



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DESARROLLO DE UNA PLATAFORMA INTERACTIVA DE MALLADO Y  
REMALLADO DE MALLAS POLIGONALES PARA SU USO EN UN  
ESQUEMA DE INTEGRACIÓN NODAL BASADO EN EL MÉTODO DEL  
ELEMENTO VIRTUAL**

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCIÓN MECÁNICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

**SEBASTIÁN ANDRÉS LUZA VEGA**

PROFESOR GUÍA:  
Alejandro Ortiz Bernardin

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
Nancy Viola Hitschfeld Kahler  
Viviana Meruane Naranjo

Este trabajo fue financiado por:  
PROYECTO CONICYT-FONDECYT N° 1181192

SANTIAGO DE CHILE  
2022

RESUMEN TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
MENCIÓN MECÁNICA  
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MECÁNICO  
POR: **SEBASTIÁN ANDRÉS LUZA VEGA**  
FECHA: 2022  
PROF. GUÍA: ALEJANDRO ORTIZ BERNARDIN

## **DESARROLLO DE UNA PLATAFORMA INTERACTIVA DE MALLADO Y REMALLADO DE MALLAS POLIGONALES PARA SU USO EN UN ESQUEMA DE INTEGRACIÓN NODAL BASADO EN EL MÉTODO DEL ELEMENTO VIRTUAL**

Los métodos sin malla de Galerkin presentan un gran potencial a la hora de resolver problemas de grandes deformaciones, ya que sus funciones base dependen solo de la posición de los nodos y no de la conexión entre ellos. Desde entonces se han estudiado y desarrollado distintas estrategias para mejorar el desempeño de estos métodos. En este contexto es que aparece NIVED, un esquema de integración nodal para el método de Galerkin sin malla que utiliza la descomposición del elemento virtual, el cual mostró ser estable, consistente y capaz de alcanzar tasas de convergencia óptima. Para su evaluación NIVED requiere de una malla de celdas nodales sobre las cuales se pueda realizar la integración numérica, y al igual que el método de elementos finitos, estas celdas no se pueden superponer entre sí.

En esta tesis se desarrolla e implementa un sistema de remallado poligonal con el fin de reconstruir las celdas de integración nodal afectadas por la deformación del cuerpo. Para ello el remallador recibe como datos de entrada una nube de nodos, el listado de nodos que define el borde de la geometría y un conjunto de parámetros ajustables por cada usuario que determinan el tipo de malla resultante. De este modo, NIVED es capaz de lidiar con deformaciones extremas. Durante el remallado el rótulo de los nodos se mantienen fijos, evitando el traspaso de información.

Con el fin de evaluar el desempeño del remallador se resuelven problemas de elasticidad lineal en cuerpos con distintos tipos de geometrías y cargas. El remallador mejora la calidad de las celdas nodales, sin embargo esto no está siempre acompañado de una disminución en el error. El programa muestra ser capaz de adaptarse a los cambios de geometría y de mantener a los nodos dentro de sus representativas celdas.

Se presenta además un sistema de remallado para el Método del Elemento Virtual (VEM-Lab), en el cual no se utilizan celdas de integración, sino elementos poligonales. Este remallador no mejora la calidad de los elementos, pero es capaz de prevenir el problema de superposición, evitando el colapso de la simulación.

Comparativamente, el remallador de NIVED genera mallas con polígonos más regulares respecto al remallador de VEMLab, que tiende a producir elementos con formas arbitrarias. A pesar de ello, ambos métodos presentan bajos niveles de error, al rededor de 0.5 % y 1 % para NIVED y VEMLab, respectivamente.

*Home is now behind you,  
the world is ahead.*

***J.R.R. Tolkien***

# Agradecimientos

Agradecer en primer lugar a mi familia, especialmente a mis padres Marco y Viviana. Cualquier palabra y gesto que les pueda ofrecer queda corto ante toda la dedicación y amor que me han brindado, sin su apoyo y comprensión esto no sería posible. A mi hermana, que quizás sin darse cuenta, me iba marcando el camino.

Agradecer también a los profesores Alejandro Ortiz y Nancy Hitschfeld por darme la oportunidad de realizar este trabajo y darme el tiempo de responder las dudas que surgieron en el camino.

Finalmente, a mis compañeros y amigos. Patito y Huili, siempre presentes, más allá de la cotidianidad. Leo, Bruno, Basti y Erick, como siempre un agrado su compañía. Dani... si cabía la otra guitarra.

# Tabla de Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes generales . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	2
1.3.1. Objetivo general . . . . .	2
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	2
1.4. Alcances . . . . .	3
1.5. Metodología . . . . .	3
1.6. Contenido de la tesis . . . . .	4
<b>2. Antecedentes</b>	<b>5</b>
2.1. Ecuaciones de gobierno . . . . .	5
2.2. Métodos sin malla . . . . .	6
2.2.1. Función base . . . . .	8
2.2.2. Integración nodal y método de elemento virtual . . . . .	10
2.3. Mallas . . . . .	16
2.3.1. Métricas de mallado . . . . .	18
2.3.2. Remallado . . . . .	22
<b>3. Desarrollo e implementación</b>	<b>24</b>
3.1. Criterio de remallado . . . . .	25
3.2. Formación de malla poligonal . . . . .	27
3.3. Adaptación de pequeñas deformaciones . . . . .	30
3.4. Implementación . . . . .	31
3.5. Malla VEMLab . . . . .	33
<b>4. Ejemplos numéricos y discusión</b>	<b>36</b>
4.1. Test de la parcela . . . . .	36
4.2. Viga en tracción . . . . .	38
4.3. Cilindro presurizado . . . . .	43
4.4. Problema de estampado . . . . .	51
4.5. VEMLab: Viga en tracción . . . . .	57
4.6. VEMLab: Cilindro presurizado . . . . .	59
4.7. VEMLab: Problema estampado . . . . .	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

<b>Anexos</b>	<b>71</b>
Normas . . . . .	71

# Índice de Tablas

2.1.	Relación entre características geométricas y métricas de desempeño. . . . .	20
4.1.	Resultados norma $L^2$ . . . . .	37
4.2.	Resultados norma $H^1$ . . . . .	38
4.3.	Tiempo de cómputo, índice normalizado . . . . .	38
4.4.	Norma $L^2$ . . . . .	49
4.5.	Norma $H^1$ . . . . .	49
4.6.	Norma $L^2$ . . . . .	63
4.7.	Norma $H^1$ . . . . .	63

# Índice de Ilustraciones

2.1.	Distribución irregular de nodos. . . . .	7
2.2.	Celdas nodales . . . . .	11
2.3.	Soporte de un punto de integración. . . . .	12
2.4.	Tipos de mallas . . . . .	17
2.5.	Tipos de triangulación . . . . .	17
2.6.	Ejemplo de imagen múltiple. . . . .	18
2.7.	Características geométricas . . . . .	19
2.8.	Elemento de 11 lados que forman un polígono de 4 aristas. . . . .	21
2.9.	Efecto de la deformación sobre dominio de influencia. . . . .	22
3.1.	Puntos azules representan nodos, puntos rojos vértices. . . . .	24
3.2.	Creación de malla triangular a partir de malla de polígonos. Los puntos azules corresponden a los nodos. . . . .	25
3.3.	Criterio de remallado, primera parte. . . . .	25
3.4.	Flip . . . . .	26
3.5.	Criterio de remallado, segunda parte . . . . .	27
3.6.	Circuncentros de la triangulación. . . . .	28
3.7.	Corrección puntos de Voronoi. Los puntos azules se agregan como puntos de Voronoi . . . . .	28
3.8.	Detección de nodos esquina. Entre las normales rojas existe un ángulo que supera la tolerancia, el nodo entre ellos se agrega como punto de Voronoi. . . . .	29
3.9.	Tipos de mallas poligonales. . . . .	29
3.10.	Colapso de vértices cercanos: (a) detección de celdas con lados pequeños; (b) malla luego de eliminar los lados pequeños. . . . .	30
3.11.	Remallador . . . . .	33
3.12.	Algoritmo de remallado . . . . .	35
4.1.	Test de la parcela. $L = 1''$ y $\sigma_0 = 1$ psi . . . . .	36
4.2.	Mallas utilizadas test de la parcela. . . . .	37
4.3.	Viga en voladizo. . . . .	38
4.4.	Malla inicial, 249 nodos. . . . .	39
4.5.	Resultados a partir de distintas funciones base. . . . .	39
4.6.	Paso incremental 7. . . . .	39
4.7.	Paso incremental 9. . . . .	40
4.8.	Radio circunscrito de cada celda . . . . .	40
4.9.	Lado más pequeño de cada celda . . . . .	41
4.10.	Características geométricas . . . . .	42
4.11.	Calidad de malla a lo largo de la deformación . . . . .	42
4.12.	Cilindro presurizado. . . . .	43
4.13.	Malla inicial cilindro presurizado. . . . .	44



4.14.	Deformación a lo largo de los pasos incrementales, parte 1. . . . .	44
4.15.	Deformación a lo largo de los pasos incrementales, parte 2. . . . .	45
4.16.	Deformación final. . . . .	46
4.17.	Lados más cortos de cada celda . . . . .	46
4.18.	Características geométricas . . . . .	47
4.19.	Calidad de malla a lo largo de la deformación. . . . .	48
4.20.	Error relativo. . . . .	50
4.21.	Problema de estampado . . . . .	51
4.22.	Malla inicial. . . . .	51
4.23.	Deformación a lo largo de pasos incrementales. . . . .	52
4.24.	Deformación final . . . . .	53
4.25.	Relación área/perímetro. . . . .	54
4.26.	Características geométricas. . . . .	56
4.27.	Calidad de malla a lo largo de la deformación. . . . .	56
4.28.	Deformación a lo largo de pasos incrementales. . . . .	57
4.29.	Características geométricas. . . . .	58
4.30.	Calidad de malla a lo largo de la deformación. . . . .	59
4.31.	Deformación a lo largo de pasos incrementales, primera parte. . . . .	59
4.32.	Deformación a lo largo de pasos incrementales, segunda parte. . . . .	60
4.33.	Características geométricas. . . . .	61
4.34.	Calidad de malla a lo largo de la deformación. . . . .	61
4.35.	Error relativo. . . . .	62
4.36.	Error relativo. . . . .	63
4.37.	Problema de estampado . . . . .	64
4.38.	Malla deformada . . . . .	65
4.39.	Malla nueva . . . . .	65
4.40.	Características geométricas. . . . .	66

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes generales

La simulación de cuerpos sólidos bajo grandes deformaciones ha sido un desafío para la mecánica computacional, ya que los métodos numéricos tradicionales, particularmente el método de elemento finito (MEF), dependen fuertemente de la malla sobre la cual se resuelven dichas simulaciones. En MEF las funciones de forma son creadas a partir de los elementos construidos por la conexión entre nodos, de este modo cuando la malla es fuertemente deformada la calidad de la solución obtenida empeora [33].

Una estrategia para poder sobrellevar este problema es eliminar la malla deformada, crear una malla completamente nueva y mapear los resultados de la malla antigua a la nueva. Sin embargo, esta solución implica un mayor costo computacional y la inherente pérdida de precisión que trae consigo el traspaso de información.

Los métodos sin malla, a diferencia de MEF, no dependen de la conectividad entre nodos para el cálculo de las funciones de forma o base, por lo cual suelen ser más eficientes a la hora de resolver problemas de grandes deformaciones. Otra ventaja que presentan estos métodos es la flexibilidad que tienen a la hora de definir estas funciones, ya que dependiendo del procedimiento utilizado se puede llegar a diferentes funciones base [25].

A pesar de esto los métodos sin malla no están exentos de problemas, entre los cuales destacar errores en la integración numérica [17]. Estos errores se deben principalmente a dos factores: primero, las funciones bases no son polinomiales, por lo cual métodos de integración numérica, como la cuadratura de Gauss, no son capaces de resolver estas operaciones con exactitud, y segundo, el dominio de integración no suele coincidir con el área de influencia de las funciones base. A pesar de la independencia que existe entre las celdas de integración y el soporte local de cada nodo, es preciso, cuando la geometría ha sido deformada, obtener nuevas celdas de integración, sin que esto implique necesariamente un mapeo de la información.

El método del elemento virtual (MEV) [15] se presenta como una solución a estos problemas de integración numérica. Por medio de la construcción de una representación algebraica de la matriz de rigidez y su descomposición en una matriz que reproduce los campos de desplazamientos lineales y una matriz de corrección, es capaz de asegurar la consistencia y

estabilidad de la solución numérica.

MEV permite discretizar el dominio de interés en elementos poligonales, mientras que en MEF se utilizan típicamente elementos triangulares o cuadriláteros (caso 2D). En el método de elementos finitos está bien estudiado el efecto que tiene la calidad de los elementos que componen la malla sobre el resultado final de la simulación y se han definido métricas capaces de indicar qué tan bien construido están los elementos [33]. Es por esto que, en geometrías particularmente complejas, la cantidad de elementos aumenta, ya que se procura que cada uno de ellos sea lo más regular posible, lo que finalmente se traduce en un mayor tiempo de cómputo. Los elementos poligonales presentan una mayor flexibilidad en este punto y son capaces de adaptarse mejor a geometrías complejas con una menor cantidad de elementos. Sin embargo, esta flexibilidad dificulta la caracterización de una malla de buena calidad, siendo esto todavía un tema de estudio [38].

## 1.2. Motivación

Recientemente fue desarrollada una nueva metodología para el método sin malla que utiliza funciones base de Máxima Entropía, integración de Gauss y posee la consistencia y estabilidad aportadas por la descomposición de MEV, capaz de pasar exitosamente el test de la parcela, y en general, de entregar soluciones estables [29]. Posteriormente, se implementó un esquema de integración nodal para el método de Galerkin sin malla utilizando la descomposición del elemento virtual (NIVED) [37], donde, en contraste con la integración de Gauss, se utilizan los mismos nodos como puntos de integración resultando en un método más eficiente y versátil que los que usan integración de Gauss.

Esta propuesta de tesis sigue la línea de los trabajos mencionados anteriormente y se presenta como un complemento a NIVED, desarrollando un programa de remallado automático para su uso en integración nodal. La motivación última de esta tesis es dejar disponible este programa de mallado y remallado automático para, en futuros trabajos, poder resolver mediante integración nodal con el método NIVED problemas de grandes deformaciones, donde el remallado por excesiva distorsión de la malla es esencial.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Desarrollar una plataforma interactiva de mallado y remallado para resolver problemas de mecánica de sólidos lineal mediante un esquema de integración nodal basado en método del elemento virtual.

### 1.3.2. Objetivos específicos

Con el fin de cumplir el objetivo general recién descrito es preciso cumplir con los siguientes objetivos específicos:

- Implementar mallas bidimensionales de elementos triangulares.
- Calcular y obtener diagrama de Voronoi modificado a partir de un mallado triangular.
- Implementar un programa capaz de calcular características geométricas que indiquen la calidad de cada elemento poligonal.
- Desarrollar un algoritmo que actualice las mallas deformadas con tal de cumplir con las métricas de un correcto teselado.
- Resolver y analizar problemas de elasticidad lineal en un programa ya existente, escrito en MATLAB, que implementa el método de integración NIVED y utilice la actualización de la malla.

## 1.4. Alcances

El alcance de este trabajo de tesis es desarrollar e implementar un programa, complementario NIVED, capaz de remallar un dominio de interés bidimensional manteniendo la nube de nodos pre-existente. El remallador se activa de manera automática una vez superado umbrales de deformación configurados por el usuario.

Se espera que este trabajo sirva como punto de partida para el desarrollo de nuevos programas capaces de resolver problemas de grandes deformaciones por medio del esquema de integración nodal NIVED y el método del elemento virtual MEV.

## 1.5. Metodología

El trabajo fue dividido en las siguientes fases:

1. Revisar bibliografía de métodos sin malla, método de elemento virtual, malladores bidimensionales y sus métricas de calidad.
2. Desarrollar e implementar un mallador poligonal, escrito en MATLAB, con umbrales de remallado configurables por cada usuario.
3. Implementar funciones que calculen métricas poligonales.
4. Adaptar el programa ya existente NIVED para hacerlo compatible con el remallador poligonal.
5. Resolver problemas de elasticidad lineal en cuerpos 2D.
6. Comparar características geométricas de interés entre las mallas deformadas antes y después del remallado.
7. Discutir y concluir sobre los resultados obtenidos.

## 1.6. Contenido de la tesis

La disposición de esta tesis se describe a continuación: en el Capítulo 2 se revisan los antecedentes más relevantes para el desarrollo de este trabajo, tales como ecuaciones de gobierno, métodos sin malla, método del elemento virtual, integración nodal y tipos de malla. En el Capítulo 3 se describe el funcionamiento del sistema de remallado, tanto para el esquema que usa celdas nodales (NIVED) y el que usa elementos poligonales (VEMLab). Los resultados obtenidos en ejemplos numéricos y la discusión de los mismos se presentan en el Capítulo 4 y las conclusiones finales del trabajo se encuentran en el Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Ecuaciones de gobierno

Supongamos un dominio abierto  $\Omega$  dentro de un espacio bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , ocupado por un cuerpo y limitado por una superficie  $\Gamma$ . El contorno puede ser dividido en  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_t$  de tal manera que  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_t$  y  $\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_t$ , donde  $\Gamma_g$  representa el contorno con condiciones esenciales (Dirichlet) y  $\Gamma_t$  el contorno con condiciones naturales (Neumann). Definimos el cierre del contorno como  $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$ .

Sea  $\mathbf{u}(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  el campo de desplazamientos en el punto  $\mathbf{x}$  cuando el cuerpo está sometido a fuerzas de tracción externas  $\mathbf{t}(\mathbf{x}): \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^2$  y a fuerzas de cuerpo  $\mathbf{b}(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Las condiciones de contorno esenciales sobre el cuerpo son  $\mathbf{g}(\mathbf{x}): \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}^2$ . El problema de valor de frontera a resolver es el siguiente:

Encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  tal que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\Gamma &= \mathbf{t} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos de Cauchy y  $\mathbf{n}_\Gamma$  es la normal del cuerpo apuntando hacia el exterior.

Los métodos numéricos se pueden subdividir en dos categorías, dependiendo de como se resuelvan las ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) que gobiernan los fenómenos físicos: por medio de la forma fuerte y la forma débil. La forma fuerte resuelve las PDEs de manera directa, mientras que la forma débil primeramente busca una representación alternativas de estas ecuaciones, disminuyendo el orden de las mismas y, típicamente, resolviéndolas de forma integral [25].

Utilizando el método del residuo ponderado sobre la ecuación (2.1) se obtiene la siguiente formulación débil de Galerkin:

Encontrar  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$  tal que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_b(\mathbf{v}) + l_t(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{W} \quad (2.2)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

$$l_b(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad l_t(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Donde  $\mathbf{v}$  es una función de peso arbitraria,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  es el tensor deformación,  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  son espacios de desplazamiento y de prueba definidos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma_g\} \\ \mathcal{W} &:= \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) : \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2, \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \Gamma_g\} \end{aligned}$$

El tensor deformación se relaciona con el esfuerzo de Cauchy por medio de la siguiente ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (2.5)$$

Donde  $\mathbf{D}$  es un tensor constante de cuarto orden que depende del material elástico. Para el caso de un material lineal elástico e isotrópico, en estado de deformación plana está definido como:

$$\mathbf{D} = \frac{E_Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

En estado de esfuerzo plano:

$$\mathbf{D} = \frac{E_Y}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

## 2.2. Métodos sin malla

A mediados de los 90's Belytschko et al.[8] presentaron un método de formulación débil que utilizaba aproximaciones por medio de mínimos cuadrados móviles (MLS) y lo denominaron "Element-free Galerkin Method" (EFG). Al usar MLS para la obtención de las funciones bases se prescinde completamente de una malla estructurada y la única información requerida son las coordenadas de la nube de puntos que conforman el dominio de interés.

A pesar de los buenos resultados que obtuvo este método, tanto en precisión como en tasa de convergencia, presentaba ciertas deficiencias propias del método de aproximación de mínimos cuadrados móviles y de su naturaleza sin malla. En primer lugar las funciones ba-

se obtenidas por medio de MLS no son interpolantes (no poseen la propiedad del delta de Kronecker), por lo tanto las condiciones de contorno no se pueden imponer de forma directa como en MEF. Adicionalmente, no todas las distribuciones nodales son admisibles, ya que durante el cálculo de las funciones base es necesario invertir matrices de soportes locales y si la distribución de nodos o el tamaño de dicho soporte no son los adecuados se pueden generar matrices mal condicionadas o singulares. En la figura 2.1 se muestra una distribución de nodos irregular dentro de un dominio cuadrado, la matriz relacionada al nodos en rojo tiene determinante cero y por tanto no es invertible. El nodo en celeste representa el soporte del nodo con problemas. Finalmente, la integración numérica es poco precisa debido a que las funciones base obtenidas son racionales (no polinomiales) y, además, su dominio de influencia no suele coincidir con las celdas integración [17].

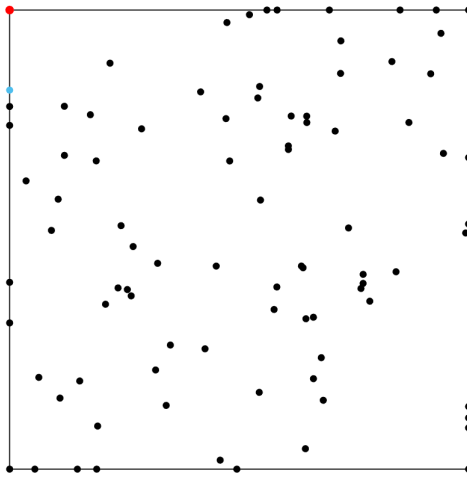


Figura 2.1: Distribución irregular de nodos.

Se han realizado múltiples esfuerzos con el fin de obtener funciones base interpolantes. Arroyo et al. [2] propusieron un esquema de aproximación alternativo, máxima entropía local (max-ent), para la obtención de funciones base con la propiedad del delta de Kronecker en los bordes de la geometría. Sin embargo, si el dominio de interés no es convexo esta propiedad se pierde, ya que deja de cumplir con las restricciones del problema de optimización a resolver. Luo [24] presentó funciones de forma, que a diferencia de MLS y max-ent, no utiliza métodos de optimización para su cálculo. Para ello utilizó el método de interpolación local de Lagrange. Con esto se obtuvo funciones base interpolantes y, al no necesitar resolver problemas de optimización locales, resulta ser un método más rápido, evitando además el problema de sistemas locales mal condicionados. A pesar de esto el método es sensible ante distribuciones nodales irregulares y pierde suavidad al aumentar el tamaño del dominio de interés.

Otras alternativas han sido la modificación del método de aproximación MLS original. Un ejemplo de esto se presenta en [22], donde modifican las funciones de peso para obtener un método interpolante (IMLS). Con el fin de sobrellevar el problema de matrices singulares que se pueden presentar en una distribución de nodos irregular se propuso en [21] modificar la aproximación MLS (MMLS) aumentando la cantidad de términos -restricciones- presentes al minimizar el error entre la función aproximación y el valor real.



En esta tesis se utilizará una aproximación recientemente presentada en [10] que mezcla las modificaciones IMLS y MMLS, obteniendo así funciones base que admiten un amplio espectro de distribuciones nodales y que son casi interpolantes (IMMLS), con lo cual se pueden imponer condiciones de contorno de forma directa, sin la necesidad de cálculos adicionales.

### 2.2.1. Función base

Sea  $\{\mathbf{x}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  una distribución de nodos dentro del dominio de interés  $\Omega$ . Sea también  $u(\mathbf{x})$  una función de una variable de campo (desplazamiento). La aproximación por mínimos cuadrados móviles  $u^h(\mathbf{x})$  está definida como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

Donde  $\mathbf{p}$  es un vector base que contiene los monomios de un polinomio de orden  $m$ , en este caso el vector usado es de segundo orden, con  $m$  igual a 6:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, y^2, xy] \quad (2.9)$$

El vector  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  contiene los coeficientes  $a_j(\mathbf{x})$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) que son funciones de  $\mathbf{x}$ . Para su obtención se minimiza la norma ponderada  $J(\mathbf{x})$ :

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i)^2 + \mu_{x^2} a_{x^2}^2 + \mu_{y^2} a_{y^2}^2 + \mu_{xy} a_{xy}^2 \quad (2.10)$$

$w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$  es la función de peso asociada al nodo  $x_i$ , las cuales serán mayores a cero en los nodos dentro del dominio de influencia de  $\mathbf{x}$ ,  $u_i$  es el valor (desconocido) de la variable de campo en el nodo  $\mathbf{x}_i$ . Notar que esta ecuación es una modificación de la norma utilizada en MLS tradicional, ya que se le agregan los coeficientes  $\mu$ 's, pesos positivos y pequeños ( $10^{-7}$ ) usados como restricciones adicionales para evitar singularidades en la matriz  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , definida más adelante.

La ecuación (2.10) se puede escribir de forma matricial como:

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u})^T \mathbf{W} (\mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{H} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_1(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_1(\mathbf{x}_n) \\ p_2(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_2(\mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{33} & \mathbf{O}_{33} \\ \mathbf{O}_{33} & \text{diag}(\mu) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

En un nodo arbitrario  $\mathbf{x}$ , los coeficientes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  se escogen de manera tal que el error (2.11) sea mínimo:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0 \quad (2.15)$$

Donde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}\mathbf{P}^T + \mathbf{H} = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W} = (w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)) \quad (2.17)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  está dado por:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2.18)$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la ecuación (2.8) se llega a:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \quad (2.19)$$

Siendo  $\Phi$  el vector de función base:

$$\Phi = \mathbf{P}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{W}\mathbf{P} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{W} \quad (2.20)$$

Con el fin que estas funciones base posean la propiedad del delta de Kronecker se utiliza la función de peso presentada en [26]:

$$w(r) = \frac{\left(\left(\frac{r}{r_s}\right)^2 + \epsilon\right)^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}}{\epsilon^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}} \quad (2.21)$$

Donde  $r_s$  representa el radio del dominio de influencia, o soporte, y  $\epsilon$  es un parámetro de regularización, mientras más pequeño más se acercan las funciones base a la propiedad del delta de Kronecker, sin embargo, de ser demasiado pequeño se podrían presentar problemas de estabilidad. El soporte de influencia de un punto cualquiera está definido por el subconjunto de nodos que, al ser evaluados en dicho punto, posean funciones de peso mayor a cero. Al igual que en [10] se fijará  $\epsilon = 10^{-5}$ . Para calcular el radio del soporte, se calcula en cada nodo la distancia al segundo nodo más cercano  $d_{2n}$ , la máxima de estas distancias presente en la malla se multiplica por un factor  $\gamma_r$ , quedando:

$$r_s = \gamma_r \max(d_{2n}) \quad (2.22)$$

## 2.2.2. Integración nodal y método de elemento virtual

Como ya fue mencionado, uno de los principales problemas que presentan los métodos sin malla está relacionado con el cálculo de las integrales presentes en la forma débil. Típicamente se han utilizado dos estrategias para la evaluación de dichas integrales: cuadraturas numéricas e integración nodal [9].

En MEF se utiliza cuadratura de Gauss para el cálculo de integrales ya que dicho método posee funciones de forma polinomiales y el dominio de integración está alineado con cada elemento, con lo cual es posible obtener resultados precisos. Sin embargo, como ninguna de estas características se cumplen en los métodos sin malla, es necesario aumentar la cantidad de puntos de integración, disminuyendo así la eficiencia del método. Con el fin de disminuir el error que presenta este tipo de integración, Dolbow y Belytschko [17] propusieron alinear las celdas de integración con el soporte de las funciones base, pero este proceso mostró ser computacionalmente costoso [28].

Por otro lado, Beissel y Belytschko [7] presentaron un esquema de integración nodal que integraba la forma débil exclusivamente en los nodos. A pesar de mostrar ser un método de integración inestable, presenta las ventajas de ser más eficiente que la cuadratura numérica y las variables de interés, tales como desplazamiento, esfuerzo y deformación, quedan definidas en los mismos nodos. Esta última característica es de particular interés a la hora de resolver problemas de grandes deformaciones.

A partir de entonces se han desarrollado varios esquemas de estabilización para la integración nodal. Beissel y Belytschko [7] propusieron un método de deformación nodal, pero tiene problemas para pasar el test de la parcela (problemas de consistencia). Chen et al. [13] propusieron el método de integración nodal conforme estabilizada, el cual es capaz de pasar el test de la parcela, pero puede generar problemas de estabilidad cerca de los bordes del dominio [31]. Dohrmann et al. [16] propusieron el método del promedio nodal, sin embargo satisface el test de la parcela únicamente cuando se usan funciones de forma de elementos triangulares.

Beirão da Veiga et al. [5] presentaron el método del Elemento Virtual (MEV), en el cual se puede calcular la matriz de rigidez sin la necesidad de las funciones base. En MEV la matriz de rigidez se descompone en partes: una parte es capaz de calcular de manera exacta los campos de desplazamientos lineales (matriz de consistencia) y otra parte que provee

estabilidad. De esta manera, considerando el teorema de equivalencia de Lax, se asegura la convergencia de la discretización, por medio de la consistencia y estabilidad de la misma.

