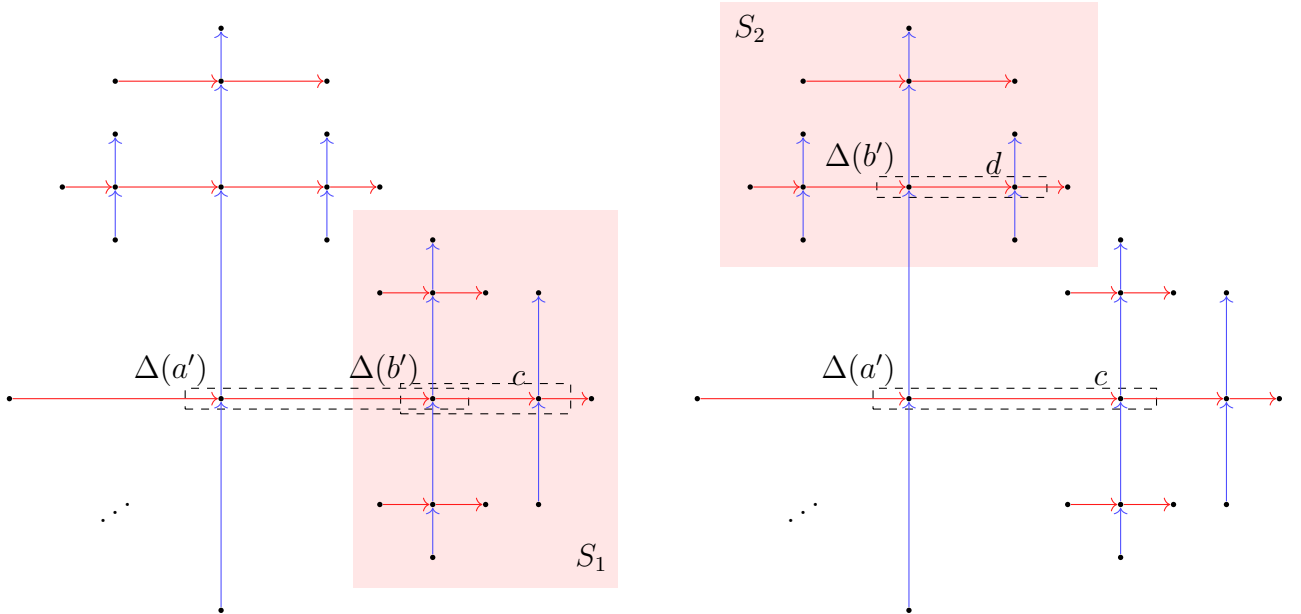


Figura A.2: Fragmentos del grafo de Cayley  $\mathcal{G}_{F_2, \{s_1, s_2\}}$ , centrados en torno a  $e$ . Las aristas rojas y azules corresponden a los generadores  $s_1$  y  $s_2$  respectivamente. Los rectángulos punteados indican los dominios de  $\Phi$ .

Sea  $z' = \phi(z)$ . Entonces

$$z_e = \Phi(z_e z_{s_1}) = \Phi(\Delta(a') \Delta(b')) = a' \quad \text{y} \quad z_{s_1} = \Phi(z_{s_1} z_{s_1^2}) = \Phi(\Delta(b') c) = b'.$$

Luego todas las transiciones permitidas por  $A_1$  se realizan.

Ahora sean  $a', b' \in \mathcal{A}'$  y  $2 \leq k \leq n$  tales que  $(A'_k)_{a', b'} = 1$ . Sean  $c, d \in \mathcal{A}$  tales que  $E_{a', c} = E_{b', d} = 1$ . Luego  $(A_1)_{\Delta(a'), c} = (A_1)_{\Delta(b'), d} = 1$ , y entonces existen  $x^c, x^d \in X$  con

$$x_e^c = \Delta(a'), x_{s_1}^c = c \quad \text{y} \quad x_{s_2}^d = \Delta(b'), x_{s_2 s_1}^d = d.$$

Sea  $S_2 = \{w \in F_n \mid w \text{ es reducida y } w_0 = s_2\}$ . La configuración  $z \in \mathcal{A}^{F_n}$  definida por

$$z|_{S_2} = x^c|_{S_2}, \quad z|_{F_n \setminus S_2} = x^d|_{F_n \setminus S_2}$$

está en  $X$  pues éste es un NNSFT y  $(A_k)_{\Delta(a'), \Delta(b')} = (A'_k)_{a', b'} = 1$ . La Figura A.2 (derecha) ilustra este argumento.