Ortiz-Bernardin et al. [29] utilizaron la descomposición del método del elemento virtual en un método sin malla con funciones base max-ent (MEM-VED). MEM-VED fue capaz de pasar el test de la parcela con precisión de máquina, además de alcanzar una tasa de convergencia óptima con menos puntos de integración que una cuadratura numérica tradicional. Silva-Valenzuela et al. [37] presentan un método, que al igual que MEM-VED, usa funciones max-ent y la descomposición de MEV, pero con un esquema de integración nodal (NIVED). Este método también pasa el test de la parcela con precisión de máquina, alcanza tasas de convergencias óptimas, y al tratarse de integración nodal, resulta ser más rápido que MEM-VED y es capaz de guardar la información en los nodos.

En NIVED se utilizan celdas de representación nodal para la evaluación de las integrales presentes en la forma débil. Es por ello que el dominio  $\Omega$  se particiona en un conjunto de celdas poligonales, denotado por  $\mathcal{T}^h$ . Sea  $E$  un nodo cualquiera y su celda asociada,  $\mathbf{x}_E$  corresponde a las coordenadas de dicho nodo,  $|E|$  es el área de la celda nodal y  $\partial E$  a su contorno, compuesto por lados  $e$  de largo  $|e|$  y normal  $\mathbf{n}$  apuntando hacia fuera de la celda, como se puede ver en la figura 2.2(a). Los nodos sobre los bordes  $\Gamma_t$  se denotan como  $S$ , sus coordenadas por  $\mathbf{x}_S$  y el largo de influencia por  $|S|$ , como se ve en la figura 2.2(b). La partición unidimensional de estos nodos y sus respectivos largos de influencia está definida por  $\mathcal{E}^h$ .

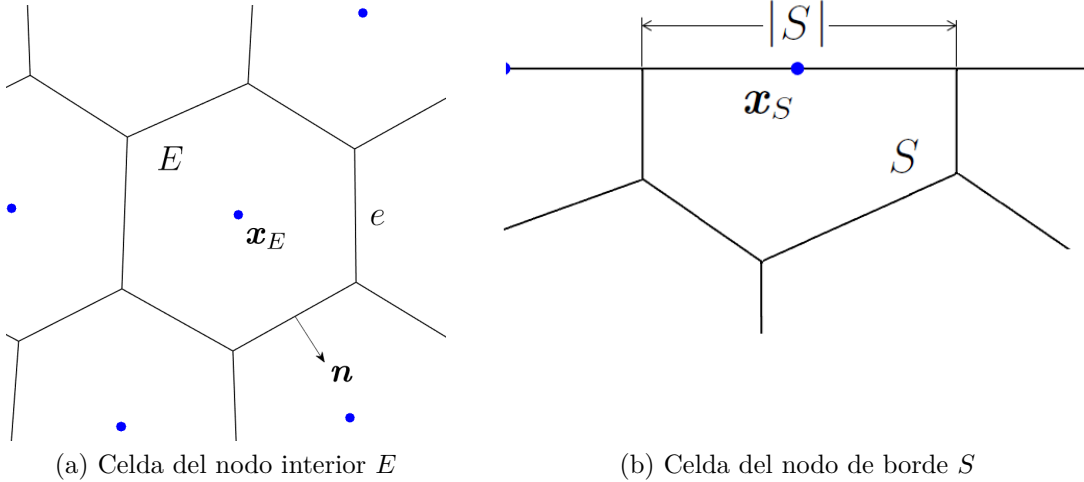


Figura 2.2: Celdas nodales

Siguiendo un procedimiento de Galerkin estándar, se definen los siguientes espacios de funciones locales discretos.

$$\mathcal{V}^h|_E := \{\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) : \mathbf{u}^h \in [H^1(\Omega)]^2\}, \quad \mathcal{W}^h|_E := \mathcal{V}^h|_E$$

Donde  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  se calcula a partir de (2.19) y  $\mathbf{x} \in E$ . Estos espacios locales se ensamblan para formar los siguientes espacios globales discretos:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^h &:= \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} : \mathbf{u}|_E \in \mathcal{V}^h|_E \quad \forall E \in \mathcal{T}^h\} \\ \mathcal{W}^h &:= \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{W} : \mathbf{v}|_E \in \mathcal{W}^h|_E \quad \forall E \in \mathcal{T}^h\}\end{aligned}$$

Obtenidos estos espacios discretos, se puede calcular la forma débil evaluándola en cada nodo del dominio y sumando todos ellos, como:

$$a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} |E| \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{u}^h) \quad \forall \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.23)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{T}^h} l_{b,E}(\mathbf{v}^h) + \sum_{S \in \mathcal{E}^h} l_{t,S}(\mathbf{v}^h) = \sum_{E \in \mathcal{T}^h} |E| \mathbf{b}_E \cdot \mathbf{v}^h + \sum_{S \in \mathcal{E}^h} |S| \mathbf{t}_S \cdot \mathbf{v}^h \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.24)$$

Donde  $\boldsymbol{\varepsilon}_E := \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_E)$ ,  $\mathbf{b}_E := \mathbf{b}(\mathbf{x}_E)$  y  $\mathbf{t}_S := \mathbf{t}(\mathbf{x}_S)$ . Las ecuaciones de arriba son resultado de la integración nodal presente en la forma débil.

La integración sobre las celdas nodales se lleva a cabo por medio de la regla de Gauss con un punto de integración, ubicados en el punto medio de cada uno de los lados de la celda poligonal. Para ello se deben considerar las contribuciones nodales (dominio de influencia) globales sobre los puntos de integración, tal y como se muestra en la figura 2.3. En la figura, el punto rojo representa un punto de integración de Gauss y los nodos azules son aquellos cuyo soporte, simbolizado por los círculos verde, son distintos de cero en el punto de integración.

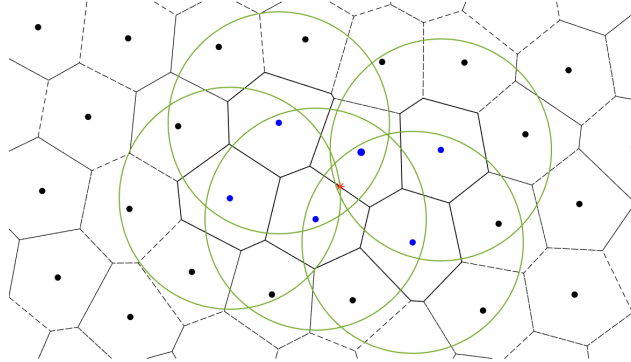


Figura 2.3: Soporte de un punto de integración.

En MEV se definen operadores de proyección para la extracción de los campos de desplazamientos lineales. Supongamos  $[\mathcal{P}(E)]^2$  representa el espacio de desplazamientos lineales sobre  $E$ . Siguiendo el procedimiento de [15], se define el operador de proyección sobre el espacio de desplazamientos lineales como:

$$\boldsymbol{\Pi} : \mathcal{V}^h|_E \rightarrow [\mathcal{P}(E)]^2, \quad \boldsymbol{\Pi} \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathcal{P}(E)]^2 \quad (2.25)$$

De esta manera es posible separar la aproximación en una parte polinomial y otra parte con términos no polinomiales:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h + (\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}^h = \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h + (\mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) \quad (2.27)$$

Con el fin de poder separar de manera efectiva la matriz de rigidez en una parte lineal computable y otra de orden superior, se impone al operador  $\mathbf{\Pi}$  satisfacer la siguiente condición de ortogonalidad:

$$a_E(\mathbf{p}, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) = 0, \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathcal{P}(E)]^2, \quad \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h|_E \quad (2.28)$$

Usando estas ecuaciones es posible descomponer la forma bilineal como:

$$\begin{aligned} a_E(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) &= a_E(\mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) + a_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) \\ &= a_E(\mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) + s_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h) \end{aligned} \quad (2.29)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación (2.29) depende de las componentes, por lo que se puede calcular de manera exacta y le brinda consistencia a la forma bilineal. El segundo término corresponde al campo con términos no polinomiales, no computable de manera exacta, por lo que es reemplazado por una matriz de aproximación que le otorga estabilidad al sistema,  $s_E$ .

Para obtener el operador de proyección  $\mathbf{\Pi}$  se utiliza la condición de ortogonalidad (2.28) y la definición de la forma bilineal (2.3), resultando:

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h = \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \boldsymbol{\omega}_E(\mathbf{v}^h) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_E) + \mathbf{v}_E \quad (2.30)$$

En esta ecuación, los términos  $\boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h)$  y  $\boldsymbol{\omega}_E(\mathbf{v}^h)$  se evalúan en los bordes de la celda  $E$  como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) d\mathbf{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\mathbf{v}^h \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^h) dS \quad (2.31)$$

$$\boldsymbol{\omega}_E(\mathbf{v}^h) = \frac{1}{|E|} \int_E \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}^h) d\mathbf{x} = \frac{1}{2|E|} \int_{\partial E} (\mathbf{v}^h \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^h) dS \quad (2.32)$$

Para ver el paso a paso en la obtención de las ecuaciones (2.30), (2.31) y (2.32) se recomienda revisar [37].

La ecuación (2.30) puede ser escrita de forma matricial como:

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{v}^h = \mathbf{h}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{r}_E(\mathbf{v}^h) \quad (2.33)$$

Donde

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) \\ 0 & (x_2 - x_{2E}) & \frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_2 - x_{2E}) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}(x_1 - x_{1E}) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) = [(\boldsymbol{\varepsilon}_E)_{11} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}_E)_{22} \quad 2(\boldsymbol{\varepsilon}_E)_{12}]^T, \quad \mathbf{r}_E(\mathbf{v}^h) = [v_{1E} \quad v_{2E} \quad 2(\boldsymbol{\omega}_E)_{12}]^T \quad (2.35)$$

Utilizando la función de base del método sin malla, considerando  $m$  nodos de influencia, se llega a la siguiente discretización:

$$\mathbf{h}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{H}_E, \quad \mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{G}_E \quad (2.36)$$

Donde:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_a \quad \cdots \quad \mathbf{N}_m], \quad \mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} \phi_a & 0 \\ 0 & \phi_a \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{H}_E = \begin{bmatrix} (\mathbf{H}_E)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{H}_E)_a \\ \vdots \\ (\mathbf{H}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{H}_E)_a = \begin{bmatrix} (x_{1a} - x_{1E}) & 0 & \frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) \\ 0 & (x_{2a} - x_{2E}) & \frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{G}_E = \begin{bmatrix} (\mathbf{G}_E)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{G}_E)_a \\ \vdots \\ (\mathbf{G}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{G}_E)_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_{2a} - x_{2E}) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}(x_{1a} - x_{1E}) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Si escribimos  $\mathbf{v}^h$  de la forma representada en la ecuación (2.19), se tiene que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_E^h = \mathbf{W}_E^T \mathbf{q}, \quad \mathbf{r}_E^h = \mathbf{R}_E^T \mathbf{q} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_a \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} v_{1a} \\ v_{2a} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{W}_E = \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_E)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{W}_E)_a \\ \vdots \\ (\mathbf{W}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{W}_E)_a = \begin{bmatrix} q_{1a} & 0 & q_{2a} \\ 0 & q_{2a} & q_{1a} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_E)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{R}_E)_a \\ \vdots \\ (\mathbf{R}_E)_m \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{R}_E)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^E & 0 & q_{2a} \\ 0 & \phi_a^E & -q_{1a} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Donde  $\phi_a^E := \phi_a(\mathbf{x}_E)$  es el valor de la función base del nodo de influencia número  $a$  sobre el nodo  $E$ . El valor de  $q_{ia}$  está dado por:

$$q_{ia} = \frac{1}{|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i ds, \quad i = 1, 2 \quad (2.44)$$

La integral es evaluada por medio de cuadratura de Gauss con un punto en el medio de cada lado de la celda nodal,  $n_i$  representa la coordenada  $i$  de la normal del lado evaluado.

Finalmente, se obtiene:

$$\mathbf{\Pi} \mathbf{v}^h = \mathbf{N}(\mathbf{H}_E \mathbf{W}_E^T + \mathbf{G}_E^T \mathbf{R}_E^T) \mathbf{q} \quad (2.45)$$

Donde el término entre paréntesis define la matriz de proyección:

$$\mathbf{P}_E = (\mathbf{H}_E \mathbf{W}_E^T + \mathbf{G}_E^T \mathbf{R}_E^T) \quad (2.46)$$

Con esta información es posible construir una representación local tensorial de la forma débil descrita en la ecuación (2.29). El término de consistencia de la forma bilineal está dado por:

$$a_E(\mathbf{\Pi} \mathbf{u}^h, \mathbf{\Pi} \mathbf{v}^h) = |E| \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{u}^h) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_E(\mathbf{v}^h) = \mathbf{q}^T |E| \mathbf{W}_E \mathbf{D} \mathbf{W}_E^T \mathbf{d} \quad (2.47)$$

Donde  $\mathbf{d}$  es un vector similar al descrito en la ecuación (2.41), pero contiene coeficientes nodales de la función de prueba  $\mathbf{u}^h$ . El término estabilizador está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_E(\mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi} \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi} \mathbf{v}^h) &= \mathbf{s}_E(\mathbf{N} - \mathbf{N} \mathbf{P}_E \mathbf{d}, \mathbf{N} - \mathbf{N} \mathbf{P}_E \mathbf{q}) \\ &= \mathbf{q}^T (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E)^T \mathbf{S}_E (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E) \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde  $\mathbf{I}_{2m}$  representa una matriz identidad de tamaño  $2m \times 2m$ . La matriz  $\mathbf{S}_E$  se elige como:



$$\mathbf{S}_E = \mathbf{I}_{2m} \odot (\mathbf{1}_{2m} \otimes \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.49)$$

Siendo  $\mathbf{1}_{2m}$  un vector columna unitario con  $2m$  filas,  $\boldsymbol{\gamma} = \text{diag}(|E|\mathbf{W}_E\mathbf{D}\mathbf{W}_E^T)$  y  $\odot$  es el símbolo del producto Haramart. Finalmente, la matriz de la forma bilineal elemental está dada por:

$$\begin{aligned} a_E^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) &= \mathbf{q}^T (|E|\mathbf{W}_E\mathbf{D}\mathbf{W}_E^T + (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E)^T \mathbf{S}_E (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E)) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_E^c + \mathbf{K}_E^s) \mathbf{d} = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_E \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\mathbf{K}_E$  representa la matriz de rigidez elemental,  $\mathbf{K}_E^c$  es la matriz de rigidez consistente y  $\mathbf{K}_E^s$  que otorga estabilidad.

El vector de fuerzas de cuerpo nodal  $\mathbf{f}_{b,E}$  está dado por:

$$l_{b,E}^h = \mathbf{q}^T |E| \mathbf{N}_E^T \mathbf{b}_E = \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{b,E} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{N}_E = [(\mathbf{N}_E)_1 \cdots (\mathbf{N}_E)_a \cdots (\mathbf{N}_E)_m], \quad (\mathbf{N}_E)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^E & 0 \\ 0 & \phi_a^E \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

El vector nodal de fuerzas de tracción  $\mathbf{f}_{t,S}$  se obtiene a partir de:

$$l_{t,S}^h = \mathbf{q}^T |S| \mathbf{N}_S^T \mathbf{t}_S = \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{t,S} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{N}_S = [(\mathbf{N}_S)_1 \cdots (\mathbf{N}_S)_a \cdots (\mathbf{N}_S)_m], \quad (\mathbf{N}_S)_a = \begin{bmatrix} \phi_a^S & 0 \\ 0 & \phi_a^S \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Con  $\phi_a^S := \phi_a(\mathbf{x}_S)$ .

## 2.3. Mallas

Los malladores tienen por objetivo dividir un dominio físico en trozos simples y pequeños, llamados elementos o celdas. Los tipos de malla se pueden clasificar según el tipo de elemento empleado, siendo los más usados, en el caso bidimensional, los elementos triangulares, figura 2.4(a), elementos cuadriláteros, figura 2.4(b) y elementos poligonales, figura 2.4(c).

Dentro de las mallas triangulares existe un tipo de triangulación especial, llamada triangulación de Delaunay, la cual maximiza el ángulo mínimo dentro de la malla y minimiza el máximo circuncírculo de los elementos dentro de la misma [14]. La triangulación de Delaunay ha sido la base en la creación de distintos generadores de mallas triangulares, como Distmesh [30], Detri2d [35] y Triangle [34]. Una triangulación es de Delaunay cuando el circuncírculo de cada elemento es vacío, es decir, no hay nodos dentro de él. En la figura 2.5 se comparan elementos triangulares que cumplen o no con la condición de Delaunay, los circuncírculos verdes son vacíos, mientras que los circuncírculos rojos presentan nodos en su interior.

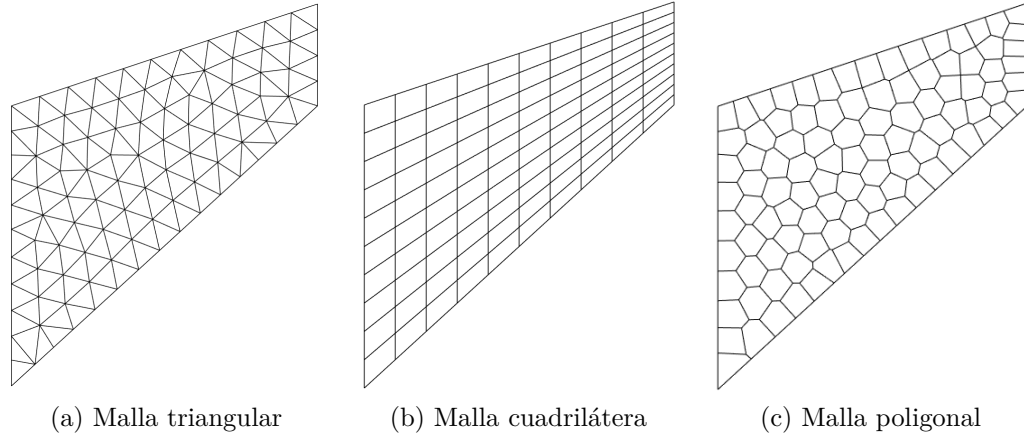


Figura 2.4: Tipos de mallas

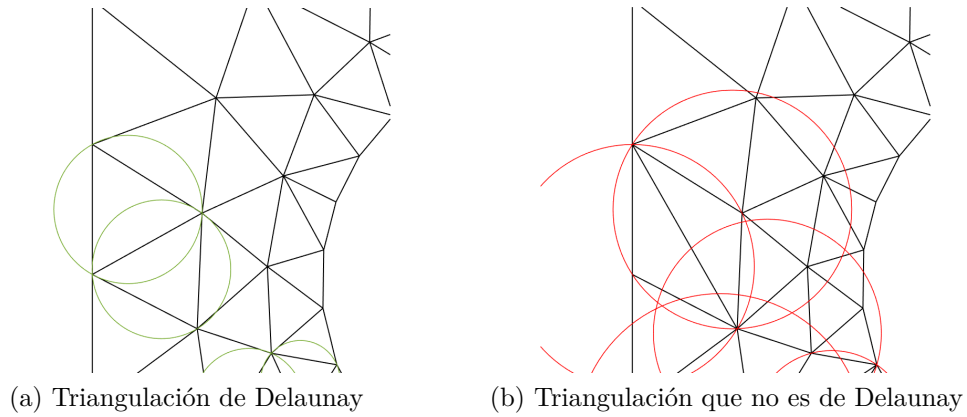


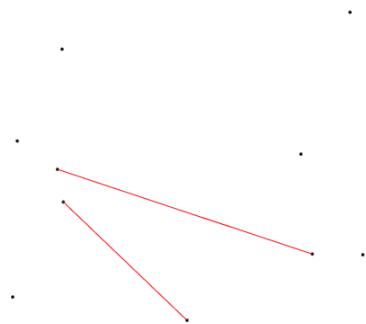
Figura 2.5: Tipos de triangulación

En ocasiones se requiere realizar una triangulación sobre una nube de puntos que presenta segmentos sobre ella, definidos por la unión de dos puntos, figura 2.6(a). La triangulación de Delaunay tradicional puede no respetar la presencia de estos segmentos, figura 2.6(b). Con el fin de tener en consideración estos segmentos se define la triangulación de Delaunay restringida, figura 2.6(c), en la cual los segmentos presentes en la nube de puntos inicial pasan a formar lados de la triangulación. Una ventaja de la triangulación de Delaunay restringida es que es capaz de respetar segmentos arbitrarios sin necesidad de agregar más puntos, y además, hereda la optimización de la triangulación de Delaunay: dentro de todas las triangulaciones que incluyen los segmentos, la triangulación de Delaunay restringida maximiza el ángulo mínimo y minimiza el máximo circuncírculo de los elementos [14].

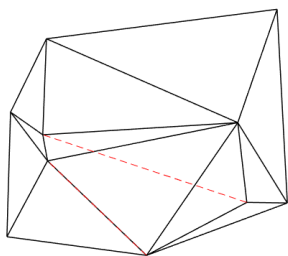
Respecto a las mallas poligonales, la técnica de teselado más utilizada en la generación de mallas es el teselado de Voronoi, particularmente el teselado de Voronoi centroidal, un ejemplo de esto es el mallador Polymesher [39]. Sea  $\{\mathbf{x}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  una distribución de nodos dentro del dominio de interés  $\Omega$ . Por cada nodo  $\mathbf{x}_i$ , se define un vecindario al rededor de él como:

$$V_i = \{y : \|y - x_i\| \leq \|y - x_j\|, j \neq i\} \quad (2.55)$$

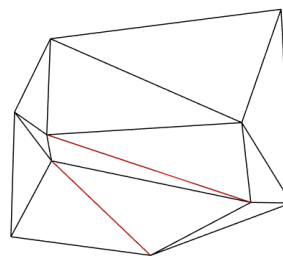
Donde  $y$  representa un punto cualquiera del dominio y  $V_i$  es conocida como una celda de Voronoi. La suma de todas las celdas  $V_i$  cubre completamente el dominio  $\Omega$ .



(a) Nube de puntos restringida



(b) Triangulación de Delaunay



(c) Triangulación de Delaunay restringida

Figura 2.6: Ejemplo de imagen múltiple.

### 2.3.1. Métricas de mallado

Uno de los procesos más importantes que se deben realizar a la hora de utilizar MEF es la correcta confección de una malla sobre el dominio de interés, ya que las funciones de forma utilizadas para el proceso de aproximación dependen del tipo de elemento usado [20], y qué tan bien condicionada está la matriz de rigidez depende de la calidad de los elementos [36].

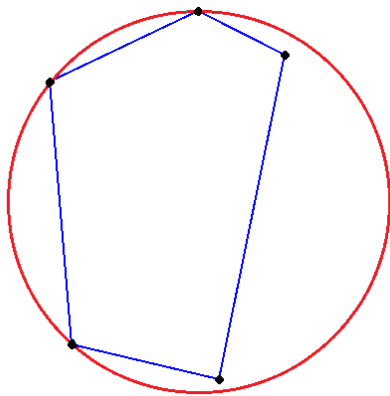
Se han desarrollado, estudiado y validado criterios geométricos capaces de determinar la calidad de los elementos que conforman las mallas en MEF [33], por ejemplo, en mallas triangulares se debe evitar que los ángulos interiores de cada elemento sean muy grandes o muy pequeños. Sin embargo, esto sigue siendo tema de estudio para mallas poligonales, ya que el tener una mayor flexibilidad en la forma que adoptan los elementos que conforman la malla, dificulta identificar que características geométricas tienen efecto sobre los resultados numéricos.

Recientemente se ha investigado la influencia que pueden tener algunas características geométricas sobre el desempeño de MEV [3, 38]. En ambos trabajos los autores resuelven el

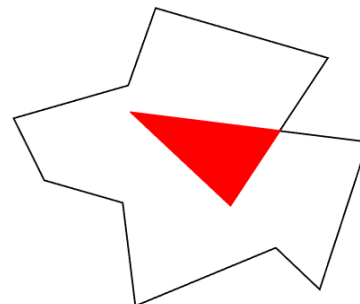
problema de Poisson sobre distintos tipos de mallas, procurando guardar información sobre la forma y tamaño de los elementos que la conforman para luego correlacionar esta información con métricas de desempeño.

Algunas de las características geométricas que presentaron tener mayor influencia sobre los resultados son las siguientes:

- Relación área/perímetro<sup>2</sup> (APR): Sea un polígono  $P$ , la relación área/perímetro<sup>2</sup> se define como  $\frac{2\pi \cdot \text{área}(P)}{\text{perímetro}(P)^2}$ .
- Radio circunscrito (CC): Representa el largo del radio del círculo más pequeño capaz de contener completamente al elemento poligonal, figura 2.7(a).
- Radio círculo inscrito (CI): Corresponde al radio del círculo más grande contenido dentro del polígono.
- Mínima distancia escalada entre puntos (SMPP): Relación entre la distancia más pequeña entre dos vértices cualquiera del polígono y el radio del círculo circunscrito.
- Área del elemento (AE): Es el área del elemento poligonal.
- Área kernel (AK): Corresponde al área del kernel del elemento. El kernel es un conjunto de puntos dentro del polígono, desde los cuales se pueden trazar líneas rectas a todos los vértices del polígono, sin intersectarse con los lados que lo conforman [40]. En la figura 2.7(b) el área roja representa el kernel del polígono.
- Número de lados (NL): Número de lados que forman el polígono.
- Lado más corto (ML): Corresponde al menor largo de los lados que conforman el polígono.
- Lado más corto escalado (SML): Relación entre el lado más corto y el radio circunscrito del polígono.
- Ángulo mínimo (MA): Es el ángulo interior más pequeño del polígono.



(a) Círculo circunscrito a un polígono



(b) Kernel de un polígono

Figura 2.7: Características geométricas

Por otro lado, las métricas de desempeño que se vieron afectadas se definen a continuación: Sea  $h_{av}$  el diámetro circunscrito promedio de la malla y  $k$  el grado del polinomio utilizado en MEV [3, 38].

- Error energía escalado:

$$\epsilon_S := \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_S}{h_{av}^k \cdot \|\mathbf{u}\|_S}$$

Donde  $\|\mathbf{v}\|_S = \mathbf{v}^T S \mathbf{v}$ , con  $S$  representando la matriz de rigidez global.

- Error  $L_2$  escalado:

$$\epsilon_2 := \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_2}{h_{av}^{k+1} \cdot \|\mathbf{u}\|_2}$$

Donde  $\|\mathbf{v}\|_2 = (\int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x})^{1/2}$

- Constante Aubin-Nitsche:

$$C_{AN} := \frac{\epsilon_2}{\epsilon_S}$$

En la tabla 2.1 se presentan los resultados de aquellas características geométricas que mostraron estar relacionadas con las métricas de desempeño.

Tabla 2.1: Relación entre características geométricas y métricas de desempeño.

$\epsilon_S$	$\epsilon_2$	$C_{AN}$
CI	APR	CC
ML	MA	AE
SMPP	NL	AK
NL	SMPP	ML
-	SML	SMPP

Adicionalmente, en [38] los autores revisan y ponen a prueba algunos supuestos geométricos impuestos en la literatura de MEV [5, 1, 4, 6, 12, 11] para garantizar la convergencia del método. Sus resultados mostraron que estos supuestos son más exigentes de lo necesario, ya que mallas que no cumplen estas condiciones geométricas presentan buenos resultados en términos de error obtenido y tasa de convergencia alcanzada. A pesar de ello se sugiere seguir trabajando con estos supuestos geométricos, ya que representan una guía simple para el estudio de mallas, sin restringir la forma que puedan tener los elementos.

Con esto en consideración fue desarrollado un término denominado “indicador de calidad de malla” [38],  $\varrho(\mathcal{T}^h) \rightarrow [0, 1]$ , que depende exclusivamente de la geometría de los elementos

y muestra una correlación con la tasa de convergencia de las mallas. Sin embargo, no se debe considerar un estimador infalible, ya que puede presentar problemas de precisión a la hora de estimar el desempeño de dos mallas con tasas de convergencia y niveles de error similar.[38].

$$\varrho(\mathcal{T}^h) = \sqrt{\frac{1}{\#\{E \in \mathcal{T}^h\}} \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \frac{\varrho_1(E)\varrho_2(E) + \varrho_1(E)\varrho_3(E) + \varrho_1(E)\varrho_4(E)}{3}} \quad (2.56)$$

Donde:

$$\varrho_1(E) = \frac{k(E)}{|E|} \quad (2.57)$$

$$\varrho_2(E) = \frac{\min\left(\sqrt{|E|}, \min_{e \in \partial E} |e|\right)}{\max(\sqrt{|E|}, h_E)} \quad (2.58)$$

$$\varrho_3(E) = \frac{3}{\#\{e \in \partial E\}} \quad (2.59)$$

$$\varrho_4(E) = \min_i \frac{\min_{e \in \mathcal{I}_E^i} |e|}{\max_{e \in \mathcal{I}_E^i} |e|} \quad (2.60)$$

En las definiciones de arriba,  $k(E)$  representa el área del kernel del elemento poligonal y  $h_E$  es el diámetro del círculo circunscrito del elemento.  $\mathcal{I}_E$  son las aristas que dan forma al polígono, y que pueden estar formadas por más de 3 nodos colineales. La fracción en la ecuación (2.60) representa la relación entre el lado más pequeño y el lado más largo que forman un arista. Por ejemplo, en la figura 2.8 se tiene un elemento con once lados y cuatro aristas, la fracción en (2.60) de la arista  $\mathcal{I}_E^2$  vendría siendo  $e_4^2/e_2^2$ .

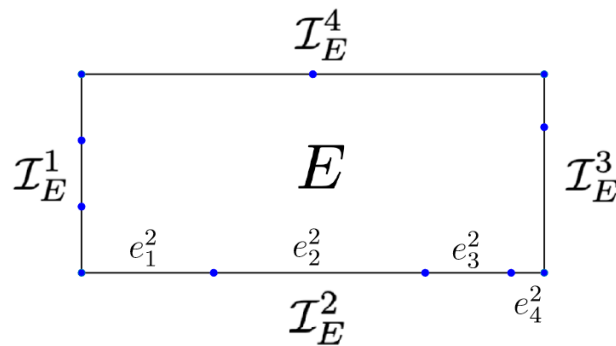


Figura 2.8: Elemento de 11 lados que forman un polígono de 4 aristas.

El valor ideal del indicador de calidad de malla, 1, es alcanzado cuando la malla está compuesta únicamente por triángulos equiláteros. Mientras más cercano a 1 sea el valor de  $\varrho(\mathcal{T}^h)$  se espera que el error en la aproximación en MEV sea menor.

### 2.3.2. Remallado

Al trabajar con grandes deformaciones las mallas utilizadas durante la simulación se ven altamente distorsionada. Si bien se ha mencionado que los métodos sin malla no requieren de una malla para la construcción de las funciones de aproximación, NIVED aun requiere de celdas nodales representativas para resolver la integración nodal. Si estas celdas están muy deformadas la calidad de la integración se ve comprometida, y en casos extremos, estas celdas pueden intersectarse, formando una región de solapamiento que será recalculada durante la integración, generando error. Otro problema que se presenta en los problemas de grandes deformaciones tiene relación con la posición relativa entre nodos. Dos nodos que en un comienzo están cerca el uno del otro, perteneciendo a un mismo soporte de influencia, pueden verse distanciados en los pasos de tiempo siguiente y dejar de pertenecer al mismo soporte, como se ilustra en la figura 2.9. Por lo tanto, los métodos sin malla requieren actualizar la información de nodos adyacentes [23].

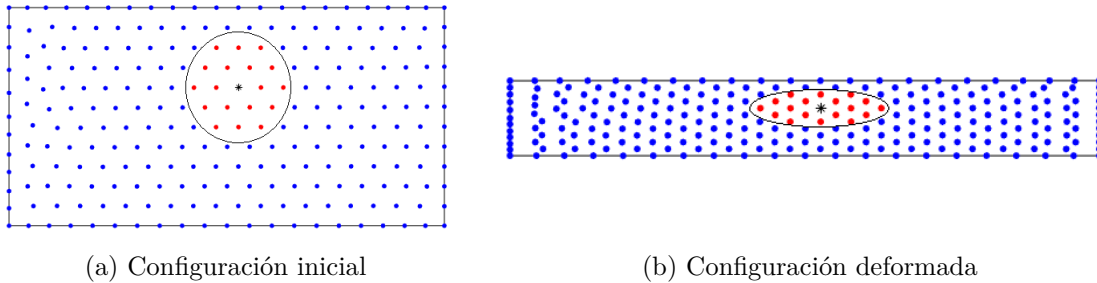


Figura 2.9: Efecto de la deformación sobre dominio de influencia.

Una forma de resolver estos problemas es por medio de un remallado tradicional, el cual consiste en eliminar la malla deformada y generar una malla con nodos y conectividad nueva. Luego de hacer esto es necesario mapear la información (esfuerzos, deformación, desplazamientos) de la malla antigua a la nueva, lo que conlleva un error de precisión.

Una alternativa de remallado es la usada en [23, 19, 27], en ella los rótulos de los nodos se mantienen fijos, la conectividad entre ellos es eliminada y se generan nuevos elementos entre los nodos pre-existentes. De este modo, al mantener los rótulos fijos, no es necesario generar nuevos puntos ni transferir información de una malla antigua a una malla nueva, resultando en un proceso más rápido y preciso.

Luo utiliza en [23] el método NN-FEM para resolver problemas de grandes deformaciones, el cual requiere de una malla triangular. En caso que dos elementos triangulares se superpongan, es decir ocurre intersección de lados, el remallador se activa. Cuando esto ocurre se actualiza la conectividad entre los nodos afectados, eliminando así el solapamiento entre elementos. Para ello utiliza la triangulación de Delaunay restringida, la cual permite generar un malla de triángulos respetando los bordes de la geometría.

Franci et al. [19] también utilizan un remallador basado en la triangulación de Delaunay, pero a diferencia del remallador presentado por Luo el proceso se activa cuando los elementos no cumplen la siguiente condición:

$$R < \alpha h \tag{2.61}$$

Donde  $R$  es el circunradio del elemento,  $\alpha$  es un parámetro positivo (típicamente  $\simeq 1.25$ ) y  $h$  es el tamaño del elemento promedio en la malla. Esto implica que el remallado depende de la cantidad de la deformación que presentan los elementos triangulares y no de si estos se superponen entre sí.



# Capítulo 3

## Desarrollo e implementación

Antes de explicar el desarrollo del remallador vale la pena señalar la diferencia entre los conceptos de nodo y vértice que serán utilizados de ahora en adelante. El nodo corresponde a los puntos sobre los cuales se resuelve el problema de valor de frontera (ecuación (2.1)), los cuales se mantendrán durante el proceso de remallado. Por otro lado los vértices son los puntos que dan forma a las celdas nodales, y al no poseer información de las variables de campo pueden ser movidos y eliminados sin problema. Los nodos internos están ubicados dentro de su respectiva celda nodal, figura 3.1(a), los nodos a lo largo del borde de la geometría están dentro de uno de los lados de la celda, figura 3.1(b), mientras que los nodos que dan forma a las esquinas de la geometría pasan a ser, a su vez, vértice de la celda nodal, figura 3.1(c).

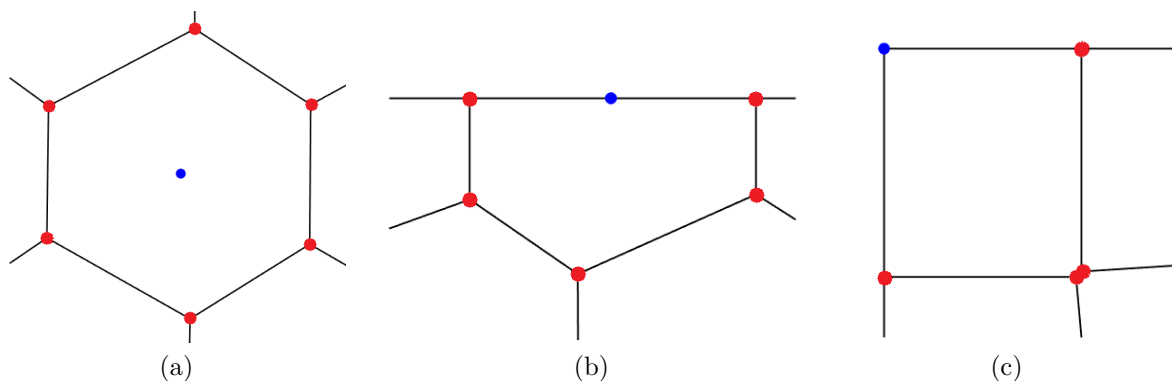


Figura 3.1: Puntos azules representan nodos, puntos rojos vértices.

El mallador, a pesar de estar formado por celdas poligonales, está basado en una malla triangular oculta, ya que a partir de ésta se formarán las celdas nodales e indicará cuando es necesario realizar el remallado, pero no es utilizada durante el cálculo de soluciones.

El proceso de remallado se evalúa y lleva a cabo, de ser necesario, al final de cada paso incremental, una vez conocido los desplazamientos nodales. A continuación se explicará en detalle el funcionamiento del programa, dividiéndolo en dos partes principales: criterio de remallado y formación de polígonos.

### 3.1. Criterio de remallado

El primer paso consiste en realizar una triangulación de Delaunay a partir de la distribución de nodos en la configuración de referencia, es decir, el cuerpo sin deformar. Para ello es necesario conocer los nodos de borde, ya que, de tratarse de una geometría no convexa, la triangulación a realizar será Delaunay restringida, figura 3.2. Denotamos con  $\mathbf{N}^i$  la nube de nodos y con  $\mathbf{C}^i$  la conectividad de la triangulación, el superíndice “ $i$ ” indica un paso incremental cualquiera (ver sección 3.3). De este modo la malla queda definida con el par  $\langle \mathbf{N}^i, \mathbf{C}^i \rangle$ .

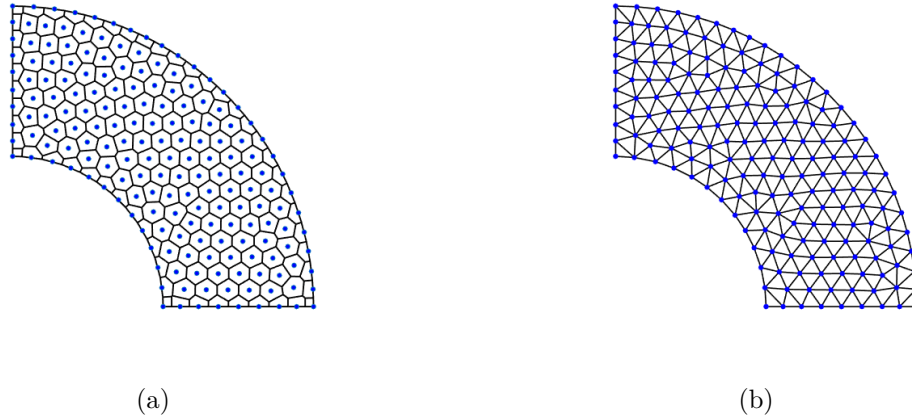


Figura 3.2: Creación de malla triangular a partir de malla de polígonos. Los puntos azules corresponden a los nodos.

Al final de cada paso se aplican los desplazamientos nodales a la nube de nodos, manteniendo la conectividad de la malla triangular previamente calculada. Agregamos a la notación anterior los subíndices “ $o$ ” para indicar configuración original (respecto al paso incremental) y “ $m$ ” para indicar configuración modificada, de esta manera la malla de triángulos pasa de  $\langle \mathbf{N}_o^i, \mathbf{C}_o^i \rangle$  a  $\langle \mathbf{N}_m^i, \mathbf{C}_o^i \rangle$ , es decir, se mantiene la conectividad, figura 3.2(b), pero se modifican las coordenadas nodales, figura 3.3.

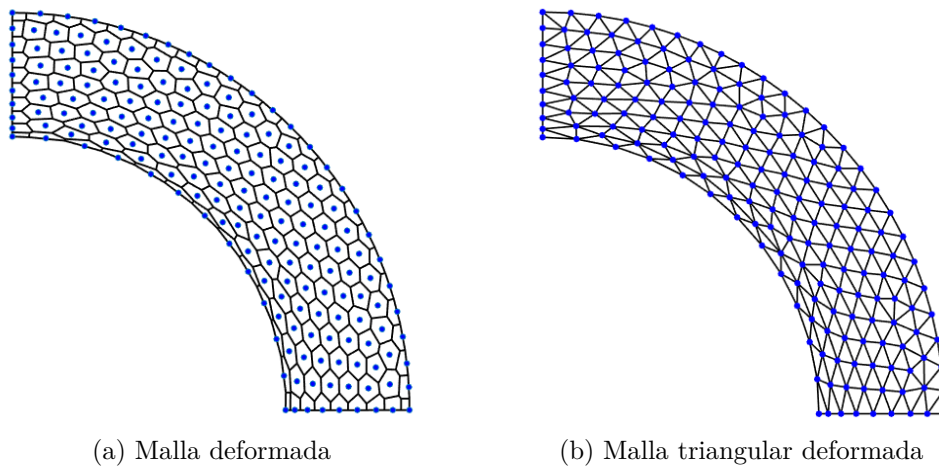


Figura 3.3: Criterio de remallado, primera parte.

El criterio aplicado para iniciar el remallado consiste en detectar un par de triángulos, unidos por un lado en común, que no cumplan con la condición de Delaunay por sobre cierta tolerancia. El mecanismo de corrección es el “*flipeo*”[18].

Para explicar el “*flipeo*” consideremos dos elementos triangulares unidos por un lado. Ambos triángulos forman un cuadrilátero y el lado que los une es una de las dos diagonales que posee dicho cuadrilátero. El “*flipeo*” consiste en reemplazar el lado común por la otra diagonal, figura 3.4. Una forma sencilla de identificar si estos elementos cumplen o no con la condición de Delaunay es sumando sus ángulos opuestos no conectados, si la suma es mayor a  $180^\circ$ , no cumplen dicha condición. Al “*flipear*” dos triángulos que no son de Delaunay, los triángulos resultantes si son de Delaunay.

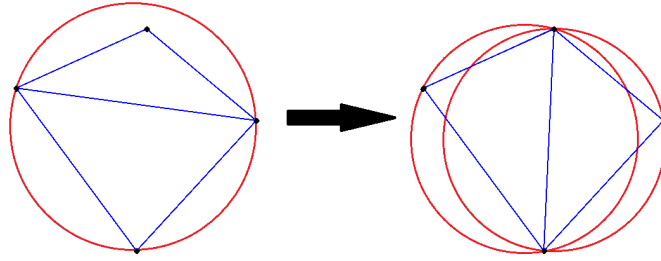


Figura 3.4: Flip

Debido al buen comportamiento que posee MEV ante la deformación de elementos, y con el fin de otorgarle más control al usuario sobre el proceso de remallado, se agrega un ángulo de tolerancia a la condición de Delaunay. Con esto, se define el siguiente criterio de remallado:

*Sean dos triángulos conectados por un lado común “e”, sean además  $\alpha_1^e$  y  $\alpha_2^e$  los ángulos opuestos a “e” de ambos triángulos. Se “*flipearán*” todos los triángulos que no son de Delaunay si existe algún lado que cumpla con la siguiente condición:*

$$\alpha_1^e + \alpha_2^e > 180 + \gamma_{tol} \quad (3.1)$$

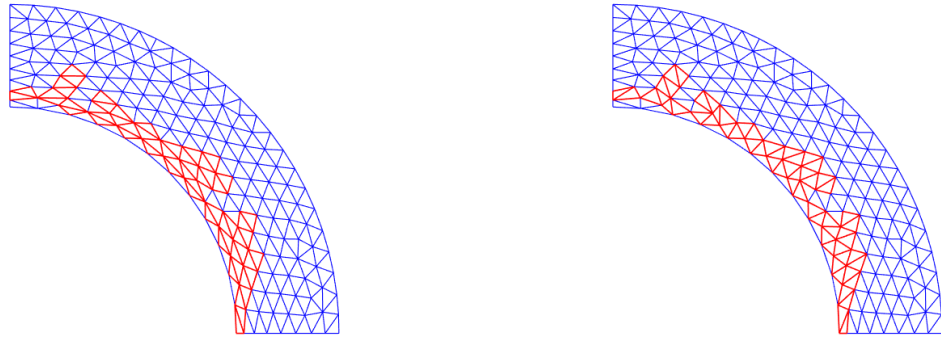
Donde  $\gamma_{tol}$  se denomina coeficiente de tolerancia a la deformación, definido por cada usuario, y puede tomar valores entre 0 - 179. A mayor sea el valor de la tolerancia, más deformación soportará la malla antes de iniciar el remallado.

Si al recorrer la malla  $\langle \mathbf{N}_m^i, \mathbf{C}_o^i \rangle$  fue necesario “*flipear*” algún lado, figura 3.5(a), se utilizará la nueva malla de triángulos  $\langle \mathbf{N}_m^i, \mathbf{C}_m^i \rangle$  para generar nuevas celdas nodales y como referencia para el siguiente paso incrementa, figura 3.5(b):

$$\langle \mathbf{N}_o^{i+1}, \mathbf{C}_o^{i+1} \rangle \leftarrow \langle \mathbf{N}_m^i, \mathbf{C}_m^i \rangle \quad (3.2)$$

En caso contrario, se mantiene la nube de nodos, la conectividad de triángulos y la malla poligonal original.

$$\langle \mathbf{N}_o^{i+1}, \mathbf{C}_o^{i+1} \rangle \leftarrow \langle \mathbf{N}_o^i, \mathbf{C}_o^i \rangle \quad (3.3)$$



(a) Triángulos a modificar

(b) Triangulación resultante

Figura 3.5: Criterio de remallado, segunda parte

## 3.2. Formación de malla poligonal

La construcción de las celdas nodales, al igual que en [19], se basa en un teselado de Voronoi a partir de la malla triangular. Se emplean celdas de Voronoi para la construcción de la malla debido a que asegura polígonos simples, convexos al interior de la geometría y porque por medio de ellas se obtiene directamente la separación de nodos y vértices, descrita al principio del capítulo. Además, es posible elaborar de manera directa dichas celdas una vez obtenida la triangulación de Delaunay.

Para construir la celda de Voronoi de un nodo cualquiera, el primer paso consiste en identificar los elementos triangulares unidos a dicho nodo. Luego se calculan los circuncentros de dichos triángulos (puntos de Voronoi) para finalmente unirlos en sentido anti-horario. En la figura 3.6 se muestran los circuncentros de la triangulación. Existe la posibilidad que algunos puntos de Voronoi se localicen fuera del cuerpo, en ese caso se reemplazan los circuncentros por las intersecciones que se generan entre la celda de Voronoi original y el borde del cuerpo, definido por los nodos de borde, figura 3.7(a). Por otro lado, si algún triángulo del borde tiene su circuncentro dentro de sí mismo, será necesario proyectar dicho punto al borde de la geometría, con tal de abarcar completamente el cuerpo, figura 3.7(b). Si el nodo en cuestión es un punto esquina del cuerpo, además de obtener los puntos de Voronoi anteriormente mencionados, es preciso agregar al nodo como punto de Voronoi.

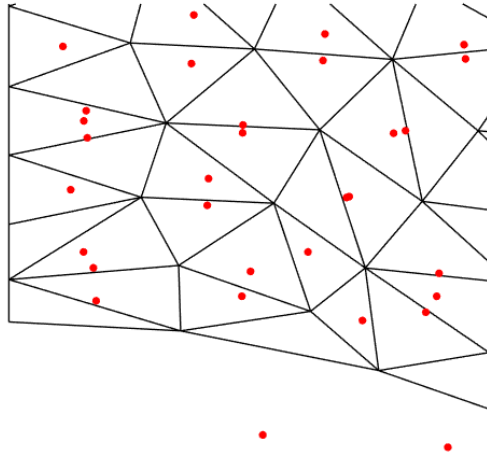


Figura 3.6: Circuncentros de la triangulación.

Tal y como fue mencionado, es necesario saber cuáles nodos corresponden a esquinas de la geometría para poder generar la malla poligonal. En casos de extrema deformación la forma del cuerpo puede cambiar de tal forma que aparezcan quiebres, traducidos en nuevas esquinas. Por ello es preciso que el mallador sea capaz de reconocer estos puntos de forma automática. Para lograr esto se calculan las normales de todos los lados formados por la unión entre nodos de borde. Una vez calculada todas las normales se calcula el ángulo entre dos normales consecutivas, si el ángulo resultante es mayor a un ángulo definido por el usuario ( $\beta_s$ ), el nodo común entre los lados considerados será un nodo esquina, figura 3.8.

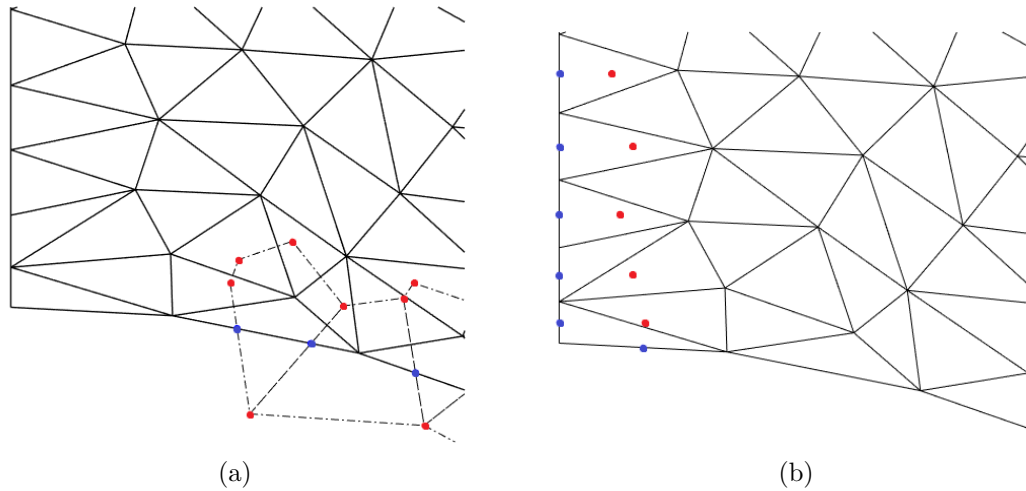


Figura 3.7: Corrección puntos de Voronoi. Los puntos azules se agregan como puntos de Voronoi

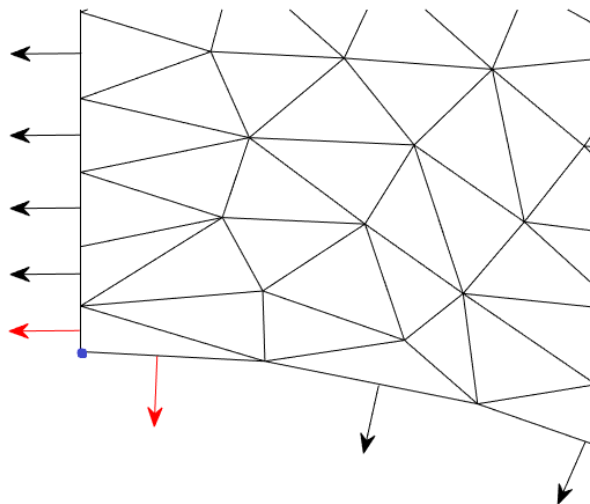
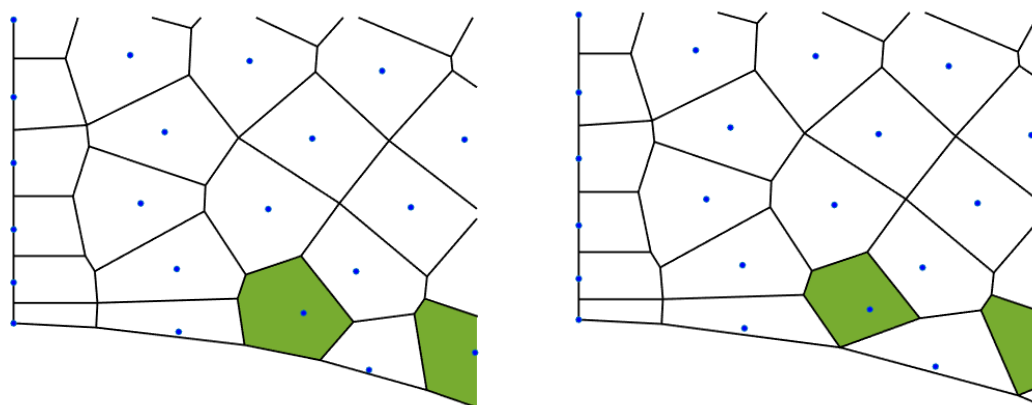


Figura 3.8: Detección de nodos esquina. Entre las normales rojas existe un ángulo que supera la tolerancia, el nodo entre ellos se agrega como punto de Voronoi.

Supongamos el caso de un cuerpo que, luego de ser deformado, se ve alargado en una dirección. Debido a esto los nodos que conforman algunas de las caras del cuerpo se distancian unos de otros, y de estar lo suficientemente separados sus celdas nodales dejarían de estar en contacto. Esto implica que partes de los bordes de la geometría están formadas por polígonos representativos de nodos internos y no por nodos del borde, como sucede en la figura 3.9(a). Esto por si solo no representa un problema, a menos que sobre los nodos de dicho borde se apliquen condiciones de contorno.

Para solventar este problema se diseña una malla poligonal alternativa, denominada malla Mixta. En ella los circuncentros de los triángulos de borde que queden fuera del cuerpo no serán reemplazados por puntos de intersección, como en las celdas de Voronoi, si no por el punto medio entre los nodos de borde de dicho triángulo, como se muestra en la figura 3.9(b). De este modo las celdas nodales que conforman las caras de los cuerpos siempre corresponderán a nodos de borde.



(a) Malla de Voronoi

(b) Malla Mixta

Figura 3.9: Tipos de mallas poligonales.

En los antecedentes fue mencionado que dos características geométricas que pueden afectar el desempeño del método son el número de lados en la celda nodal y el largo mínimo de dichos lados. Con el fin de mejorar la calidad de la malla, en cada celda se colapsarán sus lados que cumplan la siguiente condición:

$$|e| < \epsilon_e \frac{p}{\# \text{ lados}} \quad (3.4)$$

Donde  $p$  es el perímetro de la celda y  $\epsilon_e$  es un valor de tolerancia definido por el usuario. La fracción en la ecuación (3.4) representa el largo de lado en un polígono regular, de este modo se eliminan los lados que se alejan de dicho valor.

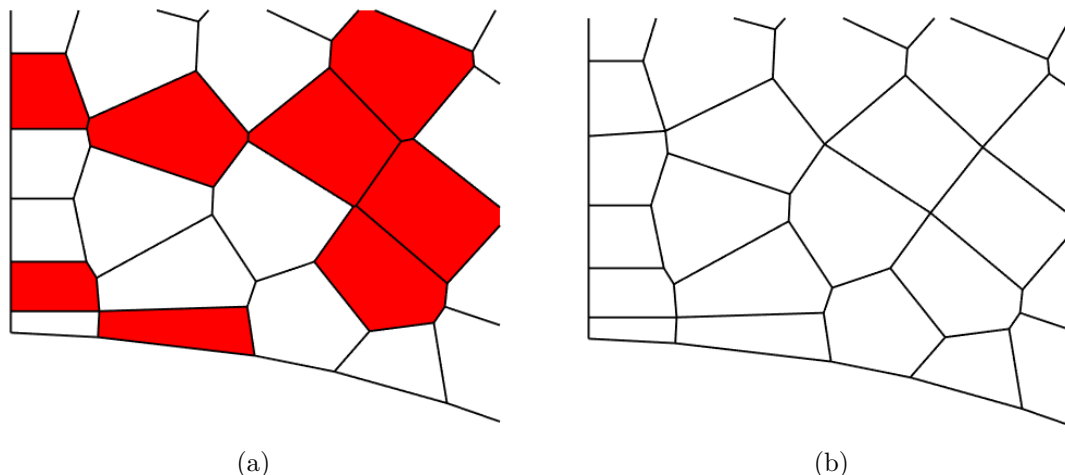


Figura 3.10: Colapso de vértices cercanos: (a) detección de celdas con lados pequeños; (b) malla luego de eliminar los lados pequeños.

### 3.3. Adaptación de pequeñas deformaciones

NIVED está desarrollado para resolver problemas de pequeñas deformaciones, en los cuales es posible calcular el equilibrio de un cuerpo sobre la configuración de referencia, y por tanto no es necesario remallar. Con el objetivo de poner a prueba el proceso de remallado se adapta el esquema de pequeñas deformaciones implementado en el programa. Es importante mencionar que con esta modificación no se espera obtener resultados completamente fieles al proceso físico, ya que para ello es necesario desarrollar un esquema de solución no lineal, si no más bien alcanzar grandes niveles de deformación sobre los cuerpos para poder comparar las mallas distorsionadas (sin aplicar remallado) con las nuevas generadas.

Se adopta una estrategia comúnmente utilizada en MEF no lineal, que consiste aplicar las cargas de manera incremental. Se divide el proceso en pasos y en cada uno de ellos se resuelve la ecuación de equilibrio. En el siguiente paso la carga aumenta respecto al paso anterior.