Sea  $z' = \phi(z)$ . Entonces

$$z_e = \Phi(z_e z_{s_1}) = \Phi(\Delta(a')c) = a' \quad \text{y} \quad z_{s_2} = \Phi(z_{s_2} z_{s_2 s_1}) = \Phi(\Delta(b')d) = b'.$$

Luego todas las transiciones permitidas por  $A'_k$  se realizan, y esto muestra que  $\{A'_i\}_{i=1}^n$  es esencial.

Supongamos recíprocamente que  $\{A'_i\}_{i=1}^n$  es esencial. Sean  $a, b \in \mathcal{A}$  con  $(A_1)_{a, b} = 1$ . Como

$$(A_1)_{a, b} = (DE)_{a, b} = \sum_{a' \in \mathcal{A}'} \mathbf{1}_{a = \Delta(a')} E_{a', b}, \quad (\text{A.16})$$

existe un único  $a' \in \mathcal{A}'$  tal que  $\Delta(a') = a$  y  $E_{a', b} = 1$ . Sea  $b' \in \mathcal{A}'$  tal que  $\Delta(b') = b$ . Luego

$$(ED)_{a', b'} = E_{a', \Delta(b')} = E_{a', b} = 1$$

y entonces existe un  $x' \in X'$  con  $x'_e = a', x'_{s_1} = b'$ . La configuración  $x = \alpha(x') \in X$  verifica que  $x_e = \Delta(a') = a$  y  $x_{s_1} = \Delta(b') = b$ . Luego todas las transiciones permitidas por  $A_1$  se realizan.

Ahora sean  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $2 \leq k \leq n$  tales que  $(A_k)_{a, b} = 1$ . Sean  $a', b' \in \mathcal{A}'$  tales que  $\Delta(a') = a$ ,  $\Delta(b') = b$ . Luego  $(A'_k)_{a', b'} = (A_k)_{a, b} = 1$  y por lo tanto existe un  $x' \in X'$  tal que  $x'_e = a', x'_{s_k} = b'$ . La configuración  $x = \alpha(x') \in X$  verifica que  $x_e = \Delta(a') = a$  y  $x_{s_k} = \Delta(b') = b$ . Luego todas las transiciones permitidas por  $A_k$  se realizan, y esto muestra que  $\{A_i\}_{i=1}^n$  es esencial.

2. Supongamos que  $\{A_i\}_{i=1}^n$  es esencial. Exactamente la misma demostración del ítem anterior implica que cualquier  $A_k$ ,  $2 \leq k \leq n$  es esencial. Para ver que  $A'_1$  es esencial solo se requiere una pequeña variación. Sean  $a', b' \in \mathcal{A}'$  con  $(A'_1)_{a', b'} = E_{a', \Delta(b')} \ominus E_{b', \Delta(a')} = 1$ . La desigualdad (A.15) muestra que existe un  $x \in X$  con  $x_e = \Delta(a')$ ,  $x_{s_1} = \Delta(b')$ . Sea  $x' = \phi(x) \in X'$ , y notemos que

$$x'_e = \Phi(x_e x_{s_1}) = \Phi(\Delta(a')\Delta(b')) = a' \quad \text{y} \quad x'_{s_1} = \Phi(x_{s_1} x_e) = \Phi(\Delta(b')\Delta(a')) = b'$$

puesto que  $E_{a', \Delta(b')} = E_{b', \Delta(a')} = 1$ . Luego  $A'_1$  es esencial.

Supongamos entonces que  $\{A'_i\}_{i=1}^n$  es esencial. Nuevamente la misma demostración del ítem anterior muestra que cualquier  $A_k$ ,  $2 \leq k \leq n$  es esencial. Veamos el caso de  $A_1$ . Para ello suponemos que  $A_1 = DE$  es simétrica.