En cada paso, tras resolver la ecuación de equilibrio, se obtiene el tensor de esfuerzos de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ), con el cual se calcula el vector de esfuerzos internos  $\mathbf{f}_I$ , que será usado en el siguiente paso incremental:

$$\mathbf{f}_{I,E}^i = |E| \boldsymbol{\varepsilon}_E^T(\mathbf{v}^h) \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + \mathbf{s}_E(\mathbf{v}^h - \mathbf{\Pi} \mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h - \mathbf{\Pi} \mathbf{u}^h) \quad (3.5)$$

Donde  $i$  representa un paso cualquiera. Escrita de forma matricial, la ecuación queda:

$$\mathbf{f}_{I,E}^i = |E| \mathbf{W}_E \boldsymbol{\sigma}^{i-1} + (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E)^T \mathbf{S}_E (\mathbf{I}_{2m} - \mathbf{P}_E) \mathbf{u}^{i-1} \quad (3.6)$$

Entonces, la ecuación a resolver en cada paso incremental es:

$$\sum_{E \in \mathcal{T}^h} \mathbf{K}_E \Delta \mathbf{u} = \frac{i}{T} \sum_{S \in \mathcal{E}^h} \mathbf{f}_{t,S} + \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \mathbf{f}_{b,E} - \sum_{E \in \mathcal{T}^h} \mathbf{f}_{I,E} \quad (3.7)$$

Donde  $T$  es la cantidad total de pasos incrementales y  $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}$ .

Cuando se aplica el remallado es necesario volver a calcular el esfuerzo utilizado en la ecuación (3.5), pero esta vez sobre la configuración actual, es decir, la nueva malla. Junto con esto, en el paso incremental siguiente al remallado se reinician los desplazamientos, debido a que estos están aplicados sobre la nueva configuración.

### 3.4. Implementación

En Algoritmo 1 se presenta un esquema general con los cálculos realizados durante cada paso incremental. La entrada Model es un arreglo de estructura de MATLAB que agrupa toda la información requerida a lo largo del paso incremental, tales como coordenada de nodos, coordenada de vértices, conectividades, condiciones de contorno, tolerancia de mallado, información del material, entre otras.  $M$  representa la malla poligonal, es decir, la coordenada de sus vértices y la conectividad entre ellos.  $\Phi$  se calcula con la ecuación (2.20), y depende de la malla sobre la cuál se calcula,  $T$  representa la cantidad de pasos en los que se divide la carga.

---

#### Algoritmo 1 Paso incremental NIVED

---

**Input:** Model

Calcular funciones base  $\Phi(M)$

Generar malla triangular inicial  $\langle \mathbf{N}_o, \mathbf{C}_o \rangle$ ;

**for**  $i \in \{1, \dots, T\}$  **do**

$\mathbf{d}^i \leftarrow$  Resolver ecuación de equilibrio ▷ Ecuación (3.7)

$\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\varepsilon}^i \leftarrow PostProceso(\mathbf{d}^i)$  ▷ Cálculo esfuerzo y deformación

$critRemesh(\mathbf{N}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{d}^i, Model)$  ▷ Remallado

**if**  $critRemesh$  generó una malla nueva **then**

        Calcular nuevas funciones base  $\Phi(M)$

        Calcular el esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}^i$  sobre la nueva configuración

$zeros \leftarrow \mathbf{d}^i$  ▷ Reinician los desplazamientos

**end if**

    Calcular métricas de mallado

**end for**

---



La función  $critRemesh()$  determina cuando es necesario remallar, y de ser el caso, genera la nueva malla poligonal (Algoritmo 2). Si hubo remallado es necesario volver a calcular el esfuerzo de Cauchy  $\sigma$  sobre la nueva configuración geométrica, ya que esta será la utilizada en los pasos siguientes. También se deben reiniciar los desplazamientos, debido a que estos ya están considerados en la nueva posición de los nodos. Finalmente, el paso incremental  $i$  termina calculando las métricas de mallado:  $\rho$ ,  $APR$ ,  $CC$ ,  $SMPP$  y  $SML$ , descritas en la sección 2.3.1.

El argumento de entrada *Model* en  $critRemesh()$  otorga al programa los datos de la malla poligonal, además del coeficiente de tolerancia de deformación  $\gamma_{tol}$ , definido debajo de la ecuación (3.1). El programa recorre todos los lados internos de la triangulación  $e_T$  buscando elementos deformados más allá del rango establecido, si encuentra alguno, actualiza la posición de los nodos, modifica la conectividad de la triangulación y llama a la función  $Remesh()$  (Algoritmo 3) para generar una nueva malla poligonal. Si la triangulación sigue dentro del rango de deformación permitido, retorna la nube de nodos, triangulación y malla poligonal ingresadas como entradas.

---

**Algoritmo 2**  $critRemesh$

---

**Input:** Nube de nodos ( $\mathbf{N}_o$ ), triangulación ( $\mathbf{C}_o$ ), desplazamiento nodal ( $\mathbf{d}$ ), *Model*

**Output:** Nube de nodos, triangulación, malla poligonal ( $M_{new}$ )

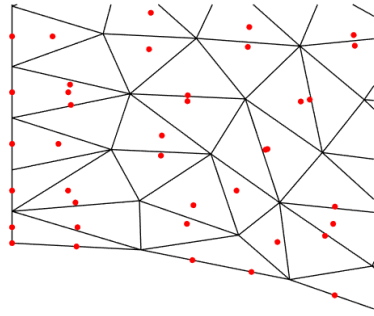
```

for  $e_T \in \mathbf{C}_o$  do
  if  $\alpha_1^e + \alpha_2^e > 180 + \gamma_{tol}$  then                                ▷ Ecuación (3.1)
     $\mathbf{C}_m \leftarrow \mathbf{C}_o$                                              ▷ Se flipea el lado  $e_T$ 
  end if
end for
if Algún lado fue flipeado then
   $\mathbf{N}_m \leftarrow \mathbf{N}_o + \mathbf{d}$                                          ▷ Actualizar posición de nodos
  Malla triangular  $\leftarrow \langle \mathbf{N}_m, \mathbf{C}_m \rangle$ 
   $M_{new} \leftarrow Remesh(\mathbf{N}_m, \mathbf{C}_m, Model)$                        ▷ Genera nueva malla poligonal
else
  Malla triangular  $\leftarrow \langle \mathbf{N}_o, \mathbf{C}_o \rangle$ 
   $M_{new} \leftarrow M$ 
end if

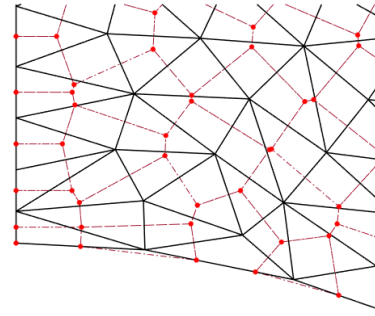
```

---

En  $Remesh()$  *Model* entrega el listado de nodos de borde, ángulo de superficie  $\beta_s$ , tolerancia de colapso  $\epsilon_e$  y tipo de malla a construir, celdas Voronoi o malla alternativa (figura 3.9). La nube de vértices ( $\mathbf{V}$ ), figura 3.11(a), se obtiene a partir de las indicaciones descritas en la sección 3.2. Una vez obtenido los vértices se identifican aquellos correspondientes a cada nodo, para luego ser conectados en sentido anti-horario y así formar la conectividad de vértices de cada celda nodal ( $\mathbf{P}_v$ ), figura 3.11(b). Luego de esto, se recorren las celdas nodales en busca de lados a colapsar, el cual consiste en reemplazar los vértices cercanos entre sí por el punto medio entre ellos, de este modo no se afecta la forma de la malla. Finalmente, se obtiene un listado de lados que forman la malla poligonal final ( $\mathbf{E}$ ) y la conectividad de lados en cada celda nodal ( $\mathbf{P}_e$ ).



(a) Vértices de malla poligonal



(b) Conectividad entre vértices

Figura 3.11: Remallador

---

### Algoritmo 3 Remesh

---

**Input:** Nube de nodos ( $\mathbf{N}$ ), triangulación ( $\mathbf{C}$ ), Model

**Output:** Malla poligonal ( $M_{new}$ )

Generación de la nube de vértices  $\mathbf{V}$

**for** cada nodo  $n \in \mathbf{N}$  **do**

$\mathbf{V}^n \leftarrow \mathbf{V} \in n$

▷ Vértices relacionados al nodo  $n$

$\mathbf{P}_v(n) \leftarrow sortClockWise(\mathbf{V}^n, n)$

▷ Construcción celda del nodo  $n$

**end for**

**while** Existe algún lado  $e$  a colapsar **do**

**for**  $n \in \mathbf{N}$  **do**

▷ Recorre cada celda

**if**  $|e| < \epsilon_e \frac{p}{\# \text{ lados}}$  **then**

▷ Ecuación (3.4)

            Colapsar  $e$

**end if**

**end for**

**end while**

$\mathbf{E} \leftarrow \langle \mathbf{V}, \mathbf{P}_v \rangle$

▷ Construcción lista de lados

$\mathbf{P}_e \leftarrow \langle \mathbf{V}, \mathbf{P}_v \rangle$

▷ Conectividad de lados

$M_{new} \leftarrow \langle \mathbf{V}, \mathbf{P}_v \rangle$

---

La función  $sortClockWise(\mathbf{A}, n)$  entrega un listado de índices de los puntos  $\mathbf{A}$  ordenados en sentido anti-horario, respecto a un punto de referencia  $n$ .

## 3.5. Malla VEMLab

Como se ha explicado, NIVED es un método sin malla que utiliza descomposición del elemento virtual para realizar integración nodal, pero no es un método completamente virtual, ya que requiere la evaluación de la función base  $\phi$  para la obtención de la matriz de rigidez y vectores de fuerza, ver ecuaciones (2.37) y (2.44).

VEMLab es un programa que utiliza el método del elemento virtual para la resolución de problemas y por ello presenta dos grandes diferencias con NIVED: en VEMLab, se asume que las funciones base son lineales por tramos y continuas sobre los lado del elemento, lo que implica que  $\phi_a(\mathbf{x}_b) = \delta_{ab}$ , con  $\delta_{ab}$  igual al delta de Kronecker, los término  $\phi_a$  son reemplazamos por  $\overline{\phi}_a$  y estos se calculan como,

$$\overline{\phi}_a = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_a(\mathbf{x}_j) = \frac{1}{N} \quad (3.8)$$

Con  $N$  la cantidad de vértices que forman la celda poligonal. Además, dado los supuestos recién mencionados, el término  $q_{ia}$  se puede calcular como:

$$q_{ia} = \frac{1}{|E|} \int_{\partial E} \phi_a n_i ds = \frac{1}{2|E|} (|e_{a-1}| \{n_i\}_{a-1} + |e_a| \{n_i\}_a), \quad i = 1, 2 \quad (3.9)$$

Donde el subíndice “ $a - 1$ ” hace referencia al lado poligonal anterior al vértice  $a$ . De este modo no es necesario evaluar las funciones bases, por esto se considera que las funciones son “virtuales”.

La segunda diferencia está relacionada al tipo de mallas utilizadas. En MEV los nodos forman parte estructural de las celdas, es decir, ya no existe la distinción entre nodos y vértices que se utiliza en NIVED. Esto significa que el problema del valor de frontera se resuelve sobre los vértices de los polígonos y por tanto estos ya no pueden ser modificados ni reemplazados. Por esta razón es necesario adoptar una nueva estrategia para la generación de mallas, ya que el remallador descrito en la sección anterior forma celdas poligonales a partir de la creación de nuevos vértices, figura 3.11.

El mallador debe ser capaz de formar nuevos elementos a través de la unión de puntos presentes en la nube de nodos, tal como se hace en [23], con la salvedad que en esta ocasión se busca formar polígonos y no triángulos. Con este fin se utiliza el algoritmo POLYLLA [32], el cual está basado en la triangulación de Delaunay y forma polígonos simples a través de la unión selectiva de triángulos.

En la figura 3.12 se esquematiza el paso a paso del algoritmo. A partir de una nube de puntos, figura (a), se realiza una triangulación de Delaunay y se selecciona un par de triángulos que compartan su lado más largo, marcados en rojo en la figura (b). Los triángulos que compartan su lado más largo con alguno de los triángulos del conjunto se agregan al conjunto inicial, en la figura (c) los triángulos azules se agregan al par inicial, generando el nuevo conjunto marcado con rojo en la figura (d). El proceso se repite hasta que no se puedan agregar más triángulos al conjunto, figura (e) y se procede a buscar un nuevo par de triángulos. Finalmente la malla poligonal resultante se observa en la figura (f).

Debido a la forma en que los elementos poligonales son construidos es necesario modificar el criterio bajo el cual se inicial el remallado. En esta ocasión el remallador se activará si alguno de los polígonos presenta una relación APR menor a cierto valor definido por el usuario o si se detecta solapamiento entre elementos.

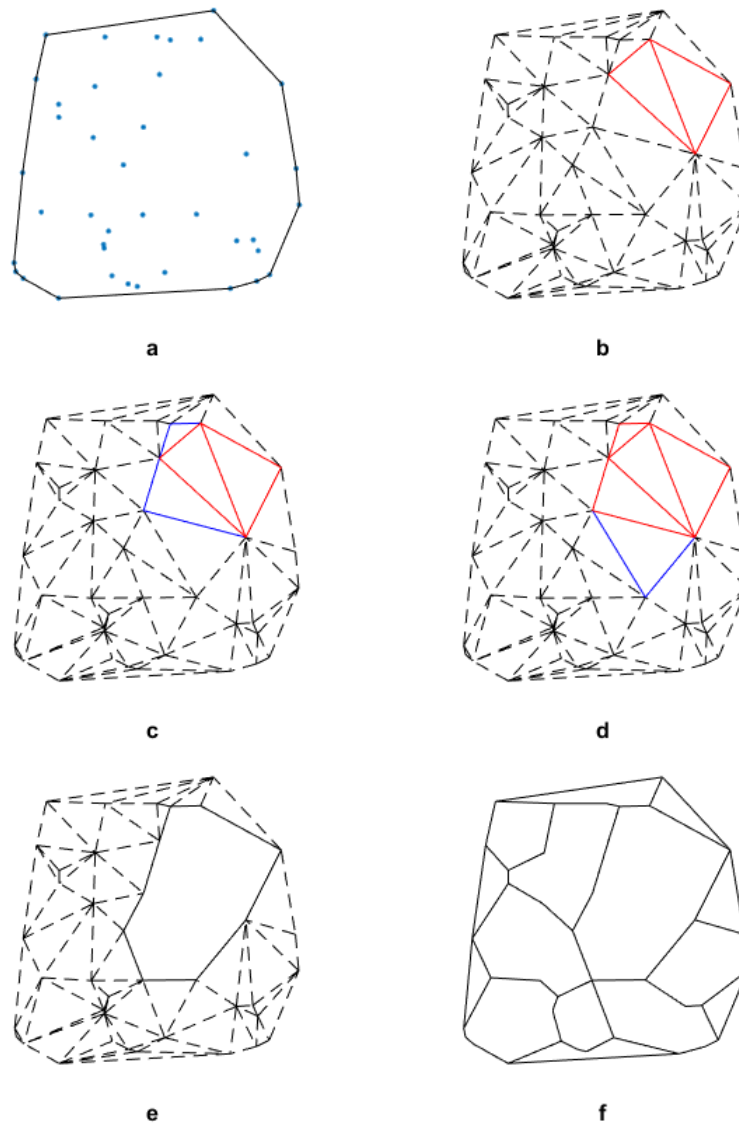


Figura 3.12: Algoritmo de remallado

El proceso de remallado se resume a continuación:

- Se mide el valor APR en la malla deformada y se verifica la conectividad entre elementos.
- Si algún elemento tiene un APR menor al valor fijado por el usuario o es un polígono complejo, es seleccionado junto a los elementos que lo rodean.
- Se elimina la conectividad de los polígonos seleccionados y se aplica POLYLLA sobre la nube de nodos remanentes. La conectividad de los nuevos elementos formados es agregada a la malla.

# Capítulo 4

## Ejemplos numéricos y discusión

Se presentan a continuación los resultados obtenidos a problemas numéricos en los cuales se pone a prueba la pertinencia y calidad del remallador. En primer lugar se realiza el test de la parcela para comparar la calidad de la solución entregada por las funciones base IMMLS, en comparación con la función max-ent, implementada originalmente en NIVED. Luego de esto, se realizan pruebas sobre distinto tipos de geometrías, sometidas a diferentes tipo de deformaciones, con el fin de estudiar la respuesta del remallador analizando métricas de malla. Finalmente, se repiten las pruebas realizadas en NIVED, esta vez utilizando VEMLab y su respectivo método de remallado.

### 4.1. Test de la parcela

Consiste en un problema de elasticidad lineal estático, donde un cuadrado de  $1'' \times 1''$  (pulgadas) es sometido a un esfuerzo unitario en su borde superior con apoyos simples en el borde inferior, como se aprecia en la figura 4.1. Con esto se busca confirmar la capacidad que tiene el método de reproducir de manera exacta un campo de desplazamiento lineal a lo largo de todo el cuerpo. La solución analítica, para el caso de esfuerzos planos, son las siguientes:

$$u_x = \frac{\nu}{E_Y}(1 - x), \quad u_y = \frac{y}{E_Y} \quad (4.1)$$

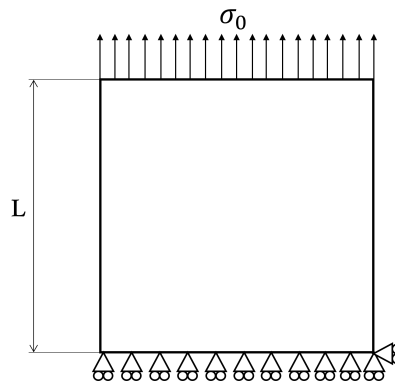


Figura 4.1: Test de la parcela.  $L = 1''$  y  $\sigma_0 = 1$  psi

La solución exacta de la deformación es:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E_Y}, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_Y}, \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad (4.2)$$

Se considera un material con  $E_Y = 3 \times 10^7$  psi y  $\nu = 0,3$ . Se utiliza  $\gamma_r = 2$  en la ecuación (2.22). En la figura 4.2 se muestran las mallas utilizadas. Los resultados obtenidos, utilizando NIVED con funciones IMMLS y max-ent, se muestran en la tabla 4.1 y 4.2. Ver definición de normas en Anexo.

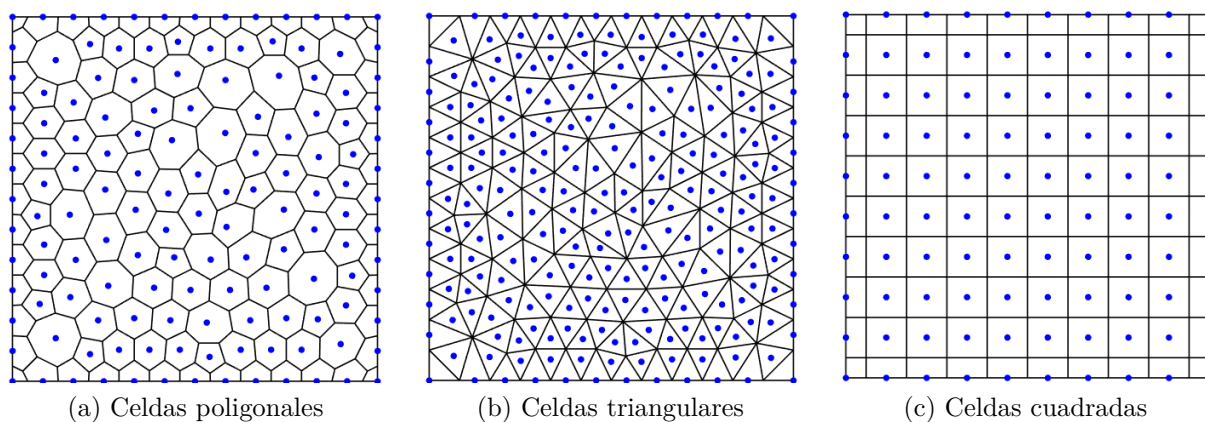


Figura 4.2: Mallas utilizadas test de la parcela.

En los resultados se ve claramente que las funciones max-ent presentan resultados más precisos que la función IMMLS, esto se puede deber a que las funciones IMMLS no son completamente interpolantes, por lo tanto la reproducción de las condiciones de contorno no son exactas, a diferencia de las funciones max-ent, que son completamente interpolantes.

Si bien se obtienen peores resultados con IMMLS, como se puede ver en la tabla 4.3, resulta ser un método más rápido en el cálculo de las funciones base. El tiempo de cómputo resulta de especial interés en los casos de estudio que se presentarán a continuación, ya que cada vez que se realiza un remallado es necesario recalcular las funciones base. Con esto en consideración, y recordando que se busca tener niveles de deformación realistas y no necesariamente precisas, se utilizará IMMLS en los siguientes problemas. A pesar de esto, se usará de igual manera max-ent si la configuración del cuerpo lo permite, es decir, si el cuerpo se mantiene convexo.

Tabla 4.1: Resultados norma  $L^2$

<b>Función base</b>	<b>Celdas poligonales</b>	<b>Celdas triangulares</b>	<b>Celdas cuadradas</b>
IMMLS	$7.6 \times 10^{-4}$	$3.0 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-3}$
Max-ent	$1.8 \times 10^{-10}$	$2.5 \times 10^{-10}$	$2.3 \times 10^{-10}$

Tabla 4.2: Resultados norma  $H^1$

<b>Función base</b>	<b>Celdas poligonales</b>	<b>Celdas triangulares</b>	<b>Celdas cuadradas</b>
IMMLS	$6.2 \times 10^{-4}$	$3.9 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-3}$
Max-ent	$3.8 \times 10^{-10}$	$6.8 \times 10^{-10}$	$4.6 \times 10^{-10}$

Tabla 4.3: Tiempo de cómputo, indice normalizado

<b>Función base</b>	<b>Celdas poligonales</b>	<b>Celdas triangulares</b>	<b>Celdas cuadradas</b>
IMMLS	0.125	0.19	0.13
Max-ent	1.0	1.0	1.0

## 4.2. Viga en tracción

Se resuelve una viga en voladizo en tracción, como se muestra en la figura 4.3, donde  $L = 8$  in; el módulo de Young  $E_Y = 1000$  psi y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . El esfuerzo de tracción aplicado es  $\sigma_0 = 800$  psi.

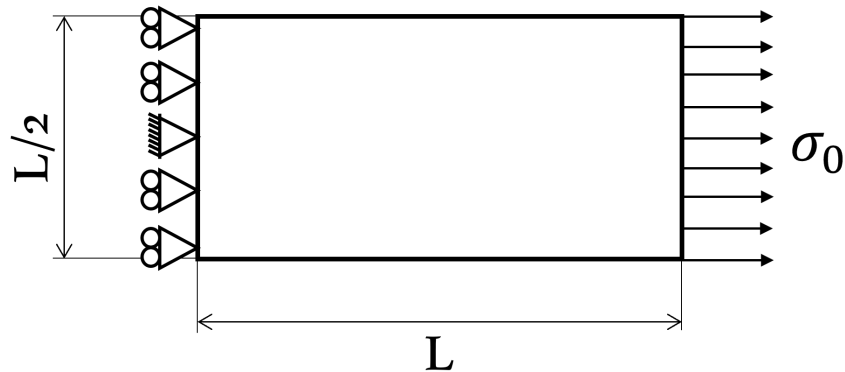


Figura 4.3: Viga en voladizo.

La malla inicial utilizada se muestra en la figura 4.4. Debido a que la geometría del problema lo permite, se resuelve el problema aplicando funciones max-ent e IMMLS, sin aplicar remallado. Los desplazamientos finales obtenidos por ambas funciones se pueden ver en la figura 4.5. A partir de estos resultados se puede ver que la deformación alcanzada por ambas funciones es similar y no se aprecian diferencias en la forma del cuerpo. Sin embargo, el tiempo de cómputo en ambos casos varía, utilizando IMMLS el problema se demoró 23.7 segundos, mientras que a max-ent le tomó 40.2 segundos.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Prueba realizada en un computador con procesador intel core i5, 8<sup>th</sup> generación, 8 GB de memoria RAM, tarjeta gráfica Nvidia Geforce MX150 y MATLAB R2020a.

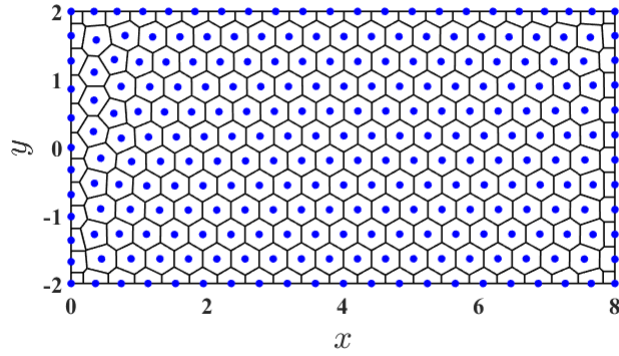


Figura 4.4: Malla inicial, 249 nodos.

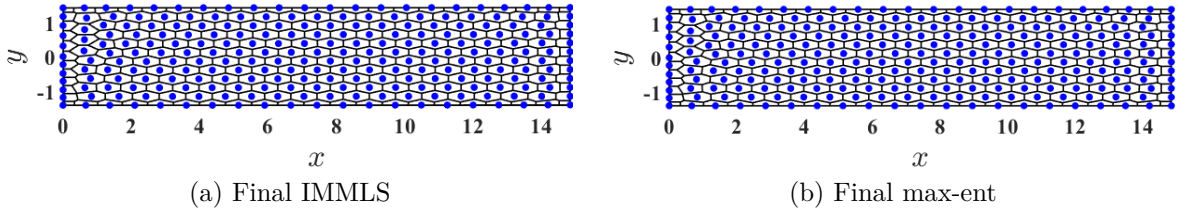


Figura 4.5: Resultados a partir de distintas funciones base.

A continuación se resuelve el problema aplicando el remallador. Para ello se usan las funciones IMMLS y se divide la carga en 10 pasos incrementales. Se utiliza una tolerancia de deformación  $\gamma_{tol} = 18$ , mallador tipo Voronoi,  $\beta_s = 10^\circ$  y tolerancia de colapso  $\epsilon_e = 0.3$ .

El remallador se activa en los pasos incrementales 7 y 9, como se puede ver en las figuras 4.6 y 4.7, respectivamente. La nueva malla generada en el paso 7 está formada principalmente por celdas cuadriláteras, lo cual se debe al colapso de lados. En el paso 9 se forman nuevas celdas hexagonales, pero estas presentan una forma regular, a diferencia de las celdas alargadas que forman la malla deformada (figura 4.7(a)).

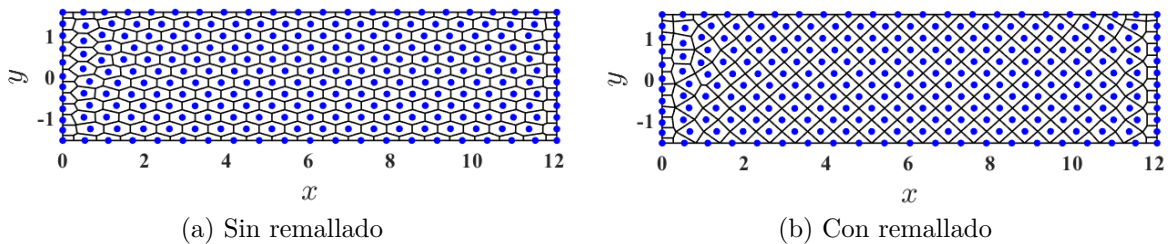


Figura 4.6: Paso incremental 7.



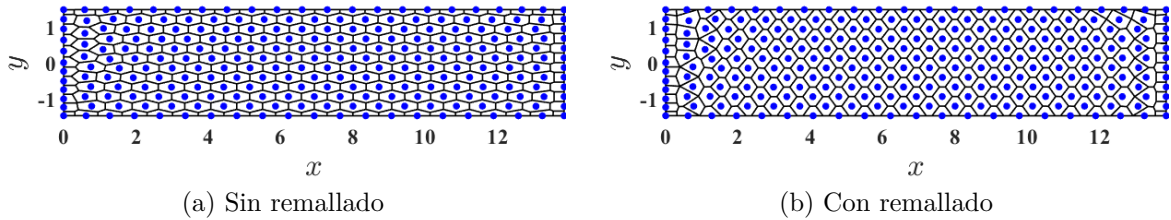


Figura 4.7: Paso incremental 9.

En la figura 4.8 se puede ver la evolución del radio del circuncentro de cada celda. En el paso incremental número 7 no se aprecia una mejora significativa, ya que, a pesar que las celdas se vuelven más regulares, la distancia entre vértices no varía mucho. Por otro lado, en el paso número 9 el radio del circuncentro disminuye en la mayoría de las celdas, debido a que los polígonos formados presentan vértices más cercanos entre sí.

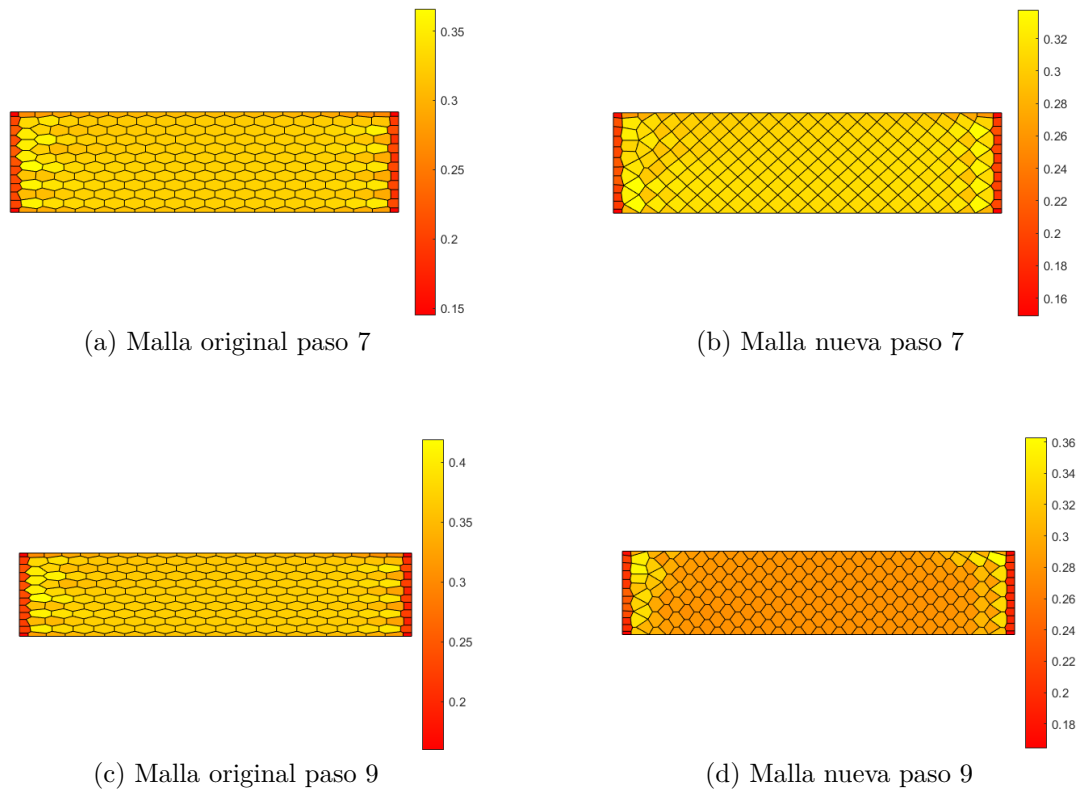


Figura 4.8: Radio circunscrito de cada celda

En la figura 4.9 se presentan los lados más pequeños de las celdas nodales. En el paso 7 se ve como el largo mínimo de las celdas en la malla nueva es aproximadamente el doble que el la malla original. Esto se puede explicar por el colapso de vértices, ya que en el proceso se eliminan lados del polígono mientras se intenta mantener el perímetro del mismo. En el paso 9, si bien los lados más pequeños de las celdas en la malla nueva son menores a los de la malla original, vale la pena notar que se eliminan los lados extremadamente pequeños, en la malla original se tienen lados con largos menores a 0.02 in, mientras que en la malla nueva el lado más pequeños es cercano a las 0.1 in.

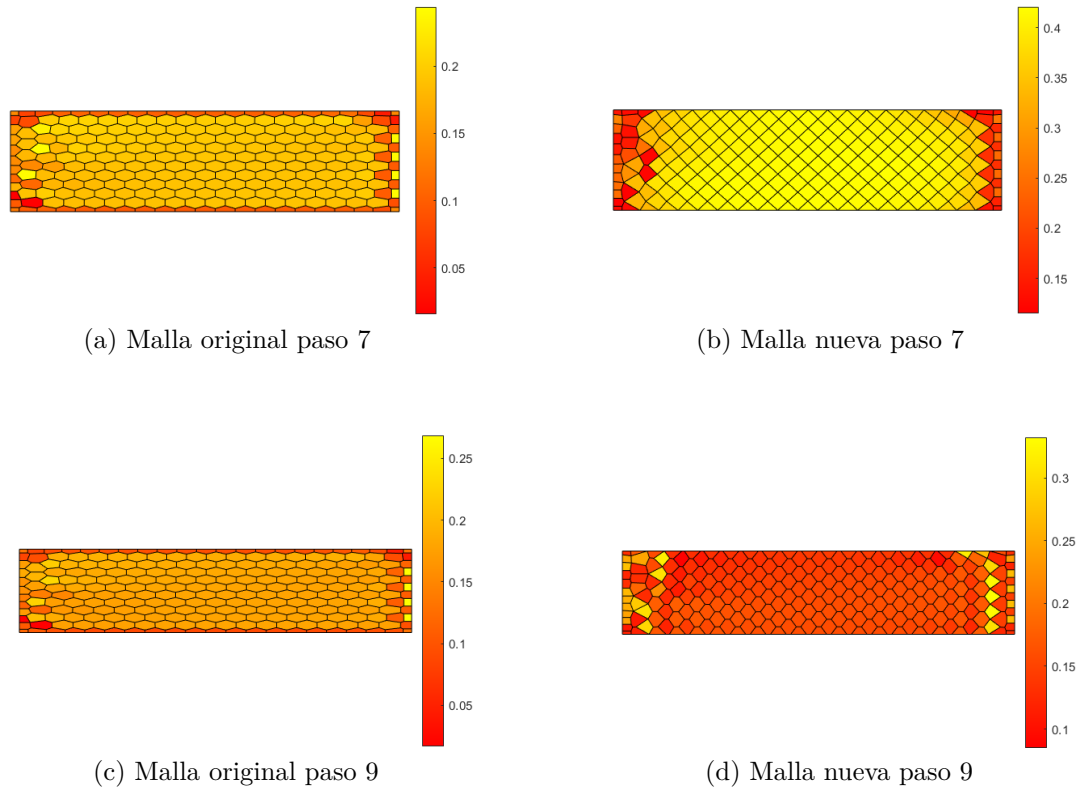
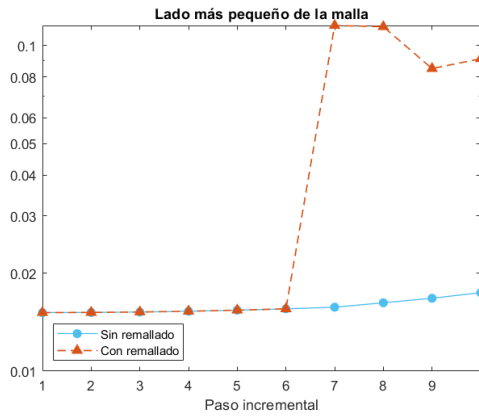


Figura 4.9: Lado más pequeño de cada celda

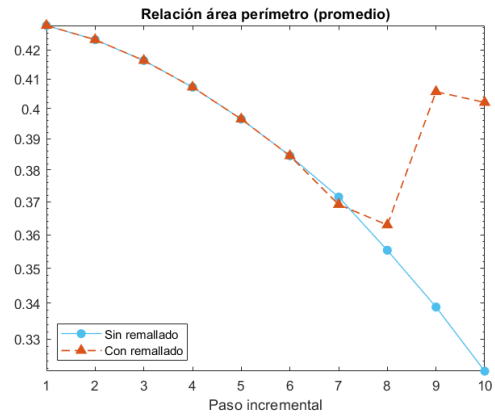
En la figura 4.10 se muestran algunas métricas de mallado a lo largo de los pasos incrementales. En el último paso incremental se tiene que el lado más pequeño de la malla nueva es aproximadamente 5 veces más grande que el de la malla original deformada y la relación área/perímetro promedio aumentó, con lo cual se tienen celdas más compactas. Además, la distancia punto-punto normalizada y el radio circunscrito de la malla nueva al final del problema son comparables con los valores que dichas métricas tenían en el paso incremental número 6, es decir, cuando se tiene aplicado el 60% de la carga.

En la figura 4.10(c) se ve como en el paso número 7 se alcanza un valor de 1.2, lo cual se debe a la predominancia de elementos cuadriláteros en la malla; la distancia punto-punto normalizada de un cuadrado es  $1.4 (\sqrt{2})$ . La caída que se presenta en el paso 9 se explica por la cercanía que presentan los vértices en la nueva malla, como se muestra en la figura 4.9(d).

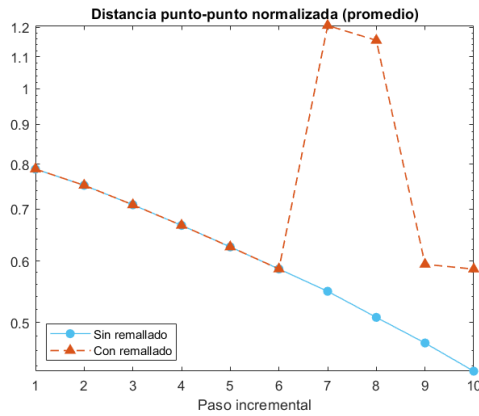
En la figura 4.11 se muestra el valor del indicador  $\varrho$  a lo largo de la deformación. Como es de esperarse, la calidad de la malla original empeora a medida que se aplica más carga. Por otra parte, el comportamiento del indicador  $\varrho$  en la malla nueva es semejante al del gráfico de la figura 4.10(c). Para entender esto basta mirar la ecuación (2.58), que depende del largo de los lados de las celdas y la ecuación (2.59), que depende de la cantidad de lados, las cuales son utilizadas para calcular el indicador  $\varrho$ .



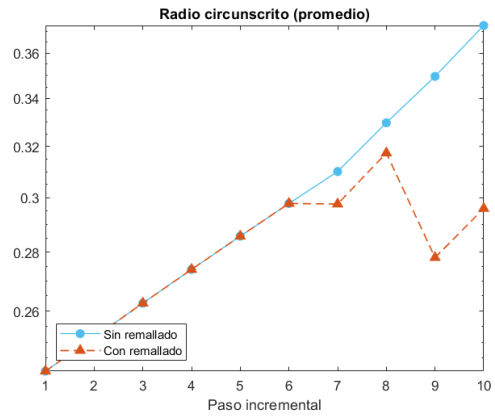
(a) Lado más pequeño



(b) Relación área-perímetro



(c) Distancia punto a punto normalizada



(d) Radio circunscrito

Figura 4.10: Características geométricas

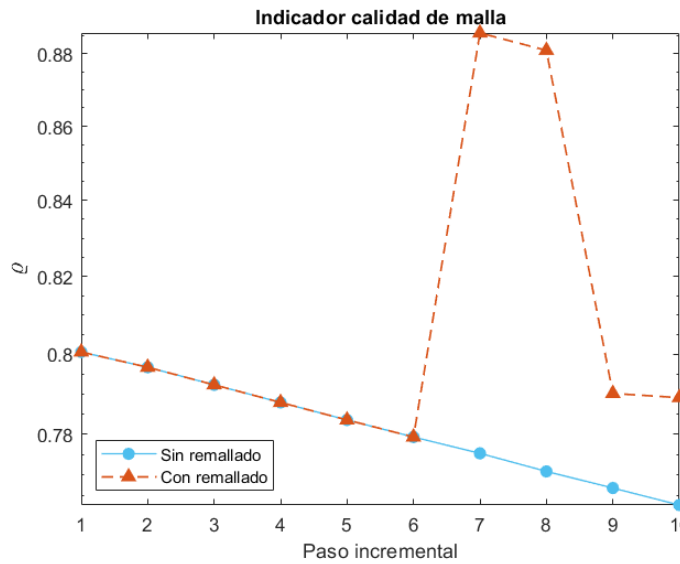


Figura 4.11: Calidad de malla a lo largo de la deformación

### 4.3. Cilindro presurizado

El problema consiste en un cilindro de diámetro externo  $D_e = 4$  in y diámetro interno  $D_i = 4$  in, sujeto a una presión interna  $P = 400$  psi, como se muestra en la figura 4.12. Se considera que el cilindro es lo suficientemente largo para utilizar el estado de deformación plana. Dada la simetría del cuerpo se puede simular un cuarto del cilindro, utilizando las condiciones de contornos que se muestran en la figura 4.12(b).

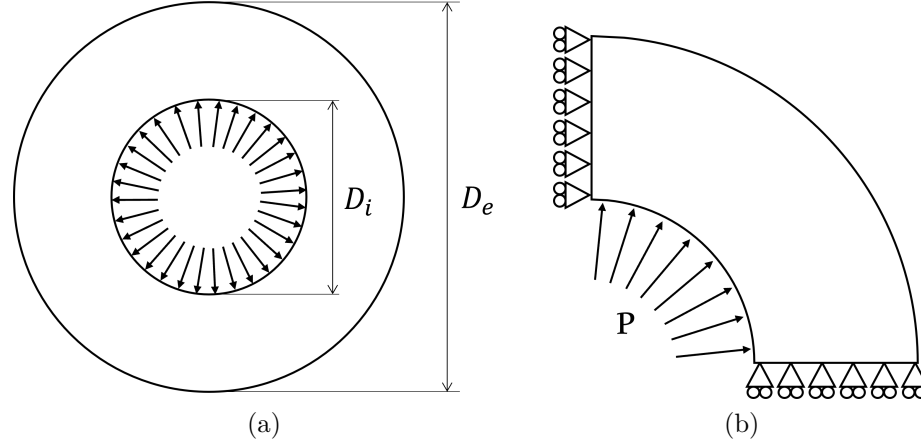


Figura 4.12: Cilindro presurizado.

La solución analítica del problema es la siguiente:

$$u_r = \frac{(1 + \nu)r_i^2 P}{E_Y(r_e^2 - r_i^2)} \left( \frac{r_e^2}{r} + r(1 - 2\nu) \right) \quad (4.3)$$

Donde  $u_r$  es el desplazamiento radial,  $r_i < r < r_e$  es el radio del cilindro, con  $r_i$  radio interno y  $r_e$  radio externo. Del mismo modo los esfuerzos y deformaciones están dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{(1 + \nu)r_i^2 r_e^2}{E_Y(r_e^2 - r_i^2)} \left\{ -\frac{P}{r^2} + (1 - 2\nu)\frac{P}{r_e^2} \right\} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{(1 + \nu)r_i^2 r_e^2}{E_Y(r_e^2 - r_i^2)} \left\{ \frac{P}{r^2} + (1 - 2\nu)\frac{P}{r_e^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{Pr_i^2}{(r_e^2 - r_i^2)} - \frac{Pr_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2)r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{Pr_i^2}{(r_e^2 - r_i^2)} + \frac{Pr_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2)r^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

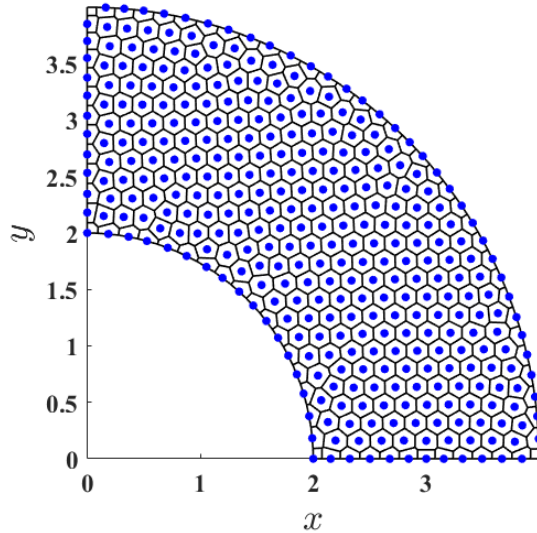


Figura 4.13: Malla inicial cilindro presurizado.

Se considera un material con un módulo de Young  $E_Y = 1000$  psi y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . La malla inicial posee 350 nodos y se puede ver en la figura 4.13. Dada la forma en que se aplica la presión, se espera que la cara interna del cilindro se vaya expandiendo, por esto se utilizará el remallador con malla tipo mixta. La carga se divide en 10 pasos incrementales, la tolerancia de deformación es  $\gamma_{tol} = 18$ ,  $\beta_s = 10^\circ$ , tolerancia de colapso  $\epsilon_e = 0.25$  y funciones base IMMLS.

Con esta configuración el remallador se activó en los pasos 4, 6 y 8, como se ve en las figuras 4.14 y 4.15. En el paso 4 no se aprecian grandes diferencias entre las mallas. En el paso 6 las celdas ubicadas en el borde interior de la malla original empiezan a estar más aplastadas, mientras que en la malla nueva mantienen su aspecto. En el paso 8 la malla nueva presenta una mayor cantidad de elementos cuadráticos.

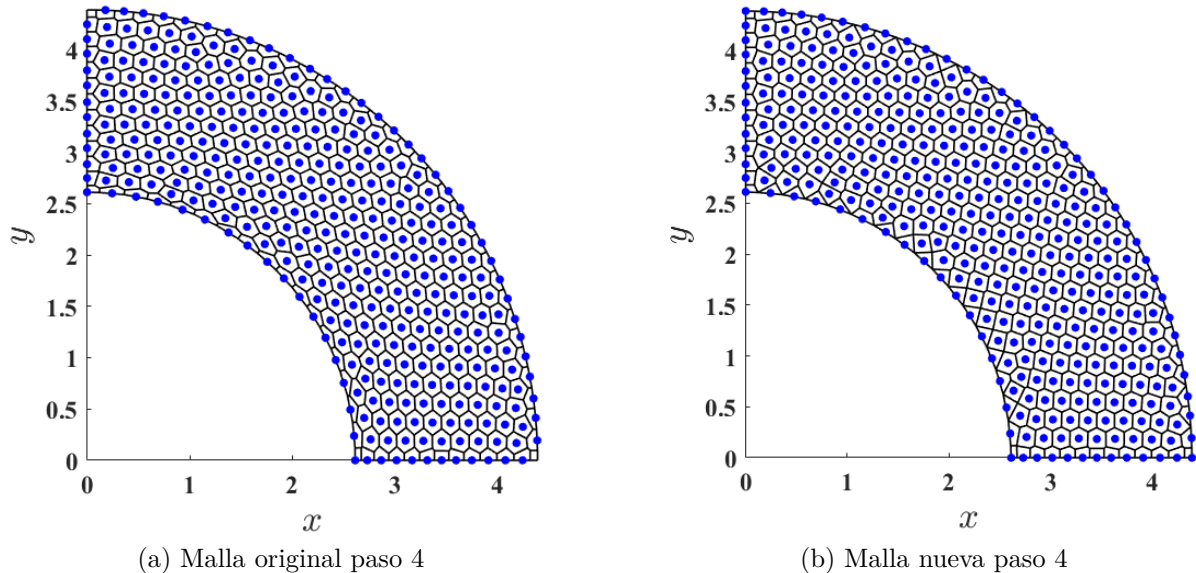
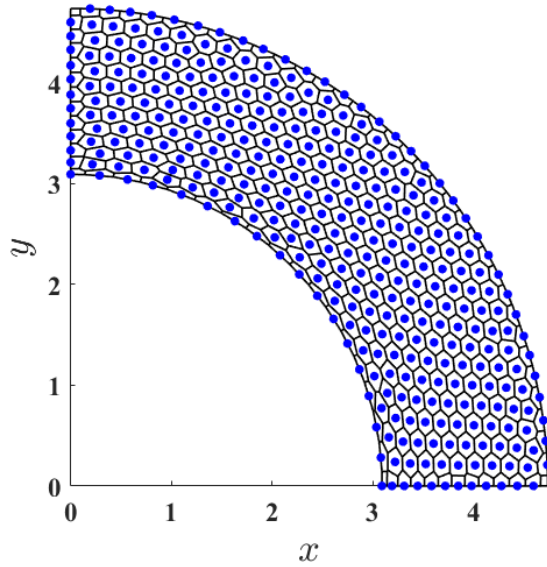
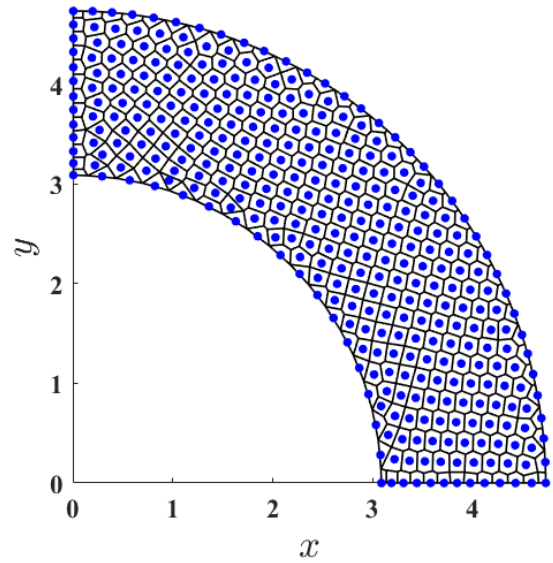


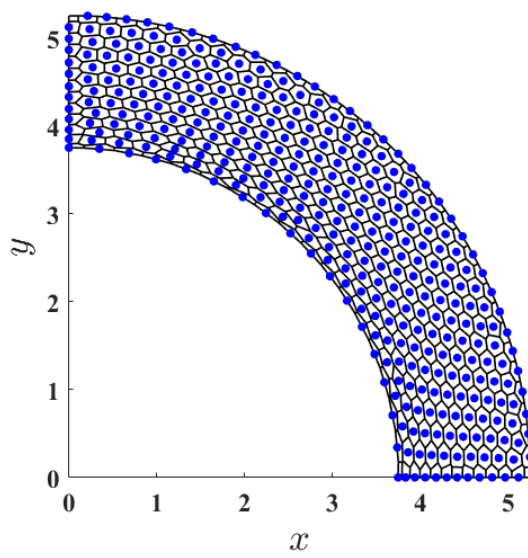
Figura 4.14: Deformación a lo largo de los pasos incrementales, parte 1.



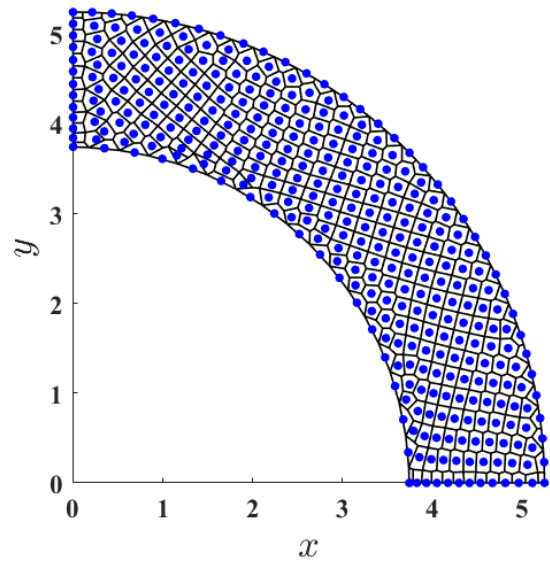
(a) Malla original paso 6



(b) Malla nueva paso 6



(c) Malla original paso 8



(d) Malla nueva paso 8

Figura 4.15: Deformación a lo largo de los pasos incrementales, parte 2.

En la figura 4.16 se muestra la deformación final del cuerpo tras haber aplicado el total de la carga. Se eliminan los nodos de la figura con el fin de apreciar de mejor manera las celdas poligonales. En la malla original, a medida que se acercan al borde interior, las celdas tienden a tener una forma más plana y a ocupar una menor cantidad de área, mientras que en la malla nueva el área de las celdas se mantiene más uniforme a lo largo del radio del cilindro.

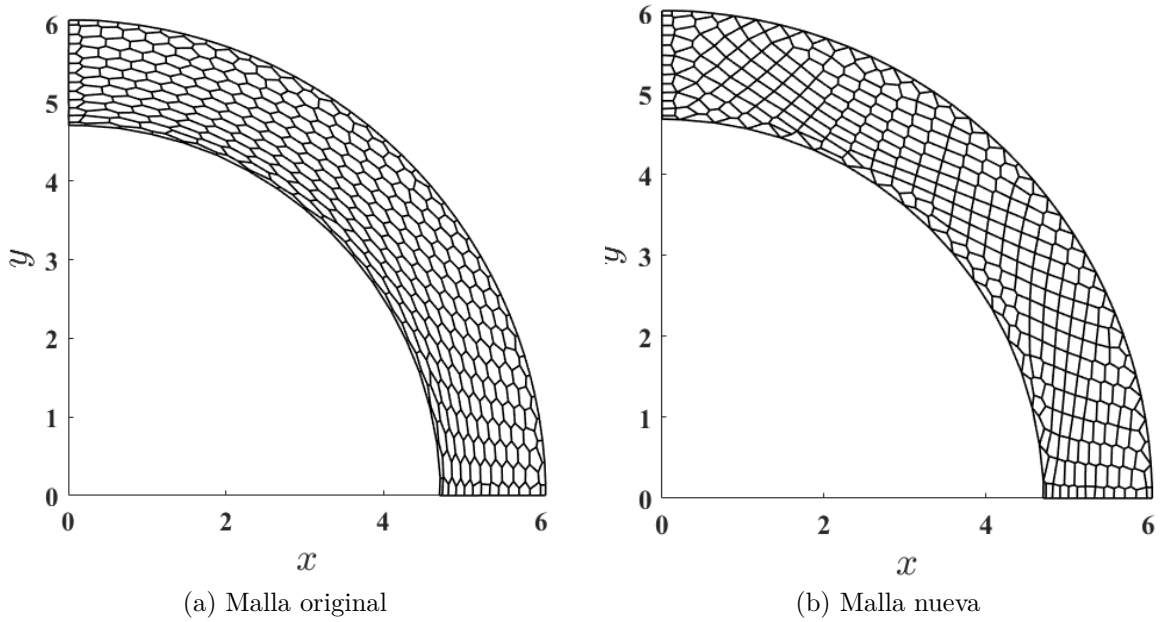


Figura 4.16: Deformación final.

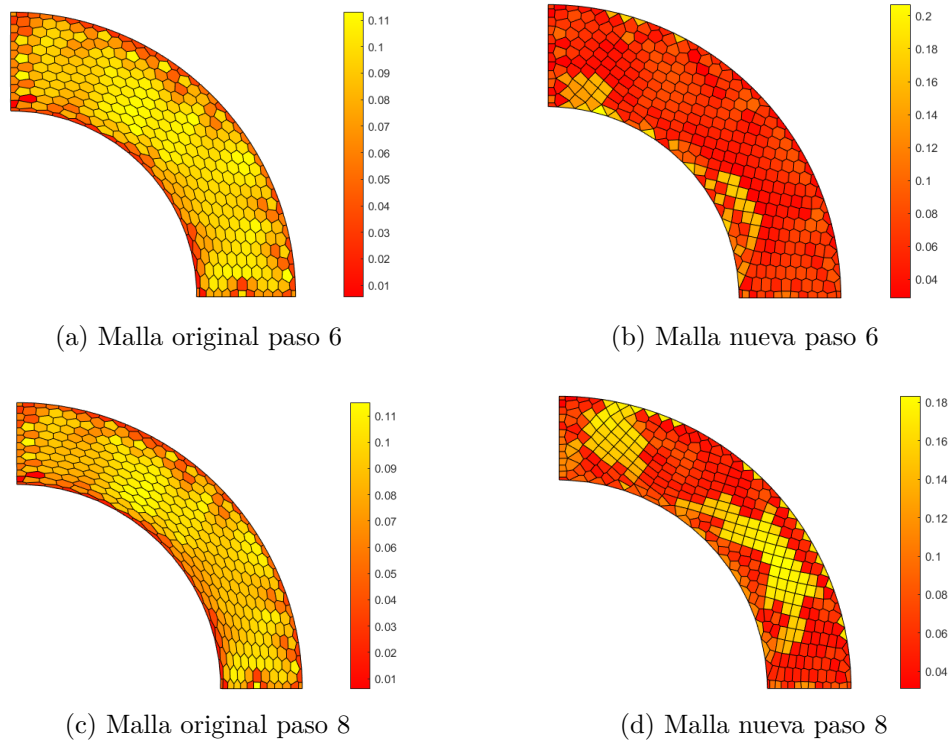


Figura 4.17: Lados más cortos de cada celda

En la figura 4.17 se comparan los lados más cortos de los polígonos en la malla original y la malla nueva en los pasos 6 y 8, no se exponen los resultados del paso 4, ya que, como se mencionó anteriormente, no presentan una diferencia significativa. En ambos pasos se tiene que el lado más pequeño promedio es menor en las mallas nuevas, pero el largo mínimo de las mallas originales es menor que el de las generadas por el remallador. En la figura 4.17(d) se pueden diferenciar fácilmente las celdas más afectadas por el colapso de vértices (celdas



amarillas). De aumentar el factor  $\epsilon_e$  la porción de celdas amarillas debería ser mayor, y con ello aumentar el promedio del largo mínimo de lados.