Sean  $a, b \in \mathcal{A}$  tales que  $(A_1)_{a,b} = 1$ . Entonces  $(DE)_{a,b} = (DE)_{b,a} = 1$  y (A.16) muestra que existen  $a', b' \in \mathcal{A}'$  tales que  $\Delta(a') = a$ ,  $\Delta(b') = b$  y  $E_{a',b} = E_{b',a} = 1$ . Luego

$$(A'_1)_{a',b'} = (E_{a',\Delta(b')}) \ominus (E_{b',\Delta(a')}) = 1$$

y por lo tanto existe un  $x' \in X'$  tal que  $x'_e = a'$ ,  $x'_{s_1} = b'$ . Como antes, la configuración  $x = \alpha(x') \in X$  verifica  $x_e = \Delta(a') = a$  y  $x_{s_1} = \Delta(b') = b$ . Luego todas las transiciones permitidas por  $A_1$  se realizan, y concluimos que  $\{A'_i\}_{i=1}^n$  es esencial.  $\square$

La proposición anterior vale para in-splittings también. La propiedad relevante que cumplen los grupos  $F_n, C_n$  con generadores  $\{s_i\}_{i=1}^n$  consiste en que sus grafos de Cayley son árboles (si consideramos los ciclos de tamaño dos como una sola arista). Esto permite pegar en un NNSFT dos configuraciones con soportes conexos y disjuntos. Al engrosar un poco un grafo de Cayley se pierde esta propiedad, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo A.20** Sea  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con generador  $S = \{(1,0), (0,1)\}$  y consideremos el  $G$ -NNSFT  $X$  con alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 0_-, 0_+, 1, \leftarrow, \rightarrow\}$  definido por las matrices

$$A_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de  $X$  (fuera de sus puntos límite) son de dos tipos: el primero consiste en una fila de la forma  $0^\infty 0_+ 1^\infty$  en una coordenada de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  junto con otra fila de la forma  $\rightarrow^\infty$  en la otra coordenada de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El segundo consiste en una fila de la forma  $1^\infty 0_- 0^\infty$  en una coordenada y otra fila de la forma  $\leftarrow^\infty$  en la otra coordenada. Ambos se muestran en la Figura A.3, y prueban que  $\{A_{(1,0)}, A_{(0,1)}\}$  es esencial.

...	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	...	
...	0	0	0	0	0	0	0	0	$0_+$	1	1	1	1	1	1	1	1	...

...	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	$0_-$	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Figura A.3: Configuraciones en  $X$  del tipo  $0^\infty 0_+ 1^\infty$  (arriba) y del tipo  $1^\infty 0_- 0^\infty$  (abajo). Existen otras configuraciones límite en  $X$  que no mostramos aquí, que consisten en  $0^\infty$  o  $1^\infty$  en una coordenada de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $\leftarrow^\infty$  o  $\rightarrow^\infty$  en la otra.

La idea es que el espacio adicional que entrega la dirección de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  permite asociar a cada símbolo  $0_-$  (resp.  $0_+$ ) una ‘señal’  $\leftarrow$  (resp.  $\rightarrow$ ) que se propaga a lo largo del eje  $\mathbb{Z}$ . Esta impide que la secuencia de 1’s que sigue a  $0_-$  o  $0_+$  pase a un símbolo  $0_+$ ,  $0_-$  para volver a una secuencia de 0’s.

Si hacemos un *out-splitting* adecuado de los sucesores en la dirección  $(0, 1)$  del símbolo  $1$  y luego un *in-splitting* de sus predecesores en la dirección  $(0, 1)$  obtendremos un símbolo  $1^I$  que representa la transición  $0_{\rightarrow} \rightsquigarrow 1 \rightsquigarrow 0_{\leftarrow}$  que nunca sucede en  $X$ . Esto muestra que las matrices que resultan del *splitting* no son esenciales.

En efecto, si particionamos  $Suc_{(0,1)}(1)$  en  $\{0_{\leftarrow}\} \cup \{1\}$  y escribimos el nuevo alfabeto como  $\mathcal{A}' = \{0, 0_{\rightarrow}, 0_{\leftarrow}, 1^I, 1^{II}, \rightarrow, \leftarrow\}$  donde  $1^I$  está asociado al conjunto  $\{0_{\leftarrow}\}$  y  $1^{II}$  está asociado al conjunto  $\{1\}$ , las matrices determinan que este *out-splitting* son

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego el *out-splitting* actúa en las matrices de transición como

$$A_{(0,1)} = D_1 E_1 \longrightarrow A'_{(0,1)} = (E_1 D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{(1,0)} \longrightarrow A'_{(1,0)} = (D_1^{\top} A_{(1,0)} D_1) \ominus (E_1 A_{(1,0)} E_1^{\top}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos matrices esenciales.