En la figura 4.18 se ve la evolución de las métricas de mallado a lo largo de la deformación. La relación área/perímetro y el radio circunscrito de las mallas nuevas muestran mejoras respecto a la malla original, sin embargo, el nivel de deformación supera las correcciones que se puedan hacer en la malla, lo cual se refleja en la tendencia de las curvas, la relación área/perímetro decrece de forma monótona mientras que el radio circunscrito crece luego del primer remallado. De mantenerse este comportamiento, y se quiere seguir deformando el cuerpo, es necesario evaluar la opción de generar una nube de nodos completamente nueva. La distancia punto a punto normalizada en la malla nueva presenta una leve baja respecto a la malla original entre los pasos 4 y 7, esto se debe a que los lados de las celdas se acortan más de lo que disminuye el circuncentro de los polígonos. La mejora más notable es el tamaño del lado más pequeño de la malla, la malla original en el último paso incremental posee al menos un lado de largo aproximado 0.007 in, mientras que en la malla nueva el lado más corto mide, aproximadamente, 0.03 in. Vale la pena notar que en la malla original, luego del paso 4, el lado más corto tiende a aumentar, esto puede deberse a que dicho lado está parcialmente alineado con el alargamiento del cilindro, o sea perpendicular al radio.

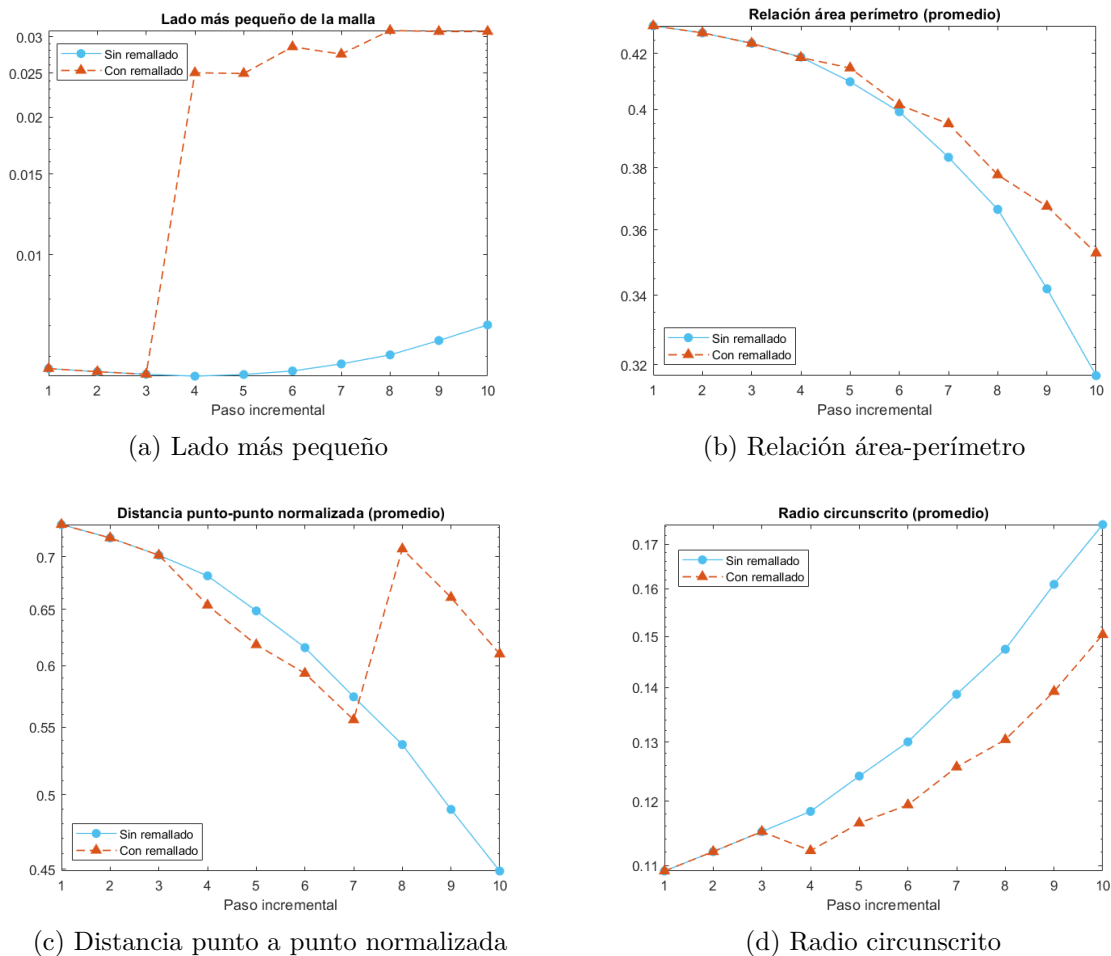


Figura 4.18: Características geométricas



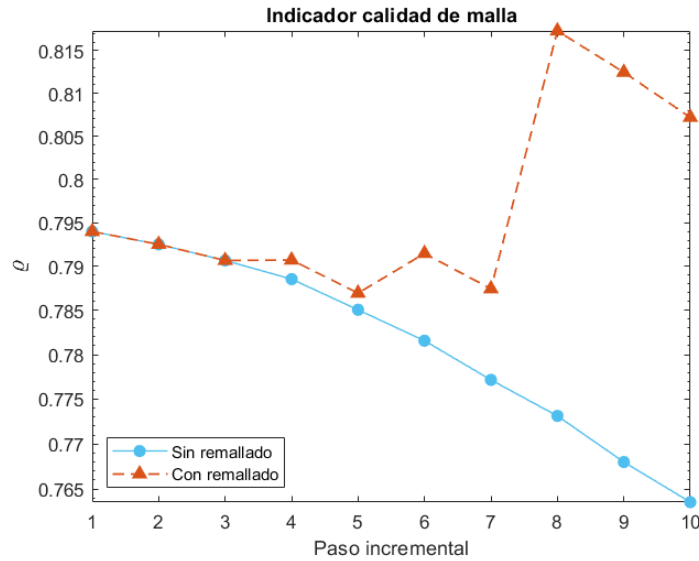


Figura 4.19: Calidad de malla a lo largo de la deformación.

En la figura 4.19 se aprecia la evolución del factor  $\rho$  a medida que aumenta la carga aplicada. Este gráfico muestra nuevamente la poca mejora en la calidad de la malla luego del primer remallado. Al igual que en el problema anterior, las celdas que componen las mallas se mantienen convexas y, a excepción de un polígono en la malla generada en el paso 8, no hay vértices colineales, por lo que el aumento de  $\rho$  se debe a la disminución de lados presentes en la malla.

Se calcula el error relativo del desplazamiento radial en los pasos 5, 7 y 9, es decir, en los pasos siguientes al remallado. Los resultados obtenidos se pueden ver en la figura 4.20. En las tablas 4.4 y 4.5 se muestran los resultados de las normas  $L^2$  y  $H^1$ , respectivamente. Lo primero a tener en cuenta es el bajo error obtenido en todas las mediciones, siendo el paso 9 el único momento donde el desplazamiento tiene un error sobre el 1%, lo que confirma el buen nivel de tolerancia que posee el método ante las deformaciones. El paso 5, a pesar de tener mallas similares, es donde mejor se aprecian las diferencias entre los niveles de error, figura 4.20(a). La mayor diferencia entre estas mallas radica en las celdas nodales ubicadas en el radio interior, con lo cual se puede pensar que estas celdas, al ser menos planas, ayudan a mitigar la propagación del error.

En el paso número 7 la diferencia entre las normas  $L^2$  de la malla original y la malla nueva tiende a estrecharse, no obstante, el remallador sigue presentando mejores resultados. En este paso las mallas se comienzan a diferenciar, la forma alargada de las celdas de borde en la malla original se acentúa, mientras que en la malla nueva comienzan a aparecer más elementos cuadriláteros. En el paso 9 ambas mallas presentan una norma  $L^2$  casi idéntica, con una diferencia de  $3 \times 10^{-4}$ . En este punto la malla original posee celdas alargadas dentro del dominio y no solo en los bordes. En la malla nueva gran parte de las celdas internas pasan a ser cuadriláteras.

Al comparar los resultados de las métricas de mallado con los resultados del error obtenido se pueden realizar un par de observaciones. En primer lugar, el indicador  $\rho$  es capaz de predecir un menor nivel de error en las nuevas mallas generadas, pero no lo hace con precisión,

ya que sobrestima el efecto de la reducción del número de lados en la malla. El valor APR y el radio circunscrito se condice con los errores de desplazamiento obtenidos, ambas métricas presentan mejores resultados en las mallas nuevas, pero van empeorando a medida que avanza la deformación, al igual que pasa con el error relativo del desplazamiento. Finalmente, no se puede ignorar el rol que tiene la distribución nodal sobre los resultados. En el paso 5 ambas mallas tienen exactamente la misma distribución nodal, pero diferentes celdas nodales, con ello la mejora en los resultados se puede explicar al cambio de malla. Por otro lado, en el paso 9 ambas configuraciones presentan una norma  $L^2$  similar, a pesar de poseer diferentes celdas nodales, por lo tanto, esto se puede deber a que en ambos casos la distribución nodal es casi idéntica. En otras palabras, mejorar la calidad de la malla poligonal no logra sortear por completo las consecuencias que el deterioro de la distribución nodal pueda tener sobre el cálculo del desplazamiento.

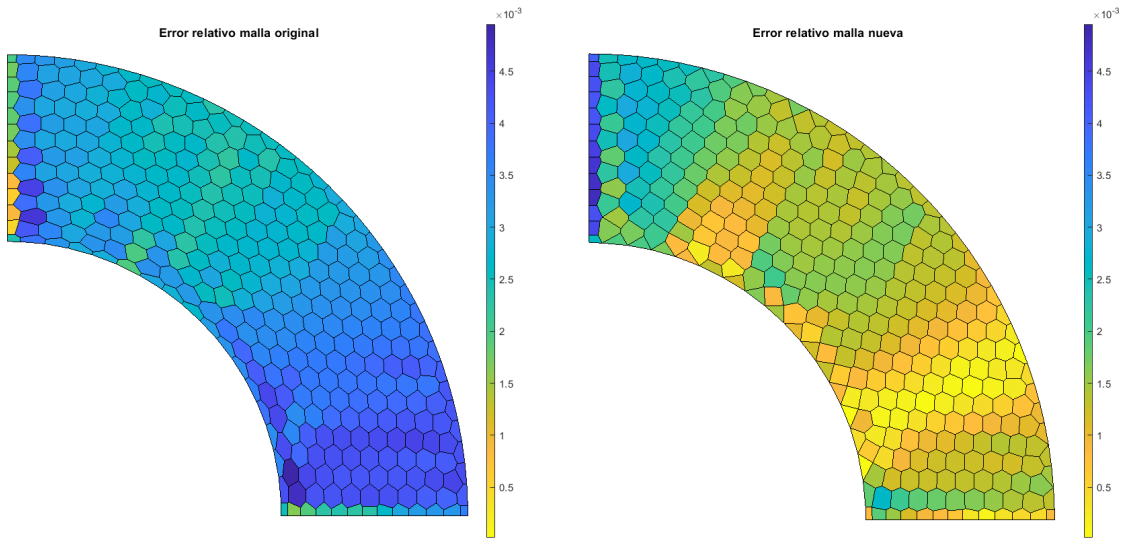
Los resultados de la tabla 4.5 muestran que se obtiene una norma más baja al resolver el problema sin remallador, esto se debe principalmente a la forma en que se construyen las celdas del radio interior durante el remallado. Al utilizar una malla tipo mixta, figura 3.9(b), los lados de las celdas de borde que forman el límite de la geometría se alejan de su nodo representativo, en este caso hacia afuera, dejando un punto de Gauss fuera del cuerpo.

Tabla 4.4: Norma  $L^2$

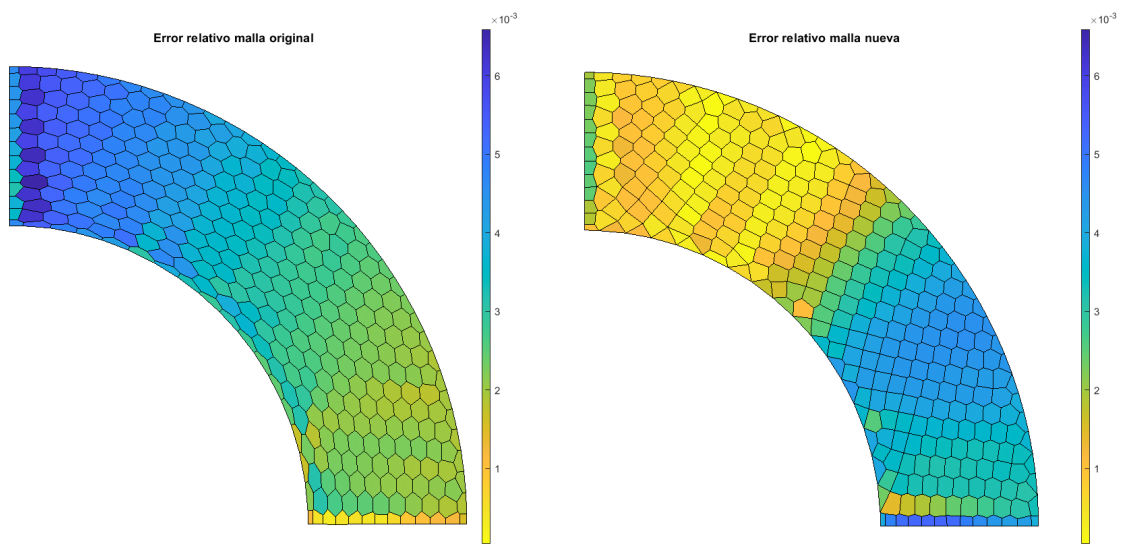
<b>Remallador</b>	<b>Paso 5</b>	<b>Paso 7</b>	<b>Paso 9</b>
No	$3.3 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-3}$
Si	$1.6 \times 10^{-3}$	$2.8 \times 10^{-3}$	$6.8 \times 10^{-3}$

Tabla 4.5: Norma  $H^1$

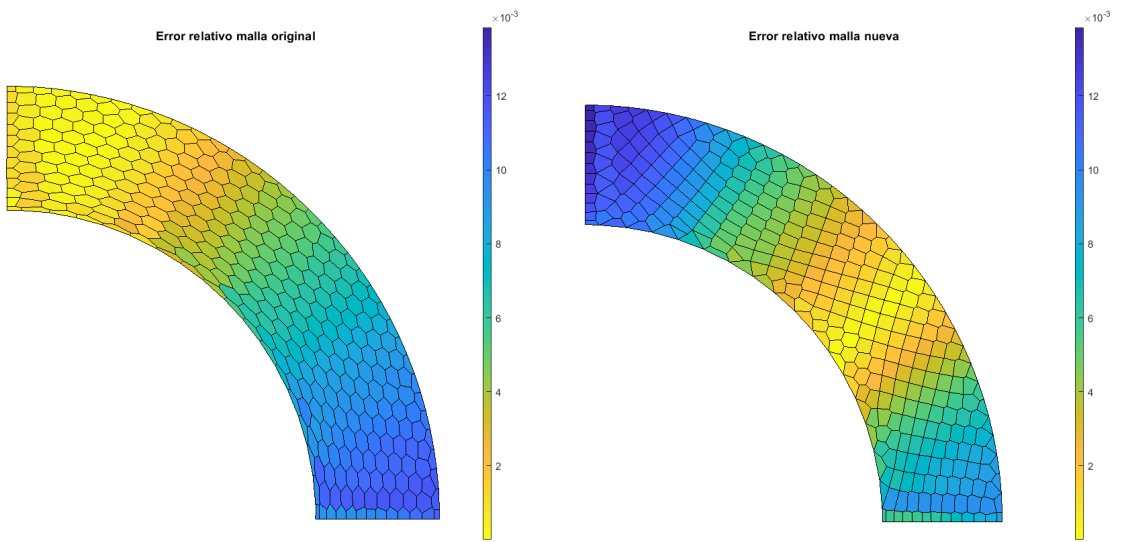
<b>Remallador</b>	<b>Paso 5</b>	<b>Paso 7</b>	<b>Paso 9</b>
No	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$
Si	$2.0 \times 10^{-2}$	$1.8 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-2}$



(a) Paso incremental 5



(b) Paso incremental 7



(c) Paso incremental 9

Figura 4.20: Error relativo.

## 4.4. Problema de estampado

Este problema consiste en un bloque rígido siendo presionado sobre un cuerpo deformable, figura 4.21. El cuerpo deformable consiste en un cuadrado de lados  $L = 1$  in, módulo de Young  $E_Y = 1000$  psi y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . El bloque rígido alcanza un desplazamiento vertical de 0.65 in. El problema es simulado como un problema de deformación plana. Dada la simetría del cuerpo y carga, se simula la mitad derecha del cuerpo, con las condiciones de contornos que se muestran en la figura 4.21(b). Se utiliza una malla de 132 nodos, ver figura 4.22.

La configuración de remallado utiliza malla tipo Voronoi, tolerancia de deformación  $\gamma_{tol} = 18$ ,  $\beta_s = 10^\circ$ , tolerancia de colapso  $\epsilon_e = 0.25$  y división de carga en 10 pasos incrementales. Nuevamente, se usan funciones IMMLS.

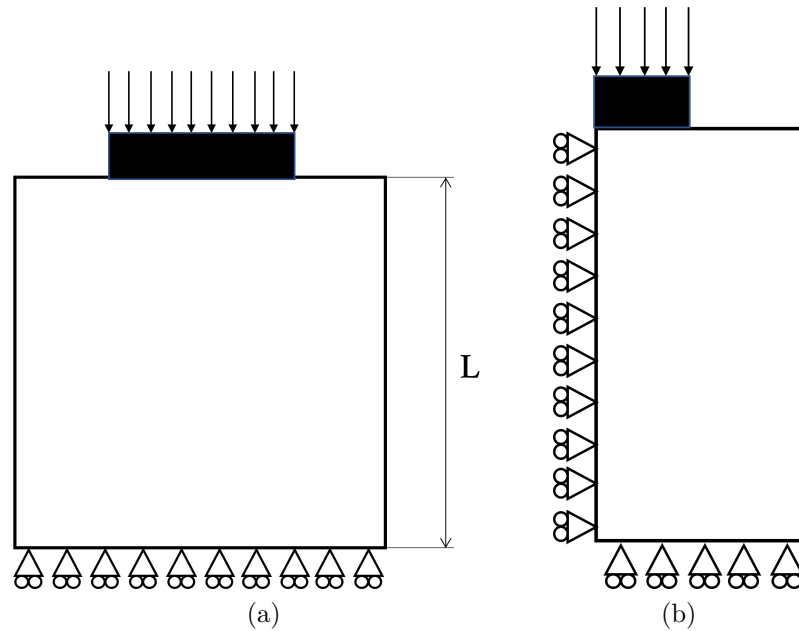


Figura 4.21: Problema de estampado

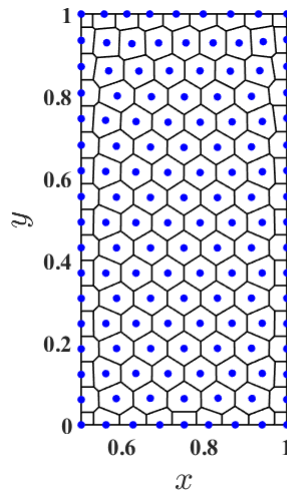
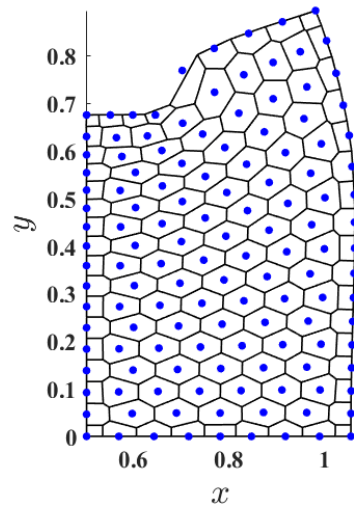
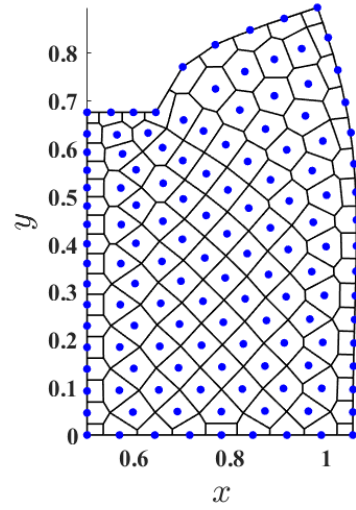


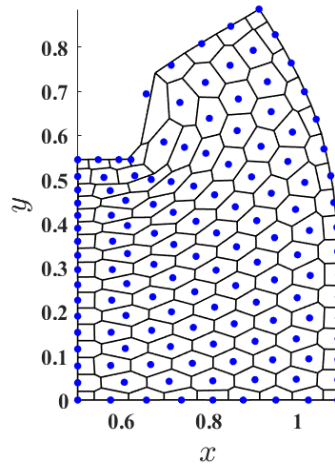
Figura 4.22: Malla inicial.



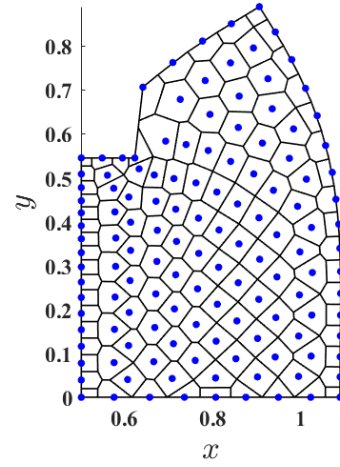
(a) Malla original paso 5



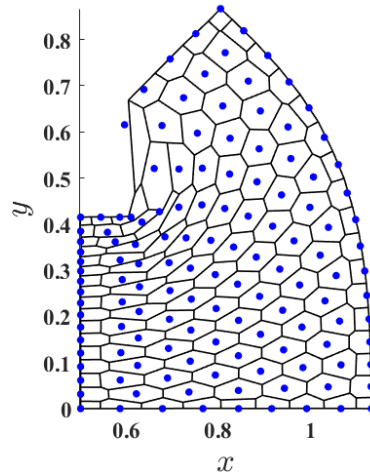
(b) Malla nueva paso 5



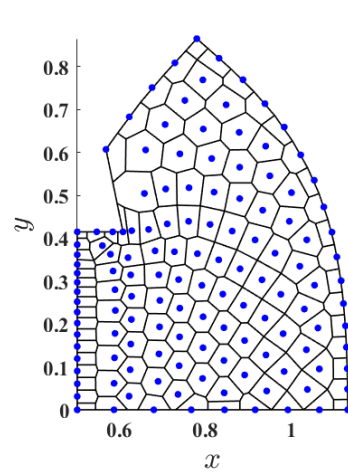
(c) Malla original paso 7



(d) Malla nueva paso 7



(e) Malla original paso 9



(f) Malla nueva paso 9

Figura 4.23: Deformación a lo largo de pasos incrementales.

El remallador se activa en los pasos 5, 7, 8 y 9, como se muestra en la figura 4.23, mientras que la figura 4.24 se aprecia la diferencia entre las mallas al final de la deformación.

En el paso 5 se puede ver como en la malla original uno de los nodos sale de su celda nodal y no se respeta la geometría del cuerpo, ya que una de las celdas de los nodos donde se impone el desplazamiento cruza el borde del cuerpo, definido por la unión de nodos de borde. La malla nueva generada en el paso 5 soluciona estos problemas identificando los dos nodos afectados como nuevos puntos esquina. En el paso 7 la malla original continúa presentando los problemas mencionados y empiezan a aparecer celdas interiores no convexas. Las mallas nuevas, al estar basadas en el diagrama de Voronoi aseguran la convexidad en las celdas interiores.

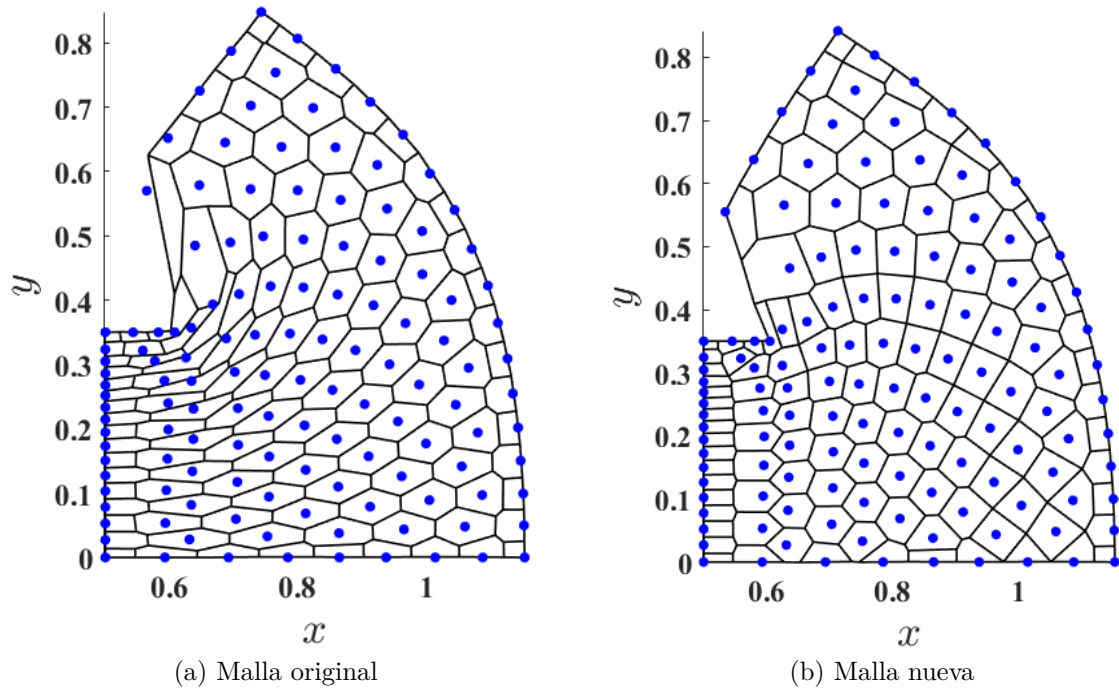
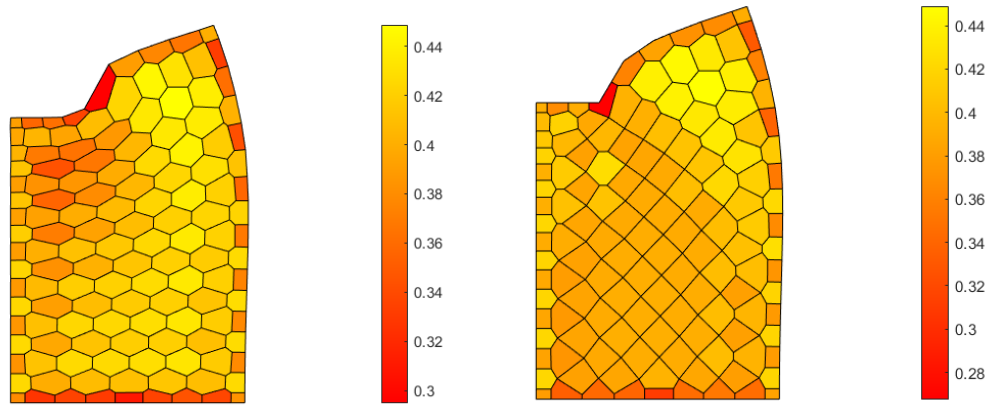


Figura 4.24: Deformación final

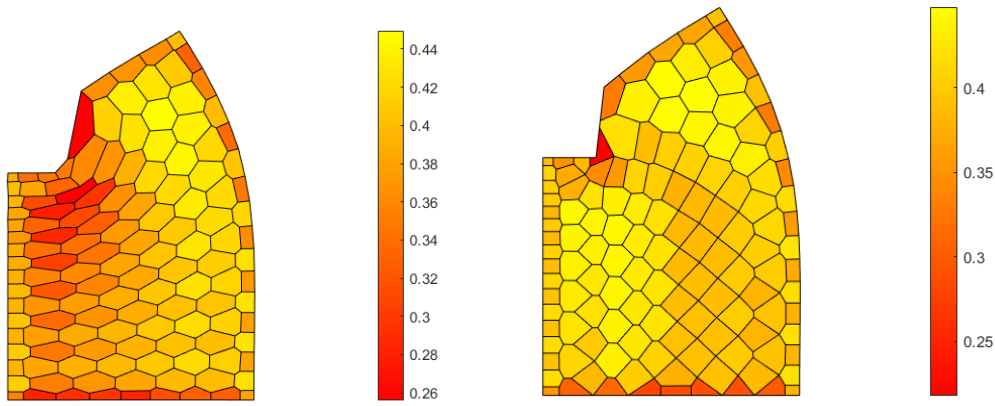
En el paso 9 y deformación final aparecen más celdas internas no convexas e incluso nodos que salen de sus celdas representativas y entran en celdas vecinas. Por otra parte, las celdas de las mallas nuevas presentan un aspecto más uniforme a lo largo de todo el cuerpo, mientras que en la malla original las celdas son más alargadas y planas a medida que se acercan a la zona desplazada.