Ahora particionemos  $Pred_{(0,1)}(1^I)$  en  $\{0_{\rightarrow}\} \cup \{1^{II}\}$ . Obtenemos un alfabeto

$$\mathcal{A}_2 = \{0, 0_{\rightarrow}, 0_{\leftarrow}, 1^I, 1^I_{II}, 1^{II}, \rightarrow, \leftarrow\}$$

donde  $1^I$  está asociado al conjunto  $\{0_{\rightarrow}\}$  y  $1^I_{II}$  está asociado al conjunto  $\{1^{II}\}$ . Las matrices que determinan el *in-splitting* son

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las matrices que resultan son

$$A'_{(0,1)} = E_2 C_2 \longrightarrow A''_{(0,1)} = (C_2 E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'_{(1,0)} \longrightarrow A''_{(1,0)} = (C_2 A'_{(1,0)} C_2^{\top}) \ominus (E_2^{\top} A'_{(1,0)} E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El símbolo  $1^I$  no puede aparecer en el shift  $\mathbf{X}_{A''_{(1,0)}, A''_{(0,1)}}$  pues no tiene sucesores en la dirección  $(1, 0)$ . Como la fila asociada a  $1^I$  en  $A''_{(1,0)}$  no es idénticamente nula, vemos que  $\{A''_{(1,0)}, A''_{(0,1)}\}$  no es esencial.

**Observación A.21** *Es directo adaptar el subshift del ejemplo anterior a  $\mathbb{Z}^2$  (o a  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ ) para obtener un  $\mathbb{Z}^2$ -NNSFT cuyas configuraciones son de la forma*

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
⋯																			⋯	
⋯	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	⋯
⋯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯
⋯																			⋯	
⋯	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	⋯
⋯	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
⋯																			⋯	
⋯	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	⋯
⋯	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯
⋯																			⋯	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

y tal que existen secuencias de splittings que terminan con matrices no esenciales a partir de matrices esenciales. Este subshift, a diferencia de su contraparte en  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , es positivamente transitivo y no numerable.

Por otro lado, notemos que la forma del grafo de Cayley de  $D_\infty = \langle t, s \mid s^2 = stst = e \rangle$  con respecto a  $\{s, t\}$  es idéntica al de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  al olvidar las direcciones de las aristas (ver la Figura 1.3). Adaptando la construcción anterior podemos construir un  $D_\infty$ -NNSFT  $X$  tal que existe un in-splitting en la dirección de  $t$  que, aún usando las relaciones de conmutación naturales de  $(\{s, t\}, t)$ , resulta en matrices no esenciales. Si  $G = G_1 *_T G_2$  es un grupo de tipo II con generador natural  $S = L \cup \{r, s\}$ , entonces el  $D_\infty$ -NNSFT  $X$  se puede ver como un  $G$ -NNSFT  $\bar{X}$  exigiendo que los patrones de  $\bar{X}$  con soporte en  $T$  sean constantes, y el mismo fenómeno ocurre con los out-splittings en la dirección de  $t$ .

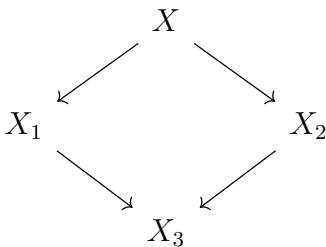
**Corolario A.22** *Sea  $n \in \mathbb{N}_+$ , sea  $G = F_n$  o  $G = C_n$  y sea  $S = \{s_i\}_{i=1}^n$ .*

*Existe un algoritmo que, dados dos conjuntos de matrices a entradas en  $\{0, 1\}$  esenciales  $\{A_i\}_{i=1}^n$  y  $\{B_i\}_{i=1}^n$ , se detiene si  $\mathbf{X}_{\{A_i\}_{i=1}^n}$  es conjugado a  $\mathbf{X}_{\{B_i\}_{i=1}^n}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Dados  $\{A_i\}_{i=1}^n$  y  $\{B_i\}_{i=1}^n$ , se pueden enumerar todas las secuencias de splittings y amalgamaciones de  $X = \mathbf{X}_{\{A_i\}_{i=1}^n}$  a partir de las matrices  $D, E$  (o  $C, E$ ) involucradas. La Proposición A.19 muestra que todos los conjuntos de matrices resultantes son esenciales. Si  $\mathbf{X}_{\{A_i\}_{i=1}^n}$  es conjugado a  $\mathbf{X}_{\{B_i\}_{i=1}^n}$ , el Teorema A.9 muestra que eventualmente se encuentran matrices que, salvo permutación de los índices, son iguales a  $\{B_i\}_{i=1}^n$ .  $\square$