En la figura 4.25 se comparan los resultados de la relación área/perímetros entre la malla original y las mallas generadas en los pasos 5, 7 y 9. A medida que la deformación avanza el porcentaje de celdas con bajo valor en la relación área/perímetro aumenta, esparciéndose desde la zona desplazada hacia el resto del cuerpo. Las nuevas mallas generadas presentan el comportamiento contrario, no solo los valores aumentan respecto las mallas originales, si no también las celdas que tenían peor relación área/perímetro pasan a ser las celdas más compactas. Si bien las mallas nuevas generan un polígono altamente no convexo en el punto con mayor deformación, hay que tener en cuenta que esto es consecuencia de respetar los bordes de la geometría. La celda análoga en la malla original es convexa, pero como se mencionó anteriormente, dicha celda nodal cruza el borde del cuerpo.



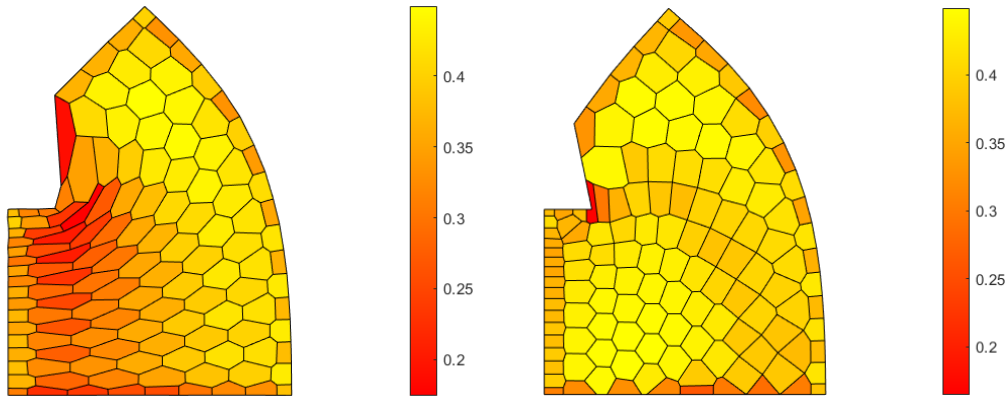
(a) Malla original paso 5

(b) Malla nueva paso 5



(c) Malla original paso 7

(d) Malla nueva paso 7



(e) Malla original paso 9

(f) Malla nueva paso 9

Figura 4.25: Relación área/perímetro.

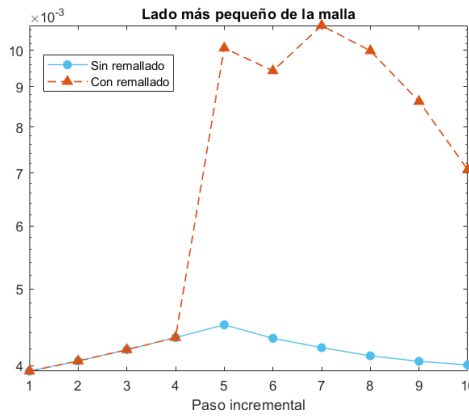
Algo que queda en manifiesto en la figura 4.25 es que, dados dos polígonos relativamente regulares, aquel que tenga menor cantidad de lados poseerá un menor valor APR. Esto se condice con el hecho que el mayor valor en la relación área/perímetro se alcanza con la circunferencia, la cual se puede considerar como un polígono de infinitos lados. Esto se debe tener en cuenta al momento de fijar la tolerancia de colapso, ya que si bien aumenta el largo del lado más pequeño del polígono, en el proceso elimina uno de sus lados, y con ello disminuye su valor APR.

En la figura 4.26 se pueden ver los resultados de las métricas geométricas a lo largo del problema. En el gráfico de la figura 4.26(a) se ve como tras el primer remallado el lado más corto de la malla nueva es más de dos veces más largo que el lado más corto de la malla original. A partir del paso 7 la tasa de decrecimiento en la malla nueva es mayor que en el de la malla original, lo cual nos dice que, en la malla nueva, la ubicación de la celda con el lado más pequeño se encuentra cerca de la zona con mayor deformación, mientras que en la malla original el lado más pequeño de la misma está más alejado de la zona con mayor deformación. En el remallador, la relación área/perímetro tiene un comportamiento oscilatorio entre los 0.39 y 0.4 in, mientras que en la malla original decrece monótonamente. En el paso número 5 la malla nueva presenta un valor APR menor que el de la malla original, esto se debe al mayor número de elementos cuadriláteros que esta posee, lo cual como ya fue explicado, tiende a ser castigado por la relación área/perímetro. A pesar de esto, a lo largo de la deformación el remallador posee una componente media aproximadamente constante, lo cual se puede interpretar como una compensación entre la deformación de las celdas de borde con la formación de celdas hexagonales al interior del cuerpo.

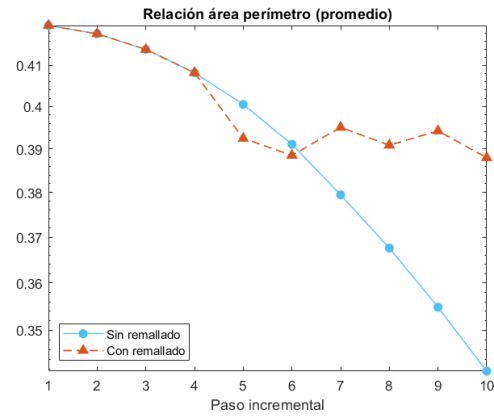
Por otra parte en la figura 4.26(c) se ve como cambia la distancia punto a punto normalizada. En el primer remallado la malla nueva presenta un mayor valor que la malla original debido a que aquellas celdas que empiezan a presentar una forma más alargada son reemplazadas por celdas con vértices más separados entre sí. Al igual que en caso de la viga en voladizo, a medida que las celdas cuadriláteras pasan a ser hexagonales la distancia punto a punto normalizada promedio comienza a decrecer. Respecto a la evolución del radio circunscrito promedio, figura 4.26(d), se ve como el valor en la malla original aumenta, mientras que en las mallas nuevas disminuye de forma oscilante. Esto se debe a que, dada la deformación del cuerpo, algunos nodos tienden a concentrarse, por lo que el remallador genera celdas más pequeñas, mientras que en la malla original, al poseer celdas fijas, estas no tienen más opción que adoptar una forma más alargada y con ello aumentar su radio circunscrito.

En la figura 4.27 se puede ver como el indicador  $\varrho$  tiene un comportamiento similar al de la distancia punto a punto normalizada. Además de esto, se puede ver como a partir del paso 5 todas las mallas generadas por el remallador poseen un valor  $\varrho$  mayor al de la malla inicial, figura 4.22, a pesar de poseer una celda deformada y no convexa. Esto nos dice que la influencia de la no convexidad de una celda ( $\varrho_1$ ) es mitigado por la disminución en la cantidad de lados presentes en la malla ( $\varrho_3$ ) y el aumento en la distancia entre vértices ( $\varrho_2$ ).

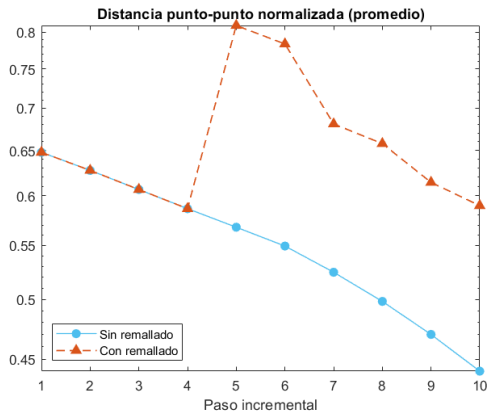




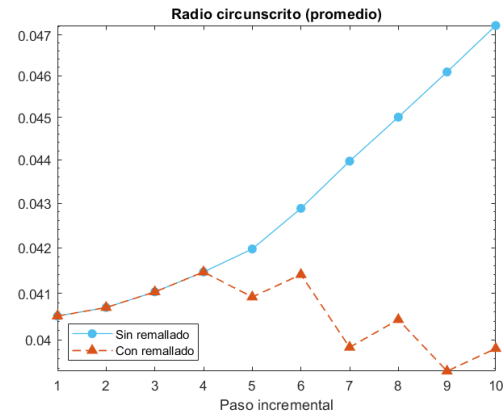
(a) Lado más pequeño



(b) relación área/perímetro



(c) Distancia punto a punto normalizada



(d) Radio circunscrito

Figura 4.26: Características geométricas.

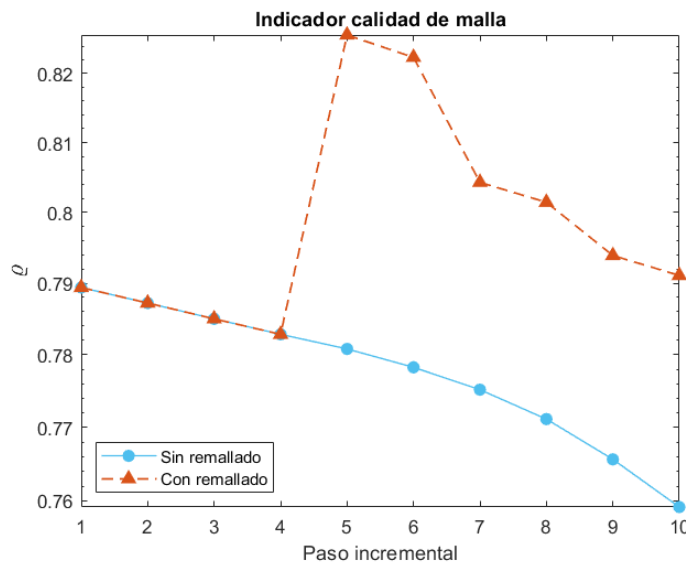


Figura 4.27: Calidad de malla a lo largo de la deformación.

## 4.5. VEMLab: Viga en tracción

Se resuelve el problema de la viga en tracción, utilizando las mismas condiciones de contorno, carga y características del material descritas en la sección 4.2. Se utiliza también la misma malla inicial, figura 4.4, adaptada al funcionamiento de VEMLab, es decir, sin los puntos centrales y considerando los vértices como nodos. El valor de la relación área/perímetro bajo el cual comienza el remallado se fija en 0.3 y el problema es resuelto en 8 pasos incrementales.

En la figura 4.28 se muestra la deformación del cuerpo a lo largo de los pasos incrementales. En el lado izquierdo se marcan en rojo los elementos con un APR menor a 0.3 y los elementos que los rodean, mientras que en el lado derecho están marcados con verde los polígonos generados por DELFIN. Los elementos de borde son aquellos con una relación área/perímetro más baja, esto debido a que su forma es la mitad de las celdas internas, por lo que su forma alargada está más acentuada y por ello son menos compactos. Hay que notar que la mayoría de los elementos de bordes se mantienen igual luego de ser aplicado el remallado, lo que implica que el APR de dichos elementos no se modifica y con ello seguirán siendo seleccionados en los pasos siguientes. Que la mayoría de los elementos mantenga su forma antes y después del remallado se debe al hecho que la nube de nodos seleccionada sigue teniendo una distribución relativamente uniforme, de este modo los vacíos o zonas con menos densidad de puntos identificadas por DELFIN corresponden a los polígonos ya definidos.

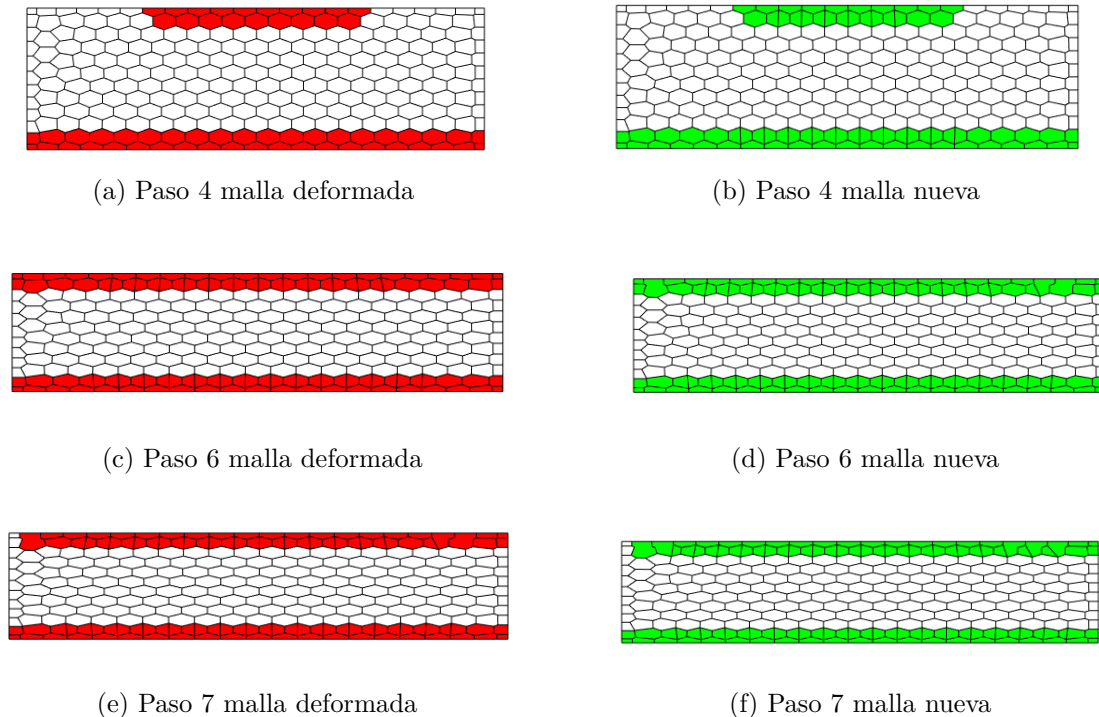


Figura 4.28: Deformación a lo largo de pasos incrementales.

En la figura 4.29 se muestra la evolución de métricas geométricas a lo largo de la deformación. A diferencia del mallador diseñado para NIVED, no hay mejoras respecto al largo del lado más pequeño de la malla, tanto la malla original como las mallas nuevas presentan

el mismo valor a lo largo de todo el problema. La relación área/perímetro presenta una leve baja luego del primer remallado, como ya se explicó en uno de los problemas anteriores, esto se debe a que este indicador disminuye cuando el polígono tiende a tener una forma regular y la cantidad de lados que lo forman disminuye. Como se ve en la figura 4.28(b), varios de los elementos que originalmente eran hexagonales son divididos en los elementos cuadriláteros, lo que genera la baja en el APR. Conforme se deforma el cuerpo el valor de este indicador disminuye a una tasa menor que la malla original, lo cual se puede explicar a la unión entre celdas (polígonos con mayor cantidad de lados) y a la compensación de dividir elementos hexagonales cada vez más irregulares por elementos con menos lados pero más regulares. En el gráfico de la figura 4.29(d) se ve como el radio circunscrito promedio disminuye luego del remallado, nuevamente, esto se debe a la división de elementos en dos, ya que con ello se obtienen dos elementos con radios más pequeños, en vez de un elemento con un radio más largo. La distancia punto a punto normalizada está directamente relacionada al radio del circuncírculo del elemento, durante el remallado la distancia entre vértices se mantiene igual, por lo que el aumento en este indicador se debe a la disminución del radio circunscrito promedio.

El indicador de la calidad de malla se puede ver en la figura 4.30. Al igual que en el caso de las métricas vistas en la figura anterior, la disminución de lados por polígono promedio tiene un efecto en el indicador  $\rho$ , especialmente en los pasos 4 y 5, donde muestra una mejora sutil, pero evidente. Por otro lado, a medida que aparecen elementos no convexos el indicador comienza a disminuir.

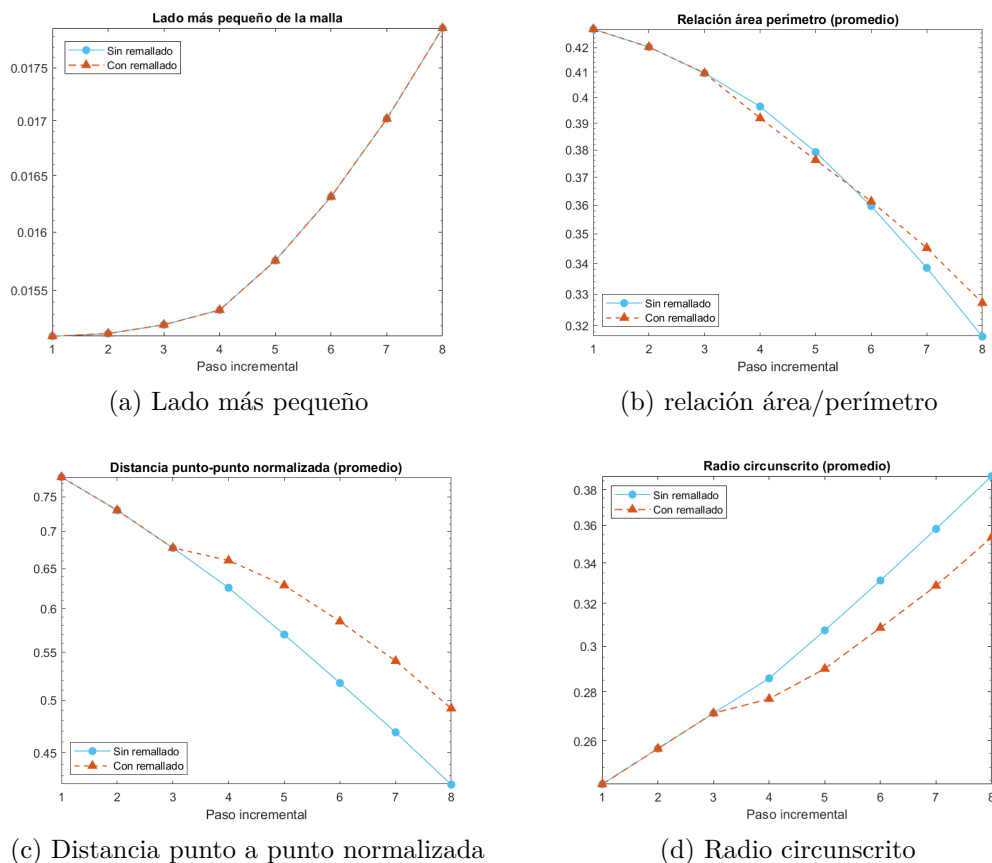


Figura 4.29: Características geométricas.

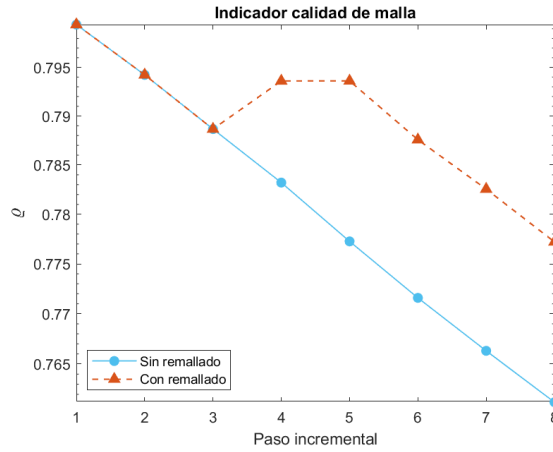


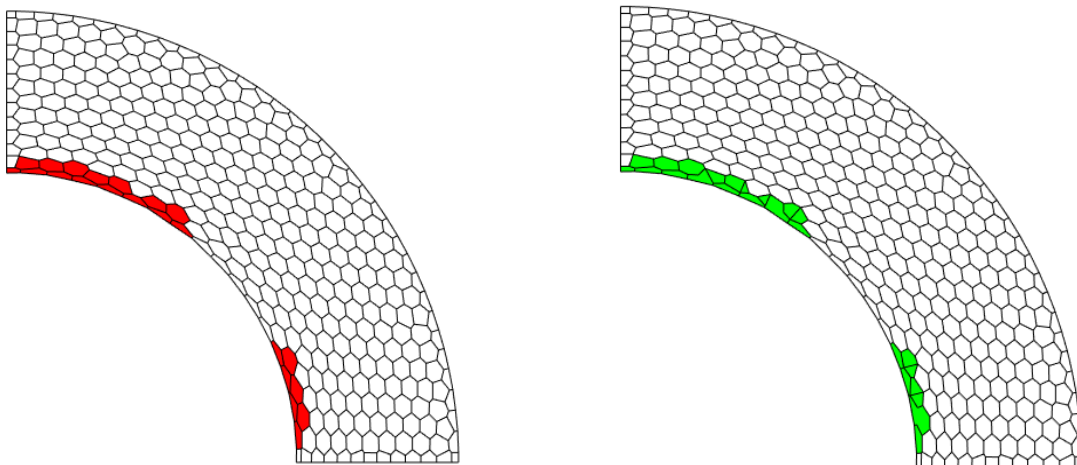
Figura 4.30: Calidad de malla a lo largo de la deformación.

Hay que notar que, a diferencia del mallador desarrollado para NIVED, las métricas en este problema no muestran mejoras significativas y la calidad de las mallas nuevas empeoran al mismo ritmo que la malla original.

## 4.6. VEMLab: Cilindro presurizado

Se resuelve nuevamente el problema descrito en 4.3, al igual en la sección anterior se adapta la malla de la figura 4.13 con tal de hacerla compatible con VEMLab. La carga se divide en 8 pasos incrementales y el valor APR que inicia el remallado es 0.2.

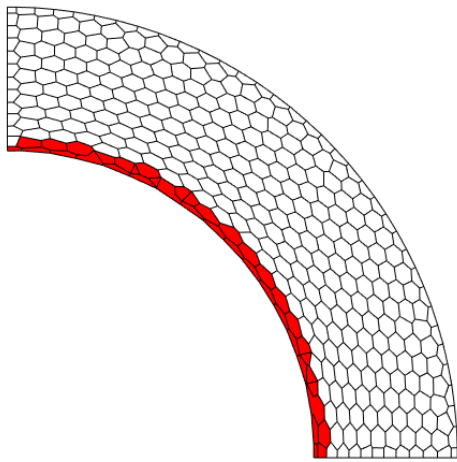
Con esta configuración el remallado se activa en los pasos 5, 6 y 7, como se puede ver en las figuras 4.31 y 4.32. Como era de esperarse los elementos afectados son aquellos ubicados en el radio interior del cilindro.



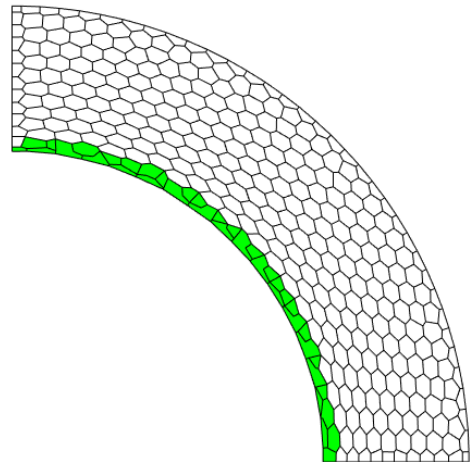
(a) Paso 5 malla deformada

(b) Paso 5 malla nueva

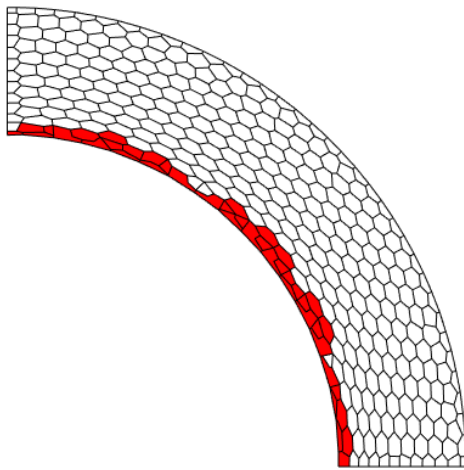
Figura 4.31: Deformación a lo largo de pasos incrementales, primera parte.



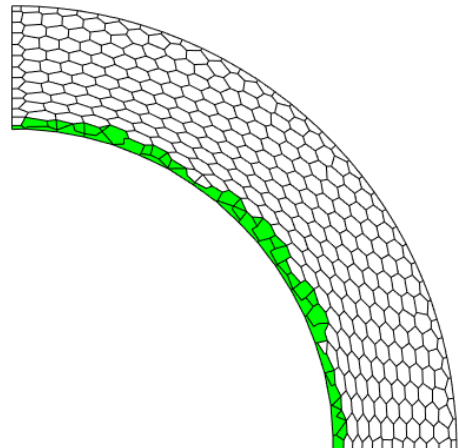
(a) Paso 6 malla deformada



(b) Paso 6 malla nueva



(c) Paso 7 malla deformada

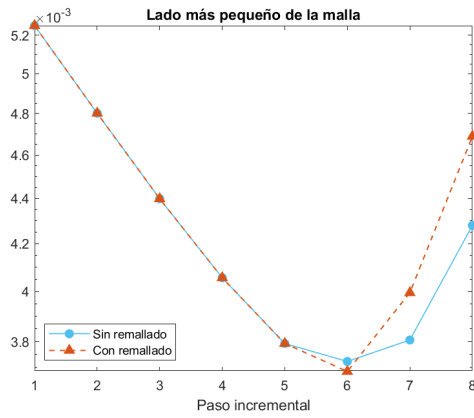


(d) Paso 7 malla nueva

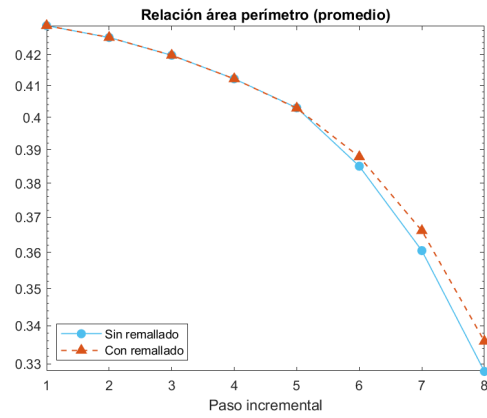
Figura 4.32: Deformación a lo largo de pasos incrementales, segunda parte.

Del mismo modo que ocurre en el problema de la viga, varios de los elementos seleccionados para ser remallados mantienen la misma conectividad, lo que provoca que el remallador siga funcionando en la misma zona a lo largo de todo el problema. Una diferencia que se puede apreciar respecto al problema anterior, es que a partir del paso 6 los elementos del borde agregan nodos que originalmente pertenecían a celdas vecinas, aumentando así su tamaño. En el proceso los elementos afectados van perdiendo su forma regular y se hace más común la aparición de elementos no convexos.

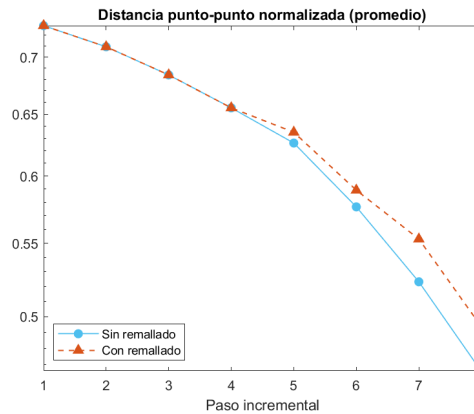
Los resultados de las métricas geométricas se pueden ver en la figura 4.33. A pesar que el remallador genera polígonos altamente irregulares esto no parece afectar de manera negativa las características medidas, de hecho tiende a mejorarlas levemente. Esto no implica necesariamente que los elementos generados por el programa estén particularmente bien condicionados, sino más bien que las celdas de la malla original están tan deformadas que al realizar algún cambio sobre ellas es muy probable que estas mejoren los valores obtenidos en las métricas medidas.



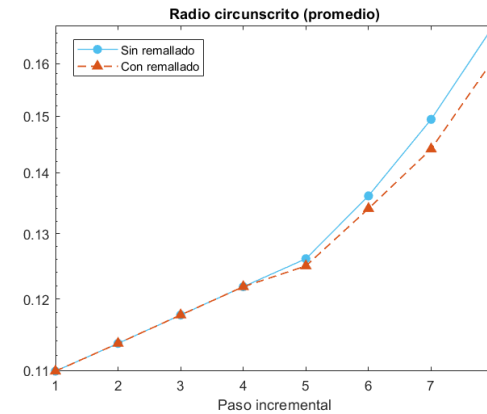
(a) Lado más pequeño



(b) relación área/perímetro



(c) Distancia punto a punto normalizada



(d) Radio circunscrito

Figura 4.33: Características geométricas.