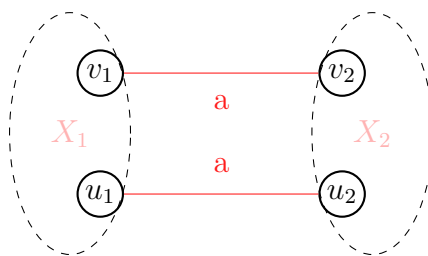
**Observación A.23** *En [AB12] se desarrolla un formalismo de splittings y amalgamaciones para el semigrupo  $F_n^+ \subset F_n$  generado por  $\{s_i\}_{i=1}^n$ . Junto con un teorema de descomposición de conjugaciones en in-splittings e in-amalgamaciones, se prueba que el problema de conjugación entre  $F_n^+$ -SFTs es decidible. La técnica para hacerlo es exactamente la misma que en  $\mathbb{Z}$ , y se*

basa en un lema técnico fundamental. Este lema afirma que, dadas dos in-amalgamaciones  $X_1, X_2$  de un  $F_n^+$ -NNSFT  $X$  que amalgaman solo dos símbolos cada uno, existe un  $F_n^+$ -NNSFT  $X_3$  que es una in-amalgamación de cada  $X_i$ , y tal que el diagrama



conmuta.

No es directo extender esta técnica a  $C_n$ , aún notando que, como en  $\mathbb{N}$  y  $F_n^+$ , bastan las in-amalgamaciones y los in-splittings para obtener el teorema de descomposición. La razón es la siguiente: un  $D_\infty$ -NNSFT con respecto a  $\{a, b\}$   $X$  se puede ver como el conjunto de caminos biinfinitos en un grafo con aristas coloreadas por  $a, b$  que alternan los colores de las aristas. Si las amalgamaciones en la dirección de  $a$   $X_1$  y  $X_2$  fusionan vértices  $u_1, v_1$  y  $u_2, v_2$  respectivamente tales que se tiene la situación



entonces no se pueden amalgamar simultáneamente  $u_1, v_1$  y  $u_2, v_2$  para obtener la amalgamación común  $X_3$ , ya que los vértices  $u_2, v_2$  en  $X_1$  no tienen sucesores disjuntos en la dirección de  $a$ . Lo mismo ocurre con  $u_1, v_1$  en  $X_2$ .

# Bibliografía

- [AB12] Nathalie Aubrun and Marie-Pierre Béal. Tree-shifts of finite type. *Theoretical Computer Science*, 459:16–25, 2012.
- [ABT19] Nathalie Aubrun, Sebastián Barbieri, and Stéphan Thomassé. Realization of aperiodic subshifts and uniform densities in groups. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 13(1):107–129, 2019.
- [AKM85] Roy L. Adler, Bruce Kitchens, and Brian H. Marcus. Finite group actions on shifts of finite type. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5:1–25, 1985.
- [Aso00] Hiroshi Aso. Conjugacy of  $\mathbb{Z}^2$ -subshifts and textile systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 36(1):1–18, 03 2000.
- [Bar17] Sebastián Barbieri. *Shift spaces on groups: computability and dynamics*. Ph.D. thesis, Université de Lyon, June 2017.
- [Bar21] Sebastián Barbieri. On the entropies of subshifts of finite type on countable amenable groups. *Groups, Geometry and Dynamics*, 15(2):607–638, 2021.
- [BH20] Frej Bartosz and Dawid Huczek. Extensions of full shifts with group actions. *Colloquium Mathematicum*, 160:65–70, 2020.
- [BPS10] Mike Boyle, Ronnie Pavlov, and Michael Schraudner. Multidimensional sofic shifts without separation and their factors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(9):4617–4653, 2010.
- [BRY16] Michael Baake, J.A.G. Roberts, and Reem Yassawi. Reversing and extended symmetries of shift spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 38, 11 2016.
- [BS19] Sebastián Barbieri and Mathieu Sablik. A generalization of the simulation theorem for semidirect products. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(12):3185–3206, 2019.
- [Bus16] Álvaro Bustos. Subdinámica proyectiva de subshifts de tipo finito sobre grupos virtualmente- $\mathbb{Z}$ . Master’s thesis, Universidad de Chile, March 2016.
- [CFKP18] Van Cyr, John Franks, Bryna Kra, and Samuel Petite. Distortion and the automorphism group of a shift. *Journal of Modern Dynamics*, 13(1):147–161, 2018.



- [Coh14] David Cohen. The large scale geometry of strongly aperiodic subshifts of finite type. *Advances in Mathematics*, 308, 12 2014.
- [CP15] David Carroll and Andrew Penland. Periodic points on shifts of finite type and commensurability invariants of groups. *New York Journal of Mathematics*, 21, 02 2015.
- [CSC10] Tullio Ceccherini-Silberstein and Michel Coornaert. *Cellular automata and groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [Des09] Angela Desai. A class of  $\mathbb{Z}^d$  shifts of finite type which factors onto lower entropy full shifts. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(8):2613–2621, 2009.
- [DHZ15] Tomasz Downarowicz, Dawid Huczek, and Guohua Zhang. Tilings of amenable groups. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019, 02 2015.
- [Die96] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer Textbook. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [DK18] Cornelia Druțu and Michael Kapovich. *Geometric group theory*, volume 63 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. With an appendix by Bogdan Nica.
- [Hal59] Marshall Hall, Jr. *The theory of groups*. The Macmillan Co., New York, N.Y., 1959.
- [HK21] Dawid Huczek and Sebastian Kopacz. Factoring strongly irreducible group shift actions onto full shifts of lower entropy, 2021.
- [HKS21] Yair Hartman, Bryna Kra, and Scott Schmieding. The Stabilized Automorphism Group of a Subshift. *International Mathematics Research Notices*, 08 2021.
- [HM10] Michael Hochman and Tom Meyerovitch. A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type. *Annals of Mathematics*, 171(3):2011–2038, May 2010.
- [JM99] Aimee Johnson and Kathleen Madden. The decomposition theorem for two-dimensional shifts of finite type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127, 1999.
- [JM05] Aimee Johnson and Kathleen Madden. Factoring higher-dimensional shifts of finite type onto the full-shift. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25:811–822, 2005.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.
- [Kit98] Bruce P. Kitchens. *Symbolic dynamics*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1998. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts.

- [KLP03] Young-One Kim, Jungseob Lee, and Kyewon Park. A zeta function for flip systems. *Pacific Journal of Mathematics*, 209, 04 2003.
- [KR13] Young-One Kim and Sieye Ryu. On the number of fixed points of a sofic shift-flip system. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 35:482 – 498, 2013.
- [Kri84] Wolfgang Krieger. On sofic systems I. *Israel Journal of Mathematics*, 48:305–330, 1984.
- [Lee] LeechLattice. Existence of latin squares with an involutory symmetry. MathOverflow. URL: <https://mathoverflow.net/q/412486>.
- [LGG13] Daciberg Lima Goncalves and John Guaschi. The classification of the virtually cyclic subgroups of the sphere braid groups. *SpringerBriefs in Mathematics*, 2013.
- [Lin84] Douglas Lind. The entropies of topological markov shifts and a related class of algebraic integers. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(2):283–300, 1984.
- [Lin96] Douglas Lind. A zeta function for  $\mathbb{Z}^d$ -actions. In M. Pollicott and K. Schmidt, editors, *Ergodic theory and  $\mathbb{Z}^d$ -actions*, volume 228 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 433–450. Cambridge University Press, 1996.
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [LPS06] Jungseob Lee, Kyewon Park, and Sujin Shin. Reversible topological markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26:267 – 280, 2006.
- [Mar79] Brian Marcus. Factors and extensions of full shifts. *Monatshefte für Mathematik*, 88(3):239–247, 1979.
- [MW18] Richard Miles and Thomas Ward. The dynamical zeta function for commuting automorphisms of zero-dimensional groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38(4):1564–1587, 2018.
- [Oll85] J.M. Ollagnier. *Ergodic Theory and Statistical Mechanics*. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1985.
- [Pia08] Steven T. Piantadosi. Symbolic dynamics on free groups. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 20(3):725–738, 2008.
- [Sch08] Michael Schraudner. A matrix formalism for conjugacies of higher-dimensional shifts of finite type. *Colloquium Mathematicum*, 110(2):493–515, 2008.
- [Tom] Tom Meyerovitch. Automorphisms of symbolic dynamical systems.
- [Wei01] Benjamin Weiss. Monotileable amenable groups. In V. Turaev and A. Vershik, editors, *Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry (AMS Translations, II-202)*, pages 257–262. American Mathematical Society, 2001.
- [Wil73] Robert F. Williams. Classification of subshifts of finite type. *Annals of Mathematics*, 98(1):120–153, 1973.