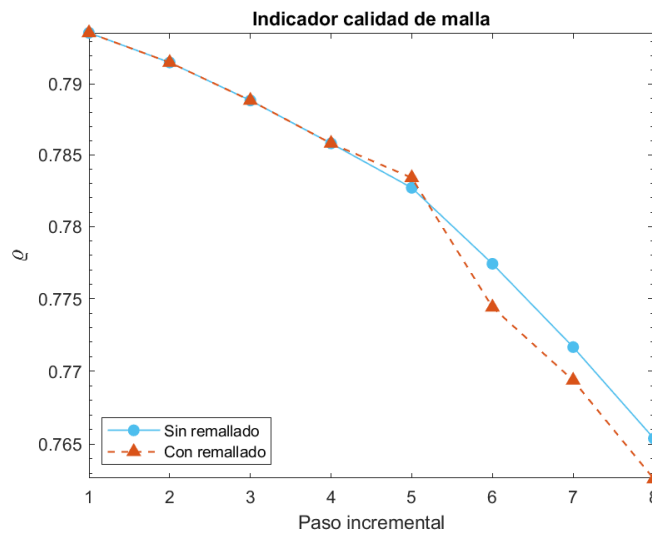
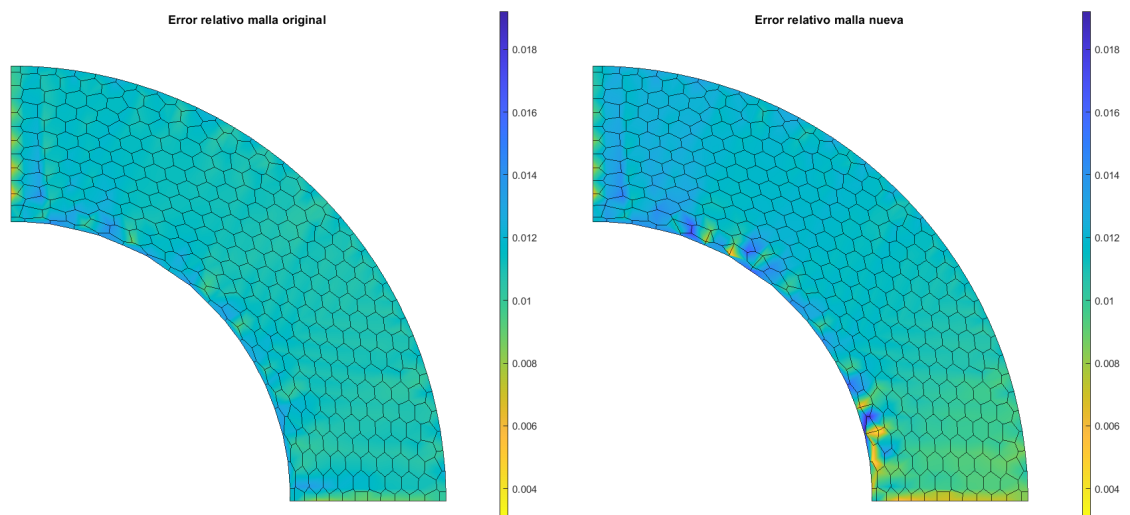


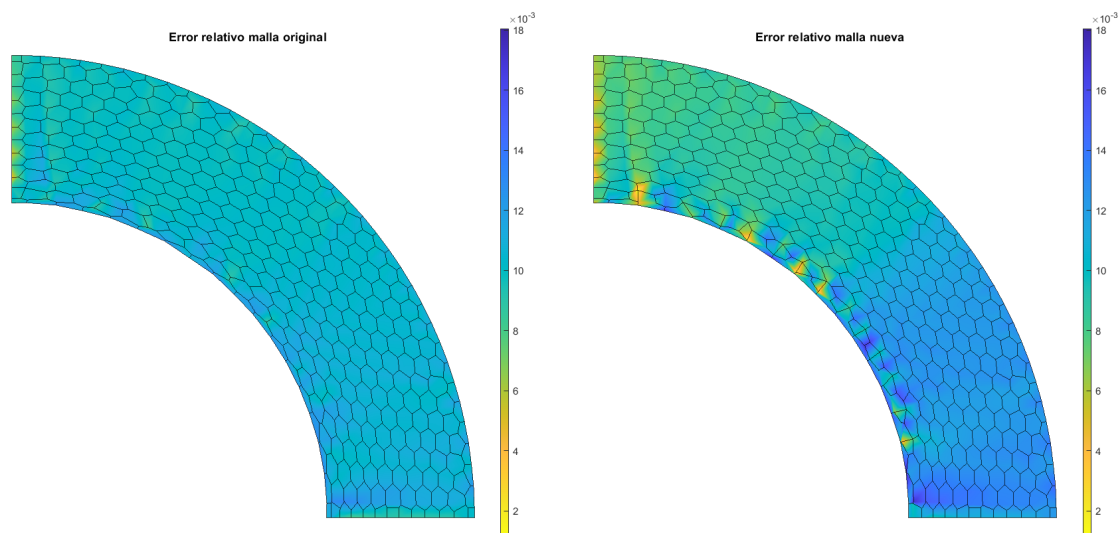
Figura 4.34: Calidad de malla a lo largo de la deformación.

En la figura 4.34 se muestra el cambio del indicador  $\rho$  a lo largo del problema. A diferencia de las métricas vistas en el párrafo anterior este indicador se ve afectado por la aparición de

elementos irregulares, particularmente por los elementos no convexos. En el primer remallado aparecen 3 elementos no convexos, pero también se dividen algunas celdas, disminuyendo el promedio de número de lados por elementos. Esta compensación genera una leve mejora en el paso 5. Por otro lado, en los pasos 6 y 7 la aparición de elementos no convexos se hace más notoria, pudiendo ubicar dichos elementos a lo largo de todo el radio interior, figura 4.32(b) y (d), respectivamente, lo que se traduce en una disminución del indicador  $\varrho$ .



(a) Paso 5.  $L^2$  malla original:  $1.1 \times 10^{-2}$ ;  $L^2$  malla nueva:  $1.1 \times 10^{-2}$



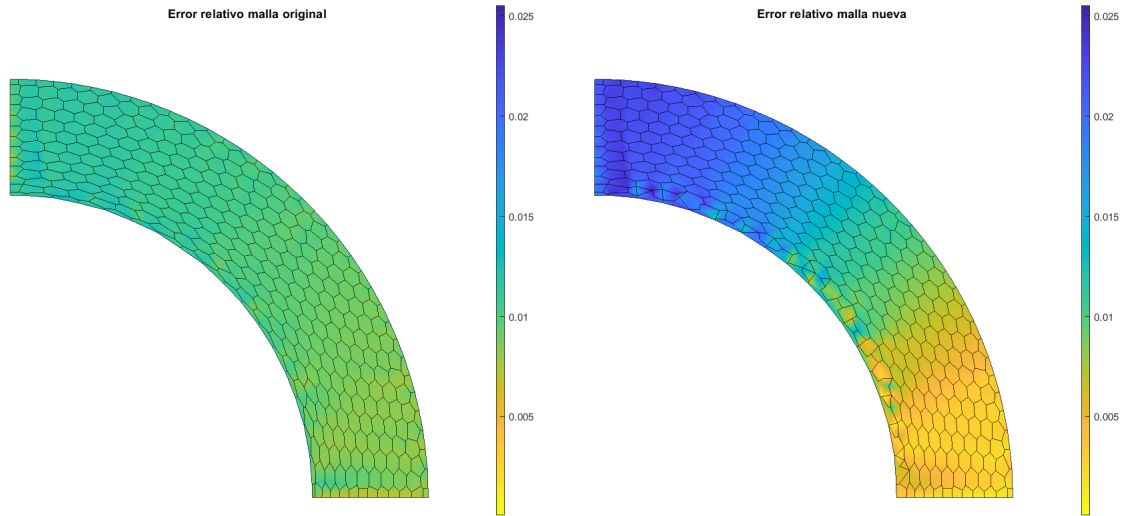
(b) Paso 6.  $L^2$  malla original:  $1.0 \times 10^{-2}$ ;  $L^2$  malla nueva:  $1.1 \times 10^{-2}$

Figura 4.35: Error relativo.

En las figuras 4.35 y 4.36 se muestran los resultados del error relativo de desplazamiento en cada nodo de la malla. Lo primero a tener en cuenta es que VEMLab, a pesar de tener un nivel de error bajo (al rededor del 1%) muestra ser un método menos preciso que NIVED, que presenta errores del orden de 0.3%. Al comparar los resultados del paso número 5 se puede ver que ambas mallas presentan igual norma, pero la malla original presenta una distribución del error más uniforme. La malla generada por el remallador presenta errores levemente más bajos en el extremo derecho del cuerpo, además de evidenciar el lugar donde se generaron los nuevos polígonos, ya que en esas zonas se encuentran los errores máximos



y mínimos. En el paso número 6 se mantiene un nivel de error de desplazamiento similar entre las mallas, sin embargo nuevamente se pueden encontrar en los elementos formados por el remallador los errores más altos y bajos. Por otra parte, una diferencia que se puede apreciar entre ambas mallas es que mientras la malla original mantiene un nivel de error uniforme la malla nueva tiene un nivel de error creciente de izquierda a derecha. Es interesante notar la influencia que tienen los errores máximos y mínimos sobre el resto del dominio, la parte superior del radio interior en la malla nueva presenta una mayor concentración de nodos con error bajo 0.2 %, lo que coincide con la zona que presenta un error promedio más bajo.



(a) Paso 7.  $L^2$  malla original:  $1.0 \times 10^{-2}$ ;  $L^2$  malla nueva:  $1.4 \times 10^{-2}$

Figura 4.36: Error relativo.

Tabla 4.6: Norma  $L^2$

Remallador	Paso 5	Paso 6	Paso 7
No	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-2}$
Si	$1.2 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$

Tabla 4.7: Norma  $H^1$

Remallador	Paso 5	Paso 6	Paso 7
No	$1.6 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$
Si	$1.7 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	$2.1 \times 10^{-2}$

En la figura 4.36 se muestran los errores obtenidos en la malla original y en la malla nueva durante el paso 7. En esta ocasión las diferencias se hacen más evidentes. La malla original mantiene un nivel de error uniforme, aunque levemente menor en el extremo inferior del cuerpo. Contrario a esto, la malla nueva tiene un aspecto estratificado, donde la parte superior presenta errores superiores al de la malla original, mientras que la parte inferior tiene errores inferiores al de la malla original. Como resultado se obtiene un valor de norma



$L^2$  y  $H^1$  superior en la malla nuevo.

Un fenómeno que se logra identificar en los resultados recién expuestos es que se puede alcanzar un mayor nivel de uniformidad en el error a lo largo del dominio cuando la malla utilizada está compuesta por elementos similares entre sí. Por otra parte, la presencia de elementos irregulares o diferentes dentro de la malla tiende a acentuar los resultados a lo largo de todo el dominio, no solo dentro de la zona afectada. Los polígonos generados por el remallador no siguen un patrón de forma, lo que deriva en los distintos niveles de error que estos presentan. Por esta razón resulta difícil predecir cuál será el desempeño de la malla resultante. Respecto a este punto, el indicador  $\varrho$  predijo que las últimas mallas tendrían resultados ligeramente peores que las mallas originales, lo cual se ve reflejado en los resultados de las normas, especialmente en el paso 7. A pesar de ello, vale la pena mencionar que ambos tipos de malla presentan bajos niveles de error. Hay que destacar el hecho que, a diferencia de NIVED, en esta oportunidad la malla original presenta errores de desplazamiento prácticamente idénticos a lo largo del problema, lo que indica que el método completamente virtual tolera de mejor manera la deformación.

## 4.7. VEMLab: Problema estampado

A continuación se resuelve el problema de estampado utilizando el programa VEMLab. A diferencia del problema visto en la sección 4.4, el cuerpo consiste en un rectángulo de  $2 \times 1$  in, como se ve en la figura 4.37(a), con un módulo de Young  $E_Y = 1000$  psi y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.25$ . El bloque presenta un desplazamiento de 0.5 in y la simulación se lleva a cabo en 5 pasos incrementales. Nuevamente se aprovecha la simetría del cuerpo y se resuelve el problema en la mitad de la geometría, figura 4.37(b). En esta oportunidad el valor APR que inicia el remallado se fija en 0, esto quiere decir que se generarán nuevos elementos solo cuando haya elementos que se intersequen.

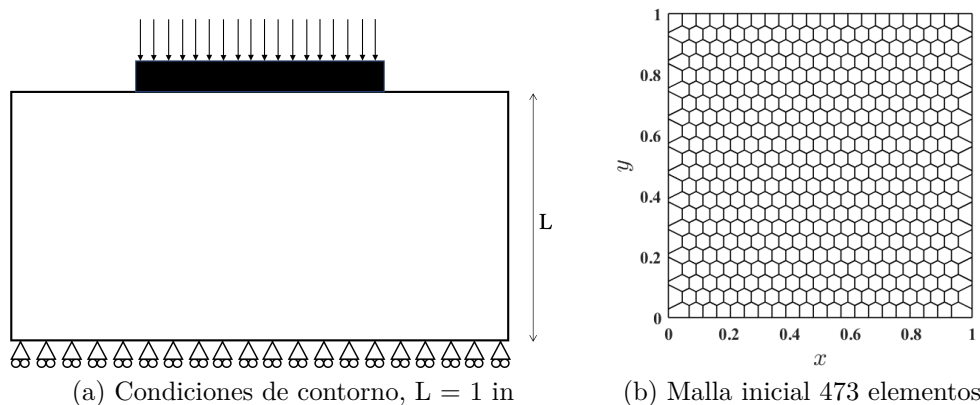
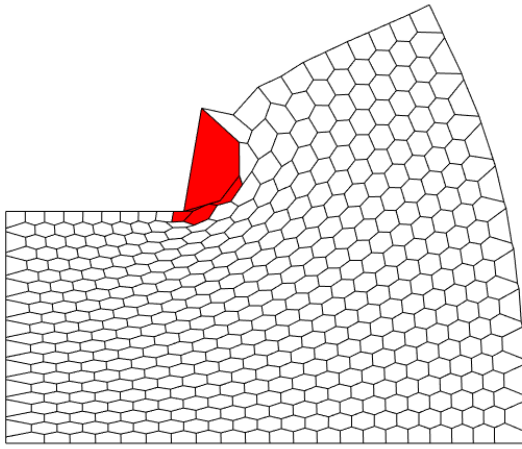
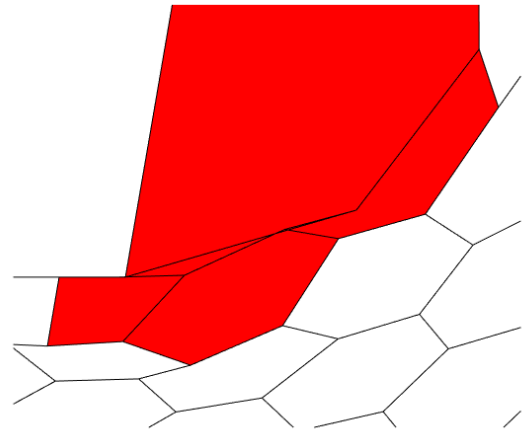


Figura 4.37: Problema de estampado

Al final del paso número 4 la malla presenta un solapamiento de elementos cerca de una de las esquinas desplazadas, como se ve en la figura 4.38. El remallador identifica el elemento central de esta superposición y los elementos que lo rodean, marcados por el color rojo en la figura de abajo. Se elimina la conectividad de celdas involucradas y se forman nuevos polígonos a partir de los nodos seleccionados, como se aprecia en la figura 4.39.

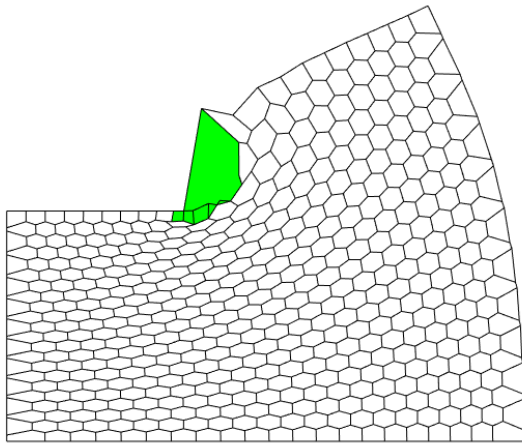


(a) Paso número 4

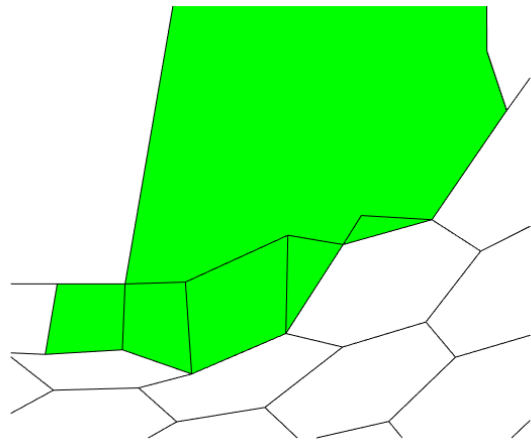


(b) Paso número 4 acercamiento

Figura 4.38: Malla deformada



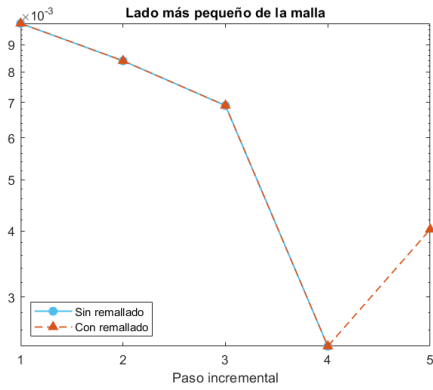
(a) Paso número 4



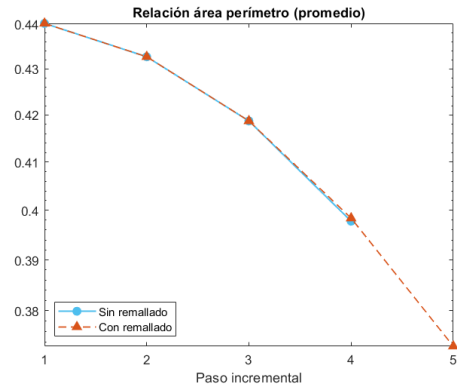
(b) Paso número 4 acercamiento

Figura 4.39: Malla nueva

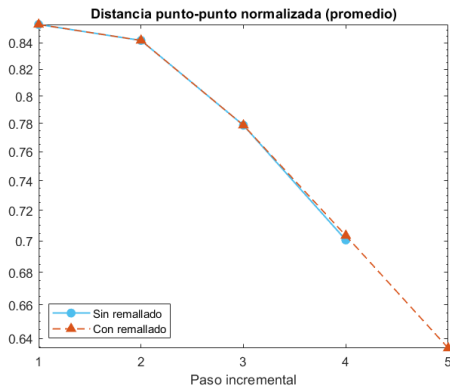
Los nuevos elementos generados no presentan patrones claros de forma, tamaño o cantidad de lados, como se evidenció en el problema pasado. Esto se debe a que el algoritmo utilizado para su construcción no busca la formación de polígonos regulares, si no más bien, encapsular las zonas que presenten una menor densidad nodal.



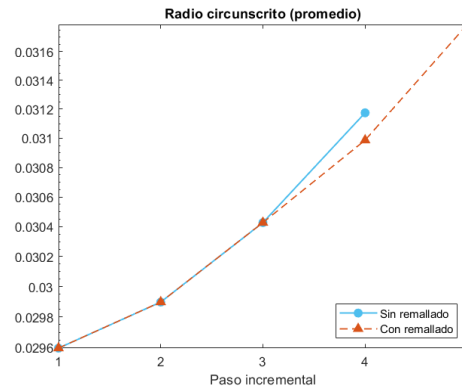
(a) Lado más pequeño



(b) relación área/perímetro



(c) Distancia punto a punto normalizada



(d) Radio circunscrito

Figura 4.40: Características geométricas.

En la figura 4.40 se muestran los resultados de las distintas características geométricas estudiadas. Lo primero a tener en cuenta es que sin el remallado el método no es capaz de terminar la simulación, ya que al existir solapamiento la zona ubicada en la intersección de los elementos debe ser re-calculada durante la integración numérica y el programa no es compatible con dicho escenario. Lo segundo a notar, es que si bien el remallador soluciona el solapamiento y permite concluir el problema, no presenta mejoras en la calidad de la malla.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis fue desarrollado un sistema de remallado para un método sin malla con esquema de integración nodal basado en la descomposición del elemento virtual. Las celdas de integración nodal están formadas por polígonos, construidos a su vez a partir de una malla triangular subyacente. Durante el proceso de remallado se mantiene la nube de nodos, con lo cual se evita la transferencia de información entre mallas. El remallador permite al usuario controlar el nivel de deformación tolerado antes de remallar, controlar el largo mínimo en los lados de las celdas nodales y asegurar que los nodos de borde se mantengan dentro de su celda nodal. Se evalúa su desempeño usando métricas de mallado estudiadas y propuestas en la literatura, además de medir el error en problemas con solución analítica conocida. A partir de los resultados obtenidos se puede concluir que:

- Las métricas de mallado son variadas y miden distintos aspectos de la malla. El remallador es capaz de mejorar los resultados en todas las métricas estudiadas, especialmente en altos niveles de deformación.
- Para el problema del cilindro presurizado el remallador muestra mejorar la norma  $L^2$  en niveles de deformación bajos-medios. Cuando la deformación es mayor, el problema con y sin remallado presentan un error de desplazamiento similar.
- El remallador es capaz de adaptarse a los cambios de forma del cuerpo que se llevan a cabo durante la deformación, manteniendo a los nodos dentro de sus celdas representativas.

Adicionalmente, se desarrolla un sistema de remallado para el método del elemento virtual, en el cual se actualiza la conectividad entre los nodos manteniendo la posición de estos fija. Este remallador no muestra mejorar la calidad de la malla, e incluso puede obtener mayores niveles de error que la malla deformada. Sin embargo, presenta un gran potencial si se limita su uso a problemas donde existe superposición entre elementos, el cual puede ocurrir al interior del dominio, ya que evita errores de integración numérica y permite concluir simulaciones que, de no ser por el remallador, fallarían.

Con este trabajo queda propuesto el desarrollo de esquemas de solución no lineal para problemas de grandes deformaciones para NIVED y VEMLab, en los cuales forma del cuerpo cambia a lo largo del tiempo.

# Bibliografia

- [1] B. Ahmad, A. Alsaedi, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo. Equivalent projectors for virtual element methods. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(3):376–391, 2013.
- [2] M. Arroyo and M. Ortiz. Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 65:2167–2202, 2006. doi: 10.1002/nme.1534.
- [3] M. Attene, S. Biasotti, S. Bertoluzza, D. Cabiddu, M. Livesu, G. Patanè, M. Pennacchio, D. Prada, and M. Spagnuolo. Benchmarking the geometrical robustness of a virtual element poisson solver. *Mathematics and Computers in Simulation*, 190:1392–1414, 2021.
- [4] L. Beirão da Veiga and G. Vacca. Sharper error estimates for virtual elements and a bubble-enriched version. *arXiv preprint arXiv:2005.12009*, 2020.
- [5] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L. D. Marini, and A. Russo. Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01):199–214, 2013.
- [6] L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, and A. Russo. Stability analysis for the virtual element method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 27(13):2557–2594, 2017.
- [7] S. Beissel and T. Belytschko. Nodal integration of the element-free Galerkin methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139:49–74, 1996.
- [8] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37:229–256, 1994.
- [9] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139:3–47, 1996.
- [10] G. Bourantas, B. F. Zwick, G. R. Joldes, A. Wittek, and K. Miller. Simple and robust element-free Galerkin methods with interpolating shape functions for finite deformation elasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 96:284–303, 2021. doi: 10.1016/j.apm.2021.03.007.
- [11] S. C. Brenner and L. Sung. Virtual element methods on meshes with small edges or faces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28(07):1291–1336, 2018.
- [12] S. C. Brenner, Q. Guan, and L. Sung. Some estimates for virtual element methods. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 17(4):553–574, 2017.
- [13] J. S. Chen, C-T. Wu, S. Yoon, and Y. You. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International journal for numerical methods in engineering*,

- 50:435–466, 2001.
- [14] S. Cheng, T. K. Dey, J. Shewchuk, and S. Sahni. *Delaunay mesh generation*. CRC Press Boca Raton, FL, 2013.
  - [15] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, L. D. Marini, and A. Russo. The hitchhiker’s guide to the virtual element method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(8): 1541–1573, 2014. doi: 10.1142/S021820251440003X.
  - [16] C. R. Dohrmann, M. W. Heinstein, J. Jung, S. W. Key, and W. R. Witkowski. Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes. *International journal for numerical methods in engineering*, 47:1549–1568, 2000.
  - [17] J. Dolbow and T. Belytschko. Numerical integration of the Galerkin weak form in mesh-free methods. *Computational Mechanics*, 23:219–230, 1999.
  - [18] S. Fortune. A note on delaunay diagonal flips. *Pattern Recognition Letters*, 14:723–726, 1993.
  - [19] A. Franci, M. Cremonesi, U. Perego, and E. Oñate. A lagrangian nodal integration method for free-surface fluid flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 361:112816, 2020.
  - [20] T. J. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, 2000.
  - [21] G. R. Joldes, H. A. Chowdhury, A. Wittek, B. Doyle, and K. Miller. Modified moving least squares with polynomial bases for scattered data approximation. *Applied Mathematics and Computation*, 266:893–902, 2015. doi: 10.1016/j.amc.2015.05.150.
  - [22] P. Lancaster and K. Salkauska. Surfaces generated by moving least squares method. *Mathematics of computation*, 37:141–158, 1981. doi: 10.2307/2007507.
  - [23] Y. Luo. Dealing with extremely large deformation by nearest-nodes FEM with algorithm for updating element connectivity. *International Journal of Solids and Structures*, 45: 5074–5087, 2008. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.006.
  - [24] Y. Luo. A local multivariate lagrange interpolation method for constructing shape functions. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 26:252–261, 2008. doi: 10.1002/cnm.1149.
  - [25] G. R. Liu. *Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method*. CRC Press, 2nd ed., 2010.
  - [26] T. Most and C. Bucher. A moving least squares weighting function for the element-free Galerkin method which almost fulfills essential boundary conditions. *Structural Engineering and Mechanics*, 21:315–332, 2005.
  - [27] E. Oñate, A. Franci, and J. M. Carbonell. A particle finite element method for analysis of industrial forming processes. *Computational Mechanics*, 54(1):85–107, 2014.
  - [28] A. Ortiz, M. A. Puso, and N. Sukumar. Maximum-entropy mesh free method for incompressible media problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47:572–585, 2011.
  - [29] A. Ortiz-Bernardin, A. Russo, and N. Sukumar. Consistent and stable meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition. *International journal for numerical*

- methods in engineering*, 112(7):655–684, 2017.
- [30] P. Persson and G. Strang. A simple mesh generator in matlab. *Siam Rev*, 46:329–345, 2004.
  - [31] M. A. Puso, J. S. Chen, E. Zywickz, and W. Elmer. Meshfree and finite element nodal integration methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 74: 416–446, 2008.
  - [32] S. Salinas-Fernández, N. Hitschfeld-Kahler, A. Ortiz-Bernardin, and H. Si. Polylla: polygonal meshing algorithm based on terminal-edge regions. *Engineering with Computers*, pages 1–23, 2022.
  - [33] J. Shewchuk. What is a good linear finite element? interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures (preprint). *University of California at Berkeley*, 73:137, 2002.
  - [34] J. R. Shewchuk. Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. In Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag, May 1996. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.
  - [35] H. Si. Detri2, <http://www.wias-berlin.de/people/si/detri2.html> 2020.
  - [36] D. Sieger, P. Alliez, and M. Botsch. Optimizing voronoi diagrams for polygonal finite element computations. In *Proceedings of the 19th international meshing roundtable*, pages 335–350. Springer, 2010.
  - [37] R. Silva-Valenzuela, A. Ortiz-Bernardin, N. Sukumar, E. Artioli, and N. Hitschfeld-Kahler. A nodal integration scheme for meshfree Galerkin methods using the virtual element decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(10):2174–2205, 2020. doi: 10.1002/nme.6304.
  - [38] T. Sorgente, D. Prada, D. Cabiddu, S. Biasotti, G. Patane, M. Pennacchio, S. Bertoluzza, G. Manzini, and M. Spagnuolo. VEM and the mesh. *arXiv preprint arXiv:2103.01614*, 2021.
  - [39] C. Talischi, G. Paulino, A. Pereira, and I. Menezes. Polymesher: a general-purpose mesh generator for polygonal elements written in matlab. *Struct Multidisc Optim*, 45:309–328, 2012.
  - [40] J. Zhao and X. Wang. An algorithm to searching for the kernel of a simple polygon. In *2010 International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM 2010)*, volume 3, pages V3–455. IEEE, 2010.

# Anexo

## Normas

La norma  $L^2$ , utilizada para medir el error global del desplazamiento, se define como:

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{L^2}} = \left( \frac{\sum_E \int_E (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) d\mathbf{x}}{\sum_E \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}} \right)^{1/2}$$

La norma  $H^1$ , utilizada para medir el error energético, se define como:

$$\frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{H^1}}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} = \left( \frac{\sum_E \int_E (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\mathbf{x}}{\sum_E \int_E \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x}} \right)^{1/2}$$

En ambos casos las integrales sobre las celdas  $E$  se realizan por medio de integración numérica.